IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT–D.005/02

OK

Deflexão Gravitacional de Partículas Massivas na Relatividade Geral Clássica e Semiclássica

Sidney Gonçalves de Souza

INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA
355
BIBLIOTECA

Orientador

Prof. Dr. Antonio José Accioly

Fevereiro de 2002

Dedicatória

Dedico este trabalho a meus pais Jeronimo Gonçalves de Souza, Antonia Candida de Souza e a minha esposa Selma Pinto de Souza.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Antonio José Accioly pelo apoio e paciência, ao Instituto de Física Teórica pelos créditos que me foram concedidos e a Capes pelo suporte financeiro.

Sou grato ao pessoal da secretaria da Pós-Graduação e ao pessoal da Biblioteca (Brígida e Ana).

Agradeço especialmente à Selma por sua compreensão em relação as minhas horas dedicadas à Física.

Não posso esquecer de agradecer a todos os colegas que conviveram comigo nestes dois anos de mestrado e que foram responsáveis por várias discussões de valores inestimáveis.

Sou muito grato aos meus pais pelo apoio e compreensão, e acima de tudo agradeço a Deus por iluminar meus caminhos.

Resumo

Calcula-se a deflexão gravitacional de partículas massivas na geometria de Schwarzschild em segunda ordem na constante Newtoniana G. No caso de raios luminosos este resultado reproduz em $\mathcal{O}(G)$ aquele previsto pela relatividade geral, enquanto que em $\mathcal{O}(G^2)$ ele se reduz ao resultado obtido por Fischbach and Freeman, Phys. Rev D **22**, 2950(1980), os quais computaram a deflexão gravitacional da luz em $\mathcal{O}(G^2)$ usando um método completamente diferente. Mostra-se também que partículas massivas de spin 0 e 1 violam o princípio de equivalência a nível semiclássico, o mesmo não ocorrendo com aquelas sem massa.

Palavras Chaves: Deflexão Gravitacional, Princípio de Equivalência, Relatividade Geral Semiclássica.

Área de Conhecimento: Teoria de Campos, Relatividade Geral.

Abstract

The gravitational deflection of massive particles in the Schwarzschild geometry is calculated to second order in the Newtonian constant G. For light rays it reproduces to $\mathcal{O}(G)$ the result predicted by general relativity, while to $\mathcal{O}(G^2)$ it reduces to the result obtained by Fischbach and Freeman, Phys. Rev D **22**, 2950(1980), who computed the gravitational deflection of light to $\mathcal{O}(G^2)$ using a quite different approach. It is also shown that massive particles of spin 0 and 1 violate the equivalence principle at the semiclassical level, whereas massless ones do not.

Índice

Introdução **1**

Parte 1: Tratamento Unificado da Deflexão Gravitacional de Partículas Massivas e Não-Massivas **4**

Capítulo 1: Deflexão Gravitacional de Partículas Massivas no Contexto da Teoria de Newton **5**

Capítulo 2: Deflexão Gravitacional de Partículas Massivas no Contexto da Teoria de Einstein **8**

Parte 2: Violação a Nível de Árvore do Princípio de Equivalência **13**

Capítulo 3: Deflexão Gravitacional de Partículas Massivas de Spin 0 a Nível de Árvore **14**

Capítulo 4: Espalhamento de Bosons Vetoriais Massivos de Spin 1 na Relatividade Geral **18**

Epílogo **22**

Referências **23**

Introdução

O movimento dos planetas bem como a deflexão da luz, na geometria de Schwarzschild (GS), têm sido estudados *ad nauseam* desde o advento da relatividade geral. É surpreendente, no entanto, que a questão do movimento de partículas massivas que não são capturadas pela GS não tenha sido até o momento objeto de nenhuma pesquisa. O primeiro objetivo deste trabalho é, pois, analisar a deflexão gravitacional dessas partículas que, evidentemente, obedecem o princípio de equivalência (PE).

Sabe-se, por outro lado, que a gravitação apresenta uma característica ímpar: a carga gravitacional (ou massa) de um corpo é igual a sua massa inercial. Em outras palavras, todos os corpos aceleram igualmente em um campo gravitacional. É portanto impossível distinguir pela observação de corpos em queda livre entre a aceleração uniforme de um referencial não-inercial e a de um campo gravitacional uniforme em um referencial inercial. A igualdade das massas gravitacional e inercial levou Einstein a conjeturar que toda teoria de gravitação deve respeitar o PE, o qual afirma que nenhum experimento físico, qualquer que seja, pode distinguir entre as duas possibilidades mencionadas previamente.

