UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Liara Alves Gentil

AS FUNÇÕES DA GEOMETRIA EM OUTROS CAMPOS DA MATEMÁTICA: UMA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Rio Claro

2020

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Liara Alves Gentil

As funções da Geometria em outros campos da Matemática: uma análise de livros didáticos

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, campus de Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Rúbia Barcelos Amaral Schio

Rio Claro

2020

G338f

Gentil, Liara Alves
As funções da Geometria em outros campos da Matemática : uma análise de livros didáticos / Liara Alves Gentil. -- Rio Claro, 2020
106 f. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientadora: Rúbia Barcelos Amaral Schio

1. Geometria. 2. Livros didáticos. 3. Ensino fundamental. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Liara Alves Gentil

As funções da Geometria em outros campos da Matemática: uma análise de livros didáticos

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Rúbia Barcelos Amaral Schio
Unesp/Rio Claro (SP) – Orientadora

Prof. Dr. Lucas Carato Mazzi
Unesp/Rio Claro (SP)

Profa. Dra. Cláudia Regina Flores
UFSC/Florianópolis (SC)

RESULTADO: APROVADA

Rio Claro – SP, 06 de maio de 2020

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por estar comigo em todos os momentos, capacitando-me nessa nova fase e cuidando de cada detalhe. Faço minhas as palavras do salmista “Bendiga o Senhor a minha alma! Não se esqueça de nenhuma de suas bênçãos!” (Salmos 103:2).

Agradeço à minha família, que me apoiou e me incentivou durante toda minha trajetória acadêmica, principalmente meus pais, Laércio e Ivani, a quem dedico esta dissertação.

Agradeço à Rúbia, minha orientadora, pelas inúmeras reuniões de orientação, pelas conversas e conselhos que me ajudaram nas horas mais complicadas, cooperando na construção deste trabalho.

Agradeço aos professores Lucas Carato Mazzi e Cláudia Regina Flores por todas as sugestões que contribuíram para a melhora deste trabalho.

Agradeço a todos os meus amigos, membros do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM), por contribuírem com ideias, sugestões e questionamentos que me ajudaram a definir os objetivos desta dissertação. Em especial, agradeço à Kaoma por me ouvir e partilhar as dificuldades que surgiram ao longo do caminho, assim como por compartir as conquistas.

Agradeço a todos os meus amigos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática pelas conversas de incentivo em momentos de incertezas e pelos diversos cafés regados a risos e muita satisfação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho é investigar as funções que a Geometria desempenha em campos não-geométricos em livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático 2017. A partir dele foram delineados dois objetivos específicos, a saber: analisar como os conteúdos de Geometria estão estruturados (introdução, abordagem e desenvolvimento) em capítulos não-geométricos; mapear, em capítulos não-geométricos, as tarefas que fazem uso da Geometria em seus enunciados. A base teórica que fundamentou esta pesquisa foram os estudos de Flores (2003, 2010, 2013) acerca da cultura visual, entendida como as concepções inerentes à cultura de uma sociedade, manifestas em sua forma visual. Dentro da cultura visual, foi assumido o termo visualidade, definido como os discursos que informam sobre o modo como nós vemos. Pautada numa abordagem qualitativa, foram analisadas, nesta dissertação, três coleções de livros didáticos, totalizando 12 obras. Todo o conteúdo de Geometria que permeava os capítulos de Álgebra, Aritmética, Probabilidade e Estatística foi classificado de acordo com as funções que exerce, a saber: função ilustrativa, formativa, explicativa, demonstrativa, representativa e imagem mental. Resultados reforçam o caráter histórico e cultural da Geometria ao pontuar o uso de figuras geométricas como parte do discurso visual da sala de aula. Em alguns conteúdos de Álgebra e Aritmética, a Geometria se estabeleceu como prática visual que compõe os modos de olhar dos alunos da Educação Básica. Nesse sentido, é possível afirmar que a Geometria e as figuras geométricas são articuladas aos outros campos da Matemática com o propósito de favorecer a aprendizagem. Por diversas vezes, a Geometria é inserida, principalmente nos campos Álgebra e Aritmética, como uma tentativa de facilitar o ensino de alguns conceitos abstratos, ilustrando-os por meio de figuras geométricas. Também foi possível observar que há um processo de "desgeometrização", ou seja, há uma tendência em diminuir a quantidade de figuras geométricas em função do rigor algébrico.

Palavras-chave: Cultura visual. Visualidade. Anos Finais do Ensino Fundamental. Desgeometrização.

ABSTRACT

The main goal of this paper is to investigate the functions Geometry performs in non-geometric fields in textbooks of the last years of Elementary School, approved by the National Textbook Program 2017. From it, two specific objectives were outlined: to analyze how geometry contents are structured (introduction, approach and development) in non-geometric chapters; to map, in non-geometric chapters, the tasks that make use of geometry in their tasks. The theoretical basis that underpinted this research was Flores' studies (2003, 2010, 2013) about visual culture, understood as the conceptions inherent to the culture of a society, manifested in its visual form. Within the visual culture, the term visuality was assumed, defined as the discourses that inform us about the way we see. Based on a qualitative approach, three collections of textbooks were analyzed in this research, totaling 12 books. All the content of Geometry that permeated the chapters of Algebra, Arithmetic, Probability and Statistics was classified according to the functions it performs, namely: illustrative, formative, explanatory, demonstrative, representative and mental image function. Results reinforce the historical and cultural character of Geometry by highlighting the use of geometric figures as part of the visual discourse of the classroom. In some contents of Algebra and Arithmetic, Geometry has established itself as a visual practice that composes the ways students of basic education look at it. Therefore, it is possible to affirm that Geometry and geometric figures are linked to other fields of Mathematics with the purpose of favoring learning. Geometry is inserted several times, mainly in Algebra and Arithmetic fields, as an attempt to facilitate teaching of some abstract concepts, illustrating them by geometric figures. Also, it was observed that there is a process of “degeometrization”, meaning, there is a tendency to decrease the amount of geometric figures due to algebraic rigor.

Key words: Visual culture. Visuality. Last Years of Elementary School. Degeometrization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Coleção Matemática Bianchini.....40
Figura 2 - Coleção Projeto Teláris – Matemática.....42
Figura 3 - Coleção Matemática: Compreensão e Prática.....44
Figura 4 - Saltos na reta numérica.....53
Figura 5 – Multiplicação de números naturais.....54
Figura 6 - Propriedade distributiva.....55
Figura 7 – Potência de expoente 3.....56
Figura 8 - Potências de expoente 2.....57
Figura 9 - Raiz quadrada.....58
Figura 10 - Fatores de um número.....59
Figura 11 - Frações equivalentes.....60
Figura 12 - Reta numerada.....61
Figura 13 - Saltos na reta numérica para operações com frações.....62
Figura 14 - Números decimais e material dourado.....63
Figura 15 - Correspondência entre números decimais e pontos da reta.....64
Figura 16 - Marcação de pontos no plano cartesiano.....65
Figura 17 - Divisão de um segmento em partes iguais.....67
Figura 18 - Sequência de números pares ao quadrado.....68
Figura 19 - Diferença entre dois quadrados de números pares consecutivos.....68
Figura 20 - Área e perímetro de um paralelepípedo planificado.....69
Figura 21 - Enunciado de tarefa com imagem.....70
Figura 22 - Enunciado de tarefa sem imagem.....70
Figura 23 - Desigualdade triangular.....71
Figura 24 - Sistema de equações.....72
Figura 25 - Construção de gráfico.....72
Figura 26 - Propriedade do triângulo retângulo.....74
Figura 27 - Justificativa da propriedade do triângulo retângulo.....75
Figura 28- Números irracionais e triângulos retângulos.....76
Figura 29 - Comprimento de circunferência.....77
Figura 30 - Diagonal do quadrado.....78
Figura 31 - Representação do número $\sqrt{2}$ na reta real.....79

Figura 32 - Diagonal do quadrado..80
Figura 33 - Tangram e monômios..81
Figura 34 - Área das molduras e monômios...81
Figura 35 - Diagonais de polígonos convexos...82
Figura 36 - Demonstração geométrica do trinômio quadrado perfeito....................................83
Figura 37 - Cubo da soma de dois termos..84
Figura 38 – Fatoração...85
Figura 39 - Frações algébricas..86
Figura 40 – Sistema possível e determinado..87
Figura 41 – Sistema possível e indeterminado e sistema impossível.......................................88
Figura 42 - Sistema de equações..89
Figura 43 - Representações geométricas das soluções de uma equação..................................89
Figura 44 - Números irracionais...90
Figura 45 - Questões da tarefa retratada na figura 44..90
Figura 46 - Raiz quadrada...92
Figura 47 - Exemplo de equação do 2º grau...93
Figura 48 - Área determinada por uma equação do 2º grau...94
Figura 49 - Representação geométrica do trinômio quadrado perfeito....................................95
Figura 50 - Crescimento e decrescimento de função...97
Figura 51 - Ponto de máximo de uma função quadrática..98
Figura 52 - Probabilidade geométrica..99

LISTA DE QUADROS, TABELAS E GRÁFICOS

Quadro 1 - Objetos de conhecimento..47
Quadro 2 - Tabulação dos capítulos por campos da Matemática...49
Quadro 3 - Ficha catalográfica...49
Tabela 1 - Quantidade de tarefas de Geometria por campo...50
Gráfico 1 - Distribuição dos campos matemáticos por volume da coleção Matemática Bianchini..41
Gráfico 2 - Distribuição dos campos matemáticos por volume na coleção Projeto Teláris.....43
Gráfico 3 - Distribuição dos campos matemáticos por volume da coleção Matemática: Compreensão e Prática...45

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

APEC – Asia-Pacific Economic Cooperation

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

ECT – Empresa Brasileira de Correios e Telégrafos

FHC - Fernando Henrique Cardoso

FNDE – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação

GPIMEM – Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática

ICME – International Congress on Mathematics Education

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira

MEC – Ministério da Educação

OED – Objetos Educacionais Digitais

PNLD – Programa Nacional do Livro e do Material Didático

SEF – Secretaria da Educação Fundamental

SUMÁRIO

1 Introdução 13
2 Capítulo 1: Livro Didático 21
2.1 Uma breve história sobre a criação do PNLD 21
2.2 Uso do livro didático na sala de aula 25
3 Capítulo 2: Cultura Visual, Visualidade e Figuras Geométricas 28
3.1 Da visualização à visualidade 28
3.2 As figuras geométricas no ensino de Matemática 34
4 Capítulo 3: Caminhos da Pesquisa 38
4.1 Uma investigação baseada na abordagem qualitativa 38
4.2 Os objetos de pesquisa 39
4.2.1 Matemática Bianchini 40
4.2.2 Projeto Teláris 42
4.2.3 Matemática: Compreensão e Prática 44
4.2.4 Semelhanças entre as coleções 45
4.3 Produção e organização dos dados 46
5 Capítulo 4: Análise dos Dados 52
5.1 Livros Didáticos do 6° Ano 52
5.2 Livros Didáticos do 7° Ano 64
5.3 Livros Didáticos do 8º ano 73
5.4 Livros Didáticos do 9º ano 89
6 Considerações Finais 100
Referências 103

1 INTRODUÇÃO

Decidi iniciar contando um pouco sobre meu percurso formativo, pois acredito que a visão que tenho hoje sobre Educação Matemática foi influenciada por educadores que participaram da minha formação. Reconheço que essa visão está entrelaçada com a pesquisa aqui apresentada, desde a escolha do tema, dos objetivos, até as considerações finais. Em vista disso, abro essa introdução com minha trajetória na Educação Básica.

Durante todo o Ensino Básico, fui aluna de escola pública no município de Rio Claro - SP. Tive alguns professores que me marcaram por me acompanharem de perto e sempre me incentivarem a ir mais longe. Hoje, eu os tomo como exemplo para minha prática. No Ensino Médio, por influência de um professor de Matemática, decidi cursar Licenciatura em Matemática. Em 2011, fui aprovada na Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP) – campus Rio Claro.

No primeiro ano de graduação, surpreendi-me com uma Matemática diferente daquela ensinada na Educação Básica. A formalidade, rigor e demonstração de resultados advindos de axiomas e definições eram novidades para mim. Dentre todas as disciplinas cursadas no primeiro ano, Geometria Euclidiana Plana me chamou a atenção. Talvez o gostar de Geometria estivesse relacionado com a maneira com que a professora conduzia as aulas, com o sentar em grupos para discutir e demonstrar teoremas e com a agradável sensação que surgia ao final de cada demonstração realizada.

Meu primeiro contato com a pesquisa acadêmica foi em 2012, por meio de uma iniciação científica sobre Teoria da Medida. Os estudos feitos giravam em torno de conhecer como o cálculo de integrais era realizado por matemáticos como Pierre de Fermat, John Wallis, Augustin-Louis Cauchy, Henri Lebesgue e Émile Borel. Trabalhar com essa temática foi relevante para minha formação, no sentido de conhecer as pesquisas no âmbito da Matemática Pura, além de travar contato com diferentes teorias de integração (para além da integral de Riemann, estudada na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral).

Em 2014, já no quarto ano de graduação, tive a oportunidade de participar do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID). À época, o PIBID tinha parceria com uma Escola de Ensino Integral da cidade de Rio Claro. Como membro do grupo de bolsistas do referido Programa, participava de diversas práticas, realizadas tanto em sala de aula quanto fora dela, por meio das quais a Matemática era abordada sob a forma de jogos e brincadeiras. Foi uma experiência rica no sentido de elaborar atividades pensando na

Matemática que seria apresentada aos alunos, bem como na metodologia de ensino utilizada para tal. Foi essa vivência como integrante do grupo do PIBID que me levou a considerar um mestrado em Educação Matemática.

Licenciada e trabalhando como professora do Estado de São Paulo, por dois anos, cursei algumas disciplinas do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática (PPGEM) como aluna especial. Nesse tempo, sempre tive em mente trabalhar com Geometria. Por essa razão, procurei a professora Rúbia, pois sabia que seus projetos de pesquisa abarcavam essa área e, em nossa conversa, ela me apresentou seus estudos sobre a presença da Geometria em livros didáticos. Achei interessante a ideia de trabalhar com esses dois temas, visto que, durante o tempo em que atuei como professora do Ensino Básico, sempre usei os livros fornecidos pelo governo, porém nunca participei do processo de escolha desse material. Comecei a refletir sobre o que eu, como professora, consideraria um bom material didático[1]. Foi então que escrevi um projeto de pesquisa relacionando esses dois temas e, em 2018, fui aprovada no PPGEM.

Ao longo desses dois anos de pesquisa, as ideias foram lapidadas, os objetivos afunilados e a pergunta já não é mais a mesma, afinal, como bem disse Goldenberg (2004), a pesquisa científica exige flexibilidade, adaptação e correção de seus instrumentos durante todo o processo de estudo. Do projeto original (aquele submetido à seleção do Programa), permanecem os dois temas centrais: a Geometria e os livros didáticos.

Pesquisar a Geometria nos livros didáticos significa olhar para um campo com uma longa trajetória histórica, que está em constante movimento, sendo reelaborado com o passar dos anos. Para Valente (2008), os livros didáticos estão atrelados ao trajeto histórico da Educação Matemática. O autor apresenta os primeiros materiais didáticos de Matemática escritos no Brasil: *Exame de Artilheiros* e *Exame de Bombeiros*, datados de 1744 e 1748, respectivamente, e ainda conjectura que talvez “a matemática se constitua na disciplina que mais tem sua trajetória histórica ligada aos livros didáticos” (VALENTE, 2008, p. 141).

Silva e Valente (2014) apresentam um panorama sobre o ensino de Geometria no Brasil. Os autores cobrem um período de quase 200 anos, partindo da independência do país até os dias atuais, mostrando que a Geometria sempre esteve presente nas discussões sobre Educação. Nos primeiros anos escolares do século XIX, a prioridade estava no caráter prático desse campo matemático, para que o mesmo pudesse ser aplicado na agrimensura. Um novo movimento surgiu por volta de 1830 e o caráter prático transformou-se no desenho linear,

[1] Os fatores que diferenciam o livro didático do material didático não influenciaram na análise dos dados, por esse motivo, considero tais termos sinônimos.

cujo foco estava em desenhar linhas à mão livre. Já no século XX, percorrem-se os caminhos do Movimento da Matemática Moderna, no qual o ensino de Geometria era feito a partir das noções topológicas de espaço, até chegar à Geometria que temos hoje, cuja atenção está nas figuras geométricas e suas propriedades. As mudanças ocorridas ao longo desses anos chegavam e chegam às salas de aula por meio dos livros didáticos (ou cartilhas) que até hoje são tidos como tradutores do currículo oficial.

Por ser um material acessível, estar presente nas salas de aula e ser considerado um guia para o trabalho pedagógico do professor, os livros didáticos vêm despertando o interesse de muitos pesquisadores (BITTENCOURT, 2004). Com objetivo de apresentar um panorama do estudo destes materiais, Fan (2013) analisou perguntas de pesquisas internacionais que envolviam o livro didático de Matemática. As perguntas foram coletadas a partir de trabalhos apresentados no 10th International Congress on Mathematics Education (ICME-10), ICME-11 e 5th Asia-Pacific Economic Cooperation (APEC). O autor assinala que a investigação com material didático está numa fase inicial de desenvolvimento e, portanto, ainda há escassez de quadro teórico e métodos de pesquisa. Nos trabalhos examinados, averiguou-se uma grande quantidade de produções com foco em análise do conteúdo e comparação de livros.

Ainda que o autor aponte o crescente número de pesquisas cujo foco está na análise de materiais didáticos, é importante reiterar a relevância desse tipo de estudo pelos motivos já citados anteriormente, a saber, aqueles relacionados ao fato de o livro didático ser entendido como balizador da Educação Básica. Isso porque os livros são uma das possibilidades de acesso dos pesquisadores à Matemática ensinada na escola básica. Trazer à tona uma discussão sobre essa Matemática se torna importante para oferecer avanços ao seu ensino.

Sendo assim, realizei buscas em Bases de Teses e Dissertações brasileiras (CAPES e Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações), bem como em Portais de Periódicos para fazer um levantamento bibliográfico com a finalidade de encontrar pesquisas com os temas “Geometria”, “livros didáticos” e “Anos Finais do Ensino Fundamental”. Posto isso, apresento um breve resumo das pesquisas encontradas, a saber, Amaral e Hollebrands (2017), Fonseca (2013), Santos, Pereira Filho e Luna (2016), Godoy (2016), Costa e Santos (2018), Maciel, Rêgo e Carlos (2017) e Kupplel (2012).

Amaral e Hollebrands (2017), além de examinar o conteúdo de livros didáticos, fizeram uma comparação entre tarefas de semelhança em livros do Brasil e dos Estados Unidos, analisando três obras de cada país. Os livros do Brasil eram destinados ao 9º ano e os livros dos Estados Unidos ao 9º e 10º anos[2]. Primeiramente, as autoras olharam para as características físicas de cada obra; em seguida, analisaram as oportunidades de aprendizagem (opportunity to learn) em tarefas contextualizadas e, por último, estudaram a relação entre tarefas com alta demanda cognitiva e contextualização. Todas as tarefas de semelhança foram classificadas de acordo com o alto ou baixo nível de demanda cognitiva.

São consideradas de baixa demanda cognitiva tarefas que requerem dos alunos reprodução de um processo já exemplificado ou então trabalham com repetição, no sentido de seguir sempre o mesmo modelo. Já uma tarefa que requer do aluno um novo modo de resolvê-la por aplicar o conteúdo de forma diferente do que já foi feito anteriormente é considerada de alto nível de demanda cognitiva.

Depois de feita a classificação, as autoras focaram no contexto das tarefas. Elas observaram se o contexto era real ou imaginário, se as informações dadas eram supérfluas ou se estava faltando alguma. Por fim, as autoras concluíram que são poucas as tarefas que fazem uso de contextos reais e trabalham com um alto nível de demanda cognitiva. Entretanto, os professores podem usar as que são de contexto imaginário para fazer uma discussão crítica com os alunos e também podem se valer de diferentes estratégias de ensino para modificar uma tarefa de baixo nível e torná-la de alto nível de demanda cognitiva.

Fonseca (2013) também analisou a abordagem do conceito de simetria em livros didáticos do Ensino Fundamental a partir do estudo de quatro coleções, utilizadas do 1º ao 9º ano. O autor adotou um modelo matemático como suporte teórico, em que é observada a ação de um grupo de isometrias sobre um plano euclidiano e a invariância de figuras geométricas no que diz respeito a tais isometrias. Constatou a predominância da simetria de reflexão, quase ausência das isometrias no plano e ambiguidade de conceitos, como por exemplo, figura geométrica simétrica e figura geométrica simétrica a outra figura. O autor ainda ressaltou que parece não haver um planejamento didático ao longo dos nove volumes de cada uma das coleções analisadas, ou seja, não há uma progressão gradual na construção do conceito de simetria. O tema é tratado com irregularidade, sendo que alguns anos dedicam-lhe mais atenção que outros.

Santos, Pereira Filho e Luna (2016) analisaram as atividades sobre área de figuras planas presentes em um livro didático do 9º ano do Ensino Fundamental, classificando-as quanto ao seu tipo de abordagem: *numérica*, em que o foco é a contagem ou o cálculo direto usando as quatro operações básicas; *geométrica*, em que é predominante a decomposição de

---

[2] Alunos que frequentam o 10º ano nos Estados Unidos tem entre 15 e 16 anos, seria equivalente ao 1º ano do Ensino Médio no Brasil.

figuras planas; *grandezas*, em que é trabalhada a comparação de superfícies equivalentes ou unidades de medida; *algébrico-funcional*, em que há necessidade de encontrar o valor de uma incógnita. Resultados mostraram que há predominância da abordagem numérica, seguida pela algébrico-funcional, ou seja, o foco está em trabalhar o conceito de área como um número. Sendo assim, para que haja um equilíbrio, é necessário que o professor complemente com outras atividades que abordem área sob o ponto de vista geométrico e de grandeza.

Godoy (2016, p. 5) fez da “[...] leitura geométrica dos diagramas uma metodologia de análise dos conteúdos de Geometria existentes em alguns livros didáticos”. Para isso, a autora analisou três coleções de livros didáticos destinados aos Anos Finais do Ensino Fundamental. Os dados foram categorizados de acordo com os tipos de signos encontrados nos diagramas, nas propriedades métricas e topológicas presentes em alguns conteúdos e nas representações mentais de conceitos geométricos. Como resultado, a autora constatou que existe uma negociação de significados entre o que está posto nos livros didáticos e o que o leitor se apropria, negociação esta que auxilia no entendimento do conteúdo; também destaca que a leitura geométrica pode ser construída por meio do olhar do leitor em relação ao conjunto de informações que é dado nos diagramas.

Costa e Santos (2018) investigaram como é feita a abordagem do conceito de quadriláteros notáveis em um livro didático do 8º ano do Ensino Fundamental. Os autores se fundamentaram na Teoria Antropológica do Didático para analisar os tipos de tarefas encontradas e com que frequência elas aparecem. Constataram que o conceito de quadriláteros notáveis é apresentado a partir das medidas de grandezas geométricas como abertura de ângulo, perímetro, volume e comprimento. O tipo de tarefa mais recorrente foi: *determinar a medida de uma grandeza geométrica associada a um quadrilátero notável*. Os autores apontam a necessidade de abordar esse conteúdo por meio de tarefas que explorem a produção geométrica, fazendo, por exemplo, uso de suas propriedades.

Maciel, Rêgo e Carlos (2017) investigaram o papel das figuras fotográficas em três coleções de livros didáticos destinados aos Anos Finais do Ensino Fundamental. Numa análise preliminar, os autores quantificaram a presença de fotografias ao longo de todos os capítulos de cada volume. Porém, para aprofundar as discussões, decidiram focar nas imagens presentes em capítulos que tratavam do conteúdo de simetria.

As fotografias foram, então, divididas em duas categorias distintas: *complementariedade enunciativa*, que ocorre quando a imagem é utilizada para comunicar aspectos do conteúdo, e *associação evocativa*, que ocorre quando a imagem não tem vínculo com o conteúdo, só é utilizada como um recurso estético. Concluem que a maior parte das fotografias é usada para mediar, expressar e comunicar aspectos do conteúdo e, portanto, desempenham um importante papel para o ensino de Matemática. Destacam também que talvez os autores de livros didáticos não tenham percepção das funcionalidades que uma imagem fotográfica detém. Essa afirmação é feita com base no uso inadequado de algumas fotografias e da falta de exploração de outras.

Kluppel (2012) investigou em que medida os aspectos da Teoria de Representações Semióticas de Raymond Duval são contemplados na abordagem dos conteúdos de Geometria em livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental, por meio da análise de cinco coleções distribuídas nas escolas públicas no período de 2002 a 2009. O conteúdo de Geometria presente nestes materiais foi classificado em *tratamento figural* e *tratamento discursivo.* Vale ressaltar que gráficos, diagramas, esquemas, figuras geométricas, equações, etc. são considerados representações semióticas.

Além disso, é importante esclarecer que registro figural é diferente de *tratamento figural*. As figuras geométricas e suas propriedades são consideradas registros figurais, já a língua materna é um registro discursivo. O tratamento dado a um registro é uma transformação interna dele. Ao categorizar os conteúdos de Geometria em *tratamento figural* (ou *discursivo*), estão inclusos os registros figurais e as transformações internas a esses registros (como por exemplo, a figura de um quadrado que é decomposta em triângulos), ou seja, o *tratamento figural* engloba os registros figurais e as transformações internas a esses registros. Da mesma forma, *tratamento discursivo* envolve os registros discursivos e suas transformações internas.

Como resultado, foram encontradas lacunas em relação ao tratamento figural e discursivo, bem como ao registro figural e discursivo dados ao conteúdo de Geometria. A autora destaca que, segundo a Teoria de Representações Semióticas, para que a aprendizagem de Geometria seja efetiva, o aluno deve conseguir transitar entre os diferentes registros de representação de forma espontânea. No caso dos livros analisados, existe uma fragilidade na articulação entre o registro figural e o discursivo.

Ao trazer essas pesquisas sobre a Geometria nos livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental, minha intenção não é apenas apresentar um panorama das investigações que já foram realizadas com esse tema, mas também pretendo mostrar que ainda há espaço para novos estudos. Nesse sentido, minha pesquisa vem contribuir com tais estudos no sentido de investigar as funções que a Geometria assume nos campos Álgebra, Aritmética, Probabilidade e Estatística[3] em livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental, ou seja, toda a investigação foi feita com um olhar intradisciplinar, atentando-se às inter-relações existentes entre as figuras geométricas e os conteúdos que integram os campos não-geométricos.

Foram delineados dois objetivos específicos, a saber:

- Analisar como os conteúdos de Geometria estão estruturados (introdução, abordagem e desenvolvimento) em capítulos não-geométricos;
- Mapear, em capítulos não-geométricos, as tarefas que fazem uso da Geometria em seus enunciados.

A pergunta que guiou este estudo foi a seguinte: **Quais funções a Geometria assume em campos não-geométricos nos livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental?**

A dissertação é composta por quatro capítulos, além da introdução e das considerações finais. No capítulo 1, apresento uma breve trajetória histórica sobre a criação do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), com foco nas principais medidas adotadas pelo governo e nas modificações que ocorreram ao longo dos anos. Discuto também sobre o uso de livros didáticos na sala de aula e as funções que eles assumem no processo educacional.

No capítulo 2, abordo conceitos como visualização matemática, visualidade e cultura visual, noções que embasam essa dissertação. Além disso, debato sobre o papel das figuras geométricas no ensino da Matemática.

No capítulo 3, explicito os caminhos metodológicos trilhados pela pesquisa. Discorro sobre minha escolha pela abordagem qualitativa e, dentro desta abordagem, a opção pelo estudo documental. Apresento também uma breve descrição das coleções de livros didáticos analisadas e as etapas que compuseram essa análise.

No capítulo 4, evidencio os dados produzidos a partir dos livros didáticos e discuto de que modo a Geometria está articulada aos outros campos da Matemática, assim como as funções que assume. Além disso, aponto algumas abordagens de conteúdos específicos que se tornaram cultura visual da sala de aula.

Por fim, nas considerações finais, exponho uma breve síntese da pesquisa e os principais resultados obtidos. Verso sobre o fato de as figuras geométricas se tornarem práticas visuais para alguns conteúdos de Álgebra e Aritmética, evidenciando o caráter

[3] Por vezes, posso me referir a esses campos como não-geométricos e, por outras, como outros campos da Matemática.

histórico e cultural da Geometria, bem como a utilização desta como uma facilitadora no processo de ensino a partir da ilustração de conceitos abstratos.

2 CAPÍTULO 1: LIVRO DIDÁTICO

Neste capítulo, discorro sobre a instituição do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)[4]. Não é meu objetivo detalhar cada medida criada pelo governo para regulamentar a produção e distribuição dos livros didáticos[5], atenho-me somente à criação do PNLD e às reformulações que foram acontecendo ao longo dos anos. Em seguida, discuto sobre o uso de materiais didáticos em sala de aula e sobre as funções que eles assumem no processo educacional.

2.1 UMA BREVE HISTÓRIA SOBRE A CRIAÇÃO DO PNLD

Na década de 1980, haviam problemas com a aquisição de materiais didáticos para serem distribuídos às escolas públicas, então, o governo decidiu subsidiar pesquisas com o apoio do Banco Mundial numa tentativa de reverter essa situação e melhorar a qualidade da educação brasileira. Como resultado, a pesquisa constatou a importância do livro didático para desenvolvimento da aprendizagem, à vista disso, o Banco Mundial propôs a criação de um programa nacional de distribuição de livros didáticos que seria financiado pelo próprio banco. Assim, em 1985, foi criado o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) (CASSIANO, 2007).

À época, o então presidente José Sarney substituiu o programa que vigorava antes pelo PNLD, estipulando algumas mudanças. As principais alterações foram: o término do livro descartável, visto que o governo passou a comprar somente livros não-consumíveis; a escolha do livro, que passou a ser feita diretamente pelo professor; e o recebimento deles, que passou a contemplar todos os alunos do 1º grau (7 a 14 anos) matriculados na rede pública de ensino (CASSIANO, 2007).

Dentre os três pontos de alteração citados acima, o único que teve êxito nos primeiros anos foi a compra de livros não-consumíveis, dado que os outros dois foram problemáticos, isso em razão de muitas escolas receberem livros que não foram pedidos por seus professores, além de tais materiais chegarem com atraso. Algumas editoras que firmaram contrato com o governo não foram capazes de cumprir os prazos para distribuição dos livros e, dessa forma, muitos alunos tiveram acesso a eles depois do início do ano letivo (CASSIANO, 2007).

[4] Em julho de 2017, por meio do decreto 9.099, o PNLD passou por alterações e o nome foi atualizado para Programa Nacional do Livro e do Material Didático.
[5] Tais políticas públicas podem ser encontradas em Mazzi (2018) e Cassiano (2007).

Foi em 1993, durante a presidência de Itamar Franco, que o governo encomendou o primeiro estudo para analisar a qualidade dos conteúdos e os aspectos pedagógicos dos 10 livros mais distribuídos entre as escolas públicas, cujos resultados foram divulgados pelo governo por meio da imprensa. Constatou-se que “[...] o MEC vinha comprando e distribuindo, para a rede pública, livros didáticos preconceituosos, desatualizados e com erros conceituais” (CASSIANO, 2007, p. 41).

Em 1996, já no governo de Fernando Henrique Cardoso (FHC), o Ministério da Educação (MEC) implementou oficialmente a avaliação pedagógica dos livros adquiridos pelo PNLD por meio da formação de comissões de avaliação por área de conhecimento. Os resultados desse processo de análise eram divulgados em documentos chamados de Guia do Livro Didático, distribuídos às escolas para auxiliar os professores na escolha dos materiais (CASSIANO, 2007).

Inicialmente, a avaliação dos livros ficava sob a responsabilidade da Secretaria de Educação Fundamental (SEF), que os analisava individualmente e os classificava como:

- *Reprovados*: livros com erros graves que comprometiam sua eficácia pedagógica;
- *Recomendados com ressalvas*: livros que apresentavam alguns problemas, os quais, no entanto, não comprometiam sua eficácia;
- *Recomendados*: livros que cumpriam satisfatoriamente os critérios estabelecidos;
- *Recomendados com distinção*: livros que apresentavam propostas pedagógicas elogiáveis e diferenciadas.

Os professores tinham liberdade para escolher os livros, independentemente de sua classificação. Ainda assim, como muitos livros reprovados foram escolhidos pelos professores, houve um desgaste na relação entre os docentes e o MEC, haja vista que os professores ficaram marcados como profissionais mal formados e sem capacidade de escolher um bom material de apoio. Além disso, os autores dos livros reprovados também enfrentaram a má reputação por terem escrito livros com erros conceituais e preconceituosos. Por esses motivos, os livros reprovados deixaram de ser divulgados no PNLD 1999 (CASSIANO, 2007).

Com a implementação da avaliação dos livros, o governo estipulou um procedimento a ser seguido para participação das obras no PNLD. Primeiramente, era lançado um edital contendo as normas para a inscrição dos livros. Nesta etapa, as editoras faziam a inscrição das obras, que passavam por uma triagem inicial para constatar se se encaixavam nas exigências técnicas e físicas do edital. As aprovadas nesta fase eram, então, enviadas à Secretaria de Educação Básica, onde eram escolhidos grupos de avaliadores para analisá-las pedagogicamente. As coleções aprovadas compunham o Guia do Livro Didático. Esse processo se repete até os dias atuais (MAZZI, 2018).

