

Daniel Barbosa Barconi

**Investigação Numérica de Aerofólios
Bio-Inspirados nas Nadadeiras Peitorais da Baleia
Jubarte via Dinâmica dos Fluidos Computacional**

Ilha Solteira - SP

Agosto de 2021



Daniel Barbosa Barconi

**Investigação Numérica de Aerofólios Bio-Inspirados nas
Nadadeiras Peitorais da Baleia Jubarte via Dinâmica dos
Fluidos Computacional**

Trabalho de Graduação apresentado à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista como um dos requisitos para a obtenção do Grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Universidade Estadual Paulista - UNESP

Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - FEIS

Departamento de Engenharia Mecânica - DEM

Orientador: Prof. Dr. Aluisio Viais Pantaleão

Ilha Solteira - SP

Agosto de 2021



FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

B244i Barconi, Daniel Barbosa.
Investigação numérica de aerofólios bio-inspirados nas nadadeiras peitorais da Baleia Jubarte via dinâmica dos fluidos computacional / Daniel Barbosa Barconi. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2021
83 f. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Mecânica) -
Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2021

Orientador: Aluisio Viais Pantaleão
Inclui bibliografia

1. Dinâmica de fluidos computacional. 2. OpenFOAM. 3. Sustentação aerodinâmica. 4. Aerofólios bio-inspirados. 5. Baleia Jubarte.

Raiane da Silva Santos
Raiane da Silva Santos

Supervisora Técnica de Seção
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação
CRB/8 - 9999

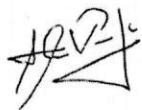
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA
ATA DA DEFESA - TRABALHO DE GRADUAÇÃO

**TITULO: "INVESTIGAÇÃO NUMÉRICA DE AEROFÓLIOS
BIO-INSPIRADOS NAS NADADEIRAS PEITORAIS DA BALEIA
JUBARTE VIA DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL"**

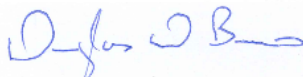
ALUNO: Daniel Barbosa Barconi **RA:** 162053517
ORIENTADOR: Prof. Dr. Aluisio Viais Pantaleão

Aprovado (X) - Reprovado () pela Comissão Examinadora

Comissão Examinadora:



Prof. Dr. Aluisio Viais Pantaleão
Presidente (Orientador)



Prof. Dr. Douglas Domingues Bueno


Eng. Bianca Taís Visoná Carnielo


Daniel Barbosa Barconi

Ilha Solteira, 18 de agosto de 2021.

*Este trabalho é dedicado aos meus pais e a minha irmã que
sempre me apoiaram e incentivaram,
e sem os quais eu nada seria.*



Agradecimentos

Aos meus pais, Samuel e Gerciane, por proverem um lar repleto de amor e por todos os sacrifícios feitos para me fornecer a melhor educação possível. Cada passo à diante que dou é, primeiro, mérito dos meus pais.

À minha irmã mais velha, Gerciele, por sempre me ensinar através do exemplo valores como paciência e dedicação.

Aos meus avós paternos e maternos, aos meus tios e primos por contribuírem imensamente com a minha criação, depositando sobre mim todo o carinho, cuidado e afeto.

À minha namorada, Uly, por tornar leve até os dias mais difíceis.

Ao meu amigo, Pedro, pela amizade sincera e companheirismo ímpar.

Ao meu amigo, Estevão, por toda ajuda e contribuição acadêmica.

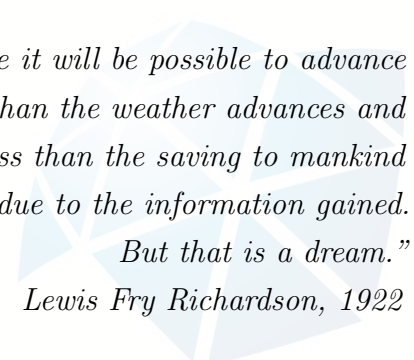
Ao meu orientador, Prof. Aluisio Viais Pantaleão, pelos até então 4 anos de orientação e amizade.

Ao Grupo PET-EM, cujas atividades de extensão tiveram profunda influência na minha formação.

À República Litraço, por ter sido meu lar nos últimos 5 anos e me proporcionar incontáveis momentos de alegria e amizades que levarei para a vida.

Por fim, a todos que de alguma forma, direta ou indiretamente, fizeram parte da minha formação, deixo o meu muito obrigado.





*“Perhaps some day in the dim future it will be possible to advance
the computations faster than the weather advances and
at a cost less than the saving to mankind
due to the information gained.
But that is a dream.”
Lewis Fry Richardson, 1922*

Resumo

Os conceitos relacionados ao escoamento de fluidos se fazem presentes nas mais diversas áreas do conhecimento, como na produção de energia e nas engenharias aeronáutica e espacial. Todavia, não existem soluções analíticas para os enunciados matemáticos que descrevem a física desses problemas. É fundamental, portanto, promover o estudo de técnicas computacionais de modo a colaborar com o desenvolvimento de novas tecnologias nesse ramo da ciência. Nesse cenário, o presente trabalho buscou avaliar o desempenho de aerofólios mimeticamente modificados a partir da implementação de métodos de dinâmica dos fluidos computacional, através do *software* livre *OpenFOAM*[®]. Assim, se avaliaram cinco aerofólios do ponto de vista da sustentação aerodinâmica, sendo quatro deles bio-inspirados nas nadadeiras peitorais da Baleia Jubarte. Foram simuladas três condições de escoamento também estudadas em trabalhos experimentais anteriores, isto é, 8° de ângulo de ataque para os números de Reynolds iguais a 1400 e 1900, e 2° de ângulo de ataque para 1900 Reynolds. A malha empregada foi submetida à análise de sensibilidade e, também, atendeu aos critérios de y^+ do modelo de turbulência $k-\omega$ SST. Nas condições simuladas, não foram obtidas evidências numéricas favoráveis à utilização dos aerofólios 4M, 8S e 8M. Entretanto, para 1900 Reynolds e 2° de inclinação a geometria 4S apresentou coeficiente de sustentação 15,6% maior que o perfil *baseline*. A metodologia computacional foi validada por comparações numérico-experimentais, atribuindo bom grau de confiabilidade aos resultados obtidos.

Palavras-chaves: Dinâmica de Fluidos Computacional. *OpenFOAM*[®]. Sustentação Aerodinâmica. Aerofólios Bio-Inspirados. Baleia Jubarte.



Abstract

The concepts related to fluid flow are present in the most diverse areas of knowledge, such as energy production and aeronautical and space engineering. However, there are no analytical solutions for the mathematical statements that describe the physics of these problems. Therefore, it is important to study computational techniques in order to collaborate with the development of new technologies in this field of science. In this scenario, the present work aimed to evaluate the performance of mimetically modified airfoils from the implementation of computational fluid dynamics methods, through the open source software *OpenFOAM*[®]. Thus, four airfoils bio-inspired on the Humpback Whale fins were evaluated from the aerodynamic lift point of view. Three flow conditions were simulated: 8° of attack angle for Reynolds number equal to 1400 and 1900, and 2° of attack angle for 1900 Reynolds. The generated mesh met the sensitivity analysis and the $k-\omega$ SST turbulence model criteria. No numerical evidence were obtained in favor of the 4M, 8S and 8M airfoils. However, for 1900 Reynolds and 2° of inclination, the 4S geometry presented a lift coefficient 15.6% higher than the baseline profile. The computational methodology was validated by numerical and experimental comparisons, giving good and reliable results.

Keywords: Computational Fluid Dynamics. *OpenFOAM*[®]. Aerodynamic Lift. Bio-inspired Airfoils. Humpback Whale.



Lista de Figuras

Figura 1 – Baleia Jubarte e morfologia de sua nadadeira peitaoral.	14
Figura 2 – Aerofólios <i>Baseline</i> , <i>4S</i> e <i>4M</i>	15
Figura 3 – Aerofólios <i>8S</i> e <i>8M</i>	16
Figura 4 – Elemento fluido.	17
Figura 5 – Vazão mássica por unidade de área em cada face do elemento fluido.	20
Figura 6 – Estado de tensão do elemento fluido.	21
Figura 7 – Componentes das tensões que agem na direção de x	22
Figura 8 – Volume de controle unidimensional.	27
Figura 9 – Modelo esquemático da formulação explícita.	33
Figura 10 – Modelo esquemático da formulação totalmente implícita.	34
Figura 11 – Modelo esquemático da formulação implícita.	34
Figura 12 – Coeficiente de arrasto sobre uma estrutura carenada como função da razão de espessura.	45
Figura 13 – Geometria 3D dos aerofólios <i>baseline</i> , <i>4S</i> , <i>4M</i> , <i>8S</i> e <i>8M</i>	47
Figura 14 – Truncamento do bordo de fuga dos aerofólios.	48
Figura 15 – Modelo CAD do túnel hidrodinâmico.	48
Figura 16 – Malhas geradas para a análise de sensibilidade.	49
Figura 17 – Malha gerada para implementação do modelo de turbulência.	50
Figura 18 – Distribuição de y^+ sobre a malha de $0,92 \times 10^6$ elementos.	51
Figura 19 – Visualização experimental para $1400 Re$ e ângulo de ataque de 8°	52
Figura 20 – Visualização experimental para $1900 Re$ e ângulo de ataque de 2°	53
Figura 21 – Visualização experimental para $1900 Re$ e ângulo de ataque de 8°	53
Figura 22 – Visualização numérica para $1400 Re$ e ângulo de ataque de 8°	54
Figura 23 – Visualização numérica para $1900 Re$ e ângulo de ataque de 2°	54
Figura 24 – Visualização numérica para $1900 Re$ e ângulo de ataque de 8°	55
Figura 25 – Coeficientes de sustentação a $1400 Re$ e ângulo de ataque de 8°	56
Figura 26 – Coeficientes de sustentação a $1900 Re$ e ângulo de ataque de 2°	57
Figura 27 – Coeficientes de sustentação a $1900 Re$ e ângulo de ataque de 8°	57



Lista de Tabelas

Tabela 1	– Estimativas para I e μ_t/μ para cada caso de turbulência.	42
Tabela 2	– Parâmetros geométricos dos aerofólios modificados em função de sua corda aerodinâmica (c).	47
Tabela 3	– Parâmetros obtidos durante análise de sensibilidade de malha.	50
Tabela 4	– Resultados experimentais para a posição do ponto de separação do escoamento com relação à corda aerodinâmica dos perfis.	54
Tabela 5	– Resultados numéricos para a posição do ponto de separação do escoamento com relação à corda aerodinâmica dos perfis.	55



Sumário

1	Introdução	13
1.1	Motivações	13
1.2	Revisão Bibliográfica	13
1.3	Objetivos	16
2	Equações governantes do escoamento de fluidos	17
2.1	Considerações iniciais	17
2.1.1	O elemento fluido	17
2.1.2	Expansão em série de Taylor	18
2.1.3	Fluxo de massa	18
2.2	Conservação da massa em três dimensões	19
2.3	Forças atuantes sobre um fluido em movimento	21
2.4	Quantidade de movimento em três dimensões	23
2.5	As equações de Navier-Stokes para fluidos Newtonianos	24
2.5.1	Equações gerais de transporte	26
3	O método dos volumes finitos	27
3.1	A condução unidimensional transiente	27
3.2	Generalizações	29
3.2.1	Funções de interpolação	29
3.2.1.1	<i>Central differencing scheme (CDS)</i>	29
3.2.1.2	<i>Upwind differencing scheme (UDS)</i>	30
3.2.1.3	<i>Weighted Upstream Differencing Scheme (WUDS)</i>	30
3.2.2	Convecção e difusão tridimensional transiente	31
3.3	Formulações explícita e implícita	32
3.3.1	Formulação explícita	33
3.3.2	Formulação totalmente implícita	33
3.3.3	Formulação implícita	34
3.4	Solução do sistema linear de equações	34
3.4.1	Método iterativo de Jacobi	35
3.4.2	Método iterativo de Gauss-Seidel	35
4	Definição do campo de velocidades	36
4.1	O acoplamento pressão-velocidade	36
4.1.1	O método SIMPLE - <i>Semi Implicit Linked Equations</i>	37
4.1.2	O método PISO - <i>Pressure Implicit with Splitting Operators</i>	39
5	Modelo de turbulência	40
5.1	Modelo $k-\omega$ SST	40

5.1.1	Tratamento próximo à parede	41
5.1.2	Condições de contorno turbulentas	42
6	Escoamento externo viscoso	43
6.1	Arrasto	43
6.1.1	Arrasto de atrito	44
6.1.2	Arrasto de pressão	44
6.2	Sustentação	45
6.3	Carenagem	45
6.3.1	Vorticidade	46
7	Metodologia	47
7.1	Modelagem 3D dos aerofólios	47
7.2	Geração da malha computacional	49
7.2.1	Análise de sensibilidade de malha	49
7.2.2	Geração de malha para implementação do modelo de turbulência	50
8	Resultados e discussões	52
8.1	Comparações numérico-experimentais	52
8.2	Coeficiente de Sustentação	56
9	Conclusões	59
	Referências	60
	APÊNDICE A Roteiro Computacional	63



1 Introdução

Esse capítulo apresenta os objetivos e motivações deste trabalho, bem como uma breve revisão bibliográfica sobre dispositivos passivos bio-inspirados em nadadeiras de baleia Jubarte abordando diversos trabalhos da literatura.

1.1 Motivações

O comportamento dos fluidos em movimento e sua influência sobre os corpos através dos quais escoam integram uma considerável parcela dos problemas de engenharia existentes. Nesse quesito e na maioria das aplicações, a inexistência de soluções analíticas para as equações governantes do escoamento de fluidos torna indispensável as abordagens numérica e experimental. Entretanto, a segunda geralmente pressupõe contratempos logísticos e dispendiosos. Portanto, é fundamental o incentivo à metodologia numérica e computacional no âmbito da dinâmica dos fluidos, bem como à formação de recursos humanos especializados, afim de viabilizar o desenvolvimento tecnológico e garantir a continuidade do progresso científico nesse ramo da ciência.

Uma preocupação frequente durante a produção de tecnologia consiste na obtenção do máximo desempenho aerodinâmico de corpos submersos no escoamento de fluidos. Assim, dispositivos passivos bio-inspirados nas características dos seres vivos se apresentam como uma alternativa a essa questão, uma vez que as espécies sobreviventes possuem os atributos mais adaptados ao meio em que vivem ([DARWIN, 1859](#)). Apesar de nunca terem sido ignoradas, as soluções propostas pela natureza, em especial pela biologia, tem sido cada vez mais adotadas e aprimoradas pelo ser humano, se apresentando como um recurso promissor para a superação dos mais diversos obstáculos de engenharia ([LAKHTAKIA; MARTÍN-PALMA, 2013](#)).

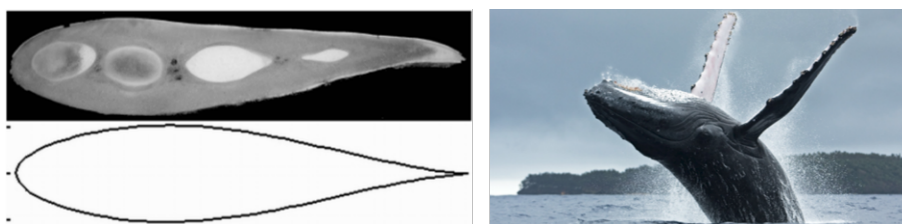
1.2 Revisão Bibliográfica

A seleção natural é responsável pela morfologia de todas as espécies encontradas na natureza. Nesse sentido, uma mutação pode representar uma vantagem evolutiva para um ser vivo que, ao sobreviver, transfere sua nova característica para as gerações futuras ([DARWIN, 1859](#)). Partindo-se dessa premissa, projetos inspirados na morfologia de um ser vivo podem se apresentar como solução para diversos problemas de engenharia, uma vez que cada característica de uma espécie é resultado de bilhões de anos de evolução natural. Nesse contexto, ao longo das últimas décadas, numerosos trabalhos científicos investigam a

peculiaridade das nadadeiras peitorais da baleia Jubarte, cujas protuberâncias localizadas no bordo de ataque podem representar uma vantagem adaptativa da espécie.

Fish e Battle (1995) descreveram as características e parâmetros geométricos das nadadeiras da baleia Jubarte. Em seu trabalho, os autores definiram o perfil NACA 63₄-021 como representativo da seção transversal das referidas nadadeiras. Subsequentemente, através de testes experimentais em túneis hidrodinâmicos e utilizando de alguns resultados obtidos por Fish e Battle (1995), Johari, Henoch e A. (2007) observaram melhor desempenho por parte de aerofólios modificados com diferentes tipos de protuberância no bordo de ataque. Por sua vez, Nierop, Alben e Brenner (2008) desenvolveram um modelo matemático para explicar os mecanismos responsáveis pelo ganho em performance dos aerofólios modificados. Eles propuseram que as protuberâncias alteraram o campo de pressão ao redor da asa de tal forma que a separação da camada limite é atrasada ao redor dos picos e, assim, o fenômeno leva a uma perda de sustentação mais gradual e ângulo de estol maior.

Figura 1 – Baleia Jubarte e morfologia de sua nadadeira peitaoral.



Fonte: Adaptado de Fish e Battle (1995).

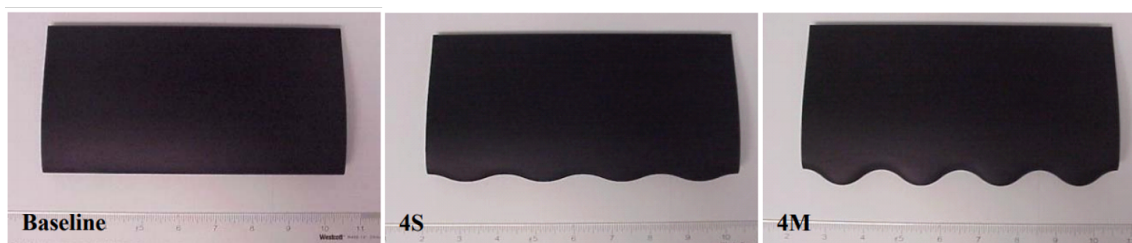
Hansen et al. (2009), Chen, Li e Nguyen (2012) e Paula et al. (2016) também realizaram experimentos utilizando aerofólios inspirados nas nadadeiras de baleia Jubarte, todos analisando um número de Reynolds na ordem de 10^4 e 10^5 . Em seu trabalho, Hansen et al. (2009) notaram que a configuração de protuberância mais benéfica provou ser aquela com menores amplitude e comprimento de onda para o aerofólio NACA 0021. Complementarmente, resultados apresentados por Chen, Li e Nguyen (2012) indicaram um perceptível atraso no ponto de descolamento causado pelas protuberâncias em um aerofólio NACA 0012 com razão de aspecto igual a 1. Neste caso, também foi reportada a inexistência de ganhos em sustentação atrelados à presença de protuberâncias no bordo de ataque, porém foi observada uma redução no arrasto por parte dos aerofólios modificados. Paula et al. (2016), por sua vez, estudaram o comportamento das protuberâncias no bordo de ataque de perfis NACA 0012 e NACA 0020, nos quais foi observado que o aumento na espessura dos aerofólios com protuberâncias mais salientes causou deterioração aerodinâmica em regime de pré-estol. Paralelamente, Wei, New e Cui (2015) realizaram trabalhos experimentais utilizando um perfil NACA 63₄-021 a um número de Reynolds de $1,4 \times 10^4$, em que notaram as protuberâncias no bordo de ataque se comportando como pequenas asas-delta, gerando vórtices em contra-rotação e, assim, observaram que o escoamento se separa com

maior facilidade da superfície do hidrofólio *baseline*. Posteriormente, em estudos numéricos e experimentais, [Hansen et al. \(2016\)](#) mostraram que a presença de protuberâncias em um aerofólio NACA 0021 proporcionou maior velocidade do escoamento e maior gradiente adverso de pressão ao redor dos vales, o que induziu a separação local da camada limite em um menor ângulo de ataque a 2230 Reynolds.

