

Leonardo da Silva Lessa

**Simulações de fenômenos transitórios eletromagnéticos utilizando
métodos numéricos modificados**

São João da Boa vista
2020

Leonardo da Silva Lessa

**Simulações de fenômenos transitórios eletromagnéticos utilizando
métodos numéricos modificados**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, junto ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Interunidades, entre o Instituto de Ciência e Tecnologia de Sorocaba e o Campus de São João da Boa Vista da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”.

Financiadora: CAPES – 33004170002P2

Orientador: Prof^ª. Dr^ª. Paula Ghedini Der
Agopian

Coorientador: Prof. Dr Afonso José do Prado

São João da Boa Vista
2020

Lessa, Leonardo da Silva

L638s

Simulações de fenômenos transitórios eletromagnéticos utilizando métodos numéricos modificados / Leonardo da Silva Lessa. -- São João da Boa Vista, 2020

88 f. : il., tabs. + 1 CD-ROM

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Câmpus Experimental de São João da Boa Vista, São João da Boa Vista

Orientadora: Paula Ghedini Der Agopian

Coorientador: Afonso José do Prado

1. Circuitos elétricos. 2. Electric power transmission. 3. Transitórios (Eletricidade). 4. Métodos de simulação. 5. Funções de variáveis reais.

I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Câmpus Experimental de João da Boa Vista. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Simulações de fenômenos transitórios eletromagnéticos utilizando métodos numéricos modificados

AUTOR: LEONARDO DA SILVA LESSA

ORIENTADORA: PAULA GHEDINI DER AGOPIAN

COORDENADOR: AFONSO JOSÉ DO PRADO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Sistemas Eletrônicos pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. AFONSO JOSÉ DO PRADO

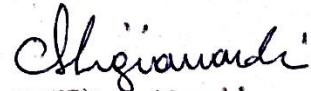
Coordenadoria de Curso de Engenharia Eletrônica e de Telecomunicações / UNESP - Câmpus de São João da Boa Vista

Prof. Dr. ELMER MATEUS GENNARO

Coordenadoria de Curso de Engenharia Aeronáutica / Câmpus de São João da Boa Vista

DR LUIZ FERNANDO BOVOLATO
UNIFEV

São João da Boa Vista, 17 de fevereiro de 2020


Ana Lúcia Marchi
Assistente Administrativa I



Leonardo da Silva Lessa

**Simulações de fenômenos transitórios eletromagnéticos utilizando
métodos numéricos modificados**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica, junto ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Interunidades, entre o Instituto de Ciência e Tecnologia de Sorocaba e o Campus de São João da Boa Vista da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”.

Financiadora: CAPES – 33004170002P2

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Afonso José do Prado
UNESP – Câmpus de São João da Boa Vista
Coorientador

Prof. Dr. Elmer Mateus Genaro
UNESP – Câmpus de São João da Boa Vista

Prof. Dr. Luiz Fernando Bovolato
UNIFEV – Centro Universitário de Votuporanga

São João da Boa Vista
17 de janeiro de 2020

*“Somos assim: sonhamos o voo mas tememos a altura.
Para voar é preciso ter coragem para enfrentar o terror do vazio.
Porque é só no vazio que o voo acontece.
O vazio é o espaço da liberdade, a ausência de certezas.
Mas é isso o que tememos: o não ter certezas. Por isso trocamos o voo por gaiolas.
As gaiolas são o lugar onde as certezas moram. ”
(Os Irmãos Karamazov)*

*"Not everything that counts can be counted and not everything that's counted truly
counts"
(Albert Einstein)*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à Deus, que permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo de minha vida, e não somente nestes anos como universitário, mas que em todos os momentos é o maior mestre que alguém pode conhecer.

Agradeço a minha mãe Leacir, heroína que me deu apoio e incentivo nas horas difíceis de desânimo e cansaço.

Ao meu pai Leonel, que apesar de todas as dificuldades tornou possível meu estudo esses anos todos.

Agradeço ao meu irmão Leandro por todo apoio nos momentos difíceis da minha vida até aqui e que nunca mediu esforços para me auxiliar.

Meus agradecimentos a minha amiga e parceira de pesquisa Thaina Grijó, companheira de todos os momentos e irmã que a vida me deu.

Agradeço ao Professor Marcelo Abbade, por ter aceito me orientar inicialmente no mestrado e por ter me ensinado a lutar pela minha liberdade intelectual e sempre acreditar em mim.

Agradeço a Professora Dra. Paula Ghedini Der Agopian, por ser uma pessoa de enorme coração, lutar pelo certo, me apoiar em todos os momentos e nunca ter me abandonado mesmo nos momentos mais difíceis.

Agradeço a Professor Afonso José do Prado pelos anos de pesquisa, orientação, dedicação, investimento em minha carreira acadêmica, amizade. É minha referência do perfil de professor que eu quero ser e pessoa a me inspirar todos os dias em ser um excelente pesquisador.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

RESUMO

Para a representação de linhas de transmissão em sistemas elétricos de potência, existem vários modelos que são usados, por exemplo, variáveis de estado e equações diferenciais. Esses modelos são incluídos em rotinas computacionais e utilizados em simulações numéricas de transitórios eletromagnéticos. A linha de transmissão utilizada é um circuito monofásico modelados por circuitos π , usando o modelo de variáveis de estado. Para testar os modelos é utilizada uma rotina numérica que combina o método Euler com o método de integração trapezoidal, resultando em um algoritmo simplificado, sendo capaz de simular transitórios eletromagnéticos em redes e de obter resultados com precisão satisfatória. Três modelos são analisados: modelo utilizando matriz de grande ordem, matriz de ordem dois e o modelos utilizando variáveis independentes. Neste trabalho será discutido e analisado a diferença entre os três modelos propostos e a maneira como as variáveis de estado são atualizadas para simular a propagação de um fenômeno transitório em uma linha de transmissão. Aplicando o mesmo método de integração há diferenças significativas nos resultados obtidos utilizando variáveis independentes: redução das oscilações numéricas com uma quantidade menor de circuitos π e redução do tempo computacional. A rotina baseada em atualização independente das variáveis de estado, apresenta modelagem simples, sem inversões de matrizes e matrizes esparsas.

Palavras-chave: Circuito π . Linhas de transmissão. Integração trapezoidal. Transitórios eletromagnéticos. Variáveis de estado.

ABSTRACT

For the representation of transmission lines in electrical power systems, there are several models that are used, for example, state variables and differential equations. These models are included in computational routines and used in numerical simulations of electromagnetic transients. The transmission lines used are a single phase circuit modeled by π circuits, using the state variable model. To test the models, a numerical routine that combines the Euler method with the trapezoidal integration method is used, resulting in a simplified algorithm, capable of simulating electromagnetic transients in networks and obtaining results with satisfactory accuracy. Three models are analyzed: model using large order matrix, order two matrix and model using independent variables. In this work will be discuss and analyze the difference between the three proposed models and the way state variables are updated to simulate the propagation of a transient phenomenon in a transmission line. Applying the same integration method there are significant differences in the results obtained using independent variables: numerical oscillations reduction with a smaller number of π circuits and computational time reduction. The routine based on independent update of state variables, presents simple modeling, without inversions of sparse matrices.

Keywords: Circuit π . Transmission lines. Trapezoidal integration. Electromagnetic transients. State variables.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Linha representada por meio de uma cascata de circuitos π .	21
Figura 2: Unidade intermediária da cascata de circuitos π .	23
Figura 3: Primeira unidade da cascata de circuitos π .	28
Figura 4: Última unidade da cascata de circuitos π .	30
Figura 5: Modelo de propagação de uma onda eletromagnética utilizando transformada de Laplace.	45
Figura 6: Energização da linha com 3 circuitos π .	46
Figura 7: Energização da linha com 5 circuitos π e $\Delta t=50\text{ns}$.	46
Figura 8: Energização da linha com 5 circuitos π e $\Delta t=1\text{ns}$.	46
Figura 9: Energização da linha com 10 circuitos π .	47
Figura 10: Energização da linha com 25 circuitos π .	47
Figura 11: Energização da linha com 50 circuitos π .	48
Figura 12: Energização da linha com 100 circuitos π .	48
Figura 13: Energização da linha com 200 circuitos π .	49
Figura 14: Energização da linha com 300 circuitos π .	49
Figura 15: Representação 3D da energização da linha com 500 circuitos π .	50
Figura 16: Representação 3D do início do primeiro patamar com 500 circuitos π .	51
Figura 17: Representação 3D do final do primeiro patamar com 500 circuitos π .	51
Figura 18: Variação do pico de tensão em função da quantidade de circuitos π e do passo de tempo – aplicação de matrizes de grande ordem.	52
Figura 19: Valores percentuais do gráfico da Figura 18.	52
Figura 20: Energização da linha com 10 circuitos π .	53
Figura 21: Energização da linha com 25 circuitos π .	54
Figura 22: Energização da linha com 50 circuitos π .	54
Figura 23: Energização da linha com 100 circuitos π .	55
Figura 24: Energização da linha com 200 circuitos π .	55
Figura 25: Energização da linha com 300 circuitos π .	56
Figura 26: Energização da linha com 333 circuitos π .	56
Figura 27: Pico do primeiro patamar de tensão com 333 circuitos π .	57
Figura 28: Variação do pico de tensão em função da quantidade de circuitos π e do passo de tempo – aplicação de matrizes de ordem 2.	57
Figura 29: Detalhes de uma região do gráfico da Figura 26.	58
Figura 30: Limite da estabilidade numérica com 400 circuitos π .	58
Figura 31: Relação entre quantidades de circuitos π e o passo de tempo para resultados numéricos com oscilações numéricas minimizadas (rotina numérica com matrizes de ordem 2).	61
Figura 32: Constante de simulação ideal para diferentes parâmetros de linha.	61
Figura 33: Gráfico tridimensional relativo à constante $k_{\text{sim } 1}$ com valores absolutos de tensão.	63
Figura 34: Gráfico tridimensional relativo à constante $k_{\text{sim } 1}$ com valores percentuais de tensão.	64
Figura 35: Gráfico tridimensional relativo à constante $k_{\text{sim } 2}$ com valores absolutos de tensão.	64

Figura 36: Gráfico tridimensional relativo à constante k_{sim} 2 com valores percentuais de tensão.	64
Figura 37: Gráfico tridimensional relativo à constante k_{sim} 4 com valores absolutos de tensão.	65
Figura 38: Gráfico tridimensional relativo à constante k_{sim} 3 com valores percentuais de tensão.	65
Figura 39: Gráfico tridimensional relativo à constante k_{sim} 4 com valores absolutos de tensão.	65
Figura 40: Gráfico tridimensional relativo à constante k_{sim} 4 com valores percentuais de tensão.	66
Figura 41: Energização da linha com 50 circuitos π utilizando atualização independente das variáveis de estado.	67
Figura 42: Energização da linha com 100 circuitos π utilizando atualização independente das variáveis de estado.	67
Figura 43: Energização da linha com 142 circuitos π utilizando atualização independente das variáveis de estado.	68
Figura 44: Detalhe do pico de tensão do primeiro patamar com 142 circuitos π utilizando atualização independente das variáveis de estado.	68
Figura 45: Energização da linha com 200 circuitos π utilizando atualização independente das variáveis de estado.	69
Figura 46: Variação da tensão em função do tempo e em função da quantidade de circuitos π – simulações com aplicação de atualização independente das variáveis de estado.	70
Figura 47: Detalhes da Figura 46 apresentado o início do patamar de tensão.	71
Figura 48: Detalhes da Figura 46 apresentado o final do patamar de tensão.	71
Figura 49: Energização da linha com 260 circuitos π	72
Figura 50: Limite da estabilidade numérica com 261 circuitos π	72
Figura 51: Instabilidade numérica devido a substituição de valores de tensão e corrente – 100 circuitos π	73
Figura 52: Instabilidade numérica devido a substituição de valores de tensão e corrente – 200 circuitos π	73
Figura 53: Instabilidade numérica devido a substituição de valores de tensão e corrente – 300 circuitos π	74
Figura 54: Instabilidade numérica devido a substituição de valores de tensão e corrente – 400 circuitos π	74
Figura 55: Instabilidade numérica devido a substituição de valores de tensão – 100 circuitos π	74
Figura 56: Instabilidade numérica devido a substituição de valores de tensão – 200 circuitos π	75
Figura 57: Instabilidade numérica devido a substituição de valores de tensão – 300 circuitos π	75
Figura 58: Instabilidade numérica devido a substituição de valores de tensão – 400 circuitos π	75
Figura 59: Instabilidade numérica devido a substituição de valores de corrente – 100 circuitos π	76
Figura 60: Instabilidade numérica devido a substituição de valores de corrente – 200 circuitos π	76
Figura 61: Instabilidade numérica devido a substituição de valores de corrente – 300 circuitos π	76

Figura 62: Instabilidade numérica devido a substituição de valores de corrente – 400 circuitos π	77
---	----

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Valores dos parâmetros de cada k_{sim}	61
--	----

LISTA DE SÍMBOLOS

π	Letra grega Pi
k_{sim}	Constante de simulação
I	Matriz Identidade
R	Resistência
L	Indutância
G	Condutância
C	Capacitância
v	Tensão
i	Corrente
A	Matriz que de componentes da cascata de circuitos π
B	Matriz de fontes ideais
n	Quantidade de circuitos π
d	Comprimento da linha de transmissão
R'	Resistência por unidade de comprimento [Ω/km]
L'	Indutância por unidade de comprimento [H/km]
G'	Condutância por unidade de comprimento [S/km]
C'	Capacitância por unidade de comprimento [F/km]
t	Tempo [s]
$u(t)$	Função degrau
Ω	Medida de resistência elétrica - Ohm
Km	Medida de comprimento - Quilômetro
mH	Unidade de indutância - Milihenry
nF	Unidade de capacitância - Nanofarad
μS	Unidade de condutância – Microsiemens
pu	Por unidade
s	Segundos
Δt	Passo de tempo [s]
$\%$	Porcentagem

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	OBJETIVOS.....	17
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	17
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	19
2.1	MATRIZ DE GRANDE ORDEM	19
2.2	MATRIZ DE ORDEM 2.....	22
3	DESENVOLVIMENTO DOS MODELOS	33
3.1	VARIÁVEIS INDEPENDENTES	33
3.2	MODELO SUBSTITUINDO TENSÃO E CORRENTE	37
3.2.1	SUBSTITUINDO TENSÃO E CORRENTE	38
3.2.2	SUBSTITUINDO TENSÃO	40
3.2.3	SUBSTITUINDO CORRENTE.....	42
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	44
4.1	RESULTADOS UTILIZANDO MATRIZ DE GRANDE ORDEM	45
4.2	RESULTADOS UTILIZANDO MATRIZ DE ORDEM 2.....	52
4.3	RESULTADOS UTILIZANDO VARIÁVEIS INDEPENDENTES	66
4.4	RESULTADOS UTILIZANDO O MODELO SUBSTITUINDO TENSÃO E CORRENTE.....	72
	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	79
	PROPOSTA PARA TRABALHOS FUTUROS.....	83
	PUBLICAÇÕES GERADAS DURANTE O MESTRADO	84
	REFERÊNCIAS.....	87

1 INTRODUÇÃO

Os sistemas elétricos de potências devem ser avaliados e testados mediante fenômenos, em regimes transitórios e surtos elétricos, comuns em linhas de transmissão (DOMMEL, 1969). Para tal, é necessária uma correta e eficiente modelagem de correntes e tensões que se propagam pela rede. Os modelos utilizados para representar as linhas de transmissão utilizam resistores, indutores e capacitores considerando os parâmetros concentrados, quando considerado o modelo independente da frequência (MARTINEZ-VELASCO; GUSTAVSEN, 2001). Uma vez, determinados os parâmetros da linha de transmissão, o modelo clássico para representação de uma linha de transmissão, no domínio tempo, utiliza circuitos π conectados em cascata. Nesse modelo, as tensões sobre os parâmetros transversais da linha e as correntes através dos parâmetros longitudinais da linha são tomadas como variáveis de estado (NELMS, 1988).

Para determinar as equações de estado que representam o modelo utilizado, uma análise simples por meio das leis das correntes e das tensões é aplicada. Obtendo tais equações, o método de Heun (NELMS et al., 1989) é aplicado para a solução numérica do problema. Os métodos aplicados na solução numérica do modelo são susceptíveis a oscilações numéricas, também conhecido como fenômeno de Gibbs (MORENO; RAMIREZ, 2008).

Como alternativa para minimizar essas oscilações numéricas são realizadas modelagens numéricas modificadas (PRADO et al., 2014; PRADO et al., 2015; PRADO et al., 2016). As modelagens numéricas modificadas

realizadas neste trabalho propõem avaliar novas modelagens capazes de diminuir mais significativamente as oscilações numérica, diminuir a complexidade dos modelos e reduzir o tempo computacional dos modelos mais complexos que foram desenvolvidos. Assim, serão propostos quatro modelos diferentes. A primeira delas será resolver a cascata de circuitos π de forma independente, sem considerar diretamente a influências das tensões e correntes das unidades adjacentes. Os outros três modelos serão baseados no modelo utilizando variáveis independentes e serão feitas substituições nas tensões e nas correntes, avaliando cada substituição individualmente e em conjunto.

1.1 OBJETIVOS

Os objetivos deste trabalho consistem em investigar melhorias em três diferentes modelagens matemáticas com matrizes de menor ordem e poucos, ou nenhum elemento nulo, implementar computacionalmente tais modelagens utilizando métodos numéricos, bem como a combinação deles para atualizar numericamente, no domínio do tempo, cada variável de estado, de forma independente, para representar uma linha de transmissão considerando parâmetros concentrados e sem o efeito da frequência.

De forma resumida, em relação às rotinas numéricas aplicadas em simulações de fenômenos transitórios em linhas de transmissão, as finalidades são: avaliar o desempenho em minimizar os erros causados por oscilações numéricas e minimizar o tempo computacional de simulação.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O texto, apresentado nos próximos capítulos, foi dividido da seguinte forma:

- capítulo II - revisão bibliográfica apresentando o modelo utilizando matriz de grande ordem e o modelo utilizando matrizes de ordem 2 (PRADO, 2014);
- capítulo III – equacionamento matemático do modelo utilizando o modelo de variáveis independentes e dos modelos modificados substituindo tensões e correntes;
- capítulo IV – apresentação dos resultados para cada modelo desenvolvido utilizando o software *MatLab* para realização das simulações numéricas;
- encerra-se com as conclusões e sugestões, seguidas das referências bibliográficas.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 MATRIZ DE GRANDE ORDEM

Linhas de transmissão são sistemas elétricos usados para transmitir energia eletromagnética entre dois pontos diferentes ou dois nós diferentes de um sistema elétrico. Modelos de linhas de transmissão podem ser aplicados para analisar a transmissão de energia em sistemas de alta tensão e transmissão de dados em sistemas de alta frequência. Nos dois casos, a transmissão é guiada de uma fonte para uma carga através de fios, cabos coaxiais ou guias de onda. Os modelos mais simples de linhas de transmissão são baseados em unidades infinitesimais de elementos concentrados. Geralmente, estruturas como circuitos π ou circuitos T são usados. Modificações na estrutura básica desses tipos de circuitos podem ser usadas para introduzir a influência da frequência. A influência da frequência é mais significativa para os parâmetros longitudinais das linhas de transmissão. Um grande número de circuitos infinitesimais π conectados em cascata pode ser aplicado para representar linhas de transmissão, porque os parâmetros elétricos estão distribuídos ao longo da linha. Assim, modificações foram introduzidas na estrutura dos circuitos π ou na aplicação do método de integração numérica usado para simular fenômenos transitórios eletromagnéticos nas linhas de transmissão. No caso desse tipo de fenômeno, a integração trapezoidal (método de Heun) é comumente usada tanto em programas comerciais quanto em programas de licença livre.

As equações de estado (BOYCE et al., 1994) podem ser descritas por meio de um sistema linear da forma:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad (1)$$

Onde: x é o vetor de variáveis de estado, u é vetor de entrada de dados, A e B são matrizes do sistema.

Podemos resolver a equação (1) utilizando a integração trapezoidal (CAMPOS, 2007). É um procedimento numérico amplamente aplicado na resolução de equações diferenciais e sistemas. Descrita como regra trapezoidal de integração para parâmetros discretos, essa metodologia consiste em uma forma aperfeiçoada do método da tangente, ou mais conhecido como método de Euler, geralmente aplicado às equações diferenciais de difícil resolução analítica.

A integração trapezoidal aplicada à resolução da equação (1) é dada pela seguinte equação:

$$x[k+1] - x[k] = \frac{T}{2} (Ax[k+1] + Bu[k+1] + Ax[k] + Bu[k]) \quad (2)$$

Resolvendo a equação de estado (2), em que T é o passo de integração, utilizada para resolver o sistema e rearranjando, tem-se:

$$x[k+1] = x[k] + \frac{T}{2} (Ax[k+1] + Bu[k+1] + Ax[k] + Bu[k]) \quad (3)$$

Resolvendo a equação (3), o sistema é reescrito como:

$$\left[I - \frac{T}{2} A \right] x[k+1] = \left[I + \frac{T}{2} A \right] x[k] + \frac{T}{2} B [u[k] + u[k+1]] \quad (4)$$

Na equação (4), I é uma matriz de ordem $(2n \times 2n)$, onde n é o número de circuitos π , A é a matriz que representa a cascata de circuitos π e B é a matriz de valores de entrada do sistema (DOMMEL, 1984)

Fazendo simplificações para equação (4), tem-se:

$$x[k + 1] = A''x[k] + B'[u[k] + u[k + 1]] \quad (5)$$

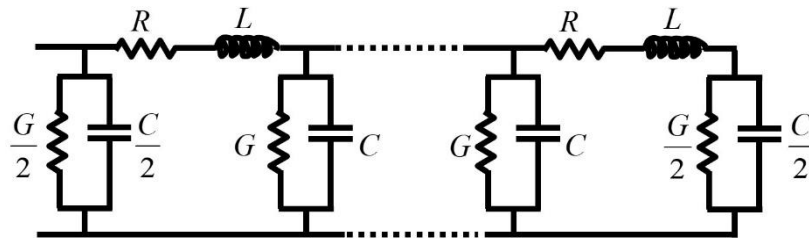
Sendo: A , A' , A'' e B' são matrizes constantes descritas pelas próximas equações.

As matrizes constantes são descritas por:

$$A_{\pi} = \begin{bmatrix} -\frac{G}{C} & -\frac{2}{C} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{L} & \frac{-R}{L} & \frac{-1}{L} & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{C} & \frac{-G}{C} & \frac{-1}{C} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \frac{1}{L} & \frac{-R}{L} & \frac{-1}{L} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{2}{C} & \frac{-G}{C} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} A' &= \left[I - \frac{T}{2} A \right]^{-1} \\ A'' &= A' \left[I + \frac{T}{2} A \right] \\ B' &= A' \frac{T}{2} B \end{aligned} \quad (6)$$

A linha de transmissão (PRADO, 2010) representada por uma cascata de circuitos com parâmetros independentes da frequência é mostrada na Figura 1.

Figura 1: Linha representada por meio de uma cascata de circuitos π .