Deste modo, a partir de então, os professores fazem a escolha das coleções com base nas resenhas das obras disponíveis no Guia do Livro Didático. Para o PNLD 2017, o Guia conta com a resenha de 11 coleções destinadas aos Anos Finais do Ensino Fundamental e em cada uma delas é possível encontrar:

- *Visão Geral*: são ressaltados os pontos positivos e negativos das obras, com enfoque na abordagem dos conteúdos e na metodologia de ensino utilizada;
- *Descrição*: é apresentada a forma de organização das obras e o conteúdo trabalhado em cada um dos volumes que compõe a coleção;
- *Análise da Obra*: é mostrada a distribuição dos campos matemáticos ao longo de cada volume e de toda a coleção; é especificado como os conteúdos são explorados em cada um dos campos matemáticos, com destaque para os que são bem trabalhados e para os menos presentes; é apresentada a metodologia de ensino, ressaltando como as ideias matemáticas são desenvolvidas e a postura que se espera tanto do professor quanto do aluno; é apontado o modo como a contextualização e a formação da cidadania são trabalhadas nas obras. São expostas também algumas particularidades em relação aos aspectos gráfico-editoriais, à linguagem adotada e uma breve descrição do Manual do Professor;
- *Em Sala de Aula*: são oferecidas algumas recomendações com o objetivo de contribuir para um melhor aproveitamento dos materiais didáticos, bem como alguns apontamentos acerca de conteúdos que precisam ser complementados (BRASIL, 2016).

Com base nessas resenhas, os professores indicam três opções de coleções em ordem de preferência, visto que, caso a escola não receba a primeira opção, deverá receber uma das outras duas. Feitos os pedidos, o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) inicia o processo de negociação com as editoras, que são informadas sobre a quantidade de livros a serem produzidos e os locais de entrega. A distribuição das obras, por sua vez, fica sob a responsabilidade da Empresa Brasileira de Correios e Telégrafos (ECT) que, a partir de 1995, quando assumiu tal função, acabou com os problemas de atrasos das obras (CASSIANO, 2007; MAZZI, 2018).

Além da reestruturação do PNLD no tocante à avaliação pedagógica, ao processo de inscrição das obras por parte das editoras e à escolha por parte dos professores, o governo FHC determinou que o critério de recebimento dos livros seria o cadastramento dos alunos no Censo Escolar realizado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). Dessa forma, o INEP definia a quantidade de exemplares a serem comprados pelo governo com base na projeção de matrículas. Como os livros eram não-consumíveis, eles ficavam de posse do aluno durante todo o ano letivo, mas, ao final, o livro deveria ser devolvido para que outro aluno pudesse utilizá-lo. Esse modelo de distribuição e posse do livro didático pelo aluno foi mantido até o PNLD de 2019, cuja previsão de uso de cada obra era de três anos (CASSIANO, 2007). A partir de 2020, as obras passam a ter previsão de uso de quatro anos.

Em 2003, já no governo Luiz Inácio Lula da Silva, foi feita uma nova ampliação do PNLD, com distribuição de livros didáticos para alunos do Ensino Médio e, em 2007, para a Alfabetização de Jovens e Adultos (CASSIANO, 2007).

Em 2005, as categorias de classificação dos livros em *recomendados com ressalvas*, *recomendados* e *recomendados com distinção* são extintas e as coleções são simplesmente aprovadas ou excluídas. Desse modo, o governo acaba com a tensão existente entre professores, MEC e autores de livros didáticos (CASSIANO, 2007).

Já em 2009, foram publicadas duas importantes resoluções. A primeira delas diz respeito à regulamentação do PNLD para a Educação de Jovens e Adultos. A segunda estabelece novas regras para a participação de escolas públicas nesse Programa. A partir do ano seguinte, as escolas deveriam aderir ao PNLD para então receber os livros didáticos. Além disso, foram incorporados nele os livros de Inglês e Espanhol, distribuídos tanto para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio (FNDE, 2017).

No ano de 2012, foi lançado um edital incluindo a disponibilização de materiais digitais. Assim, as editoras tinham a possibilidade de inscrever objetos educacionais digitais (OED) como complementos dos livros impressos. Tais objetos incluíam jogos educativos, simuladores e infográficos, além de endereços *online* para acesso dos estudantes a esses materiais (MAZZI, 2018). Os OED foram enviados às escolas no ano de 2014 em formato

DVD para serem utilizados por alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental. Já para 2015, o edital previa obras multimídia nas quais as editoras poderiam reunir livros impressos e livros digitais para o Ensino Médio. Os livros digitais deveriam apresentar o mesmo conteúdo do material impresso, com acréscimo dos OED (FNDE, 2017).

Para 2020, o edital do PNLD passa a incluir, além dos livros didáticos disciplinares, projetos integradores que devem conectar situações do cotidiano com as áreas de conhecimento trabalhadas em sala de aula, bem como obras interdisciplinares que devem apresentar as relações existentes entre os diferentes componentes curriculares. O Manual do Professor passa a integrar o material digital, com plano de desenvolvimento bimestral e proposta de acompanhamento de aprendizagem (BRASIL, 2018).

Nessa seção, vimos as reformulações das medidas governamentais ao longo dos anos e a consequente evolução do PNLD. É possível perceber que há um grande investimento do governo para que os livros didáticos cheguem às salas de aula. Em 2018, 40% das vendas do mercado editorial brasileiro foram do setor de livros didáticos. Foram mais de 180 milhões de livros vendidos, dos quais 140 milhões foram adquiridos pelo governo (DESEMPENHO..., 2019).

Devido à abrangência do PNLD e à representatividade que ele tem perante o mercado editorial brasileiro, cabe discutir alguns aspectos a respeito do uso desses materiais didáticos em sala de aula.

2.2 USO DO LIVRO DIDÁTICO NA SALA DE AULA

Por ser um material gratuito e distribuído a todas as escolas públicas do país, é importante pensarmos sobre algumas relações entre os livros didáticos e o trabalho docente. Guimarães et al. (2007, p. 3) afirmam que

> O livro didático se constitui em um importante recurso utilizado por professores na condução e/ou elaboração das abordagens de ensino, em parte pela ausência de outros materiais que orientem os professores sobre o quê e como ensinar, e em parte pela frequente dificuldade de acesso do aluno a outras fontes de estudo e pesquisa.

Lajolo (1995, p. 4) afirma que “[...] livros didáticos e não-didáticos são centrais na produção, circulação e apropriação de conhecimentos, sobretudo dos conhecimentos por cuja difusão a escola é responsável”. A autora ainda reitera que existe um diálogo entre o livro e o professor, no sentido de formar uma parceria no processo de ensino, processo do qual o aluno é o beneficiário final, ou seja, o autor do livro expõe as teorias ou pressupostos teórico-metodológicos que fundamentam sua obra, o professor atua como mediador entre o que está dito no livro e o que pensam os alunos e, a partir dessa interação, o conhecimento é construído.

Nesse sentido, Choppin (2004) elenca quatro funções para os livros didáticos, a saber: *referencial*; *instrumental*; *ideológica e cultural*; *documental*. A função referencial diz respeito à tradução do currículo oficial. Essa concepção também perpassa o Guia do Livro Didático, que destaca os materiais didáticos como auxiliadores, ressaltando sua importância no sentido de amparar o professor no planejamento das aulas, tanto por ser tomado como texto de referência quanto por "[...] levar para a sala de aula as modificações didáticas e pedagógicas propostas em documentos oficiais, assim como resultados de pesquisas sobre a aprendizagem da Matemática" (BRASIL, 2016, p. 14).

Em relação à função instrumental, ela se refere ao fato de os livros proporem atividades "[...] que visam facilitar a memorização dos conhecimentos, favorecer a aquisição de competências disciplinares ou transversais, apropriação de habilidades" (CHOPPIN, 2004, p. 553). Nessa mesma perspectiva, o Guia do Livro Didático afirma que o livro didático pode proporcionar aos alunos o desenvolvimento de competências e habilidades que contribuam para a sua autonomia e consolidação de conhecimentos (BRASIL, 2016).

Na terceira função, intitulada ideológica e cultural, os livros são tomados como responsáveis por incluir os valores de uma sociedade (CHOPPIN, 2004). O Guia do Livro Didático corrobora essa ideia ao atribuir aos livros a função de contribuir para a formação social e cultural dos alunos (BRASIL, 2016).

Por fim, na função documental, os livros são tidos como "[...] um conjunto de documentos textuais ou icônicos, cuja observação ou confrontação podem vir a desenvolver o espírito crítico do aluno" (CHOPPIN, 2004, p. 553). Batista (2002) acrescenta que é necessário que o livro favoreça a aprendizagem, gerando reflexões acerca do uso dos conhecimentos escolares associados à realidade em que os alunos estão inseridos, ou seja, os materiais didáticos podem ser usados como subsídios para promover o exercício da cidadania.

O autor ainda afirma que a principal função do livro didático é estruturar o trabalho pedagógico e, portanto, esses materiais apresentam

> [...] não apenas conteúdos curriculares, mas também um conjunto de atividades para o ensino-aprendizado desses conteúdos; distribuição desses conteúdos e atividades de ensino de acordo com a progressão do tempo escolar, particularmente de acordo com as séries e unidades de ensino (BATISTA, 2002, p. 29).

Por conter uma síntese dos conteúdos a serem trabalhados, bem como orientações sobre o desenvolvimento de tais conteúdos e uma série de atividades para fixar aquilo que foi aprendido, o livro didático tende a ser um material que condiciona, orienta e organiza a ação do professor, determinando a metodologia de ensino que será usada pelo docente (BATISTA, 2002).

O Guia do Livro Didático (BRASIL, 2016) reconhece a importância do livro no processo de ensino e aprendizagem, porém destaca que ele não deve ter papel dominante. O professor deve manter sua autonomia, buscando outros materiais para suporte do trabalho pedagógico, além de procurar adequar o livro ao grupo de estudantes que o utiliza.

Dada a importância dos livros didáticos para o processo de ensino e aprendizagem, e o investimento do governo para que esses materiais cheguem às escolas públicas de todo o país, acredito ser relevante estudar os conteúdos que apresentam, buscando contribuir de alguma forma para a produção de livros cada vez mais completos, no sentido de levar para a sala de aula diferentes metodologias, bem como resultados de pesquisas acadêmicas para que o ensino de Matemática avance.

3 CAPÍTULO 2: CULTURA VISUAL, VISUALIDADE E FIGURAS GEOMÉTRICAS

Nesse capítulo, exponho o referencial teórico que fundamentou a análise dos dados da pesquisa. Meu objetivo é introduzir os estudos acerca da cultura visual, bem como o termo visualidade. Para isso, trago, no primeiro tópico, algumas definições de visualização; em seguida, comento sobre a cultura visual, campo de estudo no interior do qual surgiu o termo visualidade. No segundo tópico, apresento algumas considerações a respeito das figuras geométricas no ensino da Matemática e as funções que elas desempenham.

3.1 DA VISUALIZAÇÃO À VISUALIDADE

O termo visualização começou a ser empregado, inicialmente, na Psicologia em estudos que buscavam a compreensão de temas mentais e estava relacionado à capacidade que os indivíduos tinham de interpretar imagens. A partir da década de 1980, pesquisadores da Educação Matemática começaram a se apropriar do termo e inseri-lo em suas pesquisas (FLORES; WAGNER; BURATTO, 2012). Entretanto, a definição de visualização na Psicologia é diferente da definição usada na Educação Matemática, visto que para Flores, Wagner e Buratto (2012, p. 33)

> [...] os estudos na psicologia estão interessados, particularmente, na capacidade do sujeito em formar e manipular imagens mentais, na educação matemática o interesse está centrado na habilidade demonstrada pelo aluno em lidar com aspectos visuais para alcançar o entendimento matemático.

Pesquisadores da Educação Matemática têm apresentado definições distintas acerca do termo visualização. Presmeg (2006, p. 206, tradução minha)[6] entende visualização como "processo de construir e transformar imagem visual mental e todas as inscrições de natureza espacial, ambos envolvidos no fazer matemática". Com essa definição, Presmeg (2006) estabelece que, para que um aluno possa criar uma imagem, seja ela uma figura geométrica ou qualquer outro tipo de inscrição matemática, essa imagem deve existir primeiramente em sua mente.

[6] [...] processes of constructing and transforming both visual mental imagery and all of the inscriptions of a spatial nature that may be implicated in doing mathematics (PRESMEG, 2006, p. 206).

Para Zimmermann e Cunningham (1991, p. 3, tradução minha)[7], visualização matemática é entendida como a

> [...] habilidade dos alunos para desenhar um diagrama apropriado (com lápis e papel, ou em alguns casos, com o computador) para representar um conceito matemático ou um problema e usar o diagrama para alcançar o entendimento, e como um acréscimo à solução do problema.

Os autores supracitados entendem a visualização como um meio para compreender conceitos matemáticos, ou seja, não é apenas visualizar um diagrama, mas visualizá-lo no sentido de compreender o conceito ou problema com o apoio dele.

Gutiérrez (1996, p. 9, tradução minha)[8] considera visualização “[...] um tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, sejam mentais ou físicos, realizada para resolver problemas ou provar propriedades”. Para Gutiérrez (1996), visualização é composta por quatro elementos, a saber, imagens mentais, representações externas, processo e habilidade de visualização. Nesse caso, uma imagem mental é considerada como sendo qualquer tipo de representação cognitiva de uma ideia matemática; já a representação externa diz sobre interpretações gráficas ou verbais que ajudam a transformar uma imagem mental num raciocínio visual. O processo de visualização é entendido como uma ação que envolve imagens mentais e, por fim, a habilidade de visualização é a capacidade de um aluno executar o processo necessário com uma imagem mental específica, buscando encontrar a solução de um problema dado.

Arcavi (2003), por sua vez, entende visualização como um produto, ou seja, como uma imagem visual e, simultaneamente, como um processo ou atividade. Assim, o autor defende que visualização é ver aquilo que não pode ser visto. Em outras palavras, Arcavi (2003) argumenta que visualização é um método para ver conceitos e ideias matemáticas, aquilo que é abstrato.

Observe que Presmeg (2006) conceitua visualização como aquilo que está restrito à mente do aluno. Já Arcavi (2003), Zimmermann e Cunningham (1991) definem-na como um meio para alcançar o entendimento de conceitos e ideias matemáticas. Para esses autores, a visualização está restrita ao meio físico. Já para Gutiérrez (1996), visualização é um processo que percorre tanto o domínio mental quanto o físico.

---

[7] [...] student’s ability to draw an appropriate diagram (with pencil and paper, or in some cases, with a computer) to represent a mathematical concept or problem and to use the diagram to achieve understanding, and as an aid in problem solving (ZIMMERMANN; CUNNINGHAM, 1991, p. 3).

[8] [...] the kind of reasoning activity based on the use of visual or spatial elements, either mental or physical, performed to solve problems or prove properties (GUTIÉRREZ, 1996, p. 9).

Flores (2003) também trabalha com o termo visualização, porém com outro foco. Em sua tese, a autora defende que nosso modo de olhar e de representar é histórico e, por esse motivo, busca entender os modos de olhar e representar por meio da história da técnica da perspectiva.

É importante mencionar que a autora diferencia os termos olhar e ver. O primeiro diz respeito a um olhar investigador, ativo, que vê além daquilo que está posto. Já o segundo refere-se àquilo que o olho simplesmente vê, isto é, aquilo que está limitado ao sentido da visão. Dito isso, Flores (2003) afirma que nosso olhar é carregado de cultura e é afetado por aquilo que sabemos e acreditamos.

A autora aborda em sua pesquisa as práticas artísticas do Renascimento e a instauração da técnica da perspectiva para mostrar que nosso olhar se converteu em perspectiva, incluindo a representação de figuras geométricas no ensino da Matemática. A técnica, que surgiu nas Artes, Engenharia e até mesmo no meio militar, ganhou força e constituiu-se "[...] como a regra básica para a representação de imagens tanto em matemática como no meio técnico" (FLORES, 2003, p. 170).

Segundo Flores (2003), a representação do espaço está ligada aos saberes e às experiências dos homens. Diante disso, tais representações mudam de acordo com a forma com que os homens olham o mundo e, nesse sentido, a técnica da perspectiva veio atender a demanda colocada pela cultura estabelecida em cada época. Assim, os homens se habituaram a aceitá-la sem ao menos questionar o porquê é utilizada sempre a mesma técnica para representar o espaço (FLORES, 2003).

Além disso, existem códigos e regras que foram somados à técnica da perspectiva, como por exemplo, pontilhados, tracejados, sombreados que sugerem uma noção de profundidade. Para Flores (2003, p. 171), "[...] olhar significa saber os códigos de escritura. O olhar torna-se então adestrado." A autora ainda afirma que o olhar está de tal modo aprisionado que até hoje se tem dificuldade de pensar num modo diferente de olhar e representar no plano, seja uma figura geométrica espacial ou imagens de um modo geral. A técnica da perspectiva adestrou, aprisionou e colonizou o modo de olhar e representar as figuras no espaço (FLORES, 2003).

Tendo em vista a tese defendida pela autora acerca da técnica da perspectiva ter se tornado regra na representação do espaço e toda a argumentação feita por ela para mostrar que o olhar é cultural, Flores (2010) propõe o termo visualidade para a pesquisa em Educação

Matemática, cujo interesse está em problematizar questões acerca do visual, visão e imagens no ensino e aprendizagem da Matemática. Dessa forma,

> [...] visualização preocupa-se com a aprendizagem de conceitos e a desenvoltura de habilidades visuais, visualidade tende a problematizar o visual enquanto percepção natural e fisiológica e articula-se com práticas visuais no âmbito da história e da cultura (FLORES; WAGNER; BURATTO, 2012, p. 43).

Nesse sentido, visualidade é entendida como objeto detentor de historicidade que compõe vários modos de olhar, dentre eles, a visualização matemática (FLORES, 2010).

Antes de aprofundar os estudos acerca do termo visualidade, acredito ser importante pontuar alguns debates sobre cultura visual, já que visualidade tem sido um termo muito utilizado nesse campo de pesquisa.

Definir exatamente o que é cultura visual não é tarefa fácil, pois existem propostas diversas sobre o assunto. Knauss (2006) traz uma caracterização dos estudos acerca da cultura visual que se iniciaram em Programas de Pós-Graduação dos Estados Unidos, a saber, o Programa de Estudos Culturais e Visuais da Universidade de Rochester e o Programa de Estudos Visuais da Universidade de Califórnia de Irvine.

O autor inicia o texto trazendo a expressão *"pictorial turn"* ou virada pictórica (concebida por W. J. T. Mitchell nos anos 90), na qual a ênfase estava na representação visual por meio de imagens. Martin Jay retoma os estudos feitos por Mitchell, porém substitui o termo virada pictórica por "*visual turn"* ou virada visual. Dessa forma, o visual e a visualização são acentuados. Martin Jay focou na contextualização da visão, ou seja, para esse autor, os objetos visuais não podem ser separados de seu contexto (KNAUSS, 2006).

Knauss (2006) ainda aponta que os estudos a respeito da virada pictórica e da virada visual se entrelaçaram com os estudos culturais, desdobrando-se em um novo movimento que reunia questões acerca da cultura e do visual. A partir daí, temos pesquisadores como James Herbert, Janet Wolf e Chris Jenks que apresentam diferentes definições para os estudos visuais[9] e para a cultura visual.

James Herbert entende estudos visuais como aquilo que é composto pela cultura visual e pelas criações humanas, sejam elas artísticas ou não. Janet Wolf diz que os estudos visuais dão atenção às imagens atreladas às questões sobre a produção de sentidos em contextos sociais específicos. Observe que esses dois autores pontuados por Knauss (2006)

---

[9] W. J. T. Mitchell afirma que os estudos visuais seriam o campo de estudos e a cultura visual seria o objeto de estudo desse campo. Entretanto, alguns autores, como o próprio Mitchell, optam por usar o termo cultura visual para ambos, campo e objeto (SÉRVIO, 2014).

compreendem cultura visual como prática visual que se faz presente em diferentes sociedades e não se resume a imagens.

Por sua vez, Chris Jenks restringe cultura visual à cultura ocidental, caracterizada pela centralidade do olhar. Para esse autor, a experiência social do Ocidente se resume à percepção e, assim, esse modo de ver define a visão que os ocidentais têm do mundo e, consequentemente, o mundo é reordenado a partir do olhar, por meio das representações visuais (KNAUSS, 2006).

Nicholas Mirzoeff também trabalha a cultura visual num sentido mais restrito. Ele defende cultura visual como o estudo da cultura global da visualidade, mediada pelas tecnologias e tipificada pelas imagens digitais e virtuais (KNAUSS, 2006). Sérvio (2014), ao explicar o argumento de Mirzoeff, propõe ao leitor a seguinte situação: imagine a sociedade em que vive e compare-a com a de seu tataravô. Se todas as pessoas ficassem cegas, qual das duas sociedades sofreria mais com tal impacto? Mirzoeff acredita que a cultura pós-moderna é visual, pois há uma tendência de figurar a existência. Prova disso são as tecnologias cada vez mais visuais. Sendo assim, as pessoas inseridas nessa cultura têm uma capacidade notável de processar informação visual (SÉRVIO, 2014).

Em contrapartida, Michtell afirma que as imagens são importantes nos estudos da cultura visual, porém é necessário olhar para a experiência visual como um todo. Como exemplo, o autor cita sociedades como a do Talibã, que baniram as imagens, mas ainda têm uma cultura visual. Portanto, Mitchell considera cultura visual aquilo que olhamos e mostramos, bem como aquilo que ocultamos e nos recusamos a ver (SÉRVIO, 2014).

Em síntese, Knauss (2006, p. 110) considera duas perspectivas nas definições de cultura visual, uma mais restrita e a outra mais abrangente, isto é,

> [...] a primeira entende cultura visual de modo restrito, na medida em que ela corresponde à cultura ocidental, marcada pela hegemonia do pensamento científico (Chris Jenks) ou na medida em que a cultura visual traduz, especificamente, a cultura dos tempos recentes marcados pela imagem virtual e digital, sob domínio da tecnologia (Nicholas Mirzoeff); a segunda perspectiva, que abarca diversos autores, considera que a cultura visual serve para pensar diferentes experiências visuais ao longo da história em diversos tempos e sociedades.

Nesta dissertação, assumo cultura visual sob a perspectiva mais abrangente, adotando, especificamente, a posição proposta por Flores (2010, p. 278), que entende cultura visual como "[...] aspectos da cultura que são manifestados em sua forma visual (pinturas, fotografias, filmes, imagens científicas...)".

É em meio a esse debate acerca da cultura visual que surge o termo visualidade. Flores (2013) diz que visualidade é mais apropriado para os estudos a respeito da cultura visual do que visualização. Isso porque o primeiro assume que o olhar é construído histórica e culturalmente, enquanto o segundo discute a aprendizagem de conceitos de Geometria, focando nas habilidades visuais. Dessa forma, visualidade é compreendida como "[...] a soma de discursos que informam como nós vemos. [...] discute práticas visuais no contexto da história e da cultura" (FLORES, 2013, p. 95 - 96).

Cabe esclarecer que o termo cultura não é limitado aos modos de vida de uma sociedade. Flores (2010, p. 279) o define como "a produção e o intercâmbio de significados entre os membros de um grupo ou sociedade", ou seja, cultura é entendida como um processo de criação de sentido. Da mesma forma, a visão também não é limitada ao fator físico, mas considerada histórica e social, é uma matriz que inclui outros sentidos (FLORES, 2010; KNAUSS, 2006). A partir dessa perspectiva, Knauss (2006) se apoia em Mitchell e condena a separação do verbal e do visual, isto é, para o autor, as representações visuais e verbais estão entrelaçadas, havendo um diálogo permanente entre elas. Schollhammer (2002, p. 25, grifo do autor) corrobora essa ideia ao afirmar que:

> [...] nenhuma imagem hoje representa um sentido em função da sua pura visibilidade mas encontra-se sempre inscrita num texto cultural maior, abrindo para formas diferentes de leituras cujas fronteiras ainda não percebemos com clareza. Em outras palavras, não podemos tratar a imagem como *ilustração* da palavra nem o texto como *explicação* da imagem. O conjunto texto-imagem forma um complexo heterogêneo fundamental para a compreensão das condições representativas em geral.

Knauss (2006) ainda cita as pesquisadoras Marita Sturken e Lisa Cartwright ao afirmar que as experiências visuais são enriquecidas pelas memórias e imagens de vários momentos de nossas vidas, elas não acontecem de forma isolada.

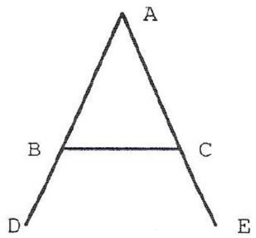
Assim, assumo o termo visualidade neste trabalho, pois entendo que as figuras geométricas inseridas nos livros didáticos têm uma função, elas não estão desconexas do discurso e nem da cultura da sala de aula. Isso porque acredito que a Geometria aqui investigada está inserida no contexto escolar e, portanto, incorporada à cultura da sala de aula, em que o objetivo principal é criar significados matemáticos, contribuindo, assim, para a aprendizagem dos alunos. Considero que os modos como um aluno da Educação Básica olha para a Geometria é diferente dos modos como a olham um engenheiro ou arquiteto, por exemplo, configurando culturas visuais distintas.

3.2 AS FIGURAS GEOMÉTRICAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Mesmo não ocupando papel central nos estudos sobre a cultura visual, as imagens desempenham nela uma função importante. Nesta dissertação, considero as figuras geométricas um tipo de imagem, entendendo que "imagem" engloba qualquer tipo de representação, seja de pessoas, objetos, ideias... Sendo assim, uma pintura, escultura, fotografia, anúncio publicitário e até mesmo as figuras geométricas presentes nos livros didáticos podem ser consideradas imagens. Como meu objetivo é investigar as funções que a Geometria desempenha nos livros de Matemática, com foco nas figuras geométricas inseridas nos campos Álgebra, Aritmética, Probabilidade e Estatística, faz-se necessário discorrer sobre o suporte didático que essas figuras oferecem.

Brigo (2010, p. 39) afirma que "as figuras servem como suporte epistemológico na elaboração e aplicação de conhecimentos matemáticos". Como exemplo, a autora comenta brevemente sobre a inserção das figuras nos elementos de Euclides, afirmando que as figuras presentes em todo o tratado matemático de Euclides ocupam o mesmo patamar que a escrita matemática, estando articuladas.

A autora, apoiada em Dhombres (1993), traz alguns comentários tecidos por Proclus, importante filósofo grego, no Livro I de Euclides. Ele afirma que todos os problemas ou teoremas vêm acompanhados de uma figura. O traçado da figura é feito em concomitância com o enunciado dado e é no traçado que são nomeados os elementos descritos na proposição. A título de exemplo, vejamos a análise feita por Dhombres (1993) da figura presente na proposição 5 do Livro I de Euclides.

> "Seja um triângulo isósceles ABC onde o lado AB igual ao lado AC, e que as retas BD, CE sejam os prolongamentos em linha reta de AB, AC".
>
> 
>
>
> Figure 1
>
> Simetricamente, a determinação do que é buscado é tanto dita quanto lida na figura:
>
> "*Pode-se afirmar que, por um lado, o ângulo interno ABC é igual ao ângulo interno ACB, por outro lado, que o ângulo interno CBD é igual ao ângulo interno BCE"*.
>
> O papel da figura não se detém nesses dois períodos do estilo adotado para apresentar uma proposição, já que um terceiro período, a construção, prepara igualmente pontos, linhas, etc.; dito retoricamente, esse período acrescenta ao dado

o que falta para obter o que é buscado. O traçado da figura é, portanto, sugestivo, não heurístico.

"É fato que *um ponto F seja tomado ao acaso sobre BD e que a reta AG seja subtraída da maior, AE, igual à menor AF (Proposição 3), e que as retas FC, GB sejam unidas (Pergunta 1)"*.

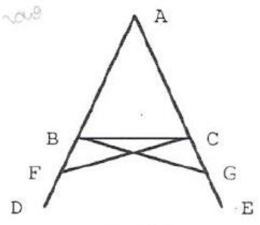


Figure 2

É de singularidade notável que, se o texto ordena a exposição, determinação e construção da proposição em um alinhamento irreversível, a figura lhes sobrepõe. De tal modo que, no final, apenas a figura 2 aparece "dentro do texto", uma figura que é a reprodução da figura 1 sobre a qual teria vindo embutir um segundo desenho (figura 3), composto por duas retas:

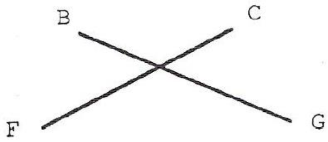


Figure 3

O papel da sobreposição dos dados numa mesma figura é essencial; se ele depende banalmente do fato simbolizado pela representação espacial, resta dizer que a figura introduz essa espacialidade no próprio texto, uma continuidade por difusão da qual igualmente se servem e desconfiam os autores clássicos. A figura não é, portanto, o simples prolongamento em lógica linear do texto escrito: ela totaliza. Esse ato de sobreposição teve que ser preparado. O texto escrito não existe, precisamente, para retirar a figura de sua espacialidade, a fim de não entregá-la bruta? Pode-se apenas constatar: a economia da figura na estilística do alexandrino não decorre do simples acréscimo (DHOMBRES[10] *apud* BRIGO, 2010, p. 40-42).

A análise de Dhombres (1993) mostra o diálogo que existe entre a figura e a escrita matemática, isto é, o verbal e o visual caminhando juntos. Flores-Bolda (1997) corrobora essa ideia ao afirmar que o olhar sobre uma figura geométrica não pode se deter somente aos traços. É preciso focalizá-lo sobre dados que não são imediatos, atentar-se ao discurso e buscar por sequências de subfiguras passíveis de serem formadas a partir da figura original.

Flores-Bolda (1997) ainda afirma que as figuras geométricas são um auxílio na resolução de problemas matemáticos. Como exemplo, a autora traz os povos antigos, que tinham a necessidade de demarcar as terras e, a partir disso, surgiu a noção de figuras geométricas simples, tais como triângulo, retângulo e quadrado. Além disso, para resolver

[10] DHOMBRES, J. La figure dans le discours géométrique: les façonnages d'un style. **Teoría**: segunda época, v. 8, n. 19, p. 51-88, 1993.

problemas geométricos, os povos antigos faziam o traçado das figuras na areia, buscando nessas imagens a solução dos problemas. Até mesmo as demonstrações matemáticas eram apoiadas no visível, ou seja, os matemáticos estavam interessados em obter relações geométricas (FLORES-BOLDA, 1997).

Assim, as figuras geométricas atuam como suporte na resolução de problemas matemáticos por trabalharem a questão da visualização, além de oferecerem um apoio intuitivo (FLORES; MORETTI, 2006). Os referidos autores afirmam que é importante pensar nos modos como essas figuras são utilizadas no ensino da Matemática, "[...] não só como instrumentos mediadores de conhecimentos geométricos, mas também, para o desenvolvimento da visualização e, consequentemente, para a aprendizagem matemática de uma forma geral" (FLORES; MORETTI, 2006, p. 5).

Nesse sentido, Brigo (2010, p. 78) se apoia em Dhombres (1993) para elencar quatro funções para as figuras geométricas, a saber:

- Função Ilustrativa: figuras utilizadas para ilustrar enunciados de teoremas, problemas e conceitos;
- Função Explicativa: figuras utilizadas para explicar o que os elementos teóricos não conseguem explicar;
- Função Demonstrativa: figuras utilizadas para demonstrar um teorema;
- Função Formativa: figuras utilizadas como um dos meios de desenvolver as capacidades mentais e intelectuais dos alunos por meio de um experimento.

Acredito que tais funções não são excludentes, isto é, uma figura geométrica pode exercer mais de uma função. É importante mencionar que, além das quatro funções elencadas por Brigo (2010), no momento da análise dos dados desta pesquisa, outras duas foram criadas por mim. Elas englobam a formação de imagens mentais e a função representativa, tendo surgido da necessidade de classificar algumas imagens presentes nos livros didáticos que não se encaixavam em nenhuma das quatro funções mencionadas acima.

A formação de imagens mentais diz respeito a enunciados que abordam conceitos geométricos cuja figura não está ilustrada no papel. Sendo assim, o aluno tem a possibilidade de ler o problema e, a partir do discurso, formar uma imagem mental que pode auxiliar na resolução da tarefa ou na compreensão de algum conceito matemático[11].

[11] Entendo que o aluno pode desenhar a imagem no papel tornando-a real, mas ainda assim, a imagem foi gerada primeiramente na mente do aluno.

A função representativa abrange as representações de equações algébricas por retas no plano e as representações de números reais por pontos na reta numérica. Por vezes, os autores dos livros didáticos se referem à reta que contém as soluções de uma equação algébrica ou de um sistema de equações, bem como à associação feita entre números reais e pontos da reta numérica como representações geométricas. Por esse motivo, senti a necessidade de criar essa nova função.

Entendo que, com a inserção dessas duas novas funções, meus estudos abrangem não somente as figuras geométricas, mas toda a Geometria. Portanto, nos capítulos seguintes, trato das funções que a Geometria desempenha em campos não-geométricos, levando em consideração o conceito de visualidade e a cultura visual da sala de aula.

