UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Guilherme Lima Ferreira da Silva

Universalidade em Matrizes Aleatórias via Problemas de Riemann-Hilbert

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Rua Cristóvão Colombo, 2265
15054-000, São José do Rio Preto, São Paulo, Brasil
Telefone: (17) 3221-2444 Fax: (17) 3221-2445

Guilherme Lima Ferreira da Silva

Universalidade em Matrizes Aleatórias via Problemas de Riemann-Hilbert

Orientador:
Dimitar Kolev Dimitrov

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Campus de São José do Rio Preto

São José do Rio Preto - SP, Brasil

9 de março de 2012

Silva, Guilherme Lima Ferreira da.
Universalidade em matrizes aleatórias via problemas de Riemann-Hilbert / Guilherme Lima Ferreira da Silva. - São José do Rio Preto : [s.n.], 2012.
155 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Dimitar Kolev Dimitrov
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Matrizes aleatórias. 3. Polinômios ortogonais. 4. Riemann-Hilbert, Problemas de. I. Dimitrov, Dimitar Kolev. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.587

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
Campus de São José do Rio Preto - UNESP

Guilherme Lima Ferreira da Silva

Universalidade em Matrizes Aleatórias via Problemas de Riemann-Hilbert

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração Análise Aplicada, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov
Professor Titular
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Carlos Tomei
Professor Titular
PUC – Rio de Janeiro

Prof. Dr. José Alberto Cuminato
Professor Titular
USP – São Carlos

São José do Rio Preto, 09 de março de 2012.

Ao meu pequeno irmão Murilo

Dedico.

AGRADECIMENTOS

Apesar de um trabalho científico ter um autor específico, muitas pessoas passam pelas nossas vidas, e cada uma tem a sua contribuição em nossa formação pessoal e profissional, deixando suas marcas - ainda que indiretamente - em nossos trabalhos. Algumas destas pessoas que passaram por minha vida eu gostaria de lembrar e agradecer aqui.

Agradeço a Deus o caminho que tem preparado para mim.

Meu pai e herói João, muito obrigado ao sempre pensar em mim antes de pensar em si mesmo. Minha mãe Josi, que tem me apoiado em todos os momentos, meus agradecimentos com amor.

Ao professor, orientador e amigo Dimitar. Mais que orientar na matemática, me preparou para a carreira acadêmica, e abriu portas as quais não imaginava que poderiam ser abertas, sempre disposto a auxiliar e conversar, não poupando críticas quando necessárias, as quais feitas sempre com o intuito de engrandecer. Palavras me faltam para lhe dizer o quanto sou grato por estes 4 anos de trabalho.

Aos meus irmãos Vinícius, do qual sempre me orgulhei de ser meu irmão, e Murilo, motivo de muitas alegrias.

A Ni, ao entrar em minha família acrescentando somente coisas boas, me fazendo uma pessoa melhor. Ao Marcelo, com seu bom humor sempre presente, e a todos os momentos de alegria sincera que passamos juntos.

A toda minha família, ao estarem sempre presentes me apoiando.

À Andressa, que durante todo o mestrado me apoiou, sendo sempre paciente, amorosa e compreensiva.

Ao Fernando, que nos momentos difíceis sempre estava por perto para ajudar e redirecionar, tanto pessoal quanto profissionalmente.

Aos professores que fizeram parte da minha formação. Em especial o Ranga, com suas sinceridade e simplicidade admiráveis, a Cleonice, sempre pronta a ajudar, a Eliana e seus excelentes almoços e conversas, aos bons bate-papos na churrasqueira com o Geraldo, ao Waldemar sempre mostrando onde eu poderia chegar.

Ao Eduardo, Eliel e Heron, sempre dispostos a ajudar.

A todos os demais alunos do grupo de polinômios ortogonais e amigos de graduação e pós-graduação, sempre dispostos a um café e bom bate-papo no meio de tanto estudo.

Aos meus amigos de Indaiatuba, que apesar dos poucos momentos atualmente juntos, nossas amizades permanecem a mesma.

Agradeço também em especial à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - Fapesp, pelo auxílio durante meu mestrado pelo processo 2010/13543-4, e também pelo auxílio durante minha graduação.

RESUMO

Neste trabalho estudaremos a relação existente entre polinômios ortogonais e matrizes aleatórias.

Exibiremos uma caracterização de polinômios ortogonais via problemas de Riemann-Hilbert, a qual tem se mostrado uma ferramenta única para obtenção de assintóticas de polinômios ortogonais.

Posteriormente, estudaremos a teoria básica dos ensembles unitários de matrizes aleatórias.

Por fim, mostraremos como a teoria de assintóticas de polinômios ortogonais pode ser usada na análise assintótica de estatísticas de matrizes aleatórias, nos levando a resultados de universalidade para os ensembles unitários.

Palavras-chave: matrizes aleatórias, polinômios ortogonais, problemas de Riemann-Hilbert, universalidade.

ABSTRACT

In this dissertation we will study the relation between orthogonal polynomials and random matrices.

We will exhibit a characterization of orthogonal polynomials via Riemann-Hilbert problems, which has been shown a powerful tool for studying asymptotics of orthogonal polynomials.

Posteriorly we will review the basic theory of unitary ensembles of random matrices.

At the end, we will show how asymptotics of orthogonal polynomials can be used to study asymptotics of several statistics in random matrix theory, obtaining universality results for the unitary ensembles.

Keywords: random matrices, orthogonal polynomials, Riemann-Hilbert problems, universality.

SUMÁRIO

Introdução p. 10

1 Problemas de Riemann-Hilbert Escalares p. 18

1.1 Solução do RHP escalar - Fórmula de Plemelj . . . . . p. 19

1.2 Unicidade da Solução . . . . . p. 22

2 Problemas de Riemann-Hilbert p. 28

2.1 Sentido Rigoroso de Problemas de Riemann-Hilbert . . . . . p. 29

2.2 Unicidade da Solução . . . . . p. 31

2.3 Caracterização de Polinômios Ortogonais via Problemas de Riemann-Hilbert . . . . . p. 36

2.4 Deformação de um Problema de Riemann-Hilbert . . . . . p. 39

2.5 Equações Integrais Singulares . . . . . p. 42

3 Método Steepest Descent - Análise Assintótica de Polinômios Ortogonais p. 48

3.1 Primeira Deformação do RHP Y - Discussão Prévia . . . . . p. 49

3.2 Conexão com Teoria do Potencial . . . . . p. 52

3.3 Primeira Deformação: $Y \mapsto T$ . . . . . p. 62

3.4 Segunda Deformação: $T \mapsto R$ . . . . . p. 65

3.5 Construção da Parametriz Global . . . . . p. 69

3.6 Construção da Parametriz Local . . . . . p. 71

3.7 Terceira Deformação: $R \mapsto L$ . . . . . p. 85

3.8 Assintóticas para Polinômios Ortogonais . . . . . p. 88

4 Matrizes Aleatórias p. 94

4.1 Ensembles Unitários . . . . . p. 95

4.2 Integrando sobre Autovalores - Variáveis Espectrais . . . . . p. 97

4.3 Algumas Estatísticas sobre os Autovalores . . . . . p. 112

4.4 Funções de Correlação . . . . . p. 119

5 Universalidade p. 125

6 Considerações Finais p. 140

Referências p. 150

INTRODUÇÃO

Seja μ uma medida sobre $\mathbb{R}$ com todos os momentos finitos, isto é, para a qual

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n d\mu(x) < \infty, \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Existe uma única sequência de polinômios (π_n) (a menos de multiplicação por constante) que forma uma sequência ortogonal em $L^2(\mu)$. Tais polinômios são chamados de *polinômios ortogonais* com relação à μ. Uma caracterização mais explícita é dada por

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \pi_n(x) dx = 0, \ k = 0, \ldots, n-1,$$

$$\int_{\mathbb{R}} x^n \pi_n(x) dx \neq 0.$$

Quando, além disso, fixamos $\|\pi_n\|_{L^2(\mu)} = 1, \ \forall n$, a sequência (π_n) é dita ser *ortonormal* com relação à μ.

A relação entre polinômios ortogonais e outras áreas da matemática é impressionante. Com a certeza de não lembrar de todos os tópicos, podemos citar frações contínuas, teoria de operadores (em especial operadores de Jacobi), problema de momentos, teoria de aproximação, aproximação de Padé, análise numérica, eletrostática, mecânica quântica estatística, funções especiais, teoria dos números, combinatória, matrizes aleatórias, processos de nascimento e morte, computação tomográfica.

No decorrer deste texto, estaremos preocupados em particular com a análise assintótica de polinômios ortogonais - dada uma medida μ, o que podemos dizer sobre o comportamento dos polinômios ortogonais com relação à μ, quando fazemos $n \to \infty$?

Considere uma medida finita absolutamente contínua $d\mu(x) = \omega(x)dx$ sobre $\mathbb{R}$, para a qual $x^j\omega(x) \in H^1(\mathbb{R})$, e o seguinte problema de Riemann-Hilbert: encontre uma matriz $Y : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ que satisfaça

- Y é analítica em $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$;
- $Y_+(x) = Y_-(x)\begin{pmatrix} 1 & \omega(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R}$;
- $Y(z) \to (I + \mathcal{O}(z^{-1}))\begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix},\ z \to \infty$.

A única solução do problema de Riemann-Hilbert acima pode ser expressa em função dos polinômios ortonormais (π_n) com relação à μ,

$$Y(z) = \begin{pmatrix} \pi_n(z) & \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\pi_n(s)}{s-z}d\mu(s) \\ \gamma_{n-1}\pi_{n-1}(z) & \dfrac{\gamma_{n-1}}{2\pi i}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\pi_{n-1}(s)}{s-z}d\mu(s) \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

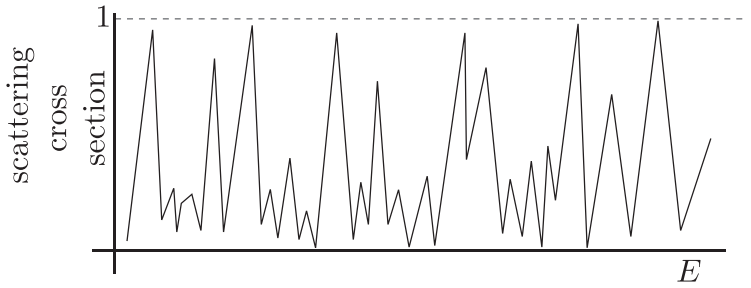
Esta caracterização de polinômios ortogonais como solução de um problema de Riemann-Hilbert é devida a Fokas, Its e Kitaev [43,44], e têm proporcionado estudos extremamente interessantes e importantes em polinômios ortogonais.

O método *Steepest-Descent* para problemas de Riemann-Hilbert, introduzido inicialmente por Deift e Zhou [29,34,35], consiste em aplicar uma série de transformações inversíveis $Y \mapsto T \mapsto \ldots \mapsto N$ em nosso problema de Riemann-Hilbert original, reduzindo-o a um problema de Riemann-Hilbert com solução explícita, e obter informações sobre nossa solução inicial percorrendo o caminho inverso $N \mapsto \ldots \mapsto T \mapsto Y$. Tal técnica tem mostrado imenso potencial para a obtenção de assintóticas de polinômios ortogonais, através do problema de Riemann-Hilbert para polinômios ortogonais exposto acima, e através disto muitos problemas de outras áreas têm sido solucionados, tais como em movimento browniano, matrizes aleatórias, teoria das equações de Painlevé [18, 28, 36].

A parte do seu interesse intrínseco, assintóticas de polinômios ortogonais aparecem em outras áreas da matemática, em particular em matrizes aleatórias, as quais também estudaremos neste texto.

Os primeiros trabalhos em matrizes aleatórias remetem ao início do século XX, tendo sido introduzidas primeiramente por Wishart [79]. Após um início lento, esta teoria

Figura 1:

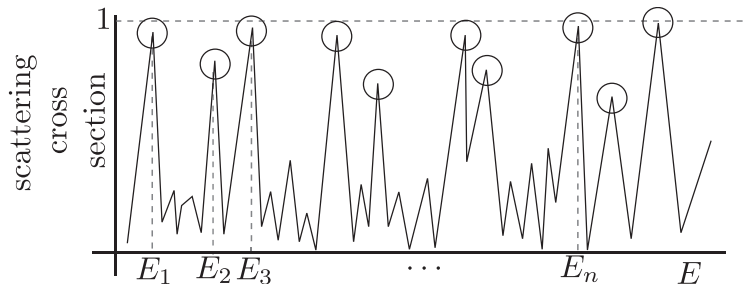


ganhou força após os trabalhos de Wigner [77,78], ao modelar o espalhamento de ressonâncias de partículas com núcleos pesados em reações nucleares lentas. Posteriormente, Dyson [37–39] formalizou a teoria de matrizes aleatórias de um ponto de vista matemático.

Dispare um jato de nêutrons, a uma energia fixa E, sobre um núcleo pesado, digamos U^{238}. Parte dos nêutros disparados atravessa o núcleo, e outra parte é desviada pelo núcleo. Podemos medir a chamada *scattering cross section*, isto é, a porcentagem dos nêutrons que é desviada, como uma função da energia E, obtendo um gráfico como na figura 1.

Podemos nos perguntar para quais valores da energia E os nêutrons são desviados quase certamente. Em termos precisos, como podemos descrever os valores de energia $E_1, E_2, \ldots$, para os quais a porcentagem de nêutrons desviada é alta (isto é, descrever os valores da energia que correspondem aos picos na figura 2)?

Figura 2:



Tanto uma abordagem analítica, por meio de equações de Schrödinger, quanto uma abordagem numérica não funcionam. Wigner então observou [57,64] que os E_n's se comportam estatisticamente como os autovalores de matrizes aleatórias do chamado *ensemble ortogonal gaussiano*.

Durante as duas últimas décadas, a teoria de matrizes aleatórias vem ganhando grande destaque, seja pela riqueza da área por si só, e também pelas inúmeras aplicações em

outras áreas do conhecimento. Em particular, merece destaque sua relação com a função zeta de Riemann.

Hugh L. Montgomery trabalhou durante muitos anos no problema de localização dos zeros da função zeta de Riemann, definida por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \ Re(s) > 1,$$

e estendida meromorficamente a todo plano $\mathbb{C}$. A conjectura de Riemann afirma que todos os zeros não-triviais da função ζ estão na reta $Re(s) = 1/2$. Sabe-se que os inteiros pares negativos são zeros de ζ, chamados zeros triviais. Assumindo a hipótese de Riemann, e reescalando a parte imaginária destes zeros, Montgomery obteve [59], sem muito rigor, uma distribuição para o número de pares de zeros da função ζ, em um intervalo arbitrário (a, b) na reta $Re(s) = 1/2$. Surpreendentemente, tal distribuição coincide com a distribuição do número dos pares de autovalores de uma matriz aleatória distribuida conforme o *ensemble unitário gaussiano*!

Em 1987, Odlyzko [61] calculou, com grau de precisão muito alto, zeros da função ζ, confirmando os resultados obtidos de maneira imprecisa por Montgomery. Somente após aproximadamente vinte anos, os cálculos de Montgomery foram verificados rigorosamente por Rudnick e Sarnak [69], e estendidos para várias funções L.

Mas o que são matrizes aleatórias?

Um *ensemble* de matrizes aleatórias consiste de um espaço de matrizes $\mathcal{M}$ e uma medida de probabilidade sobre $\mathcal{M}$. De particular interesse é o caso em que $\mathcal{M} = \mathcal{M}(n)$ é o espaço das matrizes hermitianas $n \times n$, e

$$d\mu(M) = ce^{-V(M)}dM = ce^{-V(M)} \prod_{i=1}^{n} dM_{ii} \prod_{i<j} \left(dM_{ij}^R dM_{ij}^I\right),$$

onde dM denota a medida de Lebesgue em $\mathcal{M}(n) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, $M = (M_{jk}) \in \mathcal{M}(n)$, $M_{jk} = M_{jk}^R + iM_{jk}^I$, e $V : \mathcal{M}(n) \to \mathbb{R}$ é uma função analítica que cresce suficientemente rápido, de modo que a medida acima esteja bem definida.

Por razões físicas (todos os sistemas de coordenadas são equivalentes), exigimos também para estes ensembles que

$$e^{-V(\widetilde{M})}d\widetilde{M} = e^{-V(M)}dM,$$

onde $\widetilde{M} = UMU^*$, U uma matriz unitária. Sob estas hipóteses, ao invés de considerarmos distribuições sobre $\mathcal{M}(n)$, podemos reduzir nosso estudo a distribuições sobre os autovalores de matrizes em $\mathcal{M}(n)$, da forma

$$P_n(x)d^n x = \frac{1}{Z_n} e^{-\sum_{j=1}^n V(x_j)} \prod_{i<j} (x_i - x_j)^2 dx_1 \cdots dx_n,$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$, é o vetor de autovalores de M.

A distribuição dos autovalores $P_n(x)d^n x$ é um *DPP - determinantal point process* - pode ser escrita na forma

$$P_n(x) = \det\left(K_n(x_i, x_j)\right)_{1 \leq i,j \leq n},$$

para alguma função $K_n(s,t)$ definida sobre $\mathbb{R}^2$. Um fato memorável é que, para $P_n(x)d^n x$, o núcleo K_n pode ser escrito em termos de polinômios ortogonais. Se (π_n) é a sequência de polinômios ortonormais com relação à $e^{-V(t)}dt$, então

$$K_n(s,t) = e^{-\frac{1}{2}(V(s)+V(t))} \sum_{j=0}^{n-1} \pi_j(s)\pi_j(t).$$

Assim, para entender o comportamento dos autovalores de uma matriz típica de $\mathcal{M}(n)$ quando a dimensão n é grande, devemos compreender o comportamento de K_n e, em particular, dos polinômios ortogonais com relação à $e^{-V(t)}dt$.

O Teorema Central do Limite, em sua forma mais simples, afirma que se (X_n) é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas, com média μ e variância $\sigma^2 > 0$ finitas, então

$$\frac{\sum_{j=1}^n X_j - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \to N(0,1),$$

onde $N(0,1)$ é a distribuição normal, e a convergência acima é em distribuição. Em outras palavras, o Teorema Central do Limite nos diz que o limite da média aritmética de variáveis aleatórias, depois de apropriadamente reescalada, é universal, independe da distribuição das variáveis aleatórias. Este fenômeno é conhecido por *universalidade*.

Muitas quantidades relacionadas à matrizes aleatórias também assumem forma universal. Por exemplo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{K_n(0,0)} K_n\left(\frac{s}{K_n(0,0)} + r, \frac{t}{K_n(0,0)} + r\right) = \frac{\operatorname{sen}\pi(s-t)}{\pi(s-t)},$$

onde os fatores r, $K_n(0,0)$ são fatores de reescalagem, os quais, de modo grosseiro, fazem com que os autovalores fiquem confinados em uma região limitada da reta. Note que tal limite *independe* de V, isto é, assim como no Teorema do Limite Central o limite obtido independe da distribuição das matrizes escolhida.

Atualmente são conhecidas inúmeras aplicações de matrizes aleatórias como, por exemplo, em teoria dos números, sendo surpreendentemente relacionada com a hipótese de Riemann, física de partículas, combinatória, processamento de sinais, teoria da informação, geometria algébrica e diversos outros. A recente coletânea [2] é uma ótima referência, discutindo a teoria geral de matrizes aleatórias, pesquisas recentes e aplicações em diversas áreas.

Como revelado pelo núcleo K_n, polinômios ortogonais e matrizes aleatórias possuem uma relação intrínseca. Nosso objetivo final será provar universalidade para algumas estatísticas em matrizes aleatórias. O método que exporemos, seguindo principalmente [23], é baseado na análise assintótica de polinômios ortogonais, a qual, em nosso caso, será feita através de *problemas de Riemann-Hilbert* e o método *Steepest Descent*.

No capítulo 1, discutiremos alguns aspectos de problemas de Riemann-Hilbert escalar, estabelecendo existência e unicidade de solução sob algumas hipóteses.

No capítulo 2, introduziremos os problemas de Riemann-Hilbert em um contexto geral, focando em aspectos abstratos da teoria.

No capítulo 3, faremos a análise assintótica de polinômios ortogonais, baseada no método *Steepest Descent*, de Deift e Zhou [29, 31, 32, 34].

No capítulo 4 discutiremos a teoria básica do *ensemble* unitário, apresentando algumas estatísticas relevantes.

No capítulo 5, provaremos universalidade para algumas das estatísticas apresentadas no capítulo 4.

Por fim, no capítulo 6, faremos nossas considerações finais, apontando alguns aspectos que não foram abordados e o atual estado da arte da teoria.

Antes de continuar, faremos uma observação técnica que será usada a todo instante no texto.

Os seguintes resultados são básicos [20].

Teorema 0.1 (Liouville)**.** *Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função inteira limitada, então f é constante*

Teorema 0.2 (Morera). *Se f é uma função contínua tal que*

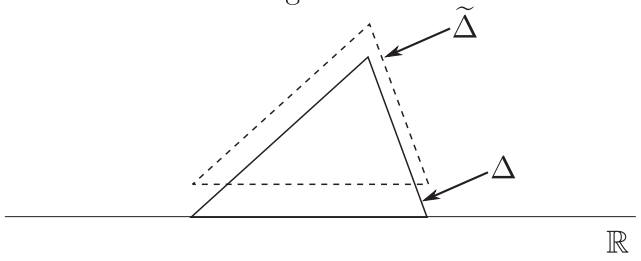
$$\int_{\Delta} f(z)dz = 0,$$

para todo triângulo $\Delta \subset U$, então f é holomorfa em U.

Ambos teoremas tem consequências que nos serão úteis.

- Se f é inteira, e $|f(z)| \leq |p(z)|$, para algum polinômio $p(z) = az^n + \mathcal{O}(z^{n-1})$, então f é um polinômio de grau no máximo n. Para concluir isto, substituindo a por uma constante b, $|b| > |a|$, podemos supor $p(z) = bz^n$. Então f/p é uma função holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, e limitada em uma vizinhança de 0, isto é, possui uma singularidade removível em 0, podendo assim ser estendida a uma função em todo plano $\mathbb{C}$, digamos g, inteira, e para a qual $|g(z)| \leq 1$, para todo z em $\mathbb{C}$. Pelo teorema de Liouville, g é constante, isto é, f é polinômio.

Figura 3:



- Suponha que f seja holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, e que existam os limites

$$f_+(x) = \lim_{\substack{z\to x \\ z\in\mathbb{C}^+}} f(z),\ f_-(x) = \lim_{\substack{z\to x \\ z\in\mathbb{C}^-}} f(z),$$

onde $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$, $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) < 0\}$.

Se $f_+(x) = f_-(x)$, então, usando o teorema de Liouville, prova-se que f é, na verdade, inteira. Para isto, consideramos a integral de f sobre um triângulo qualquer $\Delta \subset \mathbb{C}$, separando em três casos - Δ com nenhum, um ou dois vértices em $\mathbb{R}$ - e fazemos uma perturbação no triângulo, de modo que nosso novo triângulo $\widetilde{\Delta}$ fique inteiramente contido em $\mathbb{C}_+$ ou $\mathbb{C}_-$ (o caso em que Δ não possui vértice em $\mathbb{R}$ é reduzido aos demais fazendo uma triangularização de Δ), e integramos sobre este triângulo perturbado (vide figura 3). Pelo teorema de Cauchy, tal integral é nula. Por fim, aplicamos convergência dominada (a existência dos limites garante a continuidade de f em $\mathbb{C}$ [55, pg. 139], e portanto limitação numa vizinhança de

$\mathbb{C}$), e provamos que a integral sobre o triângulo original Δ é nula, e o teorema de Morera nos garante que f é inteira.

É claro que o argumento acima pode ser generalizado para qualquer aberto U tomando lugar de $\mathbb{C}$, e qualquer curva $\Sigma \subset U$ tomando lugar de $\mathbb{R}$.

CAPÍTULO 1

PROBLEMAS DE RIEMANN-HILBERT ESCALARES

Seja Σ um contorno suave orientável em $\mathbb{C}$, isto é, uma união finita de curvas suaves orientáveis que se intersectam em um número finito de pontos, com interseção sempre transversal. Denote $\Sigma^0 = \Sigma\backslash\{\text{pontos de interseção e extremos}\}$. Dada uma aplicação $v : \Sigma^0 \to \mathbb{C}$, o problema de Riemann-Hilbert escalar associado ao par (Σ, v) é o seguinte: procure por uma aplicação $f : \mathbb{C}\backslash\Sigma \to \mathbb{C}$ que satisfaça

RHP 1 – *i)* f é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\Sigma$;

RHP 1 – *ii)* $f_+(x) = f_-(x)v(x),\ x \in \Sigma^0$;

RHP 1 – *iii)* $f(z) \to 1,\ z \to \infty$.

Em *ii)*, $f_\pm$ denota os limites laterais de f pelos lados positivo (lado esquerdo de Σ, se caminhamos conforme a orientação de Σ) e negativo (lado direito de Σ).

A terceira condição acima é mera normalização. Poderíamos substitui-la por crescimento polinomial,

RHP 1 – *iii')* $f(z) = cz^k + \mathcal{O}(z^{k-1}),\ z \to \infty$.

Mas se f satisfaz o **RHP 1**, então a aplicação

$$\widetilde{f}(z) = cz^k f(z)$$

satisfaz o **RHP 1** com a condição *iii)* substituida por *iii')*, e portanto basta considerarmos o **RHP 1** como acima.

Problemas de Riemann-Hilbert têm aplicações em muitas áreas da matemática, física e engenharia, como por exemplo sistemas integráveis, equações de Painlevé, problemas inversos, tomografia computadorizada, as quais optamos por não discutir aqui. Para o leitor interessado, sugerimos [1].

Para tudo o que segue, não precisaremos estudar RHP's para curvas gerais Σ. Para nós, bastará supor que $\Sigma = \cup\gamma_j$, onde $\gamma_j : I_j \to \mathbb{R}$, $I_j \subset \mathbb{R}$ intervalo, são aplicações suaves para as quais $K \cap \mathrm{tr}(\gamma_j)$ é retificável, para todo compacto $K \subset \mathbb{C}$, e cujos traços se interseccionam apenas em um número finito de vezes, com intersecção transversal. Para que as curvas $\mathrm{tr}(\gamma_j)$ sejam orientáveis, impomos também que γ' não se anule.

No caso de problemas de Riemann-Hilbert escalares, estudaremos apenas dois casos - quando $\Sigma = \mathrm{tr}(\gamma) = \mathbb{R}$ e quando $\Sigma = \mathrm{tr}(\gamma) = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Os casos em que $\mathrm{tr}(\gamma)$ é uma curva aberta simples, seja limitada ou ilimitada, podem ser reduzidos a estes dois casos por mudança de variáveis. Restaria então analisar o caso em que $\mathrm{tr}(\gamma)$ é uma curva fechada, o qual não é de nosso interesse nesta dissertação e por isso optamos por não abordá-lo. O caso em que Σ é união de curvas γ_j's pode ser reduzido aos casos anteriores por sobreposição de soluções. Para detalhes, sugerimos [1].

1.1 Solução do RHP escalar - Fórmula de Plemelj

O **RHP 1** para $[a, b]$ pode ser solucionado pela *fórmula de Plemelj*

Teorema 1.1 (Fórmula de Plemelj [1, Lema 7.2.1, pg. 518])**.** *Suponha que $v : [a, b] \to \mathbb{C}$ seja uma aplicação Hölder contínua. Seja $C^{[a,b]}v = \Phi$ a transformada de Cauchy de v sobre $[a, b]$,*

$$\Phi(z) = (C^{[a,b]}v)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{v(s)}{s - z}ds, \ z \in \mathbb{C}\backslash[a, b].$$

Então Φ possui limites laterais $\Phi_\pm(x)$ para $x \in (a, b)$, os quais são dados por

$$\Phi_\pm(x) = \pm\frac{1}{2}v(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{v(s)}{s - x}ds, \ x \in (a, b) \tag{1.1}$$

com a integral acima sendo calculada no sentido do valor principal de Cauchy.

De um modo geral, dada uma curva arbitrária Σ, definimos a transformada de Cauchy de uma função f com respeito a Σ por

$$C^\Sigma f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma \frac{f(s)}{s - z}ds, \tag{1.2}$$

com a integral acima sendo calculada no sentido do valor principal de Cauchy.

A fórmula de Plemelj (1.1) pode ser expressa pelas equações

$$\begin{aligned} &\Phi_+(x) - \Phi_-(x) = v(x), \\ &\Phi_+(x) + \Phi_-(x) = \frac{1}{\pi i}\int_a^b \frac{v(s)}{s-x}ds. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Assumindo que v não se anule sobre $[a,b]$, podemos definir um ramo do logaritmo de modo que a condição **RHP 1** – *ii)* seja equivalente a

$$\log f_+(x) - \log f_-(x) = \log v(x). \tag{1.4}$$

A primeira equação em (1.3) nos conta que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\log v(s)}{s-z}ds,\ z \in \mathbb{C}\backslash[a,b],$$

satisfaz **RHP 1** – *ii)*. **RHP 1** – *i)* é também trivialmente satisfeita por f. Resta verificar a condição **RHP 1** – *iii)*. Tomando z suficientemente distante de $[a,b]$, de modo que valha a expansão em série geométrica

$$\frac{1}{s-z} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n}{z^n},$$

para todo $s \in [a,b]$, isto é, tomando z de modo que $\mathrm{dist}(z,[a,b]) > 1$, podemos expandir em série

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\int_a^b s^n \log v(s)ds. \tag{1.5}$$

As integrais acima são todas finitas pois v é contínua e não se anula em $[a,b]$, e a igualdade acima pode ser resumida em

$$f(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right),\ z \to \infty,$$

o que implica

$$e^{f(z)} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right).$$

Aplicando exponencial em (1.4), concluimos que

$$X(z) = e^{f(z)}. \tag{1.6}$$

é uma solução do **RHP 1**.

No caso em que $\Sigma = \mathbb{R}$, a fórmula de Plemelj continua valendo, mas sob uma hipótese adicional sobre v.

Teorema 1.2 (Fórmula de Plemelj - $\boldsymbol{\gamma}$ ilimitada [1, pg. 520])**.** *Seja $v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aplicação Hölder contínua em todo intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$, e suponha que existam constantes $M, \lambda, R > 0$ para as quais*

$$|v(x)| \leq \frac{M}{|x|^{\lambda}}, \text{ para } |x| \geq R.$$

Então a transformada de Cauchy $C^{\mathbb{R}}v$ satisfaz a fórmula de Plemelj (1.1)*.*

Assim, a função

$$X(z) = e^{\Phi(z)},$$

onde $\Phi(z) = (C^{\gamma}v)(z)$, satisfaz **RHP 1** – *i),ii)*. Para satisfazer **RHP 1** – *iii)*, precisamos primeiramente estabelecer o que entendemos por $z \to \infty$. Vamos assumir que o limite é tomado de modo que $\operatorname{dist}(z, \mathbb{R}) = \operatorname{Im} z \geq c > 0$, para alguma constante c fixa. Assim, se, por exemplo,

$$v(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^{1+\delta}}\right), \ \delta > 0, \tag{1.7}$$

então

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{v(s)}{s-z}ds\right| &\leq \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} \frac{v(s)}{s-z}ds\right| + \frac{1}{2\pi}\int_{|s|\geq R} \frac{|v(s)|}{|s-z|}ds \\ &\leq \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} \frac{v(s)}{s-z}ds\right| + \frac{1}{2\pi c}\int_{|s|\geq R} \frac{ds}{|s|^{1+\delta}}\end{aligned}$$

para $R > 0$ suficientemente grande. Agora, para a primeira integral acima, aplicamos o resultado obtido anteriormente para $[a, b] = [-R, R]$, obtendo

$$\int_{-R}^{R} \frac{v(s)}{s-z}ds = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right), \ z \to \infty.$$

Para a segunda integral, vale

$$\frac{1}{2\pi c}\int_{|s|\geq R} \frac{ds}{|s|^{1+\delta}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^{\delta}}\right).$$

Dado ϵ suficientemente pequeno, tomamos $R > 0$ suficientemente grande, e depois

$|z| > R$ também suficientemente grande, e obtemos

$$\Phi(z) \to 0,\ z \to \infty.$$

Concluimos então que

$$X(z) = e^{\Phi(z)},\ \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{v(s)}{s-z} ds$$

é uma solução do **RHP 1**.

1.2 Unicidade da Solução

Analisemos agora a unicidade da solução, inicialmente sem restringir $\Sigma = \mathbb{R}$ ou $\Sigma = [a, b]$. Recorde da seção anterior que uma solução do **RHP 1** é dada por

$$X(z) = e^{\Phi(z)},\ \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma} \frac{v(s)}{s-z} ds.$$

Isto implica em particular que $X(z)$ não se anula para $z \in \mathbb{C}\backslash\Sigma$. Como estamos assumindo que $v(x) \neq 0$ para $x \in \Sigma^0$, então por **RHP 1** – *ii)* ou $X_+(x) = X_-(x) = 0$, ou os limites $X_\pm(x)$ não se anulam. Mas pela primeira equação em (1.3), se $X_+(x) = X_-(x) = 0$, então $v(x) = 0$, o que estamos assumindo não ocorrer. Portanto $X(x) \neq 0$ para $x \in \Sigma^0$.

Se $\widetilde{X}$ é uma solução qualquer do **RHP 1**, defina

$$Y(z) = \frac{\widetilde{X}(z)}{X(z)},\ z \in \mathbb{C}\backslash\Sigma.$$

Então Y é analítica em $\mathbb{C}\backslash\Sigma$ e

$$Y_+(x) = \frac{\widetilde{X}_+(x)}{X_+(x)} = \frac{v(x)\widetilde{X}_-(x)}{v(x)X_-(x)} = Y_-(x),\ x \in \Sigma^0,$$

isto é, Y é uma função analítica também sobre Σ^0. Dividimos agora em dois casos, quando $\Sigma = \Sigma^0$, que ocorre se $\Sigma = \mathbb{R}$, e quando $\Sigma \neq \Sigma^0$, que ocorre se $\Sigma = [a, b]$.

No caso $\Sigma = \Sigma^0 = \mathbb{R}$, Y é uma função inteira. Como ainda $Y(z) \to 1$, concluimos que $Y(z) = 1, \forall z \in \mathbb{C}$, isto é, $\widetilde{X}(z) = X(z)$, e provamos

Teorema 1.3. *Seja $v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aplicação diferenciável que decresce suficientemente rápido*

(veja seção 1.1) . A aplicação

$$X(z) = e^{\Phi(z)},$$

onde

$$\Phi(z) = (C^{\mathbb{R}}v)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{v(s)}{s-z}ds,$$

é a única solução do **RHP 1**.

Consideremos agora o caso $\Sigma = [a, b]$.

Neste caso, o raciocínio anterior implica que Y é analítica em $\mathbb{C}\backslash\{a, b\}$. Para garantir unicidade na solução, devemos impor condições nos extremos a, b, isto é, adicionar uma nova condição no **RHP 1**,

RHP 1 – *iv)* $f(z) = \mathcal{O}\left(|z-c|^{\nu_c}\right),\ z \to c,\ c = a, b$, para algum $\nu_c > -1$.

A condição $\nu_c > -1$ é imposta para que f seja localmente integrável em a e b.

Proposição 1.1 ([1, pg. 534]). *Seja Φ a transformada de Cauchy de uma aplicação $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ Hölder contínua,*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{v(s)}{s-z}ds,\ z \in \mathbb{C}\backslash[a, b].$$

Então

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\log v(a)\log(z-a) + \Phi_a(z),\ z \to a;$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\log v(b)\log(z-b) + \Phi_b(z),\ z \to b;$$

para funções Φ_a, Φ_b que possuem limite quando $z \to a$ e $z \to b$, respectivamente, e $z \in \mathbb{C}\backslash[a, b]$.

O cálculo do logaritmo na proposição anterior cabe uma explicação. Podemos considerar qualquer ramo do logaritmo pois, como estes diferem por $2k\pi i$, esta diferença é transferida para as funções limitadas f_a, f_b. Assim, de agora em diante assumimos que estamos tomando o ramo principal.

A proposição anterior implica em particular que

$$X(z) = \mathcal{O}(|z-a|^{\alpha+iA}) = \mathcal{O}(|z-a|^{\alpha}),\ z \to a;$$
$$X(z) = \mathcal{O}(|z-b|^{\beta+iB}) = \mathcal{O}(|z-b|^{\beta}),\ z \to b;$$

onde

$$\alpha + iA = -\frac{1}{2\pi i}\log v(a) = -\frac{1}{2\pi}\arg v(a) + \frac{i}{2\pi}\log|v(a)|;$$
$$\beta + iB = -\frac{1}{2\pi i}\log v(b) = \frac{1}{2\pi}\arg v(b) - \frac{i}{2\pi}\log|v(b)|;$$

$\alpha, \beta, A, B \in \mathbb{R}$.

Como estamos tomando o ramo principal do logaritmo, onde $\arg v(a), \arg v(b) \in (-\pi, \pi]$, então

$$\alpha, \beta > -1,$$

e concluimos

Teorema 1.4. *Seja $v : [a,b] \to \mathbb{C}$ aplicação Hölder contínua, e $\alpha = -\frac{1}{2\pi}\arg v(a)$, $\beta = \frac{1}{2\pi}\arg v(b)$. Se $\nu_a = \alpha$, $\nu_b = \beta$, então*

$$X(z) = e^{\Phi(z)},$$

onde $\Phi(z) = C^{[a,b]}v(z)$, é solução do **RHP 1** *com condições nos extremos dada por* **RHP 1** *$-iv)$.*

Agora, se $\kappa_1 \leq \kappa_2$, então $|w|^{\kappa_1} \geq |w|^{\kappa_2}$ para $|w| < 1$, e isto nos conta que

$$g(w) = \mathcal{O}(|w|^{\kappa_2}), w \to 0 \Longrightarrow g(w) = \mathcal{O}(|w|^{\kappa_1}), w \to 0,$$

e com isto o 1.4 implica

Corolário 1.1. *Para $\nu_a \leq \alpha$, $\nu_b \leq \beta$, a aplicação*

$$X(z) = e^{\Phi(z)},$$

onde $\Phi(z) = C^{[a,b]}v(z)$, é solução do **RHP 1** *com condições nos extremos dada por* **RHP 1** *$-iv)$.*

Mas ainda não temos unicidade em nenhum dos casos acima. Para isto, vamos

considerar um RHP sem condições assintóticas para $z \to \infty$, e no qual a condição de salto aparece em forma aditiva,

RHP 1 $\oplus$ – *i)* f é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash[a,b]$;

RHP 1 $\oplus$ – *ii)* $f_+(x) = f_-(x) + \phi(x),\ x \in (a,b)$;

RHP 1 $\oplus$ – *iii)* $f(z)$ permanece limitada em a e b.

Sejam agora X_1, X_2 soluções particulares de **RHP 1** – *i),ii),iv)*. Ainda não levaremos em conta a condição assintótica **RHP 1** – iii). Então $f_j(z) = (z-a)(z-b)X_j(z)$ permanece limitado em vizinhanças de a e b, e satisfazem **RHP 1** – *ii)*, para $j = 1, 2$.

Pelo Teorema de Mittag-Leffler [68, teor. 15.13, pg. 296], existem funções meromorfas $g_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, cujos pólos são exatamente os zeros das funções f_j's, para os quais a ordem como pólos de g_j coincidem com a ordem como zeros de f_j.

As funções $f_j g_j$, são portanto holomorfas em $\mathbb{C}\backslash[a,b]$, e as g_j's são holomorfas em vizinhanças de $[a,b]$.

Deste modo, se definirmos $h_j(z) = \log(f_j(z)g_j(z))$, então as h_j's satisfazem o **RHP 1** $\oplus$ para $\phi(x) = \log v(x)$.

A condição **RHP 1** $\oplus$ – *ii)* implica então que $h_1 - h_2$ é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash a, b$. Mas **RHP 1** $\oplus$ – *iii)* nos diz que $h_1 - h_2$ é limitada em a e b, implicando que $h_1(z) - h_2(z) = E(z)$, onde $E(z)$ é uma função inteira. Logo,

$$(z-a)(z-b)X_1(z)g_1(z) = e^{h_1(z)} = e^{h_2(z)+E(z)} = (z-a)(z-b)X_2(z)g_2(z)e^{E(z)},$$

o que implica

$$X_1(z)g_1(z) = X_2(z)g_2(z)e^{E(z)}.$$

Agora, pelo Teorema de Fatoração de Weiestrass [68, teor. 15.9, pg. 294], existe uma função $\widetilde{g}_1(z)$ para a qual

$$\widetilde{g}_1(z)g_1(z) = \frac{1}{E_1(z)},$$

onde $E_1(z)$ é uma função inteira que não possui zeros. Provamos que, se X_1, X_2 são soluções do **RHP 1** – *i),ii), iv)*, então

$$f_1(z) = f_2(z)\widetilde{E}(z),$$

onde $\widetilde{E}(z)$ é uma função meromorfa em $\mathbb{C}$, cujos pólos são os zeros de $X_2(z)$ (pois X_1 é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash[a,b]$, e portanto os pólos de $\widetilde{E}(z)$ devem ser cancelados pelos zeros de X_2). Assim, se encontrarmos uma solução particular de **RHP 1** – *i),ii),iv)* que não se anule em $\mathbb{C}\backslash[a,b]$, então teremos provado que a forma geral da solução é

$$f(z) = f_1(z)E(z),$$

onde $E(z)$ é inteira. Mas se tomamos n_a, n_b inteiros de modo que

$$0 \leq n_a + \alpha, n_b + \beta < 1, \tag{1.8}$$

então a aplicação $(z-a)^{n_a}(z-b)^{n_b}e^{\Phi(z)}$, onde $\Phi(z) = (C^{[a,b]}v)(z)$, é solução de **RHP 1** – *i),ii),iv)* que não se anula. Concluimos

Teorema 1.5. *Toda função $f(z)$ que satisfaz* **RHP 1** – *i),ii),iv) é da forma*

$$f(z) = (z-a)^{n_a}(z-b)^{n_b}e^{\Phi(z)}E(z),$$

onde n_a, n_b são inteiros, $\Phi(z) = (C^{[a,b]}\log v)(z)$, e $E(z)$ é função inteira.

Voltemos agora ao **RHP 1** geral, considerando a condição assintótica **RHP 1** – *iii)* e também a condição nos extremos **RHP 1** – *iv)*. Se f é solução do **RHP 1**, então em particular f satisfaz **RHP 1** – *i),ii),iv)*, e o teorema anterior nos diz que

$$f(z) = (z-a)^{n_a}(z-b)^{n_b}e^{\Phi(z)}E(z).$$

Agora, como $f(z), e^{\Phi}(z) \to I$, e $E(z)(z-a)^{n_a}(z-b)^{n_b}$ é inteira, então o teorema de Liouville nos diz que

$$E(z) = (z-a)^{-n_a}(z-b)^{-n_b},$$

e como E é inteira, isto ocorre se, e só se, $n_a, n_b \leq 0$. Mas isto é possível, em virtude de (1.8), se, e somente se, $\alpha, \beta \geq 0$. Concluimos então que

Teorema 1.6. *O* **RHP 1** *tem solução se, e somente se*

$$\alpha = -\frac{1}{2\pi}\arg v(a) \geq 0, \;\; \beta = \frac{1}{2\pi}\arg v(b) \geq 0.$$

Neste caso, a única solução é dada por

$$X(z) = e^{\Phi(z)},$$

onde

$$\Phi(z) = (C^{[a,b]} \log v)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\log v(s)}{z-s} ds.$$

Na literatura, problemas de Riemann-Hilbert em $[a,b]$ são normalmente analisados sem levar em consideração a condição assintótica **RHP 1** – *iii)*, mas como para nós esta condição é importante, preferimos levá-la em consideração. Observe que apenas a condição nos extremos não garante unicidade, mas ela é importante na construção da solução.

Para exemplificar, considere o problema de Riemann-Hilbert

RHP E – *i)* f é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash[a,b]$;

RHP E – *ii)* $f_+(x) = if_-(x),\ x \in (a,b)$;

RHP E – *iii)* $f(z) \to 1,\ z \to \infty$.

Neste caso,

$$\alpha = -\frac{1}{2\pi i} \arg i = -\frac{1}{4}, \beta = \frac{1}{2\pi i} \arg i = \frac{1}{4},$$

e a condição natural nos extremos que devemos impor, para que tenhamos solução, é

RHP E – *i)* $f(z) = \mathcal{O}(|z-a|^{-\frac{1}{4}}),\ z \to a,\ f(z) = \mathcal{O}(|z-b|^{\frac{1}{4}}),\ z \to b.$

Assim, de acordo com o teorema 1.6, a única solução do **RHP E** é

$$X(z) = e^{\int_a^b \frac{\log i}{s-z} ds} = \left(\frac{z-b}{z-a}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

CAPÍTULO 2

PROBLEMAS DE RIEMANN-HILBERT

Um Problema de Riemann-Hilbert matricial (de dimensão 2) (Σ, v) consiste em, dados um contorno $\Sigma \subset \mathbb{C}$ suave orientável e uma aplicação matricial $v : \mathbb{C}\backslash\Sigma \to \mathbb{C}^{2\times 2}$, determinar uma função $F : \mathbb{C}\backslash\Sigma \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ que satisfaça

RHP 2 – *i)* F é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\Sigma$;

RHP 2 – *ii)* $F_+(z) = F_-(z)v(z),\ z \in \Sigma^0$;

RHP 2 – *iii)* $F(z) \longrightarrow I$, quando $z \to \infty$.