Fonte: Elaborado pelo autor

Na Figura 1, os parâmetros R e L são resistência e indutância, respectivamente, longitudinais da linha e os parâmetros G e C , são condutância e capacitância transversais de linha, respectivamente. Tais parâmetros são calculados por:

$$\begin{aligned}
R &= R' \frac{d}{n} \\
L &= L' \frac{d}{n} \\
G &= G' \frac{d}{n} \\
C &= C' \frac{d}{n}
\end{aligned} \tag{7}$$

Em (7), R' , L' , G' e C' são os parâmetros longitudinais da linha. Ou seja, resistência, indutância, condutância e capacitância por unidade métrica: $\Omega.km^{-1}$, $mH.km^{-1}$, $\mu S.km^{-1}$, $nF.km^{-1}$, respectivamente.

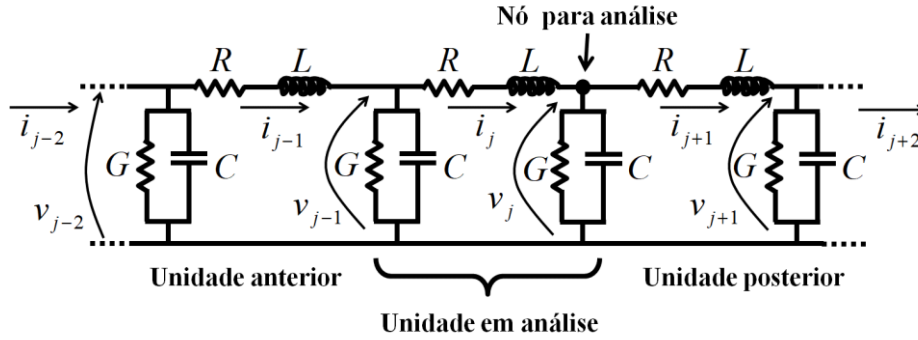
Sabe-se que uma linha de transmissão monofásica (NGUYEN, 1997) cujos parâmetros possam ser considerados independentes da frequência, pode ser representada por meio de uma cascata de circuitos π . A Figura 1 mostra uma linha de transmissão monofásica (MAMIS, 2003) de comprimento d representado por uma cascata de n circuitos π .

2.2 MATRIZ DE ORDEM 2

Uma alternativa em relação à aplicação de uma única matriz na representação da cascata de circuitos π é a utilização de matrizes de ordem 2 que representam cada unidade de circuito π da cascata (PRADO et al., 2014). Assim, cada conjunto de variáveis, tensão e corrente, é atualizado independentemente das outras variáveis relacionadas às demais unidades de circuitos π . As influências do restante da cascata, unidades anteriores e posteriores, são aproximadas e introduzidas nas variáveis em atualização. Tal sistemática é introduzida em um looping lógico computacional e, assim, toda a cascata tem suas variáveis de estado atualizadas.

Cada unidade de circuito π será modelada individualmente levando em consideração as relações diferenciais desse circuito e a influência das unidades adjacentes. A Figura 1 mostra esquematicamente a situação descrita.

Figura 2: Unidade intermediária da cascata de circuitos π .



Fonte: Elaborado pelo autor

Aplicando análise de malha, é obtida a relação:

$$\frac{di_j}{dt} = -\frac{R}{L}i_j - \frac{1}{L}v_j + \frac{1}{L}v_{j-1} \quad (8)$$

Aplicando análise nodal no nó especificado na Figura 2, tem-se:

$$\frac{dv_j}{dt} = \frac{1}{C}i_j - \frac{G}{C}v_j - \frac{1}{C}i_{j+1} \quad (9)$$

A atualização das variáveis de estado será baseada na integração trapezoidal. Tal método numérico pode ser estruturado para aplicação neste trabalho conforme mostrado em (10):

$$i_j(k+1) = i_j(k) + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \frac{di_j(k+1)}{dt} + \frac{di_j(k)}{dt} \right\} \quad (10)$$

$$v_j(k+1) = v_j(k) + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \frac{dv_j(k+1)}{dt} + \frac{dv_j(k)}{dt} \right\}$$

Aplicando integração trapezoidal à equação (8), tem-se:

$$i_j(k+1) = i_j(k) + \frac{\Delta t}{2L} \{v_{j-1}(k+1) + v_{j-1}(k) - Ri_j(k+1) - Ri_j(k) - v_j(k+1) - v_j(k)\} \quad (11)$$

Aplicando a integração na equação da análise nodal (9), é obtido:

$$v_j(k+1) = v_j(k) + \frac{\Delta t}{2C} \{i_j(k+1) + i_j(k) - Gv_j(k+1) - Gv_j(k) - i_{j+1}(k+1) - i_{j+1}(k)\} \quad (12)$$

Na equação (11), o termo $v_{j-1}(k)$ foi substituído pelo termo $v_{j-1}(k+1)$ durante a atualização da unidade $(j-1)$ que deve preceder a atualização da unidade em análise, unidade j . Nesse caso, o termo $v_{j-1}(k)$ deve ser substituído por uma expressão que determine seu valor. Assim, para $v_{j-1}(k+1)$, utilizando a integração trapezoidal mostrada em (10), tem-se:

$$v_{j-1}(k+1) = v_{j-1}(k) + \frac{\Delta t}{2C} \{i_{j-1}(k+1) + i_{j-1}(k) - Gv_{j-1}(k+1) - Gv_{j-1}(k) - i_j(k+1) - i_j(k)\} \quad (13)$$

A atualização da unidade $j-1$ antecede a atualização da unidade j . Dessa forma, na equação (13), o termo $i_{j-1}(k)$ não pode ser utilizado, pois já foi substituído pelo termo $i_{j-1}(k+1)$ durante a atualização da unidade $j-1$. Assim, por causa de $v_{j-1}(k+1)$, há encadeamento das variáveis de todos os circuitos que antecede a unidade j até o início da cascata. Portanto, não é adequado utilizar a integração trapezoidal, pois ela dependeria dos termos $i_{j-1}(k)$, $i_{j-2}(k)$, ..., $i_1(k)$, de todas as unidades que antecede a unidade j .

Em (12), o termo $i_{j+1}(k+1)$ ainda não foi determinado, pois as variáveis de estado da unidade $j+1$ ainda não foram atualizadas. Assim, aplicando a integração trapezoidal mostrada em (10) ao termo $i_{j+1}(k+1)$, tem-se:

$$i_{j+1}(k+1) = i_{j+1}(k) + \frac{\Delta t}{2L} \{v_j(k+1) + v_j(k) - Ri_{j+1}(k+1) - Ri_{j+1}(k) - v_{j+1}(k+1) - v_{j+1}(k)\} \quad (14)$$

Da mesma forma, por causa do termo $i_{j+1}(k+1)$, ocorre um encadeamento das variáveis de estado que ainda não foram atualizadas de todos os circuitos posteriores a unidade j até o último circuito. Assim a integração trapezoidal não poderá ser utilizada, pois consideraria os termos $v_{j+2}(k+1)$, $v_{j+3}(k+1)$, ..., $v_n(k+1)$, de todas as unidades posteriores a unidade em atualização (circuito j).

Para determinar o termo $i_{j+1}(k+1)$ e $v_{j-1}(k)$, o passo de tempo é considerado suficientemente pequeno ($\Delta t \rightarrow 0$). Assim, a seguinte aproximação pode ser estabelecida para a relação de corrente:

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} \cong \frac{di}{dt} = \dot{i} \quad (15)$$

Considerando o passo de tempo muito pequeno e seu limite tendendo pela esquerda ($\Delta t \rightarrow 0^-$) e reescrevendo (15), tem-se:

$$\frac{i(k+1) - i(k)}{\Delta t} = \dot{i}(k) \Leftrightarrow i(k+1) = i(k) + \dot{i}(k) \Delta t \quad (16)$$

Utilizando (16) para o termo $i_{j+1}(k+1)$, obtém-se:

$$i_{j+1}(k+1) = i_{j+1}(k) + \dot{i}_{j+1}(k) \Delta t \quad (17)$$

Introduzindo (8) em (17), tem-se:

$$i_{j+1}(k+1) = \frac{\Delta t}{L} v_j(k) + \left(1 - \frac{R \Delta t}{L}\right) i_{j+1}(k) - \frac{\Delta t}{L} v_{j+1}(k) \quad (18)$$

De maneira semelhante, o termo $v_{j-1}(k)$ é determinado considerando o passo de tempo suficientemente pequeno ($\Delta t \rightarrow 0$). Assim, é obtida a seguinte aproximação:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \cong \frac{dv}{dt} = \dot{v} \quad (19)$$

Desde que o passo de tempo seja muito pequeno e seu limite tendendo pela direita ($\Delta t \rightarrow 0+$) a equação (19) é reescrita como:

$$\frac{v(k+1) - v(k)}{\Delta t} = \dot{v}(k) \Leftrightarrow v(k) = v(k+1) - \dot{v}(k+1)\Delta t \quad (20)$$

Reescrevendo (20) para o termo $v_{j-1}(k)$, obtém-se:

$$v_{j-1}(k) = v_{j-1}(k+1) - \dot{v}_{j-1}(k+1)\Delta t \quad (21)$$

Substituindo (9) em (21):

$$v_{j-1}(k) = -\frac{\Delta t}{C} i_{j-1}(k+1) + \left(1 + \frac{G\Delta t}{C}\right) v_{j-1}(k+1) + \frac{\Delta t}{C} i_j(k+1) \quad (22)$$

Conhecendo o termo $v_{j-1}(k)$ é obtido a variável de estado $i_j(k+1)$ substituindo (22) em (11):

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{R\Delta t}{2L} - \frac{\Delta t^2}{2LC}\right] i_j(k+1) = & \left[1 - \frac{R\Delta t}{2L}\right] i_j(k) - \frac{\Delta t}{2L} v_j(k+1) - \frac{\Delta t}{2L} v_j(k) \\ & - \frac{\Delta t^2}{2LC} i_{j-1}(k+1) + \frac{\Delta t}{2L} \left[2 + \frac{G\Delta t}{C}\right] v_{j-1}(k+1) \end{aligned} \quad (23)$$

De maneira semelhante o termo $v_j(k+1)$ é determinado substituindo (18) em (12):

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{G\Delta t}{2C}\right] v_j(k+1) = & \left[1 - \frac{G\Delta t}{2C} - \frac{\Delta t^2}{2LC}\right] v_j(k) + \frac{\Delta t}{2C} i_j(k+1) + \frac{\Delta t}{2C} i_j(k) + \\ & + \frac{\Delta t}{2C} \left[\frac{R\Delta t}{L} - 2\right] i_{j+1}(k) + \frac{\Delta t^2}{2LC} v_{j+1}(k) \end{aligned} \quad (24)$$

Com a determinação dos termos $i_j(k+1)$ e $v_j(k+1)$ a melhor maneira de apresentá-los é na forma matricial. Assim, escrevendo (23) e (24) em matrizes, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} i_j(k+1) \\ v_j(k+1) \end{bmatrix} = A_{jA}^{-1} \cdot A_{jB} \begin{bmatrix} i_j(k) \\ v_j(k) \end{bmatrix} + A_{jA}^{-1} \cdot B_{jA} \begin{bmatrix} i_{j-1}(k+1) \\ v_{j-1}(k+1) \end{bmatrix} + A_{jA}^{-1} \cdot C_{jA} \begin{bmatrix} i_{j+1}(k) \\ v_{j+1}(k) \end{bmatrix} \quad (25)$$

Onde as matrizes A_{jA} , A_{jB} , B_{jA} e C_{jA} , são respectivamente:

$$A_{jA} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{R\Delta t}{2L} - \frac{\Delta t^2}{2LC} & \frac{\Delta t}{2L} \\ -\frac{\Delta t}{2C} & 1 + \frac{G\Delta t}{2C} \end{bmatrix} \quad (26)$$

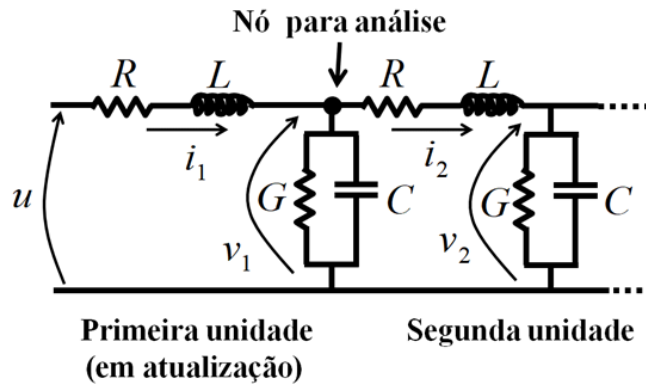
$$A_{jB} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{R\Delta t}{2L} & -\frac{\Delta t}{2L} \\ \frac{\Delta t}{2C} & 1 - \frac{G\Delta t}{2C} - \frac{\Delta t^2}{2LC} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$B_{jA} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t^2}{2LC} & \frac{\Delta t}{2L} \left(\frac{G\Delta t}{C} + 2 \right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$C_{jA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\Delta t}{2C} \left(\frac{R\Delta t}{L} - 2 \right) & \frac{\Delta t^2}{2LC} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Até o momento foi estabelecido o equacionamento matemático para a unidade π genérica (intermediária). É necessário estabelecer as variáveis de estado que representam a primeira unidade da cascata de circuitos π . A Figura 2 mostra o primeiro circuito π e, de forma análoga ao circuito genérico, será determinado seu equacionamento.

Figura 3: Primeira unidade da cascata de circuitos π .



Fonte: Elaborado pelo autor

Aplicando análise de malha, tem-se:

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{L}u - \frac{R}{L}i_1 - \frac{1}{L}v_1 \quad (30)$$

Aplicando integração trapezoidal à equação (30), obtém-se:

$$i_1(k+1) = i_1(k) + \frac{\Delta t}{2L} \{u(k+1) + u(k) - Ri_1(k+1) - Ri_1(k) - v_1(k+1) - v_1(k)\} \quad (31)$$

Em (31), todos os termos são conhecidos para $i_1(k+1)$. Agrupando os termos é obtido:

$$\left[1 + \frac{R\Delta t}{2L}\right] i_1(k+1) = \left[1 - \frac{R\Delta t}{2L}\right] i_1(k) + \frac{\Delta t}{2L} u(k+1) + \frac{\Delta t}{2L} u(k) - \frac{\Delta t}{2L} v_1(k+1) - \frac{\Delta t}{2L} v_1(k) \quad (32)$$

De maneira semelhante, aplicando a análise nodal, tem-se:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{C}i_1 - \frac{G}{C}v_1 - \frac{1}{C}i_2 \quad (33)$$

Aplicando integração trapezoidal à equação (33), obtém-se:

$$v_1(k+1) = v_1(k) + \frac{\Delta t}{2C} \{i_1(k+1) + i_1(k) - Gv_1(k+1) - Gv_1(k) - i_2(k+1) - i_2(k)\} \quad (34)$$

Em (34) somente o termo $i_2(k)$ é desconhecido. Aproximando analogamente como em (16), é obtido:

$$i_2(k+1) \cong i_2(k) + \dot{i}_2(k)\Delta t = i_2(k) + \frac{\Delta t}{L}v_1(k) - \frac{R\Delta t}{L}i_2(k) - \frac{\Delta t}{L}v_2(k) \quad (35)$$

Assim, substituindo (35) em (34) e agrupando os termos, $v_1(k+1)$ é escrito como:

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{G\Delta t}{2C}\right]v_1(k+1) = & \left[1 - \frac{G\Delta t}{2C} - \frac{\Delta t^2}{2LC}\right]v_1(k) + \frac{\Delta t}{2C}i_1(k+1) + \frac{\Delta t}{2C}i_1(k) + \\ & + \frac{\Delta t}{2C}\left[\frac{R\Delta t}{L} - 2\right]i_2(k) + \frac{\Delta t^2}{2LC}v_2(k) \end{aligned} \quad (36)$$

Sendo conhecido o termo $i_2(k)$, as variáveis de estado são determinadas. Os termos $i_1(k+1)$ e $v_1(k+1)$ são melhores representados por meio de estrutura matricial. Assim, escrevendo (32) e (36) em forma de matrizes, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} i_1(k+1) \\ v_1(k+1) \end{bmatrix} = A_{1A}^{-1} \cdot A_{1B} \begin{bmatrix} i_1(k) \\ v_1(k) \end{bmatrix} + A_{1A}^{-1} \cdot B_{1A} + A_{1A}^{-1} \cdot C_{1A} \begin{bmatrix} i_2(k) \\ v_2(k) \end{bmatrix} \quad (37)$$

Onde as matrizes A_{1A} , A_{1B} , B_{1A} e C_{1A} , são respectivamente:

$$A_{1A} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{R\Delta t}{2L} & \frac{\Delta t}{2L} \\ -\frac{\Delta t}{2C} & 1 + \frac{G\Delta t}{2C} \end{bmatrix} \quad (38)$$

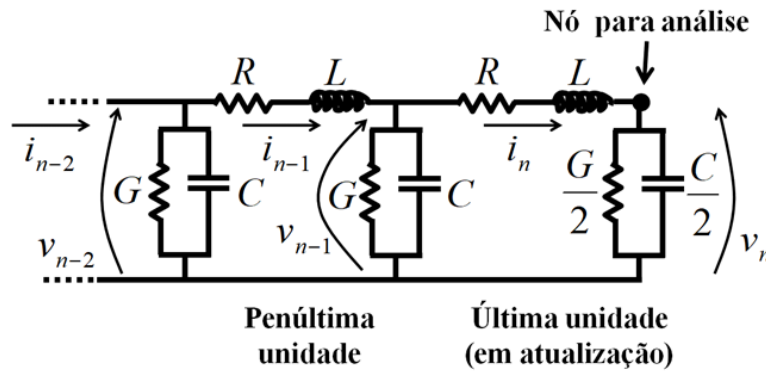
$$A_{1B} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{R\Delta t}{2L} & -\frac{\Delta t}{2L} \\ \frac{\Delta t}{2C} & 1 - \frac{G\Delta t}{2C} - \frac{\Delta t^2}{2LC} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$B_{1A} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2L} \\ 0 \end{bmatrix} [u(k+1) + u(k)] \quad (40)$$

$$C_{1A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\Delta t}{2C} \left(\frac{R\Delta t}{L} - 2 \right) & \frac{\Delta t^2}{2LC} \end{bmatrix} \quad (41)$$

Conhecendo as variáveis de estados da primeira unidade π e das unidades intermediárias, é necessário conhecer também as variáveis de estado que descrevem a última unidade para que se conheça todas as variáveis de estado da cascata de circuitos π . A última unidade π é ilustrada pela Figura 4 e analogamente às unidades já determinadas também é equacionada.

Figura 4: Última unidade da cascata de circuitos π .



Fonte: Elaborado pelo autor

Equacionando a análise de malha, tem-se:

$$\frac{d i_n}{dt} = \frac{1}{L} v_{n-1} - \frac{R}{L} i_n - \frac{1}{L} v_n \quad (42)$$

Aplicando integração trapezoidal à equação (42), é obtido:

$$i_n(k+1) = i_n(k) + \frac{\Delta t}{2L} \{v_{n-1}(k+1) + v_{n-1}(k) - R i_n(k+1) - R i_n(k) - v_n(k+1) - v_n(k)\} \quad (43)$$

Em (43), o termo $v_{n-1}(k)$ é desconhecido e será determinado baseado em (22) para resolver (43). Assim, o termo $v_{n-1}(k)$ é escrito como:

$$v_{n-1}(k) = -\frac{\Delta t}{C} i_{n-1}(k+1) + \left(1 + \frac{G\Delta t}{C}\right) v_{n-1}(k+1) + \frac{\Delta t}{C} i_n(k+1) \quad (44)$$

Substituindo (44) em (43) e agrupando os termos, tem-se:

$$\left[1 + \frac{R\Delta t}{2L} - \frac{\Delta t^2}{2LC}\right] i_n(k+1) = \left\{ \left[1 - \frac{R\Delta t}{2L}\right] i_n(k) - \frac{\Delta t}{2L} v_n(k+1) - \frac{\Delta t}{2L} v_n(k) - \frac{\Delta t^2}{2LC} i_{n-1}(k+1) + \right. \\ \left. + \frac{\Delta t}{2L} \left[\frac{G\Delta t}{2C} + 2 \right] v_{n-1}(k+1) \right\} \quad (45)$$

De maneira análoga, escrevendo a equação de análise nodal, tem-se:

$$\frac{d v_n}{dt} = \frac{2}{C} i_n - \frac{G}{C} v_n \quad (46)$$

Aplicando integração trapezoidal à equação (46), é obtido:

$$v_n(k+1) = v_n(k) + \frac{\Delta t}{2C} \{2i_n(k+1) + 2i_n(k) - Gv_n(k+1) - Gv_n(k)\} \quad (47)$$

Em (47), não há termos desconhecidos. Assim, agrupando os termos, obtém-se:

$$\left[1 + \frac{G\Delta t}{2C}\right] v_n(k+1) = \left[1 - \frac{G\Delta t}{2C}\right] v_n(k) + \frac{\Delta t}{C} i_n(k+1) + \frac{\Delta t}{C} i_n(k) \quad (48)$$

Assim, utilizando (45) e (48), as variáveis de estado da última unidade π são melhor apresentadas por meio de uma representação matricial.

$$\begin{bmatrix} i_n(k+1) \\ v_n(k+1) \end{bmatrix} = A_{nA}^{-1} \cdot A_{nB} \begin{bmatrix} i_n(k) \\ v_n(k) \end{bmatrix} + A_{nA}^{-1} \cdot B_{nA} \begin{bmatrix} i_{n-1}(k+1) \\ v_{n-1}(k+1) \end{bmatrix} \quad (49)$$

Onde as matrizes A_{nA} , A_{nB} e B_{nA} , são respectivamente:

$$A_{nA} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{R\Delta t}{2L} - \frac{\Delta t^2}{2LC} & \frac{\Delta t}{2L} \\ -\frac{\Delta t}{2C} & 1 + \frac{G\Delta t}{2C} \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$A_{nB} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{R\Delta t}{2L} & -\frac{\Delta t}{2L} \\ \frac{\Delta t}{2C} & 1 - \frac{G\Delta t}{2C} \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$B_{nA} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta t^2}{2LC} & -\frac{\Delta t}{2L} \left(\frac{G\Delta t}{C} + 2 \right) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$C_{1A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\Delta t}{2C} \left(\frac{R\Delta t}{L} - 2 \right) & \frac{\Delta t^2}{2LC} \end{bmatrix} \quad (53)$$

3 DESENVOLVIMENTO DOS MODELOS

Neste trabalho as linhas de transmissão são representadas como um circuito monofásico composto por uma cascata de circuitos π modificados. Essa cascata monofásica pode ser associada à sequência positiva de componentes simétricos de linhas de transmissão trifásicas. Também pode ser associado a linhas de transmissão bifásicas (sistemas de corrente CC). A cascata de circuitos π é descrita analiticamente por variáveis de estado: a tensão no capacitor e a corrente através do indutor de cada circuito π . As equações de estado são transformadas em uma série de equações de diferença linear aplicando a integração trapezoidal. Com base neste modelo, são aplicados circuitos π e formas modificadas do método de integração trapezoidal, buscando diminuir as oscilações numéricas e os tempos computacionais de simulação relacionados a simulações de fenômenos transitórios eletromagnéticos em linhas de transmissão. A proposta deste trabalho é atualizar todas as variáveis de estado da cascata de circuitos π de maneira independente.