4 CAPÍTULO 3: CAMINHOS DA PESQUISA

Neste capítulo, justifico minha escolha pela abordagem de pesquisa qualitativa e, dentro dessa abordagem, a opção pela análise documental. Apresento também um breve resumo das coleções de livros didáticos que foram objetos de estudo de minha pesquisa e especifico, alicerçada na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), os conteúdos que considero geométricos, visto que a pergunta que norteia minha pesquisa é: Quais funções a Geometria assume em campos não-geométricos nos livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental? Assim, é importante delinear o que considero conteúdo geométrico e não-geométrico. Além disso, esclareço como os dados foram organizados e analisados.

4.1 UMA INVESTIGAÇÃO BASEADA NA ABORDAGEM QUALITATIVA

Esta pesquisa é de cunho qualitativo. Creswell (2014) elenca alguns motivos que levam os pesquisadores a optarem por esse tipo de tratamento e, entre eles, destaco a exploração e compreensão detalhada do problema de pesquisa, a manipulação de variáveis que não podem ser facilmente medidas ou o fato de as análises quantitativas não se encaixarem na questão investigada.

Goldenberg (2004, p. 50, grifo do autor) descreve a pesquisa qualitativa como a "compreensão do significado e a 'descrição densa' dos fenômenos estudados" e suas singularidades. Nesse sentido, Bogdan e Biklen (1994) caracterizam a pesquisa qualitativa como descritiva, na qual os dados são produzidos sob a forma de imagens ou palavras. Ludke e André (1986) corroboram essa ideia ao acrescentar que o material obtido por meio da pesquisa qualitativa é rico no sentido de conter relatos de situações, acontecimentos, além de incluir extratos dos mais variados tipos de documentos.

Sendo assim, justifico minha escolha pela abordagem qualitativa por entender que ela oferece subsídios para as minhas investigações, no sentido de buscar entender, de modo aprofundado, as funções que a Geometria desempenha em campos não-geométricos, pensando na aplicabilidade e nas contribuições que as figuras geométricas trazem para o ensino de Álgebra, Aritmética, Probabilidade e Estatística (sem deixar de lado o olhar intradisciplinar).

Dentro da abordagem qualitativa, optei por seguir o estudo documental. Pádua (1997, p. 62) afirma que a "pesquisa documental é aquela realizada a partir de documentos, contemporâneos ou retrospectivos, considerados cientificamente autênticos (não fraudados)".

Já Sá-Silva, Almeida e Guindani (2009, p. 5) compreendem a pesquisa documental “[...] como um processo que se utiliza de métodos e técnicas para apreensão, compreensão e análise de documentos dos mais variados tipos”.

Cellard (2012, p. 297) entende por documento “[...] todo texto escrito, manuscrito ou impresso em papel”. Appolinário (2009, p. 67), por sua vez, amplia esse conceito e define documento como sendo “qualquer suporte que contenha informação registrada, formando uma unidade, que possa servir para consulta, estudo ou prova. Incluem-se nesse universo os impressos, os manuscritos, os registros audiovisuais e sonoros, as imagens, entre outros”. Em minha pesquisa, tomei como documentos três coleções de livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental. Cada coleção conta com quatro volumes, totalizando 12 livros.

Segundo Ludke e André (1986), a vantagem de optar pelo estudo documental se deve ao fato de os documentos constituírem uma fonte rica e estável de informações, sendo possível acessá-los a qualquer momento, bem como retirar deles fragmentos que sustentem as afirmações feitas pelo pesquisador (LUDKE; ANDRÉ, 1986). Para analisar e extrair dados dos documentos, o pesquisador deve assumir uma postura ativa, ou seja, “[...] localiza[r], seleciona[r], le[r], rele[r], sistematiza[r], analisa[r] as evidências que apresenta” (EVANGELISTA, 2008, p. 56, acréscimo meu). Tal processo de leitura e releitura dos materiais didáticos que compuseram a análise dos documentos é apresentado na terceira seção deste capítulo.

4.2 OS OBJETOS DE PESQUISA

O catálogo do PNLD 2017 dos Anos Finais do Ensino Fundamental conta com onze coleções de livros didáticos. Para esta pesquisa, foram selecionadas somente três, em virtude tanto da limitação de tempo quanto do acesso às obras. Cabe esclarecer que esses materiais não são comercializáveis, sendo, portanto, de difícil acesso. Desse modo, as três coleções usadas na pesquisa foram doadas por professores da rede pública de ensino, tendo sido esse o critério de escolha. São elas: Matemática Bianchini (BIANCHINI, 2015), Projeto Teláris (DANTE, 2015) e Matemática: Compreensão e Prática (SILVEIRA, 2015). Todas acompanham o Manual do Professor e contém quatro volumes (um para cada um dos Anos Finais do Ensino Fundamental). Juntas, essas três coleções representam 36% do total de livros distribuído às escolas (BRASIL, 2017).

A seguir, faço uma breve descrição das coleções analisadas para que o leitor tenha uma visão geral das obras e de como são apresentados seus conteúdos. É importante ressaltar que não é meu objetivo analisar a metodologia de ensino assumida pelos autores ao elaborarem os materiais didáticos. Portanto, tomo como base os comentários feitos no Guia do Livro Didático e acrescento algumas observações minhas durante as diversas leituras e releituras desses materiais.

4.2.1 Matemática Bianchini

Cada volume da coleção é organizado em capítulos, os quais possuem uma página de abertura com textos que abordam situações do cotidiano para introduzir os conteúdos a serem trabalhados. No decorrer dos capítulos, é possível encontrar seções como: *Pense mais um pouco...*, onde são propostos desafios; *Para saber mais*, onde são apresentados textos complementares ao conteúdo estudado; *Trabalhando a informação*, onde são indicadas atividades voltadas ao estudo de probabilidade e estatística; *Diversificando*, onde são trazidos jogos ou desafios e, ainda, ao final de cada capítulo, há uma seção de *Exercícios complementares* (BRASIL, 2016).

Figura 1 - Coleção Matemática Bianchini

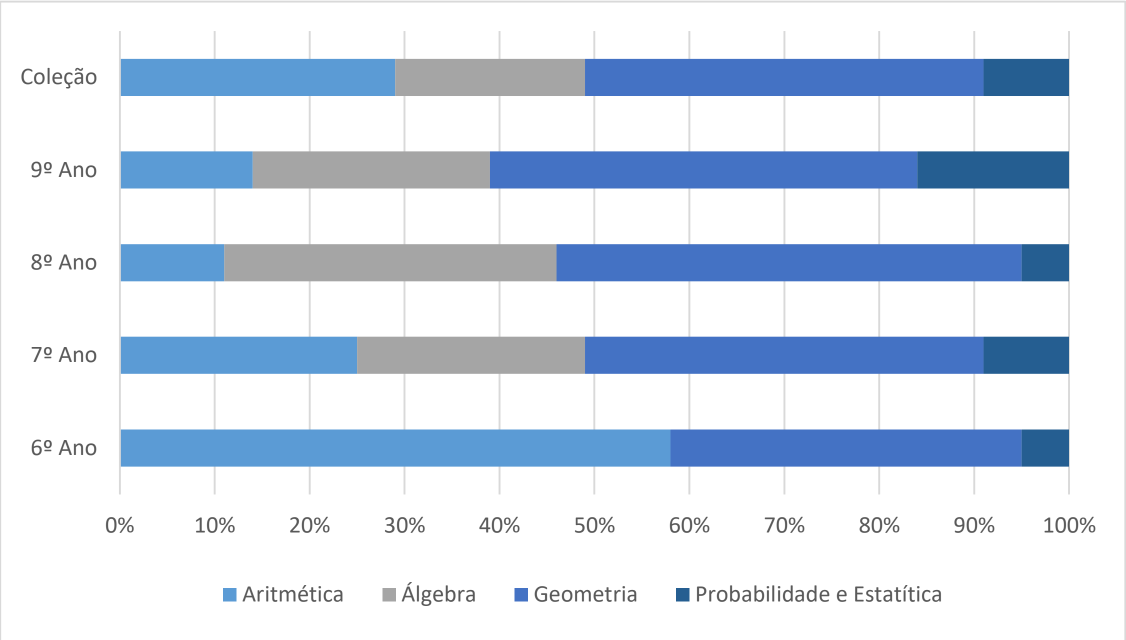
Fonte: Bianchini (2015).

Os conteúdos são apresentados da seguinte forma: inicialmente, são propostos alguns exemplos; em seguida, procede-se sua sistematização; e, por fim, são dadas tarefas (BRASIL, 2016). O Guia do Livro Didático (BRASIL, 2016) traz como destaque positivo desta coleção a articulação feita entre a Geometria e os outros campos da Matemática.

Durante minhas leituras, pude perceber que as obras dessa coleção trazem algumas tarefas diferenciadas entre si, no sentido de não serem padronizadas, não seguirem o mesmo modelo quando comparadas às demais. Como exemplo, desenho geométrico aparece com mais frequência nessa coleção do que nas outras duas analisadas.

No gráfico abaixo, apresento a distribuição dos campos da Matemática em cada volume e em toda a coleção.

Gráfico 1 – Distribuição dos campos matemáticos por volume da coleção Matemática Bianchini



Fonte: Adaptado de Brasil (2016, p. 110).

Embora Probabilidade e Estatística apareçam em todos os volumes, somente o livro destinado ao 9º ano tem um capítulo dedicado a esse campo. Nos volumes do 6º, 7º e 8º anos, as noções de Probabilidade e Estatística são trabalhadas em seções intituladas *Tratamento da Informação*. Sendo assim, todas as tarefas com elementos do conteúdo de Geometria encontradas nela foram contabilizadas dentro do campo Probabilidade e Estatística, independente do capítulo em que estava inserida.

A crítica que o Guia do Livro Didático (BRASIL, 2016) traz à referida coleção diz respeito à falta de tarefas que estimulem a análise e formulação de hipóteses, e que investiguem os conhecimentos prévios dos alunos. Por outro lado, é possível encontrar nela tarefas que trabalham com contextos atuais da sociedade. Temas relacionados aos esportes e meio ambiente também são frequentes e, dessa forma, procuram contribuir para a formação cidadã dos estudantes (BRASIL, 2016).

4.2.2 Projeto Teláris

Os livros desta coleção estão estruturados em unidades temáticas, divididas, por sua vez, em capítulos. No início de cada unidade, encontram-se questões que visam a explorar os conhecimentos prévios dos alunos, as quais são retomadas no decorrer dos capítulos que integram tais unidades. Podemos encontrar também as seções: *Explorar e Descobrir*, na qual são indicadas tarefas de experimentação; *Desafios*, na qual são propostas tarefas instigantes; e *Raciocínio Lógico*, na qual é requerida a aplicação de algumas noções de lógica para resolvê-las (BRASIL, 2016).

Como a coleção descrita anteriormente, o Projeto Teláris também conta com uma seção de *Tratamento da Informação*, em que são trabalhadas noções de Estatística. O que as diferencia é que essa coleção dispõe de ao menos um capítulo de Estatística e Probabilidade nos livros do 7º, 8º e 9º anos. Ao final de cada capítulo, é feita uma *Revisão Cumulativa* e, ao final de cada unidade, encontra-se o *Ponto de Chegada*, uma seção que traz leituras geralmente relacionadas à História da Matemática e uma revisão dos temas tratados ao longo da unidade (BRASIL, 2016).

Figura 2 - Coleção Projeto Teláris - Matemática

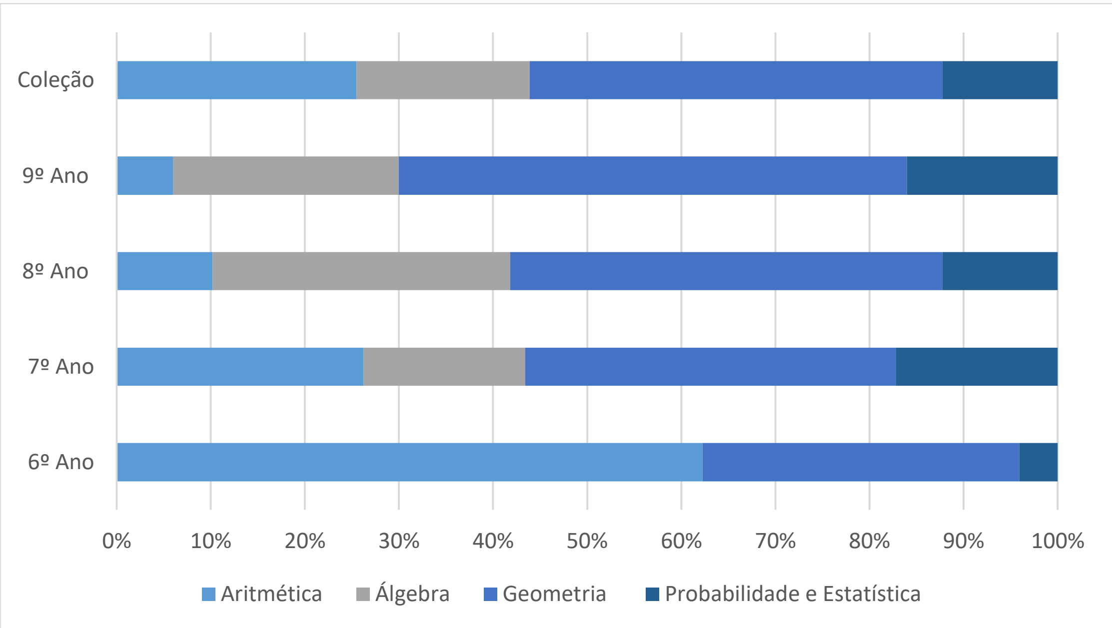
Fonte: Dante (2015).

Por um lado, o Guia do Livro Didático (BRASIL, 2016) traz como destaque positivo das obras a contextualização da Matemática e a articulação feita entre seus campos, como é o caso do livro destinado ao 9º ano, que dispõe de um capítulo em que a Álgebra é trabalhada em conjunto com a Matemática Financeira. Além disso, é possível encontrar tarefas que exploram a observação de padrões e a elaboração de hipóteses que contribuem para o desenvolvimento da capacidade de argumentação dos alunos. Essas tarefas são encontradas principalmente na seção *Explorar e Descobrir* (BRASIL, 2016).

Por outro, traz como crítica a grande quantidade de tarefas que exigem somente a aplicação direta de procedimentos. Embora o Guia do Livro Didático (BRASIL, 2016) traga essa crítica, pude observar, em minhas leituras, que as tarefas sugeridas ao final de cada conteúdo trabalhado são diferentes entre si, no sentido de não haver uma lista de atividades que siga o mesmo modelo de exemplos apresentados anteriormente. De fato, há uma grande quantidade de tarefas que requer puramente a aplicação de procedimentos, porém tais procedimentos não são retratados sob a forma de exemplos. Além disso, a quantidade de tarefas que aborda o mesmo conteúdo é menor se comparada às outras coleções.

O gráfico a seguir mostra a divisão dos campos matemáticos em cada volume e em toda a coleção.

Gráfico 2 – Distribuição dos campos matemáticos por volume na coleção Projeto Teláris



Fonte: Adaptado de Brasil (2016, p. 88).

Observe que a distribuição dos campos não é equilibrada, visto que o da Geometria, por exemplo, ocupa espaço maior se comparado aos demais.

4.2.3 Matemática: Compreensão e Prática

Os volumes são divididos em capítulos, os quais, por sua vez, são iniciados com situações do cotidiano que visam a chamar a atenção do aluno para os temas que serão discutidos no decorrer deles. Essas situações, no entanto, são pouco aproveitadas. Logo em seguida, é possível encontrar, dentro de cada capítulo, a seção *Trocando Ideias*, em que são tratadas situações introdutórias sobre o conteúdo a ser abordado. Ao final, encontra-se a seção *Trabalhando Conhecimentos Adquiridos*, na qual são propostas tarefas de revisão e *Desafios* (BRASIL, 2016).

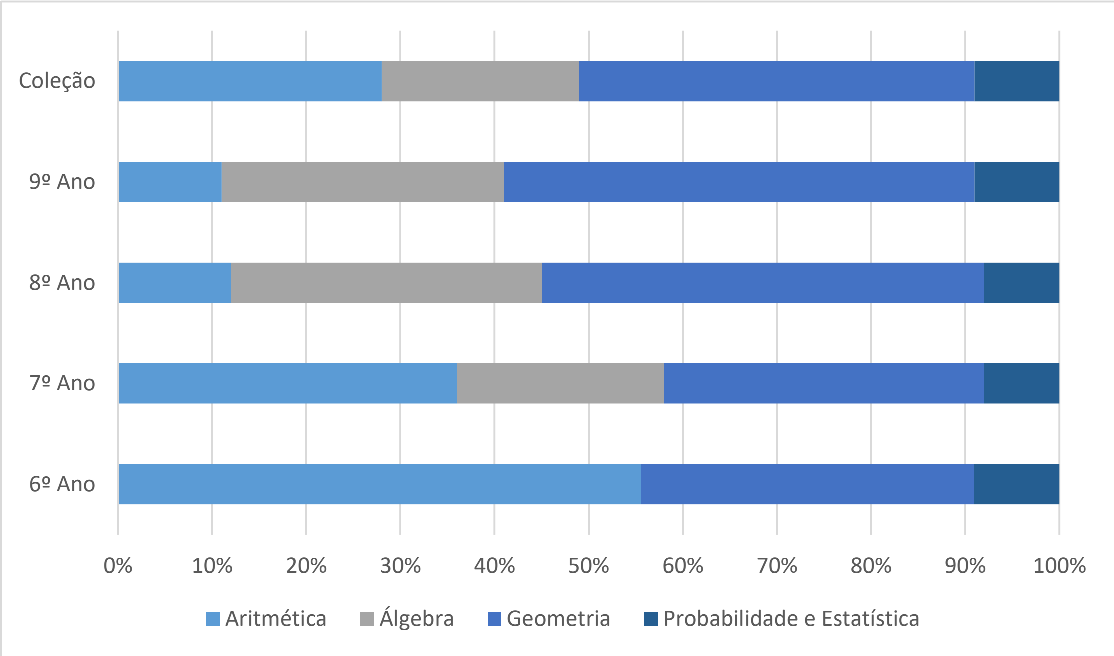
Figura 3 - Coleção Matemática: Compreensão e Prática

Fonte: Silveira (2015).

Assim como nas outras coleções, Matemática: Compreensão e Prática também segue o modelo segundo o qual o conteúdo é discutido a partir de exemplos, seguido de sistematização e finalizado com tarefas para os estudantes resolverem (BRASIL, 2016). Entretanto, pude perceber que essa coleção é a mais tradicional, no sentido de propor listas de tarefas que seguem um mesmo modelo de resolução. O Guia do Livro Didático (BRASIL, 2016) apresenta como destaque da coleção as tarefas bem contextualizadas, contudo é fácil encontrar nela enunciados com “resolva”, “efetue”, etc.

Com relação à articulação feita entre a Geometria e os demais campos matemáticos, o Guia do Livro Didático (BRASIL, 2016) evidencia o estudo de frações no 6º ano, que, por diversas vezes, é vinculado à área e ao volume de figuras. Destaca também, no livro do 7º ano, as representações algébricas dessas grandezas. Abaixo, podemos ver o gráfico com a distribuição dos campos matemáticos.

Gráfico 3 – Distribuição dos campos matemáticos por volume da coleção Matemática: Compreensão e Prática



Fonte: Adaptado de Brasil (2016, p. 81).

É possível observar que a distribuição dos campos não é feita de forma equilibrada. Segundo o Guia do Livro Didático (BRASIL, 2016), Aritmética no 6º ano e Geometria no 8º ano recebem atenção acima do recomendável.

Como nas outras coleções, Matemática: Compreensão e Prática oferece poucas oportunidades aos alunos para refletirem, elaborarem conjecturas e tirarem suas próprias conclusões (BRASIL, 2016).

4.2.4 Semelhanças entre as coleções

É possível notar que alguns pontos são comuns nas três coleções, tais como a predominância da Aritmética nos livros do 6º ano, as noções de Álgebra introduzidas a partir do 7º ano e o destaque dado ao campo da Geometria em todas as coleções. Outra observação relevante é que todos os volumes iniciam com capítulos do campo de Aritmética, que vai sendo ampliado gradativamente ao longo das quatro obras, começando com números naturais, inteiros, racionais e, por último, os irracionais. Assim, o Guia do Livro Didático (BRASIL,

2016) destaca positivamente o trabalho integrado entre Álgebra, Aritmética, Geometria, Probabilidade e Estatística em todas as obras.

De modo geral, as três coleções são semelhantes, no sentido de abordarem os mesmos conteúdos, bem como apresentarem estruturas de capítulos similares, em que inicialmente são propostos exemplos, os quais, por sua vez, são seguidos pela sistematização, por listas de tarefas para os alunos resolverem e, ao final, por uma seção destinada somente a tarefas de revisão.

Entendo que essa metodologia adotada pelos autores pode ser um dos motivos das críticas feitas pelo Guia do Livro Didático (BRASIL, 2016) às coleções no tocante à proposição de poucas tarefas que explorem a capacidade de argumentação dos estudantes. De fato, são limitadas as oportunidades oferecidas aos alunos para elaborarem suas próprias conjecturas a partir da observação de padrões, pois os autores optam por introduzir o conteúdo a partir de exemplos já resolvidos.

Foi possível notar também algumas particularidades em cada coleção. Matemática Bianchini trabalha bastante com desenho geométrico, o autor propõe diversas tarefas com uso de régua e compasso e que não estão restritas somente aos capítulos de Geometria, mas perpassam todos os campos matemáticos. Projeto Teláris é a coleção que mais explora a capacidade de argumentação dos alunos. Em todos os capítulos é possível encontrar a seção *Explorar e Descobrir* em que o autor traz tarefas investigativas, estimulando os alunos a elaborar e testar hipóteses. A proposta da coleção Matemática: Compreensão e Prática é trazer listas de tarefas para fixar aquilo que foi aprendido, portanto, o autor disponibiliza várias tarefas que possuem exatamente o mesmo modo de resolução.

4.3 PRODUÇÃO E ORGANIZAÇÃO DOS DADOS

A BNCC divide o conteúdo de Matemática em quatro campos e, dentro de cada um deles, têm-se as unidades temáticas. Dessa forma, a disciplina Matemática fica organizada em Aritmética: Números; Álgebra: Álgebra; Geometria: Geometria, Grandezas e Medidas; Probabilidade e Estatística: Probabilidade e Estatística (BRASIL, 2017). Nesta dissertação, analisei os conteúdos de Geometria presentes nos campos Aritmética, Álgebra e Probabilidade e Estatística. Sendo assim, desconsiderei as unidades temáticas e atentei-me somente aos campos.

A seguir, apresento um quadro, especificando os conteúdos de Geometria dos Anos Finais do Ensino Fundamental assumidos pela BNCC como objetos de conhecimento.

Quadro 1 - Objetos de Conhecimento

Ano Escolar	Objetos de Conhecimento de Geometria
6º Ano	Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados; Prismas e pirâmides: planificação e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas); Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas; Construção de retas paralelas e perpendiculares: fazendo uso de réguas, esquadros e softwares; Problemas de medida envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume; Ângulos: noção, usos e medidas; Plantas baixas e vistas aéreas; Perímetro de um quadrado como grandeza proporcional a medida do lado.
7º Ano	Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem; Simetrias de translação, rotação e reflexão; A circunferência como lugar geométrico; Relações entre ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal; Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos; Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero; Problemas envolvendo medições; Cálculo de volume de blocos retangulares, utilizando unidades de medida convencionais mais usuais; Equivalência de áreas de figuras planas; Medida do comprimento da circunferência.
8º Ano	Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros; Construções geométricas: ângulos de 30º, 45º, 60º, 90º e polígonos regulares; Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas; Transformações geométricas: simetrias de rotação, translação e reflexão;

	Área de figuras planas, área do círculo e comprimento de sua circunferência; Volume do cilindro reto e medidas de capacidade.
9º Ano	Demonstrações de relações entre os ângulos formadas por retas paralelas intersectadas por uma transversal; Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo; Semelhança de triângulos; Relações métricas no triângulo retângulo; Teorema de Pitágoras: verificações experimentais de demonstração; Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais; Polígonos regulares; Distância entre pontos no plano cartesiano; Vistas ortogonais de figuras espaciais; Unidade de medida para medir distâncias muito grandes e muito pequenas. Volume de prisma e cilindro.

Fonte: Elaborado a partir da leitura da BNCC (BRASIL, 2017).

Os conteúdos (ou objetos de conhecimento) especificados no quadro acima foram assumidos como do campo Geometria, dado que os livros didáticos são elaborados tomando a BNCC como referência, já que nesse documento é estabelecido o conjunto de aprendizagens essenciais aos estudantes do Ensino Básico. Por esse motivo, optei por delimitar os conteúdos de Geometria a partir da BNCC.

É importante esclarecer que, além dos objetos de conhecimento mencionados na BNCC, também foi considerado Geometria o que os autores dos livros didáticos chamam de representações geométricas. Tais representações abrangem marcação de pontos na reta numérica e no plano cartesiano, representação de equações algébricas e soluções de sistemas de equações por retas no plano cartesiano.

Tendo elucidado os conteúdos que considero parte do campo da Geometria, o próximo passo foi a produção e organização dos dados. A primeira ação desenvolvida foi uma leitura preliminar das obras e, a partir dela, tracei as próximas etapas a cumprir, as quais foram fundamentais para a produção de dados.

Na primeira delas, foi feita a identificação dos capítulos de acordo com os campos a que pertenciam. Em cada volume, os capítulos foram tabulados como pertencentes ao campo Aritmética, Álgebra, Geometria ou Probabilidade e Estatística. Para a tabulação, foi considerado o conteúdo apresentado no capítulo do livro. Deixo como exemplo o quadro abaixo, que apresenta a tabulação feita para o volume do 7º ano da coleção Matemática: Compreensão e Prática.

Quadro 2 - Tabulação dos capítulos por campos da Matemática

Campos	Capítulos
Aritmética	1: Números inteiros; 2: Números racionais; 11: Porcentagem e juros simples.
Álgebra	3: Expressões algébricas e sentenças matemáticas; 4: Equações do 1º grau com uma incógnita; 5: Inequações do 1º grau com uma incógnita.
Probabilidade e Estatística	8: Probabilidade e Estatística.
Geometria	6: Ângulos; 7: Razão; 9: Proporção; 10: Grandezas e regra de três.

Fonte: Dados da pesquisa.

A segunda etapa consistiu em elaborar uma ficha catalográfica para cada coleção, na qual constasse o título da coleção, a editora, o autor, o ano de publicação, o número de páginas total, o número de páginas por campo e o ano do Ensino Fundamental a que se destina. O número de páginas da ficha catalográfica criada por mim é diferente do número de páginas real dos livros didáticos. Isso porque considerei somente a parte textual para fazer a separação dos conteúdos de acordo com os campos. Dessa separação, foram feitos os gráficos que se encontram na seção anterior, com a distribuição dos campos matemáticos por volume de cada coleção. Deixo como exemplo no quadro abaixo uma das fichas catalográficas.

Quadro 3 - Ficha Catalográfica

Título da coleção	Matemática Bianchini
Editora	Moderna
Autor	Edwaldo Bianchini

Ano de publicação	2015
Ano do Ensino Fundamental	7º ano
Número de páginas total	251
Número de páginas por campo	Aritmética: 65; Álgebra: 61; Geometria: 104; Probabilidade e Estatística: 21

Fonte: Dados da pesquisa.

Na terceira etapa, foi feita uma segunda leitura das obras. Nela, no entanto, atentei-me somente aos capítulos não-geométricos, pois meu objetivo era destacar os trechos em que a Geometria aparecia, seja na exposição do conteúdo ou nas tarefas. Inicialmente, meu objetivo específico era investigar como a Geometria, na apresentação do conteúdo, entrelaçava-se com a Geometria presente nas tarefas. Porém, durante a produção de dados, percebi que, por diversas vezes, os autores optavam por usar a Geometria somente na exposição do conteúdo e não nas tarefas. A maioria dos exemplos oferecidos pelos autores dos livros vinha acompanhada de figuras geométricas, o que me fez conjecturar que talvez essas figuras estivessem inseridas naquele trecho numa tentativa de facilitar a explicação do conteúdo abordado. Foi esse o ponto de inflexão que me direcionou a investigar as funções que a Geometria assume. Por se tratar de uma articulação da Geometria com a Álgebra, Aritmética, Probabilidade e Estatística, pareceu-me oportuno também pensar nas contribuições do ensino intradisciplinar.

Vale notar que, nessa terceira etapa, as tarefas com Geometria em capítulos não-geométricos também foram marcadas, identificadas e agrupadas de acordo com os objetos de conhecimento estabelecidos na BNCC. Na tabela 1, consta a quantidade de tarefas com Geometria mapeada em cada coleção.

Tabela 1 - Quantidade de tarefas de Geometria por campo

Coleções	**Tarefas com Geometria em cada campo**		
	Álgebra	Aritmética	Probabilidade e Estatística

Matemática Bianchini	307	213	1
Projeto Teláris	107	199	14
Matemática: Compreensão e Prática	189	123	11

Fonte: Dados da pesquisa.

No que diz respeito à contagem das tarefas que apresentavam itens, cada um deles foi considerado uma tarefa distinta. Optei por fazer a contagem dessa maneira, pois em algumas tarefas havia itens que não abordavam conteúdos geométricos.

É possível observar que a coleção Matemática Bianchini é a que dispõe de maior quantidade de tarefas com Geometria. Dentre os campos, Probabilidade e Estatística é o que menos faz essa articulação. Por fim, a quarta etapa foi dedicada a uma nova leitura dos livros para categorização da Geometria de acordo com as funções que ela assume.

5 CAPÍTULO 4: ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo, apresento a análise dos dados que compõem a pesquisa. Buscando favorecer um olhar transversal entre os livros das diferentes coleções, optei por subdividi-los em tópicos de acordo com cada um dos Anos Finais do Ensino Fundamental. As coleções analisadas foram: Matemática Bianchini (BIANCHINI, 2015), Projeto Teláris (DANTE, 2015) e Matemática: Compreensão e Prática (SILVEIRA, 2015).

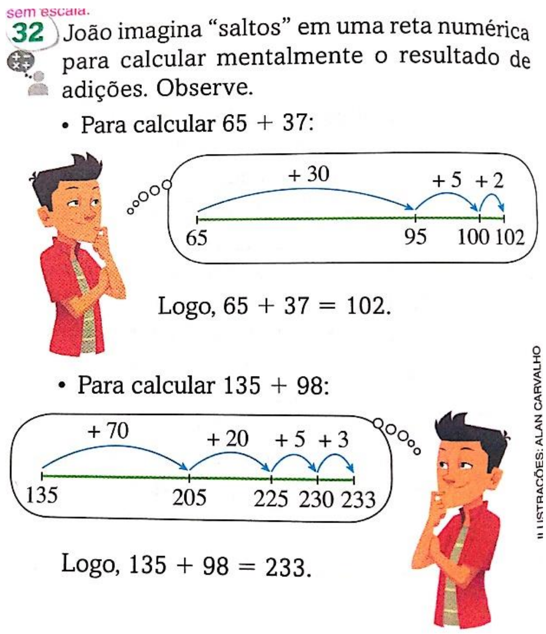
Cabe relembrar que, nas obras destinadas ao 6º ano, prevalecem, em sua maioria, os campos de Aritmética e Geometria, uma vez que a Álgebra começa a ser introduzida a partir do 7º ano. Outra particularidade é que alguns volumes não possuem um capítulo inteiramente designado ao campo de Estatística e Probabilidade.

5.1 LIVROS DIDÁTICOS DO 6° ANO

Nesse tópico, procuro traçar as características individuais das obras destinadas ao 6º ano quanto ao conteúdo de Geometria que permeia o campo Aritmética, visto que como foi dito anteriormente, a Álgebra é introduzida a partir do 7º ano e não há, nestes livros, um capítulo exclusivo para o campo Probabilidade e Estatística.

Os autores dos três livros os iniciam com o tema números naturais, que faz parte do campo Aritmética. Primeiramente, é feita uma abordagem histórica dos sistemas de numeração egípcio, babilônico, romano e, por fim, do decimal indo-arábico. Dois desses livros, a saber, Silveira (2015) e Dante (2015), estabelecem relações entre números naturais e pontos da reta numérica, enquanto Bianchini (2015) trabalha a reta somente nas tarefas, como uma técnica de cálculo mental, tal como pode ser visto na figura a seguir:

Figura 4 - Saltos na reta numérica



Fonte: Bianchini (2015, p. 44).

Observa-se, a partir desse exemplo, que existe uma lacuna entre a apresentação do conteúdo e o que está proposto nas tarefas. Ao analisar todo o livro, percebi que em nenhum momento o autor pontua a correspondência entre números naturais (e mais à frente os racionais) e os pontos da reta numérica. Há uma breve explicação (como na tarefa acima) e, em seguida, algumas adições para os alunos calcularem mentalmente. Esse mesmo procedimento é repetido para subtração.

