



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Introdução Matemática aos Modelos Cosmológicos

Nilton Flávio Delbem

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação – Mestrado Profissional em
Matemática Universitária do Departamento
de Matemática como requisito parcial para a
obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. Wladimir Seixas

2010

516.36 Delbem, Nilton Flávio
D344i Introdução Matemática aos Modelos Cosmológicos/ Nilton Flávio
Delbem- Rio Claro: [s.n.], 2010.
144 f.:il., figs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientador: Wladimir Seixas

1. Geometria Diferencial. 2. Teoria e História da Cosmologia. 3. Teoria da Relatividade. 4. Métodos Matemáticos. I. Título

TERMO DE APROVAÇÃO

Nilton Flávio Delbem

INTRODUÇÃO MATEMÁTICA AOS MODELOS COSMOLÓGICOS

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Wladimir Seixas
Orientador

Prof. Dr. Manoel Borges Ferreira Neto
Ibilce - Unesp/São José do Rio Preto

Prof. Dr. Henrique Lazari
IGCE - Unesp/Rio Claro

Rio Claro, 15 de Outubro de 2010

Agradecimentos

Sou extremamente grato ao meu pai Altamiro, a minha mãe Jandira e a minha irmã Flávia, pela atenção, apoio, amor incondicional e por sempre acreditarem em mim mais do que eu mesmo. Se hoje consigo alcançar mais este objetivo em minha vida, isto se deve ao fato de sempre tê-los ao meu lado, incentivando e dando forças nesta longa caminhada.

À minha avó Adelaide em especial, que não pode acompanhar o desfecho deste trabalho, mas que foi fundamental para o início de tudo, servindo de fonte de inspiração para superar os obstáculos e os momentos difíceis pelos quais passei. Vó não sei como agradecer todo o carinho e tudo o que fez por mim, mas posso dizer que esta conquista é nossa.

Ao meu orientador Prof. Dr. Wladimir Seixas pela orientação presente e motivadora, pelos ensinamentos, atenção, paciência e principalmente pela confiança depositada em meu trabalho e a amizade cultivada durante este período.

Ao Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto pela amizade, por seus ensinamentos, por sua paciência e generosidade, pelas sugestões, conselhos e dicas informais em momentos de difíceis escolhas. Em especial por acreditar em meu trabalho e por ser um excelente professor que me forneceu uma base sólida para que pudesse seguir adiante em meus estudos.

A todos os professores que tive durante o mestrado pela boa qualidade dos cursos que ministraram e pela amizade que cultivei com todos eles durante este período.

A todos meus amigos de curso. Obrigado pela amizade, generosidade, atenção, apoio e a oportunidade de ter cursado meu mestrado com pessoas tão fantásticas e especiais. Saibam que levarei para sempre um pouco de cada um comigo.

Aos meus amigos de república Juracélio (Jura), Gustavo, Henrique e Ribamar (Ribamélis). Realmente não têm como agradecer-los o tanto que fizeram por mim. Obrigado.

A todos os amigos que convivi na época da república R.C.R. em São José do Rio Preto, que sempre me deram força, motivação e apoio nesta caminhada.

Em especial aos amigos Artur, Cassius, Cleiry, Daniel Veronese, Elder, Fabio Machado (Fabinho), Iger, José Marão (Maranhão), Juliana Scapim, Leandro Martinelli (Uru), Luiz Fernando (Fefa), Oreste, Pedro Alexandre (Pedrão), Reginaldo Izelli, Roberto Cavali (Bob), Rodrigo (Grutinha), Tatiana Miguel (Tati μ), por diversos mo-

tivos, entre eles: o apoio, a troca de conhecimento (matemático, histórico, a vivência, etc.), o calor humano que me passaram, as brincadeiras, os jogos de futebol, os momentos de conversa e descontração nos banquinhos da Unesp de Rio Preto, as festas, os churrascos e tantas outras coisas que me proporcionaram a alegria e o prazer de ter convivido com todos.

Agradeço a Deus e a Nossa Senhora de Aparecida por iluminar e me proteger por estes caminhos e por fazer com que eu encontrasse pessoas maravilhosas em minha vida.

*Você não sabe
O quanto eu caminhei
Prá chegar até aqui
Percorri milhas e milhas
Antes de dormir . . .*

(Composição: Toni Garrido / Lazão / Da Gama / Bino)

Resumo

Esta dissertação tem a proposta de organizar, discutir e apresentar de maneira precisa os conceitos matemáticos de variedade diferenciável e de tensores envolvidos no estudo da Cosmologia sob o ponto de vista da Teoria da Relatividade Geral para o modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Busca-se assim apresentar um texto didático que possa ser utilizado tanto nos cursos de graduação em Matemática como de Física para uma disciplina optativa de Introdução Matemática à Cosmologia.

Palavras-chave: Geometria Diferencial, Teoria e História da Cosmologia, Teoria da Relatividade, Métodos Matemáticos.

Abstract

The goal of this dissertation is to organize and discuss in a rigorous way the mathematical concepts of manifolds and tensors needed to the study of Cosmology and the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker model under the point of view of the General Relativity. In this way, this dissertation was written as textbook that could be used in an undergraduate course of Physics and Mathematics.

Keywords: Differential Geometry, Theory and History of Cosmology, Relativity Theory, Mathematical Methods.

Lista de Figuras

2.1	Modelo Pirocêntrico de Filolau	22
2.2	Sistema Heliocêntrico proposto por Copérnico	27
2.3	Modelos cosmológicos de Ptolomeu, Copérnico e Tycho Brahe	29
2.4	Nebulosa M51, hoje conhecida como galáxia Rodamoinho	36
2.5	Todos os universos de Friedmann começam com uma explosão.	47
2.6	Dois modos de imaginar o Universo	50
3.1	Superfície regular.	66
3.2	Espaço Tangente.	67
4.1	Referenciais Inerciais	108
4.2	Referenciais R e R'	110

Sumário

1	Introdução	15
2	História da Cosmologia	17
2.1	O que é Cosmologia	17
2.2	As Origens Cosmológicas	19
2.3	Os grandes cosmólogos da Antiguidade	20
2.4	A Cosmologia na Renascença	25
2.5	O Mecanicismo de René Descartes. A Teoria da Gravitação de Isaac Newton e o Determinismo de Pierre Simon Laplace	30
2.6	Conhecendo o Universo	33
2.7	O surgimento das Teorias de Einstein	39
2.8	Modelos Cosmológicos	44
2.9	Modelos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker para o Universo . .	46
3	Geometria Riemanniana	53
3.1	História da Geometria Diferencial	53
3.2	Curvas em $\mathbb{R}^n$	58
3.2.1	Curvas Parametrizadas	59
3.2.2	Vetor tangente e curva regular	60
3.2.3	Comprimento de arco de uma curva	60
3.2.4	Curvas de Frenet	63
3.2.5	As equações de Frenet	63
3.3	Superfícies Regulares	65
3.3.1	Curvas na Superfície. Plano Tangente e Vetor Normal.	67
3.4	As Formas Fundamentais	68
3.4.1	A Primeira Forma Fundamental	69
3.4.2	A Segunda Forma Fundamental	71
3.5	O Teorema Egregium de Gauss e as Equações de Compatibilidade. . . .	77
3.6	Variedade Diferenciáveis e Tensores	81
3.6.1	Variedade Diferenciáveis	81
3.6.2	Espaços Tangente e Dual	82
3.6.3	Tensores	85

3.6.4	O Tensor Curvatura	91
3.6.4.1	Propriedades de Tensor de Riemann	92
3.6.4.2	Tensor de Ricci e Escalar de Curvatura	92
3.7	Torção e Curvatura	94
3.7.1	Contribuições de Élie Cartan	94
3.7.2	O método do quase-paralelogramo de Élie Cartan	95
4	Relatividade	99
4.1	Origens da Teoria da Relatividade	99
4.1.1	A Teoria Especial	99
4.1.2	A Invariância das Equações de Maxwell	100
4.1.3	Teoria Geral	103
4.1.4	O Pensamento mais feliz de Einstein.	103
4.2	A Relatividade Especial	107
4.2.1	Transformações de Lorentz	107
4.2.1.1	Referencial Inercial	107
4.2.1.2	A Transformação de Galileu	108
4.2.1.3	A Transformação de Lorentz	109
4.2.2	A Relatividade de Einstein	111
4.2.2.1	Consequências da Relatividade Especial: Dilatação Tem- poral	111
4.2.2.2	Consequências da Relatividade Especial: Contração das Distâncias	112
4.2.2.3	Consequências da Relatividade Especial: Massa e E- nergia	113
4.3	A Relatividade Geral	115
4.3.1	A Curvatura do Espaço-Tempo	115
4.3.2	As equações de Einstein	117
4.3.2.1	Postulados da Relatividade Geral:	117
5	Cosmologia Relativística	119
5.1	Princípio Cosmológico	119
5.1.1	O Postulado de Weyl	121
5.1.2	A Métrica de Robertson-Walker	122
5.2	O Modelo Cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker . . .	126
5.2.1	As Equações de Friedmann	127
6	Conclusão	137
	Referências	143

1 Introdução

A Cosmologia Moderna tem sua origem nos trabalhos de Albert Einstein de 1915 sobre a Teoria da Relatividade Geral. A partir de então podê-se pela primeira vez averiguar minuciosamente o nosso Universo a luz do método científico. Contudo, as primeiras décadas da Cosmologia moderna foram de desenvolvimento muito lento. A maioria dos trabalhos desta fase eram basicamente especulativos, causando assim uma certa desconfiança em grande parte da comunidade científica. Esta situação alterou-se significativamente nos últimos anos quando ocorreram uma extraordinária evolução, motivada principalmente por novos resultados observacionais e teóricos. Compreender o Universo em larga escala se torna fascinante e ao mesmo tempo instigante pelos recursos científicos e tecnológicos desenvolvidos e empregados. Pode-se então encontrar respostas definitivas para as mais antigas e profundas questões da humanidade. Várias questões, que até pouco tempo pertenciam mais à Metafísica do que a Ciência, podem ser agora analisadas de maneira racional. A partir de modelos cosmológicos que descrevem o Universo visível atual, os cosmólogos podem tirar conclusões e propriedades em diferentes épocas e assim fazer algumas previsões, inclusive podendo comprová-las observacionalmente.

Pode-se dizer que compreender a evolução do Universo é algo que tem a ver com a expectativa de conhecer sua expansão, composição e estrutura, passando por sua idade e principalmente pela descrição de sua dinâmica de movimento. É impossível não se deslumbrar com a eficácia das teorias físicas na descrição da natureza, desde as menores escalas até o Universo como um todo. A Matemática desempenha um papel fundamental e vital na elaboração e aplicação das teorias físicas, em especial da Cosmologia.

A principal motivação para a escolha do tema “Introdução Matemática aos Modelos Cosmológicos” que resultou nesta dissertação foi o fato de propiciar os pré-requisitos para o prosseguimento de estudos nesta área.

O presente trabalho encontra-se assim organizado. No capítulo 2 é feita uma breve revisão histórica sobre as origens da Cosmologia e o que esta ciência estuda. Este relato histórico inicia-se a partir das observações realizadas pelo mais primitivo ser humano em relação aos fenômenos naturais e celestes que interferiam em sua vida, passando pela Grécia Antiga onde a importância cultural dos gregos clássicos é fundamental

para o desenvolvimento tanto da Cosmologia como da Astronomia e Matemática. O surgimento da Teoria da Gravitação de Einstein propicia o desenvolvimento de vários modelos cosmológicos, os quais visam descrever a evolução do nosso Universo. No capítulo 3 é feito um relato sobre a história da Geometria Diferencial e em seguida é apresentado um estudo introdutório sobre a noção de curvatura de curvas em $\mathbb{R}^n$ e superfícies em $\mathbb{R}^3$. Um estudo sobre variedades diferenciáveis e tensores é apresentado no final do capítulo. O capítulo 4 aborda as origens históricas da Teoria da Relatividade, em seguida uma introdução matemática da Teoria da Relatividade Especial e Geral, e ao conjunto de equações que relacionam a curvatura do espaço-tempo com a distribuição de matéria-energia são apresentadas. No capítulo 5 é feita uma breve discussão sobre os conceitos referentes ao *princípio cosmológico* e ao *postulado de Weyl*, em seguida é realizada a construção da *métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker* e das *equações de Friedmann*. A *métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker* e as *equações de Friedmann* descrevem um Universo em expansão ou contração, homogêneo e isotrópico dentro do contexto da Teoria da Relatividade Geral. Estes fatos levaram a construção do *modelo cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker*, o qual tem por objetivo descrever a evolução do Universo em toda sua história. Este modelo é baseado nas *equações de Friedmann* e a sua geometria é dada pela *métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker*. Ao final deste trabalho discute-se o atual estágio da pesquisa e algumas perspectivas futuras da Cosmologia.

É importante ressaltar que a organização e disposição do conteúdo desenvolvido na dissertação está atrelada a idéia de poder criar um material didático para o aluno dos cursos de Matemática e Física que deseja fazer uma disciplina de Introdução Matemática à Cosmologia.

2 História da Cosmologia

A Astronomia é uma das mais antigas ciências, pois trata da origem do Universo e da movimentação dos astros, questões estas tão antigas quanto a própria razão do homem. Juntamente com a Cosmologia, é um campo da ciência que aplica teorias físicas na tentativa de compreender a estrutura e a evolução do Universo.

A versão mais antiga da Cosmologia encontra-se nos mitos cosmogônicos, versões mitológicas sobre a origem dos elementos e dos seres vivos. As idéias de como o Universo e seus elementos se comportam foram sendo modificadas ao longo do tempo. No entanto, a Cosmologia só passou a ser considerada como ciência após a formulação da Teoria da Relatividade Geral feita por Albert Einstein, em 1915.

Este capítulo tem como objetivo mostrar as diversas fases do desenvolvimento da Cosmologia, motivando assim a leitura e o entendimento das partes teóricas apresentadas e discutidas posteriormente neste trabalho. Será feito um relato histórico sobre as origens e o desenvolvimento da Cosmologia ao longo do tempo, desde a visão do mais primitivo ser humano até o advento da Teoria da Gravitação de Einstein, que propiciou o desenvolvimento de vários modelos cosmológicos, os quais descrevem a origem, a evolução e a estrutura do nosso Universo.

2.1 O que é Cosmologia

Desde os tempos mais remotos o ser humano procura formas conceituais e filosóficas para descrever a vida e o cosmos.

Cosmos é o termo usado para designar o Universo em seu conjunto, a estrutura universal em sua totalidade, desde o microcosmos ao macrocosmos. É a totalidade de todas as coisas desde o Universo ordenado, as estrelas, até as partículas subatômicas.

Assim, ao olhar o céu em uma noite sem nuvens e distante das luzes da cidade, é inevitável a sensação de vastidão e encanto que o cosmos proporciona. Inúmeras estrelas distantes pontuam o firmamento e ao observar com mais atenção percebe-se uma faixa leitosa que atravessa o céu. Esta faixa é a projeção de um grande número de estrelas na direção do plano galático, e não permite a identificação individual das estrelas. Esta aparência leitosa dá origem ao nome de nossa galáxia, a Via Láctea, uma entre as bilhões de galáxias existentes no Universo.

Diante deste cenário grandioso e encantador é natural surgir as indagações: Do que é feito o Universo? O Universo é finito ou infinito? O Universo terá um fim? Teve um início? A procura por tais respostas através de teorias e explicações que buscam reconstruir uma realidade do mundo dá origem a uma área do conhecimento humano denominada Cosmologia. Assim, a Cosmologia é a ciência que estuda a estrutura, a evolução e a composição do Universo.

Entende-se por *Ciência* o conjunto de conhecimentos que faz o uso do método científico baseado em um conjunto de observações que resultam em um modelo capaz de fazer previsões que podem ser testadas experimentalmente. Um dos muitos exemplos do método científico é a Teoria da Gravitação Universal desenvolvida por Isaac Newton (1642–1727), que usou as observações de Tycho Brahe (1546–1601) e Johannes Kepler (1571–1630) para elaborar um modelo cujas previsões foram verificadas muitas vezes, e possibilitou, por exemplo, na descoberta dos planetas Urano e Plutão.

O estudo da *estrutura* do Universo busca responder a questões relativas à forma e à organização da matéria nele contida. Uma unidade de distância apropriada a este estudo é o ano-luz, definido como a distância que a luz percorre em um ano. A velocidade da luz no vácuo é de aproximadamente 300 mil quilômetros por segundo, ou seja, um ano-luz equivale a cerca de 10 trilhões de quilômetros. Outra unidade relacionada ao ano-luz e também muito usada é o parsec¹ que equivale a 3,26 anos-luz².

A *evolução* do Universo é a sua história, ou seja, suas diferentes fases. Neste sentido, uma das maiores descobertas do século XX, foi sem dúvida, o fato de que o Universo está em expansão. Por muito tempo, tinha-se a idéia que, descontado o movimento aparente das estrelas devido à órbita da Terra ao redor do Sol, o Universo seria estático, ou por assim dizer, imutável. Por não ser estático, o Universo evolui e tem sua própria história. Pensando na evolução e estágio atual do Universo ao retroceder no tempo percebe-se que no passado as galáxias estavam mais próximas umas das outras. O Universo era menor, mais denso e mais quente. Isto conduz ao fato de que o Universo começou sua evolução a partir de um estado extremamente quente e denso, sofrendo várias modificações até adquirir a forma atual.

Observações indicam que o Universo é organizado de uma maneira hierárquica até uma escala de tamanho de 300 milhões de anos-luz. Estrelas formam galáxias, galáxias formam aglomerados de galáxias e aglomerados de galáxias formam superaglomerados de galáxias. Em escalas bem maiores de 100 milhões de parsecs, há evidências de que o Universo seja homogêneo ou uniforme, isto é, não apresenta, na média, regiões muito

¹Parsec é a distância que se encontra uma estrela cuja paralaxe (ângulo sob o qual o raio de órbita terrestre é visualizado perpendicularmente ao seu raio visual) é igual a 1 segundo de arco [1].

²Para se ter noção de distância usando a velocidade da luz. Temos que o perímetro da Terra é de aproximadamente 1 décimo de segundo-luz; a distância da Terra ao Sol é de 8 minutos-luz; a estrela mais próxima, Alfa Centauro, está a 4,2 anos-luz; a galáxia mais próxima, Andrômeda, se encontra a 2 milhões de anos-luz.

diferentes.

Por fim a *composição* do Universo busca responder a questões sobre do que este é feito, sua constituição e matéria prima. Para explicar a composição do Universo temos que deduzí-la a partir de observações realizadas por instrumentos na Terra ou em sua órbita. Uma primeira tentativa seria pensar que o Universo é feito dos mesmos elementos que estão presentes em nosso planeta: átomos, fótons e neutrinos.

O pensamento de que o Universo era feito dos mesmos elementos presentes em nosso planeta foi por muitos anos um paradigma científico. No entanto, os avanços tecnológicos e o desenvolvimento da Cosmologia mostraram que apenas 5% do Universo seria composto por átomos. Outra fração menor ainda corresponderia a fótons e neutrinos. Assim, a maior parte do Universo não possui a mesma composição que nosso planeta. Observações e estudos a respeito do Universo também revelaram que o peso das galáxias “ou mais precisamente, a quantidade de massa”, é cerca de 100 vezes maior que o peso de todas as estrelas somadas. Desta maneira, existe na galáxia um tipo de matéria que não irradia luz, denominada *matéria escura*.

Importante destacar que somos a primeira geração com capacidade tecnológica para estudar cientificamente o Universo, graças ao desenvolvimento de instrumentos de alta precisão, que fornecem informações detalhadas e precisas. Essas informações produzem resultados surpreendentes, e fazem com que atravessemos uma fase fascinante e efervescente na Cosmologia. Novas descobertas estão em curso, das quais podem resultar um novo paradigma para as futuras gerações.

2.2 As Origens Cosmológicas

As origens da Cosmologia são desconhecidas, mas podemos imaginar que desde tempos remotos, o mais primitivo ser humano se interessou em observar fenômenos que ocorriam a sua volta e tentar compreendê-los. Atraído inicialmente pelos fenômenos que mais interferiam em sua vida como as variações alternadas de claridade e escuridão, as variações de temperatura e clima. Todas associadas ao deslocamento do Sol em relação ao horizonte. Observava também fenômenos celestes como as fases da Lua, os eclipses, o aparecimento de cometas e de vários outros fenômenos da natureza.

A falta de conhecimento sobre a verdadeira natureza do cosmos deve ter produzido no homem primitivo um sentimento de curiosidade, admiração e temor, levando-o a acreditar na natureza divina dos corpos celestes. Para muitos povos do passado, os astros eram verdadeiros deuses, e para outros, símbolos de divindades atribuindo a estes a influência sobre a vida na Terra. Os homens dessa época, que melhor interpretavam estes fenômenos celestes, formavam elites sacerdotais que dominavam e determinavam os costumes destes povos.

Com sua evolução, o homem começou a utilizar as estrelas e as “estrelas errantes”, (denominação dada aos planetas na época) para sua orientação em viagens. Por volta

do ano 6000 a.C. aconteceu a transição entre a civilização nômade e a sedentária com o surgimento da agricultura. Desta forma, as comunidades requeriam conhecer em que época do ano poderiam semear e em qual colher, e assim como prever os fenômenos meteorológicos.

Observando constantemente o Sol, a Lua, as estrelas, asteróides, planetas e cometas, o homem notou uma regularidade de ocorrência de vários fenômenos, que lhe permitia marcar ou medir a passagem do tempo, e juntamente com a construção dos primeiros relógios de areia, estabeleceu os primeiros calendários tão necessários a suas atividades agrícolas. Em suas observações pode criar métodos para determinar a sua posição na superfície da Terra por meio das posições dos astros, o início das estações do ano, bem como prever fenômenos que ocorriam com os corpos celestes. Assim, as estrelas guiavam os caminhos aos nômades e marinheiros, ao agricultor as fases da Lua e a viagem anual do Sol indicavam a época de semear.

No começo das civilizações alguns homens se dedicaram por completo a estudar os mistérios que cercam o Universo. Tem-se assim uma fase de transformação dos conceitos místicos e mitológicos, dando origem ao nascimento da investigação científica ligada as suas necessidades cotidianas e curiosidade intelectual.

Quanto ao Universo, o ser humano passa a perguntar: Do que é feito? Como surgiu? Como terminará? Prova disto são as múltiplas respostas dadas a estas perguntas ao longo do tempo e que em conjunto, constituem a história do pensamento cosmológico.

2.3 Os grandes cosmólogos da Antiguidade

“Foi na Grécia Antiga que a maneira de encarar e interpretar os fenômenos naturais sofreu grande alteração, pois foi ali que o homem passou a desenvolver o conhecimento fundamentalmente em bases racionais.” ([2], p. 24)

A importância cultural dos gregos clássicos é fundamental para o desenvolvimento da Matemática, Astronomia e Cosmologia. Contudo, existe uma grande dificuldade em escrever sobre as pessoas desta época e de períodos idênticos. Mesmo existindo várias citações são poucas as informações pessoais e nenhum de seus escritos sobreviveram.

Tradicionalmente os conceitos históricos da astronomia e cosmologia grega tem seu início com Tales de Mileto (cerca de 624 – cerca de 547 a.C.), que foi desde a antiguidade visto como o iniciador do pensamento filosófico científico.

Tales acreditava que o mundo havia evoluído a partir da água por processos puramente naturais, sendo a Terra um disco plano que flutuava em um oceano infinito. “... segundo informações do historiador Heródoto, Tales teria previsto um eclipse do Sol, provavelmente no ano de 585 a.C.” ([2], p.24). Embora isso seja mais mito que realidade histórica, astrônomos calculam que esse eclipse ocorreu em 28 de maio de 585 a.C. O nascimento e a morte deste importante filósofo são datados com base neste fenômeno.

Tales teve vários discípulos dentre os quais merecem destaques Anaximandro de Mileto (610 – 547 a.C.) e Anaxímenes de Mileto (585 – 528 a.C.).

Tales e seus discípulos eram filósofos representantes da *Escola jônica*, a qual buscava uma explicação do mundo natural (a *phís* “eram estudiosos ou teóricos da natureza”, daí o nome física) baseada essencialmente em causas naturais, o que constituiu o chamado naturalismo da escola.

Anaximandro foi o principal discípulo e sucessor de Tales. Ele acreditava que todas as coisas surgiram de uma única substância primordial denominada ápeiron (eterno e ilimitado ou indeterminado). Para esse filósofo natural, a Terra era um cilindro que flutuava livremente sem se apoiar em nada.

São atribuídas a Anaximandro a confecção de um mapa do mundo habitado, a introdução do gnomon na Grécia, a medição de distâncias angulares entre estrelas e uma rudimentar classificação das estrelas quanto ao brilho..... Foi o primeiro a explicar o mecanismo dos eclipses pela interposição da Lua entre a Terra e o Sol, e os eclipses da lua pela entrada desta na sombra da terra. ([2], p.25)

Anaxímenes adotou o ar como substância primordial, uma vez que o ar é incorpóreo e se encontra em toda parte. Acreditava assim que todas as coisas pudessem ser reduzidas a este elemento. “[Anaxímenes] Parece ter sido o primeiro a afirmar que a Lua brilha por refletir a luz do Sol, e acreditava ser a Terra da forma de um cilindro de pequena altura....” ([2], p.25).

Anaxágoras de Clazômena (500 – 428 a. C.) representante da *Escola italiana*, a qual caracterizava-se por uma visão de mundo mais abstrata, menos voltada para uma explicação naturalista da realidade. “[Anaxágoras] Acreditava que o Universo sempre existiu, a princípio na forma de partículas infinitesimais, mas que estavam destinadas pela influência de uma mente cósmica a se tornar a natureza que apreciamos hoje” ([3], p.18)

A tentativa mais antiga de uma cosmologia racional de que se tem registro é provavelmente a de Pitágoras, que ensinava que a Terra é redonda e gira em torno do seu eixo. A teoria de Pitágoras era um rompimento radical com a visão, então prevalecente, de que a Terra era chata. Pitágoras baseou suas idéias numa analogia entre a harmonia da escala musical, expressa em termos de números racionais, e a harmonia celeste dos movimentos dos planetas. Talvez sua mais importante contribuição à cosmologia tenha sido a ideia de que os movimentos celestes obedecem a certas leis quantitativas. ([4], p.10)

Pitágoras (cerca de 569 – cerca de 475 a.C.), reconheceu que a órbita da Lua era inclinada em relação ao equador da Terra e foi um dos primeiros a perceber que Vênus era um planeta. Teve vários discípulos, dentre os quais merece destaque Filolau de Crotona (século V a.C.), conhecido como a primeira pessoa a propor que a Terra se

move. Filolau postulou o denominado Sistema Pirocêntrico, modelo no qual a Terra não é só esférica, mas gira em órbitas circulares junto com o Sol, a Lua e os planetas ao redor de um hipotético fogo central no núcleo do Universo.

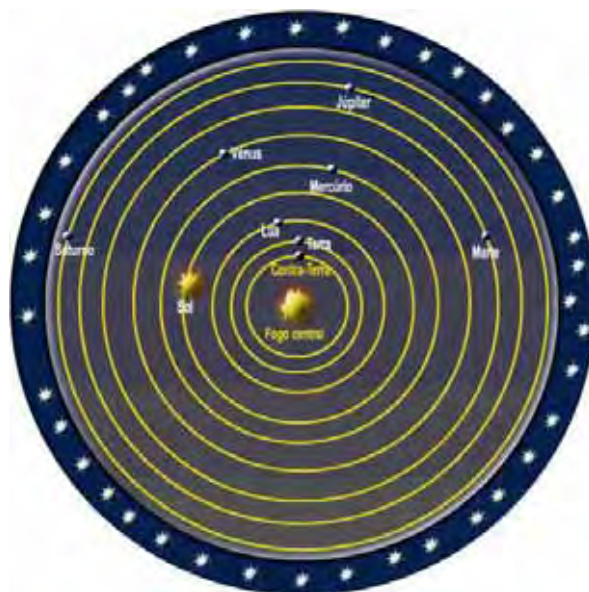


Figura 2.1: Modelo Pirocêntrico de Filolau

Neste modelo havia a existência de nove movimentos circulares no céu: os das estrelas fixas, os dos cinco planetas e os da Terra, Lua e Sol. Porém, Filolau misturou sua brilhante dedução com a numerologia mística. Nove era considerado pelos pitagóricos um número imperfeito desta forma, ele assumiu a existência de um décimo corpo localizado entre a Terra e o fogo central denominado Anti-Terra. A Anti-Terra desempenhava as funções de proteger a Terra dos raios diretos do fogo central e de fazer com que o número de objetos móveis do Universo fora 10, número que os pitagóricos consideravam perfeito.

A idéia revolucionária de que a Terra se movia e não era centro do Universo foi o preparo de um caminho para uma cosmologia heliocêntrica, que com o passar do tempo estagnou e se tornou obsoleta. É importante destacar que era de conhecimento dos pitagóricos o fato da Lua sempre estar com a mesma face voltada para a Terra.

Platão (427 – 347 a.C.) tinha uma visão distinta do Universo.

... [Platão] sustentava que o círculo, por não ter começo nem fim, era uma forma perfeita e, conseqüentemente, os movimentos celestes deviam ser circulares, uma vez que o universo tinha sido criado por um ser perfeito, Deus. ([4], p.11)

Platão admitia que a Terra era esférica como o próprio Universo. Ele defendia a idéia de uma rotação diária da abóboda celeste em volta de uma Terra imóvel, onde os planetas moviam-se em órbitas circulares com velocidades diferentes. Surgem assim os modelos geocêntricos, idéia devido a Platão, que utilizou oito esferas concêntricas para formar seu modelo cosmológico. A primeira destas esferas, a mais externa, representava

as estrelas fixas. Sua rotação fazia o Universo todo girar de Leste para Oeste com velocidade uniforme, em torno do eixo imaginário que passava pelo centro da Terra. Outras sete esferas concêntricas foram definidas de tamanhos diferentes para identificar o movimento da Lua, do Sol e dos cinco planetas: Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno.

Os modelos geocêntricos foram naturalmente escolhidos pela maioria dos astrônomos e cosmólogos da antiguidade. O movimento da esfera celeste causava a sensação de que a Terra permanecia fixa no centro de uma grande esfera e todo o resto girava em torno dela. Estes modelos podem ser divididos em dois grupos distintos. O primeiro grupo consiste dos modelos de Platão, Eudóxio e Aristóteles, denominados modelos concêntricos. O segundo grupo consiste dos modelos de Apolônio, Hiparco e Ptolomeu, denominado epiciclos e excêntricos.

Eudóxio (400 – 347 a.C.), contemporâneo de Platão e considerado o melhor matemático da Idade Helênica, criou um modelo de Universo bastante engenhoso para explicar os movimentos das estrelas, dos planetas, do Sol e da Lua. Por este trabalho, Eudóxio é considerado o pai da astronomia científica. Seu trabalho combina 27 esferas concêntricas com rotações uniformes em torno de eixos inclinados entre si.

Uma esfera para explicar o movimento diurno, uma para o movimento anual do Sol, duas para o movimento da Lua. Para a “laçadas” e retrogradações de Júpiter e Saturno, quatro esferas para cada um, e ainda cinco esferas para cada um dos outros três planetas, Mercúrio, Vênus e Marte. Além de introduzir um elemento abstrato (as esferas, que deviam ser consideradas invisíveis e transparentes), este modelo apresentava outras falhas, como não explicar como são ligadas as esferas e como são produzidos os movimentos; apresentava uma margem de erro considerável, mesmo para época, das posições dadas aos planetas, e ainda não explicava a variação de brilho dos mesmos. ([2], p.26)

Este modelo é aperfeiçoado por Aristóteles (384 – 322 a.C.), outro discípulo de Platão e considerado um dos maiores sábios da antiguidade. No seu modelo Aristóteles permita que as esferas concêntricas de Eudóxio funcionassem tão bem prática quanto na teoria, ampliando para um complexo mecanismo que necessitava de 55 esferas para funcionar. Para Aristóteles o Universo era finito, esférico, eterno, imutável e limitado pela esfera das estrelas fixas. Fora da esfera das estrelas fixas nada poderia existir, nem mesmo o tempo. Acreditava também na existência de cinco elementos fundamentais. Quatro terrestres: a água, o fogo, o ar e a terra e um elemento divino denominado éter. O éter era o elemento perfeito que comporia os céus onde a perfeição era dominante.

Contemporâneo de Aristóteles e discípulo de Platão, Heráclides do Ponto (387 - 312 a.C) defendia a idéia de que a Terra, embora no centro do Universo, estava animada de um movimento de rotação em torno de si mesma num período de um dia. Desta maneira, explicava o movimento diário de todos os astros.

Por volta de 300 a.C. a capital da cultura grega mudou-se de Atenas para a cidade de Alexandria no Egito construída por Alexandre, o Grande (358 – 323 a.C.). Alexandria viria a se tornar o maior centro cultural, científico e econômico da Antiguidade por mais de 300 anos.

Em meio aos modelos geocêntricos que tentavam explicar os movimentos dos corpos celestes, surge o heliocentrismo com matemático grego Aristarco de Samos (310 – 230 a.C.). O que se sabe a respeito deste brilhante astrônomo é devido a citações de Arquimedes, Plutarco e outros.

Aristarco defendia a idéia do movimento de rotação da Terra em torno do seu próprio eixo e o movimento de translação ao redor do Sol, como também o movimento de translação dos demais planetas em órbitas circulares ao redor do Sol. O modelo heliocêntrico de Aristarco não foi aceito na época devido a argumentos provenientes da Física e Cosmologia Aristotélica. Um dos argumentos contra o movimento de rotação da Terra era que, se a Terra girasse em torno de si mesma, qualquer corpo em queda livre sofreria um desvio para Oeste. Para o não movimento de translação o argumento era a não existência de paralaxe das estrelas.

Aristarco elaborou uma classificação para as estrelas quanto ao seu brilho e admitiu que estas se encontravam em diferentes distâncias da Terra.

Seleuco de Seleucia (150 – ? a.C.), observou que as marés estavam relacionadas com as fases da Lua e foi o único astrônomo da antiguidade a adotar o heliocentrismo de Aristarco.

Eratóstenes (276 – 194 a.C.) calculou com êxito a circunferência terrestre determinando com boa precisão o raio, a área superficial e o volume da Terra.

Com o passar do tempo, os observadores adquiriam uma imagem mais clara e elaborada dos movimentos que observavam no céu,

os modelos concêntricos foram perdendo credibilidade entre os astrônomos e aos poucos foram deixados de lado. Isso ocorre por causa do aprimoramento das observações e construções de tabelas que possibilitaram aos estudiosos confrontarem dados de várias épocas, determinando alterações nas órbitas planetárias, cujos modelos concêntricos existentes até então não conseguiam explicá-las satisfatoriamente [5] p. 45.

Apolônio de Perga (262 – 190 a.C.) contemporâneo de Eratóstenes, propõe a teoria dos deferentes, epiciclos e excêntricos propondo dois sistemas alternativos baseados em movimentos epiciclos e excêntricos para explicar o aparente movimento dos planetas no céu.

Hiparco de Nicéia (190 – 120 a.C.) no ano de 134 a.C. detectou o surgimento de uma nova estrela na constelação de Escorpião. Esta estrela aumentou seu brilho rapidamente e passado algum tempo, desapareceu e nunca mais foi vista. Com base nesta observação Hiparco verificou que o Universo não era imutável e eterno como havia

proposto Aristóteles. Confecciona assim um catálogo com quase mil estrelas e melhora sua classificação em função do brilho, feita anteriormente por Aristarco. Classificou as estrelas em seis grandezas, de tal forma que as de primeira grandeza seriam as mais brilhantes e as de sexta grandeza, as de brilho mais fraco.

Hiparco desenvolveu uma teoria que fazia uso do excêntrico a fim de explicar as irregularidades observadas nos movimentos do Sol e da Lua, mantendo a hipótese do movimento circular uniforme. Utilizou outro modelo, o do deferente-epiciclo para explicar o mesmo fato. Hiparco defende a idéia do geocentrismo de Aristóteles, onde a Terra estaria fixa no centro do Universo e todos os outros astros realizam movimentos uniformes ao seu redor.

Claúdio Ptolomeu (cerca de 85 – cerca de 165) juntou suas próprias teorias e observações com idéias de outros astrônomos, principalmente de Apolônio e Hiparco, aperfeiçoando assim a versão do modelo geocêntrico.

Essa teoria consistia em supor que os planetas se movimentavam em órbitas compostas por um círculo principal, o deferente, ao qual se sobrepunha um círculo menor, resultando em um movimento de epiciclo. Essa construção era fundamental para explicar o movimento retrógrado dos planetas. Mas por si só não era suficiente. Ainda era necessário supor que a Terra estivesse ligeiramente deslocada em relação ao centro do círculo em que se movimentavam os planetas. Ademais, era necessário imaginar ainda que o planeta se movimentava uniformemente não em relação ao centro do seu círculo orbital, mas sim em relação a um ponto deslocado do centro conhecido como equante. Dessa forma um tanto complicada era possível prever com razoável precisão a posição dos astros na esfera celeste. ([3], p. 22)

A teoria de Ptolomeu é transmitida ao longo da Idade Média em forma de uma enciclopédia astronômica, a “Megale Sintaxis”, muito conhecida por sua versão traduzida para o árabe como “Almagesto”. Essa teoria resiste as provas de observações durante 14 séculos.

Após Ptolomeu, a ciência astronômica e cosmológica grega praticamente se extingue. O pensamento religioso cristão praticamente bane o desenvolvimento das ciências, “os primeiros líderes da Igreja insistiam numa interpretação literal das passagens bíblicas, e a Terra volta a ser plana.” ([4], p. 15)

2.4 A Cosmologia na Renascença

O termo Renascença compreende o período da história européia que vai do início do século XIV até o final do século XVI. Este termo possui suas origens na palavra italiana “rinascita”, que literalmente significa “renascer”, e descreve as mudanças radicais que ocorreram na cultura européia durante estes séculos. Nesta época ocorre o

desaparecimento da misteriosa e mágica Idade Média e, pela primeira vez, incorpora à sociedade os valores do mundo moderno.

Neste período ocorre a exploração do globo terrestre com as grandes navegações feitas por portugueses e espanhóis. Tem-se o incrível desenvolvimento da expressão artística, com Leonardo da Vinci (1452 – 1519), Rafael (1483 – 1520), Tiziano Vecellio (1490 – 1576), Michelangelo (1475 – 1564) e também das ciências com Nicolau Copérnico (1473 – 1543), Tycho Brahe (1546 – 1601), Johannes Kepler (1571 – 1630) e Galileo Galilei (1564 – 1642). No entanto, este desenvolvimento não deve ser confundido com liberdade. A Igreja Católica dominava fortemente o pensamento da época, e cientistas como Copérnico e Galileu apresentaram suas idéias e sofreram retaliações por causa delas. Alguns como Giordano Bruno (1548 – 1600) foram queimados por suas interpretações científicas diferentes daquelas apoiadas pela Igreja Católica. Contudo, a era do renascimento tirou o mundo da apatia e ignorância em que estava vivendo.

Na Europa do século XIII, ainda Idade Média, já havia uma forte insatisfação com a Física e a Astronomia de Aristóteles e de Ptolomeu. Nos séculos XIII e XIV muitos fatos científicos pediam novos métodos de análise, tornando-se inevitável o desenvolvimento de teorias mais satisfatórias.

Nesta época, surgiu o monge franciscano Roger Bacon (1214 – 1292), enfatizando que o método científico consistia em fazer observações e não realizar a eterna leitura de textos antigos. Para ele o método científico significa observar, usar a matemática, comparar os resultados obtidos com os experimentos feitos e voltar a fazer observações. Era preciso se libertar dos velhos textos clássicos e criar uma nova maneira de encarar a ciência.

Não foi apenas Roger Bacon que apresentou críticas à ciência da época. Outros pensadores, muitos deles religiosos, apresentaram ao longo deste período idéias revolucionárias.

Um exemplo, foi bispo francês Nicolau de Oresme (1323 – 1382), brilhante matemático, físico e economista, que afirmou que o movimento somente poderia ser percebido quando um corpo altera sua posição em relação a outro corpo. Com base nisso, Oresme refutava a velha idéia de que a Terra não podia girar em torno do seu eixo.

A idéia de um cosmos infinito tem seu ponto de partida com o cardeal alemão Nicolau de Cusa (1401 – 1464). Em sua obra, *De docta ignorantia* (Sobre a sábia ignorância), introduz a idéia de um Universo sem limite, indeterminado, ou em suas palavras, *immensum*, bem como sem centro e sem circunferência.

Durante o Renascimento muitas verdades intocáveis são revistas e fortemente discutidas. Até mesmo a autoridade do Papa é contestada pelo monge Martinho Lutero (1483 – 1546), dando origem ao protestantismo.

A Renascença conduziu à “revolução copernicana”, e, como consequência, à era moderna da ciência. Os principais nomes da Cosmologia na Renascença foram: Nicolau Copérnico, Thomas Digges (1543 – 1595), Giordano Bruno, Tycho Brahe, Johannes

Kepler e Galileu Galilei.

O monge polonês Nicolau Copérnico, propõe um modelo onde tudo seria mais simples se o Sol estivesse no centro do sistema planetário. No ano de sua morte, foi publicado em seu livro, *De revolutionibus orbium coelestium* (Da revolução de esferas celestes) sua teoria, na qual

.... o Universo é composto por sete esferas concêntricas. A primeira e mais externa é a esfera das estrelas fixas, seguindo a esta a esfera de Saturno, a de Júpiter, a de Marte, a da Terra, a de Vênus e a sétima esfera de Mercúrio. Todas essas esferas, com exceção da primeira, giram em torno de um ponto central, onde está o Sol, formulando então o que chamou de sistema heliocêntrico. ([2], p. 32)

A teoria de Copérnico tem uma grande concordância com as idéias de Aristarco, a de que um único movimento circular em torno do Sol, seria capaz de explicar o movimento aparente dos planetas. Essa teoria causa um grande impacto nas agitadas movimentações sociais, culturais e religiosas daquele tempo.

