UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Ilha Solteira

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

GUSTAVO APARECIDO PITA BAGGIO

SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES E DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE POR UM MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS ESTABILIZADO PELA TÉCNICA DE SEPARAÇÃO BASEADA NA CARACTERÍSTICA

Ilha Solteira

2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Ilha Solteira

GUSTAVO APARECIDO PITA BAGGIO

SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES E DA EQUAÇÃO DE TRANSPORTE POR UM MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS ESTABILIZADO PELA TÉCNICA DE SEPARAÇÃO BASEADA NA CARACTERÍSTICA

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica. Área de Ciências Térmicas.

Orientador: Prof. Dr. João Batista Campos Silva.

Ilha Solteira

2015

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

Baggio, Gustavo Aparecido Pita.
B144s Solução das equações de Navier-Stokes e da equação de transporte por um método de elementos finitos estabilizado pela técnica de separação baseada na característica / Gustavo Aparecido Pita Baggio. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2015
99 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Ciências Térmicas, 2015

Orientador: João Batista Campos Silva.
Inclui bibliografia

1. Escoamento incompressível. 2. Elementos finitos. 3. CBS.

unesp **UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Solução das Equações de Navier-Stokes e da Equação de Transporte por um Método de Elementos Finitos Estabilizado pela Técnica de Separação Baseada na Característica

AUTOR: GUSTAVO APARECIDO PITA BAGGIO

ORIENTADOR: Prof. Dr. JOÃO BATISTA CAMPOS SILVA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica , Área: CIÊNCIAS TÉRMICAS, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. JOÃO BATISTA CAMPOS SILVA
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. JOAO BATISTA APARECIDO
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. ESTANER CLARO ROMAO
Escola de Engenharia de Lorena - Universidade de São Paulo/USP

Data da realização: 08 de julho de 2015.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, por me propiciar viver tamanha experiência e realizar um sonho.

Ao meu avô Euclides Francisco Pita (*in memoriam*) que, sem dúvida, me possibilitou chegar até aqui.

Aos meus pais e a toda a minha família Pita que são meus pilares, minha força e meu encorajamento.

A minha namorada Karen, pelo carinho, compreensão e incentivo.

A todos meus amigos que sempre apoiaram e estiveram ao meu lado.

Agradeço o Prof. Dr. João Batista Campos Silva, pela excelente orientação, pela paciência, pelo apoio e pelo auxílio em todos os aspectos deste trabalho.

Aos professores do bloco M4, que sempre me ajudaram quando precisei e que, durante todo este período, foram como uma segunda família.

Agradeço a todos os professores e funcionários da UNESP que contribuíram, de qualquer forma, para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço também a CNPq pelo apoio financeiro.

A todos que colaboraram direta ou indiretamente para a concretização deste sonho.

A todos vocês, os meus mais sinceros agradecimentos.

Muito obrigado!

Dedico este trabalho ao meu avô

Euclides Francisco Pita (in memoriam)

por todo apoio, incentivo e pela

confiança depositada em mim.

RESUMO

O método clássico de elementos finitos denominado de método de Bubnov-Galerkin ou Método de Galerkin (GFEM) é ótimo para solução de problemas difusivos, entretanto, para o caso de problemas com convecção dominante como ocorre em muitos problemas de escoamentos de fluidos, o GFEM produz soluções oscilantes para altos números de Reynolds. Diversas técnicas têm sido associadas à discretização dos termos convectivos nas equações de Navier-Stokes para remediar a deficiência do GFEM. Uma destas técnicas é denominada na literatura de separação baseada na característica (em inglês CBS – *Characteristic Based Split*), e tem sido aplicada com sucesso para estabilização das soluções de problemas convectivos usando o GFEM. Neste trabalho, o GFEM associado ao esquema CBS será aplicado para simulação de casos de escoamentos incompressíveis bidimensionais e tridimensionais.

Palavras-chave: Escoamento incompressível. Elementos finitos. CBS.

ABSTRACT

The classical finite element method called the method of Bubnov-Galerkin or Galerkin Method (GFEM) is optimum for solving diffusion problems, however, in case of problems with dominant convection as in many problems of fluid flow, the GFEM produces oscillating solutions for high Reynolds numbers. Several techniques have been associated with the discretization of the convective terms in the Navier-Stokes equations to remedy the deficiency of GFEM. One of such techniques is denominated in literature as Characteristic Based Split (CBS) and has been applied successfully to stabilize the solutions of convective problems using GFEM. In this work, the GFEM associated with the Characteristic Based Split (CBS) scheme will be applied to simulate two and three-dimensional incompressible fluid flows.

Keywords: Incompressible flow. Finite elements. CBS.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Característica no domínio tempo-espaço.

Figura 2: Elemento tetraédrico linear.

Figura 3*:* Um nó compartilhado por vários elementos.

Figura 4. Condições de Contorno da cavidade.

Figura 5. Malha da cavidade com elementos tetraédricos.

Figura 6. Perfil de velocidade no centro da cavidade no plano *xy*.

Figura 7. Componente da velocidade na direção *x*, no centro da cavidade para *Re=100*.

Figura 8. Componente da velocidade na direção *x*, no centro da cavidade para *Re=400*.

Figura 9. Componente da velocidade na direção *x*, no centro da cavidade para *Re=1000*.

Figura 10. Linhas de trajetória do escoamento no para a cavidade tridimensional.

Figura 11. Linhas de trajetória do escoamento no plano *x-y* para *Re*=100.

Figura 12. Linhas de trajetória do escoamento no plano *x-y* para *Re*=400.

Figura 13. linhas de trajetória do escoamento no plano *x-y* para *Re*=1000.

Figura 14. Dimensões e Condições de contorno do tubo.

Figura 15. Malha do tubo de diâmetro D e largura 8D.

Figura 16. Perfil parabólico na saída do tubo para *Re=100*.

Figura 17. Comparação entre as soluções exata e simulada. (*Re=100*)

Figura 18. Dimensões e condições de contorno da esfera.

Figura 19. Malha do domínio da esfera.

Figura 20. Campo de pressão e magnitude da velocidade. (*Re = 100*)

Figura 21. Campo de pressão e magnitude da velocidade. (*Re = 200*)

Figura 22. Comprimento da Bolha de Recirculação.

Figura 23. Linhas de trajetória do escoamento para *Re* = 100.

Figura 24. Detalhe da zona de recirculação atrás da esfera.

Figura 25. Esquema da variação do ângulo η.

Figura 26. Pressão adimensional na superfície da esfera. (*Re = 100*)

Figura 27. Pressão adimensional na superfície da esfera. (*Re = 200*)

Figura 28. Comparação dos resultados para C_p para *Re* = 100.

Figura 29. Comparação dos resultados para C_p para *Re* = 200.

Figura 30. Geometria e condições de contorno.

Figura 31. Malha do arranjo de tubos.

Figura 32. Componente da velocidade na direção *x.*

Figura 33. Componente da velocidade na direção *y.*

Figura 34. Esquema de um difusor radial.

Figura 35. Malha 3D e condições de contorno do difusor radial.

Figura 36. Coeficiente de pressão na parede da palheta.

Figura 37. Geometria e condições de contorno da cavidade.

Figura 38. Resultados para *Re* = 100.

Figura 39. Resultados para *Re* = 400.

Figura 40. Resultados para *Re* = 1000.

Figura 41. Resultados para *Re* = 3200.

Figura 42. Dimensão do domínio do cilindro e suas condições de contorno.

Figura 43. Detalhe da malha 2D do problema do cilindro.

Figura 44. Velocidade na direção *y* medida pela sonda com *Re = 100*.

Figura 45. Resposta transiente para velocidade, pressão e temperatura.

Figura 46. Dimensões do domínio do cilindro e suas condições de contorno.

Figura 47. Coeficiente de pressão na superfície do cilindro.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Comprimento da bolha de recirculação adimensional.

Tabela 2. Resultados do código 3D referente às Figuras 7, 8 e 9.

Tabela 3. Resultados do código 3D referente às Figuras 28 e 29.

Tabela 4. Resultados do código 2D referente às Figuras 38 e 39.

Tabela 5. Resultados do código 2D referente às Figuras 40 e 41.

Tabela 6. Resultados do código 2D referente à Figura 47.

Sumário

1. INTRODUÇÃO **9**

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS **12**

1.2 ALGUNS TRABALHOS PRÉVIOS SOBRE O DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÃO DO ESQUEMA CBS. **14**

1.3 OBJETIVOS **17**

2. EQUAÇÕES GOVERNANTES **19**

3. O ESQUEMA DA SEPARAÇÃO BASEADA NA CARACTERÍSTICA – CBS **23**

3.1 O GALERKIN CARACTERÍSTICO **23**

3.2 O PROCEDIMENTO DE SEPARAÇÃO – CBS PARA O CASO DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS **34**

3.3 CÁLCULO DO PASSO DE TEMPO **42**

3.4 COMPRESSIBILIDADE ARTIFICIAL - AC **44**

3.5 O AC-CBS **45**

3.6 PASSO DE TEMPO DUPLO (*DUAL TIME-STEPPING*) **47**

3.7 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL **49**

3.8 A MATRIZ DE MASSA CONCENTRADA **54**

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES **56**

4.1 ESCOAMENTO NUMA CAVIDADE CÚBICA COM TAMPA DESLIZANTE **56**

4.2 ESCOAMENTO DE HAGEN-POISEUILLE **62**

4.3 ESCOAMENTO AO REDOR DE UMA ESFERA **65**

4.4 BANCO DE TUBOS **71**

4.5 DIFUSOR RADIAL **73**

5. CONCLUSÕES SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS **76**

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS **77**

APÊNDICE – A -Métodos dos Resíduos Ponderados de Galerkin e Formulação Fraca **81**

APÊNDICE – B - O Escoamento de Hagen-Poiseuille **85**

APÊNDICE – C - Alguns Resultados Bidimensionais **88**

APÊNDICE – D - Tabelas de alguns dos resultados deste trabalho. **95**

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O uso de técnicas numéricas para a solução de problemas complexos da engenharia e da física é hoje realidade, graças ao grande desenvolvimento de computadores de alta velocidade e de grande capacidade de armazenamento. Em função dessa disponibilidade computacional, que cresce exponencialmente, o desenvolvimento de algoritmos para a solução dos mais diversos problemas tem recebido enorme atenção dos analistas numéricos e engenheiros, fazendo aumentar também em taxas acentuadas, o número de pesquisadores e usuários da simulação numérica. Esse crescimento computacional e numérico está tornando a disciplina de mecânica dos fluidos computacional um assunto obrigatório também no ensino de graduação e na indústria em geral, a exemplo do que já acontece na pós-graduação e na pesquisa. Além disso, a versatilidade e generalidade dos métodos numéricos para a simulação de problemas de engenharia, e a relativa simplicidade de aplicação dessas técnicas, são outros fatores motivadores para seu uso (MALISKA, 2012).

A dinâmica dos fluidos computacional (CFD) requer o uso de métodos numéricos para se calcular as grandezas de interesse nos escoamentos, em pontos do domínio físico, geralmente, denominados de pontos nodais ou, simplesmente, nós. Os principais métodos utilizados para simulação numérica de escoamentos de fluidos são: Métodos de Diferenças Finitas (FDM - *Finite Difference Method*); Métodos de Diferenças Finitas baseado em Volumes de Controle (CVFDM - *Control Volume Finite Difference Method*); Método de Volumes Finitos (FVM - *Finite Volume Method*); Métodos de Elementos Finitos (FEM - *Finite Element Method*) e Métodos de Elementos Finitos baseado em Volumes de Controle (CVFEM - *Control Volume-Finite Element Method*). Na realidade, todos estes métodos numéricos podem ser derivados de um único método conhecido como Método de Resíduos Ponderados (WRM - *Weighted Residual Method*), sendo diferenciados matematicamente pela função de ponderação ou, simplesmente, função peso aplicada na anulação do resíduo (LIMA, 2005).

As ideias e teorias que deram origem ao método de elementos finitos surgiram próximo dos anos de 1950. Sendo que não se atribui a ninguém a autoria deste método, e não se sabe a data precisa em que surgiu. No entanto, Matemáticos, Físicos e Engenheiros trabalham desde o início na elaboração e evolução do método. Na engenharia, este método foi usado pela

primeira vez em 1960 por Clough num estudo de problemas de elasticidade plana. Originalmente, o método foi implementado no estudo de tensões em aeronaves. A partir do trabalho de Clough, no início dos anos 1960, o método de elementos finitos foi usado extensivamente para análise de tensões lineares, deflexão e vibrações e em diversas áreas das engenharias, já que na época começava a se reconhecer a eficácia do método (PEREIRA, 2005).

O método de elementos finitos de Galerkin (GFEM) gera erros mínimos na norma L2 para problemas modelados, matematicamente, por operadores diferenciais auto adjuntos e resulta em um sistema linear simétrico de equações algébricas. No entanto, as principais equações que regem a dinâmica de fluidos não são equações auto adjuntas e se o GFEM for utilizado para resolvê-las, sem qualquer estabilização, resultará em soluções com várias oscilações. A instabilidade será devido aos termos de aceleração convectiva não-lineares, o que torna as equações não auto adjuntas e leva a um sistema de equações algébricas não-simétricas (LIU, 2005).

Além disso, no limite incompressível, se a condição de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (LBB) não for satisfeita será originada instabilidade se funções de interpolação de ordem iguais forem usadas para os campos de velocidade e de pressão. Deste modo, a utilização de elementos lineares simples resulta em soluções altamente oscilatórias quando os fluxos de fluidos viscosos incompressíveis são resolvidos utilizando interpolação de igual ordem. A violação desta condição muitas vezes resulta em oscilações numericamente não-físicas no campo de pressão (LIU, 2005).

Uma maneira de solucionar ou reduzir as instabilidades da solução é aplicar técnicas de discretização do tipo *upwind* para discretização dos termos de inércia, que são a principal fonte de oscilações, quando se tenta solucionar este tipo de problema. Para a estabilização através de formulações transientes, existe o esquema Galerkin Característico, (LÖHNER et al., 1984; ZIENKIEWICZ; CODINA, 1995; NITHIARASU et al., 2005; ZIENKIEWICZ et al., 1999; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000) no qual se insere o esquema de separação baseada na característica (CBS).

A fim de aplicar a abordagem Galerkin Característico às equações de quantidade de movimento, em primeiro lugar, o termo de pressão geralmente é eliminado na equação de quantidade de movimento, e um sistema de coordenadas móveis é assumido, como se fosse uma abordagem da dinâmica de fluidos Lagrangeana. Embora, esta abordagem esconda o termo convectivo (responsável pela oscilação espacial), num primeiro momento, a complicação de um sistema de coordenadas móvel é introduzida. No entanto, uma simples

expansão espacial em série de Taylor evita os problemas causados por tal aproximação, pois leva à imobilização do sistema de coordenadas. Assim, se é capaz de calcular um campo de velocidade intermediária e com isso, a primeira etapa do esquema CBS é finalizada. No segundo passo, o campo de pressão é calculado a partir de uma equação de Poisson oriunda da equação da continuidade ou explicitamente, usando uma técnica de compressibilidade artificial. Então, no terceiro passo, as velocidades intermediárias serão corrigidas, uma vez que se tem o termo de pressão calculado. Com a pressão e as velocidades corrigidas já disponíveis, pode-se calcular todas as variáveis escalares adicionais com a equação governante adequada. Devido à divisão introduzida nas equações, o método é referido como a separação baseada na característica, do inglês, *Characteristic Based Split* (CBS), (LEWIS et al., 2004).

O esquema da separação baseada na característica (CBS) para problemas de escoamento compressíveis e incompressíveis foi introduzido pela primeira vez na literatura de elementos finitos em 1995 por Zienkiewicz e Codina e outros pesquisadores do grupo de pesquisa. Desde a sua introdução para a comunidade de métodos computacionais e numéricos, o esquema CBS tem recebido grande interesse e tem sido objeto de estudo para vários pesquisadores para ambos os tipos de escoamentos: compressíveis e incompressíveis (LIU, 2005).

Os primeiros resultados para escoamentos incompressíveis tridimensionais foram mostrados por Nithiarasu (2003) onde ele apresenta o método de compressibilidade artificial para os dois tipos de resultados, 2D e 3D. Logo no ano seguinte, Nithiarasu et al. (2004) fez um estudo mais amplo somente para casos tridimensionais onde é utilizado as formas semi-implícita e totalmente explícita.

A motivação principal para este trabalho é o estudo do esquema *CBS*, com a finalidade de realizar simulações numéricas para casos de escoamentos incompressíveis tridimensionais de fluidos viscosos. Existe um código computacional base disponível para problemas bidimensionais, no trabalho de Taylor, Nithiarasu e Seetharamu (2004) que foi utilizado para o aprendizado da técnica, bem como a base do código tridimensional deste trabalho.

1.2 ALGUNS TRABALHOS PRÉVIOS SOBRE O DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÃO DO ESQUEMA CBS.

Nithiarasu e Zienkiewicz (2000) apresentam o esquema CBS aplicado em conjunto com uma técnica de refinamento de malha adaptativa, ou seja, a partir de uma malha grosseira o

código é capaz de realizar o refinamento da malha em regiões necessárias do domínio, o que torna o custo computacional menor, tanto em memória quanto em processamento. Testes realizados para escoamentos bidimensionais compressíveis e incompressíveis em regime permanente e transiente mostraram boa concordância com a literatura.

Codina (2001) analisou a estabilidade do método de elementos finitos usando passo fracionado para escoamentos incompressíveis calculando através da solução de uma equação de Poisson o campo de pressão. Para um método de projeção clássico de primeira ordem, foi mostrado que há um controle da pressão que depende do tamanho do passo de tempo e, além disso, existe um limite bem menor para este em virtude da estabilidade. A situação piora para o método de segunda ordem em que parte do gradiente de pressão é englobado na equação do momento linear. A estabilidade da pressão, neste caso, é extremamente fraca. Para superar estas deficiências foi considerado um método de elementos finitos que oferece uma solução numérica para problemas de escoamentos em regime não permanente. Este método tem sido implementado para resolver escoamentos turbulentos incompressíveis, pela solução das equações médias de Reynolds (RANS) para o caso de regime permanente e (URANS) para o caso de regime não permanente. O esquema *CBS* semi-implícito o qual requer um procedimento de solução de matriz para solução da equação de Poisson, foi implementado usando a técnica de passo fracionado e sua estabilidade foi analisada. A fim de dar suporte aos resultados teóricos, vários exemplos numéricos de problemas clássicos foram apresentados.

Para a solução de escoamento compressível e incompressível, o esquema *CBS* foi inicialmente apresentado por Zienkiewicz e Codina (1995). O esquema *CBS* tem sido expandido para investigar outras aplicações, por exemplo, dinâmica dos sólidos, escoamento em águas rasas e escoamentos não isotérmicos em meios porosos. Mais, recentemente, tem sido combinado com método padrão *AC (Compressibilidade Artificial)* para se obter um procedimento eficiente do método explícito livre de matriz, segundo Liu (2005).

Embora o algoritmo *CBS* já tivesse sido utilizado com sucesso em problemas de escoamento turbulento e com elevados valores do número de Reynolds, modelos de turbulência ainda não haviam sido testados. Notando-se essa lacuna, Liu (2005) apresentou um algoritmo utilizando compressibilidade artificial e o algoritmo *CBS* para fluxos contínuos e com instabilidades de turbulência que pode ser aplicado a escoamentos incompressíveis. Testes realizados pelo autor demonstraram o sucesso da aplicação do modelo $k-\varepsilon$, aumentando assim, a gama de uso de variações do algoritmo *CBS*.

A questão conservativa também foi abordada no trabalho de Nithiarasu e Zienkiewicz (2006). Neste estudo, foi realizada uma análise do método explícito para fluidos

incompressíveis utilizando o algoritmo *CBS*, empregando tanto a forma conservativa como a não conservativa das equações de movimento. A estabilização, convergência e aspectos de conservação do presente método foram discutidas. Um procedimento para a eliminação de erros de primeira ordem no tempo foi proposto. Os resultados foram comparados com resultados de outros métodos tendo apresentado boa concordância.

Nesta mesma linha, Massarotti et al. (2006) apresentaram, em seu trabalho, uma comparação dos métodos explícitos e semi-implícitos do algoritmo *CBS - AC*. O estudo mostrou que os dois métodos apresentaram bons resultados. Todas as soluções para o estado estacionário se mostraram praticamente idênticas, especialmente para problemas de convecção natural. Entretanto, a aplicação do método explícito em problemas desta natureza apresenta alguns problemas de convergência e forças de flutuações extremamente altas. Na solução de problemas transientes notam-se algumas diferenças com relação ao incremento de tempo utilizado em cada situação.

Ainda seguindo a linha de comparação entre métodos, Codina et al. (2006) realizaram a comparação entre os métodos de estabilização CBS e o método *Sub-Grid* (Sub Grid Scale - SGS) chegando na conclusão de que os dois métodos são praticamente iguais, quanto a qualidade de resultados; porém o CBS apresenta uma pequena vantagem em relação ao custo computacional.

Morandi-Cecchi e Venturin (2006) mostram uma solução, utilizando elementos finitos e a técnica CBS, para problemas de águas rasas (*shallow waters*) utilizando como foco do estudo, a lagoa de Veneza e chegaram à conclusão que os resultados obtidos estavam dentro do esperado.

Ortiz et al. (2006) apresentam uma extensão da solução para o problema de águas rasas, aplicando seu estudo à concentração de sal em rios e estuários de modo a fornecer importante informação para áreas de cultivo de plantas.

Em relação a outros métodos de solução, Thomas e Nithiarasu (2007) comparam dois métodos: o método *Locally Conservative Galerkin* - LCG e o método *Global Galerkin* - GG. Ao final do trabalho, pode-se concluir que ambos os métodos são praticamente idênticos, exceto pelo fato do LCG ter taxas de convergência maiores.

Ampliando o método LCG, Thomas, Nithiarasu e Bevan (2007) resolveram as equações de Navier-Stokes para escoamento incompressível. Além da implementação do método, dois exemplos de referência foram apresentados para demonstrar a validade do método.

Ainda no âmbito bidimensional, Nickaeen e Ashrafizadeh (2010) apresentam em seu trabalho uma solução das equações de Navier-Stokes, utilizando o método de volumes finitos

combinado com a técnica CBS e apresentaram excelentes resultados para alguns dos exemplos de referência que também serão estudados neste trabalho.

Bevan et al. (2011) fez um estudo sobre uma doença cardiovascular. O esquema CBS foi aplicado para a simulação de escoamentos de sangue em uma bifurcação da veia aorta com o objetivo de estudar aneurismas. Este trabalho apresenta várias complexidades diferentes encontradas na simulação numérica de escoamentos, tais como fronteiras móveis como condições de contorno e escoamento turbulento. O sangue (fluido) é tratado como newtoniano para evitar a complexidade da simulação de fluidos de reologias diferentes.

Nithiarasu et al. (2013) fizeram um estudo comparativo entre o CBS e método monolítico e concluíram que, para problemas em regime permanente, os dois métodos são parecidos excetuando apenas nos parâmetros de estabilização. Para problemas transientes, apesar de apresentar algumas pequenas desvantagens, o CBS é mais adequado, uma vez que, ao utilizar passo de tempo duplo e a compressibilidade artificial, não existe o armazenamento de matriz para a solução, tornando o procedimento de solução muito mais simples.

É possível observar que o principal centro de desenvolvimento e aplicação do esquema CBS é a Universidade de Swansea, País de Gales, no Reino Unido. Todos os trabalhos citados acima e muitos outros que não foram citados neste trabalho e que foram desenvolvidos em Swansea contribuíram para o desenvolvimento do livro Zienkiewicz et al. (2014), livro este que trata de maneira mais generalizada possível o desenvolvimento e aplicação de um código computacional da técnica CBS para escoamentos tridimensionais. Fato este que torna este livro uma das principais referências para este trabalho.

1.3 OBJETIVOS

O presente trabalho tem os seguintes objetivos gerais:

a) continuar estudos e aprendizado do esquema *CBS* na estabilização do método de elementos finitos de Galerkin, iniciados em trabalhos anteriores;

b) entender aspectos de implementação computacional do esquema *CBS;*

c) aplicar um código computacional baseado no *GFEM-CBS* para simulação de escoamentos de fluidos com e sem transferência de calor, em domínios bidimensionais, com o intuito de testar seu desempenho.

O objetivo específico é:

a) o desenvolvimento e extensão de um código computacional, tendo como base o código bidimensional já disponível, para simulações de casos de escoamentos tridimensionais.

2 EQUAÇÕES GOVERNANTES

As equações governantes para representar, matematicamente, escoamentos de fluidos são as equações da continuidade, de balanço da quantidade de movimento e de conservação da energia acrescidas de equações constitutivas. Essas equações são escritas a seguir.

Conservação da Massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho u_i \right)}{\partial x_i} = 0 \tag{1}$$

Para escoamentos com compressibilidade pequena, tem-se que a variação temporal de ρ pode ser expressa como (ZIENKIEWICZ et. al., 2014):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \tag{2}$$

onde c é a velocidade do som.

Balanço de Quantidade de Movimento:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_j U_i \right) + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i \tag{3}$$

onde, $U = \rho u$; e τ_{ij} representa os componentes do tensor de tensões para fluidos newtonianos, dada por:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \tag{4}$$

Conservação de Energia Térmica (eq. de entalpia):

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}(U_i h) - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{Dp}{Dt} + \tau_{ji}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \tag{5a}$$

Conservação de Energia Térmica (na temperatura):

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u_i\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) + \beta T\frac{Dp}{Dt} + \tau_{ji}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \tag{5b}$$

onde u_i são as componentes de velocidade, ρ é a massa específica, ρg_i representa as forças de campo e outros termos fonte, p é a pressão, μ é a viscosidade dinâmica do fluido, h é a entalpia específica, q_i é o fluxo de calor, T é a temperatura, c_p é o calor específico à pressão constante, k é a condutividade térmica, β é o coeficiente de expansão térmica e δ_{ij} é o delta de Krönecker.