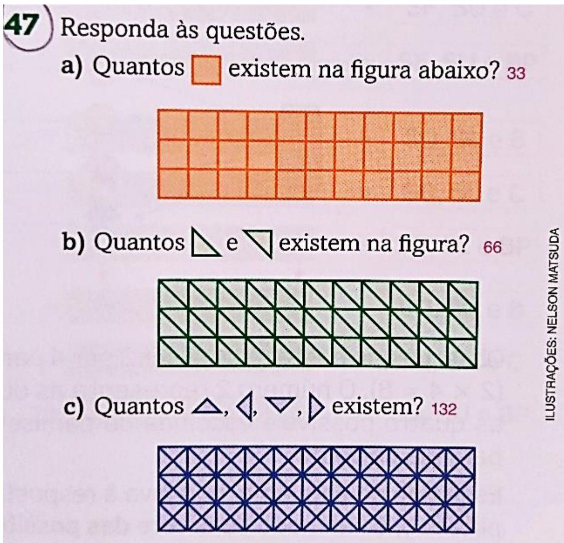
Desse modo, a reta numérica é inserida na tarefa como um suporte para o aluno fazer cálculo mental, tendo função representativa. Porém, a articulação da imagem com o discurso matemático deixa a desejar, no sentido de não marcar a existência de uma correspondência entre números e pontos.

Já Silveira (2015) apresenta diversas tarefas para os alunos localizarem pontos na reta numérica. Contudo, todas seguem a mesma abordagem de disponibilizar tarefas com formulação imperativa do tipo "faça", "determine", etc. No material, ora é dada a reta numérica e alguns pontos identificados por letras (A, B, C, ...), a partir dos quais os alunos devem dizer qual número natural corresponde àqueles pontos, ora é feito o processo inverso, em que são dados os números e os alunos devem desenhar a reta e registrá-los.

Apesar de citar a correspondência existente entre os números naturais e os pontos da reta numérica, Dante (2015) sugere uma única tarefa de marcação de pontos no plano cartesiano. O autor não faz a transição da reta para o plano e também não deixa claro o porquê dessa escolha.

Ao tratar sobre multiplicação de números naturais, Bianchini (2015) traz uma tarefa em que os alunos podem buscar relações entre a quantidade de quadradinhos em cada linha e coluna de um retângulo e a área desse retângulo. Nos itens seguintes dessa mesma tarefa (figura 5), cada quadradinho é dividido em dois triângulos e depois em quatro, tornando possível verificar que, quanto mais diminuímos a unidade de medida, maior será a quantidade de quadrados e triângulos necessários para cobrir a área de uma mesma superfície.

Figura 5 - Multiplicação de números naturais

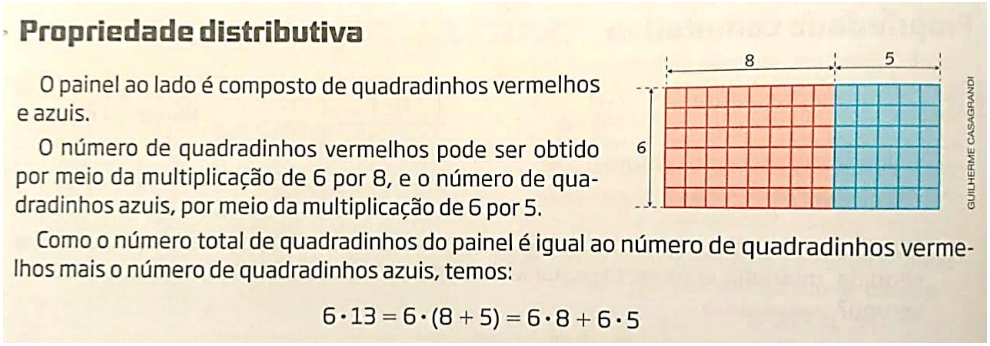


Fonte: Bianchini (2015, p. 49)

Dante (2015) aborda essa mesma ideia de multiplicação de números naturais na seção *Explorar e Descobrir*, em que é apresentada aos alunos uma sala de aula com carteiras em “disposição retangular”. Assim, espera-se que eles percebam que, ao multiplicarem a quantidade de carteiras em cada linha pela quantidade de carteiras em cada coluna, obterão a quantidade total de carteiras na sala de aula.

Para abordar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, os três livros recorreram à representação geométrica dessa propriedade como uma forma de ilustrar o algoritmo e até mesmo de justificá-lo. Tanto Bianchini (2015) como Silveira (2015) o fazem utilizando exatamente a mesma figura geométrica (figura 6) atrelada ao discurso matemático. Portanto, a Geometria pode ser caracterizada como ilustrativa e demonstrativa.

Figura 6 - Propriedade Distributiva



Propriedade distributiva

O painel ao lado é composto de quadradinhos vermelhos e azuis.

O número de quadradinhos vermelhos pode ser obtido por meio da multiplicação de 6 por 8, e o número de quadradinhos azuis, por meio da multiplicação de 6 por 5.

Como o número total de quadradinhos do painel é igual ao número de quadradinhos vermelhos mais o número de quadradinhos azuis, temos:

$$6 \cdot 13 = 6 \cdot (8 + 5) = 6 \cdot 8 + 6 \cdot 5$$

Fonte: Silveira (2015, p. 56).

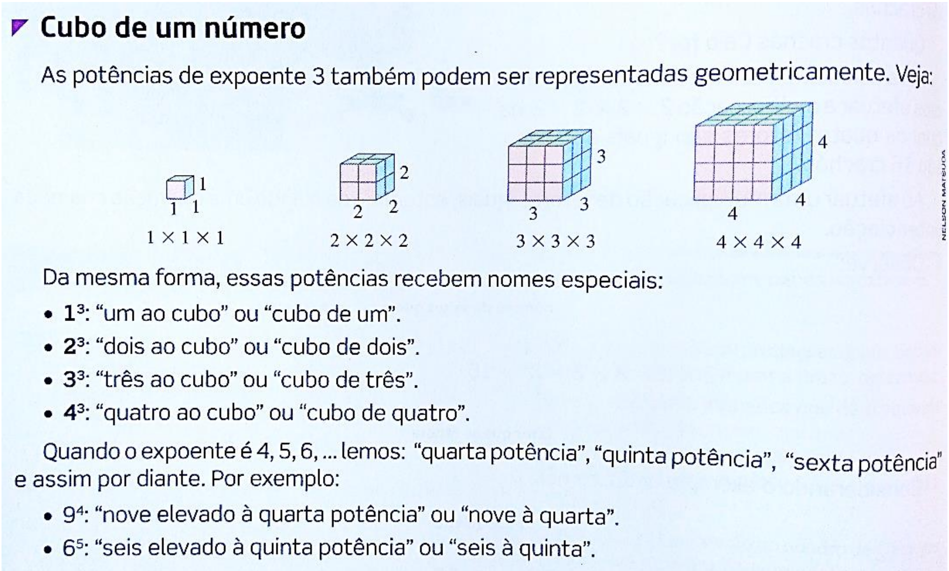
Silveira (2015) apresenta uma tarefa em que os alunos podem seguir os mesmos procedimentos demonstrados na figura acima, o que não ocorre em Bianchini (2015), posto que o mesmo não propõe nenhuma tarefa envolvendo diretamente a técnica mostrada na imagem supracitada, bem como não especifica qual outro método o aluno deve usar.

Já Dante (2015) utiliza o material dourado para representar a propriedade distributiva. Como exemplo, o autor retrata a multiplicação 3x12 com o material dourado, isto é, três barras e seis cubos. A partir daí, os alunos podem perceber que o número 12 é passível de ser decomposto em 10+2 e, ao aplicarem a propriedade distributiva 3(10+2), obtêm como resultado o número 36, mesma quantidade que havia no início com três barras e 6 cubos.

O material dourado é utilizado como apoio para a prática pedagógica dos professores que lecionam nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental (COSTA et al., 2018). Sendo assim, é possível afirmar que Dante (2015) considerou a cultura visual da sala de aula ao colocar um exemplo baseado nesse material já manipulado pelos alunos nos anos anteriores.

Para trabalhar as potências de expoente 3, os autores dos três livros fazem a associação com o volume de um cubo (como pode ser visto na figura 7), ou seja, um número n^3 pode ser representado geometricamente por um cubo cuja aresta tem medida *n*. Como todos os autores empregam a mesma abordagem para esse conteúdo em específico, é possível conjecturar que a representação de potências de expoente 3 por um cubo se estabeleceu como uma prática visual nas aulas de Matemática.

Figura 7 - Potência de expoente 3

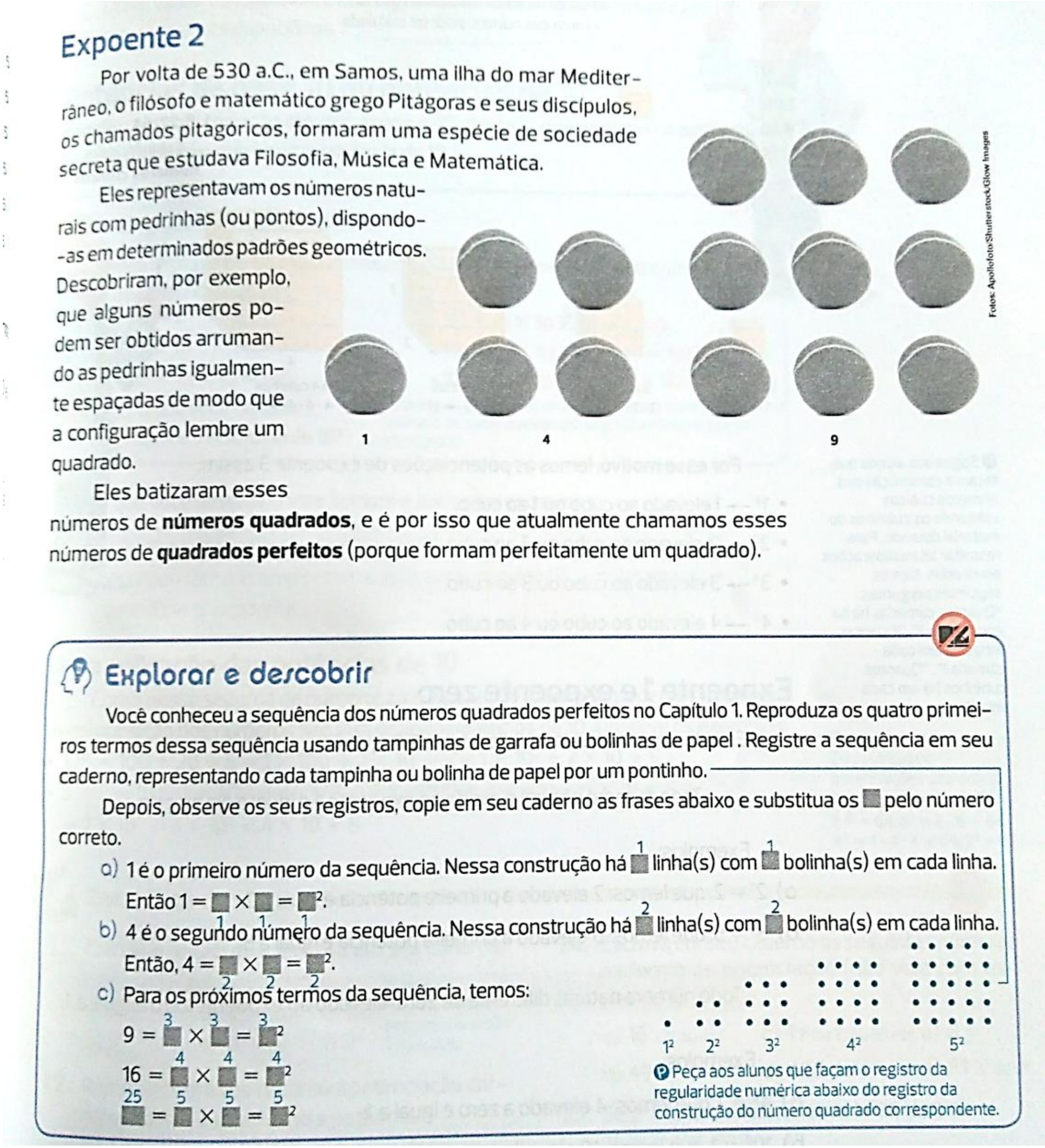


Fonte: Bianchini (2015, p. 66)

As potências de expoente 2 são associadas à área de uma região quadrada em Silveira (2015) e Bianchini (2015), isto é, um número n^2 é representado geometricamente por um quadrado cuja medida do lado vale *n*, ao passo que Dante (2015) apresenta uma breve história sobre a Escola Pitagórica e sobre como, nela, os números naturais eram representados por pedras dispostas em padrões geométricos que lembram um quadrado. Neste ponto, evidenciam-se duas culturas visuais distintas. A primeira, retratada em Silveira (2015) e Bianchini (2015), remete a uma prática visual atual da sala de aula. Já a segunda, disposta em Dante (2015), faz referência às experiências visuais dos povos antigos.

É possível notar que, na seção *Explorar e Descobrir* (figura 8), os alunos são incentivados a representar alguns números naturais de modo semelhante à Escola Pitagórica. Implicitamente, o quadrado de um número está sendo associado à área de um quadrado e, dessa forma, o autor faz a conexão com a operação inversa, a raiz quadrada, próximo conteúdo a ser trabalhado.

Figura 8 - Potências de expoente 2



Expoente 2

Por volta de 530 a.C., em Samos, uma ilha do mar Mediterrâneo, o filósofo e matemático grego Pitágoras e seus discípulos, os chamados pitagóricos, formaram uma espécie de sociedade secreta que estudava Filosofia, Música e Matemática.

Eles representavam os números naturais com pedrinhas (ou pontos), dispondo-as em determinados padrões geométricos. Descobriram, por exemplo, que alguns números podem ser obtidos arrumando as pedrinhas igualmente espaçadas de modo que a configuração lembre um quadrado.

Eles batizaram esses números de **números quadrados**, e é por isso que atualmente chamamos esses números de **quadrados perfeitos** (porque formam perfeitamente um quadrado).

Explorar e descobrir

Você conheceu a sequência dos números quadrados perfeitos no Capítulo 1. Reproduza os quatro primeiros termos dessa sequência usando tampinhas de garrafa ou bolinhas de papel. Registre a sequência em seu caderno, representando cada tampinha ou bolinha de papel por um pontinho.

Depois, observe os seus registros, copie em seu caderno as frases abaixo e substitua os ■ pelo número correto.

a) 1 é o primeiro número da sequência. Nessa construção há ■ linha(s) com ■ bolinha(s) em cada linha.
Então 1 = ■ × ■ = ■².

b) 4 é o segundo número da sequência. Nessa construção há ■ linha(s) com ■ bolinha(s) em cada linha.
Então, 4 = ■ × ■ = ■².

c) Para os próximos termos da sequência, temos:
9 = ■ × ■ = ■²
16 = ■ × ■ = ■²
■ = ■ × ■ = ■²

1^2 2^2 3^2 4^2 5^2

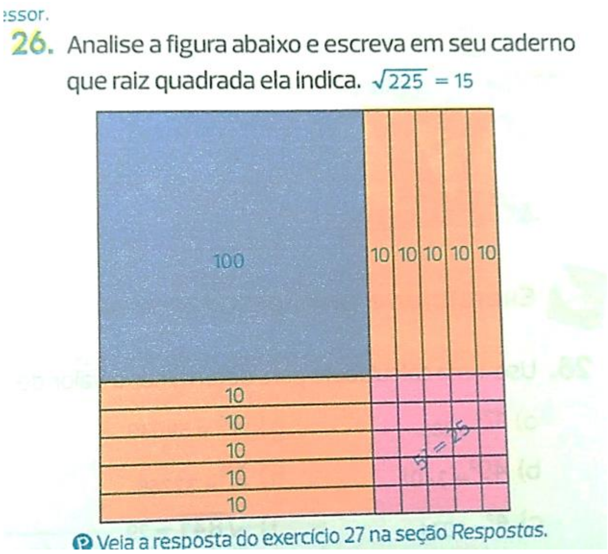
Peça aos alunos que façam o registro da regularidade numérica abaixo do registro da construção do número quadrado correspondente.

Fonte: Dante (2015, p. 111).

Como a raiz quadrada também é associada à área de uma região quadrada, Dante (2015) apresenta uma interpretação geométrica deste conteúdo, na qual os alunos são incentivados a descobrir o comprimento do lado de um quadrado de área a, encontrando, desta maneira, $\sqrt{a}$. Para calcular a raiz quadrada de números maiores que 100, o autor opta por decompô-los. Dessa forma, temos um quadrado representando as centenas, retângulos representando as dezenas e outro quadrado representando as unidades. Esses polígonos são agrupados de modo a formarem uma região quadrada, fazendo com que os alunos possam descobrir o valor de raízes quadradas.

A figura 9 mostra a proposição de uma tarefa que segue o mesmo modelo do exemplo exposto pelo autor. A Geometria (que na referida tarefa está articulada à Aritmética) tem função explicativa, pois suplementa o discurso, ou seja, a imagem se torna fundamental para que o aluno possa interpretar geometricamente a raiz quadrada.

Figura 9 - Raiz Quadrada

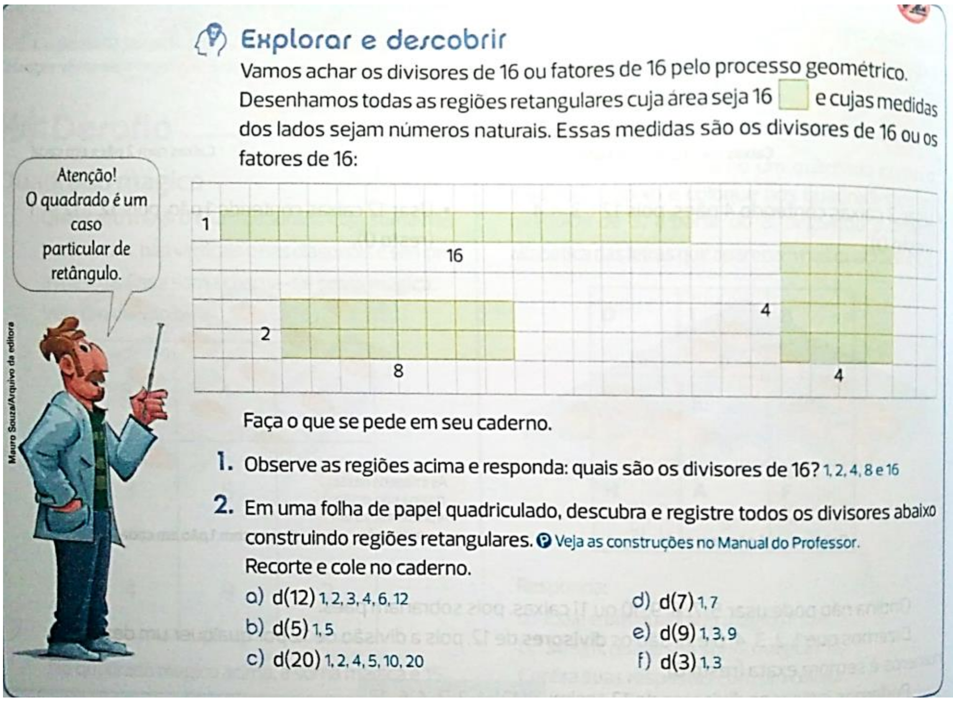


Fonte: Dante (2015, p. 119).

Os outros dois autores, Silveira (2015) e Bianchini (2015), apontam a radiciação como operação inversa da potenciação. De certa forma, a opção por não abordar a representação geométrica torna a exposição do conteúdo incompleta, pois a potência de expoente 2 foi apresentada como correspondente à área de um quadrado e, nesse sentido, seria interessante que os autores também mostrassem a raiz quadrada como o comprimento do lado de um quadrado.

Os capítulos seguintes abordam o tema divisibilidade. Dante (2015) explora o processo geométrico para encontrar os divisores de um número *a*, ou seja, em uma malha quadriculada, os alunos devem desenhar todas as regiões retangulares cuja área seja *a* e as medidas de comprimento de cada lado dos retângulos desenhados são os fatores de *a*. Nesse caso, a Geometria tem função formativa por trabalhar na prática os divisores de um número natural.

Figura 10 - Fatores de um número



Fonte: Dante (2015, p. 130).

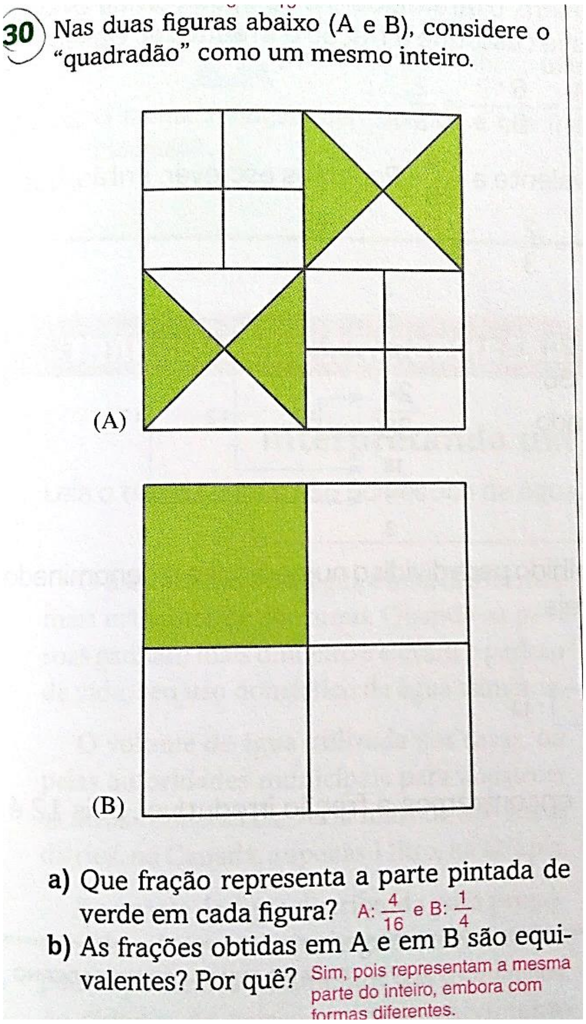
O processo geométrico mencionado acima é retomado na seção de números primos. O autor direciona os alunos a observar que alguns números só podem ser representados por uma única região retangular, ou seja, possuem como divisor apenas o 1 e ele mesmo, e conclui que esses números são chamados de números primos. Em nenhuma das tarefas que se seguem, quer na seção de divisibilidade quer na de números primos, o autor solicita o uso desse processo como resolução, deixando a cargo dos alunos a escolha por esse método. Nesse contexto, a Geometria é utilizada para discutir conceitos, porém não é considerada relevante na resolução das tarefas.

Ao trabalhar o tema frações, os três livros se apoiam em figuras geométricas (círculos, retângulos, triângulos, etc.), divididas em partes iguais. Com relação às tarefas, muitas propõem aos alunos que determinem a fração simbolizada pela parte pintada da figura ou, então, que representem geometricamente uma fração dada. Nota-se que os autores optam por figuras geométricas simples, tais como retângulos, quadrados, triângulos e círculos, pois as mesmas fazem parte da cultura visual da sala de aula, visto que são figuras comumente encontradas em todos os anos de escolarização e com as quais os alunos já estão familiarizados, o que auxilia na compreensão do conceito de frações.

Tanto Bianchini (2015) como Dante (2015) ampliam a noção de fração, associando-a à representação de um quociente, seja como uma razão que descreve o resultado de comparação entre grandezas seja como porcentagem, para a qual usamos frações de denominador 100 ou equivalentes.

A figura 11 mostra uma tarefa retirada de Bianchini (2015), em que as frações equivalentes podem ser trabalhadas concomitantemente com a ideia intuitiva de equivalência entre áreas de figuras planas.

Figura 11 - Frações equivalentes

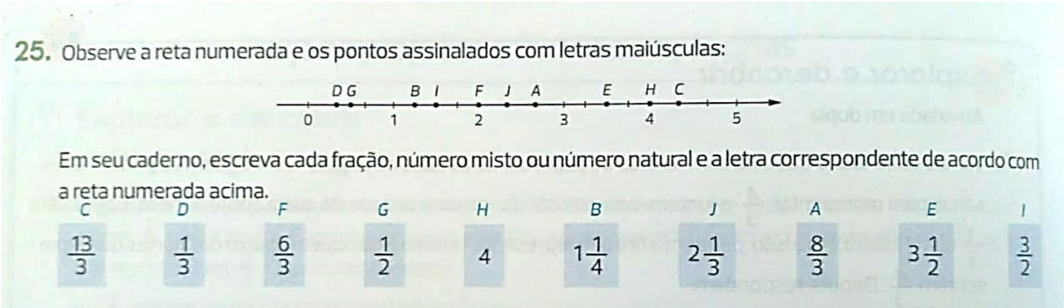


Fonte: Bianchini (2015, p. 159).

Espera-se que o aluno perceba que $\frac{4}{16}$ ocupa a mesma área do quadrado maior que $\frac{1}{4}$. Nesse caso, a Geometria exerce função formativa, por ser fundamental para o enunciado da tarefa. Na verdade, as figuras geométricas são parte de seu enunciado.

Dante (2015) optou por dar mais destaque à correspondência entre números fracionários e pontos da reta numérica, como pode ser visto na figura abaixo. Por essa razão, pode-se afirmar que a Geometria tem função representativa.

Figura 12 - Reta numerada


25. Observe a reta numerada e os pontos assinalados com letras maiúsculas:

D G B I F J A E H C

0 1 2 3 4 5

Em seu caderno, escreva cada fração, número misto ou número natural e a letra correspondente de acordo com a reta numerada acima.

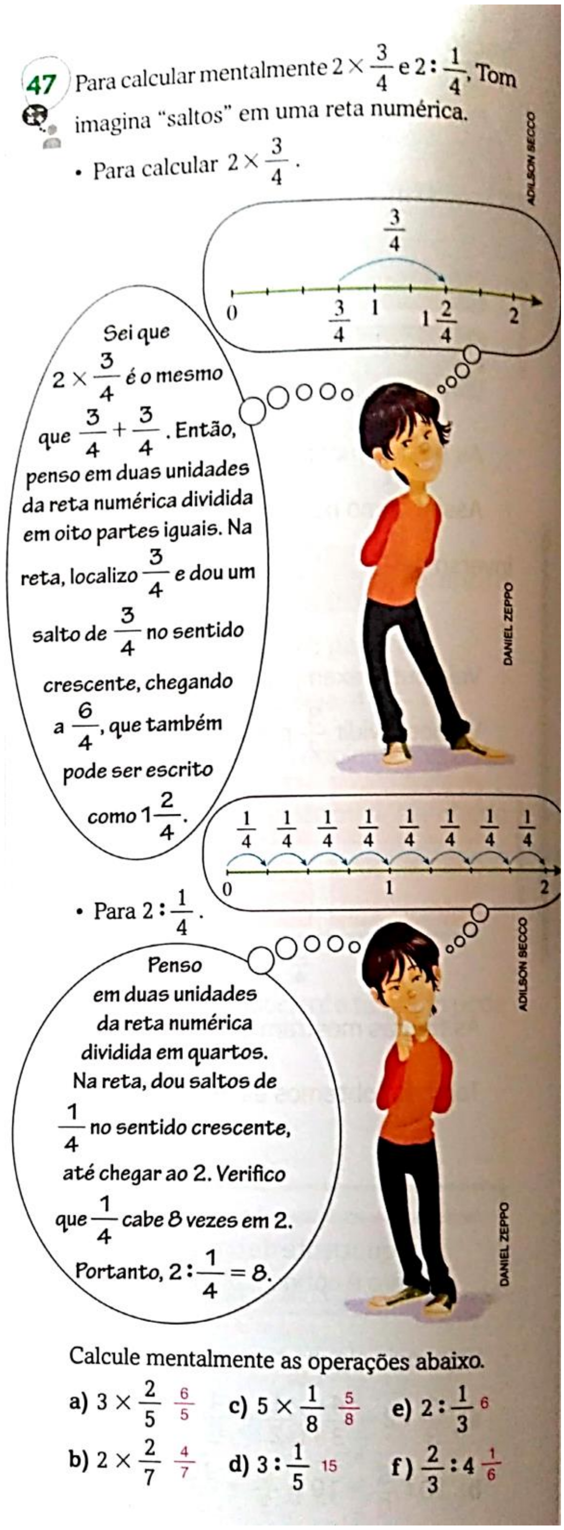
C	D	F	G	H	B	J	A	E	I
$\frac{13}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{1}{2}$	4	$1\frac{1}{4}$	$2\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$3\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

Fonte: Dante (2015, p. 166).

Em Bianchini (2015), essa correspondência é trabalhada apenas em algumas tarefas, como é o caso daquela retratada pela figura 13, em que é retomada a técnica de “imaginar saltos na reta numérica” para calcular mentalmente a adição e a subtração de frações, bem como a multiplicação e divisão delas por um número natural.

Novamente, vemos uma lacuna entre a apresentação do conteúdo e o que está proposto nas tarefas, pois em nenhum momento é mencionada a correspondência existente entre pontos da reta e números racionais. Entretanto, a tarefa é rica no sentido de proporcionar um jeito diferente de discutir o assunto, o aluno deverá segmentar a reta numérica em quatro partes, localizar a fração e, então, saltar três partes para localizar o resultado. Com essa abordagem, o autor não se restringe somente ao conteúdo de fração, ele também trabalha a partição e a localização de pontos na reta numerada.

Figura 13 - Saltos na reta numérica para operações com frações



47 Para calcular mentalmente $2 \times \frac{3}{4}$ e $2 : \frac{1}{4}$, Tom imagina "saltos" em uma reta numérica.

- Para calcular $2 \times \frac{3}{4}$.

$\frac{3}{4}$

0 $\frac{3}{4}$ 1 $1\frac{2}{4}$ 2

Sei que $2 \times \frac{3}{4}$ é o mesmo que $\frac{3}{4} + \frac{3}{4}$. Então, penso em duas unidades da reta numérica dividida em oito partes iguais. Na reta, localizo $\frac{3}{4}$ e dou um salto de $\frac{3}{4}$ no sentido crescente, chegando a $\frac{6}{4}$, que também pode ser escrito como $1\frac{2}{4}$.

ADILSON SECCO

DANIEL ZEPPO

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$

0 1 2

- Para $2 : \frac{1}{4}$.

Penso em duas unidades da reta numérica dividida em quartos. Na reta, dou saltos de $\frac{1}{4}$ no sentido crescente, até chegar ao 2. Verifico que $\frac{1}{4}$ cabe 8 vezes em 2. Portanto, $2 : \frac{1}{4} = 8$.

ADILSON SECCO

DANIEL ZEPPO

Calcule mentalmente as operações abaixo.

a) $3 \times \frac{2}{5}$ $\frac{6}{5}$

b) $2 \times \frac{2}{7}$ $\frac{4}{7}$

c) $5 \times \frac{1}{8}$ $\frac{5}{8}$

d) $3 : \frac{1}{5}$ 15

e) $2 : \frac{1}{3}$ 6

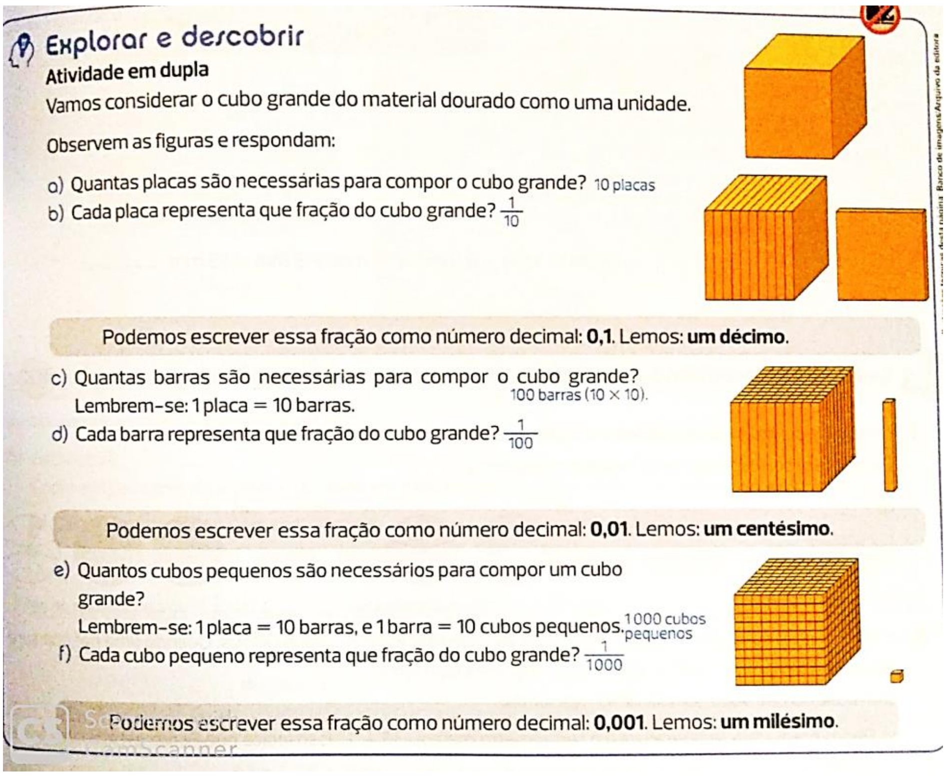
f) $\frac{2}{3} : 4$ $\frac{1}{6}$

Fonte: Bianchini (2015, p. 194).

Os autores dos três livros recorrem às representações geométricas para explicar o algoritmo da multiplicação e da divisão de frações tanto por número natural quanto por número fracionário. Entendo que essa é uma tentativa de ilustrar uma operação matemática.