Assim como no capítulo 1, será suficiente considerarmos o caso em que $\Sigma = \cup \mathrm{tr}(\gamma_j)$, onde $\gamma_j : I_j \to \mathbb{R}$ são curvas suaves para as quais $\mathrm{tr}(\gamma_j) \cap K$ é retificável, para todo compacto K, que se intersectam em um número finito de vezes, com intersecção sempre transversal, e para as quais γ_j' não se anula.

Nos problemas que serão discutimos, nossa matriz de salto v dependerá de um parâmetro n. A idéia será partir de um RHP F, cuja solução conheçamos, e fazer uma série de transformações invertíveis e explícitas $F \mapsto G \mapsto H \ldots$, chegando a um RHP Y, para o qual a análise assintótica em n seja simples. Percorrendo o caminho inverso $\ldots \mapsto H \mapsto G \mapsto F$, relacionamos Y com F, e obtemos informações assintóticas de F.

Este método de análise assintótica foi introduzido primeiramente por Deift e Zhou [34], no contexto das equações de Korteweg – de Vries. Desde os primeiros trabalhos de análise assintótica de polinômios ortogonais via RHP [29, 31, 32], tem se mostrado uma arma

poderosa para obtenção de assintóticas para polinômios ortogonais, tendo sido largamente usada, difundida e expandida em várias direções, e cujas aplicações vão muito além de polinômios ortogonais.

Na seção 2.1, definiremos de modo mais preciso problemas de Riemann-Hilbert, estabelecendo a noção de solução também em L^2. Na seção 2.2, discutiremos a unicidade da solução de um problema de Riemann-Hilbert, no sentido estabelecido na seção 2.1. Na seção 2.3, caracterizaremos polinômios ortogonais, via um problema de Riemann-Hilbert específico, caracterização esta fundamental para tudo que seguirá. Na seção 2.4, estabeleceremos o conceito de deformação de um problema de Riemann-Hilbert, conceito o qual será usado por todo o capítulo 3. Por fim, na seção 2.5, discutiremos problemas de Riemann-Hilbert de um ponto de vista um abstrato, relacionando-os com equações integrais singulares.

2.1 Sentido Rigoroso de Problemas de Riemann-Hilbert

Buscaremos soluções em dois sentidos: em $L^2(\Sigma, ds)$ e no sentido clássico. Nestes dois casos, o que entendemos por

- $m_\pm(z) = \lim\limits_{\substack{w\to z \\ w\in\pm\Sigma}} m(w)$?
- $m(z) \to I,\ z \to \infty$?

Primeiramente seja $z \in \Sigma^0$.

Para o caso L^2, considere uma aplicação $m : \mathbb{C}\backslash\Sigma \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ e fixe $z \in \Sigma^0$. Seja ϕ parametrização local de Σ em z, com $\phi(0) = z$. Denote $\widehat{\phi}(0) = \frac{\phi(0)}{\|\phi'(0)\|}$.

Para $\epsilon, t_0 > 0$ suficientemente pequenos, vale (vide figura 4)

$$\{\phi(t) \pm i\epsilon\widehat{\phi}(0);\ t \in (-t_0, t_0)\} \subset \mathbb{C}\backslash\Sigma$$

Dizemos que

$$m_\pm(z) = \lim_{\substack{w\to z \\ w\in\pm\Sigma}} m(w)$$

em L^2 se

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{-t_0}^{t_0} \left| m(\phi(t) \pm i\epsilon\widehat{\phi}(0)) - m_\pm(\phi(t)) \right|^2 |d\phi(t)| = 0,$$

onde o limite acima é interpretado como calculado entrada a entrada. Chamaremos esta noção de limite de convergência de limites laterais em $L^2_{loc}(\Sigma)$, ou simplesmente convergência em $L^2_{loc}(\Sigma)$, apesar desta não ser a convergência L^2_{loc} usual.

Para o caso clássico, com as mesmas notações anteriores, dizemos que

$$m_{\pm}(z) = \lim_{\substack{w \to z \\ w \in \pm\Sigma}} m(w)$$

se

$$\lim_{\epsilon \to 0} m(\phi(0) \pm i\epsilon\widehat{\phi}(0)) = m_{\pm}(\phi(0)).$$

Se $z \in \Sigma \backslash \Sigma^0$, não será necessário estabelecer noção de limites, mas apenas impor que m permaneça limitada em vizinhanças de z, no caso clássico, ou seja localmente integrável sobre todos os arcos de Σ que passam por z, no caso de $L^2(\Sigma)$.

A condição assintótica considerada no caso matricial é um pouco mais forte da considerada no capítulo 1. $m(z) \to I,\ z \to \infty$ significa que

$$m(z) - I = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right), \text{ uniformemente quando } z \to \infty,\ z \in \mathbb{C}\backslash\Sigma,$$

isto é, existem $M > 0$, $r > 0$ tais que

$$|m(z) - I| \leq M\frac{1}{|z|},\ \forall z \in \mathbb{C}\backslash\Sigma,\ |z| \geq r.$$

Salvo se mencionado o contrário, de agora em diante todos os RHP's considerados serão nos sentido acima.

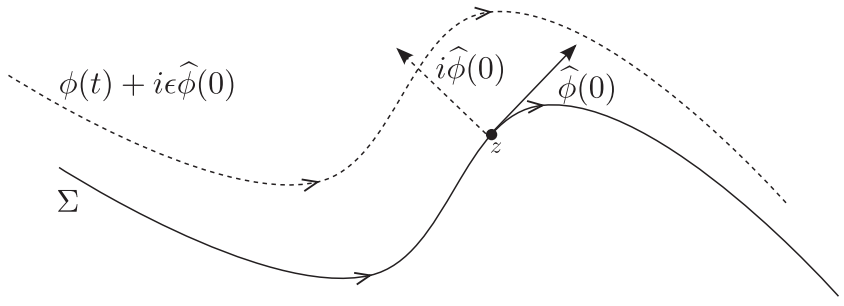


Figura 4:

2.2 Unicidade da Solução

Sejam Σ um contorno em $\mathbb{C}$ e $v : \Sigma^0 \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ uma matriz de salto, satisfazendo

- v é suave em cada arco de Σ^0;
- v é limitada ;
- $v(z) - I \to 0$, $z \to \infty$ suficientemente rápido em todas componentes ilimitadas de Σ (no presente texto, ao menos $v = I + \mathcal{O}(\frac{1}{z})$, de modo que $v - I \in L^2(\Sigma)$, para todo contorno Σ que será considerado);
- $\det v(z) = 1,\ \forall z \in \Sigma^0$;

e considere o seguinte RHP

RHP 3 – *i)* m é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\Sigma$;

RHP 3 – *ii)* $m_+(z) = m_-(z)v(z),\ z \in \Sigma^0$;

RHP 3 – *iii)* $m(z) \to I$ uniformemente para $z \to \infty,\ z \in \Sigma$.

Teorema 2.1. *Se o* **RHP 3** *tiver solução, então será única.*

Na realidade, o teorema acima continua válido se substituirmos a condição assintótica **RHP 3** – *iii)* pela condição $\det m(z) \to 1$, quando $z \to \infty$.

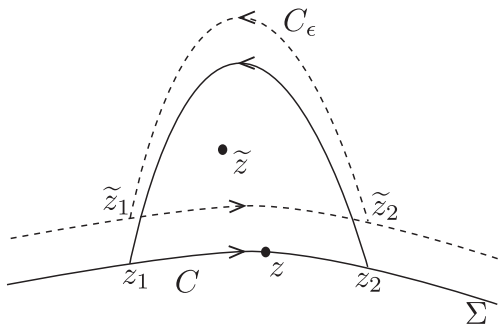
Demonstração. Seja m solução do **RHP 3**. Como a função determinante é contínua e localmente limitada, então pela unicidade do limite em $L^2_{loc}(\Sigma)$,

$$\begin{aligned}(\det m)_+(z) &= \det m_+(z)\\ &= \det(m_-(z)v(z))\\ &= \det m_-(z)\det v(z)\\ &\overset{\det v=1}{=} (\det m)_-(z),\ \text{a.e. } z \in \Sigma^0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Como $m(w) \to m_\pm(z)$ em $L^2_{loc}(\Sigma)$ e a função determinante é contínua, então $\det m(w) \to \det m_\pm(z)$ em $L^2_{loc}(\Sigma)$ e, portanto, em $L^1_{loc}(\Sigma)$.

Fixe $z \in \Sigma^0$, e seja ϕ parametrização local de Σ em z, $\phi(0) = z$.

Figura 5:



Considere os contornos C, C_ϵ fechados dados na figura 5, com $\widetilde{z}$ sendo um ponto fixo em $+\Sigma$ e no interior das regiões limitadas determinadas por C, C_ϵ, $C_\epsilon = C + i\epsilon\widehat{\phi}(0)$, e os pontos $\phi(t_1) = z_1, \phi(t_2) = z_2$ suficientemente próximos de z.

m é analítica em $\mathbb{C}\backslash\Sigma$, e assim $\det m$ também o é. Pelo teorema de Cauchy,

$$\det m(\widetilde{z}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\epsilon} \frac{\det m(w)}{w - \widetilde{z}} dw. \tag{2.2}$$

Sejam δ, $\widetilde{\delta}_\epsilon$ os arcos de C e C_ϵ que ligam z_1 a z_2 e $\widetilde{z}_1$ a $\widetilde{z}_2$, respectivamente. $\phi + i\epsilon\widehat{\phi}(0)$ é parametrização de $\widetilde{\delta}_\epsilon$, de modo que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{\delta}_\epsilon} \frac{\det m(w)}{w - \widetilde{z}} dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{t_1}^{t_2} \frac{\det m(\phi(t) + i\epsilon\widehat{\phi}(0))}{\phi(t) + i\epsilon\widehat{\phi}(0) - \widetilde{z}} d\phi(t).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\widetilde{\delta}_\epsilon} \frac{\det m(w)}{w - \widetilde{z}} dw - \int_{\delta} \frac{\det m_+(w)}{w - \widetilde{z}} dw\right| &\leq \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{\det m(\phi(t) + i\epsilon\widehat{\phi}(0)) - \det m_+(\phi(t))}{\phi(t) + i\epsilon\widehat{\phi}(0) - \widetilde{z}}\right| |d\phi(t)| + \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{\det m_+(\phi(t))}{\phi(t) + i\epsilon\widehat{\phi}(0) - \widetilde{z}} - \frac{\det m_+(\phi(t))}{\phi(t) - \widetilde{z}}\right| |d\phi(t)| \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{\det m(\phi(t) + i\epsilon\widehat{\phi}(0)) - \det m_+(\phi(t)}{\phi(t) + i\epsilon\widehat{\phi}(0) - \widetilde{z}}\right| |d\phi(t)| \\
&\quad + \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \frac{|\det m_+(\phi(t))|}{|\phi(t) + i\epsilon\widehat{\phi}(0) - \widetilde{z}||\phi(t) - \widetilde{z}|} |d\phi(t)|.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Tomando $\widetilde{z}$ de modo que $\widetilde{z} \notin C_\epsilon$, $\forall \epsilon > 0$ suficientemente pequeno, e $\widetilde{z} \notin C$, então existe $M > 0$ tal que

$$\frac{1}{|\phi(t) + i\epsilon\widehat{\phi}(0) - \widetilde{z}|}, \frac{1}{|\phi(t) - \widetilde{z}|} \leq M, \ \forall t \in (t_1, t_2),$$

(2.3) nos diz então que

$$\left| \int_{\widetilde{\delta}_\epsilon} \frac{\det m(w)}{w - \widetilde{z}} dw - \int_\delta \frac{\det m_+(w)}{w - \widetilde{z}} dw \right| \leq M \int_{t_1}^{t_2} \left| \det m(\phi(t) + i\epsilon\widehat{\phi}(0)) - \det m_+(\phi(t)) \right| \times$$
$$\times |d\phi(t)| + M^2 \epsilon \int_{t_1}^{t_2} |\det m_+(\phi(t))| \, |d\phi(t)|. \quad (2.4)$$

Como $m_+ \in L^2_{loc}(\Sigma)$, então $\det m_+ \in L^1_{loc}(\Sigma)$. Ainda, pela definição de m_+, $\det m(w) \to \det m_+(z)$ em $L^2_{loc}(\Sigma)$, e portanto em $L^1_{loc}(\Sigma)$. De (2.4) concluimos

$$\int_{\delta_\epsilon} \frac{\det m(w)}{w - \widetilde{z}} dw \xrightarrow{\epsilon \to 0} \int_\delta \frac{\det m_+(w)}{w - z} dw \quad (2.5)$$

Consideremos agora os arcos $\gamma \subset C, \gamma_\epsilon \subset C_\epsilon$, que ligam os pontos z_2 a z_1 e $\widetilde{z}_2$ a $\widetilde{z}_1$, respectivamente, de acordo com a orientação de C.

Sendo ψ parametrização de γ, digamos com $\psi(s_2) = z_2$, $\psi(s_1) = z_1$, $\psi + i\epsilon\widehat{\psi}(0)$ é parametrização de γ_ϵ. Lembrando que $\det m_+(w) = \det m(w)$ em $+\Sigma$,

$$\int_{\gamma_\epsilon} \frac{\det m(w)}{w - \widetilde{z}} dw - \int_\gamma \frac{\det m(w)}{w - \widetilde{z}} = \int_{s_2}^{s_1} \left(\frac{\det m(\psi(t) + i\epsilon\widehat{\psi}(0))}{\psi(t) + i\epsilon\widehat{\psi}(0) - \widetilde{z}} - \frac{\det m(\psi(t))}{\psi(t) - \widetilde{z}} \right) d\psi(t).$$

Como det é uma função contínua,

$$\frac{\det m\left(\psi(t) + i\epsilon\widehat{\psi}(0)\right)}{\psi(t) + i\epsilon\widehat{\psi}(0) - \widetilde{z}} \xrightarrow{\epsilon \to 0} \frac{\det m(\psi(t))}{\psi(t) - \widetilde{z}}, \ \forall t \in [s_2, s_1].$$

Como $\widetilde{z} \notin C, C_\epsilon$, então as aplicações acima são uniformemente limitadas, seguindo por convergência dominada que

$$\int_{\gamma_\epsilon} \frac{\det m(w)}{w - \widetilde{z}} dw \xrightarrow{\epsilon \to 0} \int_\gamma \frac{\det m(w)}{w - \widetilde{z}} dw. \quad (2.6)$$

Fazendo $\epsilon \to 0$ em (2.2), (2.5) e (2.6) nos contam que

$$\det m(\widetilde{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\det m(w)}{w - \widetilde{z}} dw, \quad (2.7)$$

onde $\det m(w) = \det m_+(w)$ em $C \cap \Sigma$.

Por argumentos semelhantes, se $\widetilde{z}$ é o mesmo ponto de antes, e C' é a curva da figura 6, então

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{\det m(w)}{w-\widetilde{z}}dw = 0, \tag{2.8}$$

onde agora $\det m(w) = \det m_-(w)$ em $C' \cap \Sigma$.

Fazendo a diferença entre (2.7) e (2.8), e usando (2.1), concluimos

$$\det m(\widetilde{z}) = \frac{1}{2\pi}\int_{C''} \frac{\det m(w)}{w-\widetilde{z}}dw, \tag{2.9}$$

onde $C'' = \gamma \cup \gamma'$ ($\gamma = C\backslash\Sigma$, $\gamma' = C'\backslash\Sigma$) é a curva fechada simples em torno de $\widetilde{z}$ (e também de z), conforme figura (7).

Analogamente, se $\widehat{z} \in -\Sigma$,

$$\det m(\widehat{z}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C''} \frac{\det m(w)}{w-\widehat{z}}dw. \tag{2.10}$$

Fazendo $\widetilde{z} \to z$ em (2.9) e $\widehat{z} \to z$ em (2.10), e usando que a aplicação

$$(w, z') \mapsto \frac{\det m(w)}{w - z'}$$

é limitada em $C'' \times U$, U vizinhança suficientemente pequena de z, concluimos

$$\det m_+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C''} \frac{\det m(w)}{w-z}dw = \det m_-(z),\ \forall z \in \Sigma^0.$$

Em (2.1) já tinhamos esta desigualdade, mas apenas a.e. Pelo teorema de Morera 0.2 e discussão posterior, concluimos que $\det m$ é analítica em todo ponto que não é ponto de interseção.

Figura 6:

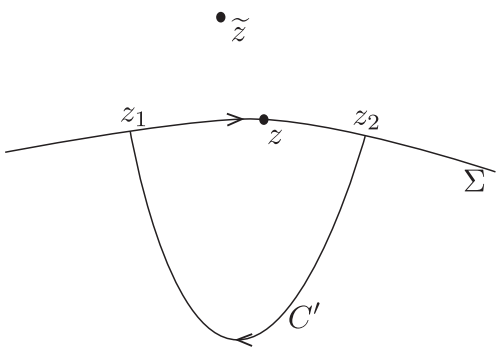
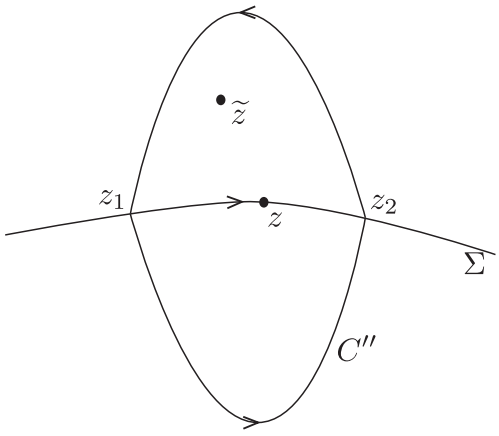


Figura 7:



Se $z \in \Sigma \backslash \Sigma^0$, repetimos o mesmo argumento em cada arco em z, obtendo uma representação integral para $\det m(z)$, e concluindo que $\det m$ é holomorfa em todo ponto de $\Sigma \backslash \Sigma^0$.

Assim, provamos que $\det m$ é uma função inteira.

Por outro lado, por **RHP 3** – *iii)*,

$$\det m(z) \to 1, \ z \to \infty,$$

e o teorema de Liouville 0.1 nos ensina que

$$\det m(z) = 1, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Em suma, provamos que se m é solução do **RHP 3**, então $\det m(z) = 1, \ \forall z \in \mathbb{C}$. Isto implica, em particular, que toda solução é, em cada ponto, uma matriz invertível. Mais que isto, m^{-1} é também holomorfa em $\mathbb{C} \backslash \Sigma$, pois, como $\det m = 1$,

$$m^{-1}(z) = \begin{pmatrix} m_{22}(z) & -m_{12}(z) \\ -m_{21}(z) & m_{22}(z) \end{pmatrix},$$

e as funções m_{ij}'s são holomorfas em $\mathbb{C} \backslash \Sigma$.

Seja $\widetilde{m}$ uma outra solução do **RHP 3**. Defina

$$h(z) = \widetilde{m}(z) m^{-1}(z).$$

h é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\Sigma$, e possui valores limites $h_\pm(z)$ para $z \in \Sigma$. Vale

$$\begin{aligned} h_+(z) &= \widetilde{m}_+(z)m_+(z) \\ &= \widetilde{m}_-(z)v(z)v^{-1}(z)m^{-1}(z) \\ &= \widetilde{m}_-(z)m_-(z) \\ &= h_-(z), \text{ a.e. } z \in \Sigma^0. \end{aligned}$$

Repetindo o mesmo argumento utilizado para concluir que $\det m$ era inteira, conclui-se que h é inteira e, posteriormente, que $h(z) = I,\ \forall z$, implicando portanto que $\widetilde{m} \equiv m$. □

2.3 Caracterização de Polinômios Ortogonais via Problemas de Riemann-Hilbert

Polinômios ortogonais podem ser caracterizados por Problemas de Riemann-Hilbert. Isto foi notado pela primeira vez por Fokas, Its e Kitaev [43, 44]. Dada uma distribuição de probabilidade sobre $\mathbb{R}$, $d\mu(s) = \omega(s)ds$, tal que

$$x^n\omega(x) \in H^1(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R});\ f' \in L^2(\mathbb{R})\},$$

considere o seguinte RHP,

RHP Y – *i)* Y é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$;

RHP Y – *ii)* $Y_+(x) = Y_-(x)\begin{pmatrix} 1 & \omega(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R}$;

RHP Y – *iii)* $Y(z) = \left(I + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right)\begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix},\ z \to \infty.$

De **RHP Y** – *iii)* vemos que $\det Y(z) \to 1,\ z \to \infty$, e o teorema 2.1 (veja comentários posteriores ao teorema) nso permite concluir

Teorema 2.2. *Se o* **RHP Y** *possuir alguma solução, então esta será única.*

Analisemos o **RHP Y** em detalhes. A condição **RHPY** – *ii)* nos diz que

$$(Y_{11}(x))_+ = (Y_{11}(x))_-.$$

Na verdade, nos diz que a igualdade acima vale para a.e. $x \in \mathbb{R}$, e o mesmo argumento utilizado para provar o teorema 2.1 é usado para se obter a igualdade acima em toda reta $\mathbb{R}$.

À luz dos comentários feitos na página 17, concluimos que Y_{11} é uma função inteira. Ainda, de **RHPY** – *iii)*,

$$Y_{11}(z) = z^n + \mathcal{O}(z^{n-1}),$$

e portanto Y_{11} é um polinômio de grau exatamente n, digamos π_n.

Novamente de **RHP Y** – *ii)*,

$$(Y_{12}(x))_+ = \pi_n(x)\omega(x) + (Y_{12}(x))_-, \tag{2.11}$$

igualdade que nos leva a considerar a fórmula de Plemelj.

Considere a transformada de Cauchy de $\pi_n\omega$,

$$C^{\mathbb{R}}(f\omega)(z) = C(f\omega)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\pi(s)\omega(s)}{s-z}ds,\ z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

$C(f\omega) \in L^2(\mathbb{R})$ e, pela própria definição de $C(f\omega)$, $C(f\omega)$ é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Defina

$$\Phi(z) = C(f\omega)(z) - Y_{12}(z).$$

Φ é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ e, pela fórmula de Plemelj (1.1) e (2.11),

$$\Phi_+(z) - \Phi_-(z) = 0,$$

e novamente pelos comentários da página 17, Φ é inteira. Como $\pi_n w \in H^1(\mathbb{R})$, então $C(fw) \to 0$, $z \to \infty$. Também, por **RHP Y** – *iii)*, $Y_{12} \to 0$, $z \to \infty$. Assim, $\Phi(z) \to 0$, quando $z \to \infty$, seguindo que $\phi = 0$, e portanto

$$Y_{12}(z) = C(f\omega)(z),\ \forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

A condição **RHP Y** – *iii)* nos diz que

$$Y_{12}(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right). \tag{2.12}$$

Pela igualdade vinda da soma da série geométrica,

$$\frac{1}{s-z} = -\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{s}{z}\right)^k + \frac{s^{n+1}}{z^{n+1}}\frac{1}{s-z}$$

obtemos, para $z \notin \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\pi_n(s)\omega(s)}{s-z}ds = -\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{z^{k+1}}\int_{\mathbb{R}} s^k\pi_n(s)\omega(s)ds + \frac{1}{z^{n+1}}\int_{\mathbb{R}}\frac{s^{n+1}\pi_n(s)\omega(s)}{s-z}ds,$$

ou seja,

$$z^{n+1}Y_{12}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{s^{n+1}\pi_n(s)\omega(s)}{s-z}ds - \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n} z^{n-k}\int_{\mathbb{R}} s^k\pi_n(s)\omega(s)ds. \tag{2.13}$$

Como estamos assumindo que todos os momentos de ω são finitos, então vale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} s^k\pi_n(s)\omega(s)ds < \infty,\ k = 0,\dots,n+1, \tag{2.14}$$

e também

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}}\frac{s^{n+1}\pi_n(s)\omega(s)}{s-z}ds\right| \leq \frac{M}{|\operatorname{Im} z|},$$

para alguma constante $M > 0$. Em particular, esta última desigualdade diz que o primeiro termo no lado esquerdo de (2.13) permanece limitado se $\operatorname{Im} z \geq \epsilon > 0$.

Agora, fazendo $z \to \infty$ na equação (2.13), de modo que $|\operatorname{Im} z| \geq \epsilon > 0$, e usando (2.12),(2.14), concluimos

$$\int_{\mathbb{R}} s^k\pi_n(s)\omega(s)ds = 0,\ k = 0,\dots,n-1.$$

Mas π_n é um polinômio mônico de grau exatamente n, e as n equações acima nos ensinam portanto que π_n é o n-ésimo polinômio mônico ortogonal com relação à $d\mu(s) = \omega(s)ds$.

Procedendo do mesmo modo, obtemos Y_{21} e Y_{22}.

Em suma, a única solução do **RHP Y** é dada por

$$Y(z) = \begin{pmatrix} \pi_n(z) & \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{\pi_n(s)\omega(s)}{s-z}ds \\ k_{n-1}\pi_{n-1}(z) & \dfrac{k_{n-1}}{2\pi i}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{\pi_{n-1}(s)\omega(s)}{s-z}ds \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

onde π_n é o n-ésimo polinômio ortogonal mônico associado à $\mu(s) = \omega(s)ds$, e

$$k_{n-1} = -2\pi i\gamma_{n-1}^2,\ \gamma_{n-1}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\pi_{n-1}(s)|^2\omega(s)ds. \tag{2.16}$$

Neste ponto a estratégia fundamental de RHP's fica mais clara. Conhecemos uma solução Y, no nosso caso que se escreve em termos de polinômios ortogonais. Através de transformações em nossos RHP's, vamos chegar a um outro problema de Riemann-Hilbert, cuja solução pode ser expressa em termos de Y ou, mais precisamente, em termos dos polinômios π_n's. Neste novo RHP, é possível fazer a análise assintótica da solução quando $n \to \infty$, obtendo assim informações assintóticas sobre os π_n's. Neste tratamento, um dos principais pontos é a liberdade de escolha da função ω, nos levando a informações para uma ampla classe de polinômios ortogonais.

De particular interesse são as medidas da forma

$$d\mu(s) = \omega(s)ds = e^{-NV(s)}ds,$$

onde $N \in \mathbb{N}$, $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função analítica. Neste caso, somos levados a polinômios ortogonais em relação a medidas exponenciais variáveis (*varying exponential weights*) - para cada N, a solução $Y^{(N)}$ é expressa em função dos polinômios ortogonais de grau n e $n-1$ com relação à medida $e^{-NV(s)}ds$. Em nosso caso, estudaremos assintóticas para o caso em que $N = n$. Tais assintóticas são conhecidas como *assintóticas de Plancherel-Rotach*, pois Plancherel e Rotach foram os primeiros a obtê-las para o caso em que $V(s) = s^2$, ainda sem o uso da teoria de RHP's [72].

Assumiremos $V(s) = as^{2k}$, $a > 0$, embora todos os resultados aqui expostos se estendam para qualquer função analítica V, porém com mais aspectos técnicos [32].

2.4 Deformação de um Problema de Riemann-Hilbert

Suponha que tenhamos um problema de Riemann-Hilbert (Σ, v),

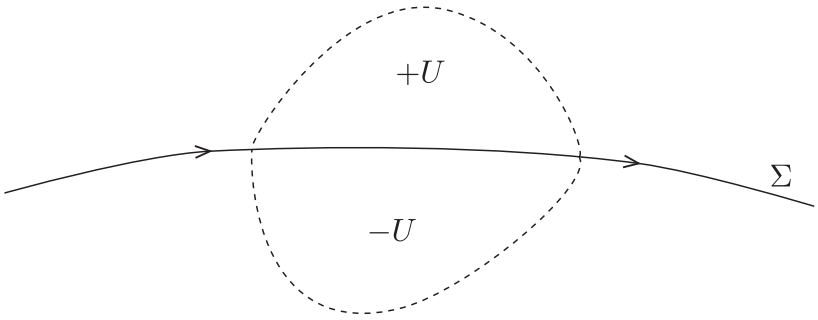
- m é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\Sigma$;
- $m_+(z) = m_-(z)v(z),\ z \in \Sigma^0$;
- $m(z) \to I$ uniformemente para $z \to \infty,\ z \in \Sigma$.

para o qual a função v possa ser fatorada

$$v(z) = b_-^{-1}(z)v_1(z)b_+(z)$$

em alguma vizinhança $U \cap \Sigma$, $U \subset \mathbb{C}$ aberto, onde $b_\pm$ são funções contínuas em $U \cap \Sigma$, e que possuem extensão analítica nos lados $\pm U = \pm\Sigma \cup U$, determinados conforme a figura 8.

Figura 8:



Dada uma solução m do RHP (Σ, v), defina uma nova matriz $\widetilde{m}$ em $\widetilde{\Sigma} = \Sigma \cup \partial U$, conforme figura 9.

Neste caso, $\widetilde{m}$ é analítica em todas as componentes conexas de $\mathbb{C}\backslash\widetilde{\Sigma}$, e seus limites laterais em $\widetilde{\Sigma}^0$ são dados por

- Se $z \in \Sigma \cap U$,
$$\widetilde{m}_+ = m_+ b_+^{-1} = m_- v b_+^{-1} = m_- b_-^{-1} v_1 = \widetilde{m}_- v_1. \tag{2.17}$$
- Se $z \in +\Sigma \cap U$,
$$\widetilde{m}_+ = m = (m b_+^{-1})_- b_+ = \widetilde{m}_- b_+. \tag{2.18}$$
- Se $z \in -\Sigma \cap U$,
$$\widetilde{m}_+ = (m b_-^{-1})_+ = m b_-^{-1} = \widetilde{m}_- b_-^{-1}. \tag{2.19}$$
- Se $z \in \Sigma^0 \cap U^c$,
$$\widetilde{m}_+ = m_+ = m_- v = \widetilde{m}_- v. \tag{2.20}$$

Assim, se definirmos v como na figura 10, então as equações (2.17)-(2.20) podem ser resumidas em

$$\widetilde{m}_+(z) = \widetilde{m}_-(z)\widetilde{v}(z), \ z \in \widetilde{\Sigma}^0.$$

e, ao menos heuristicamente, verificamos que $\widetilde{m}$ satisfaz o RHP $(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{v})$

Figura 9:

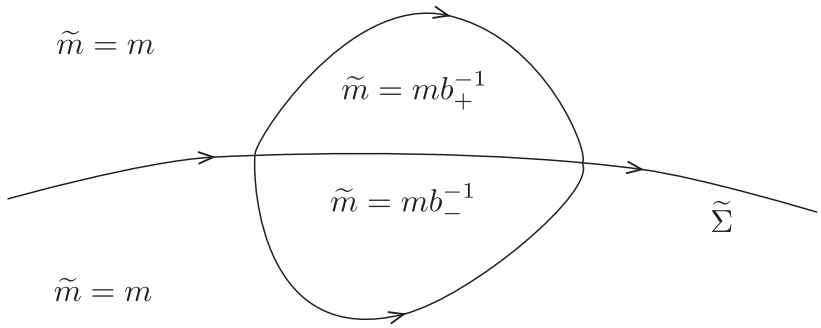
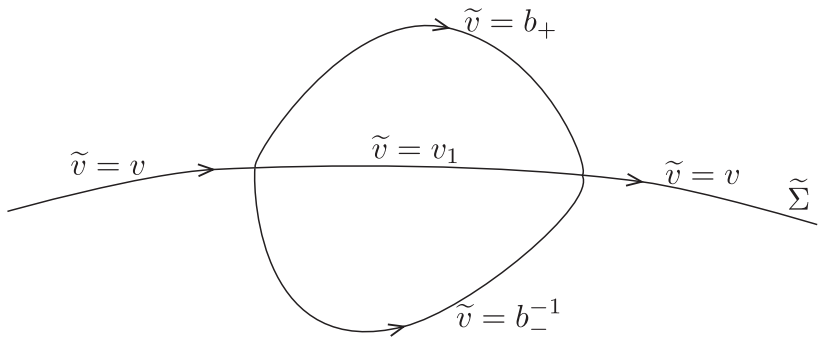


Figura 10:



- $\widetilde{m}$ é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\widetilde{\Sigma}$;
- $\widetilde{m}_+(z) = \widetilde{m}_-(z)\widetilde{v}(z),\ z \in \widetilde{\Sigma}^0$;
- $m(z) \to I$ uniformemente para $z \to \infty,\ z \in \Sigma$.

E de fato, vale

Teorema 2.3. *m satisfaz o RHP (Σ, v) se, e somente se, $\widetilde{m}$ satisfaz o RHP $(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{v})$.*

Demonstração. Suponha que m satisfaça (Σ, v).

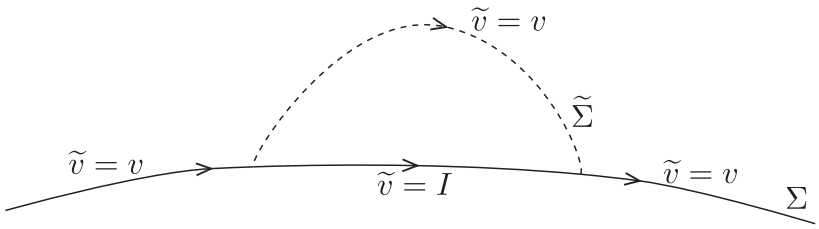
A analiticidade de m em $\widetilde{\Sigma}$ e a normalização no infinito para $\widetilde{m}$ seguem diretamente da definição de $\widetilde{m}$. Assim, precisamos apenas verificar os limites laterais.

Seja $z \in \widetilde{\Sigma}^0$. Consideremos primeiramente $z \in U \cap \Sigma$. Seja $\phi(t)$ parametrização local de Σ em z, de modo que a imagem de ϕ esteja contida em $U \cap \Sigma$.

Pela definição de $\widetilde{m}$ e $\widetilde{v}$, e pelos cálculos feitos (pontualmente) anteriormente

$$\left|\widetilde{m}(\phi(t) + i\epsilon\widehat{\phi}(0)) - m_+(\phi(t))b_+^{-1}(\phi(t))\right|^2 = \left|m(\phi(t) + i\epsilon\widehat{(}\phi(t)) - m(\phi(t))\right|^2 \left|b_+^{-1}(\phi(t))\right|^2.$$

Figura 11:



A função b_+^{-1} é contínua em $U \cap \Sigma$, sendo portanto limitada em $(-t_0, t_0)$, para t_0 suficientemente pequeno, o que nos permite concluir

$$\int_{-t_0}^{t_0} \left| \widetilde{m}(\phi(t) + i\epsilon\widehat{\phi}(0)) - m_+(\phi(t))b_+^{-1}(\phi(t)) \right|^2 |d\phi(t)| \leq$$
$$\leq M \int_{-t_0}^{t_0} \left| m(\phi(t) + i\epsilon\widehat{\phi}(t)) - m(\phi(t)) \right|^2 |d\phi(t)|,$$

seguindo portanto que $\widetilde{m}_+ = m_+ b_+^{-1}$ no sentido de L^2 descrito anteriormente.

As demais possibilidades para z são análogas.

□

Um exemplo clássico ocorre quando v possui extensão analítica em $+\Sigma$. Neste caso, escolha $b_+ = v, b_- = v_1 = I$. Então as equações (2.17)-(2.20) se reescrevem como

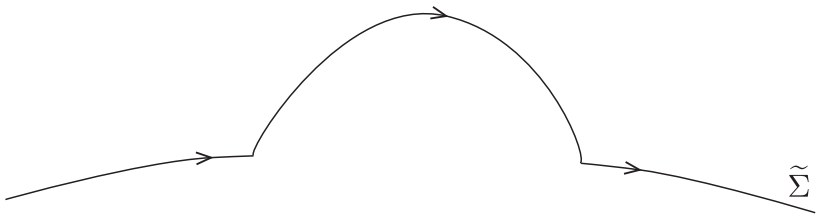
- Se $z \in \Sigma \cap U$ ou $z \in -\Sigma \cap U$,
$$\widetilde{m}_+ = \widetilde{m}_-.$$
- Se $z \in +\Sigma \cap U$ ou $z \in \Sigma^0 \cap U^c$,
$$\widetilde{m}_+ = \widetilde{m}_- v.$$

e portanto $\widetilde{m}$ satisfaz o problema de Riemann-Hilbert $(\widetilde{\Sigma}, \widetilde{v})$, definidas conforme a figura 11. Na figura 12, é mostrada as partes de $\widetilde{\Sigma}$ em que $\widetilde{v}$ é não trivial, e $\widetilde{m}$ é holomorfa nas partes superior e inferior da curva em 12.

2.5 Equações Integrais Singulares

Como revelado pela fórmula de Plemelj, e reforçado na obtenção da solução do **RHP Y**, transformadas de Cauchy e problemas de Riemann-Hilbert são intimamente

Figura 12:



ligados. Na verdade, problemas de Riemann-Hilbert são, em um certo sentido, equivalentes a equações integrais singulares.

Dados um contorno suave $\Sigma \subset \mathbb{C}$ e uma aplicação $f : \Sigma \to \mathbb{C}^{2\times 2}$, definimos a transformada de Cauchy de f por

$$(C^{\Sigma} f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Sigma} \frac{f(s)}{s - z} ds,$$

onde a integral acima é cálculada no sentido do valor principal de Cauchy, e é dada pelo cálculo funcional (ou seja, se reduz a integral entrada a entrada da matriz f). Sejam $C^{\Sigma}_{+} f, C^{\Sigma}_{-} f$ os limites laterais de $C^{\Sigma} f$, como descritos na seção 2.1. Tais limites definem operadores $C^{\Sigma}_{\pm}$ em $L^2(\Sigma)$, os quais são operadores limitados em $L^2(\Sigma)$, e para os quais vale (veja (1.3))

$$C^{\Sigma}_{+} - C^{\Sigma}_{-} = \mathrm{Id}, \qquad C^{\Sigma}_{+} C^{\Sigma}_{-} = C^{\Sigma}_{-} C^{\Sigma}_{+} = 0, \tag{2.21}$$

isto é, os operadores $C^{\Sigma}_{+}, -C^{\Sigma}_{-}$ são projeções ortogonais complementares (Id é o operador identidade, enquanto I é a matriz identidade) [19,71]. A primeira equação em (2.21) nada mais é que a fórmula de Plemelj (1.1).

Considere um problema de Riemann-Hilbert (Σ, v), com v como na página 31, e suponha que possamos fatorar

$$v = b_{-}^{-1} b_{+}, \tag{2.22}$$

para matrizes holomorfas e invertíveis $b_{\pm}$ definidas sobre Σ, com as mesmas propriedades de v da página 31. Denotando

$$w_{\pm} = \pm(b_{\pm} - I),$$

e

$$w = w_{+} + w_{-},$$

então $w_\pm, w \in L^2(\Sigma)$, e podemos definimos o operador

$$\begin{aligned} C_w^\Sigma : L^2(\Sigma) &\to L^2(\Sigma) \\ f &\mapsto C_+^\Sigma(fw_-) + C_-^\Sigma(fw_+). \end{aligned}$$

Partindo das propriedades de $C_\pm^\Sigma$, infere-se facilmente propriedades sobre C_w^Σ. Dentre estas, ressaltamos que C_w^Σ é um operador limitado sobre $L^2(\Sigma)$.

A relação entre o operador C_w^Σ e RHP's é dada pelo teorema seguinte,

Teorema 2.4 ([23, pg. 209, teo. 7.103]). *Suponha que $(I - f) \in L^2(\Sigma)$ seja a única solução da equação*

$$(\mathrm{Id} - C_w^\Sigma)(f - I) = C_+^\Sigma w_- + C_-^\Sigma w_+. \tag{2.23}$$

em $L^2(\Sigma)$. Então a matriz

$$m = I + C^\Sigma(fw)$$

é a única solução do RHP (Σ, v) (com valores limite em $L^2(\Sigma)$).

Observação 2.1. Mesmo se $f \notin L^2(\Sigma)$, que é o caso sempre que Σ é ilimitada, os limites laterais $C_\pm^\Sigma(fw)$ existem em $L^2(\Sigma)$ pois, fazendo $I - f = g$, então $f = I - g$, com $g \in L^2(\Sigma)$, e podemos escrever

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma \frac{f(s)w(s)}{s-z}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma \frac{w(s)}{s-z}ds + \frac{1}{2\pi i}\int_\Sigma \frac{g(s)w(s)}{s-z}ds, \tag{2.24}$$

com os limites laterais das integrais à direita existindo pois $w, wg \in L^2(\Sigma)$, e $C_\pm^\Sigma$ são operadores bem definidos em $L^2(\Sigma)$. Do mesmo modo, existem os limites $C_\pm^\Sigma(fw_+)$ e $C_\pm^\Sigma(fw_-)$, e podemos escrever, em virtude de (2.23),

$$f = I + C_w^\Sigma f \tag{2.25}$$

e também por 2.21

$$C_+^\Sigma(fw_+) = C_-^\Sigma(fw_+) + I \tag{2.26}$$

mesmo sem f ou I pertencer à $L^2(\Sigma)$.

Como consequencia,

Teorema 2.5. *Sejam*

$$v^{(n)} = (b_-^{(n)})^{-1} b_+^{(n)} = (I - w_-^{(n)})^{-1}(I - w_+^{(n)})$$

e

$$v^\infty = (b_-^\infty)^{-1} b_+^\infty = (I - w_-^\infty)^{-1}(I - w_+^\infty)$$

matrizes de salto em um contorno Σ fixo (com as decomposições como antes). Suponha que

$$(\mathrm{Id} - C^\Sigma_{w^\infty})^{-1}$$

exista (como operador sobre $L^2(\Sigma)$) e

$$\|w_\pm^{(n)} - w_\pm^\infty\|_{L^2\cap L^\infty(\Sigma)} \to 0,\ n \to \infty,$$

onde $\|\cdot\|_{L^2\cap L^\infty(\Sigma)}$ significa que a convergência vale nas normas de $L^2(\Sigma)$ e $L^\infty(\Sigma)$. Então as respectivas soluções m^∞ e $m^{(n)}$ dos RHP's (Σ, v^∞) e $(\Sigma, v^{(n)})$ existem (para n suficientemente grande), e

$$\|m_\pm^{(n)} - m_\pm^\infty\|_{L^2(\Sigma)} \to 0,\ n \to \infty.$$

Demonstração. Dada $f \in L^2(\Sigma)$, como $C^\Sigma_\pm$ são operadores limitados,

$$\begin{aligned}\|C^\Sigma_{w^\infty} f - C^\Sigma_{w^{(n)}} f\|_{L^2(\Sigma)} &= \|C^\Sigma_+\left(f(w_-^\infty - w_-^{(n)})\right) + C^\Sigma_-\left(f(w_+^\infty - w_+^{(n)})\right)\|_{L^2(\Sigma)} \\ &\le c\|f\|_{L^2(\Sigma)}\left(\|w_-^\infty - w_-^{(n)}\|_{L^\infty(\Sigma)} + \|w_+^\infty - w_+^{(n)}\|_{L^\infty(\Sigma)}\right),\end{aligned}$$

e portanto $C^\Sigma_{w^{(n)}} \to C^\Sigma_{w^\infty}$ fortemente, donde concluimos que $\mathrm{Id} - C^\Sigma_{w^{(n)}}$ é invertível, para n suficientemente grande.

A segunda equação do resolvente [47, pg. 126, teo. 4.8.2] nos ensina que

$$(\mathrm{Id} - C^\Sigma_{w^\infty})^{-1} - (\mathrm{Id} - C^\Sigma_{w^{(n)}})^{-1} = (\mathrm{Id} - C^\Sigma_{w^\infty})^{-1}(C^\Sigma_{w^\infty} - C^\Sigma_{w^{(n)}})(\mathrm{Id} - C^\Sigma_{w^{(n)}})^{-1},$$

e o fato de que $C^\Sigma_{w^{(n)}} \to C^\Sigma_{w^\infty}$ nos permite concluir então que $(\mathrm{Id} - C^\Sigma_{w^{(n)}})^{-1} \to (\mathrm{Id} - C^\Sigma_{w^\infty})^{-1}$ fortemente.

