unesp
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Cássia Regina dos Santos Takahashi

A MATEMÁTICA DOS CÓDIGOS DE BARRAS

São José do Rio Preto
2013

Cássia Regina dos Santos Takahashi

A MATEMÁTICA DOS CÓDIGOS DE BARRAS

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Jéfferson Luiz Rocha Bastos

São José do Rio Preto
2013

Takahashi, Cássia Regina dos Santos
A matemática dos códigos de barras/Cássia Regina dos Santos Takahashi - São José do Rio Preto : [s.n.], 2013.
66 f.: 26 il.; 30 cm.

Orientador: Jéfferson Luiz Rocha Bastos
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1.Código de barras 2. Dígito de verificação 3. Situação de aprendizagem. 4. Aritmética modular. I. Bastos, Jéfferson Luiz Rocha II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 511.1

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
Campus de São José do Rio Preto - UNESP

Cássia Regina dos Santos Takahashi

A MATEMÁTICA DOS CÓDIGOS DE BARRAS

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Jéfferson Luiz Rocha Bastos
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Parham Salehyan
UNESP – São José do Rio Preto

Profª. Drª. Ires Dias
USP – São Carlos

São José do Rio Preto
24 de junho de 2013

Dedico este trabalho

Ao meu querido esposo, Mauro Takahashi, aos meus filhos José Leonardo e Maria Beatriz, pelo incentivo constante e pelo amor incondicional.

AGRADECIMENTOS

A Deus, fonte de Luz e Sabedoria, que sempre está ao meu lado, dando-me força e perseverança em minhas realizações.

A toda minha família, em especial aos meus pais, Augusto e Nadir, pelo amor e compreensão.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jéfferson Luiz Rocha Bastos, pelo apoio e confiança dada a mim e por acompanhar este trabalho dando as contribuições e sugestões essenciais para sua realização.

A todos os professores que participaram desse projeto, pela competência, paciência e dedicação.

Aos meus queridos colegas de turma, pelo incentivo, pelo carinho, e pelas trocas valiosas de experiências. Fica aqui a minha sincera amizade.

Ao meu filho, José Leonardo Takahashi, que desenvolveu o programa de conversão de bases numéricas, enriquecendo a atividade proposta neste trabalho.

Aos meus amigos Maria José Martins Zanon e Thiago da Silva Oliveira, pela colaboração na revisão deste trabalho.

A UNESP – SJRP, associada à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), e a CAPES, que através dessa parceria possibilitaram o aprimoramento da minha formação profissional.

"A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo"

Albert Einstein

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo principal, evidenciar a importância da Matemática como instrumento para compreender melhor o mundo a nossa volta. Diante do grande avanço tecnológico, o mundo do trabalho exige profissionais cada vez mais criativos e versáteis. A Escola desempenha um importante papel dentro desse contexto, proporcionando ao aluno o desenvolvimento de competências e habilidades necessárias para a construção do conhecimento. A Matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, o interesse, a capacidade de abstrair o contexto, de generalizar, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios. Em busca desses objetivos, este trabalho foi organizado em três capítulos. O Capítulo I apresenta noções de aritmética modular, parte da matemática fundamental para a compreensão dos métodos de autenticação dos códigos de barras. O Capítulo II apresenta um breve histórico sobre os códigos de barras: surgimento, finalidade, evolução, importância e expansão no atual mundo globalizado e automatizado. Aborda os Sistemas de Codificação UPC-A e EAN-13, esse último utilizado pelo Brasil, com análise da formação de suas estruturas, os processos de codificação e decodificação, cálculo do dígito verificador, bem como os métodos que garantem a detecção de erros de digitação. Traz também exemplos de códigos numéricos importantes e que também possuem um sistema de identificação controlado por dígitos de verificação, como RG e CPF. O Capítulo III apresenta uma proposta de situação de aprendizagem para o Ensino Fundamental, contemplando o tema de estudo deste trabalho, composta por cinco atividades, com orientações didáticas relativas a conceitos e procedimentos matemáticos e uso das tecnologias, analisando obstáculos que podem surgir durante o seu desenvolvimento, com a finalidade de contribuir para o enriquecimento do ensino da Matemática.

Palavras-chave: Código de Barras, Dígito de verificação, Situação de aprendizagem.

ABSTRACT

This work has as main objective to highlight the importance of mathematic as a tool to better understand the world around us. Due to the great technological advances, the world of work requires professionals increasingly creative and versatile. The school plays an important role in this context, once it provides for the students the development of skills and necessary competences for the construction of knowledge. Mathematic can give its contribution to the citizenship formation when it promotes methodologies that emphasize building strategies, evidence and justification of results, creativity, interest, ability to abstract from context, generalize, collective work and autonomy arising from the confidence in their ability to face challenges. In pursuit of these goals, this paper is organized into three chapters. Chapter I presents concepts of modular arithmetic, an essential part of mathematic to understand the authentication methods of barcodes. Chapter II presents a brief story of barcodes: the emergence, purpose, evolution and expansion, besides their importance in today's automated and globalized world. It mentions the UPC-A and EAN-13 coding systems, the latter used by Brazil, with analysis of the formation of their structures, encoding and decoding processes, verifying digit calculation as well as methods that guarantee typing errors detection. This same chapter also brings important examples of numerical codes which have their identification system controlled by verifying digits, such as RG and CPF. Chapter III suggests a learning situation proposal, for Elementary Education, covering the topic of this work. It is composed by five activities with guidance on teaching the concepts, mathematical procedures and use of technologies, analyzing obstacles that may arise during its development in order to contribute to the enrichment of mathematic teaching.

Keywords: Barcodes, check digit, Learning Situation.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Com o grande avanço tecnológico, houve mudanças significativas na sociedade, principalmente no mundo do trabalho, no qual os atuais profissionais precisam ser “mais criativos e versáteis, capazes de entender o processo de trabalho como um todo, dotados de autonomia e iniciativa para resolver problemas em equipe e para utilizar diferentes tecnologias e linguagens.” (Brasil, 1998, p.27).

Nesse caso, a escola entra com um importante papel de proporcionar aos alunos o desenvolvimento de competências e habilidades que garantem a formação do cidadão, frente a esse novo perfil de profissional, levando-os a compreender a importância do uso da tecnologia e de acompanhar sua constante renovação.

Atualmente, é comum a aquisição desses artigos pelos alunos, tais como celulares, tablets, notebook, computadores, onde o acesso à internet se traduz como um bombardeio de informações.

Diante dessa complexa sociedade, onde as informações são produzidas e incorporadas a todo instante, cabe ao professor, no seu papel de mediador no processo de ensino-aprendizagem, desenvolver técnicas e metodologias atrativas que levem à construção do conhecimento, neste trabalho em especial, à construção do conhecimento matemático.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998):

> A Matemática caracteriza-se como uma forma de compreender e atuar no mundo e o conhecimento gerado nessa área do saber como um fruto da construção humana na sua interação constante com o contexto natural, social e cultural. (Brasil, 1998, p.24).

Dessa forma, não se pode mais ver a Matemática como sendo apenas uma disciplina que se usa na sala de aula, pronta e acabada, mas sim como uma

> [...] ciência viva, não apenas no cotidiano dos cidadãos, mas também nas universidades e centros de pesquisas, onde se verifica, hoje, uma impressionante produção de novos conhecimentos que, a par de seu valor intrínseco, de natureza lógica, têm sido instrumentos úteis na solução de problemas científicos e tecnológicos da maior importância. (Brasil, 1998, p.24).

O presente trabalho tem por finalidade apresentar um dos exemplos onde a Matemática aliada às novas tecnologias trouxe um grande benefício à sociedade como um todo; e uma situação de aprendizagem matemática contextualizada com o tema, voltada para o enriquecimento do ensino dessa disciplina.

O assunto escolhido foi “A Matemática dos Códigos de Barras” e, buscando esses objetivos, este trabalho foi assim organizado:

O Capítulo I apresenta noções de aritmética modular, parte da matemática fundamental para a compreensão dos métodos de autenticação dos códigos de barras.

O Capítulo II apresenta um breve histórico sobre os códigos de barras: surgimento, finalidade, evolução e a importância da sua expansão no atual mundo globalizado e automatizado; enfoca os Sistemas de Codificação UPC-A e EAN-13, esse último utilizado pelo Brasil, com análise da formação de suas estruturas, os processos de codificação e decodificação, cálculo do dígito verificador, bem como os métodos que garantem a detecção de erros de digitação; aborda, ainda, exemplos de códigos numéricos importantes e que também possuem um sistema de identificação controlado por dígitos de verificação, como RG e CPF.

Por fim, o Capítulo III, apresenta uma proposta de situação de aprendizagem para a 7ª série (8º ano) do Ensino Fundamental, contemplando o tema de estudo deste trabalho, composta por cinco atividades, com orientações didáticas relativas a conceitos e procedimentos matemáticos e uso das tecnologias, analisando obstáculos que podem surgir durante o seu desenvolvimento, com a finalidade de contribuir para o enriquecimento do ensino da Matemática.

Pretende-se com este trabalho, levar uma pequena contribuição aos professores, e que esse exemplo seja apenas um ponto de partida para reavaliarmos nossa prática pedagógica, em busca de atividades significativas que motivem os alunos a desenvolverem competências e habilidades necessárias para a sua formação e atuação na sociedade em que vivemos.

CAPÍTULO I

CONGRUÊNCIAS

Os resultados deste capítulo baseiam-se principalmente nas definições encontradas em HEFEZ (2011), *"Elementos de Aritmética"*, que apresenta uma das noções mais fecundas da aritmética, introduzida por Gauss no seu livro Disquisitiones Arithmeticae, de 1801, no qual se trata da realização de uma aritmética com os restos da divisão euclidiana por um número fixado, com o apoio da referência MILIES & COELHO (2006), *"Números: Uma Introdução à Matemática".* Essa nova aritmética transcendeu a própria teoria dos números, encontrando inúmeras e profundas aplicações em várias outras partes da matemática. Atualmente, ela é a base de quase todos os procedimentos de cálculo dos computadores e possui muitas aplicações tecnológicas.

1.1 NOÇÕES BÁSICAS

Definição 1.1.1 *Seja $m \neq 0$ um inteiro fixo. Dois inteiros a e b dizem-se congruentes $módulo\ m$ se m divide a diferença $a - b$.*

Nesse caso, escreve-se $a \equiv b\ (mod\ m)$. Para indicar que a e b não são congruentes $módulo\ m$, escreve-se $a \not\equiv b\ (mod\ m)$.

Com essa definição, $a \equiv b\ (mod\ m)$ se, e somente se, $m \mid (a - b)$, ou equivalentemente, se existe um inteiro q tal que $a = b + mq$.

Como $m \mid (a - b)$ se, e somente se, $|m| \mid (a - b)$, consideraremos o caso em que $m > 0$.

Por exemplo, $5 \equiv 9\ (mod\ 2)$ e também $5 \equiv 9\ (mod\ 4)$. Aliás, é fácil verificar que dois números são congruentes $módulo\ 2$ se, e somente se, eles são ambos pares ou ambos ímpares.

Pode-se dar outra caracterização da noção de congruência.

Proposição 1.1.1 *Seja m um número inteiro fixo. Diremos que dois números inteiros a e b são congruentes $módulo$ m se, e somente se, os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais.*

Demonstração:

Sejam

$a = mq_1 + r_1$, com $0 \leq r_1 < m$, e

$b = mq_2 + r_2$, com $0 \leq r_2 < m$.

Então, $a - b = m.(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$.

Logo, $m \mid (a - b)$ se, e somente se, $m \mid (r_1 - r_2)$.

Ainda, como $0 \leq |r_1 - r_2| < m$, tem-se que:

$m \mid (r_1 - r_2)$ se, e somente se, $r_1 - r_2 = 0$.

Consequentemente, $a \equiv b \ (mod\ m)$ se, e somente se, $r_1 = r_2$. ■

Por exemplo, $21 \equiv 13 \ (mod\ 2)$, já que os restos da divisão de 21 e de 13 por 2 são iguais a 1.

Verifica-se que, tal como Gauss afirmara, existe uma grande semelhança entre as propriedades da congruência e da igualdade.

Proposição 1.1.2 *Sejam $m > 0$ um inteiro fixo, e a, b, c, d inteiros arbitrários. Então, valem as seguintes propriedades:*

(i) $a \equiv a \ (mod\ m)$.

(ii) *Se $a \equiv b \ (mod\ m)$, então $b \equiv a \ (mod\ m)$.*

(iii) *Se $a \equiv b \ (mod\ m)$ e $b \equiv c \ (mod\ m)$, então $a \equiv c \ (mod\ m)$.*

(iv) *Se $a \equiv b \ (mod\ m)$ e $c \equiv d \ (mod\ m)$, então $a + c \equiv b + d \ (mod\ m)$.*

(v) *Se $a \equiv b \ (mod\ m)$, então $a + c \equiv b + c \ (mod\ m)$.*

(vi) *Se $a \equiv b \ (mod\ m)$ e $c \equiv d \ (mod\ m)$, então $a.c \equiv b.d \ (mod\ m)$.*

(vii) *Se $a \equiv b \ (mod\ m)$, então $a^n \equiv b^n (mod\ m)$, para todo inteiro positivo n.*

(viii) *Se $a + c \equiv b + c \ (mod\ m)$, então $a \equiv b \ (mod\ m)$.*

Demonstração:

As propriedades ***(i)*** e ***(ii)*** são imediatas.

iii) Se $a \equiv b\ (mod\ m)$ e $b \equiv c\ (mod\ m)$, tem-se que $m \mid (a - b)$ e $m \mid (b - c)$. Consequentemente, $m \mid (a - b) + (b - c)$, isto é, $m \mid (a - c)$, logo $a \equiv c\ (mod\ m)$.