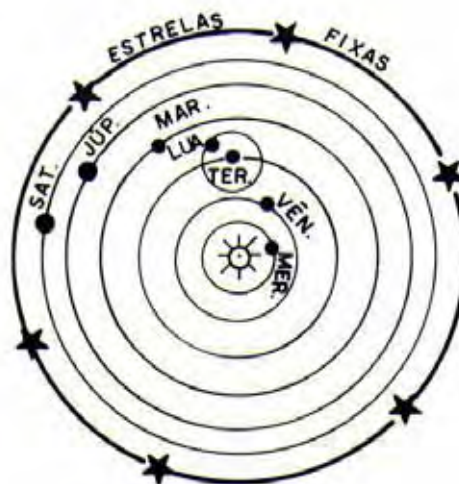


Figura 2.2: Sistema Heliocêntrico proposto por Copérnico

No entanto, mesmo com a enorme simplificação conceitual na descrição dos fenômenos celestes, a teoria de Copérnico não chegou a derrubar a credibilidade do modelo geocêntrico. Faltavam evidências observacionais mais sólidas que pudessem privilegiar o heliocentrismo em detrimento de uma outra teoria, que mesmo sendo mais complicada desfrutava de sucesso na descrição acurada das observações existentes. ([3], p. 23)

Thomas Digges, escreveu um trabalho popular chamado *A Perfit Description of the Caelestiall Orbes*, publicado em 1576, que tinha como objetivo explicar o modelo heliocêntrico de Nicolau Copérnico.

Digges introduziu uma importante modificação no sistema universal de Copérnico. Ele reconheceu que a esfera das estrelas fixas que limitava o Universo não era logicamente necessária em um modelo onde a Terra tinha um movimento de rotação. Removeu assim, a borda mais externa do modelo e dispersou as estrelas fixas por todo o espaço não limitado. Seu modelo de Universo era heliocêntrico, infinito com as estrelas espalhadas por um espaço vasto e aberto.

Giordano Bruno tomou conhecimento do livro de Thomas Digges e, prontamente adotou as idéias ali contidas. Este livro falava de um Universo sem contorno e voltou sua atenção para a conclusão lógica, previamente mostrada por Nicolau de Cusa, de que o Universo também não possui centro.

Esse brilhante teólogo, filósofo, escritor e frade dominicano deve ser considerado o principal representante da doutrina do Universo descentralizado, infinito e infinitamente povoado. Em seu livro *La Cena de le Ceneri* apresenta a melhor discussão e refutação, escrita antes de Galileu, das objeções clássicas, sejam elas aristotélicas ou ptolomaicas, contra o movimento da Terra. Neste texto ele defendia com ardor a teoria heliocêntrica. Em seu livro *De l'infinito universo e mondi*, Giordano Bruno afirma de maneira precisa, resoluta e consciente que o espaço é infinito. Também afirma que movimento e mutação são sinais de perfeição. Um Universo imutável seria morto. Um Universo vivo tem de ser capaz de mover-se e modificar-se.

Segundo Bruno, como poderia o espaço “vazio”, deixar de ser uniforme ou vice-versa? Como poderia o “vazio”, uniforme deixar de ser ilimitado e infinito? Do seu ponto de vista a concepção aristotélica de um espaço fechado no interior do mundo é não só falsa como absurda.

Suas afirmações eram avançadas demais para a época. Em 1591, Giordano Bruno foi preso pela Inquisição, sendo continuamente interrogado até o ano de 1600, quando foi queimado vivo como herege em uma praça pública na cidade Roma.

Tycho Brahe foi o maior de todos os astrônomos pré-telescópio. Por meio de estudos sistemáticos com instrumentos grande e finalmente trabalhados, desfrutou de observações limitadas pela resolução do olho humano. Suas observações foram numerosas, quase mil estrelas catalogadas com exatidão, os planetas foram seguidos com precisão e os cometas com um pouco mais dificuldade.

Propôs seu próprio modelo planetário, o sistema tychonoico, onde o Sol e a Lua giravam ao redor da Terra, enquanto todos os outros planetas giravam ao redor do Sol. Na verdade, este modelo era uma modificação geocêntrica do modelo de Copérnico, sendo equivalente ao sistema de Copérnico, no sentido de que os movimentos relativos de todos os corpos celestes (exceto as estrelas) são os mesmos nos dois sistemas.

A cosmologia de Tycho Brahe forneceu as bases observacionais necessárias, que permitiram a Kepler estabelecer os verdadeiros movimentos dos planetas.

Johannes Kepler, de posse dos resultados das observações feitas por Tycho Brahe, principalmente aquelas sobre os registros do movimento do planeta Marte, formulou

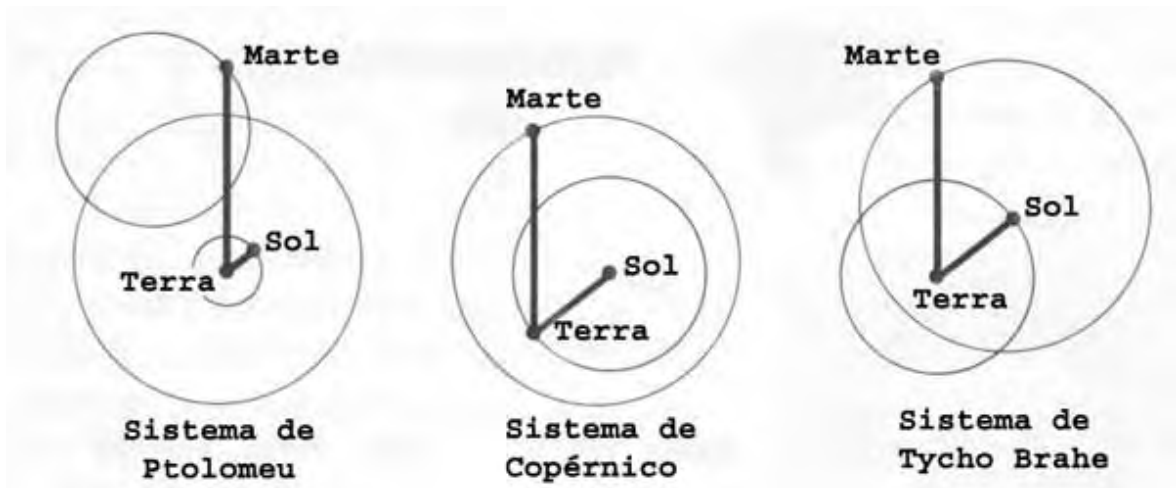


Figura 2.3: Modelos cosmológicos de Ptolomeu, Copérnico e Tycho Brahe

as três leis fundamentais sobre o movimento planetário, conhecidas como as Leis de Kepler:

Lei das Órbitas Elípticas: *Os planetas se movem em órbitas elípticas com o Sol em um dos focos das elipses.*

Lei das Áreas: *Uma linha traçada do Sol a um planeta percorrerá áreas iguais em tempos iguais. Esta lei determina que os planetas se movem com velocidades diferentes, dependendo da distância a que se encontram do Sol.*

Lei dos Tempos: *Os quadrados dos períodos de revolução dos planetas são proporcionais aos cubos dos eixos máximos de suas órbitas. Esta última lei indica que existe uma relação entre a distância do planeta e o tempo que ele demora para completar uma revolução em torno do Sol. Assim, quanto mais distante o planeta estiver do Sol mais tempo levará para completar sua volta em torno desta estrela.*

Kepler imaginou o Sol como um grande ímã giratório, que atraía os planetas em torno de si libertando o sistema solar da teoria epicíclica que perdurava por anos.

É importante ressaltar que sem as medições de Tycho Brahe, Kepler não teria encontrado suas leis planetárias, e a história da ciência do século XVI poderia ter sido muito diferente.

Uma astronomia com o uso de telescópio foi introduzida no ano de 1610 por Galileu Galilei inovando os métodos sistemáticos de observação e de experimentação. Com o uso do telescópio realizou grandes descobrimentos astronômicos: a natureza montanhosa da superfície da Lua; observou pela primeira vez os quatro grandes satélites de Júpiter possibilitando assim a analogia entre o sistema Terra-Lua e demais corpos celestes; a existência de outras estrelas não visíveis a olho nú; a descoberta das fases de Vênus, ajudando a demonstrar que este planeta se move em torno do Sol. Argumentou

também que as estrelas se encontravam muito distantes da Terra ao observá-las como pontos de luz, mesmo quando vistas pelos telescópios.

O aristotelismo recebe um golpe mortal quando Galileu faz a descoberta das manchas solares. Este fato acaba com a doutrina aristotélica da imutabilidade do céu.

Galileu não contribuiu significativamente para a teoria cosmológica, mas suas observações não só deram início a era da astronomia telescópica, como exerceram profunda repercussão sobre o entendimento humano do Universo.

2.5 O Mecanicismo de René Descartes. A Teoria da Gravitação de Isaac Newton e o Determinismo de Pierre Simon Laplace

A ciência desenvolvida por Galileu ficou conhecida como “mecanicismo”, e lançou as bases para uma nova concepção da natureza que foi amplamente aceita e desenvolvida.

Os mecanicistas viam a natureza como um mecanismo cujo funcionamento era regido por leis precisas e matemáticas. Para eles, o mundo era formado de peças ligadas entre si e o seu funcionamento regular nos permitia descrevê-las usando as leis da Mecânica. Com esse argumento era possível negar a necessidade de se apelar a um Deus para conhecer o que estava acontecendo, sem negar a existência do próprio Deus. Segundo os mecanicistas, um ser inteligente pode conhecer o funcionamento de uma máquina tão bem como o seu próprio inventor sem ter que consultá-lo a esse respeito.

Um dos grandes defensores do mecanicismo foi o filósofo francês René Descartes (1596 – 1650), que propôs um modelo não matemático para o Universo que consistia de enormes rodamosinhos de matéria cósmica, os quais denominou “vórtices”. O Sistema Solar seria apenas um dos inúmeros rodamosinhos que formavam o Universo.

A cosmologia mecanicista de Descartes era altamente aceitável dentro da concepção geral existente no século XVII do mundo concebido como uma máquina. Entretanto, suas explicações eram apenas redescrições qualitativas de fenômenos em termos mecânicos. Durante o século XVIII, a teoria do “vórtice”, de Descartes mostrou ser incapaz de calcular os movimentos planetários que eram observados.

Ocorreram três importantes descobertas experimentais no século XVII que contribuíram fundamentalmente para uma melhor compreensão do Universo. A determinação da distância Terra-Sol por Giovanni Domenico Cassini (1625 – 1712) mostrando que, mesmo em termos de Sistema Solar, as distâncias envolvidas eram gigantescas. Cassini determinou o valor da unidade astronômica (U.A.) como sendo a distância média entre a Terra e o Sol. Este valor foi apenas 7% menor do que o aceito atualmente como verdadeiro, cerca de 149.597.870,691 quilômetros.

A segunda descoberta foi a determinação da velocidade da luz pelo dinamarquês Ole Christensen Romer (1644 – 1710). Este dado físico foi de extrema importância,

uma vez que a velocidade da luz é finita. Uma importante consequência foi que ao olhar o céu noturno, o que se vê é o passado do Universo.

Roemer obteve o valor de 225.260 quilômetros por segundo para a velocidade da luz, 25% menor do que o aceito atualmente que é de cerca de 300.000 quilômetros por segundo.

Finalmente, a última grande descoberta foi realizada por Otto von Guericke (1602 – 1686) de que o vácuo era possível. Este fato revelou a todos os cientistas de que o espaço entre as estrelas poderia ser considerado como vácuo, sem a necessidade da existência de qualquer meio semelhante ao “éter”. A idéia de vácuo virá a ser melhorada, permitindo que a teoria de campo possa justificar diversos fenômenos.

Guericke se preocupava com a natureza do espaço e, com a possibilidade da existência do espaço vazio. Ele construiu um modelo físico do Universo, englobando as idéias de Copérnico. Sua teoria baseava-se no espaço vazio através do qual a ação magnética controlava os movimentos dos planetas.

Os trabalhos de Nicolau Copérnico sobre o Sistema Solar foram muito importantes por mostrarem o papel que a gravitação exercia nos corpos celestes. Em seguida, Johannes Kepler apresentou suas leis do movimento planetário e Galileo Galilei fez compreender o movimento e a queda dos corpos. Com base nesses conhecimentos e estimulado por Edmund Halley (1656 – 1742), Isaac Newton (1642 – 1727) apresentou suas idéias sobre o movimento dos corpos celestes. Newton publicou em 1687 suas leis do movimento e a análise da gravidade sob a forma de um livro intitulado *Philosophia Naturalis Principia Mathematica* (Princípios Matemáticos da Filosofia Natural).

Formulou três importantes leis:

Primeira Lei ou Lei da Inércia: *Todo corpo continua em seu estado de repouso ou em movimento uniforme sobre uma linha reta, a menos que seja forçado a mudar aquele estado por forças aplicadas sobre ele.*

Segunda Lei ou Lei da Quantidade de Movimento: *A mudança de movimento é proporcional à força motora imprimida e é produzida na direção da linha reta na qual aquela força é imprimida.*

Terceira Lei ou Lei da Ação e Reação: *A toda ação há sempre uma reação oposta e de igual intensidade, ou seja, as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas em sentidos opostos.*

Newton também desenvolveu a Teoria da Gravitação Universal. Esta teoria motivava-se pela seguinte pergunta: o que impede a Lua de sair de sua órbita em torno da Terra, exatamente como acontece ao cortarmos a corda que prende uma bola que está sendo rodada?

Newton argumentava que a Lua “cai”, continuamente em sua trajetória em torno

da Terra por que existe uma força gravitacional que a atrai na direção do centro do nosso planeta. A Lua sofre uma aceleração gerada pela gravidade do nosso planeta e o conjunto desses fatores produz no fim das contas sua órbita. Seguindo esse raciocínio, Newton chegou à conclusão que dois objetos quaisquer no Universo exercem uma mútua atração gravitacional, gerada por uma força que possui uma forma matemática universal.

A palavra gravidade já estava em uso naquela época, significando a qualidade de “peso”, que faz um objeto cair. Newton demonstrou sua existência por uma lei universal:

Duas partículas quaisquer de matéria se atraem mutuamente com uma força diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas.

Com esta observação, Newton introduziu o grande princípio unificador da Física Clássica, capaz de explicar em uma lei matemática o movimento dos planetas, o movimento das marés e a queda de uma maçã.

A Lei da Gravitação Universal pode ser escrita matematicamente como:

$$F = G \frac{Mm}{d^2},$$

onde G é a constante universal da gravitação, (ou apenas constante gravitacional), M e m são as massas dos corpos que estão interagindo gravitacionalmente, e d é a distância entre estes corpos.

Newton estava convencido de que suas descobertas demonstravam as maravilhas criadas por Deus. A presença divina agia como um “éter”, imaterial que não oferecia resistência aos corpos mas que poderia movê-los por meio da força da gravitação. Newton imaginava um Universo infinitamente grande no qual Deus tinha colocado as estrelas exatamente nas distâncias corretas uma em relação a outra, de modo que a ação mútua de suas forças de atração gravitacional fossem canceladas. Um equilíbrio tão preciso como o de agulhas equilibradas por suas pontas.

Já o filósofo, matemático e astrônomo francês Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827) acreditava fortemente no determinismo. O determinismo é um conceito no qual “as mesmas causas geram sempre os mesmos efeitos”. Baseado nisso, Laplace escreveu em “Ensaio Filosófico sobre as Probabilidades”:

Devemos considerar o estado presente do universo como um efeito do seu estado anterior e como causa daquele que se há de seguir. Uma inteligência que pudesse compreender todas as forças que animam a natureza e a situação respectiva dos seres que a compõem ... uma inteligência suficientemente vasta para submeter todos esses dados a uma análise ... englobaria na mesma fórmula os movimentos dos maiores corpos do universo e o do mais pequeno átomo; para ela, nada seria incerto e o futuro, tal como o passado, seriam presente aos seus olhos.

Em seu livro *Mécanique Céleste*, Laplace propõe que todos os fenômenos físicos no Universo poderiam ser reduzidos a um sistema de partículas que exercem forças de atração e de repulsão entre si. Em 1796, em seu livro *Exposition du Système du Monde*, resumiu o conhecimento sobre Astronomia e Cosmologia do final do século XVIII e antecipa uma idéia que se tornou conhecida como a “hipótese nebular”. Laplace sugere que o nosso Sistema Solar, assim como todas as estrelas, foram criadas a partir do esfriamento e condensação de uma enorme “nebulosa”, quente em rotação, ou seja, uma nuvem gasosa de partículas. A “hipótese nebular”, influenciou fortemente os cientistas no século XIX, fazendo-os procurarem sua confirmação ou recusa. Elementos da idéia da “hipótese nebular”, de Laplace permanecem centrais à nossa compreensão atual de como o Sistema Solar foi formado.

Laplace também esteve próximo a propor o conceito de buraco negro. Observou que poderia haver estrelas massivas cuja gravidade seria tão grande que nem mesmo a luz escaparia de sua superfície. Seus trabalhos consistiam em uma tentativa de substituir a hipótese do poder de Deus por uma teoria puramente física que explicasse a ordem observada no Universo.

2.6 Conhecendo o Universo

O heliocentrismo é finalmente adotado, inaugurando uma fase de reavaliação das informações astronômicas.

A idéia existente de uma esfera celeste contendo todas as estrelas era certamente artificial, principalmente agora que não havia motivo para que esta girasse em torno do Sol. Galileu levantou a idéia de que as estrelas fossem astros semelhantes ao Sol, e por seu brilho reduzido deveriam estar muito distantes. Gradualmente o modelo dominante passou a ser o de um Universo preenchido com estrelas semelhantes ao Sol situadas a grandes distâncias. Quanto mais distante se encontrava a estrela menor deveria ser seu brilho.

Entretanto, existia um desafio a ser esclarecido. Se as estrelas estivessem a diferentes distâncias deveria ser detectado o efeito de paralaxe. As estrelas mais próximas deveriam se movimentar em relação ao fundo das estrelas mais distantes. A não detecção desse efeito, por menor que fosse, causava um grande desconforto. Mais ainda, como estabelecer a distância das estrelas?

Mesmo sem conhecer as distâncias das estrelas, a discussão sobre a natureza dos objetos astronômicos continuou avançando. Utilizando telescópios de melhor qualidade óptica, algumas descobertas começaram a mostrar a diversidade dos objetos presentes no Universo, como a presença de nebulosas as quais eram nitidamente diferentes dos cometas. Com o desenvolvimento de novas teorias, os cientistas passaram a ter alguns elementos essenciais para começar a compreender a estrutura do Universo.

Charles Messier (1730 – 1813) preparou o primeiro catálogo de objetos não estelares

visíveis do Hemisfério Norte. Ele iniciou sua elaboração no final da década de 1750 e a completou em 1784. O Catálogo das Nebulosas e Aglomerados Estelares contém 103 objetos não estelares. Sabe-se hoje que alguns destes objetos são galáxias, como Andrômeda, e outros são aglomerados globulares (enormes concentrações de estrelas) e nebulosas galáticas. Deve-se a Messier também a descoberta de 21 cometas.

O filósofo inglês Thomas Wright (1711 – 1786) procurou explicar alguns aspectos que eram naturalmente observados no céu como, por exemplo, a aparência da Via Láctea. Para Wright

... a nossa galáxia, é um sistema composto de uma miríade de estrelas distribuídas em uma estrutura que se assemelha a um disco. Como estamos imersos no meio desse disco, e mesmo as estrelas mais próximas estão muito distantes do Sol, visualizamos a Via Láctea como uma faixa na esfera celeste. ([3], p. 26)

Immanuel Kant (1724 – 1804) apresentou em 1775 um modelo para descrever o Universo. Ele levanta a seguinte questão: se as estrelas se movem, por que elas parecem estar fixas no céu? Segundo Kant, este movimento ou era excessivamente lento, tendo em vista a grande distância entre as estrelas e o centro comum em torno do qual elas giravam, ou essa falta de movimento era devida a uma mera incapacidade nossa de percebê-lo, gerada pela grande distância existente entre o local onde elas se encontravam e aquele de onde as observamos.

Kant afirmava que o Sistema Solar newtoniano fornecia um modelo para os sistemas estelares maiores. Em sua concepção, o Universo tinha uma ordem similar àquela que vemos no Sistema Solar mas em uma escala maior e envolvendo muito mais objetos, sendo formado por uma multidão de estrelas que giram em torno de um centro comum estando todas, aproximadamente, no mesmo plano. A maior contribuição de Kant foi a introdução do modelo de Universo das pequenas manchas luminosas elípticas observadas no céu pelos astrônomos de sua época, e que eram chamadas coletivamente de “estrelas nebulosas”. Ele argumentou que se a Via Láctea tinha a forma de um disco de estrelas, então seria viável existirem também outros agregados planos de estrelas espalhados por todo o espaço. Estes agregados, tendo em vista os seus tamanhos, estavam tão distantes da Via Láctea do mesmo modo como as estrelas individuais estão umas das outras. Assim, eles deveriam aparecer para nós como pequenas manchas luminosas, que teriam a forma mais ou menos elíptica dependendo de quanto estavam inclinadas. Kant estava convencido da existência de “outros Universos”, além da Via Láctea. Propôs assim, pela primeira vez baseado apenas em filosofia, que o Universo era formado por vários “universos ilhas”, repletos de estrelas semelhantes à nossa galáxia. Os objetos nebulosos observados nos céus se tornaram na mente de Kant “universos ilhas”, como colossais sistemas solares formados por milhares de estrelas. Seus pensamentos sobre o Universo tinham pouco conteúdo observacional. Os fundamentos de suas hipóteses cosmológicas eram basicamente filosóficos e teológicos.

William Herschel (1738–1822) é considerado um dos maiores astrônomos no período intermediário entre Newton e o século XX. Deve-se a ele a universalidade da lei da gravitação ao descobrir estrelas binárias orbitando uma em torno da outra e obedecendo a mesma lei da gravitação que os planetas do Sistema Solar. A descoberta do planeta Urano, em 13 de março de 1781, o torna famoso. Urano foi o primeiro planeta descoberto que não era conhecido na antiguidade, embora tenha sido observado e confundido com uma estrela em muitas ocasiões. O astrônomo inglês John Flamsteed (1646 – 1719) o catalogou como a estrela 34 Tauri em 1690. Um fato semelhante ocorreu com Galileu, que entre 1612 e 1613, observou Urano em algumas ocasiões pelo telescópio, mas o registrou como uma estrela. Numa das ocasiões, Galileu chegou a se surpreender com o fato de ter “anotado incorretamente”, a posição daquela “estrela”, no dia anterior, e limitou-se a “corrigir”, a posição. Sem cogitar a possibilidade de tratar-se de um movimento angular real do objeto e perdendo a oportunidade de adicionar mais este mérito à sua extensa lista de contribuições à Ciência.

Herschel também se interessou pelas “estrelas nebulosas”, mencionadas por Kant e Wright, entre outros. Ao longo de seus levantamentos do céu descobriu muitas outras. Ao iniciar suas observações nos primeiros anos da década de 1780, os astrônomos conheciam cerca de 100 “objetos nebulosos”, no céu do Hemisfério Norte que haviam sido catalogados por Charles Messier. Em 1802 publicou uma lista com mais 500 objetos nebulosos.

Herschel considerou as “manchas difusas”, de luz, ou nebulosas, observadas em seu telescópio como “universos isolados” com este fato a cosmologia recebe um grande impulso, e a partir de suas observações a astronomia extragaláctica torna-se um ramo independente da Astronomia.

Herschel defendeu a hipótese de que a Via Láctea era um universo-ilha isolado, em forma de disco, com o Sol numa posição central. Ele considerou a idéia de que todas as “nebulosidades láctea” consistiam em sistemas estelares, quando adequadamente examinadas, e, ao fazer isso, ele incluiu indiscriminadamente as nebulosas gasosas tais como as nebulosas planetárias e os restos das supernovas, como universos de estrelas isolados.

Apesar desses erros, ao reconhecer que a Via Láctea poderia ser semelhante em estrutura e em escala absoluta às outras fracas nebulosidades, Herschel deu um grande passo no sentido de colocar a Terra em uma perspectiva adequada em relação ao resto do Universo. ([4],p.10).

A idéia de William Herschel de que todas as “nebulosidades lácteas”, consistiam em sistemas estelares levaram muitos astrônomos a observar com mais atenção estas pequenas nuvens difusas no céu que, até aquele momento, não haviam sido resolvidas em estrelas.

Em 1845 o astrônomo irlandês William Parsons (1800–1867), construiu um telescópio de 72 polegadas no seu castelo em Parsonstown na Irlanda. Tal construção era

monstruosa para a época sendo apelidada de “*Leviathan of Parsonstown*”.

Parsons conseguiu com a ajuda deste equipamento determinar que algumas destas “nebulosas”, possuíam uma estrutura em forma de espiral. Em abril de 1845 desenhou a “nebulosa”, M51 (hoje conhecida como galáxia Rodamoinho) mostrando sua forma espiral. Esta foi a primeira vez em que a forma espiral foi identificada em uma “nebulosa”. Ele também conseguiu discernir estrelas individuais em várias “nebulosas”, onde nem mesmo o poderoso telescópio de Herschel tinha obtido sucesso.



Figura 2.4: Nebulosa M51, hoje conhecida como galáxia Rodamoinho

Por sua forma própria, estes objetos nebulosos passaram a ser chamados de “nebulosas espirais”. A natureza destas “nebulosas espirais”, foi assunto de intenso debate durante as várias décadas que se seguiram. Afinal, estes objetos pertenciam ou não à nossa Galáxia?

Com a descoberta das nebulosas espirais surge um grande problema para Astronomia da época: como determinar as distâncias até as chamadas “nebulosas espirais”? Ao responder a essa questão seria possível dizer se elas pertenciam ou não a nossa galáxia. Esse era um ponto fundamental que precisava ser esclarecido para conhecermos o tamanho do Universo.

Nesta época, muitos cientistas acreditavam que a nossa Galáxia era todo o Universo. As estrelas que víamos eram únicas e além destas estrelas existiria apenas a escuridão de um espaço sem fim. Entretanto, não havia um método confiável para determinar distâncias aos objetos astronômicos situados além das estrelas mais próximas. Não era possível definir se as “nebulosas espirais”, estavam relativamente próximas ou distantes. Para resolver este problema era necessário, em primeiro lugar, desenvolver métodos que permitissem calcular distâncias às estrelas.

A primeira técnica direta para calcular as distâncias às estrelas foi conhecida como paralaxe trigonométrica. Este método foi empregado em 1838 por Friedrich Wilhelm Bessel (1784 – 1846) para demonstrar que a Terra girava em torno do Sol. Infelizmente esta técnica só podia ser aplicada às estrelas que estavam mais próximas, àquelas situadas a menos de 100 parsecs. Para as estrelas situadas a distâncias maiores este deslocamento angular é tão pequeno que torna-se quase impossível medi-lo. Cabe ressaltar que mesmo para as estrelas mais próximas, a medida de paralaxe é muito pequena. Por esse motivo ela não é medida em graus, mas em frações de graus chamados segundos de arco.

As observações constantes com relação as medidas de movimentos e posições estelares, fizeram surgir uma outra técnica para determinar as distâncias às estrelas baseadas no chamado movimento próprio das estrelas. Esta técnica foi amplamente usada durante o século XIX por diversos astrônomos. Novamente só era possível medir pequenas distâncias, uma vez que o movimento próprio de estrelas muito distantes é pequeno demais para que se possa detectar. Contudo, esta técnica permitiu que os astrônomos medissem distâncias a estrelas situadas bem além do alcance oferecido pela paralaxe trigonométrica.

Em 1847, Friedrich G. Struve (1793–1864) mostrou que em algumas direções o brilho aparente das estrelas decresceria muito mais rapidamente que o esperado se a sua distribuição fosse homogênea. A explicação desse efeito é que se tornava necessário admitir a presença da poeira interestelar. Esse efeito prejudicava seriamente as estimativas de W. Herschel sobre a forma da Galáxia, já que os objetos que ele acreditava distantes talvez não estivessem tanto assim. ([3], p.30)

John Herschel (1792 – 1871), filho de William Herschel, consolidou o catálogo de nebulosas ampliando o número de objetos catalogados para 5 mil.

Dois avanços tecnológicos do século XIX foram fundamentais para o desenvolvimento da Cosmologia: o desenvolvimento da fotografia e o aperfeiçoamento do espectrógrafo. A partir da fotografia foi possível gravar as observações na forma de uma imagem que poderia ser depois examinada. Já o espectrógrafo permitiu realizar um registro fotográfico de um espectro luminoso.

Em 1868 Willian Huggins (1824 – 1910) estabeleceu, de acordo como efeito Doppler, que as linhas espectrais devem alterar de posição quando a fonte emissora se movimenta. Ele utiliza o espectro estelar para identificar elementos químicos e sugere que os mesmos elementos são encontrados na Terra e no Sol.

No final do século XIX, o espectrógrafo estava instalado em vários telescópios sendo sua principal aplicação a classificação espectral das estrelas. As técnicas de espectroscopia passaram a ser uma ferramenta útil para os estudos das estrelas, produzindo um grande avanço no conhecimento destes objetos.

Em 1886, o astrônomo norte-americano Edward Charles Pickering (1846 – 1919), inventou um método engenhoso pelo qual era possível obter espectros de centenas de

estrelas usando o chamado “prisma objetivo”. Pickering contava com um grupo de mulheres para analisar os espectros obtidos. Neste grupo destacaram-se as astrônomas Annie Jump Cannon (1863 – 1941), Henrietta Swan Leavitt (1868 – 1921) e Antonia Maury (1866 – 1952), que além do trabalho de classificação desenvolveram outras importantes pesquisas científicas.

Annie Jump Cannon verificou que as estrelas podiam ser classificadas de acordo com as linhas que apareciam nos seus espectros. Ela notou que as classes espectrais podiam ser rearranjadas de modo a formarem uma sequência contínua de mudanças graduais. Foi então que surgiu a chamada “classificação espectral de Harvard”, que usamos até hoje e que classifica as estrelas como sendo dos tipos $O, B, A, F, G, K, M, R, N$ e S . O fator básico para esta classificação era a temperatura da superfície das estrelas. A temperatura diminuía continuamente a partir das estrelas mais quentes, classificadas como O , até chegar às mais frias, do tipo M .

Em 1906, o astrônomo dinamarquês Ejnar Hertzsprung (1873 – 1967), descobriu que existiam estrelas gigantes e anãs. Este fato revelou que as estrelas podiam ser bem diferentes também em seus aspectos físicos. As estrelas com grande tamanho, chamadas estrelas gigantes, também tinham alta luminosidade. Como resultado dessa pesquisa, os astrônomos viram que as distâncias às estrelas podiam ser estimadas se seus espectros fossem conhecidos.

Henrietta S. Leavitt, no início do século XX,

... lançou a base sólida em que se assentaria a solução do problema dos universos ilhas. Ao observar 59 estrelas variáveis do tipo Cefeida, na Pequena Nuvem de Magalhães, ela foi capaz de mostrar que o período de variabilidade destes objetos dependia fortemente da sua luminosidade intrínseca. Portanto, uma observação cuidadosa da regularidade das suas variações de brilho seria capaz de prover uma indicação da sua luminosidade intrínseca. Uma vez que o seu brilho aparente pode ser estimado com relativa facilidade seria possível determinar a sua distância. ([3], p. 29)

No entanto, para este fato ser concretizado seria necessário uma calibração de ponto zero, qual informa o valor absoluto do brilho intrínseco das estrelas.

Em 1912, Vesto Melvin Slipher (1875-1969) descobriu que as linhas espectrais das estrelas na galáxia de Andrômeda mostravam um enorme deslocamento para o violeta. Indicando que esta galáxia está se aproximando do Sol. Iniciou assim um trabalho sistemático demonstrando que das 41 galáxias por ele estudadas, a maioria apresentava deslocamento espectral para o vermelho, indicando que as galáxias estavam se afastando. Também descobriu que quanto mais fraco o seu brilho e, portanto mais distante, maior era o deslocamento para o vermelho de seu espectro (*redshift*).

Redshift, em português “desvio para o vermelho”, é uma medida da velocidade relativa a nós de um objeto. Se um objeto se afasta, o comprimento de onda da luz que

este emite aumenta, ou seja, é desvio para o vermelho (*redshift*). Se este se aproxima, o comprimento de onda diminui, ou seja, é desvio para o azul (*blueshift*).

No ano de 1913, Ejnar Hertzsprung estima a calibração de ponto zero a qual informa o valor absoluto do brilho intrínseco das estrelas. Desta maneira, foi possível estimar a distância das Nuvens de Magalhães em cerca de 30 mil anos-luz. Esta descoberta foi momentaneamente suficiente para demonstrar a natureza extragaláctica das “nebulosas espirais”.

As dúvidas quanto as dimensões de nossa galáxia ainda persistiam. Nem mesmo os métodos observacionais pareciam esclarecer a pergunta que todos os astrônomos faziam: as “nebulosas espirais”, estavam próximas a nós ou distantes?

Com o propósito de resolver a discussão sobre os “*universos ilhas*”, a Academia Nacional de Ciências de Washington convidou os pesquisadores Harlow Shapley (1885 – 1972) e Heber Doust Curtis (1872 – 1942) para apresentarem seus pontos de vistas e argumentos. Este evento, realizado em 26 de abril de 1920, ficou conhecido como *O Grande Debate*.

Shapley apresentou os seus argumentos em favor de uma dimensão galáctica da ordem de 300 mil anos-luz. À época esses argumentos, baseados na escala de distâncias das Cefeidas, pareciam bastante sólidos.

... Curtis defendeu a posição de que a dimensão da Galáxia seria de tão-somente 30 mil anos-luz. O seu argumento se baseava nos indicadores de distâncias de estrelas próximas. Afirmava ele que era impossível aceitar o argumento de Shapley de que os aglomerados globulares se encontravam tão distantes, recusando assim a idéia de uma dimensão muito maior para a Galáxia. ([3], p. 29-30)

Curtis não conseguiu mostrar a falha nos argumentos de Shapley. *O Grande Debate* foi resolvido em 1925 com a importante descoberta de Edwin Hubble (1889 – 1953) de que a nebulosa de Andrômeda era realmente uma galáxia externa. Utilizando o telescópio de Monte Wilson, o maior da época, observando as Cefeidas em Andrômeda. Hubble mostrou que esta nebulosa se encontrava à 930 mil anos-luz, aproximadamente a metade da distância atual. Tal erro em relação a essa escala de distância foi somente corrigido na metade do século XX. Mesmo assim, estava provado que Andrômeda não era um objeto galáctico, mesmo tendo como base os argumentos de Shapley. Finalmente estava provada a existência dos “*universos ilhas*” de Immanuel Kant.

2.7 O surgimento das Teorias de Einstein

Até 1905, os conceitos de espaço e tempo eram descritos pela física newtoniana. Os fenômenos da natureza, desde os mais simples como a queda de um corpo na superfície da Terra, até as formas mais complexas como a descrição dos movimentos dos corpos celestes em suas órbitas eram descritos pelas equações do movimento e pela Teoria da

Gravitação Universal estabelecidas por Isaac Newton. Contudo, é importante ressaltar que o próprio Newton tinha dúvidas em partes de sua teoria. A física newtoniana dizia que a ação entre dois corpos era descrita pela lei da gravitação universal, que ocorria como uma ação a distância e cuja informação se propagava com velocidade infinita.

Por exemplo, dois corpos em repouso no espaço, quando subitamente um deles se desloca enquanto o outro permanece em repouso. Pela teoria de Newton o corpo que permaneceu em repouso sente instantaneamente o deslocamento do outro corpo. Isso implica que a informação de que o primeiro corpo se moveu, se propaga com uma velocidade infinita, contradizendo as observações feitas em laboratório.

O físico escocês James Clerk Maxwell (1831 – 1879) mostrou que os fenômenos eletromagnéticos se propagavam com velocidade finita. Mostrando matematicamente que a onda eletromagnética se propagava no vácuo com a velocidade constante igual à velocidade da luz.

Maxwell mostrou que a própria luz era um fenômeno eletromagnético, passando assim a ser entendida como uma onda eletromagnética cuja velocidade constante é representada pela letra c . Isto era equivalente a mostrar que a luz se deslocava com uma velocidade que independia do movimento de quem a estivesse observando, assim como da velocidade da fonte que a estava emitindo. As leis físicas propostas por Newton para o movimento dos corpos previam o contrário: elas mostravam que a velocidade da luz dependia do movimento do observador.

Sugiram assim, por parte de Hendrik Antoon Lorentz (1853 – 1928), Jules Henri Poincaré (1854 – 1912) e Albert Einstein (1879 – 1955) modificações estruturais nos conceitos relacionados aos sistemas inerciais. A definição de inércia sob o ponto de vista newtoniano não foi mais aceita. Uma nova mecânica deveria surgir. As primeiras modificações surgiram no que diz respeito aos conceitos de espaço e tempo absolutos de Newton e Galileu, pois eram através destes dois conceitos que se definiam um referencial inercial e as leis do movimento.

O primeiro fato a ser questionado era a existência real ou não do éter cósmico proposto pela mecânica newtoniana. Em 1887, os físicos Albert Abraham Michelson (1852 – 1931) e Edward Willians Morley (1838 – 1923) realizaram uma experiência para constatar a existência de tal substância. Não comprovaram que essa substância existia e também notaram que a luz não obedecia às leis da mecânica newtoniana.

Em 1904, Lorentz e Poincaré fizeram importantes descobertas cujas implicações passaram despercebidas.

A nova teoria de Lorentz introduzia a diferença entre dois tipos de tempo, “tempo local”, e “tempo universal”, (mas considerava que o tempo universal era, de algum modo, a medida preferível). Lorentz também percebeu que o movimento de um elétron através do éter deve afetar o valor de sua massa, um efeito confirmado experimentalmente pelo físico Walter Kaufman. Poincaré questionou se a velocidade da luz poderia ser um limite de velocidade no universo, uma lei

aparentemente implicada pelas teorias da contração. Ele também especulou sobre a subjetividade do espaço e do tempo, escrevendo: “Não há tempo absoluto; dizer que durações de tempo são iguais é uma afirmação que por si mesma não tem significado ... nós não temos sequer a intuição direta da simultaneidade de dois eventos ocorrendo em lugares diferentes ...”. A linha divisória entre as coisas temporais e o espaço sem tempo em que elas existiam estava se partindo. ([6] p.177)

Em 30 de junho de 1905, Einstein apresentou ao mundo sua Teoria da Relatividade Especial também conhecida como Teoria da Relatividade Restrita onde fez uma interpretação correta das equações das transformações de Lorentz³ e uma completa revisão dos conceitos de espaço e tempo da Mecânica newtoniana.

O princípio básico desta nova teoria proposta por Einstein está no fato de não existir um sistema de referência universal ou absoluto. Na Teoria da Relatividade Especial discutem-se fenômenos que envolvem somente sistemas de referência dotados de movimento retilíneo uniforme em relação a outros referenciais.

Em 1906 surge o primeiro artigo sobre a relatividade especial não escrito por Einstein. Seu autor foi o físico alemão Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858 – 1947). Neste artigo Planck aplica os conceitos da relatividade à teoria quântica⁴. Já no ano de 1907, tornou-se o primeiro a orientar uma tese de doutoramento sobre relatividade.

Hermann Minkowski (1864–1909) foi outra pessoa importante a adotar os conceitos da relatividade especial. Ele mostrou que a teoria newtoniana da gravitação não era consistente com a teoria da relatividade.

[Minkowski foi] um dos poucos a fazer uma importante contribuição à teoria nos seus primeiros dias. Ele deu um seminário no qual introduziu a geometria e a idéia de tempo como a quarta dimensão na teoria da relatividade. Numa palestra em 1908, Minkowski disse: “Daqui por diante, o espaço em si mesmo, e o tempo em si mesmo, estão fadados a se desvanecer em meras sombras, e somente um tipo de união dos dois preservará uma realidade independente.” ([6] p. 193-194)

Apesar do apoio de físicos importantes como Planck e Minkowski, e de alguns outros físicos principalmente da Alemanha, uma aceitação ampla da relatividade especial

³Hoje sabe-se que as equações que descrevem um dado fenômeno físico, definidas em um determinado referencial, precisam permanecer inalteradas se as observamos em um outro referencial que se desloca com velocidade constante em relação ao primeiro. O conjunto de equações que associa esses dois referenciais são conhecidas como transformações de Lorentz em homenagem ao físico holandês Hendrik Antoon Lorentz.

⁴A teoria quântica: é a teoria física que estuda os sistemas físicos cujas dimensões são próximas ou abaixo da escala atômica, tais como moléculas, átomos, elétrons, prótons e de outras partículas subatômicas, muito embora também possa descrever fenômenos macroscópicos em diversos casos. A teoria quântica fornece descrições precisas para muitos fenômenos previamente inexplicados tais como a radiação de corpo negro e as órbitas estáveis do elétron.

demorou a chegar. Enquanto a comunidade dos físicos ponderavam sobre as idéias da Teoria da Relatividade Especial, Einstein já estava trabalhando e formulando uma segunda teoria que causaria uma revolução ainda maior que a primeira.