3.1 VARIÁVEIS INDEPENDENTES

A estrutura de um circuito π intermediário já foi esquematizada na Figura 2. Em (4), foi mostrada a expressão que será utilizada para os próximos passos. Anteriormente, para atualizar $i_j(k+1)$, foi aplicada aproximação para determinar o termo $v_{j-1}(k)$. Tal aproximação foi baseada no método de Euler. Como a proposta é atualizar independentemente todas as variáveis de estado, mesmo aquelas

relacionadas à mesma unidade de circuito π serão substituídas por suas aproximações, obtidas pela aplicação do método de Euler.

Assim, introduzindo (22) e (19) em (11), tem-se:

$$\begin{aligned} i_j(k+1) = i_j(k) + \frac{\Delta t}{2L} \left\{ v_{j-1}(k+1) + \left[1 + \frac{G\Delta t}{C} \right] v_{j-1}(k+1) - \frac{\Delta t}{C} i_{j-1}(k+1) + \right. \\ \left. + \frac{\Delta t}{C} i_j(k+1) - Ri_j(k+1) - Ri_j(k) - v_j(k) - v_j(k) + \right. \\ \left. - \frac{\Delta t}{C} i_j(k) + \frac{G\Delta t}{C} v_j(k) + \frac{\Delta t}{C} i_{j+1}(k) \right\} \end{aligned} \quad (54)$$

Agrupando os termos em (54), tem-se:

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{R\Delta t}{2L} + \frac{\Delta t^2}{2LC} \right] i_j(k+1) = \left[1 - \frac{R\Delta t}{2L} - \frac{\Delta t^2}{2LC} \right] i_j(k) + \frac{\Delta t}{2L} \left[\frac{G\Delta t}{C} + 2 \right] v_{j-1}(k+1) + \\ - \frac{\Delta t^2}{2LC} i_{j-1}(k+1) + \frac{\Delta t}{2L} \left[\frac{G\Delta t}{C} - 2 \right] v_j(k) + \frac{\Delta t^2}{2LC} i_{j+1}(k) \end{aligned} \quad (55)$$

De forma semelhante, aplicando a integração trapezoidal em v_j , tem-se os termos $i_j(k)$ e $i_{j+1}(k+1)$ que são aproximados utilizando o método de Euler.

Aproximando $i_j(k)$ baseado em (16), obtém-se:

$$i_j(k) = \left[1 + \frac{R\Delta t}{L} \right] i_j(k+1) - \frac{\Delta t}{L} v_{j-1}(k+1) + \frac{\Delta t}{L} v_j(k+1) \quad (56)$$

Inserindo (56) e (18) em (12), obtém-se:

$$\begin{aligned} v_j(k+1) = v_j(k) + \frac{\Delta t}{2C} \left\{ i_j(k+1) + \left[\frac{R\Delta t}{L} + 1 \right] i_j(k+1) - \frac{\Delta t}{L} v_{j-1}(k+1) + \right. \\ \left. + \frac{\Delta t}{L} v_j(k+1) - Gv_j(k+1) - Gv_j(k) - i_{j+1}(k) \right. \\ \left. - i_{j+1}(k) \left[1 - \frac{R\Delta t}{L} \right] - \frac{\Delta t}{L} v_j(k) + \frac{\Delta t}{L} v_{j+1}(k) \right\} \end{aligned} \quad (57)$$

Reagrupando os termos em (57), é obtido:

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{G\Delta t}{2C} - \frac{\Delta t^2}{2LC}\right] v_j(k+1) = & \left[1 - \frac{G\Delta t}{2C} - \frac{\Delta t^2}{2LC}\right] v_j(k) + \frac{\Delta t}{2C} \left[\frac{R\Delta t}{L} + 2\right] i_j(k+1) + \\ & - \frac{\Delta t^2}{2LC} v_{j-1}(k+1) + \frac{\Delta t}{2C} \left[\frac{R\Delta t}{L} - 2\right] i_{j+1}(k) + \frac{\Delta t^2}{2LC} v_{j+1}(k) \end{aligned} \quad (58)$$

A Figura 3 mostra o primeiro circuito π cujas variáveis da unidade serão analisadas de forma análoga ao circuito intermediário considerando variáveis independentes. Observando (31), o termo $v_1(k+1)$ é aproximado baseado em (20). Assim, $v_1(k+1)$ é escrito como:

$$v_1(k+1) = v_1(k) + \frac{\Delta t}{C} i_1(k) - \frac{G\Delta t}{C} v_1(k) - \frac{\Delta t}{C} i_2(k) \quad (59)$$

Substituindo (59) em (11), obtém-se:

$$\begin{aligned} i_1(k+1) = i_1(k) + \frac{\Delta t}{2L} \left\{ u(k+1) + u(k) - R i_1(k+1) - R i_1(k) - v_1(k) + \right. \\ \left. - v_1(k) - \frac{\Delta t}{C} i_1(k) + \frac{G\Delta t}{C} v_1(k) + \frac{\Delta t}{C} i_2(k) \right\} \end{aligned} \quad (60)$$

Agrupando (60), tem-se:

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{R\Delta t}{2L}\right] i_1(k+1) = & \left[1 - \frac{R\Delta t}{2L} - \frac{\Delta t^2}{2LC}\right] i_1(k) + \frac{\Delta t}{2L} u(k+1) + \frac{\Delta t}{2L} u(k) + \\ & + \frac{\Delta t}{2L} \left[\frac{G\Delta t}{C} - 2\right] v_1(k) + \frac{\Delta t^2}{2LC} i_2(k) \end{aligned} \quad (61)$$

Em relação à atualização da corrente da primeira unidade da cascata, em (34), os termos $i_1(k)$ e $i_2(k+1)$ são desconhecidos e serão aproximados utilizando o método de Euler. Baseado em (16), $i_1(k)$ é aproximado por:

$$i_1(k) = \left[1 + \frac{R\Delta t}{L}\right] i_1(k+1) - \frac{\Delta t}{L} u(k+1) + \frac{\Delta t}{L} v_1(k) \quad (62)$$

O termo $i_2(k+1)$ é aproximado baseado em (35), pois é um termo de uma unidade intermediária.

Introduzindo (62) e (35) em (34), é obtido:

$$\begin{aligned}
 v_1(k+1) = v_1(k) + \frac{\Delta t}{2C} \left\{ i_1(k+1) + \left[\frac{R\Delta t}{L} + 1 \right] i_1(k+1) - \frac{\Delta t}{L} u(k+1) + \right. \\
 \left. + \frac{\Delta t}{L} v_1(k+1) - Gv_1(k+1) - Gv_1(k) - i_2(k) \right. \\
 \left. - i_2(k) \left[1 - \frac{R\Delta t}{L} \right] - \frac{\Delta t}{L} v_1(k) + \frac{\Delta t}{L} v_2(k) \right\}
 \end{aligned} \quad (63)$$

Reagrupando os termos em (63), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \left[1 + \frac{G\Delta t}{2C} - \frac{\Delta t^2}{2LC} \right] v_1(k+1) = \left[1 - \frac{G\Delta t}{2C} - \frac{\Delta t^2}{2LC} \right] v_1(k) + \frac{\Delta t}{2C} \left[\frac{R\Delta t}{L} + 2 \right] i_1(k+1) + \\
 - \frac{\Delta t^2}{2LC} u(k+1) + \frac{\Delta t}{2C} \left[\frac{R\Delta t}{L} - 2 \right] i_2(k) + \frac{\Delta t^2}{2LC} v_2(k)
 \end{aligned} \quad (64)$$

A última unidade π é ilustrada pela Figura 4 e será analisada analogamente às duas unidades anteriores.

Aplicando integração trapezoidal em (43), o termo $v_{n-1}(k)$ é desconhecido e será determinado baseado em (22) e o termo $v_n(k+1)$ será aproximado por (20).

Assim, o termo $v_n(k+1)$ é escrito como:

$$v_n(k+1) = \left(1 - \frac{G\Delta t}{C} \right) v_n(k) + \frac{2\Delta t}{C} i_n(k) \quad (65)$$

Inserindo (65) e (22) em (43), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 i_n(k+1) = i_n(k) + \frac{\Delta t}{2L} \left\{ v_{n-1}(k+1) + \left[1 + \frac{G\Delta t}{C} \right] v_{n-1}(k+1) - \frac{\Delta t}{C} i_{n-1}(k+1) + \frac{\Delta t}{C} i_n(k+1) + \right. \\
 \left. - Ri_n(k+1) - Ri_n(k) - v_n(k) + \left[\frac{G\Delta t}{C} - 1 \right] v_n(k) - \frac{2\Delta t}{C} i_n(k) \right\}
 \end{aligned} \quad (66)$$

Reorganizando os termos em (66), tem-se:

$$\left[1 + \frac{R\Delta t}{2L} - \frac{\Delta t^2}{2LC}\right] i_n(k+1) = \left[1 - \frac{R\Delta t}{2L} - \frac{\Delta t^2}{LC}\right] i_n(k) + \frac{\Delta t}{2L} \left[\frac{G\Delta t}{C} + 2\right] v_{n-1}(k+1) + \left[-\frac{\Delta t^2}{2LC} i_{n-1}(k+1) + \frac{\Delta t}{2L} \left[\frac{G\Delta t}{C} - 2\right] v_n(k)\right] \quad (67)$$

De maneira semelhante já realizada, aplica-se integração trapezoidal para determinar v_n .

Em (47), aproxima-se $i_n(k)$ por (16), obtendo:

$$i_n(k) = i_n(k+1) - \frac{\Delta t}{L} v_{n-1}(k+1) + \frac{R\Delta t}{L} i_n(k+1) + \frac{\Delta t}{L} v_n(k+1) \quad (68)$$

Substituindo (68) em (47), obtém-se:

$$v_n(k+1) = v_n(k) + \frac{\Delta t}{2C} \left\{ 4i_n(k+1) - \frac{2\Delta t}{L} v_{n-1}(k+1) + \frac{2R\Delta t}{L} i_n(k+1) + \frac{2\Delta t}{L} v_n(k+1) - Gv_n(k+1) - Gv_n(k) \right\} \quad (69)$$

Agrupando os termos em (69), tem-se:

$$\left[1 + \frac{G\Delta t}{2C} - \frac{\Delta t^2}{LC}\right] v_n(k+1) = \left[1 - \frac{G\Delta t}{2C}\right] v_n(k) + \frac{\Delta t}{C} \left[\frac{R\Delta t}{L} + 2\right] i_n(k+1) - \frac{\Delta t^2}{LC} v_{n-1}(k+1) \quad (70)$$

3.2 MODELO SUBSTITUINDO TENSÃO E CORRENTE

Tomando como base o desenvolvimento feito para atualização independente das variáveis de estado, nos próximos subitens, será apresentadas alternativas que buscam, essencialmente, diminuir o tempo computacional de simulação mantendo a precisão obtida anteriormente. Como nesse tipo de aplicação de métodos numéricos de integração, o passo de tempo é muito pequeno ($\Delta t \rightarrow 0$) para simular fenômenos de frequências muito altas,

isso leva, necessariamente, à utilização de grande quantidade de unidades infinitesimais. Considerando a característica distribuídas dos parâmetros da linha de transmissão, o comprimento de cada uma dessas unidades em relação ao comprimento total do circuito é praticamente desprezível ($\Delta x \rightarrow 0$). Assim, por meio de unidades infinitesimais em cascata compostas por elementos concentrados, é feita a modelagem de circuitos com parâmetros distribuídos.

3.2.1 SUBSTITUINDO TENSÃO E CORRENTE

Neste subitem, será apresentada a alternativa na qual os termos $v_j(k+1)$ e $i_j(k)$ serão substituídos pelos termos correspondentes das unidades π adjacentes. No caso, isso é possível, pois com uma quantidade muito grande de circuitos π , há a tendência de cada unidade corresponder a um comprimento muito pequeno da linha ($\Delta x \rightarrow 0$).

Assim, podemos escrever a relação para v_j , como:

$$v_j(k+1) \approx v_{j-1}(k+1) \quad (71)$$

Para i_j , tem-se:

$$i_j(k) \approx i_{j+1}(k) \quad (72)$$

A estrutura do circuito π intermediário já foi apresentada na Figura 1. A expressão (11) será utilizada no desenvolvimento a seguir.

Para $i_j(k+1)$, substituindo (71) em (11), tem-se:

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{R\Delta t}{2C} - \frac{\Delta t^2}{2LC}\right] i_j(k+1) = & \left[1 + \frac{R\Delta t}{2L}\right] i_j(k) - \frac{\Delta t}{2L} v_j(k) - \frac{\Delta t^2}{2LC} i_{j-1}(k+1) + \\ & + \left[\frac{G\Delta t^2}{2LC} + \frac{\Delta t}{2L}\right] v_{j-1}(k+1) \end{aligned} \quad (73)$$

Analogamente, substituindo (72) em (12), obtém-se:

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{G\Delta t}{2C}\right] v_j(k+1) = & \left[1 - \frac{G\Delta t}{2C} - \frac{\Delta t^2}{2C}\right] v_j(k) + \frac{\Delta t}{2C} i_j(k+1) + \\ & - \left[\frac{\Delta t}{2C} - \frac{R\Delta t^2}{2LC}\right] i_{j+1}(k) + \frac{\Delta t^2}{2LC} v_{j+1}(k) \end{aligned} \quad (74)$$

Na Figura 3, é representado o primeiro circuito π e, de forma semelhante, as variáveis de estado serão determinadas considerando as substituições de termos propostas neste subitem. Para a análise da primeira unidade, o termo $v_j(k+1)$ em (31) é substituído pela fonte de tensão $u(k+1)$ aplicada no início da cascata.

Assim, substituindo (71) em (31), tem-se:

$$\left[1 + \frac{R\Delta t}{2L}\right] i_1(k+1) = \left[1 - \frac{R\Delta t}{2L}\right] i_1(k) + \frac{\Delta t}{2L} u(k) - \frac{\Delta t}{2L} v_1(k) \quad (75)$$

Analogamente, em (34), é substituído (72) e o termo desconhecido é $i_2(k+1)$.

Assim inserindo (35) em (34), é obtido:

$$\left[1 + \frac{G\Delta t}{2C}\right] v_1(k+1) = \left[1 - \frac{G\Delta t}{2C} - \frac{G\Delta t^2}{2LC}\right] v_1(k) + \left[\frac{R\Delta t}{L} - 1\right] i_2(k) + \frac{\Delta t^2}{2LC} v_2(k) \quad (76)$$

A última unidade π é ilustrada pela Figura 3 e sua análise será análoga às unidades já determinadas. Em (43), a variável de estado $v_{n-1}(k)$ é baseada em (44) e será substituída por (71).

Inserindo (44) em (43), tem-se:

$$\left[1 + \frac{R\Delta t}{2L} - \frac{\Delta t^2}{2LC}\right] i_n(k+1) = \left[1 - \frac{R\Delta t}{2L}\right] i_n(k) + \left[\frac{G\Delta t^2}{2LC} + \frac{\Delta t}{2L}\right] v_{n-1}(k+1) + \left[-\frac{\Delta t^2}{2LC} i_{n-1}(k+1) - \frac{\Delta t}{2L} v_n(k)\right] \quad (77)$$

De maneira semelhante, em (47), não há aproximações ou termos desconhecidos. Portanto, a expressão da tensão é igual à apresentado em (48).

3.2.2 SUBSTITUINDO TENSÃO

Neste subitem, será considerada a substituição apenas para um termo das atualizações a serem realizadas. O termo substituído será a tensão e o desenvolvimento se dará analogamente aos desenvolvimentos já apresentados. As expressões utilizadas a seguir já foram apresentadas anteriormente. A primeira estrutura analisada é mostrada na Figura 2.

Para expressão de $i_j(k+1)$ não há termo desconhecido e substituindo (71) em (11), a expressão é a mesma apresentada em (67).

De forma semelhante, aplicando a integração trapezoidal em v_j , têm-se os termos $i_j(k)$ e $i_{j+1}(k+1)$ que são aproximados pelo método de Euler utilizando (55) e (18), respectivamente.

Aproximando $i_j(k)$ baseado em (16) e substituindo (71), obtém-se:

$$i_j(k) = \left[1 + \frac{R\Delta t}{L}\right] i_j(k+1) \quad (78)$$

Introduzindo (76) e (18) em (12), tem-se:

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{G\Delta t}{2C}\right] v_j(k+1) = & \left[1 - \frac{G\Delta t}{2C} - \frac{\Delta t^2}{2LC}\right] v_j(k) + \frac{\Delta t}{2C} \left[\frac{R\Delta t}{L} + 2\right] i_j(k+1) + \\ & + \frac{\Delta t}{2C} \left[\frac{R\Delta t}{L} - 2\right] i_{j+1}(k) + \frac{\Delta t^2}{2LC} v_{j+1}(k) \end{aligned} \quad (79)$$

A Figura 3 mostra o primeiro circuito π e de forma análoga ao circuito intermediário será determinado seu equacionamento. Para a variável i_1 sua expressão é a mesma apresentada em (73).

A variável v_1 em (34) tem os termos $i_1(k)$ e $i_2(k+1)$ baseados em (76) e (35), respectivamente.

Assim, v_1 é escrito como:

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{G\Delta t}{2C}\right] v_1(k+1) = & \left[1 - \frac{G\Delta t}{2C} - \frac{\Delta t^2}{2LC}\right] v_1(k) + \frac{\Delta t}{2C} \left[\frac{R\Delta t}{L} + 2\right] i_1(k+1) + \\ & + \frac{\Delta t}{2C} \left[\frac{R\Delta t}{L} - 2\right] i_2(k) + \frac{\Delta t^2}{2LC} v_2(k) \end{aligned} \quad (80)$$

A última unidade π representada pela Figura 4 é analisada de modo semelhante às unidades já desenvolvidas. Utilizando (43), a manipulação do termo $v_{n-1}(k)$ é baseada em (44) e (73). Assim, não há aproximações ou termos desconhecidos. Portanto, a expressão da corrente é igual à apresentado em (75).

De forma semelhante, aplicando a integração trapezoidal em v_n , apenas $i_n(k)$ é aproximado pelo método de Euler.

Substituindo (71) em (16), para $i_n(k)$, obtém-se:

$$i_n(k) = i_n(k+1) + \frac{R\Delta t}{L} i_n(k+1) \quad (81)$$

Introduzindo (79) em (47), tem-se:

$$\left[1 + \frac{G\Delta t}{2C}\right] v_n(k+1) = \left[1 - \frac{G\Delta t}{2C}\right] v_n(k) + \frac{\Delta t}{C} \left[\frac{R\Delta t}{L} + 2\right] i_n(k+1) \quad (82)$$

3.2.3 SUBSTITUINDO CORRENTE

Neste subitem, é considerada apenas a substituição proposta em (72). Com relação ao circuito intermediário, em (11), a expressão da integração trapezoidal será manipulada segundo os passos a seguir. Para i_j os termos $v_{j-1}(k)$ e $v_j(k+1)$ são baseados em (22) e (20).

O termo $v_{j-1}(k)$ é baseado em (22) e (72). Assim, tem-se:

$$v_{j-1}(k) = \left[1 + \frac{G\Delta t}{C}\right] v_{j-1}(k+1) \quad (83)$$

O termo $v_j(k+1)$ é baseado em (16) e (72), obtendo:

$$v_j(k+1) = v_j(k) - \frac{G\Delta t}{C} v_j(k) \quad (84)$$

Substituindo (81) e (82) em (11), é obtido:

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{R\Delta t}{2L}\right] i_j(k+1) = & \left[1 - \frac{R\Delta t}{2L}\right] i_j(k) + \frac{\Delta t}{2L} \left[\frac{G\Delta t}{C} + 2\right] v_{j-1}(k+1) + \\ & + \frac{\Delta t}{2L} \left[\frac{G\Delta t}{C} - 2\right] v_j(k) \end{aligned} \quad (85)$$

O termo $v_j(k+1)$ foi determinado de forma semelhante aos itens anteriores e é expressado em (77).

As variáveis de estado i_1 e v_1 são representadas esquematicamente pela Figura 3. Será usada (11) para os próximos desenvolvimentos. Para a análise da primeira unidade, será utilizada (11) e o termo $v_1(k+1)$ é baseado em (82), adequando os índices que relacionam a unidade em atualização.

Assim, $v_1(k+1)$ é adequadamente escrito como:

$$v_1(k+1) = v_1(k) - \frac{G\Delta t}{C} v_1 \quad (86)$$

Inserindo (83) em (11) e substituindo (72), tem-se:

$$\left[1 + \frac{R\Delta t}{2L}\right] i_1(k+1) = \left[1 - \frac{R\Delta t}{2L}\right] i_1(k) + \frac{\Delta t}{2L} u(k+1) + \frac{\Delta t}{2L} u(k) - \frac{G\Delta t^2}{2LC} v_1(k) \quad (87)$$

Analogamente, não há aproximações ou termos desconhecidos. Portanto, a expressão de $v_1(k+1)$ é igual à apresentada em (74).

A última unidade π é ilustrada na Figura 4. Os termos v_n e i_n são determinados baseados em equações já determinadas anteriormente. Utilizando (11) para determinar i_n , há em sua expressão os termos $v_{n-1}(k)$ e $v_n(k+1)$ que já foram obtidos em (65) e (44), respectivamente. Assim, substituindo (65) e (44) em (8) é obtido (67).

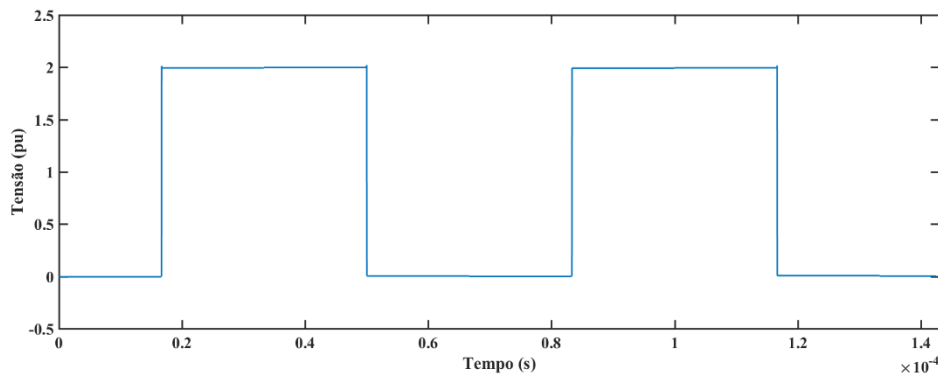
Para determinar v_n , utiliza-se (12). O único termo desconhecido, $i_n(k)$, é baseado em (68). Introduzindo (68) em (12), tem-se a expressão de v_n já determinada em (70).

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A aplicação das equações de estado é considerada satisfatória, quando seus resultados tem um perfil próximo ou igual ao perfil da Figura 5. Esse perfil, representa a propagação de uma onda eletromagnética e seus patamares de reflexão no terminal de entrada da linha de transmissão modelados por uma rotina numérica de transformada de Laplace (MORENO; RAMIREZ, 2008). A Figura 5 mostra o perfil da onda de tensão no terminal final da linha. O resultado obtido pode ser considerado a propagação da onda eletromagnética exata. Entretanto, a transformada de Laplace é aplicável apenas para funções conhecidas e contínuas. Transitórios eletromagnéticos são, geralmente, fenômenos modelados numericamente ponto a ponto, pois as funções são desconhecidas, e têm comportamento descontínuos. Um exemplo de aplicação é a função degrau, utilizada para representar energização de sistemas e curtos-circuitos. Os modelos utilizando integração trapezoidal ou outros métodos numéricos de integração não apresentam as limitações de que, necessariamente, os fenômenos simulados sejam descritos por funções conhecidas e contínuas.