A demonstração de ***(iv)*** é análoga à anterior, e ***(v)*** segue de ***(iv)****,* observando por ***(i)*** que $c \equiv c\ (mod\ m)$.

vi) Se $a \equiv b\ (mod\ m)$ e $c \equiv d\ (mod\ m)$, existem inteiros q_1 e q_2 tais que $a = b + q_1 m$ e $c = d + q_2 m$. Logo, $ac = bd + (bq_2 + bq_1 + q_1 q_2 m)m$, isto é, $m \mid (ac - bd)$ e, portanto $ac \equiv bd\ (mod\ m)$.

Novamente, ***(vii)*** segue de ***(vi)****,* tomando-se $a = c, b = d$ e usando indução em n.

viii) Se $a + c \equiv\ b + c\ (mod\ m)$, tem-se diretamente que $m \mid (a + c) - (b + c)$. Logo, $m \mid (a - b)$, isto é, $a \equiv b\ (mod\ m)$. ■

A propriedade ***(viii)*** da proposição anterior é análoga à lei do cancelamento da soma. A semelhança com as propriedades da igualdade sugere que também poderia valer a lei do cancelamento do produto, isto é, que se $c \not\equiv 0\ (mod\ m)$, então $ac \equiv bc\ (mod\ m)$ implica $a \equiv b\ (mod\ m)$ ou, em termos de divisibilidade, se $m \nmid c$ e $m \mid c(a - b)$, então $m \mid (a - b)$; isso vale em geral se $mdc(m, c) = 1$. Isto em geral é falso, como mostra o seguinte exemplo.

Observa-se que $3 \not\equiv 0\ (mod\ 6)$ e $3.3\ \equiv 3.5\ (mod\ 6)$, mas $3 \not\equiv 5\ (mod\ 6)$.

Mais precisamente, vale:

Proposição 1.1.3 *Seja m um inteiro fixo e sejam a, b e c inteiros arbitrários. Se $mdc(c, m) = 1$, então $ac \equiv bc\ (mod\ m)$ implica $a \equiv b\ (mod\ m)$.*

Demonstração:

Se $ac \equiv bc\ (mod\ m)$, tem-se que $m \mid (a - b)c$.

Como $mdc(c, m) = 1$, do Teorema de Euclides, vem que $m \mid (a - b)$, e assim $a \equiv b\ (mod\ m)$. ■

Observa-se que, se $mdc(c, m) = d \neq 1$, sempre existem inteiros a e b tais que $a \not\equiv b\ (mod\ m)$; mas se $ac \equiv bc\ (mod\ m)$:

- se $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{m}$, isto é, se $c \equiv 0\ (mod\ m)$, então, para inteiros arbitrários a e b, tem-se que $ac \equiv bc\ (mod\ m)$, independentemente de a e b serem ou não congruentes módulo m;

- se $\boldsymbol{d} < m$, escrevendo: $m = kd$, e $c = k'd$, tem-se que,
  $k \not\equiv 0\ (mod\ m)$, mas $c.k \equiv c.0\ (mod\ m)$, pois $ck = k'dk = k'm$.

Exemplo 1.1.1 Determinar o resto da divisão de 5^{60} por 26.

Escrevendo $5^{60} = 26.q + r$, o problema equivale a determinar o inteiro r tal que $0 \leq r \leq 25$ e tal que $5^{60} \equiv r\ (mod\ 26)$.

Nota-se que $5^2 = 25$, isto é, $5^2 \equiv -1\ (mod\ 26)$.

Agora:

$(5^2)^2 \equiv (-1)^2\ (mod\ 26)$

$5^4 \equiv 1\ (mod\ 26)$

$(5^4)^{15} \equiv 1^{15}\ (mod\ 26)$

$5^{60} \equiv 1\ (mod\ 26)$

Logo, conclui-se que o resto da divisão de 5^{60} por 26 é 1.

Exemplo 1.1.2 Determinar o algarismo das unidades de 3^{100}.

Geralmente, se $a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_1 10^1 + a_0$, então $a \equiv a_0\ (mod\ 10)$. Deve-se, então, determinar um número r tal que $0 \leq r \leq 9$ e $3^{100} \equiv r\ (mod\ 10)$.

Agora:

$3^2 \equiv -1\ (mod\ 10)$

$3^4 \equiv 1\ (mod\ 10)$

$3^{100} \equiv (3^4)^{25} \equiv 1\ (mod\ 10)$.

Portanto, o algarismo da unidade é 1.

1.2 INTEIROS MÓDULO m

Como o resto da divisão de um número inteiro qualquer por 1 (um) é sempre nulo, tem-se que $a \equiv b \ (mod\ 1)$, quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Isto torna desinteressante a aritmética dos restos módulo 1. Portanto, doravante, consideraremos sempre $m > 1$.

Definição 1.2.1 *O conjunto* $[a] = \{x \in \mathbb{Z},\ x \equiv a \ (mod\ m)\}$ *é chamado de classe residual* $módulo\ m$ *do elemento* a *de* $\mathbb{Z}$*. O conjunto de todas as classes residuais* $módulo\ m$ *será representado por* $\mathbb{Z}_m$*.*

Exemplo 1.2.1 Seja $m = 2$. Então,

$[0] = \{x \in \mathbb{Z}, x \equiv 0 \ \ (mod\ 2)\} = \{x \in \mathbb{N};\ x \text{ é } par\}$

$[1] = \{x \in \mathbb{Z}, x \equiv 1 \ \ (mod\ 2)\} = \{x \in \mathbb{N};\ x \text{ é } ímpar\}$

Tem-se também que $[a] = [0]$, se a é par e $[a] = [1]$, se a é ímpar.

Exemplo 1.2.2 Seja $m = 3$. Então,

$[0] = \{3\lambda;\ \lambda \in \mathbb{Z}\}$

$[1] = \{3\lambda + 1;\ \lambda \in \mathbb{Z}\}$

$[2] = \{3\lambda + 2;\ \lambda \in \mathbb{Z}\}$

Neste caso:

$a \in [0]$, se a é múltiplo de 3,

$a \in [1]$, se a tem resto 1 quando dividido por 3, e

$a \in [2]$, se a tem resto 2 quando dividido por 3.

Proposição 1.2.1 *As classes residuais* $módulo\ m$ *possuem as seguintes propriedades:*

P₁) $[a] = [b]$ *se, e somente se,* $a \equiv b \ (mod\ m)$.

P₂) $Se\ [a] \cap [b] \neq \emptyset$, *então* $[a] = [b]$.

Demonstração:

P_1) Suponha que $a \equiv b\ (mod\ m)$; quer provar-se que $[a] = [b]$, isto é, uma igualdade entre conjuntos.

Dado $x \in [a]$, por definição, tem-se que $x \equiv a\ (mod\ m)$. Da propriedade transitiva da congruência (Proposição 1.1.2, (iii)) e da hipótese, segue imediatamente que $x \in [b]$. Logo, $[a] \subset [b]$. A inclusão de sentido contrário segue de forma análoga. Reciprocamente, se $[a] = [b]$, como $a \in [a]$, tem-se também que $a \in [b]$, logo, $a \equiv b\ (mod\ m)$.

P_2) Se $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Considerando um inteiro c, tal que, $c \in [a]$ e $c \in [b]$. Como $c \in [a]$, tem-se que $c \equiv a\ (mod\ m)$ e, de forma análoga, $c \equiv b\ (mod\ m)$. Portanto, $a \equiv b\ (mod\ m)$ e, de (P_1), $[a] = [b]$. ■

Dado $x \in \mathbb{Z}$, um número natural a tal que $[x] = [a]$ será denominado de representante da classe de x. Observe que x é determinado por a, mas há infinitos números inteiros b tais que $[x] = [b]$ (qualquer inteiro $b \in [a]$ é tal que $[b] = [a]$).

Exemplo 1.2.3 Se $m = 2$, então

- qualquer natural par é representante de classe residual $[0]$ e
- qualquer natural ímpar é representante da classe residual $[1]$.

Exemplo 1.2.4 Se $m = 3$, então

- qualquer múltiplo de 3 é representante da classe residual $[0]$,
- os números 1, 4, 7, 10, etc., são representantes da classe residual $[1]$, e
- os números 2, 5, 8, etc., são representantes da classe residual $[2]$.

Proposição 1.2.2 *Para cada $a \in \mathbb{Z}$ existe um, e somente um $r \in \mathbb{N}$, com $0 \leq r < m$, tal que $[a] = [r]$.*

Demonstração:

Seja $a \in \mathbb{Z}$. Pela divisão euclidiana, existem dois únicos números naturais q e r, com $0 \leq r < m$, tais que $a = m.q + r$. Portanto, é único o natural r tal que $0 \leq r < m$ e $a \equiv r\ (mod\ m)$. Consequentemente é único o natural r tal que $0 \leq r < m$ e $[a] = [r]$. ■

Corolário 1.2.1 *Existem exatamente* m *classes residuais* $módulo\, m$ *distintas, a saber:* $[0], [1], \ldots, [m - 1]$.

Observação 1.2.1 Seja $m > 1$. É possível repartir o conjunto dos números inteiros em subconjuntos, onde cada um deles é formado por todos os números inteiros que possuem o mesmo resto quando divididos por m.

Isso resulta a seguinte partição de $\mathbb{Z}$:

$$[0] = \{x \in \mathbb{Z}, x \equiv 0\ (mod\ m)\}$$
$$[1] = \{x \in \mathbb{Z}, x \equiv 1\ (mod\ m)\}$$
$$\vdots$$
$$[m - 1\,] = \{x \in \mathbb{Z}, x \equiv m - 1\ \ (mod\ m)\}.$$

Como $[m] = [0]$, $[m + 1] = [1]$, e assim por diante, considera-se até $[m - 1]$.

Em $\mathbb{Z}_m$ pode-se definir duas operações:

Adição:

$+ : \mathbb{Z}_m \text{ x } \mathbb{Z}_m \ \rightarrow\ \mathbb{Z}_m$

$([a], [b]) \rightarrow [a + b]$

Multiplicação:

$. : \mathbb{Z}_m \text{ x } \mathbb{Z}_m \ \rightarrow\ \mathbb{Z}_m$

$([a], [b]) \ \rightarrow\ [a\,.\,b]$

Como essas operações, estão bem definidas, usando os representantes a e b para as classes residuais $[a]$ e $[b]$, respectivamente, pode-se verificar que, mudando os representantes das classes $[a]$ e $[b]$, não mudam os valores de $[a + b]$ e de $[a\,.\,b]$.

Como exemplo em $\mathbb{Z}_6$, para somar $[3]$ e $[5]$, pode-se tomar 63 como representante de $[3]$ e 23 como representante de $[5]$, pois:

$$[63] + [23] = [86] = [2], \text{ e}$$
$$[3] + [5] = [8] = [2].$$

O lema abaixo mostra que isso não é uma coincidência.

Lema 1.2.1 *Sejam* a, a', b, b' *inteiros tais que* $[a] = [a']$ e $[b] = [b']$.

Então, $[a + b] = [a' + b']$ *e* $[a.b] = [a'.b']$.

Demonstração:

A demonstração é uma conseqüência imediata da Proposição 1.1.2, (iv) e (vi) e da Proposição 1.2.1, (P_1). ■

As operações definidas anteriormente gozam das seguintes propriedades:

Proposição 1.2.3 *Para todos* $[a], [b], [c] \in \mathbb{Z}_m$, *tem-se:*

A_1) *Associatividade:* $[a] + ([b] + [c]) = ([a] + [b]) + [c]$.

A_2) *Comutatividade:* $[a] + [b] = [b] + [a]$.

A_3) *Existência de elemento neutro:* $[a] + [0] = [a]$, *para todo* $[a] \in \mathbb{Z}_m$.

A_4) *Existência de Simétrico:* $[a] + [-a] = [0]$.

Demonstração:

As demonstrações são feitas apoiando-se nos axiomas para as operações com números inteiros. A título de ilustração, provaremos A_1 e A_4.

Para provar $\mathbf{A_1}$, usa-se repetidamente a definição de soma em $\mathbb{Z}_m$, daí tem-se que:

$$[a] + ([b] + [c]) = [a] + [\mathrm{b} + c] = [\mathrm{a} + (\mathrm{b} + \mathrm{c})].$$

Agora, como vale a associativa da soma entre números inteiros, segue que:

$a + (b + c) = (a + b) + c$, logo,

$[a + (b + c)] = [(a + b) + c]$, donde,

$[a] + ([b] + [c]) = [a + (b + c)] = [(a + b) + c] = ([a] + [b]) + [c]$.

Na última sequência de igualdades usou-se, novamente, apenas a definição de soma em $\mathbb{Z}_m$.

Para demonstrar $\mathbf{A_4}$, dado $[a] \in \mathbb{Z}_m$, basta tomar a classe de $-a$ e verificar que: $[a] + [-a] = [a + (-a)] = [0]$.