Pode-se dizer que Einstein não ficou satisfeito com a Teoria da Relatividade Especial por muito tempo. Ele sentia uma forte necessidade de generalizar o princípio da relatividade dos movimentos uniformes aos movimentos acelerados. Após um longo e árduo caminho de oito anos de pesquisa, qual se iniciou com uma reflexão sobre a equivalência entre movimento acelerado e gravidade, Einstein estende a relatividade do movimento a todos os observadores, ao mesmo tempo que edifica uma nova Teoria da Gravitação⁵. Desta maneira, ele ultrapassou a limitação da relatividade especial, a qual privilegiava apenas os observadores inerciais.

Poucos meses após Einstein ter concluído a Teoria da Relatividade Geral, o físico alemão Karl Schwarzschild (1873 – 1916) conseguiu aplicar esta teoria para obter a solução matemática exata de como o espaço e o tempo se curvam na vizinhança de uma estrela compacta e esfericamente simétrica. Além de ser a primeira solução exata das equações de campo da gravitação relativística, os resultados encontrados por Schwarzschild revelaram uma implicação espantosa e ao mesmo tempo maravilhosa da relatividade geral.

[Schwarzschild] demonstrou que se a massa de uma estrela estiver concentrada em uma região esférica suficientemente pequena para que o resultado da divisão da sua massa pelo seu raio seja maior do que determinado valor crítico, o encurvamento do espaço-tempo assim produzido será de tal modo radical que nada que esteja muito próximo à estrela, nem mesmo a luz, é capaz de escapar da sua atração gravitacional. Como nem mesmo a luz pode escapar dessas “estrelas comprimidas”, elas foram inicialmente denominadas estrelas escuras, ou frias. Posteriormente John Wheeler deu-lhes um nome mais atraente - buracos negros (black holes). Negros porque esses objetos não podem emitir luz, e buracos porque qualquer coisa que esteja muito perto cai dentro deles e nunca mais sai. ([7] p.98)

Para se ter uma noção de tal concentração de matéria em uma região esférica suficientemente pequena, uma estrela com a massa do Sol seria um buraco negro se o seu raio ao invés de medir 720.000 quilômetros, fosse comprimido à apenas 3 quilômetros. Uma colher de chá da matéria de tal estrela pesaria tanto quanto o monte Everest. Um planeta com a massa de Júpiter seria um buraco negro se o seu raio fosse comprimido até atingir 3 metros. Ao passo que para Terra se tornar um buraco negro seu raio teria que ser comprimido até atingir cerca de um centímetro.

Há indícios cada vez maiores de que existe um enorme buraco negro, de cerca de 2,5 milhões de vezes maior que o Sol no centro da nossa galáxia. Acredita-se também

⁵A Teoria da Gravitação proposta por Einstein ficou sendo mais conhecida como Teoria da Relatividade Geral, Teoria Relativística da Gravitação ou como Teoria da Gravitação de Einstein.

que os quasares⁶ presentes no núcleo de galáxias ativas possam ser buracos negros, cuja massa pode ser bilhões de vezes maior que a do Sol.

Todos os estudos hoje relacionados com estrelas de nêutrons, pulsares e buracos negros estão apoiados inteiramente nas soluções obtidas por Schwarzschild.

É importante resaltar que mesmo antes de Schwarzschild encontrar as soluções que revelaram a possível existência de buracos negros, idéia semelhante já havia sido contemplada e discutida em um artigo escrito no ano de 1783 pelo Rev. John Michell (1724 – 1793) à Royal Society.

Michell utilizou o conceito newtoniano de velocidade de escape e pensou na existência de um corpo tão massivo, no qual a velocidade de escape em sua superfície fosse igual a velocidade de escape da luz. Em seu artigo, Michell escreveu:

Se o semidiametro de uma esfera de mesma densidade como o Sol na proporção de cinco centenas para um, e supondo que a luz fosse atraída pela mesma força em proporção a sua [massa] como outros corpos, toda luz emitida por tal corpo faria o retorno para ele, por sua própria gravidade apropriada.

Acima Michell contemplou a existência de uma estrela 500 vezes o raio do Sol e da mesma densidade. Para tal objeto ele calculou que o campo gravitacional seria tão forte em sua superfície que a velocidade de escape excederia a velocidade da luz. Nesta estrela hipotética nem mesmo a luz poderia escapar e a estrela poderia ser invisível. Embora ele pensasse ser improvável, considerou a possibilidade que muitos objetos semelhantes poderiam estar presente no cosmos, sem que nós fôssemos capaz de vê-los. [8]

Treze anos mais tarde, o matemático Pierre Simon Laplace apresentou idéias semelhantes a de Michell em seu artigo “Exposition du Systeme du Monde”.

Contudo, experimentos realizados no início dos anos de 1800 colocavam em dúvida a teoria corpuscular da luz⁷ e apontavam a predominância da teoria ondulatória. De posse deste fato, foi pensado que a luz não era afetada pela gravidade. Assim a idéia de Michell sobre estrelas invisíveis acabou caindo no esquecimento. Foi preciso esperar mais de um século até o surgimento da Teoria Relativística da Gravitação e com ela os trabalhos de Schwarzschild, para em fim se obter uma prova científica das hipóteses apresentadas por Michell.

⁶Quasares são objetos extragaláticos extremamente luminosos e muito distantes. O nome vem de “*Quasi-Stellar Objects: QSO*”, e foram detectados primeiramente com rádio telescópios e, quando identificados no telescópio tinham uma aparência pontual de uma estrela.

⁷Nesta teoria a luz era considerada como um feixe de partículas ou “corpúsculos” emitidos por uma fonte de luz.

2.8 Modelos Cosmológicos

As equações da Teoria Relativística da Gravitação descrevem a natureza do espaço-tempo. O que elas poderiam dizer sobre a estrutura do próprio Universo? Ou seja, a estrutura do espaço-tempo sob o maior ponto de vista possível.

Albert Einstein, como tantos outros pesquisadores se dedicaram a essa questão. Em 1917, um ano após Einstein ter divulgado as equações da Teoria da Relatividade Geral em sua forma final, estas equações ainda não tinham soluções estáticas quando estudadas em escalas cosmológicas. Estas soluções previam que o Universo era dinâmico e que deveria estar, ou se expandindo ou se contraindo.

A conclusão de que o Universo deveria ser dinâmico e não estático desagradou Einstein. O problema com o modelo de universo estático era que a Teoria da Relatividade Geral mostrava que modelos contendo matéria não podiam ser estáticos. Se o Universo fosse estático desde o seu início, a atração gravitacional da matéria faria com que todos os corpos existentes colapsassem sobre si mesmos. Isso parecia inconsistente pois não havia qualquer razão que justificasse um espaço tão instável.

Einstein decidiu então modificar sua teoria a fim de obrigar a existência de uma solução cosmológica estática mas estável. Para isso, ele alterou as equações de campo da relatividade geral introduzindo um termo que foi chamado de constante cosmológica e representada pela letra grega Λ . Sua função era fornecer soluções cosmológicas estáticas estáveis. Essa constante cosmológica agia como uma força repulsiva que se opunha à ação da força gravitacional. Ajustando o valor dessa constante cosmológica era possível contrabalançar a ação da gravidade resultante de uma distribuição uniforme de matéria. Se essa constante fosse diferente de zero, o modelo estático com matéria não colapsaria sob sua própria gravidade.

Einstein considerava que essa constante cosmológica era somente um termo hipotético. A constante cosmológica não era exigida pela teoria e nem parecia natural sob o ponto de vista teórico. Einstein declarou que esse termo é necessário somente para o propósito de tornar possível uma distribuição estática de matéria.

Assim, o modelo proposto por Einstein para o Universo continha matéria uniformemente distribuída. A geometria do espaço era esférica, ou seja, o espaço era uniformemente curvado. Seu Universo era de natureza estática: não estava se alterando, nem expandindo e nem colapsando.

Em 1917, o astrônomo holandês Willem de Sitter (1872 – 1934) também propôs um modelo de universo completamente diferente daquele apresentado por Einstein. Para de Sitter, o Universo era isotrópico e, para ser estático, não podia conter qualquer quantidade de matéria. Esse modelo de universo poderia ter sido considerado uma mera curiosidade matemática pelos astrônomos pois exigia a não existência de matéria. No entanto, sabe-se que o Universo é preenchido por matéria na forma de nebulosas, estrelas, galáxias, etc. O modelo de de Sitter apresenta uma propriedade muito interessante. Se fosse jogado um punhado de partículas dentro desse Universo

estas se afastariam umas das outras. Isso foi interpretado como tendo alguma relação com os resultados de redshift obtidos por Slipher, e por muito tempo foi chamado de “efeito de Sitter”.

Assim, foi mostrado que a natureza estática do Universo de de Sitter era um artifício puramente matemático. Seu modelo de universo se comportava de modo estático somente devido ao fato de não conter matéria. A presença de matéria fazia com que exibisse suas características dinâmicas. O astrônomo norte americano Howard Percy Robertson (1903 – 1961) mostrou mais tarde que este modelo de universo era homogêneo e isotrópico, e que dessa forma era também espacialmente plano, infinito e estava se expandindo.

Uma distinção pode ser feita entre os modelos de universo propostos por Einstein e por de Sitter. O Universo de Einstein era “matéria sem movimento”, enquanto que o Universo de de Sitter era “movimento sem matéria”.

Em 1922, o matemático e meteorologista russo Alexander Alexandrovich Friedmann (1888 – 1925), ao passar em revisão todos os cálculos de Einstein, equação por equação, de súbito deparou-se com um erro de cálculo. O erro se encontrava justamente na equação que definia a estaticismo do Universo. Este erro era em uma passagem matemática. Einstein, dividia dois termos de uma equação por uma grandeza que em certas circunstâncias se igualava a zero. Ao fazer a divisão por zero, a equação tornava-se descontínua em tal ponto e todos os cálculos posteriores a este conduziam a um erro ainda maior.

Corrigindo os cálculos, Friedmann constatou que a equação original de Einstein sobre a gravitação era correta, não necessitando introduzir a constante de Repulsão Cósmica ou Constante Cosmológica.

Dessa forma, publicou um conjunto de soluções matemáticas possíveis das equações de campo da teoria relativística da gravitação. A análise dos resultados obtidos mostrava um comportamento não estático para o Universo. Ao contrário do que havia sido previsto por Einstein, Friedmann apresentava uma solução das equações relativísticas nas quais o Universo estava em expansão.

A importância do trabalho de Friedmann está em descrever espaços cujas geometrias possuem curvaturas positiva, zero e negativa. Isso foi feito uma década antes que o astrônomo norte americano Howard Robertson e seu companheiro Arthur Geoffrey Walker (1909 – 2001) publicassem os mesmos resultados.

Nem Einstein nem qualquer outro cientista teve qualquer interesse no trabalho apresentado por Friedmann. A maioria dos astrônomos continuavam a considerar que o universo real era estático.

O desprezo dos astrônomos era tanto com a descoberta de Friedmann, que mesmo em 1924, quando publicou novamente o seu trabalho *Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes* (Sobre a Possibilidade de um Universo com Espaço de Curvatura Negativa Constante), foi visto como uma questão puramente

teórica da relatividade sem qualquer interesse astronômico. Nem mesmo apareceu no levantamento anual de artigos científicos sobre tópicos de astronomia.

Ainda hoje, o trabalho pioneiro de Friedmann é desprezado por escritores, em particular norte americanos. Estes referem-se às soluções clássicas das equações de campo da teoria da relatividade geral, que descrevem um Universo homogêneo e isotrópico com sendo a métrica de Robertson-Walker. Ninguém se refere a isso como métrica de Friedmann e alguns poucos a chamam de métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker ou métrica FLRW.

2.9 Modelos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker para o Universo

A cosmologia estudada a partir das equações da relatividade geral tem a curvatura do espaço dada por:

$$K = \frac{k}{R^2},$$

onde k é a constante de curvatura e R o fator de escala do Universo. A constante de curvatura k tem sempre um dos três possíveis valores, ou seja, $k = 0$ ou $k = +1$ ou $k = -1$.

Se adotarmos o valor $k = 0$, o espaço-tempo que se expande é plano, infinito e não limitado. Este modelo de universo é o mais simples, e é conhecido como Universo de Friedmann de curvatura zero ou Universo de Einstein-de Sitter.

Considerando uma descrição newtoniana do Universo, esse modelo de Friedmann corresponderia a uma bola que se expande continuamente. Neste Universo as partículas presentes seguem órbitas parabólicas e têm velocidades iguais às suas velocidades de escape.

Se adotarmos o valor $k = +1$, o espaço-tempo que se expande é esférico, finito e não limitado. Este modelo de universo se expande a um tamanho máximo e então colapsa. Em uma descrição newtoniana do Universo, esse modelo de Friedmann corresponderia a uma bola que se expande e em seguida colapsa. Neste Universo, as partículas presentes seguem órbitas elípticas e têm velocidades menores do que suas velocidades de escape.

Por fim, se adotarmos o valor $k = -1$, o espaço-tempo que se expande é hiperbólico, infinito e não limitado. Em uma descrição newtoniana do Universo, esse modelo de Friedmann corresponderia a uma bola que se expande continuamente. Neste Universo, as partículas presentes seguem órbitas hiperbólicas e têm velocidades maiores do que suas velocidades de escape.

É importante observar que nos três casos descritos acima, a constante cosmológica é igual a zero, ou seja, $\Lambda = 0$.

Em 1927, poucos anos após a publicação do trabalho de Alexander Friedmann, que mostrava pela primeira vez um Universo em expansão, o astrônomo e físico belga,

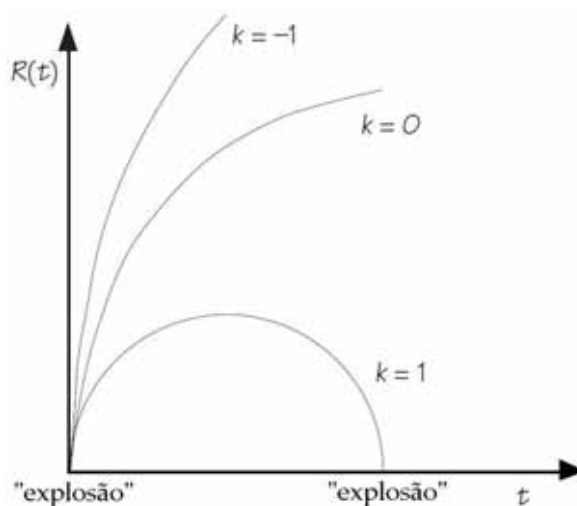


Figura 2.5: Todos os universos de Friedmann começam com uma explosão.

Georges Henri Édouard Lemaître (1894 – 1966), ao analisar e resolver as equações da relatividade geral chega às mesmas conclusões. Suas contribuições na época não causaram qualquer impacto nos meios científicos e foram rapidamente esquecidas, até mesmo por aqueles que leram o seu artigo.

Logo depois de ter tomado conhecimento da existência do artigo de Lemaître, de Sitter, em 1931, elogiou a “brilhante descoberta”, do universo em expansão. Einstein também confirmou que este trabalho se ajustava bem na Teoria da Relatividade Geral.

Lemaître avançou mais ainda em suas idéias, propondo que o Universo atual é formado pela evolução a partir de um átomo primitivo. Tal hipótese estipula que todo o Universo (não somente a matéria, mas também o próprio espaço) estava comprimido num único átomo chamado de átomo primordial ou ovo cósmico. Os estudiosos afirmam que a matéria comprimida naquele átomo se fragmentou numa quantidade descomunal de pedaços, e cada um destes pedaços acabaram se fragmentando em outros menores, assim sucessivamente até chegarem aos átomos atuais numa gigantesca fissão nuclear. Por esse motivo, ele é considerado por muitos o pai do Big Bang. Dá início a uma nova era na Cosmologia.

A importante descoberta do Universo em expansão levaria a uma visão diferente da cosmologia. Por esse motivo, Lemaître e Friedmann são considerados pais da cosmologia moderna.

Essa descoberta deu origem ao seguinte raciocínio: se o Universo está se expandindo, então avançando para o futuro, daqui a milhões de anos as galáxias estarão mais distantes umas das outras e o Universo será maior. Mas, retrocedendo no tempo, milhões de anos atrás, veremos o contrário: as galáxias mais e mais próximas entre si e o Universo cada vez menor, até se chegar a um ponto em que todas as galáxias e estrelas se fundem. É nesse ponto que o Universo teve origem.

Surge assim uma nova pergunta. O Universo era estático ou estava em expansão?

Em 1929, Hubble mostrou que, ao contrário do que se imaginava, o Universo estava em expansão. Medindo o deslocamento para o vermelho nas linhas espectrais das galáxias observadas por Milton La Salle Humason (1891-1972), e medindo ele próprio suas distâncias, Hubble descobriu que as galáxias estavam se afastando com velocidades proporcionais à suas distâncias. Quanto mais distante a galáxia se encontrava, maior sua velocidade de afastamento. Este fato constituiu a primeira evidência para a expansão do Universo, já predita por Alexander Friedmann e Lemaître em anos anteriores.

O físico inglês Arthur Stanley Eddington não gostava da idéia de um modelo de Universo com origem em uma grande explosão, pois achava esteticamente desagradável. Em vez de adotar um começo abrupto para o Universo, Eddington apresentou, em 1930, um modelo no qual permitia que a evolução começasse em um instante de tempo infinito.

O Universo de Eddington existe inicialmente, durante um período infinito de tempo, de modo semelhante a um Universo estático. Então, como resultado de uma perturbação accidental, este Universo deixa de ser estático e começa a se expandir. O Universo existe inicialmente em um estado estático de Einstein e mais tarde muda seu comportamento para o estado de um Universo de de Sitter no qual a repulsão domina a gravidade. Desse modo, o Universo de Eddington junta os modelos discutidos por Einstein e de Sitter.

Em meados dos anos de 1930, Edward A. Milne (1896 – 1950) estabeleceu, na forma em que conhecemos hoje, o chamado princípio cosmológico. De acordo com esse princípio, dois observadores, que estejam acompanhando o movimento cosmológico, devem estar expostos à mesma interpretação do Universo. As propriedades observadas do Universo devem ser idênticas para ambos. O próprio Milne reconheceu que esse princípio é uma extensão da proposta de Einstein, segundo a qual as leis da natureza devem ser as mesmas para esses observadores. Na sua versão, não somente as leis são idênticas, mas a própria descrição da estrutura do Universo, feita pelos observadores, deve ser também a mesma.([3], p. 31-32)

Para impedir que os observadores tenham diferentes opiniões sobre a distribuição de massa do Universo, este deve ser homogêneo e uniforme em grandes escalas. Nas regiões visíveis pode se verificar que este fato ocorre. Contudo, nada se pode dizer das regiões não observáveis, ou seja, aquelas fora do nosso horizonte causal. Portanto, não se pode afirmar que este princípio cosmológico é válido para o Universo como um todo.

Milne construiu sua própria teoria do Universo conhecida como relatividade cinematográfica, na qual a gravidade não é incluída como uma suposição inicial. Baseando-se em um pequeno número de axiomas, tais como, o princípio cosmológico e as regras da relatividade especial, ele apresentou uma descrição do Universo que explicava a gravidade e outras leis da natureza. Ele fez também uma descrição do Universo em expansão. Seu modelo cosmológico é:

1. ou uma bolha finita que se expande a partir de um ponto, dentro de um universo estático, plano e vazio;
2. ou um universo que se expande, homogêneo, negativamente curvado e infinito.

As duas descrições, embora pareçam ser completamente diferentes, estão separadas apenas por uma mudança de coordenadas.

O Universo de Milne é incompatível com várias observações cosmológicas. Em particular, ele não prevê a radiação cósmica de fundo nem a abundância de elementos leves que são medidas no Universo.

O físico teórico russo George Gamow (1904 – 1968) desenvolveu um modelo para origem do Universo que tinha como base as observações de Hubble no que diz respeito ao afastamento das nebulosas extragaláticas. Ele acreditava que o Universo teve um princípio, e o entendimento de como foi este início alicerçava-se no estudo de sua expansão. Ele achava que, se as galáxias todas se afastavam uma das outras, tal fato deveria ser consequência de um fenômeno físico originário num passado distante que impulsionava as nebulosas a se deslocarem dessa forma.

Seu modelo previa que, se hoje as galáxias estão se afastando uma das outras é de se pensar que num passado remoto, elas estavam mais juntas e em certos momentos a densidade era tão grande que tudo explodiu.

Essa teoria foi chamada sarcasticamente de Big Bang por Fred Hoyle (1915 – 2001), defensor da Teoria do Estado Estacionário. A Teoria do Estado Estacionário foi proposta quase que simultaneamente por Fred Hoyle, Thomas Gold (1920 – 2004) e Hermann Bondi (1919, –2005), na tentativa de explicar como o Universo poderia ser eterno e essencialmente imutável, ainda que apresentando galáxias que se afastam umas das outras. A teoria apoiava-se na formação de matéria entre as galáxias de tempos em tempos. Mesmo que as galáxias se afastassem umas das outras, novas galáxias se desenvolveriam entre elas e encheriam o espaço deixado vago. O Universo resultante está em um estado estacionário da mesma forma que um rio que flui. As moléculas individuais de água movem-se, mas novas aparecem e o rio parece ser imutável.

No modelo proposto por Gamow, os cientistas falam em densidade, energia e massa infinitas, ou mais precisamente, que tendem matematicamente para o infinito. Por isso, consideram esta explosão uma singularidade, termo para designar um evento que não obedece a nenhuma das leis físicas que conhecemos. Tal fenômeno foi causado por algo que existia fora do tempo e do espaço. A física não conhece nada que possa existir fora do tempo e do espaço atuando como causa. Assim, a ciência só consegue explicar o Universo a partir das frações de segundo após a Grande Explosão.

O Big Bang não foi de fato uma grande explosão, mas sim uma grande expansão que originou o espaço e o tempo simultaneamente e esta expansão continua empurrando o espaço e o tempo para novas fronteiras.

Pode-se imaginar a expansão do Universo com uma analogia. Um bolo de nozes

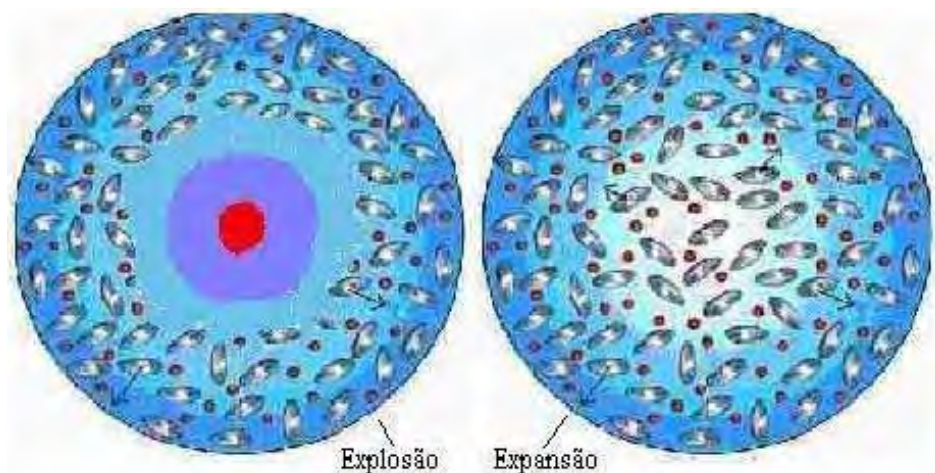


Figura 2.6: Dois modos de imaginar o Universo

crece quando é assado no forno. Sua massa se expande. Enquanto cresce, os pedacinhos de noz se movimentam, afastando-se uns dos outros. Eles não se movimentam através da massa, mas junto com a massa. Do mesmo modo, enquanto o Universo se expande, ganhando novas fronteiras, as galáxias e estrelas se movimentam, não através do espaço mas junto com o espaço. O que acontece é a expansão do próprio espaço-tempo, que leva consigo a matéria.

Em linha gerais, essa teoria tinha muitos pontos em comum com a teoria do átomo primitivo de Lemaître, que previa uma origem para o Universo numa posição em que seu raio era igual zero. Porém, Gamow não concordava com a idéia de um único átomo no momento primordial. Ele achava que nesse momento o que havia era uma superdensidade de partículas subatômicas em movimento muito rápido devido a alta temperatura reinante em tal estado de concentração. Nessas circunstâncias nem mesmo um núcleo de átomo existiria.

Dentro das previsões feitas pela teoria do Big Bang, a mais notável realmente era a de prever a existência de uma radiação cósmica residual na faixa das microondas que deveria permear todo o Universo. No entanto, durante muito tempo nenhum astrofísico se interessou pelo fato e a procura dessas radiações ficaram esquecidas.

Em 1964, os físicos norte americanos Robert Wilson (1941–) e Arno Penzias (1933–) estavam trabalhando no laboratório da Companhia Telefônica Bell (Estados Unidos) com uma grande antena para detectar sinais fracos de rádio usados para comunicação telefônica. Com esse equipamento, eles captaram um ruído que não desaparecia, apesar de todos os esforços. Eles verificaram também que o ruído vinha de todo o espaço com a mesma intensidade, independentemente da direção para onde eles apontassem a antena. Sem a menor idéia sobre a origem do ruído, Wilson e Penzias foram conversar com físicos da Universidade de Princeton. Os colegas reconheceram na descoberta o sinal da radiação cosmológica de fundo, um tipo de reverberação do Big Bang, pre-

vista em 1948 por George Gamow e colaboradores. Estes ruídos captados são os mais antigos já observados, e sua origem data de eras onde nem mesmo as longínquas galáxias haviam se formado. Tais observações deram um golpe mortal na teoria do estado estacionário. Tais considerações não provam que o Universo nasceu de uma Grande Explosão, mas descrevem com precisão uma grande categoria de observações.

Surgem assim as perguntas: Será o Big Bang a criação? Ou haverá um pré-Big Bang? Atualmente tem sido propostas teorias e modelos cosmológicos onde existe um pré-Big Bang. Por exemplo, a hipótese de um Universo anterior ao Big Bang (*pré-Big Bang*, ou *ricochete primordial*). Este Universo não teria estado sempre em expansão, mas uma ou várias fases de contração teriam ocorrido antes, possibilitando observar efeitos nas radiações de fundo. Tal modelo é cogitado por alguns teóricos da teoria de cordas, como o que precede a fase de crescimento exponencial.

Os cenários de Universo Eterno passam a ser considerados realistas pelos cosmólogos. ... Dentre estes cenários, o que possui maior consistência e embasamento teórico consiste no chamado Universo Eterno Dinâmico no qual uma fase de colapso gravitacional teria ocorrido. Assim, podemos sintetizar nosso conhecimento cosmológico sobre a situação atual da descrição do Universo, no que diz respeito à questão da singularidade inicial, nos seguintes pontos:

- *O modelo Big Bang ao identificar o começo do Universo com uma singularidade criou uma questão de princípio, inibindo a possibilidade de uma descrição completa e racional da Totalidade. Ao aceitar a existência de um momento de criação a um tempo finito ele impede a racionalidade do Universo. Consequentemente, esse modelo não pode sequer ser entendido como uma descrição científica da Totalidade do que existe;*
- *A possibilidade de que a expansão do Universo esteja acelerada, acoplada à idéia de que a gravitação é descrita pela Teoria da Relatividade Geral criou dificuldades formais de compatibilidade com a física que conduziram à hipótese de que um tipo especial de energia, denominada energia escura, que deveria existir e ser a principal responsável pela evolução do Universo;*
- *Essa energia escura viola as condições de aplicabilidade dos “teoremas de singularidade”. Isso significa que este tipo de matéria/energia permite configurações não singulares, isto é, a possibilidade de que o Universo não tenha um começo singular a um tempo finito;*
- *Um Universo Eterno Dinâmico, possuindo uma fase colapsante anterior à atual, descreve sua dinâmica para além do ponto de condensação máxima, o suposto Big Bang. A análise da evolução de estruturas materiais em grande escala - como, por exemplo, as galáxias - permite distinguir propriedades do Universo associadas a uma possível fase colapsante, anterior à atual fase de expansão. E, dessa forma, entender o que teria dado origem ao começo da atual fase de expansão pela qual passa o Universo. ([9], p.14-15)*

O homem teve no século XX sua visão de mundo transformada e percebeu a insignificância da Terra na vastidão do cosmos. Saiu de uma situação em que acreditava ser o centro do Universo para uma situação atual, em que se acredita que o Universo não tenha centro. Descobriu também que o tempo e o espaço são curvos e, que o Universo está se expandindo e que teve um começo no tempo.

3 Geometria Riemanniana

Neste capítulo é feito um relato sobre a história da Geometria Diferencial e em seguida é apresentado um estudo introdutório sobre a noção de curvatura de curvas em $\mathbb{R}^n$ e de superfícies em $\mathbb{R}^3$. Um estudo sobre variedades diferenciáveis e tensores será apresentado no final do capítulo.

3.1 História da Geometria Diferencial

A história da geometria moderna é constituída por três fases distintas: a geometria antiga (sistematizada por Euclides), a geometria analítica (Fermat e Descartes no século XVII), e por fim a geometria diferencial (tempos modernos).

A história da geometria diferencial inicia-se com o estudo de curvas. Noções como retas tangentes e análise das propriedades da curvatura de curvas são encontradas desde os gregos Aristóteles, Arquimedes (cerca de 287 – cerca de 212 a.C.), Euclides (cerca de 325 – cerca de 265 a.C), entre outros. Contudo, poucos resultados foram alcançados até a invenção do cálculo diferencial e integral no século XVII.

Curvatura é tudo o que é necessário para se definir uma curva (a menos de movimentos rígidos). Este fato chamou a atenção de vários matemáticos na Grécia Antiga. Havendo uma distinção das curvas gregas clássicas, a reta (não possui curvatura ou curvatura zero) e o círculo (mesma curvatura em todos os pontos).

Apolônio de Perga (cerca de 262 – cerca de 190 a.C), fez descobertas significantes relacionadas ao conceito de curvatura. Uma de suas descobertas foi que em cada ponto de uma seção cônica existe exatamente uma reta normal, resultado que posteriormente mostraria-se de grande importância para o estudo de curvas. Em seu livro V de *Seções Cônicas* são encontrados os conceitos iniciais sobre evolutas e centros de osculação, que estão intimamente ligados à curvatura. Apolônio também aplicou métodos para encontrar raios de curvatura que foram semelhantes aos métodos usados por Newton e Huygens dois mil anos mais tarde. Mas tanto Apolônio quanto seus contemporâneos estavam limitados pela Matemática da época. Seus trabalhos sobre curvaturas pouco avançaram. Não existe um grande avanço no estudo de curvas até o século XIV, quando Nicolau de Oresme fez importantes contribuições. É creditado a Nicolau como a primeira pessoa a “desenhar”, um gráfico. Seu trabalho é visto por muitos historiadores

como sendo uma tentativa prematura da geometria em coordenada (uma unificação entre geometria e a álgebra). Ele também observou que a curvatura de um círculo é uniforme e passou a propor que sua curvatura é proporcional ao inverso multiplicativo de seu raio. Seus trabalhos despertaram o interesse dos matemáticos em encontrar a curvatura de uma curva geral.

Quase três séculos mais tarde, Kepler fez contribuições indiretas para teoria de curvatura ao generalizar as soluções para o problema de Alhazin. Ele também parece ter sido o primeiro a desenvolver métodos para a investigação do grau de torção de uma curva.

O século XVII proporciona grande avanço para a Matemática de um modo geral, e em particular ao estudo de curvas. Os franceses Fermat (1601 – 1665) e Descartes desenvolvem o método das coordenadas ou geometria analítica. Este método possibilita descrever curvas geométricas gerais por meio de equações algébricas. O alemão Gottfried Leibniz (1646 – 1716) e o inglês Isaac Newton descobrem os algoritmos do cálculo infinitesimal, permitindo o estudo de curvas e superfícies através de suas propriedades diferenciais. Os conceitos de curvatura de uma curva plana¹ e círculo osculador já eram conhecidos por Newton e Leibniz apesar do precursor do assunto, o matemático alemão Christian Huygens (1629 – 1695), não conhecer o Cálculo. No ano de 1673, Huygens publicou um trabalho sobre curvas planas, no qual introduz os conceitos de involuta e evoluta de uma curva, motivado provavelmente pelo seu grande interesse em pêndulos e relógios. Usando o fato de que a cicloide é uma tautócrona² e idéias sobre infinitesimais, Huygens inventa o pêndulo cicloidal. Este tipo de pêndulo conservará seu período mesmo quando sua amplitude diminuir como tempo. O pêndulo de Huygens é uma aplicação prática de curvatura e serviu para muitos matemáticos como motivação para futuras investigações.

No século XVIII muitos livros textos de Cálculo foram escritos e muitos trataram do assunto de curvatura. Thomas Simpson (1710 – 1761) em seu livro sobre *Method of Fluxions* lidou com o assunto de curvatura. Na seção V (*The Use of Fluxions in Determining the Radii of Curvature, and the Evolute of Curves*), ele descreveu a sequência de construção de evolutas que foi desenvolvida por Huygens.

Durante o século XVIII até o início do século XIX desenvolvem-se os fundamentos da teoria de curvas e superfícies mergulhadas no espaço tridimensional. Em 1731, Alexis Clairaut (1713 – 1765) estuda curvas no espaço tridimensional limitando-se apenas à propriedades de primeira ordem (que envolvem apenas as derivadas de primeira ordem e retas tangentes). Gaspard Monge (1746 – 1818) em 1775, discute os conceitos de

¹A curvatura de uma curva plana em um ponto da curva é uma medida numérica de quanto a curva se afasta de ser uma reta numa vizinhança daquele ponto: é a taxa de variação naquele ponto da direção tangente à curva em relação ao comprimento de arco.

²O nome tautócrona vem do grego *tautos* (mesmo) e *chronos* (tempo). Esta curva faz com que um corpo em condições ideais (sujeito apenas a ação da gravidade e restrito ao percurso da curva) atinja o ponto baixo da curva após um intervalo de tempo que independa da altura em que foi solto.

curvatura e torção³ de uma curva espacial.

A transição da teoria de curvas para a teoria de superfícies se encontra no problema geodésico, isto é, o problema de se encontrar o caminho mais curto entre dois pontos de uma superfície. Os matemáticos do século XVIII não se interessavam em demonstrar a existência de tal caminho. Eles se preocupavam apenas em determinar a caracterização geométrica da curva que teria tal propriedade. Trabalharam neste problema, Jacobi Bernoulli (1654 – 1705) e seu irmão Johannes Bernoulli (1667 – 1748), que forneceram soluções corretas. A solução proposta por Johannes era de mais fácil compreensão, enquanto a proposta por Jacobi era mais complexa e se mostrava mais geral.

Leonhard Euler (1707 – 1783), aluno de Johannes Bernoulli fez contribuições importantes à Geometria Diferencial. Talvez a maior tenha sido o estudo de curvatura das seções planas de uma superfície. Em 1772, Euler discute sobre o problema de se determinar quando uma superfície pode ser desenvolvida isometricamente (sem distorcê-la) sobre um plano. Ele descobre que a condição necessária para a ocorrência de tal fato é que a superfície seja regrada (isto é, folheada por retas). Ele fez uma observação significativa sobre a teoria de superfícies. Mostrando o

... fato das coordenadas (x, y, z) dos pontos de uma superfície serem funções de duas variáveis independentes. É curioso notar que nem ele nem seus contemporâneos seguiram essa idéia e estudaram superfícies através da representação das coordenadas x, y, z em termos de funções de duas variáveis [10].

Euler também formulou uma expressão para encontrar o raio de curvatura dada por:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2}}$$

Em 1826, Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) faz melhorias significativas para a Geometria Diferencial. Em seu *Leçons sur l'application du calcul infinitésimal à la géométrie*, Cauchy introduz novos métodos, sistematiza e esclarece diversos cálculos feitos por seus antecessores. Em particular, ele aprimora o trabalho de Monge sobre curvatura k e torção τ de uma curva espacial obtendo as fórmulas hoje conhecidas como de *Frenet-Serret*, que expressam o comportamento local da curva em função de k e τ em relação a um sistema de coordenadas móvel.

As fórmulas de *Frenet-Serret* foram redescobertas mais tarde independentemente por Jean Frenet (1816 – 1900) e Joseph Serret (1819 – 1885), que publicaram seus trabalhos em 1847 e 1850 respectivamente.

Os teoremas de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais devido a Cauchy permitem mostrar que as funções k e τ determinam completamente a curva, a menos de um movimento rígido do espaço. Cauchy também fez a importante observação

³A torção em um ponto de uma curva mergulhada no espaço é uma medida numérica de quanto a curva se afasta de estar contida em um plano numa vizinhança daquele ponto.

de que $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ deveria ser escrita mais convenientemente como:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Este foi um fato de importante distinção não apenas para Geometria Diferencial, mas também para o Cálculo de forma geral.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) trouxe a Geometria Diferencial para um novo nível. Gauss é conhecido por seus trabalhos sobre a teoria de superfícies.

Por volta de 1816, Gauss trabalhou fazendo um levantamento topográfico de certas regiões na Alemanha, uma tentativa do que chamaríamos hoje de levantamento geodésico. Este trabalho tem por objetivo medir a distância entre cidades e outros pontos de referência reunindo-os em um mapa. Gauss se ocupou deste trabalho por vários anos e o conduziu às idéias de sua obra *Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas*, publicada em 1827.

Como comentado anteriormente,

... Euler havia percebido que as coordenadas x, y, z de um ponto de uma superfície podem ser consideradas como funções de duas variáveis independentes u, v , mas é Gauss quem utiliza tal representação paramétrica sistematicamente. As variáveis u e v são chamadas de “coordenadas curvilíneas”, sobre a superfície. Gauss introduz a forma diferencial quadrática ds^2 , hoje conhecida como primeira forma fundamental⁴, que essencialmente exprime as distâncias sobre a superfície, e escreve ds^2 em termos de três funções E, F e G de u e v o que lhe permite escrever equações para as curvas geodésicas. ... Inspirado por seus trabalhos em Astronomia e Geodesia, ele introduz a noção de “representação esférica”, de uma superfície, hoje conhecida como aplicação de Gauss⁵. O estudo dessa representação o leva a definir a “medida de curvatura”, da superfície em P , hoje conhecida como curvatura gaussiana. A fim de calcular a curvatura gaussiana através das coordenadas curvilíneas, ele introduziu uma outra forma diferencial quadrática, derivada da aplicação de Gauss e que hoje é conhecida como segunda forma fundamental⁶. Um de seus maiores resultados é o famoso *Theorema Egregium*, que afirma que a curvatura gaussiana, apesar de ter sido definida através da aplicação de Gauss e portanto parecer depender de como a superfície está mergulhada no espaço, depende somente da primeira forma fundamental e é portanto invariante se transformarmos a superfície sobre outra superfície (ou a deformarmos) isometricamente (isto é, sem alterar distâncias sobre ela). ... O ponto crucial envolvido no *Theorema Egregium* e em outras realizações de Gauss é o conceito

⁴A primeira forma fundamental exprime comprimento de curvas em superfícies, ângulos entre vetores tangentes e áreas de regiões da superfície.

⁵Esta é a aplicação que associa a cada ponto P da superfície o ponto P' da esfera de raio unitário tal que o raio OP' é paralelo à normal à superfície em P .

⁶A segunda forma fundamental exprime a curvatura de curvas contidas na superfície.

de geometria intrínseca. Ele mostrou como estudar a geometria de uma superfície operando exclusivamente na própria superfície, sem se preocupar com o espaço à sua volta onde ela se encontra [10].

Os trabalhos de Gauss tiveram muitos seguidores destacando Pierre Bonnet (1819–1892), Carl Jacobi (1804–1851), Ferdinand Minding (1806–1885), Gaspare Mainardi (1800–1879) e Delfino Codazzi (1824–1873). Em 1839, Minding mostrou que duas superfícies com mesma curvatura gaussiana constante podem ser transformadas isometricamente uma sobre a outra. Gaspare Mainardi e Delfino Codazzi exprimiram as condições de compatibilidade entre os coeficientes das duas formas fundamentais e suas derivadas em 1856 e 1867 respectivamente. Bonnet demonstrou, em 1867, que essas condições, hoje conhecidas como *equações de Gauss Codazzi- Mainardi*, são suficientes para que exista uma superfície com essas formas fundamentais dadas.

Em 10 de julho de 1854, Bernhard Riemann (1826–1860) realizou uma conferência para os docentes da Faculdade de Filosofia de Göttingen com o intuito de cumprir os requisitos para obtenção de um cargo em Göttingen.

Riemann ofereceu três possíveis tópicos para esta conferência. Para os dois primeiros ele estava bem preparado. Mas contrariamente a prática usual, Gauss, que era chefe do departamento, escolheu o terceiro tópico no qual Riemann tinha pouco conhecimento.

Durante várias semanas Riemann ficou paralisado provavelmente pela pressão. Finalmente, quando a primavera chegou, ele se recompôs e em sete semanas elaborou sua palestra. O resultado foi talvez a mais importante conferência científica proferida, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, (“Sobre as hipóteses em que a geometria se baseia”) era o tema preferido de Gauss durante quase toda a sua vida.

Com esta conferência Riemann dá início a um novo estágio no desenvolvimento da Geometria Diferencial. Este texto foi publicado após sua morte em 1868 e repercutiu imediatamente entre os matemáticos que trabalhavam com Geometria Diferencial.