O tópico seguinte, que trata dos números decimais, é, na verdade, uma ampliação dos capítulos anteriores. Nele, o estudo dos números racionais continua, porém eles são vistos e abordados em sua forma decimal. Todos os três livros relacionam os décimos, centésimos e milésimos às barras, placas e cubos do material dourado, como uma representação gráfica da divisão de um inteiro em 10, 100 ou 1000 partes. Novamente, os autores utilizam experiências visuais que estão na memória dos alunos (no caso, o material dourado) para discutir um conceito matemático.

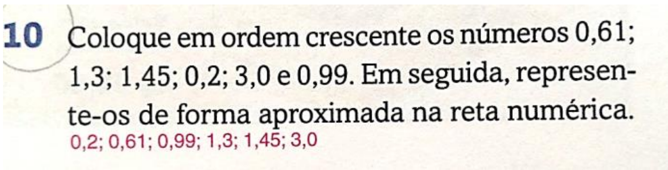
Figura 14 - Números decimais e material dourado



Fonte: Dante (2015, p. 195).

A correspondência entre números decimais e pontos da reta também é feita em Bianchini (2015) e Dante (2015), nos quais a Geometria é utilizada de forma representativa. Após a exposição desta correspondência, os autores propõem algumas tarefas para os alunos marcarem os números decimais representados por determinados pontos da reta numérica ou, então, apresentam atividades que fazem o processo inverso, isto é, fornecem os números e solicitam aos alunos que desenhem a reta e os marquem nela, tal como pode ser visto na figura 15.

Figura 15 - Correspondência entre números decimais e pontos da reta



10 Coloque em ordem crescente os números 0,61; 1,3; 1,45; 0,2; 3,0 e 0,99. Em seguida, represente-os de forma aproximada na reta numérica.
0,2; 0,61; 0,99; 1,3; 1,45; 3,0

Fonte: Bianchini (2015, p. 243).

Observa-se que Bianchini (2015), de modo geral, introduz os números naturais e fracionários sem associá-los a pontos da reta numérica. Isso porque, como mencionado anteriormente, ele apresenta o método de imaginar saltos na reta para praticar o cálculo mental, sem estabelecer essa correspondência. No entanto, ainda que tal associação tenha sido explorada em capítulos anteriores sem mais explicações quanto à equivalência existente entre os pontos da reta e os números, ao abordar números decimais nos últimos capítulos do livro, o autor dedica uma seção a essa relação entre ambos, começando pelos naturais, fracionários e, por fim, os decimais.

5.2 LIVROS DIDÁTICOS DO 7° ANO

Meu objetivo nesse tópico é esboçar as propostas dos autores ao articular a Geometria com a Álgebra e a Aritmética nas obras destinadas ao 7º ano. É importante salientar que, para esse ano, em específico, as tarefas pertencentes ao campo Probabilidade e Estatística não são trabalhadas em conjunto com a Geometria.

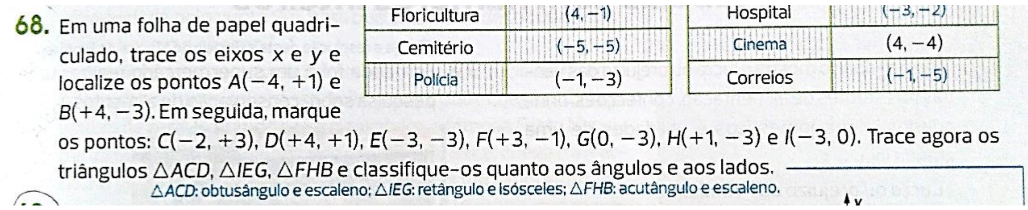
Os três livros iniciam com capítulos que fazem parte do campo Aritmética, abordando o tema dos números inteiros. Para introduzir o assunto, os autores apresentam algumas situações do cotidiano em que são empregados os números negativos e positivos como, por exemplo, a diferença de temperatura em uma cidade e a movimentação de uma conta bancária.

Assim como nos livros do 6º ano, os três autores optam por representar os números inteiros na reta numérica e propõem tarefas em que os alunos devem, então, desenhá-la e inserir nela os pontos correspondentes aos números dados. O processo inverso também é trabalhado, isto é, a reta com os pontos marcados é dada e os alunos devem dizer quais números eles representam. É interessante notar que Bianchini (2015) aborda a marcação de pontos na reta numérica com base no desenho geométrico, ou seja, os pontos são marcados com a abertura fixa do compasso; já Dante (2015) se apoia na régua graduada para fazer tal marcação. O autor do livro supracitado ainda observa que a distância entre um ponto e outro poderá ser de 1, 2 ou 3 cm, desde que seja a mesma para todos os pontos.

Estabelecida a correspondência entre pontos da reta e números inteiros, os autores se apropriam desse conceito na elucidação de temas como módulo de um número, números opostos ou simétricos e comparação de números inteiros. Nos exemplos dados, a reta numérica aparece como um suporte para mostrar as distâncias de determinados pontos em relação à origem ou à localização à direta ou à esquerda dela.

O próximo assunto tratado são as operações com números inteiros. Novamente, a reta numérica aparece nos três livros para exemplificar a adição e subtração de números inteiros como "saltos" que fazemos ou distâncias que percorremos. Dante (2015) ainda acrescenta uma seção sobre representação de pares ordenados de números inteiros no plano cartesiano. O autor da obra não faz uma conexão entre os conteúdos, apenas afirma que, assim como os alunos representaram pontos da reta como números inteiros, agora vão representar e localizar pontos no plano a partir de pares ordenados. Em seguida, apresenta algumas tarefas que abordam esse mesmo tema, como pode ser visto na figura 16.

Figura 16 - Marcação de pontos no plano cartesiano



Floricultura	(4, −1)
Cemitério	(−5, −5)
Polícia	(−1, −3)

Hospital	(−3, −2)
Cinema	(4, −4)
Correios	(−1, −5)

68. Em uma folha de papel quadriculado, trace os eixos x e y e localize os pontos $A(-4, +1)$ e $B(+4, -3)$. Em seguida, marque os pontos: $C(-2, +3)$, $D(+4, +1)$, $E(-3, -3)$, $F(+3, -1)$, $G(0, -3)$, $H(+1, -3)$ e $I(-3, 0)$. Trace agora os triângulos $\triangle ACD$, $\triangle IEG$, $\triangle FHB$ e classifique-os quanto aos ângulos e aos lados.

$\triangle ACD$: obtusângulo e escaleno; $\triangle IEG$: retângulo e isósceles; $\triangle FHB$: acutângulo e escaleno.

Fonte: Dante (2015, p. 43).

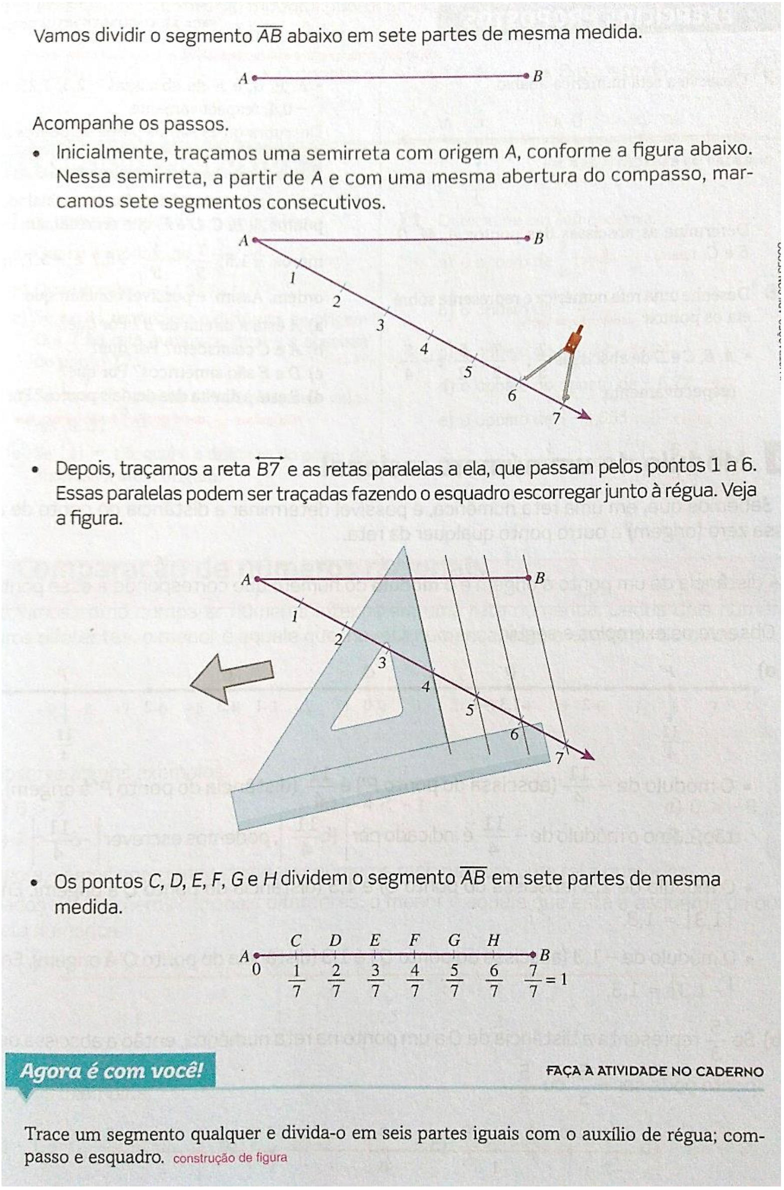
Apesar de já terem sido trabalhados no 6º ano, os números racionais são retomados nessa série. A diferença está no fato de que os autores não trabalham decimais e frações em capítulos separados (como no 6º ano), mas abordam tais conceitos simultaneamente. As representações geométricas aparecem poucas vezes, ou seja, as frações não são mais representadas por círculos ou retângulos divididos em partes iguais, assim como os números decimais também não são associados a cubos, barras e placas do material dourado. Os temas módulo, simétrico e comparação de números racionais são abordados por meio da representação na reta numérica, de modo semelhante ao que é feito com os números inteiros.

Nota-se que a Geometria como função representativa desempenha um importante papel na Aritmética básica, sendo auxílio na exposição de conceitos matemáticos como módulo, números opostos, comparação de números inteiros e racionais, adição e subtração. O aspecto visual da reta numérica é inserido nos exemplos com efeito de ensino.

Na seção *Para saber mais*, Bianchini (2015) apresenta o passo a passo de como dividir um segmento em *n* partes iguais usando régua e compasso (figura 17). Na verdade, essa construção não está diretamente relacionada às operações com números racionais, ela é proposta para reafirmar a correspondência existente entre os números e os pontos da reta. O autor faz a observação de que essa construção é uma aplicação prática do Teorema de Tales, estudado no 9º ano.

Acredito que talvez fosse interessante apresentar, nesse espaço, uma ideia intuitiva do Teorema de Tales, já que a divisão de um segmento em *n* partes iguais é um caso particular de aplicação deste teorema cuja razão é sempre 1. A Geometria, neste caso, tem função formativa, pois possibilita ao aluno desenvolver as capacidades mentais e intelectuais por meio do desenho geométrico.

Figura 17 - Divisão de um segmento em partes iguais



Vamos dividir o segmento $\overline{AB}$ abaixo em sete partes de mesma medida.

Acompanhe os passos.

- Inicialmente, traçamos uma semirreta com origem A, conforme a figura abaixo. Nessa semirreta, a partir de A e com uma mesma abertura do compasso, marcamos sete segmentos consecutivos.
- Depois, traçamos a reta $\overleftrightarrow{B7}$ e as retas paralelas a ela, que passam pelos pontos 1 a 6. Essas paralelas podem ser traçadas fazendo o esquadro escorregar junto à régua. Veja a figura.
- Os pontos C, D, E, F, G e H dividem o segmento $\overline{AB}$ em sete partes de mesma medida.

A 0, C $\frac{1}{7}$, D $\frac{2}{7}$, E $\frac{3}{7}$, F $\frac{4}{7}$, G $\frac{5}{7}$, H $\frac{6}{7}$, B $\frac{7}{7} = 1$

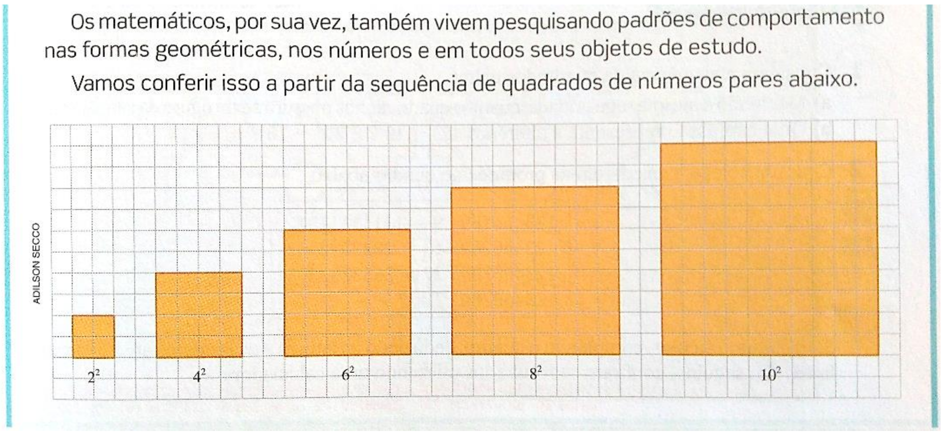
Agora é com você! FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Trace um segmento qualquer e divida-o em seis partes iguais com o auxílio de régua; compasso e esquadro. construção de figura

Fonte: Bianchini (2015, p. 51).

Em outra seção, intitulada *Para saber mais*, Bianchini (2015) aborda brevemente padrões matemáticos. Para isso, o autor representa geometricamente uma sequência de números pares ao quadrado $(2n)^2$. Em seguida, calcula a diferença entre dois quadrados de números pares consecutivos $[(2n)^2 – (2n-2)^2]$ e também faz a representação geométrica dessa nova sequência. Posteriormente, destaca alguns padrões encontrados e sugere que os alunos encontrem a próxima figura (representação geométrica) da sequência, como pode ser verificado na figura 19.

Figura 18 - Sequência de números pares ao quadrado

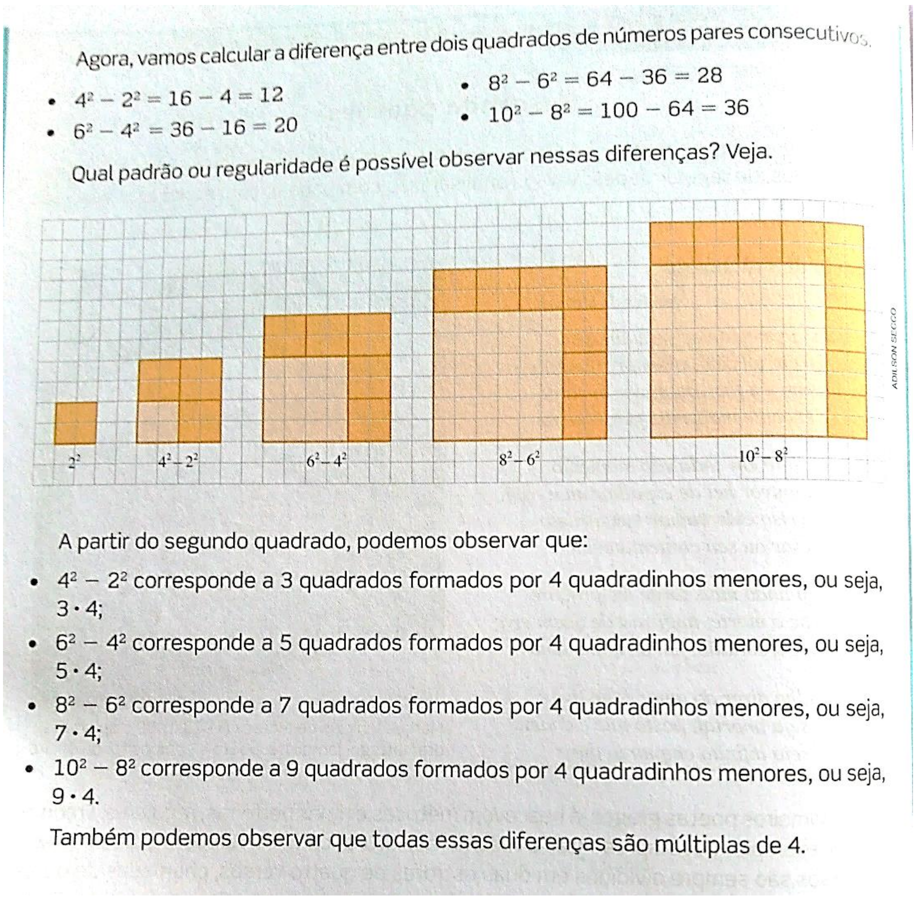


Os matemáticos, por sua vez, também vivem pesquisando padrões de comportamento nas formas geométricas, nos números e em todos seus objetos de estudo.

Vamos conferir isso a partir da sequência de quadrados de números pares abaixo.

Fonte: Bianchini (2015, p. 71).

Figura 19 - Diferença entre dois quadrados de números pares consecutivos



Agora, vamos calcular a diferença entre dois quadrados de números pares consecutivos.

- $4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$
- $6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$
- $8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28$
- $10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$

Qual padrão ou regularidade é possível observar nessas diferenças? Veja.

A partir do segundo quadrado, podemos observar que:

- $4^2 - 2^2$ corresponde a 3 quadrados formados por 4 quadradinhos menores, ou seja, $3 \cdot 4$;
- $6^2 - 4^2$ corresponde a 5 quadrados formados por 4 quadradinhos menores, ou seja, $5 \cdot 4$;
- $8^2 - 6^2$ corresponde a 7 quadrados formados por 4 quadradinhos menores, ou seja, $7 \cdot 4$;
- $10^2 - 8^2$ corresponde a 9 quadrados formados por 4 quadradinhos menores, ou seja, $9 \cdot 4$.

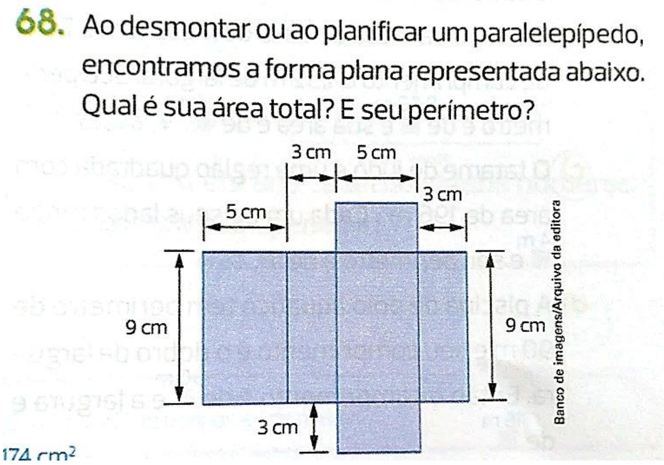
Também podemos observar que todas essas diferenças são múltiplas de 4.

Fonte: Bianchini (2015, p. 72).

Nessa situação, a Geometria é trabalhada em concomitância com a Aritmética e, além de ilustrar tanto a sequência de quadrados de números pares quanto a diferença entre dois quadrados de números pares consecutivos, possibilita ao aluno perceber que existe um padrão de crescimento para tais sequências. Portanto, a Geometria, nesse caso, também pode ser classificada como explicativa.

Dante (2015) estabelece algumas relações entre os números racionais e as grandezas e medidas. Para tanto, o autor se vale de tarefas sob a forma de situações-problema que envolvem números racionais. Algumas delas trabalham transformações de medidas (quilômetro em metro, quilograma em grama, mililitro em litro, etc.), outras contemplam o cálculo de área, perímetro ou volume. Na tarefa abaixo (figura 20), a imagem se torna fundamental para a resolução, sendo parte do enunciado da questão ao ilustrar a planificação do paralelepípedo. Dessa forma, o aluno pode visualizar o paralelepípedo decomposto em retângulos e concluir que a área total do sólido é a soma das áreas dos retângulos.

Figura 20 - Área e perímetro de um paralelepípedo planificado



Fonte: Dante (2015, p. 109).

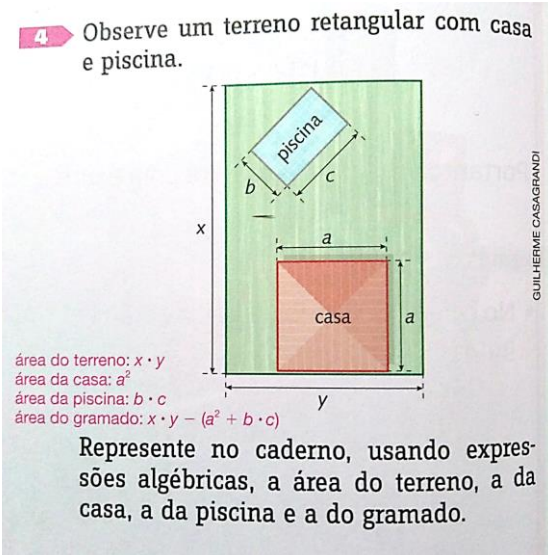
Ainda no campo Aritmética, Dante (2015) e Silveira (2015) acrescentam um capítulo sobre Matemática Financeira, no qual abordam temas como juros simples, compostos e porcentagens. No entanto, não o fazem da mesma maneira, visto que Silveira (2015) não realiza a articulação desses temas com a Geometria, enquanto Dante (2015) estabelece conexão entre porcentagens e frações, representando-as geometricamente por meio da decomposição, em partes iguais, de regiões retangulares ou circulares, seguindo, desse modo, o mesmo padrão usado na obra destinada ao 6º ano. Assim, é possível afirmar que simbolizar frações por meio de retângulos e círculos se torna prática visual da sala de aula, haja vista que os alunos estão habituados a olhá-las a partir desse tipo de ilustração.

Os capítulos seguintes trabalham conteúdos que integram o campo Álgebra. Os três livros apresentam exemplos geométricos como área e perímetro de regiões planas para abordar as expressões algébricas. As tarefas propostas seguem o mesmo padrão dos exemplos, isto é, devem representar área ou perímetro de uma figura por uma expressão algébrica.

Como essa abordagem aparece nos três livros, é possível conjecturar que se trata de uma prática visual nas aulas de Matemática, visto que, além de ilustrar um conceito abstrato, adestra o olhar dos alunos a associar a área com uma multiplicação de *x* fatores e o perímetro com a soma *x* fatores.

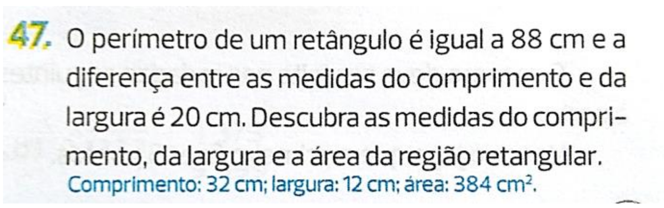
Nas figuras abaixo, temos dois modelos de tarefas. No primeiro deles, o enunciado vem acompanhado de uma imagem (figura 21); já no segundo, o aluno pode desenhar a figura com as informações dadas na proposição da tarefa ou então resolvê-la sem a necessidade de desenhá-la (figura 22). Vale observar que são poucas as que não vêm acompanhadas de figuras, a maior parte delas conta com este artifício para complementar ou reforçar as informações dadas.

Figura 21 - Enunciado de tarefa com imagem



Fonte: Silveira (2015, p. 74).

Figura 22 - Enunciado de tarefa sem imagem

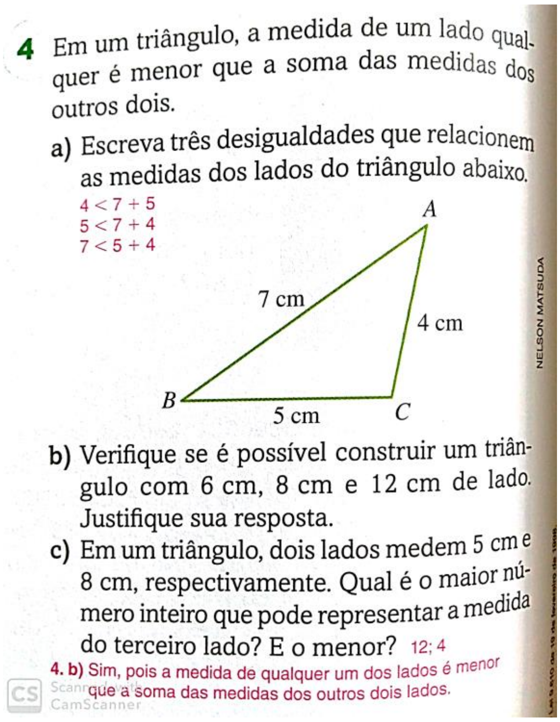

47. O perímetro de um retângulo é igual a 88 cm e a diferença entre as medidas do comprimento e da largura é 20 cm. Descubra as medidas do comprimento, da largura e a área da região retangular.
Comprimento: 32 cm; largura: 12 cm; área: 384 cm².

Fonte: Dante (2015, p. 137).

Com relação ao tema inequações, Bianchini (2015) apresenta algumas tarefas que trabalham a representação da condição de existência de um triângulo com desigualdades. O próprio enunciado da questão informa que a medida de um dos lados da figura é sempre menor que a soma das medidas dos outros dois e, a partir disso, os alunos devem verificar a possibilidade de existência de alguns triângulos. Nesse caso, a Geometria apresenta função ilustrativa, posto que torna visível um conceito algébrico.

Cabe frisar que a desigualdade triangular é discutida somente neste capítulo, visto que embora o autor traga, no livro do 6º ano, uma seção contendo a classificação dos triângulos quanto a seus lados e ângulos, sua construção com régua e compasso e sua propriedade de rigidez, sua condição de existência só será efetivamente explorada no 8º ano.

Figura 23 - Desigualdade triangular



4 Em um triângulo, a medida de um lado qualquer é menor que a soma das medidas dos outros dois.

a) Escreva três desigualdades que relacionem as medidas dos lados do triângulo abaixo.

$4 < 7 + 5$
$5 < 7 + 4$
$7 < 5 + 4$

b) Verifique se é possível construir um triângulo com 6 cm, 8 cm e 12 cm de lado. Justifique sua resposta.

c) Em um triângulo, dois lados medem 5 cm e 8 cm, respectivamente. Qual é o maior número inteiro que pode representar a medida do terceiro lado? E o menor? 12; 4

4. b) Sim, pois a medida de qualquer um dos lados é menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

Fonte: Bianchini (2015, p.132).

Nos capítulos seguintes, Bianchini (2015) e Dante (2015) introduzem o conteúdo de sistema de equações, enquanto Silveira (2015) opta por trabalhar esse tema somente no volume destinado ao 8º ano.

Em Bianchini (2015), temos inicialmente a representação de pares ordenados no plano cartesiano. Neste livro, o autor apresenta alguns exemplos, seguidos de tarefas para os alunos se familiarizarem com a localização dos pares ordenados, bem como de problemas (figura 24) que podem ser resolvidos por meio do método da adição ou substituição.

Como Dante (2015) já abordou representação de pares ordenados no plano cartesiano no capítulo dedicado aos números racionais, o autor opta por iniciar o conteúdo de sistema de equações com algumas noções sobre construção de gráfico de equações do 1º grau com duas incógnitas (figura 25), além de propor problemas geométricos que podem ser resolvidos por métodos algébricos.

Figura 24 - Sistema de equações

15 Eu tenho 25 cubos, uns com 5 cm de aresta e outros com 8 cm de aresta. Colocando uns sobre os outros, formo uma pilha com 1,70 m de altura. Quantos cubos de cada tamanho eu tenho? 10 cubos de 5 cm de aresta e 15 cubos de 8 cm de aresta

Fonte: Bianchini (2015, p. 163).

Figura 25 - Construção de gráfico

Veja a resolução deste exercício no Manual do Professor.

14. Determine cinco pares ordenados que são soluções da equação $x + 3y = 4$ e marque os pontos correspondentes a eles em um gráfico. Trace a reta na qual estão os pontos correspondentes às demais soluções. Em seguida, responda e justifique: o ponto correspondente ao par ordenado $(25, -7)$ pertence a essa reta?

15. Quantas soluções temos de determinar, para cada equação do 1º grau com duas incógnitas, para poder traçar a reta que contém as demais soluções? Bastam duas soluções, ou seja, dois pontos, pois dois pontos determinam uma reta.

Fonte: Dante (2015, p. 154).

Observa-se que as três tarefas não possuem figuras, posto que a formação de imagens mentais aparece com mais frequência nos últimos capítulos (dedicados ao campo Álgebra). Chamo a atenção para a tarefa 15 da figura 25, em que Dante (2015) traz um importante postulado da Geometria Euclidiana: dados dois pontos distintos, existe uma única reta passando por eles. Os alunos podem recorrer a esse postulado para traçar a reta que contém as soluções de uma equação algébrica do 1º grau, bastando encontrar apenas duas soluções desta equação.

Por fim, Dante (2015) e Silveira (2015) trazem, cada um, um capítulo sobre Estatística e Probabilidade, porém não há neles uma articulação com a Geometria. As poucas tarefas encontradas em Dante (2015) fazem parte da seção *Revisão Cumulativa.* Vale lembrar que o referido livro é dividido em unidades, cujos últimos capítulos contam com a seção mencionada. Nesse volume, coincidiu de este último capítulo ser o de Probabilidade e Estatística e, assim, as tarefas de Geometria presentes na seção *Revisão Cumulativa* trabalham temas como ângulos e número de ouro, já abordados em outras ocasiões.

5.3 LIVROS DIDÁTICOS DO 8º ANO

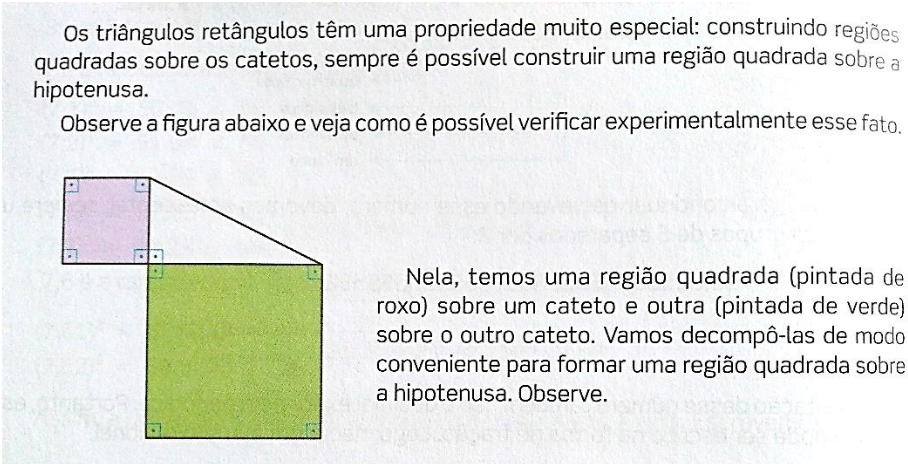
Nesse tópico, apresento as características das três obras destinadas ao 8º ano quanto à articulação feita entre a Geometria, a Álgebra e a Aritmética, visto que não foram encontradas tarefas com Geometria no campo Probabilidade e Estatística. Vale ressaltar que a partir desse ano, o campo Álgebra se sobressai em relação ao campo Aritmética.

As três obras iniciam com um capítulo sobre números reais, no qual os autores fazem uma breve revisão sobre os naturais, inteiros e racionais, utilizando a reta numérica, por diversas vezes, como artifício para mostrar a correspondência entre os números e os pontos da reta. Já para introduzir números irracionais, cada autor segue uma abordagem diferente.

Na seção *Para saber mais*, Bianchini (2015) relaciona os números irracionais com o triângulo retângulo. O autor da obra enfatiza que os triângulos retângulos têm uma “propriedade especial: construindo quadrados sobre os catetos, sempre é possível construir uma região quadrada sobre a hipotenusa” (figura 26). Assim, é feita a decomposição das regiões quadradas sobre os catetos para formar a região quadrada sobre a hipotenusa como uma justificativa da referida propriedade (figura 27).

Na seção, também há destaque para o triângulo retângulo isósceles e, por fim, algumas tarefas são propostas aos alunos, de modo que encontrem o valor da hipotenusa de determinados triângulos (figura 28). Nessa situação, a Geometria desempenha duas funções, a saber: demonstrativa, por oferecer uma prova visual à “propriedade especial” do triângulo retângulo, e formativa, por trabalhar na prática tal propriedade. Vale observar que o Teorema de Pitágoras será estudado com mais profundidade no 9º ano.

Figura 26 - Propriedade do triângulo retângulo



Os triângulos retângulos têm uma propriedade muito especial: construindo regiões quadradas sobre os catetos, sempre é possível construir uma região quadrada sobre a hipotenusa.

