



UNIVERSIDADE ESTADUAL JÚLIO DE MESQUITA FILHO -
UNESP
CÂMPUS DE RIO CLARO

**Expoentes de escala para mapeamentos
discretos bidimensionais**

JULIA PENALVA

Dissertação de mestrado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências
Exatas da Universidade Estadual Paulista
Júlio de Mesquita Filho - UNESP, Câmpus
de Rio Claro, como parte dos requisitos
para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Rio Claro, 2014

517.39 Penalva, Julia
P397e Expoentes de escala para mapeamentos discretos
bidimensionais / Júlia Penalva. - Rio Claro, 2014
44 f. : il., figs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Edson Denis Leonel

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Caos. 4. Funções de
escala. 5. Expoentes críticos. I. Título.

Agradecimentos

Em especial, ao meu orientador, Prof. Dr. Edson Denis Leonel, por compartilhar comigo seu conhecimento, tornando possível a realização deste trabalho e pela amizade, paciência e apoio durante esta etapa.

Ao Prof. Dr. Tadashi Yokoyama, orientador da primeira etapa do mestrado, por seu apoio e compreensão.

A minha eterna gratidão a toda minha família que sempre me apoiou e me deu forças para seguir em frente.

Ao meu noivo Diogo Ricardo da Costa pelas conversas, ajuda e paciência sempre.

Aos pesquisadores do Grupo de Estudos de Sistemas Complexos e Dinâmica Não Linear da UNESP de Rio Claro, que possui como líder o Prof. Dr. Edson Denis Leonel.

Esta pesquisa tornou-se possível graças aos recursos computacionais disponibilizados pelo Núcleo de Computação Científica (NCC/GridUNESP) da Universidade Estadual Paulista (UNESP) e ao cluster computacional do grupo de Estudos de Sistemas Complexos e Dinâmica Não Linear, adquirido pelos projetos FAPESP 2012/23688-5, 2008/57528-9 e 2005/56253-8.

À todos os Professores das disciplinas de Pós-Graduação que cursei ao longo do mestrado.

Aos colegas de Pós-Graduação, que de alguma forma colaboraram no desenvolvimento deste trabalho.

À CAPES, pelo apoio financeiro durante parte do mestrado.

Aos demais funcionários e docentes da Universidade Estadual Paulista (UNESP).

Muito obrigada!
Julia Penalva

Resumo

Uma transição de integrabilidade para não integrabilidade em um conjunto de mapeamentos discretos bidimensionais e que exibem espaços de fase misto é caracterizada neste trabalho. Os espaços de fase dos mapeamentos apresentam um extenso mar de caos que envolve um conjunto de ilhas de estabilidade e é limitado por um conjunto de curvas invariantes do tipo *spanning*. A descrição da transição de integrabilidade para não integrabilidade é feita utilizando funções de escala para as quantidades médias no espaço de fases ao longo do mar de caos. Expoentes de Lyapunov foram utilizados para a caracterização das órbitas caóticas. Os expoentes críticos são obtidos por simulações numéricas de larga escala. Uma conexão com o mapa padrão é estabelecida como uma aproximação analítica dos expoentes críticos. Após reescalas apropriadas nos eixos do desvio da ação média, invariâncias de escala são observadas.

Palavras-chave: sistemas dinâmicos, caos, funções de escala, expoentes críticos.

Abstract

A transition from integrability to non-integrability in a set of two-dimensional, nonlinear and area preserving mappings that exhibit mixed phase space is characterized in this work. The phase space of the mappings present an extense chaotic sea surrounding a set of establiity islands and is limited by a set of invariant spanning curves. The description of the transition from integrability to non-integrability is made using scaling functions for average quantities in the phase space along the chaotic sea. The critical exponents are obtained by large scale simulations. A connection to the standard map is established as an analytical approximation for the critical exponents.

Keywords: dynamical systems, chaos, scale functions, critical exponents.

Sumário

Lista de Figuras	vi
1 Introdução	1
1.1 O Mapa Padrão	3
1.2 Sobre a dissertação	5
1.3 A Organização da Dissertação	6
2 O mapeamento discreto e suas propriedades	7
2.1 Definição do problema e obtenção do mapeamento	7
2.2 Os Expoentes de Lyapunov	11
2.3 Pontos Fixos	15
2.4 Posição da primeira curva invariante do tipo <i>spanning</i>	18
3 Hipóteses de Escala	21
3.1 Ação média e as hipóteses de escala	21
4 Leis de Escala	27
4.1 Expoente β	27
4.2 Expoente α	29
5 Conclusões e Perspectivas	32
Referências	34

Lista de Figuras

1.1	Espaço de fases do mapa padrão considerando: (a) $K = 0, 95$; (b) $K = 1, 2$	3
2.1	Espaço de fases gerado a partir do mapa (2.10) para $\gamma = 1$ e: (a) $\epsilon = 10^{-3}$; (b) $\epsilon = 3 \times 10^{-3}$. Os círculos em cor vermelha indicam a localização de alguns pontos fixos elípticos (todos numerados) enquanto que os quadrados azuis fornecem a posição dos pontos fixos hiperbólicos. As curvas contínuas em vermelho são as primeiras curvas invariantes do tipo <i>spanning</i> para cada caso.	10
2.2	<i>No triângulo retângulo da figura, encontramos quem são o cateto oposto e o cateto adjacente usados na obtenção do $\sin(\theta)$ e do $\cos(\theta)$.</i>	14
2.3	<i>Evolução temporal do expoente de Lyapunov positivo para dez diferentes condições iniciais evoluídas 10^9 vezes. Os parâmetros usados são $\epsilon = 10^{-4}$ e $\gamma = 1$.</i>	15
2.4	<i>Gráfico de $\bar{\lambda} \times \epsilon$ para os valores fixos $\gamma = 3/4$, $\gamma = 1$ e $\gamma = 2$.</i> . . .	16
3.1	(a) Gráfico de $I_{RMS} \times n$ para $\gamma = \frac{3}{4}$ e três valores de ϵ , $\epsilon = 10^{-5}$, $\epsilon = 10^{-4}$, $\epsilon = 10^{-3}$; (b) Gráfico de $I_{RMS} \times n\epsilon^2$ para $\gamma = \frac{3}{4}$ e três valores de ϵ , $\epsilon = 10^{-5}$, $\epsilon = 10^{-4}$, $\epsilon = 10^{-3}$; Foram utilizados 5.000 condições iniciais, com $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ para $I_0 = 10^{-3}\epsilon$	22
3.2	(a) Gráfico de $I_{RMS} \times \epsilon$, com $\gamma = \frac{3}{4}$; (b) Gráfico de $I_{RMS} \times \epsilon$, com $\gamma = 1$	23
3.3	(a) Gráfico de $n_x \times \epsilon$, com $\gamma = \frac{3}{4}$; (b) Gráfico de $n_x \times \epsilon$, com $\gamma = 1$.	24
3.4	(a) Três curvas de I_{RMS} em função do número de iteradas n para $\gamma = \frac{3}{4}$; (b) Colapso das três curvas em uma única curva universal a partir da reescala dos eixos.	26

Capítulo 1

Introdução

Desde a Antiguidade o Homem busca entender a natureza (1). As pessoas, já em tempos remotos, eram conscientes das regularidades à sua volta, como por exemplo, que os objetos, na ausência de suporte, sempre caíam e o ciclo lunar de 28 dias de duração. A filosofia, evitando as influências religiosas e mágicas, procurava uma explicação racional à esses e outros fenômenos naturais (2).

Durante o Renascimento, foi desenvolvido o método científico como o conhecemos hoje, Galileu Galilei (1564-1642) empregou a matemática no estudo dos fenômenos naturais, antes defendidos apenas pela experimentação (3). Pela filosofia cartesiana (4), os princípios básicos que regem a natureza podiam ser obtidos por uma combinação da pura razão com lógica matemática. Durante esse período, foi desenvolvido o cálculo diferencial integral por Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), em trabalhos independentes (5). Havia então, uma nova maneira de se fazer ciência, utilizando como ferramenta a matemática.

Em seu livro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* Isaac Newton uniu os Céus e a Terra sob as leis da gravitação universal. A partir das leis de Kepler, Newton mostrou que tipos de forças devem ser necessárias para manter os planetas em suas órbitas (6). Estudos analíticos sobre o problema dos dois corpos, que estuda o movimento de dois corpos sujeitos apenas à atração gravitacional entre eles, foi resolvido. Porém, estudar um problema com mais de 2 corpos é uma tarefa complicada porque as equações destes sistemas não são resolvidas por

nenhuma função conhecida (7). O problema é suficientemente complexo para que não seja possível achar uma solução que descreva o sistema para um intervalo de tempo arbitrário.

Pierre Simon Laplace (1749 - 1827), no seu *Tratado sobre a Mecânica Celeste* (8) melhora as soluções aproximadas conhecidas para o sistema solar e traz grandes avanços ao cálculo e caracterização das órbitas planetárias. Porém, apesar da robustez dos métodos desenvolvidos por Laplace, uma demonstração rigorosa da estabilidade do sistema solar continuava a faltar e foi este problema em aberto que motivou os trabalhos de Henri Poincaré (1854 - 1912) que levaram à descoberta do caos, assim como muitos outros ao longo dos últimos anos (7).

Poincaré investigou o sistema como um todo, se ele era estável ou instável, principalmente, ele identificou sensibilidade às condições iniciais. O trabalho de Poincaré mostra uma diferença essencial entre sistemas integráveis e não integráveis. Um sistema é dito ser integrável quando o número de constantes de movimento do sistema é igual ao número de graus de liberdade.

Mais tarde, com avanços tecnológicos tais como a invenção de computadores, foram aplicados métodos numéricos à resolução de deste tipo de sistema dinâmico, e foi observada grande dependência às condições iniciais sendo que uma pequena alteração nas condições iniciais levava a trajetórias completamente diferentes. Após um período de dúvidas sobre os métodos numéricos utilizados, tais resultados foram aceitos, dando início a Teoria do Caos, subárea da mecânica (9).