Sejam $f^{(n)}, f^\infty$ soluções das equações

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id} - C^\Sigma_{w^{(n)}})(f^{(n)} - I) &= C^\Sigma_+ w_-^{(n)} + C^\Sigma_- w_+^{(n)}, \\ (\mathrm{Id} - C^\Sigma_{w^\infty})(f^\infty - I) &= C^\Sigma_+ w_-^\infty + C^\Sigma_- w_+^\infty,\end{aligned}$$

como no teorema 2.4. Trivialmente $f^\infty - f^{(n)} \in L^2(\Sigma)$. Ainda na notação do teorema 2.4,

se definirmos formalmente

$$C^{\Sigma}_{w^{(n)}} I = C^{\Sigma}_{+} w^{(n)}_{-} + C^{\Sigma} w^{(n)}_{-},\ C^{\Sigma}_{w^{\infty}} I = C^{\Sigma}_{+} w^{\infty}_{-} + C^{\Sigma} w^{\infty}_{-},$$

então (veja a observação 2.1)

$$C^{\Sigma}_{w^{(n)}} I,\ C^{\Sigma}_{w^{(n)}} I \in L^2(\Sigma).$$

Deste modo, por (2.23)

$$\begin{aligned}
\left\| f^{(n)} - f^{\infty} \right\|_{L^2(\Sigma)} &= \left\| f^{(n)} - I - (f^{\infty} - I) \right\|_{L^2(\Sigma)} \\
&= \left\| (\mathrm{Id} - C^{\Sigma}_{w^{(n)}})^{-1} C^{\Sigma}_{w^{(n)}} I - (\mathrm{Id} - C^{\Sigma}_{w^{\infty}})^{-1} C^{\Sigma}_{w^{\infty}} I \right\|_{L^2(\Sigma)} \\
&\leq \left\| (\mathrm{Id} - C^{\Sigma}_{w^{(n)}})^{-1} (C^{\Sigma}_{w^{(n)}} I - C^{\Sigma}_{w^{\infty}} I) \right\|_{L^2(\Sigma)} \\
&\quad + \left\| \left((\mathrm{Id} - C^{\Sigma}_{w^{\infty}})^{-1} - (\mathrm{Id} - C^{\Sigma}_{w^{(n)}})^{-1} \right) C^{\Sigma}_{w^{\infty}} I \right\|_{L^2(\Sigma)} \\
&\leq \left\| (\mathrm{Id} - C^{\Sigma}_{w^{(n)}})^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(L^2(\Sigma))} \left\| C^{\Sigma}_{w^{(n)}} I - C^{\Sigma}_{w^{\infty}} I \right\|_{L^2(\Sigma)} + \\
&\quad + \left\| (\mathrm{Id} - C^{\Sigma}_{w^{\infty}})^{-1} - (\mathrm{Id} - C^{\Sigma}_{w^{(n)}})^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(L^2(\Sigma))} \left\| C^{\Sigma}_{w^{\infty}} \right\|_{L^2(\Sigma)} \\
&= \left\| (\mathrm{Id} - C^{\Sigma}_{w^{(n)}})^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(L^2(\Sigma))} \left\| C^{\Sigma}_{+}(w^{(n)}_{-} - w^{\infty}_{-}) + C^{\Sigma}_{-}(w^{(n)}_{+} - w^{\infty}_{+}) \right\|_{L^2(\Sigma)} \\
&\quad + \left\| (\mathrm{Id} - C^{\Sigma}_{w^{\infty}})^{-1} - (\mathrm{Id} - C^{\Sigma}_{w^{(n)}})^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(L^2(\Sigma))} \left\| C^{\Sigma}_{w^{\infty}} I \right\|_{L^2(\Sigma)}.
\end{aligned}$$

Lembrando que os operadores $C^{\Sigma}_{\pm}$ são limitados, concluimos

$$\begin{aligned}
\left\| f^{(n)} - f^{\infty} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq c \Bigg(& \left\| w^{(n)}_{+} - w^{\infty}_{+} \right\|_{L^2(\Sigma)} + \left\| w^{(n)}_{-} - w^{\infty}_{-} \right\|_{L^2(\Sigma)} \\
& + \left\| (\mathrm{Id} - C^{\Sigma}_{w^{\infty}})^{-1} - (\mathrm{Id} - C^{\Sigma}_{w^{(n)}})^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(L^2(\Sigma))} \Bigg),
\end{aligned}$$

e assim

$$f^{(n)} \to f^{\infty} \text{ em } L^2(\Sigma). \tag{2.27}$$

Procedendo como na observação 2.1, pode-se provar que $C^{\Sigma}_{w^{(n)}} f^{\infty},\ C^{\Sigma}_{w^{\infty}} f^{(n)} \in L^2(\Sigma)$, valendo o mesmo para as parcelas $C^{\Sigma}_{\pm}(f^{\infty} w^{(n)}_{+}),\ C^{\Sigma}_{\pm}(f^{\infty} w^{(n)}_{-}),\ C^{\Sigma}_{\pm}(f^{(n)} w^{\infty}_{+}),\ C^{\Sigma}_{\pm}(f^{(n)} w^{\infty}_{-})$.

Ainda, de $w^{(n)} \to w^{\infty}$ em $L^{\infty}(\Sigma)$, e da representação integral similar a (2.24), concluimos

$$\| (C^{\Sigma}_{w^n} - C^{\Sigma}_{w^{\infty}}) f^{\infty} \|_{L^2(\Sigma)} \to 0,\ n \to \infty \tag{2.28}$$

$$\left\| C^{\Sigma}_{w^{(n)}} \right\|_{\mathscr{L}(L^2(\Sigma))} \leq c \left(\| w^{(n)}_{+} \|_{L^{\infty}(\Sigma)} + \| w^{(n)}_{-} \|_{L^2(\Sigma)} \right). \tag{2.29}$$

Em particular, $\left\|C^{\Sigma}_{w^{(n)}}\right\|_{\mathscr{L}(L^2(\Sigma))}$ é uniformemente limitada em n.

Por fim, usando o teorema 2.4,

$$\begin{aligned}
\left\|m_+^{(n)} - m_+^{\infty}\right\|_{L^2(\Sigma)} &= \left\|C^{\Sigma}_+(f^{(n)}w^{(n)}) - C^{\Sigma}_+(f^{\infty}w^{\infty})\right\|_{L^2(\Sigma)} \\
&= \left\|C^{\Sigma}_+(f^{(n)}w^{(n)}_+) + C^{\Sigma}_+(f^{(n)}w^{(n)}_-) - C^{\Sigma}_+(f^{\infty}w^{\infty}_+) - C^{\Sigma}_+(f^{\infty}w^{\infty}_-)\right\|_{L^2(\Sigma)} \\
&\overset{(2.26)}{=} \left\|C^{\Sigma}_{w^{(n)}}f^{(n)} - C^{\Sigma}_{w^{\infty}}f^{\infty}\right\|_{L^2(\Sigma)} \\
&\leq \left\|C^{\Sigma}_{w^{(n)}}(f^{(n)} - f^{\infty})\right\|_{L^2(\Sigma)} + \left\|(C^{\Sigma}_{w^{\infty}} - C^{\Sigma}_{w^{(n)}})f^{\infty}\right\|_{L^2(\Sigma)} \qquad (2.30) \\
&\leq \left\|C^{\Sigma}_{w^{(n)}}\right\|_{\mathscr{L}(L^2(\Sigma))}\left\|f^{(n)} - f^{\infty}\right\|_{L^2(\Sigma)} + \left\|(C^{\Sigma}_{w^{\infty}} - C^{\Sigma}_{w^{(n)}})f^{\infty}\right\|_{L^2(\Sigma)},
\end{aligned}$$

e as equações (2.27), (2.28), (2.29) usadas na estimativa acima provam que $\|m_+^{(n)} - m_+^{\infty}\| \to 0$ em $L^2(\Sigma)$.

A prova para $\|m_-^{(n)} - m_-^{\infty}\|$ é análoga, bastando fazer as modificações necessárias nas desigualdades em (2.30).

□

Este último teorema é uma ferramenta essencial para análise assintótica de RHP's. Partindo do nosso **RHP Y** inicial para polinômios ortogonais, deformamos nosso **RHP Y** – *ii)* para um novo RHP, digamos $m = m^{(n)} = AYA^{-1}$, obtendo uma nova matriz de salto, digamos $v^{(n)}$, que se aproxime de uma matriz v^{∞} quando $n \to \infty$. Neste caso, sendo $m^{(n)}$ a solução do RHP deformado $(\Sigma, v^{(n)})$, então o teorema 2.5 nos ensina que $m^{(n)}$ se aproxima da solução m^{∞} do RHP (Σ, v^{∞}), quando $n \to \infty$. Voltando $Y = A^{-1}m^{(n)}A$, vemos que Y se aproxima de $A^{-1}m^{\infty}A$, e obtemos assim informações sobre o comportamento de Y e, em particular, de $Y_{11} = \pi_n$, quando $n \to \infty$.

CAPÍTULO 3

MÉTODO STEEPEST DESCENT - ANÁLISE ASSINTÓTICA DE POLINÔMIOS ORTOGONAIS

Finalmente vamos estudar com detalhes nosso **RHP Y** para polinômios ortogonais, introduzido na seção 2.3. Neste capítulo nos dedicaremos exclusivamente a ele, mas agora considerando o peso ω da forma

$$\omega(s) = e^{-nV(s)},$$

com $V(s) = as^{2m}$, como exposto no final da seção 2.3, página 39. Todos os resultados que serão expostos aqui foram generalizados (veja o capítulo 6 e também [32]). Aqui consideraremos apenas o caso particular de V monômio, pois todas as idéias do caso geral estão presentes, mas muitas dificuldades técnicas podem ser evitadas, pois os cálculos envolvidos são feitos de modo mais explícito.

Na seção 3.1, discutiremos alguns aspectos técnicos do problema de Riemann-Hilbert para polinômios ortogonais, conectando nosso estudo à Teoria do Potencial, introduzida na seção 3.2, e nos guiando para as duas primeiras deformações no **RHP Y**, as quais serão feitas nas seções 3.3 e 3.4. Nas seções 3.5 e 3.6, faremos as análises global e local, respectivamente, do **RHP Y** deformado, e utilizaremos estas análises na seção 3.7, para realizar a última deformação. Por fim, na seção 3.8 obteremos assintóticas para polinômios ortogonais.

Recorde o **RHP Y**,

RHP Y – *i)* Y é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$;

RHP Y – *ii)* $Y_+(x) = Y_-(x)v_Y(x),\ v_Y(x) = \begin{pmatrix} 1 & e^{-nV(x)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R};$

RHP Y – *iii)* $Y(z) = \left(I + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right)\begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix},\ z \to \infty.$

3.1 Primeira Deformação do RHP Y - Discussão Prévia

A primeira coisa a ser feita é normalizar a condição assintótica **RHP Y** – *iii)*, de modo a obter uma condição da forma $T = I + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right),\ z \to \infty$. Poderíamos simplesmente fazer a mudança de variáveis

$$T(z) = Y(z)\begin{pmatrix} z^{-n} & 0 \\ 0 & z^n \end{pmatrix},$$

mas neste caso apenas transferiríamos a singularidade anteriormente em $z = \infty$ para $z = 0$. Procedemos então de outro modo.

A ideia inicial é de simples compreensão, apesar de parecer, a princípio, uma estratégia um pouco misteriosa. Fazemos uma transformação da forma

$$T(z) = e^{n\frac{l}{2}\sigma_3}Y(z)e^{-ng(z)\sigma_3}e^{-n\frac{l}{2}\sigma_3}, \tag{3.1}$$

onde σ_3 é a matriz de Pauli

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

g é uma função analítica em $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ a ser determinada, e l é uma constante também a ser determinada. Dada uma função f qualquer, $e^{f(z)\sigma_3}$ é dada também pelo cálculo funcional, o que, em virtude de σ_3 ser diagonal, é igual a

$$e^{f(z)\sigma_3} = \begin{pmatrix} e^{f(z)} & 0 \\ 0 & e^{-f(z)} \end{pmatrix}.$$

Para z suficientemente grande,

$$\begin{aligned} T(z) &= e^{n\frac{l}{2}\sigma_3}\left(I + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right)\begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix}e^{-ng(z)\sigma_3}e^{-n\frac{l}{2}\sigma_3} \\ &= \left(e^{n\frac{l}{2}\sigma_3} + e^{n\frac{l}{2}\sigma_3}\mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right)e^{-n(\frac{l}{2}+g(z))\sigma_3}. \end{aligned}$$

Como estamos interessados em z grande, e $e^{n\frac{l}{2}\sigma_3}$ é constante em z, então

$$e^{n\frac{l}{2}\sigma_3} + e^{n\frac{l}{2}\sigma_3}\mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right) = \left(I + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right) e^{n\frac{l}{2}\sigma_3},$$

implicando

$$T(z) = \left(I + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right) \begin{pmatrix} z^n & 0 \\ 0 & z^{-n} \end{pmatrix} e^{-ng(z)\sigma_3}, \ z \to \infty. \tag{3.2}$$

Assim, gostaríamos que

$$e^{-ng(z)\sigma_3} = \begin{pmatrix} z^{-n} & 0 \\ 0 & z^n \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right), \ z \to \infty,$$

isto é,

$$g(z) = \log z + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right). \tag{3.3}$$

O termo $\mathcal{O}\left(z^{-1}\right)$ tem que ser considerado pois, caso contrário, se apenas considerarmos $g(z) = \log z$, então caimos no caso em que a singularidade em $z = \infty$ é transferida para uma singularidade em $z = 0$.

A matriz de salto de T, v_T, é calculada facilmente, tendo em vista que $v_T(x) = T_+^{-1}(x)T_-(x)$,

$$\begin{aligned} v_T(x) &= e^{n\frac{l}{2}\sigma_3} e^{ng_+(x)\sigma_3} Y_+^{-1}(x) Y_-(x) e^{-ng_-(x)\sigma_3} e^{-n\frac{l}{2}\sigma_3} \\ &= e^{n\frac{l}{2}\sigma_3} e^{ng_+(x)\sigma_3} v_Y(x) e^{-ng_-(x)\sigma_3} e^{-n\frac{l}{2}\sigma_3} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-n(g_+(x)-g_-(x))} & e^{n(g_+(x)+g_-(x)-V(x)+l)} \\ 0 & e^{n(g_+(x)-g_-(x))} \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Tendo em vista o teorema 2.5 e os comentários posteriores à sua demonstração, a matriz de salto limite mais simples que poderíamos buscar é a matriz identidade I, isto é, gostaríamos que $v_T \to I$, quando $n \to \infty$. Para isto, em virtude da equação (3.4), buscamos g tal que

$$\begin{cases} g_+(x) - g_-(x) = 2k\pi i, & k \in \mathbb{Z}, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ g_+(x) + g_-(x) - V(x) + l < 0, & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Na verdade, relaxamos as condições em (3.5). Ao invés de exigirmos que (3.5) sejam satisfeitas para todo $x \in \mathbb{R}$, procuramos uma função g que satisfaça (3.5) para x fora de

um compacto, digamos K, e para $x \in K$, exigimos

$$\begin{cases} g_+(x) - g_-(x) \in i\mathbb{R}, \\ g_+(x) + g_-(x) - V(x) + l = 0, \\ \dfrac{d}{dx}\big[i(g_+(x) - g_-(x))\big] > 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Com estas condições, a matriz de salto v_T converge para I fora de K, e em $int\, K$,

$$v_T(x) = \begin{pmatrix} e^{-n(g_+(x)-g_-(x))} & 1 \\ 0 & e^{n(g_+(x)-g_-(x))} \end{pmatrix}.$$

Com isto, v_T permanece limitada em $int\, K$, apesar de não convergir quando $n \to \infty$. Posteriormente, faremos uma nova deformação em nosso RHP, e a última condição em (3.6) garantirá que a matriz de salto transformada tenha entradas com decaimento exponencial.

Por motivos que ficarão mais claros posteriormente, para construir uma tal g, buscamos uma função da forma

$$g(z) = \int_{\mathbb{R}} \log(z - s)\psi_V(s)ds, \tag{3.7}$$

com ψ_V uma função contínua real de suporte compacto, de modo que a integral acima faça sentido, e tomando o ramo principal da função logaritmo. Podemos reescrever

$$g(z) = \log z \int_{\mathbb{R}} \psi_V(s)ds + \int_{\mathbb{R}} \log\left(1 - \frac{s}{z}\right)\psi_V(s)ds.$$

Como estamos assumindo que o suporte de ψ_V é compacto, então para z suficientemente grande, podemos expandir em série

$$g(z) = \log z \int_{\mathbb{R}} \psi_V(s)ds - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nz^n} \int_{\mathbb{R}} s^n \psi_V(s)ds,$$

e para que (3.3) valha, devemos ter

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_V(s)ds = 1. \tag{3.8}$$

Recorde que o ramo principal do logaritmo, isto é, o ramo obtido com corte em $(-\infty, 0]$, é dado por

$$\log z = \log|z| + i\theta_z, \;\; z = |z|e^{i\theta_z}, \;\; \theta_z \in (-\pi, \pi) \tag{3.9}$$

Disto, segue que

$$\big(\log(x-s)\big)_{\pm} = \begin{cases} \log|x-s|, & x > s, \\ \log|x-s| \pm \pi i, & x < s. \end{cases}$$

Assim,

$$g_{\pm}(x) = \int_{\mathbb{R}} \log|x-s|\psi_V(s)ds \pm \pi i \int_x^{\infty} \psi_V(s)ds, \tag{3.10}$$

e concluimos

$$g_+(x) - g_-(x) = 2\pi i \int_x^{\infty} \psi_V(s)ds,$$
$$g_+(x) + g_-(x) = 2\int_{\mathbb{R}} \log|x-s|\psi_V(s)ds.$$

Tendo em mente (3.8), as primeiras equações em (3.5) e (3.6), a saber

$$\begin{cases} g_+(x) - g_-(x) \in i\mathbb{R}, & \forall x \in \mathbb{R}, \\ g_+(x) - g_-(x) = 2k\pi i, & x \in \mathbb{R}\backslash \operatorname{supp}\psi_V, \end{cases} \tag{3.11}$$

são automaticamente satisfeitas, as segundas são reescritas como

$$\begin{cases} 2\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \log|x-s|^{-1}\psi_V(s)ds + V(x) \geq l, & x \in \mathbb{R} \\ 2\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \log|x-s|^{-1}\psi_V(s)ds + V(x) = l, & x \in \operatorname{supp}\psi_V, \end{cases} \tag{3.12}$$

e para que a terceira equação em (3.6) seja satisfeita, devemos ter

$$\psi_V(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

As equações (3.8), (3.11), (3.12), (3.13) determinam a função g unicamente, como será visto na próxima seção.

3.2 Conexão com Teoria do Potencial

Apesar de só fazermos uso do caso em que V é um monômio, todos os resultados nesta seção valem para V real analítica tal que

$$\lim_{x\to\pm\infty} \big(V(x) - \log(1+x^2)\big) = \infty.$$

Para uma medida de probabilidade μ sobre $\mathbb{R}$, defina o funcional de energia $I^V(\mu)$ por

$$I^V(\mu) = \iint \log|t-s|^{-1} d\mu(s) d\mu(t) + \int V(s) d\mu(s).$$

O *problema de minimização de energia*, tema principal e origem da chamada *Teoria do Potencial*, é o problema de encontrar o mínimo

$$E^V = \inf_{\mu \in \mathscr{M}^1(\mathbb{R})} I^V(\mu),$$

onde

$$\mathscr{M}^1(\mathbb{R}) = \left\{ \mu \text{ medida de Borel sobre } \mathbb{R};\ \int d\mu = 1 \right\}.$$

A quantidade E^V tem uma interpretação física. Considere um sistema de cargas distribuidas sobre a reta $\mathbb{R}$ (vista como um subespaço de $\mathbb{C}$), para os quais a repulsão entre dois elétrons, digamos posicionados em p e q, é dada pela lei logarítmica,

$$\log|p-q|^{-1}.$$

Sob este sistema de cargas, considere a ação de um campo externo $V(x)$, o qual faz o papel de confinar as cargas numa região limitada de $\mathbb{R}$. Dada uma distribuição das cargas sobre a reta, digamos $d\mu$, a energia do sistema é dada por $I^V(\mu)$. A distribuição de equilíbrio das cargas, isto é, a posição das cargas para a qual o sistema está em equilíbrio eletrostático, é dada pela medida $d\mu^V$, a única medida para a qual $I^V(\mu^V) = E^V$.

Através de problemas de equilíbrio, podemos obter a função g que desejamos. O objetivo desta seção será provar que

$$\psi_V(s) = \frac{d\mu_V}{ds}(s).$$

O primeiro passo é garantir a existência de μ^V.

Teorema 3.1. *Seja $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função analítica. Então a medida de equilíbrio μ^V existe, é única e tem suporte compacto. Ainda, $E^V < \infty$.*

Por questão de brevidade, não provaremos este teorema. Provas podem ser encontradas em [23, pg. 138, teor. 6.27] e [50].

Lema 3.1. *Seja μ medida com sinal, com supp μ compacto e tal que $\mu(\mathbb{R}) = 0$, com partes*

positiva e negativa μ^+ *e* μ^-*, respectivamente. Então*

$$\iint \log|t-s|^{-1}\left(d\mu^+(t)d\mu^+(s)+d\mu^-(t)d\mu^-(s)\right) \geq$$
$$\geq \iint \log|t-s|^{-1}\left(d\mu^+(t)d\mu^-(s)+d\mu^-(t)d\mu^+(s)\right) \quad (3.14)$$

Demonstração. Pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\frac{d}{ds}\int_0^s \frac{2t}{t^2+\epsilon^2}dt = \frac{2s}{s^2+\epsilon^2} = \frac{d}{ds}\left(\log(s^2+\epsilon^2)\right).$$

Logo,

$$\log(s^2+\epsilon^2) = \log\epsilon^2 + \int_0^s \frac{2t}{t^2+\epsilon^2}dt. \quad (3.15)$$

Para $t, \epsilon \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Im}\frac{i}{t+i\epsilon} = \frac{1}{t^2+\epsilon^2}.$$

Substituindo em (3.15),

$$\begin{aligned}\log(s^2+\epsilon^2) &= \log\epsilon^2 + 2\operatorname{Im}\int_0^s \frac{i}{t+i\epsilon}dt \\ &= \log\epsilon^2 + 2\operatorname{Im}\int_0^s\int_0^\infty e^{i(t+i\epsilon)u}dudt \\ &= \log\epsilon^2 + 2\operatorname{Im}\int_0^\infty e^{-\epsilon u}\frac{e^{isu}-1}{iu}du.\end{aligned}$$

Mudando variáveis $s \mapsto t-s$, a equação acima se transforma em

$$\log((t-s)^2+\epsilon^2) = \log\epsilon^2 + 2\operatorname{Im}\int_0^\infty e^{-\epsilon u}\frac{e^{i(t-s)u}-1}{iu}du \quad (3.16)$$

Como supp $(d\mu \otimes d\mu)$ é compacto e $\log((t-s)^2+\epsilon^2)$ é contínua em $\mathbb{R}$, então $\log((t-s)^2+\epsilon^2)$ é $d\mu \otimes d\mu$ – integrável. De (3.16), usando que $\mu(\mathbb{R}) = 0$ e Fubini,

$$\iint \log((t-s)^2+\epsilon^2)d\mu(t)d\mu(s) = 2\operatorname{Im}\int_0^\infty e^{-\epsilon u}\left(\iint \frac{e^{i(t-s)u}-1}{iu}d\mu(t)d\mu(s)\right)du \quad (3.17)$$

Seja $\widehat{\mu}$ a transformada de Fourier de μ,

$$\widehat{\mu}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixu}d\mu(x).$$

Como $\mu(\mathbb{R}) = 0$ e μ é medida real,

$$\begin{aligned}\iint \frac{e^{i(t-s)u}-1}{iu} d\mu(t)d\mu(s) &= \frac{1}{iu}\iint e^{itu}e^{-isu}d\mu(t)d\mu(s) - \frac{1}{iu}\iint d\mu(t)d\mu(s)\\ &= \frac{1}{iu}\widehat{\mu}(u)\int \overline{e^{isu}}d\mu(s)\\ &= \frac{1}{iu}\widehat{\mu}(u)\overline{\int e^{isu}d\overline{\mu}(s)}\\ &= \frac{1}{iu}\widehat{\mu}(u)\overline{\int e^{isu}d\mu(s)}\\ &= \frac{1}{iu}\widehat{\mu}(u)\overline{\widehat{\mu}(u)} = \frac{|\widehat{\mu}(u)|^2}{iu}\end{aligned}$$

Substituindo na equação (3.17),

$$\iint \log((t-s)^2+\epsilon^2)d\mu(t)d\mu(s) = -2\int_0^\infty e^{\epsilon u}\frac{|\widehat{\mu}(u)|^2}{u}du.$$

$\widehat{\mu}(u)$ é uma função analítica de u, e como $\widehat{\mu}(0) = 0$ a singularidade para $u \to 0$ na integral acima é cancelada por $|\widehat{\mu}|^2$.

Assim,

$$\iint \log((t-s)^2+\epsilon^2)^{-\frac{1}{2}}d\mu(t)d\mu(s) = \int_0^\infty e^{-\epsilon u}\frac{|\widehat{\mu}(u)|^2}{u}du,$$

o que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}&\iint \log((t-s)^2+\epsilon^2)^{-\frac{1}{2}}\left(d\mu^+(t)d\mu^+(s)+d\mu^-(t)d\mu^-(s)\right) =\\ &\quad= \iint \log((t-s)^2+\epsilon^2)^{-\frac{1}{2}}\left(d\mu^+(t)d\mu^-(s)+d\mu^+(t)d\mu^-(s)\right) + \int_0^\infty e^{-\epsilon u}\frac{|\widehat{\mu}(u)|^2}{u}du.\end{aligned}$$

A função $\log((t-s)^2+\epsilon^2)^{-\frac{1}{2}}$ é uma função contínua em $\mathbb{R}^2$, e as medidas μ^+, μ^- têm suporte compacto, o que garante que as integrais acima pertencem a $(-\infty, \infty]$, e a igualdade acima faz sentido.

Aplicando o teorema de convergência dominada, concluimos

$$\begin{aligned}&\iint \log|t-s|^{-1}\left(d\mu^+(t)d\mu^+(s)+d\mu^-(t)d\mu^-(s)\right) =\\ &\quad= \iint \log|t-s|^{-1}\left(d\mu^+(t)d\mu^-(s)+d\mu^-(t)d\mu^+(s)\right) + \int_0^\infty \frac{|\widehat{\mu}(u)|^2}{u}du, \quad (3.18)\end{aligned}$$

e como

$$\int_0^\infty \frac{|\widehat{\mu}(u)|^2}{u}du \geq 0,$$

obtemos

$$\iint \log|t-s|^{-1}\left(d\mu^+(t)d\mu^+(s)+d\mu^-(t)d\mu^-(s)\right) \geq$$
$$\geq \iint \log|t-s|^{-1}\left(d\mu^+(t)d\mu^-(s)+d\mu^-(t)d\mu^+(s)\right),$$

como queríamos.

□

O lema anterior não garante que $\log|t-s|^{-1}$ seja $d\mu\otimes d\mu$ – integrável. Porém, sob as hipóteses do lema, se $\log|t-s|^{-1}$ for $(d\mu^+\otimes d\mu^+ + d\mu^-\otimes d\mu^-$ – integrável, então será $d\mu\otimes d\mu$ - integrável, e

$$\iint \log|t-s|^{-1}d\mu(t)d\mu(s)\geq 0. \tag{3.19}$$

A medida de equilíbrio é caracterizada por

Teorema 3.2 (Equações Variacionais - Forma Fraca)**.** *Seja μ^V a medida de equilíbrio associada ao potencial analítico V. Existe $l\in\mathbb{R}$ tal que*

$$\int\left(2\int log|t-s|^{-1}d\mu^V(s)+V(t)\right)d\mu(t)\geq l, \tag{3.20}$$

para toda medida $\mu\in\mathscr{M}^1(\mathbb{R})$, com supp μ compacto e $I^V(\mu)<\infty$; e

$$2\int \log|t-s|^{-1}d\mu^V(s)+V(t)=l,\ \mu^V-a.e. \tag{3.21}$$

Reciprocamente, se $\mu\in\mathscr{M}^1(\mathbb{R})$ é uma medida de probabilidade com suporte compacto com $I^V(\mu)<\infty$, para a qual existe l satisfazendo (3.20) *e* (3.21)*, então $\mu=\mu^V$.*

Demonstração. Seja μ^V a medida de equilíbrio. O teorema 3.1 garante que supp μ^V é compacto e $I^V(\mu^V)=E^V<\infty$.

Seja $\mu\in\mathscr{M}^1(\mathbb{R})$ com suporte compacto e tal que $I^V(\mu)<\infty$. Defina

$$\mu_x = x\mu+(1-x)\mu^V = \mu^V+x(\mu-\mu^V).$$

$\log|s-t|^{-1}$ é integrável com relação à $d\mu\otimes d\mu$, $d\mu^V\otimes d\mu^V$, e portanto também com relação $d\mu^V\otimes d\mu$. Ainda, vale a decomposição

$$d(\mu-\mu^V)\otimes d(\mu-\mu^V)=d\mu\otimes d\mu+d\mu^V\otimes d\mu^V-(d\mu\otimes d\mu^V+d\mu^V\otimes d\mu).$$

Pelo teorema de decomposição de Jordan [8, pg. 83, teor. 8.5],

$$(d(\mu-\mu^V)\otimes d(\mu-\mu^V))^+ \ll (d\mu\otimes d\mu + d\mu^V\otimes d\mu^V)$$
$$(d(\mu-\mu^V)\otimes d(\mu-\mu^V))^- \ll (d\mu\otimes d\mu^V + d\mu^V\otimes d\mu)$$

Pelo lema 3.1 e o comentário posterior à sua demonstração, $\log|t-s|^{-1}$ é $d\mu_x\otimes d\mu_x$ – integrável, e podemos decompor

$$\begin{aligned} I^V(\mu_x) = &\iint \log|t-s|^{-1}d\mu^V(t)d\mu^V(s) + \int V(t)d\mu^V(t) + \\ &+2x\iint \log|t-s|^{-1}d\mu^V(t)d(\mu-\mu^V)(s) + x\int V(t)d(\mu-\mu^V)(t) + \\ &+x^2\iint \log|t-s|^{-1}d(\mu-\mu^V)(t)d(\mu-\mu^V)(s). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Como $I^V(\mu_x)\geq I^V(\mu^V)$, para todo x em $[0,1]$, pois $\mu_x = x\mu+(1-x)\mu^V\in\mathscr{M}^1$, então a igualdade acima implica que, em $[0,1]$,

$$\begin{aligned} x^2\iint &\log|t-s|^{-1}d(\mu-\mu^V)(t)d(\mu-\mu^V)(s) + \\ &+x\left(2\iint \log|t-s|^{-1}d\mu^V(t)d(\mu-\mu^V)(s) + \int V(t)d(\mu-\mu^V)(t)\right)\geq 0, \end{aligned} \tag{3.23}$$

o que por sua vez implica

$$\begin{aligned} x\iint &\log|t-s|^{-1}d(\mu-\mu^V)(t)d(\mu-\mu^V)(s) + \\ &+\left(2\iint log|t-s|^{-1}d\mu^V(t)d(\mu-\mu^V)(s) + \int V(t)d(\mu-\mu^V)(t)\right)\geq 0,\ \forall x\in[0,1]. \end{aligned}$$

Em particular, se $x=0$ e

$$l = 2\iint \log|t-s|^{-1}d\mu^V(t)d\mu^V(s) + \int V(t)d\mu^V(t),$$

concluimos (3.20).

Para provar (3.21), defina

$$B = \left\{t\in\mathbb{R};\ 2\int \log|t-s|^{-1}d\mu^V(s) + V(t) < l\right\}.$$

B é limitado. Seja $\mu\in\mathscr{M}^1(\mathbb{R})$, e suponha que $\mu(B)>0$. Defina

$$d\mu_B(x) = \frac{\chi_B(x)}{\mu(B)}d\mu(x),$$

Claramente supp $d\mu_B$ é compacto. Ainda, $\mu_B \in \mathscr{M}^1(\mathbb{R})$, e como $\mu_B \ll \mu$ com $\frac{d\mu_B}{d\mu}$ limitada, $I^V(\mu_B) < \infty$.

Por (3.20), e usando fortemente o fato de que $\mu(B) > 0$,

$$\begin{aligned} l &\leq \int \left(2 \int \log |t-s|^{-1} d\mu^V(t) + V(s) \right) d\mu_B(s) \\ &< \frac{l}{\mu(B)} \int \chi_B(s) d\mu(s) = l, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Logo, $\mu(B) = 0$, para toda medida $\mu \in \mu$ satisfazendo as condições do teorema. Em particular, se $\mu = \mu^V$, concluimos (3.21).

Reciprocamente, suponha que $\mu \in \mathscr{M}^1(\mathbb{R})$ seja uma medida com suporte compacto, $I^V(\mu) < \infty$ e satisfaça as equações (3.20) e (3.21).

Cálculos similares aos feitos para obter (3.22) nos levam a

$$\begin{aligned} I^V(\mu) \geq I^V(\mu^V) = I^V(\mu) + \int \left(2 \int \log |t-s|^{-1} d\mu(t) + V(s) \right) d(\mu^V - \mu)(s) + \\ + \iint \log |t-s|^{-1} d(\mu^V - \mu)(t) d(\mu^V - \mu)(s). \end{aligned} \tag{3.24}$$

As equações (3.20) e (3.21) nos ensinam que

$$\int \left(2 \int \log |t-s|^{-1} d\mu(t) + V(s) \right) d(\mu^V - \mu)(s) \geq 0,$$

e para que (3.24) valha devemos ter

$$\iint \log |t-s|^{-1} d(\mu^V - \mu)(t) d(\mu^V - \mu)(s) \leq 0.$$

Mas, por (3.18),

$$\iint \log |t-s|^{-1} d(\mu^V - \mu)(t) d(\mu^V - \mu)(s) \geq 0,$$

seguindo que

$$\iint \log |t-s|^{-1} d(\mu^V - \mu)(t) d(\mu^V - \mu)(s) = 0.$$

Novamente usando a equação (3.18), concluimos

$$\int_0^\infty \frac{|\widehat{(\mu^V - \mu)}(u)|^2}{u} du = 0.$$

Como a transformada de Fourier é contínua, então $\widehat{\mu^V}(u) = \widehat{\mu}(u)$, para todo $u > 0$, isto é,

$$\int e^{ixu} d\mu(x) = \int e^{ixu} d\mu^V(x), \ \forall u > 0.$$

Uma simples mudança de variáveis mostra que também

$$\int e^{-ixu} d\mu(x) = \int e^{-ixu} d\mu^V(x), \ \forall u > 0,$$

e assim $\widehat{\mu}(u) = \widehat{\mu^V}(u)$, para todo $u \in \mathbb{R}$. Pela unicidade da transformada de Fourier, concluimos que $\mu = \mu^V$, como queríamos. □

Se sabemos, a priori, que $d\mu^V(x) = \psi_V(x)dx$, para alguma função contínua de suporte compacto ψ_V, então o teorema 3.2 assume a forma

Teorema 3.3 (Equações Variacionais - Forma Forte)**.** *Suponha $d\mu^V \ll dx$, com $\psi_V = \frac{d\mu^V}{dx}$ contínua com suporte compacto. Então as condições* (3.20) *e* (3.21) *do teorema 3.2 podem ser substituidas por*

$$2\int \log|t-s|^{-1} d\mu^V(t) + V(s) \geq l, \ \forall s \in \mathbb{R}, \tag{3.25}$$

$$2\int \log|t-s|^{-1} d\mu^V(t) + V(s) = l, \ s \in supp\, \psi_V. \tag{3.26}$$

Demonstração. Basta provarmos que no caso em que $d\mu^V \ll dx$, as equações (3.25) e (3.26) são equivalentes a (3.20) e (3.21)

Suponha primeiramente que μ^V satisfaça as equações do teorema 3.2.

A equação (3.26) é trivial, pois ψ_V é contínua.

Para obter (3.25), tome $\mu = \mu^V$ em (3.20). Então

$$\int \left(2\int \log|t-s|^{-1} d\mu^V(t) + V(s) - l \right) \psi_V(s) ds \geq 0.$$

Suponha que

$$2\int \log|t-s_0|^{-1} d\mu^V(t) + V(s_0) < l,$$

para algum $s_0 \in \mathbb{R}$. Como ψ_V é contínua, então existe um aberto limitado G, com $s_0 \in G$, e para o qual

$$2\int \log|t-s|^{-1} d\mu^V(t) + V(s) < l, \ \forall s \in G. \tag{3.27}$$

Seja

$$d\mu_G(x) = \frac{\chi_G(x)}{d\mu^V(G)} d\mu^V(x).$$

μ_G está bem definida, pertence a $\mathscr{M}^1(\mathbb{R})$, tem suporte compacto e $I^V(\mu_G) < \infty$. Por (3.27),

$$\int \left(2 \int \log |t-s|^{-1} d\mu^V(t) + V(s) \right) d\mu_G(s) < l,$$

o que contradiz nossa suposição de que μ^V satisfaz (3.20). Está provado que as equações variacionais fracas implicam as equações variacionais fortes, no caso em que μ^V é absolutamente contínua. A recíproca é válida trivialmente. □

De posse do teorema 3.3, podemos encontrar a medida de equilíbrio μ_V, para o nosso potencial V. Supomos inicialmente que $d\mu^V(x) = \psi_V(x)dx$, para alguma função contínua de suporte compacto, e buscamos uma função ψ_V de modo que as equações do teorema 3.3 sejam satisfeitas por $d\mu^V$. Se tivermos sucesso em encontrar uma tal ψ_V, então necessariamente $d\mu^V$ é a medida de equilíbrio associada a V.

Para isto, derivamos fracamente (3.26), e com auxílio das transformadas de Borel e Hilbert, reduzimos tal equação a um problema de Riemann-Hilbert escalar, o qual possui solução explícita para $V(x) = ax^{2m}$. Para V analítica, podemos não obter soluções explícitas, mas é possível mesmo assim inferir muitas propriedades sobre μ^V, o que é suficiente para o **RHP Y** no caso de V analítica.

Não entraremos em detalhes de como este processo é feito. Para detalhes, veja [23,30]. Em nosso caso particular de V monômio par, vale

Teorema 3.4 ([23, pg. 174, eq. 6.150;pg. 176, prop. 6.156]). *Seja $V(x) = ax^{2m}$, $a > 0$. Então*

$$d\mu^V(x) = \operatorname{Re} G_+(x)\chi_{(-\alpha,\alpha)}(x)dx = -\frac{mia}{\pi}\left(\sqrt{x^2-\alpha^2}\right)_+ h_1(x)\chi_{(-\alpha,\alpha)}(x)dx,$$

onde G é a transformada de Borel de $d\mu^V$,

$$G(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\mu^V(s)}{s-z},$$

h_1 é um polinômio par e positivo,

$$h_1(x) = x^{2m-2} + \sum_{j=1}^{m-1} x^{2m-2-j}\alpha^{2j} \prod_{k=1}^{j} \frac{2k-1}{2k},$$

e

$$\alpha = \left(ma \prod_{k=1}^{m} \frac{2k-1}{2k} \right)^{-\frac{1}{2m}}.$$

Ainda, a transformada de Borel G e o polinômio h_1 se relacionam por

$$G(z) = \frac{mai}{\pi} \left(z^{2m-1} - \sqrt{z^2-\alpha^2} h_1(z) \right), \ z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R},$$

com $\sqrt{z^2-\alpha^2}$ sendo substituido por $(\sqrt{z^2-\alpha^2})_+$ na fórmula acima, no caso em que $z \in \mathbb{R} \backslash [-\alpha, \alpha]$.

É importante ressaltar que todas as propriedades que discutimos na seção anterior para a função g dada por (3.7), a saber (3.3), (3.6), (3.8), (3.10), são satisfeitas, mesmo que não possamos calcular explicitamente a medida de equilíbrio $\psi_V d\mu^V$, como é o caso para um polinômio arbitrário $V(x) = a_{2m}x^{2^m} + \ldots$.

Podemos agora esclarecer o porquê da escolha

$$g(z) = \int \log(z-s)\psi_V(s)ds$$

em (3.7).

Escreva

$$Y_{11}(z) = \pi_n(z) = \prod_{j=1}^{n}(z-z_j),$$

onde z_j's são os zeros do polinômio π_n, ortogonal com relação à $e^{-nV(s)}ds$. Podemos reescrever

$$\prod_{j=1}^{n}(z-z_j) = e^{\sum_{j=1}^{n}\log(z-z_j)} = e^{n\int \log(z-s)d\mu_n(s)},$$

onde

$$\mu_n(s) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{z_j}(s)$$

é a medida contadora de zeros. Agora, é um fato conhecido [23] que

$$d\mu_n(s) \rightharpoonup d\mu^V(s) = \psi_V(s)ds,$$

e assim, esperamos que

$$Y_{11}(z) \sim e^{ng(z)}.$$

Por esta razão, fazemos a mudança $Y \mapsto Ye^{-ng\sigma_3}$, com a esperança de funcionar. Como veremos abaixo, a mudança certa é $Y \mapsto e^{n\frac{l}{2}\sigma_3}Ye^{-ng\sigma_3}e^{-n\frac{l}{2}\sigma_3}$.

3.3 Primeira Deformação: $Y \mapsto T$

Baseados na teoria do potencial, formalizaremos agora a transformação $Y \mapsto T$, exposta na seção 3.1.

Seja $g : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = \int \log(z-s)\psi_V(s)ds = \frac{m}{\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha} \log(z-s)(s^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}h_1(s)ds,$$

onde $\psi_V(s)ds$ é a medida de equilíbrio associada ao potencial V, dada pelo teorema 3.4, e o logaritmo é tomado sobre o ramo principal, como em (3.9).

Se $x > \alpha$, então g é holomorfa em x. De fato, como, neste caso, temos $\arg(x+i\epsilon-s) > 0$, $\forall\epsilon > 0$, e $\arg(x+i\epsilon-s) \to 0$, quando $\epsilon \to 0$, então, usando convergência dominada, a limitação da função argumento e que $\psi_V(s)ds$ é medida de probabilidade,

$$\begin{aligned} g_+(x) &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\alpha}^{\alpha}\log|x+i\epsilon-s|\psi_V(s)ds + i\int_{-\alpha}^{\alpha}\arg(x+i\epsilon-s)\psi_V(s)ds = \\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha}\log|x-s|\psi_V(s)ds + i\int_{-\alpha}^{\alpha}\arg(x-s)\psi_V(s)ds = g_-(x),\ x\in(\alpha,\infty) \end{aligned} \tag{3.28}$$

Por outro lado, se $x < -\alpha$,

$$\arg(x\pm i\epsilon) \to \int_{-\alpha}^{\alpha}\log|x-s|\psi_V(s)ds \pm i\pi,\ x\in(-\infty,-\alpha).$$

e procedendo de modo análogo ao anterior, calculamos

$$g_\pm(x) = \int_{-\alpha}^{\alpha}\log|x-s|\psi_V(s)ds \pm i\pi. \tag{3.29}$$

Ainda, para $|z|$ suficientemente maior que α, podemos expandir em Taylor

$$\log(z-s) = \log z + \log\left(1-\frac{s}{z}\right) = \log z + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{jz^j}s^j,$$

e assim

$$g(z) = \log z + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{jz^j}\int_{-\alpha}^{\alpha}s^j\psi_V(s)ds = \log z + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right) \tag{3.30}$$

Devido às equações (3.28), (3.29) e (3.30), a função $e^{ng(z)}$ é analítica em $\mathbb{C}\backslash[-\alpha,\alpha]$, e satisfaz

$$e^{ng(z)} = z^n\left(1+\mathcal{O}(z^{-1})\right),\ z\to\infty. \tag{3.31}$$

Seja l a constante do teorema 3.2,

$$l = 2\int_{-\alpha}^{\alpha}\log|x-s|^{-1}\psi_V(s)ds + V(x),\ -\alpha<x<\alpha, \tag{3.32}$$

e defina

$$T(z) = e^{n\frac{l}{2}\sigma_3}Y(z)e^{-ng(z)\sigma_3}e^{-n\frac{l}{2}\sigma_3}, \tag{3.33}$$

conforme já feito na equação (3.1). Pelos cálculos efetuados na seção 3.1, em especial as equações (3.4) e (3.2), juntamente com (3.31), T é solução do **RHP T**,

RHP T – *i)* T é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$;

RHP T – *ii)* $T_+(x) = T_-(x)v_T(x),\ x\in\mathbb{R}$, onde

$$v_T(x) = \begin{pmatrix} e^{-n(g_+(x)-g_-(x))} & e^{n(g_+(x)+g_-(x)-V(x)+l)} \\ 0 & e^{n(g_+(x)-g_-(x))} \end{pmatrix}; \tag{3.34}$$

RHP T – *iii)* $T(z) = I+\mathcal{O}(z^{-1}),\ z\to\infty$.