[Riemann] introduziu o conceito de variedade n -dimensional de pontos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que generaliza a idéia de superfície bidimensional tanto no sentido de considerar um número maior de dimensões quanto no sentido de descartar a necessidade do objeto estar mergulhado em algum espaço circundante. Em seguida introduziu uma forma diferencial quadrática (hoje chamada de métrica riemanniana) na variedade que generaliza a primeira forma fundamental das superfícies e define as distâncias sobre ela. Esse é um dos pontos essenciais de sua visão: a separação entre os conceitos do conjunto de pontos (a variedade n -dimensional) e as possíveis métricas que podem ser definidas sobre ele. Dessa maneira, Riemann aprofundou brutalmente o conceito de geometria intrínseca da teoria de superfícies de Gauss. Finalmente, ele ainda introduziu a curvatura riemanniana (que generaliza a curvatura gaussiana) e discutiu o caso de variedades riemannianas

de curvatura constante. O trabalho de Riemann não apenas unificou a Geometria Euclidea e a não-Euclidea, mas representou uma vasta generalização dessas geometrias [10].

Os trabalhos de Riemann continuaram com Elwin Christoffel. Como o objetivo de generalizar o problema de superposição de superfícies, Christoffel introduz o que hoje é conhecido por *símbolos de Christoffel* e o *tensor de curvatura de Riemann-Christoffel*.

A obra de Riemann sobre geometria diferencial tornou-se a pedra angular da teoria da relatividade geral de Einstein. Se Riemann não tivesse sido tão imprudente em incluir a geometria na sua lista de tópicos, ou se Gauss não tivesse sido tão ousado a ponto de escolhê-la, o instrumento matemático que Einstein precisou para a sua revolução na física não teria existido [6], p.146.

Na história da Matemática, a análise da curvatura de curvas, foi um exemplo fundamental de beleza e um indicador de seu desenvolvimento. Como foi visto, o tratamento matemático da curvatura sofreu uma drástica metamorfose ao longo da história. A Geometria Diferencial começou com vagas definições e conceitos simples, e se desenvolveu nesta poderosa e importante ferramenta matemática. Provavelmente o salto principal para seu desenvolvimento se deu quando o Cálculo foi inventado no século XVII.

3.2 Curvas em $\mathbb{R}^n$

Seja o conjunto $\mathbb{R}^n$, formado por todas as n-uplas ordenadas de números reais, ou seja,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n\},$$

onde $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é chamado ponto do conjunto $\mathbb{R}^n$ e x_i é chamado i-ésima coordenada do ponto.

No conjunto $\mathbb{R}^n$ são definidas as operações binárias de adição:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\longmapsto x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \end{aligned}$$

e de multiplicação por escalar:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\alpha, x) &\longmapsto \alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \end{aligned}$$

O conjunto $\mathbb{R}^n$ munido das operações de adição e multiplicação satisfaz os axiomas da definição de espaço vetorial de dimensão n , ou seja,

(A₁) $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ (propriedade associativa).

(A₂) $x + y = y + x, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (propriedade comutativa).

(A₃) Existe em $\mathbb{R}^n$ um vetor, denominado vetor nulo e denotado por 0 tal que $x + 0 = x = 0 + x, \forall x \in \mathbb{R}^n$ (existência do elemento nulo).

(A₄) A cada vetor $x \in \mathbb{R}^n$, existe um vetor em $\mathbb{R}^n$, denotado por $-x$ tal que $x + (-x) = 0 = (-x) + x$ (existência do elemento oposto).

(M₁) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(M₂) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(M₃) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(M₄) $1.x = x, \forall x \in \mathbb{R}^n$ (onde 1 é o elemento identidade de $\mathbb{R}$).

Os elementos de $\mathbb{R}^n$ são chamados de vetores.

Define-se como produto interno usual a aplicação,

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n, \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(P₁) $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

(P₂) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

(P₃) $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle, \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$ e $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

O conjunto $\mathbb{R}^n$ munido deste produto interno define a norma euclidiana.

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades.

(N₁) $\|x\| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(N₂) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(N₃) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$, chamada de *desigualdade triangular*.

A distância entre dois pontos x e y de $\mathbb{R}^n$ é definida como:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Se x e $y \in \mathbb{R}^n$ são vetores não nulos, o ângulo θ entre x e y , pode ser definido como:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

satisfazendo $0 \leq \theta \leq \pi$.

3.2.1 Curvas Parametrizadas

Definição 3.1. Uma curva parametrizada diferenciável em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação diferencial α de classe C^k de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^n$, ou seja,

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \end{aligned}$$

onde as funções $x_i = x_i(t), \forall i = 1, 2, \dots, n$ são diferenciáveis de classe C^k .

A função $x_i : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita de classe C^k se e somente se, todas as derivadas de ordem k (inclusive) existem e a de ordem k é contínua no intervalo I . Escreve-se $x_i \in C^k$. Quando $x_i \in C^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$ diz-se que x_i é de classe C^∞ .

A variável t é chamada de parâmetro da curva. O conjunto imagem da função $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, isto é, $Im(\alpha) = \{\alpha(t) \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}\}$ é chamado de traço da curva α .

Os pontos $\alpha(t)$ unidos no sentido de crescimento da variável t definem o sentido positivo de percurso do traço da curva.

3.2.2 Vetor tangente e curva regular

Definição 3.2. Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva parametrizada diferenciável que a cada $t \in I$ associa $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$. O vetor

$$\alpha'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t)), \quad (3.1)$$

é chamado de vetor tangente a α em t .

Definição 3.3. Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita regular, se e somente se $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in I$.

3.2.3 Comprimento de arco de uma curva

Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular. Seja a e b dois pontos distintos do intervalo I . Seja P uma partição de $[a, b]$ dada por $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = b$. Ligando por segmentos de retas os pontos $\alpha(t_i), \forall t_i \in P$, obtém-se uma linha poligonal chamada *poligonal inscrita à curva* entre $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$.

Considere $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ e $P_k = (x_1(t_k), \dots, x_n(t_k))$ o ponto de α correspondente a t_k . O comprimento do segmento $P_{k-1}P_k$ é dado por,

$$d(P_{k-1}, P_k) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i(t_k) - x_i(t_{k-1}))^2}. \quad (3.2)$$

Unindo o ponto P_0 com P_1 e assim sucessivamente até P_n , obtém-se uma linha poligonal L_p , cujo comprimento é dado por,

$$||L_p|| = \sum_{k=1}^n d(P_{k-1}, P_k). \quad (3.3)$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio⁷ para as funções coordenadas $x_i : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_i = x_i(t), \forall i = 1, 2, \dots, n$ no intervalo $[t_{k-1}, t_k] \subset I$ tem-se que existem valores reais $\bar{t}_k$ no intervalo aberto (t_{k-1}, t_k) , tais que;

⁷**Teorema do Valor Médio:** Seja $f : [t_{k-1}, t_k] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (t_{k-1}, t_k) então existe $\bar{t}_k \in (t_{k-1}, t_k)$ tal que $f'(\bar{t}_k) = \frac{f(t_{k-1}) - f(t_k)}{(t_{k-1} - t_k)}$.

$$x'_i(\bar{t}_k) = \frac{x_i(t_k) - x_i(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Tomando, $t_k - t_{k-1} = \Delta t_k$, tem-se que

$$x_i(t_k) - x_i(t_{k-1}) = x'_i(\bar{t}_k) \Delta t_k, \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.4)$$

Substituindo (3.4) em (3.2), obtém-se

$$\begin{aligned} d(P_{k-1}, P_k) &= \sqrt{(x'_1(\bar{t}_k) \Delta t_k)^2 + (x'_2(\bar{t}_k) \Delta t_k)^2 + \dots + (x'_n(\bar{t}_k) \Delta t_k)^2} \\ &= \sqrt{(x'_1(\bar{t}_k))^2 + (x'_2(\bar{t}_k))^2 + \dots + (x'_n(\bar{t}_k))^2} \Delta t_k \\ &= \sqrt{(x'_1(\bar{t}_k))^2 + (x'_2(\bar{t}_k))^2 + \dots + (x'_n(\bar{t}_k))^2} |\Delta t_k| \\ &= \sqrt{(x'_1(\bar{t}_k))^2 + (x'_2(\bar{t}_k))^2 + \dots + (x'_n(\bar{t}_k))^2} \Delta t_k \end{aligned}$$

Segue assim que,

$$\|L_p\| = \sum_{k=1}^n d(P_{k-1}, P_k) = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x'_1(\bar{t}_k))^2 + (x'_2(\bar{t}_k))^2 + \dots + (x'_n(\bar{t}_k))^2} \Delta t_k$$

Supondo α' contínua em $[a, b]$ tem-se que $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(x'_1(t))^2 + \dots + (x'_n(t))^2}$ será também contínua em $[a, b]$ e, portanto, integrável neste intervalo.

O comprimento L da curva α de P_0 a P_n é definido por

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\|\max \Delta t_k\| \rightarrow 0} \|L_p\| \\ &= \lim_{\|\max \Delta t_k\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{(x'_1(\bar{t}_k))^2 + (x'_2(\bar{t}_k))^2 + \dots + (x'_n(\bar{t}_k))^2} \Delta t_k \\ &= \int_a^b \sqrt{(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2 + \dots + (x'_n(t))^2} dt \end{aligned}$$

Logo, o comprimento de arco da curva α de a até b é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'_1(t))^2 + (x'_2(t))^2 + \dots + (x'_n(t))^2} dt = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt. \quad (3.5)$$

A aplicação $s(t) = \int_a^t \|\alpha'(s)\| ds$ é denominada *função comprimento de arco* da curva α a partir de a . Esta função é de classe C^∞ pois α é uma curva regular.

Definição 3.4. Uma curva regular $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita parametrizada pelo comprimento de arco, se para cada $t_0, t_1 \in I$ com $t_0 \leq t_1$, o comprimento do arco da curva α de t_0 até t_1 é igual $t_1 - t_0$. Isto é,

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = t_1 - t_0 \quad (3.6)$$

Proposição 3.1. *Uma curva regular $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e somente se, $\|\alpha'(t)\| = 1, \forall t \in I$.*

Demonstração. Suponha α parametrizada pelo comprimento de arco e fixe $t_0 \in I$. Considere a função $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ que para cada $t \in I$ associa $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du$.

Se $t_0 \leq t$, então

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = t - t_0.$$

Se $t_0 \geq t$, então

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = - \int_t^{t_0} \|\alpha'(u)\| du = -(t_0 - t) = t - t_0.$$

Logo, para todo $t \in I$, $s(t) = t - t_0$, donde $s'(t) = 1$. Como $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$, pode-se concluir que, $\|\alpha'(t)\| = 1, \forall t \in I$.

Reciprocamente, se $\|\alpha'(t)\| = 1, \forall t \in I$ então, $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = t - t_0$. Logo, $s(t) = t - t_0, \forall t \in I$.

Portanto, α está parametrizada pelo comprimento de arco. $\square$

Teorema 3.1. *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva regular e $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$ a função comprimento de arco de α a partir de t_0 . Então existe a função inversa h de s , definida no intervalo aberto $J = s(I)$ com $\beta = \alpha \circ h$ uma reparametrização de α , onde β está parametrizada comprimento de arco.*

Demonstração. Seja α uma curva regular com

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du \tag{3.7}$$

a função comprimento de arco. Derivando membro a membro a equação (3.7), obtém-se

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0, \forall t > t_0.$$

Logo, s é uma função estritamente crescente. Segue que, existe a função inversa de s denotada por $h : J \rightarrow I$ com $h(s(t)) = t, \forall t \in I$. Derivando $h(s(t)) = t$ em relação a t , tem-se o seguinte resultado,

$$\begin{aligned} \frac{dh}{ds} \frac{ds}{dt} &= 1, \forall t \in I \\ \frac{dh}{ds} &= \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} > 0, \forall t \in I. \end{aligned}$$

Como $s = s(t), h'(s) \neq 0, \forall s \in J$. Pode-se concluir que $\beta(s) = (\alpha \circ h)(s), s \in J$, é uma reparametrização de α e,

$$\left\| \frac{d\beta}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \frac{dh}{ds} \right\| = \left\| \alpha'(t) \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \right\| = \left| \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \right| \|\alpha'(t)\| = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \|\alpha'(t)\| = 1, \forall s \in J.$$

Portanto, β é uma reparametrização de α por h e pela proposição 3.1, β está parametrizada pelo comprimento de arco. $\square$

São utilizadas as seguintes notações para designar:

$$\begin{aligned} \alpha(t), & \quad \text{para denotar uma parametrização regular arbitrária.} \\ \alpha(s), & \quad \text{para denotar uma parametrização por comprimento de arco.} \\ \frac{d\alpha}{dt} = \alpha'(t), & \quad \text{para denotar o vetor tangente.} \\ \frac{d\alpha}{ds} = \alpha'(s), & \quad \text{para denotar o vetor tangente unitário.} \end{aligned}$$

3.2.4 Curvas de Frenet

Definição 3.5. *Seja uma curva regular em $\mathbb{R}^n$ parametrizada pelo comprimento de arco e n vezes continuamente diferenciável. Então α é chamada curva de Frenet, se em todo ponto os vetores $c', c'', \dots, c^{(n-1)}$ são linearmente independentes. O n -referencial de Frenet $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é então unicamente determinado pelas seguintes condições:*

- (i) $e_1, e_2, \dots, e_n$ são ortonormais e orientados positivamente.
- (ii) Para todo $k = 1, 2, \dots, n$ tem-se que $\text{lin}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \text{lin}(c', c'', \dots, c^{(k)})$, onde lin denota o gerador linear.
- (iii) $\langle c^{(k)}, e_k \rangle > 0$ para $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Obtém-se $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ de $c', c'', \dots, c^{(n-1)}$ por meio do processo de ortogonalização de Gram-Schmidt como segue abaixo:

$$\begin{aligned} e_1 &= c', \\ e_2 &= \frac{c''}{\|c''\|}, \\ &\vdots \\ w_j &= (c^{(j)} - \sum_{i=1}^{j-1} \langle c^{(j)}, e_i \rangle e_i) \quad \text{e} \quad e_j = \frac{w_j}{\|w_j\|} \\ w_{n-1} &= (c^{(n-1)} - \sum_{i=1}^{n-2} \langle c^{(n-1)}, e_i \rangle e_i) \quad \text{e} \quad e_{n-1} = \frac{w_{n-1}}{\|w_{n-1}\|}. \end{aligned}$$

o vetor e_n é unicamente determinado pela condição (i) da definição 3.5.

3.2.5 As equações de Frenet

Teorema 3.2. (Equações de Frenet em $\mathbb{R}^n$). *Seja α uma curva de Frenet em $\mathbb{R}^n$ com o n -referencial de Frenet $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Então existem funções $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$, todas $(n-1-i)$ vezes continuamente diferenciáveis definidas nessa curva com*

$k_1, k_2, \dots, k_{n-2} > 0$. Assim,

$$\begin{bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & -k_2 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & k_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -k_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

onde ' denota a derivada em relação ao parâmetro da curva α e k_i é chamada i -ésima curvatura de Frenet. Estas equações são chamadas de equações de Frenet.

Demonstração. Considere as componentes de $e'_i = \sum_{j=1}^n \langle e'_i, e_j \rangle e_j$ no n -referencial de Frenet. Para todo $i \leq n-1$, e_i está no subespaço linear gerado pelos vetores $c', c'', \dots, c^{(i)}$. Deste modo, e'_i está no subespaço gerado por $c', c'', \dots, c^{(i+1)}$. Este subespaço é o mesmo gerado por $e_1, e_2, \dots, e_{i+1}$. Assim,

$$\langle e'_i, e_{i+2} \rangle = \langle e'_i, e_{i+3} \rangle = \cdots = \langle e'_i, e_n \rangle = 0$$

Denote por $k_i = \langle e'_i, e_{i+1} \rangle$. Então, tem-se que $k_1, k_2, \dots, k_{n-2}$ são todos positivos uma vez que, por construção do n -referencial de Frenet, o sinal de $\langle e'_i, e_{i+1} \rangle$ é, para $i \leq n-2$, o mesmo para $\langle c^{(i+1)}, e_{i+1} \rangle$. A anti-simetria da matriz é uma consequência da equação

$$0 = \langle e_i, e_j \rangle' = \langle e'_i, e_j \rangle + \langle e_i, e'_j \rangle.$$

□

Uma consequência imediata do teorema 3.2 é que uma curva de Frenet em $\mathbb{R}^n$ está contida em um hiperplano se, e somente se, $k_{n-1} \equiv 0$. Isto equivale a exigir que e_n seja um vetor constante o qual é perpendicular a este hiperplano. Portanto, k_{n-1} é também chamada de *torção*.

Exemplo 3.1. Curvas no espaço. Para $n = 3$ uma curva regular três vezes continuamente diferenciável é chamada uma *curva de Frenet*, se $\alpha'' \neq 0$ em todos os pontos.

O referencial ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formado por $\{e_1(s), e_2(s), e_3(s)\}$ é chamado triedro de Frenet da curva α em s , e é definido por

$$\begin{aligned} e_1(s) &= \alpha'(s) && \text{vetor tangente} \\ e_2(s) &= \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} && \text{vetor normal principal} \\ e_3(s) &= e_1(s) \times e_2(s) && \text{vetor binormal} \end{aligned}$$

A função $k(s) = \|\alpha''(s)\|$ é chamada *curvatura* de uma curva α . Pode-se obter as equações derivadas $e'_1(s), e'_2(s), e'_3(s)$ como combinação linear de $e_1(s), e_2(s), e_3(s)$.

Como segue abaixo:

$$\begin{aligned}
 e'_1(s) &= \langle e'_1(s), e_1(s) \rangle e_1(s) + \langle e'_1(s), e_2(s) \rangle e_2(s) + \langle e'_1(s), e_3(s) \rangle e_3(s) \\
 &= \langle \|\alpha''(s)\| e_2(s), e_2(s) \rangle + \langle \|\alpha''(s)\| e_3(s), e_3(s) \rangle \\
 &= \|\alpha''(s)\| e_2(s) \\
 &= k(s) e_2(s).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e'_2(s) &= \langle e'_2(s), e_1(s) \rangle e_1(s) + \langle e'_2(s), e_2(s) \rangle e_2(s) + \langle e'_2(s), e_3(s) \rangle e_3(s) \\
 &= -\langle e_2(s), e'_1(s) \rangle e_1(s) + \langle e'_2(s), e_3(s) \rangle e_3(s) \\
 &= -\langle e_2(s), k(s) e_2(s) \rangle + \tau(s) e_3(s) \\
 &= -k(s) e_1(s) + \tau(s) e_3(s).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e'_3(s) &= \langle e'_3(s), e_1(s) \rangle e_1(s) + \langle e'_3(s), e_2(s) \rangle e_2(s) + \langle e'_3(s), e_3(s) \rangle e'_3(s) \\
 &= -\langle e_3(s), e'_1(s) \rangle e_1(s) - \langle e'_2(s), e_3(s) \rangle e_2(s) \\
 &= -\langle e_3(s), k(s) e_2(s) \rangle e_1(s) - \tau(s) e_2(s) \\
 &= -\tau(s) e_2(s).
 \end{aligned}$$

A função $\tau(s) = \langle e'_2(s), e_3(s) \rangle$ é chamada *torção* da curva α . Isso descreve como o plano gerado por $e_1(s), e_2(s)$ varia ao longo da curva. Estas três equações para as derivadas são chamadas *equações de Frenet*, e em notação matricial elas assumem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} e'_1(s) \\ e'_2(s) \\ e'_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1(s) \\ e_2(s) \\ e_3(s) \end{bmatrix}.$$

3.3 Superfícies Regulares

Nesta seção será apresentado o conceito de superfícies regulares, definindo-as como subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ que podem ser descritos localmente por dois parâmetros.

Segundo ([11], p. 61), uma superfície regular do $\mathbb{R}^3$ é obtida a partir de pedaços do plano, deformados e colados entre si, de tal modo que o “objeto” resultante não apresente pontas, arestas ou auto-interseções. Tendo assim sentido em falar de plano tangente nos pontos desse “objeto”.

Definição 3.6. *Um subconjunto S do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada ponto $p \in S$, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que:*

(a) *A aplicação X é diferenciável, isto é, dados $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ $\forall (u, v) \in U$, todas as derivadas parciais das funções $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ e $z = z(u, v)$ existem e são contínuas em U .*

(b) *X é um homeomorfismo, isto é, X é bijetiva, contínua e possui inversa contínua.*

(c) (Condição para regularidade.) Para todo $q \in U$ a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva (equivalente à dizer que, $\forall q \in U$ a matriz jacobiana $dX(q)$ tem posto 2).

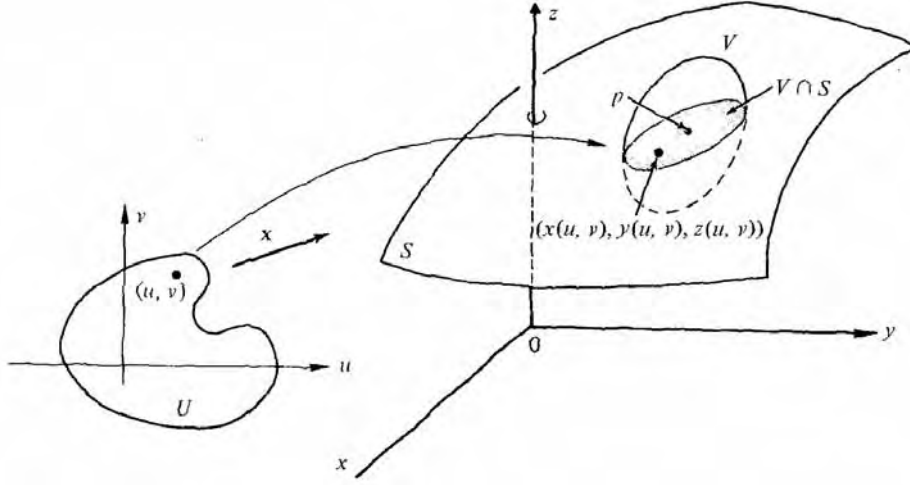


Figura 3.1: Superfície regular.

A aplicação $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ é chamada parametrização ou sistema de coordenadas em uma vizinhança do ponto p . A vizinhança $V \cap S$ de p em S é chamada vizinhança coordenada.

Observação 3.3.1. Geometricamente uma superfície ser regular significa que esta não possui “bicos” e auto-interseção. Esta condição é necessária para a existência do plano tangente em todos os pontos da superfície.

Para expressar a condição (c) da definição (5.31) de forma mais familiar, será calculada a matriz da aplicação linear dX_q na base canônica $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ com coordenadas (u, v) e $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ com coordenadas (x, y, z) . Para cada $q = (u_0, v_0) \in U$, a matriz associada a dX_q nas bases canônicas é a matriz jacobiana.

$$dX_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

pois

$$dXq(e_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right) = \frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0)$$

$$dXq(e_2) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right) = \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0)$$

Estes dois vetores podem ser denotados por $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ respectivamente. Observe que a condição (c) da definição (5.31) é equivalente as afirmações.

- (a) $\frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0)$, são linearmente independentes.
- (b) $\frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \vec{0}$, onde $\wedge$ denota o produto vetorial definido em $\mathbb{R}^3$.

3.3.1 Curvas na Superfície. Plano Tangente e Vetor Normal.

Seja S uma superfície regular e $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ e $C : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ aplicações diferenciáveis. Uma curva α na superfície é dada pela composição $(X \circ C)$, ou seja, $\alpha(t) = (X \circ C)(t) = X(u(t), v(t))$.

Considere em U um ponto (u_0, v_0) com $X(u_0, v_0) = p \in S$ e a reta $v = v_0$ constante em U . Como U é aberto existe $\varepsilon > 0$ tal que $C_u : (t - \varepsilon, t + \varepsilon) \rightarrow U$ onde $C_u((t - \varepsilon, t + \varepsilon)) \subset U$, ou seja, $C_u(t) = (u, v_0)$. A composição de X com C_u dá origem a uma curva parametrizada diferenciável cujo traço está em $X(U)$ passando pelo ponto $X(u_0, v_0) = p$, ou seja, $(X \circ C_u)(t) = X(u(t), v_0)$.

De modo análogo, obtém-se para coordenada v a curva parametrizada diferenciável $(X \circ C_v)(t) = X(u_0, v(t))$.

$X \circ C_u$ e $X \circ C_v$ são chamadas curvas coordenadas na superfície S à u e v respectivamente.

Definição 3.7. O espaço tangente ou plano tangente em um ponto p da superfície S é o conjunto de vetores tangentes em p de todas curvas em S passando através de p denotado por $T_p S$.

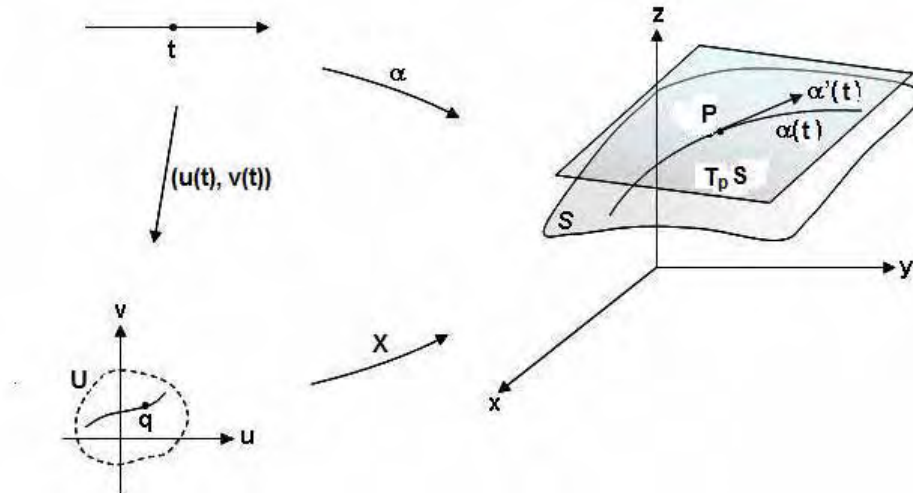


Figura 3.2: Espaço Tangente.

Propriedade 3.1. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ uma parametrização da superfície S contendo um ponto p de S e seja (u, v) coordenadas em U . O espaço tangente a S em p é o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $\frac{\partial X}{\partial u}$ e $\frac{\partial X}{\partial v}$, derivadas determinadas no ponto $(u_0, v_0) \in U$ tal que $X(u_0, v_0) = p$.

Demonstração. Seja α uma curva em S , ou seja

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t)). \quad (3.8)$$

Derivando (3.8) tem-se que,

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d}{dt}(X(u(t), v(t))) = \frac{\partial X}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial X}{\partial v} \frac{dv}{dt}. \quad (3.9)$$

Assim, $\alpha'(t)$ é uma combinação linear de $\frac{\partial X}{\partial u}$ e $\frac{\partial X}{\partial v}$.

Reciprocamente, qualquer vetor no subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ gerado por $\frac{\partial X}{\partial u}$ e $\frac{\partial X}{\partial v}$ é da forma $a\frac{\partial X}{\partial u} + b\frac{\partial X}{\partial v}$ para os escalares a e $b \in \mathbb{R}$. Define-se

$$\alpha(t) = X(u_0 + at, v_0 + bt).$$

α é uma curva em S com $\alpha(0) = X(u_0, v_0) = p \in S$. Assim,

$$\alpha'(t) = \frac{\partial X}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial X}{\partial v} \frac{dv}{dt} = a \frac{\partial X}{\partial u} + b \frac{\partial X}{\partial v}.$$

Portanto, todo vetor gerado por $\frac{\partial X}{\partial u}$ e $\frac{\partial X}{\partial v}$ é um vetor tangente em p de alguma curva em S . $\square$

Uma vez que $\frac{\partial X}{\partial u}$ e $\frac{\partial X}{\partial v}$ são linearmente independentes, o espaço tangente é bidimensional e será chamado de *plano tangente*.

Dado um ponto $p \in S$ existem dois vetores unitários em $\mathbb{R}^3$ que são normais ao plano tangente $T_p S$. Uma vez fixada uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$, pode-se definir em cada ponto $p = X(u_0, v_0)$ um vetor normal unitário à superfície definido por

$$N(u_0, v_0) = \frac{\frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0)}{\left\| \frac{\partial X}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u_0, v_0) \right\|} \quad (3.10)$$

onde $\wedge$ denota o produto interno vetorial de $\mathbb{R}^3$.

3.4 As Formas Fundamentais

O estudo das propriedades geométricas locais de uma superfície regular depende de duas formas fundamentais. A primeira forma permite calcular comprimentos e ângulos em uma superfície. A segunda forma esta relacionada ao estudo de curvas da superfície.

3.4.1 A Primeira Forma Fundamental

Nesta seção será apresentado o instrumento que permite calcular comprimentos e ângulos sobre uma superfície denominado de *Primeira Forma Fundamental* da superfície.

Seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $a \leq t \leq b$ uma curva sobre uma superfície S parametrizada por X . O comprimento do arco de α de $\alpha(a)$ até $\alpha(b)$ é dado por

$$L = s(b) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt. \quad (3.11)$$

Derivando (3.11) em relação a t , obtém-se

$$\frac{ds}{dt} = \|\alpha'(t)\|. \quad (3.12)$$

Assim,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \|\alpha'(t)\|^2 = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle.$$

O vetor velocidade $\alpha'(t)$ é dado por

$$\alpha'(t) = \frac{\partial X}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial X}{\partial v} \frac{dv}{dt}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 &= \left\langle \left(\frac{\partial X}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial X}{\partial v} \frac{dv}{dt}\right), \left(\frac{\partial X}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial X}{\partial v} \frac{dv}{dt}\right) \right\rangle \\ &= \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle + 2 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle. \end{aligned}$$

Definindo as funções:

$$\begin{aligned} g_{11} : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto g_{11}(u, v) = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle(u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{12} : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto g_{12}(u, v) = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle(u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{22} : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto g_{22}(u, v) = \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle(u, v) \end{aligned}$$

que são chamadas de *coeficientes da Primeira Forma Fundamental* na base $\left\{ \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\}$ de $T_p X$.

A equação

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\left(\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}\right) + g_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2. \quad (3.13)$$

é conhecida como *Primeira Forma Fundamental* da superfície S .

Uma vez determinados os coeficientes g_{11} , g_{12} e g_{22} , pode-se encontrar o comprimento de qualquer curva sobre uma superfície usando a fórmula,

$$L = \int_a^b \left[g_{11}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\left(\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}\right) + g_{22}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt. \quad (3.14)$$

Se considerarmos α_1 e α_2 duas curvas na superfície S que se interceptam num dado ponto $P = \alpha_1(t_1) = \alpha_2(t_2)$. Então $\alpha_1(t) = X(u_1(t), v_1(t))$ e $\alpha_2(t) = X(u_2(t), v_2(t))$. O *ângulo de interseção* no ponto P das curvas α_1 e α_2 é definido como sendo o ângulo θ formado pelos vetores $\alpha'_1(t_1)$ e $\alpha'_2(t_2)$ e é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'_1(t_1), \alpha'_2(t_2) \rangle}{\|\alpha'_1(t_1)\| \cdot \|\alpha'_2(t_2)\|}.$$

Portanto,

$$\cos \theta = \frac{g_{11}\frac{du_1}{dt}\frac{du_2}{dt} + g_{12}\left(\frac{du_1}{dt}\frac{dv_2}{dt} + \frac{du_2}{dt}\frac{dv_1}{dt}\right) + g_{22}\frac{dv_1}{dt}\frac{dv_2}{dt}}{\|\alpha'_1(t_1)\| \cdot \|\alpha'_2(t_2)\|} \quad (3.15)$$

sendo

$$\begin{aligned} \|\alpha'_1(t_1)\| &= \left[g_{11}\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{du_1}{dt}\frac{dv_1}{dt} + g_{22}\left(\frac{dv_1}{dt}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \|\alpha'_2(t_2)\| &= \left[g_{11}\left(\frac{du_2}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{du_2}{dt}\frac{dv_2}{dt} + g_{22}\left(\frac{dv_2}{dt}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

A matriz $G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix}$ é denominada matriz da Primeira Forma Fundamental.

G é uma matriz inversível⁸ pois $\frac{\partial X}{\partial u}$ e $\frac{\partial X}{\partial v}$ são linearmente independentes. Desta maneira, G admite uma matriz inversa G^{-1} dada por

$$G^{-1} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Observação 3.4.1.

1- É imediato pela definição que $g_{11}(u, v) > 0$ e $g_{22}(u, v) > 0, \forall (u, v) \in U$. Além disso, $g_{12}(u, v) = 0$ se e somente se, as curvas coordenadas forem ortogonais.

2- $\|X_u \wedge X_v\| = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$, que é o determinante da matriz da Primeira Forma Fundamental.

⁸**Matriz inversível:** Uma matriz quadrada A é dita inversível quando existe outra matriz denotada A^{-1} tal que $AA^{-1} = I = A^{-1}A$, onde I é a matriz identidade e A^{-1} é denominada a matriz inversa de A .

3.4.2 A Segunda Forma Fundamental

No exemplo 3.1 da seção 3.2 do capítulo 3 foi definida a curvatura de uma curva em $\mathbb{R}^3$ como sendo o comprimento da aceleração, ou seja $k(s) = \|\alpha''(s)\|$. Esta seção porém, lida com uma curva que encontra-se sobre uma superfície S em $\mathbb{R}^3$. A fim de poder relacionar a curvatura de α a geometria de S , o vetor aceleração $\alpha''(s)$ será decomposto em componentes tangente e normal a superfície.

$$\alpha''(s) = \alpha''_{\text{tg}}(s) + \alpha''_{\text{nor}}(s). \quad (3.17)$$

Lembrando que $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$ é uma curva sobre S , o vetor velocidade $\alpha'(s)$ é dado de acordo com a regra da cadeia, e assume a forma

$$\alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\partial X}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial X}{\partial v} \frac{dv}{ds}. \quad (3.18)$$

$\alpha'(s)$ é tangente a curva e assim tangente a S . Enquanto, o vetor aceleração $\alpha''(s)$ é dado por,

$$\begin{aligned} \alpha''(s) &= \frac{d^2\alpha}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial X}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial X}{\partial v} \frac{dv}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial X}{\partial u} \frac{du}{ds} \right) + \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial X}{\partial v} \frac{dv}{ds} \right) \\ &= \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \frac{dv}{ds} \frac{du}{ds} + \frac{\partial X}{\partial u} \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \\ &\quad + \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{\partial X}{\partial v} \frac{d^2 v}{ds^2}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Supondo que todas as derivadas parciais das componentes de X são contínuas tem-se que $\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u}$. Deste modo, a equação (5.4) pode ser escrita da seguinte forma,

$$\alpha''(s) = \frac{\partial X}{\partial u} \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{\partial X}{\partial v} \frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} \right) + \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2. \quad (3.20)$$

A fim de escrever $\alpha''(s)$ como na equação (5.30), é preciso decompor $\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}$ e $\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}$. A componente tangente será uma combinação linear de $\frac{\partial X}{\partial u}$ e $\frac{\partial X}{\partial v}$, e a componente normal um múltiplo do vetor normal unitário N . Consequentemente, define-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} &= \Gamma_{11}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_{11} N, & \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} &= \Gamma_{12}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_{12} N \\ \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u} &= \Gamma_{21}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{21}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_{21} N, & \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} &= \Gamma_{22}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_{22} N \end{aligned} \quad (3.21)$$

As funções Γ_{ij}^r , $i, j, r = 1, 2$, são chamadas *símbolos de Christoffel* de S relativamente a parametrização X . Os coeficientes Γ_{ij}^r e L_{ij} são funções de u e v . Fazendo o produto

interno de cada uma das equações (3.21) com o vetor normal N obtém-se as igualdades abaixo

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}, N \right\rangle &= L_{11} & \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, N \right\rangle &= L_{12} \\ \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u}, N \right\rangle &= L_{21} & \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}, N \right\rangle &= L_{22}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Como $\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u}$, conclui-se que $L_{12} = L_{21}$. Os símbolos de Christoffel, $\Gamma_{12}^r = \Gamma_{21}^r$, $r = 1, 2$ são simétricos em relação aos índices inferiores.

Substituindo as relações (3.21) e (3.22) na equação (5.5), obtém-se o seguinte resultado.

$$\begin{aligned} \alpha''(s) &= \frac{\partial X}{\partial u} \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{\partial X}{\partial v} \frac{d^2 v}{ds^2} + \left(\Gamma_{11}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_{11} N \right) \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \\ &+ 2 \left(\Gamma_{12}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_{12} N \right) \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} \\ &+ \left(\Gamma_{22}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_{22} N \right) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

A equação (5.6) pode ser escrita da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \alpha''(s) &= \left[\Gamma_{11}^1 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{12}^1 \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{d^2 u}{ds^2} \right] \frac{\partial X}{\partial u} \\ &+ \left[\Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{d^2 v}{ds^2} \right] \frac{\partial X}{\partial v} \\ &+ \left[L_{11} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2L_{12} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + L_{22} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right] N, \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde, segundo a equação (5.30), tem-se

$$\begin{aligned} \alpha''_{\text{tg}}(s) &= \left[\Gamma_{11}^1 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{12}^1 \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{d^2 u}{ds^2} \right] \frac{\partial X}{\partial u} \\ &+ \left[\Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{d^2 v}{ds^2} \right] \frac{\partial X}{\partial v}. \\ \alpha''_{\text{nor}}(s) &= \left[L_{11} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2L_{12} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + L_{22} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right] N. \end{aligned} \quad (3.25)$$

O coeficiente de N na equação (5.10) é chamado de *Segunda Forma Fundamental* da superfície S .

A Primeira Forma Fundamental determina a geometria intrínseca de S , enquanto a Segunda Forma reflete a geometria extrínseca.

Para determinar os coeficientes Γ_{ij}^r , $i, j, r = 1, 2$, considere o produto interno de cada uma das relações em (3.21) com $\frac{\partial X}{\partial u}$ e $\frac{\partial X}{\partial v}$.

Determinação de $[\Gamma_{11}^1$ e $\Gamma_{11}^2]$.

Considere o produto interno da relação $\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = \Gamma_{11}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_{11}N$ com $\frac{\partial X}{\partial u}$, ou seja,

$$\left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle = \Gamma_{11}^1 \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle + \Gamma_{11}^2 \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle + L_{11} \left\langle N, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle.$$

Como,

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle.$$

Tem-se que,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u} = \Gamma_{11}^1 g_{11} + \Gamma_{12}^2 g_{12}. \quad (3.26)$$

Considere agora o produto interno da relação $\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = \Gamma_{11}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_{11}N$ com $\frac{\partial X}{\partial v}$, ou seja,

$$\left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle = \Gamma_{11}^1 \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + \Gamma_{11}^2 \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + L_{11} \left\langle N, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle.$$

Como,

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \right\rangle \quad (3.27)$$

e

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial v} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle \quad (3.28)$$

$$= \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle. \quad (3.29)$$

Subtraindo (5.15) de (3.27), obtém-se $\left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial^2 u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle = \frac{\partial g_{12}}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial v}$.

Assim,

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial v} = \Gamma_{11}^1 g_{11} + \Gamma_{12}^2 g_{12}. \quad (3.30)$$

Resulta das equações (5.11) e (5.13), o sistema linear.

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u} \\ \frac{\partial g_{12}}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Lembrando que $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0$, segue que o sistema linear admite solução dada por

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u} & g_{12} \\ \frac{\partial g_{12}}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial v} & g_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u} g_{22} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u} g_{12} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial v} g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

e

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{\begin{vmatrix} g_{11} & \frac{\partial g_{11}}{\partial u} \\ g_{22} & \frac{\partial g_{12}}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\partial g_{12}}{\partial u} g_{11} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial v} g_{11} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u} g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Determinação de $[\Gamma_{12}^1$ e $\Gamma_{12}^2]$.

Considere o produto interno da relação $\frac{\partial X}{\partial u \partial v} = \Gamma_{12}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_{12}N$ com $\frac{\partial X}{\partial u}$, ou seja,

$$\left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle = \Gamma_{12}^1 \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle + \Gamma_{12}^2 \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle + L_{12} \left\langle N, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle.$$

Como,

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u \partial v} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle.$$

Logo,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial v} = \Gamma_{12}^1 g_{11} + \Gamma_{12}^2 g_{12}. \quad (3.31)$$

O produto interno da relação $\frac{\partial X}{\partial u \partial v} = \Gamma_{12}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_{12}N$ com $\frac{\partial X}{\partial v}$ resultará em

$$\left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle = \Gamma_{12}^1 \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + \Gamma_{12}^2 \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + L_{12} \left\langle N, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle.$$

Como,

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial u \partial v} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle.$$

Obtém-se

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} = \Gamma_{12}^1 g_{12} + \Gamma_{12}^2 g_{22}. \quad (3.32)$$

Resulta das equações (5.16) e (5.17), o sistema linear.

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial v} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \end{bmatrix}.$$

Cuja solução é dada por

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial v} & g_{12} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} & g_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial v} g_{22} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

e

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{\begin{vmatrix} g_{11} & \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial v} \\ g_{12} & \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} g_{11} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial v} g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Determinação de $[\Gamma_{22}^1$ e $\Gamma_{22}^2]$.

Considerando agora o produto interno da relação $\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = \Gamma_{22}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_{22}N$ com $\frac{\partial X}{\partial u}$ têm-se que

$$\left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle = \Gamma_{22}^1 \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle + \Gamma_{22}^2 \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle + L_{22} \left\langle N, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle.$$

Como,

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \right\rangle \quad (3.33)$$

e

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle. \quad (3.34)$$

Subtraindo (3.34) de (5.20), obtém-se $\left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle = \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u}$.

Concluindo-se que

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} = \Gamma_{22}^1 g_{11} + \Gamma_{22}^2 g_{12}. \quad (3.35)$$

Considerando agora o produto interno da relação $\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = \Gamma_{22}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_{22}N$ com $\frac{\partial X}{\partial v}$ obtém-se

$$\left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle = \Gamma_{22}^1 \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + \Gamma_{22}^2 \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + L_{22} \left\langle N, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle.$$

Como,

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle.$$

Assim,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial v} = \Gamma_{22}^1 g_{12} + \Gamma_{22}^2 g_{22}. \quad (3.36)$$

Resulta das equações (5.18) e (5.22), o sistema linear.