O caos pode ser associado à imprevisibilidade dos resultados e sensibilidade do sistema às condições iniciais e é uma possibilidade de comportamento de um sistema não linear dentre inúmeras outras. Uma ferramenta bastante utilizada na literatura para a caracterização de órbitas caóticas são os expoente de Lyapunov. Entende-se por sistema dinâmico um conjunto de equações que envolve os mesmos conjuntos de variáveis evoluindo ao longo do tempo. Para a descrição de sistemas não lineares e caóticos, são utilizados dois modelos matemáticos: as equações diferenciais e os mapas. As equações diferenciais são contínuas no tempo e normalmente são não lineares. Os mapas descrevem uma evolução temporal discreta em função das iterações anteriores das variáveis relevantes ao sistema, definindo assim o seu estado. Ao conjunto de estados acessíveis formados pela evolução

temporal dessas variáveis chamamos de espaço de fases do qual observamos as órbitas, ou seja, um conjunto de estados formados a partir de uma dada condição inicial, evoluídos no tempo. Portanto, o espaço de fases exhibe o comportamento dinâmico de um sistema, permitindo assim a caracterização de sua estrutura. Nele podem ser observados os comportamentos que vão desde o regular ao complexo. Para uma maior compreensão de sistemas desse tipo, faz-se necessária a utilização de simulações computacionais, onde serão verificadas as propriedades e variações desses sistemas sensíveis às suas condições iniciais e aos seus parâmetros de controle.

Na seção seguinte descreveremos a forma de obter o mapa padrão, que será utilizado ao longo desta dissertação.

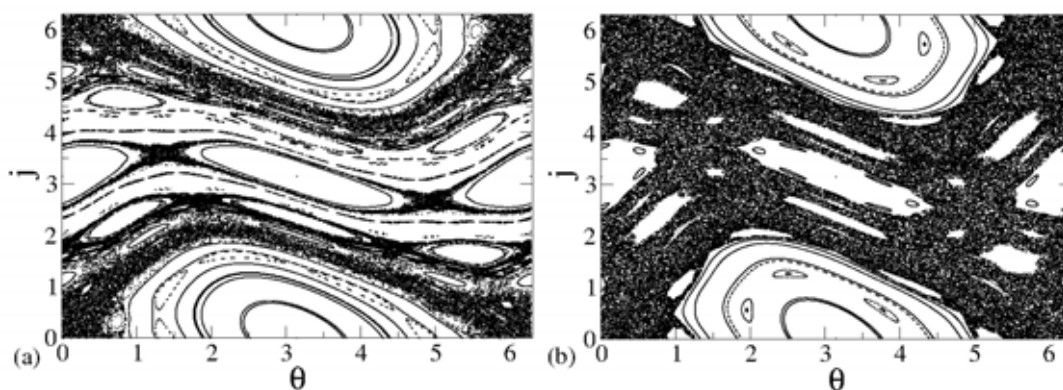


figura 1.1: Espaço de fases do mapa padrão considerando: (a) $K = 0,95$; (b) $K = 1,2$.

1.1 O Mapa Padrão

Este mapa, também conhecido como mapa de Chirikov-Taylor, aparece em vários problemas físicos. A Hamiltoniana de um sistema que pode ser descrito pelo mapa padrão é expressa por

$$H = \frac{1}{2}Y^2 - K \cos(\theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - n\right). \quad (1.1)$$

Ela define o sistema com uma Hamiltoniana não perturbada,

$$H_0 = \frac{1}{2}Y^2, \quad (1.2)$$

que é afetada por uma sequência periódica de *kicks* (pulsos δ) com o período

$$T = \frac{2\pi}{\nu}. \quad (1.3)$$

A expressão (1.2) corresponde ao movimento livre da partícula, $Y = p$, $\theta = x$, ou a um rotor livre quando a variável θ é cíclica, isto é, $\theta \in (0, 2\pi)$. Vamos considerar o último caso. Usando a identidade (10)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right), \quad (1.4)$$

reescrevemos (1.1) da seguinte maneira

$$H = \frac{1}{2}Y^2 - K \cos(\theta) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(m\nu t). \quad (1.5)$$

A Hamiltoniana (1.5) também pode ser considerada como um caso particular de uma Hamiltoniana mais geral,

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \sum_m V_m \cos(k_m x - \omega_m t), \quad (1.6)$$

quando

$$k_m = 1(\forall m), \quad V_m = V_0 = -K(\forall m), \quad \omega_m = m\nu,$$

e o somatório em (1.6) foi feito sobre $m \in (-\infty, \infty)$. Assim, a Hamiltoniana (1.1) corresponde ao movimento de uma partícula num pacote de ondas periódico com um número infinito de harmônicos de igual amplitude (10). As equações do

movimento derivadas de (1.1) têm a forma

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= -K \sin(\theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - n\right), \\ \dot{\theta} &= Y. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Entre duas funções δ , $Y = \text{constante}$ e $\theta = Yt + \text{constante}$. A cada passo, ou *kick*, representado pela função δ , a variável θ permanece contínua e a ação Y muda de acordo com o valor de $-K \sin(\theta)$, que pode ser obtido integrando-se (1.7) no tempo numa pequena vizinhança da função δ . Se assumirmos que (Y_n, θ_n) são os valores das variáveis antes do n ésimo *kick*, e que (Y_{n+1}, θ_{n+1}) são os mesmos valores antes do $(n + 1)$ ésimo *kick*, segue-se que o mapa, derivado de (1.7), é

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n - K \sin(\theta) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + Y_{n+1} \end{cases}, \tag{1.8}$$

que é equivalente às equações de movimento em (1.7).

Na figura 1.1 mostramos o espaço de fases para o mapa padrão. Na figura 1.1(a) $K = 0,95$ e na figura 1.1(b) temos $K = 1,2$. É importante ressaltar que para $K = K_{ef} = 0,971635\dots$ temos uma transição de caos local (figura 1.1(a)) para global (figura 1.1(b)) conforme discutido em (11). Para este último, temos que uma condição inicial no mar caótico com $Y_0 \cong 0$ poderá se difundir ao longo de Y . Tal transição será mencionada novamente ao longo da dissertação.

1.2 Sobre a dissertação

Sistemas dinâmicos descritos por mapeamentos discretos tem sido estudados amplamente durante vários anos (10, 11). Em particular, para sistemas com 1 e 1/2 graus de liberdade, que correspondem por exemplo a perturbações temporais em um sistema de um grau de liberdade, a descrição de sistemas Hamiltonianos conduz muitas vezes a mapeamentos discretos bidimensionais e que preservam a área no espaço de fases. Um número elevado de aplicações do formalismo utilizando mapeamento discreto bidimensional e que preserva a área no espaço de fases pode ser observado, em particular no estudo de plasma (por exemplo toka-

maks) (12, 13, 14, 15), guia de ondas (16, 17, 18, 19, 20), aceleração de Fermi (21), bilhares clássicos (22, 23, 24) e muitas outras generalizações (25, 26, 27, 28).

Esta dissertação trata sobre algumas propriedades dinâmicas de um conjunto de mapeamentos discretos bidimensionais nas vizinhanças de uma transição de integrabilidade para não integrabilidade. O mapeamento é definido por duas variáveis dinâmicas I (ação) e θ (ângulo) assim como dois parâmetros de controle: ϵ e γ . O parâmetro ϵ controla a intensidade da não-linearidade do sistema, em particular controla a transição de integrabilidade com $\epsilon = 0$ para não integrabilidade com $\epsilon \neq 0$. As propriedades dinâmicas e de escala do mar de caos criado pelo mapeamento serão caracterizados como função de ϵ . Por outro lado o parâmetro γ recupera diversos modelos conhecidos na literatura e foi introduzido para generalizar o mapeamento.

1.3 A Organização da Dissertação

A organização da dissertação segue a seguinte ordem: No Capítulo 2 mostramos a forma de obter o mapeamento e definimos o problema a ser estudado. Em seguida, expoentes de Lyapunov são utilizados para caracterizar o sistema. Pontos fixos são obtidos e as curvas invariantes do tipo *spanning* são estudadas. No Capítulo 3 nos dedicamos a estudar as hipóteses e propriedades de escala. No Capítulo 4, discutiremos as leis de escala onde obteremos os expoentes críticos analiticamente. No Capítulo 5 apresentaremos as Conclusões e por fim a Bibliografia consultada é apresentada.

Capítulo 2

O mapeamento discreto e suas propriedades

Neste capítulo apresentaremos o problema e estudaremos algumas propriedades dinâmicas para um conjunto de mapeamentos discretos.