Em consequência do PE, raios luminosos seguem geodésicas nulas e todos os raios luminosos sofrem a mesma deflexão em um potencial gravitacional. Miraculosamente as coisas não mudam em nada quando se dá um passo adiante e se analisa a mesma questão do ponto de vista semiclássico. Se, por exemplo, computar-se a seção de choque a nível de árvore no que tange ao espalhamento de fótons pelo campo gravitacional do sol, tratado como campo externo, encontra-se a partir deste resultado que para um fóton passando nas vizinhanças do sol a deflexão é $1,75"$, que é exatamente a mesma que a da teoria de Einstein [1-3]. Podemos dizer, pois, que

nem propagação luminosa dispersiva nem propagação fotônica dispersiva a nível de árvore podem ser produzidas por um campo gravitacional que obedece às equações de campo de Einstein. Porém, em uma série de artigos sobre propagação fotônica em torno de um corpo massivo no contexto das teorias quadráticas de gravitação, foi mostrado recentemente que, ao contrário da gravitação Einsteiniana, a gravitação quadrática produz propagação fotônica dispersiva [4-7]. Para ser mais específico, a gravitação quadrática é responsável por um espalhamento fotônico dependente da energia. Uma consequência interessante deste fato é que arcos-íris gravitacionais e gravitação com derivadas de ordem superior podem coexistir sem conflito [6]. Neste sentido a gravitação quadrática está mais próxima da eletrodinâmica quântica do que qualquer outra teoria de gravitação contemporânea. De fato, propagação fotônica dispersiva é um fenômeno trivial no contexto da QED. Baseado no fato de que o efeito arco-íris que se faz presente na gravitação quadrática não é detectável em nossos dias, é possível encontrar um novo vínculo para o valor de contribuição da parte quadrática [6], um resultado bastante importante dado a escassez de vínculos observacionais nas teorias de gravitação. Encontra-se também que a deflexão gravitacional prevista pela gravitação quadrática é sempre menor que aquela prevista pela teoria de Einstein [4-7]. É importante frisar que o setor R^2 da teoria de gravitação com derivadas de ordem superior em nada contribui para a deflexão gravitacional [2,3]. Estas considerações nos levam a uma indagação importante e interessante: É possível produzir espalhamento dependente da energia, a nível de árvore, de partículas massivas no próprio contexto da relatividade geral? O segundo objetivo deste trabalho é mostrar que o aludido espalhamento dependente da energia pode ser realizado no contexto da teoria de Einstein, implicando numa violação do PE a nível de àrvore.

Por razões didáticas dividiremos esta Dissertação em duas partes:

PARTE 1: Tratamento Unificado da Deflexão Gravitacional de Partículas Massivas e Não- Massivas.

PARTE 2: Violação a Nível de Árvore do Princípio de Equivalência.

Na Parte 1 estudaremos inicialmente a deflexão gravitacional de partículas mas-

sivas dentro do contexto da teoria Newtoniana (Capítulo 1). A finalidade deste estudo é fornecer subsídios para a análise da deflexão gravitacional de partículas massivas na relatividade geral, uma vez que o raciocínio utilizado para resolver a equação diferencial da partícula teste na GS é o mesmo que aquele usado na teoria de Newton. Em seguida nos voltaremos para o estudo da deflexão de partículas massivas na GS (Capítulo 2). Usando as ferramentas desenvolvidas no Capítulo 1, vamos determinar a expressão concernente ao ângulo de deflexão em $\mathcal{O}(G^2)$, onde G é a constante de Newton.

Na Parte 2 vamos analisar em primeiro lugar o espalhamento de partículas massivas sem spin por um campo gravitacional estático, tratado como campo externo (Capítulo 3), e em seguida o espalhamento de partículas massivas de spin 1 (Capítulo 4).

Um sumário dos principais resultados será apresentado no Epílogo.

Usaremos unidades naturais ao longo do texto. Em nossa convenção a assinatura é (+ - - -). O tensor de Riemann é definido por $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \partial_{\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} - \partial_{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\gamma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\delta}\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}$, o tensor de Ricci por $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\nu\alpha}$ e o escalar de curvatura por $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico.

PARTE 1

TRATAMENTO UNIFICADO DA DEFLEXÃO GRAVITACIONAL DE PARTÍCULAS MASSIVAS E NÃO-MASSIVAS

Capítulo 1

Deflexão Gravitacional de Partículas Massivas no Contexto da Teoria de Newton

Mostra-se, no contexto da teoria de Gravitação Newtoniana, que uma partícula suficientemente rápida movendo-se no campo gravitacional de um corpo massivo segue uma órbita hiperbólica e sofre uma deflexão gravitacional dada por $\Phi = \frac{2GM}{bv_0^2}$. *Para raios luminosos este resultado se reduz a* $\Phi = \frac{2GM}{b}$, *exatamente metade do resultado Einsteiniano* [8].