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Cuja a solução é dada por

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} & g_{12} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial v} & g_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\partial g_{12}}{\partial v} g_{22} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} g_{22} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial v} g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

e

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{\begin{vmatrix} g_{11} & \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \\ g_{12} & \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial v} g_{11} - \frac{\partial g_{12}}{\partial v} g_{12} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Conclui-se que os símbolos de Christoffel só dependem de g_{11} , g_{12} e g_{22} (coeficientes da Primeira Forma Fundamental) e de suas derivadas.

Proposição 3.2. *Seja $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco sobre uma superfície S . Sua curvatura normal é dada por*

$$K_n = L_{11} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2L_{12} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + L_{22} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2$$

onde $L_{11} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2L_{12} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + L_{22} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2$ é a Segunda Forma Fundamental de S .

Demonstração. Seja N o vetor unitário normal de S . Tem-se que

$$\begin{aligned} K_n &= \left\langle N(s), \alpha'' \right\rangle = \left\langle N(s), \frac{d}{ds}(\alpha') \right\rangle = \left\langle N(s), \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial X}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial X}{\partial v} \frac{dv}{ds} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle N(s), \left[\frac{\partial^2 X}{\partial u} \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial v} \frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} \right) + \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right] \right\rangle \end{aligned}$$

Usando as relações (3.22) e o fato de que N é perpendicular a $\frac{\partial X}{\partial u}$ e $\frac{\partial X}{\partial v}$ obtém-se que

$$K_n = L_{11} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2L_{12} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + L_{22} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2.$$

□

3.5 O Teorema Egregium de Gauss e as Equações de Compatibilidade.

Nesta seção será mostrado um dos teoremas mais importantes do século XIX. Resultado descoberto por Johann Carl Friedrich Gauss e publicado no ano de 1827. Este teorema afirma que a curvatura gaussiana, definida a partir da Segunda Forma Fundamental, depende somente da Primeira Forma Fundamental.

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização da superfície regular S . É possível associar a cada ponto $X(U)$ um triedro natural dado por $\left\{ \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}, N \right\}$. Expressando as derivadas destes vetores na base $\left\{ \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}, N \right\}$ são definidas as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} &= \Gamma_{11}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_{11} N \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} &= \Gamma_{12}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_{12} N \\ \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} &= \Gamma_{22}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_{22} N \\ \frac{\partial N}{\partial u} &= a_{11} \frac{\partial X}{\partial u} + a_{21} \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial N}{\partial v} &= a_{12} \frac{\partial X}{\partial u} + a_{22} \frac{\partial X}{\partial v} \end{aligned} \tag{3.37}$$

Sendo que as 4 primeiras relações em (3.37) foram definidas e seus coeficientes Γ_{ij}^k ; $i, j, k = 1, 2$, determinados na seção 3.4.2 deste capítulo. Os coeficientes a_{ij} ; $i, j = 1, 2$, estão

ainda por determinar. Para encontrar estes coeficientes basta formar o produto interno de cada uma das duas últimas relações em (3.37) com $\frac{\partial X}{\partial u}$ e $\frac{\partial X}{\partial v}$, obtendo assim,

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle &= a_{11} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle + a_{21} \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle \\
 \left\langle \frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle &= a_{11} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + a_{21} \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle \\
 \left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle &= a_{12} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle + a_{22} \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial u} \right\rangle \\
 \left\langle \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle &= a_{12} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle + a_{22} \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial X}{\partial v} \right\rangle
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Observando-se que $\left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, N \right\rangle = 0$ e $\left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, N \right\rangle = 0$ e com devidas operações algébricas, resulta

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial u} \right\rangle &= - \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}, N \right\rangle = -L_{11} \quad , \quad \left\langle \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial v} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u}, N \right\rangle = -L_{12} \\
 \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial N}{\partial u} \right\rangle &= - \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, N \right\rangle = -L_{12} \quad , \quad \left\langle \frac{\partial X}{\partial v}, \frac{\partial N}{\partial v} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}, N \right\rangle = -L_{22}
 \end{aligned}$$

Substituindo estes resultados devidamente em (3.38), determina-se

$$\begin{aligned}
 -L_{11} &= a_{11}g_{11} + a_{21}g_{12} & -L_{12} &= a_{12}g_{11} + a_{22}g_{12} \\
 -L_{12} &= a_{11}g_{12} + a_{21}g_{22} & -L_{22} &= a_{12}g_{12} + a_{22}g_{22}
 \end{aligned}$$

Escrevendo em termos matriciais tem-se que,

$$\begin{bmatrix} -L_{11} & -L_{12} \\ -L_{12} & -L_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \tag{3.39}$$

Da equação (3.39) conclui-se que,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -L_{11} & -L_{12} \\ -L_{12} & -L_{22} \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

onde

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{L_{12}g_{12} - L_{11}g_{22}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} \quad , \quad a_{12} = \frac{L_{22}g_{12} - L_{12}g_{22}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} \\
 a_{21} &= \frac{L_{11}g_{12} - L_{12}g_{11}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} \quad , \quad a_{22} = \frac{L_{12}g_{12} - L_{22}g_{11}}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Como foi visto, as expressões das derivadas de $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial X}{\partial v}$ e N na base $\left\{ \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}, N \right\}$ dependem apenas dos coeficientes da Primeira e Segunda Formas Fundamentais de S . Uma maneira de obter relações entre estes coeficientes é considerar as identidades:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \right) \\ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u} \right) \\ \frac{\partial^2 N}{\partial u \partial v} &= \frac{\partial^2 N}{\partial v \partial u} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Substituindo convenientemente as relações (3.37) na equação (a) de (3.42), e utilizando o fato de que os vetores $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial X}{\partial v}$ e N são linearmente independentes, implica que (3.42) irá determinar três novas relações, como será mostrado logo abaixo:

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left(\Gamma_{11}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_{11} N \right) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\Gamma_{12}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_{12} N \right) \\ \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{11}^1 \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u} + \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial v} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} + \frac{\partial L_{11}}{\partial v} N + L_{11} \frac{\partial N}{\partial v} &= \\ = \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{12}^1 \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} + \frac{\partial L_{12}}{\partial u} N + L_{12} \frac{\partial N}{\partial u} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{11}^1 \left(\Gamma_{12}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_{12} N \right) + \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial v} + \Gamma_{11}^2 \left(\Gamma_{22}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{22}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_{22} N \right) + \\ + \frac{\partial L_{11}}{\partial v} N + L_{11} \left(a_{12} \frac{\partial X}{\partial u} + a_{22} \frac{\partial X}{\partial v} \right) &= \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{12}^1 \left(\Gamma_{11}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_{11} N \right) + \\ + \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} + \Gamma_{12}^2 \left(\Gamma_{12}^1 \frac{\partial X}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \frac{\partial X}{\partial v} + L_{12} N \right) + \frac{\partial L_{12}}{\partial u} N + L_{12} \left(a_{11} \frac{\partial X}{\partial u} + a_{21} \frac{\partial X}{\partial v} \right) \end{aligned}$$

A primeira relação resulta a partir do coeficiente de $\frac{\partial X}{\partial u}$:

$$\frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + L_{11} a_{12} = \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 + L_{12} a_{11}$$

Substituindo (3.41) tem-se que

$$\frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + L_{11} \frac{L_{22} g_{12} - L_{12} g_{22}}{g_{11} g_{22} - (g_{12})^2} = \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u} + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 + L_{12} \frac{L_{12} g_{12} - L_{11} g_{22}}{g_{11} g_{22} - (g_{12})^2}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u} + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 = g_{12} \frac{L_{11} L_{22} - (L_{12})^2}{g_{11} g_{22} - (g_{12})^2} = g_{12} k \quad (3.43)$$

A segunda relação resulta a partir do coeficiente $\frac{\partial X}{\partial v}$:

$$\frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + L_{11} a_{22} = \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + L_{12} a_{21}$$

Substituindo (3.41) tem-se que

$$\frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + L_{11} \frac{L_{12} g_{12} - L_{22} g_{11}}{g_{11} g_{22} - (g_{12})^2} = \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u} + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + L_{12} \frac{L_{11} g_{12} - L_{12} g_{11}}{g_{11} g_{22} - (g_{12})^2}$$

$$\frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial u} + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 = g_{11} \frac{L_{11} L_{22} - (L_{12})^2}{g_{11} g_{22} - (g_{12})^2} = g_{11} k \quad (3.44)$$

A partir dos coeficientes de N , obtém-se a terceira relação.

$$\Gamma_{11}^1 L_{12} + \Gamma_{11}^2 L_{22} + \frac{\partial L_{11}}{\partial v} = \Gamma_{12}^1 L_{11} + \Gamma_{12}^2 L_{12} + \frac{\partial L_{12}}{\partial u}$$

$$\frac{\partial L_{11}}{\partial v} - \frac{\partial L_{12}}{\partial u} = L_{11} \Gamma_{12}^1 + L_{12} (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - L_{22} \Gamma_{11}^2 \quad (3.45)$$

De modo análogo, considerando os coeficientes de $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial X}{\partial v}$ e N nas identidades (b) e (c) de (3.42), obtém-se outras seis relações onde é possível formular $g_{12}k$ e $g_{22}k$ em função dos símbolos de Christoffel e de suas derivadas. Em particular, o coeficiente de N da identidade (b) de (3.42) fornece a equação,

$$\frac{\partial L_{12}}{\partial v} - \frac{\partial L_{22}}{\partial u} = L_{11} \Gamma_{22}^1 + L_{12} (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - L_{22} \Gamma_{12}^2 \quad (3.46)$$

Fica a cargo do leitor desenvolver os cálculos para encontrar as outras seis relações mencionadas.

A equação (3.44) é dita *equação de Gauss* e as equações (3.45) e (3.46) são chamadas *equações de Codazzi-Mainardi*. Tais equações são conhecidas como *equações de compatibilidade*.

Como mencionado anteriormente, os símbolos de Christoffel só dependem da Primeira Forma Fundamental. Assim, a equação (3.44) prova um dos teoremas mais importantes para teoria das superfícies.

Teorema 3.3. (Teorema Egreuim de Gauss). *A curvatura gaussiana só depende dos coeficientes da Primeira Forma Fundamental.*

3.6 Variedade Diferenciáveis e Tensores

3.6.1 Variedade Diferenciáveis

A noção de variedade diferenciável é necessária para estender o conceito de curvatura em espaços mais gerais que o $\mathbb{R}^n$. A partir desta seção, será denotado por $\mathbb{R}^n = \{(x^1, x^2, \dots, x^n) : x^i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \dots, n\}$ o conjunto de todas as n-uplas ordenadas de números reais munido de sua topologia e estrutura de espaço vetorial usual.

Definição 3.8. *Seja M um conjunto. Uma carta local de dimensão n em um ponto $p \in M$ é um par ordenado (U, φ) onde $p \in U \subset M$ e $\varphi : U \subset M \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação injetora, cuja imagem é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.*

Assim, dada uma carta local (U, φ) , para cada ponto $p \in U$ escreve-se $\varphi(p) = (x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p))$ onde as funções $x^1, x^2, \dots, x^n$ são ditas funções coordenadas de φ . Por esta razão uma carta local é também denominada *sistema de coordenadas local*.

Definição 3.9. *Duas cartas locais (U, φ) e (V, ψ) de dimensão n em um ponto $p \in U \cap V$ são ditas compatíveis se a aplicação*

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$$

for um homeomorfismo (isto é, contínua, injetora e com inversa também contínua). Além disso, se $\psi \circ \varphi^{-1}$ e sua inversa forem aplicações diferenciáveis de classe $C^k(k > 0)$, diz-se então que as cartas são compatíveis de classe C^k .

Definição 3.10. *Um atlas de classe C^k sobre o conjunto M é uma família $\mathcal{A}$ de cartas compatíveis de classe C^k de dimensão n $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in I\}$ tal que $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = M$, ou seja, o atlas cobre M . A dimensão de um atlas $\mathcal{A}$ é a dimensão de suas cartas ($\dim \mathcal{A} = n$).*

Considerando o conjunto A de todos os atlas de classe C^k sobre M , pode-se definir neste conjunto a seguinte relação:

$$\mathcal{A}_i \sim \mathcal{A}_j \Leftrightarrow \mathcal{A}_i \cup \mathcal{A}_j, \forall \mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j \in A$$

onde $\sim$ define uma relação de equivalência sobre A .

Definição 3.11. *Uma estrutura diferenciável $\mathcal{I}$ de classe C^k sobre M é uma classe de equivalência do atlas de classe C^k sobre M , isto é, $\mathcal{I} \in A / \sim$.*

Definição 3.12. *Uma variedade diferenciável de classe C^k é um par ordenado $(M, \mathcal{I})$ onde $\mathcal{I}$ é uma estrutura diferenciável de classe C^k sobre o conjunto M .*

Observa-se que a dimensão de uma variedade é dada pela dimensão de seu atlas. Indica-se por M^n a variedade diferenciável $(M, \mathcal{I})$ de dimensão n .

De agora em diante, será considerado a menos quando dito explicitamente o contrário, somente variedades diferenciáveis de classe C^∞ .

Pela definição apresentada de variedade diferenciável, o conjunto M passa a ter uma estrutura na qual pode-se falar em processos de diferenciação uma vez que o conjunto M passa a ser coberto com sistemas de coordenadas arbitrárias difeomorfas localmente ao $\mathbb{R}^n$, unidas diferenciavelmente.

3.6.2 Espaços Tangente e Dual

Definição 3.13. *Seja M uma variedade diferenciável e seja $p \in M$ com (U, φ) uma carta local para o ponto p . A função real $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é dita diferenciável de classe $C^k(k \geq 0)$ no ponto $p \in M$ se a aplicação*

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

for diferenciável de classe C^k no ponto $\varphi(p)$.

Se f for de classe C^∞ no ponto $p \in M$, é dito que apenas f é diferenciável em $p \in M$. f é dita diferenciável em toda variedade M se $\forall p \in M, f$ for diferenciável em p . Denota-se por $\mathcal{F}(M) = \{f, f : M \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ é diferenciável em } M\}$ o conjunto de todas as funções diferenciáveis definidas sobre M em $\mathbb{R}$.

Definição 3.14. *Seja M uma variedade diferenciável. Um vetor tangente a M num ponto $p \in M$ é uma função $X_p : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:*

$$\begin{aligned} X_p(\alpha f + \beta g) &= \alpha X_p(f) + \beta X_p(g) && \text{(linearidade)} \\ X_p(fg) &= g(p)X_p(f) + f(p)X_p(g) && \text{(Regra de Leibniz)} \end{aligned}$$

para todo, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e para toda $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

Será denotado por $T_p(M) = \{X_p : X_p \text{ é um vetor tangente a } M \text{ no ponto } p\}$.

Pode-se definir em $T_p(M)$, as operações de soma e multiplicação por escalares, munindo assim este conjunto de uma estrutura de espaço vetorial sobre o corpo de números reais, ou seja,

$$\begin{aligned} (X_p + Y_p)(f) &\equiv X_p(f) + Y_p(f) \quad \forall f \in \mathcal{F}(M) \\ (\alpha X_p)(f) &\equiv \alpha X_p(f) \quad \forall f \in \mathcal{F}(M) \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

para todo $X_p, Y_p \in T_p(M)$. $T_p(M)$ é então chamado de *espaço tangente* a M no ponto p .

Teorema 3.4. *Seja M^n uma variedade diferenciável. Seja $p \in M^n$ e $T_p(M)$ o espaço tangente a M no ponto p . Se (U, φ) é um sistema de coordenadas local para o ponto $p \in U$ com $\varphi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, então o conjunto $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$ constitui uma base para $T_p(M)$.*

Demonstração. Verifique que:

1. $X_p(1) = 0 \forall p \in M$, pois $X_p(1) = X_p(1.1) = 1X_p(1) + 1X_p(1) = 2X_p(1)$.
2. Se $f \in \mathcal{F}(M)$ é tal que $f = c = cte$, então $X_p(f) = 0$. De fato, $X_p(f) = X_p(c) = X_p(1.c) = cX_p(1) = 0$.
3. Por hipótese, tem-se que (U, φ) é uma carta local para o ponto p . Considerando assim a função $g : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Pode-se supor, sem perda de generalidade, que $g(p) = 0$. Seja $q = (u^1, u^2, \dots, u^n) \in \varphi(U)$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo.

$$\int_0^1 \frac{d}{dt} g(tq) dt = g(u^1, u^2, \dots, u^n) - g(0). \quad (3.47)$$

Porém, por outro lado,

$$\frac{d}{dt} g(tq) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial u^i}(tq) u^i.$$

Assim reescrevendo (3.47)

$$g(u^1, u^2, \dots, u^n) = g(0) + \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial u^i}(tq) dt \right) u^i = g(0) + \sum_{i=1}^n g_i(q) u^i. \quad (3.48)$$

Seja $f \in \mathcal{F}(M)$, define-se a função $g = f \circ \varphi^{-1}$, ou melhor, $f = g \circ \varphi = g(x^1, x^2, \dots, x^n)$.

Utilizando a expressão (3.48), tem-se que

$$g(x^1, x^2, \dots, x^n) = g(0) + \sum_{i=1}^n g_i(x^1, x^2, \dots, x^n) x^i. \quad (3.49)$$

Denotando por $f_i = g_i(x^1, x^2, \dots, x^n)$, e reescrevendo assim (3.49), tem-se que

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^n f_i x^i.$$

É claro que $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = f_i(p)$, $\forall p \in M$. Aplicando a um vetor tangente $X_p \in T_p(M)$ e utilizando suas propriedades, tem-se que

$$X_p(f) = X_p \left(f(p) + \sum_{i=1}^n f_i x^i \right) = X_p(f(p)) + \sum_{i=1}^n X_p(f_i) x^i + \sum_{i=1}^n f_i(p) X_p(x^i).$$

Pelo item 2, obtém-se

$$X_p(f) = \sum_{i=1}^n X_p(x^i) f_i(p) = \sum_{i=1}^n X_p(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p).$$

Dada a arbitrariedade de f , conclui-se que

$$X_p = \sum_{i=1}^n X_p(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p.$$

Deste modo foi mostrado que o conjunto $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$ gera o espaço tangente. Resta mostrar que este conjunto é linearmente independente. De fato, seja

$$\sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = 0.$$

Tomando em particular as funções coordenadas x^j , obtém-se para $j = 1, \dots, n$

$$0 = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i}(p) = a^j.$$

□

Observação 3.6.1. Para não sobrecarregar a notação será utilizado de agora em diante $\partial_i|_p$ ao invés de $\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$. Além disso, ao longo do texto será adotado a convenção de Einstein para o somatório, ou seja, a repetição de índices superiores e inferiores implicam na soma de todos os valores para este índice.

Exemplos:

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j A^{ij} B_{ij} &\equiv A^{ij} B_{ij} \\ \sum_i \sum_j \sum_k \epsilon^{ijk} x_i y_j z_k &\equiv \epsilon^{ijk} x_i y_j z_k \end{aligned}$$

Assim, pelo teorema (3.4), para todo $X_p \in T_p(M)$, $X_p = X^i \partial_i|_p$, onde $X^i = X(x^i)$ são coeficientes reais ditos componentes de X_p com respeito ao sistema de coordenadas local (U, φ) no ponto p e o conjunto $\{\partial_1|_p, \partial_2|_p, \dots, \partial_n|_p\}$ é denominado *base coordenada* de $T_p(M)$.

Decorre também do teorema (3.4) que a dimensão do espaço tangente a uma variedade M é igual a dimensão da variedade, isto é, $\dim T_p(M) = \dim M = n$.

Com isso, é possível ver que em cada ponto de uma variedade diferenciável M aproxima-se na vizinhança do ponto um espaço vetorial. Verifica-se deste modo, que o conceito de vetores tangentes a uma variedade é um conceito local.

Definição 3.15. O conjunto TM definido pela união de todos os espaços tangentes a variedade M será denominado de *fibrado tangente*, ou seja, $TM = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$.

Definição 3.16. Seja M uma variedade diferenciável. Um campo vetorial X é uma função sobre M que associa a cada ponto $p \in M$ um vetor tangente $X_p \in T_p(M)$, isto é,

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto X_p \in T_p(M). \end{aligned}$$

Se X é um campo vetorial sobre M , para toda função $f \in \mathcal{F}(M)$, é definida sobre M a função real dada por $(Xf)(p) = X_p(f)$, $\forall p \in M$. Diz-se que o campo vetorial X é diferenciável se $Xf \in \mathcal{F}(M)$, $\forall f \in \mathcal{F}(M)$. Será denotado por $\mathcal{X}(M) = \{X; X \text{ é um campo vetorial diferenciável sobre } M\}$.

Definição 3.17. *Seja a aplicação*

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y] = XY - YX \end{aligned}$$

definida por

$$[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf), \forall f \in \mathcal{F}(M).$$

O campo vetorial $[X, Y]$ é denominado de *parêntesis de Lie* entre X e Y .

Uma consequência imediata da definição 3.17 é que dada (U, φ) uma carta local para o ponto $p \in U \subset M$ com $\varphi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ tem-se que,

$$[\partial_i, \partial_j]_p(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) - \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{F}(M).$$

Considere agora o conjunto de todos os funcionais lineares definidos sobre $T_p(M)$, isto é, todas as funções $\omega : T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem a condição

$$\omega(\alpha X_p + \beta Y_p) = \alpha \omega(X_p) + \beta \omega(Y_p), \quad \forall X_p, Y_p \in T_p(M) \text{ e } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Este conjunto, denotado por $T_p^*(M)$, será chamado de *espaço dual* de $T_p(M)$ e seus elementos de 1-formas ou vetores covariantes.

Por argumentos da Álgebra Linear verifica-se que $T_p^*(M)$ é um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais e que, para a base $\{\partial_1|_p, \partial_2|_p, \dots, \partial_n|_p\}$ de $T_p(M)$, existe uma única base dual, denotada por $\{dx^1, dx^2, \dots, dx^n\}$ de $T_p^*(M)$ tal que, para $i = 1, \dots, n$

$$dx^i(\partial_j|_p) = \delta_j^i, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

onde δ_j^i é o delta de *Kronecker*, ou seja, $\delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$.

3.6.3 Tensores

Para as leis físicas serem válidas, devem ser independentes dos sistemas de coordenadas usados para exprimi-las matematicamente. É, justamente, o estudo das consequências desse requisito que nos leva à Análise Tensorial, de grande emprego na Teoria da Relatividade Geral e na Geometria Diferencial.

Seja M uma variedade diferenciável. Considere os conjuntos $T_p(M)$ e $T_p^*(M)$. Pode-se formar então o seguinte produto cartesiano:

$$\prod_s^r = \underbrace{T_p(M) \times \dots \times T_p(M)}_{r\text{-fatores}} \times \underbrace{T_p^*(M) \times \dots \times T_p^*(M)}_{s\text{-fatores}}$$

onde existem r fatores de $T_p(M)$ e s fatores de $T_p^*(M)$.

Definição 3.18. Um tensor do tipo (r, s) em um ponto $p \in M$ é uma função definida sobre $\prod_s^r$, linear em cada um de seus argumentos, que associa a cada elemento $(X_1, X_2, \dots, X_r, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^s)$ um número real.

Será denotado por $T_s^r(M)$ o conjunto de todos os tensores do tipo (r, s) definidos sobre todos os pontos da variedade M .

De modo análogo aos espaços tangentes e duais, será definido sobre $T_s^r(M)$ uma estrutura algébrica de espaço vetorial sobre o corpo dos números reais. Assim, para todo $T, S \in T_s^r(M)$ e para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ define-se:

$$\begin{aligned} (T + S)(X_1, X_2, \dots, X_r, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^s) &\equiv T(X_1, X_2, \dots, X_r, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^s) + \\ &+ S(X_1, X_2, \dots, X_r, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^s) \\ (\alpha T)(X_1, X_2, \dots, X_r, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^s) &\equiv \alpha T(X_1, X_2, \dots, X_r, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^s). \end{aligned}$$

A estrutura de espaço vetorial definida sobre $T_s^r(M)$ permite-nos adicionar tensores de um mesmo tipo. Pode-se também definir uma operação de multiplicação entre tensores de tipos diferentes.

Definição 3.19. Sejam $T \in T_s^r(M)$ e $S \in T_u^v(M)$. Define-se o produto tensorial $\otimes$ de T e S por

$$\begin{aligned} \otimes : T_s^r(M) \times T_u^v(M) &\longrightarrow T_{s+u}^{r+v}(M) \\ (T, S) &\longrightarrow T \otimes S \end{aligned}$$

dado por:

$$\begin{aligned} (T \otimes S)(X_1, X_2, \dots, X_r, Y_1, Y_2, \dots, Y_v, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^s, \eta^1, \eta^2, \dots, \eta^u) &= \\ = T(X_1, X_2, \dots, X_r, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^s) S(Y_1, Y_2, \dots, Y_v, \eta^1, \eta^2, \dots, \eta^u), \\ \forall (X_1, X_2, \dots, X_r, Y_1, Y_2, \dots, Y_v, \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^s, \eta^1, \eta^2, \dots, \eta^u) &\in \prod_{s+u}^{r+v}. \end{aligned}$$

Segue, portanto, o teorema

Definição 3.20. Seja M^n uma variedade diferenciável e seja (U, φ) um sistema de coordenadas local para um ponto $p \in U \subset M$ com $\varphi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$. Se $T \in T_s^r(M)$, então sobre U

$$T = T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \partial_{i_1} \otimes \partial_{i_2} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes dx^{j_2} \otimes \dots \otimes dx^{j_s},$$

onde cada índice é somado de 1 a n .

Demonstração. Deve-se mostrar que o conjunto $\{\partial_{i_1} \otimes \partial_{i_2} \dots \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes dx^{j_2} \otimes \dots \otimes dx^{j_s},$ onde cada índice varia de 1 a $n\}$ é uma base para $T_s^r(M)$, isto é, este conjunto gera $T_s^r(M)$ e é linearmente independente. Suponha que

$$T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \partial_{i_1} \otimes \partial_{i_2} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes dx^{j_2} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} = 0.$$

Aplicando ao elemento $(dx^{k_1}, dx^{k_2}, \dots, dx^{k_r}, \partial_{l_1}, \partial_{l_2}, \dots, \partial_{l_s})$, tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} (dx^{k_1}, \dots, dx^{k_r}, \partial_{l_1}, \dots, \partial_{l_s}) \\ &= T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \delta_{i_1}^{k_1} \dots \delta_{i_r}^{k_r} \delta_{l_1}^{j_1} \dots \delta_{l_s}^{j_s} = T_{l_1 \dots l_s}^{k_1 \dots k_r}. \end{aligned}$$

Mostrou-se então que o conjunto é linearmente independente. Finalmente, utilizando parte do resultado acima, pode-se concluir que

$$T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} = T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s}).$$

□

Corolário 3.1. *Seja M^n uma variedade diferenciável. Então:*

1. *A dimensão de $T_s^r(M)$ é igual a n^{r+s} onde n é a dimensão da variedade.*
2. *Os vetores tangentes a M são tensores do tipo $(0, 1)$, isto é, $T_1^0(M) = T_p(M)$.*
3. *As 1-formas são tensores do tipo $(1, 0)$, isto é, $T_0^1(M) = T_p^*(M)$.*

Definição 3.21. *Um campo tensorial do tipo (r, s) sobre um conjunto $U \subset M$ é uma aplicação que associa a cada ponto $p \in U$ um tensor do tipo (r, s) em p .*

Definição 3.22. *Um tensor métrico g sobre uma variedade diferenciável M é um campo tensorial do tipo $(2, 0)$, simétrico, isto é,*

$$g(X_p, Y_p) = g(Y_p, X_p), \forall X_p, Y_p \in T_p(M),$$

definido sobre toda a variedade M .

Definição 3.23. *Um tensor métrico é dito não degenerado se para todo $X_p \in T_p(M)$ têm-se que $g(X_p, Y_p) = 0$, então $Y_p = 0$.*

Definição 3.24. *Uma variedade pseudo-riemanniana é um par ordenado (M^n, g) onde M^n é uma variedade diferenciável munida de um tensor métrico g não degenerado.*

Observação 3.6.2. Se M^n é uma variedade diferenciável e g um tensor métrico, não degenerado, positivo definido, isto é, $g(X_p, Y_p) \geq 0, \forall X_p \in T_p(M)$, diz-se então que o par (M^n, g) é uma variedade riemanniana.

Em termos das coordenadas locais, o tensor métrico será dado por

$$g = g_{mk} dx^m \otimes dx^k.$$

Aplicando em particular aos vetores da base coordenada de $T_p(M)$,

$$\begin{aligned} g(\partial_i, \partial_j) &= g_{mk} dx^m \otimes dx^k (\partial_i, \partial_j) \\ &= g_{mk} \delta_i^m \delta_j^k = g_{ij}. \end{aligned}$$

Observa-se que em termos de suas componentes, g é dito não degenerado se a matriz (g_{ij}) formada por suas componentes for não singular. Deste modo, dado um tensor métrico g , pode-se definir um único tensor do tipo $(0, 2)$ tal que, em termos de suas componentes, $g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i$. A matriz (g^{ij}) formada pelas componentes deste tensor é portanto a inversa da matriz (g_{ij}) . O tensor métrico fornece o isomorfismo entre todos os tensores definidos sobre M (“subir e descer”, índices).

Definição 3.25. *Seja g um tensor métrico para a variedade M^n . Seja p o número de auto-valores positivos associados a matriz (g_{ij}) no ponto $\bar{p}$ e q o número de auto-valores negativos. A assinatura de g no ponto $\bar{p}$ é igual a diferença entre p e q . No caso riemanniano tem-se $q = 0$.*

Será denotado por $M^n(p, q)$, a variedade de dimensão n com p auto-valores positivos e q auto-valores negativos associados a matriz (g_{ij}) . Observe que $n = |p| + |q|$.

Definição 3.26. *Seja (M^n, g) uma variedade pseudo-riemanniana. A métrica g é chamada de métrica de Lorentz se sua assinatura for $(n - 2)$, ou seja, $q = 1$.*

Definição 3.27. *Uma conexão afim ∇ sobre uma variedade diferenciável M é uma aplicação que associa a cada par de campos vetoriais diferenciáveis X e Y sobre M um novo campo vetorial diferenciável $\nabla_X Y$ tal que satisfaz as seguintes condições:*

- 1- $\nabla_X(\alpha Y + \beta Z) = \alpha \nabla_X Y + \beta \nabla_X Z, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
- 2- $\nabla_{(fX+gY)} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z, \forall f, g \in \mathcal{F}(M).$
- 3- $\nabla_X fY = (Xf)Y + f \nabla_X Y, \forall f \in \mathcal{F}(M).$

$\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. $\nabla_X Y$ é denominado derivada covariante de Y na direção X .

Em termos de coordenadas locais, será definida as n^3 - funções Γ_{ij}^k dadas por

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

Portanto, $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$,

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{X^i \partial_i} Y^j \partial_j \\ &= X^i (\partial_i Y^k + \Gamma_{ij}^k Y^j) \partial_k \\ &= \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} X^i + \Gamma_{ij}^k X^i Y^j \right) \partial_k. \end{aligned}$$

Γ_{ij}^k são os chamados símbolos de Christoffel da conexão ∇ . Em particular,

$$\nabla_{\partial_i} Y = \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \partial_k = Y_{;i}^k \partial_k.$$

Teorema 3.5. *Seja (M^n, g) uma variedade pseudo-riemanniana (riemanniana). Então existe um conexão ∇ para M satisfazendo*

$$1- [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X.$$

$$2- Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_X Z, Y).$$

Esta conexão é denominada conexão riemanniana.

Demonstração. De fato, basta definir a conexão $\nabla_X Y$ por

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) - g([Z, Y], X).$$

de onde se verifica que ∇ satisfaz as condições da definição 3.27. $\square$

Corolário 3.2. *Seja ∇ a conexão riemanniana para a variedade (M^n, g) . Então:*

$$1- \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \forall i, j, k = 1, \dots, n. \text{ (Condição de simetria).}$$

$$2- \nabla_X g = 0, \forall X \in \mathcal{X}(M), \text{ isto é, a derivada covariante da métrica é nula.}$$

Demonstração.

1. Se ∇ é uma conexão riemanniana para M , pelo item 1 do teorema 3.5 tem-se que para $X = \partial_i$ e $Y = \partial_j$ satisfaz

$$0 = [\partial_i, \partial_j] = \nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i = \Gamma_{ij}^k \partial_k - \Gamma_{ji}^k \partial_k,$$

ou seja,

$$0 = (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \partial_k.$$

Como os vetores ∂_k são linearmente independentes pode-se concluir que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ para $k = 1, 2, \dots, n$. A arbitrariedade de ∂_i e ∂_j garantem o resultado para todo $i, j = 1, 2, \dots, n$.

2. Escrevendo a condição 2 do teorema 3.5, em termos dos vetores da base coordenada, obtém-se

$$\partial_l g(\partial_j, \partial_k) = g(\nabla_{\partial_l} \partial_j, \partial_k) + g(\nabla_{\partial_l} \partial_k, \partial_j).$$

Logo,

$$\partial_l g_{jk} = g_{mk} \Gamma_{lj}^m + g_{mj} \Gamma_{lk}^m.$$

Como visto anteriormente $g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i$. Derivando esta expressão em relação à coordenada x^l tem-se que,

$$g_{jk} \partial_l g^{ij} + g^{ij} \partial_l g_{jk} = 0.$$

Substituindo a expressão de $\partial_l g_{jk}$ obtida anteriormente

$$g_{jk} \partial_l g^{ij} = -g^{ij} (g_{mk} \Gamma_{lj}^m + g_{mj} \Gamma_{lk}^m) = -g^{ij} g_{mk} \Gamma_{lj}^m - \delta_m^i \Gamma_{lk}^m = -g^{ij} g_{mk} \Gamma_{lj}^m - \Gamma_{lk}^i.$$

Multiplicando ambos os membros por g^{mk} e somando em k , obtém-se

$$\begin{aligned} g^{mk} g_{jk} \partial_l g^{ij} &= -g^{mk} g_{mk} g^{ij} \Gamma_{lj}^m - g^{mk} \Gamma_{lk}^i \\ \delta_j^m \partial_l g^{ij} &= -g^{ij} \Gamma_{lj}^m - g^{mk} \Gamma_{lk}^i. \end{aligned}$$

Logo,

$$\partial_l g^{im} = -g^{ij} \Gamma_{lj}^m - g^{mk} \Gamma_{lk}^i.$$

Calculando agora $\nabla_{\partial_l} dx^i$. Utilizando a definição de ∇ , substituindo a expressão de $\partial_l g^{im}$ e lembrando que g_{ij} fornece o isomorfismo entre $T_p(M)$ e $T_p^*(M)$, obtém-se

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_l} dx^i &= \nabla_{\partial_l} g^{ij} \partial_j = (\partial_l g^{im} + \Gamma_{lj}^m g^{ij}) \partial_m = (-g^{ij} \Gamma_{lj}^m - g^{km} \Gamma_{lk}^i + g^{ij} \Gamma_{lj}^m) \partial_m \\ &= -\Gamma_{lk}^i g^{km} \partial_m = -\Gamma_{lk}^i dx^k. \end{aligned}$$

Enfim, para mostrar que $\nabla_X g = 0 \ \forall X \in \mathcal{X}(M)$, basta provar que $\nabla_{\partial_i} g = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_i} g &= \nabla_{\partial_i} g_{jk} dx^j \otimes dx^k \\ &= \partial_i g_{jk} dx^j \otimes dx^k + g_{jk} (\nabla_{\partial_i} dx^j \otimes dx^k + dx^j \otimes \nabla_{\partial_i} dx^k) \\ &= \partial_i g_{jk} dx^j \otimes dx^k - g_{jk} \Gamma_{im}^j dx^m \otimes dx^k - g_{jk} \Gamma_{im}^k dx^j \otimes dx^m \\ &= (\partial_i g_{jk} - g_{mk} \Gamma_{ij}^m - g_{jm} \Gamma_{ik}^m) dx^j \otimes dx^k. \end{aligned}$$

Substituindo a expressão de $\partial_i g_{jk}$ verifica-se que,

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial_i} g &= (g_{mk} \Gamma_{ij}^m + g_{mj} \Gamma_{ik}^m - g_{jm} \Gamma_{ik}^m - g_{mk} \Gamma_{ij}^m) dx^j \otimes dx^k \\ \nabla_{\partial_i} g &= 0. \end{aligned}$$

A condição demonstrada acima será escrita em termos das coordenadas como

$$\nabla_{\partial_k} g = g_{ij;k} = g_{;k}^{ij} = 0$$

□

De agora em diante nosso estudo será restrito, considerando apenas as conexões riemannianas.

Os resultados acima permitem escrever a conexão riemanniana em termos da métrica, ou seja, tomando a condição 2 do teorema (3.5),

$$\partial_i g_{lj} = g_{kl} \Gamma_{ij}^k + g_{kj} \Gamma_{il}^k \quad , \quad \partial_j g_{li} = g_{kl} \Gamma_{ji}^k + g_{ki} \Gamma_{jl}^k \quad , \quad \partial_l g_{ij} = g_{ki} \Gamma_{lj}^k + g_{kj} \Gamma_{li}^k$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \partial_i g_{lj} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} &= g_{kl} \Gamma_{ij}^k + g_{kj} \Gamma_{il}^k + g_{kl} \Gamma_{ji}^k + g_{ki} \Gamma_{jl}^k - g_{ki} \Gamma_{lj}^k - g_{kj} \Gamma_{li}^k \\ &= 2g_{ml} \Gamma_{ij}^m. \end{aligned}$$

E portanto, multiplicando ambos os membros por g^{kl} e somando em l , obtém-se

$$\begin{aligned} g^{kl} (\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}) &= 2\delta_m^k \Gamma_{ij}^m \\ \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} g^{kl} \{ \partial_i g_{lj} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij} \}. \end{aligned} \tag{3.50}$$

3.6.4 O Tensor Curvatura

Em geometria diferencial o tensor de curvatura é uma noção métrica muito importante. Ele é uma generalização da *Curvatura de Gauss* para superfícies em dimensões maiores.

A geometria infinitesimal das variedades de Riemann com dimensão igual 3 é demasiada complicada para ser descrita totalmente por um número em um ponto dado (tal como ocorre quando a dimensão é menor ou igual a 2). Assim em 2 dimensões a curvatura pode ser representada por um número escalar [ou tensor de ordem zero], em 3 dimensões a curvatura pode ser representada por um tensor de segunda ordem (como por exemplo o *tensor de Ricci*). Entretanto para dimensões totalmente gerais necessita-se ao menos um tensor de quarta ordem (como o *tensor de Riemann*).

Definição 3.28. *Seja M uma variedade diferenciável com conexão ∇ . O tensor de curvatura de Riemann é um tensor do tipo $(3, 1)$ dado por*

$$\begin{aligned} R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y, Z) &\mapsto R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \end{aligned}$$

No sistema de coordenadas local (U, φ) com $\varphi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ tem-se

$$R(\partial_j, \partial_k)\partial_i = R_{ijk}^m \partial_m.$$

Tomando a definição do tensor de Riemann e lembrando que $[\partial_j, \partial_k] = 0$.

$$R(\partial_j, \partial_k)\partial_i = \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_k} \partial_i - \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_j} \partial_i. \quad (3.51)$$

Aplicando em (3.51) a definição de derivada covariante em termos de coordenadas locais, obtém-se a expressão

$$R(\partial_j, \partial_k)\partial_i = \nabla_{\partial_j}(\Gamma_{ki}^l \partial_l) - \nabla_{\partial_k}(\Gamma_{ji}^l \partial_l). \quad (3.52)$$

Aplicando novamente a definição da derivada covariante em (3.52), obtém-se a expressão

$$\begin{aligned} R(\partial_j, \partial_k)\partial_i &= \partial_j \Gamma_{ki}^l \partial_l + \Gamma_{ki}^l \nabla_{\partial_j} \partial_l - \partial_k \Gamma_{ji}^l \partial_l - \Gamma_{ji}^l \nabla_{\partial_k} \partial_l \\ &= \partial_j \Gamma_{ki}^l \partial_l + \Gamma_{ki}^l \Gamma_{jl}^m \partial_m - \partial_k \Gamma_{ji}^l \partial_l - \Gamma_{ji}^l \Gamma_{kl}^m \partial_m \\ &= \partial_j \Gamma_{ki}^m \partial_m + \Gamma_{ki}^l \Gamma_{jl}^m \partial_m - \partial_k \Gamma_{ji}^m \partial_m - \Gamma_{ji}^l \Gamma_{kl}^m \partial_m \\ &= \left[\frac{\partial \Gamma_{ki}^m}{\partial x^j} + \Gamma_{ki}^l \Gamma_{jl}^m - \frac{\partial \Gamma_{ji}^m}{\partial x^k} - \Gamma_{ji}^l \Gamma_{kl}^m \right] \partial_m \end{aligned}$$

Portanto,

$$R_{ijk}^m = \frac{\partial \Gamma_{ki}^m}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ji}^m}{\partial x^k} + \Gamma_{ki}^l \Gamma_{jl}^m - \Gamma_{ji}^l \Gamma_{kl}^m. \quad (3.53)$$

Segue de (3.50) que as componentes do tensor de Riemann são expressas em termos do tensor métrico e suas derivadas primeira e segunda.