2.1 Definição do problema e obtenção do mapeamento

Vamos considerar um sistema bidimensional que é integrável e levemente perturbado. Em coordenadas generalizadas, a Hamiltoniana que descreve o sistema é escrita como

$$H(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2) = H_0(I_1, I_2) + \epsilon H_1(I_1, I_2, \theta_1, \theta_2), \quad (2.1)$$

onde as variáveis I_i e θ_i com $i = 1, 2$ correspondem, respectivamente, a ação e o ângulo. H_0 é a Hamiltoniana não perturbada e H_1 , uma perturbação de H_0 , onde o parâmetro de controle ϵ controla a transição de integrabilidade ($\epsilon = 0$) para não integrabilidade ($\epsilon \neq 0$). Para usar a caracterização da dinâmica em termos de um mapeamento, podemos introduzir uma seção de Poincaré definida pelo plano $I_1 \times \theta_1$ e com θ_2 constante (mod 2π). Um mapeamento bidimensional (11) é dado por

2.1 Definição do problema e obtenção do mapeamento

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = I_n + \epsilon h(\theta_{n+1}, I_n) \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + K(I_n) + \epsilon p(\theta_{n+1}, I_n)] \pmod{2\pi} \end{cases}, \quad (2.2)$$

onde K , h e p são funções não lineares quaisquer de suas variáveis enquanto o índice n corresponde a enésima iterada do mapa. As variáveis I e θ correspondem a I_1 e θ_1 . Uma vez que o mapa (2.2) deve preservar a área no espaço de fases (pois foi obtido de uma Hamiltoniana), as expressões para $h(\theta_{n+1}, I_n)$ e $p(\theta_{n+1}, I_n)$ devem obedecer algumas propriedades. Em particular, a de que o determinante da matriz Jacobiana seja igual a unidade. A matriz Jacobiana é escrita como

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{pmatrix},$$

temos então que os elementos da matriz Jacobiana são dados por

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} &= \frac{1}{1 - \epsilon \left(\frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \right)}, \\ \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} &= \epsilon \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} + \epsilon \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n}, \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} &= \left[\frac{\partial K(I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} + \epsilon \frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \right] \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n}, \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} &= 1 + \epsilon \frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} + \left[\frac{\partial K(I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} + \epsilon \frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} \right] \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Com isso, o determinante da matriz Jacobiana é

$$\text{Det} J = \frac{1 + \epsilon \frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n}}{1 - \epsilon \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}}}. \quad (2.4)$$

2.1 Definição do problema e obtenção do mapeamento

Podemos concluir que a preservação da área ocorrerá apenas na condição

$$\frac{\partial p(\theta_n, I_{n+1})}{\partial \theta_n} + \frac{\partial h(\theta_n, I_{n+1})}{\partial I_{n+1}} = 0. \quad (2.5)$$

Quando a função $K(I_n)$ diverge no limite quando a ação tende a zero, geralmente o espaço de fases exibe forma mista, com coexistência de ilhas periódicas, mares caóticos e curvas invariantes do tipo *spanning*. Assim, o formalismo que desenvolvemos é baseado na consideração que próximo às curvas invariantes *spanning* a dinâmica pode ser reduzida localmente ao mapa padrão (11, 29). Adotaremos no nosso trabalho

$$h(\theta_{n+1}) = \sin(\theta_{n+1}), \quad (2.6)$$

e temos liberdade para escolher $p(\theta_{n+1}, I_n)$ e $K(I_n)$. Sem perda de generalidade, podemos considerar

$$p(\theta_{n+1}, I_n) = \text{constante}, \quad (2.7)$$

e variar K . Assim, podemos ilustrar a aplicação do formalismo com os seguintes mapeamentos:

- considerando $K(I_n) = I_n + \xi I_n^2$, o mapa logístico-*twist* é obtido (30);
- $K(I_n) = I_n$, o mapa de Taylor-Chirikov é recuperado (31);
- $K(I_n) = \frac{2}{I_n}$, o acelerador de Fermi é obtido (32, 33);
- $K(I_n) = \xi I_n$, com $\xi = \text{constante}$, o modelo *bouncer* é recuperado (34);
- para o caso de

$$K(I_n) = \begin{cases} 4\xi^2 \left(I_n - \sqrt{I_n^2 - \xi^{-2}} \right), & \text{se } I_n > \xi^{-1} \\ 4\xi^2 I_n, & \text{se } I_n \leq \xi^{-1} \end{cases}, \quad (2.8)$$

onde $\xi = \text{constante}$, o modelo Fermi-Ulam-*bouncer* híbrido é recuperado (35). Neste trabalho consideraremos que

$$K(I_n) = \frac{1}{I_n^\gamma}, \quad (2.9)$$

2.1 Definição do problema e obtenção do mapeamento

e $\gamma > 0$. Desta forma, obtemos o seguinte mapeamento

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = |I_n - \epsilon \sin(\theta_{n+1})| \\ \theta_{n+1} = \left[\theta_n + \frac{1}{I_n} \right] \text{ mod } 2\pi \end{cases}, \quad (2.10)$$

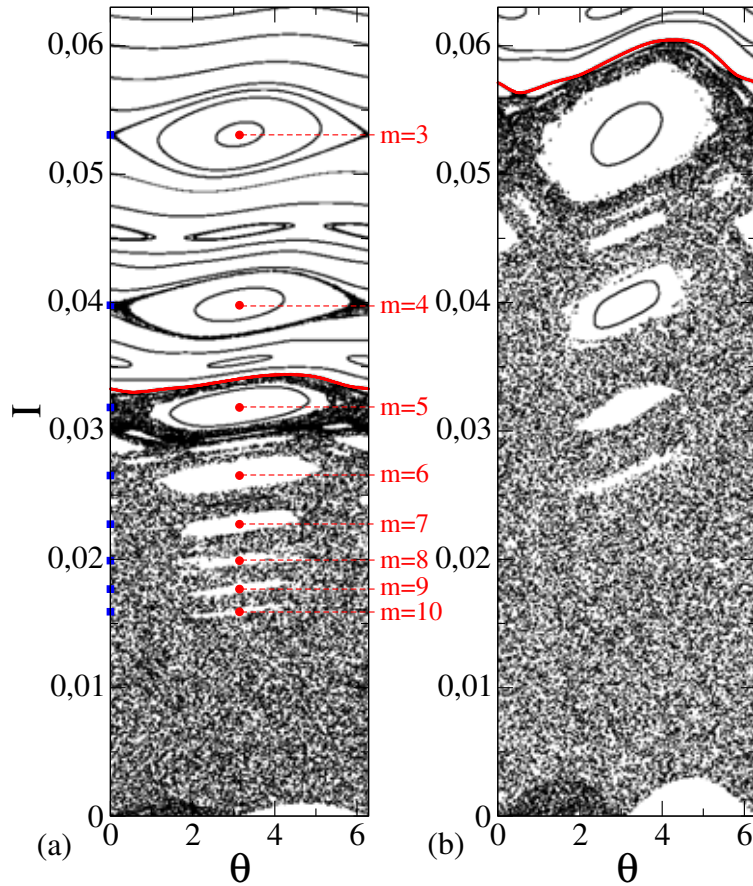


figura 2.1: Espaço de fases gerado a partir do mapa (2.10) para $\gamma = 1$ e: (a) $\epsilon = 10^{-3}$; (b) $\epsilon = 3 \times 10^{-3}$. Os círculos em cor vermelha indicam a localização de alguns pontos fixos elípticos (todos numerados) enquanto que os quadrados azuis fornecem a posição dos pontos fixos hiperbólicos. As curvas contínuas em vermelho são as primeiras curvas invariantes do tipo *spanning* para cada caso.

onde ϵ e γ são parâmetros de controle. O módulo é necessário para prevenir que a ação I assumira valores negativos. Quando $\epsilon = 0$, o sistema é integrável. Para $\epsilon \neq 0$, o espaço de fases do sistema exibe componentes caóticas e órbitas periódicas, como podemos ver na figura. 2.1.

O espaço de fases do modelo é misto contendo ilhas periódicas, um extenso mar caótico e curvas invariantes do tipo *spanning* que separam diferentes regiões caóticas e limitam o crescimento da ação I , como podemos ver na figura. 2.1. A curva vermelha mostra a posição da primeira curva invariante do tipo *spanning*. As ilhas periódicas têm a característica de não permitirem o trânsito livre de uma órbita entre seu interior e o mar de caos, assim, a evolução de uma condição inicial que esteja em seu interior jamais sairá desta região, da mesma forma que uma órbita pertencente ao mar de caos jamais entrará na ilha periódica.

2.2 Os Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov são usados como indicadores de caos. Eles indicam se uma órbita é sensível ou não às condições iniciais. Se duas órbitas com condições iniciais infinitesimalmente próximas divergem exponencialmente ao longo das iterações, então as órbitas são classificadas como caóticas. Se duas órbitas permanecerem próximas ou divergirem apenas linearmente, então não são sensíveis às condições iniciais e, conseqüentemente, não são caóticas.

Inicialmente efetuaremos o cálculo para um mapa unidimensional, e depois extrapolaremos para o caso bidimensional (que são os objetos de estudo neste trabalho).

Seja o mapa unidimensional dado por

$$X_{n+1} = F(X_n), \quad (2.11)$$

onde X_0 é uma condição inicial e F é uma função não linear qualquer. Podemos definir a distância relativa entre duas órbitas, na n -ésima iteração, como,

$$d = |F^{(n)}(X_0 + \varepsilon) - F^{(n)}(X_0)|, \quad (2.12)$$

ou ainda, podemos considerar a distância relativa pela razão

$$\frac{d}{\varepsilon} = \frac{|F^{(n)}(X_0 + \varepsilon) - F^{(n)}(X_0)|}{\varepsilon}, \quad (2.13)$$

onde ε é muito pequeno. Considerando o limite em que $\varepsilon \rightarrow 0$, podemos definir,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{F^{(n)}(X_0 + \varepsilon) - F^{(n)}(X_0)}{(X_0 + \varepsilon) - X_0} \right| = |F'^{(n)}(X_0)| \equiv e^{(\lambda n)}. \quad (2.14)$$

Tomando o logaritmo de ambos os lados da equação (2.14) e reorganizando os termos, obtemos

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln |F'^{(n)}(X_0)|. \quad (2.15)$$

Agora considerando o caso em que $n \rightarrow \infty$ a expressão para o cálculo do expoente de Lyapunov para mapas unidimensionais é dada por,

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |F'^{(n)}(X_0)|. \quad (2.16)$$

Em mapas bidimensionais, como os estudados neste trabalho, os expoentes de Lyapunov são dados por

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_j^i|, \quad \text{com } j = 1, 2. \quad (2.17)$$

O termo Λ_j^i representa os autovalores da matriz $M = \prod_{i=1}^n J_i(I_i, \theta_i)$ e J_i é a matriz Jacobiana do mapeamento avaliada na órbita (I_i, θ_i) .