A Lagrangiana que descreve a interação de duas partículas massivas no contexto da teoria de Newton é [9-11]

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GmM}{r},$$

onde μ é a massa reduzida. Estamos denotando neste Capítulo as derivadas com relação ao tempo por pontos. As correspondentes equações de movimento nos conduzem aos seguintes resultados

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{GM}{r^2} = 0,$$

$$r^2\dot{\theta} = l = const,$$

onde foi suposto que uma das partículas apresenta uma massa muito maior que a outra, ou seja $M \gg$ m. Eliminando $\dot{\theta}$ entre as equações acima obtemos a equação

diferencial

$$\ddot{r} - \frac{l^2}{r^3} + \frac{GM}{r^2} = 0,$$

da qual resulta

$$\dot{r}^2 + \frac{l^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} = 2\varepsilon,$$

onde ε é uma constante. Introduzindo como uma nova variável – como é comum na mecânica celeste – , a "distância inversa" $u = \frac{1}{r}$, obtemos uma equação diferencial entre u e θ, ou seja,

$$(\frac{du}{d\theta})^2 = \frac{2\varepsilon}{l^2} - u^2 + \frac{2GMu}{l^2}. \tag{1.1}$$

Iniciamos nossa discussão escrevendo a equação acima na forma

$$(\frac{du}{d\theta})^2 = -(u - u_1)(u - u_2),$$

onde u_1 e u_2 são as duas raízes do polinômio quadrático $u^2 - \frac{2GM}{l^2}u - \frac{2\varepsilon}{l^2}$. Como estamos interessados apenas em órbitas tais que $\varepsilon > 0$, ou seja, órbitas hiperbólicas, vamos supor que u_1 e u_2 são reais mas têm sinais diferentes, o que implica em u variar de zero até um valor finito e então retornar a zero. Um cometa se aproximando do sol a partir de uma distância infinita e depois se afastando em direção ao infinito é um exemplo de uma tal situação. Neste caso,

$$u_1 = \frac{GM}{l^2}[1 + \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon l^2}{G^2M^2}}], \tag{1.2}$$

$$u_2 = \frac{GM}{l^2}[1 - \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon l^2}{G^2M^2}}]. \tag{1.3}$$

A deflexão da partícula massiva em relação a uma trajetória em linha reta, isto é, o ângulo Φ entre as assíntotas, pode então ser computado da expressão

$$\Phi + \pi = 2\int_0^{u_1} \frac{du}{\sqrt{(u_1 - u)(u_2 - u)}}.$$

Para resolvermos esta integral fazemos a mudança de variável

$$u - u_2 = (u_1 - u_2)\sin^2 x,$$

de modo que ao variar x de $\bar{x}(\sin^2 \bar{x} = \frac{u_2}{u_2 - u_1})$ a $\frac{\pi}{2}$, u irá aumentar de 0 a u_1 como é necessário.

Portanto,

$$\Phi + \pi = 2\int_{\bar{x}}^{\frac{\pi}{2}} 2dx,$$

o que implica em

$$\Phi = \pi - 4\bar{x}.$$

Por outro lado ,

$$\begin{aligned} \sin\frac{\Phi}{2} &= \cos 2\bar{x} \\ &= 1 - 2\sin^2 \bar{x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\varepsilon l^2}{G^2 M^2}}}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Porém,

$$2\varepsilon = v_0^2 \text{ e } b = \frac{l}{\sqrt{2\varepsilon}} = \frac{l}{v_0},$$

onde v_0 é a velocidade da partícula no infinito e b é o parâmetro de impacto. Para ângulos pequenos teremos então

$$\Phi = \frac{2GM}{bv_0^2} \tag{1.5}$$

Conclusão

Na teoria de gravitação de Newton uma partícula suficientemente rápida e que se move no campo gravitacional de um corpo massivo segue uma órbita hiperbólica e apresenta uma deflexão gravitacional, que para pequenos ângulos, é dada por (1.5). No caso da luz, (1.5) nos diz que $\Phi = \frac{2GM}{b}$, resultado exatamente igual à metade daquele previsto pela teoria de Einstein .

Capítulo 2

Deflexão Gravitacional de Partículas Massivas no Contexto da Teoria de Einstein

A deflexão gravitacional de partículas massivas é calculada em segunda ordem em G dentro do contexto da relatividade geral ordinária. No caso de raios luminosos, este resultado reproduz aquele encontrado por Fischbach and Freeman, Phys. Rev. D **22**,*2950(1980), usando um procedimento completamente diferente. Nosso enfoque unifica portanto o tratamento da deflexão gravitacional de partículas massivas e não massivas em* $\mathcal{O}(G^2)$ [12].

Estamos prontos agora para analisar a deflexão gravitacional de partículas massivas na GS. Nosso primeiro passo será descobrir que condição estas partículas devem obedecer de modo a não serem capturadas pela GS.