Genericamente, equações similares às Eqs. (5a, 5b), denominadas de equações de transporte de uma grandeza escalar, podem ser escritas como

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_i\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\gamma_\phi\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) + S_\phi \tag{5c}$$

As equações governantes são, geralmente, escritas na forma adimensional, e os grupos adimensionais usados para tal finalidade variam dependendo da natureza do escoamento. Serão descritos os grupos adimensionais que são usados com mais frequência em mecânica dos fluidos computacional.

$$u_i^* = \frac{u_i}{u_\infty};\ x_i^* = \frac{x_i}{L};\ t^* = \frac{tu_\infty}{L};\ \rho^* = \frac{\rho}{\rho_\infty};\ \mu^* = \frac{\mu}{\mu_\infty};\ p^* = \frac{p}{\rho_\infty u_\infty^2};\ \alpha^* = \frac{\alpha}{\alpha_\infty};$$
$$\tau_{ij}^* = \frac{\tau_{ij}}{\rho_\infty u_\infty^2};\ \phi^* = \frac{\phi - \phi_\infty}{\phi_w - \phi_\infty} \tag{6}$$

onde as quantidades adimensionais estão sinalizadas pelo asterisco. O subscrito ∞ representa uma quantidade de referência e *L* é um comprimento característico que depende do problema a ser estudado.

Aplicando os grupos adimensionais definidos na Equação (6) nas equações governantes e rearranjando se obtém as suas formas adimensionais.

Conservação da Massa:

$$\frac{1}{c^{*2}}\frac{\partial p^*}{\partial t^*} \approx \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} = \frac{\partial U_i^*}{\partial x_i^*} \tag{7}$$

Balanço de Quantidade de Movimento:

$$\frac{\partial U_i^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial}{\partial x_j^*}\left(u_j^* U_i^*\right) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial\left(\tau_{ij}^*\right)}{\partial x_j^*} - \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Fr^2}\rho^* g_i^* \tag{8}$$

$$\tau_{ij}^* = \left[\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial u_k^*}{\partial x_k^*}\right] \tag{9}$$

onde *Re* é número de Reynolds, g_i^* é o termo das forças de campo adimensional, Fr é o número de Froude e Pr é o número de Prandtl, os quais são definidos como

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_\infty u_\infty L}{\mu_\infty};\quad g_i^* = \frac{g_i}{g};\quad \mathrm{Fr}^2 = \frac{u_\infty}{gL};\quad \mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \tag{10}$$

Equação de transporte de um escalar:

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial t^*} + u_i^*\frac{\partial \phi^*}{\partial x_i^*} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\rho_\infty \gamma_{\phi\infty}}{\mu_\infty}\frac{\partial}{\partial x_i^*}\left(\gamma_\phi^*\frac{\partial \phi^*}{\partial x_i^*}\right) + S_\phi^* \tag{11}$$

Na Equação (11), o coeficiente de difusão γ_{ϕ}^{*} depende de qual grandeza escalar está sendo considerada. Por exemplo, se ϕ^{*} é a temperatura, a Equação (11) toma a forma

$$\frac{\partial T^{*}}{\partial t^{*}} + u_i^{*} \frac{\partial T^{*}}{\partial x_i^{*}} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{1}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial}{\partial x_i^{*}} \left(\frac{\partial T^{*}}{\partial x_i^{*}} \right) + Q^{*} \tag{12}$$

3 O ESQUEMA DA SEPARAÇÃO BASEADA NA CARACTERÍSTICA – CBS

Para se obter uma solução para as equações de Navier-Stokes e equação de transporte, usando o esquema CBS, se desenvolve a discretização em quatro passos. No primeiro passo, se faz a discretização das equações de quantidade de movimento sem o do termo de pressão, similar ao uso de métodos de projeção. No segundo passo, se obtém uma equação de Poisson para o campo de pressão ou se resolve a pressão explicitamente usando compressibilidade artificial; com esta última técnica sendo mais conveniente para problemas tridimensionais. No terceiro passo se corrige o campo de velocidade usando o princípio de conservação da massa. No quarto passo pode-se resolver a equação de transporte para qualquer variável escalar. Um resumo de todos os passos pode ser descrito da seguinte maneira:

1. Cálculo do campo de velocidade intermediária.
2. Cálculo do campo de pressão.
3. Correção do campo de velocidade.
4. Cálculo de alguma variável escalar de interesse utilizando a equação governante adequada. (Exemplo: temperatura, concentração, etc.)

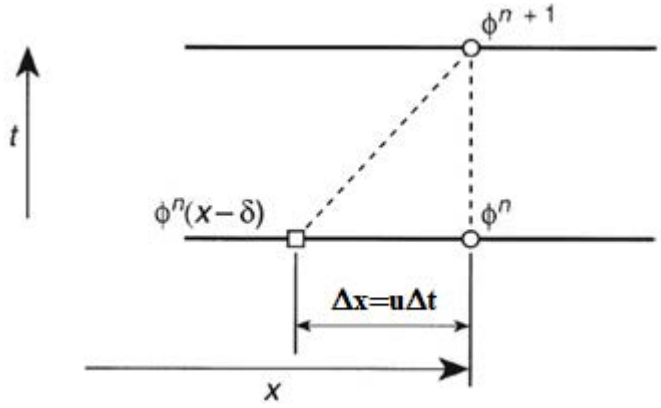
3.1 O GALERKIN CARACTERÍSTICO

Existem muitas variantes possíveis para esse método, entretanto todos os métodos propostos anteriormente são complexos para a programação e exigem muito tempo computacional. Por esta razão, uma alternativa mais simples foi desenvolvida em que as dificuldades são evitadas, causando uma estabilidade condicional. Este método foi apresentado pela primeira vez em 1984 e é descrito em várias publicações, (ZIENKIEWICZ et al., 2014).

Para maior facilidade de manipulação matemática e de interpretação do método, a equação de convecção de um escalar unidimensional na forma não conservativa será considerada:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) - Q = 0. \tag{13}$$

Figura 1- Característica no domínio tempo-espaço.



Fonte: Adaptado de Zienkiewicz et al. (2014)

Vamos considerar a característica do escoamento, mostrada na Figura 1, no domínio do espaço e do tempo. O passo de tempo de escoamento é Δt a partir do instante *n* até o instante *n+1*, e a distância percorrida durante esse período de tempo é Δx, isto é, de $\left(x-\Delta x\right)$ até x. Ao assumirmos um sistema de coordenadas móveis ao longo do caminho da característica com velocidade u, o termo convectivo desaparece, como se fosse em uma abordagem de mecânica dos fluidos Lagrangeana, (LEWIS, 2004) enquanto o termo de difusão e o termo fonte são quantidades médias ao longo da característica. A Equação (13) se torna, então,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}\left(x'(t),t\right)-\frac{\partial}{\partial x'}\left(\gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x'}\right)-Q\left(x'\right)=0 \tag{14}$$

Aqui, o operador de segunda ordem na equação é auto adjunto, tornando a discretização espacial pelo método de Galerkin como a melhor opção. Mas, embora, o termo de convecção, que é responsável pela oscilação espacial, tenha desaparecido, a complicação de um sistema móvel de coordenadas foi introduzida no problema. Discretizando o termo de tempo na Equação (14) obtém-se a sua forma semi-discreta:

$$\frac{\phi^{n+1}|_x-\phi^n|_{(x-\Delta x)}}{\Delta t}\approx\theta\left[\frac{\partial}{\partial x'}\left(\gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x'}\right)-Q\right]^{n+1}+(1-\theta)\left[\frac{\partial}{\partial x'}\left(\gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x'}\right)-Q\right]^{n}|_{(x-\Delta x)} \tag{15}$$

Na Equação (15) foi usado um parâmetro θ para definir o esquema de discretização no tempo, que pode ser desde um esquema totalmente implícito para $\theta=1$ até um totalmente explícito para $\theta=0$. Neste ponto, adotar-se-á um valor de θ igual a 0 para simplicidade no

desenvolvimento e se desprezará o termo fonte Q, uma vez que, os fenômenos físicos que tal termo representa na equação, não serão abordados neste trabalho.

Com referência à Figura 1, pode-se desenvolver os termos que estão avaliados na posição $(x-\Delta x)$ usando expansões em série de Taylor e então escrevê-los de modo que fiquem em função apenas da posição x. Desta forma, se tem, por exemplo,

$$\phi^n\big|_{x-\Delta x} = \phi^n\big|_x - \frac{\partial \phi^n}{\partial x}\frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2!} + O(\Delta x^3) \tag{16}$$

A expansão do termo difusivo é feita da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(\gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x'}\right)^n\Big|_{x-\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^n\Big|_x - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^n\right]\Delta x + O(\Delta x^2) \tag{17}$$

Nas duas expansões acima, Equações (16) e (17), os termos de segunda ou mais alta ordens são desprezados. Substituindo as Equações (16) e (17) na Equação (15), se obtém:

$$\frac{\phi^{n+1}-\phi^n}{\Delta t} = -\frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}\frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^n \tag{18}$$

Neste caso, todos os termos são avaliados na posição x. Se a velocidade do escoamento é u, seguindo Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004), pode-se escrever $\Delta x = u\Delta t$. Portanto, a forma semi-discreta da Equação (18) pode ser reescrita como

$$\frac{\phi^{n+1}-\phi^n}{\Delta t} = -u\frac{\partial \phi^n}{\partial x_1} + u^2\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^n \tag{19}$$

Através da realização de expansões em séries de Taylor, o termo convectivo reaparece na equação, juntamente com um termo de segunda ordem adicional. Os termos de segunda ordem são de natureza difusiva e atuam como um operador de suavização que reduz as oscilações decorrentes da discretização espacial dos termos de convecção.

A extensão do esquema característico de Galerkin para uma equação de convecção-difusão multidimensional de escalares é simples. A equação tridimensional de convecção-difusão é escrita, como segue:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+u_i\frac{\partial \phi}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\gamma_\phi\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right)-Q \tag{20a}$$

As condições de contorno para o problema definido pela Equação (20), podem ser colocadas na seguinte forma geral:

$$\mp\gamma_\phi\frac{\partial \phi}{\partial x_j}n_j+\lambda\phi=q \tag{20b}$$

Por exemplo, $n_j=0,\lambda=1$ ou $n_j=1,\lambda=0$ se recuperam as condições de contorno de primeiro ou de segundo tipos respectivamente.

Como demonstrado em Pereira (2010), o uso do esquema GC leva à forma semi-discreta seguinte:

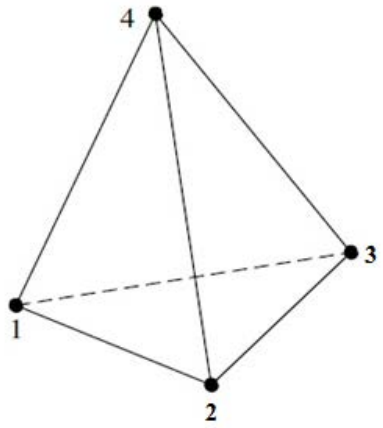
$$\begin{aligned}
&\Delta\phi=\phi^{n+1}\left(x_i,t\right)-\phi^{n}\left(x_i,t\right)=\\
&=\Delta t\left[-u_j\left(x_j,t\right)\frac{\partial\phi\left(x_j,t\right)}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\gamma_\phi\frac{\partial\phi\left(x_i,t\right)}{\partial x_i}\right)-Q\left(x_i,t\right)\right]^n+\\
&\quad+\frac{\left(\Delta t\right)^2}{2}\left\{u_i\left(x_i,t\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_j\left(x_j,t\right)\frac{\partial\phi\left(x_j,t\right)}{\partial x_j}\right)\right\}^n+\\
&\quad\frac{\left(\Delta t\right)^2}{2}\left\{-u_j\left(x_j,t\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\gamma_\phi\frac{\partial\phi\left(x_i,t\right)}{\partial x_i}\right)\right]+u_j\left(x_j,t\right)\frac{\partial Q\left(x_j,t\right)}{\partial x_j}\right\}^n
\end{aligned} \tag{21a}$$

Desprezando os termos de terceira ordem e o termo fonte, na Equação (21a), em coordenadas cartesianas resulta

$$\frac{\phi^{n+1}-\phi^{n}}{\Delta t} = -u\frac{\partial \phi^{n}}{\partial x} - v\frac{\partial \phi^{n}}{\partial y} - w\frac{\partial \phi^{n}}{\partial z} + \\ + \frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma_{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^{n} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma_{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^{n} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\gamma_{\phi}\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^{n} + \\ + u\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} + w\frac{\partial \phi}{\partial z}\right]^{n} + \\ + v\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} + w\frac{\partial \phi}{\partial z}\right]^{n} + \\ + w\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left[u\frac{\partial \phi}{\partial x} + v\frac{\partial \phi}{\partial y} + w\frac{\partial \phi}{\partial z}\right]^{n} \tag{21b}$$

Esta forma é dita semi-discreta, pois ela contempla apenas a discretização temporal, faltando ainda a discretização espacial para. Assim, se obter a forma totalmente discreta. Para isso, então, realizar-se-á a discretização espacial, assumindo uma variação linear de ϕ dentro de um elemento tetraédrico, tal como mostrado na Figura 2.

Figura 2 - Elemento tetraédrico linear.



Fonte: Próprio autor.

A interpolação de uma variável escalar ϕ para um elemento tetraédrico linear é dada por:

$$\phi(x_i,t) = N_1(x_i)\Phi_1(t) + N_2(x_i)\Phi_2(t) + N_3(x_i)\Phi_3(t) + N_4(x_i)\Phi_4(t) \\ = \sum_{j=1}^{4} N_j(x_i)\Phi_j(t) = [N]\{\Phi\} \tag{22}$$

com $[N]=[N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$ representando as funções de interpolação e $\{\Phi\}=[\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \Phi_3 \quad \Phi_4]^T$ os valores nodais da variável ϕ. Em coordenadas cartesianas, as funções de interpolação podem ser escritas na seguinte forma geral:

$$N_i = \frac{1}{6V}\left(a_i + b_i x + c_i y + d_i z\right); \quad i = 1,2,3,4 \tag{23}$$

Definindo uma matriz, cujos coeficientes dependam das coordenadas nodais do elemento,

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \tag{24}$$

onde x, y e z são as coordenadas dos nós do tetraedro; o volume V de cada elemento pode ser determinado da seguinte forma:

$$6\text{V}=\text{sinal}\left(\det[A]\right)\det[A] = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \tag{25}$$

As derivadas parciais da função de interpolação são necessárias nos cálculos e podem ser avaliadas como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial x} &= \frac{1}{6V} b_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} &= \frac{1}{6V} c_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} &= \frac{1}{6V} d_i \end{aligned} \tag{26}$$

Os coeficientes nas funções de interpolação podem, por sua vez, serem calculados como apresentado a seguir.

- os coeficientes a_i:

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2\left(y_3 z_4 - y_4 z_3\right) + x_3\left(y_4 z_2 - y_2 z_4\right) + x_4\left(y_2 z_3 - y_3 z_2\right) \\ a_2 &= x_3\left(y_1 z_4 - y_4 z_1\right) + x_4\left(y_3 z_1 - y_1 z_3\right) + x_1\left(y_4 z_3 - y_3 z_4\right) \\ a_3 &= x_4\left(y_1 z_2 - y_2 z_1\right) + x_1\left(y_2 z_4 - y_4 z_2\right) + x_2\left(y_4 z_1 - y_1 z_4\right) \\ a_4 &= x_1\left(y_3 z_2 - y_2 z_3\right) + x_2\left(y_1 z_3 - y_3 z_1\right) + x_3\left(y_2 z_1 - y_1 z_2\right) \end{aligned} \tag{27}$$

- os coeficientes b_i:

$$b_1 = y_{23} z_{43} - y_{43} z_{23};\ b_2 = y_{31} z_{41} - y_{41} z_{31};\ b_3 = y_{41} z_{21} - y_{21} z_{41};\ b_4 = y_{21} z_{31} - y_{31} z_{21} \tag{28}$$

- os coeficientes c_i

$$c_1 = x_{32}z_{42} - x_{42}z_{32};\ c_2 = x_{41}z_{31} - x_{31}z_{41};\ c_3 = x_{21}z_{41} - x_{41}z_{21};\ c_4 = x_{31}z_{21} - x_{21}z_{31} \tag{29}$$

- os coeficientes d_i

$$d_1 = x_{42}y_{32} - x_{32}y_{42};\ d_2 = x_{31}y_{41} - x_{41}y_{31};\ d_3 = x_{41}y_{21} - x_{21}y_{41};\ d_4 = x_{21}y_{31} - x_{31}y_{21} \tag{30}$$

A notação x_{ij} e y_{ij} usada nas Equações (28) a (30) significa $x_{ij} = x_{nó,i} - x_{nó,j}$ e $y_{ij} = y_{nó,i} - y_{nó,j}$. É importante observar que todos os coeficientes dependem somente das coordenadas dos 4 nós de cada elemento tetraédrico, bem como do volume de cada elemento.

Aplicando o método de resíduos ponderados de Galerkin, descrito no Apêndice A, para resolver a Equação (21b) se obtém a seguinte equação:

$$\int_\Omega [N]^T \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} d\Omega = -\int_\Omega u[N]^T \frac{\partial \phi^n}{\partial x} d\Omega - \int_\Omega v[N]^T \frac{\partial \phi^n}{\partial y} d\Omega - \int_\Omega w[N]^T \frac{\partial \phi^n}{\partial z} d\Omega +$$

$$+\int_\Omega [N]^T \frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma_\phi \frac{\partial \phi^n}{\partial x}\right) d\Omega + \int_\Omega [N]^T \frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma_\phi \frac{\partial \phi^n}{\partial y}\right) d\Omega + \int_\Omega [N]^T \frac{\partial}{\partial z}\left(\gamma_\phi \frac{\partial \phi^n}{\partial z}\right) d\Omega +$$

$$+\frac{\Delta t}{2}\left\{\int_\Omega u[N]^T \frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial \phi^n}{\partial x}\right) d\Omega + \int_\Omega u[N]^T \frac{\partial}{\partial x}\left(v \frac{\partial \phi^n}{\partial y}\right) d\Omega + \int_\Omega u[N]^T \frac{\partial}{\partial x}\left(w \frac{\partial \phi^n}{\partial z}\right) d\Omega\right\} +$$

$$+\frac{\Delta t}{2}\left\{\int_\Omega v[N]^T \frac{\partial}{\partial y}\left(u \frac{\partial \phi^n}{\partial x}\right) d\Omega + \int_\Omega v[N]^T \frac{\partial}{\partial y}\left(v \frac{\partial \phi^n}{\partial y}\right) d\Omega + \int_\Omega v[N]^T \frac{\partial}{\partial y}\left(w \frac{\partial \phi^n}{\partial z}\right) d\Omega\right\} +$$

$$+\frac{\Delta t}{2}\left\{\int_\Omega w[N]^T \frac{\partial}{\partial z}\left(u \frac{\partial \phi^n}{\partial x}\right) d\Omega + \int_\Omega w[N]^T \frac{\partial}{\partial z}\left(v \frac{\partial \phi^n}{\partial y}\right) d\Omega + \int_\Omega w[N]^T \frac{\partial}{\partial z}\left(w \frac{\partial \phi^n}{\partial z}\right) d\Omega\right\} \tag{31}$$

Agora se faz uma linearização dos termos convectivos de segunda ordem, na Equação (31), ou seja, retira-se os componentes de velocidade para fora das integrais como valores médios a serem definidos. Resulta a equação:

$$\int_{\Omega}[N]^T\frac{\phi^{n+1}-\phi^n}{\Delta t}d\Omega=-\int_{\Omega}u[N]^T\frac{\partial\phi^n}{\partial x}d\Omega-\int_{\Omega}v[N]^T\frac{\partial\phi^n}{\partial y}d\Omega-\int_{\Omega}w[N]^T\frac{\partial\phi^n}{\partial z}d\Omega+$$

$$+\int_{\Omega}[N]^T\frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma_\phi\frac{\partial\phi^n}{\partial x}\right)d\Omega+\int_{\Omega}[N]^T\frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma_\phi\frac{\partial\phi^n}{\partial y}\right)d\Omega+\int_{\Omega}[N]^T\frac{\partial}{\partial z}\left(\gamma_\phi\frac{\partial\phi^n}{\partial z}\right)d\Omega+$$

$$+\frac{\Delta t}{2}\langle u\rangle\left\{\int_{\Omega}[N]^T\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial\phi^n}{\partial x}\right)d\Omega+\int_{\Omega}[N]^T\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial\phi^n}{\partial y}\right)d\Omega+\int_{\Omega}[N]^T\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial\phi^n}{\partial z}\right)d\Omega\right\}+$$

$$+\frac{\Delta t}{2}\langle v\rangle\left\{\int_{\Omega}[N]^T\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial\phi^n}{\partial x}\right)d\Omega+\int_{\Omega}[N]^T\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial\phi^n}{\partial y}\right)d\Omega+\int_{\Omega}[N]^T\frac{\partial}{\partial y}\left(w\frac{\partial\phi^n}{\partial z}\right)d\Omega\right\}+$$

$$+\frac{\Delta t}{2}\langle w\rangle\left\{\int_{\Omega}[N]^T\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial\phi^n}{\partial x}\right)d\Omega+\int_{\Omega}[N]^T\frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial\phi^n}{\partial y}\right)d\Omega+\int_{\Omega}[N]^T\frac{\partial}{\partial z}\left(w\frac{\partial\phi^n}{\partial z}\right)d\Omega\right\} \tag{32}$$

Em seguida, se obtém a forma fraca da Equação (32) por integração por partes e se usa o Teorema de Green para transformar integrais de volume em integrais de superfície, resultando:

$$\int_{\Omega}[N]^T\frac{\phi^{n+1}-\phi^n}{\Delta t}d\Omega=-\int_{\Omega}u[N]^T\frac{\partial\phi^n}{\partial x}d\Omega-\int_{\Omega}v[N]^T\frac{\partial\phi^n}{\partial y}d\Omega-\int_{\Omega}w[N]^T\frac{\partial\phi^n}{\partial z}d\Omega+$$

$$-\int_{\Omega}\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\left(\gamma_\phi\frac{\partial\phi^n}{\partial x}\right)d\Omega-\int_{\Omega}\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\left(\gamma_\phi\frac{\partial\phi^n}{\partial y}\right)d\Omega-\int_{\Omega}\frac{\partial[N]^T}{\partial z}\left(\gamma_\phi\frac{\partial\phi^n}{\partial z}\right)d\Omega+$$
$$+\oint_{\Gamma}[N]^T\gamma_\phi\left(\frac{\partial\phi^n}{\partial x}n_x+\frac{\partial\phi^n}{\partial y}n_y+\frac{\partial\phi^n}{\partial z}n_z\right)d\Gamma$$
$$+\langle u\rangle\frac{\Delta t}{2}\left\{-\int_{\Omega}\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\left(u\frac{\partial\phi^n}{\partial x}+v\frac{\partial\phi^n}{\partial y}+w\frac{\partial\phi^n}{\partial z}\right)d\Omega+\oint_{\Gamma}[N]^T\left(u\frac{\partial\phi^n}{\partial x}+v\frac{\partial\phi^n}{\partial y}+w\frac{\partial\phi^n}{\partial z}\right)n_x d\Gamma\right\}+$$

$$+\langle v\rangle\frac{\Delta t}{2}\left\{-\int_{\Omega}\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\left(u\frac{\partial\phi^n}{\partial x}+v\frac{\partial\phi^n}{\partial y}+w\frac{\partial\phi^n}{\partial z}\right)d\Omega+\oint_{\Gamma}[N]^T\left(u\frac{\partial\phi^n}{\partial x}+v\frac{\partial\phi^n}{\partial y}+w\frac{\partial\phi^n}{\partial z}\right)n_y d\Gamma\right\}+$$

$$+\langle w\rangle\frac{\Delta t}{2}\left\{-\int_{\Omega}\frac{\partial[N]^T}{\partial z}\left(u\frac{\partial\phi^n}{\partial x}+v\frac{\partial\phi^n}{\partial y}+w\frac{\partial\phi^n}{\partial z}\right)d\Omega+\oint_{\Gamma}[N]^T\left(u\frac{\partial\phi^n}{\partial x}+v\frac{\partial\phi^n}{\partial y}+w\frac{\partial\phi^n}{\partial z}\right)n_z d\Gamma\right\} \tag{33}$$

Reagrupando os termos de contorno, chega-se na equação seguinte:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega}[N]^T\frac{\phi^{n+1}-\phi^n}{\Delta t}d\Omega=-\int_{\Omega}u[N]^T\frac{\partial\phi^n}{\partial x}d\Omega-\int_{\Omega}v[N]^T\frac{\partial\phi^n}{\partial y}d\Omega-\int_{\Omega}w[N]^T\frac{\partial\phi^n}{\partial z}d\Omega+\\
&-\int_{\Omega}\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\left(\gamma_\phi\frac{\partial\phi^n}{\partial x}\right)d\Omega-\int_{\Omega}\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\left(\gamma_\phi\frac{\partial\phi^n}{\partial y}\right)d\Omega-\int_{\Omega}\frac{\partial[N]^T}{\partial z}\left(\gamma_\phi\frac{\partial\phi^n}{\partial z}\right)d\Omega+\\
&-\langle u\rangle\frac{\Delta t}{2}\left\{\int_{\Omega}\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\left(u\frac{\partial\phi^n}{\partial x}+v\frac{\partial\phi^n}{\partial y}+w\frac{\partial\phi^n}{\partial z}\right)d\Omega\right\}+\\
&-\langle v\rangle\frac{\Delta t}{2}\left\{\int_{\Omega}\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\left(u\frac{\partial\phi^n}{\partial x}+v\frac{\partial\phi^n}{\partial y}+w\frac{\partial\phi^n}{\partial z}\right)d\Omega\right\}+\\
&-\langle w\rangle\frac{\Delta t}{2}\left\{\int_{\Omega}\frac{\partial[N]^T}{\partial z}\left(u\frac{\partial\phi^n}{\partial x}+v\frac{\partial\phi^n}{\partial y}+w\frac{\partial\phi^n}{\partial z}\right)d\Omega\right\}+\\
&+\oint_{\Gamma}[N]^T\gamma_\phi\left(\frac{\partial\phi^n}{\partial x}n_x+\frac{\partial\phi^n}{\partial y}n_y+\frac{\partial\phi^n}{\partial z}n_z\right)d\Gamma+\\
&+\langle u\rangle\frac{\Delta t}{2}\oint_{\Gamma}[N]^T\left(u\frac{\partial\phi^n}{\partial x}+v\frac{\partial\phi^n}{\partial y}+w\frac{\partial\phi^n}{\partial z}\right)n_x d\Gamma+\\
&+\langle v\rangle\frac{\Delta t}{2}\oint_{\Gamma}[N]^T\left(u\frac{\partial\phi^n}{\partial x}+v\frac{\partial\phi^n}{\partial y}+w\frac{\partial\phi^n}{\partial z}\right)n_y d\Gamma+\\
&+\langle w\rangle\frac{\Delta t}{2}\oint_{\Gamma}[N]^T\left(u\frac{\partial\phi^n}{\partial x}+v\frac{\partial\phi^n}{\partial y}+w\frac{\partial\phi^n}{\partial z}\right)n_z d\Gamma
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Agora, substituindo a variável interpolada, como definida na Equação (22), exceto nos termos de contorno, resulta a equação algébrica seguinte:

$$\int_{\Omega}[N]^T[N]d\Omega\frac{\{\Phi\}^{n+1}-\{\Phi\}^n}{\Delta t}=-\left[\int_{\Omega}[N]^T\left(u\frac{\partial[N]}{\partial x}+v\frac{\partial[N]}{\partial y}+w\frac{\partial[N]}{\partial z}\right)d\Omega\right]\{\Phi\}^n+$$

$$-\left[\int_{\Omega}\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\left(\gamma_\phi\frac{\partial[N]}{\partial x}\right)d\Omega+\int_{\Omega}\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\left(\gamma_\phi\frac{\partial[N]}{\partial y}\right)d\Omega+\int_{\Omega}\frac{\partial[N]^T}{\partial z}\left(\gamma_\phi\frac{\partial[N]}{\partial z}\right)d\Omega\right]\{\Phi\}^n+$$

$$-\left[\frac{\Delta t}{2}\langle u\rangle\int_{\Omega}\frac{\partial[N]^T}{\partial x}\left(u\frac{\partial[N]}{\partial x}+v\frac{\partial[N]}{\partial y}+w\frac{\partial[N]}{\partial z}\right)d\Omega\right]\{\Phi\}^n-$$

$$-\left[\frac{\Delta t}{2}\langle v\rangle\int_{\Omega}\frac{\partial[N]^T}{\partial y}\left(u\frac{\partial[N]}{\partial x}+v\frac{\partial[N]}{\partial y}+w\frac{\partial[N]}{\partial z}\right)d\Omega\right]\{\Phi\}^n-$$

$$-\left[\frac{\Delta t}{2}\langle w\rangle\int_{\Omega}\frac{\partial[N]^T}{\partial z}\left(u\frac{\partial[N]}{\partial x}+v\frac{\partial[N]}{\partial y}+w\frac{\partial[N]}{\partial z}\right)d\Omega\right]\{\Phi\}^n+$$

$$+\oint_{\Gamma}[N]^T\gamma_\phi\left(\frac{\partial\phi^n}{\partial x}n_x+\frac{\partial\phi^n}{\partial y}n_y+\frac{\partial\phi^n}{\partial z}n_z\right)d\Gamma+$$

$$+\frac{\Delta t}{2}\langle u\rangle\oint_{\Gamma}[N]^T\left(u\frac{\partial\phi^n}{\partial x}+v\frac{\partial\phi^n}{\partial y}+w\frac{\partial\phi^n}{\partial z}\right)n_x d\Gamma+$$

$$+\frac{\Delta t}{2}\langle v\rangle\oint_{\Gamma}[N]^T\left(u\frac{\partial\phi^n}{\partial x}+v\frac{\partial\phi^n}{\partial y}+w\frac{\partial\phi^n}{\partial z}\right)n_y d\Gamma+$$

$$+\frac{\Delta t}{2}\langle w\rangle\oint_{\Gamma}[N]^T\left(u\frac{\partial\phi^n}{\partial x}+v\frac{\partial\phi^n}{\partial y}+w\frac{\partial\phi^n}{\partial z}\right)n_z d\Gamma \tag{35}$$

Os termos que apareceram denotados pelo domínio Γ representam a contribuição dos contornos do domínio Ω. Observamos, também, nos termos de contorno, o aparecimento do termo n_i, que representam os cossenos diretores e devem sempre apontar para fora do domínio Ω.