A eficácia dos modelos desenvolvidos, será simulada energizando a linha de transmissão com uma fonte de tensão $u(t)$ do tipo degrau. O terminal final da linha ou terminal de carga estará aberto e o terminal de entrada ou início da linha é alimentado por uma fonte de tensão constante. Para todas as simulações realizadas neste trabalho, foi utilizado um computador com desempenho mediano (computador pessoal) e com versões do software *MatLab* superiores a versão 2016a devido a compatibilidade com as rotinas numéricas desenvolvidas.

Figura 5: Modelo de propagação de uma onda eletromagnética utilizando transformada de Laplace.



Fonte: Elaborado pelo autor

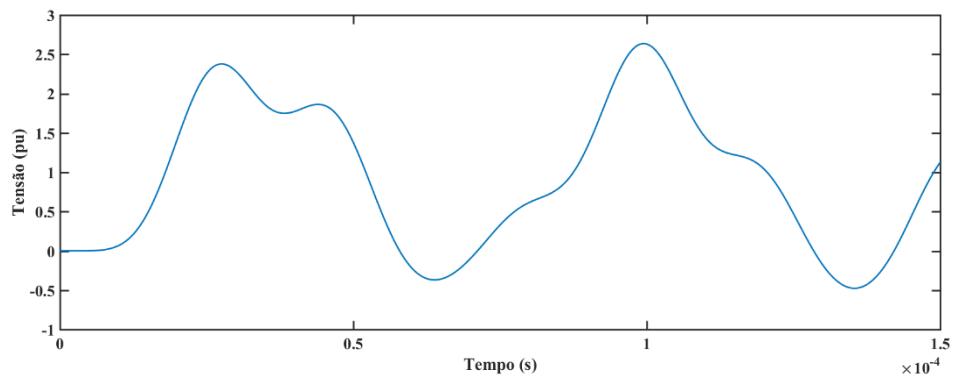
Para todos os resultados que serão apresentados os valores dos parâmetros de linha são: $R' = 0,05 \Omega/km$, $L' = 1 mH/km$, $G' = 0,556 \mu S/km$, e $C' = 11,11 nF/km$ e $d = 5 km$, onde d é o comprimento total da linha. Os parâmetros de simulação são: $t_{MAX} = 150 ms$ e $\Delta t = 50 ns$. A fonte $u(t)$ é uma entrada degrau, pois é uma função que compreende todas as faixas de frequência e que melhor pode avaliar o desempenho dos modelos.

4.1 RESULTADOS UTILIZANDO MATRIZ DE GRANDE ORDEM

Aplicando uma entrada degrau de tensão (1 pu) na entrada da cascata de circuitos π , a saída de tensão é mostrada no final da linha. As Figuras 6, 7 e 9 estão relacionadas por 3, 5, e 10 circuitos π , respectivamente. A Figura 8, é simulada com um passo de tempo de $1 ns$, diferente do passo de tempo utilizado para todas as outras simulações que é de $50 ns$. Para as Figuras 6, 7, 8 e 9 é observado que elas não reproduzem o formato de uma onda transitória sendo propagada pela linha de transmissão não é reproduzido adequadamente, pois são utilizadas poucas unidades π . As Figuras 7 e 8, não houve mudanças no formato da onda de propagação do transitório, embora o passo de tempo seja

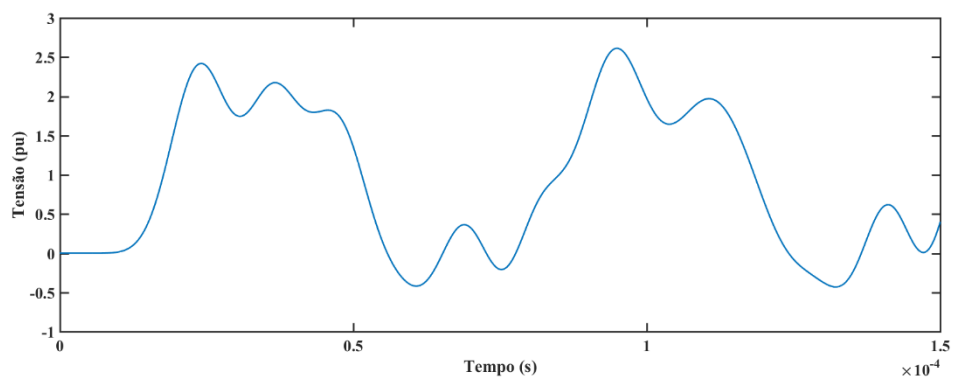
diferente. Tanto em um caso como no outro, a quantidade de circuitos π é muito pequena.

Figura 6: Energização da linha com 3 circuitos π .



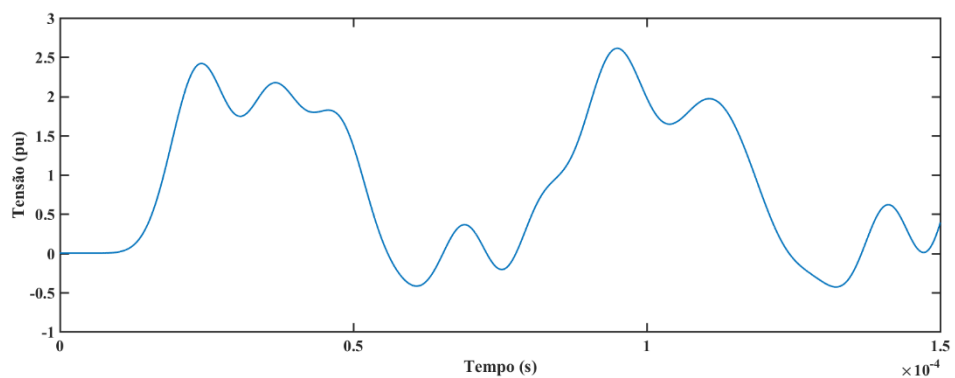
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 7: Energização da linha com 5 circuitos π e $\Delta t=50$ ns.



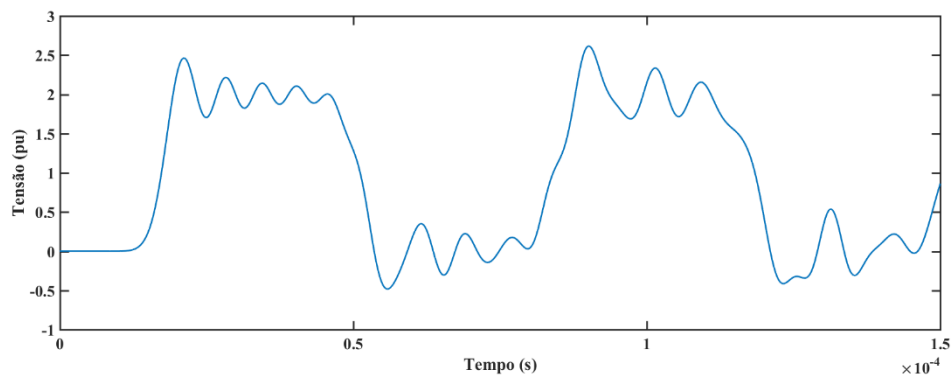
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 8: Energização da linha com 5 circuitos π e $\Delta t=1$ ns.



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 9: Energização da linha com 10 circuitos π .

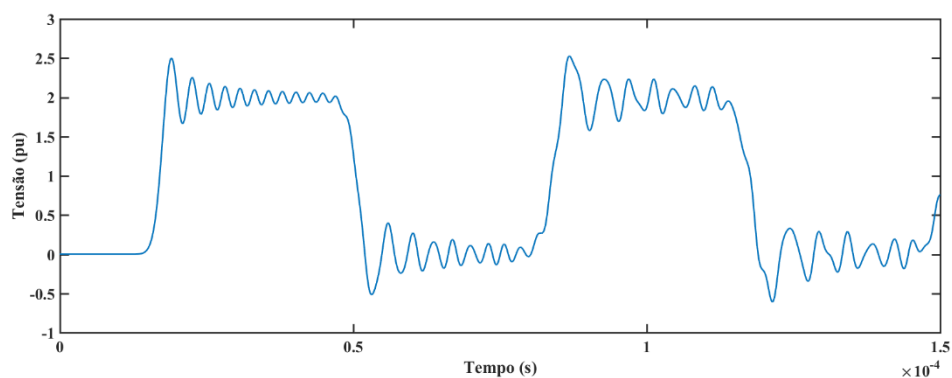


Fonte: Elaborado pelo autor

As Figuras 10 e 11 foram obtidas com 25 e 50 circuitos π e com o passo de tempo de 50 ns . Após a primeira reflexão da onda de tensão no terminal da carga, há uma tendência em estabelecer um patamar de tensão em torno de 2 pu, perturbado por oscilações numéricas. No entanto, para as reflexões subsequentes não se observa um patamar definido claramente em 2 pu de tensão.

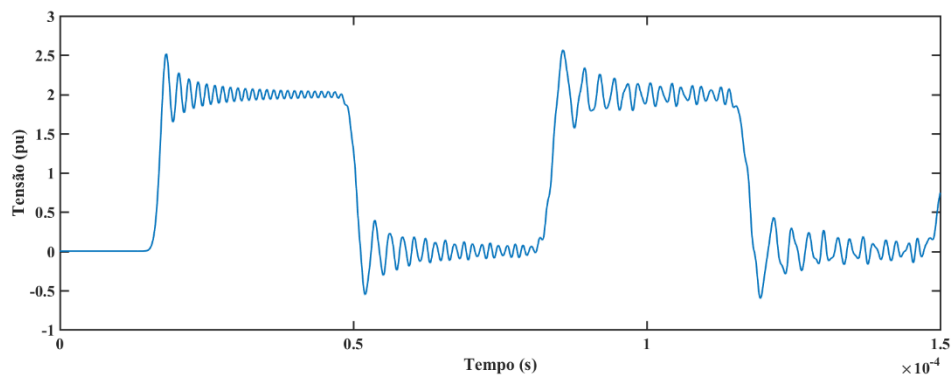
Nas Figuras 12, 13 e 14 é simulado a propagação da onda de tensão com 100, 200 e 300 circuitos π , respectivamente. O passo de tempo pré-definido de 50 ns , foi o mesmo para todos os resultados.

Figura 10: Energização da linha com 25 circuitos π .



Fonte: Elaborado pelo autor

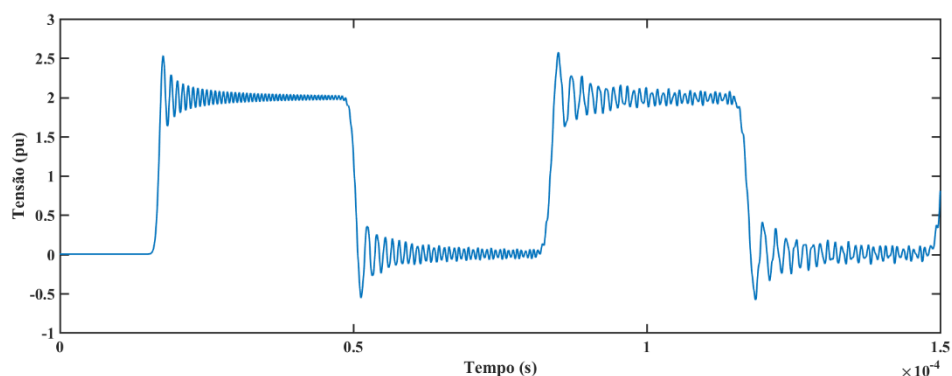
Figura 11: Energização da linha com 50 circuitos π .



Fonte: Elaborado pelo autor

Nesses resultados, são identificados dois patamares em 0 e 2 pu que se alternam a cada nova reflexão da onda no final da linha. A Figura 12 apresenta um pico inicial de 2,5 pu, que representa 25% acima do esperado. Na Figura 12, após a primeira reflexão da onda, ocorre um amortecimento gradativo das oscilações numéricas no primeiro patamar de tensão, enquanto que para os patamares subsequentes esse amortecimento não ocorre de maneira tão significativa. Em cada reflexão da onda, há um pico de tensão ocasionado pelas oscilações numéricas.

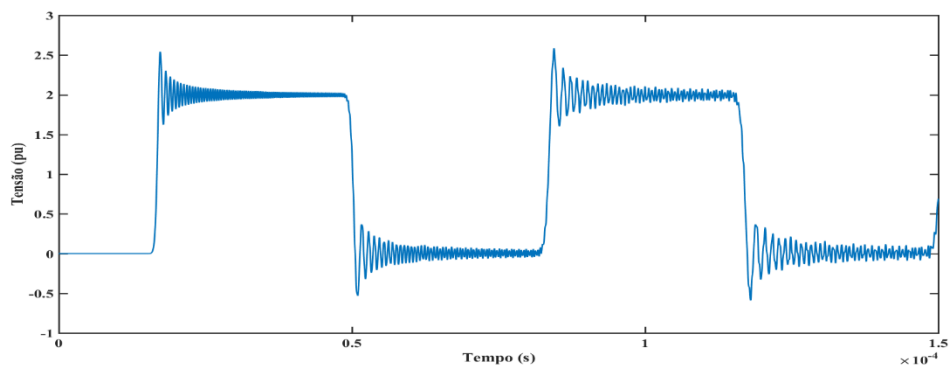
Figura 12: Energização da linha com 100 circuitos π .



Fonte: Elaborado pelo autor

Para as Figuras 13 e 14, os patamares de tensão subsequentes ao primeiro patamar apresentam amortecimento gradativo. Na Figura 13, o terceiro patamar de tensão apresenta amortecimento gradativo menor que o amortecimento apresentado na Figura 14, mas em ambas Figuras, há amortecimentos nos patamares de tensão, diferentemente da Figura 12 que apresentava amortecimento gradativo apenas no primeiro patamar de tensão. Os picos de tensão nas Figuras 13 e 14, são menores a cada novo patamar.

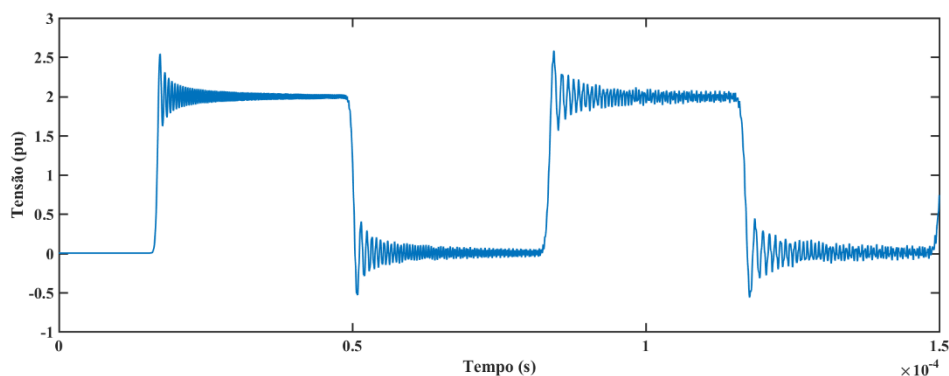
Figura 13: Energização da linha com 200 circuitos π .



Fonte: Elaborado pelo autor

O tempo computacional para obtenção de cada resultado foi de aproximadamente 1,4 segundos para simulações utilizando valores maiores que 200 circuitos π .

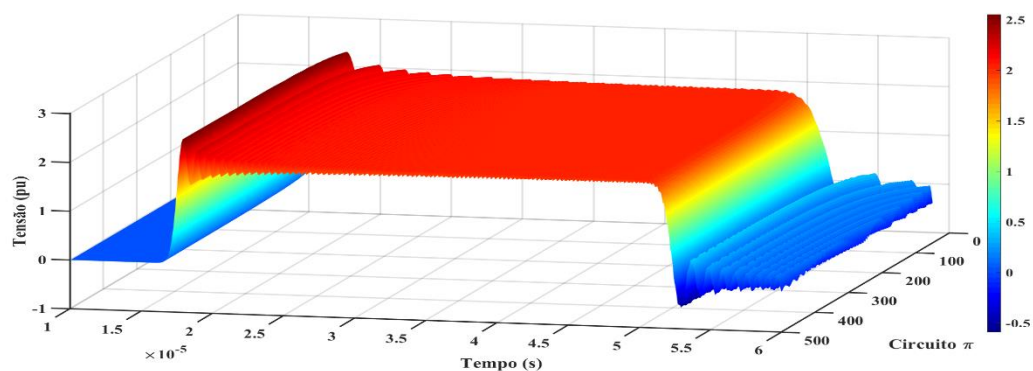
Figura 14: Energização da linha com 300 circuitos π .



Fonte: Elaborado pelo autor

Na Figura 15, são apresentados resultados em forma tridimensional de simulações de energização da linha de transmissão. Para essas simulações, a quantidade de circuitos π foi variada de 50 a 500 unidades. O passo de tempo foi de 50 ns . A Figura 15 apresenta uma alternativa para a análise da propagação do fenômeno eletromagnético ao longo de uma linha de transmissão, possibilitando considerar três parâmetros (tensão, tempo e quantidade de circuitos π) em um único gráfico. Assim, é possível observar os patamares de tensão e amortecimento em cada reflexão da onda no terminal inicial da linha para diversas quantidades de circuitos π .

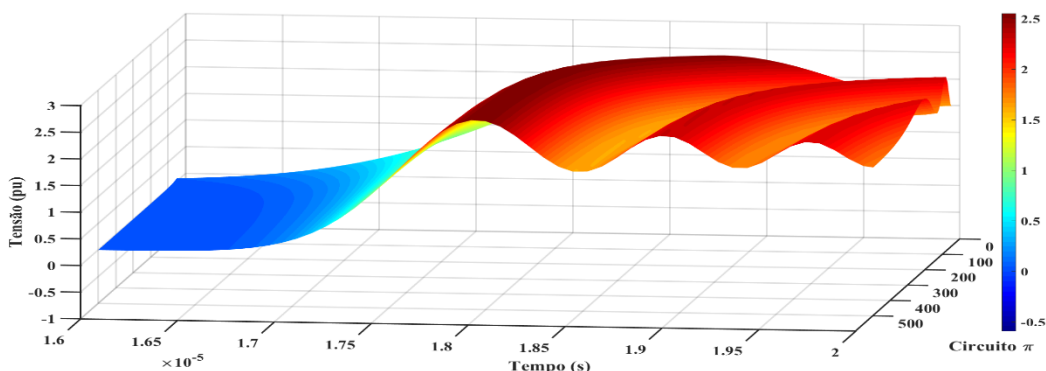
Figura 15: Representação 3D da energização da linha com 500 circuitos π .



Fonte: Elaborado pelo autor

As Figuras 16 e 17 são detalhes da Figura 15. Na Figura 16 é mostrado o início do primeiro patamar de tensão e as oscilações numéricas. O primeiro pico também é observado nas Figuras 12, 13 e 14, que apresentam um amortecimento gradativo desde o primeiro patamar de tensão. Para a Figura 16, tem-se em detalhe a relação entre o aumento da quantidade de circuitos π e a diminuição das oscilações numéricas.

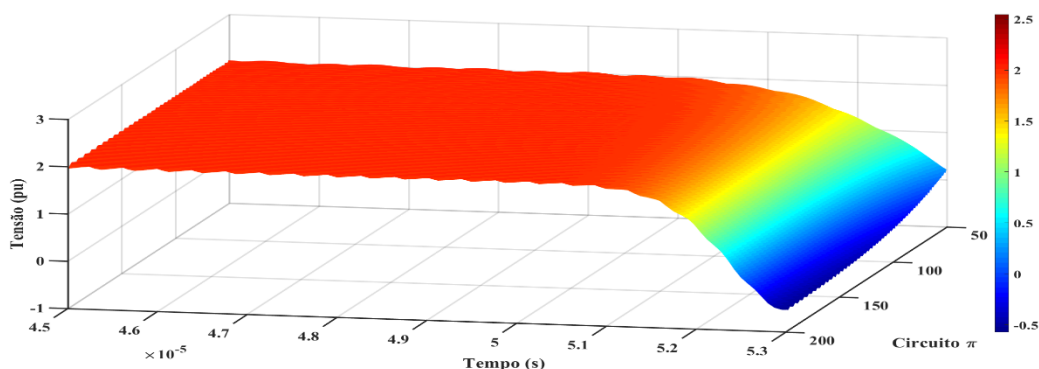
Figura 16: Representação 3D do início do primeiro patamar com 500 circuitos π .



Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 17 mostra o final do primeiro patamar de tensão da Figura 15. O amortecimento gradativo, evidenciado nas Figuras 12, 13 e 14 é mostrado em detalhes conforme é alterada quantidade de circuitos π . Após o pico do primeiro patamar, as oscilações numéricas são amortecidas até valores próximos a 2 pu, sendo esse o valor após esperado da reflexão da onda de tensão no terminal final da linha de transmissão.

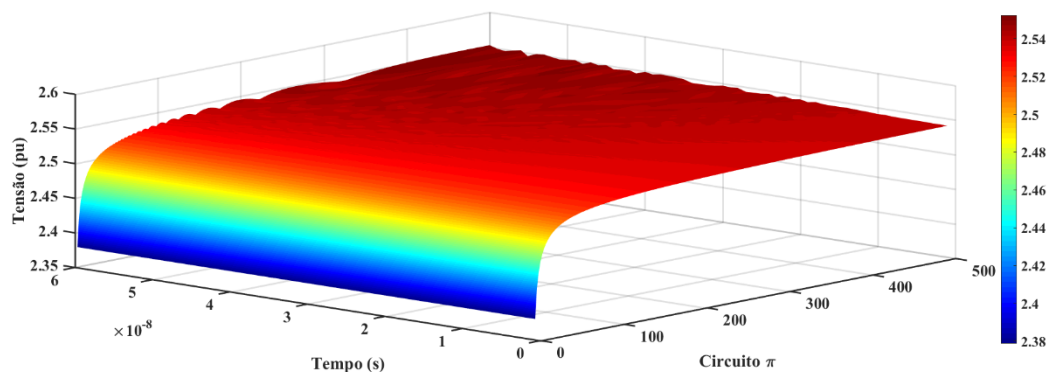
Figura 17: Representação 3D do final do primeiro patamar com 500 circuitos π .



Fonte: Elaborado pelo autor

As Figuras 18 e 19 mostram em perfil tridimensional resultados da aplicação da matriz de grande ordem. A quantidade de circuitos π foi variada de 50 a 500 circuitos π e o passo de tempo foi variado de 1 ns a 60 ns, sendo registrado o pico de tensão para cada conjunto desses parâmetros.

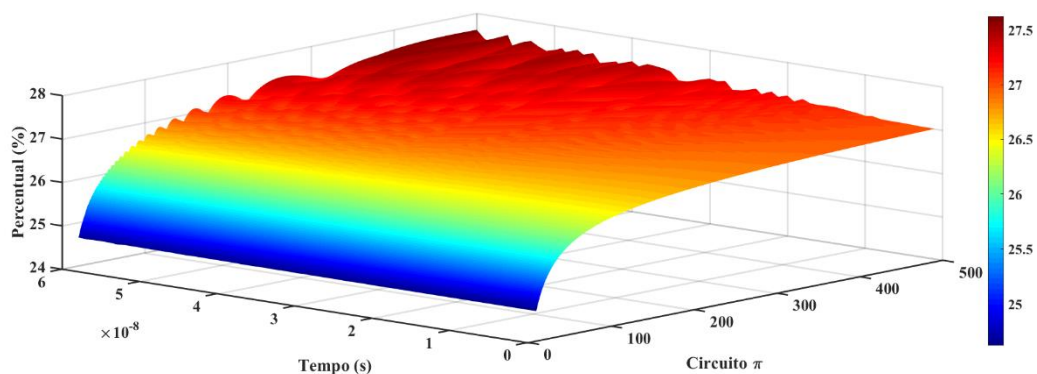
Figura 18: Variação do pico de tensão em função da quantidade de circuitos π e do passo de tempo – aplicação de matrizes de grande ordem.