Neste espírito, consideremos uma partícula teste massiva na GS. Como é bem conhecido, sua equação geodésica de movimento é a equação de Euler correspondente à Lagrangiana [13-16]

$$\mathcal{L}= (1 - \tfrac{2m}{r})\dot{t}^2 - \tfrac{\dot{r}^2}{1-\frac{2m}{r}} - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) \ ,$$

onde $m \equiv MG$ e o ponto denota derivação com respeito ao tempo próprio. Como a geodésica em questão é do tipo tempo, obviamente, ao longo da mesma,

$$\mathcal{L}= 1 \ .$$

A equação relativa a θ, ou seja,

$$(\dot{r}\theta)^{\cdot} = r^2 \sin\theta \cos\theta^2,$$

nos diz que se o movimento da partícula teste se restringia inicialmente ao plano equatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$ (e portanto $\dot{\theta} = 0$), então $\theta \equiv \frac{\pi}{2}$. Sem perda de generalidade, vamos supor, pois, que $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Por outro lado , se $\gamma(\tau)$ é uma geodésica com vetor tangente u e ξ é um campo de Killing, tem-se que

$$(u, \xi) = const \text{ ao longo de } \gamma.$$

De fato,

$$\begin{aligned} u(u,\xi) &= (\nabla_u u, \xi) + (u, \nabla_u \xi) \\ &= u^\mu u^\nu \xi_{u;\nu} = \frac{1}{2} u^\mu u^\nu (\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}) = 0. \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial}{\partial t}$ e $\frac{\partial}{\partial \phi}$ são campos de Killing para a métrica de Schwarzschild, obtemos prontamente que ao longo de γ,

$$(u, \frac{\partial}{\partial t}) = (1 - \frac{2m}{r})\dot{t} = \varepsilon = const,$$

$$(u, \frac{\partial}{\partial \phi}) = -r^2\dot{\phi} = -l = const.$$

Juntando todas as peças, concluimos que

$$\dot{r}^2 + (1 - \frac{2m}{r})(1 + \frac{l^2}{r^2}) = \varepsilon^2, \tag{2.1}$$

o que nos permite escrever

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + V(r) = \frac{\varepsilon^2}{2},$$

com o potencial efetivo dado por

$$V(r) = \frac{1}{2}(1 - \frac{2m}{r})(1 + \frac{l^2}{r^2}).$$

Consequentemente, o movimento radial da geodésica é o mesmo que o de uma partícula de massa unitária e energia $\frac{\varepsilon^2}{2}$ na mecânica não-relativística ordinária em uma dimensão, movendo-se no potencial efetivo V.

Os extremos de V são dados por

$$r_{max} = \frac{l^2}{2m}(1 - \sqrt{1 - \frac{12m^2}{l^2}}),$$

$$r_{min} = \frac{l^2}{2m}(1 + \sqrt{1 + \frac{12m^2}{l^2}}),$$

onde, evidentemente, $l^2 > 12m^2$.

Segue-se que a energia mínima por unidade de massa de repouso, ε_{min}, necessária para suplantar o topo da barreira de potencial é dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varepsilon_{min}^2 &= V(r_{max}) \\ &= \frac{1}{2}\frac{(r_{max} - 2m)^2}{r_{max}(r_{max} - 3m)} \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{min} &= \frac{r_{max} - 2m}{\sqrt{r_{max}(r_{max} - 3m)}} \\ &= \frac{l(1 - \sqrt{1 - \frac{12m^2}{l^2}}) - \frac{4m^2}{l}}{\{(1 - \sqrt{1 - \frac{12m^2}{l^2}})[l^2(1 - \sqrt{1 - \frac{12m^2}{l^2}}) - 6m^2]\}^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Portanto, toda partícula teste massiva com $\varepsilon >> \varepsilon_{min}$ não será capturada pela GS. Vamos supor a partir daqui que este seja o caso.

Retornemos então à equação geodésica (2.1). Em termos da "distância inversa" u ela toma a forma

$$(\frac{du}{d\phi})^2 = 2mu^3 - u^2 + \frac{2mu}{l^2} + \lambda, \tag{2.2}$$

onde $\lambda \equiv \frac{\varepsilon^2 - 1}{l^2}$. Procedendo exatamente como fizemos no caso Newtoniano, reescrevemos (2.2) como segue

$$(\frac{du}{d\phi})^2 = (u_1 - u)(u - u_2[1 - 2m(u + u_1 + u_2)].$$

O ângulo de deflexão Φ é então dado por

$$\Phi = 2\int_0^{u_1} \frac{du}{\sqrt{(u_1-u)(u-u_2)[1-2m(u+u_1+u_2)]}} - \pi.$$

A mudança de variável $u - u_2 = (u_1 - u_2)\sin^2 x$ permite reescrever a integral em questão na forma

$$\Phi = 4\int_{\bar{x}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-2m(u_1+u_2+u_1\sin^2 x + u_2\cos^2 x)}} - \pi.$$