A fim de se obter a forma matricial da Equação (35), se definem as seguintes matrizes:

A Matriz Massa:

$$\left[M_e\right]=\int_{\Omega}\left[N\right]^T\left[N\right]d\Omega \tag{36}$$

A Matriz Convectiva:

$$\left[C_e\right]=\int_{\Omega}\left[N\right]^T\left(u\frac{\partial\left[N\right]}{\partial x}+v\frac{\partial\left[N\right]}{\partial y}+w\frac{\partial\left[N\right]}{\partial z}\right)d\Omega \tag{37}$$

A Matriz Difusiva:

$$\left[K_{de}\right]=\int_{\Omega}\gamma_{\phi}\left(\frac{\partial\left[N\right]^{T}}{\partial x}\frac{\partial\left[N\right]}{\partial x}+\frac{\partial\left[N\right]^{T}}{\partial y}\frac{\partial\left[N\right]}{\partial y}+\frac{\partial\left[N\right]^{T}}{\partial z}\frac{\partial\left[N\right]}{\partial z}\right)d\Omega \tag{38}$$

A Matriz Estabilizante:

$$\begin{aligned}\left[K_{ee}\right]=&\frac{\Delta t}{2}\langle u\rangle\left[\int_{\Omega}u\frac{\partial\left[N\right]^{T}}{\partial x}\frac{\partial\left[N\right]}{\partial x}d\Omega+\int_{\Omega}v\frac{\partial\left[N\right]^{T}}{\partial x}\frac{\partial\left[N\right]}{\partial y}d\Omega+\int_{\Omega}w\frac{\partial\left[N\right]^{T}}{\partial x}\frac{\partial\left[N\right]}{\partial z}d\Omega\right]+\\&+\frac{\Delta t}{2}\langle v\rangle\left[\int_{\Omega}u\frac{\partial\left[N\right]^{T}}{\partial y}\frac{\partial\left[N\right]}{\partial x}d\Omega+\int_{\Omega}v\frac{\partial\left[N\right]^{T}}{\partial y}\frac{\partial\left[N\right]}{\partial y}d\Omega+\int_{\Omega}w\frac{\partial\left[N\right]^{T}}{\partial y}\frac{\partial\left[N\right]}{\partial z}d\Omega\right]+\\&+\frac{\Delta t}{2}\langle w\rangle\left[\int_{\Omega}u\frac{\partial\left[N\right]^{T}}{\partial z}\frac{\partial\left[N\right]}{\partial x}d\Omega+\int_{\Omega}v\frac{\partial\left[N\right]^{T}}{\partial z}\frac{\partial\left[N\right]}{\partial y}d\Omega+\int_{\Omega}w\frac{\partial\left[N\right]^{T}}{\partial z}\frac{\partial\left[N\right]}{\partial z}d\Omega\right]\end{aligned} \tag{39}$$

O vetor força devido ao termo difusivo:

$$\left\{f_{1e}\right\}=\int_{\Gamma}[N]^{T}\gamma_{\phi}\left(\frac{\partial\phi^{n}}{\partial x}n_{x}+\frac{\partial\phi^{n}}{\partial y}n_{y}+\frac{\partial\phi^{n}}{\partial z}n_{z}\right)d\Gamma \tag{40}$$

O vetor força devido ao termo estabilizante:

$$\begin{aligned}\left\{f_{2e}\right\}=&\frac{\Delta t}{2}\langle u\rangle\int_{\Gamma}[N]^{T}\left(u\frac{\partial\phi^{n}}{\partial x}+v\frac{\partial\phi^{n}}{\partial y}+w\frac{\partial\phi^{n}}{\partial z}\right)n_{x}d\Gamma+\\&+\frac{\Delta t}{2}\langle v\rangle\int_{\Gamma}[N]^{T}\left(u\frac{\partial\phi^{n}}{\partial x}+v\frac{\partial\phi^{n}}{\partial y}+w\frac{\partial\phi^{n}}{\partial z}\right)n_{y}d\Gamma+\\&+\frac{\Delta t}{2}\langle w\rangle\int_{\Gamma}[N]^{T}\left(u\frac{\partial\phi^{n}}{\partial x}+v\frac{\partial\phi^{n}}{\partial y}+w\frac{\partial\phi^{n}}{\partial z}\right)n_{z}d\Gamma\end{aligned} \tag{41}$$

A partir das definições (36) a (41), podemos escrever Equação (35) na forma matricial como sendo:

$$\left[M_{e}\right]\left\{\frac{\Phi^{n+1}-\Phi^{n}}{\Delta t}\right\}=-\left[\left[C_{e}\right]+\left[K_{de}\right]+\left[K_{ee}\right]\right]\left\{\Phi\right\}^{n}+\left[f_{1e}\right]^{n}+\left[f_{2e}\right]^{n} \tag{42}$$

3.2 PROCEDIMENTO DE SEPARAÇÃO – CBS PARA O CASO DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS

A fim de mostrar todo o esquema CBS, se utiliza, agora, o conjunto de equações que regem escoamentos incompressíveis tridimensionais para uma melhor visualização e compreensão do esquema. As equações governantes para o escoamento são descritas logo em seguida.

Equação da Continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{43}$$

Equação da Quantidade de Movimento em *x*

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{44}$$

Equação da Quantidade de Movimento em *y*

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{45}$$

Equação da Quantidade de Movimento em *z*

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \tag{46}$$

Equação de Transporte de Energia Térmica, em que a variável é a temperatura, $\phi = T$, e o coeficiente difusão é a difusividade térmica, $\gamma_\phi = \alpha$. Assim a equação de transporte fica na forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}=\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \tag{47}$$

Através das aplicações das etapas seguintes, será possível a obtenção da solução para as equações de Navier-Stokes e para a equação de transferência de calor por convecção-difusão.

Passo 1: Campo de Velocidades Intermediárias

Neste passo é realizada a remoção dos termos de pressão das Equações (44) a (46). Tal procedimento nos permite aplicar o Galerkin Característico e assim calcular o campo de velocidades intermediárias. As Equações (44) a (46), após remoção do termo de pressão, na forma semi-discreta, são escritas da seguinte forma:

Equação da Quantidade de Movimento Intermediário em *x*

$$\frac{\tilde{u}-u^n}{\Delta t}+u\frac{\partial u^n}{\partial x}+v\frac{\partial u^n}{\partial y}+w\frac{\partial u^n}{\partial z}=\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)^n \tag{48}$$

Equação da Quantidade de Movimento Intermediário em *y*

$$\frac{\tilde{v}-v^n}{\Delta t}+u\frac{\partial v^n}{\partial x}+v\frac{\partial v^n}{\partial y}+w\frac{\partial v^n}{\partial z}=\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)^n \tag{49}$$

Equação da Quantidade de Movimento Intermediário em *z*

$$\frac{\tilde{w}-w^n}{\Delta t}+u\frac{\partial w^n}{\partial x}+v\frac{\partial w^n}{\partial y}+w\frac{\partial w^n}{\partial z}=\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)^n \tag{50}$$

onde $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ e $\tilde{w}$ são variáveis do campo de velocidades intermediárias.

Pode-se aplicar, agora, o método do Galerkin Característico nas Equações (48) a (50), obtendo, a forma semi-discreta das mesmas, como a seguir:

Equação da Quantidade de Movimento Intermediário em *x*.

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{u}-u^n}{\Delta t}=&-u\frac{\partial u^n}{\partial x}-v\frac{\partial u^n}{\partial y}-w\frac{\partial u^n}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)^n+\\&+\frac{\Delta t}{2}u\frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right]^n+\\&+\frac{\Delta t}{2}v\frac{\partial}{\partial y}\left[u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right]^n+\\&+\frac{\Delta t}{2}w\frac{\partial}{\partial z}\left[u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right]^n\end{aligned} \tag{51}$$

Equação da Quantidade de Movimento Intermediário em *y*.

$$\frac{\tilde{v}-v^n}{\Delta t}=-u\frac{\partial v^n}{\partial x}-v\frac{\partial v^n}{\partial y}-w\frac{\partial v^n}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial z}\right)^n+$$
$$+\frac{\Delta t}{2}u\frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right]^n+$$
$$+\frac{\Delta t}{2}v\frac{\partial}{\partial y}\left[u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right]^n+$$
$$+\frac{\Delta t}{2}w\frac{\partial}{\partial z}\left[u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right]^n \quad (52)$$

Equação da Quantidade de Movimento Intermediário em *z*.

$$\frac{\tilde{w}-w^n}{\Delta t}=-u\frac{\partial w^n}{\partial x}-v\frac{\partial w^n}{\partial y}-w\frac{\partial w^n}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)^n+$$
$$+\frac{\Delta t}{2}u\frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right]^n+$$
$$+\frac{\Delta t}{2}v\frac{\partial}{\partial y}\left[u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right]^n+$$
$$+\frac{\Delta t}{2}w\frac{\partial}{\partial z}\left[u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right]^n \quad (53)$$

É importante notar que nas Equações (51) a (53), os termos difusivos foram tratados explicitamente, ou seja, sem se considerar os termos de estabilização oriundos da expansão em série de Taylor.

Passo 2: Cálculo da Pressão

O campo de pressão pode ser calculado a partir de uma equação de Poisson. A equação é derivada porque as velocidades intermediárias do primeiro passo precisam ser corrigidas para satisfazer a conservação da massa. Se as correções de pressão não forem removidas na equação da quantidade de movimento, as velocidades corretas são obtidas, porém, com a perda de algumas vantagens. A forma semi-discreta das equações da quantidade de movimento, sem a remoção dos termos de pressão (Equações de Navier-Stokes) são:

- Forma Semi-Discreta da Equação da Quantidade de Movimento em *x*.

$$\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} = -u\frac{\partial u^n}{\partial x} - v\frac{\partial u^n}{\partial y} - w\frac{\partial u^n}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)^n - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p^n}{\partial x} + \\ + \frac{\Delta t}{2}u\frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial u^n}{\partial x} + v\frac{\partial u^n}{\partial y} + w\frac{\partial u^n}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p^n}{\partial x}\right] \\ + \frac{\Delta t}{2}v\frac{\partial}{\partial y}\left[u\frac{\partial u^n}{\partial x} + v\frac{\partial u^n}{\partial y} + w\frac{\partial u^n}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p^n}{\partial x}\right] \\ + \frac{\Delta t}{2}w\frac{\partial}{\partial z}\left[u\frac{\partial u^n}{\partial x} + v\frac{\partial u^n}{\partial y} + w\frac{\partial u^n}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p^n}{\partial x}\right] \tag{54}$$

- Forma Semi-Discreta da Equação da Quantidade de Movimento em *y*.

$$\frac{v^{n+1}-v^n}{\Delta t} = -u\frac{\partial v^n}{\partial x} - v\frac{\partial v^n}{\partial y} - w\frac{\partial v^n}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)^n - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p^n}{\partial y} + \\ + \frac{\Delta t}{2}u\frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial v^n}{\partial x} + v\frac{\partial v^n}{\partial y} + w\frac{\partial v^n}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p^n}{\partial y}\right] \\ + \frac{\Delta t}{2}v\frac{\partial}{\partial y}\left[u\frac{\partial v^n}{\partial x} + v\frac{\partial v^n}{\partial y} + w\frac{\partial v^n}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p^n}{\partial y}\right] \\ + \frac{\Delta t}{2}w\frac{\partial}{\partial z}\left[u\frac{\partial v^n}{\partial x} + v\frac{\partial v^n}{\partial y} + w\frac{\partial v^n}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p^n}{\partial y}\right] \tag{55}$$

- Forma Semi-Discreta da Equação da Quantidade de Movimento em x_3.

$$\frac{w^{n+1}-w^n}{\Delta t} = -u\frac{\partial w^n}{\partial x} - v\frac{\partial w^n}{\partial y} - w\frac{\partial w^n}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)^n - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p^n}{\partial z} + \\ + \frac{\Delta t}{2}u\frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial w^n}{\partial x} + v\frac{\partial w^n}{\partial y} + w\frac{\partial w^n}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p^n}{\partial z}\right] \\ + \frac{\Delta t}{2}v\frac{\partial}{\partial y}\left[u\frac{\partial w^n}{\partial x} + v\frac{\partial w^n}{\partial y} + w\frac{\partial w^n}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p^n}{\partial z}\right] \\ + \frac{\Delta t}{2}w\frac{\partial}{\partial z}\left[u\frac{\partial w^n}{\partial x} + v\frac{\partial w^n}{\partial y} + w\frac{\partial w^n}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p^n}{\partial z}\right] \tag{56}$$

Subtraindo das Equações (54) a (56) as Equações (51) a (53) respectivamente, resultará no conjunto de equações escritas na sequência:

$$\frac{u^{n+1}-\tilde{u}}{\Delta t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^{n}}{\partial x}+\frac{\Delta t}{2}u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{n}+\frac{\Delta t}{2}v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{n}+\frac{\Delta t}{2}w\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{n} \tag{57}$$

$$\frac{v^{n+1}-\tilde{v}}{\Delta t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^{n}}{\partial y}+\frac{\Delta t}{2}u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right)^{n}+\frac{\Delta t}{2}v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right)^{n}+\frac{\Delta t}{2}w\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right)^{n} \tag{58}$$

$$\frac{w^{n+1}-\tilde{w}}{\Delta t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^{n}}{\partial z}+\frac{\Delta t}{2}u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)^{n}+\frac{\Delta t}{2}v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)^{n}+\frac{\Delta t}{2}w\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)^{n} \tag{59}$$

Uma vez obtidas as velocidades intermediárias do primeiro passo e o campo de pressão, as velocidades finais podem ser obtidas utilizando as Equações (57) a (59). Segundo Liu (2005), termos de ordem superior podem ser excluídos, visto que, esses termos pouco influenciam sobre a correção da velocidade. Após se desprezar tais termos e derivar cada membro da Equação (57) em relação à x_1, da Equação (58) em relação à x_2 e da Equação (59) em relação à x_3 e somar as equações resultantes, (LEWIS, 2004), chega-se a

$$\left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}+\frac{\partial v^{n+1}}{\partial y}+\frac{\partial w^{n+1}}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}+\frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}\right)=-\frac{\Delta t}{\rho}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right)^{n} \tag{60}$$

Podemos definir, pela equação da continuidade, que:

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x}+\frac{\partial v^{n+1}}{\partial y}+\frac{\partial w^{n+1}}{\partial z}=0 \tag{61}$$

Substituindo a Equação (61) na Equação (60), se obtém a equação da pressão, como representada na Equação (62):

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right)^{n}=\frac{\rho}{\Delta t}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}+\frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}\right) \tag{62}$$

Note que, não existe condições transientes ou convecção na Equação (62) e esta é uma equação do tipo Poisson. Aqui um método de solução de sistemas lineares de equações será necessário, a fim de se obter uma solução, (Lewis, 2004).

Passo 3: Correção da Velocidade

A correção da velocidade é feita utilizando as Equações (54) a (56) demonstradas no passo anterior. Uma vez que o campo das velocidades intermediárias foi calculado pelas Equações (47) a (49) e o campo de pressão pela Equação (58), a correção é possível.

Passo 4: Cálculo da Temperatura

Aplicando o procedimento de Galerkin Característico para a equação de transporte de energia, Equação (43), resulta a equação:

$$\begin{aligned}\frac{T^{n+1}-T^{n}}{\Delta t} &= -u\frac{\partial T^{n}}{\partial x} - v\frac{\partial T^{n}}{\partial y} - w\frac{\partial T^{n}}{\partial z} + \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)^{n} + \\ &+ \frac{\Delta t}{2}u\frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right]^{n} + \\ &+ \frac{\Delta t}{2}v\frac{\partial}{\partial y}\left[u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right]^{n} + \\ &+ \frac{\Delta t}{2}w\frac{\partial}{\partial z}\left[u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right]^{n}\end{aligned} \tag{63}$$

Todas as quatro etapas anteriores são resumidas a seguir.

Passo 1: Campo de Velocidade Intermediária

Equação da Quantidade de Movimento Intermediário em *x*.

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{u}-u^{n}}{\Delta t} &= -u\frac{\partial u^{n}}{\partial x} - v\frac{\partial u^{n}}{\partial y} - w\frac{\partial u^{n}}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)^{n} + \\ &+ \frac{\Delta t}{2}u\frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right]^{n} + \\ &+ \frac{\Delta t}{2}v\frac{\partial}{\partial y}\left[u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right]^{n} + \\ &+ \frac{\Delta t}{2}w\frac{\partial}{\partial z}\left[u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right]^{n}\end{aligned} \tag{51}$$

Equação da Quantidade de Movimento Intermediário em x_2.

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{v}-v^n}{\Delta t} = &-u\frac{\partial v^n}{\partial x}-v\frac{\partial v^n}{\partial y}-w\frac{\partial v^n}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial z}\right)^n+\\ &+\frac{\Delta t}{2}u\frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right]^n+\\ &+\frac{\Delta t}{2}v\frac{\partial}{\partial y}\left[u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right]^n+\\ &+\frac{\Delta t}{2}w\frac{\partial}{\partial z}\left[u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right]^n\end{aligned} \tag{52}$$

Equação da Quantidade de Movimento Intermediário em x_3.

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{w}-w^n}{\Delta t} = &-u\frac{\partial w^n}{\partial x}-v\frac{\partial w^n}{\partial y}-w\frac{\partial w^n}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)^n+\\ &+\frac{\Delta t}{2}u\frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right]^n+\\ &+\frac{\Delta t}{2}v\frac{\partial}{\partial y}\left[u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right]^n+\\ &+\frac{\Delta t}{2}w\frac{\partial}{\partial z}\left[u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right]^n\end{aligned} \tag{53}$$

Passo 2: Solução do Campo de Pressão

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right)^n = \frac{\rho}{\Delta t}\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}+\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}+\frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}\right) \tag{62}$$

Passo 3: Correção da Velocidade (Eqs. 57 a 59)

$$\frac{u^{n+1}-\tilde{u}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^n}{\partial x}+\frac{\Delta t}{2}u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)^n+\frac{\Delta t}{2}v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)^n+\frac{\Delta t}{2}w\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)^n \tag{57}$$

$$\frac{v^{n+1}-\tilde{v}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^n}{\partial y}+\frac{\Delta t}{2}u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right)^n+\frac{\Delta t}{2}v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right)^n+\frac{\Delta t}{2}w\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right)^n \tag{58}$$

$$\frac{w^{n+1}-\tilde{w}}{\Delta t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^n}{\partial z}+\frac{\Delta t}{2}u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)^n+\frac{\Delta t}{2}v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)^n+\frac{\Delta t}{2}w\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)^n \tag{59}$$

Passo 4: Cálculo da Temperatura

$$\begin{aligned}\frac{T^{n+1}-T^n}{\Delta t}=&-u\frac{\partial T^n}{\partial x}-v\frac{\partial T^n}{\partial y}-w\frac{\partial T^n}{\partial z}+\alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)^n+\\&+\frac{\Delta t}{2}u\frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right]^n+\\&+\frac{\Delta t}{2}v\frac{\partial}{\partial y}\left[u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right]^n+\\&+\frac{\Delta t}{2}w\frac{\partial}{\partial z}\left[u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right]^n\end{aligned} \tag{63}$$

Pode-se, ainda, reescrever os quatro passos resumidos acima utilizando notação indicial:

Primeiro Passo

$$\frac{\tilde{u}_i-u_i^n}{\Delta t}=-u_j\frac{\partial u_i^n}{\partial x_j}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}\right)^n+\frac{\Delta t}{2}u_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left[u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]^n \tag{64}$$

Segundo Passo

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_i\partial x_i}\right)^n=\frac{\rho}{\Delta t}\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i}\right) \tag{65}$$

Terceiro Passo

$$\frac{u_i^{n+1}-\tilde{u}_i}{\Delta t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^n}{\partial x_i}+\frac{\Delta t}{2}u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)^n \tag{66}$$

Quarto Passo (Equação da Energia)

$$\Delta T=T^{n+1}-T^n=\Delta t\left[-u_i\frac{\partial T^n}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\alpha\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)^n+\frac{\Delta t}{2}u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_i\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)^n\right] \tag{67}$$

Uma vez explicado os quatro passos que compõe o esquema, fica concluída a explicação da teoria dentro do esquema. Todo o procedimento da separação explicado aqui resulta na discretização temporal de nosso problema. É importante dizer que, devido à separação do cálculo da velocidade no primeiro passo e do cálculo da pressão no segundo passo, o esquema CBS atende à condição de Ladyzhenskaya, Babuska e Brezzi ou condição LBB, ou ainda a condição limite de compressibilidade.

3.3 CÁLCULO DO PASSO DE TEMPO

O passo de tempo local em cada nó é calculado como se segue (LEWIS, 2004):

$$\Delta t = \min\left(\Delta t_c, \Delta t_d\right) \tag{68}$$

onde Δt_c e Δt_d são os passos de tempo baseados nos processos de convecção e difusão.

O passo de tempo de convecção Δt_c é escrito como:

$$\Delta t_c = \frac{h}{\|u\|_2} \tag{69}$$

onde $\|u\|_2$ é a norma da velocidade e h é um tamanho característico do elemento. Já o passo de tempo difusivo é definido como:

$$\Delta t_d = \frac{h^2}{2\alpha} \tag{70}$$

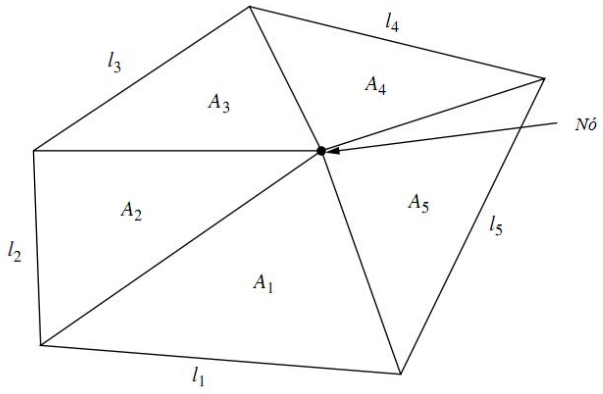
O passo de tempo difusivo contém duas partes. A primeira está relacionada com a difusão de quantidade de movimento e é uma função da viscosidade cinemática e a segunda está relacionada com a difusão térmica e é uma função da difusividade térmica do fluido. O passo de tempo de difusão pode ser expresso como:

$$\Delta t_d = \min\left(\frac{h^2}{2v}, \frac{h^2}{2\alpha}\right) \tag{71}$$

onde v é a viscosidade cinemática e α a difusividade térmica. De modo que, se o quarto passo do esquema CBS não for de interesse e a equação da energia não for calculada, o passo de tempo difusivo será aquele em função da viscosidade cinemática do fluido.

O tamanho do elemento *h* é calculado para cada nó e depende dos elementos que estão ligados a este nó. A Figura 3 ajuda a se entender melhor como é feito o cálculo para o exemplo de um escoamento bidimensional com elementos triangulares.

Figura 3 - Um nó compartilhado por vários elementos.



Fonte: Adaptado de Lewis et al. (2004).