Em seguida, o estudo numérico desenvolvido por [Rostamzadeh, Kelso e Dally \(2017\)](#) indicou que, contrastante ao regime de transição, onde o aerofólio NACA-0021 não-modificado sofreu perda repentina de sustentação, no regime turbulento o *baseline* desenvolveu um estol mais gradual e produziu mais sustentação que os aerofólios modificados. Em contrapartida, também em termos numéricos e para um perfil NACA-0021, utilizando de um número de Reynolds de $1,2 \times 10^5$ e um ângulo de ataque igual a 20° , [Torro e Kim \(2017\)](#) observaram um aumento na sustentação e uma redução no arrasto por parte de aerofólios com protuberâncias, os quais atribuíram a três eventos principais: (i) o aparecimento de uma grande zona de baixa pressão próximo ao bordo e ataque criada por bolhas de separação laminar (BSL's); (ii) o recolamento do fluxo atrás das LSB's, resultando em uma diminuição da espessura da esteira de vórtices e (iii) a deterioração dos vórtices de von-Kármán devido à quebra de estruturas coerentes na direção da espessura.

Recentemente, [Bocalon et al. \(2019\)](#) desenvolveram um estudo experimental utilizando um túnel hidrodinâmico vertical para investigar as diferenças na posição do ponto de separação ao redor dos picos e vales de aerofólios modificados, o que é causado pelo gradiente de pressão adverso observado primeiramente por [Hansen et al. \(2016\)](#). Em seu trabalho, foram avaliados três dos aerofólios reportados por [Johari, Henoch e A. \(2007\)](#), como é mostrado pela Figura 2. [Bocalon et al. \(2019\)](#) reportaram que o aerofólio 4S é aquele com o maior coeficiente de sustentação, quando comparado ao *baseline* e ao 4M. Tal conclusão foi possível devido a resultados obtidos para a distância entre o ponto de separação do escoamento e o bordo de ataque dos perfis analisados.

Figura 2 – Aerofólios *Baseline*, 4S e 4M.

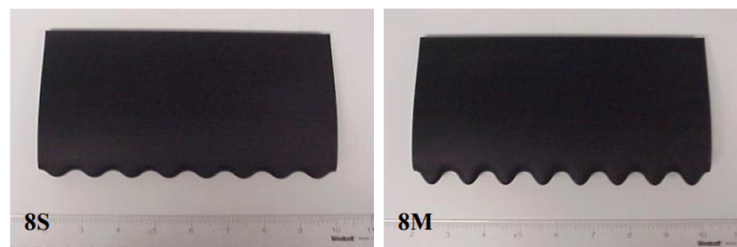


Fonte: Adaptado de [Johari, Henoch e A. \(2007\)](#).

Portanto, o presente trabalho buscou reproduzir numericamente as mesmas configurações do escoamento, para os mesmos aerofólios estudados por [Bocalon et al. \(2019\)](#), a fim de complementar seus resultados experimentais e gerar evidências numéricas capazes

de corroborar ou confrontar suas conclusões a respeito do desempenho de aerofólios modificados com protuberância no bordo de ataque. Além disso, nesse trabalho foi estudado o comportamento de outros dois tipos de protuberâncias, isto é, $8S$ e $8M$, também reportados por Johari, Henocho e A. (2007), conforme são mostradas pela Figura 3. Assim, técnicas de dinâmica dos fluidos computacional (DFC) foram implementadas para caracterizar a topologia do escoamento ao redor dos aerofólios, bem como quantificar seus respectivos coeficientes aerodinâmicos, explorando números de Reynolds iguais a 1400 e 1900.

Figura 3 – Aerofólios $8S$ e $8M$.



Fonte: Adaptado de Johari, Henocho e A. (2007).

1.3 Objetivos

Este trabalho de graduação propõe desenvolver e implementar metodologia de análise numérica, via *Computational Fluid Dynamics - CFD*, para determinar a performance de aerofólios bio-inspirados nas nadadeiras peitorais da Baleia Jubarte, visando verificar possível aumento de desempenho, e assim, definir condições operacionais nas quais sua aplicação é eficiente. De forma complementar, os estudos aqui desenvolvidos buscam estimular a pesquisa na área de simulações computacionais de escoamentos turbulentos em regime transitório e contribuir com propagação do uso de ferramentas *open source* para esse fim.



2 Equações governantes do escoamento de fluidos

O comportamento dos fluidos em movimento é descrito pelos enunciados matemáticos das leis de conservação da física. Este capítulo, então, apresenta os princípios de conservação da massa e quantidade de movimento, fundamentais para o entendimento da dinâmica dos fluidos (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). Não serão abordadas as equações de estado e de conservação de energia, visto que as mesmas se fazem necessárias para problemas com fluidos compressíveis ou que envolvam transferência de calor, isto é, fora do escopo deste trabalho.

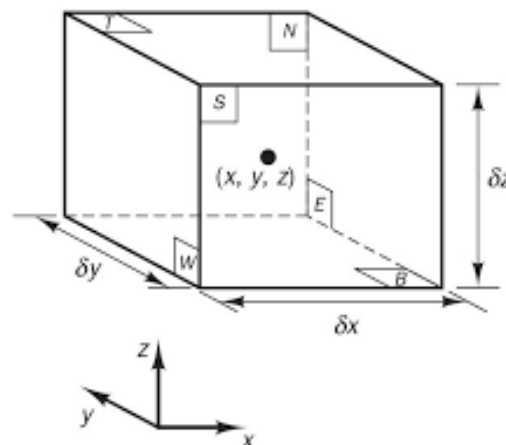
2.1 Considerações iniciais

A obtenção das equações governantes do escoamento de fluidos parte de alguns conceitos básicos, como o elemento fluido, expansão por série de Taylor e fluxo de massa.

2.1.1 O elemento fluido

A análise macroscópica do movimento dos fluidos requer a definição do menor elemento a partir do qual as propriedades do escoamento são independentes da estrutura e agitação molecular das partículas (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). Dessa forma, define-se o elemento fluido, em coordenadas cartesianas, como o hexaedro de dimensões infinitesimais δx , δy e δz e com o centro localizado em (x, y, z) , como mostra a Figura 4.

Figura 4 – Elemento fluido.



Fonte: Adaptado de Versteeg e Malalasekera (2007).

As equações governantes do escoamento de fluidos são oriundas do balanço de massa, quantidade de movimento e energia que atravessam os contornos do elemento fluido mostrado pela Figura 4. Todas as propriedades do escoamento são dependentes da posição espacial e do tempo, isto é, propriedades como pressão, velocidade, massa específica e temperatura, que ocorrem no centro do elemento fluido, devem ser denotadas, respectivamente, como $p(x, y, z, t)$, $\mathbf{u}(x, y, z, t)$, $\rho(x, y, z, t)$ e $T(x, y, z, t)$.

2.1.2 Expansão em série de Taylor

Dada uma função qualquer $f = f(x)$, contínua e derivável no domínio de análise, é possível determinar o comportamento dessa função no ponto de coordenada $x + \Delta x$ a partir de uma expansão em série de Taylor, dada por (FLEMMING; GONÇALVES, 2007):

$$f(x + \Delta x) = f(x) + (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (1)$$

A partir da Equação 1, conhecendo-se o valor de uma propriedade no centro do elemento mostrado pela Figura 4, é possível expressar o valor dessa propriedade em qualquer face do hexágono infinitesimal. Considera-se, ainda, que o elemento fluido é suficientemente pequeno para permitir que a Equação 1 seja simplificada até o seu segundo termo sem causar erros de truncamento relevantes. Assim, utilizando-se como exemplo a pressão no centro do elemento fluido, tal que $p = p(x, y, z, t)$, seus respectivos valores nas faces oeste (W) e leste (E), distantes de $\frac{1}{2}\delta x$ do ponto (x, y, z) , são definidos como:

$$p_W = p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \quad \text{e} \quad p_E = p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \quad (2)$$

De maneira análoga, determinam-se os valores de qualquer propriedade em todas as faces do elemento fluido.

2.1.3 Fluxo de massa

Uma grandeza intensiva é qualquer grandeza associada a uma substância que seja independente da sua massa. Toda partícula dotada de massa carrega, invariavelmente, propriedades termodinâmicas intensivas e sua quantificação permite a caracterização de todo o escoamento. É de interesse da mecânica dos fluidos, portanto, a definição do fluxo de massa para o interior de um elemento fluido, dada pelo produto da sua densidade, velocidade e a área da face do elemento fluido perpendicular a velocidade da partícula. Dessa forma, em três dimensões e em dado instante de tempo, o fluxo de massa,

$\phi_{m,i}$, para o interior de um elemento fluido na direção i é definido por (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007):

$$\phi_{m,i} = \rho \mathbf{u}_i dA_i \quad (3)$$

onde dA_i corresponde a área da face do elemento fluido perpendicular à direção i .

2.2 Conservação da massa em três dimensões

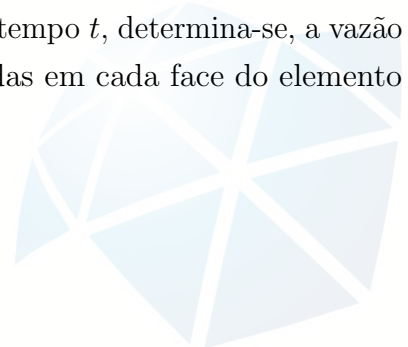
A lei de conservação da massa consiste na conclusão imediata de que a taxa de aumento da massa de um elemento fluido deve ser igual a taxa líquida do fluxo de massa para interior deste mesmo elemento. Assim sendo, a taxa de aumento da massa no interior de um elemento fluido é dada por (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \delta x \delta y \delta z) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \quad (4)$$

O elemento fluido mostrado na Figura 4 é um poliedro com três pares de faces, sendo cada face paralela ao seu respectivo par. Em um sistema de coordenadas cartesianas, atribui-se, para cada instante de tempo, a nomenclatura de $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ e $w = w(x, y, z)$ para as três componentes do vetor velocidade $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ de uma partícula fluida, sendo elas atuantes nas direções x, y e z , respectivamente. Cada componente do vetor velocidade é, então, perpendicular a um par de faces do elemento fluido em questão. Posto isto, sabe-se que para cada instante de tempo t e em uma dada direção, a vazão mássica por unidade de área para uma partícula que se encontra no centro do elemento fluido, com coordenada x, y e z , é dada pelo produto da sua massa específica e da componente de velocidade na respectiva direção (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007), isto é:

$$\begin{aligned} \text{Em } x: & \rho u(x, y, z) \\ \text{Em } y: & \rho v(x, y, z) \\ \text{Em } z: & \rho w(x, y, z) \end{aligned} \quad (5)$$

Como posto, tal propriedade é avaliada no centro do elemento fluido, entretanto, para fins práticos, se faz necessário definir seu comportamento em cada face do elemento. Assim, como mostrado na Seção 2.1.2, para cada instante de tempo t , determina-se, a vazão mássica por unidade de área para as partículas localizadas em cada face do elemento

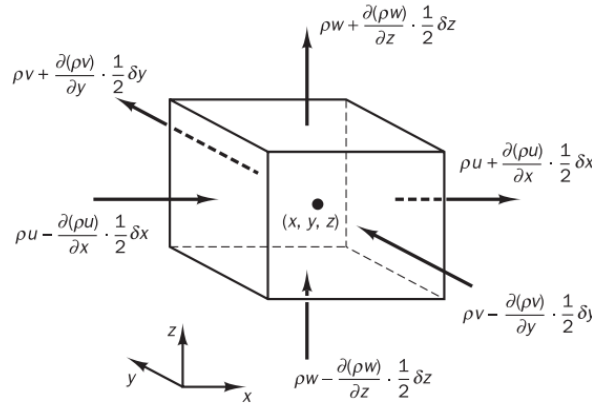


fluido, tal que:

$$\begin{aligned}
 \text{Face Oeste: } & \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \\
 \text{Face Leste: } & \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \\
 \text{Face Sul: } & \rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \\
 \text{Face Norte: } & \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \\
 \text{Face Anterior: } & \rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \\
 \text{Face Posterior: } & \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y
 \end{aligned} \tag{6}$$

A representação dessa propriedade em cada face do elemento fluido é mostrada pela Figura 5.

Figura 5 – Vazão mássica por unidade de área em cada face do elemento fluido.



Fonte: Adaptado de Versteeg e Malalasekera (2007).

A partir da Equação 3 e realizando o balanço entre os vetores que entram e saem, é possível obter a taxa líquida do fluxo de massa para o interior do referido elemento fluido, dada por (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007):

$$\begin{aligned}
 & \left[\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right] \delta y \delta z - \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right] \delta y \delta z \\
 & + \left[\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right] \delta x \delta y - \left[\rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right] \delta x \delta y \\
 & + \left[\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right] \delta x \delta z - \left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right] \delta x \delta z
 \end{aligned} \tag{7}$$

Realizado as devidas simplificações e igualando as Expressões 4 e 7 obtém-se a equação de conservação da massa, ou da continuidade, em regime transitório para um

determinado ponto de um fluido compressível, tal que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

ou ainda, na notação vetorial compacta, tem-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (9)$$

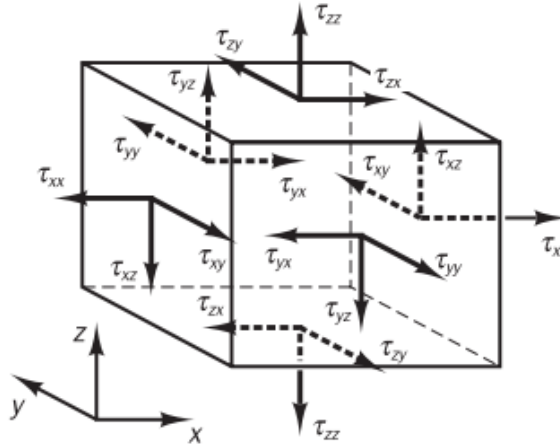
Finalmente, para fluidos incompressíveis, escopo deste trabalho, a Equação 9 é resumida a:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (10)$$

2.3 Forças atuantes sobre um fluido em movimento

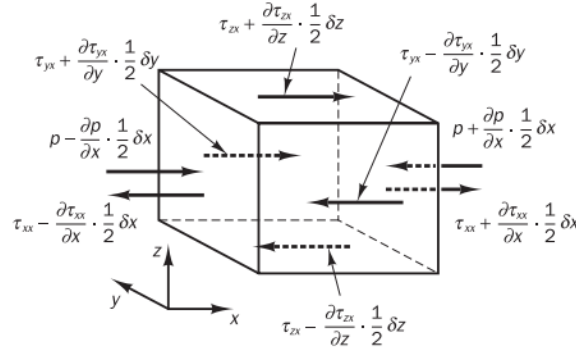
O estado de tensão do elemento fluido, mostrado pela Figura 6, é definido em termos da pressão e das nove componentes de tensão viscosa. A pressão, um tipo de tensão normal, denota-se por p . As componentes de tensões viscosas, por sua vez, são denotadas por τ_{ij} , onde os sufixos i e j indicam que τ_{ij} atua na direção de j e em uma superfície perpendicular à direção i (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007).

Figura 6 – Estado de tensão do elemento fluido.



Fonte: Adaptado de Versteeg e Malalasekera (2007).

Novamente, utilizando-se da ferramenta apresentada na Seção 2.1.2, são obtidas as tensões que agem sobre o elemento fluido na direção do vetor x , como mostra a Figura 7.

Figura 7 – Componentes das tensões que agem na direção de x .

Fonte: Adaptado de [Versteeg e Malalasekera \(2007\)](#).