Vamos analisar os limites $g_\pm$ mais detalhadamente. Para $x\in[-\alpha,\alpha]$, a definição de limite lateral nos conta que

$$g_\pm(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{-\alpha}^{\alpha}\log|x\pm i\epsilon-s|\psi_V(s)ds + i\int_{-\alpha}^{\alpha}\arg(x\pm i\epsilon-s)\psi_V(s)ds\right), \tag{3.35}$$

e a existência dos limites acima é garantida pois $\psi_V(s)ds$ é medida de equilíbrio. Agora, como

$$\arg(x\pm i\epsilon-s) = \begin{cases} 0, & x>s, \\ \pm i\pi, & x<s, \end{cases}$$

com o uso de convergência dominada, o limite em (3.35) pode ser calculado, obtendo

$$g_\pm(x) = \int_{-\alpha}^{\alpha}\log|x-s|\psi_V(s)ds \pm i\pi\int_{x}^{\alpha}\psi_V(s)ds,\ x\in[-\alpha,\alpha]. \tag{3.36}$$

Usando (3.32) e (3.36), obtemos

$$g_+(x)+g_-(x)-V(x)+l = 0,\ x\in(-\alpha,\alpha). \tag{3.37}$$

Por (3.29) e pela fórmula explícita da medida de equilíbrio dada pelo teorema 3.4,

$$g_+(x) - g_-(x) = 2m \int_x^\alpha (s^2 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}} h_1(s) ds, \ x \in (-\alpha, \alpha), \tag{3.38}$$

e concluimos então

$$v_T(x) = \begin{pmatrix} e^{-2mn \int_x^\alpha (s^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}} h_1(s) ds} & 0 \\ 0 & e^{2mn \int_x^\alpha (s^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}} h_1(s) ds} \end{pmatrix}, \ x \in (-\alpha, \alpha). \tag{3.39}$$

Para $x \notin [-\alpha, \alpha]$, usamos a equação variacional (3.26) e (3.36) para concluir

$$g_+(x) + g_-(x) - V(x) + l = -2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \log |x - s|^{-1} \psi_V(s) ds - V(s) + l \leq 0.$$

Por (3.28) e (3.29),

$$\begin{aligned} g_+(x) - g_-(x) &= 0, \qquad x > \alpha; \\ g_+(x) - g_-(x) &= 2\pi i, \quad x < -\alpha; \end{aligned}$$

e assim

$$e^{n(g_+(x) - g_-(x))} = 1, \ x \in \mathbb{R} \backslash [-\alpha, \alpha]. \tag{3.40}$$

Ainda, por (3.32) e usando Fubini

$$\begin{aligned} g_+(x) + g_-(x) - V(x) + l &= g_+(x) + g_-(x) - V(x) - (g_+(\alpha) + g_-(\alpha)) + V(\alpha) \\ &= 2 \int_{-\alpha}^{\alpha} (\log |x - s| - \log(a - s)) \, \psi_V(s) ds - \int_\alpha^x V'(s) ds \\ &= 2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_\alpha^x \frac{dt}{t - s} \psi_V(s) ds - \int_\alpha^x V'(s) ds \\ &= \int_\alpha^x \left(2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\psi_V(s)}{t - s} ds - V'(t) \right) dt, x > \alpha, \end{aligned}$$

e pela última equação no teorema 3.4, concluimos

$$\begin{aligned} g_+(x) + g_-(x) - V(x) + l &= \int_\alpha^x (-2\pi i G(t) - V'(t)) \, dt \\ &= \int_\alpha^x \left(2mat^{m-1} - 2m(\sqrt{t^2 - \alpha^2})_+ h_1(t) - 2mat^{2m-1} \right) dt \\ &= -2m \int_\alpha^x (\sqrt{t^2 - \alpha^2})_+ h_1(t) dt, \ x > \alpha, \end{aligned} \tag{3.41}$$

Similarmente,

$$g_+(x) + g_-(x) - V(x) + l = 2m \int_x^{-\alpha} (\sqrt{t^2 - \alpha^2})_+ h_1(t) dt. \tag{3.42}$$

Para uso posterior, observe que em virtude de

$$\begin{aligned}(\sqrt{t^2-\alpha^2})_+ &> 0, \quad t > \alpha,\\ (\sqrt{t^2-\alpha^2})_+ &< 0, \quad t < -\alpha,\end{aligned}$$

as equações (3.41) e (3.42) nos mostram

$$g_+(x) + g_-(x) - V(x) + l < 0,\ x \in \mathbb{R}\backslash[-\alpha,\alpha], \tag{3.43}$$

e podemos ainda reescrever

$$\begin{aligned}g_+(x) + g_-(x) - V(x) + l &= -2m\int_{-\alpha}^{\alpha}(\sqrt{t^2-\alpha^2})_+h_1(t)dt + 2m\int_{x}^{\alpha}(\sqrt{t^2-\alpha^2})_+h_1(t)dt\\ &= -2\pi i\int_{-\alpha}^{\alpha}\psi_V(t)dt + 2m\int_{x}^{\alpha}(\sqrt{t^2-\alpha^2})_+h_1(t)dt\\ &= 2m\int_{x}^{\alpha}(\sqrt{t^2-\alpha^2})_+h_1(t)dt - 2\pi i,\ x < -\alpha.\end{aligned} \tag{3.44}$$

Resumindo as equações (3.39), (3.40), (3.41) e (3.42), a matriz v_T em (3.34) pode ser decomposta como

$$v_T(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & e^{2mn\int_x^{-\alpha}(\sqrt{t^2-\alpha^2})_+h_1(t)dt} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & x \le -\alpha,\\[2ex] \begin{pmatrix} e^{-2mn\int_x^{\alpha}(\sqrt{t^2-\alpha^2})_+h_1(t)dt} & 1 \\ 0 & e^{2mn\int_x^{\alpha}(\sqrt{t^2-\alpha^2})_+h_1(t)dt} \end{pmatrix}, & x \in (-\alpha,\alpha),\\[2ex] \begin{pmatrix} 1 & e^{-2mn\int_x^{\alpha}(\sqrt{t^2-\alpha^2})_+h_1(t)dt} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & x \ge \alpha. \end{cases} \tag{3.45}$$

Os cálculos efetuados até aqui garantem que T é solução do **RHP T** pontualmente. Mas isto, juntamente com o fato de e^{ng} ser contínua em $\overline{\mathbb{C}_\pm}$ nos garante que T é solução do **RHP T** no sentido de L^2_{loc} descrito na seção 2.1, com matriz de salto v_T decomposta como acima.

3.4 Segunda Deformação: $T \mapsto R$

Seja

$$\phi(z) = m\int_{\alpha}^{z}\sqrt{t^2-\alpha^2}h_1(t)dt,\ z \in \mathbb{C}\backslash[-\alpha,\alpha]. \tag{3.46}$$

ϕ não está bem definida, pois depende do caminho de integração - se integrarmos por um caminho que contorna o intervalo $[-\alpha, \alpha]$ no sentido horário, digamos γ_0, o valor obtido será distinto do obtido ao integrarmos por um caminho que contorna o intervalo $[-\alpha, \alpha]$ no sentido anti-horário, digamos γ_1 (veja figura 13).

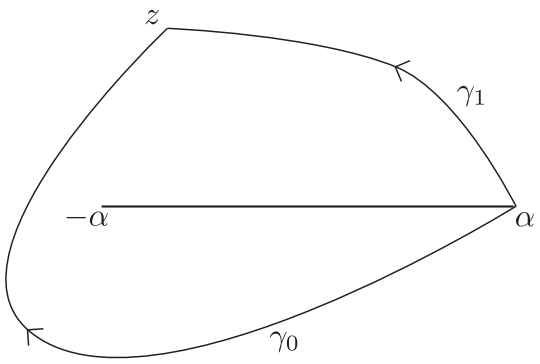


Figura 13:

Porém, cálculo de resíduos no infinito nos mostram que

$$\begin{aligned} m\int_{\gamma_0}\sqrt{t^2-\alpha^2}h_1(t)dt - m\int_{\gamma_1}\sqrt{t^2-\alpha^2}h_1(t)dt &= 2m\int_{-\alpha}^{\alpha}(\sqrt{t^2-\alpha^2})_+h_1(t)dt \\ &= 2\pi i\int_{-\alpha}^{\alpha}\psi_V(t)dt \\ &= 2\pi i \end{aligned} \tag{3.47}$$

Assim, apesar de ϕ não estar bem definida, $e^{\pm n\phi(z)}$ está bem definida e é analítica em $\mathbb{C}\backslash[-\alpha, \alpha]$. Podemos então reescrever (3.45) para $|x| > \alpha$, tendo em mente (3.44),

$$v_T(x) = e^{-n\phi(x)\sigma_3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}e^{n\phi(x)\sigma_3},\ |x| > \alpha. \tag{3.48}$$

Por cálculo de resíduos, para $x \in (-\alpha, \alpha)$, vale

$$\phi_+(x) = -m\int_x^{\alpha}(\sqrt{s^2-\alpha^2})_+h_1(s)ds, \tag{3.49}$$

$$\phi_-(x) = -m\int_x^{\alpha}(\sqrt{s^2-\alpha^2})_-h_1(s)ds, \tag{3.50}$$

o que, em virtude de $(\sqrt{s^2-\alpha^2})_- = -(\sqrt{s^2-\alpha^2})_+$, implica

$$\phi(x)_+ = -\phi_-(x) + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z},\ x \in (-\alpha, \alpha). \tag{3.51}$$

Também por (3.49) e (3.50), podemos decompor

$$\begin{aligned} v_T(x) &= \begin{pmatrix} e^{2n\phi_+(x)} & 1 \\ 0 & e^{-2n\phi_+(x)} \end{pmatrix} \\ &= e^{n\phi_+(x)\sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{n\phi_+(x)\sigma_3} \\ &= e^{-n\phi_-(x)\sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{n\phi_+(x)\sigma_3}, \ x \in (-\alpha, \alpha). \end{aligned} \tag{3.52}$$

Como ainda, novamente por cálculo de resíduos,

$$\phi_+(x) = \begin{cases} \phi_-(x), & x > \alpha, \\ \phi_-(x) \pmod{2\pi i}, & x < -\alpha, \end{cases} \tag{3.53}$$

e podemos resumir (3.48) e (3.52) em

$$v_T(x) = e^{-n\phi_-(x)\sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{n\phi_+(x)\sigma_3}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Usando a igualdade

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

podemos decompor, para $x \in (-\alpha, \alpha)$,

$$\begin{aligned} v_T(x) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{2n\phi_-(x)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e^{-n(\phi_-(x)+\phi_+(x))} \\ -e^{n(\phi_-(x)+\phi_+(x))} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{2n\phi_+(x)} & 1 \end{pmatrix} \\ &\overset{(3.51)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{2n\phi_-(x)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{2n\phi_+(x)} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Relembrando as idéias expostas na seção 2.4, a decomposição acima sugere a seguinte deformação do **RHP T**,

RHP R – *i)* R é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\Sigma_R$, Σ_R a curva definida de acordo com a figura 14;

RHP R – *ii)* $R_+(x) = R_-(x)v_R(x), \ x \in \Sigma_R$, onde v_R é a matriz sobre Σ_R, também definida pela figura 14;

RHP R – *iii)* $R(z) = I + \mathcal{O}(z^{-1}), \ z \to \infty$.

O **RHP T** é equivalente ao **RHP R**, e a solução R é construida a partir da matriz T, seguindo as equações (2.17)-(2.20).

De (3.43),

$$|e^{-\phi(x)}| = e^{-\operatorname{Re}\phi(x)} < 1,\ x \in \backslash[-\alpha, \alpha], \tag{3.54}$$

e concluimos que, pontualmente,

$$v_R(x) \to I,\ n \to \infty,\ x \in \backslash[-\alpha, \alpha].$$

Agora, para $-\alpha < x < \alpha$, com o caminho de integração tomado sobre $\mathbb{R}$, vale

$$\begin{aligned} \phi_+(x) &= -m \int_\alpha^x (\sqrt{t^2 - \alpha^2})_+ h_1(t) dt \\ &= -im \int_\alpha^x \underbrace{(\sqrt{\alpha^2 - t^2})_+}_{\in \mathbb{R}} h_1(t) dt \in i\mathbb{R}, \end{aligned} \tag{3.55}$$

e assim,

$$\frac{d}{dz}\phi_+(z) = -im\sqrt{\alpha^2 - z^2} h_1(z) \in i\mathbb{R}_-,\ z \in (-\alpha, \alpha),$$

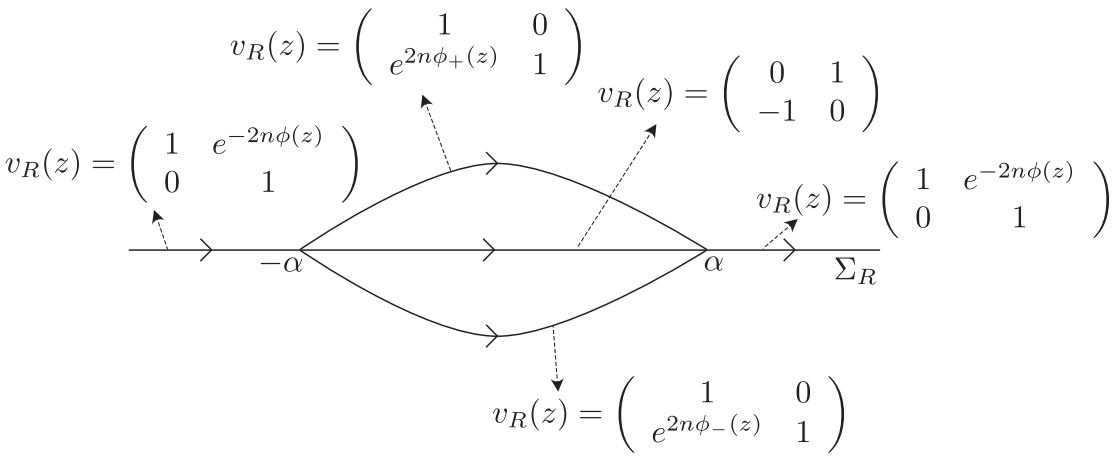
o que implica, por continuidade,

$$\frac{d}{dz}\phi(z) \in \mathbb{C}_-,\ \text{se } \operatorname{Re} z \in (-\alpha, \alpha),\ \operatorname{Im} z > 0 \text{ sufic. pequeno.}$$

Mas, pelas equações de Cauchy-Riemann, se $z = x + iy$, então

$$\frac{d}{dz}\phi(z) = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im}\phi(z) - i\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re}\phi(z),$$

Figura 14:



e portanto

$$\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Re}\phi(z) > 0,\ \operatorname{Re} z \in (-\alpha,\alpha),\ \operatorname{Im} z > 0 \text{ sufic. pequeno.}$$

A equação anterior nos diz que a aplicação $y \mapsto \operatorname{Re}\phi(z)$ é uma aplicação crescente, para y suficientemente pequeno. Como, com as mesmas notações, $\operatorname{Re}\phi(x) = 0$ (equação (3.55)), concluimos

$$\operatorname{Re}\phi(z) < 0,\ y > 0 \text{ sufic. pequeno, } x \in (-\alpha,\alpha). \tag{3.56}$$

De modo análogo, prova-se que

$$\operatorname{Re}\phi(z) < 0,\ y < 0 \text{ sufic. pequeno, } x \in (-\alpha,\alpha). \tag{3.57}$$

Podemos então tomar as partes superior e inferior da lente de Σ_R suficientemente próximas de $\mathbb{R}$, de modo que

$$v_R(z) \to I,\ n \to \infty,\ z \in \Sigma_R \backslash [-\alpha,\alpha].$$

Em suma, provamos que, pontualmente,

$$v_R(z) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} v^\infty,\ z \in \Sigma_R,$$

onde

$$v^\infty(z) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & z \in \mathbb{C}\backslash[-\alpha,\alpha], \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, & z \in (-\alpha,\alpha), \end{cases}$$

Como v_R, v^∞ são contínuas por partes, isto garante que $v_R \to v^\infty$ em L^2_{loc}. O problema é que v_R não converge uniformemente para v^∞, de modo que pudéssemos usar diretamente o teorema 2.5. Em vizinhanças dos pontos de interseção $\pm\alpha$, os termos exponenciais de v_R não podem ser uniformemente majorados. Deste modo, precisamos controlar v_R nos pontos $\pm\alpha$.

3.5 Construção da Parametriz Global

A *parametriz global* é a solução do RHP obtido a partir do **RHP R**, desconsiderando as partes de v_R que convergem para I. Em nosso caso particular, somos levados ao

RHP N,

RHP N – *i)* N é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash[-\alpha,\alpha]$;

RHP N – *ii)* $N_+(x) = N_-(x)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ x \in (-\alpha,\alpha)$;

RHP N – *iii)* $N(z) = I + \mathcal{O}(z^{-1}),\ z \to \infty$.

A matriz de salto do **RHP N** é diagonalizável,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix},$$

o que sugere a mudança de variáveis

$$M(z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}^{-1} N(z)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix},$$

de modo que M satisfaz o **RHP M**,

RHP M – *i)* M é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash[-\alpha,\alpha]$;

RHP M – *ii)* $M_+(x) = M_-(x)\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ x \in (-\alpha,\alpha)$,

RHP M – *iii)* $M(z) = I + \mathcal{O}(z^{-1}),\ z \to \infty$.

As condições de salto **RHP M** – *ii)* se reduzem a RHP's escalares nas entradas de M. Por exemplo, para a primeira entrada M_{11} de M,

$$(M_{11})_+(z) = i(M_{ii})_-(z).$$

Esta é exatamente a condição de salto no exemplo **RHP E**, no final do capítulo 1. Resolvendo os RHP's escalares nas entradas de M,

$$M(z) = \begin{pmatrix} \beta(z) & 0 \\ 0 & \beta(z)^{-1} \end{pmatrix} = \beta(z)^{\sigma_3},$$

onde

$$\beta(z) = \left(\frac{z-\alpha}{z+\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Voltando em N,

$$N(z) = \begin{pmatrix} \frac{\beta(z)+\beta(z)^{-1}}{2} & \frac{\beta(z)-\beta(z)^{-1}}{2i} \\ -\frac{\beta(z)-\beta(z)^{-1}}{2i} & \frac{\beta(z)+\beta(z)^{-1}}{2} \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{C}\backslash[-\alpha,\alpha]. \tag{3.58}$$

A matriz N acima é a única solução do **RHP N**. Para ver isto, basta obtermos unicidade na solução do **RHP M**, isto é, obtermos unicidade para os RHP's nas entradas de M. Mas estes RHP's escalares admitem solução única pelo discutido na seção 1.2. Observe que N também soluciona o **RHP N** no sentido L^2, pois as funções β, β^{-1} são integráveis em $\pm\alpha$.

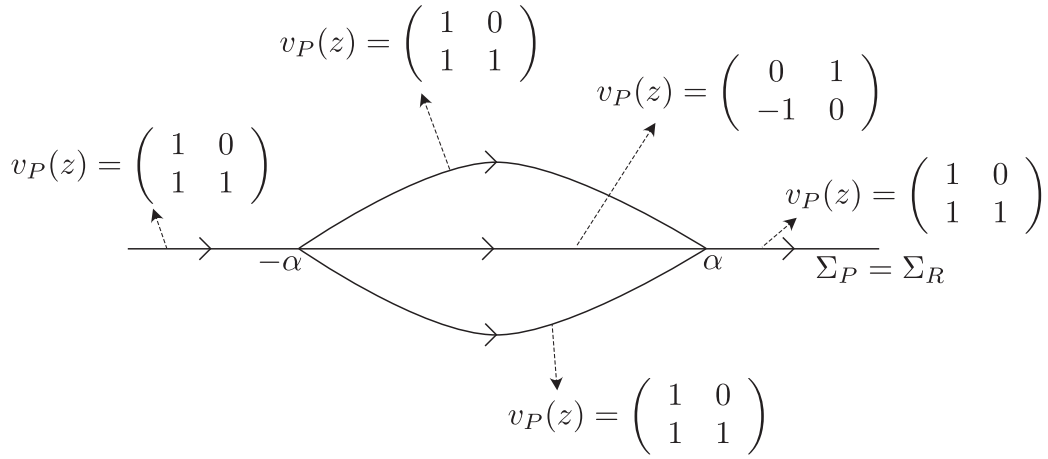
3.6 Construção da Parametriz Local

Agora nos preocuparemos em controlar o comportamento local de v_R em $z = \pm\alpha$. Primeiramente trataremos o caso $z = \alpha$. Em virtude das equações (3.51), (3.53) e de que $\phi_+ = \phi_- \pmod{2\pi i}$ em $\Sigma_R\backslash[-\alpha,\alpha]$ (recorde (3.55) para os casos não triviais),

$$v_R(z) = e^{-n\phi_-(z)\sigma_3} v_P(z) e^{n\phi_+(z)\sigma_3}, \tag{3.59}$$

onde v_P é dada sobre $\Sigma_P = \Sigma_R$ de acordo com a figura 15.

Figura 15:



Se definirmos

$$P(z) = R(z)e^{-n\phi(z)\sigma_3}, \ z \in \mathbb{C}\backslash\Sigma_R,$$

então

$$\begin{aligned} P_+(z) &= R_+(z)e^{-n\phi_+(z)\sigma_3} \\ &= R_-(z)v_R(z)e^{-n\phi_+(z)\sigma_3} \\ &= R_-(z)e^{-n\phi_-(z)\sigma_3}v_P(z) \\ &= P_-(z)v_P(z),\ z \in \Sigma_P. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Seja U_α uma vizinhança de $z = \alpha$. Pelo discutido na seção anterior, esperamos que fora de U_α, valha a convergência $R \to N$. Estamos buscando controlar o comportamento de R em U_α, mas sem perder a convergência $R \to N$ fora de U_α. Pela própria definição de P, devemos então ter $Pe^{n\phi\sigma_3} \to N$ em ∂U_α. Isto nos leva ao **RHP P**,

RHP P – *i)* P é holomorfa em $U_\alpha \backslash \Sigma_P$;

RHP P – *ii)* $P_+(z) = P_-(z)v_P(z),\ z \in \Sigma_P \cap U_\alpha$;

RHP P – *iii)* $P(z)e^{n\phi(z)\sigma_3} \sim N(z),\ z \to \partial U_\alpha$.

Para solucionar o **RHP P**, precisamos fazer uma nova deformação, desta vez levando **RHP P** de modo conforme em um novo RHP, para o qual será possível encontrar solução explícita através das funções de Airy.

A função de Airy $\mathrm{Ai}(z)$ é a única solução da EDO

$$y''(z) = zy(z)$$

com assintóticas, quando $z \to \infty$,

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \mathcal{O}\left(z^{-\frac{3}{2}}\right)\right), \tag{3.61}$$

$$\mathrm{Ai'}(z) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \mathcal{O}\left(z^{-\frac{3}{2}}\right)\right), \tag{3.62}$$

válidas para $|\arg z| < \pi$, com as potências tomadas todas sobre o ramo principal, isto é, $\arg z \in (-\pi, \pi)$.

Com $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, vale

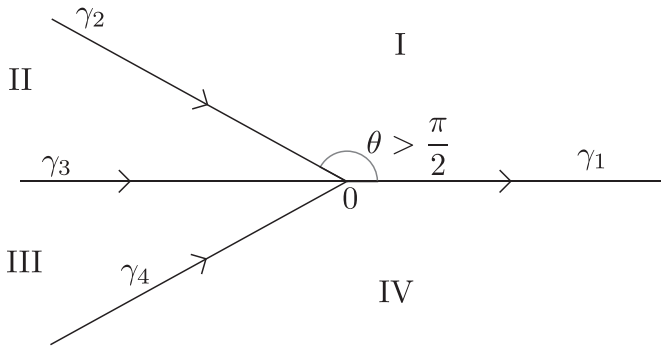
$$\mathrm{Ai}(z) + w\,\mathrm{Ai}(w\omega) + \omega^2\,\mathrm{Ai}(z\omega^2) = 0, \tag{3.63}$$

o que implica

$$\text{Ai'}(z) + \omega^2 \,\text{Ai'}(z\omega) + \omega \,\text{Ai'}(z\omega^2) = 0. \tag{3.64}$$

Considere o contorno Σ_A, obtido como união das curvas γ_j's, dadas como na figura 16 ($\gamma_2,\ \gamma_4$ são simétricas com relação ao eixo real).

Figura 16:



As curvas γ_j's dividem o plano $\mathbb{C}$ em quatro setores, a saber I, II, III, IV, conforme figura 16.

Defina

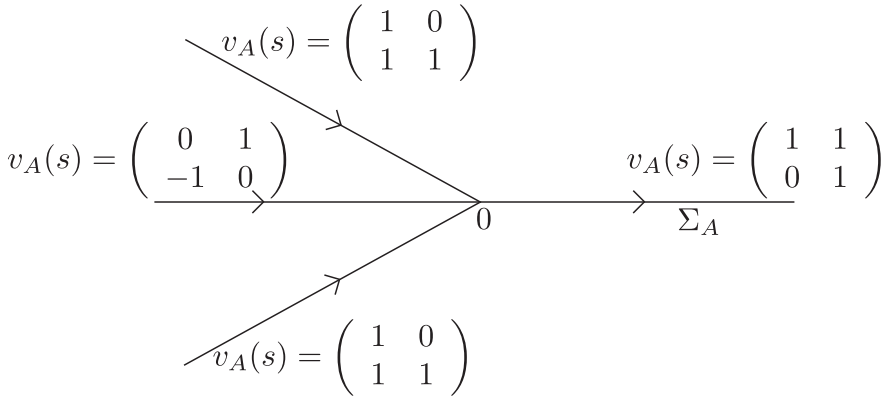
$$\Psi(s) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \text{Ai}(s) & \text{Ai}(\omega^2 s) \\ \text{Ai'}(s) & \omega^2 \,\text{Ai'}(\omega^2 s) \end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{6}\sigma_3}, & s \in \text{I}, \\ \begin{pmatrix} \text{Ai}(s) & \text{Ai}(\omega^2 s) \\ \text{Ai'}(s) & \omega^2 \,\text{Ai'}(\omega^2 s) \end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{6}\sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, & s \in \text{II}, \\ \begin{pmatrix} \text{Ai}(s) & -\omega^2 \,\text{Ai}(\omega s) \\ \text{Ai'}(s) & -\,\text{Ai'}(\omega s) \end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{6}\sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, & s \in \text{III}, \\ \begin{pmatrix} \text{Ai}(s) & -\omega^2 \,\text{Ai}(\omega s) \\ \text{Ai'}(s) & -\,\text{Ai'}(\omega s) \end{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{6}\sigma_3}, & s \in \text{IV}. \end{cases} \tag{3.65}$$

Cálculos diretos, levando em consideração (3.63) e (3.64) nos mostram

$$\Psi_+(s) = \Psi_-(s) v_A(s),\ s \in \Sigma_A, \tag{3.66}$$

onde v_A é dada sobre Σ_A como na figura 17.

Figura 17:



Voltemos agora à função ϕ definida na equação (3.46),

$$\phi(z) = m \int_\alpha^z \sqrt{t^2 - \alpha^2} h_1(t) dt, \ z \in \mathbb{C} \backslash [-\alpha, \alpha].$$

Como $m\sqrt{t+\alpha}h_1(t)$ é analítica em uma vizinhança de $t = 0$, podemos escrever

$$\begin{aligned} m\sqrt{t^2 - \alpha^2} h_1(t) &= \sqrt{t-\alpha} m\sqrt{t+\alpha} h_1(t) \\ &= \sqrt{t-\alpha} \left(m\sqrt{2\alpha} h_1(\alpha) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j (t-\alpha)^j \right). \end{aligned}$$

Para z suficientemente próximo de α, e tomando um caminho de integração também numa vizinhança pequena de α, obtemos

$$\phi(z) = \frac{2}{3}(z-\alpha)^{\frac{3}{2}} m\sqrt{2\alpha} h_1(\alpha) + \int_\alpha^z \sqrt{t-\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} a_j (t-\alpha)^j dt. \tag{3.67}$$

Definindo

$$G(z) = m\sqrt{2\alpha} h_1(\alpha) + \frac{3}{2}(z-\alpha)^{-\frac{3}{2}} \int_\alpha^z \sqrt{t-\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} a_j (t-\alpha)^j dt,$$

com o ramo de $(z-\alpha)^{\frac{3}{2}}$ tomado de modo que $(z-\alpha)^{\frac{3}{2}} > 0$ para $z \in \mathbb{R}$, $z > \alpha$ suficientemente próximo de α, então (3.67) se reescreve como

$$\phi(z) = \frac{2}{3}(z-\alpha)^{\frac{3}{2}} G(z), \ z \in B(\alpha, \epsilon) \backslash [-\alpha, \alpha], \tag{3.68}$$

para ϵ suficientemente pequeno, com G analítica em $B(\alpha, \epsilon) \backslash [-\alpha, \alpha]$, e

$$G(\alpha) = m\sqrt{2\alpha} h_1(\alpha) > 0.$$

Podemos então definir

$$\lambda(z) = (z-\alpha)G(z)^{\frac{2}{3}},\ z \in B(\alpha,\epsilon)\backslash[-\alpha,\alpha], \tag{3.69}$$

onde o ramo em $G(z)^{\frac{2}{3}}$ é tomado de modo que $G(z)^{\frac{2}{3}} > 0$, para $z \in (\alpha, \alpha+\epsilon)$ (isto é, é tomado o ramo principal, pois $G(z) > 0$ para $z \in (\alpha, \alpha+\epsilon)$.

Como G é analítica em $B(\alpha,\epsilon)$, então λ também é analítica em $B(\alpha,\epsilon)$, com $\lambda(0) = 0$, $\lambda'(\alpha) = G(\alpha)^{\frac{2}{3}} > 0$. Assim, λ é um biholomorfismo entre vizinhanças de $z = \alpha$, digamos U, e $\lambda(\alpha) = 0$, digamos V. Ainda, como $\lambda(z) \in \mathbb{R}$ para $z \in [\alpha, \alpha+\epsilon)$, então por analiticidade concluimos que $\lambda(z) \in \mathbb{R}$, para todo $z \in (\alpha-\epsilon, \alpha+\epsilon)$.

Vale a expansão

$$\begin{aligned}\lambda(\alpha+i\delta) &= i\delta(G(\alpha) + i\delta G'(\alpha) + \ldots)^{\frac{2}{3}} \\ &= i\delta(G(\alpha))^{\frac{2}{3}}(1+\mathcal{O}(\delta)) \\ &= i\delta(G(\alpha))^{\frac{2}{3}} + \mathcal{O}(\delta^2),\end{aligned}$$

e como $(G(\alpha))^{\frac{2}{3}} > 0$, então $\lambda(\alpha+i\delta) > 0$, para δ suficientemente pequeno. Isto, aliado ao fato de que λ é um biholomorfismo que leva $U \cap \mathbb{R}$ em $V \cap \mathbb{R}$, nos garante que $\lambda(U \cap \mathbb{C}_+) = V \cap \mathbb{C}_+$ e $\lambda(U \cap \mathbb{C}_-) = V \cap \mathbb{C}_-$, isto é, λ preserva o sinal de $\operatorname{Im} z$.

Escolha ϵ suficientemente pequeno, de modo que $B(0,\epsilon) \subset V$, e tome $U_\alpha = \lambda^{-1}(B(0,\epsilon))$.

A aplicação $\lambda\big|_{U_\alpha} : U_\alpha \longrightarrow B(0,\epsilon)$ é um biholomorfismo tal que $\lambda(\alpha) = 0$ e

$$\begin{aligned}&\operatorname{Im} z > 0 && \Longrightarrow && \operatorname{Im}\lambda(z) > 0; \\ &\operatorname{Im} z < 0 && \Longrightarrow && \operatorname{Im}\lambda(z) < 0; \\ &\operatorname{Im} z = 0,\ \operatorname{Re} z > \alpha && \Longrightarrow && \operatorname{Im}\lambda(z) = 0,\ \operatorname{Re}\lambda(z) > 0; \\ &\operatorname{Im} z = 0,\ \operatorname{Re} z < \alpha && \Longrightarrow && \operatorname{Im}\lambda(z) = 0,\ \operatorname{Re}\lambda(z) < 0;\end{aligned} \tag{3.70}$$

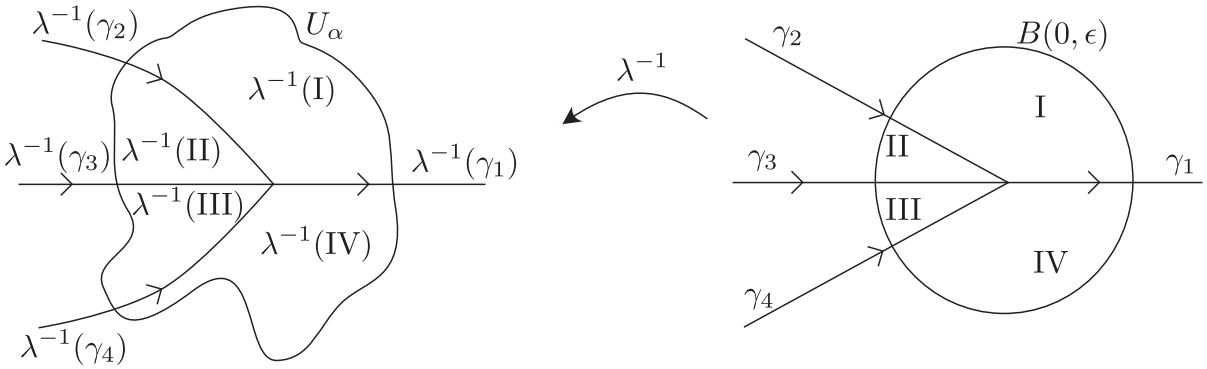
Podemos então definir $\lambda(z)^{\frac{3}{2}}$ analítica em $U_\alpha\backslash(-\infty,\alpha]$, de modo que

$$\lambda(z)^{\frac{3}{2}} > 0,\ z \in (\alpha,\infty) \cap U_\alpha. \tag{3.71}$$

Com esta escolha do ramo, e devido às equações (3.68), (3.69), (3.71) e o princípio da extensão analítica, concluimos

$$\lambda(z)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\phi(z),\ z \in U_\alpha\backslash(-\infty,\alpha].$$

Figura 18:



Ainda, como $\lambda\big|_{U_\alpha}$ é biholomorfismo satisfazendo (3.70), então $\lambda^{-1}(\Sigma_A \cap B(0,\epsilon))$ é um contorno orientado, como na figura 18.

A liberdade na abertura das lentes nos permite escolher as curvas definindo as lentes superior e inferior, isto é, definir $\Sigma_R = \Sigma_P$, de modo que

$$\lambda^{-1}(\Sigma_A \cap B(0,\epsilon)) = \Sigma_R \cap U_\alpha. \tag{3.72}$$

Vale

$$n^{\frac{2}{3}}\lambda\left(\lambda^{-1}\left(\Delta \cap U_\alpha\right)\right) \subset \Delta, \quad \Delta = \mathrm{I, II, III, IV}.$$
$$n^{\frac{2}{3}}\lambda\left(\lambda^{-1}\left(\gamma_j \cap U_\alpha\right)\right) \subset \gamma_j, \qquad j = 1,2,3,4.$$

Podemos agora realizar uma deformação local em nosso **RHP P**. Considere a aplicação

$$\Psi_P(z) = \Psi(n^{\frac{2}{3}}\lambda(z)),\ z \in U_\alpha.$$

As equações (3.66), (3.72), e o fato de λ ser um biholomorfismo satisfazendo (3.70), nos garantem

$$(\Psi_P)_+(z) = (\Psi_P)_-(z)v_P(z),\ z \in \Sigma_P \cap U_\alpha. \tag{3.73}$$

Seja $E(z)$ uma matriz analítica e inversível, a ser determinada explicitamente posteriormente, e defina

$$M_P(z) = E(z)\Psi_P(z)e^{n\phi(z)\sigma_3},\ z \in U_\alpha \backslash \lambda^{-1}(\Sigma_A \cap B(0,\epsilon)), \tag{3.74}$$

estendendo continuamente até ∂U_α.

$M_P(z)$ é analítica em $U_\alpha \backslash \Sigma_P$, e satisfaz a condição de salto (recorde (3.59))

$$(M_P)_+(z) = (M_P)_-(z)v_R(z),\ z \in \Sigma_P \cap U_\alpha \backslash \{\alpha\}. \tag{3.75}$$

Mostraremos agora que é possível escolher E de modo que $M_P \sim N$ em ∂U_α, e assim a aplicação

$$P(z) = E(z)\Psi_P(z) = M_P(z)e^{-n\phi(z)\sigma_3}, \tag{3.76}$$

será solução do nosso modelo, pois E, por ser analítica, não altera a condição de salto em (3.73).

Considere primeiramente $z \in \lambda^{-1}(\mathrm{I})$. Então $n^{\frac{2}{3}}\lambda(z) \in \mathrm{I}$. De (3.74),

$$M_P(z) = E(z) \begin{pmatrix} \mathrm{Ai}(n^{\frac{2}{3}}\lambda(z)) & \mathrm{Ai}(\omega^2 n^{\frac{2}{3}}\lambda(z)) \\ \mathrm{Ai'}(n^{\frac{2}{3}}\lambda(z)) & \omega^2\,\mathrm{Ai'}(\omega^2 n^{\frac{2}{3}}\lambda(z)) \end{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{6}\sigma_3} e^{n\phi(z)\sigma_3}.$$

A aplicação $y \mapsto \omega^2 y$ rotaciona o vetor y por um ângulo de $\frac{4\pi}{3}$. Se $z \in \lambda^{-1}(\mathrm{I})$, então $n^{\frac{2}{3}}\lambda(z)$, $\omega^2 n^{\frac{2}{3}}\lambda(z)$ pertencem a um setor da forma

$$\left\{ z \in \mathbb{C};\ -\theta_0 \leq \arg z \leq \theta_0 \pmod{2\pi i},\ \frac{\pi}{2} < \theta_0 < \pi \right\},$$

e podemos portanto usar (3.61) e (3.62) para calcular as assintóticas de M_P em $\partial U_\alpha \cap \lambda^{-1}(\mathrm{I}\,)$, pois neste caso

$$|n^{\frac{2}{3}}\omega^2\lambda(z)| = |n^{\frac{2}{3}}\lambda(z)| = n^{\frac{2}{3}}\epsilon \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Podemos então escrever

$$M_P(z) = E(z)A(z)e^{n\phi(z)\sigma_3}e^{-i\frac{\pi}{6}\sigma_3},\ z \in \partial U_\alpha \cap \lambda^{-1}(\mathrm{I}\,), \tag{3.77}$$

onde $A(z) = (A_1(z)\ A_2(z))$, cujas colunas A_1, A_2 são dadas por

$$A_1(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(n^{\frac{2}{3}}\lambda(z)\right)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}\left(n^{\frac{2}{3}}\lambda(z)\right)^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ \\ -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(n^{\frac{2}{3}}\lambda(z)\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}\left(n^{\frac{2}{3}}\lambda(z)\right)^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{pmatrix},$$

$$A_2(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\omega^2 n^{\frac{2}{3}}\lambda(z)\right)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}\left(\omega^2 n^{\frac{2}{3}}\lambda(z)\right)^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ \\ -\frac{\omega^2}{2\sqrt{\pi}} \left(\omega^2 n^{\frac{2}{3}}\lambda(z)\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}\left(\omega^2 n^{\frac{2}{3}}\lambda(z)\right)^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{pmatrix}.$$

Os ramos acima são os principais, e portanto

$$(n^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = n,\ \lambda(z)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\phi(z) \Longrightarrow e^{-\frac{2}{3}\left(n^{\frac{2}{3}}\lambda(z)\right)^{\frac{3}{2}}} = e^{-n\phi(z)}.$$

Também,

$$\begin{aligned}\left(\omega^2\lambda(z)\right)^{\frac{3}{2}} &= |\lambda(z)|^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{3}{2}(\arg\lambda(z)+\arg\omega^2)} \\ &= -|\lambda(z)|^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{3}{2}\arg\lambda(z)} \\ &= -(\lambda(z))^{\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}\phi(z),\end{aligned}$$

ou seja,

$$e^{-\frac{3}{2}\left(\omega^2 n^{\frac{2}{3}}\lambda(z)\right)^{\frac{3}{2}}} = e^{n\phi(z)}. \tag{3.78}$$

De modo análogo,

$$\left(\omega^2\lambda(z)\right)^{\frac{1}{4}} = \lambda(z)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi}{6}i}, \tag{3.79}$$

e, após alguns cálculos diretos, (3.77) se transforma em

$$M_P(z) = E(z)\frac{\left(n^{\frac{2}{3}}\lambda(z)\right)^{-\frac{\sigma_3}{4}}}{2\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} e^{-\frac{\pi}{6}i} & e^{\frac{\pi}{3}i} \\ -e^{-\frac{\pi}{6}i} & -e^{-\frac{4\pi}{3}i} \end{pmatrix} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{3.80}$$

Como queremos, em ∂U_α,

$$M_P(z) \sim N(z),$$

devemos escolher

$$E(z) = \sqrt{\pi} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \left(\frac{z-\alpha}{z+\alpha}\right)^{\frac{\sigma_3}{4}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{\pi}{6}i} & e^{\frac{\pi}{3}i} \\ -e^{-\frac{\pi}{6}i} & -e^{-\frac{4\pi}{3}i} \end{pmatrix}^{-1} \left(n^{\frac{2}{3}}\lambda(z)\right)^{\frac{\sigma_3}{4}}.$$

Em virtude da decomposição

$$\begin{pmatrix} e^{-\frac{\pi}{6}i} & e^{\frac{\pi}{3}i} \\ -e^{-\frac{\pi}{6}i} & -e^{-\frac{4\pi}{3}i} \end{pmatrix} = e^{\frac{\pi}{6}\pi} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix},$$

e da equação (3.69), podemos simplificar a expressão de E em

$$E(z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -i & -i \end{pmatrix} \left((z+\alpha)G(z)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{\sigma_3}{4}} \sqrt{\pi} e^{\frac{\pi}{6}i} n^{\frac{\sigma_3}{6}}.$$

Em suma, se escolhermos

$$E(z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -i & -i \end{pmatrix} \sqrt{\pi} e^{\frac{\pi}{6}i} n^{\frac{\sigma_3}{6}} \left((z+\alpha) G(z)^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{\sigma_3}{4}},$$

então E é uma matriz analítica e invertível em U_α, e

$$P(z) = E(z)\Psi_P(z)$$

é a solução do **RHP P**, por enquanto somente no setor $\lambda^{-1}(\mathrm{I}) \cap U_\alpha$.

Cálculos similares mostram que, com a mesma escolha de E, a matriz P é, de fato, a solução do **RHP P** em todos os setores de U_α. Ou podemos também proceder de um outro modo.

Cálculos semelhantes aos feitos para obter (3.80) mostram que

$$\Psi_P(z) e^{n\phi(z)\sigma_3} = \left(n^{\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{\sigma_3}{4}} \left(M_0(z) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n} \right) \right), \tag{3.81}$$

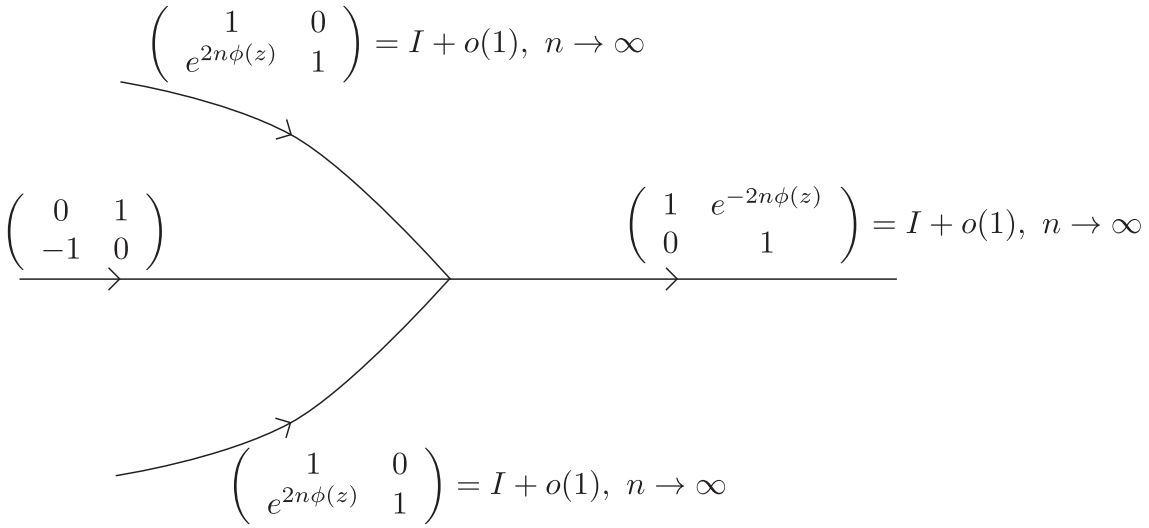
onde M_0 possui no máximo singularidade da ordem de $\frac{1}{4}$.

De (3.75) e o fato de E ser analítica invertível, concluimos

$$\left(\Psi_P(z) e^{n\phi(z)\sigma_3} \right)_+ = \left(\Psi_P(z) e^{n\phi(z)\sigma_3} \right)_- v_R(z), \ z \in \Sigma_R \cap U_\alpha, \tag{3.82}$$

onde v_R é como na figura 14, localmente dada na figura 19.

Figura 19:



Inserindo (3.81) em (3.82), e fazendo $n \to \infty$, concluimos

i) M_0 é holomorfa em $U_\alpha \backslash (-\infty, \alpha]$;

ii) $(M_0)_+(x) = (M_0)_-(x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $x \in U_\alpha \cap (-\infty, \alpha)$;

Mas N também satisfaz as propriedades *i)* e *ii)* acima, o que implica

$$(M_0 N^{-1})_+(z) = (M_0 N^{-1})_-(z), \ z \in U_\alpha \cap (-\infty, \alpha).$$

seguindo que $M_0 N^{-1}$ é holomorfa em $U_\alpha \backslash \{\alpha\}$. Como M_0, N^{-1} possuem singularidades no máximo da ordem de $\frac{1}{4}$ em α, então $M_0 N^{-1}$ possui singularidade no máximo da ordem de $\frac{1}{2}$ em α, e assim

$$\lim_{z \to \alpha} (z - \alpha) M_0(z) N^{-1}(z) = 0,$$

isto é, a singularidade de $M_0 N^{-1}$ em α é removível, e $M_0 N^{-1}$ é analítica em todo conjunto U_α.