Para o cálculo dos expoentes de Lyapunov, vamos utilizar o *Algoritmo de Triangularização*, proposto por Eckmann e Ruelle em 1985 (36). Este algoritmo consiste em escrever J (matriz Jacobiana) a partir do produto de uma matriz triangular superior (T) por uma matriz ortogonal (Θ), ou seja, $J = \Theta T$. Uma matriz é ortogonal quando sua transposta é igual à sua inversa (37), ou seja,

$$\Theta^{-1} = \Theta^T.$$

Usando estas definições, podemos reescrever a matriz M como

$$M = J_n J_{n-1} J_{n-2} \dots, J_2 J_1 = J_n J_{n-1} \dots, J_2 \Theta_1 \Theta_1^{-1} J_1,$$

onde $T_1 = \Theta_1^{-1} J_1$. O produto de $J_2 \Theta_1$ define uma nova J_2' . Seguindo o mesmo

raciocínio, temos

$$M = J_n J_{n-1} \dots J_3 \Theta_2 \Theta_2^{-1} J_2' T_1.$$

O mesmo procedimento pode ser usado para obter $T_2 = \Theta_2^{-1} J_2'$ e assim por diante. Usando este procedimento, o algoritmo se resume a analisar os elementos da diagonal principal de T , ou seja, T_{11} e T_{22} . Para encontrá-los, devemos achar as expressões de $\Theta_1^{-1} J_1 = T_1$, dadas por

$$\Theta_1 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad J_1 = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Desenvolvendo o produto das matrizes, encontramos

$$\begin{pmatrix} j_{11} \cos(\theta) + j_{21} \sin(\theta) & j_{12} \cos(\theta) + j_{22} \sin(\theta) \\ -j_{11} \sin(\theta) + j_{21} \cos(\theta) & -j_{12} \sin(\theta) + j_{22} \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Resolvendo a igualdade de matrizes, obtemos

$$\begin{aligned} -j_{11} \sin(\theta) + j_{21} \cos(\theta) &= 0, \\ -j_{11} \sin(\theta) &= -j_{21} \cos(\theta), \\ \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} &= \frac{j_{21}}{j_{11}}. \end{aligned}$$

Observando a figura [2.2](#), podemos tentar obter relações trigonométricas em um triângulo retângulo. Aplicando o Teorema de Pitágoras podemos encontrar

o valor da hipotenusa (HI), que é igual a

$$HI = \sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}.$$

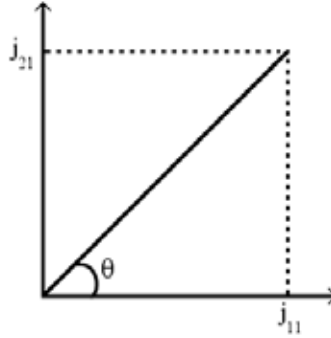


Figura 2.2: No triângulo retângulo da figura, encontramos quem são o cateto oposto e o cateto adjacente usados na obtenção do $\sin(\theta)$ e do $\cos(\theta)$.

Da figura 2.2, temos que

$$\sin(\theta) = \frac{j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, \quad \cos(\theta) = \frac{j_{11}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}.$$

Finalmente podemos reescrever os autovalores da matriz T , ou seja

$$T_{11} = j_{11} \cos(\theta) + j_{21} \sin(\theta) = \frac{j_{11}^2 + j_{21}^2}{\sqrt{(j_{11}^2 + j_{21}^2)}}, \quad (2.18)$$

$$T_{22} = j_{22} \cos(\theta) + j_{12} \sin(\theta) = \frac{j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21}}{\sqrt{(j_{11}^2 + j_{21}^2)}}. \quad (2.19)$$

A partir dos autovalores T_{11} e T_{22} da matriz triangular, encontramos numericamente os expoentes de Lyapunov para uma órbita do espaço de fases para mapeamentos bidimensionais.

Em sistemas Hamiltonianos os expoentes de Lyapunov aparecem aos pares e com sinais contrários (38). Vamos sempre considerar o expoente positivo em nossas simulações. Na figura 2.3 foram usadas dez condições iniciais com diferentes valores de θ_0 , iteradas 10^9 vezes na região de mais baixa ação do espaço de fases

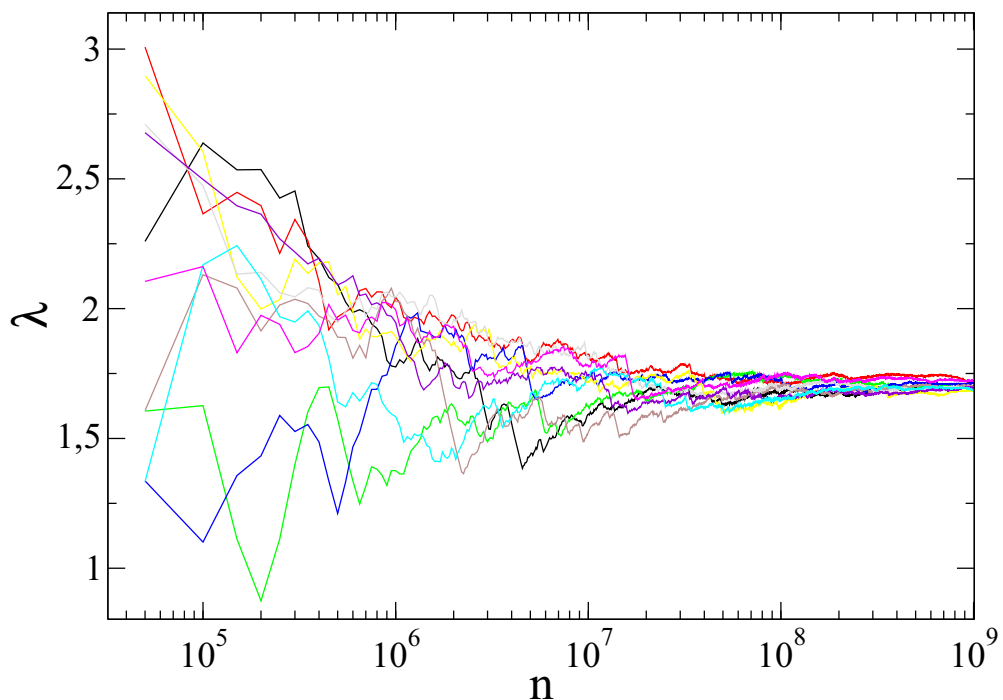


Figura 2.3: Evolução temporal do expoente de Lyapunov positivo para dez diferentes condições iniciais evoluídas 10^9 vezes. Os parâmetros usados são $\epsilon = 10^{-4}$ e $\gamma = 1$.

($I_0 = 10^{-3}\epsilon$), correspondente à região do mar de caos, para o mapa (2.10). Pode-se ver que mesmo para diferentes condições iniciais, os expoentes de Lyapunov convergem para um valor constante para n suficientemente grande, e com isso, podemos tomar a média dessas dez condições e obter o expoente de Lyapunov médio $\bar{\lambda}$.

Já na figura 2.4 temos o comportamento do $\bar{\lambda}$ em função do parâmetro ϵ . Apesar da extensa faixa no parâmetro ϵ , o expoente de Lyapunov positivo não exhibe variação representativa.

2.3 Pontos Fixos

Dadas as expressões do mapeamento, podemos obter os correspondentes pontos fixos. Os pontos fixos são obtidos fazendo $I_{n+1} = I_n = I$ e $\theta_{n+1} = \theta_n = \theta + m2\pi$, com $m = 1, 2, 3, \dots$. Considerando a segunda equação do mapeamento (2.10),

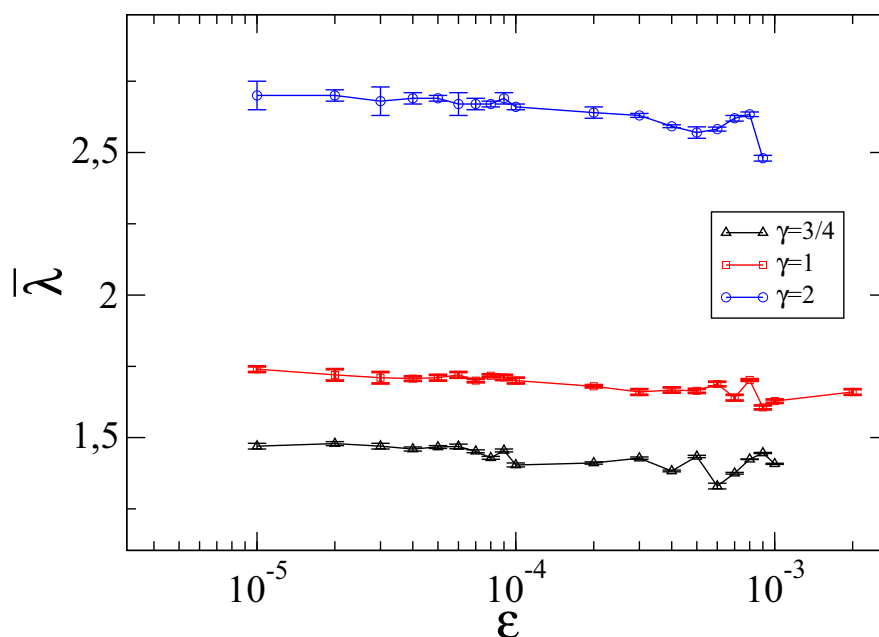


Figura 2.4: Gráfico de $\bar{\lambda} \times \epsilon$ para os valores fixos $\gamma = 3/4$, $\gamma = 1$ e $\gamma = 2$.

temos

$$\theta + m2\pi = \theta + \frac{1}{I^\gamma}, \quad (2.20)$$

onde podemos reescrever esta equação como

$$I^\gamma = \frac{1}{m2\pi}. \quad (2.21)$$

Isolando I , encontramos

$$I = \left(\frac{1}{m2\pi} \right)^{\frac{1}{\gamma}}. \quad (2.22)$$

Considerando a primeira equação do mapeamento (2.10), encontramos

$$\epsilon \sin(\theta) = 0. \quad (2.23)$$

Como não faz sentido para nosso estudo considerarmos $\epsilon = 0$ (dinâmica regular), temos como solução

$$\theta = k\pi, \quad (2.24)$$

onde k é um número inteiro não negativo. Como estamos modulando mapa em 2π , temos que $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ são as possíveis soluções.