Fonte: Elaborado pelo autor

Os valores absolutos apresentados na Figura 18 foram representados na Figura 19 em valores percentuais. Assim, é possível relacionar a quantidade de circuitos π utilizada com a porcentagem de sobretensão devido as oscilações numéricas e qual a quantidade de circuitos π foi utilizada.

Figura 19: Valores percentuais do gráfico da Figura 18.



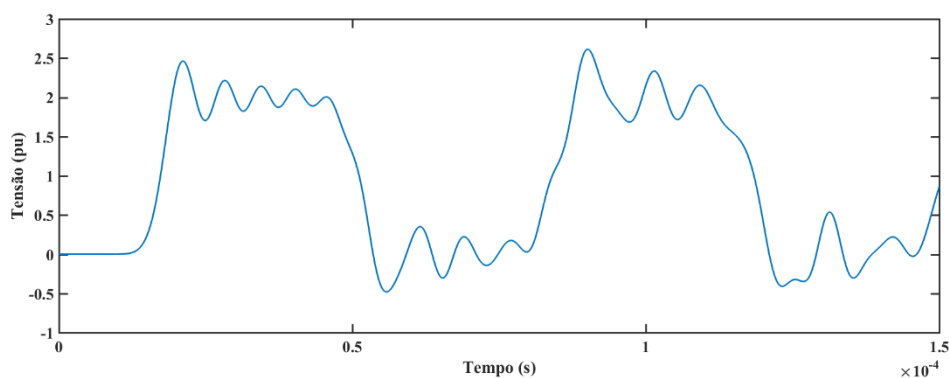
Fonte: Elaborado pelo autor

4.2 RESULTADOS UTILIZANDO MATRIZ DE ORDEM 2

Uma fonte de entrada $u(t)$ do tipo degrau, é utilizada em todas as simulações desta seção para observar o comportamento de propagação da onda de tensão, utilizando o modelo de matrizes de ordem 2. As Figuras 20, 21 e 22

são resultados utilizando 10, 25 e 50 circuitos π , respectivamente. Para todas as simulações são considerados os parâmetros de linha, mencionados anteriormente ($R' = 0,05 \Omega/km$, $L' = 1 mH/km$, $G' = 0,556 \mu S/km$, e $C' = 11,11 nF/km$ e $d = 5 km$), e o passo de tempo de $50 ns$. Na Figura 20, ao utilizar apenas 10 unidades π , não é suficiente para que o modelo reproduza adequadamente o comportamento da propagação de uma onda de tensão por uma linha de transmissão durante um fenômeno transitório. A Figura 20 não apresenta nenhum patamar em torno de 2 pu quando a onda de tensão é refletida.

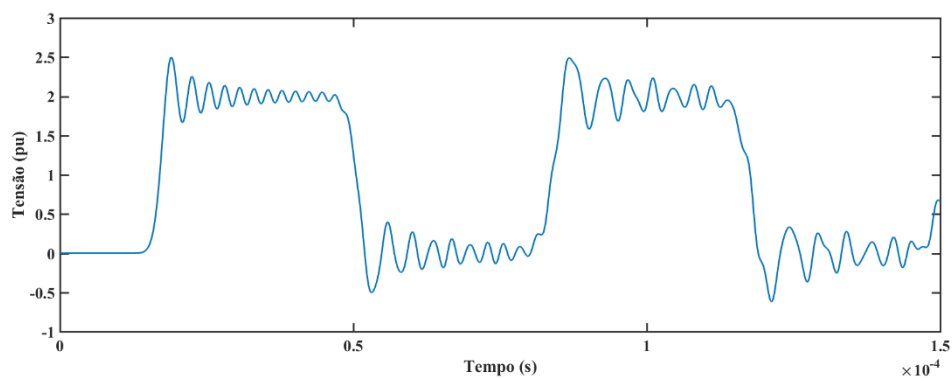
Figura 20: Energização da linha com 10 circuitos π .



Fonte: Elaborado pelo autor

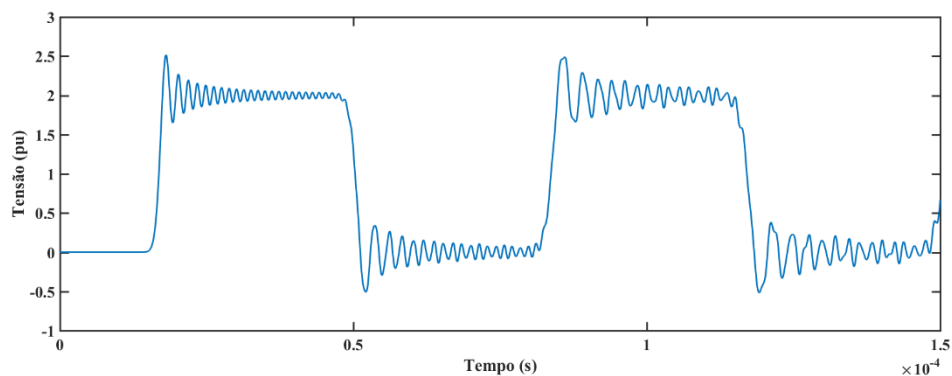
Nas Figuras 21 e 22, utilizando quantidades maiores de 25 e 50 circuitos π , respectivamente. É possível observar uma tendência de estabelecer um patamar de tensão em torno de 2 pu na primeira reflexão da onda de tensão propagada. Para a Figura 21, apenas o primeiro patamar de tensão é bem definido e as reflexões da onda propagada, são perturbadas pelas oscilações numéricas. A Figura 22, apresenta o primeiro e o segundo patamar bem definido e a partir da terceira reflexão existe uma tendência apenas em definir um valor de tensão em torno de 2 pu.

Figura 21: Energização da linha com 25 circuitos π .



Fonte: Elaborado pelo autor

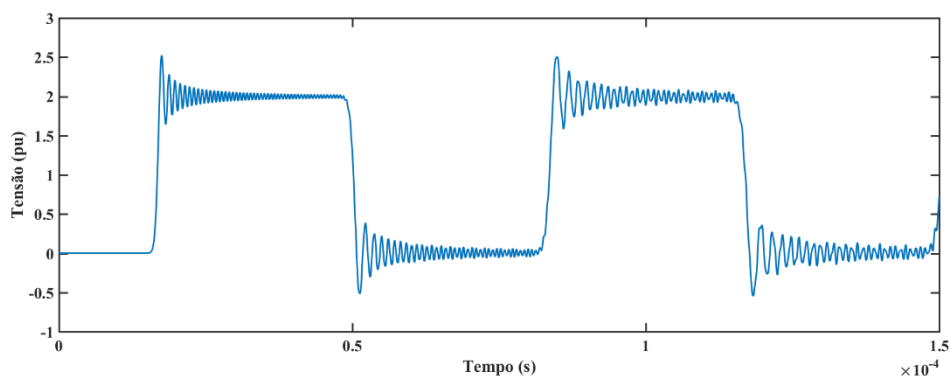
Figura 22: Energização da linha com 50 circuitos π .



Fonte: Elaborado pelo autor

Para os resultados das Figuras 23, 24 e 25, foi utilizado um passo de tempo 50 ns e foram utilizadas as quantidades de 100, 200 e 300 circuitos π . A Figura 23, apresenta na primeira reflexão um pico de tensão de aproximadamente 2,5 pu e um amortecimento gradativo das oscilações numéricas. Após o primeiro patamar, há uma tendência de amortecimento das oscilações em cada reflexão da onda de tensão propagada.

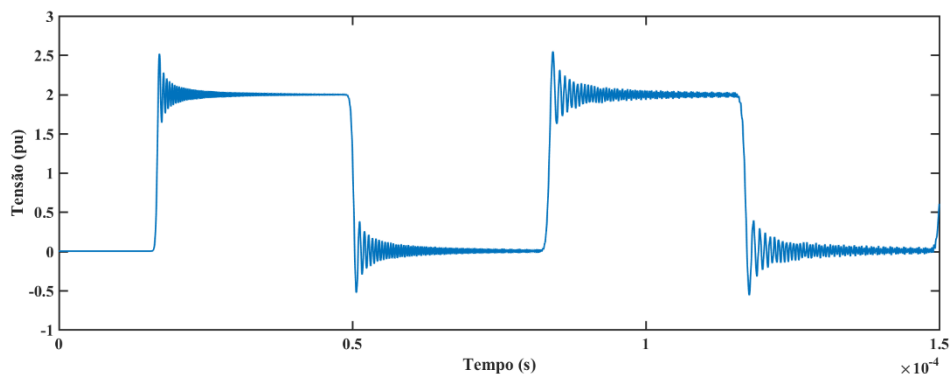
Figura 23: Energização da linha com 100 circuitos π .



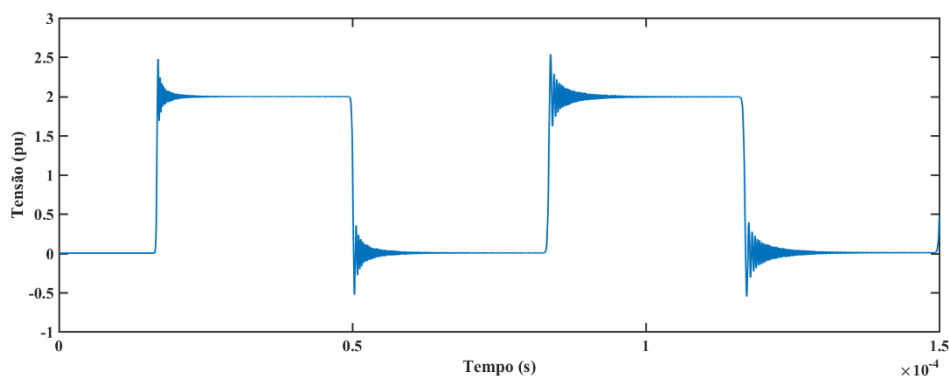
Fonte: Elaborado pelo autor

Para as Figuras 24 e 25, não apenas o primeiro patamar de tensão apresenta amortecimento gradativo. Os patamares subsequentes ao primeiro patamar também apresentam amortecimento gradativo. Na Figura 25, todos os patamares de tensão tem as oscilações numéricas extremamente amortecidas, exibindo um patamar muito próximo 2 pu, que é o valor esperado após a reflexão da onda de tensão no terminal final da linha, tendo sido aplicado na entrada um valor de 1 pu na fonte do tipo degrau. Os patamares da Figura 25 apresentam amortecimento gradativo maiores que os valores apresentados pela Figura 24, devido ao aumento da quantidade de circuitos π entre as duas Figuras.

Figura 24: Energização da linha com 200 circuitos π .

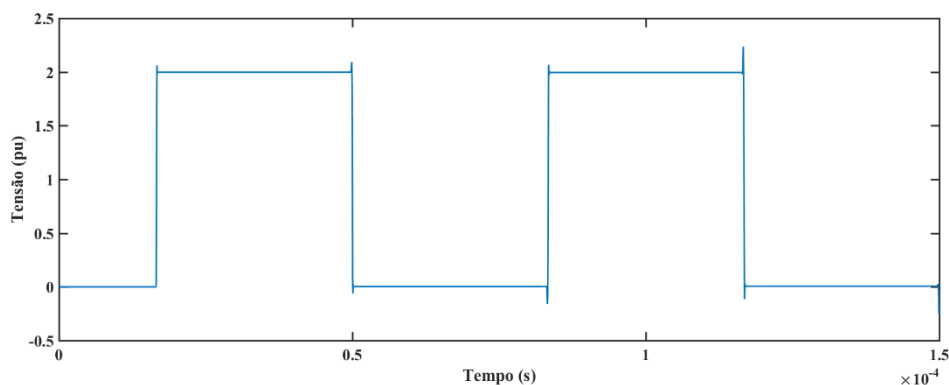


Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 25: Energização da linha com 300 circuitos π .

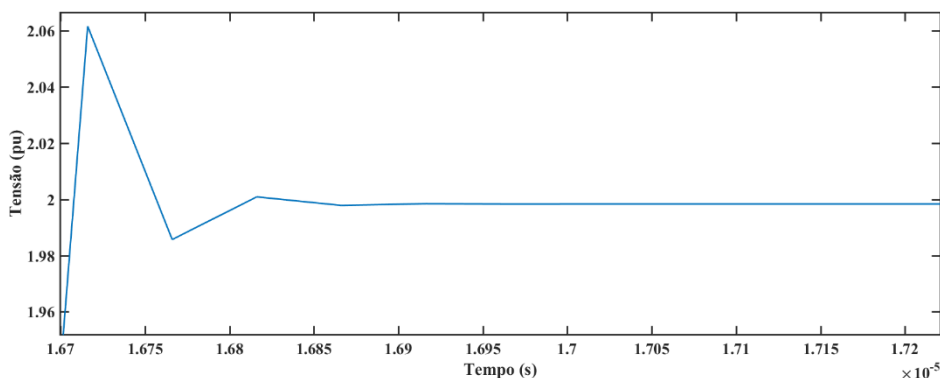
Fonte: Elaborado pelo autor

Para as Figuras 26 e 27, foram utilizadas 333 unidades de circuito π e um passo de tempo de 50 ns. A Figura 26, apresenta um perfil semelhante ao da Figura 5, onde os resultados apresentados são considerados exatos para a propagação de um degrau de tensão em uma linha de transmissão. Em cada patamar de tensão é obtida uma redução expressiva das oscilações numéricas com a rotina utilizando matrizes de ordem 2. A Figura 27 mostra um pico de oscilação muito pequeno, tendo limites de variação de tensão entre 1,98 pu e 2,06 pu. As oscilações são amortecidas rapidamente entre os instantes de 16,7 ms e 16,9 ms e o pico de tensão é de 2,9 % acima do valor esperado (2 pu).

Figura 26: Energização da linha com 333 circuitos π .

Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 27: Pico do primeiro patamar de tensão com 333 circuitos π .

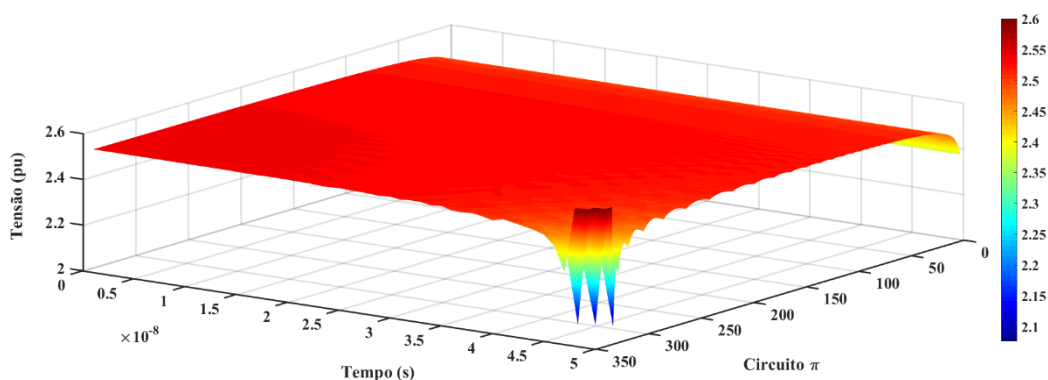


Fonte: Elaborado pelo autor

O tempo computacional para obtenção dos resultados para valores maiores que 200 circuitos π foi de aproximadamente 3,4 segundos.

A Figura 28, mostra resultados em gráfico tridimensional considerando o pico de tensão após a primeira reflexão da onda de tensão no terminal de carga da linha de transmissão. A quantidade de circuitos π foi variada de 10 a 350 unidades e o passo de tempo foi variado de 1 a 50 ns.

Figura 28: Variação do pico de tensão em função da quantidade de circuitos π e do passo de tempo – aplicação de matrizes de ordem 2

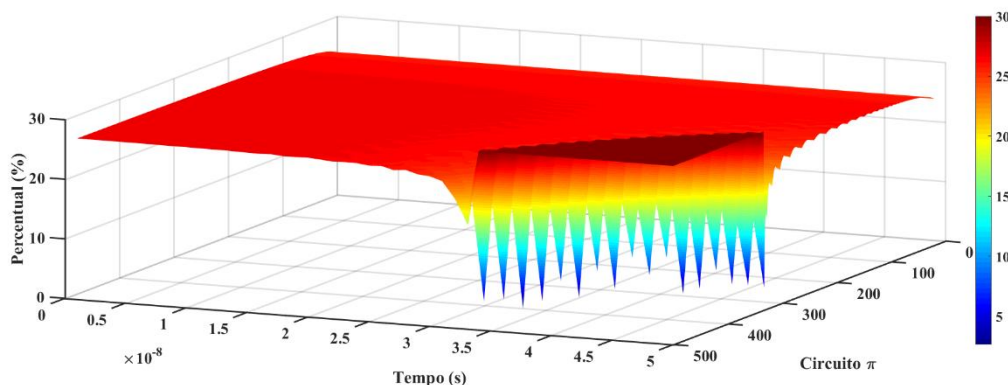


Fonte: Elaborado pelo autor

Há uma região limitada do plano onde são obtidos os menores valores de pico de tensão após a primeira reflexão da onda de tensão no terminal de carga. Essa região está relacionada a resultados semelhantes àqueles mostrados na

Figura 24, onde o pico de tensão apresenta um valor (2,06 pu) muito próximo do resultado considerado exato e obtido pela aplicação numérica de transformada de Laplace (2 pu).

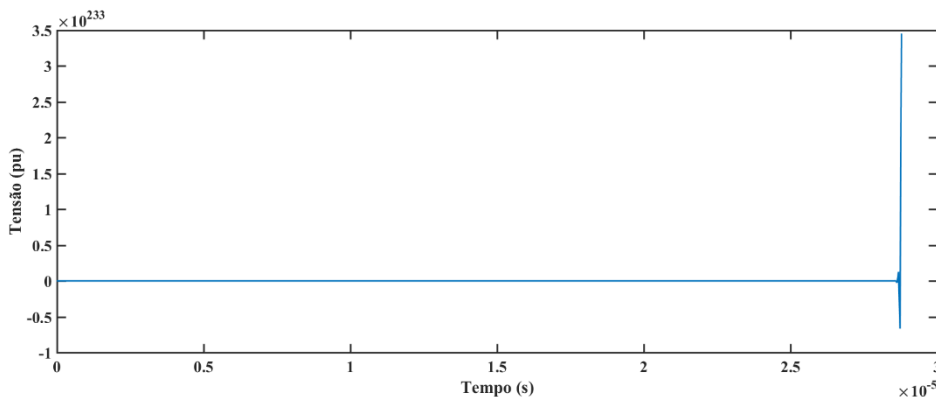
Figura 29: Detalhes de uma região do gráfico da Figura 26.



Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 29 apresenta detalhes de região específica do gráfico apresentado na Figura 28. Assim, é destacada a região onde ocorrem os menores picos de tensão na Figura 28. Além disso, os valores de pico de tensão são apresentados em percentuais relativos ao valor de 2 pu. As menores sobretensões estão abaixo de 5% e o menor valor, como mostrado na Figura 25, é de 2,06 pu, esse valor corresponde a um valor percentual de 2,5 %.

Figura 30: Limite da estabilidade numérica com 400 circuitos π .



Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 30 mostra que para valores maiores que 333 circuitos π , quando o passo de tempo é de 50 ns, a rotina numérica atinge seu limite de estabilidade numérica e os resultados obtidos não representam a propagação de um degrau de tensão em uma linha de transmissão com terminal de carga em aberto.

Considerando os resultados apresentados nas Figuras 26, 27, 28, 29 e 30, é possível afirmar que, no caso da aplicação da rotina baseada em matrizes de ordem 2, há conjuntos de quantidade de circuitos π e passo de tempo que levam a picos de tensão com sobretensões percentuais desprezíveis em relação a resultado exato a ser obtido para a propagação de um degrau de tensão em uma linha de transmissão. De forma mais específica, como será demonstrado utilizando (81) a (84), cada linha analisada tem esses conjuntos de quantidade de circuitos π e passo de tempo relacionados aos seus parâmetros R' , L' , G' e C' . Para esses parâmetros, existe uma relação que determina o melhor desempenho numérico da rotina numérica baseada em matrizes de ordem 2 para simulação de propagação de transitórios eletromagnéticos. Essa relação numérica é dada pela quantidade de circuitos π ideal e o passo de tempo ideal. A relação entre a quantidade de circuitos π e o passo de tempo pode ser escrita como uma constante de simulação:

$$K_{sim} = n_{ideal} \cdot \Delta t_{ideal} \quad (88)$$

A expressão de K_{sim} está relacionada com a constante de propagação da onda e o comprimento da linha. A constante de propagação é: a relação entre a constante de propagação da linha e o comprimento da linha é:

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \quad (89)$$

A relação entre a constante de propagação da linha e o comprimento da linha é obtida substituindo (7) em (89):

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{Rn}{d} + j\omega \frac{Ln}{d}\right) \cdot \left(\frac{Gn}{d} + j\omega \frac{Cn}{d}\right)} \quad (90)$$

Isolando n em (90), tem-se:

$$n = \frac{\gamma d}{\sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)}} \quad (91)$$

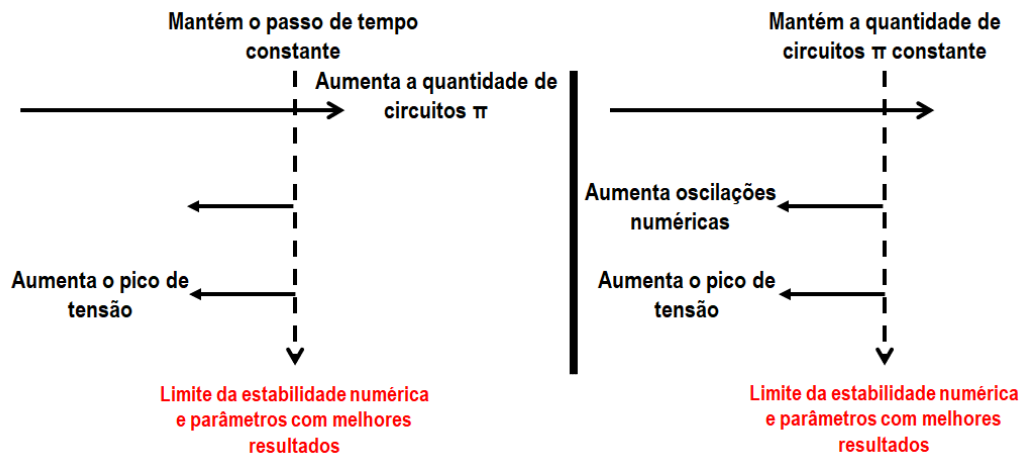
Se n for o valor ideal que apresenta o melhor desempenho numérico para a rotina mencionada, é possível reescrever (91) substituindo (88):

$$K_{sim} = \frac{\gamma d \Delta t_{ideal}}{\sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)}} \quad (92)$$

Assim, o valor de K_{sim} é uma constante para cada linha de transmissão e é possível determinar o valor que apresenta o melhor resultado numérico para a rotina baseada em matrizes de ordem 2.