Da forma explícita de M_0 na região $\lambda^{-1}(\mathrm{I})$ dada em (3.80), a saber

$$M_0(z) = \frac{(\lambda(z))^{-\frac{\sigma_3}{4}}}{2\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} e^{-\frac{\pi}{6}i} & e^{\frac{\pi}{3}i} \\ -e^{-\frac{\pi}{6}i} & -e^{\frac{4\pi}{3}i} \end{pmatrix},$$

vemos que

$$\det M_0(z) = \frac{e^{\frac{\pi}{6}i}}{\sqrt{\pi}} \neq 0, \ z \in \mathrm{I'} \cap U_\alpha,$$

e como $\det M_0$ é uma função holomorfa em todo aberto U_α, concluimos

$$\det M_0(z) = \frac{e^{\frac{\pi}{6}i}}{\sqrt{\pi}} \neq 0, \ z \in U_\alpha.$$

Como ainda $\det N(z) = 1$, para todo z, então a aplicação

$$E(z) = N(z) M_0^{-1}(z) (n^{\frac{2}{3}})^{\frac{\sigma_3}{4}}, \ z \in U_\alpha,$$

está bem definida, agora em todo aberto U_α, no qual ela é holomorfa e invertível.

Por fim, concluimos então que com tal escolha de E,

$$\begin{aligned} M_P(z) &= E(z)\Psi_P(z)e^{n\phi(z)\sigma_3} \\ &= N(z)M_0^{-1}(z)(n^{\frac{2}{3}})^{\frac{\sigma_3}{4}}(n^{\frac{2}{3}})^{-\frac{\sigma_3}{4}}\left(M_0(z)+\mathcal{O}(n^{-1})\right) \\ &= N(z)v_P(z),\ z\in\partial U_\alpha, \end{aligned}$$

onde definimos $v_P(z)$ sobre o contorno ∂U_α de modo que

$$v_P(z) = I + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Construimos então a matriz $P = M_P e^{-n\phi\sigma_3}$, solução do problema local **RHP P**.

Com escolhas apropriadas da função de Airy, poderíamos formular e resolver um RHP semelhante em uma vizinhança de $-\alpha$. Alternativamente, há um outro modo de fazer isso.

Sem perda de generalidade, assuma que Σ_R é invariante sob a aplicação $z\mapsto -z$. Afirmamos que, neste caso,

$$R(z) = \sigma_3 R(-z)\sigma_3.$$

De fato, defina

$$H(z) = \sigma_3 R(-z)\sigma_3.$$

Para $z\in\mathbb{R}$, $z>\alpha$,

$$H_+(z) = H_-(z)\begin{pmatrix} 1 & e^{-2n\phi(-z)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.83}$$

Independentemente do caminho de integração, vale

$$\frac{d}{dz}\left(\phi(z)-\phi(-z)\right) = m\left(\sqrt{z^2-\alpha^2}h_1(z)+\sqrt{(-z)^2-\alpha^2}h_1(-z)\right) = 0,$$

pois h_1 é um polinômio par, e a função $\sqrt{z^2-\alpha^2}$ é uma função ímpar.

Logo,

$$\phi(z) = \phi(-z) + c,$$

para alguma constante c. Cálculo de resíduos no infinito implica que

$$m\int_{\partial B(0,|z|)}\sqrt{s^2-\alpha^2}h_1(s)ds = 2m\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{s^2-\alpha^2}h_1(s)ds = 2\pi i. \tag{3.84}$$

Por outro lado, como $\sqrt{s^2-\alpha^2}h_1(s)$ é função ímpar,

$$\begin{aligned} m\int_{\Gamma_+}\sqrt{s^2-\alpha^2}h_1(s)ds &= m\int_{\Gamma_+}\sqrt{(-s)^2-\alpha^2}h_1(-s)d(-s) \\ &= m\int_{\Gamma_-}\sqrt{s^2-\alpha^2}h_1(s)ds, \end{aligned} \tag{3.85}$$

onde $\Gamma_\pm = \partial B(0,|z|)\cap\mathbb{C}_\pm$, orientadas no sentido anti-horário.

As equações (3.84) e (3.85) podem ser resumidas em

$$m\int_{\Gamma_+}\sqrt{s^2-\alpha^2}h_1(s)ds + m\int_{\Gamma_-}\sqrt{s^2-\alpha^2}h_1(s)ds = 2\pi i,$$

$$m\int_{\Gamma_+}\sqrt{s^2-\alpha^2}h_1(s)ds - m\int_{\Gamma_-}\sqrt{s^2-\alpha^2}h_1(s)ds = 0,$$

o que implica

$$m\int_{\Gamma_+}\sqrt{s^2-\alpha^2}h_1(s)ds = m\int_{\Gamma_-}\sqrt{s^2-\alpha^2}h_1(s)ds = \pi i.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \phi(-z) &= m\int_\alpha^z \sqrt{s^2-\alpha^2}h_1(s)ds + m\int_{\Gamma_+}\sqrt{s^2-\alpha^2}h_1(s)ds \pmod{2\pi i} \\ &= \phi(z)+\pi i \pmod{2\pi i}, \end{aligned}$$

e portanto $c=(2k+1)\pi i$, para algum $k\in\mathbb{Z}$. Deste modo,

$$e^{-2n\phi(-z)} = e^{-2n\phi(z)},$$

e (3.83) se reescreve como

$$H_+(z) = H_-(z)v_R(z),\ z\in(\alpha,\infty).$$

De modo análogo, obtemos

$$H_+(z) = H_-(z)v_R(z),\ z\in\Sigma_R,$$

e como ainda $H(z)\to\sigma_3 I\sigma_3$, quando $n\to\infty$, vemos que H é a única solução do **RHP R**, isto é

$$R(z) = H(z) = \sigma_3 R(-z)\sigma_3.$$

Cálculos diretos mostram que N satisfaz esta mesma simetria,

$$N(z) = \sigma_3 N(-z)\sigma_3.$$

Podemos então usar esta simetria para construir a parametriz em $-\alpha$.

Defina a vizinhança $U_{-\alpha}$ de $-\alpha$ por

$$U_{-\alpha} = -U_{\alpha},$$

e, para $z \in U_{-\alpha} \setminus (-\lambda^{-1}(\Sigma_A \cap B(0,\epsilon)))$, seja

$$M_P(z) = \sigma_3 M_P(-z)\sigma_3.$$

estendendo continuamente até o bordo ∂U_{α}.

Como

$$v_R(z) = \sigma_3 \left(v_R(z)\right)^{-1} \sigma_3,$$

então

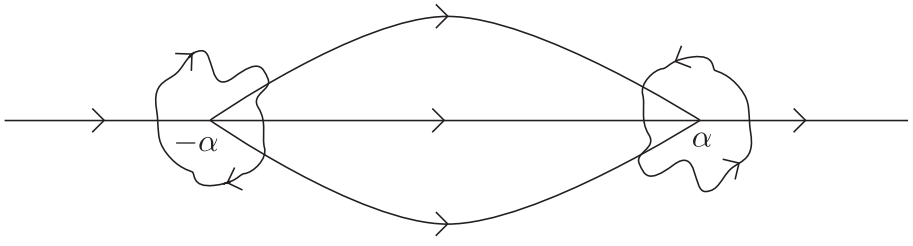
$$\begin{aligned}
(M_P)_+(z) &= \sigma_3 (M_P(-z))_+ \sigma_3 \\
&= \sigma_3 (M_P)_-(-z)\sigma_3 \\
&= \sigma_3 (M_P)_+(-z)(v_R(-z))^{-1}\sigma_3 \\
&= \sigma_3 (M_P(-z))_- \sigma_3 v_R(z) \\
&= (M_P)_-(z) v_R(z), \ z \in -\lambda^{-1}(\Sigma_A \cap B(0\epsilon))),
\end{aligned}$$

onde a orientação de $-\lambda^{-1}(\Sigma_A \cap B(0,\epsilon)))$ é a dada segundo a figura 20.

Seguindo (3.82), para $z \in \partial U_{-\alpha}$, seja

$$v_P(z) = \sigma_3 (v_P(-z))^{-1}\sigma_3 = I + \mathcal{O}(n^{-1}).$$

Figura 20:



Então, também para $z \in \partial U_{-\alpha}$, vale

$$\begin{aligned} M_P(z) &= \sigma_3 M_P(-z)\sigma_3 \\ &= \sigma_3 N(-z) v_P(-z)\sigma_3 \\ &= N(z)\sigma_3 v_P(-z)\sigma_3 \\ &= N(z)(v_P(z))^{-1} \\ &= N(z)(I + \mathcal{O}(n^{-1})). \end{aligned}$$

Seguindo estas mesmas idéias, poderíamos definir a matriz P na vizinhança $U_{-\alpha}$ de $-\alpha$. Mas, como será visto posteriormente, isto não será necessário. A matriz P e o **RHP P** nos serviu como modelo para que encontrássemos a matriz M_P, a qual é solução do **RHP** $\boldsymbol{M_P}$,

RHP $\boldsymbol{M_P}$ – *i)* M_P é holomorfa em $(U_\alpha \cup U_{-\alpha})\backslash\Sigma_S$;

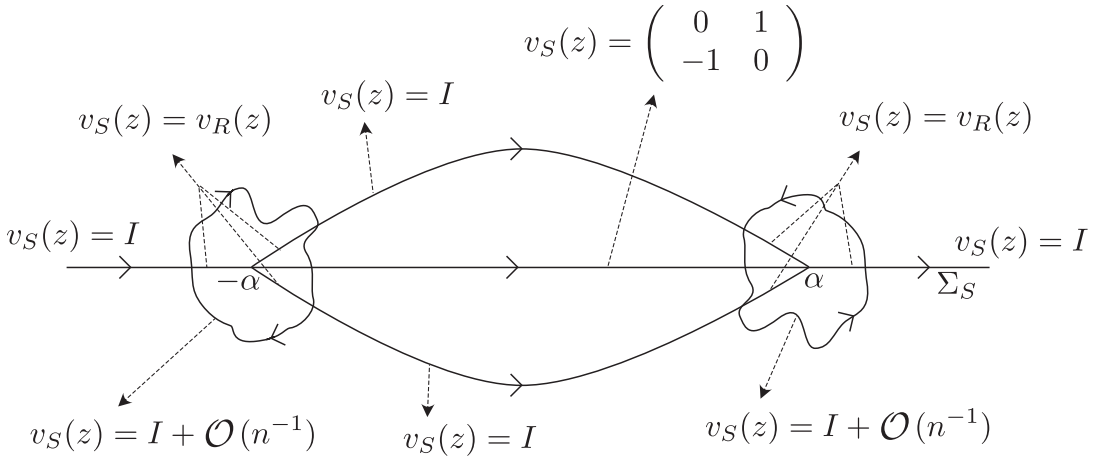
RHP $\boldsymbol{M_P}$ – *ii)* $(M_P)_+(z) = (M_P)_-(z)v_S(z),\ z \in \Sigma_S \cap (U_\alpha \cup U_{-\alpha})$;

RHP $\boldsymbol{M_P}$ – *iii)* $M_P(z) = N(z)v_S(z),\ z \in \partial U_\alpha \cup \partial U_{-\alpha}$;

onde a matriz v_S está definida sobre a curva Σ_S, sendo que $\Sigma_S = \Sigma_R \cup \partial U_\alpha \cup \partial U_{-\alpha}$, de acordo com a figura 21.

A matriz M_P, a qual controla o comportamento de R em vizinhanças de $\pm\alpha$, é chamada de *parametriz local*.

Figura 21:



3.7 Terceira Deformação: $R \mapsto L$

Podemos agora realizar a última deformação do nosso RHP central.

Seja

$$L(z) = \begin{cases} R(z)M_P^{-1}(z), & z \in (U_\alpha \cup U_{-\alpha})\backslash\Sigma_L, \\ R(z)N^{-1}(z), & z \in \mathbb{C}\backslash(U_\alpha \cup U_{-\alpha}U\Sigma_L). \end{cases}$$

onde

$$\Sigma_L = \Sigma_S = \Sigma_R \cup \partial U_\alpha \cup \partial U_{-\alpha}.$$

A princípio, já podemos afirmar que L é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\Sigma_S$, pois M_P, N são holomorfas e invertíveis (em seus respectivos domínios). Mas, mais que isto, como os saltos de R e M_P são os mesmos em $(-\alpha, \alpha)$, então para $z \in (-\alpha, \alpha)\backslash(U_\alpha \cup U_{-\alpha})$ vale

$$\begin{aligned} L_-^{-1}(z)L_+(z) &= (M_P)_-(z)R_-^{-1}(z)R_+(z)(M_P^{-1})_+(z) \\ &= (M_P)_-(z)v_R(z)(M_P^{-1})_+(z) \\ &= (M_P)_+(z)(M_P^{-1})_+(z) = I, \ z \in (-\alpha, \alpha)\backslash(U_\alpha \cup U_{-\alpha}), \end{aligned}$$

seguindo que L é analítica em toda região no interior da lente (excluindo $U_\alpha \cup U_{-\alpha}$). De modo análogo, verifica-se que L também é analítica em $U_\alpha \cup U_{-\alpha}$.

Cálculos diretos mostram que L satisfaz o **RHP L**,

RHP L – *i)* L é holomorfa em $\mathbb{C}\backslash\Sigma_L$;

RHP L – *ii)* $L_+(z) = L_-(z)v_L(z), \ z \in \Sigma_L$;

RHP L – *iii)* $L(z) = I + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right), \ z \to \infty$;

onde Σ_L, v_L são dadas de acordo com a figura 22.

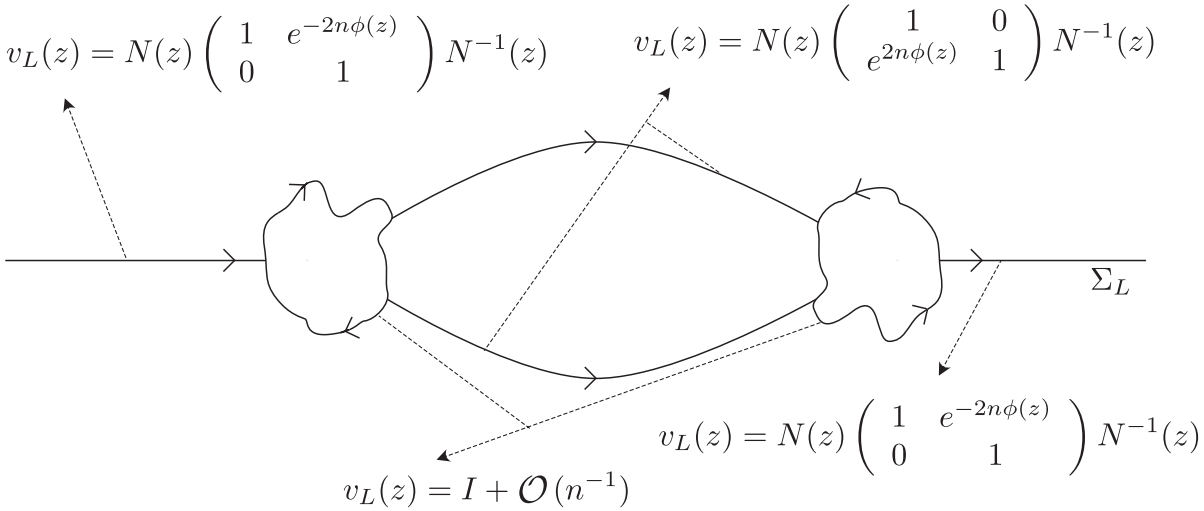
Todo o trabalho para fazer uso do teorema 2.5 está feito. Vamos agora unir todas as peças.

Como N é limitada em $\mathbb{C}\backslash(U_\alpha \cup U_{-\alpha})$, da própria definição de v_L e da equação (3.54) vemos que

$$\|v_L - I\|_\infty = \mathcal{O}(e^{-c_1 n}), \ c_1 > 0, \tag{3.86}$$

com a norma calculada em $\mathbb{R}\backslash(U_\alpha \cup U_{-\alpha} \cup (-\alpha, \alpha))$.

Figura 22:



Do mesmo modo, usando (3.56) e (3.57), vemos que

$$\|v_L - I\|_\infty = \mathcal{O}(e^{-c_2 n}),\ c_2 > 0 \tag{3.87}$$

com a norma sendo agora calculada sobre as partes superior e inferior da lente de Σ_L (excluindo U_α e $U_{-\alpha}$).

E, é claro, da construção de v_L,

$$\|v_L - I\|_\infty = \mathcal{O}(n^{-1}), \tag{3.88}$$

com a norma sendo calculada sobre $\partial U_\alpha \cup \partial U_{-\alpha}$.

Como, nas partes ilimitadas de Σ_L, v_L tem decaimento exponencial, então as estimativas (3.86), (3.87) e (3.88) implicam

$$\|v_L - I\|_{L^2(\Sigma_L)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Em suma, provamos

Teorema 3.5. *A matriz L é solução do* **RHP L**, *com*

$$\|v_L - I\|_{L^\infty \cap L^2(\Sigma_L)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Com as notações da seção 2.5, considere a fatoração trivial $v_L = (b_L)_-^{-1}(b_L)_+$, com $(b_L)_- = I$, e para a qual $(w_L)_- = 0$ e $(w_L)_+ = v_L - I$. Por simplicidade, denote $C_{w_L}^{\Sigma_L} = C_L$

e $C^{\Sigma_L} = C$.

Dada $f \in L^2(\Sigma_L)$,

$$\begin{aligned}\|C_L f\|_{L^2(\Sigma)} &= \|C_-(f(v_L - I))\|_{L^2(\Sigma_L)} \\ &\leq \|C_-\|_{\mathscr{L}(L^2(\Sigma_L))}\|f\|_{L^2(\Sigma_L)}\|v_L - I\|_{L^\infty(\Sigma)}\end{aligned}$$

Pelo teorema 3.5, podemos tomar n suficientemente grande, de modo que $\|C_L\| < 1$, e deste modo $(\mathrm{Id} - C_L)$ é um operador invertível (basta expandir em série de Neumann [65, pg. 191]). Seja $I - \mu_L$ a solução de

$$(\mathrm{Id} - C_L)(I - \mu_L) = I.$$

Pelo teorema 2.4, concluimos que a (única) solução L do **RHP L** é da forma

$$L(z) = I + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma_L} \frac{\mu_L(s)(v_L(s) - I)}{s - z} ds. \tag{3.89}$$

Pela prova do teorema 2.5,

$$\|\mu_L(s) - I\|_{L^2(\Sigma_L)} \leq c\|v_L - I\|_{L^2 \cap L^\infty(\Sigma_L)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3.90}$$

Escrevendo,

$$L(z) = I + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma_L} \frac{v_L(s) - I}{s - z} ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma_L} \frac{(\mu_L(s) - I)(v_L(s) - I)}{s - z} ds, \tag{3.91}$$

então, pela estimativa (3.90),

$$\begin{aligned}|L(z) - I| &\leq c\|v_L - I\|_{L^2(\Sigma_L)} \left(\int_{\Sigma_L} \frac{|ds|}{|s - z|}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{c}{\mathrm{dist}(z, \Sigma_L)} \int_{\Sigma_L} |\mu_L(s) - I||v_L(s) - I||ds| \\ &\leq \frac{c}{n},\end{aligned} \tag{3.92}$$

para alguma constante c que depende de z, mas pode ser tomada uniforme para $|\mathrm{Im}\, z| \geq \eta > 0$.

Provamos então que, pontualmente

$$L(z) = I + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right), \ \mathrm{Im}\, z \neq 0.$$

Agora, tomando a lente e os abertos U_α, $U_{-\alpha}$ suficientemente pequenos de modo que

z esteja na parte externa de Σ_L, então $T(z) = R(z)$ (veja seção 2.4), e observando apenas a definição de L, provamos

Teorema 3.6. *Para* $\operatorname{Im} z \neq 0$,

$$T(z) = \left(I + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) N(z),$$

com o limite acima podendo ser tomado uniforme para $|\operatorname{Im} z| \geq \eta > 0$.

3.8 Assintóticas para Polinômios Ortogonais

A partir do teorema 3.6, vamos obter assintóticas para os polinômios ortogonais associados ao peso $e^{-nV(x)}$, como prometido.

Primeiramente consideremos o caso $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Escolhendo a lente e os abertos U_α e $U_{-\alpha}$ suficientemente pequenos, como feito para obter o teorema 3.6, então diretamente da definição de T em (3.33),

$$Y(z) = e^{-n\frac{l}{2}\sigma_3} T(z) e^{n\frac{l}{2}\sigma_3} e^{ng(z)\sigma_3} \tag{3.93}$$

$$= e^{-n\frac{l}{2}\sigma_3} N(z) e^{n\frac{l}{2}\sigma_3} e^{ng(z)\sigma_3} \left(I + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{3.94}$$

Como

$$e^{-n\frac{l}{2}\sigma_3} N(z) e^{n\frac{l}{2}\sigma_3} e^{ng(z)\sigma_3} = \begin{pmatrix} \frac{\beta(z)+\beta(z)^{-1}}{2} e^{ng(z)} & \frac{\beta(z)-\beta(z)^{-1}}{2i} e^{-n(g(z)+l)} \\ -\frac{\beta(z)-\beta(z)^{-1}}{2i} e^{n(g(z)+l)} & \frac{\beta(z)+\beta(z)^{-1}}{2} e^{-ng(z)}, \end{pmatrix}$$

então, em particular

$$Y_{11}(z) = \pi_n(z) = \pi_n(z; e^{-nV(z)}) \sim \frac{1}{2}\left(\left(\frac{z-\alpha}{z+\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{z+\alpha}{z-\alpha}\right)^{\frac{1}{4}}\right) e^{ng(z)}, \ \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Podemos também obter informações assintóticas sobre outras quantidades envolvendo polinômios ortogonais.

Por exemplo, recorde o coeficiente $\gamma_n = \|\pi_n\|_{L^2(e^{nV(x)}dx)}$, dado em (2.16). Não é difícil provar que [23, pg. 47, eq. 3.28]

$$\gamma_{n-1}^2 = \frac{i}{2\pi}(Y_1^{(n)})_{21},$$

onde $Y_1^{(n)}$ é a matriz unicamente determinada pela expansão

$$Y(z) = Y^{(n)}(z) = \left(I + Y_1^{(n)} \frac{1}{z} + \mathcal{O}(z^{-2}) \right) z^{n\sigma_3}.$$

Sejam T_j's os coeficientes da expansão de Laurent de T em $z = 0$. De (3.93) concluimos

$$Y(z) = \left(I + e^{-n\frac{l}{2}\sigma_3} T_1 e^{n\frac{l}{2}\sigma_3} \frac{1}{z} + \mathcal{O}(z^{-2}) \right) e^{ng(z)\sigma_3}.$$

Usando (3.30), para z suficientemente grande, $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, \alpha]$, obtemos

$$Y(z) = \left(I + \left(e^{-n\frac{l}{2}\sigma_3} T_1 e^{n\frac{l}{2}\sigma_3} - \left(n \int_{\mathbb{R}} s\psi_V(s) ds \right) \sigma_3 \right) \frac{1}{z} + \mathcal{O}(z^{-2}) \right) z^{n\sigma_3}.$$

Pela unicidade dos coeficientes de Laurent,

$$(Y_1)_{21} = e^{nl} (T_1)_{21},$$

e assim

$$\gamma_{n-1}^2 = \frac{i}{2\pi} e^{nl} (T_1)_{21} \sim \frac{i}{2\pi} e^{nl} (N_1)_{21}. \tag{3.95}$$

Escrevendo

$$\beta(z) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{z} + \mathcal{O}(z^{-2}),$$

devemos ter, para z suficientemente grande,

$$\left(\beta_1 + \frac{\beta_2}{z} + \mathcal{O}(z^{-2}) \right)^4 = \frac{z - \alpha}{z + \alpha} = 1 - \frac{2\alpha}{z} + \mathcal{O}(z^{-2}),$$

o que nos fornece

$$\beta_0 = 1, \ \beta_1 = -\frac{\alpha}{2}.$$

Analogamente,

$$\beta(z)^{-1} = 1 + \frac{a}{2z} + \mathcal{O}(z^{-2}),$$

e assim

$$(N(z))_{21} = -\frac{\beta(z) - \beta(z)^{-1}}{2i} = \frac{\alpha}{2iz} + \mathcal{O}(z^{-2}),$$

seguindo que $(N_1)_{21} = \frac{\alpha}{2i}$, e portanto

$$\gamma_{n-1}^2 \sim \frac{\alpha}{4\pi e^{nl}}.$$

Podemos também obter assintóticas de polinômios ortogonais na reta real.

Suponha primeiramente $z_0 > \alpha$. O caso $z_0 < -\alpha$ é análogo. Diminuindo U_α se necessário, sem perda de generalidade podemos supor que $z_0 \notin U_\alpha$.

Deforme o contorno Σ_L num novo contorno $\widehat{\Sigma}_L$, como na figura 23, e sobre $\widehat{\Sigma}_L$ considere a matriz de salto $\widehat{v}_L$ dada pela figura 24, e a função $\widehat{L}$ dada de acordo com a figura 25

Figura 23:

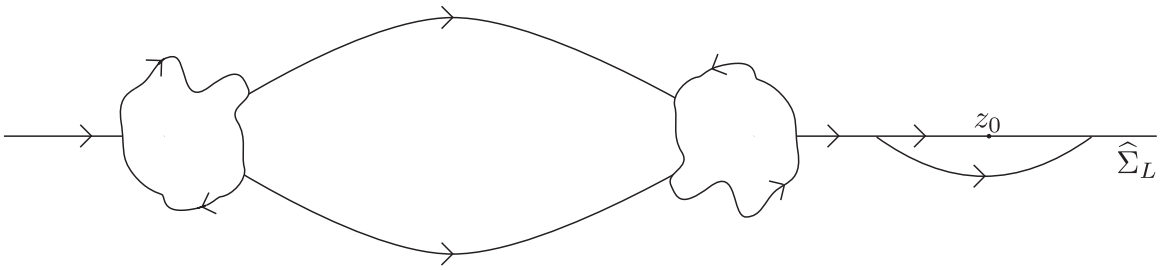


Figura 24:

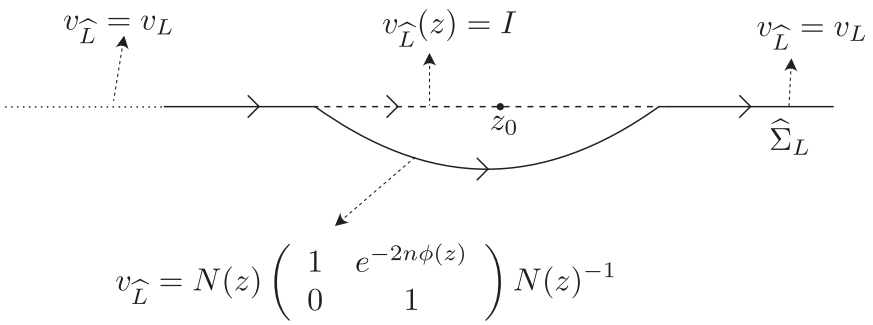
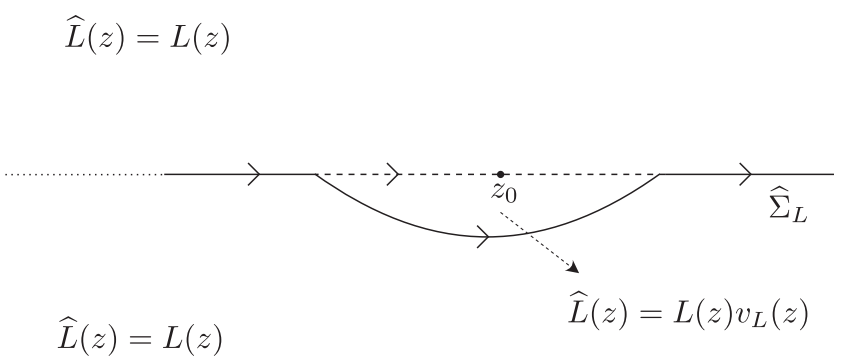


Figura 25:



$\widehat{L}$ satisfaz o problema de Riemann-Hilbert em $\widehat{\Sigma}_L$ com condição de salto $\widehat{v}_L$. Proce-

dendo como para (3.91),

$$\widehat{L}(z) = I + \frac{1}{2\pi i}\int_{\widehat{\Sigma}_L} \frac{v_{\widehat{L}}(s) - I}{s - z} ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{\widehat{\Sigma}_L} \frac{(\mu_{\widehat{L}}(s) - I)(v_{\widehat{L}}(s) - I)}{s - z} ds.$$

Como $v_{\widehat{L}} = I$ no segmento que contém z_0 (veja figura 24), então a integral acima está bem definida, e as hipóteses do teorema 2.5 continuam válidas. $\widehat{L}$ é, na realidade, holomorfa sobre aquele segmento.

De modo análogo a antes, estima-se os fatores na integral acima, obtendo

$$|\widehat{L}(z) - I| \leq \frac{c}{n},$$

com a constante c acima dependendo de z_0, assim como antes. Agora, como $\widehat{L}$ é holomorfa em z_0,

$$\begin{aligned}\widehat{L}(z_0) = \widehat{L}_+(z_0) = L_+(z_0) &= R_+(z_0)(N_+(z_0))^{-1} \\ &= T_+(z_0)(N(z_0))^{-1},\end{aligned}$$

e assim,

$$T_+(z_0) = \left(I + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) N(z_0).$$

Como $v_T = I + \mathcal{O}(e^{-cn})$, $c > 0$, para $z > \alpha$, então também vale

$$T_-(z_0) = \left(I + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) N(z_0).$$

Provamos então que (lembrando que o caso $z_0 < -\alpha$ é análogo)

$$T_+(z) = \left(I + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) N(z),\ z \in \mathbb{R}\backslash[-\alpha, \alpha],$$

$$T_-(z) = \left(I + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) N(z),\ z \in \mathbb{R}\backslash[-\alpha, \alpha].$$

Vamos agora considerar $z \in (-\alpha, \alpha)$. Como antes, suponha sem perda de generalidade que $z_0 \notin U_\alpha \cup U_{-\alpha}$.

Em (3.91), o intervalo $(-\alpha, \alpha)$ não contribui para a integral. Mesmo tomando $z \in (-\alpha.\alpha)$, continua valendo a estimativa

$$|L(z) - I| \leq \frac{c}{n},$$

mas agora não podemos tomar a constante c uniforme como antes. Caso queiramos escolher a constante c uniformemente, isto só pode ser feito em intervalos compactos de $(-\alpha, \alpha)$, e desde que fixemos a lente e os abertos U_α, $U_{-\alpha}$.

Como no intervalo $(-\alpha, \alpha)\backslash(U_\alpha \cap U_{-\alpha})$,

$$L(z) = L_\pm(z) = R_\pm(z)(N_\pm(z))^{-1},$$

ficamos com

$$R_\pm(z) = \left(I + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) N_\pm(z).$$

Mas, seguindo o discutido na seção 2.4,

$$R_+(z) = T_+(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e^{2n\phi_+(z)} & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.96}$$

$$R_-(z) = T_-(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{2n\phi_-(z)} & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.97}$$

e assim

$$T_+(z) = \left(I + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) N_+(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{2n\phi_+(z)} & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_-(z) = \left(I + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) N_-(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e^{2n\phi_-(z)} & 1 \end{pmatrix}.$$

Em particular, de (3.93),

$$\pi_n(z) = (Y_1 1(z))_+ = \left((N_+(z))_{11} + (N_+(z))_{21} e^{2n\phi_+(z)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) e^{ng_+(z)}.$$

Recorde que, por (3.36),

$$\begin{aligned} g_\pm(z) &= \int_{\mathbb{R}} \log|z-s|\psi_V(s)ds \pm i\pi \int_z^\alpha \psi_V(s)ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \log|z-s|\psi_V(s)ds \mp \phi_+(z), \end{aligned}$$

e ficamos com

$$\begin{aligned}\pi_n(z) &= \left((N_+(z))_{11} + (N_+(z))_{21}e^{2n\phi_+(z)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) e^{n\int \log|z-s|\psi_V(s)ds - \phi_+(z)} \\ &= \left((N_+(z))_{11}e^{-n\phi_+(z)} + (N_+(z))_{21}e^{n\phi_+(z)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) e^{n\int \log|z-s|\psi_V(s)ds}.\end{aligned}$$

Como $\phi_+ + \phi_- = 2k\pi i$ por (3.51), então

$$\pi_n(z) = \left((N_+(z))_{11}e^{-n\phi_+(z)} + (N_+(z))_{21}e^{-n\phi_-(z)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) e^{n\int \log|z-s|\psi_V(s)ds}. \quad (3.98)$$

Agora, relembrando que

$$(N_+(z))_{11} = \frac{\beta_+(z) + \beta_+(z)^{-1}}{2}, \quad (N_+(z))_{21} = \frac{\beta_+(z) - \beta_+(z)^{-1}}{2i},$$

e que, como $z \in (-\alpha, \alpha)$,

$$\beta_+(z) = \left|\frac{z-\alpha}{z+\alpha}\right|^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}} = |\beta_+(z)|e^{i\pi\frac{\pi}{4}},$$

então pelo feito anteriormente para $z \in \mathbb{R}\backslash[-\alpha, \alpha]$, e após cálculos diretos em (3.98), provamos

Teorema 3.7. *Para $z \in \mathbb{C}\backslash[-\alpha, \alpha]$,*

$$\pi_n(z) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{z-\alpha}{z+\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{z+\alpha}{z-\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) e^{n\int_{-\alpha}^{\alpha} \log(z-s)\psi_V(s)ds},$$

e para $z \in (-\alpha, \alpha)$

$$\begin{aligned}\pi_n(z) = \Bigg(&\left|\frac{z-\alpha}{z+\alpha}\right|^{\frac{1}{4}} \cos\left(n\pi\int_z^{\alpha}\psi_V(s)ds + \frac{\pi}{4}\right) + \\ &+ \left|\frac{z+\alpha}{z-\alpha}\right|^{\frac{1}{4}} \cos\left(n\pi\int_z^{\alpha}\psi_V(s)ds - \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\Bigg) e^{n\int_{-\alpha}^{\alpha}\log|z-s|\psi_V(s)ds}.\end{aligned}$$

CAPÍTULO 4

MATRIZES ALEATÓRIAS

Um *ensemble* de matrizes aleatórias consiste de um conjunto de matrizes e uma distribuição de probabilidade neste conjunto. Podemos enumerar vários exemplos clássicos, como

- *Ensembles de Wigner* - Matrizes simétricas reais (ou hermitianas complexas), cujas entradas (algebricamente independentes) são estatisticamente independentes.
- *Ensembles circulares* - Matrizes unitárias distribuidas de acordo com a medida de Haar no grupo unitário.
- *Ensembles IID* - Matrizes cujas entradas são independentes e identicamentes distribuidas.
- *Ensembles invariantes* - Matrizes simétricas reais (ou hermitianas complexas), cuja distribuição é invariante por conjugação ortogonal (conjugação unitária).

No presente texto, focaremos nos ensembles invariantes de matrizes hermitianas complexas, os chamados *ensembles unitários*. Todos os demais ensembles tem suas devidas importâncias e motivações, para o leitor interessado sugerimos [57].

Na seção 4.1, definiremos formalmente o ensemble unitário (UE), destacando algumas de suas propriedades básicas. Na seção 4.2, através de uma mudança de coordenadas, restringiremos nossa análise ao estudo dos autovalores dos UE's. Nas seções 4.3 e 4.4, introduziremos algumas estatísticas interessantes sobre os autovalores.

4.1 Ensembles Unitários

Seja $\mathcal{M}(n)$ o espaço das matrizes hermitianas de ordem n. Veremos $\mathcal{M}(n)$ como uma variedade real, a qual pode ser parametrizada por n^2 coordenadas, isto é, para nós $\mathcal{M}(n) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$. Considere uma distribuição de probabilidade em $\mathcal{M}(n)$ da forma

$$P_n(M)dM = ce^{-Q(M)}dM = ce^{-Q(M)} \prod_{j=1}^{n} dM_{jj} \prod_{1\leq j<k\leq n-1} \left(dM_{jk}^R dM_{jk}^I\right),$$

onde $M_{jk} = M_{jk}^R + iM_{jk}^I$, $k \neq j$, denota as partes real e imaginária de M_{jk}, c é uma constante normalizadora, de modo que a distribuição $P_n(M)dM$ seja distribuição de probabilidade, dM_{jj}, dM_{jk}^R, dM_{jk}^I denotam a medida de Lebesgue nas partes real e imaginária das entradas algebricamente independentes de M, e $Q : \mathcal{M}(n) \to \mathbb{R}$ é uma função que cresce suficientemente rápido de modo que a distribuição $P_n(M)dM$ possua todos os momentos finitos.

Por razões físicas, imponha também que $P_n(M)dM$ seja invariante por conjugação unitária - se $\widetilde{M} = UMU^*$ para alguma matriz unitária U^*, então

$$P_n(M)dM = P_n(\widetilde{M})d\widetilde{M}.$$

O cálculo espectral nos ensina que, fixada uma matriz M, existe um polinômio p, para o qual

$$Q(X) = p(X),$$

para toda matriz X, com $\sigma(X) = \sigma(M)$. Em particular, se $X = UMU^* = \widetilde{M}$, isto implica que

$$e^{-\operatorname{Tr} Q(\widetilde{M})} = e^{-\operatorname{Tr} Q(M)}.$$

Mais que isto, podemos concluir também que Q depende somente dos autovalores de M, e esta dependência é simétrica. Isto é, se $\sigma(M) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, a aplicação $q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = Q(M)$ está bem definida e satisfaz

$$q(\lambda_{\alpha(1)}, \ldots, \lambda_{\alpha(n)}) = q(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

qualquer que seja a permutação $\alpha \in S_n$.

Agora, também vale

$$dM = d\widetilde{M}.$$

De fato, pela fórmula de mudança de variáveis, basta mostrarmos que a aplicação $\phi(M) = \widetilde{M}$ é tal que

$$\left|\det \frac{\partial \phi(M)}{\partial M}\right| = 1.$$

Para ver isto, note que $\operatorname{Tr} M^2 = \operatorname{Tr} \widetilde{M}^2$, o que pode ser expresso em

$$\sum_{j=1}^{n}\left(M_{jj}^2 + 2\sum_{k=j+1}^{n}\left(\left(M_{jk}^R\right)^2 + \left(M_{jk}^I\right)^2\right)\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\widetilde{M}_{jj}^2 + 2\sum_{k=j+1}^{n}\left(\left(\widetilde{M}_{jk}^R\right)^2 + \left(\widetilde{M}_{jk}^I\right)^2\right)\right). \tag{4.1}$$

Sendo $D = (D_{jk})$ a matriz diagonal $n^2 \times n^2$ para a qual

$$D_{jj} = \begin{cases} 1, & j \leq n, \\ 2, & j > n, \end{cases}$$

e v o vetor real

$$v = \left(M_{11}, M_{22}, \ldots, M_{nn}, M_{12}^R, M_{13}^R, \ldots, M_{n-1,n}^R, M_{12}^I, \ldots, M_{n-1,n}^I\right),$$

então (4.1) pode ser reescrito como

$$v^t D v = \widetilde{v}^t D \widetilde{v}. \tag{4.2}$$

Se A é a matriz que realiza a aplicação ϕ, isto é, A é tal que

$$Av = \widetilde{v},$$

então (4.2) nos diz que A é ortogonal com relação ao produto interno induzido por D, isto é,

$$A^t D A = D,$$

seguindo

$$\left|\det \frac{\partial \phi(M)}{\partial M}\right| = |\det A| = 1.$$

Em suma, provamos então que $P_n(M)dM$ é invariante por transformações unitárias se, e somente se, $P_n(M)$ é invariante por transformações unitárias.

De particular interesse é a escolha

$$Q(M) = \operatorname{Tr} V(M),$$

com V analítica real e $V(M)$ dada pelo cálculo funcional. As distribuições da forma

$$P_n(M)dM = ce^{-\operatorname{Tr} V(M)}dM$$

são denominadas *Ensembles Unitários* (*Unitary Ensembles* - *UE*). Em particular, se $V(x) = ax^2 + bx + c,\ a > 0$, então

$$\begin{aligned} e^{-\operatorname{Tr} V(M)} &= e^{-\operatorname{Tr} aM^2+bM+c} \\ &= e^{nc}\prod_{j=1}^{n} e^{-aM_{jj}^2+bM_{jj}} \prod_{j<k} e^{-2a\left(M_{jk}^R\right)^2} \prod_{j<k} e^{-2a\left(M_{jk}^I\right)^2}, \end{aligned}$$

seguindo que as variáveis $M_{jj}, M_{jk}^R, M_{jk}^I$ são variáveis aleatórias gaussianas independentes.

Na verdade, esta é a única distribuição invariante por transformações unitárias para a qual as entradas da matriz M são variáveis aleatórias independentes [57, seção 2.6].

A escolha particular $V(M) = x^2$, que leva a

$$P_n(M)dM = ce^{-\operatorname{Tr} M^2}dM.$$

é chamada de *ensemble unitário gaussiano* (*Gaussian Unitary Ensemble* - GUE).

4.2 Integrando sobre Autovalores - Variáveis Espectrais

O objetivo principal desta seção é reduzir nosso estudo em distribuições sobre matrizes hermitianas para distribuições somente sobre os autovalores das matrizes.

No que segue, dada uma matriz $M \in \mathcal{M}(n)$, $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ denotam os autovalores de M.

Pelo teorema espectral, se $M \in \mathcal{M}(n)$, podemos decompor

$$M = U\Lambda U^*,$$

onde $\lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ e U é uma matriz unitária.

Teorema 4.1. *O conjunto das matrizes hermitianas com espectro simples (todos autovalores distintos) é aberto e denso em $\mathcal{M}(n)$, e tem medida total.*

Demonstração. Para simplificar notação, denote

$$\mathcal{M}^*(n) = \{M \in \mathcal{M}(n);\ \sigma(M) \text{ é simples}\}.$$

Dada

$$M = U\Lambda U^* \in \mathcal{M}(n),\ \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

seja

$$\Lambda_m = \text{diag}(\lambda_1 + a_{1m}, \ldots, \lambda_n + a_{nm}),$$

com o vetor $a = (a_{1m}, \ldots, a_{nm})$ tomado de modo que

$$\|a\| \to 0,\ m \to \infty, \quad \lambda_j + a_{jm} \neq \lambda_k + a_{km},\ \text{se } j \neq k.$$

Então $(U\Lambda_m U^*)$ é uma sequência de matrizes em $\mathcal{M}^*(n)$ tais que

$$U\Lambda_m U^* \to U\Lambda U^* = M,\ m \to \infty,$$

seguindo a densidade de $\mathcal{M}^*(n)$ em $\mathcal{M}(n)$.

Suponha agora que $\mathcal{M}^*(n)$ não seja aberto. Então existe uma matriz $M = U\Lambda U^*$ em $\mathcal{M}^*(n)$ e uma sequência de matrizes (M_m) em $\mathcal{M}(n)$, as quais não possuem espectro simples, tais que

$$M_m \to M,\ m \to \infty.$$

Escreva

$$M_m = U_m \Lambda_m U_m^*,$$

para matrizes unitárias U_m e matrizes diagonais $\Lambda_m = \text{diag}(\lambda_{1m}, \ldots, \lambda_{nm})$, com $\lambda_{1m} \leq \ldots \leq \lambda_{nm}$. Como as U_m's são unitárias, então a sequência (U_m) é limitada, possuindo subsequência convergente, digamos (U_{m_k}). Isto implica que a subsequência (Λ_{m_k}) também é convergente, pois $\Lambda_{m_k} = U_{m_k}^* M_{m_k} U_{m_k}$. Sejam

$$\widetilde{U} = \lim_k U_{m_k}, \quad \widetilde{\Lambda} = \lim_k \Lambda_{m_k}.$$

$\widetilde{U}$ é uma matriz unitária e Λ_{m_k} uma matriz diagonal, digamos $\widetilde{\Lambda} = \text{diag}(\widetilde{\lambda}_1, \ldots, \widetilde{\lambda}_m)$, com $\widetilde{\lambda}_1 \leq \ldots \leq \widetilde{\lambda}_m$. Mais que isto,

$$U\Lambda U^* = \lim_k M_{m_k} = \lim_k U_{m_k} \Lambda_{m_k} U_{m_k}^* = \widetilde{U}\widetilde{\Lambda}\widetilde{U}^*,$$

o que implica inicialmente que $\widetilde{U}U\Lambda U^*\widetilde{U}^* = \widetilde{\Lambda}$. Mas como os λ_j's e os $\widetilde{\lambda}_j$'s estão enumerados em ordem crescente, concluimos

$$\Lambda = \widetilde{\Lambda}.$$

Agora, denote

$$I_{ij} = \{k;\ \lambda_{ik} = \lambda_{jk}\}, i \neq j.$$

Como as matrizes M_m's não possuem espectro simples, então ao menos um dos I_{ij}'s é infinito, digamos para $i_0 \neq j_0$. Se

$$(\Lambda_l) = (\Lambda_{m_k})_{k \in I_0},$$

então a sequência $(\Lambda_l) = (\mathrm{diag}(\lambda_{1l}, \ldots, \lambda_{nl}))$ é tal que $\lambda_{i_0,l} = \lambda_{j_0,l}$, com $i_0 \neq l_0$, seguindo que o mesmo vale para o limite $\widetilde{\Lambda} = \Lambda$ de (Λ_l), isto é,

$$\lambda_{i_0} = \lambda_{j_0},\ i_0 \neq j_0,$$

o que é um absurdo, pois o espectro de M é simples. Concluimos portanto que $\mathcal{M}^*(n)$ é aberto em $\mathcal{M}(n)$.