O procedimento para calcular o tamanho característico de elemento em duas dimensões é:

$$h = \min\left(\frac{2Area_i}{l_i}\right), i = 1,\ \ Ne \tag{72}$$

onde, *Ne* é igual ao número de elementos compartilhado por um nó, $Area_i$ é a área dos elementos ligados ao nó e l_i é o comprimento dos lados opostos como mostrado na Figura 3. Para o caso tridimensional a relação equivalente à Equação (72) é:

$$h = \min\left(\frac{3Volume_i}{A_{op_i}}\right), i = 1,\ \text{número de elementos ligados ao nó} \tag{73}$$

onde o termo A_{op_i} representa a área da face oposta ao nó que está sendo avaliado e $Volume_i$ é o volume do elemento.

3.4 COMPRESSIBILIDADE ARTIFICIAL - AC

Quando a compressibilidade real do fluido é pequena, é comum assumir que este fluido é incompressível conforme a velocidade do som se aproxima do infinito. Mesmo que a velocidade do som seja finita, o seu valor deve ser grande e assim uma severa limitação no passo de tempo aparece. Entretanto, o método da compressibilidade artificial pode ser aplicado a fim de eliminar tal restrição causada pelo valor da velocidade do som no passo 2 do esquema CBS, assumindo um valor artificial para a velocidade do som suficientemente baixa. Isto, porém só é possível se a condição de regime permanente existir e com isso, naquele limite, o termo transiente desaparece. Então, o passo 2 do esquema CBS, em sua forma semi-discreta, deve ser reescrito como:

$$\begin{aligned}\Delta\rho &= \left(\frac{1}{c^2}\right)^n \Delta p \approx \left(\frac{1}{\beta^2}\right)^n \Delta p \\ &= -\Delta t\left[\frac{\partial U_i^n}{\partial x_i} + \theta_1 \frac{\partial \Delta U_i^*}{\partial x_i} - \Delta t\theta_1\left(\frac{\partial^2 p^n}{\partial x_i \partial x_i} + \theta_2 \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x_i \partial x_i}\right)\right]\end{aligned} \tag{74}$$

onde β é o parâmetro de compressibilidade artificial com dimensão de velocidade. Este parâmetro deve ser dado como uma constante ou baseado nas restrições do passo de tempo convectiva e difusiva. Em termos locais, o valor de β deve ser avaliado conforme a seguinte relação:

$$\beta = max\left(c_0, u_{conv}, u_{diff}\right) \tag{75}$$

onde o valor de c_0 é uma constante, entre 0.1 e 0.5 (LEWIS, 2004) e os outros dois parâmetros são respectivamente a velocidade convectiva e a difusiva, que são dadas por:

$$u_{conv} = |\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_i u_i} \tag{76}$$

$$u_{diff} = \frac{\nu}{h} \tag{77}$$

onde h é o tamanho característico do elemento, calculado pela Equação (72) ou Equação (73) dependendo do número de dimensões do problema, e ν é a viscosidade cinemática. As duas

relações anteriores serão escritas agora em relação aos grupos adimensionais utilizados previamente nas equações governantes, e se tem segundo Nithiarasu et.al., 2004 que

$$u_{conv} = |\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_i u_i} \tag{78}$$

$$u_{diff} = \frac{\nu}{h} \tag{79}$$

Os outros 3 passos do CBS seguem inalterados. Entretanto a limitação de passo de tempo para a compressibilidade artificial deve ser reescrita, a partir da Equação (69), da seguinte forma:

$$\Delta t = \frac{h}{u_{conv} + \beta} \tag{80}$$

É importante lembrar neste ponto que, o método da compressibilidade artificial mostrado nesta seção, é valido somente para escoamentos em regime permanente. Mas, é possível obter uma solução transiente utilizando o método do passo de tempo duplo que será mostrado mais adiante.

3.5 O AC-CBS

Primeiramente, para se calcular o campo de velocidades intermediárias (Passo 1), o termo de pressão da equação de Navier-Stokes foi removido, o que produz uma equação convectiva-difusiva para a quantidade de movimento. Agora, a equação encontra-se numa forma possível de se aplicar o procedimento do Galerkin Característico descrito anteriormente. É importante notar que o termo difusivo da equação de Navier-Stokes, aqui é descrito em função do tensor de tensões τ_{ij}.

$$\Delta U_i^* = \Delta t \left[-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_j U_i\right) + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\Delta t}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j U_i\right)\right)\right]^n \tag{81}$$

Pode-se observar que a Equação (81) é resolvida de modo totalmente explícito e assim permite uma solução completa. Para se obter a velocidade corrigida, procede-se da seguinte forma:

$$\Delta U = \Delta U^{*} + \Delta U^{**} \tag{82}$$

onde:

$$\begin{aligned} \Delta U &= U^{n+1} - U^{n} \\ \Delta U^{*} &= \tilde{U} - U^{n} \\ \Delta U^{**} &= U^{n+1} - \tilde{U} \end{aligned} \tag{83}$$

Fazendo as devidas substituições, obtém-se a Equação (84) que, uma vez calculado o campo de pressão, faz a correção do campo de velocidades intermediárias. Este processo é na verdade o terceiro passo do esquema CBS.

$$\Delta U_i^{**} = \Delta U_i - \Delta U_i^{*} = -\Delta t \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial p^{n}}{\partial x_i}\right) \tag{84}$$

O segundo passo tem origem na equação da continuidade e a partir dele, o campo de pressão será calculado da seguinte forma:

$$\left(\frac{1}{c^2}\right)^{n}\left(p^{n+1} - p^{n}\right) = -\Delta t \frac{\partial U_i^{n+\theta_1}}{\partial x_i} \tag{85}$$

Fazendo $U_i^{n+\theta_1} = \theta_1 U_i^{n+1} + \left(1-\theta_1\right) U_i^{n}$ e substituindo na Equação (85):

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c^2}\right)^{n}\left(p^{n+1} - p^{n}\right) = -\Delta t \left[\theta_1 \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_i} + \left(1-\theta_1\right)\frac{\partial U_i^{n}}{\partial x_i}\right] + \\ + \Delta t^2 \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\theta_2 \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + \left(1-\theta_2\right)\frac{\partial p^{n}}{\partial x_i} - \frac{\Delta t}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial p^{n}}{\partial x_i}\right)\right] \end{aligned} \tag{86}$$

Desprezando os termos de ordem superior, chega-se na Equação (87):

$$\left(\frac{1}{c^2}\right)^{n}\left(p^{n+1} - p^{n}\right) = -\Delta t \left[\theta_1 \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial x_i} + \left(1-\theta_1\right)\frac{\partial U_i^{n}}{\partial x_i}\right] + \Delta t^2 \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\theta_2 \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + \left(1-\theta_2\right)\frac{\partial p^{n}}{\partial x_i}\right] \tag{87}$$

A partir deste ponto, o campo de pressão foi calculado e o campo de velocidades já foi corrigido. Em resumo, se tem os três primeiros passos do esquema AC-CBS:

1. Campo de velocidade intermediária. Equação (81)
2. Campo de pressão. Equação (87)
3. Correção do campo de velocidade. Equação (84)

De posse da velocidade e da pressão, o quarto e último passo do esquema é o cálculo de qualquer outro parâmetro escalar, uma vez que a sua equação governante adequada seja utilizada.

3.6 PASSO DE TEMPO DUPLO (*DUAL TIME-STEPPING*)

Uma vez que o esquema AC-CBS tem natureza explicita e envolve a compressibilidade artificial, a condição de incompressibilidade somente é satisfeita no regime permanente. Então, para obter uma solução real transiente, soluções instantâneas em regime permanente que, aproximadamente, satisfazem a condição de incompressibilidade serão integradas na solução. Nesta abordagem, um termo de passo de tempo real é adicionado na equação de quantidade de movimento e o passo de tempo usando anteriormente atua como um mecanismo iterativo dentro de cada passo de tempo real. Uma vez que a solução é iterada dentro de cada passo de tempo real, o método do passo duplo é implícito e livre de matriz por natureza, e não apresenta nenhuma restrição em relação ao passo de tempo real. Embora o passo iterativo usado dentro de cada passo de tempo real seja restrito pelo limite de estabilidade explícito, ele não tem nenhuma influência sobre o valor do passo de tempo real. O passo iterativo dentro de cada passo de tempo real também lineariza a convecção e, mesmo que o passo de tempo real seja de natureza implícita, nenhum procedimento adicional de solução de matriz é requerido, (NITHIARASU et. al., 2003).

A principal diferença entre a formulação do CBS para a do AC-CBS é que o passo de tempo é tratado como um pseudo passo de tempo iterativo para alcançar o regime permanente instantâneo dentro do passo de tempo real, (ZIENKIEWICS et. al., 2014). A do campo de velocidades, neste caso, é da forma:

$$U_i^{n+1} - U_i^n = \Delta t\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j U_i\right)^n + \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} + \left(\rho g_i\right)^n - \frac{\Delta U_i^m}{\Delta \tau} \right] - \Delta t \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} + \\ + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j U_i\right)^n + \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} + \left(\rho g_i\right)^n - \frac{\Delta U_i^m}{\Delta \tau} \right] + \\ + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} \right) \tag{88}$$

onde ΔU_i^m é a variação real da variável U_i. Este termo é aproximado dependendo da precisão transiente requerida. Uma precisão de segunda ordem é obtida com a seguinte aproximação: (NITHIARASU et. al., 2003); (ZIENKIEWICZ et. al., 2014) e (NICKAEEN e ASHRAFIZADEH, 2010)

$$\Delta U_i^m = \frac{3U_i^n - 4U_i^m + U_i^{m-1}}{2} \tag{89}$$

Aqui o índice sobrescrito *m* se refere a variação do tempo real.

Incorporando as modificações, oriundas da técnica do passo duplo, dentro da formulação do CBS, os três passos serão reescritos em sua forma semi-discreta como:

Passo1:

$$\Delta U_i^* = \Delta t\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j U_i\right) + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i + \frac{\Delta t}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j U_i\right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho g_i \right) \right]^n \tag{90}$$

Passo 2:

$$\Delta\rho = \frac{1}{\beta^2}\Delta p = -\Delta t \frac{\partial U_i^{n+\theta_1}}{\partial x_i} = -\Delta t\left(\frac{\partial U_i^n}{\partial x_i} + \theta_1 \frac{\partial \Delta U_i}{\partial x_i} \right) \tag{91}$$

Passo 3:

$$\Delta U_i^{**} = -\Delta t \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} - \frac{\Delta U_i^m}{\Delta \tau} + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial^2 p^n}{\partial x_k \partial x_i} + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \left(\frac{\Delta U_i^m}{\Delta \tau} \right) \tag{92}$$

Substituindo ΔU_i por $\Delta U_i^* + \Delta U_i^{**^*}$, rearranjando e desprezando os termos maiores do que segunda ordem, obtém-se a forma final do passo 2.

$$\frac{1}{\beta^2}\Delta p = -\Delta t\left[\frac{\partial U_i^n}{\partial x_i} + \theta_1\frac{\partial \Delta U_i^*}{\partial x_i} - \Delta t\theta_1\left(\frac{\partial^2 p^n}{\partial x_i \partial x_i} + \theta_2\frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x_i \partial x_i}\right) - \theta_1\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\Delta U_i^m}{\Delta \tau}\right)\right] \tag{93}$$

3.7 DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL

Neste trabalho serão utilizados elementos tetraédricos para a discretização espacial do domínio de escoamento. As variáveis velocidade e pressão são interpoladas num elemento linear com quatro nós como:

$$\begin{aligned}
u(x,y,z,t) &= N_1(x,y,z)u_1(t) + N_2(x,y,z)u_2(t) + \\
&+ N_3(x,y,z)u_3(t) + N_4(x,y,z)u_4(t) \\
v(x,y,z,t) &= N_1(x,y,z)v_1(t) + N_2(x,y,z)v_2(t) + \\
&+ N_3(x,y,z)v_3(t) + N_4(x,y,z)v_4(t) \\
w(x,y,z,t) &= N_1(x,y,z)w_1(t) + N_2(x,y,z)w_2(t) + \\
&+ N_3(x,y,z)w_3(t) + N_4(x,y,z)w_4(t) \\
p(x,y,z,t) &= N_1 p_1(t) + N_2(x,y,z)p_2(t) + \\
&+ N_3(x,y,z)p_3(t) + N_4(x,y,z)p_4(t)
\end{aligned} \tag{94}$$

A seguir, se utiliza o esquema AC-CBS descrito no Item 3.5 (Eqs.(90)-(92)) para aplicar o procedimento de discretização de Galerkin em cada passo.

1º passo

Multiplicando pela função peso, integrando no domínio Ω e substituindo a variável de interesse pela aproximação, a Equação (90), fica na forma:

$$\int_\Omega [N]^T \Delta U_i^* d\Omega = -\Delta t \left[\int_\Omega [N]^T \frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j U_i\right) d\Omega + \int_\Omega \frac{\partial [N]^T}{\partial x_j} \tau_{ij} d\Omega - \int_\Omega [N]^T \left(\rho g_i\right) d\Omega \right] +$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{2} \left[\int_\Omega \frac{\partial \left(u_k [N]^T\right)}{\partial x_k} \left(-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j U_i\right) + \left(\rho g_i\right) \right) d\Omega \right]^n + \Delta t \int_\Gamma [N]^T \tau_{ij} n_j d\Gamma \tag{95}$$

Pode-se reescrever a Equação (3.83) numa forma matricial e se obtém:

$$\left\{\Delta U_i^*\right\} = -\Delta t [M]^{-1} \begin{Bmatrix} [C_u]\{U_i\} + [K_{1,\tau}]\{u_i\} + [K_{2i,\tau}]\{u_j\} - \{f_i\} - \\ -\frac{\Delta t}{2}\left([K_u]\{U_i\} + f_{s,i}\right) \end{Bmatrix}^n \tag{96}$$

onde as matrizes da Equação (3.84) são definidas a seguir:

$$[M] = \int_\Omega [N]^T [N] d\Omega \tag{97a}$$

$$[C_u] = \int_\Omega [N]^T \left[\frac{\partial \left(u_j [N]\right)}{\partial x_j} \right] d\Omega \tag{97b}$$

$$[K_{1,\tau}] = \int_\Omega \mu [B]^T [B] d\Omega ; \quad [K_{2i,\tau}] = \int_\Omega \mu [B]^T \left[\frac{\partial N}{\partial x_i} \right] d\Omega \tag{97c}$$

$$[K_u] = \int_\Omega \left[\frac{\partial \left(u_k [N]\right)}{\partial x_k} \right]^T \left[\frac{\partial \left(u_j [N]\right)}{\partial x_j} \right] d\Omega \tag{97d}$$

$$\{f_i\} = \int_\Omega [N]^T \rho g_i d\Omega + \int_\Gamma [N]^T t_i d\Gamma ; \; t_i = \tau_{ij} n_j \tag{97e}$$

$$\{f_{s,i}\} = \int_\Omega \int_\Omega \left[\frac{\partial \left(u_k [N]\right)}{\partial x_k} \right]^T \rho g_i d\Omega \tag{97f}$$

Na Equação (97c), a matriz $[B]$ é definida como

$$[B]=\left[\frac{\partial[N]}{\partial x_j}\right] \tag{98}$$

2º passo

Fazendo o mesmo procedimento anterior, agora para a Equação (74) se obtém:

$$\int_\Omega [N]^T\,\Delta\rho d\Omega = -\Delta t\int_\Omega [N]^T\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left[U_i^n+\theta_1\Delta U_i^*-\Delta t\theta_1\left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i}+\theta_2\,\frac{\partial \Delta p}{\partial x_i}\right)\right]d\Omega =$$

$$=\Delta t\int_\Omega\left[\frac{\partial[N]}{\partial x_i}\right]^T\left[U_i^n+\theta_1\Delta U_i^*-\Delta t\theta_1\left(\theta_2\,\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i}+(1-\theta_2)\frac{\partial p^n}{\partial x_i}\right)\right]d\Omega -$$

$$-\Delta t\oint_\Gamma[[N]]^T\left[U_i^n+\theta_1\Delta U_i^*-\Delta t\theta_1\left(\theta_2\,\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i}+(1-\theta_2)\frac{\partial p^n}{\partial x_i}\right)\right]n_i d\Gamma$$

$$\int_\Omega\left([N]^T\,\frac{p^{n+1}}{c^2}+\Delta t^2\theta_1\theta_2\left[\frac{\partial[N]}{\partial x_i}\right]^T\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i}\right)d\Omega-\Delta t^2\theta_1\theta_2\oint_\Gamma[N]^T\,\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i}n_i d\Gamma =$$

$$=\int_\Omega[N]^T\,\frac{p^n}{c^2}d\Omega+\Delta t\int_\Omega\left[\frac{\partial[N]}{\partial x_i}\right]^T\left[U_i^n+\theta_1\Delta U_i^*-\Delta t\theta_1(1-\theta_2)\left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i}\right)\right]d\Omega -$$

$$-\Delta t\oint_\Gamma[[N]]^T\left[U_i^n+\theta_1\Delta U_i^*-\Delta t\theta_1(1-\theta_2)\left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i}\right)\right]n_i d\Gamma$$

Substituindo as interpolações das variáveis na equação anterior

$$\left\{\begin{array}{l}\int_{\Omega}\left[\frac{1}{c^2}[N]^T[N]+\Delta t^2\theta_1\theta_2\left[\frac{\partial[N]}{\partial x_i}\right]^T\left[\frac{\partial[N]}{\partial x_i}\right]\right]d\Omega- \\ -\Delta t^2\theta_1\theta_2\oint_{\Gamma}[N]^T\left[\frac{\partial[N]}{\partial x_i}\right]n_i d\Gamma\end{array}\right\}\{p\}^{n+1}=$$

$$=\left\{\int_{\Omega}\frac{1}{c^2}[N]^T[N]d\Omega\right\}\{p\}^n+\Delta t\left\{\begin{array}{l}\left[\int_{\Omega}\left[\frac{\partial[N]}{\partial x_i}\right]^T[N]d\Omega\right]\{U_i\}^n+ \\ +\left[\theta_1\int_{\Omega}\left[\frac{\partial[N]}{\partial x_i}\right]^T[N]d\Omega\right]\{\Delta U_i^*\}- \\ -\Delta t\theta_1(1-\theta_2)\left[\int_{\Omega}\left[\frac{\partial[N]}{\partial x_i}\right]^T\left[\frac{\partial[N]}{\partial x_i}\right]d\Omega\right]\{p\}^n\end{array}\right\}$$

$$-\Delta t\oint_{\Gamma}[[N]]^T\left[U_i^n+\theta_1\Delta U_i^*-\Delta t\theta_1(1-\theta_2)\left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i}\right)\right]n_i d\Gamma \tag{99}$$

Reescrevendo também na forma matricial, a Equação (99) é escrita como:

$$\begin{array}{l}\left[[M]+\Delta t^2\theta_1\theta_2[H]-\Delta t^2\theta_1\theta_2[G^*]\right]\{p\}^{n+1}=[M]\{p\}^n- \\ -\Delta t\left([G]\{U_i\}+\theta_1[G]\{\Delta U_i^*\}^n-\Delta t\theta_1(1-\theta_2)[H]\{p\}^n\right)-\{f_p\}\end{array} \tag{100}$$

onde as matrizes da Equação (100) são as definidas a seguir:

$$[M]=\int_{\Omega}\left[\frac{1}{c^2}[N]^T[N]\right]d\Omega \tag{101a}$$

$$[H]=\int_{\Omega}\left[\frac{\partial[N]}{\partial x_i}\right]^T\left[\frac{\partial[N]}{\partial x_i}\right]d\Omega \tag{101b}$$

$$[G]=\int_{\Omega}\left[\frac{\partial[N]}{\partial x_i}\right]^T[N]d\Omega \tag{101c}$$

$$[G^*]=\oint_{\Gamma}[N]^T\left[\frac{\partial[N]}{\partial x_i}\right]n_i d\Gamma \tag{101d}$$

$$\left\{f_p\right\} = \Delta t \int_{\Gamma} \left[\left[N\right]\right]^T \left[U_i^n + \theta_1 \Delta U_i^* - \Delta t \theta_1 \left(1-\theta_2\right) \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right) \right] n_i d\Gamma \qquad (101e)$$

3º passo

Mais uma vez o procedimento de Galerkin é aplicado, agora na correção das velocidades, Equação (84), e o resultado é:

$$\int_{\Omega} \left[N\right]^T \Delta U_i^{**} d\Omega = \int_{\Omega} \left[N\right]^T \Delta U_i d\Omega - \int_{\Omega} \left[N\right]^T \Delta U_i^* d\Omega$$

$$= -\Delta t \int_{\Omega} \left[N\right]^T \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \theta_2 \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \right) d\Omega + \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \left[N\right]^T u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right) d\Omega$$

$$= -\Delta t \int_{\Omega} \left[N\right]^T \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \theta_2 \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \right) d\Omega - \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \left(u_j \left[N\right] \right)}{\partial x_j} \right]^T \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right) d\Omega +$$

$$+ \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Gamma} \left[u_j \left[N\right] \right]^T \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right) n_j d\Gamma$$

Substituindo as interpolações na equação anterior, desconsiderando o termo de contorno, resulta

$$\int_{\Omega} \left[N\right]^T \left[N\right] d\Omega \left\{\Delta U_i^{**}\right\} = \int_{\Omega} \left[N\right]^T \left[N\right] d\Omega \left\{\Delta U_i\right\} - \int_{\Omega} \left[N\right]^T \left[N\right] d\Omega \left\{\Delta U_i^*\right\}$$

$$= -\Delta t \int_{\Omega} \left[N\right]^T \left[\frac{\partial \left[N\right]}{\partial x_i} \right] d\Omega \left(\left\{p\right\}^n + \theta_2 \left\{\Delta p\right\} \right) -$$

$$- \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \left(u_j \left[N\right] \right)}{\partial x_j} \right]^T \left[\frac{\partial \left[N\right]}{\partial x_i} \right] d\Omega \left\{p\right\}^n$$

A equação anterior na forma matricial pode ser escrita como:

$$\left\{\Delta U_i^{**}\right\} = \left\{\Delta U_i\right\} - \left\{\Delta U_i^*\right\} = -\left[M\right]^{-1} \Delta t \begin{bmatrix} \left[G\right]^T \left(\left\{p\right\}^n + \theta_2 \left\{\Delta p\right\} \right) + \\ + \frac{\Delta t}{2} \left[Z\right] \left\{p\right\}^n \end{bmatrix} \qquad (102)$$

A matriz que ainda não foi definida é a matriz $[Z]$ que tem a forma:

$$[Z]=\int_{\Omega}\left[\frac{\partial\left(u_j[N]\right)}{\partial x_j}\right]^T\left[\frac{\partial[N]}{\partial x_i}\right]d\Omega \tag{103}$$

4º passo

Para o quarto passo, simplesmente, se reescreve a Equação (21b), obtida anteriormente

$$\frac{\phi^{n+1}-\phi^n}{\Delta t}=-u\frac{\partial\phi^n}{\partial x}-v\frac{\partial\phi^n}{\partial y}-w\frac{\partial\phi^n}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^n+\frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^n+\frac{\partial}{\partial z}\left(\gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^n+$$
$$+\frac{\Delta t}{2}u\frac{\partial}{\partial x}\left[u\frac{\partial\phi}{\partial x}+v\frac{\partial\phi}{\partial y}+w\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]^n+\frac{\Delta t}{2}v\frac{\partial}{\partial y}\left[u\frac{\partial\phi}{\partial x}+v\frac{\partial\phi}{\partial y}+w\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]^n+$$
$$+\frac{\Delta t}{2}w\frac{\partial}{\partial z}\left[u\frac{\partial\phi}{\partial x}+v\frac{\partial\phi}{\partial y}+w\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]^n$$

e substituindo o escalar ϕ pela temperatura *T*, como já foi mostrado anteriormente na Equação (42), a forma matricial será:

$$[M_e]\left\{\frac{\Delta T}{\Delta t}\right\}=-\left[[C_e]+[K_{de}]+[K_{ee}]\right]\{T\}^n+[f_{1e}]^n+[f_{2e}]^n \tag{104}$$

As matrizes na Equação (104) são as mesmas descritas, anteriormente, na seção do Galerkin Característico, tomando o cuidado de substituir o escalar ϕ pelo escalar *T* da temperatura (Equações (36) a (41)).

3.8 A MATRIZ DE MASSA CONCENTRADA

As matrizes de massa, que aparecem nos passos do esquema CBS, devem ser concentradas de modo a facilitar o procedimento da solução. Isto é uma aproximação vantajosa na questão de tempo computacional, pois ela elimina a necessidade de uma técnica de solução para a inversão das matrizes consistentes. A matriz massa concentrada é construída a partir da soma das colunas e colocando o resultado da soma nas diagonais. A matriz massa original e a matriz massa concentrada do elemento tetraédrico linear serão agora desenvolvidas. A definição da matriz de massa é:

$$\left[M_e\right]=\int_{\Omega}\left[N\right]^T\left[N\right]d\Omega \tag{105}$$

Desenvolvendo e fazendo a multiplicação entre as funções interpolantes, tem-se:

$$\left[M_e\right]=\int_{\Omega}\begin{bmatrix}N_1\\N_2\\N_3\\N_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_1 & N_2 & N_3 & N_4\end{bmatrix}d\Omega$$

$$\left[M_e\right]=\int_{\Omega}\begin{bmatrix}N_1^2 & N_1N_2 & N_1N_3 & N_1N_4\\N_2N_1 & N_2^2 & N_2N_3 & N_2N_4\\N_3N_1 & N_3N_2 & N_3^2 & N_3N_4\\N_4N_1 & N_4N_2 & N_4N_3 & N_4^2\end{bmatrix}d\Omega \tag{106}$$

A equação agora precisa ser integrada e para isso se utiliza a seguinte fórmula de integração:

$$\int_V N_1^a N_2^b N_3^c N_4^d dV=\frac{a!b!c!d!}{\left(a+b+c+d+3\right)!}6V \tag{107}$$

Como descrito, anteriormente, as colunas da matriz após a integração serão somadas e o valor da soma é substituído na diagonal da matriz.

$$\left[M_e\right]=\frac{6V}{5!}\begin{bmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{bmatrix}\approx\frac{6V}{5!}\begin{bmatrix}5&0&0&0\\0&5&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&5\end{bmatrix}=\frac{V}{4}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{108}$$

Se o procedimento da matriz massa concentrada for introduzido no esquema CBS, pequenos erros irão ocorrer na solução transiente. Entretanto, é possível observar que, para a solução em regime permanente, nenhum erro será introduzido na solução. Ainda para a solução transiente, com o refinamento apropriado da malha, pode-se conseguir resultados bastante precisos, (LEWIS et al., 2004).