3.6.4.1 Propriedades de Tensor de Riemann

1. $R_{ijk}^m = -R_{ikj}^m$. (Anti-simétrica).
2. $R_{ijk}^m + R_{jki}^m + R_{kij}^m = 0$. (Primeira identidade de Bianchi).
3. Verifica-se que

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_l} R_{ijk}^m \partial_m &= \partial_l R_{ijk}^m \partial_m + R_{ijk}^m \nabla_{\partial_l} \partial_m = \partial_l R_{ijk}^m \partial_m + R_{ijk}^m \Gamma_{lm}^n \partial_n \\ &= \partial_l R_{ijk}^m \partial_m + R_{ijk}^n \Gamma_{ln}^m \partial_m = (\partial_l R_{ijk}^m + R_{ijk}^n \Gamma_{ln}^m) \partial_m.\end{aligned}$$

Denota-se por $R_{ijk;l}^m = \frac{\partial R_{ijk}^m}{\partial x^l} + R_{ijk}^n \Gamma_{ln}^m$.

Assim, analogamente ao item 2, tem-se que

$$R_{ijk;l}^m + R_{ilj;k}^m + R_{ikl;j}^m = 0. \quad (\text{Segunda Identidade de Bianchi}). \quad (3.54)$$

Observação 3.6.3.

1. Uma variedade pseudo-riemanniana (riemanniana) é dita pseudo-euclidiana (euclidiana) quando as componentes do *tensor de Riemann* forem todas nulas, ou seja, $R_{ijk}^m = 0$.
2. O tensor de Riemann covariante é obtido aplicando o tensor métrico g_{mt} , ou seja,

$$R_{mijk} = g_{mt} R_{ijk}^t \quad (3.55)$$

O *tensor curvatura de Riemann*, por ter 4 índices, tem 256 componentes em 4 dimensões (4^4). Porém, aplicando as propriedades obtidas acima é possível reduzir drasticamente o número de componentes não nulas e independentes, que passam a totalizar 20.

3.6.4.2 Tensor de Ricci e Escalar de Curvatura

Outros tensores podem ser construídos usando o tensor métrico para formar combinações lineares de R_{ijk}^m . As mais utilizadas são as suas contrações.

Definição 3.29. *Seja R o tensor de Riemann para a variedade pseudo-riemanniana M . Define-se o tensor de Ricci, em termos de suas coordenadas locais, como sendo*

$$Ric = R_{ij} dx^i \otimes dx^j, \quad (3.56)$$

onde $R_{ij} = R_{ijm}^m$.

Em termos do sistema de coordenadas locais, as componentes do tensor Ricci são dadas por

$$R_{ik} = R_{ijk}^j = \partial_j \Gamma_{ki}^j - \partial_k \Gamma_{ji}^j + \Gamma_{jm}^j \Gamma_{ik}^m - \Gamma_{km}^j \Gamma_{ji}^m \quad (3.57)$$

Decorre da definição 3.29 o *tensor de Ricci* é simétrico do tipo $(0, 2)$, isto é, $R_{ij} = R_{ji}$ e $Ric \in T_2^0(M)$. Este fato lhe confere 10 componentes independentes no caso quadridimensional. Por esse motivo o *tensor de Ricci* captura metade das informações do *tensor de Riemann*.

Contraindo o *tensor de Ricci* define-se o *escalar de curvatura* por:

$$R = g^{ij} R_{ij} = g^{ij} R_{ijm}^m. \quad (3.58)$$

Este escalar relaciona a cada ponto do espaço-tempo um único número real, caracterizando a curvatura intrínseca do espaço-tempo naquele ponto.

Será visto no próximo capítulo que o *tensor de Ricci* e o *escalar de curvatura* desempenham um papel importante na relatividade geral. Sendo o *tensor de Ricci* o termo dominante da *equação de campo de Einstein*. Têm-se ainda como propriedade do escalar de curvatura o seguinte teorema:

Teorema 3.6. $R_{;k} = 2R_{k;j}^j$ onde $R_{k;j}^j = g^{ij} R_{ik;j} = g^{mn} R_{mnk;j}^j$.

Demonstração. Tomando a Segunda Identidade de Bianchi

$$R_{ijk;l}^m + R_{ilj;k}^m + R_{ikl;j}^m = 0.$$

Fazendo $l = m$ na expressão acima

$$R_{ijk;m}^m + R_{imj;k}^m + R_{ikm;j}^m = 0.$$

Em seguida, considere a propriedade 1 do tensor de *Riemann*. Assim,

$$R_{ijk;m}^m - R_{ijm;k}^m + R_{ikm;j}^m = 0.$$

Pela definição 3.29, obtém-se

$$R_{ijk;m}^m - R_{ij;k} + R_{ik;j} = 0.$$

Multiplicando ambos os membros por g^{ij} e somando em i e j tem-se que

$$\begin{aligned} g^{ij} \cdot (R_{ijk;m}^m - R_{ij;k} + R_{ik;j}) &= g^{ij} \cdot 0 \\ R_{k;m}^m - R_{;k} + R_{k;j}^j &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $R_{;k} = 2R_{k;j}^j$. □

3.7 Torção e Curvatura

Gravitação e Cosmologia tratam da aplicação, à Física, da curvatura e torção do espaço-tempo.

“Curvatura” é medida pelo tanto que um triângulo retângulo se desvia do Teorema de Pitágoras (a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa). A “torção” mede o quanto você se desloca para fora de uma trajetória circular fechada, quando você tenta fazer a volta completa, sem auxílio de forças aceleradoras. Essa torção pode estar ligada ao momento angular intrínseco.

3.7.1 Contribuições de Élie Cartan

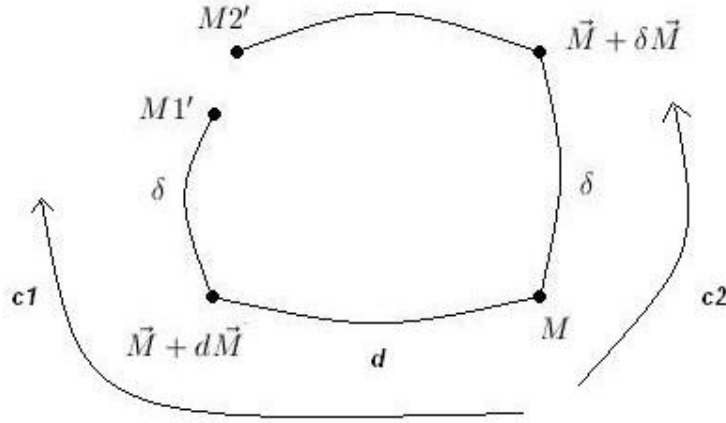
A conexão de Christoffel, obtida através da métrica e utilizada na Teoria da Relatividade Geral, é um caso particular de conexão afim. Geometricamente as conexões fornecem a noção de afinidade, ou seja, de propriedades que permanecem invariantes sob translações, ou transformações afins, tais como paralelismo. A noção de conexão, apesar de poder ser dada pela métrica, não está logicamente associada às noções de medidas de comprimento, área, etc.

Élie Cartan (1869 – 1951), entre 1922 e 1925, desenvolveu uma abordagem para lidar com conexões, introduzindo a sua parte anti-simétrica na geometria diferencial. Entre 1929 e 1932, Cartan e Einstein trocaram uma série de cartas onde o primeiro insistia na separação dos conceitos de metricidade e paralelismo. Esta separação se reflete no princípio variacional da teoria física da gravitação, onde ao invés de variar a ação em relação a métrica deve-se variá-la em relação a conexão afim, obtendo deste modo novos graus dinâmicos de liberdade.

Cartan introduziu a parte anti-simétrica da conexão afim como um novo e independente objeto. Ele provou que esta parte da conexão tem as propriedades de um tensor e se transforma como tal, denominando-o de tensor de torção. Chegou inclusive a sugerir que o mesmo deveria estar associado a algum tipo de momentum angular intrínseco da matéria, mas não seguiu adiante. Anos após a introdução do conceito de spin na Mecânica Quântica, que representa o momentum angular intrínseco da matéria, o trabalho de Cartan foi retomado. Mostrou-se então que a torção do espaço-tempo poderia ser gerada pela distribuição da densidade de spin. Nesta visão a torção só poderia interagir por contato, através de interações do tipo spin-spin. Estas interações contribuiriam para o tensor de energia-momentum e, por sua vez, o mesmo afetaria o campo gravitacional. Poderia-se então notar a presença da torção pelo seu efeito no campo gravitacional.

3.7.2 O método do quase-paralelogramo de Élie Cartan

Suponha um espaço quadri-dimensional V^4 e dois símbolos de diferenciação δ e d permutáveis nas coordenadas (y^i) associadas aos pontos.



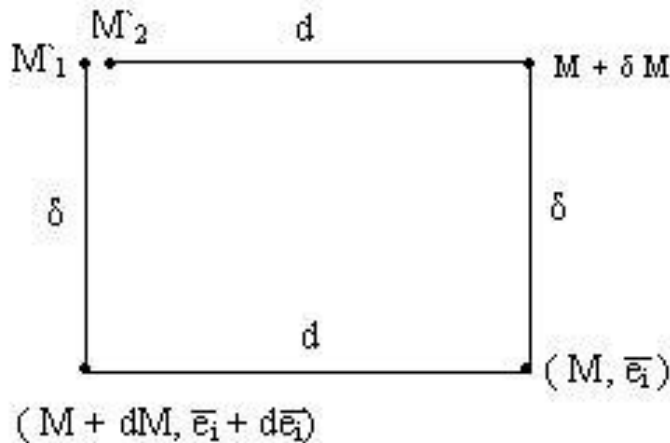
$$\delta dy^i = d\delta^i$$

A partir de M em V^4 percorre-se um caminho C_1 e através de uma diferenciação d obtém-se o vetor:

$$\vec{M} + d\vec{M}(y + dy^i)$$

Em seguida efetua-se a segunda diferenciação δ e M_1' . Por um caminho C_2 , a partir de $\vec{M}$, efetua-se a diferenciação δ , que não faz passar de $\vec{M}$ a $\vec{M} + \delta\vec{M}$, e posteriormente uma segunda diferenciação que não faz passar de $\vec{M} + \delta d\vec{M}$ a M_2' de coordenadas $(y^i + dy^i + \delta y^i + d\delta y^i)$. Considerando a propriedade de permutação de d e δ , pode-se perguntar se atingimos o mesmo ponto $M' = M_1' = M_2'$. Neste sentido, considere

$$(M, M + dM, M', M + \delta M) \longrightarrow \text{Paralelogramo de Cartan.}$$



Utilizando-se o caminho C_1 para chegar-se a M'_1 , tem-se a partir do sistema:

$$\begin{aligned}(M, \vec{e}_i) &\rightarrow (M + dM, \vec{e}_i + d\vec{e}_i) \\ d\vec{M} &= dy^i \vec{e}_i \\ d\vec{e}_i &= w_i^h(d) \vec{e}_h\end{aligned}$$

onde $w_i^h(d)$ é a forma diferencial w_i^h para os dy^i .

O desenvolvimento de $(M + dM, M'_1)$ nos leva à:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM'_1} &= dM + \delta M + \delta dM \\ (\vec{e}'_{i1}) - \vec{e}_i &= d\vec{e}_i + \delta \vec{e}_i + \delta d\vec{e}_i.\end{aligned}$$

Por conseguinte, pode-se imaginar que seria possível passar de $(M'_1, \vec{e}_{i1})$ à $(M'_2, \vec{e}_{i2})$, mediante as formulas:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M'_1 M'_2} &= d\delta \vec{M} - \delta d\vec{M} \neq 0 \\ (\vec{e}'_{i2}) - (\vec{e}'_{i1}) &= d\delta \vec{e}_i - \delta d\vec{e}_i \neq 0.\end{aligned}$$

Em primeiro lugar:

$$d(\delta \vec{M}) - \delta d\vec{M} = d(\delta y^i \vec{e}_i) - \delta(dy^i \vec{e}_i) = \delta y^i d\vec{e}_i - dy^i \delta \vec{e}_i,$$

pois

$$\begin{aligned}d(\delta y^i \vec{e}_i) &= (d\delta y^i) \vec{e}_i + \delta y^i d\vec{e}_i \\ \delta(dy^i \vec{e}_i) &= (\delta dy^i) \vec{e}_i + dy^i \delta \vec{e}_i \\ \Rightarrow d\delta M - \delta dM &= \delta y^i d\vec{e}_i - dy^i \delta \vec{e}_i = (\Gamma_{ki}^h dy^k \delta y^i - \Gamma_{ki}^h dy^i \delta y^k) \vec{e}_h.\end{aligned}$$

Observação 3.1. Sabe-se que $d\delta y^i = \delta dy^i$ pois δ e d são permutáveis nas coordenadas y^i onde $w_i^j = \Gamma_{ki}^h dy^k$. sendo que Γ_{ki}^j é a conexão afim.

Assim, fazendo uma troca conveniente de índices i e k , tem-se que:

$$d\delta \vec{M} - \delta d\vec{M} = (\Gamma_{ki}^h - \Gamma_{ik}^h) dy^k \delta y^i \vec{e}_h = 0$$

Portanto, $M' = M'_1 = M'_2$. Tem-se assim um paralelogramo de Cartan fechado.

Por outro lado,

$$(\vec{e}'_{i2}) - (\vec{e}'_{i1}) = d\delta \vec{e}_i - \delta d\vec{e}_i \neq 0.$$

Então, de acordo com os resultados precedentes, tem-se que

$$\begin{aligned}(\vec{e}'_{i2} - \vec{e}'_{i1}) &= d\delta \vec{e}_i - \delta d\vec{e}_i = d(w_i^h(\delta) \vec{e}_h) - \delta(w_i^h(d) \vec{e}_h) \\ (\vec{e}'_{i2} - \vec{e}'_{i1}) &= [dw_i^h(\delta) - \delta w_i^h(d)] \vec{e}_h + w_i^k(\delta) d\vec{e}_k - w_i^k(d) \delta \vec{e}_k \\ d\delta \vec{e}_i - \delta d\vec{e}_i &= [dw_i^h(\delta) - \delta w_i^h(d) + w_i^k(\delta) w_k^h(d) - w_i^h(d) w_k^h(\delta)] \vec{e}_h\end{aligned}$$

$$\Omega_i^h = dw_i^h(\delta) - \delta w_i^h(d) + w_i^k(\delta)w_k^h(d) - w_i^k(d)w_k^h(\delta).$$

Obtém-se deste modo a fórmula da curvatura do espaço utilizando o método do quase-paralelogramo de Élie Cartan, onde não se utiliza uma métrica para obtenção da mesma. Em geral, na presença de torção os pontos M'_1, M'_2 e M não coincidem. Assim, o paralelogramo não é fechado em geral. No espaço riemanniano o tensor de torção é nulo, a conexão é totalmente determinada pela métrica e simplesmente se reduz ao símbolo de Christoffel.

No entanto, em geral para um espaço quadri-dimensional, os coeficientes da conexão Γ_{ki}^j podem ser expressos em termos da métrica, da torção e da derivada covariante da métrica. A partir dos resultados anteriores tem-se que:

$$\begin{aligned} dw_i^h(\delta) &= d(\Gamma_{si}^h \delta y^i) = \delta \Gamma_{si}^h + \Gamma_{si}^h d\delta y^s \\ dw_i^h(\delta) - \delta w_i^h(d) &= \delta(\Gamma_{si}^h) dy^r \delta y^s - \delta(\Gamma_{si}^h) \delta y^r dy^s \\ dw_i^h(\delta) - \delta w_i^h(d) &= (\delta_r \Gamma_{si}^h - \delta_s \Gamma_{ri}^h) dy^r \delta y^s. \end{aligned}$$

Da mesma maneira tem-se que

$$\begin{aligned} w_i^k(\delta)w_i^h(d) - w_i^k(d)w_k^h(\delta) &= (\Gamma_{si}^k \Gamma_{rl}^h - \Gamma_{ri}^k \Gamma_{sk}^h) dy^r \delta y^s \\ \Omega_i^h &= R_{irs}^h dy^r \delta y^s \end{aligned}$$

onde

$$R_{irs}^h = \delta_r \Gamma_{si}^h - \delta_s \Gamma_{ri}^h + \Gamma_{rk}^h \Gamma_{si}^k - \Gamma_{sk}^h \Gamma_{ri}^k$$

com R_{irs}^h o *tensor curvatura de Riemann*.

4 Relatividade

Em 1915 Einstein propôs a Teoria da Relatividade Geral, que tem como postulado o fato de que sistemas acelerados são fisicamente equivalentes àqueles submetidos a campos gravitacionais, tornando equivalentes a massa inercial e a massa gravitacional de um corpo. Einstein demonstrou que toda porção de matéria curva o espaço-tempo à sua volta e esta curvatura observada acaba gerando um campo gravitacional. Com isto, surgiu uma teoria que generaliza a relatividade restrita para o caso de referenciais não inerciais e reduz-se à Teoria da Gravitação de Newton no regime clássico, e ainda complementa esta última para incluir também o caso de grandes densidades de massa.

A Teoria da Relatividade Geral baseia-se no chamado princípio da equivalência, que enuncia que “em cada ponto de um espaço-tempo imerso em um campo gravitacional arbitrário é possível escolhermos um sistema de coordenadas localmente inercial de forma que, em uma região suficientemente pequena do ponto em questão, as leis da natureza tenham a mesma forma que num sistema de coordenadas cartesiano na ausência de aceleração”.

Neste capítulo será apresentada a teoria da relatividade de forma introdutória, sem a pretensão de expor o assunto de maneira completa e aprofundada. Serão abordadas as origens históricas da Teoria da Relatividade, e uma introdução matemática à Teoria da Relatividade Especial e Geral, exibindo ao final o conjunto de equações que relacionam a curvatura do espaço-tempo com a distribuição de matéria-energia no espaço.

4.1 Origens da Teoria da Relatividade

4.1.1 A Teoria Especial

A necessidade de se modificar as equações da transformação de Galileu foi reconhecida ao usá-las nas equações de Maxwell. O raciocínio a seguir, ilustra intuitivamente esta inconsistência.

Considere que seja possível a um observador viajar à velocidade da luz. A luz, pelas equações de Maxwell, é uma oscilação dos campos elétrico e magnético, periódica no espaço e oscilante no tempo. No referencial deste observador, a luz seria uma perturbação do campo eletromagnético periódica no espaço e constante no tempo. Tal

solução, no entanto, não existe como solução das equações de Maxwell que governam a propagação da luz.

Portanto, restavam as alternativas, ou de se modificar as equações Maxwell e manter a transformação de Galileu; ou de se modificar a transformação de Galileu.

Este impasse foi resolvido em 1905 por Albert Einstein. Sua interpretação das equações de transformação de Lorentz permitiram manter as equações de Maxwell inalteradas, mas exigiu uma revisão completa dos conceitos de tempo e espaço tão fundamentais à Mecânica Clássica.

4.1.2 A Invariância das Equações de Maxwell

Com a descoberta da lâmpada e da eletricidade, abriram-se novos campos de estudos na Física: o da eletricidade e do magnetismo. Trabalhando na Universidade de Cambridge, Inglaterra, Maxwell desenvolveu uma teoria que explicava estes fenômenos, na qual propunha que a luz era uma onda que se propaga no mesmo meio físico que é a causa do fenômeno elétrico e magnético. Maxwell mostrou ainda que, diferentemente das forças de Newton, a luz e a força magnética se propagavam a uma velocidade definida, c , de aproximadamente 300 mil quilômetros por segundo. Contudo, se a luz é uma onda, esta deve se propagar em algum meio mecânico, da mesma forma que o som se propaga no ar.

Sob o ponto de vista da teoria mecanicista, sendo a luz um fenômeno ondulatório, nada mais natural supor do que a existência de um meio mecânico para a sua propagação. Este meio foi chamado de éter. A idéia do éter é anterior a Maxwell. Ela surge com Descartes que retira da luz qualquer propriedade material, mas exige a existência de um meio para se propagar. Descartes rejeitava a idéia da “ação a distância”. Para ele, tanto a luz quanto o calor eram transmitidos por contato intermediário e se propagavam por pressão do éter. O éter possuiria propriedades físicas um tanto bizarras: deveria ser extremamente rígido para que a luz se propagasse e tênue o suficiente para que os corpos sólidos pudessem se mover. Huygens enuncia seu princípio que diz que “cada ponto do éter atingido pela excitação luminosa pode ser considerado como o centro de uma nova onda esférica” [2]. Para Newton todo o espaço é permeado por um meio elástico que é capaz de propagar vibrações a grandes velocidades. Euler antecipa os resultados de Maxwell, afirmando que a fonte de todos os fenômenos elétricos é o mesmo éter no qual a luz se propaga. Jules-Henry Poincaré (1854–1912) argumentava que “sabemos bem de onde nos vem a crença no éter. Se a luz leva vários anos para chegar de uma estrela distante até nós, durante esse período de tempo ela não mais estará na estrela e não estará, ainda, na Terra. Mas terá que estar em algum lugar e sustentada, por assim dizer, por algum suporte material”. ([12], p.32)

O éter era considerado o referencial inercial absoluto do eletromagnetismo e se essa substância realmente existia deveria ser detectável. Portanto, provar sua existência era demonstrar a existência de tal referencial inercial.

Em 1887, Albert Michelson e Edward Morley tentaram responder esta questão. Eles propuseram que se a Terra estivesse mesmo mergulhada em éter, deveria gerar um “vento de éter” com sua rotação, como um carro em movimento. Deste modo, a velocidade da luz na direção desse “vento” deveria ser maior que na direção oposta. No entanto, raios de luz disparados em direções opostas tinham no final exatamente a mesma velocidade. Este fato apontava que algo estava errado: ou na teoria do éter (o que exporia uma ferida mortal no mundo newtoniano) ou na teoria ondulatória da luz.

O princípio da relatividade de Galileu nos diz que as leis da Mecânica serão válidas em todos os referenciais que estejam em movimento retilíneo uniforme, um em relação ao outro. Isto quer dizer que observadores que se movem em uma reta com velocidade constante observam as mesmas leis da Mecânica que no caso de estarem parados. O princípio da relatividade “traduz a vontade de encontrar uma imagem do mundo que seja independente da situação dos diversos observadores” [10]. Este fato não é verdade para o eletromagnetismo. Sendo a luz um fenômeno eletromagnético, ela nada mais é do que a oscilação de dois campos perpendiculares entre si, o elétrico e o magnético. Ao nos movermos a uma velocidade próxima da luz e então observarmos um feixe de luz, teremos que o caráter oscilatório da luz deixará de existir. Este fato nega o princípio da relatividade, quando aplicado a leis do eletromagnetismo. Desta maneira, as equações de Maxwell não são compatíveis com os referenciais inerciais da Mecânica newtoniana. ... Este fato constituiu um dos grandes problemas da Física no início do século XX - o problema da invariância das Equações de Maxwell. ([12], p.52)

Einstein resolveu este problema com uma intuição genial: não há ondas de luz que pareçam congeladas, deixando de ondular. A luz é diferente dos outros tipos de onda. Nada consegue viajar mais rápido do que ela: sua velocidade, c , é constante e é também uma espécie de limite de velocidade do Universo.

Na nova teoria de Einstein não era necessário ter o éter como referencial inercial. Além disso, o princípio básico de sua teoria está no fato de não existir um sistema de referência absoluto. Sua nova formulação é baseada em dois postulados.

Postulado da constância da velocidade da luz: A velocidade da luz no vácuo é uma constante universal. É a mesma em todos os sistemas inerciais de referência. Não depende do movimento da fonte de luz, e tem igual valor em todas as direções.

Postulado do princípio da relatividade de Galileu: As leis físicas são idênticas em sistemas de referência, dotados de movimento retilíneo e uniforme, um em relação ao outro.

Einstein estende o Princípio da Relatividade de Galileu, antes aplicado apenas à Mecânica, ao Eletromagnetismo e à Óptica. Na Relatividade Geral, Einstein irá generalizar este princípio a todas as leis da natureza. Com este princípio, as equações de Maxwell assumem, em conjunto com as leis de movimento da Mecânica, o caráter de lei da Física. ([12], p.52)

Os postulados citados anteriormente permitirão a Einstein derivar as transformações entre referenciais. Estas transformações já tinham sido anteriormente obtidas por Lorentz que mostrava a invariância das equações do eletromagnetismo. Tais transformações possuem a seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{array} \right.$$

No entanto, Lorentz mantinha os conceitos de espaço e tempo absolutos pois estas transformações pareciam não ser nada além de um recurso matemático. A grande dificuldade para compreender estas transformações era que o tempo deixava de ser absoluto. Este dependia do movimento do observador. O tempo era relativo. Einstein necessita discutir conceitos primitivos da física: a simultaneidade, o tempo e o comprimento, reformulando-os segundo seus dois postulados. ([12], p.52)

Em 1905, num artigo publicado no *Annalen der Physik*, Einstein propõe em apenas três paginas que, se réguas e relógios se distorcem à medida que são acelerados, tudo o que se pode medir com estes instrumentos também muda, incluindo matéria e energia. A matéria e energia são conversíveis entre si segundo a equação $E = mc^2$. Toda matéria contém quantidades enormes de energia. Mesmo quantidades ínfimas de matéria podem produzir quantidades enormes de energia uma vez que são multiplicadas pelo quadrado da velocidade da luz.

Uma consequência direta disso é que a massa de um corpo aumenta à medida que ele acelera. Sua massa se tornaria infinita se ele atingisse a velocidade da luz o que iria requerer uma quantidade infinita de energia para acelerá-lo e é por isso que nenhum corpo pode atingir este limite de velocidade.

Outra consequência importante se faz presente nos processos que acontecem no núcleo de um átomo que convertem pouquíssima matéria em muita energia. Este é o princípio de funcionamento das estrelas e das bombas nucleares.

4.1.3 Teoria Geral

Em linhas gerais Teoria da Relatividade Geral é a generalização da Teoria da Gravitação de Newton. Publicada em 1915 por Albert Einstein, esta teoria leva em consideração as idéias descobertas na relatividade especial sobre o espaço e o tempo. Einstein propõe generalizar a relatividade dos movimentos uniformes aos movimentos acelerados. Esta generalização causou implicações profundas na nossa concepção de espaço-tempo. Levando, entre outras conclusões, ao fato de que a matéria (energia) curva o espaço e o tempo a sua volta. Desta forma, a gravitação é um efeito da geometria do espaço-tempo.

4.1.4 O Pensamento mais feliz de Einstein.

Embora a teoria da gravitação de Newton descrevesse com eficiência os movimentos dos objetos que sofrem a influência da gravidade, ela não oferecia qualquer explicação quanto à natureza dessa força misteriosa. Como pode dois corpos, separados por bilhões de quilômetros de distância um do outro, influenciar mutuamente seus movimentos? O próprio Newton tinha dúvidas em certas partes de sua teoria da gravitação. Em suas próprias palavras,

É inconcebível que a matéria bruta inanimada possa, sem a mediação de algo mais, que não seja material, afetar outra matéria e agir sobre ela sem contato mútuo. Que a gravidade seja algo inato, inerente e essencial à matéria, de tal maneira que um corpo possa agir sobre outro à distância através do vácuo e sem a mediação de qualquer outra coisa que pudesse transmitir sua força, é, para mim, um absurdo tão grande que não creio possa existir um homem capaz de pensar com competência em matérias filosóficas e nele incorrer. A gravidade tem de ser causada por um agente, que opera constantemente, de acordo com certas leis; mas se tal agente é material ou imaterial é algo que deixo à consideração dos meus leitores. ([13], p.634)

Ou seja,

... Newton aceitou a existência da gravidade e desenvolveu equações que descrevem com exatidão os seus efeitos, mas nunca ofereceu qualquer indicação sobre como ela atua. Ele deu ao mundo um “manual do proprietário”, da gravidade, que ensina como “usa-lá”, ... Mas deixou os processos internos – o conteúdo da “caixa preta”, da gravidade – envoltos em completo mistério. ([7], p.75)

Em 1907, Einstein durante um trabalho de revisão do artigo sobre a Teoria da Relatividade Especial ficou curioso em saber como a gravitação newtoniana poderia ser modificada para se ajustar a estrutura da relatividade especial. Einstein teve a idéia de analisar localmente um campo gravitacional, no referencial de um observador

em queda livre. Neste momento, ocorreu o que ele mesmo disse ser o “pensamento mais feliz de minha vida”. Tal como o campo elétrico gerado pela indução eletromagnética, o campo gravitacional só tem uma existência relativa. Da mesma forma que, para um observador em queda livre não existe campo gravitacional durante a queda. Como consequência deste fato ele propõe o chamado *Princípio da Equivalência*:

... o movimento acelerado e a imersão em um campo gravitacional (em regiões de observação suficientemente pequenas) são indistinguíveis entre si. Generalizando o princípio da relatividade ao demonstrar que todos os observadores, independentemente do estado de movimento, podem considerar-se em repouso, desde que reconheçam a presença de um campo gravitacional adequado. ([7], p.455)

Um exemplo que ilustraria este princípio seria imaginar um foguete viajando no espaço longe da ação de campos gravitacionais. Supondo que esse foguete esteja viajando com uma aceleração a , um observador localizado dentro do foguete também estará se deslocando com a mesma aceleração. Caso não exista janelas ou qualquer outro dispositivo do tipo, este observador não notará movimento algum. No entanto, ao soltar uma bola de sua mão ele observará que esta irá cair na direção do chão do foguete (região onde localiza-se os retrofoguetes). Enquanto em sua mão a bola tinha uma aceleração idêntica a do foguete. Quando esta é solta, passa a ter velocidade constante e o chão da nave acaba por alcançá-la.

O observador pode pensar que existe uma “força” misteriosa que atrai os objetos para o fundo da nave, da mesma forma como o campo gravitacional terrestre atrai os objetos para o solo. Para tal observador é difícil distinguir a origem dessa força, se é gravitacional ou inercial.

Existe assim uma completa equivalência física entre um campo gravitacional e a correspondente aceleração do sistema de referência. A descoberta dessa equivalência entre a gravidade e o movimento acelerado foi sem dúvida uma conclusão notável. Este fato causou grande entusiasmo em Einstein. O campo gravitacional está presente em todo o cosmos de forma abstrata, ao passo que o movimento acelerado, embora sendo algo mais complicado que o movimento uniforme, é concreto e tangível. Einstein verificou que poderia usar o conhecimento do movimento acelerado como um instrumento poderoso para descobrir os segredos da gravidade.

Desde 1907, Einstein sabia que um raio luminoso se curvaria na presença de um campo gravitacional forte. Este encurvamento da luz era uma consequência do princípio da equivalência. No entanto, era difícil fazer uma verificação experimental deste fato por meio de observações terrestres. Em 1911, Einstein compreendeu que a curvatura do raio luminoso em um campo gravitacional poderia ser verificada por meio de observações astronômicas. No ano seguinte, publicou outros artigos sobre gravitação nos quais compreendeu que as transformações de Lorentz não se aplicariam na estrutura mais geral que ele estava desenvolvendo. Nessa mesma época, Einstein verificou que, se todos os sistemas acelerados são equivalentes então a geometria euclidiana não

pode ser usada em todos eles. Einstein compreendeu que os fundamentos da geometria tinham significados físicos. Assim, ele estabeleceu uma conexão entre a gravidade e o movimento acelerado: a *curvatura* do espaço-tempo.

Para conseguir descrever o espaço-tempo curvo, Einstein começou por recordar, quando ainda se encontrava em Praga, o que havia estudado sobre a teoria das superfícies do grande matemático alemão do século XIX Carl Friedrich Gauss. No caso de uma superfície a duas dimensões, como a superfície da Terra, precisamos de um mapa, uma grelha que associa a cada ponto da superfície duas coordenadas, e um conjunto de números que convertem distâncias coordenadas, ou seja, distâncias medidas no mapa, a distâncias reais medidas na superfície. Este conjunto de números forma um quadro com as componentes de um objeto conhecido por tensor métrico. Em geral estes quadros de números são diferentes de ponto para ponto. A conversão de distâncias coordenadas em distâncias físicas na superfície é assim dada por um campo, campo tensorial métrico, que associa um tensor métrico a cada ponto.

Para lidar com espaços-tempo curvos a quatro dimensões, Einstein teve que recorrer à geometria diferencial de Bernhard Riemann, Gregorio Ricci e Tulio Levi-Civita, para o que beneficiou do apoio do seu amigo e colega Marcel Grossmann. No caso do espaço-tempo quadri-dimensional da teoria de Einstein, o tensor métrico, que tem dez componentes independentes, desempenha um duplo papel: descreve a geometria do espaço-tempo e o próprio campo gravitacional. A energia - quer a residente na matéria quer a que reside nos outros campos além do gravitacional - é a fonte dos campos gravitacionais que satisfazem equações diferenciais de segunda ordem no campo métrico. Para completar seu edifício Einstein teve que obter estas equações, chamadas equações de campo para o campo tensorial métrico. ([14])

Em outubro de 1912, Einstein escreveu para um físico amigo e seu companheiro, Arnold Sommerfeld [(1868–1951)]: “Em toda a minha vida nunca trabalhei arduamente nem a metade disto, e eu adquiri um grande respeito pela matemática ... comparada com este problema, a teoria original [da relatividade especial] parece brincadeira de criança. ([6], p. 205)

Estes trabalhos levaram mais três anos, dois deles com efetiva participação de Grossmann. Na segunda metade de 1915, Einstein finalmente concluiu sua teoria. O passo final para a Teoria da Relatividade Geral foi dado, quase que conjuntamente, por Einstein e David Hilbert (1862 – 1943).

No dia 20 de novembro de 1915, Hilbert submeteu seu artigo *Die Grundlagen der Physik*. Neste artigo apresentado à Academia Real de Ciências em Göttingen, Hilbert apresentou uma dedução correta para equações de campo da gravitação. A sua dedução

era independente da de Einstein, e era superior em alguns pontos. Contudo, este foi apenas o último passo para a completude da teoria, qual Hilbert reconheceu como criação de Einstein. Tanto Hilbert quanto Einstein admiravam a beleza da teoria e nunca se desentenderam sobre a questão de prioridade.

No dia 25 de novembro de 1915, Einstein apresentou seu artigo *Die Feldgleichungen der Gravitation* à Academia de Ciência da Prússia, onde anunciava a Teoria da Relatividade Geral. Em 1916, Einstein publicou outro artigo, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie* onde ampliava sua discussão sobre o assunto. Nestes trabalhos, Einstein conseguiu traduzir sua intuição física sobre o comportamento da natureza em uma teoria matemática que descreve o movimento livre em um espaço-tempo curvo.

O espaço-tempo descrito pela Teoria da Relatividade Geral se torna curvo em resposta aos efeitos da matéria que existe no Universo. No caso do Sistema Solar, a relatividade geral diz que um corpo com massa como a do Sol faz com que o espaço-tempo em torno dele se curve. Essa curvatura afeta o movimento dos planetas obrigando-os a descrever órbitas em torno do Sol.

As leis da Teoria Relativística da Gravitação são formuladas de forma que as tornam igualmente válidas em qualquer sistema de referência. Estas leis conectam matéria e energia com a estrutura geométrica do espaço-tempo, numa abordagem completamente diferente daquela usada por Isaac Newton.

A Teoria da Relatividade Geral mostra que o espaço e o tempo são quantidades dinâmicas que podem ser curvas em resposta aos efeitos da matéria. Por outro lado, o espaço pode alterar o comportamento da matéria.

Em novembro de 1915, Einstein calculou o ângulo do desvio de uma estrela cuja luz passaria próxima ao Sol e obteve como resposta 0,00049 grau (1,75 segundos de arco). Einstein havia feito esta previsão usando suas equações de campo. Restava agora um teste real da relatividade geral. Este teste consistia não apenas em saber se um raio de luz se curvaria ao passar próximo de um corpo massivo, mas também o quanto este raio se curvaria.

Para a comprovação deste fato, duas expedições britânicas chefiadas pelo astrônomo Arthur Stanley Eddington (1882 – 1944), foram enviadas à Sobral no Brasil e à ilha do Príncipe na África. Estas expedições tinham por objetivo medir a posição das estrelas durante um eclipse total do Sol em 29 de maio de 1919. A expedição ao Brasil foi coordenada pelos ingleses, Andrew Claude de la Cherois Crommelin (1865 – 1939) e Charles Rundle Davidson (1875 – 1970), enquanto a expedição à África foi comandada pelo próprio Eddington.

No dia 6 de novembro de 1919, o resultado destas expedições foi anunciado em uma reunião conjunta da Royal Society e da Royal Astronomical Society. Depois de seis meses de análise do material fotográfico coletado por estas expedições, as previsões de Einstein sobre os efeitos da gravidade em relação a luz foram confirmadas. As fotografias tiradas de estrelas posicionadas próximas a borda do Sol mostraram que os

raios de luz emitidos por elas “curvavam-se” ao passarem próximos ao Sol. A comprovação observacional da Teoria da Relatividade Geral dá a Einstein fama mundial. A Ciência ganhava uma nova Teoria da Gravitação Universal, que substituiria aquela proposta no século XVII pelo físico e matemático inglês Isaac Newton.

Por fim, pode se dizer que

... a relatividade restrita permitiu clarificar como os campos elétricos e magnéticos são partes de uma única entidade, o campo eletromagnético, que se separa nas componentes elétrica e magnética para diferentes observadores. De modo semelhante, a relatividade geral clarifica como a estrutura inercial do espaço-tempo e o campo gravitacional não são duas entidades separadas mas duas componentes de uma única entidade, o campo inércio-gravitacional. A estrutura inercial determina as trajetórias das partículas livres. A gravidade afeta igualmente todas as partículas, independentemente da sua natureza, desviando-as das trajetórias livres. Estas regras são observadas por todas as partículas, e determinadas pela mesma entidade, o campo inércio-gravitacional representado pelo espaço-tempo curvo. A conexão entre aceleração (ou inércia) e gravidade traduz-se por uma unificação dos conceitos e não pela redução de um conceito ao outro ([14]).

4.2 A Relatividade Especial

A Teoria da Relatividade Especial aborda conceitos fundamentais como de espaço, tempo, massa e energia, para a descrição dos fenômenos naturais. Ao invés de buscar a descrição de alguma substância básica do Universo, a teoria da relatividade relaciona os vários aspectos e relações observáveis no Universo (daí o nome relatividade). Em particular, esta teoria estabelece relações entre observações realizadas segundo diferentes sistemas de referência inerciais.

4.2.1 Transformações de Lorentz

O objetivo desta seção é generalizar as equações de transformação de Galileu de tal maneira que os fenômenos conhecidos pela física clássica continuem válidos para um corpo se movendo a uma velocidade arbitrária. Essas novas equações são chamadas de *equações de transformação de Lorentz*. Com este intuito antes será apresentado o conceito de *referencial inercial* e as *equações de transformação de Galileu*.

4.2.1.1 Referencial Inercial

A trajetória de uma partícula só pode ser definida depois da escolha de um referencial. Um referencial é um sistema de três eixos cartesianos perpendiculares entre si. Cada posição da partícula num dado referencial é indicada por três números (chamados

de coordenadas de posição). A descrição do movimento de uma partícula exige, ainda, um outro eixo, para indicar os instantes de tempo.

Definição 4.1. *Um sistema inercial ou referencial inercial é um sistema de referência em que corpos livres (sem forças aplicadas) não têm o seu estado de movimento alterado, ou seja: corpos livres não sofrem acelerações quando não há forças sendo exercidas. Tais sistemas ou estão em repouso (velocidade nula) ou em movimento retilíneo uniforme uns em relação aos outros.*

Dados os referenciais inerciais R e R' , é dito que R' se move com velocidade constante v em relação a R se todos os pontos associados aos eixos de R' se movem com essa velocidade em relação a R . Um caso particular é representado pela Figura 4.1.

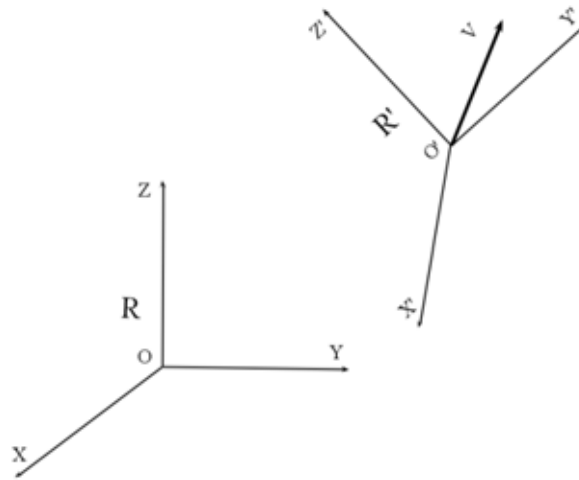


Figura 4.1: Referenciais Inerciais

4.2.1.2 A Transformação de Galileu

Para Galileu, a relação existente entre dois observadores que são animados de movimento retilíneo uniforme um em relação ao outro é dada pelas seguintes condições:

Imagine um observador colocado em repouso, num referencial R' em movimento retilíneo e uniforme em relação a R .

Denotando por x' a posição do ponto marcada no referencial R' e x a posição marcada no referencial R . Supondo que o referencial R' se desloque com uma velocidade constante v com relação a R , a transformação que conecta estes dois referenciais inerciais é dada segundo a Teoria da Mecânica de Galileu por

$$x = x' + vt' \quad , \quad y = y' \quad , \quad z = z' \quad , \quad t = t'. \quad (4.1)$$

A transformação inversa é dada por,

$$x' = x - vt \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \quad , \quad t' = t. \quad (4.2)$$

Esse tipo de relação entre os referenciais é chamada *Transformação de Galileu*.