Para provar a unicidade, suponha que $[b] \in \mathbb{Z}_m$ também verifica $[a] + [b] = [0]$ ou, usando da comutativa, $[b] + [a] = [0]$.

Então, segue que:

$[b] = [b] + [0] = [b] + ([a] + [-a]) = ([b] + [a]) + [-a] = [0] + [-a] = [-a]$.
Concluindo assim a prova. ■

Da demonstração de A_4 vem que o oposto de $[a]$ em $\mathbb{Z}_m$ é a classe de $-a$. Em símbolos, $-[a] = [-a]$. Considerando $\mathbb{Z}_m$ na forma $\mathbb{Z}_m = \{[0], [1], \dots, [m-1]\}$ e a é um dos representantes utilizados, então $-a$ não é um deles; para obter o menor representante positivo da classe de $-a$, deve-se fazer $[-a] = [0] - [a] = [m] - [a] = [m-a]$.

Por exemplo, em $\mathbb{Z}_5$ tem-se que: $-[2] = [5-2] = [3]$

De fato, $[2] + [3] = [5] = [0]$.

No caso do produto temos:

Proposição 1.2.4 *Para todos* $[a], [b], [c] \in \mathbb{Z}_m$, *tem-se:*

M₁) *Associatividade:* $[a].([b].[c]) = ([a].[b]).[c]$.

M₂) *Comutatividade:* $[a].[b] = [b].[a]$.

M₃) *Existência de unidade:* $[a].[1] = [a]$.

AM) *Distributividade:* $[a].([b] + [c]) = [a].[b] + [a].[c]$.

Demonstração:

Neste caso, as demonstrações também são feitas reduzindo-as ao caso dos inteiros. Por exemplo, provaremos ***AM***, utilizando-se da definição de soma e multiplicação em $\mathbb{Z}_m$.

$$[a].([b] + [c]) = [a].[b+c] = [a.(b+c)] = [a.b + a.c] =$$
$$[a.b] + [a.c] = [a].[b] + [a].[c].$$ ■

Um conjunto munido de uma operação de "adição" e de uma operação de "multiplicação", com as propriedades anteriores, será chamado de anel. Portanto $\mathbb{Z}_m$, com as operações acima, é um anel, chamado anel das classes residuais $módulo\ m$.

Definição 1.2.2 *Um elemento* $[a] \in \mathbb{Z}_m$ *será dito invertível, quando existir* $[b] \in \mathbb{Z}_m$ *tal que* $[a].[b] = 1$. *Neste caso, diremos que* $[b]$ *é o inverso de* $[a]$.

É importante notar que:

- $[1]$ e $[-1]$ são sempre invertíveis em $\mathbb{Z}_m$.
- $[0]$ não é invertível em $\mathbb{Z}_m$, para nenhum valor de m. De fato, para qualquer $[a] \in \mathbb{Z}_m$ temos que, $[0].[a] = [0] \neq [1]$.

Exemplo 1.2.5 Tabelas da adição e da multiplicação em $\mathbb{Z}_3 = \{[0], [1], [2]\}$

+	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

.	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]
[2]	[0]	[2]	[1]

Neste caso, observa-se que, todo elemento não nulo, é invertível.

Exemplo 1.2.6 Tabelas da adição e da multiplicação em $\mathbb{Z}_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}$

+	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]
[1]	[1]	[2]	[3]	[0]
[2]	[2]	[3]	[0]	[1]
[3]	[3]	[0]	[1]	[2]

.	[0]	[1]	[2]	[3]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]
[2]	[0]	[2]	[0]	[2]
[3]	[0]	[3]	[2]	[1]

É importante notar que em $\mathbb{Z}_4$ existem dois elementos não nulos cujo produto é nulo: $[2] \neq [0]$ e, no entanto, $[2].[2] = [0]$

Exemplo 1.2.7 Tabelas da adição e da multiplicação em $\mathbb{Z}_5 = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$

+	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[1]	[1]	[2]	[3]	[4]	[0]
[2]	[2]	[3]	[4]	[0]	[1]
[3]	[3]	[4]	[0]	[1]	[2]
[4]	[4]	[0]	[1]	[2]	[3]

.	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]
[2]	[0]	[2]	[4]	[1]	[3]
[3]	[0]	[3]	[1]	[4]	[2]
[4]	[0]	[4]	[3]	[2]	[1]

Pode-se notar que, em $\mathbb{Z}_3$ e $\mathbb{Z}_5$, todo elemento distinto de $[0]$ é invertível. Mas isto não ocorre em todos $\mathbb{Z}_m$. Por exemplo, em $\mathbb{Z}_4$, tem-se que $[2]$ não é invertível.

Um anel onde todo elemento não nulo possui um inverso multiplicativo é chamado de corpo. Portanto, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ e $\mathbb{Z}_5$, com as operações acima definidas, são corpos; mas $\mathbb{Z}_4$ não é corpo.

Esses elementos serão caracterizados a seguir.

Proposição 1.2.5 $[a] \in \mathbb{Z}_m$ *é invertível se, e somente se,* $(a, m) = 1$.

Demonstração:

Se $[a]$ é invertível, então existe $[b] \in \mathbb{Z}_m$, tal que $[1] = [a].[b] = [a\,.\,b]$. Logo, $a.b \equiv 1\,(mod\ m)$, isto é, existe um inteiro t tal que $a.b - t.m = 1$ e, consequentemente, $(a, m) = 1$.

Reciprocamente, se $(a, m) = 1$, existem inteiros b e t tais que $a.b - m.t = 1$ e, consequentemente, $[1 + m.t] = [a.b]$. Logo, $[1] = [1] + [m.t] = [1 + m.t] = [a.b] = [a]\,.\,[b]$.

Portanto, $[a]$ é invertível. ■

Corolário 1.2.2 $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{m}}$ *é um corpo se, e somente se,* $\boldsymbol{m}$ *é primo.*

Demonstração:

Suponha por absurdo que $\mathbb{Z}_m$ é um corpo e m não é primo.

Então $m = m_1\,.\,m_2$, com $1 < m_1 < m\ e\ 1 < m_2 < m$.

Logo, $[0] = [m] = [m_1].[m_2],\ com\ [m_1] \neq 0\ e\ [m_2] \neq 0$, contradição.

Reciprocamente, suponha m primo. Como $(i, m) = 1$, para $i = 1, \ldots, m-1$, segue-se (da Proposição 1.2.5) que $[1], [2], \ldots, [m-1]$ são invertíveis. Logo, $\mathbb{Z}_m$ é um corpo. ■

CAPÍTULO II

CÓDIGOS

Este capítulo apresenta os Códigos de Barras e outros códigos numéricos de acordo com MILIES (2009), FINI (2009) e da Associação Brasileira de Automação (GS1 – Brasil)[1].

2.1 INTRODUÇÃO

Códigos fazem parte da nossa vida cotidiana. Desde o nascimento, ainda na maternidade, temos uma identificação e, daí por diante, os códigos entram em nossas vidas de forma galopante. Temos um Registro de Certidão de Nascimento, Registro de Identidade (RG), Cadastro de Pessoa Física (CPF), Carteira Profissional, Título de Eleitor e outros documentos identificados com números e/ou letras. Além disso, nos supermercados, nas farmácias, nas bancas de revistas, nas livrarias, etc., os produtos são acompanhados de etiquetas com seu código, as agências bancárias têm um número-código, assim como a conta corrente. Moramos em um endereço com Código de Endereçamento Postal (CEP), possuímos telefones, carros, computadores e muitos outros itens que possuem um código de identificação. (FINI, 2009).

Estamos rodeados desses números e códigos, cuja “finalidade é viabilizar o registro, o acompanhamento e às vezes toda a execução de uma operação humana. Nesse sentido, há códigos que concentram grande quantidade de dados e informações”. (FINI, 2009, p.71).

Há algumas décadas, em estabelecimentos comerciais, o preço de cada produto era colocado manualmente e, quando vendido, tinha que ser digitado numa máquina pela operadora, um processo lento e sujeito a falhas. Com o “recente progresso das tecnologias de computação e automação, os aparelhos de leitura

---

[1] Disponível em: http://www.gs1br.org/. Acesso em 15/01/2013.

óptica e os computadores ficaram mais acessíveis, tanto do ponto de vista cultural como do econômico.” (FINI, 2009, p.71). Com isso, muitas empresas conseguiram se modernizar e passaram a contar com ferramentas que facilitam o controle dos estoques e a identificação dos produtos.

Segundo a GS1-Brasil:

> A automação começa com a implantação de equipamentos, e a substituição dos procedimentos e rotinas manuais por informatizados, até chegar à utilização de ferramentas que possibilitam um maior controle e uma melhor gestão do negócio, obtendo maior rentabilidade e competitividade. (GS1-Brasil)

Dessa forma, a automação comercial garante aos lojistas maior rapidez e eficiência nas suas operações, melhorando a qualidade dos serviços e/ou atendimentos prestados aos clientes. Por esses motivos o código de barras foi bem aceito, e já é bastante utilizado em grandes e pequenas empresas.

Assim como a globalização encurtou distâncias, essa nova tendência tecnológica irá intensificar ainda mais o comércio mundial, pela facilidade na transmissão de dados e informações sobre empresas e produtos.

De modo geral, os sistemas de identificação utilizam números: “além de serem mais eficientes do que os nomes para armazenar e transmitir dados, os números transpõem a barreira dos idiomas, pois são usados internacionalmente.” (FINI, 2009, p.71).

Esses códigos podem e devem ser controlados para tornar possível a detecção de erros de codificação. De acordo com FINI (2009):

> Nos últimos anos, o desenvolvimento dos sistemas automáticos para leitura de números, mais rápidos, confiáveis e relativamente baratos, permitiu a justaposição dos algarismos de controle ao número de um código, para detectar erros mais comuns. (FINI, 2009, p.71).

Nesse sentido, foi preciso construir algoritmos que certificassem a validade dos códigos numéricos.

2.2 CÓDIGOS DE BARRAS

O código de barras é uma forma de representação gráfica que viabiliza a captura automática dos dados por meio de leitura óptica nas operações automatizadas.

Esses dados também são representados pela sequência numérica, escrita no sistema de numeração decimal, que aparece imediatamente abaixo das barras, de forma que o leitor humano também possa ler a identificação.

Figura 1: Exemplo de Código de barras

Observa-se que a representação é feita geralmente com barras “brancas” e “pretas” de diferentes larguras, as quais, através do leitor óptico e do computador, são “interpretadas” e “decodificadas” em sequências de “zeros” (barras brancas) ou “uns” (barras pretas), graças ao sistema binário para a escrita de qualquer número na usual base 10. (FINI, 2009, p.74).

Figura 2: exemplo de leitor óptico[2]

Os códigos de barras estão presentes nos diversos artigos encontrados no comércio, assim como em versões bem mais longas, em recibos, contas a pagar e inúmeras outras aplicações. Hoje, tudo é visto com muita naturalidade, mas esse processo teve início há mais de seis décadas, passando por várias versões e colaboradores.

[2] Figura 2: Disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/C%C3%B3digo_de_barras

2.2.1 A Evolução dos Códigos de Barras

As primeiras ideias sobre os modernos códigos de barras surgiram por volta de 1948, graças aos estudantes Bernard Silver e Norman Joseph Woodland, do Instituto de Tecnologia Drexel, na Filadélfia.

Figura 3: Normam J. Woodland (1921 – 2012)[3]

Figura 4: Bernard Silver (1924 – 1963)[4]

Seus resultados iniciais, um sistema de linhas e círculos baseados no código Morse, foi substituído por um padrão de circunferências concêntricas de largura variável. Silver e Woodland registraram uma patente para o seu sistema em 20 de outubro de 1949, porém, a mesma só foi concedida em 1952. Ao dar entrada ao pedido de patentes, eles descreviam seu invento como uma “classificação de artigos através de identificação de padrões”.

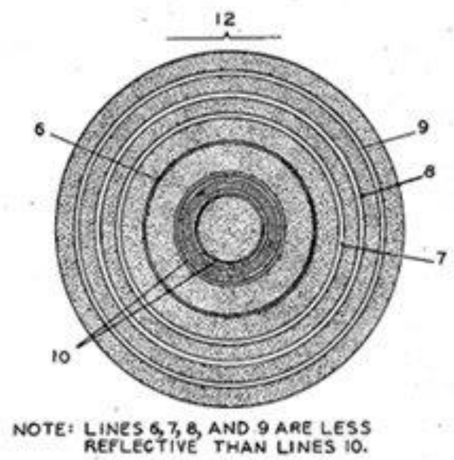


Figura 5: Modelo do primeiro código de barras[5]

3 Figura 3: Disponível em http://drexel.edu/now/news-media/releases/archive/2012/December/Woodland-obit/
4 Figura 4: Disponível em http://www.invent.org/hall_of_fame/454.html
5 Figura 5: http://inventors.about.com/od/bstartinventions/a/Bar-Codes.htm

Em torno de 1970, uma firma de assessoria, a McKinsey & Co., junto com a Uniform Grocery Product Code Council, definiu um formato numérico para identificar produtos e pediu a diversas companhias que elaborassem um código adequado. Dentre as firmas contactadas, a que acabou apresentando a proposta vencedora foi a IBM e o código foi criado por George J. Laurer.