A força associada a cada tensão corresponde ao produto desta pela área em que atua. Dessa forma, a força total que age sobre o elemento fluido devido às tensões de superfície que atuam na direção de x é definida como ([VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007](#)):

$$\begin{aligned}
 & \left[\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left(\tau_{xx} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z \\
 & + \left[- \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) + \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z \\
 & - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z \\
 & - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y \\
 & = \left(\frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z
 \end{aligned} \tag{11}$$

Finalmente, a força total por unidade de volume, na direção de x , que atua sobre o fluido devido às referidas tensões de superfície é igual à Expressão 11 dividida pelo volume do elemento fluido, isto é, $\delta x \delta y \delta z$, tal que:

$$\frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \tag{12}$$

Observa-se que para a obtenção da Expressão 12 não foram consideradas as forças de campo (ou corpo) que agem sobre a massa do fluido como um todo, sendo exemplos delas a gravidade, efeitos eletromagnéticos, forças centrífugas e de Coriolis. Entretanto, na maioria dos casos, tais forças possuem baixa magnitude, não sendo capazes de influenciar no escoamento como um todo e, geralmente, as expressões matemáticas dessas forças são adicionadas como termos fonte (auxiliares) nas equações de momento. Portanto, é possível

definir o termo fonte F_x que corresponde à força de corpo por unidade de volume que atua sobre o fluido na direção de x . Assim, é obtida, por unidade de volume, a resultante R_x das forças que atuam sobre o fluido na direção de x :

$$R_x = \frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + F_x \quad (13)$$

Analogamente, obtém-se as resultantes R_y e R_z das forças que atuam sobre o fluido nas direções de y e z , tais que:

$$R_y = \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(-p + \tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} + F_y \quad (14)$$

$$R_z = \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial(-p + \tau_{zz})}{\partial z} + F_z \quad (15)$$

2.4 Quantidade de movimento em três dimensões

Uma partícula fluida que se move no espaço tridimensional terá três componentes cartesianas do vetor quantidade de movimento. A taxa de variação da quantidade de movimento em cada direção é dada por (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007):

$$\begin{aligned} \text{Em } x: & \rho \frac{Du}{Dt} \\ \text{Em } y: & \rho \frac{Dv}{Dt} \\ \text{Em } z: & \rho \frac{Dw}{Dt} \end{aligned} \quad (16)$$

onde $\frac{Du}{Dt}$ corresponde à derivada total da componente u do vetor velocidade em relação ao tempo, isto é, corresponde à taxa de variação de u . Assim, se define (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007):

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right] = \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \right] \\ &\Leftrightarrow \rho \frac{Du}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla u \right] = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho u \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (17)$$

A segunda lei de Newton postula que a taxa de variação da quantidade de movimento de uma partícula é igual a soma das forças que agem sobre ela. Assim, das Equações 13, 14, 15 e de 16, obtém-se as componentes x , y e z da equação da quantidade de movimento, sendo (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007):

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + F_x \quad (18)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(-p + \tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y \quad (19)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial(-p + \tau_{zz})}{\partial z} + F_z \quad (20)$$

2.5 As equações de Navier-Stokes para fluidos Newtonianos

As Equações 9, 18, 19 e 20, descrevem o movimento dos fluidos, mas não correspondem à forma mais usual das referidas leis de conservação. Para tanto, se faz necessária a introdução de um modelo adequado para as tensões viscosas (τ_{ij}). Para um fluido Newtoniano, objeto de estudo deste trabalho, as tensões viscosas são proporcionais às taxas locais de deformação sendo que, em escoamentos tridimensionais, ocorrem as deformações linear e volumétrica. Posto isto, definem-se duas constantes de proporcionalidade: a viscosidade dinâmica, μ , que relaciona as tensões com as deformações lineares, e a segunda viscosidade, λ , que relaciona as tensões com a deformação volumétrica. Dessa forma, as nove componentes de tensões viscosas contidas nas Equações 18, 19 e 20, são definidas como (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007):

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Observa-se, na Equação 21, que o termo $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \vec{\nabla} \cdot \mathbf{u}$ corresponde à deformação volumétrica, ao passo que as demais derivadas parciais estão associadas às deformações lineares. Sabe-se, ainda, que a segunda viscosidade λ tem pequena influência prática no escoamento e que no caso de fluidos incompressíveis o divergente do vetor velocidade é igual a zero, o que simplifica as três primeiras expressões. Entretanto, para efeito de completude, é indicado prosseguir com tais termos para que se obter a forma clássica das equações desejadas. Dessa forma, substituindo as expressões de tensões viscosas

nas Equações 18, 19 e 20, são obtidas as chamadas equações de Navier-Stokes, sendo (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007):

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \vec{\nabla} \cdot \mathbf{u} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + F_x \quad (22)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \vec{\nabla} \cdot \mathbf{u} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + F_y \quad (23)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \vec{\nabla} \cdot \mathbf{u} \right] + F_z \quad (24)$$

Ainda, para a componente x , isto é, Equação 22, chamando os termos de tensão viscosa de V_x , tem-se que:

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \vec{\nabla} \cdot \mathbf{u} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\ \Leftrightarrow V_x &= \vec{\nabla} \cdot (\mu \nabla u) + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \vec{\nabla} \cdot \mathbf{u}) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

Na prática, a expressão entre chaves da Equação 25 pouco contribui para a tensão viscosa e, portanto, é coerente substituí-la por um novo termo fonte, f_x . Fazendo, agora, $F_{M_x} = F_x + f_x$ e repetindo-se os devidos procedimentos para as demais direções, obtém-se as equações de Navier-Stokes na sua forma mais usual para a aplicação do método de volumes finitos, sendo (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007):

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho u \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \vec{\nabla} \cdot (\mu \nabla u) + F_{M_x} \quad (26)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho v \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \vec{\nabla} \cdot (\mu \nabla v) + F_{M_y} \quad (27)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho w \mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \vec{\nabla} \cdot (\mu \nabla w) + F_{M_z} \quad (28)$$

A Equação 9, apresentada na Seção 2.2, e as Equações 26, 27 e 28 descrevem fisicamente qualquer escoamento laminar e a sua solução numérica é o objetivo central de todo problema de dinâmica dos fluidos computacional.

2.5.1 Equações gerais de transporte

Identificam-se semelhanças consideráveis entre as Equações 9, 26, 27 e 28, de tal forma que, adotando uma propriedade genérica ϕ , é possível escrever a forma conservativa de todas as equações que regem o escoamento dos fluidos, tal que (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007):

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\phi\mathbf{u}) = \vec{\nabla} \cdot (\Gamma\nabla\phi) + F_\phi \quad (29)$$

onde Γ é coeficiente de difusão do problema. Assim, tem-se a equação de transporte para a propriedade ϕ e é a partir dela que se iniciam os procedimentos computacionais do método de volumes finitos. Isto pois, fixando ϕ igual a 1, u , v e w e selecionando os valores apropriados para o coeficiente de difusão Γ e o termo fonte F_ϕ , é possível obter, isoladamente, cada uma das Equações 9, 26, 27 e 28.

Essencialmente, o método de elementos finitos consiste em integrar numericamente a Equação 29 sobre um volume de controle V , isto é (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V (\rho\phi) dV \right) + \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho\phi\mathbf{u}) dV = \int_V \vec{\nabla} \cdot (\Gamma\nabla\phi) dV + \int_V F_\phi dV \quad (30)$$

Aplicando-se o teorema da divergência de Gauss no segundo termo do lado esquerdo e no primeiro termo do lado direito, a Equação 30 pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V (\rho\phi) dV \right) + \int_S (\rho\phi\mathbf{u}) \cdot d\vec{S} = \int_S (\Gamma\nabla\phi) \cdot d\vec{S} + \int_V F_\phi dV \quad (31)$$

A Equação 31 corresponde, portanto, ao enunciado matemático da conservação de uma propriedade do fluido para o volume de controle V delimitado pela superfície S . Para escoamentos em regime transitório se faz necessário uma segunda integração com respeito ao tempo, isto é, de t a $t + \Delta t$, tal que:

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V (\rho\phi) dV \right) dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_S (\rho\phi\mathbf{u}) \cdot d\vec{S} dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_S (\Gamma\nabla\phi) \cdot d\vec{S} dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_V F_\phi dV dt \quad (32)$$

Tem-se, portanto, a forma genérica da equação de transporte da propriedade ϕ .



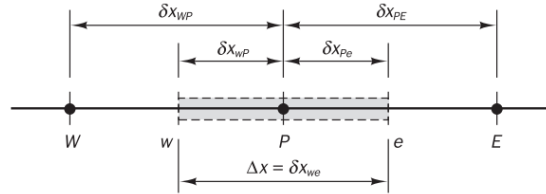
3 O método dos volumes finitos

Diversas metodologias numéricas são utilizadas para solucionar problemas matemáticos complexos. Na mecânica dos fluidos computacional, o mais adequado e consolidado pela literatura é o chamado método dos volumes finitos. Apesar das inúmeras abordagens existentes, o método essencialmente consiste na obtenção de equações aproximadas por meio de um balanço realizado sobre um volume de controle finito (MALISKA, 2017). Este capítulo brevemente introduz alguns dos conceitos relevantes relacionados ao tema.

3.1 A condução unidimensional transiente

Para o caso unidimensional, o volume de controle pode ser definido como um segmento de reta centrado em P , adjacente a outros dois volumes centrados em W e E . A faces oeste e leste desse volume ocorrem respectivamente em w e e , sendo que a distância entre elas corresponde ao seu comprimento, Δx . Assim, $\delta x_{WP} = \Delta x_W$ define a distância entre P e W , ao passo que $\delta x_{PE} = \Delta x_E$ define a distância entre P e E , como mostra a Figura 8.

Figura 8 – Volume de controle unidimensional.



Fonte: Adaptado de Maliska (2017).

Partindo-se da Equação 32, é possível obter o enunciado matemático que descreve a condução unidimensional transiente. Para tanto, basta considerar o volume de controle da Figura 8 e definir a propriedade ϕ como sendo a temperatura T e o coeficiente de difusão, Γ , como k/C_p , isto é, a condutividade térmica sobre o calor específico à pressão constante. Em pura difusão, tem-se que o termo advectivo vai a zero e, assim, a equação da condução transiente unidimensional é dada por (MALISKA, 2017):

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial t} (\rho T) dx dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e F dx dt \quad (33)$$

Como posto anteriormente, F provém do agrupamento de termos auxiliares das equação de transporte e está associado a uma condição específica de cada problema. Genericamente, pouco se pode afirmar sobre ele, todavia, uma aproximação amplamente

empregada corresponde à sua linearização, tal que $F = F_P T_P + F_c$, onde F_c é uma constante. Dessa forma, a Equação 33 pode ser resolvida como (MALISKA, 2017):

$$\int_w^e (\rho T - \rho T^o) dx = \int_t^{t+\Delta t} \left[\frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \right]_e - \frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_w dt + \int_t^{t+\Delta t} [F_P T_P + F_c] \Delta x dt \quad (34)$$

onde T^o corresponde à temperatura em $t = t_0$. Resta, agora, integrar a Equação 34 em relação ao espaço, no lado esquerdo, e em relação ao tempo, no lado direito. Para tanto, a primeira consideração a ser feita consiste em aproximar, para cada instante de tempo, a temperatura no interior do elemento fluido a uma constante igual ao valor da respectiva propriedade avaliada no centro do elemento fluido, tal que, em um instante t , tem-se que $\rho T(x, t) = \rho_P T_P(t)$, para $w < x < e$. A segunda consideração consiste em definir um instante intermediário $t^\theta = t + \theta \Delta t$, com $0 < \theta < 1$, tal que a temperatura em determinado ponto é constante e igual ao valor da respectiva propriedade avaliada no instante $t = t^\theta$, isto é, $T_P(t) = T_P(t^\theta)$, com $t < t^\theta < t + \Delta t$, obtendo-se (MALISKA, 2017):

$$(\rho_P T_P - \rho_P T_P^o) \Delta x = \frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_e^\theta \Delta t - \frac{k}{c_p} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_w^\theta \Delta t + [F_P T_P^\theta + F_c] \Delta x \Delta t \quad (35)$$

O próximo passo consiste em eliminar o termo que expressa, no instante $t = t^\theta$, o gradiente de temperatura nos pontos e e w para, então, linearizar a Equação 33. Para tanto, se faz necessário uma terceira consideração, tal que seja válida a aproximação de primeira ordem dada por (MALISKA, 2017):

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} \quad (36)$$

Assim, sabendo que Δx corresponde ao volume unidimensional do elemento em questão, a partir da correta manipulação dos termos é possível obter a equação geral linearizada da condução unidimensional transiente para um volume de controle centrado em P, dada por (MALISKA, 2017):

$$\frac{M_P T_P}{\Delta t} = \frac{k}{c_p} \Big|_e \frac{T_E^\theta}{\Delta x_E} + \frac{k}{c_p} \Big|_w \frac{T_W^\theta}{\Delta x_W} + \left[- \frac{k}{c_p \Delta x} \Big|_e - \frac{k}{c_p \Delta x} \Big|_w \right] T_P^\theta + \left[\frac{M_P^o T_P^o}{\Delta t} + [F_P T_P + F_c] \Delta x \right] \quad (37)$$

onde M_P corresponde à massa do volume de controle. Dessa forma, inserindo as condições iniciais e de contorno na Equação 37, torna-se possível a elaboração de um sistema finito de equações lineares para cada instante de tempo em todo o domínio espacial, o que consiste na linearização das equações de transporte.

As três considerações adotadas para a integração da Equação 33 correspondem a apenas uma parcela dos diversos esquemas numéricos de aproximação que podem ser empregados no método de volumes finitos. Invariavelmente, cada esquema traz consigo um erro de truncamento, podendo ser maior ou menor para cada tipo de aplicação (MALISKA, 2017).

3.2 Generalizações

A partir dos procedimentos descritos na Seção 3.1, é possível obter, por exemplo, a difusão pura unidimensional permanente de uma propriedade genérica ϕ ao se desconsiderar os termos advectivo e dependente do tempo da Equação 32, obtendo-se:

$$\left[\frac{\Gamma_e}{\Delta x_E} + \frac{\Gamma_w}{\Delta x_W} \right] \phi_P = \frac{\Gamma_e}{\Delta x_E} \phi_E + \frac{\Gamma_w}{\Delta x_W} \phi_W + [F_P \phi_P + F_c] \Delta x \quad (38)$$

Outro exemplo trata-se da convecção e difusão permanente unidimensional, na qual o termo advectivo da Equação 32 é preservado, e a partir da implementação de esquemas numéricos por aproximação de primeira ordem se obtém (MALISKA, 2017):

$$\left[(\rho u)_e - (\rho u)_w + \left(\frac{\Gamma_e}{\Delta x_E} - \frac{(\rho u)_e}{2} \right) + \left(\frac{\Gamma_w}{\Delta x_W} + \frac{(\rho u)_w}{2} \right) \right] \phi_P = \left(\frac{\Gamma_e}{\Delta x_E} - \frac{(\rho u)_e}{2} \right) \phi_E + \left(\frac{\Gamma_w}{\Delta x_W} + \frac{(\rho u)_w}{2} \right) \phi_W \quad (39)$$

Verifica-se, portanto, a elevada influência que o esquema numérico de aproximação das derivadas parciais exerce sobre os coeficientes dos termos convectivos e difusivos das equações de transporte.

3.2.1 Funções de interpolação

Diversos são os métodos numéricos de aproximação para as derivadas parciais de uma determinada propriedade em uma certa posição espacial ou, ainda, nas faces do elemento fluido. Tais métodos são chamados de esquemas numéricos de interpolação ou aproximação (MALISKA, 2017).

3.2.1.1 Central differencing scheme (CDS)

O CDS consiste em uma aproximação linear, em que (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007):

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2} ; \phi_w = \frac{\phi_W + \phi_P}{2} \quad e \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_E} ; \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w = \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_W} \quad (40)$$

Trata-se de um esquema apropriado para escoamentos predominantemente difusivos, nos quais a velocidade é suficientemente baixa para não exercer influência significativa no transporte de propriedades (MOUKALLED; MANGANI; DARWISH, 2016).

3.2.1.2 Upwind differencing scheme (UDS)

O UDS, por sua vez, aproxima o valor da propriedade na face ao valor da mesma no ponto localizado à montante, sendo que, de acordo com o sentido da velocidade a definição do ponto à montante pode variar. Isto é, para uma propriedade genérica, tem-se que (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007):

$$\begin{aligned}\phi_w &= \phi_W ; \phi_e = \phi_P & \text{com } u > 0 \\ \phi_w &= \phi_P ; \phi_e = \phi_E & \text{com } u < 0\end{aligned}\tag{41}$$

Apesar de apresentar menor acuracidade, o UDS é mais estável que o CDS. Trata-se de um método mais apropriado para escoamentos nos quais a velocidade exerce influência significativa no transporte de propriedades, isto é, predominantemente convectivos (MOUKALLED; MANGANI; DARWISH, 2016).

3.2.1.3 Weighted Upstream Differencing Scheme (WUDS)

Proposto e detalhado por Raithby e Torrance (1974), essencialmente, o WUDS consiste em uma associação dos dois esquemas supracitados, de maneira a considerar o peso da convecção e da difusão que ocorrem no escoamento. Para tanto, utiliza-se o número de Peclet, adimensional que relaciona a intensidade de fenômenos advectivos e difusivos que ocorrem dentro de um volume de controle, dado por (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2000):

$$Pe = \frac{\rho u \Delta x}{\Gamma_\phi}\tag{42}$$

Assim, o esquema WUDS define (RAITHBY; TORRANCE, 1974):

$$\begin{aligned}\phi_e &= \left(\frac{1}{2} + \alpha_e\right) \phi_P + \left(\frac{1}{2} + \alpha_e\right) \phi_E \\ \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_e &= \beta_e \Gamma_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_E}\right)\end{aligned}\tag{43}$$

onde os coeficientes α e β dependem do número de Peclet e definem o peso da convecção e da difusão atuantes no escoamento. Não existe apenas uma maneira de se calcular os referidos coeficientes, entretanto, Raithby (1976) propôs que:

$$\alpha_e = \frac{Pe^2}{10 + 2Pe^2} \quad ; \quad \beta_e = \frac{1 + 0,005Pe^2}{1 + 0,05Pe^2}\tag{44}$$

3.2.2 Convecção e difusão tridimensional transiente

O mais genérico dos fenômenos de transportes consiste na convecção e difusão tridimensional transiente da propriedade ϕ . Reproduzindo analogamente em três dimensões os procedimentos apresentados na Seção 3.1, é possível escrever a Equação 32 como (MALISKA, 2017):

$$\begin{aligned} & \frac{M_P \phi_P - M_P^o \phi_P^o}{\Delta t} + [\dot{M}_e \phi_e^\theta - \dot{M}_w \phi_w^\theta] + [\dot{M}_n \phi_n^\theta - \dot{M}_s \phi_s^\theta] + [\dot{M}_f \phi_f^\theta - \dot{M}_b \phi_b^\theta] = \\ & \left[D_1 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e^\theta - D_1 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w^\theta \right] + \left[D_2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n^\theta - D_2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s^\theta \right] + \left[D_3 \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_f^\theta - D_3 \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_b^\theta \right] + L[F_\phi]^\theta \end{aligned} \quad (45)$$

onde os sub-índices minúsculos e, w, n, s, f e b representam, respectivamente, as faces leste, oeste, norte, sul, anterior e posterior do volume de controle. Os fluxos de massa em cada uma das faces, $\dot{M}_i$, e os coeficientes difusivos, $D_{j,i}$, são dados por:

$$\begin{aligned} \dot{M}_e &= \rho u \Delta y \Delta z)_e \quad ; \quad \dot{M}_w = \rho u \Delta y \Delta z)_w \\ \dot{M}_n &= \rho v \Delta x \Delta z)_n \quad ; \quad \dot{M}_s = \rho v \Delta x \Delta z)_s \\ \dot{M}_f &= \rho w \Delta x \Delta y)_f \quad ; \quad \dot{M}_b = \rho w \Delta x \Delta y)_b \\ D_{1,e} &= \Gamma_\phi \Delta y \Delta z)_e \quad ; \quad D_{1,w} = \Gamma_\phi \Delta y \Delta z)_w \\ D_{2,n} &= \Gamma_\phi \Delta x \Delta z)_n \quad ; \quad D_{2,s} = \Gamma_\phi \Delta x \Delta z)_s \\ D_{3,f} &= \Gamma_\phi \Delta x \Delta y)_f \quad ; \quad D_{3,b} = \Gamma_\phi \Delta x \Delta y)_b \end{aligned} \quad (46)$$

O termo $L[F_\phi]^\theta$ corresponde à aproximação numérica do termo fonte e, por sua vez, ϕ_θ corresponde à interpolação no tempo da propriedade ϕ . Tanto a linearização do termo fonte, quanto a interpolação no tempo da propriedade ϕ se dão conforme apresentado na Seção 3.1. Utilizando o esquema WUDS tem-se, para os termos convectivos (MALISKA, 2017):

$$\begin{aligned} \phi_e &= \left(\frac{1}{2} + \alpha_e \right) \phi_P + \left(\frac{1}{2} - \alpha_e \right) \phi_E \\ \phi_w &= \left(\frac{1}{2} + \alpha_w \right) \phi_P + \left(\frac{1}{2} - \alpha_w \right) \phi_P \\ \phi_n &= \left(\frac{1}{2} + \alpha_n \right) \phi_P + \left(\frac{1}{2} - \alpha_n \right) \phi_N \\ \phi_s &= \left(\frac{1}{2} + \alpha_s \right) \phi_P + \left(\frac{1}{2} - \alpha_s \right) \phi_P \\ \phi_f &= \left(\frac{1}{2} + \alpha_f \right) \phi_P + \left(\frac{1}{2} - \alpha_f \right) \phi_F \\ \phi_b &= \left(\frac{1}{2} + \alpha_b \right) \phi_P + \left(\frac{1}{2} - \alpha_b \right) \phi_P \end{aligned} \quad (47)$$

e para os termos difusivos (MALISKA, 2017):

$$\begin{aligned}
 \Gamma_e^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) &= \beta_e \Gamma_e^\phi \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x_E} \right) \\
 \Gamma_w^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) &= \beta_w \Gamma_w^\phi \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x_W} \right) \\
 \Gamma_n^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) &= \beta_n \Gamma_n^\phi \left(\frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta y_N} \right) \\
 \Gamma_s^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) &= \beta_s \Gamma_s^\phi \left(\frac{\phi_P - \phi_S}{\Delta y_S} \right) \\
 \Gamma_f^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) &= \beta_f \Gamma_f^\phi \left(\frac{\phi_F - \phi_P}{\Delta z_F} \right) \\
 \Gamma_b^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) &= \beta_b \Gamma_b^\phi \left(\frac{\phi_P - \phi_B}{\Delta z_B} \right)
 \end{aligned} \tag{48}$$

onde os sub-índices maiúsculos E, W, N, S, F e B correspondem aos centros dos volumes de controle leste, oeste, norte, sul, anterior e posterior ao volume de controle centrado em P . Assim, cada $\Delta(x, y, z)_I$ corresponde à distância entre os pontos P e I .