Na Mecânica de Galileu o tempo é absoluto e imutável. Sabendo que, $V = \frac{dx}{dt}$ e $V' = \frac{dx'}{dt}$. Logo, derivando com relação a t ambos os lados da primeira equação em (4.1), obtém-se a relação de velocidade para os observadores nos referenciais R e R' , dada pela seguinte expressão.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v \implies V = V' + v. \quad (4.3)$$

ou,

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v \implies V' = V - v. \quad (4.4)$$

Este resultado mostra que a velocidade com que um observador em R observa um certo objeto se mover com relação a R' é exatamente a soma da velocidade do referencial R' com a velocidade com que o observador em R' vê este objeto se mover.

Derivando a expressão (4.3) em relação ao tempo e denotando por a' e a a aceleração da partícula em R' e em R respectivamente, resulta $a' = a$. Multiplicando os dois lados dessa igualdade pela massa m da partícula, considerada a mesma em R' e em R , segue que $ma' = ma$.

As equações de transformação de Galileu permitem transformar as equações físicas de um referencial inercial para outro de forma a manter as equações invariantes (invariância galileana), ou seja, a segunda lei de Newton é válida independente do referencial. Por extensão, pode-se dizer que todas as expressões matemáticas que representam leis da Mecânica Clássica têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais.

É usual referir-se a esse fato afirmando que:

As leis da Mecânica Clássica são invariantes sob as equações de transformação de Galileu.

Por outro lado:

As leis do eletromagnetismo clássico não são invariantes sob as equações de transformação de Galileu.

Esta última afirmação pode ser discutida considerando-se os referenciais inerciais R e R' com eixos paralelos, R' se movendo com velocidade v ao longo do eixo x de R .

Imagine agora que o objeto em questão que se move seja a luz, ou seja, $V' = c =$ velocidade da luz (300.000 Km/s). Logo, de acordo com a transformação de Galileu, $V = c + v$. Assim, um observador em R observa a luz se mover com uma velocidade igual a soma das velocidades da luz e do referencial. Este fato não pode ser observado experimentalmente. Isto indica que, na verdade, essa transformação não é satisfatória. Dessa maneira, os princípios da Mecânica Clássica precisavam ser modificados.

4.2.1.3 A Transformação de Lorentz

A transformação de Lorentz pode ser discutida considerando-se os referenciais inerciais R e R' com eixos paralelos, R' se movendo com relação a R . Com velocidade v e

origens coincidentes em $t = t' = 0$. Como mostra a Figura 4.2.

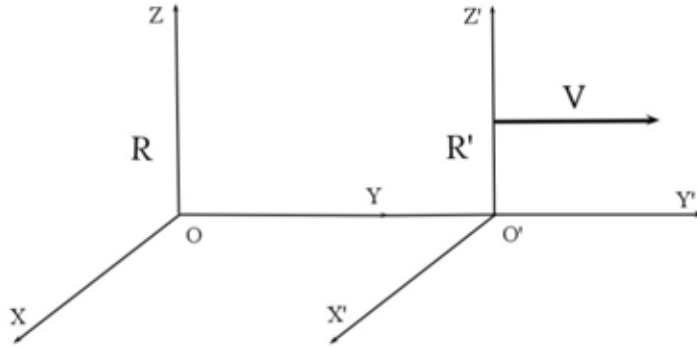


Figura 4.2: Referenciais R e R'

Segundo a transformação de Galileu, $x = x' + vt'$. Esta expressão não está de acordo quando a velocidade v for próxima da velocidade da luz. De qualquer forma, é apropriada se $v \ll c$, ou seja, para os fenômenos descritos pela Mecânica Clássica. Por isso, a transformação apropriada para valores arbitrários de v deve ter a forma:

$$x = \gamma(x' + vt'). \quad (4.5)$$

com o fator gama tendendo à unidade para $v \ll c$.

Pela mesma razão, a transformação inversa pode ser escrita na forma

$$x' = \gamma(x - vt). \quad (4.6)$$

Agora, se um raio de luz é emitido em $t = t' = 0$ por uma fonte emissora em $x = x' = 0$, este atinge a posição $x' = ct'$ no referencial R' e a posição $x = ct$ no referencial R no instante de tempo t .

Deve-se observar que, tanto em R' quanto em R , o módulo da velocidade da luz é c . Deste modo, as expressões acima tornam-se respectivamente,

$$ct' = \gamma(c - v)t \quad e \quad ct = \gamma(c + v)t'. \quad (4.7)$$

Isolando a variável t' em uma das expressões e substituindo na outra, e após algumas relações algébricas convenientes, obtém-se

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.8)$$

sendo γ denominado *fator de Lorentz* e $\beta = \frac{v}{c}$ é o parâmetro de velocidade.

Para resolver o problema da velocidade da luz ser invariante, Lorentz mostrou que as transformações corretas seriam

$$x = \gamma(x' + vt') \quad , \quad y = y' \quad , \quad z = z' \quad , \quad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \quad (4.9)$$

sendo a transformação inversa dada por,

$$x' = \gamma(x - vt) \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \quad , \quad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right). \quad (4.10)$$

Esta relação entre os referenciais é chamada *Transformação de Lorentz*. Esta transformação permite calcular as coordenadas de posição e tempo no referencial R' a partir das coordenadas de posição e tempo no referencial R .

4.2.2 A Relatividade de Einstein

A Teoria da Relatividade Especial é construída a partir dos seguintes postulados:

Postulado da relatividade: As relações matemáticas que expressam as leis da Mecânica, Eletromagnetismo e Óptica têm a mesma forma em todos os referenciais inerciais.

Postulado da velocidade da luz: O módulo da velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor em todos os referenciais inerciais e independente do movimento do emissor.

Sob as *equações de transformação de Galileu*, as leis da Mecânica Clássica são invariantes, mas as leis do eletromagnetismo clássico não são. A Teoria da Relatividade Especial é construída estendendo a exigência de invariância às leis do eletromagnetismo clássico.

Desse modo, as coordenadas de posição e tempo de diferentes referenciais inerciais passam a não ser mais relacionadas pelas *equações de transformação de Galileu* e sim, pelas *equações de transformação de Lorentz*.

4.2.2.1 Consequências da Relatividade Especial: Dilatação Temporal

Uma das consequências da luz se propagar em todas as direções com a mesma rapidez é que as medidas de tempo não são mais absolutas como consideravam Galileu e Newton. As medidas de tempo irão depender do referencial inercial em que o tempo é medido.

Por exemplo, considere os referenciais inerciais R e R' se movendo ao longo do eixo x de R com velocidade v como mostrado na figura 4.2. Considere uma fonte de luz imóvel na origem de R' emitindo dois pulsos de luz. O primeiro pulso, no instante t'_1 em R' e t_1 em R , e o segundo pulso, no instante t'_2 em R' e t_2 em R . Como a fonte está em repouso no referencial R' , os pulsos são emitidos na mesma posição nesse referencial. Assim, pela transformação de Lorentz, tem-se que,

$$t_1 = \gamma\left(t'_1 + \frac{vx_0}{c^2}\right) \quad , \quad t_2 = \gamma\left(t'_2 + \frac{vx_0}{c^2}\right). \quad (4.11)$$

Logo,

$$t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1). \quad (4.12)$$

Desta forma, os intervalos de tempo são afetados, o que contraria a noção de simultaneidade de eventos propostas por Galileu. Considerando $\Delta t = t_2 - t_1$ e $\Delta t_p = t'_2 - t'_1$, segue que,

$$\Delta t = \gamma \Delta t_p \quad (4.13)$$

onde Δt_p representa o intervalo de tempo próprio, ou seja, o intervalo de tempo medido no referencial em relação ao qual os pulsos de luz são emitidos na mesma posição. Como $v < c$, tem-se que $\gamma > 1$ e consequentemente $\Delta t > \Delta t_p$. Isto significa que o intervalo de tempo entre dois eventos, medido num referencial inercial qualquer, é sempre maior do que o intervalo de tempo entre os mesmo dois eventos, medido no referencial em que os eventos ocorreram na mesma posição. Tal propriedade é conhecida como *dilatação temporal*.

Não é possível observar a dilatação do tempo em nosso cotidiano, pois as velocidades atingidas são muito inferiores a velocidade da luz e, assim, o fator de Lorentz é próximo à 1.

4.2.2.2 Consequências da Relatividade Especial: Contração das Distâncias

Outra consequência dos postulados da relatividade especial é a relatividade do comprimento. Assim como o tempo, o comprimento terá valores diferentes para observadores que se encontram em movimento relativo um em relação ao outro.

Considere R e R' dois referenciais inerciais com eixos paralelos e com R' se movendo ao longo do eixo x de R com velocidade v como visto na figura 4.2. Considere uma régua paralela à direção do movimento relativo dos referenciais e em repouso em R' , com extremidades nas posições x'_1 e x'_2 .

Em R , a régua está em movimento, com suas extremidades em x_1 e x_2 . De acordo com a transformação de Lorentz, tem-se que,

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt_1) \quad , \quad x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2). \quad (4.14)$$

O comprimento da régua é dado, respectivamente, em R' e R , por

$$L_p = x'_2 - x'_1 \quad , \quad L = x_2 - x_1 \quad (4.15)$$

com as posições das extremidades no mesmo instante, ou seja, com $t_1 = t_2$. Desta forma, as expressões em (4.14) fornecem

$$\begin{aligned} x'_2 - x'_1 &= \gamma(x_2 - x_1) \\ L_p &= \gamma L \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde L_p representa o comprimento próprio da régua, ou seja, o comprimento no referencial em que ela está em repouso. Como $v < c$, tem-se que $\gamma > 1$ e consequentemente $L_p > L$. Isto significa que, o comprimento da régua medido em um referencial inercial

qualquer é sempre menor do que o comprimento medido no referencial em relação ao qual ela está em repouso. Tal propriedade é conhecida pelo nome de *contração de Lorentz-Fitzgerald* ou *contração das distâncias*. A contração das distâncias sempre ocorre na mesma direção do movimento.

Antes de Einstein publicar a Teoria da Relatividade Especial, os físicos Lorentz e FitzGerald propuseram a mesma relação da contração das distâncias na direção do deslocamento, porém com significado diferente. Para Lorentz e FitzGerald a contração era resultado da modificação da estrutura da matéria: o éter (meio hipotético onde a luz se propagava) afetava as forças moleculares, o que explicaria a contração das distâncias.

4.2.2.3 Consequências da Relatividade Especial: Massa e Energia

Levando em consideração o princípio da conservação de quantidade de movimento no caso das colisões interatômicas, Einstein reformulou os conceitos de massa e energia.

Seja m_0 a massa em repouso de um corpo medido em relação a um referencial inercial, e m a massa do mesmo corpo medida em relação a um referencial que se move com velocidade v , em relação ao referencial em repouso. Segundo Einstein, existe uma relação não clássica dada pela expressão:

$$m = \gamma m_0 \quad \text{ou} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (4.17)$$

Sempre que $\gamma \geq 1$ decorre que $m \geq m_0$, ou seja, uma menor massa quando um corpo se encontra em repouso.

A validade da expressão (4.17) foi verificada experimentalmente por Hans Theodor Bucherer (1869 – 1949), em 1908, quando notou que a relação $\frac{e}{m}$ da carga do elétron para sua massa era menor para elétrons mais velozes, do que para elétrons lentos.

Uma outra consequência da Teoria da Relatividade Especial está no fato de Einstein postular que a massa é uma forma de energia. Ou seja, toda energia E de qualquer forma particular, presente em um corpo, ou transportada por uma radiação, possui inércia. Esta inércia é medida pelo quociente do valor da energia pelo quadrado da velocidade da luz no vácuo, ou seja, $\frac{E}{c^2}$.

Da mesma forma, deve-se atribuir à toda massa m uma energia própria, igual a mc^2 , independente e além da energia potencial que o corpo ou sistema possua num campo de forças. Logo, massa e energia são duas manifestações diferentes do mesmo elemento, ou duas propriedades diversas da mesma substância física. Tem-se então:

$$E = mc^2 \quad (4.18)$$

Da mesma forma, como foi visto anteriormente, a energia também sofre modificações quando há movimentos relativos entre sistemas de referências.

Seja E a energia total de um corpo para um observador que medir uma massa m . Se o corpo está em repouso em relação ao observador, este mede a massa de repouso como sendo m_0 . Logo, a energia será $E_0 = m_0 c^2$, que é chamada energia de repouso.

Se E é a energia total do corpo, e E_0 sua energia de repouso, segue que a energia cinética relativística E_c será dada por:

$$E_c = E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2 \quad (4.19)$$

Considerando $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$, tem-se que,

$$E_c = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - m_0 c^2. \quad (4.20)$$

A expressão da energia cinética dada pela equação (4.20) não se parece muito com a expressão clássica $\frac{1}{2}mv^2$. Entretanto, para uma velocidade v muito pequena pode-se aproximar $\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ utilizando a expansão binomial, ou seja,

$$(1 + x)^n = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2} + \dots \approx 1 + nx.$$

Assim,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}.$$

Com este resultado e para o caso em que v é muito menor que c , a expressão para a energia cinética relativística torna-se,

$$E_c = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right] \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (4.21)$$

Na Teoria da Relatividade Especial os conceitos de espaço, tempo e matéria passam a não ser mais absolutos, ou seja, não assumem um comportamento tão simples e tão passivo como pode-se imaginar a primeira vista. Einstein mostrou que o caráter dinâmico de um sistema pode afetar e mudar a estrutura do espaço, do tempo e da matéria. Este fato abre novos horizontes para se observar o Universo. Na Cosmologia é importante a discussão de tais questões, pois no cosmos, se encontram galáxias, e outros corpos celestes que se movem com velocidades extremamente próximas à velocidade da Luz, onde os efeitos relativísticos se fazem presentes com maior intensidade.

4.3 A Relatividade Geral

A Teoria da Relatividade Geral é uma teoria geométrica da gravitação: o conceito clássico de força gravitacional, dado pelas leis de gravitação de Newton como resultado da interação entre massa, é substituído pela geometria espaço-temporal. Em outras palavras, a gravitação passa a ser interpretada como uma manifestação da própria curvatura do espaço-tempo, causada pela presença de massa, ou energia. A equação dinâmica que descreve a forma como a matéria e energia modificam a geometria do espaço-tempo é chamada *Equação de Campo de Einstein*.

4.3.1 A Curvatura do Espaço-Tempo

Um dos principais conceitos da relatividade geral é o espaço-tempo. Intuitivamente, o espaço-tempo é a coleção de todos os eventos possíveis, passados e futuros associados a todos os possíveis observadores. Tal conceito foi introduzido por Hermann Minkowski em 1908, a fim de unificar diversos resultados da relatividade especial. No entanto, o conceito de espaço-tempo definido na Teoria da Relatividade Especial não pode simplesmente ser transferido para uma Teoria Relativística da Gravitação. Nesta teoria o espaço-tempo possui características não usuais. Por exemplo,

Curvo: o espaço-tempo da relatividade geral tem uma geometria não euclidiana. Na relatividade especial o espaço-tempo é plano (pseudo-euclidiano).

Lorentziano: as métricas do espaço-tempo devem ter a assinatura de Lorentz.

Quadridimensional: deve cobrir as três dimensões espaciais e o tempo. Fato herdado da relatividade especial.

Definição 4.2. *Um espaço-tempo relativístico é um par (M, g) onde M é uma variedade pseudo-riemanniana quadridimensional com assinatura de Lorentz.*

A relatividade geral requer uma variedade quadridimensional subjacente para o espaço-tempo que seja sem fronteira, Hausdorff, conexa e paracompacta.

Seria inviável admitir uma variedade com fronteira para o nosso Universo (fronteira representaria fisicamente uma “borda” para o espaço-tempo. Tais bordas nunca foram observadas); ou uma variedade não Hausdorff (isto é, uma variedade em que existe dois pontos que não podem ser separados por vizinhanças disjuntas. Tal comportamento talvez violaria o que se entende fisicamente por “eventos disjuntos”); ou uma variedade não conexa (uma variedade com partes desconexas corresponderia a espaço-tempos com regiões desconexas, inacessíveis para qualquer tipo de análise); ou uma variedade não paracompacta (isto é, alguma componente conexa não pode ser coberta por uma coleção enumerável de cartas coordenadas).

Além disso, a relatividade geral também requer que esta variedade admita uma métrica com assinatura de Lorentz. A métrica com assinatura de Lorentz possui um

“caráter direcional”, qual pode torná-la entrelaçada com a topologia desta variedade subjacente.

Pode-se dizer que, um modelo para o mundo físico na relatividade geral clássica requer um espaço-tempo, uma variedade quadridimensional (representando os eventos físicos) dotado de uma métrica com assinatura de Lorentz (representando os resultados de medidas espaciais e de tempo). Além destes fatos, tem-se também certos campos adicionais nesta variedade (representando outros fenômenos físicos) satisfazendo apropriadas equações diferenciais. E por fim, os campos físicos e a métrica se relacionam através das *equações de campo de Einstein*.

Definição 4.3. (Classificação de vetores) Em um espaço-tempo (M, g) , os elementos $X_p \in T_p(M)$ podem ser classificados em três grupos:

1. Espacial se $g(X_p, X_p) > 0$ ou $X_p = 0$.
2. Nulo se $g(X_p, X_p) = 0$ se $X_p \neq 0$.
3. Temporal se $g(X_p, X_p) < 0$.

A Teoria da Relatividade Geral descreve os fenômenos de interação gravitacional entre quaisquer corpos existentes no Universo. Para Einstein, a gravidade não é uma força no sentido usual atribuído a este termo na Física. Segundo ele, a gravidade é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, sendo a curvatura do espaço-tempo produzida pela massa-energia contida nele. Este fato pode ser expresso pela seguinte relação:

$$\text{matéria energia} \iff \text{efeito gravitacional} \iff \text{espaço-tempo curvo}.$$

A Teoria da Gravitação de Einstein está baseada em um conjunto de princípios fundamentais. São eles:

Princípio geral da relatividade: As leis da Física devem ser as mesmas para todos os observadores, estejam eles acelerados ou não.

Princípio da covariância geral: As leis da Física devem ter a mesma forma em todos os sistemas de coordenadas.

O movimento inercial é movimento geodésico: As linhas de universo de partículas não afetadas por forças físicas são geodésicas temporais ou nulas do espaço-tempo.

Princípio da invariância de Lorentz local: As leis da relatividade especial se aplicam localmente para todos os observadores inerciais.

O espaço-tempo é curvo: Os efeitos gravitacionais, como por exemplo a queda livre, serão descritos como uma forma de movimento inercial.

A curvatura do espaço-tempo é criada pela energia-momentum contida no espaço-tempo: Este fato é descrito na Teoria Relativística da Gravitação pelas “Equações de Campo de Einstein”.

Definição 4.4. O tensor gravitacional de Einstein de um espaço-tempo (M, g) é dado por

$$G = Ric - \frac{1}{2}Rg + \Lambda g$$

onde Λ é uma constante denominada constante cosmológica.

Os termos R e Ric presentes no tensor de Einstein são respectivamente, o escalar de curvatura e o tensor de Ricci. Como visto anteriormente, estes dois tensores são calculados a partir de um tensor bem mais geral, R_{ijk}^m , chamado tensor de curvatura ou tensor de Riemann-Christoffel.

Teorema 4.1. (Identidade Contraída de Bianchi) O tensor de Einstein é um tensor simétrico do tipo $(0, 2)$ com $G_{j;k}^k = 0$.

Demonstração. Da definição do tensor de Einstein verifica-se que este tensor é do tipo $(0, 2)$ e simétrico, uma vez que o tensor de Ricci, bem como o tensor métrico, detêm estas propriedades. Resta-nos mostrar que o divergente covariante do tensor de Einstein é nulo. De fato,

$$\begin{aligned} G_{j;k}^k &= \left\{ g^{ik} \left(R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} + \Lambda g_{ij} \right) \right\}_{;k} \\ &= R_{j;k}^k - \frac{1}{2} \delta_j^k R_{;k}. \end{aligned}$$

Pelo teorema 3.6 verifica-se que

$$G_{j;k}^k = R_{j;k}^k - \frac{1}{2} (2R_{j;k}) = 0.$$

Portanto, $G_{j;k}^k = 0$. □

4.3.2 As equações de Einstein

A Teoria da Gravitação de Einstein, não somente diz que o espaço-tempo é curvo, mas também especifica o quanto é a sua curvatura. Esta teoria fornece um conjunto de equações que relacionam a curvatura do espaço-tempo com a distribuição de matéria-energia no espaço.

4.3.2.1 Postulados da Relatividade Geral:

1. Conservação local da energia e do momento.

As equações que governam os campos de matérias são tais que existem um tensor simétrico T_{ij} , dito tensor energia-momento, que depende do campo, de suas derivadas covariantes, da métrica e possui as seguintes propriedades:

- (a) T_{ij} anula sobre um conjunto aberto $U \subset M$ se e somente se todos os campos de matéria se anulam sobre U .

(b) T_{ij} obedece a equação $T^k_{j;k} = 0$, isto é, o divergente covariante de T é nulo.

2. Equação de campo.

Se M é um espaço-tempo contendo matéria com tensor energia-momentum T , então sobre M vale a equação

$$G = 8\pi T \quad (4.22)$$

onde G é o tensor de Einstein. A equação (4.22) é chamada *Equação de Campo de Einstein*.

As equações propostas por Einstein recebem este nome porque elas descrevem o comportamento e as propriedades do campo gravitacional.

O lado esquerdo da equação de campo (4.22) é formado pelo *tensor de Einstein* G . Este tensor depende das funções g_{ij} e de suas primeiras e segundas derivadas. Esta parte da *equação de campo de Einstein* está associada com a estrutura geométrica do espaço-tempo. O lado direito da equação de campo (4.22) apresenta o *tensor energia-momentum* T . Este tensor depende da distribuição de energia e matéria no Universo. Desta maneira, a curvatura do espaço-tempo é produzida pela distribuição de massa-energia no espaço. Ou seja,

curvatura do espaço-tempo G = conteúdo de matéria-energia do espaço T .

5 Cosmologia Relativística

A Teoria da Relatividade Geral afirma que as propriedades geométricas do espaço-tempo estão ligadas à quantidade de matéria e de energia que este contém. Estas propriedades geométricas determinam o movimento dos objetos materiais que neles se encontram. Tal movimento influi também sobre a geometria, e assim por diante.

No início dos anos de 1920, Aleksander Friedmann e Georges Lemaître introduziram uma hipótese, a mais simples possível sobre a distribuição global de matéria do Universo em grande escala. O cosmos é homogêneo e isotrópico, ou seja, apresenta as mesmas propriedades em todo ponto, seja qual for a direção na qual for observado. Este fato hoje é denominado *princípio cosmológico*. Nas condições definidas por este princípio, eles obtiveram uma solução exata das equações de Einstein. Contudo, esta solução não descrevia um Universo exatamente estático e imutável, mas sim em expansão. Este Universo não se expande em um espaço vazio pré-existente. Simplesmente, cada um de seus pontos vê todos os outros pontos se afastarem dele a uma velocidade tão mais elevada quanto mais distantes estiverem. Outra maneira de descrever esta situação seria simplesmente medir as distâncias que separam as galáxias que povoam nosso Universo hoje e recomençar esta medição 1 bilhão de anos depois. Desta maneira, será constatado que tais distâncias foram todas multiplicadas pelo mesmo fator (o *fator escala*).

Neste capítulo serão apresentados os conceitos referentes ao *princípio cosmológico* e ao *postulado de Weyl*. Em seguida é realizada a construção da *métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker*. No final do capítulo é feita a construção das *equações de Friedmann*, as quais descrevem um cosmos em expansão, homogêneo e isotrópico dentro do contexto da relatividade geral.

5.1 Princípio Cosmológico

Quando a ciência entra em um novo campo e se depara com uma escassez de dados observacionais e experimentais, algum princípio orientador é normalmente necessário para conduzir os primeiros passos rumo a uma compreensão teórica. Esta regra provou ser o caso nos primeiros anos do século 20, quando Einstein e outros cosmólogos, deram os primeiros passos rumo a uma teoria científica sobre o Universo. Naquela época pouco

se conhecia empiricamente sobre a distribuição de matéria no Universo e a Teoria da Gravitação de Einstein encontrava muitas dificuldades em fornecer uma solução a esta questão. Neste sentido, os cosmólogos tinham que se contentar com a construção de modelos simplificados com quais esperavam descrever alguns aspectos do Universo de uma maneira mais ampla. Estes modelos foram baseados em uma idéia denominada de *Princípio Cosmológico*. Este princípio foi introduzido por Albert Einstein e por cosmólogos relativísticos sem qualquer justificativa observacional. Einstein achava que a única maneira de colocar a cosmologia teórica sobre uma base sólida, era supor que existe uma estrutura global simples do Universo que permite uma simplicidade similar no comportamento local da matéria. O *Princípio Cosmológico* alcança este fato e proporciona a construção de modelos relativamente simples.

O *Princípio Cosmológico* essencialmente corresponde a uma extensão do *Princípio de Copérnico*, o qual estabelece que a Terra não ocupa um lugar especial no cosmos¹. O *Princípio de Copérnico* influenciou na simetria empregada nos primeiros modelos cosmológicos relativísticos (modelos de Einstein e de Sitter de 1917 e Friedmann de 1922). Esta simetria tem por hipótese que “o Universo é homogêneo² e isotrópico³ espacialmente”. Posteriormente esta simetria foi chamada de *Princípio Cosmológico*.

Em 1933, Milne estabeleceu o que hoje se denomina *Princípio Cosmológico*:

Excetuando-se irregularidades locais, em uma determinada época o Universo apresenta os mesmos aspectos em todos os pontos.

De maneira equivalente pode-se dizer que não existem pontos ou direções privilegiadas a serem considerados, ou seja, o espaço é homogêneo e isotrópico.

De acordo com esse princípio, dois observadores, que estejam acompanhando o movimento cosmológico, devem estar expostos à mesma interpretação do Universo. As propriedades observadas do Universo devem ser exatamente idênticas para ambos. O próprio Milne reconheceu que esse princípio é uma extensão da proposta de Einstein, segundo a qual as leis da natureza devem ser as mesmas para esses observadores. Na sua versão, não somente as leis são idênticas, mas a própria descrição da estrutura do Universo, feita pelos observadores, deve ser também a mesma. O resultado é que, para evitar que diferentes observadores tenham opiniões distintas sobre a distribuição de massa do Universo, temos que

¹No mesmo espírito não se pode colocar o Sistema Solar, ou a nossa galáxia a Via Láctea, ou o nosso grupo local de galáxias a ocupar uma posição privilegiada no cosmos.

²A homogeneidade de um sistema físico diz que suas propriedades são as mesmas em todos os lugares. Para entender melhor este conceito vamos supor um astronauta que tenha a capacidade de viajar por todo Universo. Após percorrer locais bem distantes uns dos outros e situados em regiões opostas do Universo, o astronauta chega a conclusão de que todos os lugares são semelhantes. Ele poderá então concluir que o Universo é o mesmo em todos os lugares e, portanto, o Universo é homogêneo.

³Ao afirmar que o Universo é isotrópico, equivale a afirmar que suas propriedades físicas independem da direção considerada.

este deve ser homogêneo e uniforme em grandes escalas. Na região possível do Universo, que nos é dado observar, podemos verificar que estamos de fato face a uma distribuição homogênea. Em particular, a distribuição da radiação de fundo atesta essa conclusão. ... Contudo, nada podemos dizer sobre a região que não nos é dado a observar, ou seja, fora do nosso horizonte causal. Portanto, não temos como verificar se este Princípio Cosmológico é de fato válido no Universo como um todo. ([3], p.32)

Em 1948, Bondi, Gold e Hoyle propuseram o *Princípio Cosmológico Perfeito* para o qual o Universo é homogêneo e isotrópico espacialmente e temporalmente, ou seja, permanece em um estado estacionário e nada nele jamais muda em aparência.

Este novo princípio é enunciado com vistas a sustentar o modelo cosmológico do estado estacionário definido posteriormente por Narlikar. Tal idéia, entretanto foi descartada pela maior parte da comunidade científica após resultados fornecidos pela contagem de fontes de rádio e pela descoberta da radiação cósmica de fundo.

Na cosmologia moderna, a hipótese de trabalho é que os observadores terrestres não ocupam uma posição observacional restritiva ou distorcida dentro do Universo. Este fato se traduz de forma articulada através do *Princípio Cosmológico* aplicado via Teoria da Relatividade Geral, à discussão do Universo como um todo.

5.1.1 O Postulado de Weyl

Em 1923, H. Weyl questionou como seria possível relacionar as propriedades observadas localmente com efeitos que se gostaria de estudar a distância. Ele argumentou que na tentativa de entender o distante era necessário se basear, na medida do possível, nas teorias que podem ser verificadas em nossa vizinhança. Baseado nesta suposição, ele introduziu um “substrato”, ou fluído, permeando o espaço de modo que as galáxias se movem como partículas em um fluído. Este é relatado no seguinte postulado:

Postulado de Weyl: As partículas do substrato encontram no espaço-tempo uma congruência de geodésicas temporais divergentes para um ponto no passado finito ou infinito.

O postulado exige que as geodésicas⁴ não se interceptem exceto em um ponto singular no passado e possivelmente em um ponto similar no futuro. Desta maneira, existe uma e apenas uma geodésica passando através de cada ponto do espaço-tempo. Consequentemente, a matéria em qualquer ponto possui uma única velocidade. Isto significa que o substrato poderia ser tomado como um fluído perfeito e esta é a essência do postulado de Weyl. Assim, o Universo pode ser considerado, em uma boa aproximação, como um fluído perfeito.

⁴O termo geodésia é usado em Matemática para medir e calcular superfícies curvas. Em Física, geodésia é o nome da trajetória reta no espaço curvo, de corpos como a Terra. Fato que acontece em função da gravidade.

Um fluido ideal é caracterizado por sua 4-velocidade, pela densidade de matéria $\rho(x^\mu)$ e pela pressão $p(x^\mu)$, ambas medidas por um observador em um referencial em repouso com relação ao fluido, isto é, em um referencial co-móvel. Além disto, p e ρ estão relacionadas por uma equação de estado que governa o tipo de fluido em questão. No limite em que a pressão tende a zero, o fluido perfeito se reduz à poeira o que corresponde aos dias de hoje (era da matéria). A definição do tensor energia-momentum para o fluido perfeito é dada por

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

onde $u = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ é a 4-velocidade do fluido. A homogeneidade e a isotropia do espaço postuladas pelo Princípio Cosmológico exigem que a densidade média de ρ e a pressão p sejam funções exclusivas do tempo, ou seja, $\rho = \rho(x^0)$ e $p = p(x^0)$, em outras palavras, todo observador co-móvel com o fluido cósmico possui a mesma história.

5.1.2 A Métrica de Robertson-Walker

Em 1854, a geometria desenvolvida por Bernhard Riemann sugeria que o Universo poderia não possuir limites e não ser infinito, ou seja, o Universo poderia possuir uma geometria curva. Desta maneira, poderia se viajar ao longo de uma geodésica de uma hipersuperfície tridimensional do espaço quadri-dimensional, onde, dependendo da geometria, poderia se passar mais de uma vez pelo mesmo ponto se ocorresse um deslocamento “sempre em linha reta”. Tal fato seria análogo a locomoção de uma formiga na superfície de uma esfera. A métrica de Riemann é definida por,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad (5.2)$$

onde ds é chamado de elemento linha do espaço-tempo ou métrica do espaço-tempo, os índices μ e ν são 0,1,2,3 (com 0 representando a coordenada temporal e os índices restantes representam as coordenadas espaciais) e $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico do espaço-tempo. Para uma métrica pseudo-riemanniana e diagonal, a equação (5.2) reduz-se a,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2, \quad (5.3)$$

onde dl é o elemento linha espacial e dl^2 representa a parte espacial da métrica do espaço-tempo.

Os primeiros modelos cosmológicos relativísticos propostos supõem um universo plano, ou seja, com curvatura espacial nula. Assim, pelo teorema de Pitágoras, o elemento linha espacial de uma hipersuperfície tridimensional plana é dado por,

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \quad (5.4)$$

Substituindo a equação (5.4) na equação (5.3), obtém-se a métrica de Minkowski,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2). \quad (5.5)$$

Em 1922, Friedmann obteve uma solução das equações de Einstein para um Universo fechado, ou seja, com curvatura espacial positiva constante. Ele supôs que o Universo pudesse ser a hipersuperfície tridimensional de uma quadri-esfera. Seja a equação da quadri-esfera dada por,

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2 \quad (5.6)$$

onde a representa o raio do Universo modelado. O elemento linha espacial dl da quadri-esfera (5.6) é dado por,

$$dl^2 = dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

Isolando x_0 em (5.6), obtém-se a seguinte expressão

$$x_0^2 = a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2. \quad (5.7)$$

Assim,

$$dx_0 = \frac{\partial x_0}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x_0}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial x_0}{\partial x_3} dx_3. \quad (5.8)$$

Como

$$\frac{\partial x_0}{\partial x_i} = \frac{-x_i}{\sqrt{a^2 - \sum_{j=1, j \neq i}^3 x_j^2}} dx_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Desta maneira, a equação (5.8) assume a forma

$$dx_0^2 = \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} \quad (5.9)$$

O elemento de linha da quadri-esfera é dado por

$$dl^2 = \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2, \quad (5.10)$$

ou seja,

$$dl^2 = a^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2), \quad (5.11)$$

onde na passagem da equação (5.10) para a equação (5.11) foi considerado

$$x_1 = a \sin \chi \cos \theta, x_2 = a \sin \chi \cos \theta \cos \phi, x_3 = a \sin \chi \sin \theta \sin \phi \text{ e } x_4 = a \cos \chi$$

com $0 \leq \chi \leq \pi$, que são as coordenadas de uma quadri-esfera de raio a . Considerando $\sin \chi = r$ têm-se que

$$dr = \frac{\partial r}{\partial \chi} d\chi \Rightarrow dr = \sqrt{1 - \sin^2 \chi} d\chi \Rightarrow d\chi = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} dr. \quad (5.12)$$

Substituindo (5.12) em (5.11) obtêm-se

$$dl^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \quad (5.13)$$

onde r é a coordenada co-móvel.

Substituindo (5.13) na equação (5.3), obtêm-se a métrica,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 \left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega^2 \right). \quad (5.14)$$

A equação (5.14) é conhecida como a métrica de Friedmann para o Universo fechado com curvatura espacial positiva constante.

Em 1924, Friedmann obteve soluções cosmológicas para um Universo aberto, ou seja, com curvatura espacial negativa constante. Ele supôs que o Universo poderia ser uma hipersfície tridimensional de um quadri-hiperbolóide. A equação do quadri-hiperbolóide é dada por,

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -a^2. \quad (5.15)$$

Neste caso a é apenas uma constante. O elemento linha espacial do quadri-hiperbolóide (5.15) é dado pela equação,

$$dl^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad (5.16)$$

Diferenciando a equação (5.15), isolando dx_0 e em seguida substituindo os resultados na equação (5.16), obtêm-se o elemento linha da hipersfície tridimensional do quadri-hiperbolóide,

$$dl^2 = -\frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2. \quad (5.17)$$

Considerando a transformação

$$x_1 = a \sinh \chi \cos \theta, x_2 = a \sinh \chi \cos \theta \cos \phi, x_3 = a \sinh \chi \sin \theta \sin \phi \text{ e } x_4 = a \cosh \chi$$

com $0 \leq \chi \leq \pi$ que são coordenadas de um quadri-hiperbolóide.

Reescreve-se (5.17) na forma

$$dl^2 = a^2 (d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega^2). \quad (5.18)$$

Considerando $\sinh \chi = r$ e lembrando que

$$dr = \frac{\partial r}{\partial \chi} d\chi \Rightarrow dr = \sqrt{1 + \sinh^2 \chi} d\chi \Rightarrow d\chi = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2}} dr. \quad (5.19)$$

Substituindo (5.19) em (5.18) obtêm-se

$$dl^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega^2 \right). \quad (5.20)$$

Substituindo (5.20) na equação (5.3), tem-se que,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 \left(\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega^2 \right). \quad (5.21)$$

A equação (5.21) é conhecida como métrica de Friedmann para um Universo aberto, com curvatura espacial negativa constante.

As métricas acima discutidas foram obtidas de maneira independente pelos matemáticos H.P. Robertson e A.G. Walker em 1935 e 1936 respectivamente. Ambos apresentam uma expressão geral para os casos de curvatura espacial positiva e negativa constante. Esta expressão englobava a métrica plana (5.5) e as métricas de Friedmann (5.14) e (5.21). Eles propuseram que o Universo poderia ser a hipersuperfície tridimensional de uma quadri-geometria que obedecia a seguinte expressão,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + kx_4^2 = \frac{a^2}{k}. \quad (5.22)$$

onde k é a *constante de curvatura*, podendo assumir os valores $k = 0$ ou -1 ou 1 . Para $k = 0$, obtém-se uma esfera de raio infinito que pode ser considerada como sendo uma superfície plana. Para $k = 1$, a equação (5.22) resulta na quadri-esfera (5.6) e para $k = -1$ no quadri-hiperboloide (5.15). Desta maneira, $k = 0$ representa um Universo plano, $k = 1$ representa um Universo fechado e por fim $k = -1$ representa um Universo aberto. O elemento linha espacial da quadri-geometria (5.22) é dado por,

$$dl^2 = k(dx_0)^2 + (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2. \quad (5.23)$$

Diferenciando a equação (5.22), isolando dx_0 e em seguida substituindo os dados obtidos na equação (5.23), obtém-se o elemento linha da hipersuperfície tridimensional da quadri-geometria (5.22),

$$dl^2 = k \left(\frac{-x_1 dx_1 - x_2 dx_2 - x_3 dx_3}{\sqrt{a^2 - k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}} \right)^2 + (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2. \quad (5.24)$$

Transformando para coordenadas esféricas,

$$\begin{aligned} x_1 &= R \sin \theta \cos \varphi \\ x_2 &= R \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 &= R \cos \theta \end{aligned}$$

tem-se que:

$$\begin{aligned} dx_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial R} dR + \frac{\partial x_1}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} d\varphi \\ &= \sin \theta \cos \varphi dR + R \cos \theta \cos \varphi d\theta - R \sin \theta \sin \varphi d\varphi \\ dx_2 &= \frac{\partial x_2}{\partial R} dR + \frac{\partial x_2}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} d\varphi \\ &= \sin \theta \sin \varphi dR + R \cos \theta \sin \varphi d\theta + R \sin \theta \cos \varphi d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dx_3 &= \frac{\partial x_3}{\partial R}dR + \frac{\partial x_3}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial x_3}{\partial \varphi}d\varphi \\
&= \cos \theta dR - R \sin \theta d\theta.
\end{aligned}$$

Assim

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 = dR^2 + R^2 d\Omega^2.$$

Substituindo em (5.24) tem-se

$$dl^2 = \frac{kR^2}{a^2 - kR^2} dR^2 + dR^2 + R^2 d\Omega^2,$$

ou seja,

$$dl^2 = \frac{a^2}{a^2 - kR^2} dR^2 + R^2 d\Omega^2. \quad (5.25)$$

Considerando $R = ar$ e substituindo (5.25) na equação (5.3) obtém-se

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right). \quad (5.26)$$

que é a métrica de Robertson-Walker.

Considerando ao longo de nosso estudo o caso de hiperfícies estáticas, isto é, a constante a não possui dependencia no tempo cósmico. Pode-se assumir, no caso mais geral, que $a = a(t)$ e reescrever a métrica (5.26) na forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right). \quad (5.27)$$

Assim a equação (5.27) é métrica mais geral que satisfaz o *Postulado de Weyl* e o *Princípio Cosmológico*. Observa-se que para $k = -1$ e 1 , a métrica de Robertson-Walker resulta nas métricas de Friedmann para um Universo fechado e aberto respectivamente. A métrica (5.27) também é conhecida como *métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker*.

5.2 O Modelo Cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Como todo modelo cosmológico, o *modelo de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker*⁵ tem por objetivo descrever a evolução do Universo em toda sua história. Este modelo é baseado nas *equações de Friedmann-Lemaître* e a sua geometria é dada pela *métrica de Robertson-Walker*. A cosmologia estudada até 1917 fundamentava-se na dinâmica e gravitação newtoniana. Neste ano, iniciou-se o estudo da cosmologia relativística

⁵Também conhecido como modelo FLRW, modelo cosmológico padrão, modelo de Friedmann ou modelo do Big Bang. A partir de 1965 foi considerado pela maior parte da comunidade científica como o modelo padrão da cosmologia.

baseada na Teoria da Relatividade Geral de Einstein. Os primeiros modelos cosmológicos relativísticos foram propostos em 1917 por Einstein e de Sitter, que assumem um universo com curvatura espacial nula. Em seguida, o matemático russo Alexander A. Friedmann publicou soluções para universos com curvaturas espaciais constantes e positivas em 1922 e negativa em 1924. Os trabalhos de Friedmann passaram praticamente despercebidos, acredita-se que devido a sua forte abordagem matemática. Em 1927, o físico e matemático belga, Georges E. Lemaître, publicou independentemente, soluções equivalentes às de Friedmann. Lemaître conseguiu chamar a atenção da comunidade científica por sua consistente interpretação física e astronômica do modelo.

5.2.1 As Equações de Friedmann

As *Equações de Friedmann* formam um conjunto de equações em cosmologia física que governam a expansão métrica do espaço em modelos homogêneos e isotrópicos do Universo dentro do contexto da Teoria da Relatividade Geral. Assim, um modelo cosmológico corresponde a soluções das *equações de campo de Einstein* para um fluido perfeito e que reproduzem as principais características do Universo. Desta maneira, a cosmologia relativística tem sua base formada em três hipóteses:

- O *Princípio Cosmológico*, dado pelo *elemento linha de Robertson-Walker*

$$ds^2 = c^2 dt^2 - [a(t)]^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta + \sin^2 \theta d\phi) \right),$$

onde $a(t)$ é o chamado *fator escala* (o espaço pode sofrer expansão ou contração) e k é a chamada *constante de curvatura*, que pode representar três situações: $k = 0$ para um espaço plano, $k = 1$ para um espaço esférico (fechado) e $k = -1$ para um espaço hiperbólico (aberto).