Por fim, provemos agora que $\mathcal{M}^*(n)$ tem medida total. Considere a função discriminante

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto \Delta(x) = \prod_{k<j} (x_j - x_k)^2. \end{aligned}$$

Seja ς_j o j-ésimo polinômio simétrico elementar em n variáveis,

$$\varsigma_j(x) = \varsigma_j(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1 < \ldots < k_j} x_{k_1} \ldots x_{k_j}.$$

com $\varsigma_0(x) = 1$.

Os polinômios ς_j's são unicamente determinados pela expansão

$$\prod_{j=1}^{n}(z - x_j) = z^n - \varsigma_1(x_1, \ldots, x_n)z^{n-1} + \varsigma_2(x_1, \ldots, x_n)z^{n-2} + \ldots + (-1)^n\varsigma_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Pelo teorema fundamental das funções simétricas [5, pag. 224, teor. 13.12], existe um

polinômio em n variáveis, digamos P, para o qual

$$\Delta(x) = P(\varsigma_1(x), \ldots, \varsigma_n(x)). \tag{4.3}$$

Agora, se M é uma matriz hermitiana com autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, então as relações de Newton-Girard nos contam que existem polinômios $p_0(M), \ldots, p_n(M)$ nos coeficientes de M para os quais

$$p_j(M) = \varsigma_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_j), \quad j = 0, \ldots, n.$$

Tais polinômios são unicamente determinados por

$$\det(tI - M) = t^n - p_1(M)t^{n-1} + \ldots + (-1)^n p_n(M).$$

Portanto, a aplicação dada sobre $\mathcal{M}(n)$ por

$$\Delta(M) = P(p_1(M), \ldots, p_n(M)) = P(\varsigma_1(\lambda), \ldots, \varsigma_n(\lambda))$$

é um polinômio nas entradas de M bem definido, de classe C^∞, e que, por (4.3), satisfaz

$$\Delta(M) = 0 \iff M \notin \mathcal{M}^*(n).$$

Isto implica, em particular, que $\mathcal{M}^*(n) = \mathcal{M}(n) \backslash \Delta^{-1}(\{0\})$, e novamente podemos concluir, pela continuidade de Δ, que $\mathcal{M}^*(n)$ é aberto.

Por ora, para simplificar notação, denote $M = (M_1, \ldots, M_{n^2})$. Aplicando o algoritmo de Euclides sucessivamente para cada uma das variáveis M_j's (vendo M_j como variável, e as demais entradas M_k's como constantes), encontramos um número finito de polinômios $p_l^{(j)}(M)$'s, para os quais

$$p_l^{(j)}(M) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial p_l^{(j)}}{\partial M_j}(M) \neq 0,$$

$$\Delta(M) = \Delta(M_1, \ldots, M_{n^2}) = \prod_{l,j} p_l^{(j)}(M).$$

Os polinômios p_l's não são únicos. Porém, esta representação é suficiente para garantir que $\mathcal{M}^*(n)$ tem medida total. Denotando o conjunto de zeros de uma função f por $Z(f)$, vale a igualdade

$$Z(\Delta) = \bigcup_{j,l} Z(p_l^{(j)}),$$

e $\mathcal{M}^*(n) = \mathcal{M}(n) \backslash Z(\Delta)$. Agora, a condição $\frac{\partial p_l^{(j)}}{\partial M_j} \neq 0$ em $Z(p_l^{(j)})$ nos diz, via forma local

das submersões, que $Z(p_l^{(j)})$ é uma subvariedade de $\mathcal{M}(n) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, de dimensão $n^2 - 1$, e portanto de medida nula.

Como $Z(\Delta)$ é união finita de conjuntos de medida nula, segue que $Z(\Delta)$ tem medida nula, e portanto $\mathcal{M}^*(n)$ tem medida total. □

O teorema acima tem consequências interessantes.

Primeiro de tudo, como $\mathcal{M}^*(n)$ tem medida total, podemos reduzir integrais em todo espaço $\mathcal{M}(n)$ a integrais em $\mathcal{M}^*(n)$. Isto quer dizer, por exemplo, que estatísticas sobre $\mathcal{M}(n)$ podem ser calculadas somente sobre matrizes com espectro simples. Este fato facilita muito na prática, pois questões como continuidade e diferenciabilidade são, em geral, mais simples de serem analisadas sobre matrizes com espectro simples.

Em segundo lugar, a densidade de $\mathcal{M}^*(n)$ garante que certos resultados sobre matrizes de espectro simples podem ser diretamente estendidos a matrizes mais gerais.

Por fim, como $\mathcal{M}^*(n)$ é aberto, temos garantido que as matrizes com espectro simples formam uma subvariedade de $\mathcal{M}(n)$ e, mais que isto, conceitos topológicos como continuidade e diferenciabilidade estão definidos sobre $\mathcal{M}^*(n)$ diretamente com a topologia induzida de $\mathbb{R}^{n^2}$.

Consideremos a diagonalização $M = U\Sigma U^*$ como uma aplicação,

$$M \mapsto (\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), U),$$

no aberto denso $\mathcal{M}^*(n)$. A questão é como computar o jacobiano desta aplicação.

Definindo

$$\mathbb{R}^n_\uparrow = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1 < x_2 < \ldots < x_n\},$$

e relembrando que $U(n)$ denota o conjunto das matrizes unitárias, esta aplicação pode ser vista como uma mudança de variáveis

$$\mathcal{M}^*(n) \to \mathbb{R}^n_\uparrow \times U(n)$$
$$M \mapsto (\Lambda, U),$$

com $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$. Porém, as colunas de U não estão bem definidas. Se multiplicarmos U por uma matriz $T \in \mathbb{T}^n = \{\mathrm{diag}(e^{i\theta_1}; \ldots, e^{i\theta_n}),\ \theta \in [-\theta, \theta]\}$, obtemos

uma nova matriz unitária $\widetilde{U}$, para a qual também vale

$$M = \widetilde{U}\Lambda\widetilde{U}^*.$$

Sendo assim, o modo mais apropriado de definir a mudança de variáveis é

$$\Phi : \mathcal{M}^*(n) \to \mathbb{R}^n_\uparrow \times \left(U(n)/\mathbb{T}^n\right)$$
$$M \mapsto (\Lambda, U\mathbb{T}^n).$$

As coordenadas $\Phi(M)$ são chamadas de *variáveis espectrais*.

A fim de integração, devemos calcular o jacobiano da transformação Φ. A estrutura diferenciável considerada em $U(n)/\mathbb{T}^n$ é a induzida pela projeção canônica $\pi : U(n) \to U(n)/\mathbb{T}^n$, $\pi(U) = U\mathbb{T}^n$.

Proposição 4.1. *A aplicação $M \mapsto \Lambda(M)$, $M \in \mathcal{M}^*(n)$, é de classe C^∞.*

Demonstração. Fixe $M_0 \in \mathcal{M}^*(n)$, com autovalores $\lambda_1^{(0)} < \ldots < \lambda_n^{(0)}$. Seja $p(M,t)$ o polinômio característico de M,

$$p(M,t) = \det(tI - M) = t^n + a_{n-1}(M)t^{n-1} + \ldots + a_1(M)t + a_0.$$

A aplicação

$$\mathcal{M}^*(n) \ni M \mapsto (a_0(M), a_1(M), \ldots, a_{n-1}(M)) \in \mathbb{R}^n$$

é claramente C^∞, pois os coeficientes $a_j(M)$'s são obtidos por multiplicações e somas das entradas da matriz M (recorde que, como M é hermitiana, possui somente autovalores reais, e assim $p(M,t)$ é um polinômio real). Nossa proposição segue então se provarmos que, dado um polinômio $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0$ com zeros distintos, seus zeros são funções de classe C^∞ dos coeficientes.

Seja então

$$p(a,t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0,\ (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = a \in \mathbb{R}^n$$

um polinômio com zeros distintos. Considere a equação

$$p(a,t) = 0.$$

Sendo t_j um zero de p, como

$$\frac{\partial p}{\partial t}(a, t_j) \neq 0,$$

pois t_j é um zero simples, então pelo teorema da função implícita, existe uma aplicação de classe C^∞, digamos $\xi_j : B \subset \mathbb{R}^n \to B_j \subset \mathbb{R}$, B_j vizinhança de a, para a qual

$$p(a, \xi_j(a)) = 0.$$

Isto quer dizer que cada zero simples t_j de p pode ser visto como uma função ξ_j de classe C^∞ dos coeficientes, como queríamos. □

Proposição 4.2. *A aplicação $M \mapsto U(M)\mathbb{T}^n$ é de classe C^∞.*

Demonstração. Dada uma matriz $M_0 \in \mathcal{M}^*(n)$, com autovalores $\lambda_1(M_0) < \ldots, \lambda_n(M_0)$, e autovetores associados $u_1(M_0), \ldots, u_n(M_0)$, seja B_j uma vizinhança de $\lambda_j(M_0)$ em $\mathbb{C}$, para a qual $\lambda_k(M_0) \notin B_j$, se $k \neq j$. Pelo cálculo funcional [67, teor. XII.4, pg. 8], a aplicação

$$P(M) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{B_j} \frac{ds}{s - M}$$

é uma aplicação analítica complexa, e portanto C^∞ real, tal que

$$u_j(M) = \frac{1}{\langle P(M)u_j(M_0), u_j(M_0)\rangle^{\frac{1}{2}}} P(M)u_j(M_0)$$

é autovetor unitário associado ao autovalor (simples) $\lambda_j(M)$ de M.

Assim, conseguimos definir localmente uma aplicação $M \mapsto u_j(M)$, de classe C^∞, com $u_j(M)$ um autovetor unitário associado ao autovalor $\lambda_j(M)$ de M.

Se definirmos $M \mapsto U(M)$, onde $U(M)$ é a matriz unitária cuja j-ésima coluna é $u_j(M)$, então $U(M)$ é uma aplicação de classe C^∞, definida numa vizinhança de M_0, para a qual

$$M = U(M)\Lambda(M)U(M)^*.$$

O grande problema de estender a aplicação $U(M)$ globalmente é que, ao partirmos de duas matrizes M_0 e M_1, definindo duas aplicações $U_0(M)$ e $U_1(M)$ em vizinhanças de U_0 e U_1, pode ser que, para uma matriz M que esteja nas vizinhanças de M_0 e M_1, as matrizes $U_0(M)$ e $U_1(M)$ sejam distintas. Isto é evitado se considerarmos $M \mapsto U(M)\mathbb{T}^n$,

isto é, se fizermos

$$\begin{aligned}\widetilde{U} : \mathcal{M}^*(n) &\to {}^{U(n)}\!/_{\mathbb{T}^n} \\ M &\mapsto \widetilde{M} = \pi \circ U(M)\end{aligned}$$

onde U é a aplicação construida acima numa vizinhança de M, e π é a projeção canônica.

A aplicação acima está bem definida e é de classe C^∞, pois é composta de aplicações C^∞, como queríamos. □

As proposições 4.1 e 4.2 nos garantem que a função Φ é de classe C^∞. Provaremos agora que, mais que isto, Φ é um difeomorfismo. Para isto, construiremos explicitamente sua inversa.

Pela teoria geral de grupos de Lie [76, teor. 3.58, pg. 120, teor. 3.64, pg. 124], dado $\widetilde{U}_0 = U_0\mathbb{T}^n \in U(n)/\mathbb{T}^n$, existem uma vizinhança $W \subset U(n)/\mathbb{T}^n$ de U_0 e uma aplicação $\tau = \tau_{\widetilde{U}_0} : W \to U(n)$ de classe C^∞ tal que $\pi \circ \tau = id$.

Defina

$$\begin{aligned}\Psi : \mathbb{R}^n_\uparrow \times \left({}^{U(n)}\!/_{\mathbb{T}^n}\right) &\to \mathcal{M}^*(n) \\ (\lambda, \widetilde{U}) &\mapsto M = \tau(\widetilde{U})\Lambda(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\tau(\widetilde{U})^*,\end{aligned}$$

onde τ é qualquer secção local definida em uma vizinhança de $\widetilde{U}$, e $\Lambda(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

A aplicação Ψ está bem definida, pois se τ_1, τ_2 são duas secções locais distintas em $\widetilde{U}$, então existe $T \in \mathbb{T}^n$ tal que

$$\tau_1(\widetilde{U}) = \tau_2(\widetilde{U})T.$$

Como T é uma matriz diagonal, então T comuta com toda matriz diagonal. Mais que isto, $TT^* = I$, o que implica

$$\begin{aligned}\tau_1(\widetilde{U})\Lambda\tau_1(\widetilde{U})^* &= \tau_2(\widetilde{U})T\Lambda T^*\tau_2(\widetilde{U})^* \\ &= \tau_2(\widetilde{U})\Lambda TT^*\tau_2(\widetilde{U})^* \\ &= \tau_2(\widetilde{U})\Lambda\tau_2(\widetilde{U})^*.\end{aligned}$$

Ψ é de classe C^∞, pois τ, Λ são aplicações de classe C^∞.

Cálculos diretos mostram que $\Psi = \Phi^{-1}$, e portanto, como Ψ é diferenciável, Φ é difeomorfismo. Em particular, $\det d\Psi, \det d\Phi \neq 0$.

Prossigamos agora com o cálculo do jacobiano de Ψ, $\frac{\partial M}{\partial(\Lambda,\widetilde{U})}$.

Fixe $M_0 = U_0\Lambda_0 U_0^*$, $U_0\mathbb{T}^n = \widetilde{U}_0$. Seja

$$\mathbb{R}^l \ni (p_1,\ldots,p_l) \mapsto \widetilde{U}(p_1,\ldots,p_l) \in {}^{U(n)}\!/_{\mathbb{T}^n}$$

carta local em $\widetilde{U}_0$ para $\sum p_j^2 < \epsilon^2$, com $\widetilde{U}(0) = \widetilde{U}_0$, ϵ tomado suficientemente pequeno de modo que $\widetilde{U}(p)$ pertença ao domínio da secção local em U_0, para todo p. Como τ é difeomorfismo local, então $\tau\circ\widetilde{U} = U$ é carta local em $\tau(\widetilde{U}_0) = U_0$, e a aplicação

$$(\lambda,p) \mapsto M(\lambda,p) = U(p)\Lambda(\lambda)U(p)^*,\ \lambda\in\mathbb{R}^n_\uparrow,\ p\in B(0,\epsilon), \tag{4.4}$$

é carta local em um aberto

$$O_0 = \Phi^{-1}\left(\left\{(\Lambda(\lambda),\widetilde{U}(p)) \in \mathbb{R}^n_\uparrow \times \left({}^{U(n)}\!/_{\mathbb{T}^n}\right);\ \lambda_1 < \ldots < \lambda_n,\ p\in B(0,\epsilon)\right\}\right),$$

contendo M_0.

Diferenciando em (4.4),

$$\frac{\partial M}{\partial\lambda_j} = U\frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda_j}U^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U^*\frac{\partial M}{\partial\lambda_j}U = \frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda_j}, \tag{4.5}$$

e também

$$\frac{\partial M}{\partial p_k} = \frac{\partial U}{\partial p_k}\Lambda U^* + U\Lambda\frac{\partial U^*}{\partial p_k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U^*\frac{\partial M}{\partial p_k}U = U^*\frac{\partial U}{\partial p_k}\Lambda + \Lambda\frac{\partial U^*}{\partial p_k}U. \tag{4.6}$$

Como U é unitária, então

$$U^*U = I \ \Rightarrow\ -\frac{\partial U^*}{\partial p_k}U = U^*\frac{\partial U}{\partial p_k},$$

seguindo que

$$\left(U^*\frac{\partial U}{\partial p_k}\right)^* = -U^*\frac{\partial U}{\partial p_k},$$

isto é, $S_k = U^* \frac{\partial U}{\partial p_k}$ é anti-hermitiana. Voltando em (4.6),

$$\begin{aligned} U^* \frac{\partial M}{\partial p_k} U &= U^* \frac{\partial U}{\partial p_k} \Lambda - \Lambda U^* \frac{\partial U}{\partial p_k} \\ &= S_k \Lambda - \Lambda S_k \\ &= [S_k, \Lambda]. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Dada uma matriz $M \in \mathcal{M}(n)$, denote por $\vec{M}$ o vetor de $\mathbb{R}^{n^2}$ formado pelas entradas de M,

$$\vec{M} = \big(M_{11}, M_{22}, \ldots, M_{nn}, M_{12}^R, M_{12}^I, \ldots, \underbrace{M_{jk}^R, M_{jk}^I}_{j<k}, \ldots, M_{n-1,n}^R, M_{n-1,n}^I\big) \in \mathbb{R}^{n^2},$$

Isto define uma bijeção $\mathcal{M}(n) \ni M \mapsto \vec{M} \in \mathbb{R}^{n^2}$. Fixada $U \in U(n)$, defina o operador linear de conjugação

$$\begin{aligned} L_U : \mathcal{M}(n) &\to \mathcal{M}(n) \\ M &\mapsto U^* M U \end{aligned}$$

e a aplicação linear

$$\begin{aligned} \vec{L}_U : \mathbb{R}^{n^2} &\to \mathbb{R}^{n^2} \\ \vec{M} &\mapsto \overrightarrow{L_U(M)}. \end{aligned}$$

Denotando

$$\frac{\partial M}{\partial \lambda_j} = M_{\lambda_j}, \ \frac{\partial M}{\partial p_k} = M_{p_k}, \ \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_j} = \Lambda_{\lambda_j},$$

as equações (4.7) e (4.5) podem ser expressas em

$$\Big(\vec{L}_U \vec{M}_{\lambda_1}, \ldots, \vec{L}_U \vec{M}_{\lambda_n}, \vec{L}_U \vec{M}_{p_1}, \ldots, \vec{L}_U \vec{M}_{p_l}\Big) = \Big(\vec{\Lambda}_{\lambda_1}, \ldots, \vec{\Lambda}_{\lambda_n}, \overrightarrow{[S_1, \Lambda]}, \ldots, \overrightarrow{[S_l, \Lambda]}\Big), \tag{4.8}$$

onde os vetores acima estão sendo considerados como vetores coluna, isto é, as expressões nos lados direito e esquerdo são matrizes $n^2 \times n^2$ (lembrando que $n + l = n^2$).

Isto nos leva a considerar uma extensão de L_U sobre o espaço $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$ das matrizes $n^2 \times n^2$,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{L}_U} : \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} &\to \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \\ (\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_{n^2}) &\mapsto (\overrightarrow{UA_1U^*}, \ldots, \overrightarrow{UA_{n^2}U^*}), \end{aligned}$$

onde estamos representando uma matriz $n^2 \times n^2$ como um vetor cujas entradas são seus vetores coluna $\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_{n^2}$.

Podemos então reescrever (4.8),

$$\vec{\mathcal{L}_U}\left(\vec{M}_{\lambda_1}, \ldots, \vec{M}_{\lambda_n}, \vec{M}_{p_1}, \ldots, \vec{M}_{p_l}\right) = \left(\vec{\Lambda}_{\lambda_1}, \ldots, \vec{\Lambda}_{\lambda_n}, \overrightarrow{[S_1, \Lambda]}, \ldots, \overrightarrow{[S_l, \Lambda]}\right). \tag{4.9}$$

Sobre $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2}$, defina o produto interno

$$\langle (\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_{n^2}), (\vec{B}_1, \ldots, \vec{B}_{n^2}) \rangle = \mathrm{Tr}(A_1 B_1^* + \ldots + A_{n^2} B_{n^2}^*).$$

Com este produto interno, a aplicação linear $\vec{\mathcal{L}_U}$ é ortogonal pois, como $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$, quaisquer que sejam as matrizes quadradas M, N, então

$$\begin{aligned}
\langle \vec{\mathcal{L}_U}(\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_{n^2}), \vec{\mathcal{L}_U}(\vec{B}_1, \ldots, \vec{B}_{n^2}) \rangle &= \mathrm{Tr}\left(U A_1 B_1^* U^* + \ldots + U A_{n^2} B_{n^2}^* U^*\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(U \left(A_1 B_1^* + \ldots + A_{n^2} B_{n^2}^*\right) U^*\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(U^* U \left(A_1 B_1^* + \ldots + A_{n^2} B_{n^2}^*\right)\right) \\
&= \mathrm{Tr}\left(A_1 B_1^* + \ldots + A_{n^2} B_{n^2}^*\right) \\
&= \langle (\vec{A}_1, \ldots, \vec{A}_{n^2}), (\vec{B}_1, \ldots, \vec{B}_{n^2}) \rangle.
\end{aligned}$$

Isto implica em particular que

$$|\det \vec{\mathcal{L}_U}| = 1,$$

e assim, por (4.9)

$$|\det d\Psi| = \left|\det\left(\vec{M}_{\lambda_1}, \ldots, \vec{M}_{\lambda_n}, \vec{M}_{p_1}, \ldots, \vec{M}_{p_l}\right)\right| = \left|\det\left(\vec{\Lambda}_{\lambda_1}, \ldots, \vec{\Lambda}_{\lambda_n}, \overrightarrow{[S_1, \Lambda]}, \ldots, \overrightarrow{[S_l, \Lambda]}\right)\right|.$$

Usamos o fato de que se um operador é ortogonal, então o módulo do seu determinante é 1. Apesar de em geral estudarmos ortogonalidade (de operadores de dimensão finita) e determinantes com relação ao produto interno usual de $\mathbb{R}^m$, o determinante de um operador independe do produto interno tomado, isto é, se um operador (sobre dimensão finita) é ortogonal com relação a um produto interno qualquer em $\mathbb{R}^m$, então o módulo do determinante deste operador é necessariamente 1 [46, cap. III,§ 6,cap. IX,§ 9].

Vamos agora calcular o lado direito da expressão acima.

Note que

$$\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\lambda_i}\right)_{jk} = \frac{\partial\lambda_j}{\partial\lambda_i}\delta_{jk} = \delta_{ij}\delta_{jk}$$

$$\begin{aligned}([S_i,\Lambda])_{jk} &= (S_i\Lambda)_{jk} - (\Lambda S_i)_{jk}\\ &= (S_i)_{jk}\lambda_k - (S_i)_{jk}\lambda_j\\ &= (S_i)_{jk}(\lambda_k - \lambda_j).\end{aligned}$$

Deste modo, sendo I_{nn} a matriz identidade $n\times n$,

$$\det\left(\vec{\Lambda}_{\lambda_1},\ldots,\vec{\Lambda}_{\lambda_n},\overrightarrow{[S_1,\Lambda]},\ldots,\overrightarrow{[S_l,\Lambda]}\right) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} I_{nn} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & (\lambda_2-\lambda_1)\dfrac{\partial S^R_{12}}{\partial p_1} & \cdots & (\lambda_2-\lambda_1)\dfrac{\partial S^R_{12}}{\partial p_l}\\ 0 & (\lambda_2-\lambda_1)\dfrac{\partial S^I_{12}}{\partial p_1} & \cdots & (\lambda_2-\lambda_1)\dfrac{\partial S^I_{12}}{\partial p_l}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & (\lambda_n-\lambda_{n-1})\dfrac{\partial S^I_{n-1,n}}{\partial p_1} & \cdots & (\lambda_n-\lambda_{n-1})\dfrac{\partial S^I_{n-1,n}}{\partial p_l}\end{pmatrix}$$

$$= \prod_{j<k}(\lambda_k-\lambda_j)^2\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial S^R_{12}}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial S^R_{12}}{\partial p_l}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial S^I_{n-1,n}}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial S^I_{n-1,n}}{\partial p_l}\end{pmatrix}$$

O teorema de mudança de variáveis aplicado a mudança de variáveis Φ nos conta então que

$$ce^{-\operatorname{Tr}Q(M)}dM = e^{-\sum_{j=1}^n Q(\lambda_j)}\prod_{j<k}(\lambda_k-\lambda_j)^2 f_u(p)d^n\lambda d^l p,$$

na vizinhança O_0 de M_0, onde

$$f_u(p) = \left|\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial S^R_{12}}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial S^R_{12}}{\partial p_l}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial S^I_{n-1,n}}{\partial p_1} & \cdots & \dfrac{\partial S^I_{n-1,n}}{\partial p_l}\end{pmatrix}\right|$$

é uma aplicação positiva que depende somente das variáveis unitárias $p = (p_1, \ldots, p_l)$.

Denote

$$\widehat{Z}_n = \int_{\lambda_1 < \ldots < \lambda_n} e^{-\sum_{j=1}^n Q(\lambda_j)} \prod_{j<k} (\lambda_j - \lambda_k)^2 d^n\lambda.$$

Todos os cálculos feitos nos permitem concluir

Teorema 4.2. *Seja $F : \mathcal{M}(n) \to \mathbb{R}$ uma função limitada tal que*

$$F(M) = F(UMU^*), \ \forall\ U \in U(n), \ \forall\ M \in \mathcal{M}(n).$$

Defina

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto F(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)),$$

de modo que f é uma função simétrica, isto é,

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = f(\lambda_{\sigma(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma(n)})$$

para toda permutação σ de n elementos.

Vale

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(F) &= \int F(M) P_n(M) dM \\
&= \frac{1}{\widehat{Z}_n} \int_{\lambda_1 < \ldots < \lambda_n} f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) e^{-\sum_{j=1}^n Q(\lambda_j)} \prod_{j<k} (\lambda_k - \lambda_j)^2 d\lambda_1 \ldots d\lambda_n \\
&= \frac{1}{n! \widehat{Z}_n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) e^{-\sum_{j=1}^n Q(\lambda_j)} \prod_{j<k} (\lambda_k - \lambda_j)^2 d\lambda_1 \ldots d\lambda_n
\end{aligned}$$

Demonstração. Em suma, os cálculos anteriores nos mostram que, fixada uma matriz $U_0 \in U(n)$, existem uma carta local em U_0, $U(p_1, \ldots, p_l)$, definida sobre $B(0, \epsilon)$, com $U(0, \ldots, 0) = U_0$, uma vizinhança

$$O_{\widehat{U}_0} = \{\widetilde{U}(p_1, \ldots, p_l);\ \|p\| < \epsilon,\ \widetilde{U}(0, \ldots, 0) = \widetilde{U}_0\} \subset U(n)/\mathbb{T}^n$$

de $\widetilde{U}_0$, uma secção local $\tau = \tau_0 : O_{\widehat{U}_0} \to U(n)$, tais que

$$U(p_1, \ldots, p_l) = \tau(\widehat{U}(p_1, \ldots, p_l)).$$

Como $U(n)$ é compacto, então $U(n)/\mathbb{T}^n$ é compacto. Assim, a cobertura aberta $\{O_{\widehat{U}}\}_{\widehat{U}\in U(n)/\mathbb{T}^n}$ de $U(n)/\mathbb{T}^n$ admite subcobertura finita, digamos $\{O_{\widehat{U}_1},\ldots,O_{\widehat{U}_m}\}$.

Seja $(\phi_j)_{1\leq j\leq m}$ partição da unidade subordinada a cobertura $\{O_{\widehat{U}_1},\ldots,O_{\widehat{U}_m}\}$, isto é, as funções $\phi_j : U(n)/\mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ são tais que

- $\operatorname{supp}\phi_j \subset O_{\widehat{U}_j}$;
- $\phi_j(\widetilde{U}) \geq 0,\ \forall\ \widetilde{U} \in {}^{U(n)}\!/_{\mathbb{T}^n}$;
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \phi_j(\widetilde{U}) = 1,\ \forall\ \widetilde{U} \in {}^{U(n)}\!/_{\mathbb{T}^n}$.

Seja $\widetilde{U}(M)$ a projeção na segunda coordenada de Φ, construida na proposição 4.2. Como $\mathcal{M}^*(n)$ tem medida total e Ψ é difeomorfismo,

$$\begin{aligned} c\int_{\mathcal{M}(n)} F(M)e^{-\operatorname{Tr}Q(M)}dM &= c\int_{\mathcal{M}^*(n)} F(M)e^{-\operatorname{Tr}Q(M)}dM \\ &= c\int_{\mathcal{M}^*(n)} F(M)\left(\sum_{j=1}^{n}\phi_j(\widetilde{U}(M))\right)e^{-\operatorname{Tr}Q(M)}dM \\ &= c\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathcal{M}^*(n)} F(M)\phi_j(\widetilde{U}(M))e^{-\operatorname{Tr}Q(M)}dM \\ &= c\sum_{j=1}^{n}\int_{\Psi\left({}^{U(n)}\!/_{\mathbb{T}^n}\right)} F(M)\phi_j(\widetilde{U}(M))e^{-\operatorname{Tr}Q(M)}dM \quad (4.10) \end{aligned}$$

Agora, como Ψ é difeomorfismo entre $U(n)/\mathbb{T}^n$ e $\mathcal{M}^*(n)$, é em particular difeomorfismo entre os abertos

$$B_j = \mathbb{R}^n_{\uparrow} \times \left\{\widetilde{U} \in {}^{U(n)}\!/_{\mathbb{T}^n};\ \phi_j(\widetilde{U}) > 0\right\} = \mathbb{R}^n_{\uparrow} \times \phi_j^{-1}((0,\infty))$$

e

$$C_j = \left\{M \in \mathcal{M}^*(n);\ \phi_j(\widetilde{U}(M)) > 0\right\} = (\phi\circ\widetilde{U})^{-1}((0,\infty)).$$

De fato, precisamos apenas provar que $\Psi(B_j) = C_j$.

Se $(\Lambda_0,\widetilde{U}_0) \in B_j$, então $\Psi(\Lambda_0,\widetilde{U}_0) = U_0\Lambda_0U_0^* = M_0$, onde U_0 é qualquer elemento de $\widetilde{U}_0 = U_0\mathbb{T}^n$. Logo, $\widetilde{U}(M_0) = \widetilde{U}_0$, seguindo que $\phi_j(\widetilde{U}(M_0)) = \phi_j(\widetilde{U}_0) > 0$. Daí, $M_0 \in C_j$.

Por outro lado, se $M_0 = U_0\Lambda_0U_0^* \in C_j$, então trivialmente $\Lambda_0 \in \mathbb{R}^n_{\uparrow}$. Como $\widetilde{U}(M) = \widetilde{U}_0$, então $\phi_j(\widetilde{U}_0) = \phi_j(\widetilde{U}(M)) > 0$, e portanto $\Psi^{-1}(M_0) = (\Lambda_0,\widetilde{U}_0) \in B_j$.

Assim, podemos aplicar a fórmula de mudança de variáveis em cada uma das integrais à direita em (4.10),

$$\begin{aligned}
&\int_{\Psi\left(U(n)/\mathbb{T}^n\right)} F(M)\phi_j(\widetilde{U}(M))e^{-\operatorname{Tr}Q(M)}dM = \\
&\qquad = \int_{\Psi(B_j)} F(M)\phi_j(\widetilde{U}(M))e^{-\operatorname{Tr}Q(M)}dM \\
&\qquad = \int_{B_j} F(\Psi(\Lambda,\widetilde{U}))\phi_j(\widetilde{U}(\Psi(\Lambda,\widetilde{U})))e^{-\operatorname{Tr}Q(\Psi(\Lambda,\widetilde{U}))}\prod_{j<k}(\lambda_k-\lambda_j)^2 f_u(p)d^n\lambda d^l p \\
&\qquad = \int_{B_j} f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\phi_j(\widetilde{U})e^{-\sum_{j=1}^n Q(\lambda_j)}\prod_{j<k}(\lambda_k-\lambda_j)^2 f_u(p)d^n\lambda d^l p \\
&\qquad = \int_{\|p\|<\epsilon}\phi_j(\widetilde{U}(p))f_u(p)d^l p\int_{\mathbb{R}^n_\uparrow} f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)e^{-\sum_{j=1}^n Q(\lambda_j)}\prod_{j<k}(\lambda_k-\lambda_j)^2 d^n\lambda
\end{aligned}$$

Voltando em (4.10),

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(F) &= c\int_{\mathbb{R}^n_\uparrow} f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)e^{-\sum_{j=1}^n Q(\lambda_j)}\prod_{j<k}(\lambda_k-\lambda_j)^2 d^n\lambda\left(\sum_{j=1}^n\int_{\|p\|<\epsilon}\phi_j(\widetilde{U}(p))f_u(p)d^l p\right) \\
&= c\int_{\lambda_1<\ldots<\lambda_n} f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)e^{-\sum_{j=1}^n Q(\lambda_j)}\prod_{j<k}(\lambda_k-\lambda_j)^2 d^n\lambda\left(\sum_{j=1}^n\int_{\|p\|<\epsilon}\phi_j(\widetilde{U}(p))f_u(p)d^l p\right).
\end{aligned}$$

Fazendo $F=1$, obtemos

$$c\sum_{j=1}^n\int_{\|p\|<\epsilon}\phi_j(\widetilde{U}(p))f_u(p)d^l p = \widehat{Z}_n^{-1},$$

e portanto

$$\mathbb{E}(F) = \frac{1}{\widehat{Z}_n}\int_{\lambda_1<\ldots<\lambda_n} f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)e^{-\sum_{j=1}^n Q(\lambda_j)}\prod_{j<k}(\lambda_k-\lambda_j)^2 d^n\lambda.$$

Como

$$f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)e^{-\sum_{j=1}^n Q(\lambda_j)}\prod_{j<k}(\lambda_k-\lambda_j)^2 = f(\lambda_{\sigma(1)},\ldots,\lambda_{\sigma(n)})e^{-\sum_{j=1}^n Q(\lambda_{\sigma(j)})}\prod_{j<k}(\lambda_{\sigma(k)}-\lambda_{\sigma(j)})^2,$$

para toda permutação $\sigma \in S_n$, então

$$\int_{\lambda_1<\ldots<\lambda_n} f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)e^{-\sum_{j=1}^n Q(\lambda_j)}\prod_{j<k}(\lambda_k-\lambda_j)^2 d^n\lambda = \\ = \int_{\lambda_{\sigma(1)}<\ldots<\lambda_{\sigma(n)}} f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)e^{-\sum_{j=1}^n Q(\lambda_j)}\prod_{j<k}(\lambda_k-\lambda_j)^2 d^n\lambda.$$

Somando sobre todas as permutações, e usando o fato de que o conjunto $\{\lambda_j = \lambda_k;\ k \neq j\}$ tem medida nula,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)e^{-\sum_{j=1}^n Q(\lambda_j)}\prod_{j<k}(\lambda_k-\lambda_j)^2 d^n\lambda &= \\ &= \sum_{\sigma\in S_n}\int_{\lambda_{\sigma(1)}<\ldots<\lambda_{\sigma(n)}} f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)e^{-\sum_{j=1}^n Q(\lambda_j)}\prod_{j<k}(\lambda_k-\lambda_j)^2 d^n\lambda \\ &= n!\widehat{Z}_n\mathbb{E}(F),\end{aligned}$$

e o teorema está demonstrado. □

O teorema 4.2 tem uma consequência básica e fundamental. Estatísticas sobre as matrizes $M \in \mathcal{M}(n)$, desde que sejam invariantes sobre conjugação unitária, podem ser reduzidas a estatísticas sobre os autovalores $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, distribuidos de acordo com

$$P_n(\lambda)d^n\lambda = \frac{1}{n!\widehat{Z}_n}e^{-\sum_{j=1}^n Q(\lambda_j)}\prod_{j<k}(\lambda_k-\lambda_j)^2 d^n\lambda,$$

e o nosso estudo sobre a distribuição $P_n(M)dM$ pode ser reduzido ao estudo da distribuição $P_n(\lambda)d^n\lambda$. Note ainda que a aplicação $V_n(\lambda) = \prod_{j<k}(\lambda_k-\lambda_j)$ é o *Determinante de Vandermonde*,

$$V_n(\lambda) = V_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

4.3 Algumas Estatísticas sobre os Autovalores

Conforme evidenciado na seção anterior, estatísticas sobre $\mathcal{M}(n)$, invariantes por conjugação unitária, podem ser efetivamente calculadas sobre os autovalores, nos levando

ao estudo de distribuições da forma

$$P_n(\lambda)d^n\lambda = \frac{1}{n!\widehat{Z}_n} e^{-\sum_{j=1}^n Q(\lambda_j)} |V_n(\lambda)|^2 d^n\lambda.$$

Procederemos agora com o cálculo de algumas estatísticas específicas.

Lema 4.1. *Sejam (f_j), (g_k) funções (reais ou complexas) em $L^2(d\mu)$, $d\mu$ medida boreliana com sinal sobre $\mathbb{R}$. Então*

$$\int\cdots\int \det\left(f_j(x_k)\right)_{1\le j,k\le n} \det\left(g_j(x_k)\right)_{1\le j,k\le n} d\mu(x_1)\ldots d\mu(x_n) = \\ = n!\det\left(\int f_j(x)g_k(x)d\mu(x)\right)_{1\le j,k\le n}.$$

Demonstração. O resultado segue por cálculos diretos,

$$\begin{aligned}
&\int\cdots\int \det\left(f_j(x_k)\right)_{1\le j,k\le n} \det\left(g_j(x_k)\right)_{1\le j,k\le n} d\mu(x_1)\ldots d\mu(x_n) = \\
&\quad = \int\cdots\int \left(\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \prod_{j=1}^n f_{\sigma(j)}(x_j) \sum_{\tau\in S_n} \operatorname{sgn}\tau \prod_{j=1}^n g_{\tau(j)}(x_j)\right) d\mu(x_1)\ldots d\mu(x_n) \\
&\quad = \sum_{\sigma,\tau\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\tau \int\cdots\int \prod_{j=1}^n f_{\sigma(j)}(x_j)g_{\tau(j)}(x_j)d\mu(x_j) \\
&\quad = \sum_{\sigma,\tau\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\tau \prod_{j=1}^n \left(\int f_{\sigma(j)}(x_j)g_{\tau(j)}(x_j)d\mu(x_j)\right) \\
&\quad = \sum_{\sigma,\tau\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma\tau^{-1}) \prod_{j=1}^n \left(\int f_{\sigma\tau^{-1}(\tau(j))}(x_j)g_{\tau(j)}(x_j)d\mu(x_j)\right)
\end{aligned}$$

Reordenando os termos nos produtórios acima, ficamos com

$$\begin{aligned}
&\int\cdots\int \det\left(f_j(x_k)\right)_{1\le j,k\le n} \det\left(g_j(x_k)\right)_{1\le j,k\le n} d\mu(x_1)\ldots d\mu(x_n) = \\
&\qquad = \sum_{\sigma,\tau\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma\tau^{-1}) \prod_{j=1}^n \left(\int f_{\sigma\tau^{-1}(j)}(x_j)g_j(x_j)d\mu(x_j)\right) \\
&\qquad = \sum_{\tau\in S_n}\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma\tau^{-1}) \prod_{j=1}^n \left(\int f_{\sigma\tau^{-1}(j)}(x)g_j(x)d\mu(x)\right)
\end{aligned}$$

Agora, para cada $\tau\in S_n$ fixo, $\varsigma = \sigma\tau^{-1}$ percorre todo o conjunto S_n quando σ percorre

S_n. Assim,

$$\int \cdots \int \det\left(f_j(x_k)\right)_{1\le j,k\le n} \det\left(g_j(x_k)\right)_{1\le j,k\le n} d\mu(x_1)\ldots d\mu(x_n) =$$
$$= \sum_{\tau\in S_n}\sum_{\varsigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\varsigma) \prod_{j=1}^{n} \left(\int f_{\varsigma(j)}(x) g_j(x) d\mu(x)\right)$$
$$= n! \sum_{\varsigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\varsigma) \prod_{j=1}^{n} \left(\int f_{\varsigma(j)}(x) g_j(x) d\mu(x)\right)$$
$$= n! \det\left(\int f_j(x) g_k(x) d\mu(x)\right)_{1\le j,k\le n}.$$

□

Com o auxílio deste último lema, podemos relacionar estatísticas sobre os autovalores a polinômios ortogonais.

Sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função limitada, consideraremos funções da forma $f(M) = \det(I+g(M))$. Observe que, pelo cálculo funcional, f é invariante por conjugação unitária.

Podemos reescrever

$$P_n(M)dM = c \det w(M) dM,$$

onde $w(t) = e^{-Q(t)}$.

Com estas notações, pelo teorema 4.2,

$$\mathbb{E}(f) = \frac{1}{n!\widehat{Z}_n} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{n} (I + g(\lambda_j)) \prod_{j=1}^{n} w(\lambda_j) |V_n(\lambda)|^2 d^n\lambda. \tag{4.11}$$

Denotando

$$\alpha_j(x) = \beta_j(x) = x^{j-1},\ j = 1, \ldots, n,$$

podemos reescrever

$$|V_n(\lambda)|^2 = V_n(\lambda)V_n(\lambda) = \det(\alpha_j(x_k))_{1\le j,k\le n} \det(\beta_j(x_k))_{1\le j,k\le n},$$

e então, usando o lema 4.1 para $d\mu(x) = (1 + g(x))w(x)dx$, concluimos

$$\mathbb{E}(f) = \frac{1}{\widehat{Z}_n} \det\left(\int t^{j+k-2}(1 + g(t))w(t)dt\right)_{1\le j,k\le n}. \tag{4.12}$$

Vamos agora reescrever o lado direito da equação anterior.

Multiplicando a j-ésima linha por $a_j^{(n)}$, e somando tudo à última linha, vemos que,

para $d\mu(x) = (1 + g(x))w(x)dx$,

$$\det \begin{pmatrix} \int d\mu & \int x d\mu & \dots & \int x^{n-1} d\mu \\ \int x d\mu & \int x^2 d\mu & \dots & \int x^n d\mu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int x^{n-1} d\mu & \int x^n d\mu & \dots & \int x^{2n-2} d\mu \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \int d\mu & \int x d\mu & \dots & \int x^{n-1} d\mu \\ \int x d\mu & \int x^2 d\mu & \dots & \int x^n d\mu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int p_{n-1}(x) d\mu & \int x p_{n-1}(x) d\mu & \dots & \int x^{n-1} p_{n-1}(x) d\mu \end{pmatrix},$$

onde

$$p_n(x) = x^{n-1} + a_{n-2}^{(n)} x^{n-2} + \ldots + a_1^{(n)} x + a_0^{(n)}.$$

Repetindo o procedimento com a $n-1$-ésima linha, posteriormente com a $n-2$-ésima linha, e assim sucessivamente, obtemos

$$\det \begin{pmatrix} \int d\mu & \int x d\mu & \dots & \int x^{n-1} d\mu \\ \int x d\mu & \int x^2 d\mu & \dots & \int x^n d\mu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int x^{n-1} d\mu & \int x^n d\mu & \dots & \int x^{2n-2} d\mu \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \int p_0(x) d\mu & \int x p_0(x) d\mu & \dots & \int x^{n-1} p_0(x) d\mu \\ \int p_1(x) d\mu & \int x p_1(x) d\mu & \dots & \int x^{n-1} p_1(x) d\mu \\ \int p_2(x) d\mu & \int x p_2(x) d\mu & \dots & \int x^{n-1} p_2(x) d\mu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int p_{n-1}(x) d\mu & \int x p_{n-1}(x) d\mu & \dots & \int x^{n-1} p_{n-1}(x) d\mu \end{pmatrix},$$

onde

$$p_j(x) = x^j + a_{j-1}^{(j)} x^{j-1} + \ldots + a_1^{(j)} x + a_0^{(j)}.$$

Repetindo o mesmo procedimento, agora sobre as colunas, ficamos com

$$\det\begin{pmatrix} \int d\mu & \int x d\mu & \dots & \int x^{n-1}d\mu \\ \int x d\mu & \int x^2 d\mu & \dots & \int x^n d\mu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int x^{n-1}d\mu & \int x^n d\mu & \dots & \int x^{2n-2}d\mu \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} \int q_0(x)p_0(x)d\mu & \int q_1(x)p_0(x)d\mu & \dots & \int q_{n-1}(x)p_0(x)d\mu \\ \int q_0(x)p_1(x)d\mu & \int q_1(x)p_1(x)d\mu & \dots & \int q_{n-1}(x)p_1(x)d\mu \\ \int q_0(x)p_2(x)d\mu & \int q_1(x)p_2(x)d\mu & \dots & \int q_{n-1}(x)p_2(x)d\mu \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int q_0(x)p_{n-1}(x)d\mu & \int q_1(x)p_{n-1}(x)d\mu & \dots & \int q_{n-1}(x)p_{n-1}(x)d\mu \end{pmatrix},$$

onde

$$q_j(x) = x^j + b_{j-1}^{(j)}x^{j-1} + \ldots + b_1^{(j)}x + b_0^{(j)}.$$

Temos então liberdade de escolher quaisquer polinômios p_j's, q_j's, mônicos de grau n. Escolhemos então $p_j = q_j = \pi_j$, onde π_n é o n-ésimo polinômio ortogonal mônico com relação à $w(t)dt = e^{-Q(t)}dt$. Sendo ainda $p_n(x) = \frac{1}{\gamma_n}\pi_n$, onde $\gamma_n = \|\pi_n\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(e^{-Q(t)}dt)}$, então (p_n) é a sequência de polinômios ortonormais com relação à $e^{-Q(t)}dt$, e provamos que

$$\det\left(\int x^{j+k-2}d\mu(x)\right)_{1\le j,k\le n} = \frac{1}{(\gamma_1\ldots\gamma_n)^2}\det\left(\int p_j(x)p_k(x)d\mu(x)\right)_{0\le j,k\le n-1}.$$

Substituindo na equação (4.12),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f) &= \frac{1}{(\gamma_1\ldots\gamma_n)^2\widehat{Z}_n}\det\left(\int p_j(x)p_k(x)(1+g(x))w(x)dx\right)_{0\le j,k\le n-1} \\ &= \frac{1}{(\gamma_1\ldots\gamma_n)^2\widehat{Z}_n}\det\left(\delta_{jk} + \int p_j(x)p_k(x)g(x)w(x)dx\right)_{0\le j,k\le n-1},\end{aligned}$$

pois

$$\int p_j(x)p_k(x)dx = \delta_{jk}.$$

Fazendo $g = 0$, isto é, $f = 1$, então

$$1 = \mathbb{E}(f) = \frac{1}{(\gamma_1\ldots\gamma_n)^2\widehat{Z}_n},$$

e denotando $\phi_j(x) = p_j(x)e^{-\frac{1}{2}Q(x)}$, simplificamos em

$$\mathbb{E}(f) = \det\left(\delta_{jk} + \int \phi_j(x)\phi_k(x)g(x)dx\right)_{0\leq j,k\leq n-1}. \tag{4.13}$$

Uma dificuldade em controlar o determinante acima, quando $n \to \infty$, é o fato de que estamos calculando o determinante de um operador cujo domínio varia com n. Mas, pela igualdade [27, pag. 37],

$$\det(I + AB) = \det(I + BA),$$

válida para quaisquer operadores *trace class* $A : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ e $B : \mathscr{H}_2 \to \mathscr{H}_1$ entre espaços de Hilbert distintos $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$, podemos reduzir a expressão acima a um determinante sobre um espaço independente de n.