A Figura 31 é um esquema que representa a relação entre a quantidade de circuitos π e o passo tempo. Para manter a relação ideal em (88), se a quantidade de circuitos π é aumentada, o passo de tempo diminui proporcionalmente. Por outro lado, se o passo de tempo aumentar, a quantidade de circuitos π diminui proporcionalmente. Para valores que se distanciam do limite da estabilidade numérica, as oscilações numéricas e os picos de tensão em cada patamar aumentam consideravelmente.

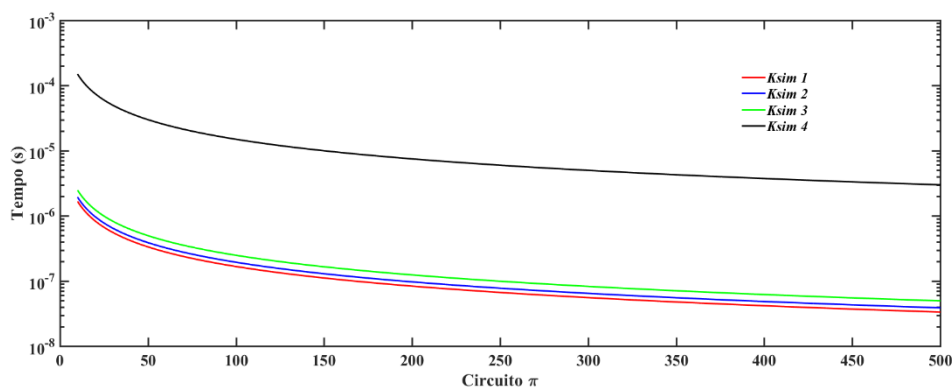
Figura 31: Relação entre quantidades de circuitos π e o passo de tempo para resultados numéricos com oscilações numéricas minimizadas (rotina numérica com matrizes de ordem 2).



Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 32 apresenta curvas que estabelecem conjuntos ideais de quantidade de circuitos π e passo de tempo para obtenção de resultados com oscilações numéricas minimizadas quando se aplica a rotina baseada em matrizes de ordem 2 na simulação de transitórios em linhas de transmissão.

Figura 32: Constante de simulação ideal para diferentes parâmetros de linha.



Fonte: Elaborado pelo autor

No caso da Figura 30, são apresentadas, então, as constantes obtidas por (88) para quatro linhas de transmissão diferentes. Os parâmetros dessas linhas são mostrados na Tabela 1. Cada valor de k_{sim} foi obtido tomando como base simulações nas quais foram obtidos os melhores resultados quanto à

minimização de oscilações numéricas para a propagação de um degrau de tensão considerando o terminal de carga em aberto. Tais resultados são semelhantes àquele apresentado na Figura 5.

Tabela 1: Valores dos parâmetros de cada k_{sim} .

Constante de simulação ideal	R'	L'	G'	C'
$k_{sim} 1$	0,05 Ω/km	0,556e ⁻⁶ S/km	1e ⁻³ H/km	11,11e ⁻⁹ F/km
$k_{sim} 2$	0,08 Ω/km	0,5e ⁻⁶ S/km	1e ⁻³ H/km	15e ⁻⁹ F/km
$k_{sim} 3$	0,026 Ω/km	0,556e ⁻⁶ S/km	2,209e ⁻³ H/km	11,11e ⁻⁹ F/km
$k_{sim} 4$	0,0379 Ω/km	0,556e ⁻⁶ S/km	1,52e ⁻³ H/km	14,3e ⁻⁹ F/km

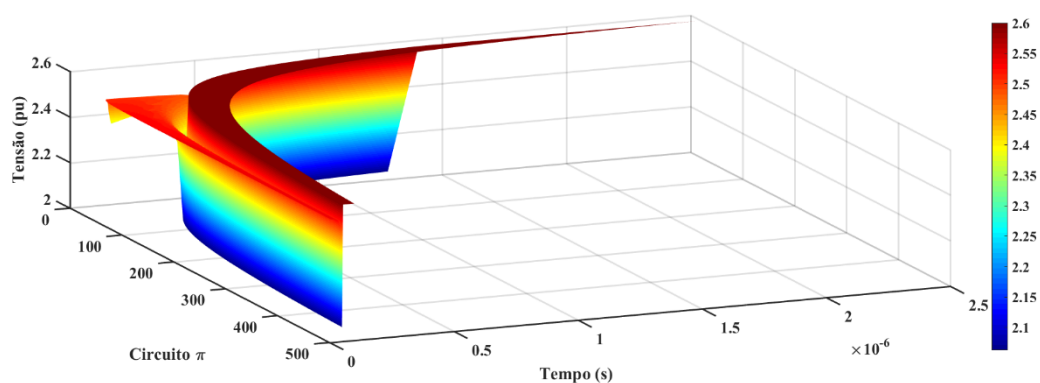
Fonte: Elaborado pelo autor

As Figuras de 33 a 40 são gráficos tridimensionais que mostram a variação dos picos de tensão nas regiões próximas às condições ideais determinadas pelas constantes k_{sim} mostradas na Tabela 1. Para cada valor dessa constante, são apresentados dois gráficos tridimensionais, sendo um gráfico com os valores absolutos de tensão (pu) e outro com valores percentuais de tensão em relação a 2 pu. Nas duas formas de apresentação, a variação dos picos de tensão é mostrada em função da variação da quantidade de circuitos π e da variação do passo de tempo. Para destacar a região de minimização dos picos de tensão e também das oscilações numéricas, foram apresentadas as regiões próximas do valor ideal de k_{sim} . Essa estratégia também diminui o tempo necessário para obtenção de cada gráfico tridimensional das Figuras 33 a 40.

As Figuras 33 e 34 referem-se a constante $k_{sim} 1$. Para a curva de $k_{sim} 1$, há um vale estabelecendo uma relação entre os parâmetros quantidades de circuitos π e o passo de tempo, onde o valor do pico de tensão do primeiro

patamar é menor que 3 % (PRADO, 2014). A Figura 31 mostra que utilizando parâmetros característicos de cada linha é possível obter simulações com picos de tensão e oscilações numéricas minimizadas semelhante ao caso apresentado na Figura 26. A Figura 34 mostra os valores percentuais em relação à quantidade de circuitos π e ao passo de tempo. Os valores percentuais foram obtidos utilizando parâmetros de linha diferentes daqueles utilizados para obtenção dos resultados apresentados na Figura 29. Em ambas as Figuras, 33 e 34, o vale apresentado está relacionado ao valor ideal de quantidade de circuitos π e de passo de tempo que, em conjunto, minimizam as oscilações numéricas em simulações de transitórios para a linha relacionada a constante $k_{sim} 1$. Esse vale está relacionado à curva dessa linha de transmissão mostrada na Figura 32.

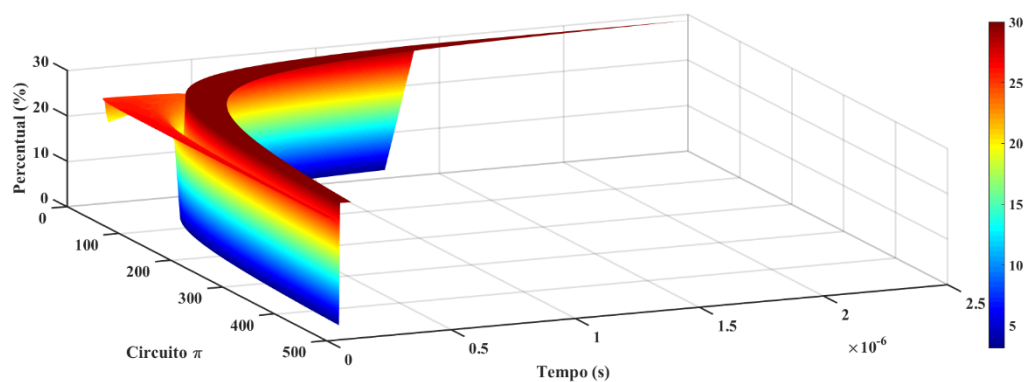
Figura 33: Gráfico tridimensional relativo à constante $k_{sim} 1$ com valores absolutos de tensão.



Fonte: Elaborado pelo autor

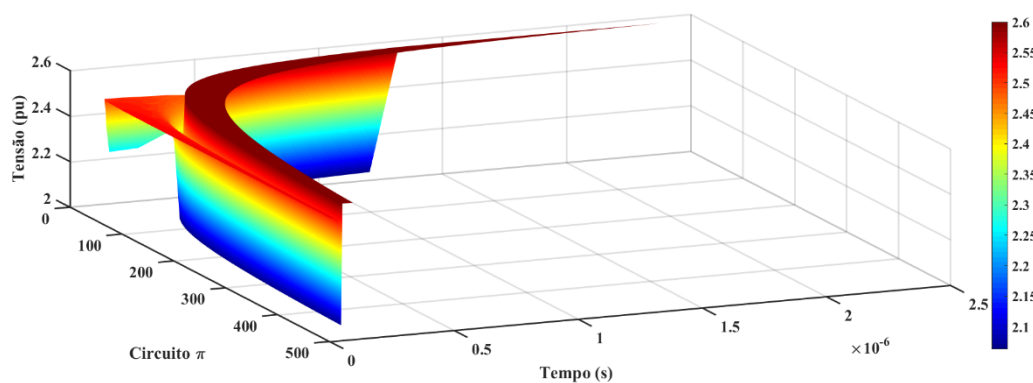
As Figuras 35 a 40 mostram gráficos tridimensionais relacionados às outras três linhas de transmissão cujos parâmetros são apresentados na Tabela 1. Assim as Figuras 35 e 36 mostram os resultados relacionados à constante $k_{sim} 2$. Esse padrão é utilizado nas Figuras 37 e 38, relacionadas à constante $k_{sim} 3$, bem como, nas Figuras 39 e 40, relacionadas à constante $k_{sim} 4$.

Figura 34: Gráfico tridimensional relativo à constante $k_{sim} 1$ com valores percentuais de tensão.



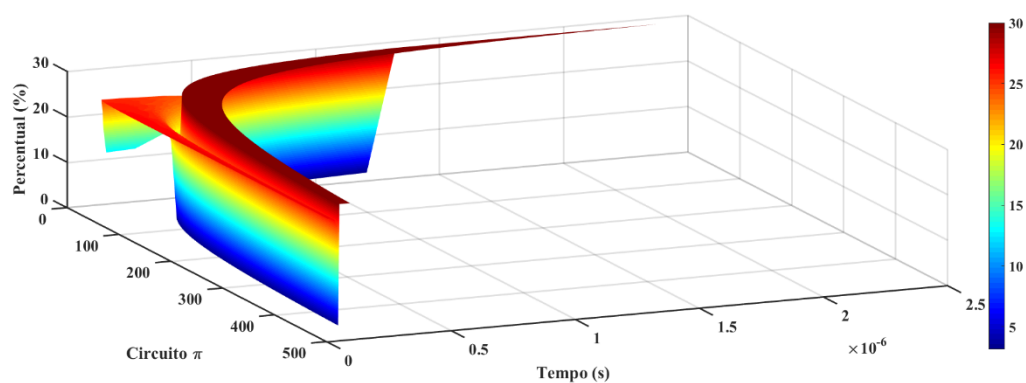
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 35: Gráfico tridimensional relativo à constante $k_{sim} 2$ com valores absolutos de tensão.



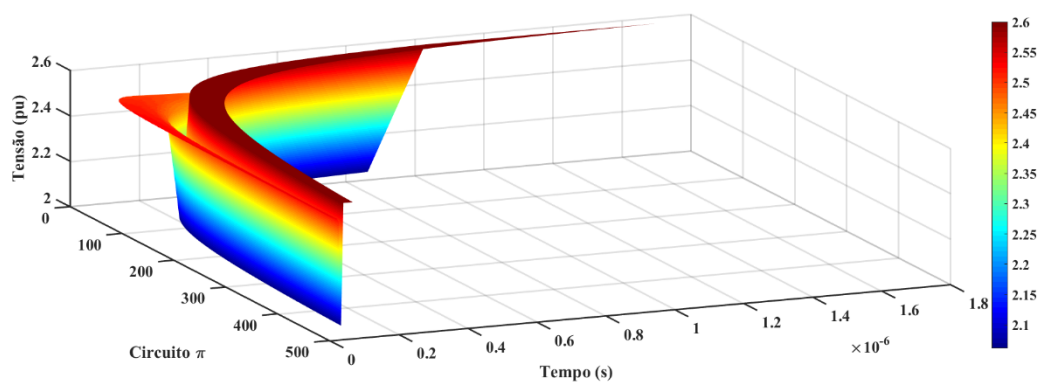
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 36: Gráfico tridimensional relativo à constante $k_{sim} 2$ com valores percentuais de tensão.



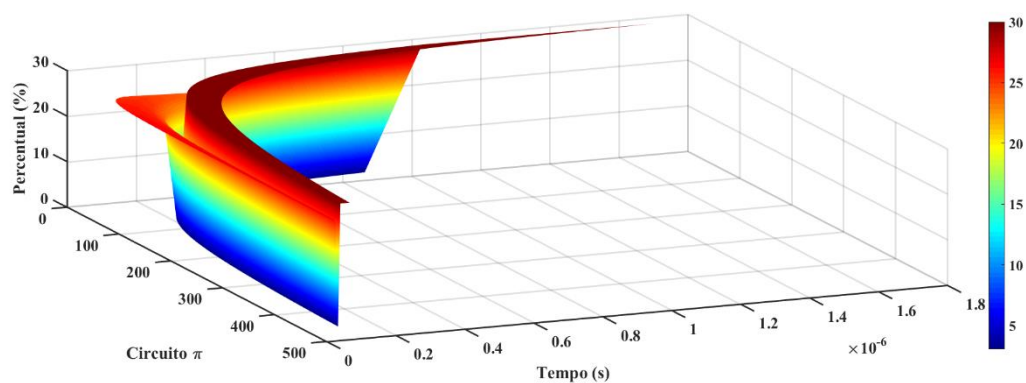
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 37: Gráfico tridimensional relativo à constante k_{sim} 3 com valores absolutos de tensão.



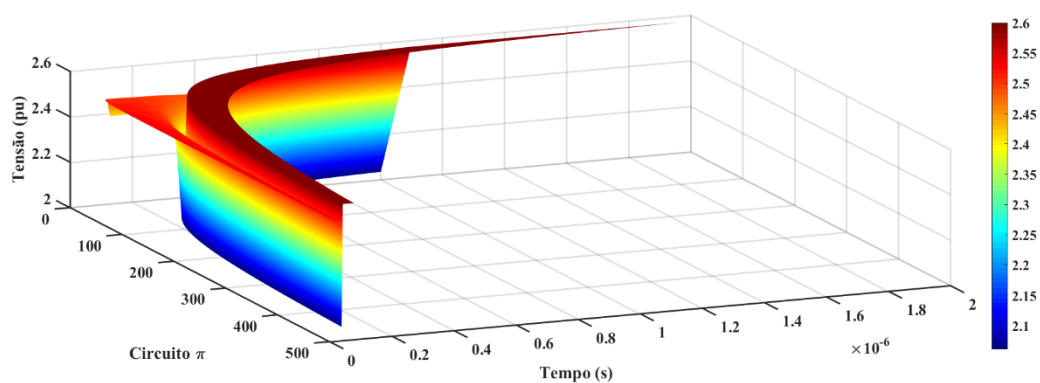
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 38: Gráfico tridimensional relativo à constante k_{sim} 3 com valores percentuais de tensão.



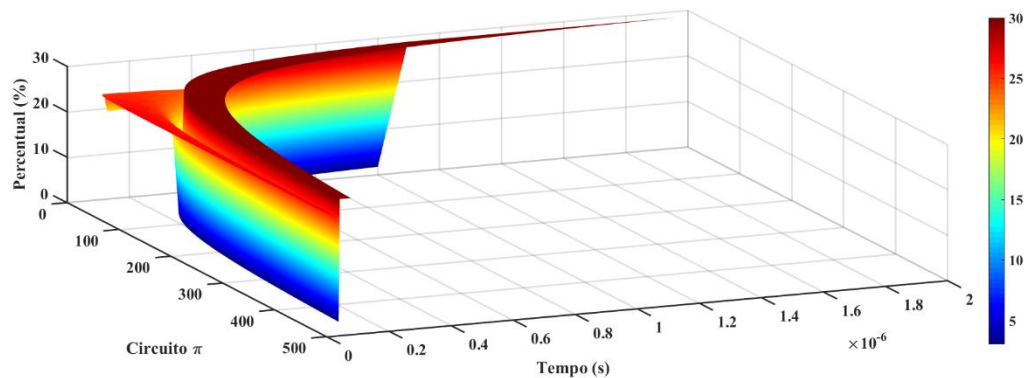
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 39: Gráfico tridimensional relativo à constante k_{sim} 4 com valores absolutos de tensão.



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 40: Gráfico tridimensional relativo à constante k_{sim} 4 com valores percentuais de tensão.



Fonte: Elaborado pelo autor

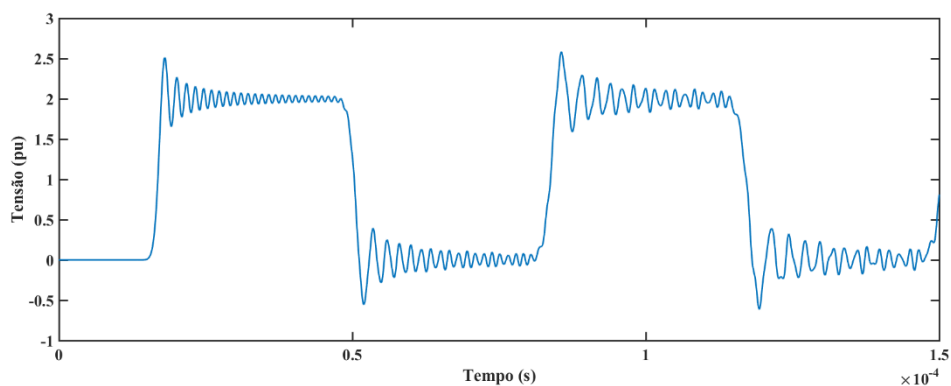
Todas essas figuras apresentam o vale que estabelece a melhor relação entre a quantidade de circuitos π e o passo de tempo para simulações de transitórios com oscilações numéricas minimizadas em cada linha de transmissão mostrada na Tabela 1.

4.3 RESULTADOS UTILIZANDO VARIÁVEIS INDEPENDENTES

Nesta seção, serão apresentados os resultados para o modelo utilizando a atualização independente das variáveis de estados para simulação de energização da linha de transmissão. Todas as simulações foram realizadas aplicando uma fonte $u(t)$ do tipo degrau de tensão e um passo de tempo de 50 ns . As Figuras 41 e 42 mostram a energização de uma linha de transmissão utilizando 50 e 100 unidades de circuitos π , respectivamente. Para essas quantidades de circuitos π , o modelo baseado na atualização independente de variáveis mostra resultados semelhantes àqueles das Figuras 11, 12, 22 e 23. Na Figura 41, o modelo amortece as oscilações numéricas no primeiro patamar de tensão de maneira gradativa e nos patamares seguintes o amortecimento é menos efetivo. Enquanto que na Figura 42, por ser aplicado o dobro de circuitos

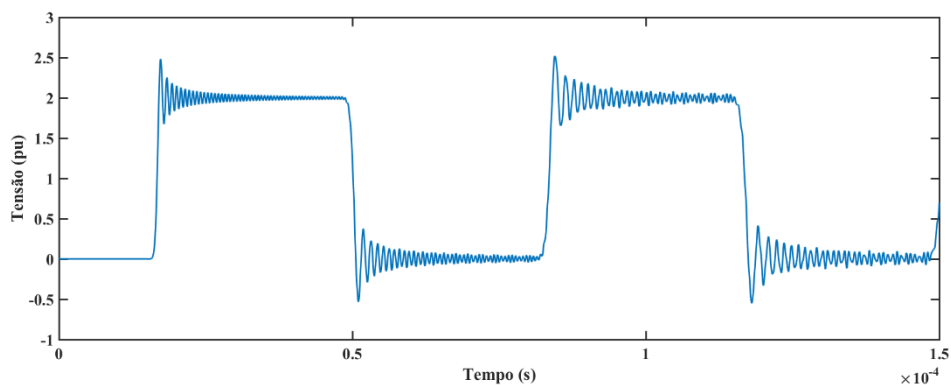
π , ocorre amortecimento gradativo das oscilações em todos os patamares de tensão.

Figura 41: Energização da linha com 50 circuitos π utilizando atualização independente das variáveis de estado.



Fonte: Elaborado pelo autor

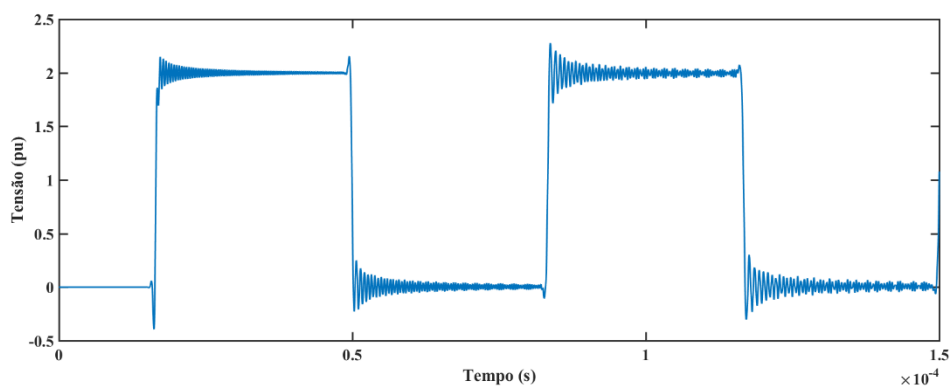
Figura 42: Energização da linha com 100 circuitos π utilizando atualização independente das variáveis de estado.



Fonte: Elaborado pelo autor

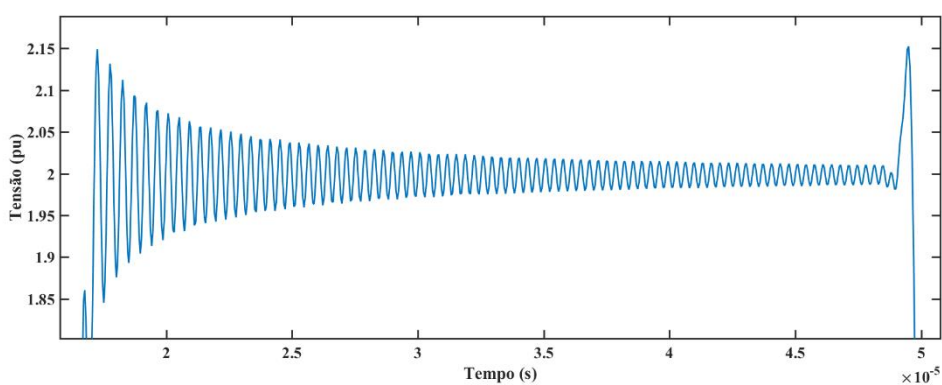
A Figura 43 mostra o melhor resultado da simulação de propagação de um degrau de tensão utilizando os dados mencionados anteriormente. Nesse caso, foram utilizadas 142 unidades de circuitos π e, como já mencionado, passo de tempo de 50 ns. As oscilações são amortecidas gradativamente e os picos de tensão são pequenos em todos os patamares de tensão mesmo utilizando uma quantidade pequena de circuitos π quando comparados com os resultados dos modelos anteriores para valores entre 100 e 200 unidades de circuitos π .