Substituindo na Equação 45 as expressões apresentadas pelas Equações 47 e 48 e, ainda, inserindo a equação da continuidade para um volume de controle tridimensional, finalmente se obtém a equação aproximada da convecção e difusão tridimensional transiente da propriedade ϕ , tal que (MALISKA, 2017):

$$\frac{M_P}{\Delta t} \phi_P + A_P^* \phi_P^\theta = A_e \phi_E^\theta + a_w \phi_W^\theta + A_s \phi_S^\theta + A_n \phi_N^\theta + A_f \phi_f^\theta + A_b \phi_B^\theta + \frac{M_P^o}{\Delta t} \phi_P^o + F_c \Delta V \tag{49}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 A_e &= - \left(\frac{1}{2} - \alpha_e \right) \dot{M}_e + \frac{D_1 \beta}{\Delta x} \Big|_e ; A_w = \left(\frac{1}{2} + \alpha_w \right) \dot{M}_w + \frac{D_1 \beta}{\Delta x} \Big|_w \\
 A_n &= - \left(\frac{1}{2} - \alpha_n \right) \dot{M}_n + \frac{D_2 \beta}{\Delta y} \Big|_n ; A_s = \left(\frac{1}{2} - \alpha_s \right) \dot{M}_s + \frac{D_2 \beta}{\Delta y} \Big|_s \\
 A_f &= - \left(\frac{1}{2} - \alpha_f \right) \dot{M}_f + \frac{D_3 \beta}{\Delta z} \Big|_f ; A_b = - \left(\frac{1}{2} - \alpha_b \right) \dot{M}_b + \frac{D_3 \beta}{\Delta z} \Big|_b \\
 A_P^* &= A_e + A_w + A_n + A_s + A_f + A_b - F_P \Delta V - \frac{M_P}{\Delta t} + \frac{M_P^o}{\Delta t}
 \end{aligned} \tag{50}$$

3.3 Formulações explícita e implícita

Utilizando como exemplo a condução unidimensional transiente, a Equação 37 pode ser simplificada ao se agrupar os coeficientes da temperatura, de tal forma que:

$$A_P T_P = A_e T_E^\theta + A_w T_w^\theta + (A_P^o - A_e - A_w + F_P \Delta x) T_P^\theta + F_c \Delta x \tag{51}$$

Como já foi posto anteriormente, o super-índice θ corresponde uma discretização temporal linear, tal que a temperatura T_P^θ é avaliada em um instante intermediário entre t e $t + \Delta t$, sendo:

$$T_P^\theta = \theta T_{P(t+\Delta t)} + (1 - \theta) T_{P(t)} \quad ; \quad \text{com } T_{P(t)} = T_P^o \text{ e } T_{P(t+\Delta t)} = T_P \quad (52)$$

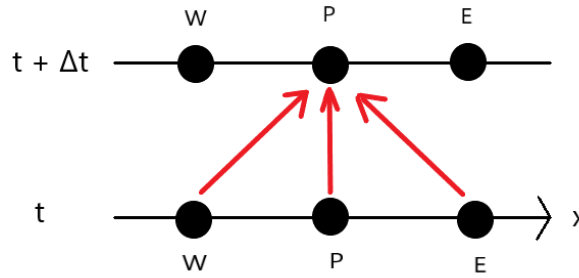
3.3.1 Formulação explícita

A formulação explícita, portanto, consiste em atribuir à θ o valor de zero. Assim, a Equação 51 escreve-se como (MALISKA, 2017):

$$A_P T_P = A_e T_E^o + A_w T_w^o + (A_P^o - A_e - A_w + F_P \Delta x) T_P^o + F_c \Delta x \quad (53)$$

Dessa forma, o valor da temperatura no ponto P em $t + \Delta t$ passa a depender apenas dos valor da referida propriedade no mesmo ponto no instante anterior t (T_P^o) e, também, dos valores de T_E^o e T_W^o . Como se sabe, os valores de temperatura no instante anterior são conhecidos (condições iniciais) e, portanto, o valor de T_P pode ser obtido diretamente, isto é, de forma explícita. A Figura 9 ilustra um esquema da formulação explícita.

Figura 9 – Modelo esquemático da formulação explícita.



Fonte: Próprio autor.

Tem-se, portanto, um conjunto de equações explícitas, cujo cálculo direto resulta na solução do problema.

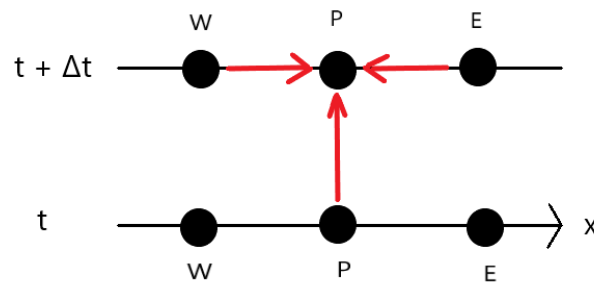
3.3.2 Formulação totalmente implícita

Analogamente, na formulação totalmente implícita é atribuído a θ o valor de 1. Assim, T_P passa a ser calculado não somente em ao relação instante anterior, mas também em função dos seus vizinhos, T_E e T_P , como ilustra a Figura 10. Dessa forma, Equação 49 é escrita como (MALISKA, 2017):

$$A_P \phi_P = \frac{M_P^o \phi_P^o}{\Delta t} + \sum A_{nb} \phi_{NB} + F_c \Delta V \quad (54)$$

$$\text{com } A_P = \sum A_{NB} - F_P \Delta V + \frac{M_P^o}{\Delta t}$$

Figura 10 – Modelo esquemático da formulação totalmente implícita.



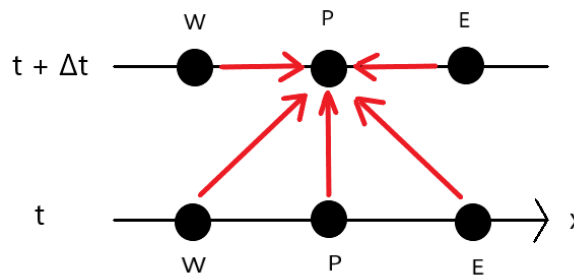
Fonte: Próprio autor.

Tem-se, então, não somente um conjunto de equações, mas sim um sistema linear de equações para cada volume de controle em cada passo temporal, com variáveis dependentes entre si. Nesse caso, se faz necessário a implementação de métodos iterativos para a solução do problema ([MALISKA, 2017](#)).

3.3.3 Formulação implícita

A formulação implícita ocorre quando um valor intermediário entre 0 e 1 é atribuído a θ , em que a solução do sistema linear obtido também requer a implementação de métodos iterativos. A Figura 11 ilustra o esquema da referida formulação.

Figura 11 – Modelo esquemático da formulação implícita.



Fonte: Próprio autor.

3.4 Solução do sistema linear de equações

Os métodos de solução de sistemas lineares de equações podem ser classificados como diretos ou iterativos. Os métodos diretos não utilizam aproximações ou estimativas iniciais, mas resolvem o sistema de equações a partir da inversão da matriz completa dos coeficientes. Um problema de dinâmica dos fluidos computacional consiste em solucionar um sistema linear de equações para cada volume de controle e em cada passo temporal, no qual existem variáveis dependentes entre si. Tal sistema de equações discretizadas gera, portanto, matrizes de grande tamanho e consideravelmente esparsas. Dessa forma, é

necessário um esforço computacional excessivo durante a operação de inversão matricial, o que torna os métodos diretos inviáveis para a maioria das aplicações de dinâmica dos fluidos (MALISKA, 2017).

3.4.1 Método iterativo de Jacobi

Este método busca resolver o sistema linear visitando equação por equação, usando os valores das variáveis do nível iterativo anterior. Utilizando como exemplo a forma simplificada da equação que descreve o fenômeno da condução tridimensional transiente, tem-se (MALISKA, 2017):

$$A_P T_P^{k+1} = \sum A_{nb} T_{NB}^k + B_P \quad (55)$$

Dessa forma, o ciclo iterativo empregado por esse método consiste em: estimar o campo inicial da variável; iterar em k ; a partir da Equação 55, calcular o valor da variável no ponto P ; conferir a convergência e retornar ao passo inicial caso o critério não seja atendido. Trata-se de um método de lenta convergência e que requer uma matriz com dominância diagonal para convergir (MALISKA, 2017).

3.4.2 Método iterativo de Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel é semelhante ao anterior, com a diferença de utilizar na solução de um ciclo iterativo valores de variáveis calculadas neste mesmo ciclo. Tal característica torna a convergência deste método mais rápida que o anterior. Utilizando novamente da forma simplificada da equação da condução tridimensional transiente, tem-se (MALISKA, 2017):

$$A_P T_P^{k+1} = \sum A_{nb} T_{NB}^{k+1} + A_e T_E^k + A_n T_N^k + A_f T_F^k + B_P \quad (56)$$

O ciclo iterativo empregado por esse método consiste em: estimar o campo inicial da variável; iterar em k ; calcular a variável no ponto P a partir da Equação 56, considerando como conhecidas dentro de um mesmo ciclo as propriedades em W , S e B (tridimensional); conferir a convergência e retornar ao passo inicial caso o critério não seja satisfeito (MALISKA, 2017).



4 Definição do campo de velocidades

Como visto na Seção 3.1, a solução das equações de Navier-Stokes em problemas meramente difusivos se dá a partir de técnicas numéricas de integração temporal e espacial. Entretanto, nos problemas convectivos é necessário conhecer o campo de velocidades do escoamento, para, somente assim, calcular a distribuição das demais propriedades. Na Seção 3.2.2, foi apresentado o equacionamento do problema mais geral de fenômenos de transporte, isto é, a convecção e difusão tridimensional transiente. Entretanto, assumiu-se que, de alguma forma, o campo de velocidades $\mathbf{u}(u,v,w)$ já era conhecido. Este capítulo, portanto, apresentar o método iterativo empregado para tornar possível o cálculo da velocidade e, conseqüentemente, das demais variáveis de interesse dos problemas de mecânica dos fluidos computacional.

Para um escoamento bidimensional, com massa específica constante e sem transferência de calor, as variáveis de interesse se resumem à pressão e às componentes do vetor velocidade em cada direção, isto é, p , u e v , respectivamente. As equações governantes deste problema correspondem às equações do movimento em x (Equação 26), em y (Equação 27) e a conservação da massa para fluidos incompressíveis (Equação 10). De fato, as equações de Navier-Stokes resolvidas em cada direção retornariam os valores de u e v desejados. Bastaria, então, resolver uma terceira equação que retornasse o valor de p e, assim, dar sequência ao processo iterativo, repetindo-se os cálculos descritos, para cada passo no tempo, até que se obtenha a convergência desejada. Todavia, ocorre que a equação de conservação da massa não contém termos de pressão e, portanto, não é possível obter diretamente valores de p a partir dos cálculos de u e v . Observa-se, de fato, que a equação da continuidade apenas verifica se as velocidades calculadas satisfazem os princípios de conservação da massa, porém não indica o caminho para se obter valores de p que gerariam tais resultados para u e v . O desafio, portanto, consiste em determinar o campo de pressões que, inserido nas equações do movimento, dê origem a um campo de velocidades que, por sua vez, satisfaça os princípios de conservação da massa. Trata-se do problema de acoplamento pressão-velocidade (MALISKA, 2017).

4.1 O acoplamento pressão-velocidade

A partir dos procedimentos apresentados na Seção 3.2.2, se escrevem as equações de Navier-Stokes e da continuidade para o escoamento bidimensional, incompressível e sem transferência de calor, integradas por volumes finitos na sua forma simplificada, como

sendo (MALISKA, 2017):

$$A_P u_P = \sum A_{nb} u_{NB} - \frac{\Delta p}{\Delta x} \Delta V + B^u \quad (57)$$

$$A_P v_P = \sum A_{nb} v_{NB} - \frac{\Delta p}{\Delta y} \Delta V + B^v \quad (58)$$

$$\dot{M}_e - \dot{M}_w + \dot{M}_n - \dot{M}_s = 0 \quad (59)$$

Como já foi colocado, não existe uma equação que permita calcular o campo de pressão diretamente. Assim, é estimado um valor de p nas Equação 57 e 58, o que possibilita o cálculo de componentes de velocidade. Tais componentes, por sua vez, podem não satisfazer a Equação 59, gerando um erro a ser corrigido. Existem diferentes propostas para correção desse erro, sendo que cada uma delas define os diferentes métodos existentes para o tratamento de problemas de acoplamento pressão-velocidade.

4.1.1 O método SIMPLE - *Semi Implicit Linked Equations*

Desenvolvido por Patankar e Spalding (1983), o SIMPLE corresponde ao método precursor para solucionar as Equações 57, 58 e 59, baseado-se na estimativa de um campo de pressões p^* . Inserindo-se p^* na Equação 57 é obtida uma estimativa da componente x do vetor velocidade, dada por (MALISKA, 2017):

$$A_P u_P^* = \sum A_{nb} u_{NB}^* - \frac{\Delta p^*}{\Delta x} \Delta V + B^u \quad (60)$$

Subtraindo a Equação 60 da Equação 57 e definindo $p' = p - p^*$, tem-se que (MALISKA, 2017):

$$A_P u_P - A_P u_P^* = \sum A_{nb} (u_{NB} - u_{NB}^*) - \frac{\Delta p'}{\Delta x} \Delta V \quad (61)$$

Desprezando as diferenças $u_{NB} - u_{NB}^*$ e repetindo os mesmos procedimentos na direção y , tem-se as equações de correção das velocidades u e v , dadas por (MALISKA, 2017):

$$u_P = u_P^* - \frac{\Delta p'}{\Delta x} \frac{\Delta V}{A_P^u} \quad (62)$$

$$v_P = v_P^* - \frac{\Delta p'}{\Delta y} \frac{\Delta V}{A_P^v} \quad (63)$$

e nas interfaces, tem-se que (MALISKA, 2017):

$$u_e = u_e^* - \frac{\Delta p'_E - p'_P}{\Delta x} \frac{\Delta V}{A_P^u} \quad e \quad u_w = u_w^* - \frac{\Delta p'_P - p'_W}{\Delta x} \frac{\Delta V}{A_P^u} \quad (64)$$

$$v_n = v_n^* - \frac{\Delta p'_N - p'_P}{\Delta y} \frac{\Delta V}{A_P^v} \quad e \quad v_s = v_s^* - \frac{\Delta p'_P - p'_S}{\Delta y} \frac{\Delta V}{A_P^v} \quad (65)$$

Dessa forma, inserindo as Equações 64 e 65 na Equação 59, obtém-se (MALISKA, 2017):

$$\begin{aligned} & \rho_e \left[u_e^* - \frac{\Delta p'_E - p'_P}{\Delta x} \frac{\Delta V}{A_P^u} \right] \Delta y - \rho_w \left[u_w^* - \frac{\Delta p'_P - p'_W}{\Delta x} \frac{\Delta V}{A_P^u} \right] \Delta y \\ & + \rho_n \left[v_n^* - \frac{\Delta p'_N - p'_P}{\Delta y} \frac{\Delta V}{A_P^v} \right] \Delta x - \rho_s \left[v_s^* - \frac{\Delta p'_P - p'_S}{\Delta y} \frac{\Delta V}{A_P^v} \right] \Delta x = 0 \end{aligned} \quad (66)$$

e, finalmente, reunindo os coeficientes (MALISKA, 2017):

$$\begin{aligned} A_P p'_P &= A_e p'_E + A_w p'_W + A_n p'_N + A_s p'_S - \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}^*) \\ \text{com } \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}^*) &= \dot{M}_e^* - \dot{M}_w^* + \dot{M}_n^* - \dot{M}_s^* = 0 \end{aligned} \quad (67)$$

Verifica-se que a Equação 67 corresponde à equação da conservação da massa modificada de forma a retornar diretamente os valores de p , tal que $p = p' + p^*$. Torna-se possível, então, implementar o cálculo iterativo e segregado de cada uma das variáveis desejadas, tal que (MALISKA, 2017):

1. Inicialmente, estima-se os campos de velocidades $\mathbf{u}$ e pressões p^* ;
2. Calculam-se os coeficientes das Equações 57 e 58;
3. Calcula-se um campo de velocidades $\mathbf{u}^*$ que satisfaça as equações de movimento (Equação 60);
4. A partir de $\mathbf{u}^*$ e da Equação 67, calcula-se p' ;
5. A partir de p' e das Equações 62 e 63, corrigem-se as velocidades tal que satisfaçam a equação de conservação da massa, obtendo-se um novo $\mathbf{u}$;
6. Calcula-se um novo p , tal que $p = p' + p^*$;
7. Repetem-se os passos descritos até que se atinja a convergência do processo iterativo.