Uma forma de se caracterizar os pontos fixos é através do polinômio característico (39), escrito como

$$\lambda^2 - \lambda(\text{Tr}J^*) + 1 = 0,$$

onde a solução desta equação nos fornece

$$\lambda_{\pm} = \frac{\text{Tr}J^* \pm \sqrt{(\text{Tr}J^*)^2 - 4\det J}}{2}.$$

e $\text{Tr}J^*$ é dito o traço da Jacobiana, ou seja, a soma dos elementos da diagonal principal da matriz J^* ,

$$\text{Tr}J^* = J_{11} + J_{22}. \quad (2.25)$$

Para o mapeamento (2.10), os elementos da matriz Jacobiana são

$$J_{11} = \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} = S \left[1 - \epsilon \cos(\theta_{n+1}) \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} \right], \quad (2.26)$$

$$J_{12} = \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} = S \left[-\epsilon \cos(\theta_{n+1}) \frac{\partial \theta_{n+1}}{\theta_n} \right], \quad (2.27)$$

$$J_{21} = \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} = -\frac{\gamma}{I_n^{\gamma+1}}, \quad (2.28)$$

$$J_{22} = \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} = 1, \quad (2.29)$$

e S é o sinal da expressão $[I_n - \epsilon \sin(\theta_{n+1})]$ ou seja, $S = 1$ se $[I_n - \epsilon \sin(\theta_{n+1})] > 0$ e $S = -1$ se $[I_n - \epsilon \sin(\theta_{n+1})] < 0$.

O determinante da matriz Jacobiana é dada por

$$\det J = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} = S, \quad (2.30)$$

desta forma podemos afirmar que o sistema preserva a área do espaço de fases.

Os pontos fixos podem ser classificados da seguinte forma (39):

- Se $[(\text{Tr}J^*)^2 - 4\det J] < 0$, λ_1 e λ_2 serão números imaginários, então o ponto fixo (X^*, Y^*) é elíptico.

2.4 Posição da primeira curva invariante do tipo *spanning*

- Se $[(\text{Tr}J^*)^2 - 4\det J] = 0$, o ponto fixo (X^*, Y^*) é parabólico.
- Se $[(\text{Tr}J^*)^2 - 4\det J] > 0$, λ_1 e λ_2 serão números reais, então o ponto fixo (X^*, Y^*) é hiperbólico.

Na figura 2.1 podemos ver os pontos fixos. Os parâmetros de controle usados são $\gamma = 1$, em (a) $\epsilon = 10^{-3}$ e em (b) $\epsilon = 3 \times 10^{-3}$. Os círculos vermelhos correspondem aos pontos fixos elípticos, que são estáveis e os quadrados em azul são pontos fixos hiperbólicos, que são instáveis.

2.4 Posição da primeira curva invariante do tipo *spanning*

Supondo que próximo a uma curva invariante do tipo *spanning*, a qual limita o tamanho do mar de caos, I pode ser escrito como

$$I_{n+1} \cong I^* + \Delta I_{n+1}, \quad (2.31)$$

onde I^* é um valor típico ao longo da curva invariante e ΔI_{n+1} é uma pequena perturbação em I_{n+1} . Essa aproximação pode ser usada porque a curva invariante *spanning* flutua muito pouco se comparada ao tamanho do mar caótico. A segunda equação do mapa (2.10) fica escrita como

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{1}{(I^* + \Delta I_n)^\gamma} = \theta_n + \frac{1}{I^*} \left(1 + \frac{\Delta I_n}{I^*}\right)^{-\gamma}. \quad (2.32)$$

Como $\frac{\Delta I_n}{I^*} \rightarrow 0$ (ΔI_n é muito pequeno), expandiremos em série de Taylor

$$\left(1 + \frac{\Delta I_n}{I^*}\right)^{-\gamma} = 1 - \gamma \frac{\Delta I_n}{I^*} + \frac{1}{2} \gamma(\gamma + 1) \left(\frac{\Delta I_n}{I^*}\right)^2 + \dots, \quad (2.33)$$

como $\frac{\Delta I_n}{I^*}$ é muito pequeno, não usaremos termos de segunda ordem ou maiores, logo

$$\theta_{n+1} \cong \theta_n + \frac{1}{(I^*)^\gamma} \left(1 - \gamma \frac{\Delta I_n}{I^*}\right) = \theta_n + \frac{1}{(I^*)^\gamma} - \gamma \frac{\Delta I_n}{(I^*)^{\gamma+1}}. \quad (2.34)$$

2.4 Posição da primeira curva invariante do tipo *spanning*

chamaremos parte da expansão acima de Y_n

$$Y_n = \frac{1}{(I^*)^\gamma} - \gamma \frac{\Delta I_n}{(I^*)^{\gamma+1}}, \quad (2.35)$$

da primeira equação do mapa (2.10), temos

$$\Delta I_{n+1} = \Delta I_n - \epsilon \sin(\theta_{n+1}), \quad (2.36)$$

multiplicaremos ambos os lados por $\frac{-\gamma}{I^{*(\gamma+1)}}$ e depois somaremos $\frac{1}{I^{*\gamma}}$, ficando com

$$\frac{1}{I^{*\gamma}} - \frac{\gamma}{I^{*(\gamma+1)}} \Delta I_{n+1} = \frac{1}{I^{*\gamma}} - \frac{\gamma}{I^{*(\gamma+1)}} \Delta I_n + \frac{\gamma}{I^{*(\gamma+1)}} \epsilon \sin(\theta_{n+1}). \quad (2.37)$$

Reescreveremos, então a equação acima como

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{\gamma}{I^{*(\gamma+1)}} \epsilon \sin(\theta_{n+1}). \quad (2.38)$$

Chamando $k_{ef} = \frac{\gamma}{I^{*(\gamma+1)}} \epsilon$, então teremos

$$Y_{n+1} = Y_n + k_{ef} \sin(\theta_{n+1}). \quad (2.39)$$

Após essa transformação, nosso mapa fica

$$\begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + k_{ef} \sin(\theta_{n+1}) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + Y_n \end{cases}, \quad (2.40)$$

que é o mapa padrão, *standard mapping* ou mapa de Chirikov-Taylor. Portanto, próximo às curvas invariantes *spanning* podemos reduzir o mapeamento do sistema ao mapa de Chirikov-Taylor (40).

Como a transição de caos local para global ocorre com $k_{ef} \cong 0,9716 \dots$ (11) temos

$$0,9716 \dots = \frac{\gamma \epsilon}{I^{*(\gamma+1)}}. \quad (2.41)$$

Isolando I^* , obtemos

$$I^* = \left(\frac{\gamma \epsilon}{0,9716} \right)^{1/(\gamma+1)}. \quad (2.42)$$

2.4 Posição da primeira curva invariante do tipo *spanning*

Extendendo os resultados deste procedimento, podemos concluir que o tamanho do mar de caos é proporcional a $\gamma\epsilon^{1/(1+\gamma)}$.

Como um breve sumário deste capítulo, definimos o mapa estudado a partir da Hamiltoniana que descreve um sistema levemente perturbado, mostramos o espaço de fases gerado por esse mapa. Encontramos os pontos fixos do mapeamento e os classificamos. Também encontramos a posição da primeira curva invariante *spanning* que limita mar de caos. Este caracterizado pelos expoentes de Lyapunov.

Capítulo 3

Hipóteses de Escala

Discutiremos neste capítulo algumas propriedades de escala para o mar de caos.

3.1 Ação média e as hipóteses de escala

Conforme discutido no capítulo anterior, vimos que a posição da primeira curva invariante define a amplitude máxima para o mar de caos. Com isso uma condição inicial com baixa ação não pode se difundir ilimitadamente. Com base nesta observação vamos discutir nesta seção algumas propriedades para a ação média I_{RMS} , que é definida como

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{i,j}^2 \right]}, \quad (3.1)$$

onde M especifica um conjunto de condições iniciais e n caracteriza o número de iterações do mapeamento. A figura 3.1 mostra o comportamento de $I_{RMS} \times n$ para diferentes parâmetros de controle utilizando $n = 5.000$ diferentes ângulos $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ para $I_0 = 10^{-3}\epsilon$.

Podemos notar que as curvas mostradas na figura 3.1 crescem para n pequeno e saturam para n suficientemente grande. A mudança de crescimento para saturação é caracterizada por um número de iterações típico n_x . Observamos também que a medida que o parâmetro de controle ϵ é aumentado, as curvas