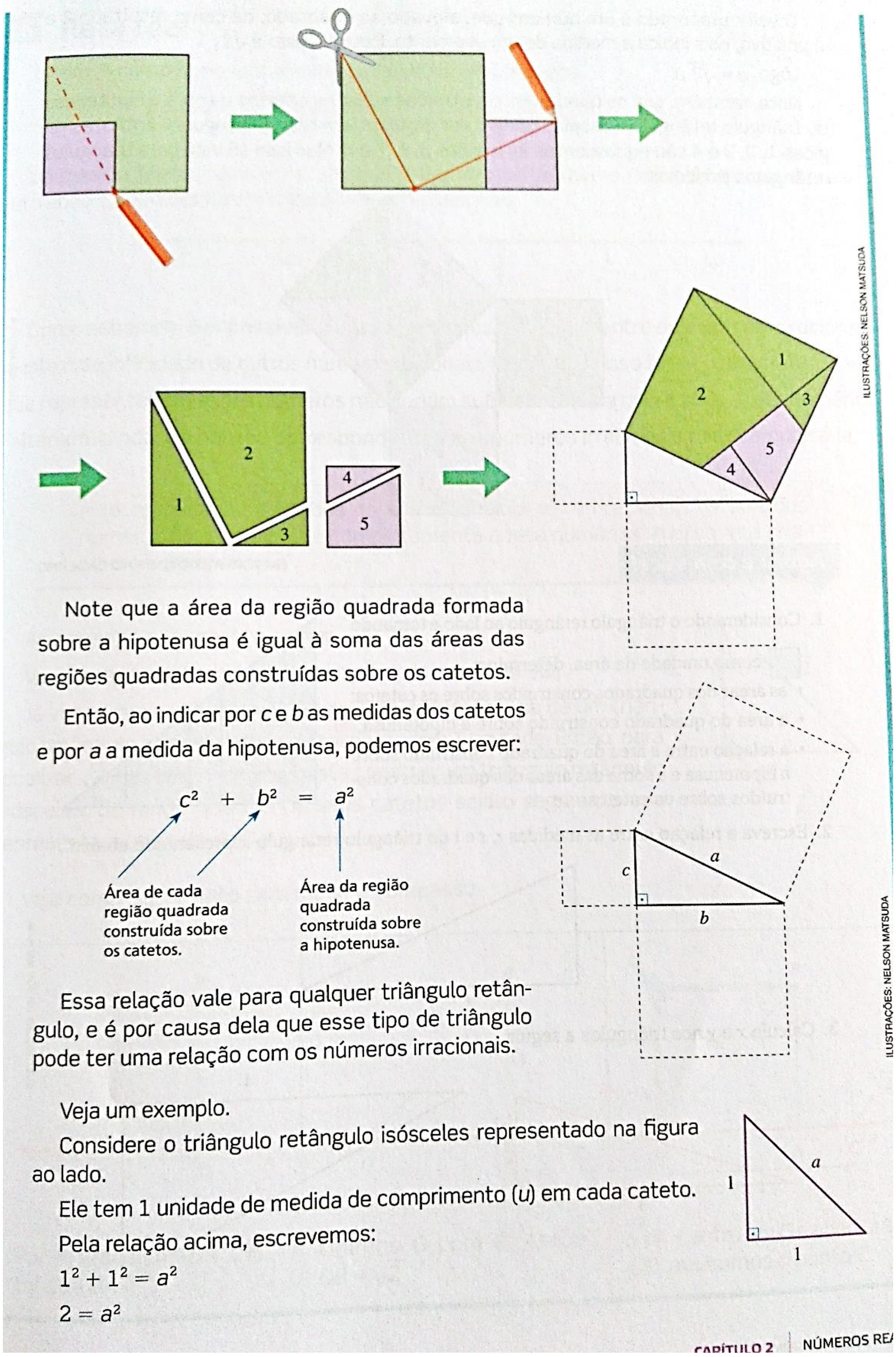
Observe a figura abaixo e veja como é possível verificar experimentalmente esse fato.

Nela, temos uma região quadrada (pintada de roxo) sobre um cateto e outra (pintada de verde) sobre o outro cateto. Vamos decompô-las de modo conveniente para formar uma região quadrada sobre a hipotenusa. Observe.

Fonte: Bianchini (2015, p. 52).

Observa-se que o autor não justifica o porquê dos cortes, apenas informa que os quadrados sobre os catetos serão decompostos de modo conveniente. Suponho que isso aconteça pois a proposta é trabalhar o Teorema de Pitágoras de forma simples proporcionando o entendimento dos alunos, já que eles ainda estão se familiarizando com as justificativas à determinadas propriedades. Assim, o autor opta por utilizar experiências práticas e materiais manipulativos com os quais os alunos podem montar uma prova visual do referido teorema.

Figura 27 - Justificativa da propriedade do triângulo retângulo



Note que a área da região quadrada formada sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das regiões quadradas construídas sobre os catetos.

Então, ao indicar por *c* e *b* as medidas dos catetos e por *a* a medida da hipotenusa, podemos escrever:

$$c^2 + b^2 = a^2$$

Área de cada região quadrada construída sobre os catetos.

Área da região quadrada construída sobre a hipotenusa.

Essa relação vale para qualquer triângulo retângulo, e é por causa dela que esse tipo de triângulo pode ter uma relação com os números irracionais.

Veja um exemplo.

Considere o triângulo retângulo isósceles representado na figura ao lado.

Ele tem 1 unidade de medida de comprimento (*u*) em cada cateto.

Pela relação acima, escrevemos:

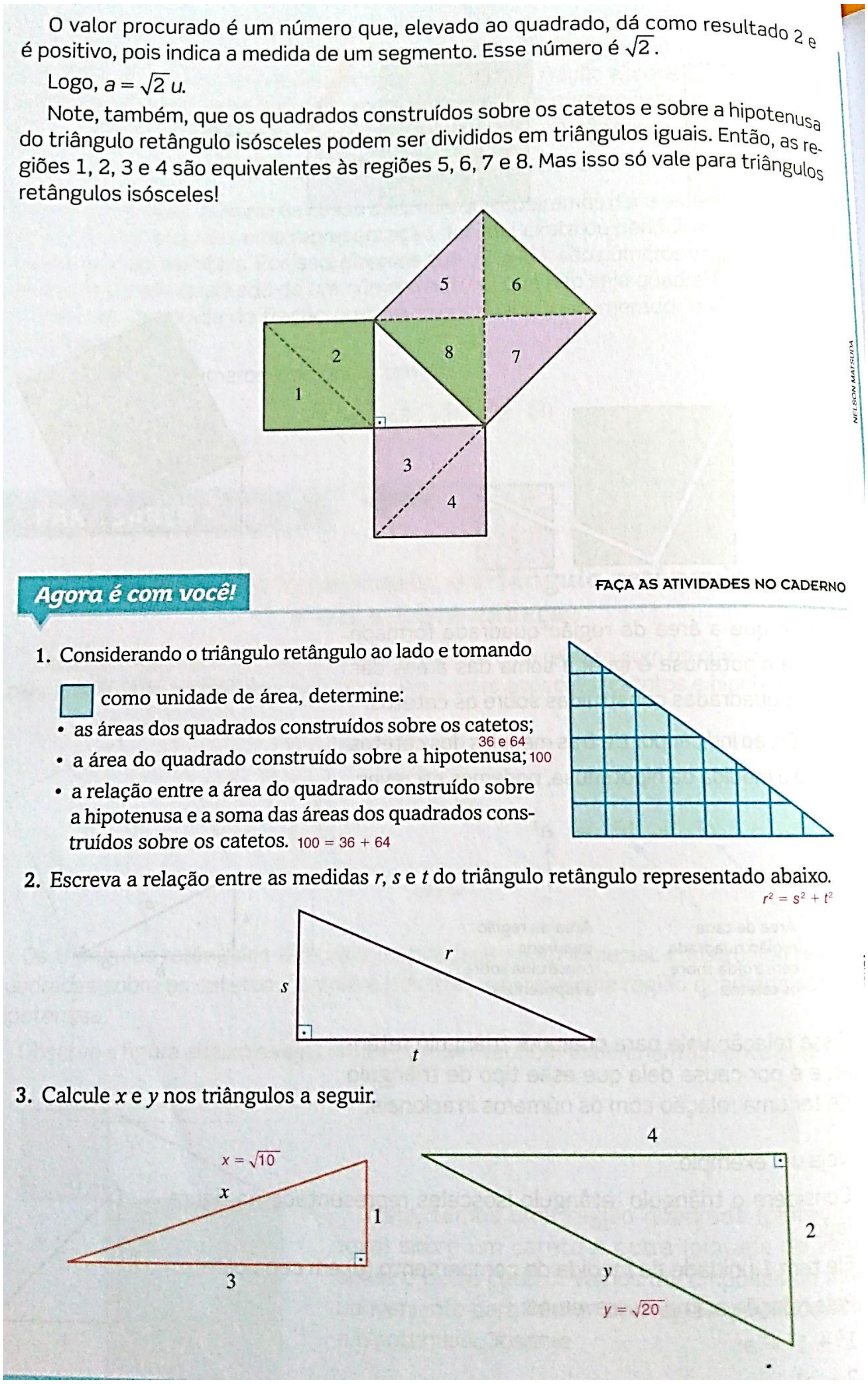
$1^2 + 1^2 = a^2$

$2 = a^2$

CAPÍTULO 2 | NÚMEROS RE

Fonte: Bianchini (2015, p. 53).

Figura 28 - Números irracionais e triângulos retângulos



O valor procurado é um número que, elevado ao quadrado, dá como resultado 2 e é positivo, pois indica a medida de um segmento. Esse número é $\sqrt{2}$.

Logo, $a = \sqrt{2}\,u$.

Note, também, que os quadrados construídos sobre os catetos e sobre a hipotenusa do triângulo retângulo isósceles podem ser divididos em triângulos iguais. Então, as regiões 1, 2, 3 e 4 são equivalentes às regiões 5, 6, 7 e 8. Mas isso só vale para triângulos retângulos isósceles!

Agora é com você! FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. Considerando o triângulo retângulo ao lado e tomando ▢ como unidade de área, determine:

- as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos; 36 e 64
- a área do quadrado construído sobre a hipotenusa; 100
- a relação entre a área do quadrado construído sobre a hipotenusa e a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. $100 = 36 + 64$

2. Escreva a relação entre as medidas *r*, *s* e *t* do triângulo retângulo representado abaixo. $r^2 = s^2 + t^2$

3. Calcule *x* e *y* nos triângulos a seguir.

Fonte: Bianchini (2015, p. 54).

Dante (2015) apresenta alguns números irracionais notáveis, como o π, ϕ e $\sqrt{2}$. Para estudar o número π, as tarefas propostas incentivam os alunos a medir o comprimento e o diâmetro de objetos circulares para, então, estabelecer as relações entre essas grandezas e se aproximar do valor de π. A partir disso, já é definido comprimento da circunferência como *C=π.d* ou *C=2πr*, em que *d* é o diâmetro e *r* é o raio. Em seguida, foram encontradas diversas tarefas (como as da figura 29) de aplicação da fórmula do comprimento da circunferência.

Entretanto, antes da primeira tarefa, o autor faz uma observação: "use π = 3,14" e, nesse sentido, o objetivo da seção, que é trabalhar com números irracionais, é perdido, já que os alunos utilizarão um número decimal para a resolução das tarefas. É importante destacar que, mais à frente, há um capítulo intitulado *Circunferências e Círculos*, em que são abordados ângulo central, setor circular, posição relativa de duas circunferências, entre outros assuntos, porém o autor não retoma o tema comprimento de circunferência.

Figura 29 - Comprimento de circunferência

Use π = 3,14 nas atividades a seguir.

24. Determine e registre em seu caderno:

a) a medida do comprimento de uma circunferência de 3 cm de raio; 18,84 cm (6 × 3,14)

b) a medida do comprimento de uma circunferência de 10 cm de diâmetro. 31,4 cm (10 × 3,14)

25. Calcule a medida do raio de uma circunferência de comprimento igual a 25,12 cm.
4 cm (25,12 : 3,14 = 8; 8 : 2 = 4)

26. Na sua caminhada matinal, Mariana deu 10 voltas em uma praça circular com raio de 30 m. Nessa caminhada, ela percorreu mais ou menos do que 2 km?
Menos (60 · 3,14 = 188,4 m; 10 · 188,4 = 1884 m = 1,884 km < 2 km)

Mauro Souza/Arquivo da editora

Fonte: Dante (2015, p. 29).

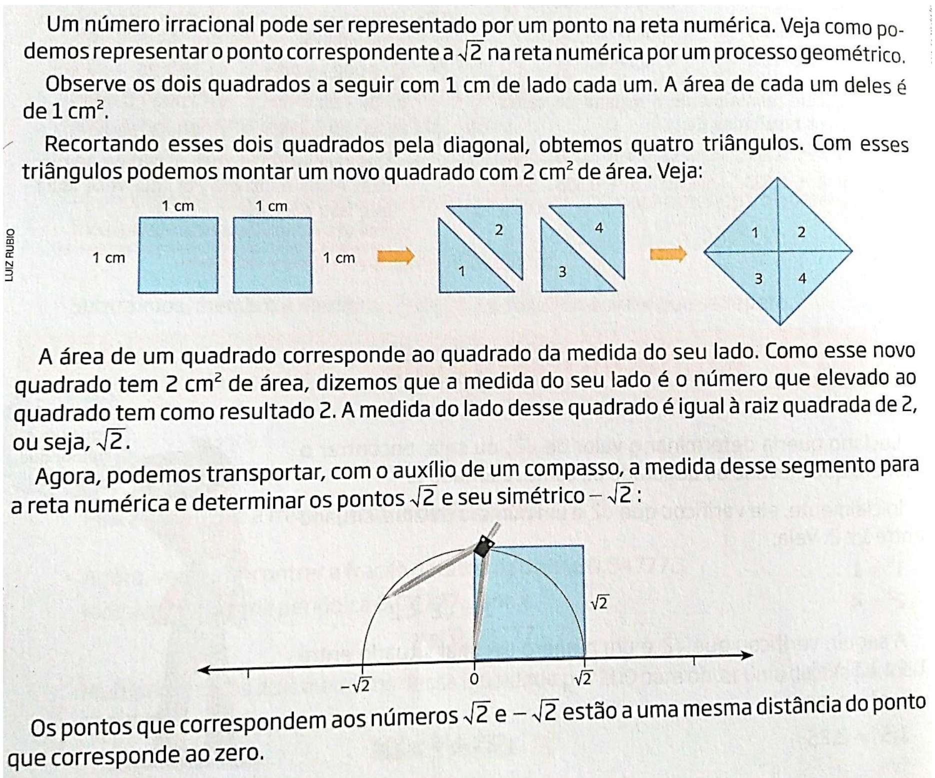
Observa-se que as tarefas 24 e 25 não possuem imagens e, sendo assim, nelas, a Geometria é classificada como formação de imagem mental. Já a tarefa 26 apresenta uma ilustração, porém a mesma não suplementa o enunciado da questão, bem como não oferece auxílio em sua resolução é apenas um ornamento.

O número $\sqrt{2}$ é representado como a medida do lado de um quadrado cuja área vale 2 cm^2. Em seguida, Dante (2015) aponta um método para encontrar o valor decimal do número

$\sqrt{2}$ por meio de aproximações e as tarefas propostas caminham nessa mesma direção. Novamente, o objetivo do capítulo se perde, pois os alunos trabalharão somente com números decimais e não com irracionais.

Silveira (2015) introduz números irracionais na tentativa de encontrar um número que, elevado ao quadrado, tenha como resultado 2. O autor do material conclui que não é possível expressar o número $\sqrt{2}$ como decimal exato e nem como dízima periódica, portanto, o classifica como número irracional. Como exemplo, são apresentados dois quadrados de área 1 cm^2 que, ao terem suas diagonais cortadas, produzem quatro triângulos, cujo reagrupamento forma um novo quadrado de área 2 cm^2. Sendo assim, a medida do lado desse quadrado é $\sqrt{2}$ cm. A Geometria é inserida nessa tarefa tanto para ilustrar um número irracional, dando visibilidade àquilo que é abstrato, quanto para trabalhar esse mesmo conceito de forma prática, usando elementos do desenho geométrico.

Figura 30 - Diagonal do quadrado


Um número irracional pode ser representado por um ponto na reta numérica. Veja como podemos representar o ponto correspondente a $\sqrt{2}$ na reta numérica por um processo geométrico.

Observe os dois quadrados a seguir com 1 cm de lado cada um. A área de cada um deles é de 1 cm^2.

Recortando esses dois quadrados pela diagonal, obtemos quatro triângulos. Com esses triângulos podemos montar um novo quadrado com 2 cm^2 de área. Veja:

A área de um quadrado corresponde ao quadrado da medida do seu lado. Como esse novo quadrado tem 2 cm^2 de área, dizemos que a medida do seu lado é o número que elevado ao quadrado tem como resultado 2. A medida do lado desse quadrado é igual à raiz quadrada de 2, ou seja, $\sqrt{2}$.

Agora, podemos transportar, com o auxílio de um compasso, a medida desse segmento para a reta numérica e determinar os pontos $\sqrt{2}$ e seu simétrico $-\sqrt{2}$:

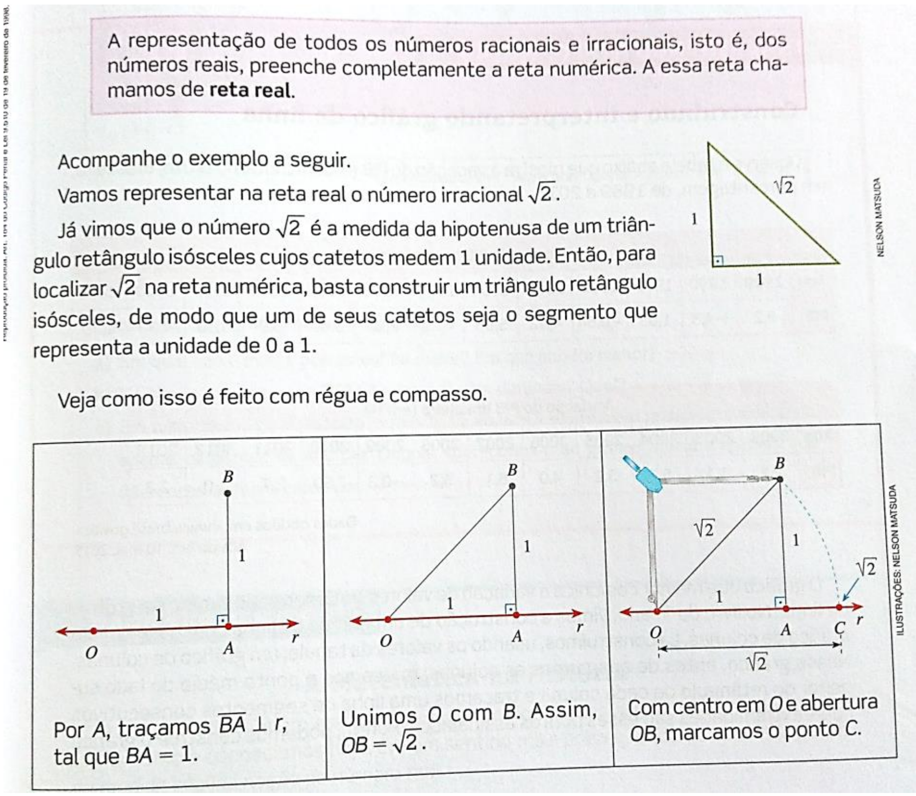
Os pontos que correspondem aos números $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ estão a uma mesma distância do ponto que corresponde ao zero.

Fonte: Silveira (2015, p. 20).

Em seguida, o autor inclui no material duas seções, intituladas *Lendo* e *Aprendendo* que, como os próprios títulos sugerem, possuem uma abordagem meramente informativa. Assim, na primeira delas, é apresentado o número π e os modos como ele pode ser encontrado, a saber, por meio da razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro; na segunda, é abordado o número de ouro e sua importância para os gregos.

Para finalizar o capítulo, Bianchini (2015) e Dante (2015) dedicam uma seção à reta real. Enquanto Dante (2015) frisa a correspondência, um a um, entre os números reais e os pontos da reta numérica, Bianchini (2015) afirma que tais números a preenchem completamente e retoma a construção, feita na seção *Para saber mais* (figura 28), do triângulo retângulo isósceles com catetos de medida 1 como forma de representar o número $\sqrt{2}$ na reta, por meio do desenho geométrico. Sendo assim, a Geometria tem função formativa.

Figura 31 - Representação do número $\sqrt{2}$ na reta real

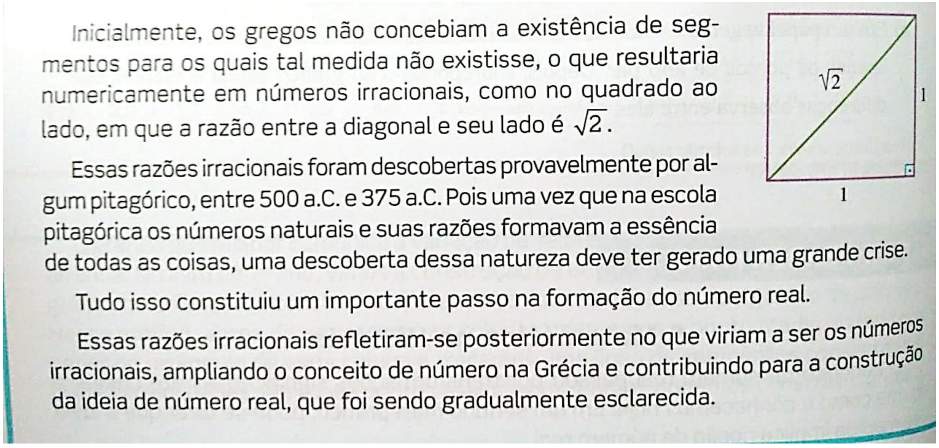


Fonte: Bianchini (2015, p. 55).

Em seguida, Bianchini (2015) propõe algumas tarefas para que os alunos representem números irracionais na reta real, seguindo o exemplo dado. A base dessa abordagem é o Teorema de Pitágoras, apresentado aos alunos como uma propriedade especial dos triângulos retângulos e que, de certa forma, demanda deles uma noção intuitiva, pois o mesmo só será estudado no ano seguinte (9º ano). Entretanto, tendo em vista que, diferentemente dos outros dois livros, o foco do autor está nos números irracionais e não nos números decimais. A opção por essa abordagem me parece trazer um discurso visual que nos demais livros é limitado, no sentido de trabalhar o Teorema de Pitágoras exclusivamente no campo Geometria e reduzir os números irracionais aos decimais.

Assim, Bianchini (2015) faz essa articulação da Geometria com a Aritmética e consegue trabalhar números irracionais de maneira mais ampla e completa se comparado a Dante (2015) e Silveira (2015). Além disso, na seção *Para saber mais*, novamente Bianchini (2015) discorre sobre como os gregos descobriram as razões irracionais e tece comentários acerca da diagonal de um quadrado de lado 1, oferecendo aos alunos a ilustração do número racional $\sqrt{2}$.

Figura 32 - Diagonal do quadrado



Inicialmente, os gregos não concebiam a existência de segmentos para os quais tal medida não existisse, o que resultaria numericamente em números irracionais, como no quadrado ao lado, em que a razão entre a diagonal e seu lado é $\sqrt{2}$.

Essas razões irracionais foram descobertas provavelmente por algum pitagórico, entre 500 a.C. e 375 a.C. Pois uma vez que na escola pitagórica os números naturais e suas razões formavam a essência de todas as coisas, uma descoberta dessa natureza deve ter gerado uma grande crise.

Tudo isso constituiu um importante passo na formação do número real.

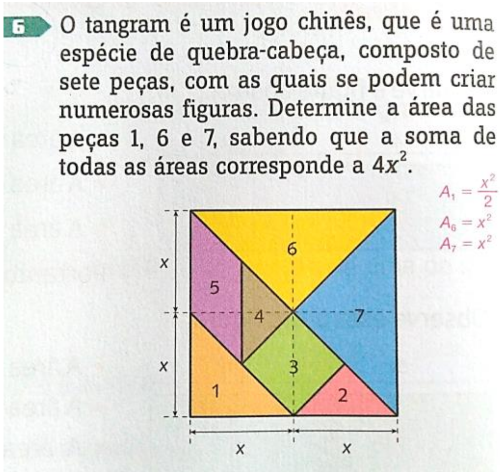
Essas razões irracionais refletiram-se posteriormente no que viriam a ser os números irracionais, ampliando o conceito de número na Grécia e contribuindo para a construção da ideia de número real, que foi sendo gradualmente esclarecida.

Fonte: Bianchini (2015, p. 58).

Os capítulos seguintes pertencem, em todos os livros, ao campo Álgebra e todos são iniciados com expressões algébricas. No entanto, Bianchini (2015) e Silveira (2015) abordam as operações com monômios, enquanto Dante (2015) traz expressões algébricas equivalentes, restrições no denominador ($\neq 0$) e, apenas no capítulo subsequente, trata dos monômios e das operações com monômios.

De todo modo, todos os autores apresentam exemplos e tarefas em que os alunos devem encontrar as expressões algébricas que representem a área ou o perímetro de figuras geométricas (figuras 33 e 34). Essa mesma abordagem aparece nos livros do 7º ano, tornando-se uma prática visual para esse conteúdo em específico. Dante (2015) ainda retoma a fórmula para calcular o número de diagonais de um polígono, tema também já abordado no 7º ano (figura 35).

Figura 33 - Tangram e monômios



6 O tangram é um jogo chinês, que é uma espécie de quebra-cabeça, composto de sete peças, com as quais se podem criar numerosas figuras. Determine a área das peças 1, 6 e 7, sabendo que a soma de todas as áreas corresponde a $4x^2$.

$A_1 = \frac{x^2}{2}$

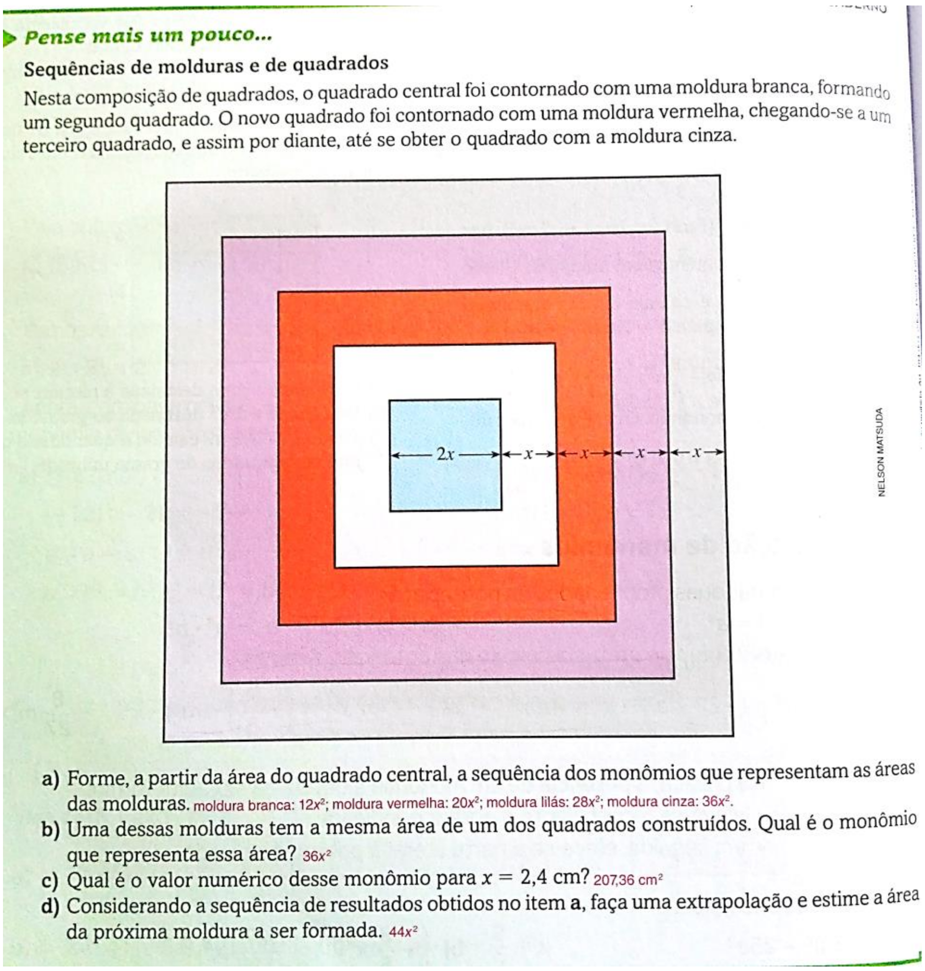
$A_6 = x^2$

$A_7 = x^2$

Fonte: Silveira (2015. p. 54).

Na tarefa retratada pela figura 33, a Geometria tem função ilustrativa ao trazer a imagem do Tangram como um suporte para que o aluno resolva a tarefa ao mostrar a fração do todo que cada um dos três triângulos representa.

Figura 34 - Área das molduras e monômios



Pense mais um pouco...

Sequências de molduras e de quadrados

Nesta composição de quadrados, o quadrado central foi contornado com uma moldura branca, formando um segundo quadrado. O novo quadrado foi contornado com uma moldura vermelha, chegando-se a um terceiro quadrado, e assim por diante, até se obter o quadrado com a moldura cinza.

a) Forme, a partir da área do quadrado central, a sequência dos monômios que representam as áreas das molduras. moldura branca: $12x^2$; moldura vermelha: $20x^2$; moldura lilás: $28x^2$; moldura cinza: $36x^2$.

b) Uma dessas molduras tem a mesma área de um dos quadrados construídos. Qual é o monômio que representa essa área? $36x^2$

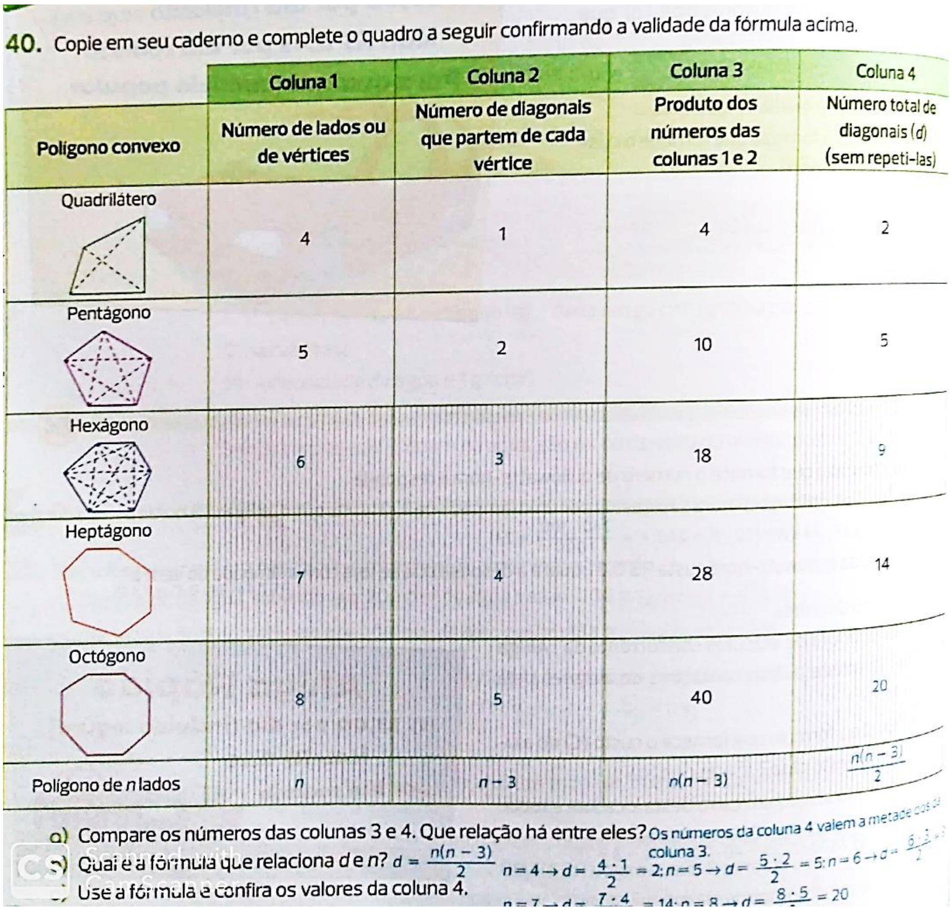
c) Qual é o valor numérico desse monômio para $x = 2{,}4$ cm? $207{,}36$ cm²

d) Considerando a sequência de resultados obtidos no item **a**, faça uma extrapolação e estime a área da próxima moldura a ser formada. $44x^2$

Fonte: Bianchini (2015, p.74).

A Geometria inserida na tarefa acima (figura 34) também tem função ilustrativa, posto que com base na figura geométrica, os alunos podem perceber que, para calcular a área da moldura branca, é necessário saber a área do quadrado branco e subtrair dela a área do quadradro azul. Esse mesmo procedimento deverá se repetir para todas as outras molduras.