O método SIMPLE originou diversos outros método muito semelhantes a ele. Basicamente, as evoluções do SIMPLE se diferem no cálculo do novo p , isto é, em relação ao passo 6 descrito acima. Entretanto, o algoritmo SIMPLE está presente essencialmente na maioria dos *softwares* existentes de dinâmica dos fluidos computacional (MALISKA, 2017).

4.1.2 O método PISO - *Pressure Implicit with Splitting Operators*

O método PISO corresponde a uma das diversas evoluções do SIMPLE e, fundamentalmente, insere no processo iterativo um novo passo de correção da pressão e da velocidade. Essa sub-etapa do processo iterativo é semelhante ao que foi apresentado na Seção 4.1.1 e é descrita com riqueza de detalhes em Issa (1986).

Tanto o SIMPLE como o PISO compreendem inúmeras adaptações e, de acordo com a estrutura de cada *software*, podem ser formulados para resolver tanto problemas estacionários, quanto transitórios. O presente trabalho foi desenvolvido com base no *OpenFOAM*[®], plataforma *open source* na qual o método SIMPLE é formulado para simulações estacionárias. No caso de problemas transitórios, por sua vez, o *OpenFOAM*[®] utiliza o algoritmo PIMPLE, isto é, um híbrido entre os métodos SIMPLE e PISO (BARTON, 1998).



5 Modelo de turbulência

Este capítulo tem por objetivo introduzir brevemente o modelo de turbulência utilizado neste trabalho, bem como realizar considerações relevantes a respeito do tema.

5.1 Modelo k - ω SST

O modelo k - ω SST compreende alta capacidade de simular condições de gradiente adverso de pressão, bem como a separação do escoamento, quando se comparado a outros modelos de turbulência disponíveis. Desenvolvido por [Menter \(1994\)](#), corresponde a um método acurado e robusto para avaliar o escoamento próximo à parede e, também, a um dos modelo de turbulência mais utilizados em aplicações de engenharia ([OPENFOAM... , 2011](#)).

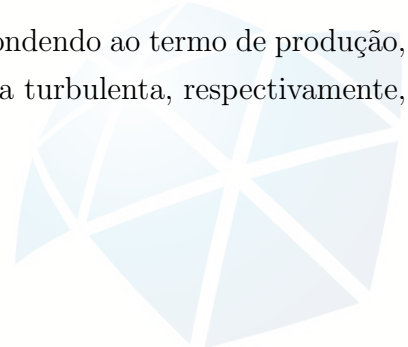
A ideia central deste modelo consiste em utilizar uma abordagem k - ω no tratamento de elementos próximos à parede e, paralelamente, uma abordagem semelhante ao modelo k - ϵ para elementos mais distantes. Dessa forma, o modelo corrige o problema do método k - ω no que diz respeito à sensibilidade para entradas de propriedades turbulentas na corrente livre e, ainda, contorna a deficiência de modelos k - ϵ em operar com grandes gradientes de pressão. ([OPENFOAM... , 2011](#)).

Fundamentalmente, [Menter \(1994\)](#) buscou desenvolver um modelo de turbulência de duas equações próprio para modelagem da sub-camada viscosa, sendo este modelo formulado a partir de testes experimentais realizados pelo autor. Assim, a formulação proposta para o modelo k - ω SST dada por [Menter \(1994\)](#):

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j k)}{\partial x_j} = P - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (68)$$

$$\frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \omega)}{\partial x_j} = \frac{\gamma}{\nu_t} P - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1 - F_1) \frac{\rho \sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (69)$$

onde P , ν_t e μ_t são definidos pelas Equações [70](#) e [71](#), correspondendo ao termo de produção, à viscosidade cinemática turbulenta e à viscosidade dinâmica turbulenta, respectivamente,



tal que (MENTER, 1994):

$$P = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$\text{com } \tau_{ij} = 2\mu \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (70)$$

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \quad \text{e} \quad \nu_t = \frac{\mu_t}{\rho} \quad (71)$$

Observa-se nas Equação 68 e 69 que o modelo insere duas novas propriedades ao escoamento, isto é, a energia cinética turbulenta k e a taxa de dissipação turbulenta específica ω . Tais propriedades não são quantidades físicas reais, porém representam a geração e a destruição da turbulência no escoamento. É importante ressaltar que as equações descritas acima não são derivadas de princípios físicos fundamentais e que, assim como todos os modelos de turbulência, o k - ω SST carrega uma considerável porção de empirismos e incertezas (OPENFOAM..., 2011). O desenvolvimento completo das referidas equações pode ser encontrado com riqueza de detalhes nos trabalhos de Menter (1993), Menter (1994) e Menter, Kuntz e Langtry (2003).

5.1.1 Tratamento próximo à parede

Cada modelo de turbulência realiza um tratamento distinto para as regiões próximas à parede do domínio computacional. Nesse sentido, surge o conceito de distância adimensional da parede, y^+ , definida por (MOUKALLED; MANGANI; DARWISH, 2016):

$$y^+ = \frac{\rho u_* y}{\mu} = \frac{u_* y}{\nu}$$

$$\text{com } u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (72)$$

onde y é o tamanho do primeiro elemento e τ_w a tensão de cisalhamento na parede. Cada modelo de turbulência tem, portanto, uma faixa de operação para y^+ dentro da qual o modelo é confiável. Conforme apresentado por Menter, Kuntz e Langtry (2003), o modelo k - ω SST é adequado para $y^+ < 2$, porém em diversos trabalhos é comumente adotado $7 > y^+ \approx 1$.

A partir da Equação 72, observa-se que o valor de y^+ somente será conhecido após a simulação do escoamento, isto pois, é dependente da tensão de cisalhamento na parede, que por sua vez depende do campo de velocidades. Sendo assim, se faz necessária a estimativa inicial de um y^+ a fim de se construir uma malha computacional que atenda os critérios

do modelo de turbulência. Para tanto, podem ser adotados os passos apresentados pelas Equação 73, 74, 75 e 76, tal que (Y..., 2011):

$$C_f = [2 \log_{10}(Re_x) - 0,65]^{-2,3} \quad \text{para } Re_x < 10^9 \quad (73)$$

$$\tau_w = C_f \frac{\rho U^2}{2} \quad (74)$$

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (75)$$

$$y = \frac{y^+ \mu}{\rho u_*} \quad (76)$$

onde C_f é o coeficiente de atrito superficial calculado pela correlação de Schlichting e U é a velocidade de corrente livre.

5.1.2 Condições de contorno turbulentas

Assim como todas as demais propriedades do escoamento, se faz necessário definir os valores de k e ω nos contornos do domínio computacional. Uma vez que a turbulência nos contornos raramente é conhecida, também é preciso estimar valores para essas propriedades em tais regiões. Assim, podem ser utilizadas as expressões (TURBULENCE..., 2014):

$$k = \frac{3}{2} (UI)^2 \quad (77)$$

$$\omega = \frac{\rho k}{\mu} \left(\frac{\mu_t}{\mu} \right)^{-1} \quad (78)$$

onde I é a intensidade de turbulência. Por sua vez, os valores de I e μ_t/μ podem ser estimados a partir da Tabela 1.

Tabela 1 – Estimativas para I e μ_t/μ para cada caso de turbulência.

	Baixa	Média	Alta
I	1%	5%	10%
μ_t/μ	1	10	100

Fonte: Adaptado de OpenFOAM... (2011).



6 Escoamento externo viscoso

Um escoamento externo ocorre sobre corpos imersos em um fluido sem fronteiras. Exemplos práticos correspondem ao escoamento de ar ao redor da asa de um avião em pleno voo, ou de água ao redor de uma embarcação em movimento. Em todo caso, a característica principal deste escoamento é a aparição de uma força resultante devido ao cisalhamento e à pressão atuantes na superfície do corpo imerso, tal que (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2000):

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int_S d\vec{F} = \int_S d\vec{F}_{cis} + \int_S d\vec{F}_p \\ \text{com } d\vec{F}_{cis} &= \tau_w d\vec{S} \text{ e } \vec{F}_p = -pd\vec{S}\end{aligned}\quad (79)$$

onde τ_w corresponde à tensão de cisalhamento na parede do corpo submerso e é calculada em função da viscosidade do fluido, como mostrado pela Equação 21. A componente paralela ao escoamento desta força é chamada de arrasto e a componente perpendicular é chamada de sustentação.

6.1 Arrasto

A força de arrasto F_D , atuante sobre um corpo de comprimento característico d , imerso num fluido em movimento com massa específica ρ , viscosidade μ e velocidade U , pode ser escrita na sua forma funcional como sendo (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2000):

$$F_D = f(d, \rho, \mu, U) \quad (80)$$

Aplicando o teorema dos Pi de Buckingham, obtém-se (BUCKINGHAM, 1914):

$$\frac{F_D}{\rho U d^2} = f\left(\frac{\rho U d}{\mu}\right) \quad (81)$$

Verifica-se que a força de arrasto está intimamente ligada com a velocidade do fluido e com a geometria do corpo submerso. Define-se, então, o coeficiente de arrasto C_D , como (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2000):

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 S} \quad (82)$$

onde S é a área superficial característica do corpo submerso.



6.1.1 Arrasto de atrito

Para o caso específico de uma placa plana paralela ao escoamento, a força de arrasto é simplesmente a componente de cisalhamento da Equação 79, tal que (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2000):

$$F_D = \int_S \tau_w dS$$

$$\text{com } C_D = \frac{\int_S \tau_w dS}{\frac{1}{2} \rho U^2 S} \quad (83)$$

onde, neste caso, S corresponde à área total da superfície da placa em contato com o fluido. Nesta condição específica, o arrasto se deve somente ao atrito viscoso em razão do movimento relativo existente entre o fluido e o corpo submerso (placa plana). Trata-se de um exemplo trivial, porém, uma abordagem numérica em volumes finitos consiste em assumir que a face do volume de controle infinitesimal coincidente a uma parcela da superfície total do corpo, pode ser aproximada de uma placa plana. Assim, a somatória de todas as referidas forças, atuantes em cada volume de controle que compõe a superfície do corpo, corresponde à força de arrasto de atrito total exercida sobre o corpo (FORTUNA, 2000).

6.1.2 Arrasto de pressão

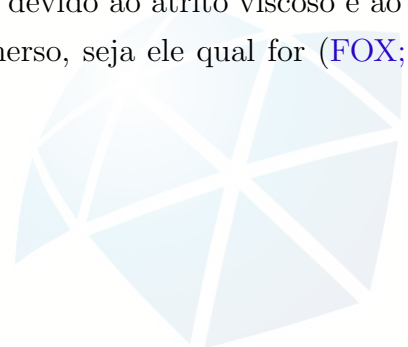
Para o escoamento sobre uma placa plana normal ao movimento do fluido a tensão de cisalhamento superficial é desprezível e a força de arrasto é dada por (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2000)

$$F_D = \int_S p dS$$

$$\text{com } C_D = \frac{\int_S p dS}{\frac{1}{2} \rho U^2 S} \quad (84)$$

onde S é a área projetada perpendicular ao fluxo que, neste caso, é a própria área da placa. Por sua vez, p corresponde ao gradiente de pressão existente à montante e jusante da placa. Nesta condição a força de arrasto é função, também, do campo de pressões.

Nos casos mais gerais os dois tipos de arrasto co-existem. Dessa forma, a componente total da força de arrasto será dada pela soma das parcelas devido ao atrito viscoso e ao gradiente de pressão à montante e jusante do corpo submerso, seja ele qual for (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2000).



6.2 Sustentação

A componente de sustentação da força total que age sobre um corpo submerso em um escoamento é dada por (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2000):

$$F_L = \int_{S_p} p dS_p$$

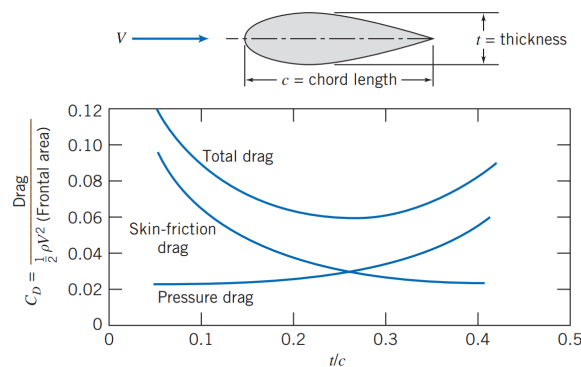
$$\text{com } C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho U^2 S_p} \quad (85)$$

onde S_p é a área planiforme projetada paralelamente ao escoamento e, neste caso, p é o gradiente de pressão acima e abaixo do corpo submerso.

6.3 Carenagem

A desenvolvimento de geometrias mais aerodinâmicas equivale, essencialmente, na obtenção de corpos com elevados coeficientes de sustentação, à custa dos menores coeficientes de arrasto possíveis. Neste contexto surge a definição de carenagem, isto é, forma aerodinâmica de um corpo desenvolvida com o objetivo de reduzir o arrasto por pressão. Um corpo com forma de lágrima (cilindro carenado) produz um gradiente de pressão menos severo que aquele produzido por um cilindro de seção circular (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2000). Entretanto quanto maior a extensão da carenagem, maior será a área superficial do corpo submerso e, por conseguinte, maior será o arrasto de atrito à ele submetido.

Figura 12 – Coeficiente de arrasto sobre uma estrutura carenada como função da razão de espessura.



Fonte: Adaptado de (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2000).

A Figura 12 mostra o comportamento do coeficiente de arrasto em função da razão entre a espessura e a corda de um aerofólio. Entretanto, diferentes maneiras de se variar o coeficiente de arrasto têm sido constantemente elaboradas, de forma que avanços recentes em métodos computacionais têm levado ao desenvolvimento de formas ótimas geradas

por computador. De maneira análoga, se desenvolvem os estudos que buscam otimizar geometrias do ponto de vista da sustentação, nos quais dispositivos passivos são propostos com o objetivo de amplificar os valores de C_L de um dado perfil aerodinâmico. É neste sentido que reside o escopo do presente trabalho.

6.3.1 Vorticidade

A vorticidade, ζ , é definida pelo rotacional do campo de velocidades, tal que (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2000):

$$\zeta = \vec{\nabla} \times \mathbf{u} \quad (86)$$

Esta grandeza permite analisar a emissão de vórtices em um dado escoamento. Por sua vez, os vórtices são estruturas tridimensionais, típicas de escoamentos turbulentos, que descrevem a trajetória de uma partícula girando em torno dos três eixos coordenados. Assim, é possível avaliar a intensidade da turbulência do escoamento a partir da visualização do campo de vorticidade.



7 Metodologia

7.1 Modelagem 3D dos aerofólios

A partir do *software SALOME*, plataforma *open source* para modelagem 3D, foram obtidas as geometrias dos aerofólios apresentados no Capítulo 1. Para tanto, o perfil NACA 63₄-221 foi utilizado como *baseline*, semelhante ao reportado por Fish e Battle (1995), e os aerofólios modificados foram construídos de modo a respeitar as especificações geométricas apresentadas pela Tabela 2.

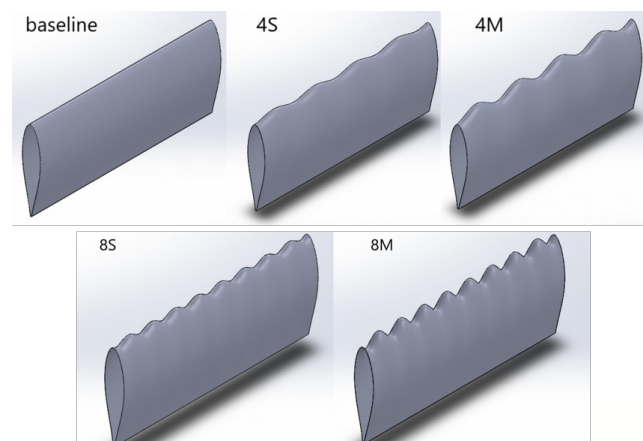
Tabela 2 – Parâmetros geométricos dos aerofólios modificados em função de sua corda aerodinâmica (c).

Aerofólio	Amplitude	Comprimento de onda
4S	0.025 c	0.050 c
4M	0.500 c	0.050 c
8S	0.025 c	0.025 c
8M	0.500 c	0.025 c

Fonte: Adaptado de Johari, Henoch e A. (2007).

Assim, a Figura 13 apresenta as geometrias obtidas.

Figura 13 – Geometria 3D dos aerofólios *baseline*, 4S, 4M, 8S e 8M.

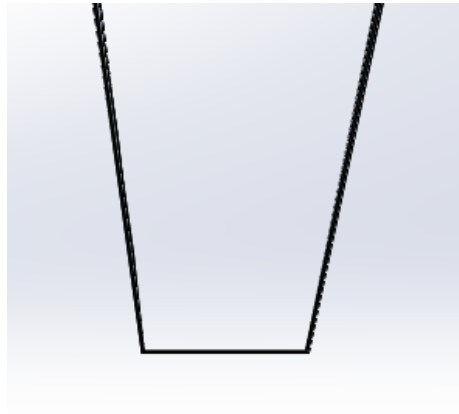


Fonte: Próprio autor.

Os aerofólios mostrados pela Figura 13 são exatamente iguais às geometrias estudadas experimentalmente por Bocalon et al. (2019), com 146 mm de largura e 70 mm de corda média. Entretanto, para evitar problemas já bem consolidados na literatura durante a etapa de geração de malha, se fez necessário eliminar quina presente na região posterior de cada aerofólio. Assim, o bordo de fuga de todos os perfis foram truncados em 5 mm ,

o que corresponde a menos de 10% da corda média de cada um. A Figura 14 ilustra o bordo de fuga das as geometrias utilizadas na obtenção de todos os resultados futuramente apresentados.

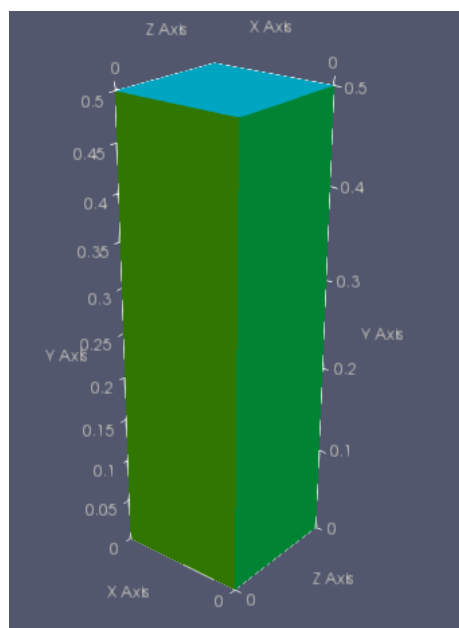
Figura 14 – Truncamento do bordo de fuga dos aerofólios.



Fonte: Próprio autor.

Além dos aerofólios, foram construídas, evidentemente, as superfícies que delimitam o domínio computacional do problema, as quais são atribuídas as condições de contorno do escoamento. Para tanto, foram utilizadas as dimensões do túnel hidrodinâmico vertical do Laboratório de Visualização de Escoamentos do Departamento de Engenharia Mecânica a UNESP - campus de Ilha Solteira, o qual também foi utilizado por [Bocalon et al. \(2019\)](#) na obtenção de seus resultados. A Figura 15 ilustra o modelo CAD da seção de testes do túnel em questão.