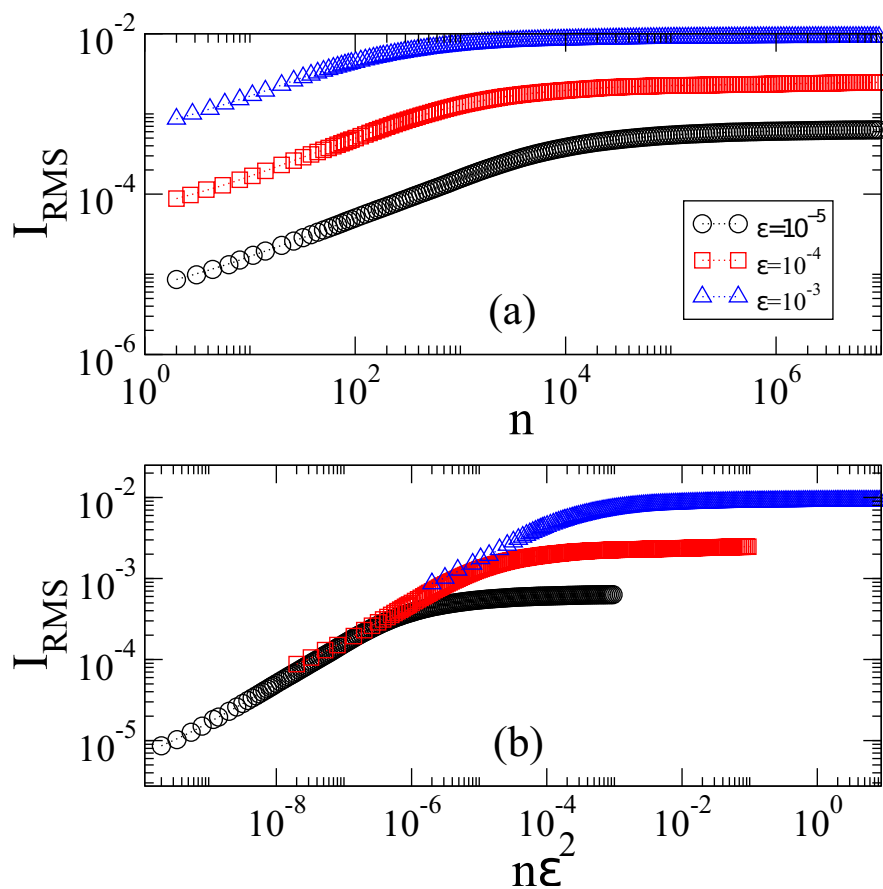


Figura 3.1: (a) Gráfico de $I_{RMS} \times n$ para $\gamma = \frac{3}{4}$ e três valores de ϵ , $\epsilon = 10^{-5}$, $\epsilon = 10^{-4}$, $\epsilon = 10^{-3}$; (b) Gráfico de $I_{RMS} \times n\epsilon^2$ para $\gamma = \frac{3}{4}$ e três valores de ϵ , $\epsilon = 10^{-5}$, $\epsilon = 10^{-4}$, $\epsilon = 10^{-3}$; Foram utilizados 5.000 condições iniciais, com $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ para $I_0 = 10^{-3}\epsilon$.

de I_{RMS} crescem e saturam em valores maiores. Por outro lado ocorre redução em n_x com o aumento de ϵ . Com base nestas observações podemos propor as seguintes hipóteses de escala:

- Hipótese I: Para $n \ll n_x$, o comportamento de I_{RMS} pode ser descrito como:

$$I_{RMS}(n\epsilon^2, \epsilon) \propto (n\epsilon^2)^\beta, \quad (3.2)$$

sendo β é o expoente de aceleração;

3.1 Ação média e as hipóteses de escala

- Hipótese II: Para $n \gg n_x$, I_{RMS} é dado por:

$$I_{RMS}(\epsilon) \propto \epsilon^\alpha, \quad (3.3)$$

onde α é o expoente de saturação;

- Hipótese III: O número de iteração de *crossover* n_x é escrito como:

$$n_x(\epsilon) \propto \epsilon^z, \quad (3.4)$$

onde z é chamado de expoente dinâmico.

O valor numérico dos expoentes β , α e z pode ser obtido a partir de gráficos específicos. O expoente β é obtido apenas ajustando uma lei de potência na curva $I_{RMS} \times n$ para $n \ll n_x$. O valor numérico obtido foi $\beta = 0,4959(1) \cong 0,5$. O expoente α é obtido a partir do comportamento de $I_{RMS} \times \epsilon$ para $n \gg n_x$. Para $\gamma = \frac{3}{4}$ e $\gamma = 1$ obtivemos $\alpha = 0,579(4)$ e $\alpha = 0,514(2)$ respectivamente, conforme mostrado na figura 3.2.

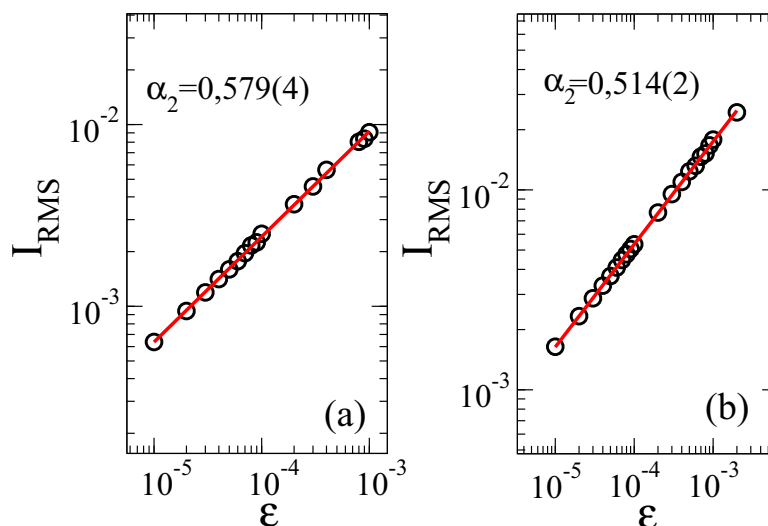


Figura 3.2: (a) Gráfico de $I_{RMS} \times \epsilon$, com $\gamma = \frac{3}{4}$; (b) Gráfico de $I_{RMS} \times \epsilon$, com $\gamma = 1$.

O expoente z é obtido a partir do conhecimento de $n_x \times \epsilon$. Para $\gamma = \frac{3}{4}$ e

3.1 Ação média e as hipóteses de escala

$\gamma = 1$, obtivemos $z = -0,83(1)$ e $z = -0,94(2)$ respectivamente. A figura 3.3 mostra o comportamento de $n_x \times \epsilon$.

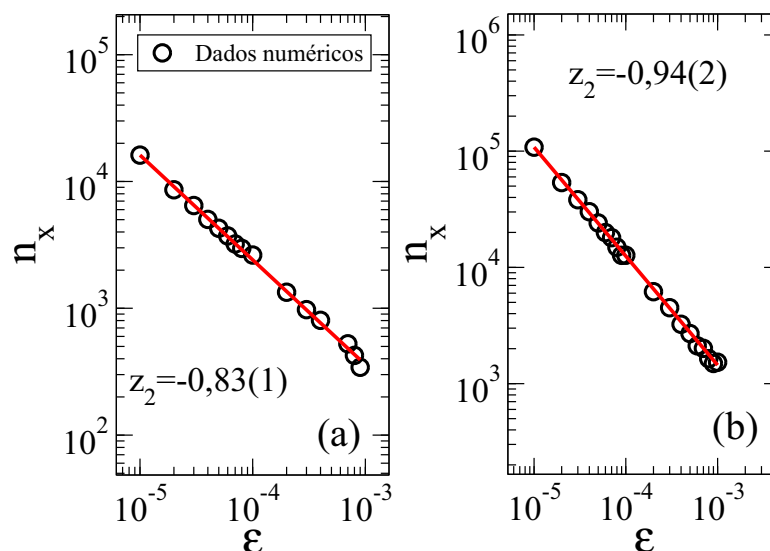


Figura 3.3: (a) Gráfico de $n_x \times \epsilon$, com $\gamma = \frac{3}{4}$; (b) Gráfico de $n_x \times \epsilon$, com $\gamma = 1$.

Com as hipóteses de escala acima podemos supor que a ação I_{RMS} pode ser descrita por um função homogênea generalizada do tipo

$$I_{RMS}(n\epsilon^2, \epsilon) = \ell I_{RMS}(\ell^a n\epsilon^2, \ell^b \epsilon), \quad (3.5)$$

onde ℓ é o fator de escala e a e b são os expoentes característicos.

Considerando $\ell^a n\epsilon^2 = 1$ e isolando ℓ

$$\ell = (n\epsilon^2)^{-\frac{1}{a}}, \quad (3.6)$$

obtemos

$$I_{RMS}(n\epsilon^2, \epsilon) = (n\epsilon^2)^{-\frac{1}{a}} I_{RMS}(1, \epsilon^{\frac{-b}{a}}), \quad (3.7)$$

que pode ser reescrita como

$$I_{RMS}(n\epsilon^2, \epsilon) = (n\epsilon^2)^{-\frac{1}{a}} I_{RMS1}(\epsilon^{\frac{-b}{a}}). \quad (3.8)$$

3.1 Ação média e as hipóteses de escala

Se $I_{RMS1} = \text{cte}$, pela hipótese I, temos que

$$I_{RMS}(n\epsilon^2, \epsilon) = (n\epsilon^2)^{\frac{-1}{a}}, \quad (3.9)$$

portanto

$$\frac{-1}{a} = \beta \rightarrow a = \frac{-1}{\beta}. \quad (3.10)$$

Fazendo $\ell^b \epsilon = 1$ e isolando ℓ

$$\ell = \epsilon^{\frac{-1}{b}}, \quad (3.11)$$

analogamente obtemos que

$$b = \frac{-1}{\alpha}. \quad (3.12)$$

Comparando (3.6) e (3.11)

$$(n\epsilon^2)^{\frac{-1}{a}} = \epsilon^{\frac{-1}{b}}, \quad (3.13)$$

e isolando n

$$n = \epsilon^{\frac{a}{b}-2}, \quad (3.14)$$

pela hipótese III, temos que

$$\epsilon^z = \epsilon^{\frac{a}{b}-2}, \quad (3.15)$$

então, substituindo a e b apropriadamente, encontra-se que

$$z = \frac{\alpha}{\beta} - 2. \quad (3.16)$$

Então, as reescalas apropriadas são:

Da hipótese II: $I_{RMS}(\epsilon) \propto \epsilon^\alpha$

$$\frac{I_{RMS}}{\epsilon^\alpha}, \quad (3.17)$$

e, da hipótese III: $n_x(\epsilon) \propto \epsilon^z$,

$$\frac{n_x}{\epsilon^z}. \quad (3.18)$$

Com as expressões de reescalas acima e os valores de α e z encontrados nos gráficos de $I_{RMS} \times \epsilon$ e $n_x \times \epsilon$ reescalamos as curvas da Fig 3.1(a) em uma única

curva universal, como mostra a figura 3.4.