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A seguir serão apresentados os resultados de simulações de escoamentos tridimensionais obtidos com o código desenvolvido. Tais resultados são comumente estudados quando se quer verificar se o código gera resultados coerentes com a literatura.

Como um dos objetivos deste trabalho era a o entendimento do método CBS através de literaturas especializadas e pelo código 2D existente, alguns dos exemplos abaixo também foram estudados na versão bidimensional e estão apresentados no Apêndice C, e no Apêndice D encontra-se os dados tabelados de alguns dos resultados obtidos neste trabalho.

O gerador de malha *Gmsh*, que se trata de um gerador de malhas tridimensionais para elementos finitos e também se trata de um software livre (GEUZAINE e REMACLE, 2009), foi utilizado em todos os exemplos analisados neste trabalho, inclusive os bidimensionais.

4.1 ESCOAMENTO NUMA CAVIDADE CÚBICA COM TAMPA DESLIZANTE

O escoamento numa cavidade é um problema amplamente analisado a fim de validar resultados de códigos computacionais. Apesar da geometria mais simples, a cavidade pode apresentar fenômenos complexos de um escoamento tais como recirculações. (BOTELLA; PEYRET, 1998; CHIANG; SHEU, 1997; FERREIRA, 2006; MANSOUR ET. AL., 2014; WANG; WAN, 2011; WONG; BAKER, 2002).

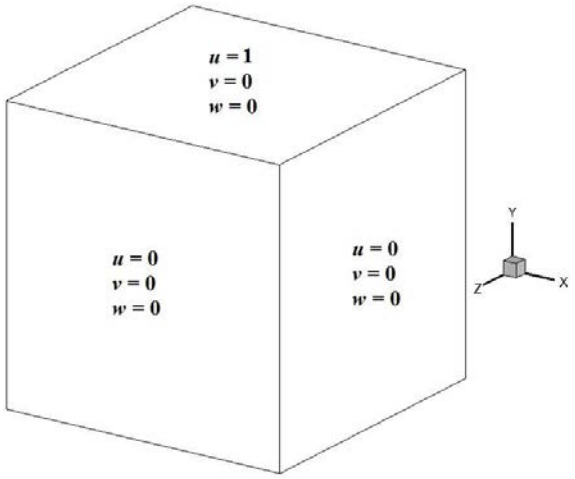
A geometria considerada para o presente estudo é um cubo com comprimento das arestas unitários e as suas condições de contorno estão apresentadas na Figura 4.

A Figura 5 mostra a malha não estruturada gerada, composta de 137313 nós e 786432 elementos tetraédricos, utilizada para a análise.

Resultados foram obtidos para números de Reynolds iguais a 100, 400 e 1000 e estes são comparados com os resultados obtidos no trabalho de Wong e Baker (2002), onde é utilizado um algoritmo contendo a formulação velocidade-vorticidade para a resolução de escoamentos laminares incompressíveis tridimensionais.

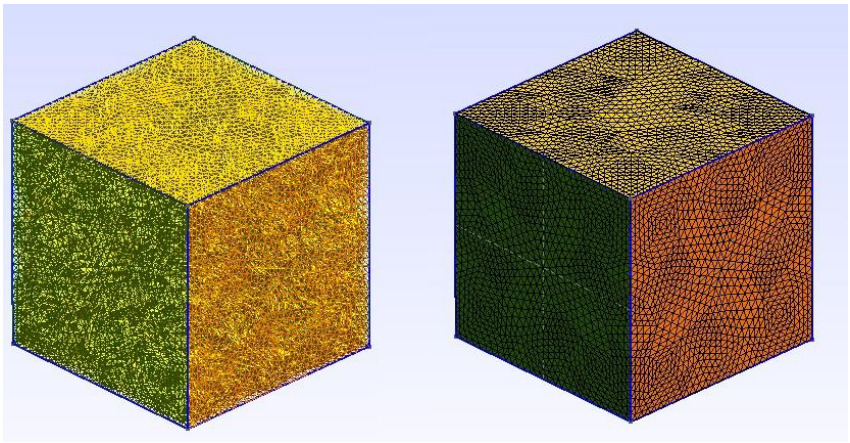
Para cada um dos valores do número de Reynolds, os resultados são apresentados da seguinte maneira: o perfil da componente da velocidade na direção x ao longo do eixo y, no centro da cavidade ($x = z = 0,5$) como está ilustrado na Figura 6.

Figura 4 - Condições de Contorno da cavidade.



Fonte: Próprio autor.

Figura 5 - Malha da cavidade com elementos tetraédricos.

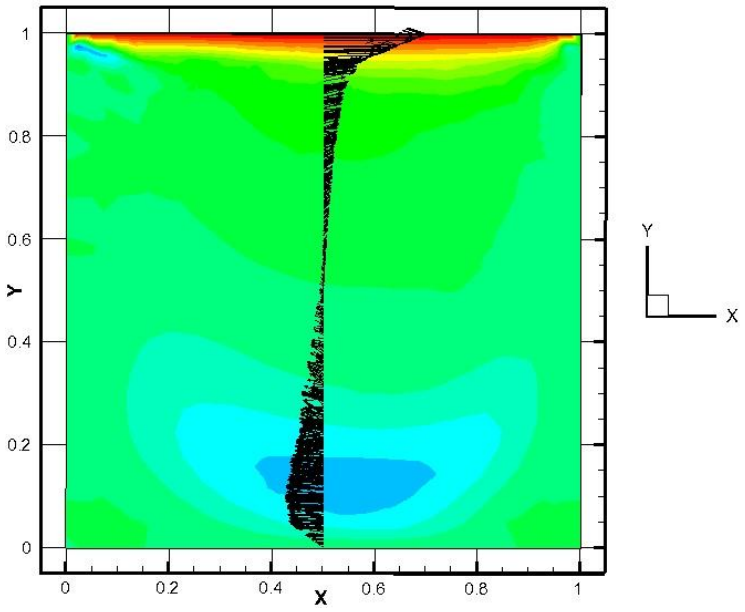


Fonte: Próprio autor.

O tempo de simulação, no caso, ainda é limitado pela capacidade computacional disponível. Todos os resultados foram obtidos em microcomputadores ou *notebooks* com limitada capacidade de memória e processamento. A versão do código usada para simulação, e que foi adaptada de uma versão para simulações bidimensionais, ainda não foi preparada para processamento paralelo, o que poderia reduzir o tempo computacional, mesmo para malhas bem refinadas.

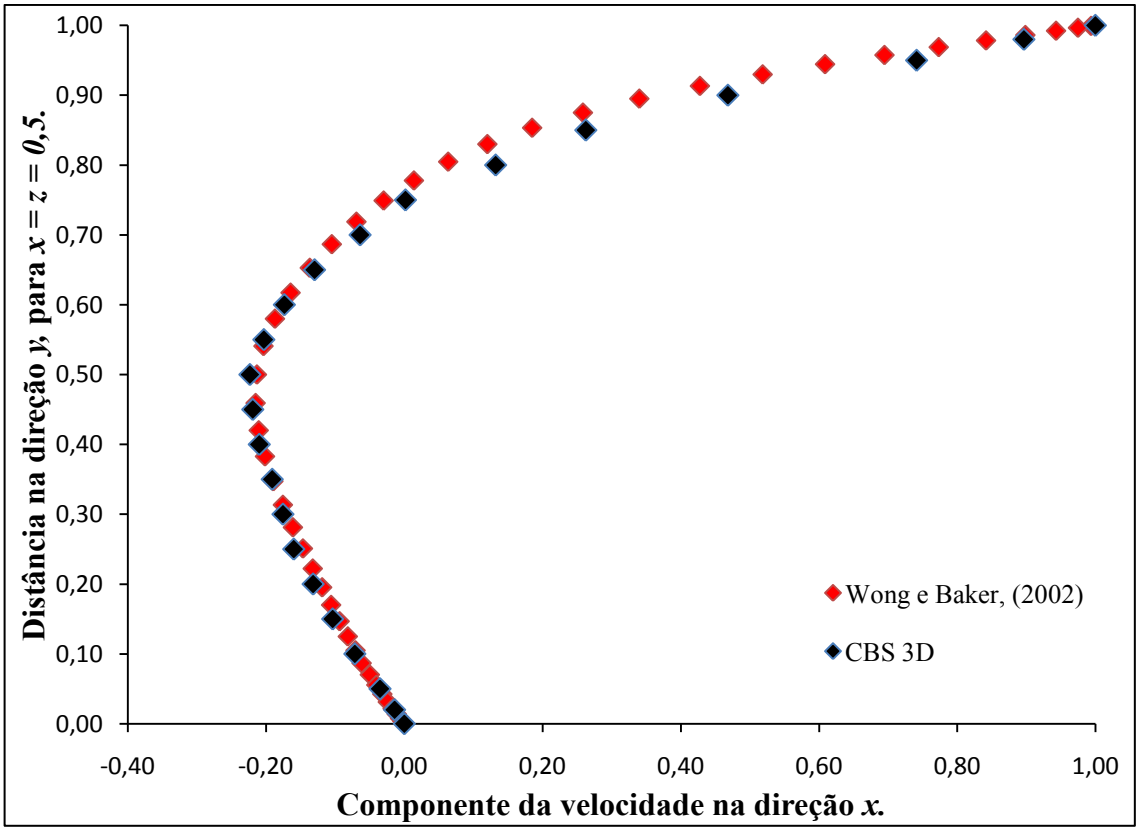
Nas Figuras 7 a 9 são apresentados resultados para a componente u da velocidade, respectivamente ara os números de Reynolds 100, 400 e 1000. Ou seja, para casos de escoamentos laminares.

Figura 6 - Perfil de velocidade no centro da cavidade no plano *xy*.



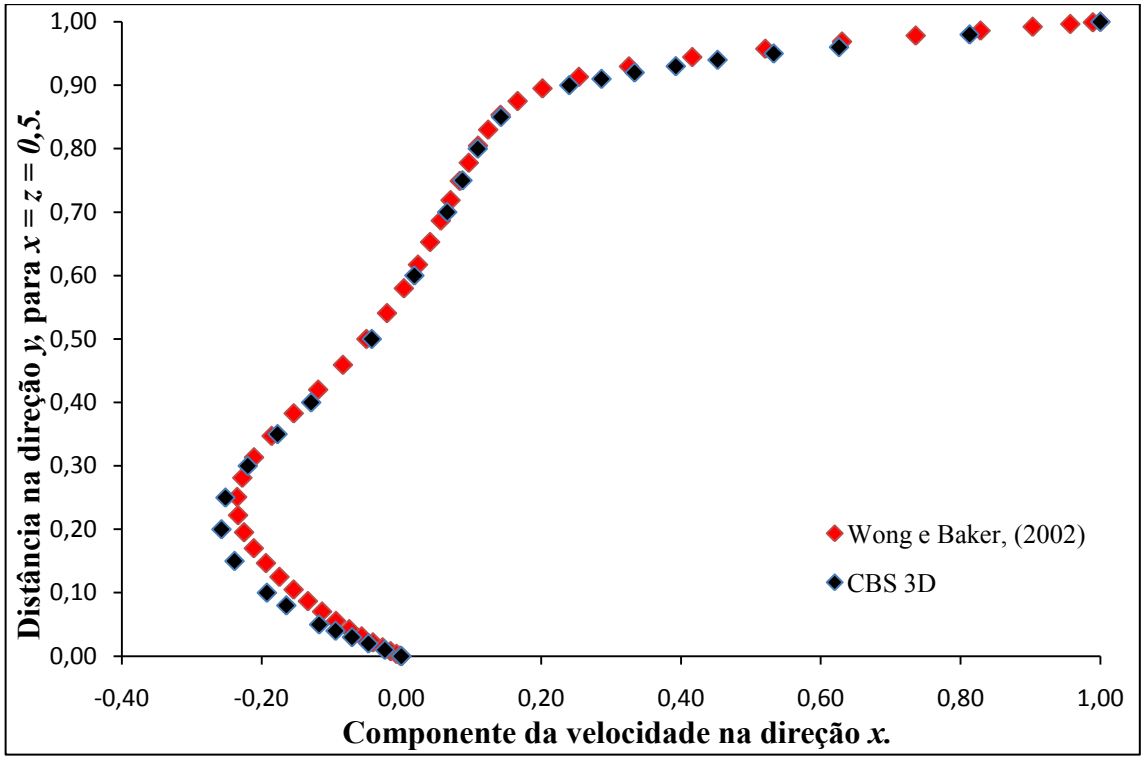
Fonte: Próprio autor.

Figura 7 - Componente da velocidade na direção *x*, no centro da cavidade para *Re=100*.



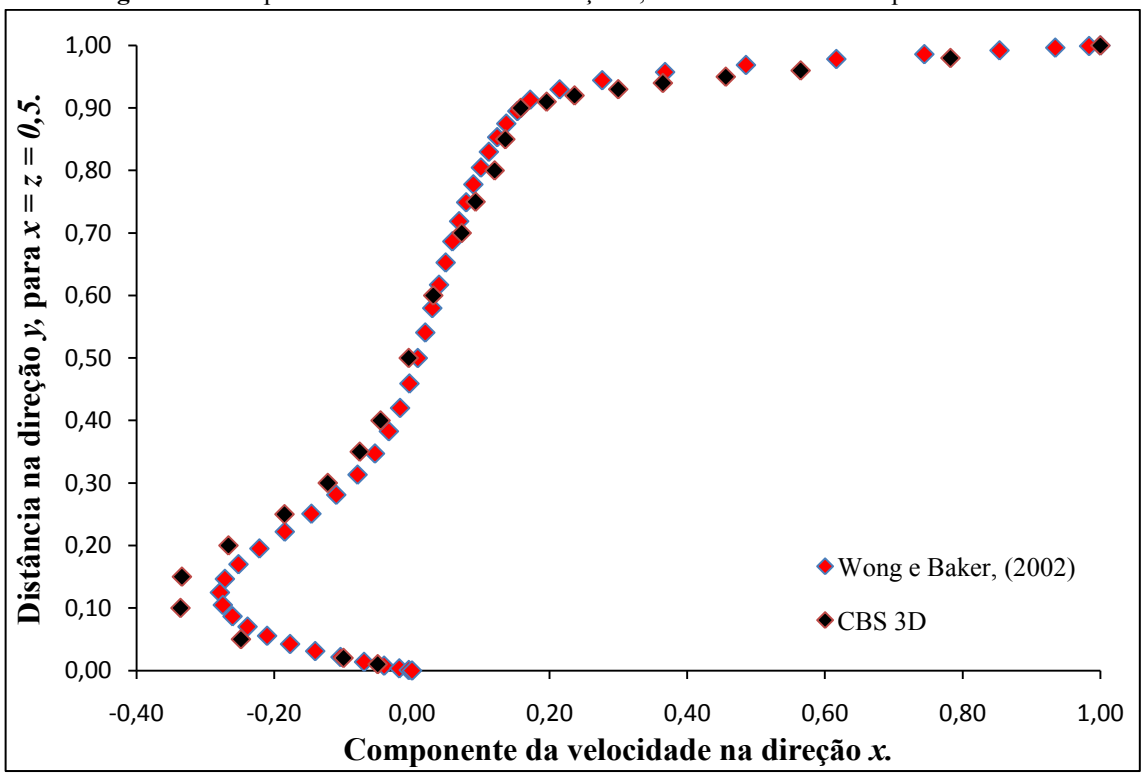
Fonte: Próprio autor.

Figura 8 - Componente da velocidade na direção *x*, no centro da cavidade para *Re=400*.



Fonte: Próprio autor.

Figura 9 - Componente da velocidade na direção *x*, no centro da cavidade para *Re=1000*.

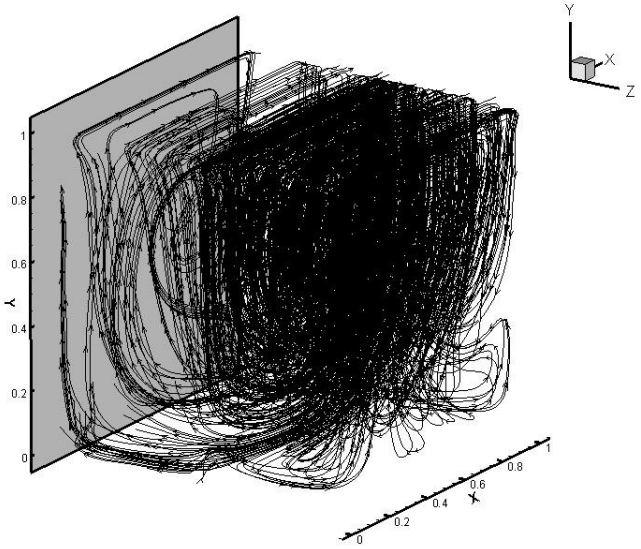


Fonte: Próprio autor.

Pela análise dos resultados, pode-se ver que existe uma boa concordância dos resultados, comparados com os resultados de Wong e Baker (2002), exceto, no caso de número de Reynolds igual a 1000, na parte inferior da cavidade.

Uma representação de possíveis "trajetórias" é mostrada na Figura 10. Aqui se denomina tais linhas de trajetória, por se tratar de escoamento tridimensional, para os quais, embora, o conceito de linha de corrente exista, não é uma tarefa muito fácil se fazer uma visualização das mesmas.

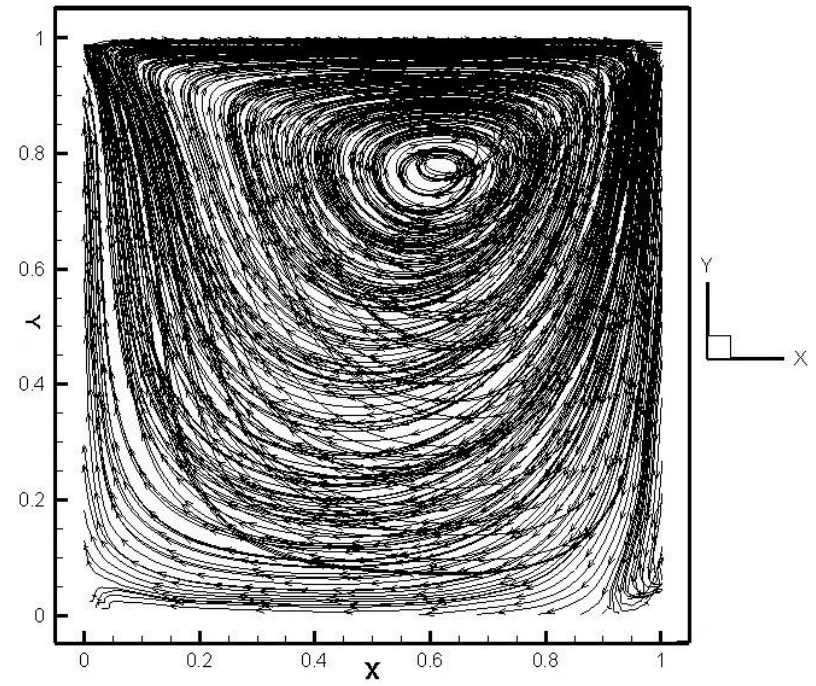
Figura 10 - Linhas de trajetória do escoamento no para a cavidade tridimensional.



Fonte: Próprio autor.

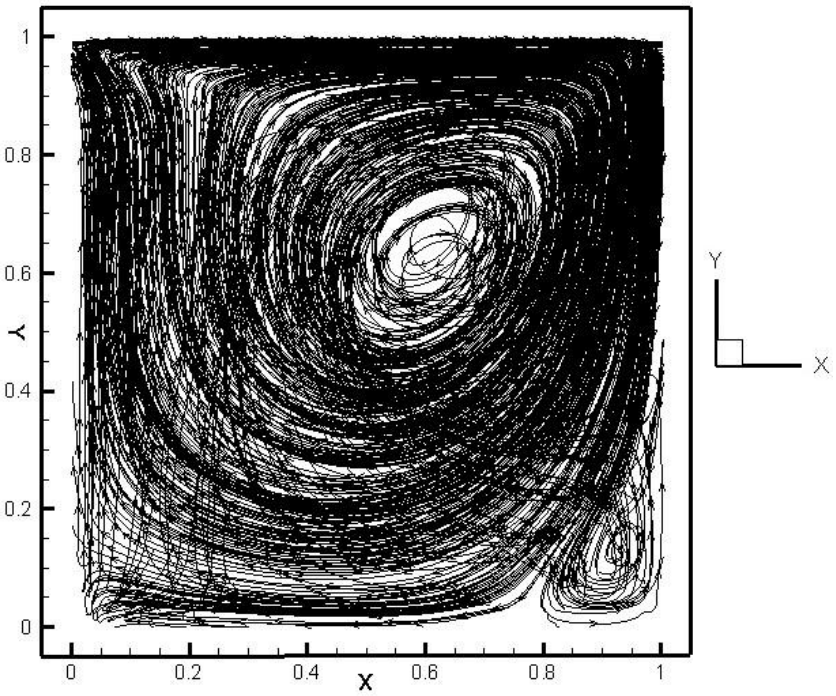
Nas Figuras 11 até 13 são apresentados resultados obtidos para as linhas de trajetória do escoamento para o caso tridimensional. Neles podemos observar o aparecimento das recirculações nos cantos inferiores e superior da cavidade, conforme o aumento do número de Reynolds.

Figura 11 - Linhas de trajetória do escoamento no plano *x*-*y* para *Re*=100.



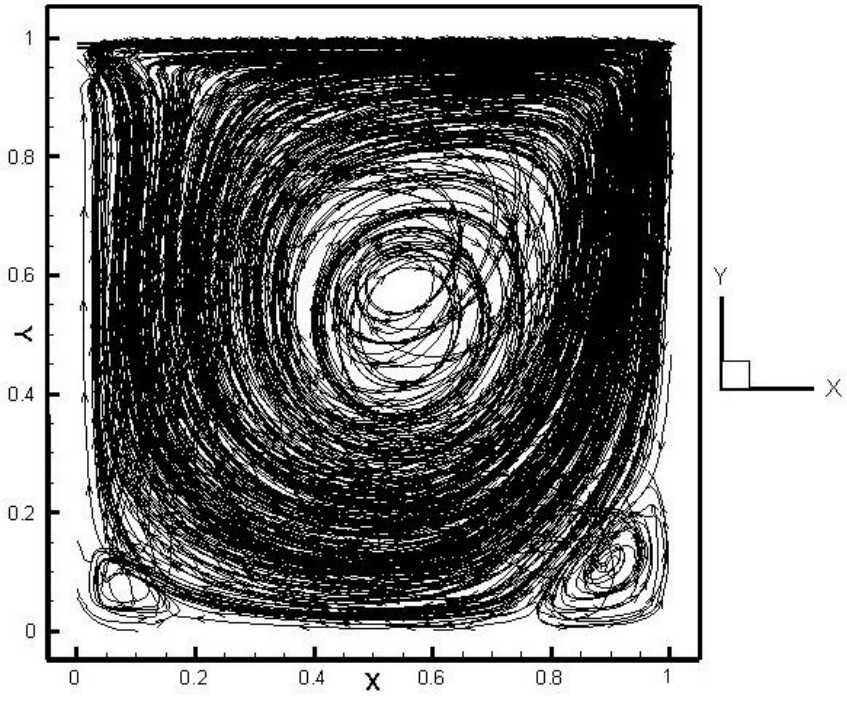
Fonte: Próprio autor.

Figura 12. Linhas de trajetória do escoamento no plano *x*-*y* para *Re*=400.



Fonte: Próprio autor.

Figura 13 - linhas de trajetória do escoamento no plano *x*-*y* para *Re*=1000.



Fonte: Próprio autor.

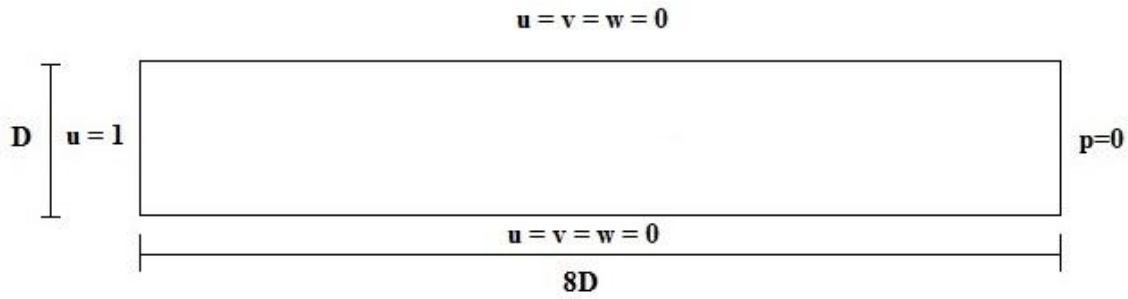
Com os resultados obtidos acima, pode-se concluir que o código computacional funciona como o esperado e gera resultados satisfatórios, desde que o número de Reynolds esteja na faixa de escoamentos laminares, pois nenhuma modelagem de turbulência foi ainda acrescentada ao código computacional.

4.2 ESCOAMENTO DE HAGEN-POISEUILLE

Este tipo de escoamento é caracterizado pelo escoamento incompressível laminar, completamente desenvolvido no interior de um tubo. Este possui solução exata e é talvez a solução exata mais útil das equações de Navier-Stokes e foi estudado experimentalmente pela primeira vez por G. Hagen em 1839 e por J. L. Poiseuille em 1840 (WHITE, 2011).

A geometria e condições de contorno são ilustradas na Figura 14, onde *D* é o diâmetro do tubo.

Figura 14 - Dimensões e Condições de contorno do tubo.



Fonte: Próprio autor.

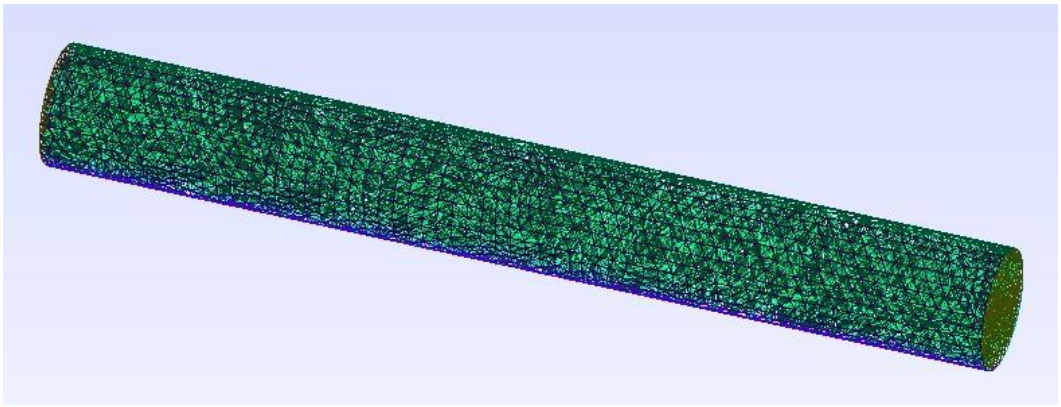
O perfil de velocidades deste escoamento é de natureza parabólica com valor máximo no centro do tubo, definido como u_{max}. Tal perfil parabólico é obtido aplicando as devidas hipóteses nas equações que governam o escoamento e é dada pela seguinte equação:

$$u(r) = u_{\max}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \tag{109}$$

A Equação (109) é baseada em coordenadas cilíndricas e sua demonstração é bem simples e direta. Para mais detalhes desta equação e de sua obtenção, consultar o Apêndice B.