Tendo em conta que m é uma quantidade pequena, podemos desenvolver o denominador da integral acima em potências de m. Assim procedendo e negligenciando todos os termos além do terceiro, obtemos um valor aproximado para $\Phi + \pi$,

$$\begin{aligned} 2\pi - 4\bar{x} + 4m(u_1+u_2)(\frac{\pi}{2}-\bar{x}) + m(u_1+u_2)(\pi - 2\bar{x}) + m(u_1-u_2)\sin 2\bar{x} + \\ +6m^2\{(u_1+u_2)^2(\frac{\pi}{2}-\bar{x}) + u_1^2(\frac{3\pi}{16} - \frac{3\bar{x}}{8} + \\ +\frac{\sin 2\bar{x}}{4} - \frac{\sin 4\bar{x}}{32}) + u_2^2(\frac{3\pi}{16} - \frac{3\bar{x}}{8} - \\ -\frac{\sin 2\bar{x}}{4} - \frac{\sin 4\bar{x}}{32}) + u_1u_2(\frac{\pi}{8} - \frac{\bar{x}}{4} + \\ +\frac{\sin 4\bar{x}}{16}) + 2(u_1+u_2)[u_1(\frac{\pi}{4} - \frac{\bar{x}}{2} + \frac{\sin 2\bar{x}}{4}) + u_2(\frac{\pi}{4} - \frac{\bar{x}}{2} - \\ -\frac{\sin 2\bar{x}}{4})]\}. \end{aligned}$$

Porém, em $\mathcal{O}(G^2)$,

$$\sin\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1 - \frac{GM}{2v_0^2 b} - \frac{G^2M^2}{8v_0^4 b^2}],$$

o que implica em

$$\sin(\frac{\bar{x}}{2} - \frac{\pi}{8})\cos(\frac{\bar{x}}{2} + \frac{\pi}{8}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(\frac{GM}{2v_0^2 b} + \frac{G^2M^2}{8v_0^2 b^2}). \tag{2.3}$$

De (2.3), obtemos prontamente

$$\bar{x} = \frac{\pi}{4} - \frac{GM}{2v_0^2 b}.$$

Portanto, o ângulo de deflexão para partículas massivas em $\mathcal{O}(G^2)$ é dado por

$$\Phi = \frac{2GM}{b}(1 + \frac{1}{v_0^2}) + \frac{3\pi}{4}(\frac{GM}{b})^2(1 + \frac{4}{v_0^2}). \tag{2.4}$$

Neste ponto é apropriado que teçamos alguns comentários sobre o resultado obtido: (i) No caso de raios luminosos (2.4) nos diz que em primeira ordem em G, $\Phi = \frac{4GM}{b}$, que é precisamente o resultado previsto pela relatividade geral, enquanto que em segunda ordem em G ele se reduz a $\Phi = \frac{4GM}{b}(1 + \frac{15\pi}{16}\frac{GM}{b})$, que é extamente o resultado obtido por Fischbach and Freeman [17] usando um procedimento completamente diferente.

(ii) Para qualquer partícula massiva passando próximo do sol $\Phi > 1,75"$.

(iii) Φ para partículas massivas é sempre maior que Φ para aquelas sem massa. Estamos supondo, evidentemente, que a fonte do campo gravitacional é a mesma em ambos os casos.

Conclusão

Obtivemos uma expressão unificada para o cômputo da deflexão gravitacional de partículas massivas e não-massivas em $\mathcal{O}(G^2)$. Em nosso enfoque o parâmetro que distingue as partículas massivas das não-massivas é a velocidade v_0 da partícula. Note que em um campo gravitacional estático, as partículas massivas experimentam a mesma deflexão, enquanto que todas as não-massivas sofrem a mesma inclinação – o que nada mais é que uma maneira diferente de enunciar o PE.

Chamamos atenção para o fato que os nossos cálculos podem facilmente ser estendidos para qualquer ordem em G. No entanto, acreditamos que hodiernamente o cálculo de correções de ordem mais alta não seria de grande interesse. De fato, no caso de raios luminosos, os efeitos de segunda ordem dão uma contribuição para a deflexão de $\sim (10^{-6})"$, a qual está ainda além da precisão contemporânea.

PARTE 2

VIOLAÇÃO A NÍVEL DE ÁRVORE DO PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA

Capítulo 3

Deflexão Gravitacional de Partículas Massivas de Spin 0 a Nível de Árvore

Mostra-se que partículas massivas de spin 0 violam o PE a nível de árvore. Por outro lado, se essas partículas são desprovidas de massa, elas concordam com o PE. Encontra-se também que o ângulo de deflexão previsto pela relatividade geral para um boson massivo de spin 0 não-relativístico passando próximo do sol é igual a $2,63"$ [18].