Sendo $\{e_0, \ldots, e_{n-1}\}$ a base canônica de $\mathbb{C}^n$, defina

$$\begin{aligned} A : L^2(\mathbb{R}) &\to \mathbb{C}^n \\ h &\mapsto \sum_{j=0}^{n-1}\left(\int h(x)\phi_j(x)g(x)dx\right)e_j; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B : \mathbb{C}^n &\to L^2(\mathbb{R}) \\ a = \sum_{j=0}^{n-1} a_j e_j &\mapsto \sum_{j=0}^{n-1} a_j\phi_j. \end{aligned}$$

A é um operador *trace class*, pois é operador de posto finito, e B é limitado, pois $\dim \mathbb{C}^n < \infty$.

Com isto,

$$ABa = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\left(\int \phi_j(x)\phi_k(x)g(x)\right)e_j.$$

Logo, $AB : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ é tal que

$$(AB)_{k+1,j+1} = \langle ABe_k, e_j\rangle = \int \phi_j(x)\phi_k(x)g(x)dx,$$

seguindo, por (4.13),

$$\det(I + AB) = \det\left(\delta_{jk} + (AB)_{jk}\right)_{1\leq j,k\leq n} = \mathbb{E}(f).$$

Pelo teorema 4.3, concluimos

$$\mathbb{E}(f) = \det(I + BA).$$

Mas

$$\begin{aligned} BAh(y) &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\int h(x)\phi_j(x)g(x)dx \right) \phi_j(y) \\ &= \int \left(\sum_{j=0}^{n-1} \phi_j(x)\phi_j(y) \right) h(x)g(x)dx \\ &= \int K_n(x,y)h(x)g(x)dx, \end{aligned}$$

isto é, $BA = \mathbb{K}_n\chi_g$, onde $\mathbb{K}_n : L^2 \to L^2$ é o operador integral com núcleo

$$K_n(x,y) = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j(x)\phi_j(y),$$

e $\chi_g : L^2 \to L^2$ é o operador multiplicação por g,

$$\chi_g h = hg.$$

Provamos então

Teorema 4.3. *Se f é uma função limitada e tal que $f(M) = f(UMU^*)$, para toda transformação unitária $U \in U(n)$, então*

$$\mathbb{E}(f(M)) = \det(I + \mathbb{K}_n\chi_g), \ f = 1 + g.$$

Em particular, se $\Omega \subset \mathbb{R}$, $g = -\chi_\Omega$, então

$$\mathbb{E}(f(M)) = \det\left(I + \mathbb{K}_n\big|_{L^2(\Omega)} \right).$$

Por outro lado, por (4.11),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(M)) &= \frac{1}{n!\widehat{Z}_n} \int \prod_{j=1}^{n} (1 - \chi_\Omega(\lambda_j)) e^{-\sum_{j=1}^n Q(\lambda_j)} V(\lambda)^2 d^n\lambda \\ &= \frac{1}{n!\widehat{Z}_n} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega^n} e^{-\sum_{j=1}^n Q(\lambda_j)} V(\lambda)^2 d^n\lambda \\ &= \mathbb{P}(\{M \text{ não possui autovalores em } \Omega\}), \end{aligned}$$

e portanto

$$\mathbb{P}(\{M \text{ não possui autovalores em } \Omega\}) = \det\left(I + \mathbb{K}_n\big|_{L^2(\Omega)}\right).$$

De modo mais geral [27, pag. 88, eq. 4.72], cálculos em combinatória mostram que, se $\Omega_1, \ldots, \Omega_k \subset \mathbb{R}$ são conjuntos disjuntos, e $n_1, \ldots, n_k$ são k números naturais, tais que $\sum_j n_j \leq n$, então

$$\mathbb{P}(\{n_j \text{ autovalores em } \Omega_j,\ j = 1, \ldots, k\}) = \\ = \frac{1}{n_1! \cdots n_k!} \frac{\partial^{n_1+\ldots+n_k}}{\partial^{n_1} t_1 \cdots \partial^{n_k} t_k} \det\left(1 + \mathbb{K}_n \sum_{j=1}^{n} t_j \chi_j\right)\Bigg|_{t_1=\ldots=t_k=-1},$$

onde χ_j é o operador de multiplicação pela função característica de Ω_j,

$$\chi_j h = h\chi_{\Omega_j}.$$

Para terminar esta seção, vamos encontrar uma expressão em termos de determinante para $P_n(x_1, \ldots, x_n)$. Com as notações anteriores, seja

$$A = (A_{ij})_{1\leq i,j\leq n} = (\phi_{i-1}(x_j))_{1\leq i,j\leq n}.$$

Então

$$\begin{aligned} n! P_n(x_1, \ldots, x_n) &= \frac{1}{(\gamma_1 \cdots \gamma_n)^2} e^{-\sum_{j=1}^n Q(x_j)} V_n(x)^2 \\ &= (\det A)^2 \\ &= \det(A^t A) \\ &= \det\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ji} A_{jk}\right)_{1\leq i,k\leq n} \\ &= \det\left(\sum_{j=1}^{n} \phi_{j-1}(x_i)\phi_{j-1}(x_k)\right)_{1\leq i,k\leq n} \\ &= \det\left(K_n(x_i, x_k)\right)_{1\leq i,k\leq n}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

4.4 Funções de Correlação

As funções de correlação são definidas por

$$R_k(x_1, \ldots, x_k) = \frac{n!}{(n-k)!} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} P_n(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) dx_{k+1} \ldots dx_n,\ k \leq n.$$

Se $\Omega \subset \mathbb{R}$ e

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} \chi_\Omega(x_j) = \#\{j;\ x_j \in \Omega\},$$

isto é, $F(x_1, \ldots, x_n)$ é o número de autovalores x_j's em Ω, então pela simetria de $P_n(\lambda)d^n\lambda$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(F) &= \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\Omega(\lambda_j) P_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) d^n\lambda \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\Omega(\lambda_1) P_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) d^n\lambda \\
&= n \int_\Omega \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} P_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) d\lambda_2 \ldots d\lambda_n \right) d\lambda_1 \\
&= \int_\Omega R_1(\lambda_1) d\lambda_1. \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

De modo mais geral, se $\Omega_1, \ldots, \Omega_k \subset \mathbb{R}$ são conjuntos disjuntos e

$$\begin{aligned}
F(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n} \chi_{\Omega_1}(x_{j_1}) \ldots \chi_{\Omega_k}(x_{j_k}) \\
&= \#\{(j_1, \ldots, j_k);\ j_1 < \ldots < j_k,\ \lambda_{j_1} \in \Omega_1, \ldots, \lambda_{j_k} \in \Omega_k\},
\end{aligned}$$

então novamente pela simetria de $P_n(\lambda)d^n\lambda$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(F) &= \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\Omega_1}(\lambda_1) \ldots \chi_{\Omega_k}(\lambda_k) P_n(\lambda) d^n\lambda \\
&= \binom{n}{k} \int_{\Omega_1} \ldots \int_{\Omega_k} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-k}} P_n(\lambda) d\lambda_{k+1} \ldots d\lambda_n \right) d\lambda_k \ldots d\lambda_1 \\
&= \frac{1}{k!} \int_{\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_k} R_k(\lambda) d^k\lambda.
\end{aligned}$$

Assim, apesar de R_k não ser distribuição de probabilidade, vale a interpretação

$$\mathbb{E}(\#\{(j_1, \ldots, j_k);\ j_1 < \ldots < j_k,\ \lambda_{j_1} \in \Omega_1, \ldots, \lambda_{j_k} \in \Omega_k\}) = \frac{1}{k!} \int R_k(\lambda) d^k\lambda.$$

Assim como as estatísticas consideradas na seção anterior, podemos expressar R_k em função do núcleo K_n.

Sendo $\Omega_1, \ldots \Omega_k \subset \mathbb{R}$ subconjuntos disjuntos, e denotando $\Omega_0 = \mathbb{R} \backslash (\cup \Omega_k)$, vale

$$\sum_{j=0}^{k} \chi_{\Omega_j}(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo, fixando $\alpha_0, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, e definindo

$$g(x) = \sum_{j=0}^{k} (\alpha_j - 1)\chi_{\Omega_j}(x) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j \chi_{\Omega_j}(x), \ x \in \mathbb{R}, \ \beta_j = \alpha_j - 1,$$

então

$$1 + g(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \chi_{\Omega_j}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pela simetria de $P_n(\lambda)d^n\lambda$,

$$\begin{aligned}
\int \prod_{j=1}^{n} (1 + g(\lambda_j)) P_n(\lambda) d^n\lambda &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{1 \le l_1 < \ldots < l_j \le n} \int g(\lambda_{l_1}) \ldots g(\lambda_{l_j}) P_n(\lambda) d^n\lambda \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \int g(\lambda_1) \ldots g(\lambda_j) P_n(\lambda) d^n\lambda \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \int g(\lambda_1) \ldots g(\lambda_j) R_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_j) d^j\lambda \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Agora, podemos reescrever

$$\begin{aligned}
\prod_{l=1}^{j} g(\lambda_l) &= \prod_{l=1}^{j} \sum_{i=1}^{k} \beta_i \chi_{\Omega_i}(\lambda_l) \\
&= \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_j \le k} \beta_{i_1} \chi_{\Omega_{i_1}}(\lambda_1) \ldots \beta_{i_j} \chi_{\Omega_{i_j}}(\lambda_j) \\
&= \sum_{\substack{n_0, \ldots, n_k \ge 0 \\ n_0 + \ldots + n_k = j}} \ \sum_{\substack{0 \le i_1, \ldots, i_j \le k \\ \#\{l;\ i_l = 0\} = n_0 \\ \vdots \\ \#\{l;\ i_l = k\} = n_k}} \beta_{i_1} \ldots \beta_{i_j} \chi_{\Omega_{i_1}}(\lambda_1) \chi_{\Omega_{i_j}}(\lambda_j) \\
&= \sum_{\substack{n_0, \ldots, n_k \ge 0 \\ n_0 + \ldots + n_k = j}} \beta_0^{n_0} \ldots \beta_k^{n_k} E(n_0, \ldots, n_k; \lambda_1, \ldots, \lambda_j),
\end{aligned}$$

onde

$$E(n_0, \ldots, n_k; \lambda_1, \ldots, \lambda_j) = \sum_{\substack{0 \le i_1, \ldots, i_j \le k \\ \#\{l;\ i_l = 0\} = n_0 \\ \vdots \\ \#\{l;\ i_l = k\} = n_k}} \chi_{\Omega_{i_1}}(\lambda_1) \chi_{\Omega_{i_j}}(\lambda_j).$$

Como os Ω_l's são disjuntos, então fixado $(\lambda_1, \ldots, \lambda_j)$, no máximo um termo na soma que define E é não-nulo. Ainda, se $E(n_0, \ldots, n_k, \lambda_1, \ldots, \lambda_j) \neq 0$, então

$$\chi_{i_1}(\lambda_1) = \ldots = \chi_{i_j}(\lambda_j) = 1,$$

para algum conjunto de índices $\{i_1, \ldots, i_j\}$, e para este mesmo conjunto de índices

$$\#\{l;\ i_l = 0\} = n_0, \ldots, \#\{l;\ i_l = j\} = n_j,$$

e portanto

$$E(n_0, \ldots, n_k; \lambda_1, \ldots, \lambda_j) = \chi_{A(n_0,\ldots,n_k)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_j),$$

onde

$$A(n_0, \ldots, n_k) = \{(x_1, \ldots, x_j) \in \mathbb{R}^j;\ \text{exatamente } n_l \text{ dos } x_i\text{'s pertencem a } \Omega_l,\ l = 1, \ldots, j\}.$$

Substituindo em (4.17) e voltando em (4.16), e fazendo $f(M) = 1 + g$, ficamos com

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f) &= \int \prod_{j=1}^{n} (1 + g(\lambda_j)) P_n(\lambda) d^n\lambda \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{n_0,\ldots,n_k \geq 0 \\ n_0+\ldots+n_k=j}} \beta_0^{n_0} \ldots \beta_k^{n_k} \int_{\mathbb{R}^j} R_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_j) \chi_{A(n_0,\ldots,n_k)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_j) d^j\lambda. \end{aligned} \tag{4.17}$$

A fórmula de Fredholm [67, pg. 362] nos conta que, dado um operador A, vale a expansão

$$\det(I + A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \cdots \int \det\big((K(x_i, x_j)_{1 \leq i,j \leq n})\big) dx_1 \ldots dx_n. \tag{4.18}$$

Assim, pelo teorema 4.3 e pela fórmula de Fredholm (4.18),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f) &= \det(I + \mathcal{K}_n \chi_g) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \int_{\mathbb{R}^j} \det\left(K_n(x_l, x_m) g(x_l)\right)_{1 \leq l,m \leq j} d^j x \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \int_{\mathbb{R}^j} \det\left(K_n(x_l, x_m)\right)_{1 \leq l,m \leq j} \prod_{l=1}^{j} g(x_l) d^j x. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Note que

$$\det\left(K_n(x_l, x_m)\right)_{1 \leq l,m \leq j} = \prod_{l=1}^{j} e^{-Q(x_l)} \det\left(\sum_{k=0}^{n-1} \pi_k(x_l) \pi_k(x_m)\right)_{1 \leq l,m, \leq j}.$$

Cada linha l do determinante acima à direita pode ser vista como uma combinação

linear dos polinômios π_k's. De modo mais preciso, se v_l é o vetor da l-ésima linha, então

$$v_l = \sum_{k=0}^{n-1} \pi_k(x_l)\vec{\pi}_k,$$

onde

$$\vec{\pi}_k = (\pi_k(x_1), \ldots, \pi_k(x_j)),\ k = 0, \ldots, n-1.$$

Assim, se $j > n$, então os vetores linha v_l's são necessariamente linearmente dependentes, pois

$$\begin{aligned} &\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_j\} = \operatorname{span}\{\vec{\pi}_0, \ldots, \vec{\pi}_{n-1}\} \Longrightarrow \\ \Longrightarrow \qquad &\dim \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_j\} \leq n < j, \end{aligned}$$

e portanto

$$\det\left(K_n(x_l, x_m)\right)_{1\leq l,m,\leq j} = 0,\ j > n.$$

Voltando em (4.19), e usando (4.17),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \int_{\mathbb{R}^j} \det\left(K_n(x_l, x_m)\right)_{1\leq l,m\leq j} \prod_{l=1}^{j} g(x_l) d^j x \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{n_0,\ldots,n_k\geq 0 \\ n_0+\ldots+n_k=j}} \beta_0^{n_0} \ldots \beta_k^{n_k} \int_{\mathbb{R}^j} \det\left(K_n(x_l, x_m)\right)_{1\leq l,m,\leq j} \chi_{A(n_0,\ldots,n_k)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_j) d^j\lambda. \end{aligned}$$

Denotando

$$\Delta_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_j) = R_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_j) - \det\left(K_n(x_l, x_m)\right)_{1\leq l,m\leq j},$$

por (4.17) concluimos

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{n_0,\ldots,n_k\geq 0 \\ n_0+\ldots+n_k=j}} \beta_0^{n_0} \ldots \beta_k^{n_k} \int_{\mathbb{R}^j} \Delta_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_j) \chi_{A(n_0,\ldots,n_k)}(\lambda_1, \ldots, \lambda_j) d^j\lambda = 0.$$

Como temos liberdade na escolha dos β_j's, a expressão anterior é um polinômio nas variáveis $\beta_1, \ldots, \beta_k$. Como tal polinômio é o polinômio nulo, então seus coeficientes são todos nulos. Em particular, o coeficiente de $\beta_1 \ldots \beta_j$ (que equivale a $k = j, n_0 = 0, n_1 = \ldots = n_k = 1$) é nulo, isto é

$$\int_{\mathbb{R}^j} \Delta_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_j) \chi_{A(n_0,\ldots,n_j)}(\lambda) d^j\lambda = 0. \tag{4.20}$$

Podemos reescrever

$$A(n_0,\ldots,n_j)=\{\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_j);\ \exists\sigma\in S_j,\lambda_l\in\Omega_{\sigma(l)},l=1,\ldots,j\}.$$

Desta representação, da simetria de Δ_j, e da igualdade (4.20), concluimos

$$0=\sum_{\sigma\in S_j}\int_{\Omega_{\sigma(1)}\times\ldots\times\Omega_{\sigma(j)}}\Delta_j(\lambda)d^j\lambda=j!\int_{\Omega_1\times\ldots\times\Omega_j}\Delta_j(\lambda)d^j\lambda. \tag{4.21}$$

Definindo

$$\Omega_m=(a_m,y_m),\ m=1,\ldots,j,\ a_1<y_1<a_2\ldots<a_j<y_j,$$

então (4.21) implica

$$\int_{a_1}^{y_1}\ldots\int_{a_j}^{y_j}\Delta_j(\lambda_1,\ldots,\lambda_j)d\lambda_1\ldots d\lambda_j=0.$$

Como Δ_j é contínua, o teorema fundamental do cálculo nos ensina

$$\frac{\partial^j}{\partial y_1\ldots\partial y_j}\left(\int_{a_1}^{y_1}\ldots\int_{a_j}^{y_j}\Delta_j(\lambda_1,\ldots,\lambda_j)d\lambda_1\ldots d\lambda_j\right)=\Delta_j(y_1,\ldots,y_j)=0,y_1<\ldots<y_j.$$

Como Δ_j é simétrica,

$$\Delta_j(y_1,\ldots,y_j)=0,\ y_j\neq y_m,l\neq m,$$

e, por continuidade, concluimos

$$\Delta_j(y_1,\ldots,y_j)=0,\ \forall y\in\mathbb{R}^j,$$

isto é

$$R_j(y_1,\ldots,y_j)=\det\left(K_n(y_l,y_m)\right)_{1\leq l,m\leq j},\ j=1,\ldots,n. \tag{4.22}$$

CAPÍTULO 5

UNIVERSALIDADE

Como aplicação das assintóticas obtidas no capítulo 3, nos preocuparemos neste capítulo em obter limites universais, fenômeno conhecido por *universalidade*, para as estatísticas apresentadas no capítulo 4.

No capítulo 4, desenvolvemos a teoria básica de matrizes aleatórias para distribuições da forma

$$P_n(M)dM = ce^{-Q(M)}dM.$$

Agora, para analisar o limite dos autovalores de matrizes de $\mathcal{M}(n)$ quando a dimensão n é grande, nos restringiremos a potenciais da forma

$$Q(x) = Q_n(x) = nV(x),$$

com V função real analítica, o que nos leva a distribuições matriciais (reescaladas) da forma

$$\mathcal{P}_n(M)dM = ce^{-nV(M)}dM,$$

as quais, seguindo toda teoria desenvolvida no capítulo 4, são reduzidas a distribuições nos autovalores

$$\mathcal{P}_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)d^n\lambda = \frac{1}{\mathcal{Z}_n}e^{-n\sum_{j=1}^{n}Q(\lambda_j)}\prod_{j<k}(\lambda_k - \lambda_j)^2 d^n\lambda.$$

De modo a usarmos as assintóticas obtidas no capítulo 3, assumiremos $V(x) = ax^{2m}$. Neste caso, a reescalagem $Q(x) = V(x) \mapsto nV(x)$ é equivalente a $x \mapsto xn^{\frac{1}{2m}}$,

e somos levados a quantidades reescaladas. Por exemplo, com tal reescalagem, obtemos os polinômios ortogonais mônicos,

$$\widetilde{\pi}_j(x) = \frac{1}{n^{\frac{j}{2m}}}\pi_j(xn^{\frac{1}{2m}}),$$

as constantes de normalização

$$\widetilde{\gamma}_j = \gamma_j n^{-\frac{1}{2m}(j+\frac{1}{2})} \tag{5.1}$$

e as funções ortonormais com relação à dx,

$$\widetilde{\phi}_j(x) = \frac{1}{\widetilde{\gamma}_j}e^{-\frac{n}{2}V(x)}\widetilde{\pi}_j(x),\ j = 0, \ldots, n-1,$$

as quais nos levam à função de correlação reescalada

$$\mathcal{R}_m(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \det\left(\mathcal{K}_n(\lambda_k, \lambda_j)\right)_{1\leq j,k\leq m},\ m = 1, \ldots, n,$$

onde $\mathcal{K}_n$ é o polinômio núcleo

$$\mathcal{K}_n(x, y) = \sum_{j=0}^{n-1}\widetilde{\phi}_j(x)\widetilde{\phi}_j(y).$$

Também, somos levados aos polinômios $\widetilde{p}_j$'s, ortonormais com relação à $e^{-nV(x)}dx$, isto é

$$\widetilde{p}_j(x) = \frac{1}{\widetilde{\gamma}_j}\pi_j(x).$$

O fator n na medida $d\mu_n$, o qual pode ser visto como uma reescalagem $Q(x) = V(x) \mapsto nV(x)$, é feito de modo a confinar os autovalores numa região compacta do plano. Por exemplo, no caso gaussiano $V(x) = ax^2$, o maior autovalor (em módulo) de uma matriz típica M é da ordem de $\sqrt{n}$ [73, seção 2.3]. Com a reescalagem $x \mapsto xn^{\frac{1}{2}}$ (equivalente a $V(x) \mapsto nV(x)$), o maior autovalor (e portanto todos autovalores) fica confinado em uma região compacta independente de n.

Prosseguiremos agora com os cálculos que nos levarão aos resultados de universalidade.

De modo a analisar o núcleo $\mathcal{K}$ localmente, defina

$$D_{x,n}(\xi, \eta) = \frac{1}{\mathcal{K}_n(x, x)}\mathcal{K}_n\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x, x)} + x, \frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x, x)} + x\right),\ -\theta \leq \xi, \eta \leq \theta, \tag{5.2}$$

para $x \in (-\alpha, \alpha) = \operatorname{supp} d\mu^V$, θ suficientemente pequeno, de modo a nos mantermos em

$(-\alpha, \alpha)$.

A mudança de variáveis $\mathcal{K}_n(x,x) \mapsto D_{x,n}(\xi,\eta)$ tem como objetivo assegurar que o número esperado de autovalores por intervalo unitário seja, assintoticamente, igual a 1, como veremos posteriormente.

Como os polinômios $\widetilde{p}_j$'s são ortonormais com relação à $e^{-nV(x)}dx$, então satisfazem a fórmula de Christoffel-Darboux [72, teor. 3.2.2, pg. 43],

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1}\widetilde{p}_j(x)\widetilde{p}_j(y) &= \widetilde{b}_{n-1}\frac{\widetilde{p}_n(x)\widetilde{p}_{n-1}(y)-\widetilde{p}_n(y)\widetilde{p}_{n-1}(x)}{x-y},\ x\neq y,\\ \sum_{j=0}^{n-1}\left(\widetilde{p}_j(x)\right)^2 &= \widetilde{b}_{n-1}\left(q_n'(x)q_{n-1}(x)-q_n(x)q_{n-1}'(x)\right),\end{aligned} \tag{5.3}$$

onde

$$\widetilde{b}_j = \frac{\widetilde{\gamma}_{j+1}}{\widetilde{\gamma}_j}. \tag{5.4}$$

Logo,

$$\mathcal{K}_n(x,y) = e^{-\frac{n}{2}(V(x)+V(y))}\frac{\widetilde{b}_{n-1}}{\widetilde{\gamma}_n\widetilde{\gamma}_{n-1}}\frac{\widetilde{\pi}_n(x)\widetilde{\pi}_{n-1}(y)-\widetilde{\pi}_n(y)\widetilde{\pi}_{n-1}(x)}{x-y}.$$

Voltando na definição de $D_{x,n}$ (5.2), obtemos

$$\begin{aligned}D_{x,n}(\xi,\eta) = \frac{1}{\xi-\eta}\frac{\widetilde{b}_{n-1}}{\widetilde{\gamma}_n\widetilde{\gamma}_{n-1}}e^{-\frac{n}{2}\left(V\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)+V\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)\right)}\\ \times\left[\widetilde{\pi}_n\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)\widetilde{\pi}_{n-1}\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)\right.\\ \left.-\widetilde{\pi}_n\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)\widetilde{\pi}_{n-1}\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)\right].\end{aligned} \tag{5.5}$$

Seja $Y = Y^{(n)}$ solução do RHP em (2.15) para a medida variante $d\mu_n(x) = e^{-nV(x)}dx$. Recorde que a primeira coluna de Y é dada por

$$Y_{11}(z) = \widetilde{\pi}_n(z),\ Y_{21}(z) = -\frac{2\pi i}{\widetilde{\gamma}_{n-1}^2}\widetilde{\pi}_{n-1}(z).$$

Ainda, cálculos diretos nos mostram que

$$\frac{\widetilde{b}_{n-1}}{\widetilde{\gamma}_n\widetilde{\gamma}_{n-1}} = \frac{1}{\widetilde{\gamma}_{n-1}^2},$$

e assim, voltando em (5.5),

$$D_{x,n}(\xi,\eta) = \frac{e^{-\frac{n}{2}\left(V\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)+V\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)\right)}}{2\pi i(\xi-\eta)} \times \left[Y_{11}\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)Y_{21}\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right) - Y_{11}\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)Y_{21}\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)\right]. \tag{5.6}$$

A fórmula (5.6) é o ponto chave da relação entre polinômios ortogonais e matrizes aleatórias. Escrita em termos da solução Y do problema reescalado para a medida $e^{-nV(x)}$ e do núcleo $\mathcal{K}_n$, ela se resume a

$$\mathcal{K}_n(x,y) = \frac{1}{2\pi i(x-y)} \begin{pmatrix} 0 & e^{-nV(y)} \end{pmatrix} Y_+^{-1}(y)Y_+(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

o que torna ainda mais clara a relação entre problemas de Riemann-Hilbert e matrizes aleatórias.

Pela definição de T em (3.33),

$$(T_{11})_+(z) = Y_{11}(z)e^{-ng_+(z)}, \quad (T_{21})_+(z) = Y_{21}(z)e^{-ng_+(z)}e^{-nl},$$

e ficamos com

$$D_{x,n}(\xi,\eta) = \frac{e^{-\frac{n}{2}\left(V\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)+V\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)\right)}}{2\pi i(\xi-\eta)} e^{n\left(g_+\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)+g_+\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)\right)}e^{nl} \times \left[(T_{11})_+\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)(T_{21})_+\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right) - (T_{11})_+\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)(T_{21})_+\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)\right]. \tag{5.8}$$

Pelas equações (3.37) e (3.38),

$$2g_+(z) - V(z) + l = g_+(z) - g_-(z) = 2\phi_+(z).$$

Usando ainda (3.96), (3.97), concluimos

$$
\begin{aligned}
D_{x,n}(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi i(\xi-\eta)} & e^{-n\left(\phi_+\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)+\phi_+\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)\right)}\times \\
& \left\{\left[(R_{11})_+\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)+(R_{12})_+\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)e^{2n\phi_+\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)}\right]\right. \\
& \times\left[(R_{21})_+\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)+(R_{22})_+\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)e^{2n\phi_+\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)}\right]- \\
& \left[(R_{11})_+\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)+(R_{12})_+\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)e^{2n\phi_+\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)}\right] \\
& \left.\times\left[(R_{21})_+\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)+(R_{22})_+\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)e^{2n\phi_+\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)}\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

Assumamos por ora

Lema 5.1.

i) R, $\frac{dR}{dz}$ *são limitadas numa vizinhança de* x, *quando* $n\to\infty$;

ii) $\mathcal{K}_n(x,x) = n\psi(x)+\mathcal{O}(1),\ \ n\to\infty,\ \ \psi(x)=\frac{m}{\pi i}\sqrt{x^2-a^2}h_1(x).$

Vamos então computar o limite de $D_{x,n}(\xi,\eta)$, quando $n\to\infty$.

Usando o fato de ϕ_+ ser (real) analítica em uma vizinhança de x, e que $\phi'_+ = i\pi\psi$, aplicamos Taylor em (3.46), obtendo

$$
\begin{aligned}
n\phi_+\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right) &= n\phi_+(x)+ni\pi\psi(x)\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= n\phi_+(x)+\frac{i\pi\xi}{1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n\psi(x)}\right)}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= n\phi_+(x)+i\pi\xi+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

com a ordem $\mathcal{O}(n^{-1})$ podendo ser tomada uniforme para $|\xi|\le\theta$.

Procedendo de modo análogo, usando o fato de que $\frac{dR}{dz}$ é limitada numa vizinhança de x, quando $n\to\infty$, e tomando θ suficientemente pequeno,

$$
R\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right) = R(x)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),\ |\xi|<\theta,
$$

onde novamente a ordem $\mathcal{O}(n^{-1})$ sendo tomada uniforme para $|\xi|\le\theta$.

Lembrando ainda que $|e^{2n\phi_+(x)}|=1$ se $x\in(-\alpha,\alpha)$ (3.55), então (5.9) se transforma,

após cálculos diretos, em

$$\begin{aligned} D_{x,n}(\xi,\eta) &= \frac{1}{2\pi(\xi-\eta)}\Big[(R_{12})_+(x)(R_{21})_+(x)\left(e^{\pi i(\eta-\xi)}-e^{\pi i(\xi-\eta)}\right)- \\ &\qquad (R_{11})_+(x)(R_{22})_+(x)\left(e^{\pi i(\eta-\xi)}-e^{\pi i(\xi-\eta)}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\Big] \\ &= \frac{1}{2\pi i(\xi-\eta)}\left[\det R_+(x)\left(e^{\pi i(\xi-\eta)}-\overline{e^{\pi i(\xi-\eta)}}\right)\right] \\ &= \frac{\sin\pi(\xi-\eta)}{\pi(\xi-\eta)}\det R_+(x)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Como $\det R_+(x)=1$, então toda a informação com respeito à V, que está contida somente em $\det R_+$, desaparece, e provamos o resultado universal

Teorema 5.1 (Universalidade para $\boldsymbol{\mathcal{K}_n(x,x)}$)**.** *Dado $x\in(-\alpha,\alpha)$, podemos tomar $\theta=\theta(x)$ suficientemente pequeno de modo que, para $\xi,\eta\in(-\theta,\theta)$, $\xi\neq\eta$,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\mathcal{K}_n(x,x)}\mathcal{K}_n\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x,\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)=\mathcal{S}(\xi-\eta),$$

onde

$$\mathcal{S}(t)=\frac{\sin(\pi t)}{\pi t},$$

com o limite acima sendo uniforme em compactos de $\{\xi\neq\eta,\ |\xi|,|\eta|<\theta\}$.

Relembrando (4.22),

$$\mathcal{R}_m(x_1,\ldots,x_m)=\det\left(\mathcal{K}_n(x_j,x_k)\right)_{1\le j,k\le m}$$

o teorema 5.1 implica diretamente

Teorema 5.2 (Universalidade para $\boldsymbol{\mathcal{R}_m}$)**.** *Fixe m. Para $x\in(-\theta,\theta)$, $\xi_1,\ldots,\xi_m$ distintos, $|\xi_j|<\theta$, vale*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\mathcal{K}_n(x,x))^m}\mathcal{R}_m\left(\frac{\xi_1}{\mathcal{K}_m(x,x)}+x,\ldots,\frac{\xi_m}{\mathcal{K}_m(x,x)}+x\right)=\det\left(\mathcal{S}(\xi_j-\xi_k)\right)_{1\le j,k\le m}. \tag{5.12}$$

Podemos agora justificar a reescalagem $\mathcal{K}_n(x,x)\mapsto D_{x,n}(\xi,\eta)$. Como dissemos anteriormente, esta mudança de variáveis tem por objetivo fazer com que o valor esperado de autovalores num intervalo unitário seja, assintoticamente, igual a 1.

Pelas equações (4.15) e (4.22), $\mathcal{K}_n(t,t)=\mathcal{R}_1(x)$ é a densidade do número esperado de

autovalores, isto é, se $\Omega \subset \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(\#\text{ autovalores em } \Omega) = \int_\Omega \mathcal{K}_n(t,t)dt = \int_\Omega \mathcal{R}_1(t)dt.$$

Em particular, se

$$\Omega = \left[x - \frac{\epsilon}{\mathcal{K}_n(x,x)}, x + \frac{\epsilon}{\mathcal{K}_n(x,x)}\right],$$

fazendo a mudança de variáveis $t = x + \frac{\xi}{K_n(x,x)}$ e usando *ii)* do lema 5.1,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\#\text{ autovalores em } \left[x - \frac{\epsilon}{\mathcal{K}_n(x,x)}, x + \frac{\epsilon}{\mathcal{K}_n(x,x)}\right]\right) & \\
&= \int_{x-\frac{\epsilon}{\mathcal{K}_n(x,x)}}^{x-\frac{\epsilon}{\mathcal{K}_n(x,x)}} \mathcal{K}_n(t,t)dt \\
&= \frac{1}{\mathcal{K}_n(x,x)} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \mathcal{K}_n\left(x + \frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}, x + \frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}\right) d\xi \\
&= \frac{n}{\mathcal{K}_n(x,x)} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi\left(x + \frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}\right) d\xi + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mathcal{K}_n(x,x)}\right)
\end{aligned}$$

Fixado x, usando a fórmula de Taylor e o fato de que ψ' é limitada numa vizinhança de x,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\#\text{ autovalores em } \left[x - \frac{\epsilon}{\mathcal{K}_n(x,x)}, x + \frac{\epsilon}{\mathcal{K}_n(x,x)}\right]\right) & \\
&= \frac{n}{\mathcal{K}_n(x,x)} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left(\psi(x) + \mathcal{O}\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}\right)\right) d\xi \\
&= 2\epsilon \frac{n}{\mathcal{K}_n(x,x)} \psi(x) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mathcal{K}_n(x,x)}\right).
\end{aligned}$$

Mas, novamente por *ii)*,

$$\frac{n\psi(x)}{\mathcal{K}_n(x,x)} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mathcal{K}_n(x,x)}\right)$$

e também

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\mathcal{K}_n(x,x)}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),$$

concluindo

$$\mathbb{E}\left(\#\text{ autovalores em } \left[x - \frac{\epsilon}{\mathcal{K}_n(x,x)}, x + \frac{\epsilon}{\mathcal{K}_n(x,x)}\right]\right) = 2\epsilon\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

isto é, assintoticamente o valor esperado de autovalores em um intervalo é igual ao comprimento do intervalo. Esta reescalagem é padrão ao se estudar universalidade de

estatísticas locais de autovalores.

Para a prova dos teoremas anteriores estarem completas, resta demonstrar o lema 5.1.

Provemos primeiramente *ii)*, assumindo *i)*

Da própria definição de $D_{x,n}$ em (5.2), e da continuidade de $\mathcal{K}_n$,

$$\lim_{\xi\to 0} D_{\xi,0} = \frac{1}{\mathcal{K}_n(x,x)}\mathcal{K}_n(x,x) = 1.$$

Usando então (5.9),

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_n(x,x) &= \lim_{\xi\to 0}\mathcal{K}_n(x,x)D_{x,n}(\xi,0)\\
&= \frac{e^{-2n\phi_+(x)}}{2\pi i}\lim_{\xi\to 0}\frac{1}{\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}}\Bigg\{\left[(R_{11})_+(x)+(R_{11})_+(x)e^{2n\phi_+(x)}\right]\\
&\quad\times\left[(R_{21})_+\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)+(R_{22})_+\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)e^{2n\phi_+\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)}\right]\\
&\quad-\left[(R_{11})_+\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)+(R_{11})_+\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)e^{2n\phi_+\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)}\right]\\
&\quad\times\left[(R_{21})_+(x)+(R_{22})_+(x)e^{2n\phi_+(x)}\right]\Bigg\}\\
&= \frac{e^{-2n\phi_+(x)}}{2\pi i}\Bigg\{\left[(R_{11})_+(x)+(R_{12})_+(x)e^{2n\phi_+(x)}\right]\\
&\quad\times\left[(R'_{21})_+(x)+(R'_{22})_+(x)e^{2n\phi_+(x)}+2n\phi'_+(x)(R_{22})_+(x)e^{2n\phi_+(x)}\right]\\
&\quad-\left[(R_{21})_+(x)+(R_{22})_+(x)e^{2n\phi_+(x)}\right]\Big[(R'_{11})_+(x)+(R'_{12})_+(x)e^{2n\phi_+(x)}\\
&\qquad+2n\phi'_+(x)(R_{12})_+(x)e^{2n\phi_+(x)}\Big]\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Usando *i)*, que $\phi'(x)=\psi(x)$ e que $|e^{\phi_+(x)}|=1$, para $x\in(-\alpha,\alpha)$, então a equação anterior pode ser reduzida a

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{K}_n(x,x)}{n} &= \left((R_{11})_+(x)+(R_{12})_+(x)e^{2n\phi_+(x)}\right)(R_{22})_+(x)\psi(x)\\
&\quad-\left((R_{21})_+(x)+(R_{22})_+e^{2n\phi_+(x)}\right)(R_{12})_+(x)\psi(x)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\\
&= \det R_+(x)\psi(x)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\\
&= \psi(x)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right), \qquad (5.13)
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração de 2. Como $\mathcal{K}_n(x,x) = \mathcal{R}_1(x)$, provamos também

Teorema 5.3.

$$\frac{\mathcal{R}_1(x)}{n} \to \psi(x),$$

com o limite acima considerado pontualmente em $(-\alpha, \alpha)$.

Observe que o limite do teorema acima não é universal, pois depende de ψ, e portanto da medida de equilíbrio de V.

Vamos agora provar *i)*.

Recorde que a função L, solução do **RHP L**, pode ser escrita como (veja (3.89) e sequência)

$$L(z) = I + \frac{1}{2\pi i}\int_{\widehat{\Sigma}_L} \frac{\mu_L(s)(v_L(s) - I)}{s - z} ds, \ z \in \mathbb{C}\backslash\widehat{\Sigma}_L.$$

Tomando as vizinhanças $U_\alpha, U_{-\alpha}$ suficientemente pequenas, de modo que $x \neq U_\alpha \cup U_{-\alpha}$, pela fórmula de Cauchy concluimos

$$L'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\widehat{\Sigma}_L} \frac{\mu_L(s)(v_L(s) - I)}{(s - z)^2}, \ |z - x| < \epsilon,$$

para ϵ suficientemente pequeno. Procedendo como em (3.92), concluimos que $L(z)$, $L'(z)$ são limitadas em uma vizinhança de x, quando $n \to \infty$.

Mas, para z suficientemente próximo de x,

$$R_+(z) = L(z)N_+(z).$$

Da forma explícita de $N(z)$ em (3.58), vemos que $N_+(z)$, $N'_+(z)$ são limitadas numa vizinhança de x, e portanto R_+, R'_+ também são limitadas, o que conclui *i)*, e o lema 5.1 está provado.

Para $x = 0$, vale também uma fórmula similar a (5.12) para a função de correlação não reescalada R_m.

Dada uma sequência (x_n) de pontos suficientemente próximos de x, com $x_n \to x$, então $\psi(x_n) = \psi(x) + o(1)$, e $|\psi'(x_n)| \leq c$, para alguma constante c.

Assim, (5.10) se reescreve como

$$\begin{aligned} n\phi_+\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x_n\right) &= n\phi_+(x_n)+ni\pi(\psi(x)+o(1))\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\\ &= n\phi_+(x_n)+ni\pi\xi\frac{\psi(x)+o(1)}{n\psi(x)+\mathcal{O}(1)}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\\ &= n\phi_+(x_n)+i\pi\xi\frac{\psi(x)}{\psi(x)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)}+o(1)\\ &= n\phi_+(x_n)+i\pi\xi+o(1). \end{aligned}$$

Cálculos semelhantes aos feitos para obter (5.11) nos levam a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mathcal{K}_n(x,x)}\mathcal{K}_n\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x_n,\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x_n\right)=\frac{e^{-2n\phi_+(x_n)-\pi i(\xi+\eta)}}{2\pi i(\xi-\eta)}\\ &\times\Bigg\{\left[(R_{11})_+(x_n)+(R_{12})_+(x_n)e^{2n\phi_+(x)+2\pi i\eta}\right]\left[(R_{21})_+(x_n)+(R_{22})_+(x_n)e^{2n\phi_+(x_n)+2\pi i\xi}\right]\\ &\quad-\left[(R_{11})_+(x_n)+(R_{12})_+(x_n)e^{2n\phi_+(x_n)+2\pi i\xi}\right]\left[(R_{21})_+(x_n)+(R_{22})_+(x_n)e^{2n\phi_+(x_n)+2\pi i\eta}\right]\\ &\quad+o(1)\Bigg\}, \end{aligned}$$

o que, após algumas simplificações, é reduzida a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{K}_n(x,x)}\mathcal{K}_n\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x_n,\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x_n\right) &= \mathcal{S}(\xi-\eta)\det R_+(x_n)+o(1)\\ &= \mathcal{S}(\xi-\eta)+o(1). \end{aligned}$$

Assim, concluimos que, se $x_n\to x$, então também vale

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\mathcal{K}_n(x,x)}\mathcal{K}_n\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x_n,\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x_n\right)=\mathcal{S}(\xi-\eta).$$

Em particular, se $x=0$, $x_n=\frac{r_n}{n^{\frac{1}{2m}}}$, (r_n) sequência limitada, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\mathcal{K}_n(0,0)}\mathcal{K}_n\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(0,0)}+\frac{r_n}{n^{\frac{1}{2m}}},\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(0,0)}+\frac{r_n}{n^{\frac{1}{2m}}}\right)=\mathcal{S}(\xi-\eta).$$

Mas

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_n(x,y) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\widetilde{\gamma}_j^2} e^{-\frac{n}{2}(V(x)+V(y))} \widetilde{\pi}_j(x)\widetilde{\pi}_j(y) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n^{\frac{1}{m}\left(j+\frac{1}{2}\right)}}{\gamma_j^2} e^{-\frac{n}{2}\left(ax^{2m}+ay^{2m}\right)} \frac{1}{n^{\frac{j}{m}}} \pi_j\left(xn^{\frac{1}{2m}}\right)\pi_j\left(yn^{\frac{1}{2m}}\right) \\ &= n^{\frac{1}{2m}} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\gamma_j^2} e^{-\frac{1}{2}\left(a\left(n^{\frac{1}{2m}}x\right)^{2m}+a\left(n^{\frac{1}{2m}}y\right)^{2m}\right)} \pi_j\left(xn^{\frac{1}{2m}}\right)\pi_j\left(yn^{\frac{1}{2m}}\right) \\ &= n^{\frac{1}{2m}} K_n\left(xn^{\frac{1}{2m}}, yn^{\frac{1}{2m}}\right).\end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mathcal{K}_n(0,0)}\mathcal{K}_n\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(0,0)}+\frac{r_n}{n^{\frac{1}{2m}}}, \frac{\eta}{\mathcal{K}_n(0,0)}+\frac{r_n}{n^{\frac{1}{2m}}}\right) = \\ &\qquad = \frac{1}{n^{\frac{1}{2m}}\mathcal{K}_n(0,0}\mathcal{K}_n\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2m}}}\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(0,0)}+r_n\right), \frac{1}{n^{\frac{1}{2m}}}\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(0,0)}+r_n\right)\right) \\ &\qquad = \frac{1}{K_n(0,0)}K_n\left(\frac{\xi}{K_n(0,0)}+r_n, \frac{\eta}{K_n(0,0)}+r_n\right).\end{aligned}$$

Provamos

Teorema 5.4 (Universalidade para $\boldsymbol{R_m}$)**.** *Sejam $x_1, \ldots, x_m$ distintos e (r_n) uma sequência limitada. Então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(K_n(0,0))^m} R_n\left(\frac{\xi_1}{K_n(0,0)}+r_n, \ldots, \frac{\xi_m}{K_n(0,0)}+r_n\right) = \det\left(\mathcal{S}(\xi_j-\xi_k)\right)_{1\le j,k\le m}.$$

Com tudo o que fizemos até agora, podemos provar que $D_{x,n}(\xi,\eta)$ também é limitada, quando $n\to\infty$. Observe que o limite no teorema 5.1 nada garante sobre a limitação de $D_{x,n}$, pois o limite sempre é considerado para $\xi \neq \eta$.