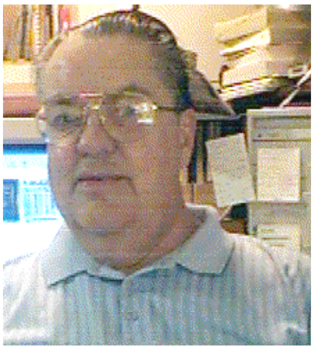


Figura 6: George J. Laurer[6]

O código proposto, formalmente aceito em maio de 1973, passou a ser conhecido como código UPC (Universal Product Code) e foi adotado nos Estados Unidos e Canadá. Ele consistia de uma sequência de 12 dígitos, traduzidos para barras claras e escuras, seguindo a rigorosos padrões. Existem várias versões sucessivas do UPC, com pequenas modificações.

0 79400 05292 6

Figura 7: Exemplo de Código de barras - UPC – A

Posteriormente foi solicitado a Laurer que ampliasse o código, para permitir uma maior difusão do sistema, de modo a identificar também o país de origem de cada produto classificado. Baseado no UPC-A, ele acabou criando um novo código, com 13 dígitos, que foi adotado em dezembro de 1976 com o nome EAN (European Article Numbering system).

[6]Figura 6: Disponível em http://www.666myth.com/GeorgeLaurer.gif

Alguns países adotam este mesmo sistema, dando-lhe outro nome. Por exemplo, no Japão o sistema é conhecido como JAN (Japanese Article Numbering system).

Figura 8: Exemplo de Código de barras - EAN-13

Desde 1974, quando foi escaneado o primeiro código de barras nos Estados Unidos, as mudanças no universo do varejo e da indústria foram constantes e aceleradas. A automação trouxe efeitos imediatos na cadeia de suprimentos e principalmente na vida dos consumidores. Além de fornecer números exclusivos de identificação, os códigos padronizados também proporcionam informações adicionais, tais como: data de validade, números de série e números de lote.

Existe, atualmente no mercado, uma expectativa para que seja possível identificar os produtos comercializados no varejo, com a inclusão de dezenas de informações relacionadas a cada produto e com a isenção do pagamento de taxas e filiações para órgãos internacionais.

Com essa nova tendência mundial, "o código de barras bidimensional QR-code (quick response code)", é possível especificar até 7.079 caracteres numéricos, 4.296 caracteres alfa numéricos, 2.953 caracteres binários e até 1.817 caracteres Kanji/Kana (Japoneses). Além das infinitas aplicações utilizando o Código de Barras Bidimensional QR-Code, também é possível efetuar a leitura com seu aparelho celular, sem a utilização de scanners e leitores especializados.

Figura 9: Exemplo de código bidimensional - (QR – Code)

2.2.2 Sistema de Codificação Nacional

A EAN, hoje GS1 Brasil – Associação Brasileira de Automação – é uma organização sem fins lucrativos que desenvolve padrões globais que possibilitam uma gestão eficiente da cadeia de suprimentos.

Foi fundada em 8 de novembro de 1983 com o nome de ABAC – Associação Brasileira de Automação Comercial – por intermédio da SEI – Secretaria Especial de Informática – que convocou empresas do comércio para refletir sobre as necessidades do setor com relação à automação comercial. Integra uma rede composta por 108 Organizações Membro ao redor do mundo, com sede em Bruxelas, sendo o padrão GS1 utilizado em 150 países, com mais de um milhão de empresas associadas, que há mais de 30 anos auxilia no desenvolvimento de padrões.

No Brasil, é a única responsável pelo licenciamento e administração dos padrões GS1 de identificação/codificação de produtos e serviços. O Sistema GS1 é aplicado em mais de 20 diferentes setores, desde produtos de alto consumo, logística, transporte, até segmentos específicos como saúde, defesa, aeroespacial, etc.

A seguir, foram relacionados alguns tipos de Códigos de Barras do Sistema GS1 que se diferenciam, dependendo da sua aplicação.

- **EAN/UPC**

Código desenvolvido especificamente para leitura no ponto de venda, devido à agilidade propiciada na captura da informação. Permite algumas variações.

Figura 10: Exemplo - EAN-13

Figura 11: Exemplo - EAN-8

Figura 12: Exemplo - UPC-A

- **GS1 Data Bar**

Podem ser muito menores do que os códigos EAN/UPC e podem ainda codificar informações adicionais como número serial, de lote e/ou data de validade. É uma tendência global utilizar este código no setor de frutas, verduras e legumes.

(01)07898357410015

Figura 13: GS1-Data Bar

- **GS1-128**

Código de barras que permite codificar todas as Chaves GS1. Utilizado na gestão logística e de rastreabilidade por meio da codificação de informações adicionais como número serial, número de lote, data de validade, quantidades, número do pedido do cliente, entre outros.

(01) 0 0012345 67890 5

Figura 14: Exemplo - GS1-128

- **ITF-14**

Código de barras, também para unidade logística, desenvolvido para codificar apenas GTINs, pode ser impresso diretamente em substrato corrugado (caixa de papelão) oferecendo um bom desempenho de leitura.

00012345678905

Figura 15: Exemplo - ITF-14

O Decreto nº 90.595, de 29 de Novembro de 1984 – cria e define o Sistema de Codificação Nacional de Produtos para todo o Território Nacional – adotando o Padrão internacional EAN (originalmente chamado "European Article Number", atualmente renomeado para "International Article Number", apesar da mudança nominal, a sigla EAN foi mantida).

2.2.3 Os Códigos de Barras UPC- A e EAN-13

Conforme visto, o código de barras EAN foi elaborado a partir da necessidade de se adicionar um dígito a cada código, de modo a permitir a identificação do país de origem do produto, de forma que a mesma máquina leitora pudesse ler códigos UPC e EAN, pois os países EUA e Canadá já utilizam o código UPC.

Analisaremos os códigos UPC-A e EAN-13, tentando esclarecer suas estruturas e entender um pouco mais suas codificações e decodificações.

Figura 16: Código de Barras

Figura 17: Código de Barras EAN-13

Nota-se, imediatamente, que eles são formados por listras brancas e pretas alternadas, de quatro espessuras possíveis para essas listras, que podem ser classificadas como: finas, médias, grossas ou muito grossas. Para representar essas listras, conforme suas espessuras, são adotados os símbolos:

Listras	*Brancas*	*Pretas*
Fina	0	1
Média	00	11
Grossa	000	111
Muito Grossa	0000	1111

Em cada código, a sequência das listras é equivalente ao número que aparece abaixo delas.

O processo de codificação consiste em representar um número escrito na base decimal (que identifica o produto) na base binária, que é a linguagem utilizada pelo computador e representada através das barras. Esses códigos de barras obedecem a padrões de codificações estabelecidos e controlados internacionalmente, possibilitando assim maior integração e troca de informações.

A cada número é associado um espaço de espessura fixa, que corresponde sempre a uma sequência de sete dígitos iguais a 1 ou 0.

Por exemplo, as quatro primeiras listras do exemplo UPC-A (iniciando após as barras limites): **uma listra branca grossa - uma preta média - uma branca fina - uma preta fina,** respectivamente, que são representadas pela sequência: **0001101** que é equivalente ao **primeiro dígito zero**.

Da mesma forma, verifica-se que o dígito seguinte, o **1**, é representado pela sequência de listras: **branca média – preta média – branca média – preta fina** , e corresponde à sequência: **0011001**. Mas o mesmo dígito **1**, é codificado pela sequência: **1100110** quando aparece no final do código. Como justificar esse fato?

Sabe-se que, algumas vezes quando vamos às compras, pegamos alguns produtos que apresentam as embalagens amassadas, enrugadas, úmidas, e quando passamos pelo caixa, o leitor óptico não consegue realizar a leitura do código de barras. Então, a pessoa do caixa, tenta passar o produto em sentido contrário, ou inverte o produto, de modo que o código de barras fique de cabeça para baixo, e tenta passá-lo mais uma vez. Se nem assim der certo, ela própria lê o código e o digita manualmente.

O fato é que o leitor óptico distingue a direita da esquerda, isto ocorre porque os dígitos são codificados de maneira diferente quando estão do lado direito ou do esquerdo do código de barras.

Esta codificação é feita conforme a seguinte tabela:

$Dígito$	$do\ lado\ esquerdo$	$do\ lado\ direito$
0	0001101	1110010
1	0011001	1100110
2	0010011	1101100
3	0111101	1000010
4	0100011	1011100
5	0110001	1001110
6	0101111	1010000
7	0111011	1000100
8	0110111	1001000
9	0001011	1110100

Pode-se observar que a codificação de um dado número, à direita, se obtém da sua codificação à esquerda, trocando cada 0 por 1, reciprocamente. Como que cada sequência do lado esquerdo tem um número ímpar de dígitos iguais a 1, consequentemente, cada uma das que estão à direita tem um número par. Assim, verificando a paridade de cada sequência de sete dígitos, a máquina "sabe" imediatamente de que lado está lendo o código.

Uma dificuldade encontrada na elaboração do código EAN foi a necessidade de adicionar um dígito a cada código de uma forma tal que o mesmo leitor óptico pudesse ler indistintamente os códigos UPC e EAN.

A solução adotada foi a seguinte: Os países que utilizavam o código UPC antigo, EUA e Canadá, são identificados com um 0, na frente, e o resto da codificação é feita utilizando-se o sistema anterior. Para os demais países, os primeiros dois ou três dígitos identificam o país.

Por exemplo, o código de barras de todos os produtos produzidos no Brasil começa com a sequência 789, a qual identifica o país. Como era necessário adicionar um dígito e também manter o mesmo padrão de tamanho do código de barras, para não ter que modificar todas as leitoras, a ideia utilizada foi fazer com que o novo dígito estivesse implícito na forma de escrita de todos os outros. Para isso, não foi modificada a codificação do lado direito (permitindo assim que as leitoras continuassem a identificar o lado correspondente), mas a codificação do lado esquerdo varia dependendo do dígito inicial. Um dígito do lado esquerdo pode ser agora codificado com um número par ou ímpar de dígitos iguais a 1, de acordo com a seguinte tabela:

dígito	*lado esquerdo ímpar*	*lado esquerdo par*	*lado direito*
0	0001101	0100111	1110010
1	0011001	0110011	1100110
2	0010011	0011011	1101100
3	0111101	0100001	1000010
4	0100011	0011101	1011100
5	0110001	0111001	1001110
6	0101111	0000101	1010000
7	0111011	0010001	1000100
8	0110111	0001001	1001000
9	0001011	0010111	1110100

Finalmente, para cada dígito inicial escolhe-se uma alternância diferente de pares e ímpares de acordo com o seguinte critério:

Dígito inicial	1º	2º	3º	4º	5º	6º
0	*ímpar*	*ímpar*	*ímpar*	*ímpar*	*ímpar*	*ímpar*
1	*ímpar*	*ímpar*	*par*	*ímpar*	*par*	*par*
2	*ímpar*	*ímpar*	*par*	*par*	*ímpar*	*par*
3	*ímpar*	*ímpar*	*par*	*par*	*par*	*ímpar*
4	*ímpar*	*par*	*ímpar*	*ímpar*	*par*	*par*
5	*ímpar*	*par*	*par*	*ímpar*	*ímpar*	*par*
6	*ímpar*	*par*	*par*	*par*	*ímpar*	*ímpar*
7	*ímpar*	*par*	*ímpar*	*par*	*ímpar*	*par*
8	*ímpar*	*par*	*ímpar*	*par*	*par*	*ímpar*
9	*ímpar*	*par*	*par*	*ímpar*	*par*	*ímpar*

Veja, por exemplo, um pacote de papel A4 fabricado no Brasil, que é identificado pelo código **7891173021793**. Como começa com a sequência **789**, o primeiro dígito, que estará implícito na codificação dos demais, é o sete. Consequentemente deve-se usar do lado esquerdo, a seguinte ordem de codificação (obtida na tabela anterior):

(8) *ímpar* – **(9)** *par* – **(1)** *ímpar* – **(1)** *par* – **(7)** *ímpar* – **(3)** *par*

Consultando, então, a tabela de codificação do EAN-13, obtém-se:

8 → 0110111	**9** → 0010111	**1** → 0011001
1 → 0110011	**7** → 0111011	**3** → 0100001

Para os dígitos do lado direito não é preciso se preocupar com paridade, e diretamente da tabela, obtém-se a seguinte codificação:

0 → 1110010	**2** → 1101100	**1** → 1100110
7 → 1000100	**9** → 1110100	**3** → 1000010

Portanto, o código de barras correspondente é:

Figura 18: Código - papel A4

2.2.3.1 Estrutura do código de barras EAN-13

O Código de Barras EAN-13 é formado por 13 dígitos (13 bytes), onde, nos primeiros 12 dígitos, são especificadas as informações do prefixo do País de origem, código do fabricante, sequência do produto e o último número trata-se do dígito verificador.

O esquema a seguir apresenta essa estrutura de forma mais detalhada.

Figura 19: Disponível em : http://www.gs1-ean13.com.br/

Assim, analisando os três primeiros dígitos dos códigos de barras, é possível identificar o país de origem.[7]

Nestes três exemplos, que a sequência inicial é 789, que é o código que representa o Brasil.

Figura 20: Códigos EAN-13 – produtos de consumo - Indústria Brasileira

A seguir, pode-se observar as sequências: 691 que representa a China e as sequências 87 e 84 (indicadas por apenas dois dígitos), representado a Holanda e a Espanha, respectivamente.