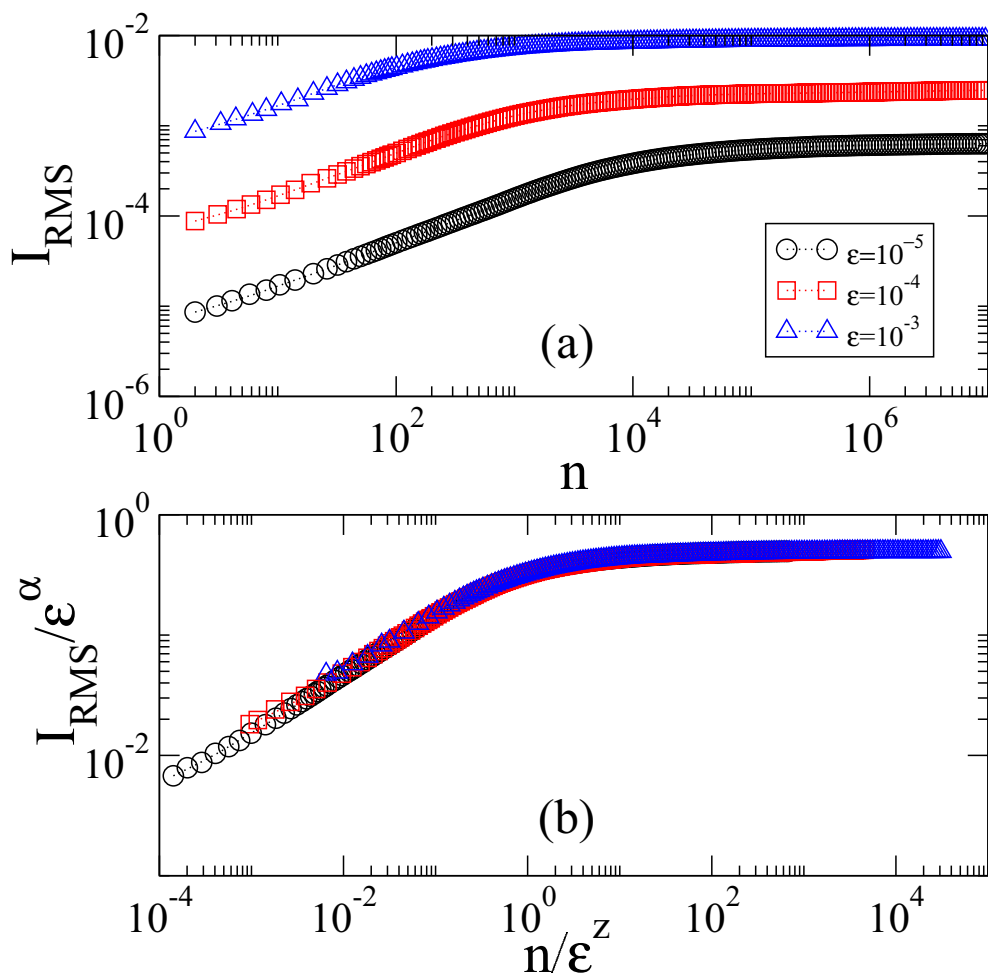


Figura 3.4: (a) Três curvas de I_{RMS} em função do número de iterações n para $\gamma = \frac{3}{4}$; (b) Colapso das três curvas em uma única curva universal a partir da reescala dos eixos.

Neste capítulo discutimos as propriedades para a ação média I_{RMS} propondo hipóteses de escala para cada trecho do gráfico de $I_{RMS} \times n$. Obtivemos os expoentes α e z a partir uma função homogênea generalizada. Encontramos também a lei de escala $z = \frac{\alpha}{\beta} - 2$ com a qual pudemos sobrepor as curvas de $I_{RMS} \times n$ em uma única curva universal. Reforçamos que tal reescala funcionará para qualquer valor de ϵ .

Capítulo 4

Leis de Escala

Discutiremos neste capítulo um procedimento analítico para obtenção dos expoentes críticos. Este capítulo contribui com a originalidade deste trabalho.

4.1 Expoente β

De acordo com a expressão do mapeamento discreto vimos que para $\epsilon = 0$ o sistema é integrável e para $\epsilon \neq 0$ o sistema é não integrável. Por praticidade de apresentação e leitura, repetiremos o mapeamento discreto aqui, ou seja,

$$T : \begin{cases} I_{n+1} = |I_n - \epsilon \sin(\theta_{n+1})| \\ \theta_{n+1} = \left[\theta_n + \frac{1}{I_n} \right] \bmod 2\pi \end{cases} . \quad (4.1)$$

O primeiro passo é a determinação do expoente β . Ao elevarmos a primeira equação do mapa acima ao quadrado, teremos

$$(I_{n+1})^2 = I_n^2 - 2I_n\epsilon \sin(\theta_{n+1}) + \epsilon^2 \sin^2(\theta_{n+1}). \quad (4.2)$$

Aplicando a média da equação (4.2) sobre um conjunto de $\theta \in [0, 2\pi)$, temos

$$\overline{I_{n+1}^2} = \overline{I_n^2} - \overline{2I_n\epsilon \sin(\theta_{n+1})} + \overline{\epsilon^2 \sin^2(\theta_{n+1})}. \quad (4.3)$$

Como a média da função $\sin(x)$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é zero, ficamos com

$$\overline{I_{n+1}^2} = \overline{I_n^2} + \overline{\epsilon^2 \sin^2(\theta_{n+1})}. \quad (4.4)$$

O valor médio da função $f(x) = \sin^2(x)$ é dado por

$$\overline{\sin^2(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx = \frac{1}{2}, \quad (4.5)$$

reescrevendo a equação (4.4) teremos

$$\overline{I_{n+1}^2} = \overline{I_n^2} + \frac{\epsilon^2}{2}. \quad (4.6)$$

Faremos agora uma mudança de variáveis, a fim de facilitar os cálculos

$$I_{n+1}^2 = E_{n+1}, \quad (4.7)$$

e

$$I_n^2 = E_n. \quad (4.8)$$

A equação (4.6) ficará então

$$\overline{E_{n+1}} = \overline{E_n} + \frac{\epsilon^2}{2}. \quad (4.9)$$

Considerando que

$$E_{n+1} - E_n = \frac{E_{n+1} - E_n}{(n+1) - n} \cong \frac{dE}{dn}, \quad (4.10)$$

temos que

$$\frac{d\overline{E}}{dn} = \frac{\epsilon^2}{2}, \quad (4.11)$$

$$\overline{dE} = \frac{\epsilon^2}{2} dn. \quad (4.12)$$

Integrando de ambos os lados temos

$$\int_{\bar{E}_0}^{\bar{E}} d\bar{E} = \int_0^n \frac{\epsilon^2}{2} dn, \quad (4.13)$$

$$\bar{E} = \bar{E}_0 + \frac{\epsilon^2}{2}n. \quad (4.14)$$

Voltando para as variáveis antigas

$$\bar{I}^2 = \bar{I}_0^2 + \frac{\epsilon^2}{2}n. \quad (4.15)$$

Aplicando raiz quadrada de ambos os lados temos que

$$I_{RMS} = \sqrt{\bar{I}^2} = \sqrt{\bar{I}_0^2 + \frac{\epsilon^2}{2}n}, \quad (4.16)$$

$$I_{RMS} = \sqrt{\bar{I}_0^2 + \frac{\epsilon^2}{2}n}. \quad (4.17)$$

Considerando $I_0 \cong 0$ temos

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{\epsilon^2}{2}n}, \quad (4.18)$$

logo

$$I_{RMS} \propto \sqrt{n\epsilon^2}. \quad (4.19)$$

A equação acima confirma que $\beta = \frac{1}{2}$.

4.2 Expoente α

Para obter o expoente α devemos considerar que o limite superior da integral da ação média seja a correspondente expressão que fornece o valor de I^* na curva invariante *spanning*. Com isso temos

$$\int_{I_0}^{I^*} d\bar{I}^2 = \int_0^{n_x} \frac{\epsilon^2}{2} dn. \quad (4.20)$$

Como

$$I^* = \left[\frac{\gamma\epsilon}{0,9716\dots} \right]^{\frac{1}{(1+\gamma)}}, \quad (4.21)$$

obtemos que

$$\left[\frac{\gamma\epsilon}{0,9716\dots} \right]^{\frac{2}{(1+\gamma)}} = I_0^2 + \frac{\epsilon^2}{2}n_x. \quad (4.22)$$

Considerando $I_0 \cong 0$ e isolando n_x apropriadamente, temos

$$n_x \cong \epsilon^{\frac{-2\gamma}{\gamma+1}}. \quad (4.23)$$

Pela hipótese III do capítulo anterior temos que

$$z = -\frac{2\gamma}{\gamma+1}. \quad (4.24)$$

Da equação (3.16) temos

$$\frac{-2\gamma}{\gamma+1} = \frac{\alpha}{\beta} - 2. \quad (4.25)$$

Substituindo $\beta = \frac{1}{2}$ e isolando α

$$\alpha = \frac{1}{\gamma+1}. \quad (4.26)$$

Podemos agora comparar os expoentes críticos obtidos através das hipóteses de escala (Capítulo 3) pelos ajustes das curvas da Figs. 3.2 e 3.3 com os obtidos analiticamente. Para $\gamma = \frac{3}{4}$, α , fica

$$\alpha = \frac{1}{\frac{3}{4}+1}, \quad (4.27)$$

$$\alpha = \frac{4}{7} \cong 0,571. \quad (4.28)$$

Com isso, podemos obter z a partir da equação (3.16) e lembrando que $\beta = \frac{1}{2}$

$$z = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{1}{2}} - 2, \quad (4.29)$$

$$z = -\frac{6}{7} \cong -0,857. \quad (4.30)$$

Para $\gamma = 1$, obtemos

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad (4.31)$$

e

$$z_2 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} - 2 = -1. \quad (4.32)$$

Para $\gamma = 2$, temos

$$\alpha = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}, \quad (4.33)$$

e

$$z = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} - 2 = -\frac{4}{3}. \quad (4.34)$$

Nota-se que os resultados encontrados numericamente são condizentes com os obtidos analiticamente, já que obtivemos, numericamente, para $\gamma = \frac{3}{4}$, $\alpha = 0,579(4)$ e $z = -0,83(1)$. Para $\gamma = 1$, obtivemos $\alpha = 0,514(2)$ e $z = -0,94(2)$, e para $\gamma = 2$, $\alpha = 0,348(4)$ e $z = -1,29(1)$. Com os resultados obtidos acima, reforçamos a validade do procedimento.