Figura 43: Energização da linha com 142 circuitos π utilizando atualização independente das variáveis de estado.



Fonte: Elaborado pelo autor

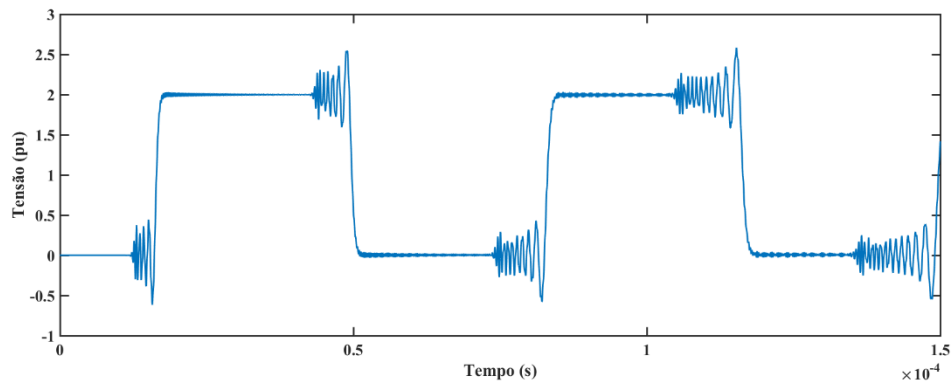
Figura 44: Detalhe do pico de tensão do primeiro patamar com 142 circuitos π utilizando atualização independente das variáveis de estado.



Fonte: Elaborado pelo autor

Na Figura 44, o primeiro patamar de tensão após a primeira reflexão da onda de tensão no terminal de carga, que está em aberto, é mostrado em detalhes. O valor do pico do primeiro patamar de tensão tem 2,15 pu, correspondendo a 15% acima do valor esperado de 2 pu após a reflexão da onda de tensão.

Figura 45: Energização da linha com 200 circuitos π utilizando atualização independente das variáveis de estado.



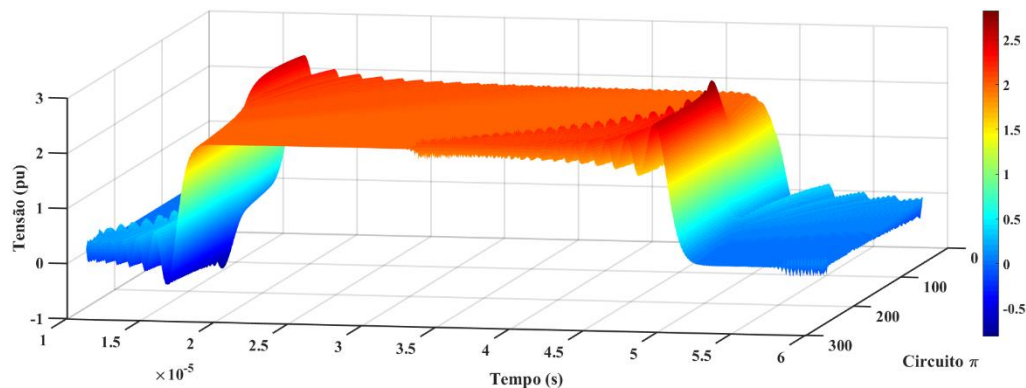
Fonte: Elaborado pelo autor

Na Figura 45, é utilizada uma quantidade de 200 circuitos π . Para essa quantidade, as oscilações que antes eram concentradas no início dos patamares de tensão, agora estão concentradas no final de cada patamar. O modelo amortece o primeiro pico de tensão com valores menores que 2,05 pu. No entanto, há uma concentração de oscilações numéricas no final de todos os patamares de tensão seguintes com tendência de atingir picos de 2,5 pu que correspondem a 25 % de sobretensão em relação ao valor de 2 pu.

O tempo computacional para obtenção dos resultados com quantidades acima de 100 circuitos π , foi de aproximadamente 0,01 segundos.

Nas Figuras 46, 47 e 48, são apresentados gráficos tridimensionais relacionados à variação do pico de tensão após a primeira reflexão de um degrau de tensão no terminal de carga em aberto da linha de transmissão analisada. Os parâmetros da linha utilizados são aqueles utilizados para a determinação de k_{sim1} (Tabela 1). Para essas simulações, a quantidade de circuitos π foi variada de 3 até 260 unidades. O tempo total de análise foi 60 ms e passo de tempo foi 50 ns.

Figura 46: Variação da tensão em função do tempo e em função da quantidade de circuitos π – simulações com aplicação de atualização independente das variáveis de estado.

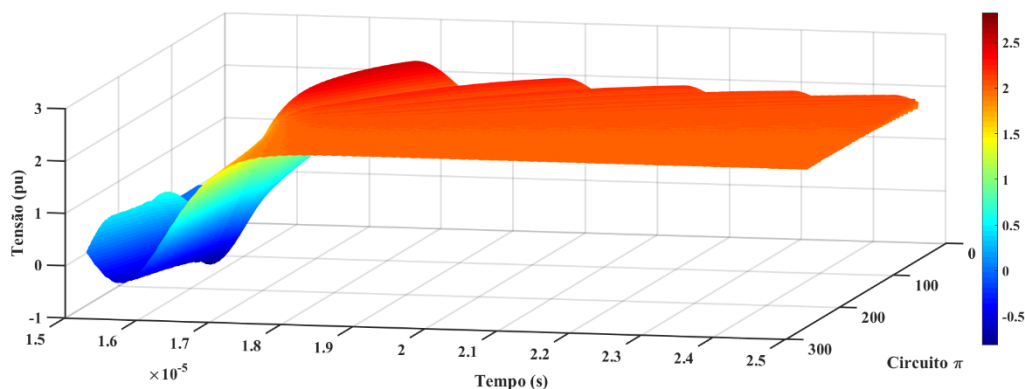


Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 46 apresenta um único patamar de tensão. Para valores abaixo de 105 circuitos π , não ocorre o amortecimento das oscilações numéricas dos picos de tensão no início desse patamar. Porém, as oscilações numéricas são amortecidas na parte final desse primeiro patamar. Para valores acima de 140 circuitos π , ocorre amortecimento das oscilações numéricas no início do patamar, sendo que a região em que não há amortecimento dessas oscilações fica concentrada no final do patamar. Confirmando tais observações, a Figura 47 mostra detalhes da parte inicial do patamar de tensão mostrado na Figura 46.

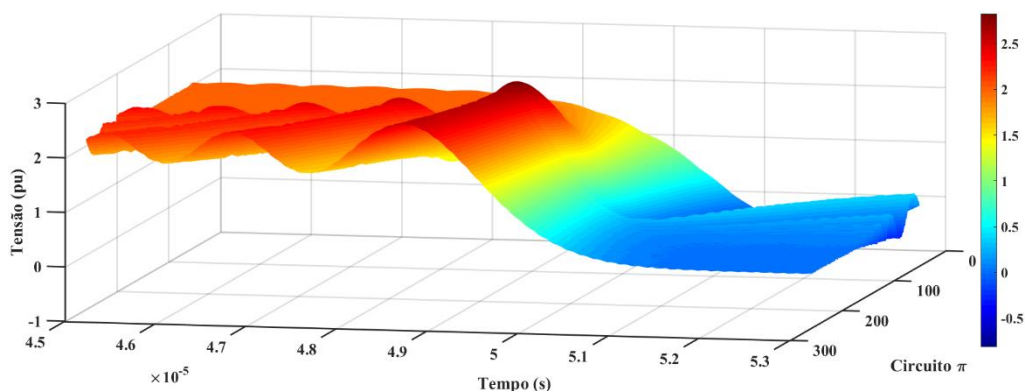
A Figura 48, mostra detalhes da parte final do patamar de tensão mostrado na Figura 46. Ainda utilizando a Figura 46, a região em torno de 150 circuitos π apresenta as menores oscilações considerando conjuntamente o início e final do patamar de tensão. Os valores de tensão não ultrapassam 2,15 pu conforme pode ser observado nas Figuras 46, 47 e 48. Ou seja, na Figura 47, pode ser observado que são obtidos picos de tensão próximos ao valor de 2 pu acima de 142 circuitos π , não ocorrendo amortecimento das oscilações numéricas para quantidades menores de circuitos π utilizados na representação da linha.

Figura 47: Detalhes da Figura 46 apresentado o início do patamar de tensão.



Fonte: Elaborado pelo autor

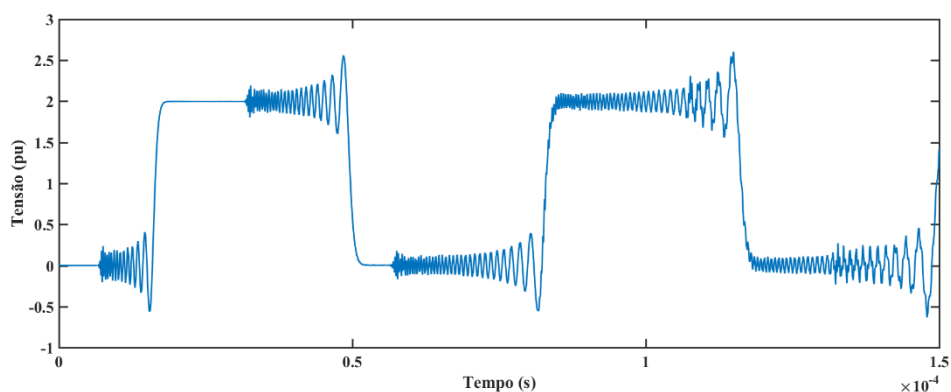
Figura 48: Detalhes da Figura 46 apresentado o final do patamar de tensão



Fonte: Elaborado pelo autor

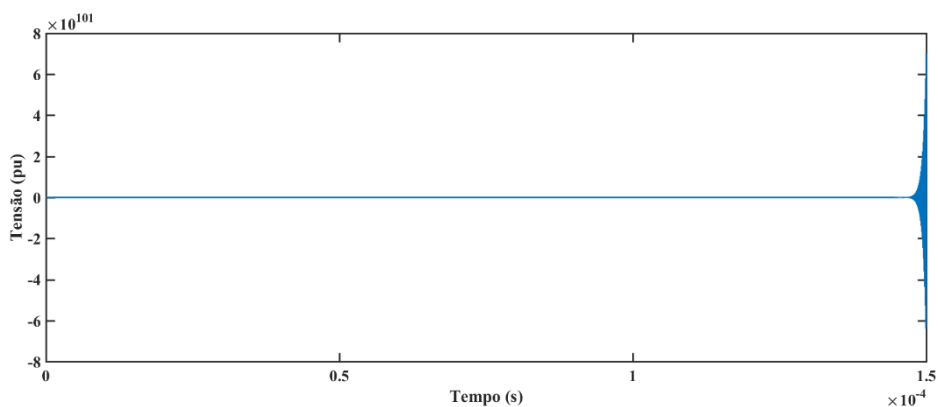
Já a Figura 48 mostra que para quantidades menores que 142 circuitos π , as oscilações numéricas são amortecidas no final do primeiro patamar, enquanto que para valores maiores de circuitos π , não ocorre tal amortecimento. Nas Figuras 49 e 50, foram utilizadas as quantidades de 260 e 261 circuitos π , respectivamente. Para quantidades acima de 260 circuitos π , a rotina atinge seu limite de estabilidade numérica.

Figura 49: Energização da linha com 260 circuitos π .



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 50: Limite da estabilidade numérica com 261 circuitos π .



Fonte: Elaborado pelo autor

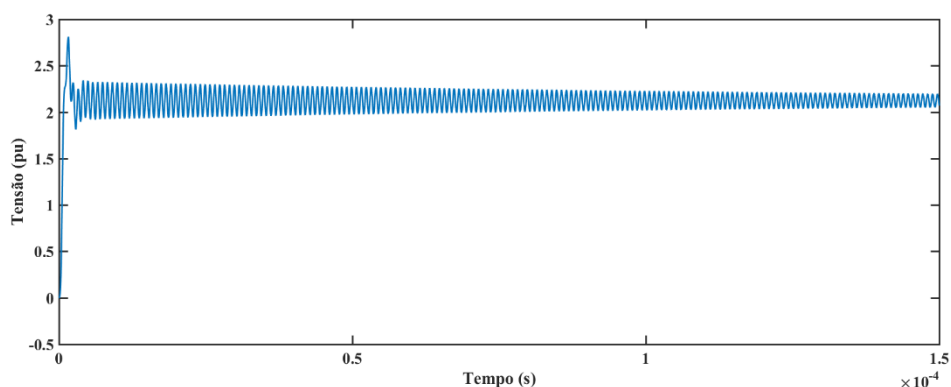
4.4 RESULTADOS UTILIZANDO O MODELO SUBSTITUINDO TENSÃO E CORRENTE

Esta seção apresentará e discutirá os resultados obtidos com os modelos baseados nas relações (71) e (72). Por meio dessas relações, foram analisadas e testadas alternativas para diminuir o tempo computacional evitando perda de precisão em relação aos resultados obtidos com rotinas mais complexas já apresentadas neste trabalho. Todos os resultados foram obtidos utilizando passo

de tempo de 50 ns e tempo total de simulação de 150 ns. Foram utilizados 100, 200, 300 e 400 circuitos π .

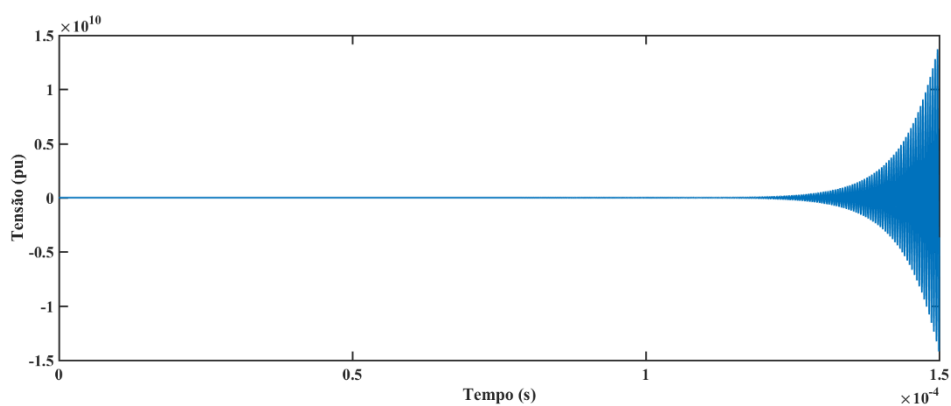
Nas Figuras 51, 52, 53 e 54, foram consideradas as substituições de (71) e (72) na modelagem numérica. No caso das Figuras 55, 56, 57 e 58, foi considerada apenas a substituição de (71) na modelagem numérica. Para as Figuras 59, 60, 61 e 62, a relação (72) foi introduzida na modelagem numérica.

Figura 51: Instabilidade numérica devido a substituição de valores de tensão e corrente – 100 circuitos π .



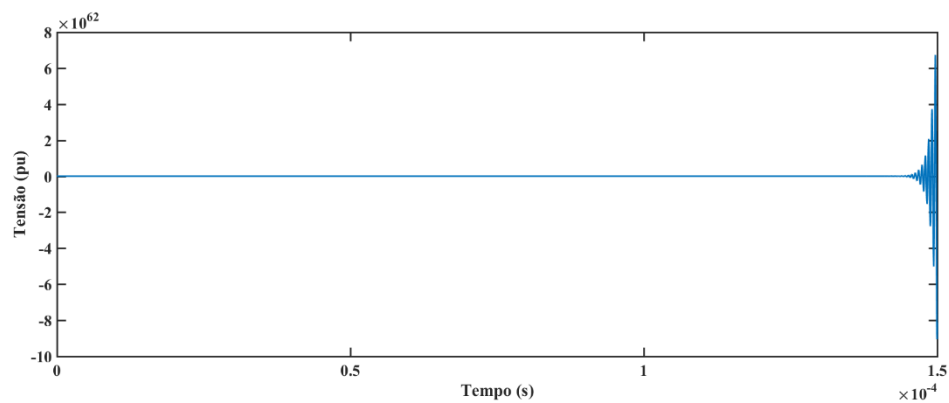
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 52: Instabilidade numérica devido a substituição de valores de tensão e corrente – 200 circuitos π .



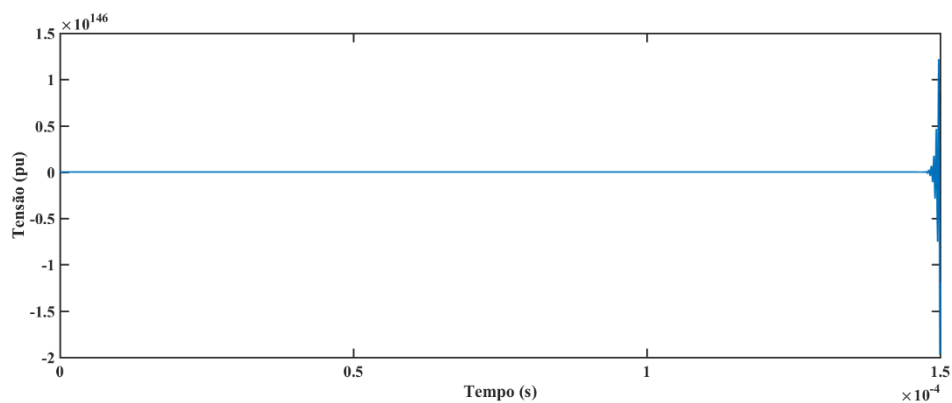
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 53: Instabilidade numérica devido a substituição de valores de tensão e corrente – 300 circuitos π .



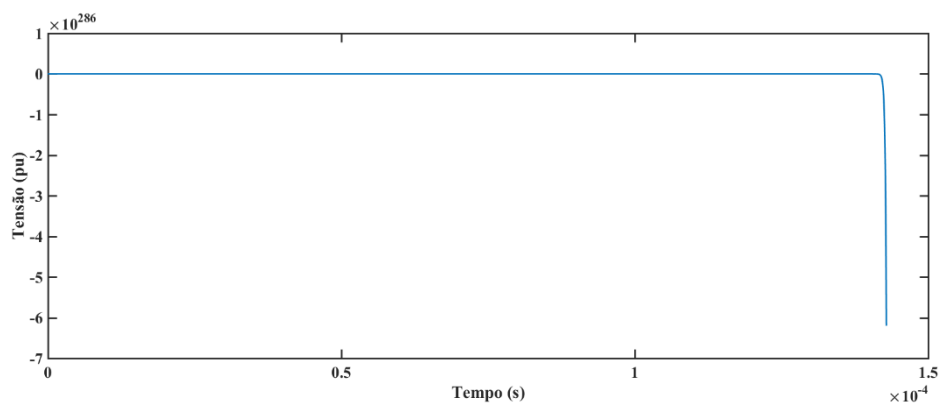
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 54: Instabilidade numérica devido a substituição de valores de tensão e corrente – 400 circuitos π .



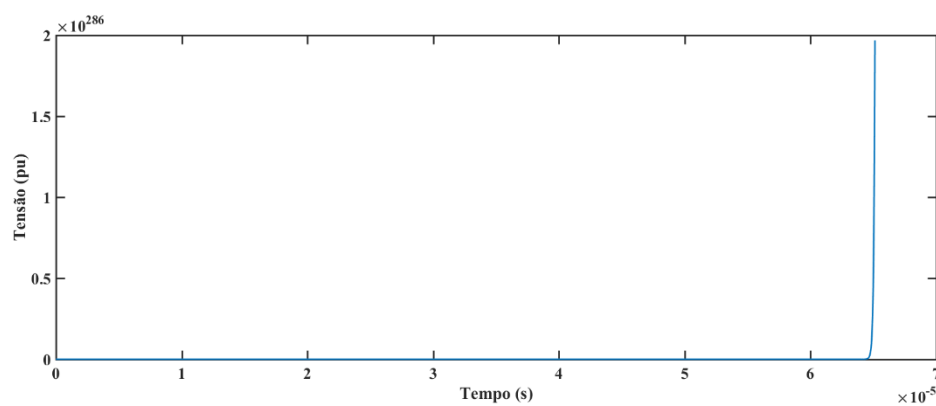
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 55: Instabilidade numérica devido a substituição de valores de tensão – 100 circuitos π .



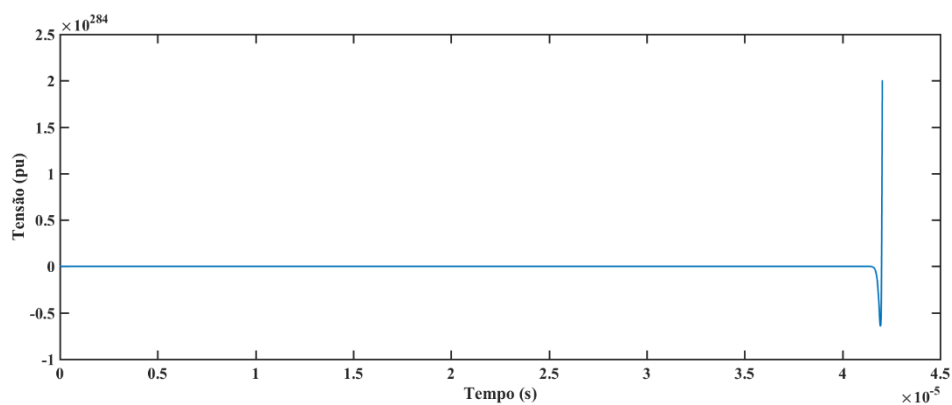
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 56: Instabilidade numérica devido a substituição de valores de tensão – 200 circuitos π



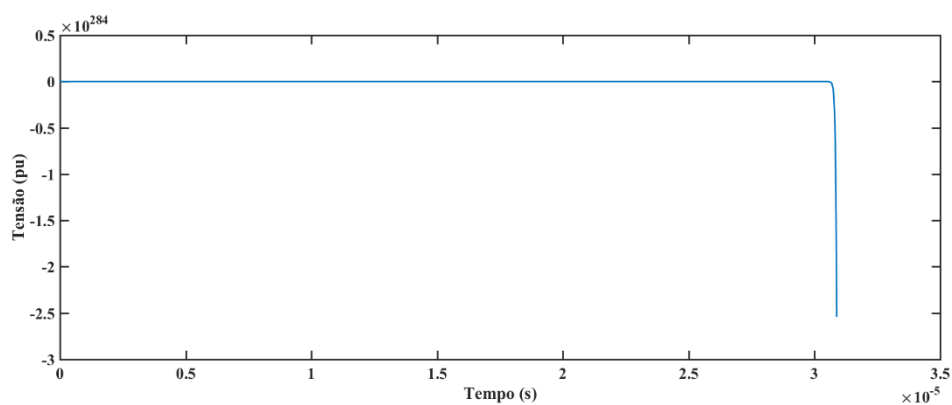
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 57: Instabilidade numérica devido a substituição de valores de tensão – 300 circuitos π .