Para realizar a simulação foi gerada uma malha contendo 5185 nós e 23423 elementos (Figura 15). Aparentemente uma malha grosseira, mas é o suficiente levando em conta a simplicidade da geometria e será simulado um escoamento laminar, com número de Reynolds igual a 100.

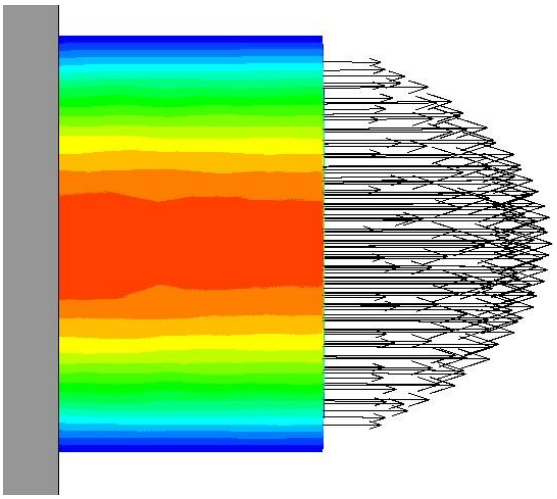
Figura 15 - Malha do tubo de diâmetro D e largura 8D.



Fonte: Próprio autor.

A seguir são mostrados resultados obtidos pela simulação. A Figura 16 mostra o perfil de velocidades na saída do tubo. É possível observar pelos vetores, o perfil parabólico da velocidade de saída.

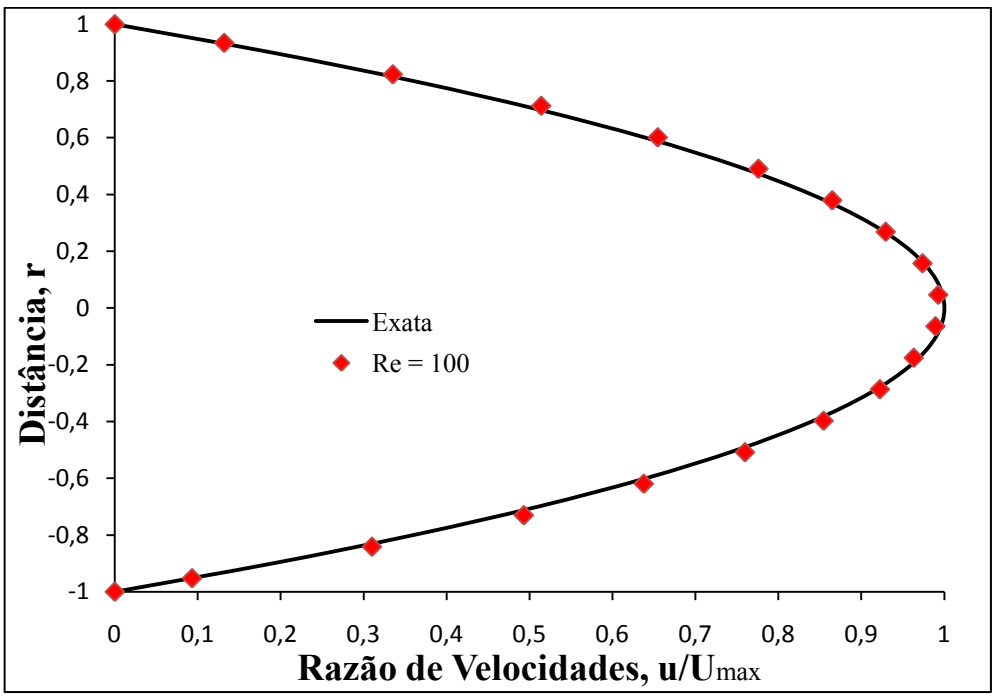
Figura 16 - Perfil parabólico na saída do tubo para *Re=100*.



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 17, temos o mesmo resultado anterior agora comparado com a solução exata, Equação (4.1) deste problema e, como era de se esperar, os resultados apresentam uma excelente concordância entre as duas curvas plotadas.

Figura 17 - Comparação entre as soluções exata e simulada. (*Re=100*)



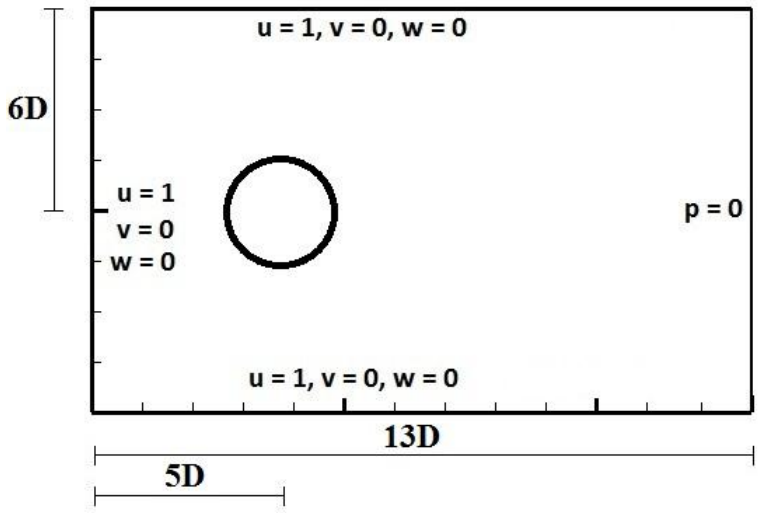
Fonte: Próprio autor.

4.3 ESCOAMENTO AO REDOR DE UMA ESFERA

Desde que a solução teórica para escoamento com baixos números de Reynolds (*creeping flow*) ao redor de uma esfera foi apresentada por Stokes, o escoamento viscoso ao redor de uma esfera tem sido assunto de um grande número de estudos, seja teórico, experimental ou numérico (LEE, 2000). Este tipo de problema é de caráter tridimensional por motivos óbvios.

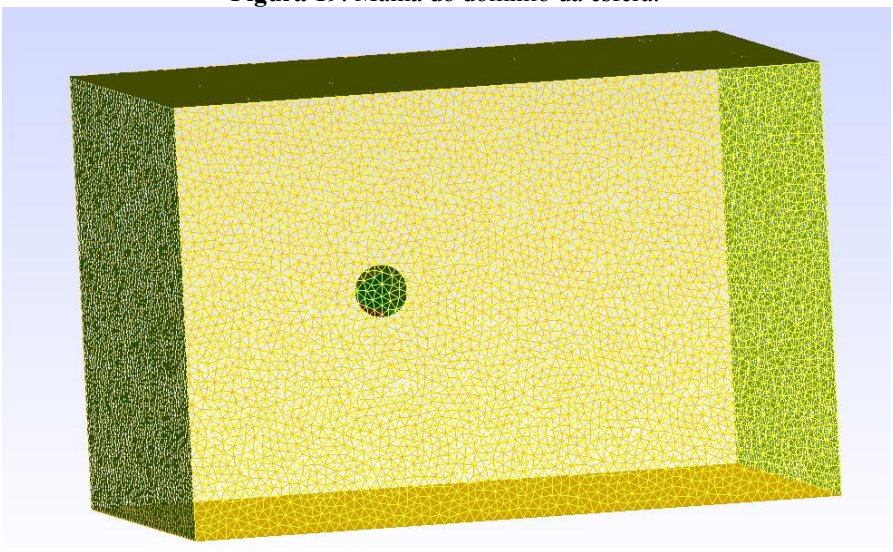
Nas Figuras 18 e 19, as condições de contorno e a malha são ilustradas, respectivamente. A malha contém 252310 nós e 1424614 elementos.

Figura 18 - Dimensões e condições de contorno da esfera.



Fonte: Próprio autor.

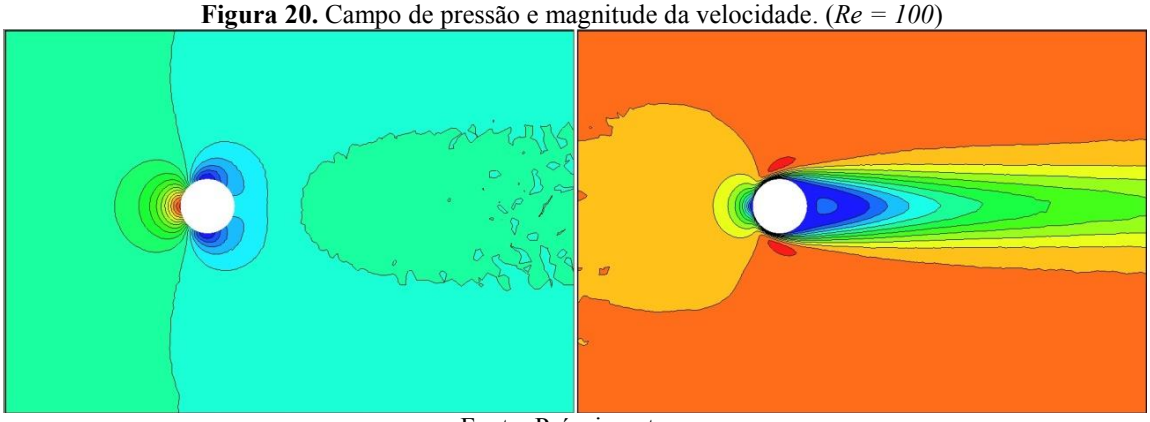
Figura 19. Malha do domínio da esfera.



Fonte: Próprio autor.

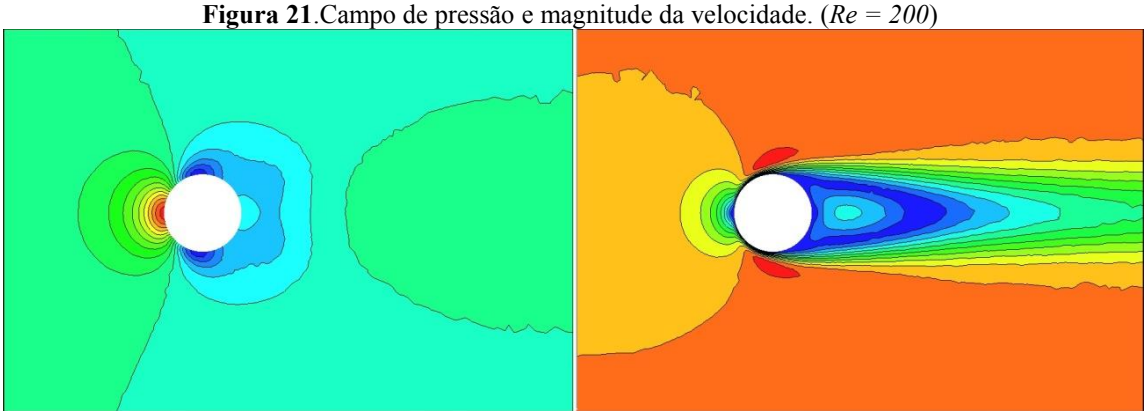
Como resultados, são mostrados nas Figuras 20 e 21, o campo de velocidade e o campo de pressão para os valores de números de Reynolds simulados.

Figura 20. Campo de pressão e magnitude da velocidade. (*Re = 100*)



Fonte: Próprio autor.

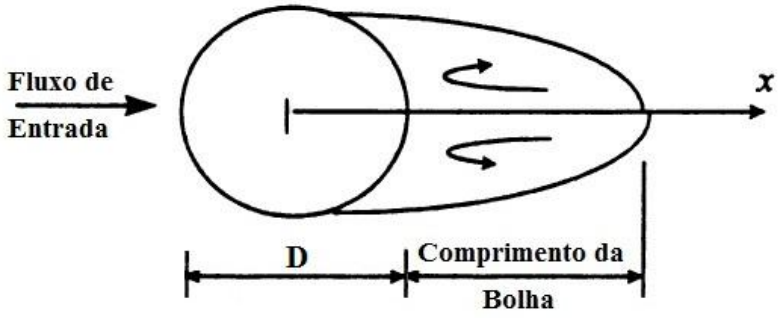
Figura 21.Campo de pressão e magnitude da velocidade. (*Re = 200*)



Fonte: Próprio autor.

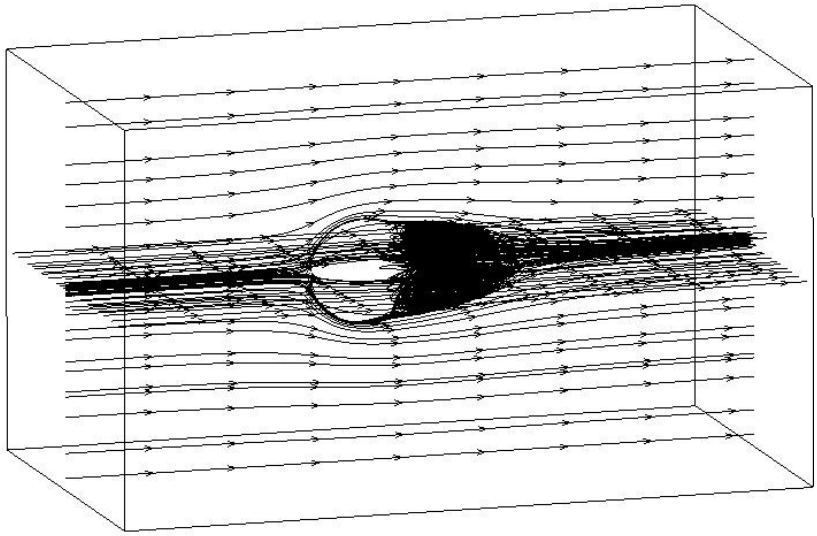
Nas Figuras 23 e 24 são mostradas as linhas de trajetória do escoamento para o caso do número de Reynolds igual a 100. A intenção neste primeiro momento é ilustrar a bolha de recirculação formada na parte posterior da esfera.

Figura 22. Comprimento da Bolha de Recirculação.



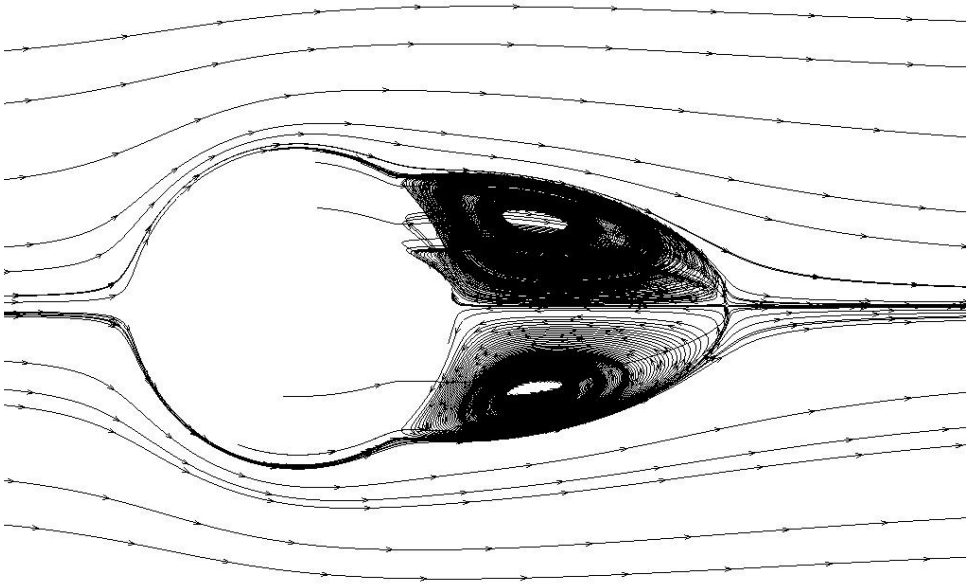
Fonte: Próprio autor.

Figura 23. Linhas de trajetórias do escoamento para *Re* = 100.



Fonte: Próprio autor.

Figura 24. Detalhe da zona de recirculação atrás da esfera.



Fonte: Próprio autor.

Agora é possível analisar o tamanho da bolha de recirculação, de modo a comparar com resultados disponíveis na literatura. Na Tabela (1), os resultados obtidos neste trabalho são comparados com os resultados mostrados por Campregher, (2009). Os valores obtidos no presente trabalho e os da Tabela (1) são adimensionalisados com a seguinte relação, C_b/D, onde C_b é o comprimento da bolha e D é o diâmetro da esfera. Tal relação é mostrada com mais clareza na Figura 22.

Tabela 1. Comprimento da bolha de recirculação adimensional.

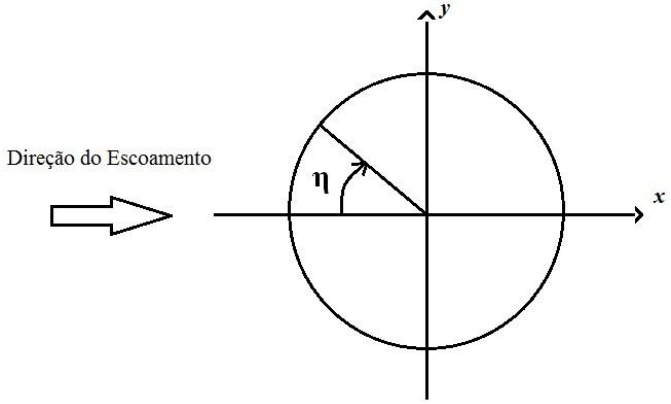
RESULTADOS	Re = 100	Re = 200
Presente Trabalho	0,862	1,47
Fornberg(1988)	0,87	1,43
Johnson e Patel (1999)	0,88	1,45
Tomboulides e Orszag (2000)	0,87	1,43
Gilmanov et al. (2003)	0,85	1,44
Campregher et al. (2009)	0,94	1,40

Fonte: Adaptado de Campregher et al. (2009).

Para escoamentos em regime laminar, espera-se que a pressão na superfície da esfera seja simétrica, ou seja, apresente valores semelhantes para dois planos diferentes. Na Figura 26 e na Figura 27, são apresentados os valores da pressão adimensional medidos na superfície da esfera entre os planos *xy* e *xz*, com números de Reynolds de 100 e 200 respectivamente.

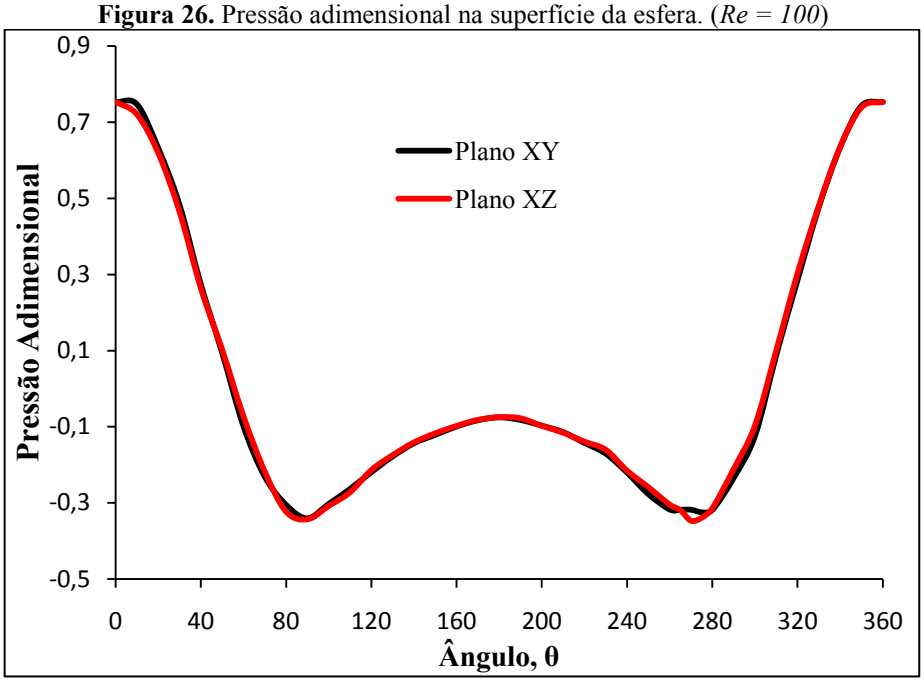
Após a inspeção das figuras citadas, pode-se observar uma boa concordância entre os resultados, lembrando que o ângulo η, é avaliado assim como mostrado na Figura 25.

Figura 25. Esquema da variação do ângulo η.



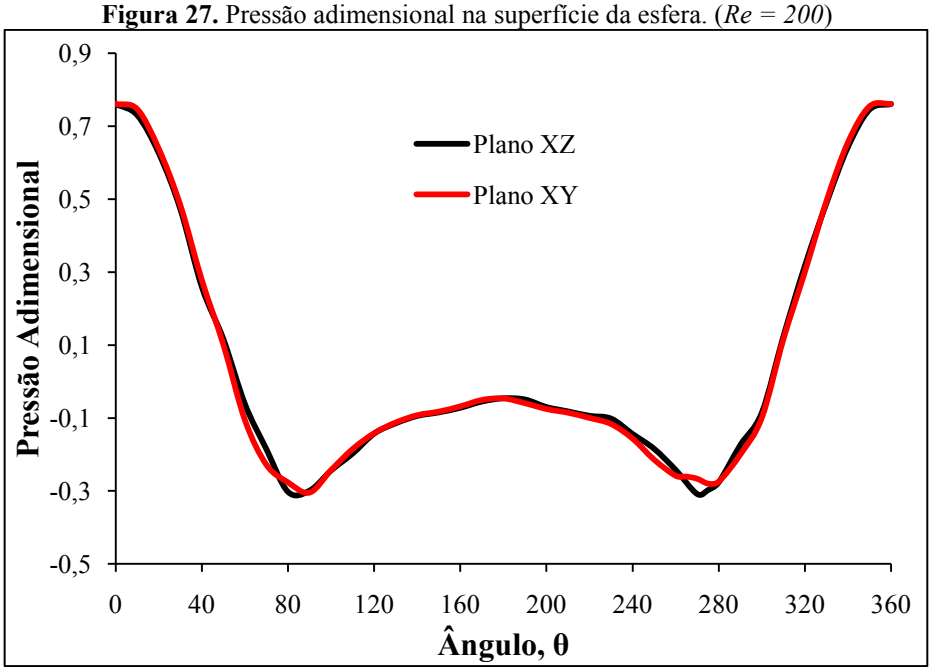
Fonte: Próprio autor.

Figura 26. Pressão adimensional na superfície da esfera. (*Re = 100*)



Fonte: Próprio autor.

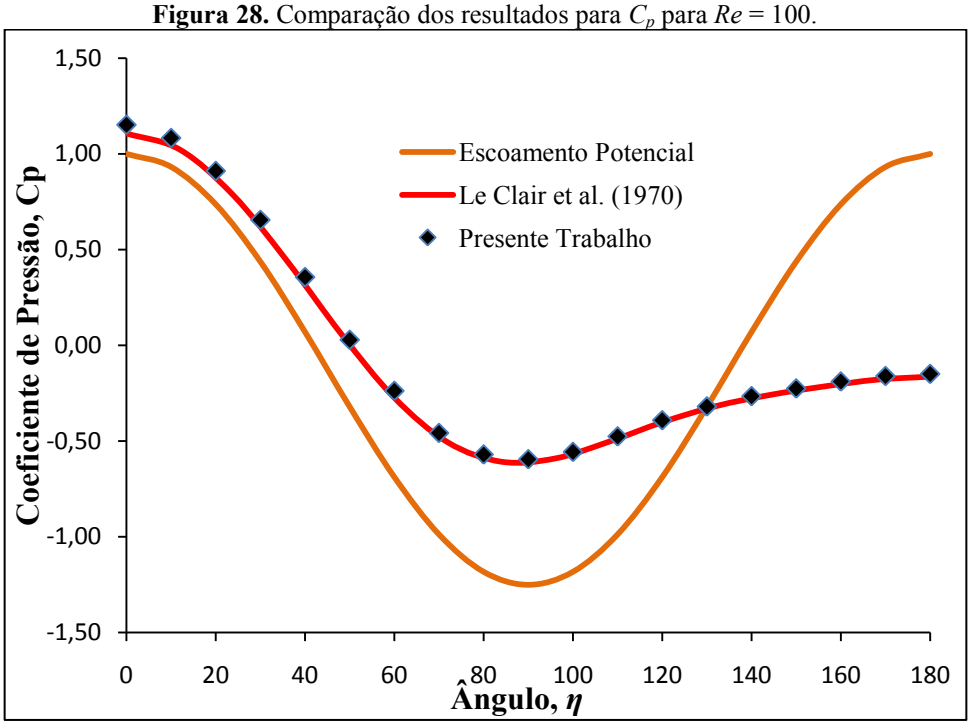
Figura 27. Pressão adimensional na superfície da esfera. (*Re = 200*)



Fonte: Próprio autor.