Figura 35 - Diagonais de polígonos convexos



40. Copie em seu caderno e complete o quadro a seguir confirmando a validade da fórmula acima.

Polígono convexo	Coluna 1 Número de lados ou de vértices	Coluna 2 Número de diagonais que partem de cada vértice	Coluna 3 Produto dos números das colunas 1 e 2	Coluna 4 Número total de diagonais (d) (sem repeti-las)
Quadrilátero	4	1	4	2
Pentágono	5	2	10	5
Hexágono	6	3	18	9
Heptágono	7	4	28	14
Octógono	8	5	40	20
Polígono de n lados	n	$n - 3$	$n(n - 3)$	$\frac{n(n-3)}{2}$

a) Compare os números das colunas 3 e 4. Que relação há entre eles? Os números da coluna 4 valem a metade dos da coluna 3.

b) Qual é a fórmula que relaciona d e n? $d = \frac{n(n-3)}{2}$

c) Use a fórmula e confira os valores da coluna 4. $n = 4 \rightarrow d = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2$; $n = 5 \rightarrow d = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$; $n = 6 \rightarrow d = \frac{6 \cdot 3}{2}$ ... $n = 7 \rightarrow d = \frac{7 \cdot 4}{...} = 14$; $n = 8 \rightarrow d = \frac{8 \cdot 5}{...} = 20$

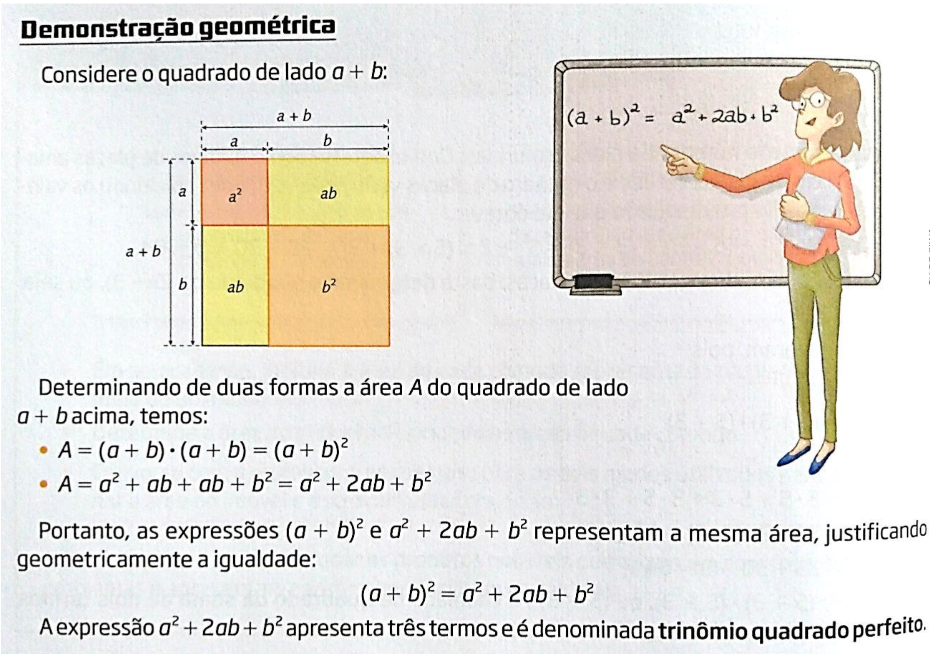
Fonte: Dante (2015, p. 58).

O objetivo dessa tarefa (figura 35) é que os alunos deduzam a fórmula que relaciona a quantidade de diagonais com a quantidade de lados de um polígono. Sendo assim, a Geometria pode ser classificada como explicativa, já que as diagonais tracejadas nas figuras geométricas auxiliam na contagem, ou demonstrativa, por induzir os alunos a encontrar as relações pertinentes para obtenção da fórmula que relaciona as diagonais com os lados do polígono.

A abordagem empregada para discutir polinômios é semelhante nos três volumes. Novamente, as operações com polinômios são apresentadas a partir de exemplos de cálculo de área ou perímetro de figuras geométricas e as tarefas propostas adotam os mesmos procedimentos. A escolha por essa abordagem reforça, mais uma vez, o argumento de que relacionar tais operações com área ou perímetro de figuras geométricas se tornou uma prática visual na sala de aula.

O próximo conteúdo tratado são os produtos notáveis. Os três autores optam pela representação geométrica do quadrado da soma $(a+b)^2$, quadrado da diferença $(a-b)^2$ e produto da soma pela diferença $(a+b)(a-b)$. A figura 36 retrata a demonstração geométrica da igualdade $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. É uma prova visual em que o aluno pode verificar, por meio da figura geométrica, que a área de um quadrado de lado $a+b$ é equivalente às áreas dos quadrados e retângulos de lados a e b. Nesse caso, a Geometria tem função demonstrativa.

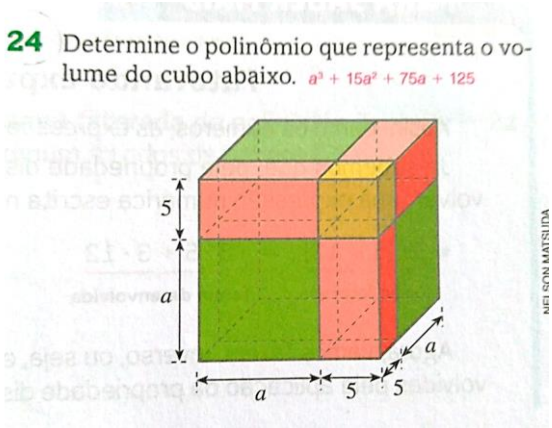
Figura 36 - Demonstração geométrica do trinômio quadrado perfeito



Fonte: Silveira (2015, p. 74).

Bianchini (2015) ainda acrescenta o cubo da soma e da diferença de dois termos e propõe uma tarefa para trabalhar esse assunto (figura 37). Os próprios alunos podem verificar, com o auxílio da figura geométrica, que $(a+5)^3=a^3+15.a^3+75.a+125$.

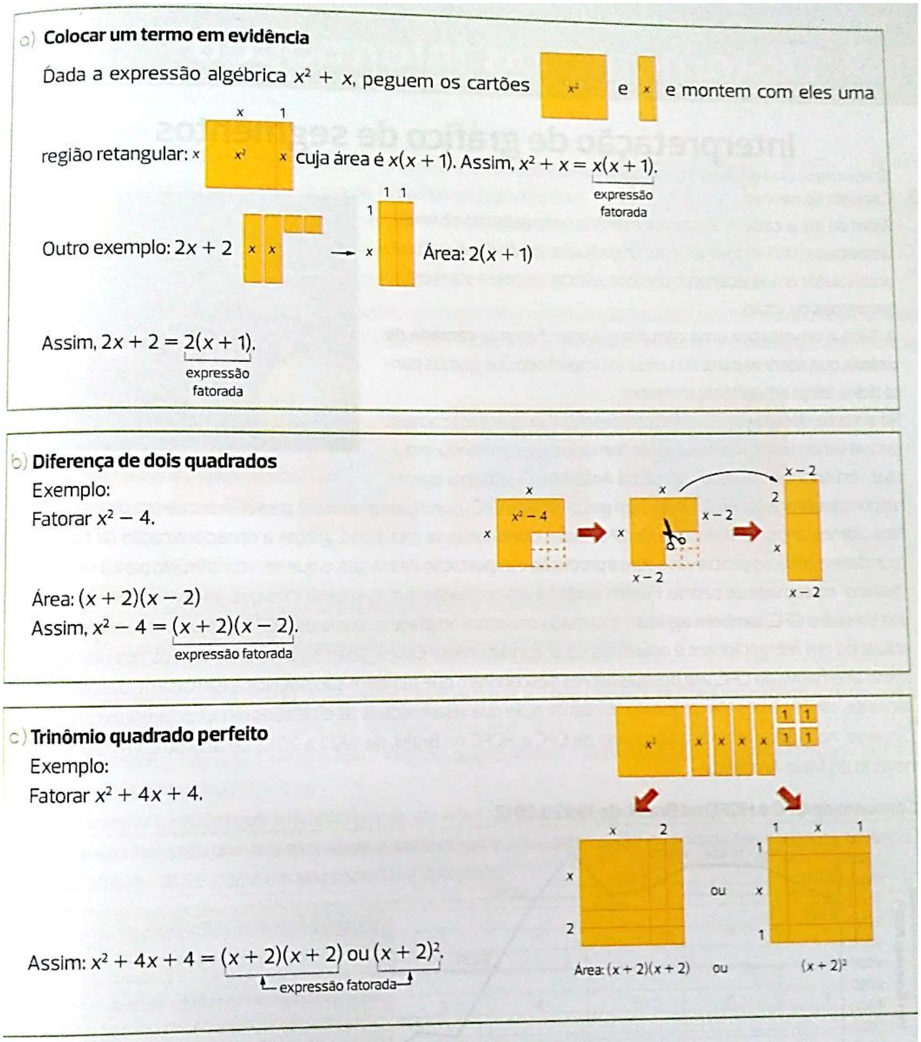
Figura 37 - Cubo da soma de dois termos



Fonte: Bianchini (2015, p. 123).

No tocante à fatoração, os três livros seguem o mesmo modelo de representação geométrica feito para os produtos notáveis. Dante (2015) ainda sugere que os alunos façam as peças (retângulos e quadrados) com cartolina para facilitar seu manuseio, como pode ser visto na figura 38. Essa abordagem pode ajudar os alunos a perceber as relações existentes entre a fatoração e os produtos notáveis estudados na seção anterior.

Figura 38 - Fatoração

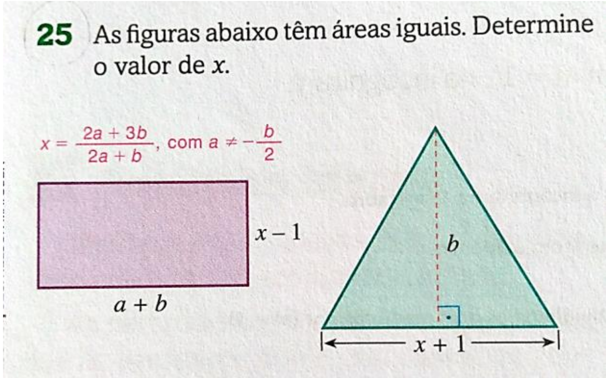


Fonte: Dante (2015, p. 151).

É possível supor que a representação geométrica, tanto para os produtos notáveis quanto para fatoração, tenha se tornado uma prática visual na sala de aula, já que os três autores expõem este conteúdo seguindo exatamente a mesma abordagem.

Na sequência, Bianchini (2015) e Silveira (2015) tratam das equações fracionárias, mas o fazem distintamente. Isso porque, enquanto Silveira (2015) não faz a articulação com a Geometria na exposição do conteúdo e nem nas tarefas, Bianchini (2015) propõe algumas questões envolvendo conteúdo geométrico, como pode ser verificado na figura abaixo, questões estas sempre ligadas à área ou perímetro de figuras planas. Nesse caso, a Geometria é articulada com a Álgebra de forma ilustrativa.

Figura 39 - Frações algébricas

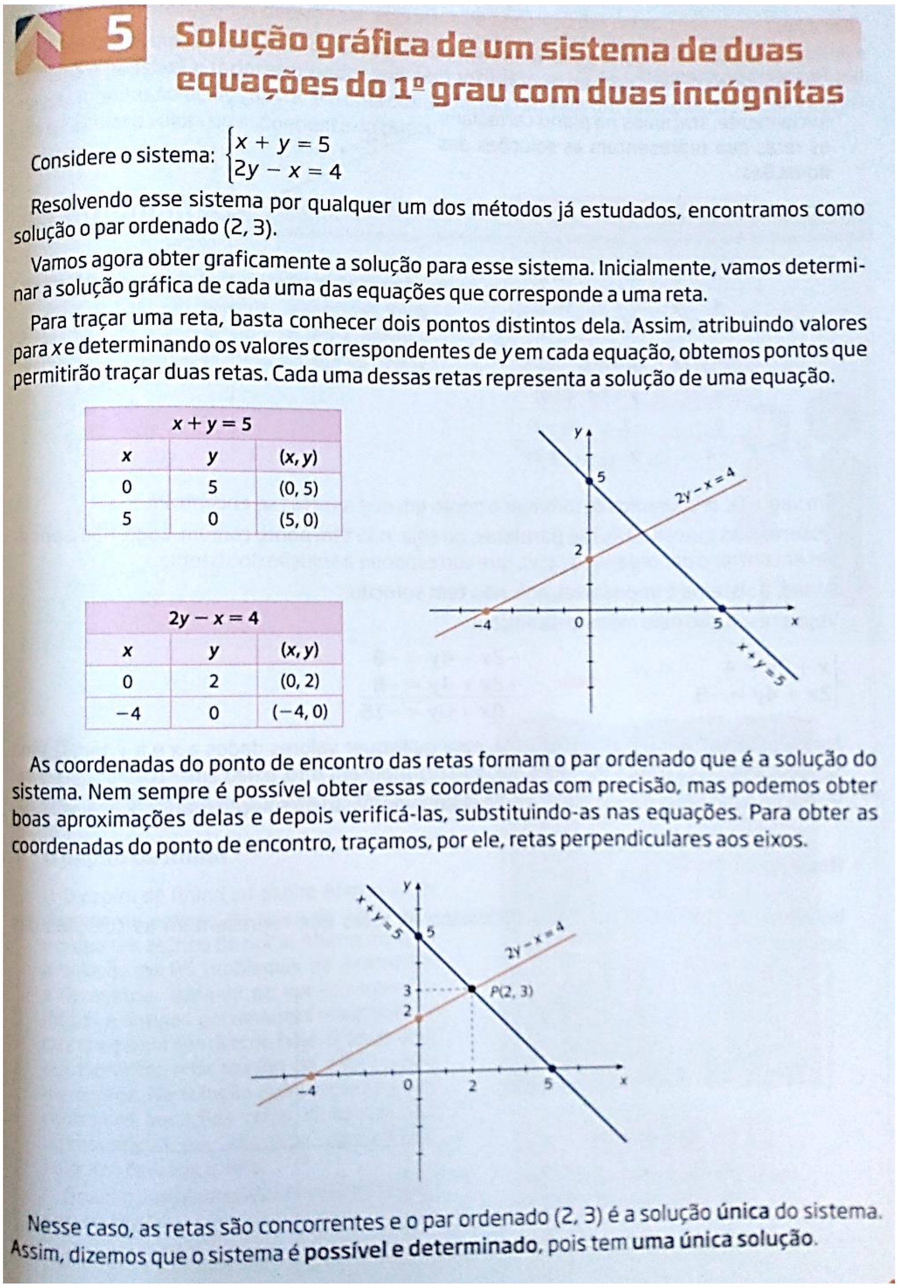


Fonte: Bianchini (2015, p. 200).

Os sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas são o próximo conteúdo apresentado nas obras. Bianchini (2015) e Silveira (2015) iniciam-no com o tema par ordenado e a marcação de pontos no plano cartesiano. Apesar de encontrar, nos três exemplares, tarefas como a que é dada na figura 42, o foco está nas representações geométricas.

Primeiramente, são representadas graficamente as soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas. Em seguida, os autores fazem a classificação dos sistemas em possível e determinado, impossível, possível e indeterminado, sempre acompanhando as resoluções algébricas com as interpretações geométricas. Desse modo, as retas que simbolizam as soluções das equações pertencentes ao sistema possível e determinado se interceptam em um único ponto: aquele que é a solução do sistema (figura 40). O mesmo é feito com o sistema impossível, no qual as retas são paralelas e, portanto, o sistema não tem solução. Já as retas que representam as soluções das equações que compõem o sistema possível e indeterminado são coincidentes e, por essa razão, o sistema admite infinitas soluções (figura 41). São propostas diversas tarefas aos alunos, visando a fazê-los encontrar graficamente as soluções de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas (figura 43).

Figura 40 - Sistema possível e determinado



5 Solução gráfica de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas

Considere o sistema: $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2y - x = 4 \end{cases}$

Resolvendo esse sistema por qualquer um dos métodos já estudados, encontramos como solução o par ordenado (2, 3).

Vamos agora obter graficamente a solução para esse sistema. Inicialmente, vamos determinar a solução gráfica de cada uma das equações que corresponde a uma reta.

Para traçar uma reta, basta conhecer dois pontos distintos dela. Assim, atribuindo valores para *x* e determinando os valores correspondentes de *y* em cada equação, obtemos pontos que permitirão traçar duas retas. Cada uma dessas retas representa a solução de uma equação.

$x + y = 5$		
x	*y*	(*x*, *y*)
0	5	(0, 5)
5	0	(5, 0)

$2y - x = 4$		
x	*y*	(*x*, *y*)
0	2	(0, 2)
−4	0	(−4, 0)

As coordenadas do ponto de encontro das retas formam o par ordenado que é a solução do sistema. Nem sempre é possível obter essas coordenadas com precisão, mas podemos obter boas aproximações delas e depois verificá-las, substituindo-as nas equações. Para obter as coordenadas do ponto de encontro, traçamos, por ele, retas perpendiculares aos eixos.

Nesse caso, as retas são concorrentes e o par ordenado (2, 3) é a solução **única** do sistema. Assim, dizemos que o sistema é **possível e determinado**, pois tem **uma única solução**.

Fonte: Silveira (2015, p. 175)

Figura 41 - Sistema possível e indeterminado e sistema impossível

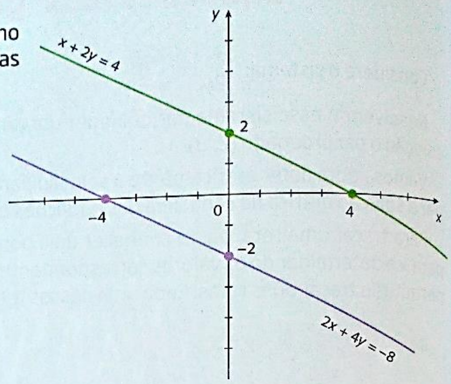
Exemplos

- Resolver o sistema: $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = -8 \end{cases}$

Inicialmente, traçamos no plano cartesiano as retas que representam as soluções das equações.

$x + 2y = 4$		
x	y	(x, y)
0	2	(0, 2)
4	0	(4, 0)

$2x + 4y = -8$		
x	y	(x, y)
0	−2	(0, −2)
−4	0	(−4, 0)



Em seguida, procuramos determinar o ponto em que as retas se encontram.
Observamos que as retas são **paralelas**, ou seja, não têm ponto comum. Logo, não é possível encontrar o par ordenado (x, y), que corresponde à solução do sistema.
Assim, o sistema é **impossível**, pois **não tem solução**.
Veja a resolução pelo método da adição:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \quad \cdot(-2) \\ 2x + 4y = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} -2x - 4y = -8 \\ +2x + 4y = -8 \\ \hline 0x + 0y = -16 \end{array}$$

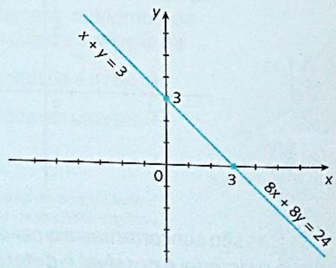
Na igualdade $0x + 0y = -16$ obtida, para quaisquer valores dados a x e a y temos uma sentença falsa, pois multiplicados por zero resultam em zero, e não em −16.
Portanto, o sistema é impossível, como já tínhamos visto na solução gráfica acima.

- Resolver o sistema: $\begin{cases} x + y = 3 \\ 8x + 8y = 24 \end{cases}$

Inicialmente, traçamos no plano cartesiano as retas que representam as soluções das equações.

$x + y = 3$		
x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)

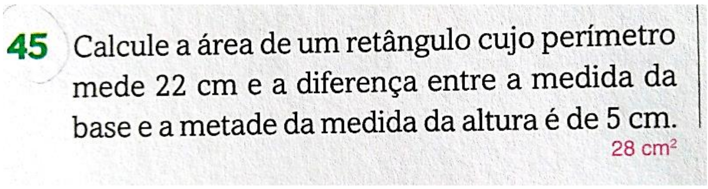
$8x + 8y = 24$		
x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)



Fonte: Silveira (2015, p. 176)

O pensar geométrico sobre um sistema de equações se torna importante para que os alunos percebam o comportamento do sistema e validem as soluções algébricas por meio das construções gráficas, que podem ajudá-los na compreensão dos três tipos de soluções que podem ser encontradas.

Figura 42 - Sistema de equações



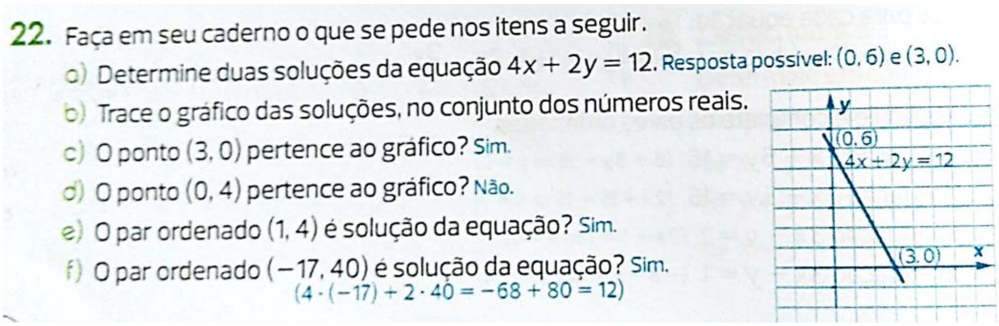
45 Calcule a área de um retângulo cujo perímetro mede 22 cm e a diferença entre a medida da base e a metade da medida da altura é de 5 cm.
28 cm²

Fonte: Bianchini (2015, p. 208).

Nos últimos capítulos das obras do 8º ano, tarefas como a da figura acima (que não apresenta nenhuma imagem) começam a aparecer com mais frequência. As figuras geométricas dão lugar ao rigor algébrico, os alunos devem encontrar equações que descrevem o problema, ou seja, converter a linguagem corrente para a linguagem matemática.

Ademais, a representação geométrica das soluções de um sistema de equação (como a que é expressa na tarefa da figura abaixo) se torna importante para que o aluno possa associar os pares ordenados às soluções das equações que compõem o sistema.

Figura 43 - Representações geométricas das soluções de uma equação



22. Faça em seu caderno o que se pede nos itens a seguir.

a) Determine duas soluções da equação $4x + 2y = 12$. Resposta possível: $(0, 6)$ e $(3, 0)$.

b) Trace o gráfico das soluções, no conjunto dos números reais.

c) O ponto $(3, 0)$ pertence ao gráfico? Sim.

d) O ponto $(0, 4)$ pertence ao gráfico? Não.

e) O par ordenado $(1, 4)$ é solução da equação? Sim.

f) O par ordenado $(-17, 40)$ é solução da equação? Sim. $(4 \cdot (-17) + 2 \cdot 40 = -68 + 80 = 12)$

Fonte: Dante (2015, p. 166).

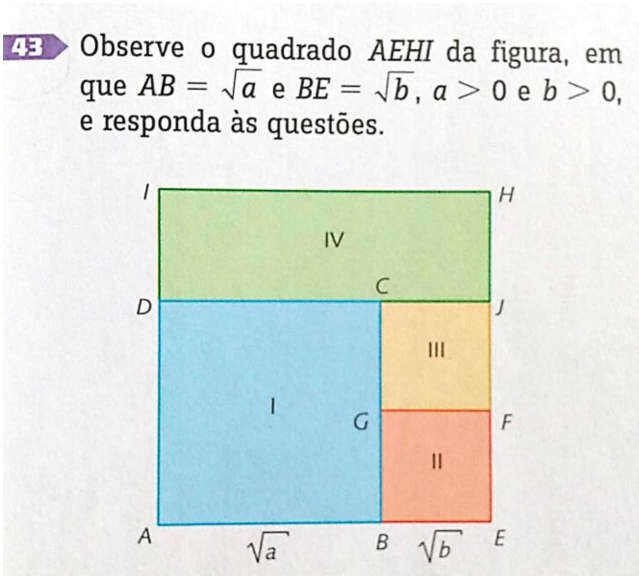
Cabe destacar que Dante (2015) e Silveira (2015) ainda contam com um capítulo sobre Probabilidade e Estatística. Contudo, as tarefas envolvendo Geometria presentes nele fazem parte da revisão no final do capítulo, na qual são abordados diversos temas, não só Probabilidade e Estatística.

5.4 LIVROS DIDÁTICOS DO 9º ANO

Nesse tópico, busco traçar as características das obras destinadas ao 9º ano quanto à abordagem que os autores utilizam ao articular a Geometria com a Álgebra, Aritmética, Probabilidade e Estatística. É importante salientar que há predominância da Álgebra e redução da Aritmética.

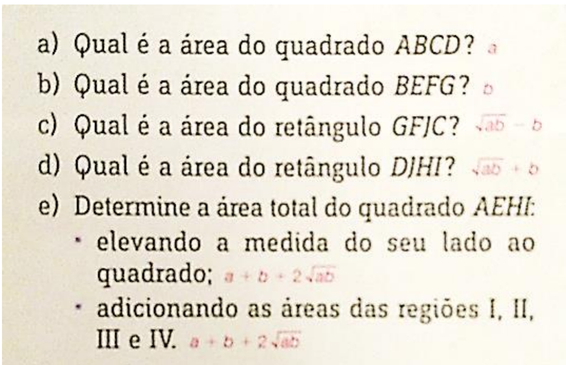
Os três livros são iniciados com capítulos que integram o campo Aritmética, tendo como assunto potências e raízes. Bianchini (2015) e Silveira (2015) apresentam algumas tarefas envolvendo o cálculo de área e/ou perímetro de polígonos, cujas medidas dos lados são números irracionais expressos por radicais. A figura 44 é representativa desse funcionamento. A Geometria, articulada com a Aritmética na tarefa abaixo, tem função ilustrativa, visto que a figura é inserida como um auxílio ao aluno, para que ele possa visualizar os retângulos, quadrados e a medida de cada aresta.

Figura 44 - Números irracionais



Fonte: Silveira (2015, p. 41).

Figura 45 - Questões da tarefa retratada na figura 44



a) Qual é a área do quadrado $ABCD$? a

b) Qual é a área do quadrado $BEFG$? b

c) Qual é a área do retângulo $GFJC$? $\sqrt{ab} - b$

d) Qual é a área do retângulo $DJHI$? $\sqrt{ab} + b$

e) Determine a área total do quadrado $AEHI$:

- elevando a medida do seu lado ao quadrado; $a + b + 2\sqrt{ab}$
- adicionando as áreas das regiões I, II, III e IV. $a + b + 2\sqrt{ab}$

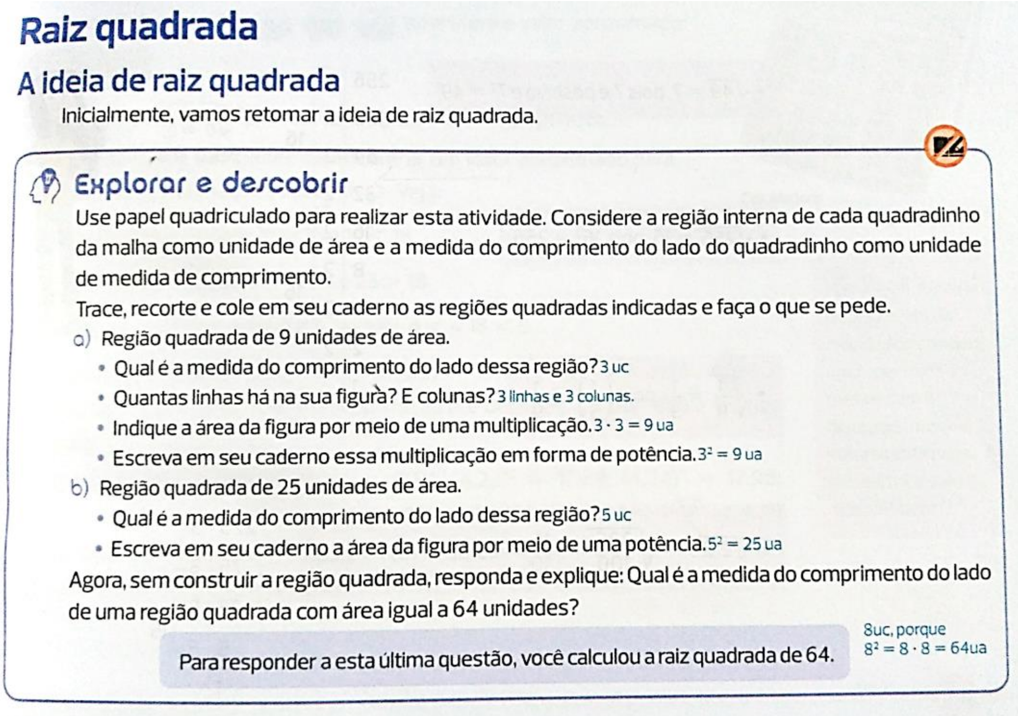
Fonte: Silveira (2015, p. 41).

Bianchini (2015) acrescenta uma seção concernente à representação geométrica de números irracionais. O autor segue a mesma abordagem apresentada no volume do 8º ano, isto é, Bianchini (2015) considera a memória visual dos alunos. Primeiramente, é construído um triângulo retângulo isósceles de catetos de medida 1 e obtêm-se dele a hipotenusa de medida $\sqrt{2}$. O comprimento da hipotenusa é transferido, com o auxílio de um compasso, para a reta numérica, encontrando-se, assim, o ponto correspondente ao número irracional $\sqrt{2}$. Em seguida, são propostas algumas tarefas para que os alunos representem, na reta, números como $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, etc.

Dante (2015) aborda raiz quadrada como a medida do lado de um quadrado cuja área vale a. Observa-se que essa mesma abordagem é adotada no volume do 6º ano e, sendo assim, é possível supor que o autor também considera a memória visual dos alunos. Além disso, por ser uma abordagem utilizada pelos outros dois autores, acredito que relacionar $\sqrt{a}$ com um quadrado cuja área vale a se tornou uma prática visual na sala de aula.

Na seção *Explorar e Descobrir*, Dante (2015) busca incentivar os alunos a estabelecer relações entre a área de uma região quadrada, a indicar essa área em forma de potência e a medir o comprimento do lado dessa região (figura 46). Nota-se que nesse caso, a ideia de raiz quadrada não está restrita ao algoritmo, o autor procurou conectar a Aritmética com a Geometria ao trazer os quadrados perfeitos e ainda trabalha a operação inversa da raiz quadrada ao inserir potência. A mesma abordagem é adotada para raiz cúbica, porém tais relações são definidas pelo volume do cubo e a medida da aresta.

Figura 46 - Raiz quadrada



Raiz quadrada

A ideia de raiz quadrada

Inicialmente, vamos retomar a ideia de raiz quadrada.

Explorar e descobrir

Use papel quadriculado para realizar esta atividade. Considere a região interna de cada quadradinho da malha como unidade de área e a medida do comprimento do lado do quadradinho como unidade de medida de comprimento.

Trace, recorte e cole em seu caderno as regiões quadradas indicadas e faça o que se pede.

a) Região quadrada de 9 unidades de área.
- Qual é a medida do comprimento do lado dessa região? 3 uc
- Quantas linhas há na sua figura? E colunas? 3 linhas e 3 colunas.
- Indique a área da figura por meio de uma multiplicação. $3 \cdot 3 = 9$ ua
- Escreva em seu caderno essa multiplicação em forma de potência. $3^2 = 9$ ua

b) Região quadrada de 25 unidades de área.
- Qual é a medida do comprimento do lado dessa região? 5 uc
- Escreva em seu caderno a área da figura por meio de uma potência. $5^2 = 25$ ua

Agora, sem construir a região quadrada, responda e explique: Qual é a medida do comprimento do lado de uma região quadrada com área igual a 64 unidades?

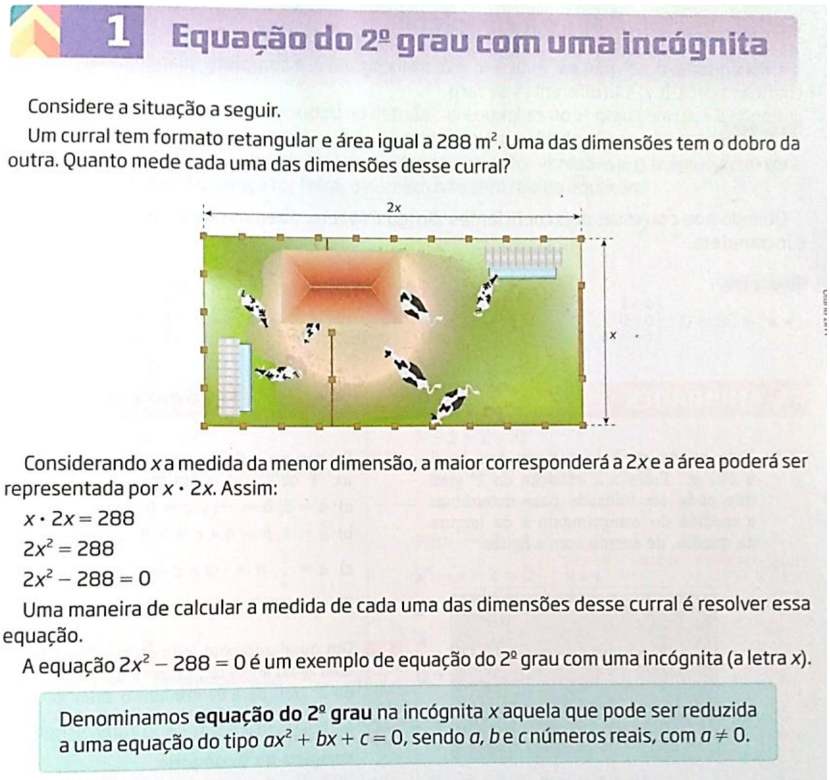
Para responder a esta última questão, você calculou a raiz quadrada de 64.

8uc, porque $8^2 = 8 \cdot 8 = 64$ua

Fonte: Dante (2015, p. 13).

Os próximos capítulos descritos fazem parte do campo Álgebra em todas as obras analisadas. O primeiro deles trata das equações de 2º grau com uma incógnita. Bianchini (2015) e Silveira (2015) optam por introduzir o assunto com uma situação-problema envolvendo área e dimensões de uma região retangular, como pode ser visto na figura a seguir.