Figura 21: EAN-13 – China **Figura 22:**EAN-13 – Holanda **Figura 23:**EAN-13 – Espanha

[7] Encontra-se uma tabela completa com os números que identificam cada país na página da internet http://www.barcodeisland.com/ean13.phtml

Os próximos nove dígitos são divididos entre a identificação da empresa e do produto. O código de identificação da empresa é um código único atribuído a cada fabricante pela associação a qual é filiada. Esse código pode variar de 4 a 7 dígitos. Os dígitos restantes são utilizados pela empresa para identificar o produto (variam de 2 à 5 dígitos).

Em cada um dos códigos, o último dígito, chamado dígito de verificação, é adicionado no final do processo de elaboração do código, conforme um algoritmo específico, com a finalidade de verificar se um código de barras foi lido corretamente.

2.3 DETECÇÃO DE ERROS

Para melhor compreensão do funcionamento do processo de detecção de erros, é preciso que se entenda, inicialmente, como se atribui a cada produto o dígito de verificação.

O dígito verificador não é um número aleatório e não faz parte da sequência dos dígitos que contém informações sobre o produto. Ele é o resultado de um algoritmo que se obtém a partir dos dígitos anteriores, obedecendo aos padrões do sistema adotado, com a finalidade de certificar a validade de um código numérico.

2.3.1 Dígito verificador no sistema EAN-13

Considerando um produto que está identificado no sistema EAN-13 por uma dada sequência de dígitos: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{13}$, sendo $x = a_{13}$ o dígito verificador.

Seja $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{12}, x)$. O sistema EAN-13 se utiliza de um vetor fixo - "vetor de pesos", identificado por:

$$\boldsymbol{\gamma} = (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1).$$

Calcula-se, então, o produto escalar entre esses dois vetores

$$\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\gamma} = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{12}, x).\,(1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1)$$

$$\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\gamma} = a_1 + 3a_2 + a_3 + 3a_4 + a_5 + 3a_6 + a_7 + 3a_8 + a_9 + 3a_{10} + a_{11} + 3a_{12} + x$$

Agora, o dígito verificador x é determinado de forma tal que a soma obtida seja múltiplo de 10, isto é, $\boldsymbol{\alpha.\gamma} \equiv \mathbf{0}\ (\boldsymbol{mod}\ \mathbf{10})$.

Exemplo 2.3.1.1 No caso do código da figura abaixo, os números que indicam o país de origem, o fabricante e o produto são 789629030085, e como se pode notar, o dígito verificador é 1.

Figura 24: Código EAN-13 (ref. Pacote de arroz de 5 Kg)

Através da aplicação do algoritmo, faz-se a confirmação desse fato.

Sendo $\alpha = (7, 8, 9, 6, 2, 9, 0, 3, 0, 0, 8, 5, x)$ e

$\gamma = (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1)$, então:

$$\boldsymbol{\alpha.\gamma} = 7 + (3 \times 8) + 9 + (3 \times 6) + 2 + (3 \times 9) + 0 + (3 \times 3) + 0 + 8 + (3 \times 5) + x$$

$$\boldsymbol{\alpha.\gamma} = 119 + x.$$

Como $119 + x \equiv 0\ (mod\ 10)$, logo $x = 1$.

O que mostra que a identificação do produto está correta.

Agora, se ao digitar esse código de barras, houvesse um erro de digitação no quarto dígito e o código fosse assim transmitido: 789**5**290300851. O computador, programado para fazer o algoritmo, detectaria o erro, pois:

$$\boldsymbol{\alpha.\gamma} = 7 + (3 \times 8) + 9 + (3 \times 5) + 2 + (3 \times 9) + 0 + (3 \times 3) + 0 + 8 + (3 \times 5) + 1$$

$$\boldsymbol{\alpha.\gamma} = 117,\ \text{e}\ 117 \not\equiv 0\ (mod\ 10).$$

Logo, o computador avisaria que foi cometido algum erro, mas não indicaria qual foi.

2.3.2 Dígito verificador no sistema UPC-A

Com o código UPC-A é muito semelhante. Como utiliza apenas 12 dígitos (pois usa apenas um para identificar o país de origem do artigo), o vetor de pesos utilizado pelo UPC apresenta um dígito a menos:

$$\boldsymbol{\gamma} = \ (3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1).$$

Exemplo 2.3.2.1 O código de barras abaixo é de um antitranspirante, na versão UPC-A, onde 6 é o dígito verificador.

0 79400 05292 6

Figura 25: Código UPC-A (ref. Cosmético)

Como $\boldsymbol{\alpha} = (0, 7, 9, 4, 0, 0, 0, 5, 2, 9, 2, 6)$ e $\boldsymbol{\gamma} = \ (3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1)$, então:

$$\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\gamma} = 0 + 7 + 27 + 4 + 0 + 0 + 0 + 5 + 6 + 9 + 6 + 6$$
$$\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\gamma} = 70.$$

Como $70 \equiv 0\ (mod\ 10)$, tem-se que a identificação do produto está correta.

Agora, se houvesse um erro de digitação, uma “troca de posições” entre os 2º e 3º dígitos, e o código fosse assim transmitido: 0**97**400052926.

O computador, através do algoritmo, acusaria que o código foi digitado errado, pois

$$\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\gamma} = 0 + 9 + 21 + 4 + 0 + 0 + 0 + 5 + 6 + 9 + 6 + 6$$
$$\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\gamma} = 66, \text{ e}$$
$$66 \not\equiv 0\ (\text{mod } 10).$$

2.3.3 Todo erro de digitação é detectado?

Conforme visto, muitas vezes o leitor óptico não consegue realizar a leitura do código de barras, devido ao fato da embalagem do produto estar úmida ou amassada. Neste caso, é preciso que o operador digite a sequência numérica que aparece logo abaixo das barras para que o produto seja identificado.

Nessa operação humana podem ocorrer erros de digitação. Segundo MILIES (2009), autores como D.F. Beckley e J. Verhoeff investigaram sistematicamente esses erros, e a pesquisa apontou como mais frequentes:

- o erro único ($\ldots \boldsymbol{a} \ldots \rightarrow \ldots \boldsymbol{b} \ldots$), com 79% de ocorrência, e
- o erro de transposição adjacente ($\ldots \boldsymbol{ab} \ldots \rightarrow \ldots \boldsymbol{ba} \ldots$), com 10,2%.

Os 10,8% restantes correspondem a erros com frequências menores do que 1% cada.

É possível uma melhor compreensão desses erros por meio de alguns exemplos apresentados a seguir.

Exemplo 2.3.3.1 Considere o código de barras abaixo:

Figura 26: Ref. Cosmético

Suponha que houve um erro de digitação no dígito da posição a_1, e que o código foi assim transmitido: **8**898532698238. O computador detectaria o erro, pois:

$$\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\gamma} = 8 + 24 + 9 + 24 + 5 + 9 + 2 + 18 + 9 + 24 + 2 + 9 + 8$$

$$\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\gamma} = 151 \not\equiv 0 \ (mod\ 10)$$

No entanto, se mais de um erro for cometido na digitação, o erro provavelmente ainda será detectado, mas já não se pode ter certeza, pois eles poderiam se “compensar mutuamente” e a soma poderia ainda continuar sendo um múltiplo de 10.

Se além do erro cometido no dígito da posição a_1, ocorresse, por exemplo, outro erro de digitação com o dígito da posição a_6, e o código fosse assim transmitido: **8**8985**9**2698238. Da mesma forma o computador teria detectado o erro, pois:

$$\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\gamma} = 8 + 24 + 9 + 24 + 5 + 27 + 2 + 18 + 9 + 24 + 2 + 9 + 8$$

$$\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\gamma} = 169 \not\equiv 0\ (mod\ 10)$$

Agora, suponha que os erros foram cometidos com os dígitos das posições a_7 e a_{13}, e o código foi digitado da seguinte forma: 789853**4**69823**6**. Pelo algoritmo teríamos:

$$\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\gamma} = 7 + 24 + 9 + 24 + 5 + 9 + 4 + 18 + 9 + 24 + 2 + 9 + 6$$

$$\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\gamma} = 150 \equiv 0\ (mod\ 10)$$

Portanto, o erro não seria detectado pelo computador.

Exemplo 2.3.3.2 Considere que, ao digitar o código 9788531404580 ocorreu um erro de transposição adjacente entre os elementos a_5 e a_6, e que o código de fato digitado foi 9788**35**1404580. Neste caso, o computador teria detectado o erro, pois:

$$\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\gamma} = 9\ +\ 21\ +\ 8\ +\ 24\ +\ 3\ +\ 15\ +\ 1\ +\ 12\ +\ 12\ +\ 5\ +\ 24$$

$$\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\gamma} = 134 \not\equiv 0\ (mod\ 10)$$

Exemplo 2.3.3.3 Suponha agora, que ao digitar o código 9781402002380, o erro cometido foi entre os elementos a_{11} e a_{12}, e que o número de fato digitado foi 9781402002**83**0. Ao efetuar a verificação, teríamos:

$$\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\gamma} = 9\ +\ 21\ +\ 8\ +\ 3\ +\ 4\ +\ 2\ +\ 6\ +\ 8\ +\ 9$$

$$\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\gamma} = 70\ \equiv 0\ (mod\ 10).$$

E como 70 é um múltiplo de 10, o sistema não teria detectado o erro.

Através desses exemplos, fica constatado que este sistema de detecção de erros não tem a capacidade de detectar todo erro de transposição cometido. E que a transposição de dois dígitos consecutivos $a_i \; e \; a_{i+1}$ não é detectada neste sistema de codificação se, e somente se, $|a_i - \; a_{i+1}| = \; 5$.

De fato, dentro do sistema EAN-13, considerando dois dígitos consecutivos: a_i e a_{i+1} $(i = 1, \ldots, 12)$, pelo vetor de pesos $\gamma = (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1)$, tem-se que:

- *se $\boldsymbol{i}$ for ímpar, multiplica-se $\boldsymbol{a_i}$ por $\mathbf{1}$,*
- *se $\boldsymbol{i}$ for par, multiplica-se $\boldsymbol{a_i}$ por $\mathbf{3}$.*

Demonstração:

Sejam os vetores:

$\alpha = (a_1, \ldots, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{13})$ e $\alpha' = (a_1, \ldots, a_{i+1}, a_i, , \ldots, a_{13})$, com i ímpar:

$$\alpha.\gamma = (1.a_1 + \cdots + 1.a_i + 3.a_{i+1} + \cdots + 1.a_{13})$$
$$\alpha'.\gamma = (1.a_1 + \cdots + 1.a_{i+1} + 3.a_i + \cdots + 1.a_{13})$$

Supondo-se que o erro não foi detectado, então:

$$\alpha.\gamma \equiv 0 \; (mod \; 10) \; \text{ e } \alpha'.\gamma \equiv 0 \; (mod \; 10)$$

Daí, segue que:

$$\alpha.\gamma \equiv \alpha'.\gamma \; (mod \; 10)$$

$$a_1 + \cdots + a_i + 3.a_{i+1} + \cdots + a_{13} \equiv a_1 + \cdots + a_{i+1} + 3.a_i + \cdots + a_{13} \; (mod \; 10)$$

$$a_i + 3.a_{i+1} \equiv a_{i+1} + 3.a_i \; (mod \; 10)$$

$$a_i + 3.a_{i+1} - a_{i+1} - 3.a_i \; \equiv 0 \; (mod \; 10)$$

$$2.(a_{i+1} - a_i) \equiv 0 \; (mod \; 10)$$

Mas como, a_i e $a_{i+1} \in A = \{0, \ldots, 9\}$, então $|\, a_{i+1} - a_i| = 5$.

Reciprocamente, se $|\, a_{i+1} - a_i| = 5$, então o erro de transposição entre os consecutivos a_i e a_{i+1}, $(a_i \; \neq \; a_{i+1})$ não será detectado.

Considerando $a_{i+1} > a_i$, tem-se que:

$$a_{i+1} - a_i = 5 \;\Rightarrow 2.(a_{i+1} - a_i) = 10$$

Daí, segue que:

$$10 \mid 2.(a_{i+1} - a_i)$$

$$\Rightarrow 10 \mid \; 1.a_i + 3.a_{i+1} - 1.a_{i+1} - 3.a_i$$

$$\Rightarrow 10 \mid (1.a_i + 3.a_{i+1}) - (1.a_{i+1} + 3.a_i)$$

$$\Rightarrow (1.a_i + 3.a_{i+1}) - (1.a_{i+1} + 3.a_i) \equiv 0 \; (mod\; 10)$$

$$\Rightarrow 1.a_i + 3.a_{i+1} \equiv 1.a_{i+1} + 3.a_i \; (mod\; 10)$$

Logo,

$$a_1 + \cdots + a_i + 3.a_{i+1} + \cdots + a_{13} \equiv a_1 + \cdots + a_{i+1} + 3.a_i + \cdots + a_{13} (mod\; 10)$$

$$\alpha.\gamma \equiv \alpha'.\gamma \; (mod\; 10)$$

Como $\alpha.\gamma \equiv 0 \; (mod\; 10)$, então $\alpha'.\gamma \equiv 0 \; (mod\; 10)$. De fato o erro não será detectado.

Para i par, a demonstração é análoga. ■

Voltando ao exemplo 2.3.3.3, onde a troca dos consecutivos 3 e 8 não foi detectada, pois $|8 - 3| = 5$.