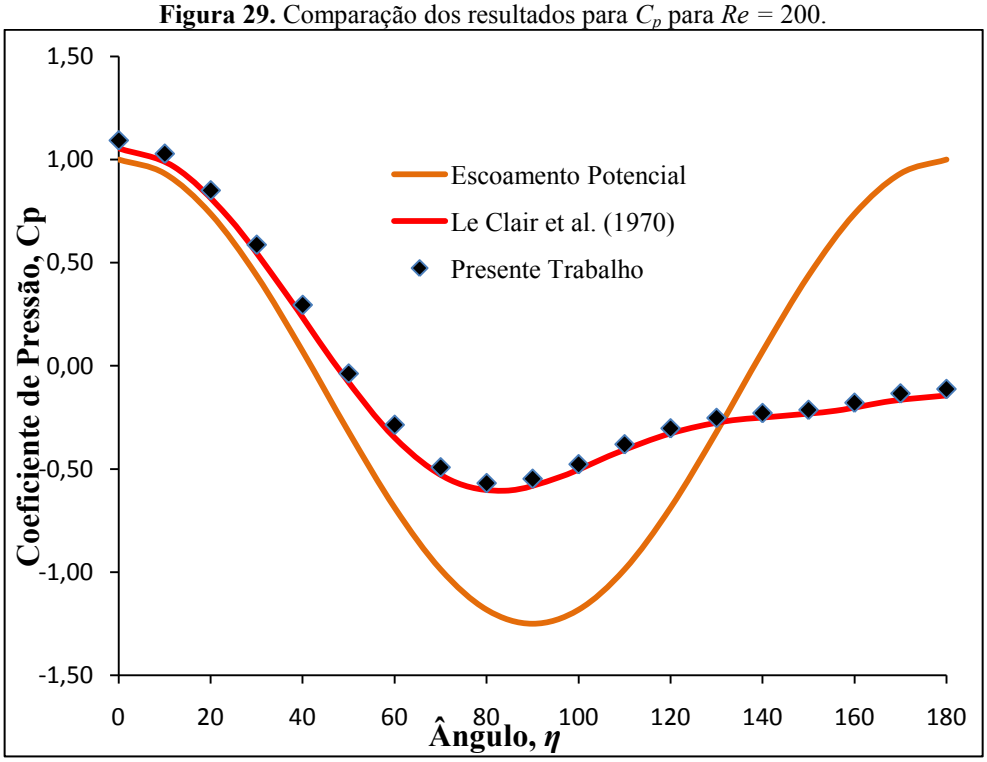
A seguir, nas Figuras 28 e 29, são apresentados os valores do coeficiente de pressão, $C_p = 2p^*$, encontrado na superfície da esfera para *Re* = 100 e *Re* = 200 respectivamente. Alguns resultados da literatura também estão presentes nas figuras, para que sejam comparados. Entre eles e assim como para o problema do cilindro, está o valor teórico para o escoamento potencial ao redor de uma esfera, na forma $C_p = 1 - \frac{9}{4} sen^2\theta$. (PANTON, 1933)

Figura 28. Comparação dos resultados para C_p para Re = 100.



Fonte: Próprio autor.

Figura 29. Comparação dos resultados para C_p para Re = 200.



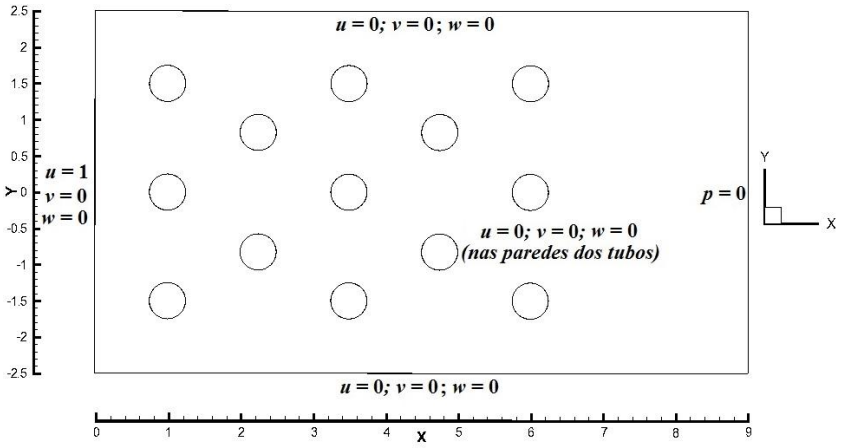
Fonte: Próprio autor.

4.4 BANCO DE TUBOS

Neste caso é estudado o escoamento ao redor de um arranjo de tubos. Aqui o objetivo é apenas mostrar o resultado ilustrativo do problema, de modo que nenhuma análise mais aprofundada dos resultados será feita. Este exemplo apresenta uma geometria bastante complexa e necessita de um domínio de análise bastante grande para garantir bons resultados e isto leva a um grande custo computacional.

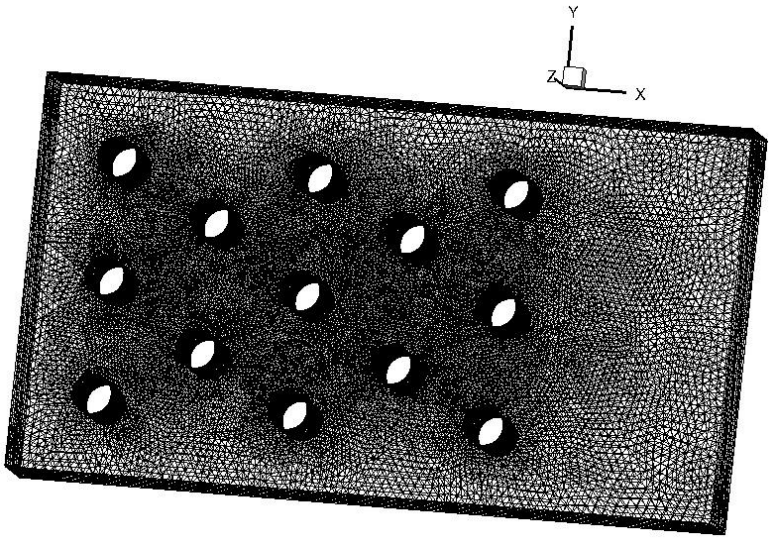
A geometria feita para este exemplo tem a profundidade, no eixo *z*, igual a 1,0. Foi adotada condição de não escorregamento em todas as paredes do domínio, exceto na entrada e saída (Figura 30). A malha gerada contém 141222 nós e 737984 elementos (Figura 31) e o resultado obtido é para número de Reynolds igual a 100.

Figura 30 - Geometria e condições de contorno.



Fonte: Próprio autor.

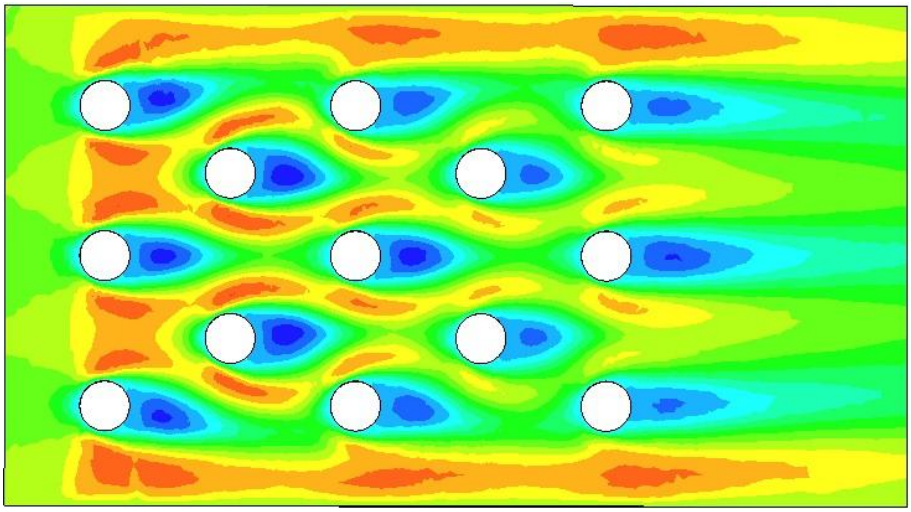
Figura 31 - Malha do arranjo de tubos.



Fonte: Próprio autor.

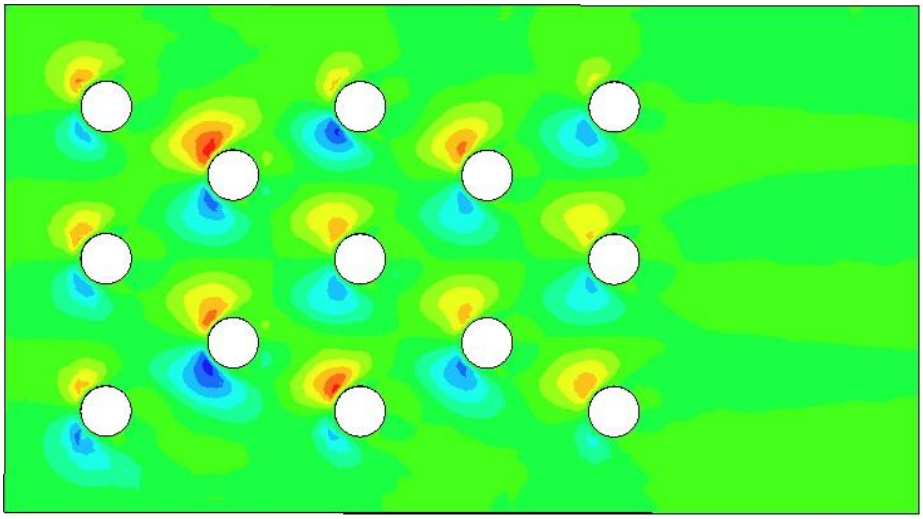
As Figuras 32 e 33 contêm os resultados da componente da velocidade na direção *x* e a componente da velocidade na direção *y*, respectivamente em um plano *xy* para o valor de *z* = 0,5. Na Figura 32, é possível ver a formação das regiões de recirculação representada pelas regiões azuis imediatamente atrás de cada tubo.

Figura 32 - Componente da velocidade na direção *x*.



Fonte: Próprio autor.

Figura 33 - Componente da velocidade na direção *y*.



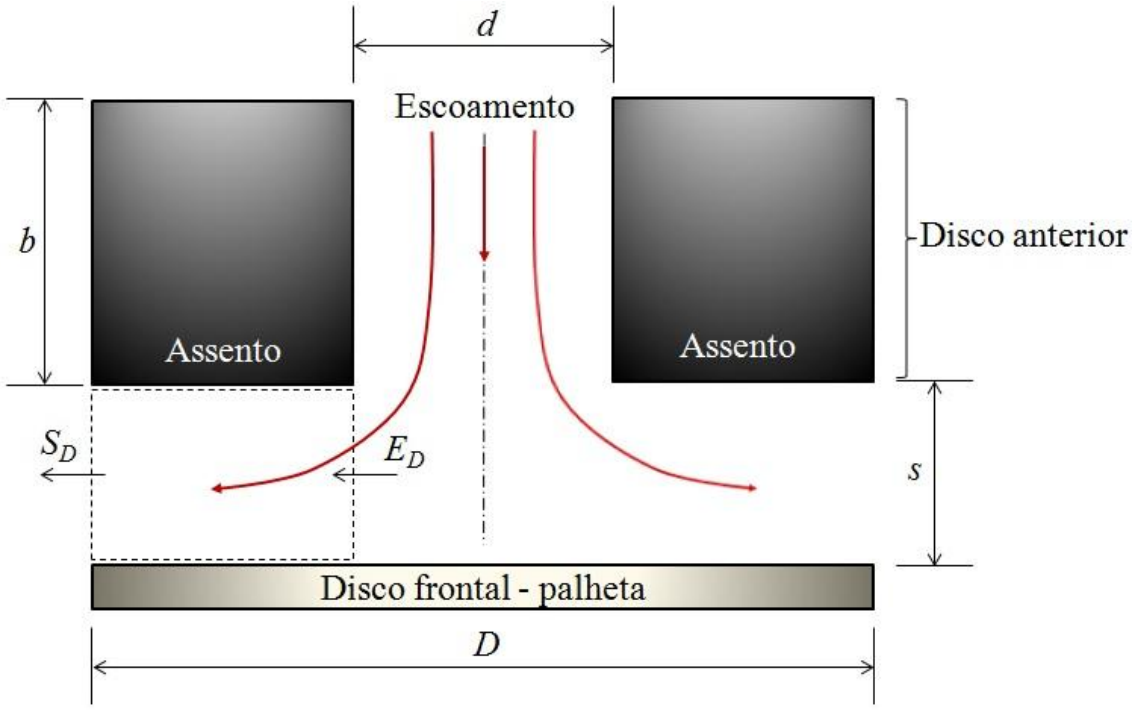
Fonte: Próprio autor.

Este estudo mostra como poderia ser a aplicação da simulação numérica para a análise de um trocador de calor, que é um equipamento bastante utilizado em várias áreas industriais.

4.5 DIFUSOR RADIAL

O difusor radial tem sido usado como uma geometria básica para estudar vários tipos de dispositivos mecânicos, como por exemplo, válvulas cardíacas artificiais e válvulas de compressores de refrigeração. Na Figura 34, é mostrado o esquema de um difusor radial. Este é composto por dois discos paralelos concêntricos, na qual um é o disco frontal e o outro é o disco anterior com o orifício concêntrico. Quando usado para modelar uma válvula de compressor, o disco frontal representa a palheta da válvula e o disco anterior representa o assento da válvula. O fluido escoa axialmente através do orifício alimentador que possui o diâmetro *d*, e é defletido pelo disco frontal que possui diâmetro *D*, e então ele escoa radialmente através da abertura formada entre o disco frontal e o disco anterior. Esta abertura, que tem altura *s*, é conhecida como difusor radial. (GASCHE et. al, 2015)

Figura 34. Esquema de um difusor radial.



Fonte: Adaptado de Gasche (1992).

Se assumir que o escoamento é incompressível e plenamente desenvolvido, a equação do movimento na direção *r* pode ser integrada para fornecer o seguinte perfil de pressão na região do difusor como (GASCHE, 1992):

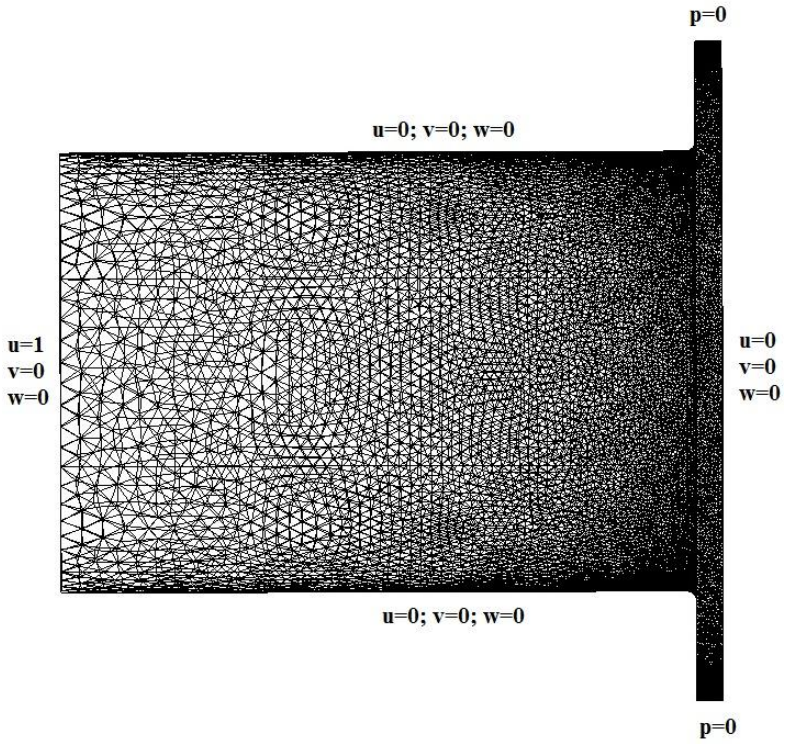
$$p^*(R) = \left[\frac{3}{\left(s/d\right)^3} \right] \frac{1}{\mathrm{Re}} \ln\left[0{,}5\left(D/d\right)\frac{1}{R} \right] \tag{110}$$

onde:

$p^*(R)$ – pressão adimensional na posição R;
s/d – afastamento adimensional entre a palheta e o assento;
Re_D – número de Reynolds no orifício de passagem $(\rho \bar{w} d/\mu)$;
D/d – relação entre o diâmetro da palheta e o diâmetro do orifício de passagem;
R – Posição radial adimensional (r/d);
$\bar{w}$ – velocidade média do escoamento no orifício de passagem.

Dadas as definições acima, trata-se agora da parte de simulação. Primeiramente, são definidas as condições de contorno para o problema e isto é mostrado na Figura 35. A malha tridimensional gerada contém 158047 nós e 846908 elementos tetraédricos.

Figura 35. Malha 3D e condições de contorno do difusor radial.

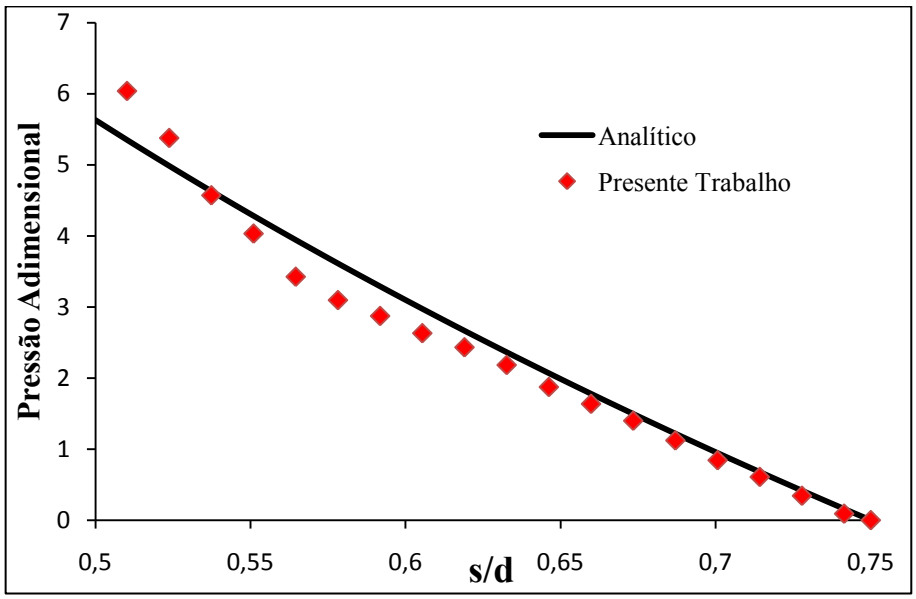


Fonte: Próprio autor.

Na Figura 36, é mostrado resultados dos valores relacionados à pressão na superfície da palheta. Este resultado foi obtido com as relações *D/d=1,5, s/d=0,06* e *Re=1000*. A pressão adimensional é da forma definida anteriormente na Equação (6).

A divergência dos resultados na entrada da região do difusor pode ser explicada pela presença do chanfro na geometria do domínio da simulação, o qual não existe no estudo analítico.

Figura 36 - Coeficiente de pressão na parede da palheta.



Fonte: Próprio autor.

5 CONCLUSÕES SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi estudado um método de estabilização do método de elementos finitos de Galerkin; o qual é denominado esquema de separação baseada na característica (*CBS*). Foi feita a extensão de um código computacional para simulação de escoamentos bidimensionais para escoamentos tridimensionais. As equações de Navier-Stokes e uma equação de transporte para uma variável escalar, para casos de escoamentos incompressíveis, foram tomadas como o modelo matemático.

Alguns casos de escoamentos bidimensionais também foram simulados, considerando um esquema semi-implícito, em que uma equação de Poisson é resolvida para o campo de pressão; enquanto que para escoamentos tridimensionais, a forma totalmente explícita foi utilizada, com uso de compressibilidade artificial (AC-CBS).

Nos casos de escoamentos tridimensionais simulados, foram considerados baixos números de Reynolds, ou seja, apenas casos de escoamentos laminares. Entretanto, nesta etapa do trabalho, o objetivo principal foi a construção do código 3D e não foi, ainda, acrescido nenhum modelo de turbulência ao mesmo.

Os resultados obtidos com o código 3D tiveram boa concordância com resultados da literatura e foram considerados satisfatórios para verificação e validação do código computacional.

Como uma sugestão para trabalhos futuros, no âmbito do grupo de pesquisa, estão implementações de modelos de turbulência para que seja possível simulações para altos números de Reynolds com o AC-CBS.

Devido à grande dificuldade encontrada em relação ao tempo computacional, outra boa proposta é o desenvolvimento da paralelização do código visando redução de tempos, mesmo que se aumente o refino das malhas.

Mais uma sugestão seria simular exemplos de geometrias de aplicação na engenharia e analisar como os resultados se comportam.

Como comentário final, ressalta-se que agora se dispõe de um código base, com boa estabilização e que poderá ser melhorado para aplicação em projetos de engenharia.

REFERÊNCIAS

BEVAN, R. L. T.; SAZONOV, I.; SAKSONO, P. H.; NITHIARASU, P.; VAN LOON, R.; LUCKRAZ, H.; ASHRAF, S. Patient-Specific Blood Flow Simulation Through an Aneurysmal Thoracic Aorta with a Folded Proximal Neck. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, Chichester, v. 27, n. 8, p. 1167-1184, 2011.

BIRD, R. B.; STEWART, W. E.; LIGHTFOOT, E. N. *Transport phenomena*. 2. ed. New York: John Willey and Sons, 1924.

BOTELLA, O.; PEYRET, R. *Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow*. Computers and Fluids, Kidlington, v. 27, n. 4, p. 421-433, 1998.

CAMPREGHER, R.; MILITZER, J.; MANSUR, S. S.; SILVEIRA NETO, A. Computations of the flow past a still sphere at moderate reynolds numbers using na immersed boundary method. *Journal of the Brazilian Society of Mechanics Science & Engineering*, Heidelberg, v. 31, n. 4, p. 344- 352, 2009.

CHIANG, T. P.; SHEU, W. H. Numerical prediction of eddy structure in a shear-driven cavity flow. *Computational Mechanics,* Heidelberg, v. 20, p. 379-396, 1997.

GEUZAINE, C.; REMACLE, J. F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Chichester, v. 79, n. 11, p. 1309-1331, 2009.

FERREIRA, R. L. *Simulação de grandes escalas de escoamentos turbulentos usando modelagem dinâmica.* 2006. 150 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista UNESP, Ilha Solteira, 2006.

FORNBERG, B. 1988. Steady viscous flow past a sphere at high Reynolds number. Journal of Fluid Mechanics, Cambridge, v. 190, p. 471-489.

FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J. *Introdução à mecânica dos fluidos.* 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

GASCHE, J. L. 1992. *Escoamento laminar através de válvulas excêntricas de compressores de refrigeração.* 1992. 149 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, Florianópolis, 1992.

GASCHE, J. L.; ARANTES, D. M.; ANDREOTTI, T. Pressure distribution on the frontal disk for turbulent flows in a radial diffuser. *Experimental Thermal and Fluid Science*, Philadelphia, v. 60, p. 317-327, 2015.

GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, Maryland Heights, v. 48, n. 3, p. 387-411, 1982.

GILMANOV, A.; SOTIROPOULOS, F.; BALARAS, E. 2003. A general reconstruction algorithm for simulating flows with complex 3D immersed boundaries on Cartesian grids. *Journal of Computational Physics*, Maryland Heights, v. 191, n. 2, p. 660-669, 2003.

INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P. *Fundamentos de transferência de calor e de massa.* 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

JOHNSON, T. A.; PATEL, V. 1999. Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge, v. 378, p. 19-70, 1999.

LE CLAIR, B. P.; HAMIELEC, A. E.; PRUPPACHER, H. R. A Numerical Study of the Drag on a Sphere at Low and Intermediate Reynolds Numbers. *Journal of the Atmospheric Sciences,* Boston, v. 27, n. 2, p. 308-315, 1970.

LEE, S. A numerical study of the unsteady wake behind a sphere in a uniform flow at moderate Reynolds numbers. *Computers and Fluids*, Kidlington, v. 29, n. 6, p. 639-667, 2000.

LEWIS, R.W. NITHIARASU, P.; SEETHARAMU, K. N. *Fundamentals of the finite element method for heat and fluid flow*. Chichester: John Wiley and Sons, 2004.

LIMA, R. C. 2005. *Simulação de grandes escalas de escoamentos incompressíveis com transferência de calor e massa por um método de elementos finitos de subdomínio.* 2005. 161 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2005.

LIU, C. B 2005. *The Characteristic Based Split (CBS) scheme for laminar and turbulent incompressible flow simulations*, Tese, Civil and Computational Engineering Centre, School of Engineering, University of Wales Swansea, Swansea, UK.

Löhner, R.; Morgan, K.; Zienkiewicz, O. C., 1984. *The solution of non-linear hyperbolic equation systems by the finite element method*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, Chichester, v. 4, n. 11, p. 1043-1063.

Maliska, C. R., 2012. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. 2ª edição, LTC – Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, RJ.

Mansour, B. N., Cheikh, N. B., Beya, B. B., 2014. *Aspect Ratio Effects On 3D Incompressible Flow in Lid Driven Parallepiped Cavity.* International Journal of Scientific Research and Engineering Technology, v. 1, p. 14-19.

Nithiarasu, P., 2003. *An eficient artificial compressibility (AC) scheme based on the characteristic based split (CBS) method for incompressible flows.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 56, issue 13, pp. 185-1845.

Nithiarasu, P., Codina, R., Zienkiewicz, O. C., 2005. *The Characteristic Based Split (CBS) Scheme - a unified approach to fluid dynamics.* International Journal for Numerical Methods in Engineering; Special issue.

Nithiarasu, P., Bevan, R. L. T., Murali, K., 2013. *An artificial compressibility based fractional step method for solving time dependent incompressible flow equations. Temporal accuracy and similarity with a monolithic method.* Computacional Mechanics; vol. 51, issue 3, pp 255-260.

Nithiarasu, P., Mathur, J. S., Wheatherill, N. P., Morgan, K., 2004. *Three-dimensional incompressible flow calculations using the characteristic based split (CBS) scheme.* International Journal for Numerical Methods in Fluids, v. 44, p. 1207-1229.

Nithiarasu, P., Zienkiewicz, O. C., 2000. *Adaptative Mesh Generation for Fluid Mechanics Problems.* International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 47, pp 629-662.

Nickaeen, M., Ashrafizadeh, A., 2010. *A Characteristic-Based Split Finite Volume Algorithm For The Solution Of Incompressible Flow Problems.* 5º European Conference on Computational Fluid Dynamics**,** Lisbon, Portugal.

Panton, R. L., 1933. *Incompressible Flow*. A Whiley-Interscience Publication, John Willye & Sons, Estados Unidos.

Pereira, V. D., 2005. *Simulação Numérica de Escoamentos de Fluidos pelo Método de Elementos Finitos de Mínimos Quadrados.* Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista – UNESP, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Ilha Solteira, SP.

Silva, J. B. C., 1998. *Simulação Numérica de Escoamentos de Fluidos pelo Método de Elementos Finitos Baseado em Volumes de Controle*. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas, SP.

Tomboulides, A.G., Orszag, S.A., 2000. *Numerical investigation of transitional and weak turbulent flow past a sphere.* Journal of Fluid Mechanics, vol. 416, pp. 45-73.

Wang, J., Wan, D., 2011. *Parallel Simulation of 3D Lid-driven Cubic Cavity Flows by Finite Element Method.* Proceedings of the 21º International Offshore and Polar Engineering Conference. Hawaii, USA.