Figura 15 – Modelo CAD do túnel hidrodinâmico.



Fonte: Próprio autor.

7.2 Geração da malha computacional

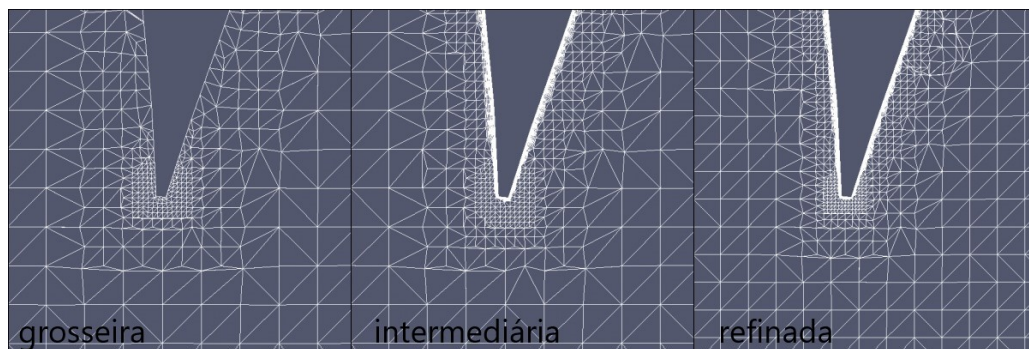
Neste trabalho, durante todas as etapas de implementação computacional do método de volumes finitos, foram utilizados os pacotes de *softwares open sources* baseados no *OpenFOAM*[®]. Sendo assim, a etapa de discretização espacial se deu a partir do *blockMesh* e do *snappyHexMesh*, geradores nativos de malha hexaédrica dominante.

7.2.1 Análise de sensibilidade de malha

Apresentada por [Richardson \(1911\)](#), a extrapolação de Richardson (ER) é o método mais recomendado pela literatura para estimar erros de discretização durante a geração de malha computacional ([CELİK et al., 2008](#)). Portanto, a definição do tamanho de malha apropriado se deu pelo *Grid Convergence Index* (*GCI*) de [Celik et al. \(2008\)](#), critério baseado na ER e validado por diversos estudos em *CFD*, como em [Ferziger e Perić \(1996\)](#), [Eça, Hoekstra e Roache \(2007\)](#), [Broadhead et al. \(2004\)](#) e [Roache \(1993\)](#).

Assim, respeitando os procedimentos do método *GCI*, três malhas foram selecionadas nos tamanhos de, aproximadamente, $2,2 \times 10^6$, $7,4 \times 10^5$ e $3,3 \times 10^5$ elementos. A Figura 16 mostra do bordo de fuga do perfil *baseline* obtido para cada uma dessas malhas.

Figura 16 – Malhas geradas para a análise de sensibilidade.



Fonte: Próprio autor.

Utilizando o coeficiente de sustentação como variável chave, obtiveram-se os resultados de sensibilidade de malha apresentados na Tabela 3. A partir dos valores obtidos, verifica-se um caso de convergência oscilatória, em que o *GCI* entre as malhas refinada e intermediária foi de 0,07%, e entre as malhas grosseira e intermediária foi de 0,001%. Assim, como os fatores de refinamento r_{21} e r_{32} foram ambos maiores que 1,3 e, ainda, GCI_{fine}^{21} foi menor que 2,0%, os resultados contidos na Tabela 3 permitiram a utilização da malha intermediária sem perdas significativas na acurácia dos resultados, conforme o critério apresentado por [Celik et al. \(2008\)](#).

A referida análise foi feita apenas para o escoamento a 1400 Reynolds ao redor do perfil *baseline*. Entretanto, a faixa de Reynolds estudada pode ser considerada pequena

Tabela 3 – Parâmetros obtidos durante análise de sensibilidade de malha.

Parâmetro	Valor
N1; N2; N3	2198771; 740689; 326458
r_{21}	1,43719
r_{32}	1,31402
e_a^{21}	3,7343%
e_a^{32}	0,0208%
e_{ext}^{21}	0,0559%
e_{ext}^{32}	0,0009%
GCI_{fine}^{21}	0,0700%
GCI_{coarse}^{32}	0,0011%

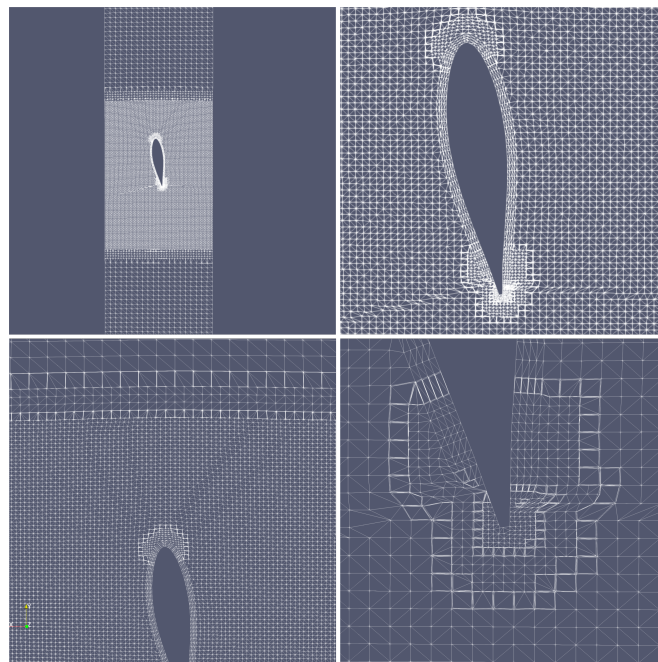
Fonte: Próprio autor.

e todas geometrias possuem razoável semelhança. Assim, os resultados mostrados na Tabela 3 foram considerados válidos para todos os aerofólios e escoamentos com número de Reynolds entre 1000 e 1900.

7.2.2 Geração de malha para implementação do modelo de turbulência

Para que fossem atendidos os critérios de y^+ apresentados na Seção 5.1, se fez necessário manipular uma maior quantidade de parâmetros durante a geração de malha. Assim, a Figura 17 mostra os detalhes da malha computacional gerada para atender as especificações do modelo de turbulência.

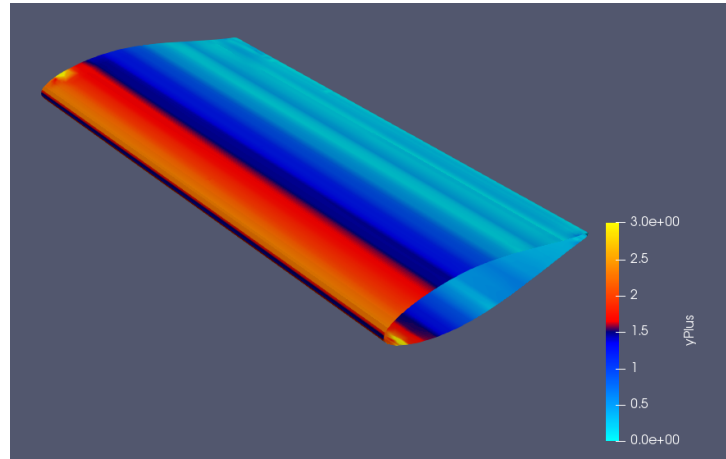
Figura 17 – Malha gerada para implementação do modelo de turbulência.



Fonte: Próprio autor.

Para obter a malha mostrada pela Figura 17, foi necessário modificar os parâmetros de geração de modo a elevar número de elementos para $0,92 \times 10^6$. A Figura 18, por sua vez, apresenta a distribuição de y^+ sobre a malha em questão.

Figura 18 – Distribuição de y^+ sobre a malha de $0,92 \times 10^6$ elementos.



Fonte: Próprio autor.

Verifica-se que a malha da Figura 17 atendeu ao critério do modelo de turbulência $k-\omega SST$, isto é, com y^+ menor do que 7 e, além disso, com valores próximos de 1 em todas as regiões. Ainda, se considerou desnecessária a repetição dos procedimentos descritos na Seção 7.2.1, visto que as alterações promovidas pouco elevaram o número de elementos da malha. Como mostra a Tabela 3, em muito se assemelham os resultados obtidos para as malhas de $0,74 \times 10^6$ e $2,2 \times 10^6$ elementos e, portanto, foi assumido que a malha mostrada pela Figura 17 também atendeu ao critério GCI .



8 Resultados e discussões

Este capítulo tem por objetivo a apresentação das simulações aplicadas com o intuito de gerar evidências numéricas complementares aos resultados experimentais de [Bocalon et al. \(2019\)](#), bem como avaliar quantitativamente possíveis ganhos em sustentação por parte dos aerofólios modificados bio-inspirados nas nadadeiras peitorais da Baleia jubarte.

8.1 Comparações numérico-experimentais

Neste trabalho buscaram-se reproduzir escoamentos a 1400 e 1900 Reynolds ao redor dos aerofólios com ângulos de ataque iguais a 2° e 8° , isto é, mesmas configurações experimentais avaliadas por [Bocalon et al. \(2019\)](#). Assim, para fins comparativos, as Figuras 19, 20 e 21 trazem as referidas visualizações experimentais obtidas por [Bocalon et al. \(2019\)](#).

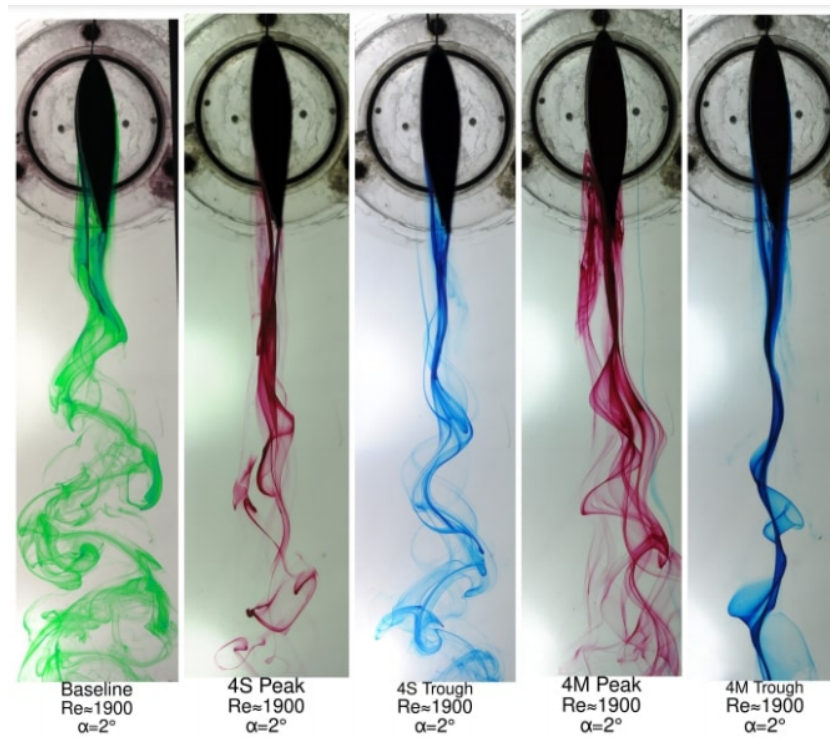
Figura 19 – Visualização experimental para 1400 Re e ângulo de ataque de 8° .



Fonte: Adaptado de [Bocalon et al. \(2019\)](#).

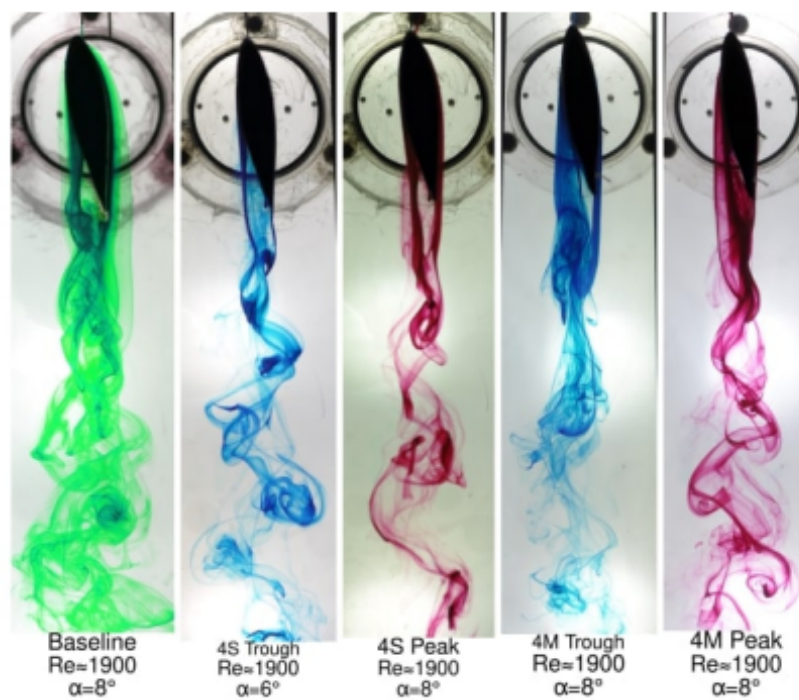
A Tabela 4, por sua vez, apresenta as distâncias percentuais entre o pontos de separação do escoamento e o bordos de ataque de cada perfil calculadas em relação à sua corda aerodinâmica e obtidas para os resultados experimentais mostrados pelas Figuras 19, 20 e 21.

Figura 20 – Visualização experimental para 1900 Re e ângulo de ataque de 2° .



Fonte: Adaptado de Bocalon et al. (2019).

Figura 21 – Visualização experimental para 1900 Re e ângulo de ataque de 8° .



Fonte: Adaptado de Bocalon et al. (2019).

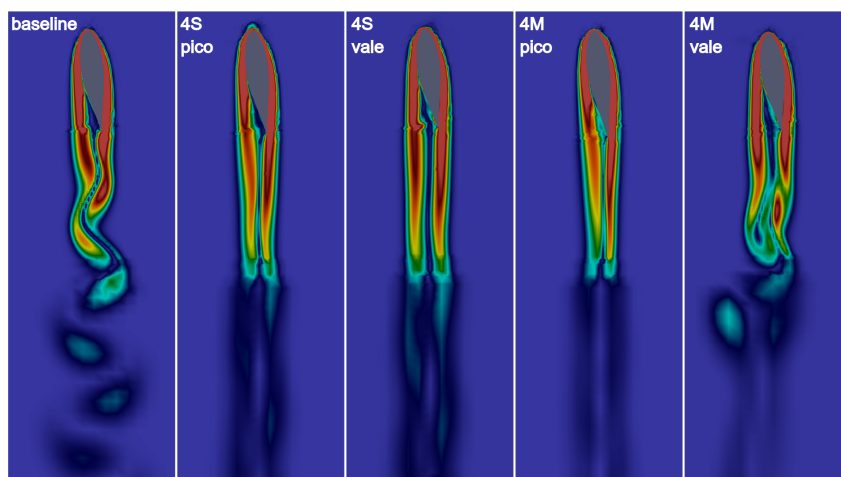
Tabela 4 – Resultados experimentais para a posição do ponto de separação do escoamento com relação à corda aerodinâmica dos perfis.

α	Re	Baseline (%)	4S-pico (%)	4S-vale (%)	4M-pico (%)	4M-vale (%)
8°	1400	46,9	78,7	63,0	78,4	53,5
2°	1900	68,0	72,0	73,0	78,7	67,0
8°	1900	67,6	79,4	59,3	72,0	68,4

Fonte: Adaptado de [Bocalon et al. \(2019\)](#).

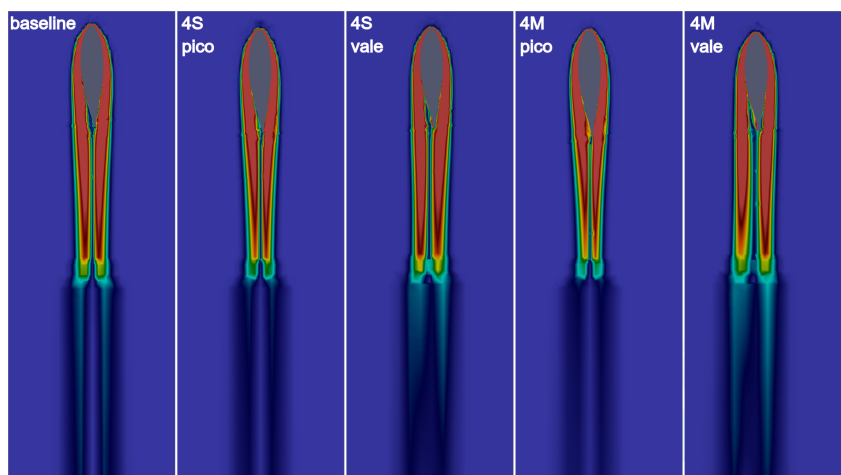
Os resultados de simulação numérica para as configurações de escoamento descritas acima são, então, apresentados pelas Figuras 22, 23 e 24, que ilustram o capô de vorticidade ao redor dos perfis. Analogamente, a Tabela 5 apresenta os resultados numéricos obtidos para as distâncias entre o ponto de separação do escoamento e o bordo de ataque dos aerofólios em relação a sua corda aerodinâmica.

Figura 22 – Visualização numérica para 1400 Re e ângulo de ataque de 8° .

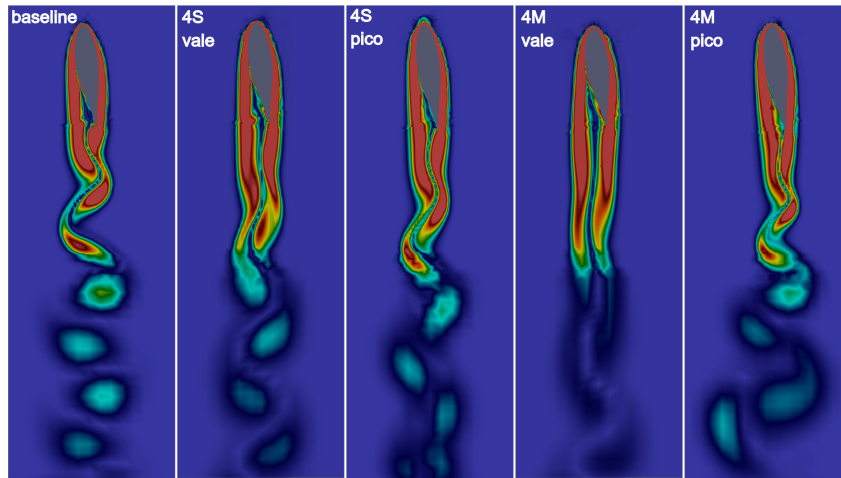


Fonte: Próprio autor.

Figura 23 – Visualização numérica para 1900 Re e ângulo de ataque de 2° .