Para facilitar esta exposição, introduziremos um pouco de linguagem geral. Denotando por A o conjunto de valores que podem assumir os dígitos utilizados na codificação. Por exemplo, no caso dos códigos UPC e EAN da seção anterior, esse conjunto é:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq m - 1\}$$

O vetor com os dados α'= $(a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , \ldots , a_{n-1})$ será chamado de vetor de informação e o vetor, já acrescido do dígito de verificação, será chamado de número ou vetor de identificação, cuja notação será α.

Definição 2.3.3.1 *Sejam* $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, *com* $\gamma_i \in A$, $1 \leq i \leq n$ *um vetor de pesos e* $c \in A$ *um inteiro fixado. Dados dois inteiros positivos* m *e* n *e um conjunto de números* $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}$ *tais que* $a_i \in A$, $1 \leq i \leq n-1$, *define-se o número de verificação* a_n *como o único elemento de A que verifica a equação:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i . \gamma_i \equiv c \ (mod\ m).$$

Um sistema de codificação assim definido será denotado por

$$C = (A, m, n, c, \gamma).$$

Nota-se que, frequentemente, $A = \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Neste caso, tomando classes $módulo\ m$, tem-se que a_n é o único elemento de A que verifica:

$$[a_n] = [\gamma_n]^{-1} . \left([c] - \sum_{i=1}^{n-1} [a_i] . [\gamma_i] \right).$$

O Teorema a seguir descreve a capacidade que tem um sistema definido da forma $C = (A, m, n, c, \gamma)$, para detectar os erros mais frequentes.

Teorema 2.3.3.1 *(Capacidade de detecção de erros). Sejam* m *um inteiro positivo e* $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ *um vetor de pesos. Suponha que um vetor de identificação* $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ *(onde tem-se que* $0 \leq a_i < m$, *para todo índice* i, $1 \leq i \leq n$*) satisfaz a condição:*

$$\alpha . \gamma = a_1 . \gamma_1 + \cdots + a_n . \gamma_n \equiv c \ (mod\ m)$$

Então,

(i) *Todo erro consistente numa única alteração na posição i-ésima será detectado se, e somente se,* $mdc(\gamma_i, m) = 1$.

(ii) *Todo erro de transposição da forma:* $\ldots a_i \ldots a_j \ldots \to \ldots a_j \ldots a_i \ldots$ *será detectado se, e somente se,* $mdc(\gamma_i - \gamma_j, m) = 1$, *(com* $i \neq j$*).*

Demonstração:

(i) Seja α = $(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$. Suponha que o dígito a_i tenha sido trocado por outro dígito b_i e β= $(a_1, a_2, \ldots, b_i, \ldots, a_n)$ seja o vetor resultante da troca. Neste caso o erro não será detectado se, e somente se, $\alpha.\gamma \equiv \beta.\gamma \ (mod\ m)$, isto é, se, e somente se, $m \mid (a_i - b_i)\gamma_i$.

($\Leftarrow$) Suponha que $mdc(\gamma_i, m) = 1$ e que o erro não foi detectado. Então segue que, $m \mid (a_i - b_i)\gamma_i$. Como, por hipótese, γ_i e m são primos, tem-se que $m \mid a_i - b_i$. Mas $0 \leq a_i, b_i < m$ e assim $a_i - b_i = 0$, ou seja, $a_i = b_i$ (Absurdo!).

($\Rightarrow$) Suponha que todo erro é detectado e que $mdc(\gamma_\mathrm{i}, m) = d \neq 1$.
Sejam $x_i = a_i + \frac{m}{d}$ e $y_i = a_i - \frac{m}{d}$.
Afirmação: $0 \ \leq \ x_i \ < \ m$ ou $0 \ \leq \ y_i \ < \ m$.
De fato, se $m \ \leq \ x_i$ e $y_i \ < \ 0$, então $m \leq a_i + \frac{m}{d}$, $a_i - \frac{m}{d} < 0$ e assim $m - \frac{m}{d} < \frac{m}{d}$. Portanto $md < 2m$ e então $d < 2$ (Absurdo!).

Seja $b_i = x_i$ ou y_i satisfazendo $0 \ \leq \ b_i \ < \ m$. Então $(a_i - b_i)\gamma_i = \left(\pm \frac{m}{d}\right)\gamma_i = m\left(\pm \frac{\gamma_i}{d}\right)$, isto é, o erro que substitui a_i por b_i não é detectado (Absurdo!).

(ii) Seja α =$(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n)$. Suponha que os dígitos a_i e a_j tenham sido trocados e β= $(a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$ seja o vetor resultante da troca. Neste caso o erro não será detectado se, e somente se, $\alpha.\gamma \equiv \beta.\gamma \ (mod\ m)$, isto é, se e somente se $m \mid (a_i - a_j)(\gamma_i - \gamma_j)$.

($\Leftarrow$) Suponha que $mdc(\gamma_i - \gamma_j, m) = 1$ e que o erro não foi detectado. Então segue que $m \mid (a_i - a_j)(\gamma_i - \gamma_j)$. Como, por hipótese, $\gamma_i - \gamma_j$ e m são primos, tem-se que $m \mid a_i - a_j$. Mas $0 \leq a_i, a_j < m$ e assim $a_i - a_j = 0$, ou seja, $a_i = a_j$ (Absurdo!).

($\Rightarrow$) Suponha que todo erro é detectado e que $mdc(\gamma_i - \gamma_j, m) = d \ \neq 1$. Usando as ideias anteriores, tem-se que, se $a_j = a_i + \frac{m}{d}$ ou $a_j = a_i - \frac{m}{d}$, então o erro de transposição cometido entre a_i e a_j não é detectado (Absurdo!). ■

O resultado deste teorema garante que a melhor forma de ter certeza que o sistema de codificação será capaz de detectar todos os erros únicos e todos os erros de transposição (contigua ou não) é tomar para o valor do m um número primo.

Exemplo 2.3.3.4 Um sistema usado em alguns bancos (mas não todos) é o seguinte: o número da conta de um cliente é composto de 9 dígitos, sendo que o último é o dígito de verificação. Neste caso, o sistema pode ser descrito como $C = (A, 10, 9, 0, \gamma)$, onde A é o conjunto dos dígitos de 0 a 9 e γ = (7, 3, 9, 7, 3, 9, 7, 3, 9). Por exemplo, o número de uma conta, num certo banco, é 95-005541-9.

Pode-se verificar que:

$$(9,5,0,0,5,5,4,1,9).(7,3,9,7,3,9,7,3,9) =$$
$$= 63 + 15 + 0 + 0 + 15 + 45 + 28 + 3 + 81$$
$$= 250 \equiv 0 \ mod\ 10.$$

Suponha que ocorreu um erro de digitação (na posição a_2) e o código foi assim transmitido: 9**8**-005541-9. Então o computador detectaria o erro, pois:

$$(9,8,0,0,5,5,4,1,9).(7,3,9,7,3,9,7,3,9) =$$
$$= 63 + 24 + 0 + 0 + 15 + 45 + 28 + 3 + 81$$
$$= 259 \not\equiv 0 \ mod\ 10.$$

De fato, pelo Teorema 2.3.3.1, parte (i), tem-se que $mdc(\gamma_i, 10) = 1$, para todo γ_i , onde $\gamma_i = \{3,7,9\}$.

Suponha agora, que ocorreu um erro de transposição entre os números das posições a_3 e a_5, e o código foi assim digitado: 95-**5**0**0**541-9. Neste caso, o computador não detectaria o erro, pois:

$$(9,5,5,0,0,5,4,1,9).(7,3,9,7,3,9,7,3,9) =$$
$$= 63 + 15 + 45 + 0 + 0 + 45 + 28 + 3 + 81$$
$$= 280 \equiv 0 \ mod\ 10.$$

Pelo Teorema 2.3.3.1 – parte (ii), tem-se que:

$mdc(9 - 3, 10) = (6, 10) = 2 \neq 1$, então o erro não foi detectado.

Mas, se esse erro de transposição fosse entre os dígitos das posições a_1 e a_2 (**59**-005541-9), o computador teria detectado o erro, pois:

$$(5,9,0,0,5,5,4,1,9).(7,3,9,7,3,9,7,3,9) =$$
$$35 + 27 + 0 + 0 + 15 + 45 + 28 + 3 + 81 =$$
$$234 \not\equiv 0 \; mod \; 10.$$

Neste caso, observa-se que, o $mdc(7-3,10) = (4,10) = 2 \neq 1$, porém o erro foi detectado.

Verifica-se, então, a importância da escolha dos elementos que compõem um sistema numérico de detecção de erros, para que seja o mais abrangente possível.

Vale ressaltar que foram analisados apenas os casos de erros mais comuns e que, para os demais casos, tem-se que analisar as particularidades de cada um.

2.4 OUTROS CÓDIGOS NUMÉRICOS

Além dos códigos de barras, existem muitos outros códigos numéricos que, pela sua importância, também possuem um sistema de identificação controlado por dígitos de verificação ou dígitos de controle. Nesta seção conheceremos alguns deles através de exemplos.

Exemplo 2.4.1 (FINI, 2009, p.73) No Brasil, o sistema de identificação usado para o cadastramento de pessoas físicas fornece o número de CPF, emitido pela Receita Federal, é um EAN-11, e trabalha com os dígitos de verificação em duas fases.

Sua estrutura contém as seguintes informações: $a_1\, a_2\, a_3\, a_4$ ... a_{11} , onde:

- $\boldsymbol{a_1\; a_2\; a_3\; a_4\; a_5\; a_6\; a_7\; a_8}$**:** $número - base.$
- $\boldsymbol{a_9}$**:** $unidade\ da\ federação\ onde\ a\ pessoa\ fez\ seu\ registro.$
- $\boldsymbol{a_{10}\; a_{11}}$**:** $dígitos\ de\ controle.$

A tabela a seguir resume os códigos dos Estados Brasileiros.

CÓDIGO EAN-11 PARA AS UNIDADES DA FEDERAÇÃO	
BRASIL	
0	Rio Grande do Sul
1	Distrito Federal, Goiás, Mato Grosso, Mato Grosso do Sul e Tocantins
2	Acre, Amapá, Amazonas, Pará, Rondônia e Roraima
3	Ceará, Maranhão e Piauí
4	Alagoas, Paraíba, Pernambuco e Rio Grande do Norte
5	Bahia e Sergipe
6	Minas Gerais
7	Espírito Santo e Rio de Janeiro
8	São Paulo
9	Paraná e Santa Catarina

Considerando o número de um CPF: 067.374.838/36, observa-se que:

- $\mathbf{067.374.83}$: $número - base.$
- $\mathbf{8}$: $este\ registro\ foi\ feito\ no\ estado\ de\ São\ Paulo.$
- $\mathbf{36}$: $dígitos\ de\ controle.$

Os cálculos para a verificação desse número de CPF devem ser feitos em duas fases.

1ª fase: Consideram-se os nove primeiros dígitos do código, onde o vetor de pesos é: $(1,2,3,4,5,6,7,8,9)$. Daí, tem-se que:

$$\boldsymbol{\alpha} = (0,6,7,3,7,4,8,3,8) \text{ e } \boldsymbol{\gamma} = (1,2,3,4,5,6,7,8,9)$$

$$\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\gamma} = 0 + 12 + 21 + 12 + 35 + 24 + 56 + 24 + 72 = 256 \equiv 3\ (mod\ 11)$$

Então $\mathbf{3}$ é o primeiro dígito de controle.

2ª fase: Considere, agora, o número formado pelos nove primeiros dígitos do código e o primeiro dígito verificador, onde o vetor de pesos é: $(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)$. Da mesma forma, tem-se que:

$$\boldsymbol{\alpha} = (0,6,7,3,7,4,8,3,8,3) \text{ e } \boldsymbol{\gamma} = (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)$$

$$\boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\gamma} = 0 + 6 + 14 + 9 + 28 + 20 + 48 + 21 + 64 + 27 = 237 \equiv 6\ (mod\ 11)$$

Então $\mathbf{6}$ é o segundo dígito de controle, o que prova a veracidade desse CPF.

Observação: Como se trata de módulo 11, quando o resto for 10, pela regra, é considerado zero.

Exemplo 2.4.2 (http://www.isbn.bn.br/). Criado em 1967 e oficializado como norma internacional em 1972, o ISBN - International Standard Book Number - é um sistema que identifica numericamente os livros segundo o título, o autor, o país e a editora, individualizando-os inclusive por edição.

O sistema é controlado pela Agência Internacional do ISBN, que orienta e delega poderes às agências nacionais. No Brasil, a Fundação Biblioteca Nacional representa a Agência Brasileira desde 1978, com a função de atribuir o número de identificação aos livros editados no país.

A partir de 1º de janeiro de 2007, o ISBN passou de dez para 13 dígitos, associando-se a EAN, com a adoção do prefixo 978. O objetivo foi aumentar a capacidade do sistema, devido ao crescente número de publicações, com suas edições e formatos.