Vamos agora considerar o espalhamento de um boson massivo de spin 0 por um campo gravitacional estático gerado por uma fonte localizada, tal como o sol, tratado como campo externo. Como é bem conhecido, na relatividade geral o campo gravitacional é definido pela ação

$$S = \int \sqrt{-g} \left[\frac{2R}{\kappa^2} - \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \right] d^4x,$$

onde $\kappa^2 = 32\pi G$ é a constante de Einstein e $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ é a densidade $\mathcal{L}$agrangiana para a matéria usual. Na aproximação de campo fraco, ou seja, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$ com $\eta_{\mu\nu} = diag(+1, -1, -1, -1)$ e no gauge de de Donder, as equações de campo relacionadas à ação em questão tornam-se

$$\Box \gamma_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2} T_{\mu\nu},$$

onde $\gamma_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$ e $T_{\mu\nu}$ é o tensor da matéria que descreve o sistema físico em consideração na relatividade especial, isto é, não levando em conta o campo gravitacional. Índices são levantados (abaixados) com $\eta^{\mu\nu}(\eta_{\mu\nu})$. A solução geral da equação acima no caso de uma partícula pontual de massa M localizada em $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ é

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{r}) = \frac{M\kappa}{16\pi r}(\eta_{\mu\nu} - 2\eta_{\mu o}\eta_{\nu 0}).$$

A densidade $\mathcal{L}$agrangiana para a interação boson-campo gravitacional externo é, por sua vez, dada por

$$\mathcal{L}_{int} = -\tfrac{\kappa}{2}h^{\mu\nu}(\mathbf{r})[\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi - m^2\phi^2)],$$

onde ϕ é o campo escalar que descreve partículas de massa m e spin 0 , da qual obtemos a correspondente função de vértice

$$V(p,p') = -\tfrac{\kappa}{2}h^{\mu\nu}(\mathbf{k})[p_\mu p'_\nu + p_\nu p'_\mu\eta_{\mu\nu}(m^2 - p.p')],$$

onde

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{k}) \equiv \int d^3\mathbf{r}e^{-i\mathbf{k}.\mathbf{r}}h_{\mu\nu}(\mathbf{r}) = \frac{\kappa M}{4\mathbf{k^2}}\eta_{\mu\nu} - \frac{\kappa M}{2}\frac{\eta_{\mu 0}\eta_{\nu 0}}{\mathbf{k^2}}, \tag{3.1}$$

é o campo gravitacional no espaço dos momenta. Aqui $p(p')$ é o momentum do boson incidente (espalhado) e $|\,\mathbf{p}\,| = |\,\mathbf{p'}\,|$.

Consequentemente, a seção de choque para o espalhamento de bosons massivos por um campo gravitacional estático pode ser escrita como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4M^2G^2}{(1-\cos\theta)^2}\left[\frac{1-\frac{m^2}{2E^2}}{1-\frac{m^2}{E^2}}\right]^2$$

onde E é a energia do boson incidente e θ é o ângulo de espalhamento. Para ângulos pequenos esta expressão reduz-se a

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{16M^2G^2}{\theta^4}\left[\frac{1-\frac{m^2}{2E^2}}{1-\frac{m^2}{E^2}}\right]^2 \tag{3.2}$$

No entanto, para ângulos pequenos,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|\frac{r}{\theta}\frac{dr}{d\theta}\right| \tag{3.3}$$

De (3.2) e (3.3) obtemos prontamente

$$\theta = \frac{4MG}{r}\left[1+\frac{m^2}{2E^2}\right] \tag{3.4}$$

Conclusões

(i) No caso de uma partícula de spin 0 desprovida de massa que passe próxima ao sol $\theta = 1,75"$, que é exatamente o mesmo resultado que se obtem com uma partícula sem massa de spin 1. Isto nos leva a conjeturar que partículas sem massa, independentemente de seu spin, não violam o PE a nível de árvore. Evidentemente do ponto de vista clássico, todas as partículas desprovidas de massa se deslocam ao longo da mesma geodésica nula e, além disso, são defletidas em um potencial gravitacional segundo o mesmo ângulo.

(ii) Semiclassicamente, bosons massivos de spin 0 violam o PE.

(iii) O espalhamento de bosons massivos de spin 0 em um campo gravitacional estático é dispersivo. Para sermos mais específicos, tal espalhamento é dependente da energia.

(iv) Reescrevendo (3.4) na forma

$$\theta = \frac{4MG}{r}\left[1 + \frac{m^2}{2(\mathbf{p}^2 + m^2)}\right],$$

e restringindo nossa atenção ao caso em que o movimento do boson massivo de spin 0 é não-relativístico, ou seja, $\mathbf{p}^2 \ll m^2$, chegamos à conclusão que neste limite

$$\theta = \frac{3}{2}\left(\frac{4MG}{r}\right).$$

Portanto, no âmbito da relatividade geral $\theta = 2,63"$ para uma partícula massiva de spin 0 não-relativística passando nas proximidades do sol.