Pelo melhor conhecimento dos autores desta dissertação, acreditamos que o procedimento aqui adotado é original no que tange à obtenção dos expoentes críticos analiticamente. A partir da média quadrática da variável ação I_{RMS} encontramos os três expoentes críticos α , β e z . Ao compararmos os resultados analíticos com os numéricos obtidos no capítulo anterior, observamos a validade do procedimento.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação, estudamos algumas propriedades dinâmicas de um conjunto de mapeamentos discretos bidimensionais nas vizinhanças de uma transição de integrabilidade para não integrabilidade.

Obtivemos o mapa de um sistema Hamiltoniano levemente perturbado, mostrando que a partir dele podemos recuperar vários mapeamentos largamente estudados. Escolhemos um mapa, mostramos seu espaço de fases misto, composto por mares caóticos, ilhas de estabilidade e curvas invariantes do tipo *spanning*, alguns de seus pontos fixos elípticos e hiperbólicos e encontramos a posição da primeira curva invariante *spanning*.

Calculamos numericamente seus expoentes críticos, a partir do desvio quadrático médio da ação, ou seja, I_{RMS} , que gerou os gráficos estudados. A partir destes gráficos, obtivemos os expoentes críticos α e z que nos forneceram a lei de escala $z = \frac{\alpha}{\beta} - 2$ utilizada para a sobreposição das curvas do gráfico de $I_{RMS} \times n$ em uma única curva universal.

Posteriormente, calculamos analiticamente o expoente β e também os mesmos expoentes críticos α e z em função de γ a fim de compará-los com os obtidos numericamente. No que tange à obtenção dos expoentes críticos analiticamente, pelo melhor conhecimento dos autores, acreditamos que o procedimento empregado é original.

Concluimos, então, que os valores numéricos corroboram os analíticos.

Com base nos resultados aqui abordados pretendemos escrever e submeter um

artigo científico para uma revista internacional assim como aplicar os métodos aqui empregados em outros modelos.

Referências

- [1] SOUZA, R. *A relação do homem com a natureza* Disponível em: <http://educador.brasilecola.com/estrategias-ensino/a-relacao-homem-com-natureza.htm> Acesso: 24 mai 2014. 1
- [2] ROONEY, A. *A História da Física - da Filosofia ao Enigma da Matéria Negra* M. Books (2013) 1
- [3] GALILEU e o nascimento da ciência moderna. São Paulo: IF USP, 2007. Disponível em: <http://efisica.if.usp.br/mecanica/curioso/historia/galileu/> Acesso: 24 mai 2014. 1
- [4] FERNANDES, J. C. Apostila *Metodologia científica*, Cap 2 (2005) 1
- [5] da SILVA, M. A. *A física e a matemática*. Disponível em: <http://educador.brasilecola.com/estrategias-ensino/fisica-matematica.htm> Acesso: 24 mai 2014. 1
- [6] de OLIVEIRA, J. R. *O ensino de ciências e a ética nas escolas: interfaces possíveis*, Revista Química Nova na Escola, **32** p. 227 (2010) 1
- [7] WOLFRAM, S. *A New Kind of Science*, Wolfram Media Incorporated, 2002. 1125 p. 2
- [8] LAPLACE, P. S. *Traité de mécanique céleste*, Paris, Duprat, 368 p. (1799). Disponível em: <https://archive.org/details/traitemcani01laplj>. 2
- [9] MOSER, J. Is the solar system stable? *Math. Intell.*, p. 65–71, 1978. 2

- [10] ZASLAVSKY, G.M. *Hamiltonian chaos and fractional dynamics.*, Oxford University Press, Oxford, (2005). [4](#), [5](#)
- [11] LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A. *Regular and chaotic dynamics* **38**, (NY: Springer Verlag) 1992. [5](#), [7](#), [9](#), [19](#)
- [12] ULLMAN, K.; CALDAS I. L. A symplectic mapping for the ergodic magnetic limiter and its dynamical analysis. *Chaos, Solitons and Fractals* **11**, 2129 (2000). [6](#)
- [13] CALDAS, I. L.; PEREIRA, J. M.; ULLMAN, K.; VIANA, R. L. Magnetic field line mappings for a tokamak with ergodic limiters *Chaos, Solitons and Fractals* **7**, 991 (1996). [6](#)
- [14] ABDULLAEV, S. S.; ZASLAVSKY, G. M. Application of the separatrix map to study perturbed magnetic field lines near the separatrix *Phys. Plasmas* **3**, 516 (1996). [6](#)
- [15] PUNJABI, A. ; ALI, H.; BOOZER, A. Symmetric simple map for a single-null divertor tokamak *Phys. Plasmas* **4**, 337 (1997). [6](#)
- [16] LEONEL, E. D. Corrugated Waveguide under Scaling Investigation *Phys. Rev. Lett.* **98**, 114102 (2007). [6](#)
- [17] RABELO, A. F.; LEONEL, E. D. Finding Invariant Tori in the Problem of a Periodically Corrugated Waveguide *Brazilian J. Phys.* **38**, 54 (2008). [6](#)
- [18] VIROVLYANSKY ,A. L.; ZASLAVSKY, E G. M. Evaluation of the smoothed interference pattern under conditions of ray chaos *Chaos* **10**, 211 (2000). [6](#)
- [19] SMIRNOV, I. P.; VIROVLYANKSKY, A. L.; ZASLAVSKY, G. M. V Theory and applications of ray chaos to underwater acoustics *Phys. Rev. E* **64**, 036221 (2001). [6](#)
- [20] IOMIN, A.; BLOKH, Yu Wave localization as a manifestation of ray chaos in underwater acoustics *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simul.* **8**, 389 (2003). [6](#)

- [21] LADEIRA, D. G.; da SILVA, J. K. L. Scaling properties of a simplified bouncer model and of Chirikov's standard map *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 11467 (2007). [6](#)
- [22] BERRY, M. V. Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular billiard *Eur. J. Phys.* **2**, 91 (1981). [6](#)
- [23] ROBNIK, M. Classical Dynamics of a family of billiards with analytic boundaries *J. Phys. A: Math. Gen.* **16**, 3971 (1983). [6](#)
- [24] BUNIMOVICH, L. A. On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards *Commun. Math. Phys.* **65**, 295 (1979). [6](#)
- [25] HOWARD, J. E.; LICHTENBERG, A. J.; LIEBERMAN, M. A.; COHEN, R. H. Four Dimensional Mapping Model for Two Frequency Electron Cyclotron Heating *Physica D* **20**, 259 (1986). [6](#)
- [26] KOCK, F. R. N.; LENZ, F.; PETRI, C.; DIAKONOS, F. K.; SCHMELCHER, P. Dynamical trapping and chaotic scattering of the harmonically driven barrier *Phys. Rev. E* **78**, 056204 (2008). [6](#)
- [27] SOSKIN, S. M.; MANELLA, R.; YEVTUSHENKO, O. M. Drastic facilitation of the onset of global chaos in a Hamiltonian system due to an extremum in the eigenfrequency-versus-energy plot *Phys. Rev. E* **77**, 036221 (2008). [6](#)
- [28] VENEGEROLES, R. Calculation of Superdiffusion for the Chirikov-Taylor Model *Phys. Rev. Lett.* **101**, 054102 (2008). [6](#)
- [29] de OLIVEIRA, J. A.; DETTMANN, C. P.; da COSTA, D. R.; LEONEL, E. D. Scaling invariance of the diffusion coefficient in a family of two-dimensional Hamiltonian mappings *Phys. Rev. E* **87**, 062904 (2013). [9](#)
- [30] HOWARD, J. E.; HUMPHREYS, J. Nonmonotonic twist maps. *Physica D* **80**, 256 (1995). [9](#)
- [31] CHIRIKOV, B. V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems *Physics Reports* **52**, 263 (1979). [9](#)

- [32] LIEBERMAN, M. A.; LICHTENBERG, A. J. Stochastic and Adiabatic Behavior of Particles Accelerated by Periodic Forces *Phys. Rev. A* **5**, 1852 (1971). [9](#)
- [33] da SILVA, J. K. L.; LADEIRA, D. G.; LEONEL, E. D.; MCCLINTOCK, P. V. E.; KAMPHORST, S. O. Scaling properties of the Fermi-Ulam accelerator model *Braz. J. Phys.* **36**, 700 (2006). [9](#)
- [34] PUSTYLNIKOV, L. D. Stable and oscillating motions in non-autonomous dynamical systems *Trans. Moscow Math. Soc.* **2**, 1 (1978). [9](#)
- [35] LEONEL, E. D.; MCCLINTOCK, P. V. E. A hybrid Fermi-Ulam-bouncer model *J. Phys. A* **38**, 823 (2005). [9](#)
- [36] ECKMANN, J. P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors *Rev. Mod. Phys.* **57**, 617 (1985). [12](#)
- [37] LIMA, E. L. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, Coleção Matemática Universitária, IMPA (2008). [12](#)
- [38] HILBORN, R. C. *Chaos and Nonlinear Dynamics*, Oxford University Press (1994). [14](#)
- [39] FIEDLER-FERRARA, N.; do PRADO, C. P. C. *Caos Uma Introdução*, Edgard Blucher (1994). [17](#)
- [40] LEONEL, E. D.; de OLIVEIRA, J. A.; SAIF, F. Critical exponents for a transition from integrability to non-integrability via localization of invariant tori in the Hamiltonian system *J. Phys. A* **44**, 302001 (2011). [19](#)

REFERÊNCIAS