Sua estrutura é assim estabelecida:

- $\boldsymbol{a_1}\ \boldsymbol{a_2}\ \boldsymbol{a_3}$: $representam\ o\ país\ de\ origem$
- $\boldsymbol{a_4}\ \boldsymbol{a_5}\ \boldsymbol{a_6}\ \boldsymbol{a_7}$: $representam\ o\ código\ da\ empresa\ filiada$ à EAN
  $(são\ 4, 5\ ou\ 6\ dígitos, conforme\ normas\ da\ EAN - 13)$
- $\boldsymbol{a_8}\ \boldsymbol{a_9}\ \boldsymbol{a_{10}}\ \boldsymbol{a_{11}}\ \boldsymbol{a_{12}}$: $código\ do\ artigo\ dentro\ da\ empresa$
  $(\ variam\ de\ 3\ a\ 5\ dígitos, elaborados\ pela\ empresa\ para\ identificar\ o\ item)$
- $\boldsymbol{a_{13}}$: $dígito\ de\ controle, conforme\ normas\ da\ EAN - 13$

Por exemplo, um livro do autor HEFEZ (2011), é identificado pelo número:

ISBN 978-85-85818-25-8.

Veja que o dígito final, de verificação, é 8, pois:

$\alpha = (9, 7, 8, 8, 5, 8, 5, 8, 1, 8, 2, 5, 8)$ e $\gamma = (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1 ,3 ,1)$

Daí, tem-se que:

$$\boldsymbol{\alpha.\gamma} = (9, 7, 8, 8, 5, 8, 5, 8, 1, 8, 2, 5, 8) . (1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1 ,3 ,1)$$
$$\boldsymbol{\alpha.\gamma} = 9\ + 21 + 8 + 24 + 5 + 24 + 5 + 24 + 1 +\ 24 + 2 + 15 + 8$$
$$\boldsymbol{\alpha.\gamma} = 170 \equiv\ 0\ (mod\ 10).$$

Exemplo 2.4.3 (http://www.brasil.gov.br/para/servicos/documentacao). RG- Registro Geral: é um documento emitido para cidadãos nascidos e registrados no Brasil e para nascidos no exterior, que sejam filhos de brasileiros. Serve para confirmar a identidade da pessoa e para solicitação de outros documentos e é válido em todo o território nacional. O identificador do RG emitido pela SSP-SP é um número sequencial de 8 dígitos, acrescido de um nono algarismo - dígito verificador. O cálculo do dígito verificador deste órgão emissor utiliza o sistema $módulo\ 11$, onde se realiza a seguinte operação:

Sendo:
$\alpha' = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_8)$ o vetor de informação, e
$\gamma = (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2)$ o vetor de pesos.
A multiplicação sempre se iniciará da direita para a esquerda.

Considere como exemplo, um número de RG: 18.888.737- 4.
Como $\alpha' = (1, 8, 8, 8, 8, 7, 3, 7)$ e $\gamma = (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2)$, tem-se que:

$$\boldsymbol{\alpha'.\gamma} = 9 + 64 + 56 + 48 + 40 + 28 + 9 + 14$$

$$\boldsymbol{\alpha'.\gamma} = 268 \equiv 4\ (mod\ 11)$$

Onde **4** é o digito de controle, o que prova a veracidade do documento.

Observação: Caso o dígito verificador seja 10, utiliza-se o caractere **X** como dígito verificador.

CAPÍTULO III

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM "O CÓDIGO DE BARRAS E A LINGUAGEM BINÁRIA"

Este capítulo apresenta uma proposta de sequência de atividades de autoria própria, abordando conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental, contemplando o tema de estudo deste trabalho.

3.1 OBJETIVO

Criar um código de barras fictício.

Justificativa:

De acordo com o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo (2012):

> A caracterização dos conteúdos disciplinares como meio para a formação pessoal coloca em cena a necessidade de sua contextualização, uma vez que uma apresentação escolar sem referências, ou com mínimos elementos de contato com a realidade concreta, dificulta a compreensão dos fins a que se destina (São Paulo, 2012, p.30).

Muitas vezes, quando se introduz um conceito matemático, é comum os alunos indagarem:

Onde vou usar isso?

Para que serve a Matemática?

O absentismo por parte dos alunos, nesta disciplina, é maior do que nas outras. Talvez, devido a uma cultura de um passado próximo, onde aprender matemática era decorar fórmulas e procedimentos para resolução de problemas.

Hoje, os profissionais da educação têm que ser flexíveis e reavaliar as práticas pedagógicas adotadas, buscando sempre situações de aprendizagem motivadoras e prazerosas que levem à construção do conhecimento. Tarefa nada fácil diante de tantas inovações tecnológicas.

> É fundamental, no entanto, que a valorização da contextualização seja equilibrada com o desenvolvimento de outra competência, igualmente valiosa: a capacidade de abstrair o contexto, de generalizar e, sobretudo, a capacidade de imaginar situações fictícias, que não existem concretamente, ainda que possam vir a ser realizadas (São Paulo, 2012, p.30).

Diante dessas vertentes, foi elaborada uma situação de aprendizagem com atividades que desenvolvessem competências e habilidades a fim de atingir esses objetivos.

3.2 PÚBLICO ALVO

7ª série/8º ano do Ensino Fundamental.

Também pode ser adaptada para as demais séries sequenciais, inclusive do Ensino Médio.

3.3 PRÉ-REQUISITOS

- Saber realizar operações com números naturais de modo significativo (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).
- Compreender informações transmitidas em tabelas.
- Compreender o funcionamento de sistemas decimais e não decimais de numeração, em especial, a base binária.

3.4 MATERIAIS E TECNOLOGIA

- Materiais de uso diário como: caderno, lápis, canetas, borracha - para os registros durante o desenvolvimento da atividade.
- Recortes de vários códigos de barras – objeto de análise da atividade.
- Computador/Sala de Informática: viabilizar com eficácia o processo de codificação e decodificação.
- Fichas com representação de barras – para facilitar na resolução dos problemas. (Parte B - Atividade 4)

Justificativa:

As pessoas vivem, hoje, inseridas num “mundo informatizado”. Até para tarefas simples, como retirar uma senha em vários estabelecimentos, já se conta com auxílio de uma máquina. Não há dúvidas de que os computadores, atualmente, são instrumentos de grande importância tanto no âmbito cultural como no social e econômico, “mas é no terreno da Matemática que se abrem as mais naturais e promissoras possibilidades de assimilação consciente dos inúmeros recursos que as tecnologias informáticas podem oferecer no ramo da Educação” (São Paulo, 2012, p.27).

Diversas são as tecnologias, os professores precisam criar um ambiente atrativo para que o processo ensino-aprendizagem seja efetivado com sucesso. O computador é um forte recurso tecnológico que desempenha essa função.

3.5 RECOMENDAÇÕES METODOLÓGICAS

O uso do computador, nessa atividade, tem como objetivo substituir o moroso trabalho manual na realização das mudanças da base de um número escrito no sistema de numeração decimal para o binário, e vice-versa.

Para esta função foi feito um programa bastante simples, por um colaborador. Cujo comando é:

Digitar 1: para transformar número decimal em binário

Digitar 2: para transformar número binário em decimal

Pela simplicidade do programa, talvez na própria escola, dentre colegas e alunos (com conhecimento em informática), o professor possa encontrar um colaborador.

3.6 DESENVOLVIMENTO

Esta situação de aprendizagem será composta por cinco atividades, contendo ideias e sugestões de procedimentos metodológicos relevantes para o ensino da matemática.

É importante que o professor tenha um conhecimento prévio sobre o assunto. O Capítulo II deste trabalho oferece uma boa noção sobre códigos de barras, além de exemplos variados que auxiliam na compreensão do tema.

O tempo para cada atividade depende do envolvimento e empenho dos alunos.

Em cada etapa é importante que o professor auxilie e incentive seus alunos na realização dos registros dos resultados obtidos, para análise posterior.

Atividade 3.6.1 Reconhecimento dos códigos de barras

O professor poderá introduzir o tema dialogando com os alunos.

- Argumentar sobre os códigos de barras: Conhecem? Onde encontrar? Todo produto tem? Para que serve? - Fazendo uma avaliação diagnóstica sobre o conhecimento dos alunos em relação ao tema.
- Como tarefa, pedir aos alunos que tragam de casa diversos tipos de embalagens que contenham códigos de barras.

Atividade 3.6.2 Estrutura dos códigos de barras

Parte A. Propor aos alunos que formem grupos e apresentem os materiais que trouxeram de casa.

- Pedir que observem os códigos fazendo comparações entre eles, verificando as diferenças e/ou semelhanças encontradas. (Espera-se que os alunos identifiquem: sequências iguais (pelo menos em partes), quantidades iguais de dígitos em cada código, etc.)
- Compartilhar os resultados de cada grupo.

Nesse momento, é importante a intervenção do professor, abordando de forma sucinta os aspectos históricos dos códigos de barras: quando surgiu, com qual finalidade, sua evolução, seus benefícios para a sociedade atual. Deve-se também, falar sobre a estrutura dos códigos de barras, mais precisamente os três primeiros dígitos, os quais informam o país de origem do produto.

Atualmente, é muito comum encontrar no comércio produtos importados, principalmente artigos escolares. É interessante, se possível, que o professor providencie alguns exemplos de códigos de barras de produtos importados, para que os alunos observem de fato as diferenças, caso ninguém tenha trazido.

Justificativa:

De acordo com o Currículo do Estado de São Paulo (2012):

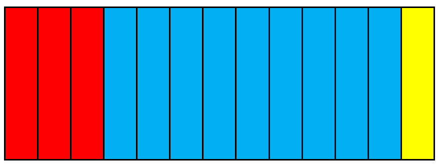
> É na historia que buscamos não apenas uma compreensão mais nítida dos significados dos conceitos fundamentais, mas principalmente o significado das mudanças conceituais, ou seja, o significado das mudanças de significado. (São Paulo, 2012, p.45).

É importante que os alunos percebam que estão dentro deste processo de evolução dos códigos de barras, e que a cada dia surgem novos modelos que melhor atendem às necessidades do mercado.

Parte B. Apresentação da estrutura do código de barras – EAN-13, padrão adotado pelo Brasil.

No sentido de facilitar, o Professor pode apresentar aos alunos um esquema com a estrutura do código de barras – EAN-13.

Veja:



Onde:

- os 3 primeiros dígitos (barras vermelhas): representam o código do país de origem (no caso do Brasil – 789).
- os próximos 9 dígitos (barras azuis): contém as informações que identificam a empresa e o produto.
- o último dígito: é o algarismo de controle, obtido através de um algoritmo (regras) que envolve os doze dígitos anteriores.

Deve-se destacar, também, seu principal objetivo: identificar, com segurança, um objeto, um artigo, de acordo com o país de origem, a empresa que o produz, o tipo de produto.

Atividade 3.6.3 Cálculo do dígito verificador – padrão EAN-13.

Para esta etapa, o professor pode manter os grupos formados anteriormente. Como se trata de alunos da 7ª série/8º ano, para calcular o dígito verificador, a sugestão é apresentar o algoritmo de forma bastante simples através de um exemplo.

Deve-se enfatizar que o dígito verificador é o resultado de um algoritmo (algoritmo é uma sequência de instruções que podem ser executadas mecanicamente, por uma pessoa ou máquina - computador) que envolve os dígitos anteriores, e não contém informações sobre o produto. Dependendo do padrão adotado, o algoritmo pode ser diferente.

Parte A. Analisando um exemplo.

O código de barras do Caderno do Professor de Matemática – Ensino Fundamental - 7ª série – Volume 2 (SEE,2009)

9 788578 492946

1º) Da esquerda para a direita, escreva 1 e 3, alternadamente, abaixo de cada um dos 12 primeiros dígitos.

9	7	8	8	5	7	8	4	9	2	9	4
1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3

2º) Multiplique cada dígito do código pelo dígito colocado imediatamente abaixo dele e some todos os produtos obtidos.

9	7	8	8	5	7	8	4	9	2	9	4
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3

Assim obtém-se a soma:

$$9 + 21 + 8 + 24 + 5 + 21 + 8 + 12 + 9 + 6 + 9 + 12 = 144$$

3º) Agora, o dígito verificador é o número que, adicionado à soma obtida, a transforma num múltiplo de 10. Dessa forma, tem-se que o dígito verificador desse produto é o número **6**, o que facilmente é certificado pela figura.

Parte B. Após o exemplo, propor aos grupos que realizem esse procedimento com alguns dos seus códigos, sempre registrando os resultados obtidos. O professor deve acompanhar a realização dessa atividade para auxiliar os alunos, caso houver dúvidas.

Pode-se também, sugerir como tarefa, dependendo do interesse dos alunos, uma pesquisa sobre outros códigos que possuem dígito verificador, como é o caso do RG e CPF. Existem vários sites na internet que mostram com clareza os algoritmos utilizados.

Observações:

- Pode-se usar como exemplo, um dos códigos trazidos pelos alunos.
- Quando esta atividade for desenvolvida com os alunos do Ensino Médio, esse algoritmo pode ser apresentado usando os conceitos de congruência - Aritmética Modular.

Atividade 3.6.4 Como escrever com barras

Inicialmente, deve-se voltar um pouco na história e verificar a importância da evolução dos recursos tecnológicos para o crescimento econômico mundial, tais como o leitor óptico e computadores.

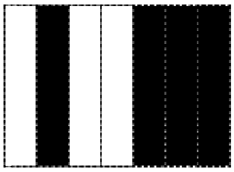
Ressaltar, também, a linguagem dos computadores – base binária (bits). Esse assunto é abordado com bastante clareza no caderno do 1º bimestre das Escolas Estaduais, e serve como referência para melhor entendimento do assunto.

Para facilitar o desenvolvimento desta atividade, a barra branca será representada por “zero” e a barra preta, por “um”.