Fonte: Próprio autor.

Figura 24 – Visualização numérica para 1900 Re e ângulo de ataque de 8° .

Fonte: Próprio autor.

Tabela 5 – Resultados numéricos para a posição do ponto de separação do escoamento com relação à corda aerodinâmica dos perfis.

α	Re	Baseline (%)	4S-pico (%)	4S-vale (%)	4M-pico (%)	4M-vale (%)
8°	1400	59,8	61,9	56,2	64,4	49,9
2°	1900	70,2	77,3	75,1	78,7	68,3
8°	1900	64,0	65,4	57,9	66,6	54,8

Fonte: Próprio autor.

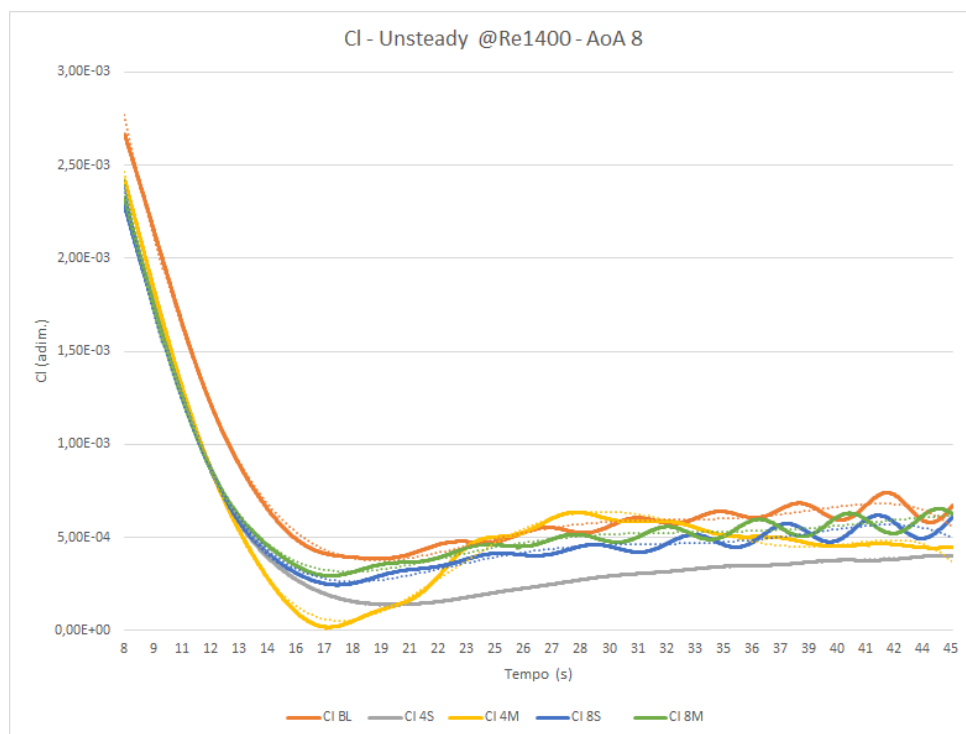
Comparando as Figuras 22, 23 e 24 com os respectivos resultados experimentais, Figuras 19, 20 e 21, é possível avaliar o nível de concordância entre as visualizações numéricas e aquelas obtidas por Bocalon et al. (2019). Para 1400 Re com 8° de inclinação, foi considerada coerente a semelhança entre os resultados. Porém, houve significativa divergência para o aerofólio 4S, em que numericamente não se observou geração de vórtices como nas visualizações experimentais. Para 1900 Re com 2° de inclinação, tanto na simulação, quanto nos resultados experimentais, não se observou geração intensa de vórtices para quase todos os perfis. A exceção ocorre para o *baseline*, em que experimentalmente se verificou elevada vorticidade logo após o bordo de fuga. Além disso, também nessa configuração, as abordagens mostraram diferenças nas estruturas das regiões mais distantes dos aerofólios, em que experimentalmente se verificou certa instabilidade no escoamento, não observada numericamente. Já para 1900 Re com 8° de inclinação, em todos os perfis foi observada significativa semelhança entre as topologias dos escoamentos numérico e experimental. Há de se considerar que o fenômeno de transporte em análise é tipicamente transiente, isto é, tem sua aparência constantemente modificada. Portanto, apesar das divergências apontadas, uma análise qualitativa geral permite considerar que as visualizações numéricas apresentaram boa concordância com os escoamentos experimentais, como se observa, por exemplo, no comprimento, espessura e disposição da esteira de vórtices.

A partir dos resultados experimentais da Tabela 4, verifica-se que as protuberâncias atrasaram o ponto de separação do escoamento em 7 das 12 comparações possíveis, isto é, entre os valores obtidos para os aerofólios modificados e o *baseline*. A Tabela 5, por sua vez, indicou numericamente que as protuberâncias atrasariam o ponto de separação em 9 das 12 comparações. Em 75% dos casos, os resultados numéricos da Tabela 5 indicaram o mesmo comportamento relativo que se observa na Tabela 4 entre os aerofólios modificados e o *baseline*. Ainda, definindo uma tolerância absoluta para o ponto de separação igual a $\pm 5\%$, verifica-se que os resultados numéricos da Tabela 5 foram iguais aos respectivos valores experimentais em 47% dos casos. Elevando a tolerância para $\pm 15\%$, os resultados das Tabelas 4 e 5 são coincidentes em 93% das vezes.

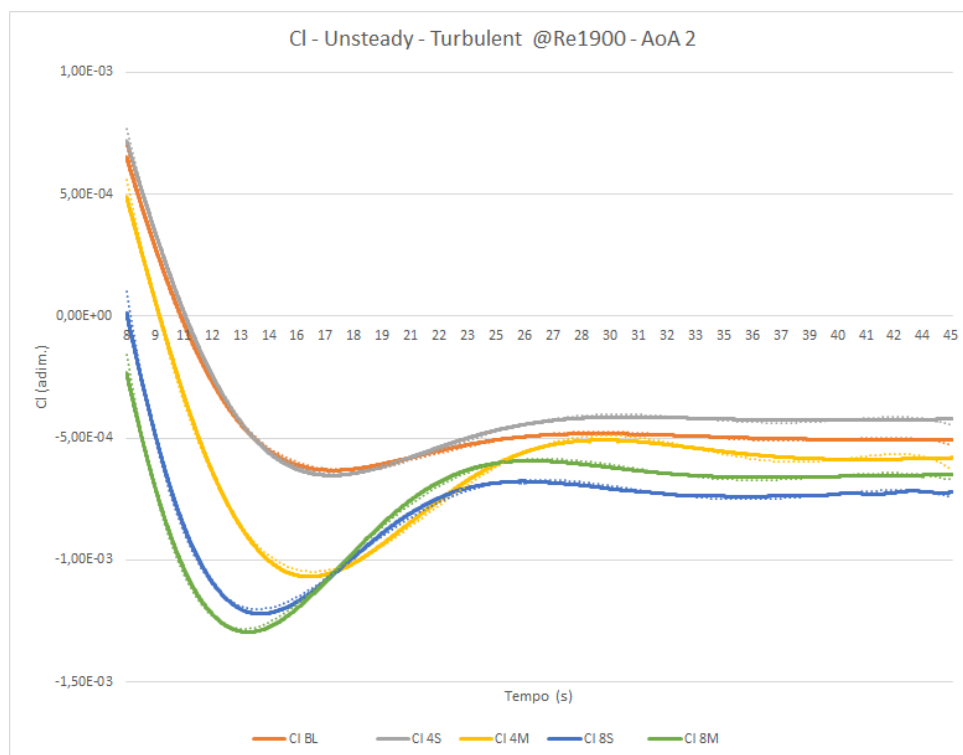
8.2 Coeficiente de Sustentação

Uma vez que se considerou como válida a metodologia computacional empregada, foi possível realizar as comparações pertinentes entre os resultados numéricos obtidos para o coeficiente de sustentação dos aerofólios. Assim, as Figuras 25, 26 e 27 apresentam os resultados de C_l obtidos para cada caso simulado. Observa-se que foram retirados os valores obtidos para os instantes anteriores a 8 segundos. Isto, pois, essa região do domínio temporal está associada a elevados gradientes de propriedades não representativos do escoamento e, portanto, convém desprezá-la.

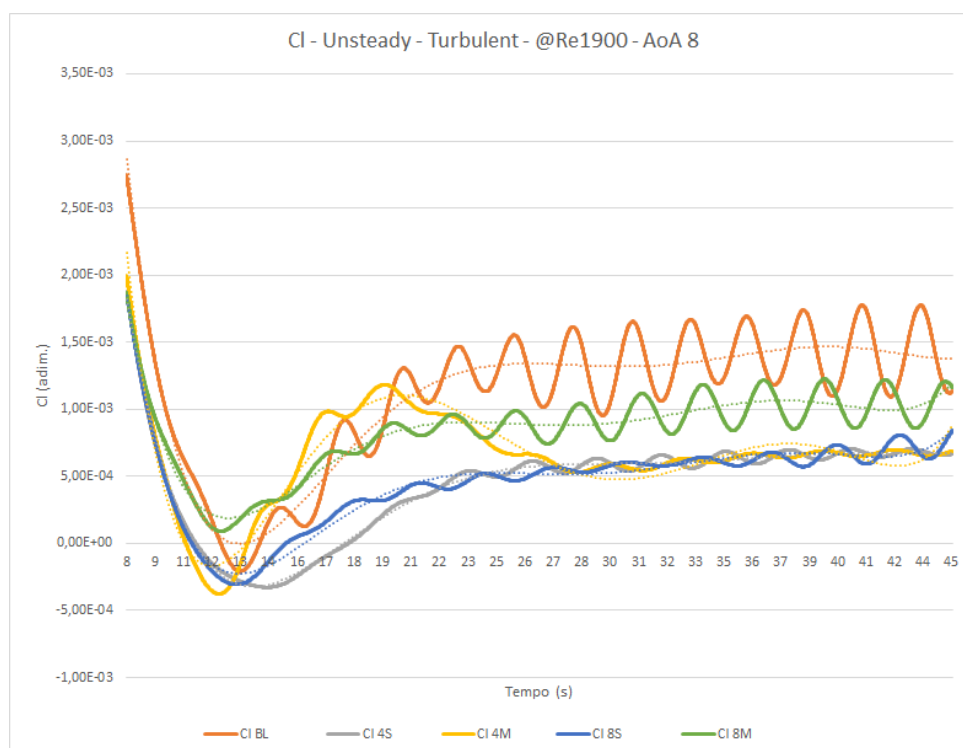
Figura 25 – Coeficientes de sustentação a 1400 Re e ângulo de ataque de 8° .



Fonte: Próprio autor.

Figura 26 – Coeficientes de sustentação a 1900 Re e ângulo de ataque de 2° .

Fonte: Próprio autor.

Figura 27 – Coeficientes de sustentação a 1900 Re e ângulo de ataque de 8° .

Fonte: Próprio autor.

Para efeito comparativo foram considerados apenas os valores obtidos a partir dos 25 segundos, instante a partir do qual a solução passou a convergir. Entretanto, para um ângulo de ataque igual a 8° , os valores de C_l desempenharam uma característica oscilatória. Entendeu-se que tal característica está atrelada à oscilação das propriedades que ocorre à jusante dos aerofólios, devido à constante separação e reaproximação do escoamento no bordo de fuga. Assim, devido à maior velocidade, foram observadas oscilações de maior amplitude para o escoamento a $1900 Re$. Considerou-se, ainda, que o ângulo de ataque igual a 2° possibilitou ao escoamento uma transição mais suave, não ocorrendo oscilações de C_l como se observou para as Figuras 25 e 27. Para os casos em que houve oscilação, foram adotadas como representativas as regressões polinomiais de 6ª ordem dos valores de C_l , representadas nas figuras pelas curvas pontilhadas.

Verifica-se que, em comparação ao *baseline*, os resultados obtidos indicaram numericamente ganhos em sustentação por parte do aerofólio 4S para configuração de 2° e $1900 Re$. Houve, nesse caso, um ganho de aproximadamente 15,6% no coeficiente de sustentação do aerofólio quando comparado ao *baseline*. Tal resultado é consistente com as observações experimentais de Bocalon et al. (2019), em que os autores esperavam do aerofólio 4S o maior C_l . Entretanto, indícios numéricos favoráveis à geometria 4S foram obtidos apenas para condição específica de escoamento, isto é, com 2° de inclinação e $1900 Re$. Em todas as outras configurações o *baseline* foi o aerofólio que desenvolveu o maior coeficiente de sustentação.



9 Conclusões

O propósito deste trabalho foi promover o estudo de técnicas de dinâmica dos fluidos computacional para avaliar a performance de aerofólios alternativos bio-inspirados nas nadadeiras peitorais da Baleia Jubarte, visando contribuir com a literatura científica da área.

A geração de malha foi feita pelo *blockMesh* e *snappyHexMesh*, geradores nativos do *OpenFOAM*®. Cuidou-se para fossem atendidos os critérios de sensibilidade de [Celik et al. \(2008\)](#), bem como do modelo de turbulência $k-\omega$ SST, em que a distribuição de y^+ sobre a malha foi menor do que 7 e próxima de 1. Ainda, constatou-se que os resultados da simulação computacional reproduziram com razoável confiabilidade a topologia do escoamento observada por trabalhos experimentais anteriores.

Na configuração específica de escoamento a 1900 Reynolds e com os perfis inclinados em 2° , foram obtidos resultados numéricos que sugerem ganho de sustentação por parte do aerofólio 4S. Nesse caso, as protuberâncias no bordo de ataque impuseram ao aerofólio modificado um coeficiente de sustentação 15,6% maior em comparação ao *baseline*. Tal resultado é consoante com as observações experimentais de [Bocalon et al. \(2019\)](#), em que os autores atribuíram um melhor desempenho aerodinâmico ao aerofólio 4S. Entretanto, para as demais configurações de escoamento, isto é, 8° de inclinação a 1400 e 1900 Reynolds, o perfil *baseline* desenvolveu o maior C_l .

Conclui-se que, para baixos números de Reynolds e pequenas inclinações, não é recomendada a utilização das geometrias 4M, 8S e 8M em detrimento do aerofólio *baseline*. Entretanto, não é possível fazer análise conclusiva a respeito da geometria 4S, visto que em uma das condições estudadas a mesma promoveu ganho razoável em sustentação.

Para trabalhos futuros, propõe-se estender a análise das geometrias para maiores faixas de números de Reynolds e ângulos de ataque. No âmbito da metodologia a ser empregada, propõe-se o aperfeiçoamento dos parâmetros de geração de malha, de modo a ampliar as zonas de refino e aumentar a qualidade da malha. Sugere-se, também, o estudo de outros modelos de turbulência que possam atribuir maior acurácia aos resultados.



Referências

- BARTON, I. E. Comparison of simple-and piso-type algorithms for transient flows. *International Journal for numerical methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 26, n. 4, p. 459–483, 1998.
- BOCALON, F. H. P. et al. Flow visualization in airfoil with leading edge protuberances applied to aerodynamics. *COBEM Uberlândia, MG, 25th Interneticional Congress of Mechanical Engineering*, 2019.
- BROADHEAD, B. L. et al. Sensitivity-and uncertainty-based criticality safety validation techniques. *Nuclear science and engineering*, Taylor & Francis, v. 146, n. 3, p. 340–366, 2004.
- BUCKINGHAM, E. On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations. *Physical review*, APS, v. 4, n. 4, p. 345, 1914.
- CELIK, I. B. et al. Procedure for estimation and reporting of uncertainty due to discretization in cfd applications. *Journal of fluids Engineering-Transactions of the ASME*, ASME-AMER SOC MECHANICAL ENG THREE PARK AVE, NEW YORK, NY 10016-5990 USA, v. 130, n. 7, 2008.
- CHEN, J. H.; LI, S. S.; NGUYEN, V. T. The effect of leading edge protuberances on the performance of small aspect ratio foils. *15th International Symposium on Flow Visualization*, 2012.
- DARWIN, C. *On the Origin of Species by Means of Natural Selection, or The Preservation of Favoured Races in the Struggle for Life*. [S.l.: s.n.], 1859.
- EÇA, L.; HOEKSTRA, M.; ROACHE, P. Verification of calculations: an overview of the 2nd lisbon workshop. In: *18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*. [S.l.: s.n.], 2007. p. 4089.
- FERZIGER, J. H.; PERIĆ, M. Further discussion of numerical errors in cfd. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley Online Library, v. 23, n. 12, p. 1263–1274, 1996.
- FISH, F.; BATTLE, J. M. Hydrodynamic design of the humpback whale flipper. *Journal of Morphology*, 225, 51- 60, 1995.
- FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A*. [S.l.]: Pearson Educação, 2007.
- FORTUNA, D. A. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos*. [S.l.: s.n.], 2000.
- FOX, R. W.; PRITCHARD, P. J.; MCDONALD, A. T. *Introdução À Mecânica Dos Fluidos*. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2000.
- HANSEN, K. et al. The effect of leading edge tubercle geometry on the performance of different airfoils. *ExHFT-7, Krakow, Poland*, 2009.

- HANSEN, K. L. et al. Evolution of the streamwise vortices generated between leading edge tubercles. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 788, p. 730–766, 2016.
- ISSA, R. I. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 62, n. 1, p. 40–65, 1986.
- JOHARI, C.; HENOCH, D.; A., C. L. Effects of leading-edge protuberances on airfoil performance. *AIAA JOURNAL Vol. 45, No. 11*, 2007.
- LAKHTAKIA, A.; MARTÍN-PALMA, R. J. *Engineered biomimicry*. [S.l.]: Newnes, 2013.
- MALISKA, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2017.
- MENTER, F. Zonal two equation kw turbulence models for aerodynamic flows. In: *23rd fluid dynamics, plasmadynamics, and lasers conference*. [S.l.: s.n.], 1993. p. 2906.
- MENTER, F. R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA journal*, v. 32, n. 8, p. 1598–1605, 1994.
- MENTER, F. R.; KUNTZ, M.; LANGTRY, R. Ten years of industrial experience with the sst turbulence model. *Turbulence, heat and mass transfer*, v. 4, n. 1, p. 625–632, 2003.
- MOUKALLED, F.; MANGANI, L.; DARWISH, M. *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics*. [S.l.: s.n.], 2016.
- NIEROP, E. A. V.; ALBEN, S.; BRENNER, M. P. How bumps on whale flippers delay stall: an aerodynamic model. *Physical review letters*, APS, v. 100, n. 5, p. 054502, 2008.
- OPENFOAM User Guide. 2011. Disponível em: <<https://www.openfoam.com/documentation/user-guide/>>.
- PATANKAR, S. V.; SPALDING, D. B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. In: *Numerical prediction of flow, heat transfer, turbulence and combustion*. [S.l.]: Elsevier, 1983. p. 54–73.
- PAULA, A. A. et al. The airfoil thickness effect on wavy leading edge performance. *AIAA SciTech San Diego, California, USA 54th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, 2016.
- RAITHBY, G. D. *Prediction of dispersion by surface discharge*. [S.l.]: Canada Centre for Inland Waters, 1976.
- RAITHBY, G. D.; TORRANCE, K. E. Upstream-weighted differencing schemes and their application to elliptic problems involving fluid flow. *Computers & Fluids*, Elsevier, v. 2, n. 2, p. 191–206, 1974.
- RICHARDSON, L. F. IX. the approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, The Royal Society London, v. 210, n. 459-470, p. 307–357, 1911.