Observe que de (5.8),

$$\begin{aligned}D_{x,n} = &\frac{e^{nl}}{2\pi i(\xi-\eta)} e^{-\frac{n}{2}\left(V\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)+V\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)\right)} e^{n\left(g_+\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)+g_+\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)\right)} \\ &\times\Bigg\{\left[(T_{11})_+\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)-(T_{11})_+\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)\right](T_{21})_+\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right) \\ &-\left[(T_{21})_+\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)-(T_{21})_+\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)\right](T_{11})_+\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)\Bigg\}.\end{aligned} \tag{5.14}$$

É um simples exercício de análise que, se f é diferenciável em x, então

$$f'(x+\beta) = \lim_{\delta\to\beta} \frac{f(x+\delta) - f(x+\beta)}{\delta - \beta}.$$

Usando isto em (5.14), obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{\xi\to\eta} D_{x,n}(\xi,\eta)\mathcal{K}_n(x,x) = \frac{e^{nl}}{2\pi i} e^{-nV\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)+2ng_+\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)} \\ \times \left((T_{11})_+\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)(T_{21})_+\left(\frac{\eta}{\mathcal{K}_n(x,x)}+x\right)\right)'\end{aligned} \tag{5.15}$$

De acordo com o lema 5.1, R, R' são limitadas em uma vizinhança de x. Pela relação existente entre R e T em (3.96), concluimos que T, T' também são limitadas em uma vizinhança de x.

De (5.15) segue então que

$$\sup_{-\theta\le\eta\le\theta}\left(\lim_{\xi\to\eta}|D_{x,n}(\xi,\eta)|\right) \le c < \infty. \tag{5.16}$$

onde $c = c(x)$ independe de n.

Assim, para cada η, $D_{x,n}(\xi,\eta)$ é limitada numa vizinhança de (η,η), ou seja, para cada η, existe $\epsilon_\eta > 0$ tal que $D_{x,n}(\xi,\eta)$ é limitada em $B((\eta,\eta),\epsilon_\eta)$.

Como a diagonal $\Delta = \{(\eta,\eta)\in\mathbb{R}^2;\ -\theta\le\eta\le\theta\}$ é um conjunto compacto, podemos tomar ϵ independente de η, de modo que $D_{x,n}(\xi,\eta)$ seja limitado (uniformemente em n) em $B((\eta,\eta),\epsilon)$. Assim, $D_{x,n}(\xi,\eta)$ é uniformemente limitada na faixa $\Delta_\epsilon = \{(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2;\ d((\xi,\eta),\Delta) < \epsilon\}$.

Mas, da expressão de $D_{x,n}$ em (5.14), vemos que $D_{x,n}$ é uniformemente limitada em $[-\theta,\theta]^2\backslash\Delta_\epsilon$, e portanto concluimos

$$\sup_{\substack{-\theta\le\xi,\eta\le\theta\\ \xi\neq\eta}} |D_{x,n}(\xi,\eta)| \le c < \infty, \tag{5.17}$$

$c = c(x)$ independente de n.

A limitação de $D_{x,n}$ em (5.17) nos permite obter universalidade para a estatística

$$A_{x,n}(\theta) = \mathbb{P}\left(\text{nenhum autovalor em } \left(x - \frac{\theta}{\mathcal{K}_n(x,x)}, x + \frac{\theta}{\mathcal{K}_n(x,x)}\right)\right),\ x\in(-\alpha,\alpha),$$

para o ensemble unitário $e^{-n \operatorname{Tr} V(M)} dM$.

Teorema 5.5 (Universalidade para $\boldsymbol{A_{x,n}(\theta)}$)**.**

$$\lim_{n\to\infty} A_{x,n}(\theta) = \det\left(I - \mathbb{S}\right),$$

onde $\mathbb{S} : L^2((-\theta,\theta), d\theta) \to L^2((-\theta,\theta), d\theta)$ *é o operador integral com núcleo* $\mathcal{S}$*,*

$$\mathcal{S}(t,s) = \frac{\sin \pi(t-s)}{\pi(t-s)}.$$

Demonstração. Pelo teorema 4.3 e o raciocínio que o segue, vemos que

$$A_{x,n}(\theta) = \det\left(I - \mathbb{K}_n\big|_{L^2\left(x-\frac{\theta}{\mathcal{K}_n(x,x)}, x+\frac{\theta}{\mathcal{K}_n(x,x)}\right)}\right),$$

onde $\mathbb{K}_n\big|_{L^2\left(x-\frac{\theta}{\mathcal{K}_n(x,x)}, x+\frac{\theta}{\mathcal{K}_n(x,x)}\right)}$ é o operador integral em $L^2\left(x - \frac{\theta}{\mathcal{K}_n(x,x)}, x + \frac{\theta}{\mathcal{K}_n(x,x)}\right)$, com núcleo $\mathcal{K}_n(t,s)$.

Mudando variáveis em $L^2\left(x - \frac{\theta}{\mathcal{K}_n(x,x)}, x + \frac{\theta}{\mathcal{K}_n(x,x)}\right)$, $t \mapsto \mathcal{K}_n(x,x)(t-x)$ em cada uma das integrais na fórmula de Fredholm (4.18), reduzimos a

$$A_{x,n}(\theta) = \det\left(I - \mathbb{D}_n\right),$$

onde o operador $\mathbb{D}_n$ age sobre $L^2(-\theta,\theta)$, com núcleo $D_{x,n}(t,s)$ definido em (5.2).

Assim, o teorema afirma que

$$\det\left(I - \mathbb{D}_n\big|_{L^2(-\theta,\theta)}\right) \to \det(I - \mathbb{S}).$$

Observe que, se antes tinhamos operadores $\mathcal{K}_n$, cujos domínios variavam com n, agora podemos trabalhar com os operadores $\mathbb{D}_n$, todos definidos sob o mesmo espaço $L^2(-\theta,\theta)$.

Como os núcleos $D_n, \mathcal{S}$ são suaves, então os operadores $\mathbb{D}_n, \mathbb{S}$ são operadores trace class, e os determinantes acima estão bem definidos [54, teor. 13,pg. 345].

Prossigamos agora com a prova da convergência. A aplicação det é uma função contínua em $\mathscr{I}_1$ [67, lema 4, pg.323]. Assim, precisamos apenas provar que $\mathbb{D}_n \to \mathbb{S}$ em $\mathscr{I}_1$. Para isto, é suficiente provarmos que $\mathbb{D}_n \to \mathbb{S}$ fracamente e que $\operatorname{Tr} \mathbb{D}_n \to \operatorname{Tr} \mathbb{S}$ [70, teor. 2.21, pg. 27, teor. A.6, pg. 130].

A convergência fraca é equivalente a provar que, dadas $f, g \in L^2(-\theta, \theta)$,

$$\int_{-\theta}^{\theta}\int_{-\theta}^{\theta} D_{x,n}(t,s)f(t)g(s)dtds \to \int_{-\theta}^{\theta}\int_{-\theta}^{\theta} \mathcal{S}(t,s)f(t)g(s)dtds.$$

Mas, pelo teorema 5.1,

$$D_{x,n}(t,s) \to \mathcal{S}(t,s),$$

e $D_{x,n}$ é uniformemente limitada em n, de acordo com (5.17). Assim, por convergência dominada, segue a convergência fraca.

Para a convergência do traço, usaremos a fórmula

$$\operatorname{Tr} A = \int K(x,x)d\mu(x), \tag{5.18}$$

válida para todo operador integral *trace class* A com núcleo integral $K(x,y)$ [66, Lema pg. 65].

Pela continuidade de $D_{x,n}$, os cálculos para obter (5.13) mostram também que

$$\begin{aligned} D_{x,n}(\xi,\xi)\frac{\mathcal{K}_n(x,x)}{n} &= \lim_{\xi\to\eta} \frac{\mathcal{K}_n(x,x)}{n} D_{x,n}(\xi,\eta) \\ &= \det R_+\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)} + x\right)\psi\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)} + x\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \psi\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)} + x\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$D_{x,n}(t,t) = \frac{n}{\mathcal{K}_n(x,x)}\left(\psi\left(\frac{\xi}{\mathcal{K}_n(x,x)} + x\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Fazendo $n \to \infty$ e usando que ψ é contínua, $\mathcal{K}_n(x,x) \to \infty$ e $\frac{\mathcal{K}_n(x,x)}{n} \to \psi(x)$, concluimos

$$\lim_{n\to\infty} D_{x,n}(t,t) = 1.$$

Como ainda $D_{x,n}$ é uniformemente limitada em n, usando convergência dominada em (5.18), concluimos

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Tr} \mathbb{D}_n = \lim_{n\to\infty} \int_{-\theta,\theta} D_{x,n}(t,t)dt = 2\theta.$$

Por outro lado, aplicando (5.18) diretamente,

$$\operatorname{Tr} \mathbb{S} = \int_{-\theta}^{\theta} \mathcal{S}(t,t)dt = \int_{-\theta}^{\theta} d\theta = 2\theta,$$

e o teorema está provado. □

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos neste trabalho a relação existente entre polinômios ortogonais e matrizes aleatórias. Os resultados apresentados aqui foram generalizados em várias direções, e agora comentaremos um pouco sobre estas generalizações.

Tudo o que foi desenvolvido se baseia principalmente na formulação de polinômios ortogonais via problemas de Riemann-Hilbert apresentada em 2.3. Esta formulação foi primeiramente obtida por Fokas, Its e Kitaev [43,44], no contexto de equações de Painlevé. Posteriormente, Deift e Zhou desenvolveram o método Steepest Descent para problemas de Riemann-Hilbert em dimensão dois, aplicando-o nas equações KdV [33,34] e nas equações de Painlevé [35]. Somente alguns anos depois o método Steepest Descent foi aplicado na teoria de polinômios ortogonais, também por Deift e Zhou, em uma série de artigos [29, 31, 32].

Esta dissertação se baseou principalmente em [29], artigo no qual, conforme já comentado no decorrer do texto, vários resultados que foram aqui apresentados são provados sob hipóteses mais gerais. Neste artigo são estudados, como aqui, medidas variantes da forma

$$e^{-nV(x)},$$

mas assumindo que V é real analítica e

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{V(x)}{\log(x^2+1)} = \infty.$$

Este é o caso, por exemplo, quando $V(x) = ax^{2m}$ é um polinômio par, caso o qual

estudamos em grandes detalhes. O caso geral de V analítica é tratado com as mesmas idéias do caso V monômio par. Porém, dificuldades técnicas o tornam mais longo e exaustivo de ser analisado, em especial em dois aspectos.

O primeiro deles diz respeito à primeira deformação, a qual envolve a obtenção da medida de equilíbrio $d\mu^V$. A deformação é feita do mesmo modo, masa medida de equilíbrio não pode ser obtida explicitamente como no teorema 3.4. Ela continua existindo, sendo absolutamente contínua, tendo suporte compacto e sendo dada por

$$\psi_V(x) = \sqrt{R(x)}h_1(x),$$

onde, no caso particular que estudamos, $R(x) = (x-\alpha)(x+\alpha)$, e h_1 é um polinômio. Mas no caso geral, o suporte consiste de um número finito de intervalos, digamos (a_j, b_j)'s, não necessariamente um único intervalo. h_1 não é mais necessariamente um polinômio, mas sim real analítica, e

$$R(z) = \prod_j (z - b_j)(z - a_j).$$

As equações (3.6),(3.12) agora valem com exceção de um número finito de pontos no interior do suporte, nos quais ψ_V se anula. Deste modo, a função g pode se anular em pontos que não os extremos dos intervalos do suporte da medida de equilíbrio. Estas diferenças acabam gerando dificuldades nas análises global e local do referido RHP. Esta análise da medida de equilíbrio é feita baseada em [30].

O segundo aspecto se refere às análises local e global, em virtude das características diferentes da medida de equilíbrio. Na solução do nosso problema de Riemann-Hilbert modelo da análise global, o RHP original é transferido para um problema modelo na superfície de Riemann de duas folhas associada a $\sqrt{R(z)}$, e a solução deste novo modelo é construida a partir de funções θ na superfície. A análise local é dividida em vários casos (regular, quando a medida de equilíbrio não se anula no interior no suporte e se anula com ordem de raiz quadrada nos extremos dos intervalos do suporte, e caso não regular, onde ocorre o contrário). No caso regular, são construidas parametrizes de modo similar ao que fizemos aqui, através de funções de Airy, com a única diferença que devem ser construidas parametrizes não apenas em dois pontos, mas em todos os pontos extremos dos intervalos do suporte. O caso não regular é mais complexo, e as parametrizes são construidas através de funções especiais que não as funções de Airy.

Toda a teoria básica desenvolvida no capítulo 4 pode ser repetida para os ensembles ortogonal e simplético [27]. Em particular, teoremas similares ao 4.2 podem ser obtidos,

levando a equações para a esperança similares à dada pelo teorema 4.3.

No caso ortogonal, o grupo unitário $U(n)$ no teorema 4.2 é substituido pelo grupo ortogonal $O(n)$, levando a representação da esperança em 4.3 substituindo o determinante de Fredholm pela raiz quadrada de um determinante regularizado sobre $L^2 \times L^2$ [27, pag. 83], e os operadores $\mathbb{K}_n, \chi_g$ se transformam em operadores sobre $L^2 \times L^2$.

Já caso simplético, no teorema 4.2 $U(n)$ é substituido pelo grupo unitário-simplético $Sp(n)$, consistindo das matrizes simpléticas unitárias de ordem $2n \times 2n$, e a equação similar à dada pelo teorema 4.3 é a obtida substituindo o determinante de Fredholm pela raiz quadrada do determinante de Fredholm, com os operadores $\mathbb{K}_n, \chi_g$ agindo em $L^2 \times L^2$.

Estes resultados permitiram que os resultados de universalidade apresentados nesta dissertação fossem obtidos para os ensembles simplético e ortogonal [26], para potenciais V sendo polinômios de grau par e termo de maior grau positivo, e, no caso ortogonal, impondo ainda que a dimensão das matrizes n seja par. Neste caso, no lugar de

$$\mathcal{S}(x,y) = \frac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)}$$

aparecem matrizes 2×2 na distribuição limite, cujas entradas são dadas em termos de $\mathcal{S}$ [27, pag. 142] (recorde que nos casos ortogonal e simplético, lidamos com operadores sobre $L^2 \times L^2$).

Voltando ao ensemble unitário, todos os resultados de universalidade apresentados no capítulo 5 foram provados primeiramente por Pastur e Shcherbina [62], sob condições mais fracas que analiticidade, usando outros métodos que não os que apresentamos. Posteriormente, Deift, Kriecherbauer, McLaughlin, Venakides e Zhou [29] provaram os mesmos resultados para V analítica, através do método aqui apresentado.

Em [29], foi provado também, pela primeira vez, universalidade para a distribuição local do espaçamento entre os autovalores. Seja (t_n) uma sequência de números reais tal que

$$t_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \frac{t_n}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

e tome x_0 em $d\mu^V$, de modo que $\psi_V(x_0) = \frac{d\mu^V}{dx}(x_0) > 0$. Sendo, como sempre, $\lambda_1(M) \leq \ldots \leq \lambda_n(M)$ os autovalores de uma matriz hermitiana M, distribuida de acordo com $e^{-\operatorname{Tr} V(M)} dM$, defina

$$S(s, t_n, x_0; M) = \frac{\#\{1 \leq j \leq n-1;\ \lambda_{j+1}(M) - \lambda_j(M) \leq \frac{s}{n\psi_V(x_0)},\ |\lambda_j - x_0| \leq \frac{t_n}{n\psi_V(x_0)}\}}{2t_n}.$$

$2t_n$ é (assintoticamente) o valor esperado do número de autovalores em $(x_0-\frac{t_n}{n\psi_V(x_0}, x_0+\frac{t_n}{n\psi_V(x_0)})$, de modo que $\mathbb{E}(S(s,t_n,x_0;\cdot))$ é o número esperado de autovalores consecutivos de M na vizinhança $(x_0-\frac{t_n}{n\psi_V(x_0}, x_0+\frac{t_n}{n\psi_V(x_0)})$ de x_0, cuja distância entre eles é menor ou igual a $\frac{s}{n\psi_V(x_0)}$. Então, vale

Teorema 6.1.

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(S(s,t_n,x_0;\cdot)\right)=\int_0^s p(u)du,\quad p(u)=\frac{d^2}{du}\det\left(I-\mathbb{S}\big|_{L^2(0,s)}\right).$$

No final da seção 3.2, comentamos que, se

$$\mu_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{z_j},$$

onde $z_1,\ldots,z_n$ são os zeros do polinômio π_n, ortogonal com relação à $e^{-nV(x)}dx$, então

$$d\mu_n(x)\rightharpoonup d\mu^V.$$

Sejam $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ os autovalores de M, matriz hermitiana distribuida de acordo com $e^{-n\,\mathrm{Tr}\,V(M)}dM$. Seja λ_n^* a distribuição empírica dos autovalores,

$$\lambda_n^*=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{\lambda_j}.$$

Então também vale

$$d\lambda_n^*\rightharpoonup d\mu^V,\ n\to\infty. \tag{6.1}$$

No caso particular $V(x)=x^2$, obtemos

$$d\lambda_n^*(x)\rightharpoonup\frac{1}{\pi}\sqrt{2-x^2}\chi_{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}(x)dx.$$

A distribuição limite do lado direito é conhecida como *distribuição semicircular de Wigner*.

Observe que agora a distribuição limite da medida empírica em (6.1) não é universal. No entanto, se considerarmos matrizes de Wigner, vale um resultado universal.

Seja M matriz hermitiana, cujas entradas da diagonal e as partes real e imaginária das entradas da parte triangular superior são variáveis aleatórias independentes, e identicamente distribuidas de acordo com uma distribuição fixa de esperança 0 e variância 1.

Seja μ_n a medida empírica dos autovalores reescalados,

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{\frac{\lambda_j}{\sqrt{n}}}.$$

Então μ_n converge fracamente para a distribuição semicircular de Wigner [4,73]. Este resultado é conhecido por *Lei do semicírculo de Wigner*.

Resultado similar vale quando consideramos matrizes quaisquer, cujas entradas são independentes e identicamente distribuidas. Seja $M = (M_{ij})$ uma matriz complexa, com entradas independentes e identicamente distribuidas de acordo com uma distribuição (complexa) fixa, de esperança 0 e variância 1, com autovalores (complexos) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Seja μ_n a medida empírica dos autovalores normalizados

$$d\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{\frac{\lambda_j}{\sqrt{n}}}.$$

Então $d\mu_n$ converge, em probabilidade e fracamente, para a distribuição uniforme no disco unitário $D = \{|z| \leq 1\}$. Este teorema foi provado em várias etapas, tendo sido finalizado por Tao e Vu. Tanto a demonstração quanto um review histórico completo podem ser vistos em [74].

Outras quantidades em matrizes aleatórias, para várias classes de distribuições, podem ser estudadas. Por exemplo, o módulo do maior autovalor [4, 7, 73] e o comportamento dos autovalores em vizinhanças dos extremos dos intervalos do suporte da medida de equilíbrio - a chamada universalidade bulk [4, 24, 25].

Ainda sobre ensembles unitários, são estudadas também generalizações do modelo $e^{-n\,\mathrm{Tr}\,M}dM$, dos quais podemos citar

- O modelo de duas matrizes [22, 42, 45, 49, 53, 56], consistindo de distribuições da forma

  $$e^{-n\,\mathrm{Tr}(V(M_1)+Q(M_2)-\tau M_1 M_2)}dM_1 dM_2,$$

  onde M_1, M_2 são matrizes hermitianas, V, W funções analíticas e $\tau \neq 0$ uma constante de acoplamento;

- O modelo de matrizes normais [3,40,41,52,58], consistindo de distribuições da forma

  $$e^{-n\,\mathrm{Tr}\,V(M)}dM$$

sobre as matrizes normais M, onde V é uma função analítica.

- O modelo das matrizes hermitianas com fonte externa, consistindo das distribuições da forma

$$e^{-n\,\mathrm{Tr}(V(M)-AM)}dM, \tag{6.2}$$

onde M é uma matriz hermitiana $n \times n$, V é uma função real analítica e A é uma matriz hermitiana $n \times n$ fixa - a fonte externa.

De nosso particular interesse é o modelo com fonte externa, e finalizamos nossa dissertação com uma breve introdução a este modelo.

O modelo das matrizes hermitianas com fonte externa é uma generalização natural dos ensembles unitários. A pergunta natural que surge é se para este modelo também são válidos resultados de universalidade como os apresentados no capítulo 5.

Como a matriz A é fixa, e V é uma função analítica, é de se esperar que, para n grande, o crescimento de V anule o comportamento imposto pela fonte externa, isto é, esperamos que

$$e^{-n\,\mathrm{Tr}(V(M)-AM)} \sim e^{-n\,\mathrm{Tr}\,V(M)},$$

e assim, todos os resultados de universalidade para os ensembles unitários continuem valendo para o modelo com fonte externa. Porém, a análise deste modelo é muito mais complexa do que a análise feita para os ensembles unitários.

Universalidade para o modelo (6.2) foi provada, para o caso gaussiano $V(x) = x^2$, primeiramente por Pastur [62, 63] e Brézin-Hikami [13–17], porém seus métodos empregados não podem ser estendidos para casos mais gerais.

Diagonalizando a matriz A e usando a invariância por transformações unitárias da parte $e^{-n\,\mathrm{Tr}\,V(M)}$ em (6.2), podemos supor que A é uma matriz diagonal, com autovalores $a_1, \ldots, a_p$, de respectivas multiplicidades $n_1, \ldots, n_p$, de modo que $\sum_{j=1}^{p} n_j = n$. Para o que segue, é importante estabelecer uma ordem nos autovalores. Assim, sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ todos os autovalores de A numa ordem fixa, e k_i o número de vezes que a_i aparece na sequência $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Para $k = 1, \ldots, n$, sendo Σ_k o conjunto de funções

$$\Sigma_k = \{x^j e^{a_i x};\ i = 1, \ldots, p,\ j = 0, \ldots, k_i - 1\},$$

existe uma única função Q_{k-1} em $\operatorname{span}\Sigma_k$ que satisfaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^j Q_{k-1}(x) e^{-V(x)} dx = 0,\ j = 0, \ldots, k-2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{k-1} Q_{k-1}(x) e^{-V(x)} dx = 1.$$

Também, existe um único polinômio P_{k-1} mônico que satisfaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^j P_{k-1}(x) e^{-V(x)+a_i x} dx = 0,\ i = 1, \ldots, p,\ j = 0, \ldots, k_i - 1,$$

Uma primeira conexão entre as funções definidas acima e o modelo com fonte externa é revelada pela relação [11]

$$P_k(z) = \mathbb{E}(\det(z - M)),$$

onde M é uma matriz hermitiana $k \times k$, distribuida de acordo com (6.2), escolhendo A como sendo matriz diagonal com autovalores a_j de respectivas multiplicidades k_j.

As funções P's e Q's formam um sistema biortogonal, no sentido de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_j(x) Q_k(x) e^{-V(x)} dx = \delta_{ij},\ i, j = 0, \ldots, n-1.$$

Com isto, introduzimos o núcleo

$$K_n(x, y) = e^{\frac{1}{2}(V(x)+V(y))} \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x) Q_k(y). \tag{6.3}$$

Apesar das funções P's, Q's dependerem da ordem dos autovalores, K_n não depende desta ordem.

K_n como em (6.3) faz exatamente o papel do polinômio núcleo nos ensembles unitários. Com as notações introduzidas, vale

Teorema 6.2 ([11]). *A distribuição conjunta dos autovalores de uma matriz distribuida de acordo com* (6.2)*, a saber* $P_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) d^n\lambda$*, pode ser escrita como um determinante,*

$$P_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) d^n\lambda = \frac{1}{n} \det\left(K_n(\lambda_i, \lambda_j)\right)_{1 \le i,j \le n},$$

com K_n *dado por* (6.3)*. A função de correlação de* m *pontos assume a forma*

$$R_m(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \det\left(K_n(\lambda_i, \lambda_j)\right)_{1 \le i,j \le m}.$$

Este teorema é exatamente a generalização das equações (4.14) e (4.22) para o modelo com fonte externa.

No caso em que A possui dois autovalores distintos o teorema anterior permite que seja analisado o comportamento dos autovalores para n grande, via polinômios ortogonais e problemas de Riemann-Hilbert, generalizando o método que apresentamos nesta dissertação.

Suponha então que A possua dois autovalores distintos, digamos a_1 e a_2 com multiplicidades n_1 e n_2 respectivamente. Como antes, seja $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ uma ordem fixa sobre os autovalores, isto é, $A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Por conveniência, vamos assumir que

$$\alpha_{n-1} = a_1,\ \alpha_n = a_2, \alpha_{n+1} = a_1,\ \alpha_{n+2} = a_2.$$

Vamos introduzir agora novas notações para as funções P's e Q's.

Seja P_{k_1,k_2} o polinômio mônico de grau $k_1 + k_2$ que satisfaz

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^j P_{k_1,k_2}(x) e^{-V(x)+a_i x} dx = 0,\ i = 1, 2,\ j = 0, \ldots, k_j - 2.$$

O polinômio P_{k_1,k_2} é chamado de polinômio multi ortogonal do tipo II com relação aos pesos $e^{-V(x)+a_1 x}$ e $e^{-V(x)+a_2 x}$ [48, 60].

Defina também

$$Q_{k_1,k_2(x)} = A_{k_1,k_2}(x) e^{a_1 x} + B_{k_1,k_2}(x) e^{a_2 x},$$

onde A_{k_1,k_2}, B_{k_1,k_2} são polinômios de graus k_1 e k_2, respectivamente, determinados por

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q_{k_1,k_2}(x) e^{-V(x)} dx = \begin{cases} 0, & j = 0, \ldots, k_1 + k_2 - 2, \\ 1, & j = k_1 + k_2 - 1. \end{cases}$$

Os polinômios A's e B's são chamados de polinômios multi ortogonais do tipo I com relação aos pesos $e^{-V(x)+a_1 x}$ e $e^{-V(x)+a_2 x}$ [48, 60].

Com estas notações, se a_j aparece k_j vezes em $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, então

$$P_k = P_{k_1,k_2}, \quad Q_{k-1} = Q_{k_1,k_2},$$

onde P_k, Q_{k-1} são como antes.

Vale uma fórmula análoga a de Christoffel-Darboux (5.3)

Teorema 6.3 ([11]).

$$K_n(x,y) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(V(x)+V(y))}}{x-y}\Bigg(P_{n_1,n_2}(x)Q_{n_1,n_2}(y) - \frac{h^{(1)}_{n_1,n_2}}{h^{(1)}_{n_1-1,n_2}}P_{n_1-1,n_2}(x)Q_{n_1+1,n_2}(y) - \frac{h^{(2)}_{n_1,n_2}}{h^{(2)}_{n_1,n_2-1}}P_{n_1,n_2-1}(x)Q_{n_1,n_2+1}(y)\Bigg),$$

onde K_n *é dado em* (6.3) *e*

$$h^{(j)}_{k_1,k_2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{k_j}P_{k_1,k_2}(x)e^{-V(x)+a_j(x)}dx,\ j=1,2.$$

Esta fórmula permite que se caracterize o núcleo K_n em termos da solução de um problema de Riemann-Hilbert.

Procure uma matriz $Y : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R} \to \mathbb{C}^{3\times 3}$ que satisfaça

i) Y é analítica em $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$;

ii) Para $x \in \mathbb{R}$,

$$Y_+(x) = Y_-(x)\begin{pmatrix} 1 & w_1(x) & w_2(x) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde

$$w_j(x) = e^{-V(x)+a_jx};$$

iii) Quando $z \to \infty$,

$$Y(z) = \left(I + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\begin{pmatrix} z^n & 0 & 0 \\ 0 & z^{-n_1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-n_2} \end{pmatrix}.$$

A solução deste problema é dada por [75]

$$Y = \begin{pmatrix} P_{n_1,n_2} & C^{\mathbb{R}}(P_{n_1,n_1}w_1) & C^{\mathbb{R}}(P_{n_1,n_2}w_2) \\ c_1P_{n_1-1,n_2} & c_1C^{\mathbb{R}}(P_{n_1-1,n_2}w_1) & c_1C^{\mathbb{R}}(P_{n_1-1,n_2}w_2) \\ c_2P_{n_1,n_2-1} & c_2C^{\mathbb{R}}(P_{n_1,n_2-1}w_1) & c_2C^{\mathbb{R}}(P_{n_1,n_2-1}w_2), \end{pmatrix},$$

onde $C^{\mathbb{R}}$ é a transformada de Cauchy sobre $\mathbb{R}$ e

$$c_1 = -\frac{2\pi i}{h^{(1)}_{n_1-1,n_2}}, \quad c_2 = -\frac{2\pi i}{h^{(2)}_{n_1,n_2-1}}.$$

É possível também caracterizar as funções Q's por um problema de Riemann-Hilbert semelhante, assim também como caracterizar polinômios multi ortogonais não apenas com relação à duas medidas, mas r medidas, em termos de problemas de Riemann-Hilbert de tamanho $(r+1)\times(r+1)$ [75].

Através da solução Y, podemos recuperar o núcleo K_n pela fórmula [21, 51]

$$K_n(x,y)=\frac{1}{2\pi i(x-y)}\begin{pmatrix}0 & w_1(y) & w_2(y)\end{pmatrix}Y_+^{-1}(y)Y_+(x)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \tag{6.4}$$

que é a generalização da fórmula (5.7) (para o núcleo sem reescalagem). Em virtude do teorema 6.2, esta fórmula permite obter resultados de universalidade analisando o comportamento assintótico do problema de Riemann-Hilbert Y, através do método Steepest Descent. No entanto, por estarmos neste caso lidando com um problema 3×3, novas dificuldades aparecem, e se faz necessário o uso de diferentes técnicas na análise do problema.

Não apenas universalidade, mas também limites para os polinômios multi ortogonais podem ser obtidos em virtude desta caracterização por meio de problemas de Riemann-Hilbert.

Supondo n par e $A=\operatorname{diag}(a,\dots,a,-a,\dots,-a)$, $a>0$, com a e $-a$ tendo multiplicidade $\frac{n}{2}$, através da fórmula (6.4), Aptekarev, Bleher e Kuijlaars [6, 10, 12] provaram universalidade para o modelo com fonte externa, no caso gaussiano $V(x)=\frac{1}{2}x^2$. Apesar dos resultados já terem sido obtidos anteriormente por Pastur e Brézin-Hikami, em virtude da representação (6.4) as técnicas usadas por Aptekarev, Bleher e Kuijlaars são passíveis de generalização.

Ainda sob a condição $A=\operatorname{diag}(a,\dots,a,-a,\dots,-a)$, recentemente Bleher, Delvaux e Kuijlaars [9] estenderam os resultados anteriores para o caso em que V é um polinômio par, $V(x)=V(-x)$.

É um problema ainda em aberto estender os resultados anteriores para V analítica, remover a simetria dos autovalores $-a,a$, e também considerar A com mais de dois autovalores. Para abordar estes problemas, é necessário desenvolver novas técnicas. No futuro, pretendemos estudar estas questões.

REFERÊNCIAS

[1] Mark J. Ablowitz and Athanassios S. Fokas, *Complex variables: introduction and applications*, second ed., Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2003. MR 1989049 (2004f:30001)

[2] G. Akemann, J. Baik, and P. Di Francesco (eds.), *The Oxford handbook on random matrix theory*, Oxford Handbook in Mathematics, Oxford University Press, 2011.

[3] Y. Ameur, H. Hedenmalm, and N. Makarov, *Fluctuations of eigenvalues of random normal matrices*, Duke Math. J. **159** (2011), no. 1, 31–81. MR 2817648

[4] G. W. Anderson, A. Guionnet, and O. Zeitouni, *An introduction to random matrices*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, no. 118, Cambridge University Press, 2010.

[5] G. Andrews, *The theory of partitions*, paperback ed., Cambridge University Press, 1998.

[6] A. I. Aptekarev, P. M. Bleher, and A. B. J. Kuijlaars, *Large n limit of Gaussian random matrices with external source. II*, Comm. Math. Phys. **259** (2005), no. 2, 367–389. MR 2172687 (2006f:82036)

[7] Z. Bai and J. Silverstein, *Spectral analysis of large dimensional random matrices*, Springer Series in Statistics, Springer Verlag, 2010.

[8] R. Bartle, *The elements of integration and Lebesgue measure*, John Wiley and Sons, New York, NY, 1995.

[9] P. Bleher, S. Delvaux, and A. B. J. Kuijlaars, *Random matrix model with external source and a constrained vector equilibrium problem*, Comm. Pure Appl. Math. **64** (2011), no. 1, 116–160. MR 2743878 (2011h:60013)

[10] P. Bleher and A. B. J. Kuijlaars, *Large n limit of Gaussian random matrices with external source. I*, Comm. Math. Phys. **252** (2004), no. 1-3, 43–76. MR 2103904 (2005i:82031)

[11] P. M. Bleher and A. B. J. Kuijlaars, *Random matrices with external source and multiple orthogonal polynomials*, Int. Math. Res. Not. (2004), no. 3, 109–129. MR 2038771 (2004k:82034)

[12] ———, *Large n limit of Gaussian random matrices with external source. III. Double scaling limit*, Comm. Math. Phys. **270** (2007), no. 2, 481–517. MR 2276453 (2008b:82032)

[13] E. Brézin and S. Hikami, *Correlations of nearby levels induced by a random potential*, Nuclear Phys. B **479** (1996), no. 3, 697–706. MR 1418841 (97j:82080)

[14] ———, *Extension of level spacing universality*, Phys. Rev. E **56** (1997), 264–269.

[15] ———, *Spectral form factor in a random matrix theory*, Phys. Rev. E (3) **55** (1997), no. 4, 4067–4083. MR 1449379 (98g:15038)

[16] ———, *Level spacing of random matrices in an external source*, Phys. Rev. E **58** (1998), 7176–7185.

[17] ———, *Universal singularity at the closure of a gap in a random matrix theory*, Phys. Rev. E **57** (1998), 4140–4149.

[18] T. Claeys, A. B. J. Kuijlaars, and M. Vanlessen, *Multi-critical unitary random matrix ensembles and the general Painlevé II equation*, Ann. of Math. **168** (2008), 601–642.

[19] R. R. Coifman, A. McIntosh, and Y. Meyer, *L'intégrale de Cauchy définit un un opérateur borné sur L^2 pour les courbes lipschitziennes. (French) [The Cauchy integral defines a bounded operator on L^2 for Lipschitz curves]*, Ann. of Math. **116** (1982), 361–387.

[20] J. Conway, *Functions of one complex variable I*, Springer Verlag, New York, USA, 1986.

[21] E. Daems and A. B. J. Kuijlaars, *A Christoffel-Darboux formula for multiple orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory **130** (2004), no. 2, 190–202. MR 2100703 (2005g:42059)

[22] J-M. Daul, V.A. Kazakov, and I.K. Kostov, *Rational theories of 2D gravity from the two-matrix model*, Nuclear Phys. B **409** (1993), 311–338.

[23] P. Deift, *Orthogonal polynomials and random matrices: A Riemann-Hilbert approach*, Courant Lecture Notes, no. 3, American Mathematical Society, 2000.

[24] ———, *Universality for mathematical and physical systems*, International Congress of Mathematicians, vol. I, Eur. Math. Soc. Zurich, 2007, pp. 125–152.

[25] P. Deift and D. Gioev, *Universality at the edge of the spectrum for unitary, orthogonal and sympletic ensembles of random matrices*, Comm. Pure Appl. Math. **60** (2007), no. 6, 867–910.

[26] ———, *Universality in random matrix theory for orthogonal and sympletic ensembles*, Int. Math. Res. Pap. IMRP (2007), no. 2, 116 pp.

[27] ———, *Random matrix theory: Invariant ensembles and universality*, Courant Lecture Notes, no. 18, American Mathematical Society, 2009.

[28] P. Deift, A. R. Its, and X. Zhou, *A Riemann-Hilbert approach to asymptotic problems arising in the theory of random matrix models and also in the theory of integrable statistical mechanics*, Ann. of Math. **146** (1997), 149–235.

[29] P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T-R McLaughlin, S. Venakides, and X. Zhou, *Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory*, Comm. Pure Appl. Math. **52** (1999), 1335–1425.

[30] P. Deift, K. T-R McLaughlin, and T. Kriecherbauer, *New results on the equilibrium measure for logarithmic potentials in the presence of an external field*, J. Approx. Theory **95** (1998), 388–475.

[31] P. Deift, K. T-R McLaughlin, T. Kriecherbauer, S. Venakides, and X. Zhou, *Asymptotics of polynomials with respect to varying exponential weights*, Internat. Math. Res. Notices **16** (1997), 759–782.

[32] ———, *Strong asymptotics of orthogonal polynomials with respect to exponential weights*, Comm. Pure Appl. Math. **52** (1999), 1491–1552.

[33] P. Deift, S. Venakides, and X. Zhou, *New results in small dispersion KdV by an extension of the steepest descent method for Riemann-Hilbert problems*, Internat. Math. Res. Notices **6** (1997), 286–299.

[34] P. Deift and X. Zhou, *A steepest descent method for oscillatory Riemann-Hilbert problem, Asymptotics for the MKdV equation*, Comm. Pure Appl. Math. **48** (1993), 277–337.

[35] P. Deift and X. Zhou, *Aymptotics for the Painlevé II equation*, Comm. Pure Appl. Math. **48** (1995), no. 3, 277–337.

[36] S. Delvaux, A. B. J. Kuijlaars, and L. Zhang, *Critical behavior of non-intersecting Brownian-motions at a tacnode*, Comm. Pure Appl. Math. **64** (2011), 1305–1383.

[37] F. Dyson, *A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix*, J. Math. Phys. **3** (1962), 1191–1198.

[38] ———, *Statistical theory of the energy levels of complex systems, I-III*, J. Math. Phys. **3** (1962), 140–156, 157–165, 166–175.

[39] ———, *The threefold way. Algebraic structure of symmetry groups and ensembles in quantum mechanics*, J. Math. Phys. **3** (1962), 1199–1215.

[40] P. Elbau, *Random normal matrices and polynomial curves*, Ph.D. thesis, ETH Zurich, 2006, arXiv:0707.0425.

[41] P. Elbau and G. Felder, *Density of eigenvalues of random normal matrices*, Comm. Math. Phys. **259** (2005), no. 2, 433–450. MR 2172690 (2006i:82034)

[42] N.M. Ercolani and K.T.-R. McLaughlin, *Asymptotics and integrable structures for biorthogonal polynomials associated to a random two-matrix model*, Phys. D **152/153** (2001), 232–268.

[43] A. S. Fokas, A. R. Its, and A. V. Kitaev, *Discrete Painlevé equations and their appearance in quantum gravity*, Comm. Math. Phys. **142** (1991), no. 2, 313–344.

[44] ———, *The isomonodromy approach to matrix models in 2d quantum gravity*, Comm. Math. Phys. **147** (1992), no. 2, 395–430.

[45] P. Di Francesco, P. Ginsparg, and J. Zinn-Justin, *2D gravity and random matrices*, Phys. Rep. **254** (1995), 1–169.

[46] Felix R. Gantmacher, *Matrizentheorie*, Springer-Verlag, Berlin, 1986, With an appendix by V. B. Lidskij, With a preface by D. P. Želobenko, Translated from the second Russian edition by Helmut Boseck, Dietmar Soyka and Klaus Stengert. MR 869996 (87k:15001)

[47] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, second ed., Colloquium Publications, vol. 31, American Mathematical Society, 2000.

[48] M. E. H. Ismail, *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 98, Cambridge University Press, Cambridge, 2005, With two chapters by Walter Van Assche, With a foreword by Richard A. Askey. MR 2191786 (2007f:33001)

[49] C. Itzykson and J. B. Zuber, *The planar approximation II*, J. Math. Phys. **21** (1980), 411–421.

[50] K. Johansson, *On fluctuations of eigenvalues of random hermitian matrices*, Duke Math. J. **91** (1998), no. 1, 151–204.

[51] A. B. J. Kuijlaars, *Multiple orthogonal polynomials in random matrix theory*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume III (New Delhi), Hindustan Book Agency, 2010, pp. 1417–1432. MR 2827849

[52] A. B. J. Kuijlaars and P. M. Bleher, *Orthogonal polynomials in the normal matrix model with a cubic potential*, arXiv:1106.6168, 2011.

[53] A. B. J. Kuijlaars and M. Duits, *Universality in the two matrix model: a riemann-hilbert steepest descent analysis*, Comm. Pure Appl. Math. **62** (2009), 1076–1153.

[54] Peter D. Lax, *Functional analysis*, John Wiley & Sons Inc., 2002.

[55] E. L. Lima, *Espaços métricos*, Projeto Euclides, Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil, Terceira Edição.

[56] M. L. Mehta, *A method of integration over matrix variables*, Comm. Math. Phys. **79** (1981), 327–340.

[57] ———, *Random matrices*, Elsevier, San Diego, 2004 - Third Edition.

[58] M. Mineev-Weinstein, M. Putinar, and R. Teodorescu, *Random matrices in 2D, Laplacian growth and operator theory*, J. Phys. A **41** (2008), no. 26, 263001, 74. MR 2455097 (2010g:82007)

[59] H. L. Montgomery, *The pair correlation of the zeta function*, Proc. Symp. Pure Math. **24** (1973), 181–193.

[60] E. M. Nikishin and V. N. Sorokin, *Rational approximations and orthogonality*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 92, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991, Translated from the Russian by Ralph P. Boas. MR 1130396 (92i:30037)

[61] A. Odlyzko, *On the distribution of spacings between zeros of the zeta function*, Math. Comp. **177** (1987), 273–308.

[62] L. Pastur and M. Shcherbina, *Universality of the local eigenvalue statistics for a class of unitary invariant random matrix ensembles*, J. Statist. Phys. **86** (1997), no. 1-2, 109–147.

[63] L. A. Pastur, *The spectrum of random matrices*, Teoret. Mat. Fiz. **10** (1972), no. 1, 102–112. MR 0475502 (57 #15106)

[64] C. E Porter (ed.), *Statistical theory of spectra: Fluctuations*, Academic Press, New York, 1965.

[65] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics, volume I - Functional analysis*, Academic Press, San Diego, 1978.

[66] ———, *Methods of modern mathematical physics, volume III - Scattering theory*, Academic Press, San Diego, 1978.

[67] ———, *Methods of modern mathematical physics, volume IV - Analysis of operators*, Academic Press, San Diego, 1978.

[68] Walter Rudin, *Real and complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. MR 924157 (88k:00002)

[69] Z. Rudnick and P. Sarnak, *Zeros of principal L-functions and random matrix theory. A celebration of John F. Nash, Jr.*, Duke Math. J. **81, no 2** (1996), 269–322.

[70] B. Simon, *Trace ideals and their applications*, second ed., Mathematical Surveys and Monographs - vol. 120, American Mathematical Society, New York, 2005.

[71] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Mathematical Series, 30, Princeton University Press, 1970.

[72] G. Szegö, *Orthogonal polynomials*, fourth ed., American Mathematical Society, Colloquium Publications, no. 23, American Mathematical Society, 1975.

[73] T. Tao, *Topics in random matrix theory*, Course notes.

[74] T. Tao and V. Vu, *Random matrices: universality of ESDs and the circular law*, Ann. Probab. **38** (2010), no. 5, 2023–2065.

[75] W. Van Assche, J. S. Geronimo, and A. B. J. Kuijlaars, *Riemann-Hilbert problems for multiple orthogonal polynomials*, Special functions 2000: current perspective and future directions (Tempe, AZ), NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., vol. 30, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001, pp. 23–59. MR 2006283 (2004e:30065)

[76] F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, USA, 1983.

[77] E. P. Wigner, *Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions*, Ann. of Math. **62** (1955), 548–564.

[78] ———, *On the distribution of the roots of certain symmetric matrices*, Ann. of Math. **67** (1958), 325–327.

[79] J. Wishart, *The generalized product moment distribution in samples from a normal multivariate population*, Biometrika **20 A** (1928), 32–43.