Figura 47 - Exemplo de equação do 2º grau



1 Equação do 2º grau com uma incógnita

Considere a situação a seguir.

Um curral tem formato retangular e área igual a 288 m². Uma das dimensões tem o dobro da outra. Quanto mede cada uma das dimensões desse curral?

Considerando x a medida da menor dimensão, a maior corresponderá a $2x$ e a área poderá ser representada por $x \cdot 2x$. Assim:

$x \cdot 2x = 288$

$2x^2 = 288$

$2x^2 - 288 = 0$

Uma maneira de calcular a medida de cada uma das dimensões desse curral é resolver essa equação.

A equação $2x^2 - 288 = 0$ é um exemplo de equação do 2º grau com uma incógnita (a letra x).

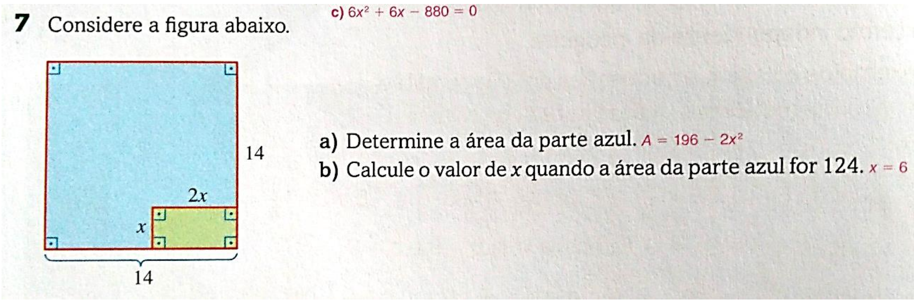
Denominamos **equação do 2º grau** na incógnita x aquela que pode ser reduzida a uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, sendo a, b e c números reais, com $a \neq 0$.

Fonte: Silveira (2015, p. 45).

Já Dante (2015) apresenta um panorama sobre as contribuições dos babilônios à Matemática e comenta sobre alguns documentos com problemas matemáticos deixados por esse povo. Um deles questiona sobre qual deve ser a medida do lado de um quadrado, cuja área menos a medida do lado é igual a 870, o que pode ser algebricamente representado por $x^2 - x = 870$.

Os autores dos três livros mostram que essas situações-problema podem ser traduzidas por uma equação do 2º grau. Em seguida, propõem algumas tarefas em que os alunos devem determinar equações que representem a área (ou o perímetro) de uma região retangular. Na tarefa dada na imagem a seguir, a Geometria tem função ilustrativa, posto que a figura geométrica é inserida como um suporte para os alunos resolverem o problema.

Figura 48 - Área determinada por equação do 2º grau



Fonte: Bianchini (2015, p. 110).

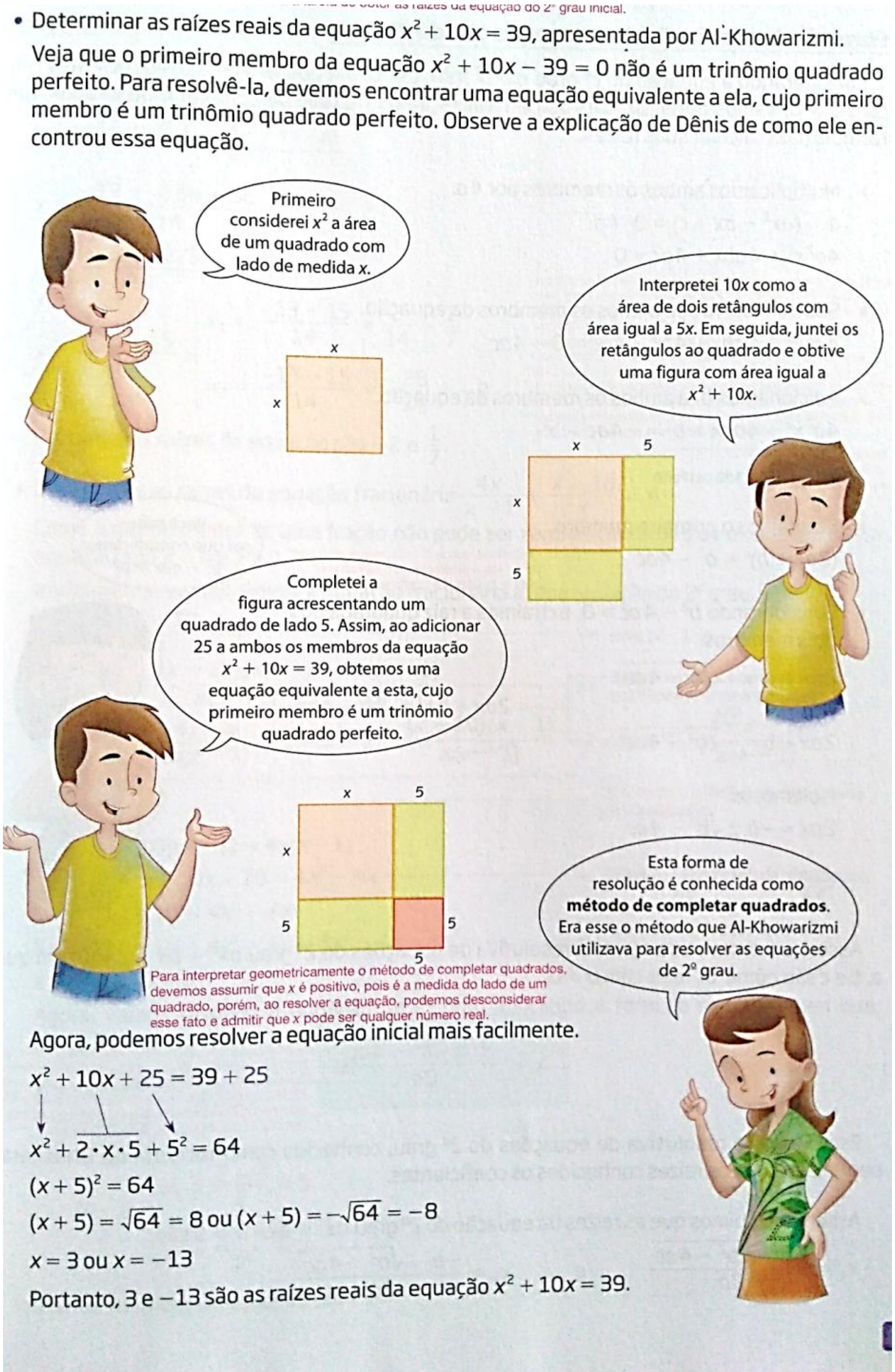
Problemas semelhantes a esses (figuras 47 e 48) já apareceram em volumes anteriores. No do 7º ano, em que a Álgebra começa a ser introduzida, são propostas diversas tarefas nas quais os alunos devem simbolizar a área de uma região por meio de uma expressão algébrica. Dessa forma, acredito que esse tipo de representação, em específico, faça parte da cultura visual da sala de aula.

As equações do 2º grau são introduzidas de forma gradual. Inicialmente, são abordadas as do tipo $ax^2+c = 0$ com $a \neq 0$ e $c \neq 0$; logo depois, as do tipo $ax^2+bx=0$ com $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Algumas tarefas indicadas ao final de cada seção exploram o conteúdo relativo à área e/ou perímetro de regiões retangulares, que podem ser traduzidas por essas equações. Por fim, são introduzidas as equações completas do tipo $ax^2+bx+c = 0$.

Antes de retratar a fórmula de Bháskara, os autores dos três livros apresentam o método de completar quadrados por meio de representações geométricas e, desse modo, a Geometria é inserida para ilustrar o conceito matemático. No entanto, somente Bianchini (2015) retoma o método geométrico nas tarefas, demonstrando que, apesar de a Geometria ser considerada importante para a exposição do conteúdo, ela não é utilizada nas tarefas.

Observa-se que essa mesma representação do trinômio quadrado perfeito (figura 49) é apresentada nos livros do 8º ano. Sendo assim, é possível supor que os autores consideram a memória visual dos alunos, bem como reforça o argumento de que esse tipo de representação faz parte da cultura visual escolar.

Figura 49 - Representação geométrica do trinômio quadrado perfeito



- Determinar as raízes reais da equação $x^2 + 10x = 39$, apresentada por Al-Khowarizmi.
  Veja que o primeiro membro da equação $x^2 + 10x - 39 = 0$ não é um trinômio quadrado perfeito. Para resolvê-la, devemos encontrar uma equação equivalente a ela, cujo primeiro membro é um trinômio quadrado perfeito. Observe a explicação de Dênis de como ele encontrou essa equação.

Agora, podemos resolver a equação inicial mais facilmente.

$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$

$x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = 64$

$(x + 5)^2 = 64$

$(x + 5) = \sqrt{64} = 8$ ou $(x + 5) = -\sqrt{64} = -8$

$x = 3$ ou $x = -13$

Portanto, 3 e -13 são as raízes reais da equação $x^2 + 10x = 39$.

Fonte: Silveira (2015, p. 51).

Bianchini (2015) e Dante (2015) ainda discutem brevemente a proporção áurea. Dante (2015) apresenta a razão áurea como um fato histórico e pede aos alunos para determinarem o número de ouro. Já Bianchini (2015) destaca que as medidas da largura e altura são sempre proporcionais em um retângulo áureo, chegando, assim, a uma equação do 2º grau e, ao resolvê-la, obtêm o número de ouro. Em seguida, ainda são propostas diversas tarefas que associam área de regiões retangulares e triangulares à equações do 2º grau. Dante (2015) e Silveira (2015) também apresentam tarefas com Geometria, mas em quantidade menor.

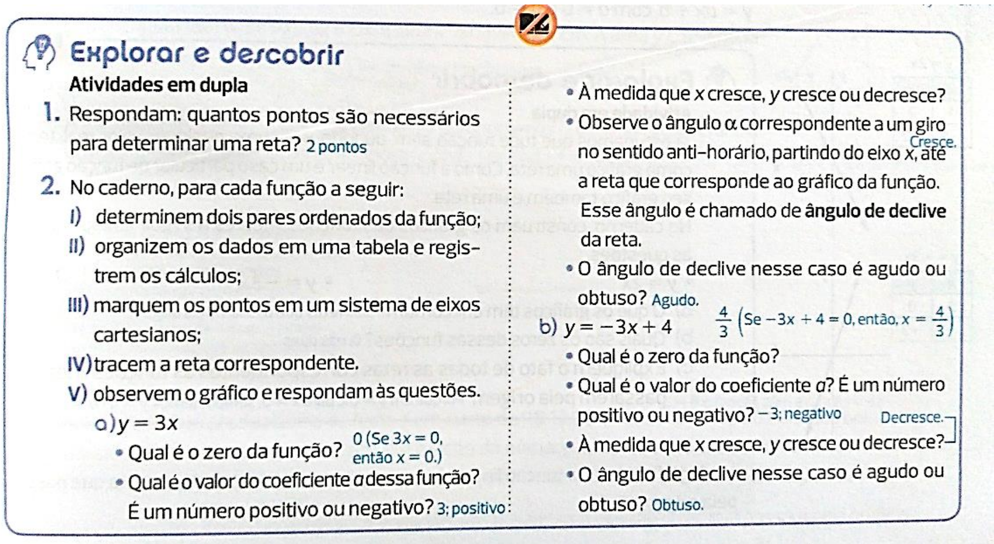
Ao introduzir função afim, os três livros apresentam alguns exemplos sobre a lei de formação de uma função e, nas tarefas propostas, incentivam os alunos a estabelecer relações entre o comprimento do lado de um quadrado e seu perímetro, entre a área do quadrado e a medida do seu lado e entre área de um losango e sua diagonal. Em todas essas tarefas, os estudantes devem encontrar a lei de formação da função.

O próximo tópico introduzido é acerca da construção do gráfico de uma função. Bianchini (2015) e Dante (2015) acrescentam uma seção onde abordam a possibilidade de o gráfico ser ou não de função. Ambos mostram exemplos de gráficos em que, ao traçarmos uma reta perpendicular ao eixo das abscissas, ela o intercepta em apenas um ponto, ou seja, para todo x real existe um único y. Também mostram gráficos que não são funções, pois ao traçarmos uma reta perpendicular ao eixo x, ela o entrecruza em mais de um ponto.

O zero da função é definido tanto algebricamente (como o valor de x tal que $f(x)=0$), quanto geometricamente (como o ponto em que a função intercepta o eixo das abscissas). Os três livros apresentam tarefas que tratam da construção de gráficos de funções e da identificação dos zeros de uma função dada. Bianchini (2015) e Dante (2015) acrescentam, ainda, tarefas para identificar se os gráficos dados são ou não função.

O crescimento e o decrescimento de uma função afim são mostrados com exemplos por Bianchini (2015) e Silveira (2015). Já Dante (2015) o faz propondo uma tarefa para os alunos investigarem quando uma função cresce/decresce por meio do coeficiente que multiplica a variável x e o ângulo que corresponde a um giro no sentido anti-horário a partir do eixo x até a reta correspondente ao gráfico (figura 50).

Figura 50 - Crescimento e decrescimento de função



Explorar e descobrir

Atividades em dupla

1. Respondam: quantos pontos são necessários para determinar uma reta? 2 pontos
2. No caderno, para cada função a seguir:
   I) determinem dois pares ordenados da função;
   II) organizem os dados em uma tabela e registrem os cálculos;
   III) marquem os pontos em um sistema de eixos cartesianos;
   IV) tracem a reta correspondente.
   V) observem o gráfico e respondam às questões.
   a) $y = 3x$
   - Qual é o zero da função? 0 (Se $3x = 0$, então $x = 0$.)
   - Qual é o valor do coeficiente a dessa função? É um número positivo ou negativo? 3; positivo
   - À medida que x cresce, y cresce ou decresce? Cresce.
   - Observe o ângulo α correspondente a um giro no sentido anti-horário, partindo do eixo x, até a reta que corresponde ao gráfico da função. Esse ângulo é chamado de **ângulo de declive** da reta.
   - O ângulo de declive nesse caso é agudo ou obtuso? Agudo.

   b) $y = -3x + 4$
   - Qual é o zero da função? $\frac{4}{3}$ (Se $-3x + 4 = 0$, então, $x = \frac{4}{3}$)
   - Qual é o valor do coeficiente a? É um número positivo ou negativo? -3; negativo
   - À medida que x cresce, y cresce ou decresce? Decresce.
   - O ângulo de declive nesse caso é agudo ou obtuso? Obtuso.

Fonte: Dante (2015, p. 83).

Os três livros sugerem tarefas para construção e análise de gráficos, no sentido de observar os zeros da função, se é crescente ou decrescente. Entretanto, diferentemente dos demais, Dante (2015) aborda distintos assuntos como, por exemplo, a função linear e a proporcionalidade entre os valores de *x* e *y*. As tarefas propostas tratam da proporcionalidade existente entre o volume e a capacidade de um recipiente, entre o comprimento da circunferência e o raio, entre o perímetro de um triângulo equilátero e a medida de um de seus lados, etc.

Observa-se que, nas três obras, todo o conteúdo de função afim vem acompanhado das representações geométricas. Por conseguinte, é possível conjecturar que a articulação delas com a Álgebra se tornou uma prática visual na sala de aula, além de ser fundamental para que o aluno compreenda os diferentes tipos de representação de uma função e as correlações existentes.

Para explicar função quadrática, os autores também iniciam com a lei de formação da função. As tarefas sugeridas são aquelas que abordam as relações entre a área e a medida dos lados de um retângulo, o número de diagonais de um polígono convexo e o número de lados, de modo que, a partir delas, os alunos encontrem a lei de formação das funções.

Em seguida, os autores apresentam o esboço do gráfico de uma função quadrática como uma parábola, bem como fazem o estudo da concavidade e a determinação dos zeros da função. Ao final de cada assunto, são indicadas tarefas que abordam os conteúdos já expostos.

Bianchini (2015) e Silveira (2015) acrescentam coordenadas do vértice e ponto de máximo e de mínimo de uma parábola. As tarefas com Geometria abordam o conceito de otimização, no sentido de encontrar a maior área de uma região retangular com determinado perímetro, como pode ser visto na figura 51. Por mais que a tarefa não apresente nenhuma figura geométrica, os alunos têm a possibilidade de, a partir dela, ilustrar diversos retângulos numa tentativa de encontrar caminhos para chegar ao resultado.

Figura 51 - Ponto de máximo de uma função quadrática

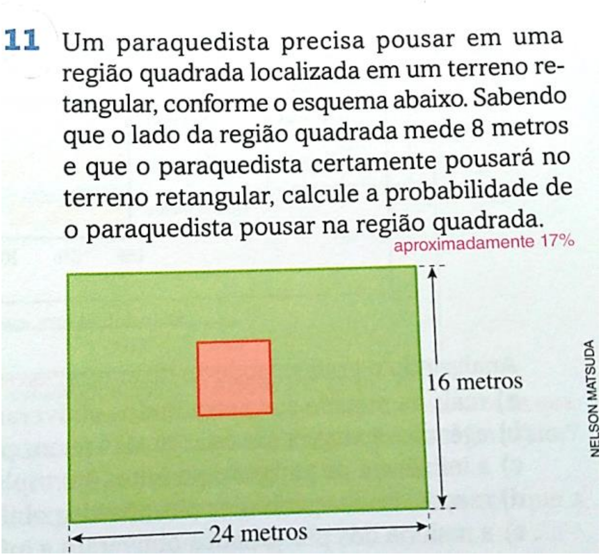
53 Fernando demarcou uma região retangular de 100 m de perímetro em um terreno para construir uma casa.
Calcule as dimensões dessa região para que Fernando aproveite a maior área possível.
A maior área é obtida por um quadrado de 25 m de lado.

Fonte: Bianchini (2015, p. 199).

É importante que os alunos conheçam as características dos diversos tipos de funções (nesse caso, função afim e função quadrática) e as diferentes formas de representá-las, seja por tabela, gráfico, expressão algébrica, para que assim desenvolvam uma compreensão mais aprofundada do conceito de função e aprimorem a habilidade de avaliar as vantagens e desvantagens de cada representação. Espera-se que ao transitar entre as diferentes representações, os alunos percebam as conexões existentes entre elas.

Por fim, os três livros contam com um capítulo de Estatística e Probabilidade. Porém, Silveira (2015) não apresenta articulação com a Geometria, Dante (2015) e Bianchini (2015) sugerem uma única tarefa sobre probabilidade geométrica (figura 52). É importante ressaltar que essa foi a única atividade encontrada, nos 12 livros analisados, que realmente faz a articulação entre a Geometria e o campo de Probabilidade e Estatística e, nessa situação, a Geometria tem função ilustrativa.

Figura 52 - Probabilidade geométrica


11 Um paraquedista precisa pousar em uma região quadrada localizada em um terreno retangular, conforme o esquema abaixo. Sabendo que o lado da região quadrada mede 8 metros e que o paraquedista certamente pousará no terreno retangular, calcule a probabilidade de o paraquedista pousar na região quadrada.
aproximadamente 17%

Fonte: Bianchini (2015, p. 105).

Trabalhar a probabilidade voltada para questões geométricas deveria ter presença marcante nos livros didáticos, visto que a maioria dos exemplos e tarefas encontradas usam moedas ou dados para o estudo desse assunto. Ao inserir as figuras geométricas, com o intuito desenvolver a probabilidade geométrica, além trazer algo diversificado, proporciona o ensino intradisciplinar criando um elo entre conceitos geométricos e probabilísticos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo desta pesquisa foi investigar as funções que a Geometria desempenha em campos não-geométricos em livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático 2017.

Iniciei a dissertação com um capítulo que visava a apresentar algumas medidas tomadas pelo governo para a ampliação do PNLD desde sua criação até os dias atuais. Nele, mostrei também as funções que os livros didáticos assumem no processo educacional, a saber: referencial, por conter o currículo oficial; instrumental, por proporcionar o desenvolvimento de habilidades e competências; ideológica e cultural, por incluir os valores de uma sociedade e, finalmente, documental, por possibilitar o desenvolvimento de uma perspectiva crítica. Além disso, discorri sobre a importância de tais materiais para o trabalho pedagógico do professor, visto que meu intuito neste primeiro capítulo foi o de justificar a escolha dos livros didáticos como objetos de pesquisa, mostrando a relevância deles no cenário educacional.

Nesse sentido, a pergunta que guiou este estudo foi a seguinte: **Quais funções a Geometria assume em campos não-geométricos nos livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental?**

Como base teórica, apoiei-me principalmente nos estudos de Flores (2003, 2010, 2013) acerca da cultura visual, entendida como concepções inerentes à cultura de uma sociedade manifestas em sua forma visual. Sendo assim, assumi que a Geometria e, consequentemente, as figuras geométricas inseridas nos livros didáticos exercem uma função, estando diretamente relacionadas à cultura visual da sala de aula.

A produção de dados foi feita a partir da análise de três das 11 coleções de livros didáticos aprovadas pelo PNLD 2017, contabilizando um total de 12 obras. Constatei que a Geometria aparece com mais frequência nos campos Aritmética e Álgebra, visto que, no campo Probabilidade e Estatística, foram encontradas somente duas tarefas (em duas obras de coleções distintas), as quais tratavam do tema probabilidade geométrica.

Com relação ao campo de Álgebra, a Geometria permeia principalmente as expressões algébricas em razão de os autores dos livros didáticos inserirem, tanto nos exemplos quanto nas tarefas, a representação de área e perímetro de polígonos por meio delas, seja sob a forma de equações do primeiro ou do segundo grau. O cálculo de área e perímetro de polígonos aparece nas operações com polinômios. O trinômio quadrado perfeito também é representado, pelos três autores, por figuras geométricas. É o caso do quadrado da soma $(a+b)^2$, quadrado da diferença *(a-b)*^{2} e produto da soma pela diferença *(a+b)(a-b)*, que são representados por regiões quadradas. Tendo em vista esses resultados, é possível concluir que tais figuras geométricas se estabeleceram como práticas visuais na representação dos conceitos algébricos citados e que estas práticas, por sua vez, compõem os modos de olhar dos alunos da Educação Básica.

Quanto ao campo Aritmética, a Geometria permeia todo o conteúdo de números e operações, principalmente os números irracionais. Os autores optam por exprimi-los a partir da diagonal do quadrado, hipotenusa do triângulo retângulo e razão entre comprimento e diâmetro da circunferência. Os números decimais são representados pelo material dourado e as frações são simbolizadas por retângulos ou círculos particionados igualmente.

Sendo assim, constatei dois pontos importantes. O primeiro diz respeito ao fato de as representações de frações por meio de figuras geométricas terem se tornado prática visual na sala de aula, já que estas aparecem nas três coleções analisadas. O segundo se refere ao fato de os autores considerarem a memória visual dos alunos ao relacionarem os decimais com um material muito utilizado nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

A função que a Geometria mais assume nos outros campos da Matemática é a ilustrativa, sendo usada para reforçar o discurso matemático, como forma de ilustrar alguns conceitos ou, em alguns casos, figuras geométricas são inseridas simplesmente como um ornamento. A função representativa também ocupa um lugar de destaque, haja vista que os três autores fazem a associação entre números reais e pontos da reta numérica, bem como a representação das soluções de uma equação por uma reta no plano. A função formativa é encontrada principalmente em exemplos e tarefas que utilizam o desenho geométrico para trabalhar com atividades práticas. Já as funções explicativa e demonstrativa são identificadas nas três coleções, porém com uma frequência menor se comparadas às outras.

No tocante à formação de imagem mental, a Geometria foi identificada principalmente nos conteúdos algébricos. Dessa forma, conjecturo que há uma tendência em diminuir a quantidade de figuras geométricas em função do rigor algébrico. Além disso, há uma "desgeometrização" quanto ao conteúdo de frações e números decimais. Inicialmente, as frações são representadas por figuras geométricas e os decimais são associados ao material dourado. A "desgeometrização" acontece nos anos que se seguem quando, ao serem retomados, os conteúdos de frações e números decimais não são acompanhados de figuras. Entendo e defendo nesta dissertação que a Geometria não se limita as figuras geométricas, entretanto ela as contém, dado que a Geometria é articulada aos outros campos da Matemática por meio delas. Por esse motivo decidi utilizar o termo “desgeometrização” no que tange ao desuso de figuras geométricas.

Essa análise permite ver como a Geometria foi empregada e as funções que assume, principalmente na Álgebra e na Aritmética. Dessa forma, é possível afirmar que a Geometria e as figuras geométricas são articuladas aos outros campos da Matemática com o propósito de favorecer a aprendizagem dos alunos.

Por diversas vezes, a Geometria é inserida numa tentativa de facilitar o ensino de alguns conceitos abstratos, ilustrando-os por meio de figuras geométricas. Com isso, sustento o argumento de que as figuras geométricas compõem o discurso visual presente na sala de aula. Ao serem utilizadas com um objetivo específico, visando à aprendizagem dos alunos, revela-se o caráter cultural de tais figuras, pois os modos de olhar a Geometria de um aluno da Educação Básica se configura numa cultura visual singular, própria do contexto educacional. Diante disso, reforço a ideia de visualidade e o caráter histórico-cultural da Geometria.

Considero que este trabalho aponta encaminhamentos para futuros pesquisadores que tenham interesse em aprofundar seus estudos acerca da cultura visual e dos livros didáticos. Uma pesquisa que considero relevante é investigar, historicamente, como as práticas visuais aqui apontadas se estabeleceram e passaram a configurar a cultura visual da sala de aula. Assim, seria possível compreender como surgiram os modos de olhar que hoje são inerentes às aulas de Matemática e aos livros didáticos.

REFERÊNCIAS

AMARAL, R. B.; HOLLEBRANDS, K. An analysis of context-based similarity tasks in textbooks from Brazil and the United States. **International Journal of Matematical Education in Science and Technology**, v. 48, n. 8, p. 1166-1184, 2017.

APPOLINÁRIO, F. **Dicionário de metodologia científica**: um guia para a produção do conhecimento científico. São Paulo: Atlas, 2009.

ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Holanda, v. 52, n.3, p. 215-241, 2003.

BATISTA, A. A. G. (Org.) **Recomendações para uma política pública de livros didáticos**. Brasília, DF: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Fundamental, 2002.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini.** 8. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

BITTENCOURT, C. **Livro didático e saber escolar**: 1810-1970. Autêntica: Belo Horizonte, 2004.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**: Uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: Ministério da Educação, 2017.

BRASIL. **Edital de convocação para o processo de inscrição e avaliação de obras didáticas e literárias para o Programa Nacional do Livro e do Material Didático 2020.** Brasília: Ministério da Educação, 2018.

BRASIL. **Guia do Livro Didático 2017**: Matemática: Anos Finais do Ensino Fundamental. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica, 2016.

BRIGO, J. **As figuras geométricas no ensino de Matemática**: uma análise histórica nos livros didáticos. 2010 162f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Centro de Ciências Físicas e Matemática, Centro de Ciências Biológicas e Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

CASSIANO, C. C. F. **O mercado do livro didático no Brasil**: da criação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) à entrada do capital internacional espanhol (1985-2007). 2007 252f. Tese (Doutorado em Educação: História, Política, Sociedade) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

CELLARD, A. A análise documental. In: POUPART, J. et al. (Orgs.). **A pesquisa qualitativa**: enfoques epistemológicos e metodológicos. 3. ed. Petrópolis: Vozes, 2012. p. 295-316.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa** – FEUSP, São Paulo, v.30, n. 3, p. 549-566, 2004.

COSTA, A. P.; SANTOS, M. R. Os quadriláteros notáveis no 8º ano do Ensino Fundamental: um estudo sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**, São Paulo, v. 15, n. 19 p. 353-372, 2018.

COSTA, A. P. et al. Abordagem de algoritmos da divisão em livros didáticos de Matemática para os anos iniciais. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 2, n. 4, p. 57-80, 2018.

CRESWELL, J. W. **Investigação qualitativa e projeto de pesquisa:** escolhendo entre cinco abordagens**.** 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2014.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris-Matemática.** 2. ed. São Paulo: Ática, 2015.

DESEMPENHO real do Mercado livreiro. **Fundação Instituto de Pesquisas Econômicas (fipe).** Brasil, 2019. Disponível em <http://pesquisaeditoras.fipe.org.br/Home/Relatorio/3> . Acesso em: 05 mar. 2019.

EVANGELISTA, O. **Apontamentos para o trabalho com documentos de política educacional.** Disponível em: <http://moodle3.nead.uem.br/pluginfile.php/30539/mod_resource/content/1/Olinda%20Evangelista%20-%20Apontamentos.pdf> . Acesso em: 01 mar. 2020.

FAN. L. Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. **ZDM Mathematics Education**, Berlim, v. 45, n. 5, p. 765-777, 2013.

FLORES - BOLDA, C. R. **Geometria e visualização**: desenvolvendo a competência heurística através da reconfiguração. 1997. 152f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 1997.

FLORES. C. R. **Olhar, saber e representar:** ensaios sobre a representação em perspectiva. 2003. 188f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2003.

FLORES, C. R. Cultura visual, visualidade, visualização matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 18, p. 271-293. Número Temático, 2010.

FLORES, C. R. Visualidade e visualização matemática: novas fronteiras para a Educação Matemática. In: FLORES, C. R.; CASSIANI, S. (Orgs.). **Tendências contemporâneas nas pesquisas em Educação Matemática e Científica:** sobre linguagens e práticas culturais. Campinas: Mercado de Letras, 2013. p. 91-104.

FLORES, C. R.; WAGNER, D. R.; BURATTO, I. C. F. Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos tendências e perspectivas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.14, n.1, p.31-45, 2012.

FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. As figuras geométricas enquanto suporte para a aprendizagem em Geometria: um estudo sobre a heurística e a reconfiguração. **REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 1, n. 1, p. 5-13, 2006.

FNDE Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. **Histórico**. Brasil, 2017. Disponível em http://www.fnde.gov.br/component/k2/item/518-histórico. Acesso em 05 março 2019.

FONSECA, C. R. C. **Conceito de simetria em livros didáticos para o Ensino Fundamental.** 2013. 90 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2013.

GODOY, J. S. **A Geometria presente em alguns livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental.** 2016. 97 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2016.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar.** 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

GUIMARÃES, G. et al. Livros didáticos de Matemática nas séries iniciais: análise das atividades sobre gráficos e tabelas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte, 2007. p. 1-17.

GUTTIÉRREZ, A. Visualization in 3 – dimensional geometry: in search of a framework. In: **PME CONFERENCE, 20., 1996, Valencia. Proceedings…** Valencia: Universitat de Valencia, Dept. de Didáctica de la Matemática, 1996. p. 19-26.

KNAUSS, P. O desafio de fazer História com imagens: arte e cultura visual. **ArtCultura**, Uberlândia, v. 8, n. 12, p. 97-115, jan.-jun. 2006.

KLUPPEL, G. T. **Reflexões sobre o ensino da Geometria em livros didáticos à luz da Teoria de Representações Semióticas segundo Raymond Duval**. 2012. 109 f. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2012.

LAJOLO, M. Livro didático: um (quase) manual de usuário. **Em Aberto**, Brasília, v. 16, n. 69, p. 2-9, 1996.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACIEL, A. M.; RÊGO, R. G.; CARLOS, E. J. Possibilidades pedagógicas do uso da imagem fotográfica no livro didático de Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 57, p. 344-364, 2017.

MAZZI, L. C. **As demonstrações matemáticas presentificadas nos livros didáticos do Ensino Médio**: um foco nos capítulos de Geometria. Ano. XXX f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto de Física “Gleb Wataghin”, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2018.

PÁDUA, E. M. M. **Metodologia da pesquisa:** abordagem teórico-prática. 2. ed. Campinas: Papiros, 1997.

PRESMEG, N. Research on visualization in learning and teaching mathematics. In: GUTIÉRREZ, A.; BOERO, P. (Eds.). **Handbook of research on the Pshychology of Mathematics Education: Past, Present and Future**. Rotterdam: Sense Publishers, 2006. p. 205-235.

SÁ-SILVA, J.; ALMEIDA, C.D.; GUINDANI, J.F. Pesquisa documental: pistas teóricas e metodológicas. **Revista brasileira de História e Ciências Sociais**, São Leopoldo, ano 1, n. 1, p. 1-15, jul. 2009.

SANTOS, M. R.; PEREIRA FILHO, G. M.; LUNA, I. T. R. Análise das atividades presentes em um livro didático acerca do conceito de área de figuras planas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais...** São Paulo 2016. p. 1-10.

SCHOLLHAMMER, K. E. Regimes representativos da modernidade. **Légua e meia: revista de literatura e diversidade cultural**, Feira de Santana, v. 1, n. 2, p. 20-34, 2002.

SÉRVIO, P. P. P. O que estudam os estudos de cultura visual? **Revista Digital do LAV**, Santa Maria, v.7, n. 2, p. 196-215, , 2014.

SILVEIRA, E. **Matemática:** Compreensão e Prática. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

SILVA, M. C. L.; VALENTE, W. R. **A geometria nos primeiros anos escolares:** história e perspectivas atuais. 1. ed. Campinas: Papirus, 2014.

VALENTE, W. R. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. **Zetetiké**, Campinas, v. 16, n. 30, p. 139-162, 2008.

ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. Editor’s Introduction: What is Mathematical Visualization? In: ____ . (Eds.). **Visualization in Teaching and Learning Mathematics**. Washington: MAA, 1991. p. 1-7.