(v) Bosons escalares massivos de spin 0 passando próximos à superfície do sol apresentam $\theta = 1,75"$.

Capítulo 4

Espalhamento de Bosons Vetoriais Massivos de Spin 1 na Relatividade Geral

Mostra-se que partículas massivas de spin 1 violam em nível semiclássico o PE. Encontra-se também que bosons vetoriais de spin 1 não-relativísticos sofrem uma deflexão gravitacional de $2,62"$ *ao passarem nas vizinhanças do sol* [18].

Vamos voltar nossa atenção agora para o espalhamento de partículas massivas de spin 1. O procedimento corriqueiro na gravitação quântica no que concerne à obtenção da função de vértice na ausência de férmions consiste em se partir da ação que descreve o campo de matéria e escrever o tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$ como

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(x). \tag{4.1}$$

Consequentemente, a regra de Feynman para a interação de uma partícula massiva de spin 1 com um campo gravitacional estático, tratado como um campo externo, é obtida a partir da ação para um campo massivo de spin 1 minimamente acoplado à gravitação

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{4} + \frac{m^2 A_\mu A^\mu}{2}\right],$$

onde A^μ é um campo vetorial que descreve partículas de massa m e spin 1 e

$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$, expandindo em torno do espaço chato usando (4.1). Isto nos leva ao seguinte resultado

$$S_{int} = \int d^4x \left[-\frac{\kappa}{8}(-4h^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} + h\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta})F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu} + \frac{m^2\kappa}{4}(-2h^{\mu\alpha} + h\eta^{\mu\alpha})A_\alpha A_\mu \right].$$

Segue-se que a função de vértice para a interação campo vetorial bosônico-campo gravitacional estático externo toma a forma

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu}(p,p') = \frac{\kappa}{2}h^{\lambda\rho}(\mathbf{k})[-\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\rho}p.p' + \eta_{\lambda\rho}p_\nu p'_\mu + \\ +2(\eta_{\mu\nu}p_\lambda p'_\rho - \eta_{\nu\rho}p_\lambda p'_\mu - \eta_{\mu\lambda}p_\nu p'_\rho + \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho}p.p') + \\ +m^2(-2\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\rho})], \end{aligned}$$

onde $p(p')$ denota o momentum do boson vetorial incidente (espalhado) e $h^{\mu\rho}(\mathbf{k})$ é definido pela equação (3.1) do Capítulo 3.

A seção de choque não-polarizada para este processo é

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(4\pi)^2}\frac{1}{3}\sum_{r=1}^{3}\sum_{r'=1}^{3}\mathcal{M}^2_{rr'},$$

com $\mathcal{M}_{rr'} = \epsilon^\mu_r(\mathbf{p})\epsilon^\nu_{r'}(\mathbf{p}')V_{\mu\nu}$, onde $\epsilon^\mu_r(\mathbf{p})$ e $\epsilon^\mu_{r'}(\mathbf{p}')$ são os vetores de polarização para os bosons vetoriais iniciais e finais, respectivamente. Notando que [19,20]

$$\sum_{r=1}^{3}\epsilon^\mu_r(\mathbf{k})\epsilon^\nu_r(\mathbf{k}') = -\eta^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{m^2},$$

obtemos prontamente

$$\sum_r\sum_{r'}\mathcal{M}^2_{rr'} = V_{\mu\nu}V_{\alpha\beta}\left[\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \frac{\eta^{\mu\alpha}p'^\nu p'^\beta + \eta^{\nu\beta}p^\mu p^\alpha}{m^2} + \frac{p^\mu p^\alpha p'^\nu p'^\beta}{m^4}\right].$$

Após muita álgebra chegamos à seguinte expressão para a seção de choque em pauta

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4}{3}\left(\frac{GM}{\mathbf{k^2}}\right)^2 [2(p.p')^2 - 8E^2 p.p' + 12E^4 + 5m^4 - 4m^2E^2 - 4m^2 p.p'],$$

a qual, para ângulos pequenos se reduz a

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{8}{3}\left(\frac{GM}{1-\frac{m^2}{E^2}}\right)^2 \frac{1}{\theta^4}\left[6(1-\frac{m^2}{E^2}) + 2\theta^2(-1+\frac{m^2}{E^2}) + \frac{3}{2}\left(\frac{m}{E}\right)^4\right].$$

Levando em conta que para ângulos pequenos $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |\, \frac{r}{\theta}\frac{dr}{d\theta}\,|$, chegamos à conclusão que

$$r = 4GM\left[\left(1+\frac{1}{2}\frac{m^2}{E^2}\right)\left(\frac{1}{\theta}+\frac{\theta\ln\theta}{3}\right)\right]. \tag{4.2}$$

Conclusões

(i) O espalhamento de bosons vetoriais massivos de spin 1 no contexto da relatividade geral semiclássica é dependente da energia e viola portanto o PE.