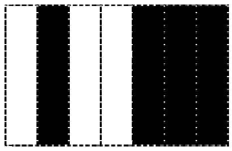
Esta atividade tem por objetivo, recordar a escrita na base binária, bem como a transformação para a base 10 e vice-versa.

Parte A. Analisando exemplos.

Exemplo 1. Transformar a representação gráfica em um número na base 10 – decodificação.



1º passo: Identificar as barras brancas com o dígito “zero” e as barras pretas, com “um”



Então, as barras estão representando o número $\mathbf{0100111}$ na base binária. Para facilitar, pode-se usar a seguinte notação: $(0100111)_2$

2º passo: Transformar o número $(0100111)_2$ na base decimal.

Para a conversão, utiliza-se as potências de 2, veja:

$$\mathbf{0100111} = (0x2^6) + (1x2^5) + (0x2^4) + (0x2^3) + (1x2^2) + (1x2^1) + (1x2^0)$$
$$= 0 + 32 + 0 + 0 + 4 + 2 + 1 = \mathbf{39}$$

Que será assim representado: $(39)_{10}$

Exemplo 2. Transformar o número $(100)_{10}$ na base binária.

1º passo: Transformar o número $(100)_{10}$ na base binária.

Um procedimento simples é efetuar divisões sucessivas por 2, e considerar os “restos” de cada divisão para o representação do número na nova base.

A tabela a seguir apresenta os resultados para este exemplo.

$100 : 2 = 50$	$resto\ 0$
$50 : 2 = 25$	$resto\ 0$
$25 : 2 = 12$	$resto\ 1$
$12 : 2 = 6$	$resto\ 0$
$6 : 2 = 3$	$resto\ 0$
$3 : 2 = 1$	$resto\ 1$
$1 : 2 = 0$	$resto\ 1$

O processo termina quando o novo quociente for zero.

O novo número é formado pelos restos obtidos, e a leitura é feita de baixo para cima. Logo, tem-se que:

$$(100)_{10} = (1100100)_2$$

2ª passo: Escrever com barras o número encontrado.

(O aluno deverá fazer a correspondência entre os números e as barras, pintando de preto aquelas que representam o número 1)

1 1 0 0 1 0 0

Finalmente, a codificação está pronta.

Parte B. O professor deverá elaborar uma folha com alguns exercícios, conforme os exemplos acima, para que os alunos possam recordar esses procedimentos (assuntos abordados na 5ª e 6ª séries). Uma oportunidade para os alunos colorirem as barras pretas, uma atividade prazerosa para eles dessa fase.

É importante que os alunos percebam que esse processo de forma manual é muito trabalhoso e inviável para identificar grandes quantidades de produtos ou serviços.

Novamente, é bom destacar como o avanço tecnológico nos auxilia rumo ao progresso social, cultural e econômico. Com a invenção dos leitores ópticos aliados ao computador, essa tarefa se tornou fácil, rápida e eficiente, agilizando a rotina dos consumidores em geral bem como a comercialização internacional.

Atividade 3.6.5 Criando um Código de Barras

O objetivo desta atividade é despertar no aluno a capacidade de criar, de inovar, e principalmente, de verificar que os conceitos matemáticos aprendidos na sala de aula são artifícios de grande importância para o desenvolvimento do mundo moderno, principalmente quando aliados às tecnologias.

Deverá ser desenvolvida na sala de informática, com uso do computador. (Caso o professor não tenha esse recurso disponível, poderá também usar calculadoras para auxiliar no desenvolvimento desta atividade).

Parte A. Propor aos alunos a criação de um código de barras fictício, utilizando os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores.

1º passo: Cada grupo deverá pensar num tema para a construção do código e discutir sobre qual a melhor estrutura, isto é, verificar se o tamanho do código de barras escolhido é adequado para receber todas as informações que se deseja. E, através de tentativas, fazer as adaptações necessárias.

Cabe ao professor acompanhar e orientar nessas tomadas de decisões.

A seguir, tem-se a análise de um exemplo para discussão de algumas das possíveis dúvidas que poderão aparecer no decorrer dessa atividade.

Considerando como tema a “Identificação dos alunos” de uma Escola de Ensino Fundamental. Supondo-se que, nesta escola, em cada um dos períodos, tenha apenas uma classe por série.

1º) Descrever as informação que serão representadas no código.

Escola: 25

Turnos: manhã:1 e tarde:3

Séries: 5ª, 6ª, 7ª e 8ª

Número de chamada: 1 a 35

2º) Esquematizando a estrutura

Escola	Turno	Série	Número da chamada
25	1	5	01
	3	6	02
		7	⋮
		8	35

Agora, para a codificação, é necessário que se escreva os dados na base binária.

2º passo: É preciso verificar quantos bits são necessários para representar cada número, para padronização das barras. Deve-se analisar, dentro de cada informação, o maior número escrito na base decimal, para definir esse padrão.

Nesta parte, o computador é utilizado a fim de otimizar o tempo, facilitando assim as tomadas de decisões. Essa operação é mostrada com clareza nos exemplos abaixo.

No caso da identificação da escola, o número é 25:

```
Decimal para Binario: 1
Binario para Decimal: 2

1
Digite o valor na base 10: 25
Valor na base 2: 11001
```

São precisos, então, 5 bits, ou seja, 5 barras para a representação da escola.

Para os turnos:

```
1
Digite o valor na base 10: 1
Valor na base 2: 1
```

```
1
Digite o valor na base 10: 3
Valor na base 2: 11
```

Aqui, é importante que os alunos percebam que, para padronizar as barras, serão necessários 2 bits.

E a representação de cada turno ficaria assim:

Manhã: $(1)_{10} = (01)_2$

Tarde: $(3)_{10} = (11)_2$

Da mesma forma, obtém-se:

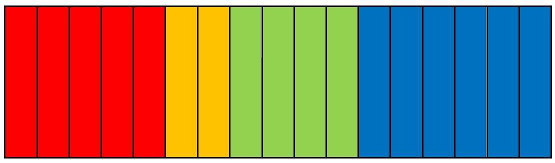
- para as séries:

$(5)_{10} = (101)_2$ e $(8)_{10} = (1000)_2$, : serão necessários 4 bits.

- para os números da chamada:

$(1)_{10} = (1)_2$ e $(35)_{10} = (100011)_2$: para essa informação deve-se reservar 6 bits.

Então, a estrutura ficaria assim:



Onde as barras:

- Vermelhas: representam a escola – 5 bits
- Laranjas: representam o turno – 2 bits
- Verdes: representam a série – 4 bits
- Azuis: representam o número de chamada – 6 bits

Conclui-se que, para identificar todos os alunos dessa escola (utilizando a hipótese de apenas uma turma de cada série por período), é preciso que o tamanho do código seja de 17 bits, no mínimo.

Parte B. Codificando e Decodificando

1º) Codificando um aluno que estuda nessa escola, na 7ª série do período da tarde, cujo número de chamada é 6.

Dados para a identificação: **25 – 3 – 7 – 6** (Observa-se que a ordem é importante)

Novamente, fazendo uso do recurso tecnológico (computador), o qual efetua as conversões dos números escritos na base 10 base a base 2, onde, rapidamente, pode-se verificar as representações binárias de cada informação que constituirão o código.

```
1
Digite o valor na base 10: 25
Valor na base 2: 11001
```

```
1
Digite o valor na base 10: 3
Valor na base 2: 11
```

```
1
Digite o valor na base 10: 7
Valor na base 2: 111
```

```
1
Digite o valor na base 10: 6
Valor na base 2: 110
```

Daí, obtém-se a seguinte identificação do aluno: 11001- 11- 0111- 000110, cujo seu código de barras é:

25 – 3 – 7 – 6

2º) Decodificando – Cada aluno vai registrar seu código (em barras) e entregará ao professor, que posteriormente devolverá (de forma aleatória) para que cada um faça a decodificação e identifique o colega.

Voltando ao exemplo anterior, o aluno terá que fazer o seguinte procedimento:

A folha recebida teria apenas o código de barras.

Primeiramente, o aluno deve identificar cada barra branca por “zero” e cada barra preta por “um”.

1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0 0 0 1 1 0

Agora, segundo o padrão da estrutura do código em questão, é possível separar os dígitos:

$$\mathbf{11001 - 11 - 0111 - 000110}$$

Com o uso do computador, é fácil notar que:

```
2
Digite o valor na base 2: 11001
Valor na base 10: 25
```

```
2
Digite o valor na base 2: 11
Valor na base 10: 3
```

```
2
Digite o valor na base 2: 0111
Valor na base 10: 7
```

```
2
Digite o valor na base 2: 000110
Valor na base 10: 6
```

Daí, o código na versão decimal é: $\mathbf{25 - 3 - 7 - 6}$, o que nos garante que o aluno aí representado, é um aluno da escola, estuda no período da tarde, na 7ª série, matriculado com o número 6 da chamada.

Depois de concluída essa atividade, é interessante que o professor verifique os registros dos grupos e analise os códigos criados por cada um, e proponha algumas situações problemas, tais como (ainda considerando o exemplo analisado):

- Se forem matriculados mais alunos numa determinada série, ainda assim seria possível usar o mesmo código de barras sem alterar a sua estrutura? A partir de que quantidade de alunos essa estrutura teria que ser mudada?
- Se a escola tivesse mais que uma turma por série, num mesmo período, por exemplo, 5ªA e 5ªB, como representar?
- É possível justapor ao código um dígito verificador?

Lembrando-se que o professor pode se surpreender, e que estes questionamentos sejam feitos pelos próprios alunos durante a elaboração da atividade.

Pode ocorrer, também, que algum grupo tenha usado mais bits do que o necessário para a representação do código. Neste caso, pode-se instigar o grupo a repensar na estruturação do código com a finalidade de otimizar o espaço de armazenamento do computador, caso realmente fosse aplicado.

Para finalizar, é importante que seja apresentado ao aluno, a forma real da representação dos números para a formação dos códigos. De acordo com o Currículo do Estado de São Paulo (2012, p.33): “A realidade costuma ser muito complexa para uma apreensão imediata; as abstrações são simplificações que representam um afastamento provisório da realidade, com a intenção explícita de melhor compreendê-la.”

Essas informações podem ser encontradas na seção 2.2.3 deste trabalho.

3.7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como se pode ver, esta atividade abre um leque de possibilidades para a construção do conhecimento, o que constitui ferramenta fundamental para a articulação entre a teoria e a prática, o global e o local, o abstrato e o real. (São Paulo, 2012).

É também uma forma de incentivar a leitura e a escrita matemática, de proporcionar uma maior participação do aluno nas aulas, de desenvolver o espírito crítico e inovador, melhorando a interação professor/aluno dentro de um ambiente de aprendizagem mútua.

Espera-se que esta sugestão de atividades seja útil para outros professores e venha contribuir para a melhoria da qualidade do ensino da matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Não há dúvidas que estamos inseridos em um mundo no qual o conhecimento é usado de forma intensiva e, o diferencial está na qualidade da educação recebida.

Dessa forma, ressalta-se a importante função dos professores, proporcionando aos alunos situações de aprendizagem que desenvolvam competências e habilidades necessárias para a construção do próprio conhecimento, buscando a formação de cidadãos autônomos, críticos e conscientes do seu papel na sociedade.

Assim, por meio deste trabalho, foi proposta uma situação de aprendizagem articulando o real e o fictício, onde além de proporcionar um ambiente investigativo e criativo, será possível fazer conexões entre diversos conceitos matemáticos, suas diferentes formas de pensamento, e ainda, promover a relação da Matemática com outras áreas do saber e da atualidade, valorizando a tendência atual.

Espera-se que essas sugestões de atividades sejam úteis para os colegas professores e que essa metodologia seja realmente um aspecto incentivador e auxiliador no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, tornando esse ensino mais prazeroso e significativo para os alunos.

Foi muito interessante fazer o estudo sobre o tema “A Matemática dos Códigos de Barras”, verificando a importante relação entre a Matemática e as novas tecnologias, trazendo benefícios para a sociedade em geral e estimulando o progresso do comércio mundial.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGÊNCIA BRASILEIRA DO ISBN. Disponível em: http://www.isbn.bn.br/. Acesso em 15/01/2013.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática.* Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998.

FINI, Maria Inês. *Controle dos Códigos de Identificação*. Revista do Professor – Atualidades, SEESP, Edição nº2, p. 70 – 75, 2009.

GESTÃO DE SISTEMA DE CODIFICAÇÃO DE BARRAS DO BRASIL Ltda – *Padrão EAN-13*. Dispónível em: http://www.gs1-ean13.com.br/. Acesso em 15/01/2013.

GS1 BRASIL (Associação Brasileira de Automação). Disponível em: http://www.gs1br.org/. Acesso em 15/01/2013.

HEFEZ, Abramo. *Elementos de Aritmética*. 2. ed. Rio de janeiro: SBM, 2011. (Coleção do Professor de Matemática)

MILIES, Francisco César Polcino & COELHO, Sonia Pitta. *Números: Uma Introdução à Matemática*. 3 ed. 2. reimpr. – São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2006. (Acadêmica; 20)

POLCINO MILIES, C. *A matemática dos códigos de barras*. Programa de Iniciação Científica da OBMEP. Rio de Janeiro: OBMEP, 2009, v., p. 131-179.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Currículo do Estado de São Paulo: *Matemática e suas tecnologias* / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. – 1. ed. atual. – São Paulo: SE, 2012.