- ROACHE, P. J. A method for uniform reporting of grid refinement studies. *ASME-PUBLICATIONS-FED*, ASME, v. 158, p. 109–109, 1993.
- ROSTAMZADEH, N.; KELSO, R. M.; DALLY, B. A numerical investigation into the effects of reynolds number on the flow mechanism induced by a tubercled leading edge. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Springer, v. 31, n. 1, p. 1–32, 2017.
- TORRO, R. P.; KIM, J. W. A large-eddy simulation on a deep-stalled aerofoil with a wavy leading edge. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 813, p. 23–52, 2017.
- TURBULENCE free-stream boundary conditions. 2014. Disponível em: <https://www.cfd-online.com/Wiki/Turbulence_free-stream_boundary_conditions>.
- VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. [S.l.: s.n.], 2007.
- WEI, Z.; NEW, T.; CUI, Y. An experimental study on flow separation control of hydrofoils with leading-edge tubercles at low reynolds number. *Ocean Engineering*, Elsevier, v. 108, p. 336–349, 2015.
- Y plus wall distance estimation. 2011. Disponível em: <https://www.cfd-online.com/Wiki/Y_plus_wall_distance_estimation>.



APÊNDICE A – Roteiro Computacional

```

1  /*-----* C++ *-----*\
2  ===== | OpenFOAM:      The Open Source
3  \\      / F ield      |           CFD Toolbox
4  \\      / O peration  |
5  \\      / A nd        | Website:  https://openfoam.org
6  \\      / M anipulation | Version:  8
7  /*-----*/
8
9  //***** GRID GERENATION SCRIPT *****//
10 //-----/ blockMesh Dictionary /-----//
11 ConvertToMeters 1;
12 vertices
13 (
14     (0 0 0)
15     (0.146 0 0)
16     (0.146 0.5 0)
17     (0 0.5 0)
18     (0 0 0.146)
19     (0.146 0 0.146)
20     (0.146 0.5 0.146)
21     (0 0.5 0.146)
22 );
23
24 blocks
25 (
26     hex (0 1 2 3 4 5 6 7) (20 80 20) simpleGrading (1 1 1)
27 );
28
29 edges
30 ();
31
32 boundary

```

```
33 (
34     inlet
35     {
36         type patch;
37         faces
38         (
39             (3 7 6 2)
40         );
41     }
42     outlet
43     {
44         type patch;
45         faces
46         (
47             (1 5 4 0)
48         );
49     }
50     w1
51     {
52         type wall;
53         faces
54         (
55             (0 4 7 3)
56         );
57     }
58     w4
59     {
60         type wall;
61         faces
62         (
63             (2 6 5 1)
64         );
65     }
66     w2
67     {
68         type wall;
69         faces
70         (
71             (0 3 2 1)
```

```
72         );
73     }
74     w3
75     {
76         type wall;
77         faces
78         (
79             (4 5 6 7)
80         );
81     }
82 );
83
84 //-----/ snappyHexMesh Dictionary /-----//
85 castellatedMesh true;
86 snap           true;
87 addLayers      true;
88
89 geometry
90 {
91     wing1
92     {
93         type triSurfaceMesh;
94         file "wing1.stl";
95         regions
96         {
97             wing
98             {
99                 name wing;
100             }
101             bf
102             {
103                 name bf;
104             }
105         }
106     }
107     refinementBox
108     {
109         type searchableBox;
110         min (-0.1 0.15 -0.1);
```

```
111         max ( 0.2  0.35  0.2);
112     }
113 }
114
115 castellatedMeshControls
116 {
117     maxLocalCells 100000;
118     maxGlobalCells 2000000;
119     minRefinementCells 10;
120     maxLoadUnbalance 0.10;
121     nCellsBetweenLevels 5;
122
123     features
124     (
125         {
126             file "wing1.eMesh";
127             level 3;
128         }
129     );
130     refinementSurfaces
131     {
132         wing1
133         {
134             level (2 3);
135             regions
136             {
137                 bf
138                 {
139                     level (4 4);
140
141                 }
142             }
143         }
144     }
145     resolveFeatureAngle 30;
146     refinementRegions
147     {
148         refinementBox
149         {
```

```
150         mode inside;
151         levels ((1E15 2));
152     }
153 }
154 locationInMesh (0.05 0.1 0.05);
155 allowFreeStandingZoneFaces true;
156 snapControls
157 {
158     nSmoothPatch 3;
159     tolerance 2.0;
160     nSolveIter 30;
161     nRelaxIter 5;
162     nFeatureSnapIter 10;
163     implicitFeatureSnap false;
164     explicitFeatureSnap true;
165     multiRegionFeatureSnap false;
166 }
167 addLayersControls
168 {
169     relativeSizes false;
170     layers
171     {
172         wing
173         {
174             nSurfaceLayers 4;
175         }
176         bf
177         {
178             nSurfaceLayers 4;
179         }
180     }
181 }
182 expansionRatio 1.0;
183 firstLayerThickness 0.0006;
184 minThickness 0.00001;
185 nGrow 0;
186 featureAngle 60;
187 slipFeatureAngle 30;
188 nRelaxIter 3;
```

```

189     nSmoothSurfaceNormals 1;
190     nSmoothNormals 3;
191     nSmoothThickness 10;
192     maxFaceThicknessRatio 0.5;
193     maxThicknessToMedialRatio 0.3;
194     minMedianAxisAngle 90;
195     nBufferCellsNoExtrude 0;
196     nLayerIter 50;
197 }
198
199 meshQualityControls
200 {
201     #include "meshQualityDict"
202 }
203
204 writeFlags
205 (
206     scalarLevels
207     layerSets
208     layerFields
209 );
210
211 mergeTolerance 1e-6;
212
213 //-----/ meshQuality Dictionary /-----//
214 #includeEtc "caseDicts/mesh/generation/meshQualityDict"
215 // Include defaults parameters from master dictionary
216 minFaceWeight 0.02;
217
218 //-----/ surfaceFeatures Dictionary /-----//
219 surfaces ("wing1.stl");
220 includedAngle 130;
221
222 subsetFeatures
223 {
224     nonManifoldEdges no;
225     openEdges yes;
226 }
227

```

```

228 //***** FLOW PROPERTIES *****/
229 //-----/ transportProperties Dictionary /-----//
230 transportModel    Newtonian;
231 nu                [0 2 -1 0 0 0 0] 1.0e-06;
232
233 //-----/ turbulenceProperties Dictionary /-----//
234 simulationType RAS;
235 RAS
236 {
237     RASModel          kOmegaSST;
238     turbulence         on;
239     printCoeffs       on;
240 }
241
242 //***** INITIAL AND BOUNDARY CONDITIONS *****/
243 //-----/ p /-----//
244 dimensions        [0 2 -2 0 0 0 0];
245 internalField      uniform 0;
246
247 boundaryField
248 {
249     inlet
250     {
251         type          zeroGradient;
252     }
253     outlet
254     {
255         type          fixedValue;
256         value         uniform 0;
257     }
258     w1
259     {
260         type          zeroGradient;
261     }
262     w4
263     {
264         type          zeroGradient;
265     }
266     w2

```

```

267     {
268         type          zeroGradient;
269     }
270     w3
271     {
272         type          zeroGradient;
273     }
274     wing
275     {
276         type          zeroGradient;
277     }
278     bf
279     {
280         type          zeroGradient;
281     }
282 }
283
284 //-----/ U /-----//
285 dimensions      [0 1 -1 0 0 0 0];
286 internalField    uniform (0 -0.02923 0); // (0 -0.02154 0)
287                                           //for 1400 Re
288
289 boundaryField
290 {
291     inlet
292     {
293         type          fixedValue;
294         value          uniform (0 -0.02923 0);
295                                           // (0 -0.02154 0)
296                                           //for 1400 Re
297     }
298     outlet
299     {
300         type          inletOutlet;
301         inletValue      uniform (0 0 0);
302         value           uniform (0 0 0);
303     }
304     w1
305     {

```

```

306         type                slip ;
307     }
308     w4
309     {
310         type                slip ;
311     }
312     w2
313     {
314         type                slip ;
315     }
316     w3
317     {
318         type                slip ;
319     }
320     wing
321     {
322         type                noSlip ;
323     }
324     bf
325     {
326         type                noSlip ;
327     }
328 }
329
330 //-----/ k /-----//
331 dimensions      [0 2 -2 0 0 0 0];
332 internalField    uniform 1.28e-07;
333
334 boundaryField
335 {
336     inlet
337     {
338         type                fixedValue ;
339         value                uniform 1.28e-07;
340     }
341     outlet
342     {
343         type                inletOutlet ;
344         inletValue           uniform 1.28e-07;

```

```

345         value          uniform 1.28e-07;
346     }
347     w1
348     {
349         type          kqRWallFunction;
350         value          uniform 1.28e-07;
351     }
352     w4
353     {
354         type          kqRWallFunction;
355         value          uniform 1.28e-07;
356     }
357     w2
358     {
359         type          kqRWallFunction;
360         value          uniform 1.28e-07;
361     }
362     w3
363     {
364         type          kqRWallFunction;
365         value          uniform 1.28e-07;
366     }
367     wing
368     {
369         type          kqRWallFunction;
370         value          uniform 1.28e-07;
371     }
372     bf
373     {
374         type          kqRWallFunction;
375         value          uniform 1.28e-07;
376     }
377 }
378
379 //-----/ omega /-----//
380 dimensions      [0 0 -1 0 0 0 0];
381 internalField    uniform 0.0358;
382
383 boundaryField

```

```
384 {
385     inlet
386     {
387         type          fixedValue;
388         value          uniform 0.0358;
389     }
390     outlet
391     {
392         type          inletOutlet;
393         inletValue     uniform 0.0358;
394         value          uniform 0.0358;
395     }
396     w1
397     {
398         type          omegaWallFunction;
399         Cmu           0.09;
400         kappa         0.41;
401         E             9.8;
402         beta1         0.075;
403         value         uniform 0.0358;
404     }
405     w4
406     {
407         type          omegaWallFunction;
408         Cmu           0.09;
409         kappa         0.41;
410         E             9.8;
411         beta1         0.075;
412         value         uniform 0.0358;
413     }
414     w2
415     {
416         type          omegaWallFunction;
417         Cmu           0.09;
418         kappa         0.41;
419         E             9.8;
420         beta1         0.075;
421         value         uniform 0.0358;
422     }
```

```

423     w3
424     {
425         type                omegaWallFunction;
426         Cmu                  0.09;
427         kappa                 0.41;
428         E                     9.8;
429         beta1                 0.075;
430         value                 uniform 0.0358;
431     }
432     wing
433     {
434         type                omegaWallFunction;
435         Cmu                  0.09;
436         kappa                 0.41;
437         E                     9.8;
438         beta1                 0.075;
439         value                 uniform 0.0358;
440     }
441     bf
442     {
443         type                omegaWallFunction;
444         Cmu                  0.09;
445         kappa                 0.41;
446         E                     9.8;
447         beta1                 0.075;
448         value                 uniform 0.0358;
449     }
450 }
451
452 //-----/ nut -----//
453 dimensions      [0 2 -1 0 0 0 0];
454 internalField    uniform 0;
455
456 boundaryField
457 {
458     inlet
459     {
460         type                calculated;
461         value                 uniform 0;

```

```
462     }
463     outlet
464     {
465         type          calculated;
466         value         uniform 0;
467     }
468     w1
469     {
470         type          nutUSpaldingWallFunction;
471         Cmu           0.09;
472         kappa         0.41;
473         E             9.8;
474         value         uniform 0;
475     }
476     w4
477     {
478         type          nutUSpaldingWallFunction;
479         Cmu           0.09;
480         kappa         0.41;
481         E             9.8;
482         value         uniform 0;
483     }
484     w2
485     {
486         type          nutUSpaldingWallFunction;
487         Cmu           0.09;
488         kappa         0.41;
489         E             9.8;
490         value         uniform 0;
491     }
492     w3
493     {
494         type          nutUSpaldingWallFunction;
495         Cmu           0.09;
496         kappa         0.41;
497         E             9.8;
498         value         uniform 0;
499     }
500     wing
```

```

501     {
502         type          nutUSpaldingWallFunction;
503         Cmu           0.09;
504         kappa         0.41;
505         E             9.8;
506         value         uniform 0;
507     }
508     bf
509     {
510         type          nutUSpaldingWallFunction;
511         Cmu           0.09;
512         kappa         0.41;
513         E             9.8;
514         value         uniform 0;
515     }
516 }
517
518 //-----/ nuTilda -----//
519 dimensions          [0 2 -1 0 0 0 0];
520 internalField        uniform 0;
521
522 boundaryField
523 {
524     inlet
525     {
526         type          fixedValue;
527         value         uniform 0;
528     }
529     outlet
530     {
531         type          zeroGradient;
532     }
533     w1
534     {
535         type          zeroGradient;
536     }
537     w4
538     {
539         type          zeroGradient;

```

```

540     }
541     w2
542     {
543         type                zeroGradient;
544     }
545     w3
546     {
547         type                zeroGradient;
548     }
549     wing
550     {
551         type                zeroGradient;
552     }
553     bf
554     {
555         type                zeroGradient;
556     }
557 }
558
559 //***** SIMULATION SCRIPT *****/
560 //-----/ control Dictionary /-----//
561
562 application      pimpleFoam;
563 startFrom        startTime;
564 //startFrom      latestTime;
565 startTime        0;
566 stopAt           endTime;
567 endTime          45;
568 deltaT           0.005;
569 writeControl      adjustableRunTime;
570 writeInterval     0.2;
571 purgeWrite        0;
572 writeFormat       ascii;
573 writePrecision    8;
574 writeCompression  off;
575 timeFormat        general;
576 timePrecision     6;
577 runtimeModifiable yes;
578 adjustTimeStep    no;

```

```

579 maxCo          1.0;
580 maxDeltaT      0.1;
581
582 functions
583 {
584     vorticity1
585     {
586         type      vorticity;
587         libs      ("libfieldFunctionObjects.so");
588         writeControl    writeTime;
589     }
590     yPlus
591     {
592         type      yPlus;
593         libs      ("libfieldFunctionObjects.so");
594     }
595 }
596
597 //—————/ decomposePar Dictionary /—————//
598 numberOfSubdomains 16;
599 method             hierarchical;
600
601 simpleCoeffs
602 {
603     n          (2 3 2);
604     delta      0.001;
605 }
606
607 hierarchicalCoeffs
608 {
609     n          (2 4 2);
610     delta      0.001;
611     order      xyz;
612 }
613
614 metisCoeffs
615 {
616     processorWeights ( 1 1 1 1 );
617 }

```

```
618
619 manualCoeffs
620 {
621     dataFile      "";
622 }
623
624 distributed      no;
625
626 roots            ( );
627
628 //—————/ forceCoeffs Dictionary /—————//
629 forceCoeffs1
630 {
631     type          forceCoeffs;
632     libs          ("libforces.so");
633     writeControl   timeStep;
634     timeInterval   0.2;
635     log            yes;
636     patches        (wing);
637     rho            rhoInf;
638     rhoInf         1000;
639     liftDir        (1 0 0);
640     dragDir        (0 -1 0);
641     CofR           (0 0 0);
642     pitchAxis      (0 0 1);
643     magUInf        0.03;
644     lRef           0.065;
645     Aref           1;
646 }
647
648 //—————/ fvSchemes Dictionary /—————//
649 ddtSchemes
650 {
651     default        Euler;
652 }
653
654 gradSchemes
655 {
656     default        Gauss linear;
```

```

657     grad(p)           Gauss linear;
658     grad(U)           cellLimited Gauss linear 1;
659 }
660
661 divSchemes
662 {
663     default            none;
664     div(phi,U)         Gauss linearUpwind grad(U);
665     div(phi,k)         Gauss upwind;
666     div(phi,omega)     Gauss upwind;
667     div((nuEff*dev2(T(grad(U)))) Gauss linear;
668 }
669
670 laplacianSchemes
671 {
672     default            Gauss linear limited corrected 0.33;
673 }
674
675 interpolationSchemes
676 {
677     default            linear;
678 }
679
680 snGradSchemes
681 {
682     default            limited corrected 0.33;
683 }
684
685 wallDist
686 {
687     method meshWave;
688 }
689
690 //—————/ fvSolution Dictionary /—————//
691 solvers
692 {
693     p
694     {
695         solver          GAMG;

```

```

696         tolerance          1e-6;
697         relTol              0.001;
698         smoother            GaussSeidel;
699         nPreSweeps          0;
700         nPostSweeps         2;
701         cacheAgglomeration  on;
702         agglomerator        faceAreaPair;
703         nCellsInCoarsestLevel 100;
704         mergeLevels         1;
705         minIter             2;
706     }
707     pFinal
708     {
709         solver               PCG;
710         preconditioner        DIC;
711         tolerance            1e-06;
712         relTol               0;
713         minIter              3;
714     }
715     U
716     {
717         type                 coupled;
718         solver               PBiCCCG;
719         preconditioner        DILU;
720         tolerance            (1e-08 1e-08 1e-08);
721         relTol               (0 0 0);
722     }
723     UFinal
724     {
725         $U;
726         tolerance            (1e-08 1e-08 1e-08);
727         relTol               (0 0 0);
728     }
729     omega
730     {
731         solver               PBiCG;
732         preconditioner        DILU;
733         tolerance            1e-08;
734         relTol               0;

```

```

735         minIter          3;
736     }
737     omegaFinal
738     {
739         solver             PBiCG;
740         preconditioner      DILU;
741         tolerance          1e-08;
742         relTol             0;
743         minIter            3;
744     }
745     k
746     {
747         solver             PBiCG;
748         preconditioner      DILU;
749         tolerance          1e-08;
750         relTol             0;
751         minIter            3;
752     }
753     kFinal
754     {
755         solver             PBiCG;
756         preconditioner      DILU;
757         tolerance          1e-08;
758         relTol             0;
759         minIter            3;
760     }
761 }
762
763 PIMPLE
764 {
765     momentumPredictor yes;
766     //nOuterCorrectors 1 is equivalent to piso
767     nOuterCorrectors 2;
768     nCorrectors 2;
769     nNonOrthogonalCorrectors 1;
770     pRefCell          0;
771     pRefValue          0;
772 }
773

```

```
774 relaxationFactors
775 {
776     fields
777     {
778         p                0.3;
779     }
780     equations
781     {
782         U                0.7;
783         k                0.7;
784         omega            0.7;
785     }
786 }
```