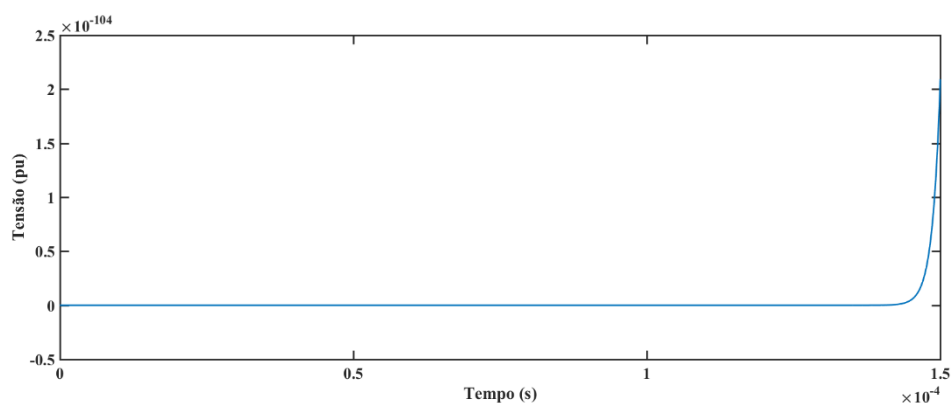
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 58: Instabilidade numérica devido a substituição de valores de tensão – 400 circuitos π .



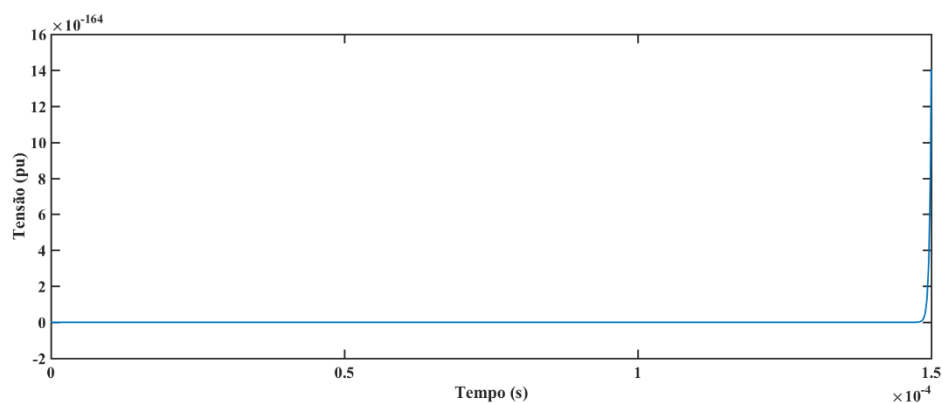
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 59: Instabilidade numérica devido a substituição de valores de corrente – 100 circuitos π .



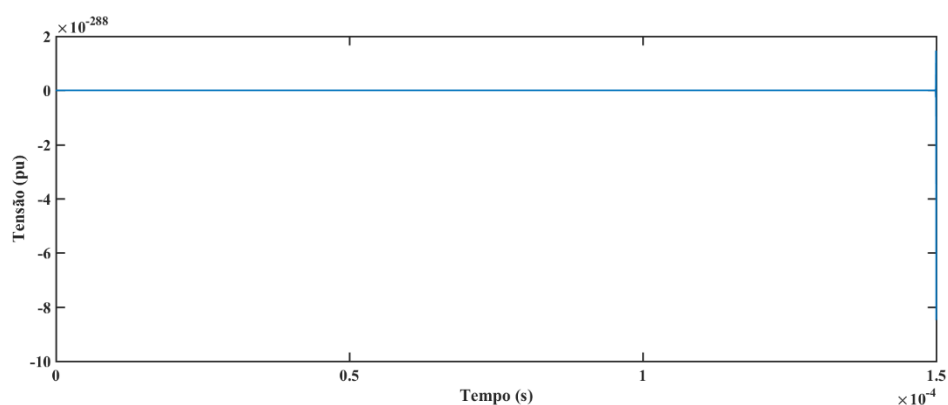
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 60: Instabilidade numérica devido a substituição de valores de corrente – 200 circuitos π .



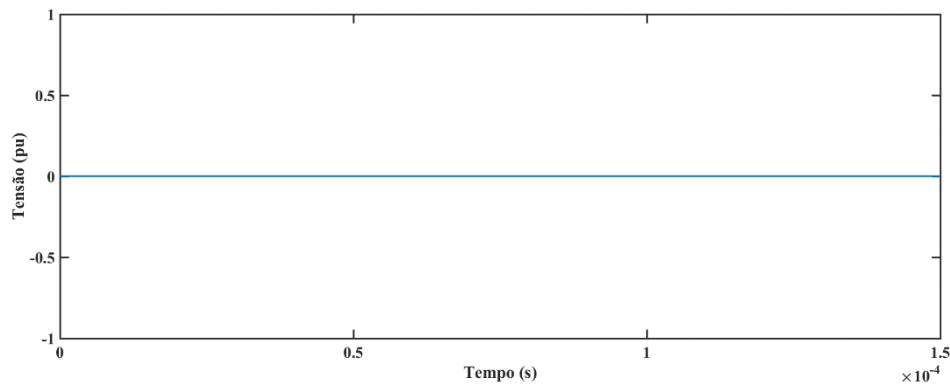
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 61: Instabilidade numérica devido a substituição de valores de corrente – 300 circuitos π .



Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 62: Instabilidade numérica devido a substituição de valores de corrente – 400 circuitos π .



Fonte: Elaborado pelo autor

Os resultados das alternativas baseadas em substituições de valores de tensão e de corrente apresentam resultados piores do que aqueles relacionados com a manipulação de expressões numéricas apresentados nos itens anteriores deste trabalho e obtidos por outros autores (CHRYSOCHOS et al., 2015; JUS et al., 2016; PRADO et al., 2017; SANTOS et al., 2017; PRADO et al., 2017). As três alternativas propostas com base na substituição de valores de tensão e de corrente apresentam instabilidades numéricas desde quantidade baixas de circuitos π (100 unidades), até quantidades maiores desses elementos 400 unidades. Nenhum dos resultados representou adequadamente a propagação de um degrau de tensão conforme a Figura 5. É comum os métodos de representação de uma linha de transmissão considerarem os parâmetros e seu comportamento como linear por se basearem no princípio da superposição. Para considerar o comportamento não linear das linhas de transmissão é necessário considerar a discretização do sistema de maneira espacial e temporal (BARROS, 1985). Assim, uma possível alternativa para as rotinas com aplicação de (71) e (72) seria utilizar métodos que considerem parâmetros não lineares da linha de transmissão, discretizando o sistema de maneira espacial e temporal

simultaneamente e não sequencial. Isso também poderia ser uma sugestão a ser aplicada em relação à manipulação de expressões numéricas apresentadas nos itens anteriores. No entanto, os objetivos deste trabalho já foram atingidos, pois foram analisadas diferentes alterações nas expressões numéricas aplicadas em simulações de transitórios eletromagnéticos em linhas de transmissão, buscando melhorar a precisão e diminuir o tempo computacional para realizar tais simulações. Mesmo que esses dois fatores não tenham sido atingidos conjuntamente, o trabalho desenvolvido mostrou novas possibilidades de manipulação numérica que podem ser exploradas de forma mais aprofundada ou associadas a outras ferramentas numéricas, bem como, ser utilizadas em conjunto com outros métodos de integração numérica.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Modelos circuitais baseados em parâmetros concentrados quando são utilizadas grandes quantidades de elementos simples podem ser associados a métodos numéricos de primeira ordem para simular a propagação de transitórios eletromagnéticos em linhas de transmissão. Neste trabalho, linhas de transmissão foram modeladas, então, utilizando cascatas de circuitos π e a solução da integração numérica foi obtida por meio da integração trapezoidal. A proposta do trabalho foi introduzir modificações na integração trapezoidal buscando minimizar problemas de oscilações numéricas que surgem quando a modelagem por meio de cascatas de circuitos π são associadas a esse método numérico em rotinas para realizar as simulações mencionadas. Embora a integração numérica e a modelagem por meio de circuitos em cascata sejam amplamente utilizadas por sua facilidade de implementação, no caso das simulações de transitórios em linhas de transmissão, os resultados são influenciados por oscilações numéricas.

O desenvolvimento deste trabalho foi considerado linhas de transmissão representadas por um circuito monofásico. Tal representação pode ser associada a uma fase de um sistema trifásico balanceado e equilibrado, a um dos componentes simétricos de um sistema trifásico qualquer ou um dos polos de um sistema de transmissão em corrente contínua. Como a finalidade foi analisar alterações no método numérico de integração, a representação monofásica foi mais adequada, pois não foi necessária a introdução de transformações de similaridade, transformações fase-modo ou outros tipos de

transformações de espaços de estados, necessárias para desacoplar as fases, que poderiam dificultar bastante a análise dos resultados das modificações numéricas introduzidas e analisadas neste trabalho.

Para comparar os resultados de cada alteração sugerida, a rotina que utiliza uma única matriz de grande ordem para representar a cascata de circuitos π serviu de referência para os resultados das outras alternativas analisadas. Assim, neste trabalho foram analisadas alternativas para evitar a manipulação de matrizes com grande quantidade de elementos nulos. Assim, foram feitas a análise detalhadas da aplicação de sistemas matriciais de ordem 2, de sistemas com atualização independente de cada variável de estado e de sistemas onde valores de tensão e de corrente do circuito π em atualização eram substituídos por valores correspondentes das unidades vizinhas desse circuito π .

Considerando a ordem de grandeza dos sistemas matriciais em relação à aplicação de uma única matriz para representar a linha de transmissão, houve redução da ordem de grandeza dos sistemas matriciais utilizados em todas as alternativas sugeridas. Ao se utilizar uma única matriz para a representação da cascata de circuitos π e, conseqüentemente, para a representação da linha de transmissão, essa matriz tem grande ordem, determinada pelo dobro da quantidade de circuitos π utilizados na modelagem. Dessa forma, essa matriz possui muitos elementos nulos. Os elementos não nulos que estão concentrados na diagonal principal e nas diagonais adjacentes à diagonal principal da matriz. Por outro lado, na alternativa baseada em matrizes de ordem 2, tais matrizes levam a uma diminuição expressiva da ordem de grandeza dos sistemas matriciais utilizados. Esses sistemas são aplicados em conjunto com um laço lógico de programação para simular a propagação das ondas de tensão e

corrente por cada circuito π da cascata. Esses sistemas matriciais não têm ou têm poucos elementos nulos em suas estruturas. Isso está relacionado ao fato de haver sistemas diferentes representando o terminal inicial, os circuitos intermediários e o terminal final da linha analisada. Em relação à alternativa baseada em atualização independente das variáveis de estado, os sistemas matriciais de ordem 2 foram substituídos por expressões independentes para a atualização de tensão e corrente de cada circuito π . Como há três tipos de unidades de circuito π na cascata para a representação de linhas de transmissão, foram usadas seis expressões diferentes associadas a um laço lógico de programação para simular a propagação de ondas de tensão e de corrente em linhas de transmissão. Ou seja, a redução de ordem dos sistemas matriciais, nesse último caso, foi máxima. Isso também pode ser concluído em relação as alternativas baseadas em substituição de valores de tensão e corrente. Utilizando as expressões obtidas para a atualização independente das variáveis de estado, alguns valores considerados secundários na atualização de uma determinada variável não foram calculados por expressões obtidas de métodos numéricos. Foram substituídos por valores correspondentes das unidades vizinhas àquela que estava sendo atualizada.

Quanto à estabilidade numérica, a rotina baseada em uma matriz de grande ordem não possui limite de estabilidade numérica, uma vez que, se aplica a atualização de toda cascata de circuitos π em cada instante de tempo. O modelo baseado em sistemas matriciais de ordem dois tem limite de estabilidade numérica. Esse limite está associado à relação entre o número de circuitos π da cascata e o passo de tempo utilizado para as simulações realizadas. Ou seja, a condição ideal de minimização das oscilações numéricas é diretamente

proporcional ao produto entre a quantidade de circuitos π e o passo de tempo utilizados. Se essa constante for determinada para uma linha de transmissão específica, ela poderá determinar os conjuntos de quantidade de circuitos π e passo de tempo ideais para simulações de vários tipos de transitórios nessa linha de transmissão. Ao utilizar as rotinas com atualização independente de variáveis de estado, considerando ou não a substituição de valores de tensão e corrente, essas rotinas apresentam, entre os casos analisados, os menores limites em relação à quantidade de circuitos π e passo de tempo para instabilidades numéricas. No caso das substituições de valores de tensão e corrente, as rotinas não apresentaram resultados que reproduzissem adequadamente a propagação de um degrau de tensão em uma linha de transmissão. Isso foi devido a problemas severos de instabilidade numéricas dessas rotinas.

De forma geral, a diferença entre as alternativas propostas e analisadas, sendo a principal contribuição deste trabalho, é a maneira como as variáveis de estado são atualizadas para simular a propagação de um fenômeno transitório em uma linha de transmissão. O método de integração numérica não é alterado e, mesmo assim, alterando a forma de atualização das variáveis de estado, há diferenças significativas nos resultados obtidos. Mesmo com picos de tensão correspondendo a 15 % de sobretensão em relação ao valor de tensão esperado, a rotina baseada em atualização independente das variáveis de estado, apresenta modelagem simples e sem inversões de matrizes. Não há matrizes esparsas e a atualização das variáveis de estado é realizada direcionada para cada variável de estado e para cada unidade de circuito π . Essa estruturação pode e deve ser testada em associação com outros métodos numéricos, menos ou mais complexos que a integração trapezoidal, analisando se é possível

simular de forma mais adequada a propagação de fenômenos transitórios em linhas de transmissão com esse tipo de rotina.

PROPOSTA PARA TRABALHOS FUTUROS

As alterações no método de integração numérica (integração trapezoidal) podem ser revisadas e aprimoradas introduzindo também modificações nos circuitos utilizados para representar a linha de transmissão. Uma proposta que já está sendo analisada é incorporar um elemento resistivo em paralelo com o ramo longitudinal dos circuitos π . Essa técnica pode ser denominada de introdução de resistência de amortecimento. O valor de resistência é determinado adequadamente para influenciar significativamente na minimização de oscilações numéricas. No caso, ainda não foram analisadas modificações na integração trapezoidal em conjunto com essa técnica de introdução de resistência de amortecimento. Também já tem sido analisada a utilização de métodos implícitos de integração numérica. Há um trabalho em desenvolvimento que aplica o método de Runge-Kuta para obtenção de uma rotina para simulação da propagação de transitórios em linhas de transmissão.

Portanto, podem ser feitas as seguintes sugestões para sequência deste trabalho:

- Aplicar as alterações propostas neste trabalho em outros métodos numéricos de integração adequando as rotinas para simulação de transitórios em linhas de transmissão. Analisar a precisão dos resultados obtidos e a estabilidade numérica da rotina;

- Aplicar as rotinas apresentadas em casos de circuito duplo. Nesse caso, é necessário a transformação fase-modo em constante em função da frequência. Adequar a rotina obtida para simulação do sistema em regime permanente com conteúdo harmônico significativo. Adequar a rotina obtida também para simulações de transitórios no sistema de transmissão em corrente contínua;

- Incluir elementos não lineares nas rotinas numéricas obtidas e analisar a precisão dos resultados obtidos e a estabilidade numérica da rotina;

- Adaptar as rotinas obtidas para simulações de propagação de transitórios em sistemas de proteção contra descargas elétricas (cabos para - raios);

- Considerar modelagens que incluam fontes de energia renováveis e distribuídas;

- Utilizar passo de tempo variável, adequando-o para simulação de fenômenos transitórios com frequências características diferentes;

- Considerar diferentes métodos numéricos para simulação de fenômenos transitórios em redes elétricas.

PUBLICAÇÕES GERADAS DURANTE O MESTRADO

- Periódicos

*Leonardo da Silva Lessa, Caio Cesar S. Luca, Thainá G. Pereira, Caio Vinícius C. Grilo, Aghatta .C Moreira, Carolina Magda B Ronchini, Elmer M. Gennaro, Paula G. Der Agopian, Doctor; Afonso José do Prado - **Sparse matrices for***

transient simulations with computing memory reduction – Electric Power Systems Research

- Congressos

Marcelo Luis Francisco Abbade, Leonardo da Silva Lessa, Melissa de Oliveira Santos, Afonso José do Prado, Ivan Aldaya - **A New DSP-Based Physical Layer Encryption Technique Applied to Passive Optical Networks** - 20th International Conference on Transparent Optical Networks 2018

Thainá Guimarães Pereira, Afonso José do Prado, Leonardo Da Silva Lessa, Paula Ghedini Der Agopian, Rafael Abrantes Penchel, André Alves Ferreira and Jose Pissolato Filho - **Transmission Line Model Based on PCB Units and Modified π Circuits** - Progress In Electromagnetics Research Symposium 2019

Aghatta Cioquetta Moreira, Thaina Guimaraes Pereira, Caio Cesar Souza de Luca, Carolina Magda Bassoto Ronchini, Caio Vinicius Colozzo Grilo, Leonardo Da Silva Lessa, Elmer Mateus Gennaro, Paula Ghedini Der Agopian and Afonso Jose Prado - **Physical model of transmission lines: adaptation for PLC systems** - CLAGTEE 2019.

Caio Cesar Souza de Luca, Caio Vinicius Colozzo Grilo, Aghatta Cioquetta Moreira, Carolina Magda Bassoto Ronchini, Thaina Guimaraes Pereira, Leonardo Da Silva Lessa, Elmer Mateus Gennaro, Paula Ghedini Der Agopian and Afonso Jose Prado - **Techniques of sparse matrices applied for simulations of electromagnetic phenomena** - CLAGTEE 2019.

Carolina Magda Bassoto Ronchini, Juliana Semiramis Menzinger, Caio Cesar Souza de Luca, Caio Vinicius Colozzo Grilo, Aghatta Cioquetta Moreira, Thaina

Guimaraes Pereira, Leonardo Da Silva Lessa, André Alves Ferreira and Afonso Jose Prado - **Electromagnetic phenomena simulation with application of damping resistances** – CLAGTEE 2019.

Caio Vinicius Colozzo Grilo, Melissa Oliveira Santos, Juliana Semiramis Menzinger, Thaina Guimaraes Pereira, Leonardo Silva Lessa, Marcelo Luis Francisco Abbade, Paula Ghedini Der Agopian and Afonso Jose Prado - **Simulations of propagation of electromagnetic phenomena using Python platform** – CLAGTEE 2019.

Caio Vinícius Colozzo Grilo, Aghatta Cioquetta Moreira, Caio Cesar Souza de Luca, Carolina Magda Bassoto Ronchini, Juliana Semiramis Menzinger, Thaina Guimaraes Pereira, Leonardo Silva Lessa and Afonso Jose Prado - **Simulation of transient phenomena in Python platform using 2-order matrices** – CLAGTEE 2019.

Thainá Guimarães Pereira, Leonardo Da Silva Lessa, Paula Ghedini Der Agopian, Rafael Abrantes Penchel, André Alves Ferreira, Afonso Jose Prado and Jose Pissolato Filho - **PCB Units with Modified π Circuits applied to Transmission Line Model** – CLAGTEE 2019.

Juliana Semiramis Menzinger, Aghatta Cioquetta Moreira, Carolina Magda Bassoto Ronchini, Caio Cesar Souza de Luca, Caio Vinicius Colozzo Grilo, Leonardo Da Silva Lessa, André Alves Ferreira and Afonso Jose Prado - **Physical model of transmission lines with components of high-quality factor** – CLAGTEE 2019.

REFERÊNCIAS

Barros, M. T. N. P. C. **Efeito coroa em linhas de transporte de energia**. 1985. 268 f. Dissertação de Doutorado em Engenharia Electrotécnica – Instituto Superior Técnico de Lisboa, Lisboa, 1985

W. E. Boyce e R. C. DiPrima, **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**, Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1994.

CAMPOS, f. F. F. **Algoritmos Numéricos**. 2. ed. [S.I.]: LTC, 2007.

CHRYSOCHOS, I. et al. Damping of oscillations related to lumped-parameter transmission line modeling. **Conf. on Power Systems Transients - IPST**, n. 7, 2015.

DOMMEL, H. W. **Electromagnetic Transients Program**. Oregon: Rule Book, 1984

DOMMEL, H. W. Digital computer solution of electromagnetic transients in single and multiphase networks. **IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems**, vol. PAS-88, pp. 388-399, April, 1969

H. V. NGUYEN, H. W. DOMMEL, J. R. MARTÍ, “Modelling of single-phase nonuniform transmission lines in electromagnetic transient simulations”, **IEEE Transactions on Power Delivery**, vol.12, no. 2, pp. 916-921, April, 1997.

JUS, L. H.; MOREIRA, A. C.; OLIVEIRA, M. O.; PEREIRA, T. G.; PRADO, A. J.; Gennaro, E. M.; PISSOLATO FILHO, J. Transmission lines model with different basic structures applied to transient electromagnetic simulations. **The 6th IASTED International Conference on Modelling, Simulation and Identification - MSI**, August 2016.

MACÍAS, J. A. R.; EXPÓSITO, A. G.; SOLER, A. B. A comparison of techniques for state-space transient analysis of transmission lines. **IEEE Trans. on Power Delivery**, v. 20, n. 2, p. 894 –903, 2005.

MAMIS, M. S. (2003). Computing of electromagnetic Transients on Transmission Lines With Nonlinear Components. **IEE Proceedings Generation, Transmission and Distribution**, Vol. 150,N0. 2; pp. 200-203

MAMIS, M. S. and A. Nacaroglu (2003). Transient Voltage and Current Distributions on Transmission Lines. **IEE Proceedings Generation, Transmission and Distribution**, Vol. 149,N0. 6; pp. 705-712.

MARTINEZ-VELASCO, J. A.; GUSTAVSEN, B., Overview of overhead line

models and their representation in digital simulations. Proc. **4th IPST, Rio de Janeiro**, Brazil, June 24–28, 2001.

MORENO, P.; RAMIREZ, A. Implementation of the numerical laplace transform: a review. **IEEE Trans. on Power Delivery**, v. 23, n. 4, 2008.

PRADO, A. J.; Lessa, L. S.; Cuerda, R. M.; Bovolato, L. F. Modified routine for decreasing numeric oscillations at associations of lumped elements. **Electric Power Systems Research**, v. 112, n. 1, p. 56 –64, 2014.

PRADO, A. J.; CONCEIÇÃO, K. O.; BESPALHULK, K. J.; SILVA, B. F.; GENNARO, E. M.; CARGNIN-STIELER, M.; PISSOLATO FILHO, J. Minimization of gibb's oscillations in transients' simulations using damping resistance. **The Progress in Electromagnetic Research Symposium - PIERS**, August 2016.

PRADO, A. J.; BESPALHUK, K. J.; Silva, B. F.; CONCEIÇÃO, K. O.; CARGNIN-STIELER, M.; GENNARO, E. M.; PISSOLATO FILHO, J. Influences of damping resistances on transient simulations in transmission lines. **Progress in Electromagnetics Research Symposium – PIERS**, v. 75, n. 1, p. 27 –39, 2017.

PRADO, A. J.; PRADO, A. J.; KUROKAWA, S.; BOVOLATO, L. F.; PISSOLATO FILHO, J.; COSTA, E. C. M. Phase-mode transformation matrix application for transmission line and electromagnetic transient analyses in **Electric Power Systems in Transition**, Hardcover Edition, ISBN 978-1-61668-985-8, Olivia E. Robinson, Nova Science Publisher, Inc., Hauppauge, NY, 2010, pp. 1-74.

SANTOS, M. O.; JUS, L. H.; PRADO, A. J.; GENNARO, ELMER MATEUS; PISSOLATO FILHO, J. Influence of damping resistance in electromagnetic transients using alternate structures of π circuits. **Progress in Electromagnetics Research Symposium – PIERS**, v. 1, n. 7, p. 22 –25, 2017.