(ii) No limite não-relativístico (4.2) pode ser reescrita como

$$\theta = \frac{3}{2}\left(\frac{4GM}{r}\right)\left(1+\frac{\theta^2\ln\theta}{3}\right),$$

implicando em que a deflexão gravitacional prevista pela relatividade geral para um boson vetorial massivo de spin 1 passando próximo ao sol seja igual a $2,62$".

Epílogo

Na Parte 1 deste trabalho calculamos a deflexão gravitacional de uma partícula massiva na GS em segunda ordem na constante Newtoniana. Uma característica importante deste cálculo é que o mesmo é feito inteiramente no contexto da relatividade geral ordinária. Na realidade nossa tarefa maior foi resolver a equação diferencial concernente à partícula teste massiva. Para tal imitamos um tanto quanto o correspondente procedimento Newtoniano. Fischbach e Freeman [17], por sua vez, obtiveram os efeitos de segunda ordem para a deflexão gravitacional de raios luminosos lançando mão de um esquema no qual o campo gravitacional influencia a radiação eletromagnética, conferindo ao espaço um índice de refração efetivo. O resultado encontrado pelos mesmos é, obviamente um caso partícular daquele por nós encontrado.

Na Parte 2 desta Dissertação mostramos que partículas massivas de spin 0 e 1, ao contrário de suas correspondentes não-massivas, violam o PE a nível de árvore. Neste espírito acreditamos que se fizermos um cálculo semelhante àquele dos Capítulos 3 e 4 para partículas massivas de spin $\frac{1}{2}, 2, etc.$, chegaremos à conclusão que elas também violam o PE a nível de árvore. Assim sendo acreditamos que a seguinte afirmação seja bastante plausível:

Partículas massivas, independentemente de seu spin, violam o PE a nível de árvore, enquanto que as suas correspondentes de massa zero não o fazem.

Para concluir chamamos atenção para o fato que no formalismo métrico da relatividade geral as partículas seguem as linhas geodésicas, enquanto que num tratamento teórico de campos, é a interação partícula-graviton que substitui este fato geométrico.

Referências

[1] D. Boccaletti, V. de Sabbata, C. Gualdi, P. Fortini, Nuovo Cimento A **48**, 58 (1967).

[2] A. Accioly, A. Azeredo, E. de Rey Neto, H. Mukai, Braz. J. Phys. **28**, 496 (1998).

[3] A. Accioly, S. Ragusa, E. de Rey Neto, H. Mukai, Nuovo Cimento B **114**, 595 (1999).

[4] A. Accioly, A. Azeredo, H. Mukai, E. de Rey Neto, Prog. Theor. Phys. **104**, 103 (2000).

[5] A. Accioly, H. Mukai, H. Blas, Nuovo Cimento B **115**, 1235 (2000).

[6] A. Accioly, H. Blas, Phys. Rev. D **64**, 067701 (2001).

[7] A. Accioly, A. Azeredo, H. Mukai, J. Math. Phys. **29**, 473 (2002).

[8] A. Accioly, S. Ragusa, H. Mukai, *Gravitational Deflection of Msssive Particles in Classical and Semiclasical General Relativity* (**em julgamento na Braz. J. Phys.**).

[9] Tai L. Chow, *Classical Mechanics* (John Wiley, N. Y. , 1995).

[10] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, 1980), 2nd. ed.

[11] T. C. Bradbury, *Theoretical Mechanics* (John Wiley, N. Y. , 1968).

[12] A. Accioly, S. Ragusa, *Unified Treatment of the Gravitational Deflection of Massive and Massless Particles* (**em julgamento na Phys. Rev. D**).

[13] R. B. Wald, *General Relativity* (The University of Chigago Press, Chigago, 1984).

[14] N. Straumann, *General Relativity and Relativistic Astrophysics* (Springer-Verlag, Berlin, 1984).

[15] H. Stephani, *General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994), 2nd. ed.

[16] G. Y. Rainich, *Mathematics of Relativity* (John Wiley, London, 1950).

[17] E. Fischbach, B. Freeman, Phys. Rev. D **22**, 2950 (1980).

[18] A. Accioly, S. Ragusa, H. Blas, H. Mukai, *Tree Level Violation of the Equivalence Principle* (**em julgamento na Int. J. Theor. Phys.**).

[19] F. Mandl, G. Shaw, *Quantum Field Theory* (John Wiley and Sons, N. Y. , 1994).

[20] W. Greiner, J. Reinhardt, *Field Quantization* (Springer, Berlin, 1993).