- O *Postulado de Weyl*, que introduz o fluido perfeito. O *tensor de energia-momentum* é dado em termos das coordenadas por

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu},$$

onde p é a pressão, ρ é a densidade de massa, u_μ o quadri-vetor velocidade e $g_{\mu\nu}$ a métrica.

- A *Teoria da Relatividade Geral* como ferramenta matemática. As *equações de campo de Einstein* dadas por

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu},$$

onde $G_{\mu\nu}$ são as componentes do *tensor de Einstein*. Os índices μ e ν variam de 0 a 3 sendo que 0 representa a coordenada temporal e os demais índices representam as coordenadas espaciais.

A fim de calcular as componentes do *tensor de Einstein* $G_{\mu\nu}$ é necessário determinar inicialmente as componentes do *tensor de Ricci*, encontrar o valor para o *escalar de*

curvatura e por fim determinar as componentes do *tensor energia-momentum*. Usando a *métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker*

$$ds^2 = c^2 dt^2 - [a(t)]^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta + \sin^2 \theta d\phi) \right).$$

Escrevendo $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ e identificando

$$x^0 = ct \quad ; \quad x^1 = r \quad ; \quad x^2 = \theta \quad ; \quad x^3 = \phi.$$

Segue que, $\begin{cases} g_{\mu\nu} = 0, & \forall \mu \neq \nu, \\ g_{\mu\nu} \neq 0, & \forall \mu = \nu. \end{cases}$

Assim, as componentes não nulas são dadas por

$$g_{00} = 1 \quad ; \quad g_{11} = \frac{-a^2}{1 - kr^2} \quad ; \quad g_{22} = -a^2 r^2 \quad ; \quad g_{33} = -a^2 r^2 \sin^2 \theta .$$

Desta maneira, tem-se que o tensor métrico é dado por

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a^2}{1 - kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}.$$

O determinante é dado por

$$g \equiv \det g_{\mu\nu} = g_{00} g_{11} g_{22} g_{33} = \frac{-a^6 r^4 \sin^2 \theta}{1 - kr^2}.$$

Podendo ser escrito da seguinte forma

$$\sqrt{-g} = \frac{a^3 r^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - kr^2}}.$$

A matriz $g_{\mu\nu}$ é uma matriz invertível ($\det g_{\mu\nu} \neq 0$) com inversa $[g_{\mu\nu}]^{-1}$ dada por

$$[g_{\mu\nu}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1 - kr^2}{-a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{a^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \end{bmatrix}.$$

Denotando por $[g_{\mu\nu}]^{-1} = g^{\mu\nu}$ segue que

$$g^{00} = 1 \quad ; \quad g^{11} = -\frac{(1 - kr^2)}{a^2} \quad ; \quad g^{22} = \frac{-1}{a^2 r^2} \quad ; \quad g^{33} = \frac{-1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta}.$$

O *tensor de Ricci* e o *escalar de curvatura* são obtidos a partir do *tensor de Riemann Christoffel* R_{ikn}^m (mais conhecido como *tensor de Riemann*). Os três são definidos por

$$R_{ikn}^m = \Gamma_{ik;n}^m - \Gamma_{in;k}^m + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{ln}^m - \Gamma_{in}^l \Gamma_{lk}^m, \quad (5.28)$$

$$R_{\mu\nu} = g^{\delta\rho} R_{\delta\mu\nu\rho} \equiv R_{\mu\nu}^\rho, \quad (5.29)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \equiv R_\mu^\mu, \quad (5.30)$$

onde o ponto e vírgula denota a derivada covariante e Γ_{kl}^i é conhecido como *símbolo de Christoffel* (ou *conexão afim*) definido por

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{im} (g_{mk,l} + g_{lm,k} - g_{kl,m}) = \Gamma_{lk}^i. \quad (5.31)$$

A partir da equação (5.31) serão calculados os *símbolos de Christoffel*. Como $g^{im} = 0$ a menos que $i = m$, (g^{im} é uma matriz diagonal para a *métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker*.) tem-se que,

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2} g^{ii} (g_{ik,l} + g_{li,k} - g_{kl,i}) = \Gamma_{lk}^i.$$

Tomando $i = 0$, tem-se que os *símbolos de Christoffel* não nulos são dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} (g_{01,1} + g_{01,1} - g_{11,0}) = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{-a^2}{1 - kr^2} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[-\frac{2a\dot{a}}{1 - kr^2} \right] = \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2}. \end{aligned}$$

$$\Gamma_{22}^0 = \frac{1}{2} g^{00} (g_{02,2} + g_{02,2} - g_{22,0}) = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} (-a^2 r^2) \right] = -\frac{1}{2} [-2a\dot{a} r^2] = r^2 a\dot{a}.$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{2} g^{00} (g_{03,3} + g_{03,3} - g_{33,0}) = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} (-r^2 a^2 \sin^2 \theta) \right] \\ &= -\frac{1}{2} [-2r^2 a\dot{a} \sin^2 \theta] = r^2 a\dot{a} \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Agora tomando $i = 1$, segue que os *símbolos de Christoffel* não nulos são

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^1 = \Gamma_{10}^1 &= \frac{1}{2} g^{11} (g_{10,0} + g_{11,0} - g_{01,1}) = -\frac{1}{2} \frac{(1 - kr^2)}{a^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{-a^2}{(1 - kr^2)} \right) \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(1 - kr^2)}{a^2} \left[-\frac{2a\dot{a}}{(1 - kr^2)} \right] = \frac{\dot{a}}{a}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}) = -\frac{1}{2}\frac{(1-kr^2)}{a^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{-a^2}{(1-kr^2)}\right)\right] = \\
&= -\frac{1}{2}\frac{(1-kr^2)}{a^2}\left[\frac{-2kra^2}{(1-kr^2)^2}\right] = \frac{kr}{1-kr^2}. \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1}) = -\frac{1}{2}\frac{(1-kr^2)}{a^2}\left[-\frac{\partial}{\partial r}(-a^2r^2)\right] = \\
&= \frac{1}{2}\frac{(1-kr^2)}{a^2}[-2ra^2] = -r(1-kr^2) \\
\Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(g_{13,3} + g_{13,3} - g_{33,1}) = -\frac{1}{2}\frac{(1-kr^2)}{a^2}\left[-\frac{\partial}{\partial r}(-r^2a^2\sin^2\theta)\right] = \\
&= \frac{1}{2}\frac{(1-kr^2)}{a^2}[-2ra^2\sin^2\theta] = -r(1-kr^2)\sin^2\theta.
\end{aligned}$$

Considerando $i = 2$, tem-se que os *símbolos de Christoffel* não nulos são dados por

$$\begin{aligned}
\Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(g_{20,2} + g_{22,0} - g_{02,2}) = -\frac{1}{2}\frac{1}{a^2r^2}\left[\frac{\partial}{\partial t}(-a^2r^2)\right] = \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{a^2r^2}[-2\dot{a}ar^2] = \frac{\dot{a}}{a}. \\
\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(g_{21,2} + g_{22,1} - g_{12,2}) = -\frac{1}{2}\frac{1}{a^2r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}(-a^2r^2)\right] = \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{a^2r^2}[-2ra^2] = \frac{1}{r}. \\
\Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(g_{23,3} + g_{23,3} - g_{33,2}) = -\frac{1}{2}\frac{1}{a^2r^2}\left[-\frac{\partial}{\partial\theta}(-a^2r^2\sin^2\theta)\right] = \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{a^2r^2}[2a^2r^2\sin\theta\cos\theta] = -\sin\theta\cos\theta.
\end{aligned}$$

Por fim considerando $i = 3$, tem-se que os *símbolos de Christoffel* não nulos são

$$\begin{aligned}
\Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(g_{30,3} + g_{33,0} - g_{03,3}) = -\frac{1}{2}\frac{1}{a^2r^2\sin^2\theta}\left[\frac{\partial}{\partial t}(-a^2r^2\sin^2\theta)\right] = \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{a^2r^2\sin^2\theta}[-2a\dot{a}r^2\sin^2\theta] = \frac{\dot{a}}{a}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(g_{31,3} + g_{33,1} - g_{13,3}) = -\frac{1}{2}\frac{1}{a^2r^2\sin^2\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(-a^2r^2\sin^2\theta)\right] = \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{a^2r^2\sin^2\theta}[-2a^2r\sin^2\theta] = \frac{1}{r}. \\
\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 &= \frac{1}{2}g^{33}(g_{32,3} + g_{33,2} - g_{23,3}) = -\frac{1}{2}\frac{1}{a^2r^2\sin^2\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(-a^2r^2\sin^2\theta)\right] = \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{a^2r^2\sin^2\theta}[-2a^2r^2\sin\theta\cos\theta] = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cotg\theta.
\end{aligned}$$

De posse das informações anteriores, pode-se calcular as componentes do *tensor de Ricci*, que é dado por

$$R_{uv} = \Gamma_{uv;\lambda}^\lambda - \Gamma_{u\lambda;v}^\lambda + \Gamma_{uv}^\lambda \Gamma_{\lambda\delta}^\delta - \Gamma_{u\lambda}^\delta \Gamma_{v\delta}^\lambda, \quad (5.32)$$

que será reescrito da seguinte forma

$$R_{uv} = \frac{1}{\sqrt{-g}}[\Gamma_{uv}^\lambda(\sqrt{-g})]_{;\lambda} - [\ln(\sqrt{-g})]_{;uv} - \Gamma_{u\lambda}^\delta \Gamma_{v\delta}^\lambda. \quad (5.33)$$

A *métrica FLRW* fornece $R_{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$. As componentes não nulas são somente R_{00} , R_{11} , R_{22} e R_{33} . Utilizando a equação (5.33) tem-se que

Para $\mu\nu = 00$, tem-se que

$$R_{00} = \frac{1}{\sqrt{-g}}[\Gamma_{00}^\lambda(\sqrt{-g})]_{;\lambda} - [\ln(\sqrt{-g})]_{;00} - \Gamma_{0\delta}^\lambda \Gamma_{0\lambda}^\delta. \quad (5.34)$$

Como $\Gamma_{00}^\lambda = 0$ com $\lambda = 0, 1, 2, 3$, tem-se que

$$R_{00} = -[\ln(\sqrt{-g})]_{;00} - \Gamma_{0\delta}^\lambda \Gamma_{0\lambda}^\delta. \quad (5.35)$$

Realizando a soma em λ , obtém-se

$$R_{00} = -\ln[\sqrt{-g}]_{;00} - \Gamma_{0\delta}^0 \Gamma_{00}^\delta - \Gamma_{0\delta}^1 \Gamma_{01}^\delta - \Gamma_{0\delta}^2 \Gamma_{02}^\delta - \Gamma_{0\delta}^3 \Gamma_{03}^\delta. \quad (5.36)$$

O termo $\Gamma_{00}^\delta = 0$ para $\delta = 0, 1, 2, 3$ e nos últimos três termos tem-se que $\Gamma_{0\delta}^\alpha = 0$ para $\alpha = 1, 2, 3$. Mais ainda, $\Gamma_{0\delta}^\alpha = 0$ para $\delta = \alpha$. Assim, deve-se ter $\delta = 1, 2, 3$, no terceiro, quarto e quinto termos respectivamente. O segundo termo da equação (5.36) também contém $\Gamma_{0\delta}^0$ que é sempre zero. Segue assim,

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -[\ln\sqrt{-g}]_{;00} - \Gamma_{01}^1 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{02}^2 \Gamma_{02}^2 - \Gamma_{03}^3 \Gamma_{03}^3 \\
&= -[\ln\sqrt{-g}]_{;00} - (\Gamma_{01}^1)^2 - (\Gamma_{02}^2)^2 - (\Gamma_{03}^3)^2 \\
&= -[\ln\sqrt{-g}]_{;00} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \\
&= -[\ln\sqrt{-g}]_{;00} - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2
\end{aligned} \quad (5.37)$$

Como

$$\begin{aligned} [\ln \sqrt{-g}]_{;0} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{-g} = \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a^3 r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{a^3 r^2 \sin \theta}{\sqrt{1-kr^2}} \right] \\ &= \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a^3 r^2 \sin \theta} \cdot \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{1-kr^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} [a^3] = \frac{1}{a^3} 3a^2 \dot{a} = \frac{3\dot{a}}{a}. \end{aligned}$$

Segue que,

$$[\ln \sqrt{-g}]_{;00} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{3\dot{a}}{a} \right] = \frac{3\ddot{a}a - 3\dot{a}\dot{a}}{a^2} = \frac{3\ddot{a}}{a} - \frac{3\dot{a}^2}{a^2}. \quad (5.38)$$

Substituindo a equação (5.38) na equação (5.37), obtém-se

$$R_{00} = \frac{-3\ddot{a}}{a} + \frac{3\dot{a}^2}{a^2} - \frac{3\dot{a}^2}{a^2} = \frac{-3\ddot{a}}{a}. \quad (5.39)$$

Analogamente pode-se mostrar que,

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \quad (5.40)$$

$$R_{22} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), \quad (5.41)$$

$$R_{33} = r^2 \sin^2 \theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k). \quad (5.42)$$

Substituindo as equações (5.39) a (5.42) na equação (5.30), obtém-se o valor do escalar de curvatura.

$$\begin{aligned} R &= g^{ij} R_{ij} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} \\ &= 1 \cdot \left[\frac{-3\ddot{a}}{a} \right] + \frac{(1-kr^2)}{a^2} \cdot \left[\frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{(1-kr^2)} \right] + \left[\frac{-1}{r^2 a^2} \right] \cdot r^2 [a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k] + \\ &+ \left[\frac{-1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \right] \cdot r^2 \sin^2 \theta [a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k] \\ R &= -\frac{3\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2k}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2k}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2k}{a^2} \\ &= \frac{-6\ddot{a}}{a} - \frac{-6\dot{a}^2}{a^2} - \frac{6k}{a^2} \\ &= -6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right] \end{aligned}$$

O *postulado de Weyl* introduz o fluido perfeito. O *tensor energia-momentum* é dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)g^{\mu\alpha}u_\alpha u^\nu - pg_{\mu\nu} \quad (5.43)$$

Uma vez que pelo *princípio cosmológico* a métrica é diagonal por construção, as componentes não nulas do *tensor energia-momentum* são dadas por

$$\begin{aligned} T_{00} &= (\rho + p)u_0u_0 - pg_{00} = (\rho + p)g_{0i}u^i u_0 - pg_{00} = (\rho + p)g_{00}u^0u_0 - pg_{00} \\ &= \rho + p - p = \rho. \end{aligned} \quad (5.44)$$

e

$$T_{ii} = (\rho + p)u_iu_i - pg_{ii} = (\rho + p)g_{ik}u^k u_i - pg_{ii} = -pg_{ii}, \text{ para } i = 1, 2, 3. \quad (5.45)$$

Uma vez que $u_i = 0$, segue que $T_{11} = -pg_{11}$, $T_{22} = -pg_{22}$ e $T_{33} = -pg_{33}$.

Desta forma, a expressão para o *tensor energia-momentum* é

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p\frac{a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pa^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pa^2r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

Com as informações obtidas é possível calcular o *tensor de Einstein* G_{uv} , cujas componentes não nulas são G_{00} , G_{11} , G_{22} e G_{33} . Assim,

$$\begin{aligned} G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} + \Lambda g_{00} = \frac{-3\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2} \cdot \left[-6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \right] \cdot 1 + \Lambda \\ &= -\frac{3\ddot{a}}{a} + \frac{3\ddot{a}}{a} + \frac{3\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3k}{a^2} + \Lambda = 3 \left[\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right] + \Lambda. \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} G_{11} &= R_{11} - \frac{1}{2}Rg_{11} + \Lambda g_{11} \\ &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2} - \frac{1}{2} \cdot \left[-6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \right] \cdot \left[\frac{-a^2}{1-kr^2} \right] + \Lambda \left[\frac{-a^2}{1-kr^2} \right] \\ &= \left[\frac{-1}{1-kr^2} \right] \cdot [-\ddot{a}a - 2\dot{a}^2 - 2k + 3\ddot{a}a + 3\dot{a}^2 + 3k + \Lambda a^2] \\ &= \left[\frac{-1}{1-kr^2} \right] \cdot [2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k + \Lambda a^2]. \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} G_{22} &= R_{22} - \frac{1}{2}Rg_{22} + \Lambda g_{22} \\ &= r^2[\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k] - \frac{1}{2} \cdot \left[-6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \right] \cdot [-r^2a^2] + \Lambda[-a^2r^2] \\ &= r^2[\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k] + [3\ddot{a}a + 3\dot{a}^2 + 3k] \cdot [-r^2] + \Lambda[-a^2r^2] \\ &= -r^2[2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k + \Lambda a^2]. \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned}
G_{33} &= R_{33} - \frac{1}{2}Rg_{33} + \Lambda g_{33} \\
&= r^2 \sin^2 \theta [\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k] - \frac{1}{2} \cdot \left[-6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \right] \cdot [-a^2 r^2 \sin^2 \theta] + \\
&+ \Lambda(-a^2 r^2 \sin^2 \theta) \\
&= r^2 \sin^2 \theta [\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2k] + [3\ddot{a}a + 3\dot{a}^2 + 3k] \cdot [-r^2 \sin^2 \theta] + \Lambda(-a^2 r^2 \sin^2 \theta) \\
&= -r^2 \sin^2 \theta [2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k + \Lambda a^2].
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Substituindo os resultados encontrados nas *equações de campo de Einstein*, obtêm-se as componentes não nulas apenas para $\mu = \nu$. Assim, a componente $\mu\nu = 00$ é dada por

$$\begin{aligned}
G_{00} &= 8\pi T_{00} \\
3 \left[\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right] + \Lambda &= 8\pi\rho \\
\frac{3\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3k}{a^2} &= 8\pi\rho - \Lambda
\end{aligned}$$

Definindo

$$H^2 \equiv \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi\rho}{3} - \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}. \tag{5.51}$$

A componente $\mu\nu = 11$ é dada por

$$\begin{aligned}
G_{11} &= 8\pi T_{11} \\
\left[\frac{-1}{1 - kr^2} \right] (2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k + \Lambda a^2) &= 8\pi(-pg_{11}) \\
\left[\frac{-1}{1 - kr^2} \right] (2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k + \Lambda a^2) &= -8\pi p \cdot \left[\frac{-a^2}{1 - kr^2} \right] \\
2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k + \Lambda a^2 &= -8\pi p a^2 \\
\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} + \Lambda &= -8\pi p
\end{aligned}$$

Usando (5.51), tem-se que

$$\begin{aligned}
\frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{8\pi\rho}{3} - \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{k}{a^2} + \Lambda &= -8\pi p \\
\frac{2\ddot{a}}{a} &= -8\pi p - \frac{8\pi\rho}{3} - \frac{2\Lambda}{3} \\
\frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{12\pi p}{3} - \frac{4\pi\rho}{3} - \frac{\Lambda}{3} \\
\frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi}{3}(3p + \rho) - \frac{\Lambda}{3}.
\end{aligned} \tag{5.52}$$

A componente $\mu\nu = 22$ é dada por

$$\begin{aligned}
 G_{22} &= 8\pi T_{22} \\
 -r^2[2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k + \Lambda a^2] &= 8\pi[-pg_{22}] \\
 -r^2[2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k + \Lambda a^2] &= -8\pi p(-a^2 r^2) \\
 2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k + \Lambda a^2 &= -8\pi p a^2 \\
 \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} + \Lambda &= -8\pi p.
 \end{aligned} \tag{5.53}$$

Expressão já obtida no caso da componente $\mu\nu = 11$.

Por fim, a componente $\mu\nu = 33$ é dada por

$$\begin{aligned}
 G_{33} &= 8\pi T_{33} \\
 G_{33} &= 8\pi[-pg_{33}] \\
 -r^2 \sin^2 \theta [2\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + k + \Lambda a^2] &= -8\pi p[-a^2 r^2 \sin^2 \theta] \\
 2\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + k + \Lambda a^2 &= -8\pi p a^2 \\
 2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k + \Lambda a^2 &= -8\pi p a^2 \\
 \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} + \Lambda &= -8\pi p.
 \end{aligned} \tag{5.54}$$

Pode-se ver que as componentes G_{22} e G_{33} são equivalentes a componente G_{11} . Tem-se que, as equações de Friedmann são:

$$H^2 \equiv \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi\rho}{3} - \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}. \tag{5.55}$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi}{3}(\rho + 3p) - \frac{\Lambda}{3}, \tag{5.56}$$

onde Λ é a *constante cosmológica* possivelmente causada pela energia do vazio, a é o *fator de escala* do Universo e k é a *curvatura gaussiana*. Se a forma do Universo é hiperesférica e R é o raio de curvatura (R_0 no momento atual), então $a = \frac{R}{R_0}$. Geralmente, é a *curvatura gaussiana*. Se k é positiva, então o Universo é hiperesférico. Se k é zero, o Universo é plano e se k é negativo o Universo é hiperbólico. Note que ρ e p são funções de a . O *parâmetro de Hubble*, H , é a velocidade de expansão do Universo.

O *parâmetro de Hubble* pode mudar no tempo se outros membros da equação são dependentes do tempo (em particular a densidade de energia, a energia do vazio e a curvatura). Avaliando o *parâmetro de Hubble* no momento atual resulta que a *constante de Hubble*⁶ é a constante de proporcionalidade da *lei de Hubble*⁷. Aplicado a um fluido com equação de estado dada, as *equações de Friedmann* descrevem a evolução no tempo e a geometria do Universo como função da densidade do fluido.

⁶Constante introduzida por Hubble para reproduzir o fato observacional de que as galáxias próximas se afastam com velocidades crescentes com as distâncias que nos separam delas.

⁷Relação de proporcionalidade entre a velocidade de afastamento (V), medida pelo *redshift*, e a distância das galáxias próximas (d).

Alguns cosmólogos chamam (5.56) de equação de aceleração e reservam o termo *equação de Friedmann* apenas para a equação (5.55).

A solução dada pela *métrica FLRW*, descreve um Universo repleto de um fluido ideal com densidade e pressão dada pelas *equações de Friedmann*. É uma solução das *equações de campo de Einstein* quando o *tensor energia-momentum* descreve um espaço-tempo isotrópico e homogêneo.

6 Conclusão

Após de milhares de anos ainda contempla-se o mesmo céu noturno, mas de uma maneira totalmente diferente. Desapareceu o cosmos imutável e perfeito que convivia com um mundo sublunar corruptível e perecível. Os sintomas da não permanência cósmica se manifestam pelo movimento dos planetas e também por verdadeiros acontecimentos celestes. E em raras e espetaculares ocasiões, pontos luminosos aparecem no céu noturno: as estrelas novas ou supernovas¹. Assim pode-se dizer que acontecem no céu alguns fenômenos de violência espantosa que conduzem à emissão de radiação, aceleração de partículas até energias impensáveis. Para estudar tais manifestações e delimitar causas e consequências sobre a evolução e constituição do Universo, a Cosmologia recorre hoje em dia a novas teorias e a novos dispositivos de observação.

Neste trabalho foram analisados dados históricos, teorias matemáticas e físicas que formam a base para este texto. Coloca-se neste momento algumas considerações e perspectivas sobre o estudo em Cosmologia, na tentativa de deixar mais claro o cenário de pesquisa em que se encontra inserida a Cosmologia Moderna atualmente.

A Teoria Relativística da Gravitação de Einstein baseia-se em equações que levam em conta não somente a geometria do Universo, mas também o seu conteúdo material. No entanto, para a Cosmologia, os objetos celestes que constituem o Universo não são estudados individualmente, mas sim como um conjunto único de matéria. O interessante não é estudar uma galáxia, ou um aglomerado de galáxias particular, mas estudar o conjunto de todos os aglomerados de galáxias que existem no Universo.

A Cosmologia Moderna também precisa dizer algo sobre como essa matéria surgiu e por que ela se distribui da forma como é observada hoje. Com o desenvolvimento da astrofísica observacional passou-se conhecer mais sobre o conteúdo de matéria existente no Universo, revelando assim uma estrutura rica e nunca imaginada envolvendo superaglomerados de galáxias, filamentos e vazios. Evidências observacionais mostraram que não é possível explicar o conteúdo de matéria do Universo pensando-se somente na matéria visível, ou seja, nas estrelas, galáxias e suas aglomerações.

Em 1933 o astrônomo suíço Fritz Zwick (1898 – 1974), calculou a massa total do

¹Supernovas são explosões de estrelas com mais de 10 massas solares que produzem objetos extremamente brilhantes, os quais perdem seu brilho até se tornarem invisíveis, após algumas semanas ou meses.

aglomerado de galáxias Coma baseado no movimento das galáxias que se situavam próximas à sua borda. Comparando esta estimativa de massa com aquela cujo cálculo se baseava no número de galáxias e no brilho total do aglomerado, Zwicky verificou que havia encontrado 400 vezes mais massa do que o esperado. A gravidade produzida pelas galáxias visíveis do aglomerado seria, pequena demais para permitir que algumas delas se deslocassem de modo tão rápido em suas órbitas. Desta maneira, era necessário que existisse mais matéria no aglomerado. Este fato ficou conhecido como o “problema da falta de massa”. Zwicky concluiu que deveria existir no aglomerado de galáxias observado um tipo de matéria não visível (transparente), que juntamente com a matéria visível, forneceria massa e gravidade suficiente para mantê-lo unido gravitacionalmente. Mais tarde verificou-se que esta matéria não visível, não só permeia o aglomerado de galáxias Coma, mas todos os aglomerados de galáxias e passou a ser denominada “matéria escura”. Este nome é bem mais adequado do que o de “massa faltante” uma vez que não há falta de massa nas galáxias e em seus aglomerados. A matéria está presente, mas por motivo ainda não determinado, ela não é visível (não emite luz).

Avanços em Cosmologia na década de 1970 mostraram como calcular a quantidade de átomos de elementos leves, como o hélio e o deutério, que teriam sido produzidos nos três primeiros minutos do Universo. Para explicar as quantidades observadas destes elementos leves em galáxias distantes, apenas uma fração muito pequena do Universo, aproximadamente 5%, seria composta de átomos. Uma fração ainda menor corresponderia a fótons e neutrinos. Portanto, a maior parte do Universo não é feito do mesmo material que nós somos feitos, ou seja, de átomos. Mas então qual a composição dos outros 95% do Universo?

A dinâmica das galáxias indica que 25% do Universo é composto por um novo tipo de partícula elementar responsável pela matéria escura. Esta matéria, que não emite luz, compõe grande parte das galáxias no Universo. Possíveis candidatos são postulados por várias teorias, mas ainda não foram produzidos ou detectados em laboratório. Hoje em dia existem vários experimentos tentando capturar uma dessas partículas que circulam em nossa galáxia. A dificuldade é que essas partículas devem interagir muito fracamente e possuir uma densidade pequena, tornando sua detecção problemática. Há também a possibilidade fascinante de se poder criar essas partículas nos grandes anéis de colisão. Em particular, o Large Hadron Collider no laboratório CERN, na Suíça, podendo assim finalmente desvendar o mistério da matéria escura.

Além da matéria escura a natureza reservava outra surpresa para os cientistas. Em 1998 uma revolução aconteceu no mundo da Cosmologia,

... graças a uma descoberta considerada pela revista Science como uma das mais importantes do século XX, sabemos hoje que cerca de 70% do universo é composto de algo difuso, que não se concentra em galáxias e que provoca a expansão acelerada do universo. Como a gravidade é sempre atrativa, todos esperavam que a expansão do universo estivesse desacelerando! Podemos imaginar então a pre-

sença de um meio extremamente tênue que permeia todo o universo. Esse meio, porém, tem propriedades diferentes de um meio material: apresenta uma pressão grande e negativa, o que causa um efeito de anti-gravidade, resultando na expansão acelerada observada. A esse meio foi dado o nome de energia escura.([15], p.37)

Até pouco tempo, os cosmólogos estavam concentrados simplesmente na tentativa de provar a existência da energia escura. Com a formulação de argumentos convincentes a este respeito seus esforços agora estão voltados para um problema ainda mais profundo: de onde vem esta energia? A possibilidade mais conhecida é a de que a energia é inerente ao espaço. Se um volume de espaço fosse totalmente vazio (sem nada de matéria ou radiação) ainda assim conteria esta energia. A respeitável noção desta energia remonta a Albert Einstein e à sua tentativa, em 1917, de construir um modelo estático do Universo. Para conciliar a estagnação com a sua Teoria da Relatividade de Geral, ele precisou introduzir a energia do vácuo ou, em sua terminologia, uma constante cosmológica. Ele ajustou o valor da constante de tal forma que a sua repulsão gravitacional contrabalançasse exatamente a atração gravitacional da matéria. Mais tarde, quando os astrônomos estabeleceram que o Universo está se expandindo, Einstein lamentou o seu artifício, considerando-o como o seu maior equívoco. Mas talvez este julgamento tenha sido apressado. Se a constante cosmológica tivesse valor ligeiramente maior que o proposto por Einstein, sua repulsão excederia a atração da matéria e a expansão cósmica seria acelerada.

O maior desafio para qualquer teoria da energia escura é explicar a quantidade da matéria inferida, quantidade esta que não seja demasiada a ponto de acarretar a sua possível interferência na formação de estrelas e galáxias no Universo primordial, mas que seja suficiente para que os seus efeitos possam ser sentidos hoje. Diferentemente da matéria, a energia escura não se aglomera mais em alguns lugares que em outros. Por sua própria natureza, ela se encontra espalhada suavemente por toda parte. Qualquer que seja a localização, seja na Terra ou no espaço intergaláctico, a energia escura tem a mesma densidade.

A energia escura é mais conhecida como o suposto agente da aceleração cósmica uma substância indefinida que exerce um tipo de força antigravitacional no Universo como um todo. Bem menos conhecido é o fato de que esta energia teve efeitos secundários em materiais do Universo. Ela ajudou a imprimir o característico padrão filamentoso da matéria nas maiores escalas. Já em escalas menores, ela parece ter interrompido o crescimento de aglomerados galácticos cerca de 6 bilhões de anos atrás. Em uma escala ainda menor, a energia escura reduziu a taxa em que as galáxias se chocam e se fundem umas com as outras dando formas as galáxias. Ao reduzir as colisões, a energia escura pode ser o que permitiu a manutenção dos braços espirais da nossa galáxia. Se fosse mais fraca ou mais forte, a Via Láctea poderia ter sofrido uma taxa de formação estelar menor, de forma que os elementos pesados que constituem nosso

planeta poderiam nunca ter sido sintetizados.

A energia escura não apenas parece compor a maior parte do Universo, como também sua existência, se resistir ao teste do tempo, provavelmente exigirá o desenvolvimento de novas teorias na física. Os cientistas estão apenas no início de um longo caminho para entender a energia escura e suas implicações. Embora apenas seus efeitos sobre o Universo como um todo sejam observados, já se sabe que a energia escura também pode moldar a evolução de seus principais constituintes: estrelas, galáxias e aglomerados galácticos. Astrônomos provavelmente observaram durante décadas o trabalho da energia escura sem ter se dado conta disso. Esta forma de energia faz mais que acelerar a expansão do Universo. Ela ajuda a determinar a forma e o espaçamento das galáxias e pode ser a principal ligação entre vários aspectos da formação das galáxias que pareciam desconectados até hoje.

Com informações cada vez mais precisas e detalhadas pode-se dizer que nosso Universo é composto pelos seguintes ingredientes: “5% de átomo, 25% de uma partícula elementar ainda não descoberta e 70% de um meio difuso com propriedades exóticas (pressão negativa), cuja origem ainda não se conhece”. ([15], p.37).

Hoje em dia o modelo cosmológico de maior concordância entre os cosmólogos é baseado nos seguintes fatos. Uma região homogênea e muito pequena de um universo muito denso entrou subitamente em uma fase de inflação exponencial até atingir um tamanho consideravelmente maior que o do universo observável. Esta fase foi seguida de um aquecimento durante o qual a radiação e a matéria foram criadas, sendo o conteúdo atual do Universo, do qual uma grande parte ainda não é conhecida. Durante quase dez bilhões de anos o Universo se comportou como no antigo modelo padrão de expansão freada pela gravidade. No começo, seu conteúdo era dominado pela radiação suficientemente intensa para impedir que todo o hidrogênio fosse consumido quando da nucleossíntese primordial e para fornecer as proporções de elementos leves observados hoje. Então, como a densidade da radiação decresceu mais rapidamente do que a densidade da matéria, esta última se impôs. Cerca de 400 mil anos após o Big Bang, a temperatura do plasma primordial baixou suficientemente para que os núcleos de hidrogênio e de hélio capturassem os elétrons e formassem um gás neutro e transparente. A radiação assim liberada, cuja temperatura continuou a decrescer, passou a constituir o fundo difuso cosmológico a 2,73 K. Uma nova mudança ocorreu há cerca de 5 bilhões de anos. Uma forma de energia desconhecida, denominada energia escura, desempenhava um papel desconhecido até então. Sua densidade diminuía ainda mais lentamente que da matéria, tornando-se preponderante e com características próximas da constante cosmológica, fazendo a expansão acelerar. Este modelo reproduz perfeitamente todas as observações, mas levanta novas indagações. Ainda não se sabe o que é a matéria escura, de onde vem a energia escura e qual campo desempenhou o papel de inflação. Todas estas indagações apresentam várias respostas.

Contudo, existem outros mistérios que a Ciência ainda não sabe explicar. Questões

como: O que existia na região homogênea e muito pequena de um universo muito denso que entrou subitamente em uma fase de inflação exponencial? O que fez gerar esta fase de inflação? Por que a temperatura era tão elevada? Por que o Universo é tão uniforme e homogêneo em ampla escala? Por que o Universo se apresenta desta forma e com estas leis? O quê ou quem determinou que ele fosse assim e não diferente? A explicação para a singularidade de onde e quando tudo começou permanece ainda como o problema crucial da Cosmologia Moderna.

Os modelos cosmológicos baseados na teoria da energia escura também são conhecidos por modelos de Quintessência ou “quinto elemento”, uma alusão à antiga filosofia grega, a qual sugeria que o Universo era composto de terra, ar, fogo, água e uma substância efêmera que impedia que a Lua e os planetas caíssem em direção ao centro da esfera celeste.

O número de teorias e modelos alternativos é extensa e novas propostas continuam surgindo regularmente. Muitas destas idéias são baseadas na teoria da inflação mas outras foram absolutamente inovadoras. Por exemplo, a hipótese de um Universo anterior ao Big Bang (*pré Big Bang*, ou *ricochete primordial*). Este Universo não teria estado sempre em expansão, mas uma ou várias fases de contração teriam ocorrido antes, possibilitando observar efeitos nas radiações de fundo. Tal modelo é cogitado por alguns teóricos da teoria de cordas, como o que precede a fase de crescimento exponencial.

Outro exemplo, seria o do modelo onde o Universo se auto-reproduz. Nesta teoria de Universo, o Big Bang começou como uma flutuação quântica microscópica que ocorreu em algum lugar em um Universo que existia anteriormente ao nosso. Da mesma forma, o nosso Universo pode estar “grávido” de outros Universos. Isso que dizer que a qualquer momento outros eventos semelhantes ao Big Bang poderiam ocorrer só que desta vez em nosso Universo.

A inflação caótica, teoria proposta por Andrei Linde(1948–) diz que o Universo é uma entidade auto-reprodutora, que existe eternamente e que está dividida em vários mini-universos, alguns dos quais são muito maiores do que a porção observável do nosso Universo. Na inflação caótica o campo quântico que dá origem ao Universo não é suave em uma escala microscópica mas uma “espuma de espaço-tempo”, caótica e não homogênea. Em algumas regiões dessa espuma a densidade de energia poderia ser maior do que a do Universo visível nos dias atuais.

Outra teoria seria a dos Multiversos. Nesta teoria o nosso Universo nasceu de uma pequena bolha de espaço-tempo que sofreu inflação a partir de uma região pré existente. Esta região se inflacionou a partir de uma região prévia e assim por diante. Poderia-se seguir nesta linha de raciocínio no sentido contrário de tal modo que o nascimento original do espaço-tempo (a origem fundamental do Universo) teria ocorrido há tanto tempo que poderia ser inútil perguntar como esta ocorreu. Desta maneira, o nosso Universo seria apenas uma componente do Multiverso, o qual continua crescendo

através de uma série de Big Bangs por muito mais tempo do que a nossa pequena região no Multiverso como um todo, continuando a crescer eternamente.

A teoria do Universo “ekpirótico” foi desenvolvida por Paul Steinhardt (1952–) e colaboradores na Princeton University, Estados Unidos. Esta teoria tenta explicar importantes detalhes sobre a natureza do nosso Universo, inclusive o porquê dele estar se expandindo da maneira como é observada hoje. Este modelo de Universo está baseado na chamada “teoria M” (*M-Theory*), que pode ser entendida como uma extensão da teoria de cordas (*string theory*). A teoria de cordas, ao contrário do que é descrito no modelo padrão de física de partículas, as partículas elementares que constituem a matéria existente no Universo, não são estruturas puntiformes. Ao contrário, os elementos constituintes fundamentais do espaço e do tempo são pequeníssimas cordas vibrantes. A maneira como estas cordas vibram determinaria as propriedades características de cada partícula observada na natureza.

Além das teorias para modelos de Universo descritas brevemente acima pode-se citar outras como, por exemplo: a inflação eterna, a hipótese sem-contorno (*no-boundary hypothesis*), a inflação dupla, a teoria da geometria “torcida” (*warped 5-dimensional*) e os modelos cíclicos.

Enquanto os problemas persistirem, todas as soluções devem ser consideradas mesmo que para reforçar nosso atual modelo.

Certas conclusões apontam para a necessidade de novos modelos em física de partículas elementares e teorias de campos. Novos instrumentos planejados ou já em atividades testarão esses novos modelos. Uma verdadeira revolução está em curso, da qual podem resultar em um novo paradigma para as gerações futuras.

Referências

- [1] MOURÃO, R. R. F. *Da Terra às Galáxias: Uma Introdução à Astrofísica*. 3. ed. Petrópolis: Editora Vozes Ltda, 1984.
- [2] FARIA, R. P. (Ed.). *Fundamentos de Astronomia*. 2. ed. Campinas: Papirus, 1985.
- [3] SOUZA, R. E. *Introdução á Cosmologia*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2004.
- [4] SILK, J. *O Big Bang: A Origem do Universo*. 2. ed. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1988.
- [5] PERUZZI, N. J. *Modelos Geocêntricos de Platão a Ptolomeu: uma contribuição para o ensino da Geometria*. Dissertação (Mestrado) — UNESP - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 1998.
- [6] MLODINOW, L. *A Janela de Euclides*. São Paulo: Geração Editorial, 2008.
- [7] GREENE, B. *O Universo Elegante*. São Paulo: Companhia das Letras, 2001.
- [8] ELLIS, A. *Black Holes - Part 1 - History*. 2010. [Acessado em 01 de Fevereiro de 2010]. Disponível em: <<http://www.astronomyedinburgh.org/publications/journals/39/blackholes.html>>.
- [9] NOVELO, M. Universo Oscilante e a Cosmologia no Brasil. *EDIÇÃO ESPECIAL SCIENTIFIC AMERICAN Brasil*, v. 34, p. 14–15, 2009.
- [10] GORODSKI, C. 2009. Disponível em: <<http://www.ime.usp.br/~gorodski/ps/geom.doc>>.
- [11] CARMO, M. P. do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- [12] SEIXAS, W. O Princípio da Relatividade - de Galileu a Einstein. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 5, p. 43–56, 2005.
- [13] NEWTON, I. *Sir Isaac Newton's Mathematical Principle of Natural Philosophy and His System of the World*. Berkeley: University of California Press, 1962. Tradução de A. Motte e Florian Cajori.

-
- [14] CRAWFORD, P. A gênese da teoria da relatividade geral ou a longa história do princípio da equivalência. Disponível em http://cosmo.fis.fc.ul.pt/crawford/artigos/Genese_RG_Coimbra.pdf.
- [15] ROSENFELD, R. *A Cosmologia*. 2005. [Acessado em 25 de Agosto de 2010]. Disponível em: <<http://www.sbfisica.org.br/fne/Vol6/Num1/cosmologia.pdf>>.
- [16] SEIXAS, W. *Um estudo sobre a geometria extrínseca dos espaços-tempo*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, 1989.
- [17] FABER, R. L. *Differential Geometry and Relativity Theory*. New York: Marcel Dekker, Inc., 1983.
- [18] TENENBLAT, K. *Introdução à Geometria Diferencial*. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1990.
- [19] KÜHNEL, W. *Differential Geometry: Curves - Surfaces - Manifolds*. 2. ed. United States of America: American Mathematical Society, 2006.
- [20] PRESSLEY, A. *Elementary Differential Geometry*. London: Springer - Verlag London, 2001.
- [21] GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo - Volume 2*. 4. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2000.
- [22] CARMO, M. P. do. *Geometria Riemanniana*. 2. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988.
- [23] RESNICK D. HALLIDAY, K. S. K. R. *Física 2*. 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2003.
- [24] TIPLER, G. M. P. A. *Física para cientistas e engenheiros - Volume 3: física moderna: mecânica quântica, relatividade e a estrutura da matéria*. 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2006.
- [25] SCHUTZ, B. F. *A First Course in General Relativity*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- [26] d'INVERNO, R. A. *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford: Oxford University Press, 1992.