White, F. M, 2011. *Mecânica dos Fluidos*. 6ª edição. The McGraw-Hill Companies, Inc., Nova Iorque. Tradução: Mario Moro Fecchio, Nelson Manzanares Filho; Porto Alegre.

Wong, K. L., Baker, A, J., 2002. *A 3D incompressible Navier–Stokes velocity–vorticity weak form finite element algorithm.* International Journal for Numerical Methods in Fluids, v. 38, p. 99-123.

Zienkiewicz, O. C.; Codina, R., 1995. *A general algorithm for compressible and incompressible flow - part I. The Split, Characteristic-Based Scheme.* International Journal for Numerical Methods in Fluids, v. 20, n. 8-9, p. 869-885.

Zienkiewicz O. C., Nithiarasu, P., Codina, R., Vazquez, M., Ortiz, P., 1999. *The characteristic-based-split procedure: an efficient and accurate algorithm for fluid problems.* International Journal for Numerical Methods in Fluids; vol. 31, n. 1, pp 359–396.

Zienkiewicz, O. C, Taylor, R. L, Nithiarasu, P., 2014. *The Finite Element Method*. *vol. 3, Fluid Dynamics*, 7th edition. Butterworth and Heinemann, Oxford.

Zdravkovich, M. M. 1997. *Flow around Circular Cylinders. Vol 1: Fundamentals.* Oxford University Press Inc., Nova Iorque, EUA.

APÊNDICE – A -Métodos dos Resíduos Ponderados de Galerkin e Formulação Fraca

Vamos considerar, por exemplo, uma equação diferencial escrita na forma compacta como:

$$L(\phi) - S = 0 \tag{111}$$

Com condições de contorno apropriadas. Na Equação (111), $\boldsymbol{S}$ é a solução exata e $\boldsymbol{L}$ é um operador diferencial e, por exemplo, pode ser igual a:

$$L() = a() + u_j \frac{\partial()}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial()}{\partial x_j} \right) \tag{112}$$

Se substituirmos o valor de ∅ por uma aproximação $\widetilde{\emptyset}$, tal que:

$$\tilde{\phi} = \sum_{i=1}^{n} N_i \phi_i \tag{113}$$

onde $\boldsymbol{N_i}$ são funções de interpolação, teremos então, a partir da Equação (111), que:

$$R = L(\tilde{\phi}) - S \neq 0 \tag{114}$$

onde $\boldsymbol{R}$ representa o resíduo. Se a função de aproximação representar exatamente o valor exato da solução da função procurada, então o resíduo dever ser nulo.

As equações discretizadas podem ser obtidas forçando o produto interno entre o resíduo e uma função de ponderação, no espaço de funções, ser nulo:

$$\int_V WR dV = 0 \tag{115}$$

O número de funções de ponderação $\boldsymbol{W}$ deve ser igual ao número de variáveis $\boldsymbol{\emptyset_i}$ desconhecidas, de modo a obter um sistema algébrico de dimensão *N* por *N*. A integração por partes da equação integral do resíduo e a substituição das funções de interpolação dentro da equação resultante conduz a obtenção das equações discretizadas.

A grande variedade dos métodos de resíduos ponderados se diferencia na maneira em que a função ponderante W_i é tratada. Em seguida, o método de Galerkin será demonstrado.

Método de Galerkin

No método de Galerkin, a função peso é substituída pela mesma função de interpolação. No caso de elementos finitos, as funções de interpolação $\boldsymbol{N_i}$ são definidas para cada elemento (triangular, quadrilateral, etc.).

Fazendo a substituição citada acima, temos:

$$\sum_j \int_V N_i L(N_j)\tilde{\phi}_j dV - \int_V N_i S dV = 0 \tag{116}$$

Formulação Fraca

Para começar o procedimento da formulação fraca, vamos primeiro considerar a seguinte equação de transporte:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u} \bullet \vec{\nabla}\phi - \vec{\nabla} \bullet (k_\phi \vec{\nabla}\phi) = S_\phi \text{ em } \Omega \tag{117}$$

Sujeita a condição inicial e a estas condições de contorno ($\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$):

$$\begin{aligned} &\phi(\vec{x},0)=\phi_0(\vec{x}) \\ &\phi=\phi_1 \qquad \text{sobre } \Gamma_1 \\ &k_\phi \frac{\partial \phi}{\partial n}=\phi_2 \qquad \text{sobre } \Gamma_2 \end{aligned} \tag{118}$$

Esta formulação apresentada pelo conjunto das Equações (117) a (118) é conhecida como formulação forte (strong form) em elementos finitos.

Vamos aplicar agora o método de resíduos ponderados na equação (117), multiplicando pela função ponderante $\boldsymbol{W_i}$ e integrando no domínio $\boldsymbol{\Omega}$.

$$\int_\Omega W_i \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \int_\Omega W_i \vec{u} \bullet \vec{\nabla}\phi d\Omega - \int_\Omega W_i \vec{\nabla} \bullet (k_\phi \vec{\nabla}\phi) d\phi = \int_\Omega W_i S_\phi d\Omega \tag{119}$$

O terceiro termo da equação acima pode ser avaliado da seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \bullet (W_i k_\phi \vec{\nabla}\phi) = \vec{\nabla} W_i \bullet k_\phi \vec{\nabla}\phi + W \vec{\nabla} \bullet (k_\phi \vec{\nabla}\phi) \tag{120}$$

Fazendo a substituição da equação (120) dentro da equação (119), temos:

$$\int_\Omega W_i S_\phi d\Omega = \int_\Omega W_i \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \int_\Omega W_i \vec{u} \bullet \vec{\nabla}\phi d\Omega + \int_\Omega \vec{\nabla} W_i \bullet k_\phi \vec{\nabla}\phi d\Omega - \int_\Omega \vec{\nabla} \bullet (W_i k_\phi \vec{\nabla}\phi) d\Omega \tag{121}$$

O ultimo termo da equação (121) pode ainda ser reescrito utilizando o teorema de Green, na forma:

$$\begin{aligned} \int \vec{\nabla} \bullet (W_i k_\phi \vec{\nabla}\phi) d\Omega &= \oint_\Gamma \vec{n} \bullet W_i k_\phi \vec{\nabla}\phi d\Gamma \\ &= \oint_\Gamma W_i k_\phi \vec{n} \bullet \vec{\nabla}\phi d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_1} W_i k_\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} W_i k_\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma \end{aligned} \tag{122}$$

Em contornos nos quais a variável ∅ é especificada, a função ponderante W_i deve ser nula. Desta forma, a equação fica:

$$\int_{\Omega} W_i \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} W_i \vec{u} \bullet \vec{\nabla} \phi d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\nabla} W_i \bullet k_\phi \vec{\nabla} \phi d\Omega = \int_{\Omega} W_i S_\phi d\Omega + \int_{\Gamma_2} W_i k_\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma \qquad (123)$$

A Equação (123) é denominada de forma fraca (weak form), pois as derivadas de mais alta ordem desapareceram no processo de integração por partes. As derivadas foram redistribuídas entre as funções ∅ e W_i. A integral do último termo da equação é uma integral de contorno que surge naturalmente quando se obtém a forma fraca. Por essa razão, a segunda condição de contorno da Equação (118) é denominada de condição de contorno natural, em elementos finitos. As condições de contorno essenciais devem ser impostas durante o processo de solução. Ao substituir as condições de contorno na forma fraca da equação, nós obtemos:

$$\int_{\Omega} W_i \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} W_i \vec{u} \bullet \vec{\nabla} \phi d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\nabla} W_i \bullet k_\phi \vec{\nabla} \phi d\Omega = \int_{\Omega} W_i S_\phi d\Omega + \int_{\Gamma_2} W_i \phi_2 d\Gamma \qquad (124)$$

A forma fraca da equação, além de ser equivalente à forma forte, faz com que a ordem de continuidade das funções seja mais baixa e também permite a introdução natural das condições de contorno de segundo e terceiro tipos.

APÊNDICE B - O Escoamento de Hagen-Poiseuille

Este tipo de escoamento ocorre dentro de tubos circulares e por essa razão o desenvolvimento matemático parte das equações de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas. A forma do perfil de velocidade pode ser prontamente determinada para um escoamento laminar de um fluido incompressível com propriedades constantes na região hidrodinamicamente desenvolvido. Uma característica importante das condições hidrodinâmicas da região desenvolvida é que tanto a componente radial de velocidade e o gradiente da componente de velocidade axial são nulos em qualquer posição. (INCROPERA e DEWITT, 2003)

$$u_r = 0$$
$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{125}$$

Por totalmente desenvolvido entendemos que a região estudada está suficientemente distante da entrada, de modo que o escoamento é puramente axial, enquanto que V_r e V_θ são iguais a zero. Assim sendo, a componente de velocidade axial depende apenas de *r*, *u(x,r)=u(r).*

O escoamento prossegue pelo tubo sem movimento radial. A equação da quantidade de movimento em *r* é simplificada ficando *∂p/∂r = 0*, ou *p = p(z)* apenas. A equação da quantidade de movimento em *z*, se reduz a

$$\frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_z}{dz}\right) = \frac{dp}{dz} = \text{constante} < 0 \tag{126}$$

A equação B.2 é linear e pode ser integrada duas vezes, e o resultado das integrações é

$$v_z = \frac{dp}{dz}\frac{r^2}{4\mu} + C_1 \ln(r) + C_2 \tag{127}$$

onde C_1 e C_2 são as constantes da integração. Ao adotarmos as condições de contorno de não escorregamento nas paredes do tubo e de velocidade máxima no centro do tubo, podemos então determinar o valor das constantes da integração.

$$r = R: \quad v_z = 0 = \frac{dp}{dz}\frac{R^2}{4\mu} + C_1 \ln(R) + C_2$$

$$r = 0: \quad v_z = v_{\max} = \frac{dp}{dz}\frac{0^2}{4\mu} + C_1 \ln(0) + C_2 \tag{128}$$

É possível observar que, para evitar uma singularidade logarítmica, a constante C_1 deve assumir o valor de zero. Então, da condição de não escorregamento, encontramos o valor de C_2.

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = -\frac{dp}{dz}\frac{R^2}{4\mu} \tag{129}$$

Fazendo a substituição dos valores das constantes descritas na Equação (129), obtemos a solução final e muito conhecida para o escoamento de *Hagen-Poiseuille* como sendo

$$v_z = \left(-\frac{dp}{dz}\right)\frac{1}{4\mu}\left(R^2 - r^2\right) \tag{130}$$

O perfil de velocidade é um parabolóide com o máximo na linha de centro. Como já mostrado anteriormente, podemos definir o valor da velocidade máxima apenas por substituir o valor de r por zero na Equação (130).

$$v_{\max} = v_z(r = 0) = \left(-\frac{dp}{dz}\right)\frac{R^2}{4\mu} \tag{131}$$

É importante lembrar que, todo este desenvolvimento somente é válido para escoamentos laminares. Pode-se observar também que, a Equação (130) não depende da densidade e o motivo é que a aceleração convectiva desse tipo de escoamento é zero.

Por último, vamos desenvolver a relação mostrada na Equação (109), e para isto basta dividir a Equação (130) pela Equação (131).

$$\frac{v_z}{v_{\max}} = \frac{\left(-\frac{dp}{dz}\right)\frac{1}{4\mu}\left(R^2 - r^2\right)}{\left(-\frac{dp}{dz}\right)\frac{1}{4\mu}R^2} = \frac{\left(R^2 - r^2\right)}{R^2} \tag{132}$$

Reescrevendo e Equação (132), teremos então finalmente e Equação (109).

$$v_z = v_{\max}\frac{\left(R^2 - r^2\right)}{R^2} = v_{\max}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \tag{133}$$

Para uma demonstração mais completa e detalhada do escoamento de Hagen-Poiseuille, indico ao leitor que procure os livros de introdução à mecânica dos fluidos e fenômenos de transporte, tais como (WHITE, 2011), (BIRD, et al, 1924), (FOX et. al, 2006) e (INCROPERA e DEWITT, 2003).

APÊNDICE C - Alguns Resultados Bidimensionais

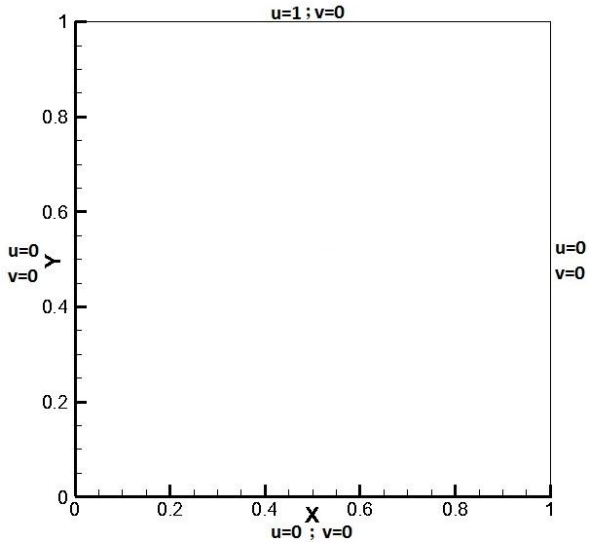
Como parte dos objetivos, a análise e o entendimento do código 2D foi proposto como uma ferramenta de aprendizagem do método CBS. Durante este período alguns casos de caráter de validação computacional foram estudados. Alguns dados destes resultados também estão disponíveis no Apêndice D.

Escoamento numa Cavidade Quadrada com tampa deslizante.

A Figura C-1 mostra geometria e a malha gerada é composta de 87301 nós e 173576 elementos triangulares, utilizada para a análise.

Resultados foram obtidos para diferentes números de Reynolds. Os resultados são comparados com os obtidos por GHIA et al. (1982) em seu estudo numérico bidimensional utilizando o método multigrid. Para cada valor do número de Reynolds, são apresentados 2 resultados, onde o primeiro mostra o perfil de velocidade na direção *x*, no centro da cavidade (*y=0,5*) e o segundo o perfil de velocidades na direção *y*, também no centro da cavidade (*x=0,5*).

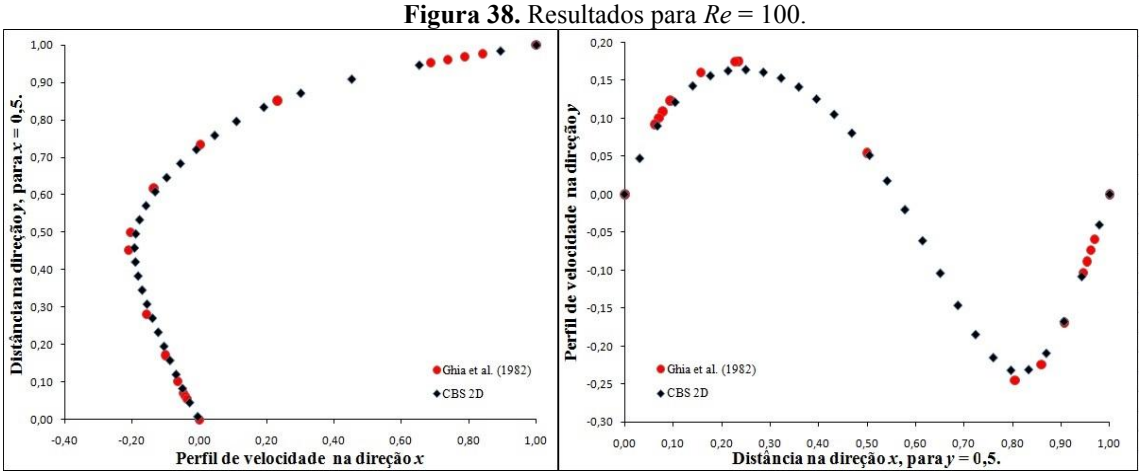
Figura 37. Geometria e condições de contorno da cavidade.



Fonte: Próprio autor.

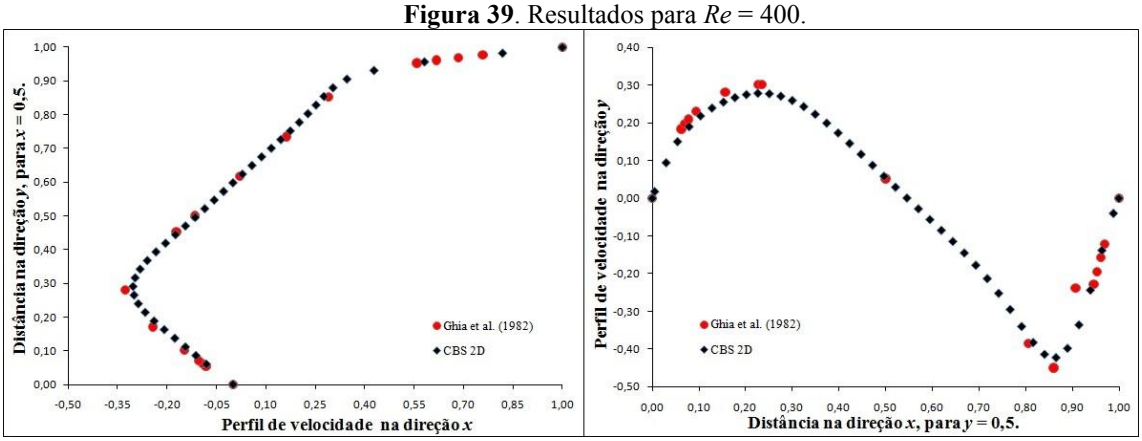
É possível observar, a excelente concordância dos resultados comparados nas Figuras 38 até 41 para os números de Reynolds igual a 100, 400, 1000 e 3200, respectivamente.

Figura 38. Resultados para *Re* = 100.



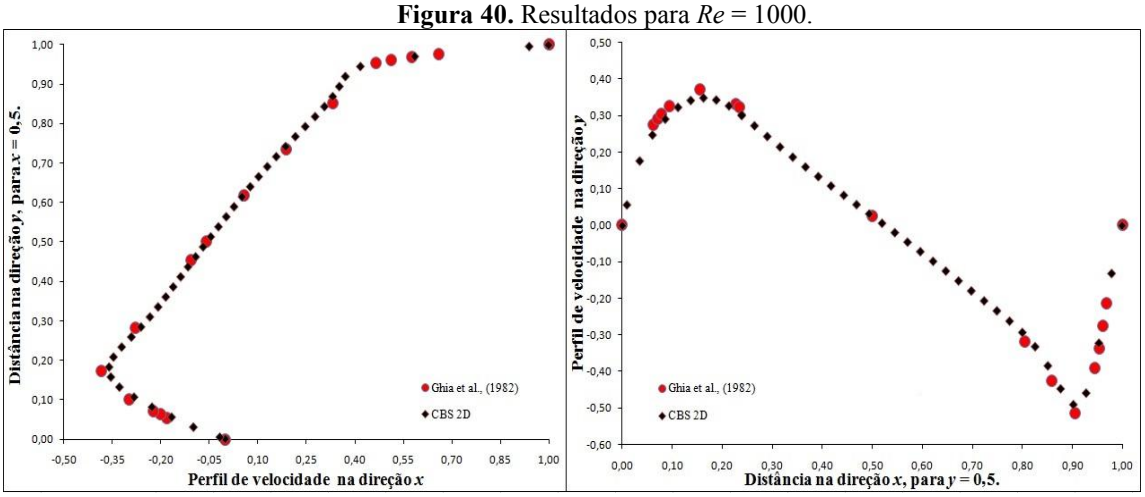
Fonte: Próprio autor.

Figura 39. Resultados para *Re* = 400.



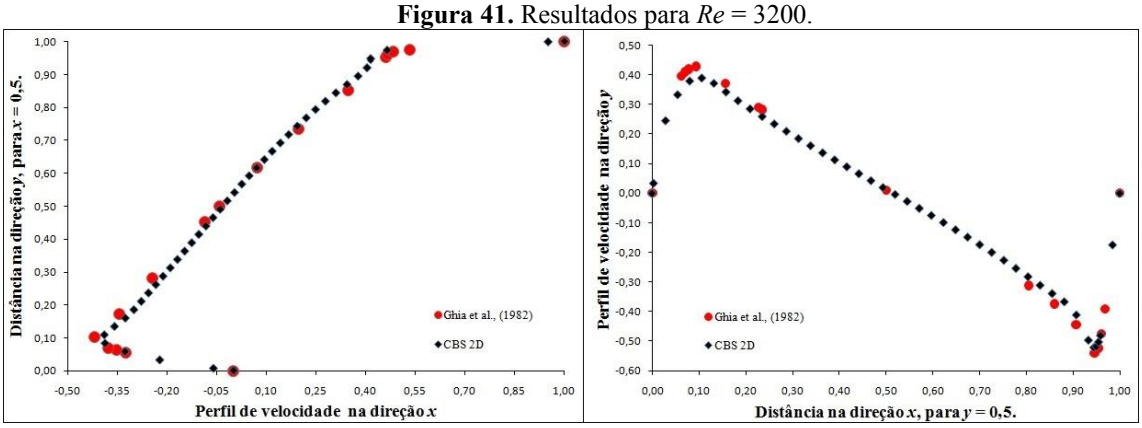
Fonte: Próprio autor.

Figura 40. Resultados para *Re* = 1000.



Fonte: Próprio autor.

Figura 41. Resultados para *Re* = 3200.



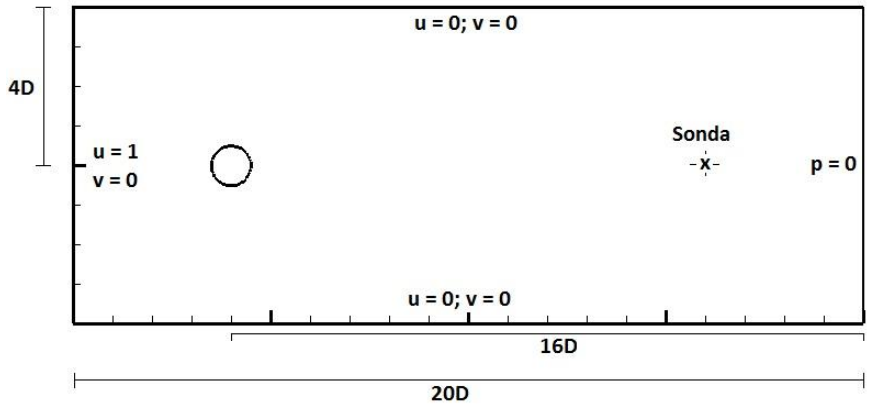
Fonte: Próprio autor.

Escoamento ao redor de um cilindro.

Este também é um caso bastante estudado para a validação de códigos computacionais. Porém, este deve ser o caso mais estudado quando se quer analisar a resposta transiente do problema. É possível encontrar na literatura vários estudos computacionais, como também experimentais.

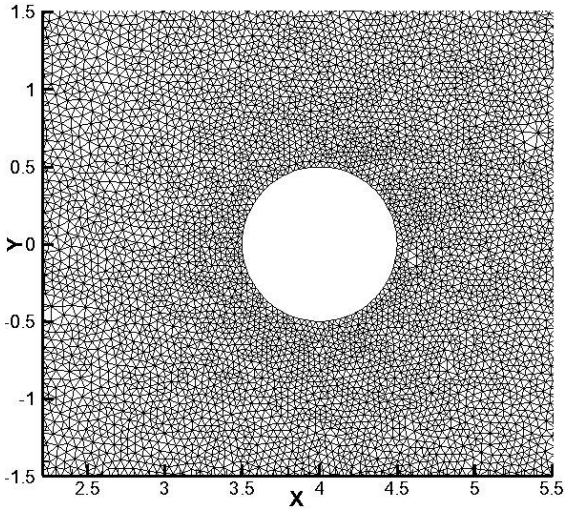
Aqui serão apresentados alguns estudos a respeito deste caso. Na Figura 42, logo abaixo, é mostrado o esquema do domínio do problema e as condições de contorno utilizadas. A malha gerada para este problema apresenta 41916 nós e 83073 elementos triangulares. Na Figura 43, tem-se um detalhe do refinamento da malha próximo ao cilindro.

Figura 42. Dimensão do domínio do cilindro e suas condições de contorno.



Fonte: Próprio autor.

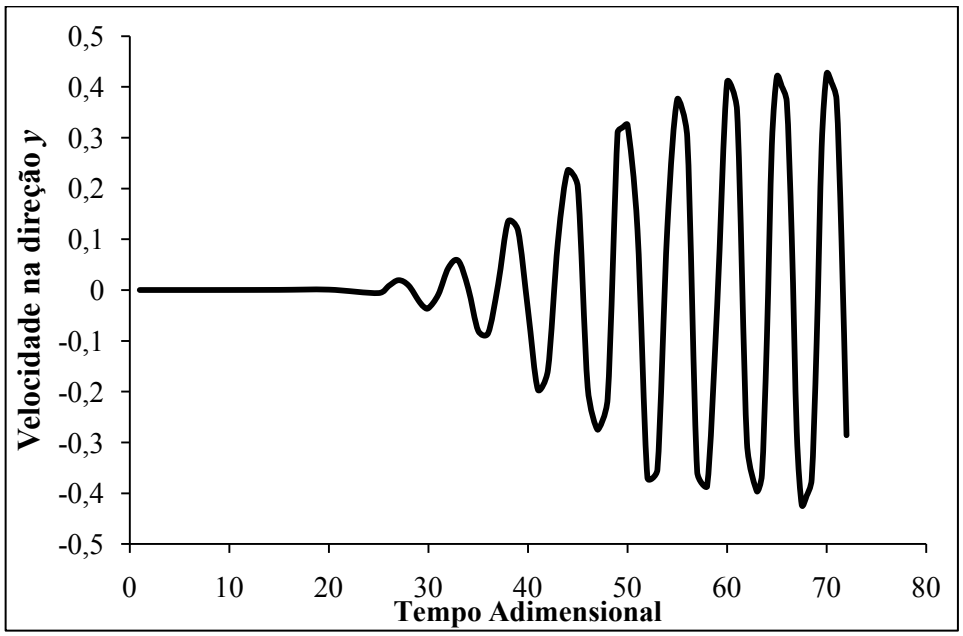
Figura 43. Detalhe da malha 2D do problema do cilindro.



Fonte: Próprio autor.

Como é possível observar na Figura 42, uma sonda foi posicionada a uma distância de 12D da centro do cilindro. A partir dela, a velocidade adimensional na direção *y* foi medida ao longo do tempo adimensional da simulação, como é mostrado na Figura 44. A oscilação da magnitude e direção da velocidade é devido à emissão de vórtices alternados uma vez que o escoamento se desestabiliza conforme a evolução no tempo. Este fenômeno é comum e deve estar presente nos resultados numéricos.

Figura 44. Velocidade na direção *y* medida pela sonda com *Re = 100*.



Fonte: Próprio autor.

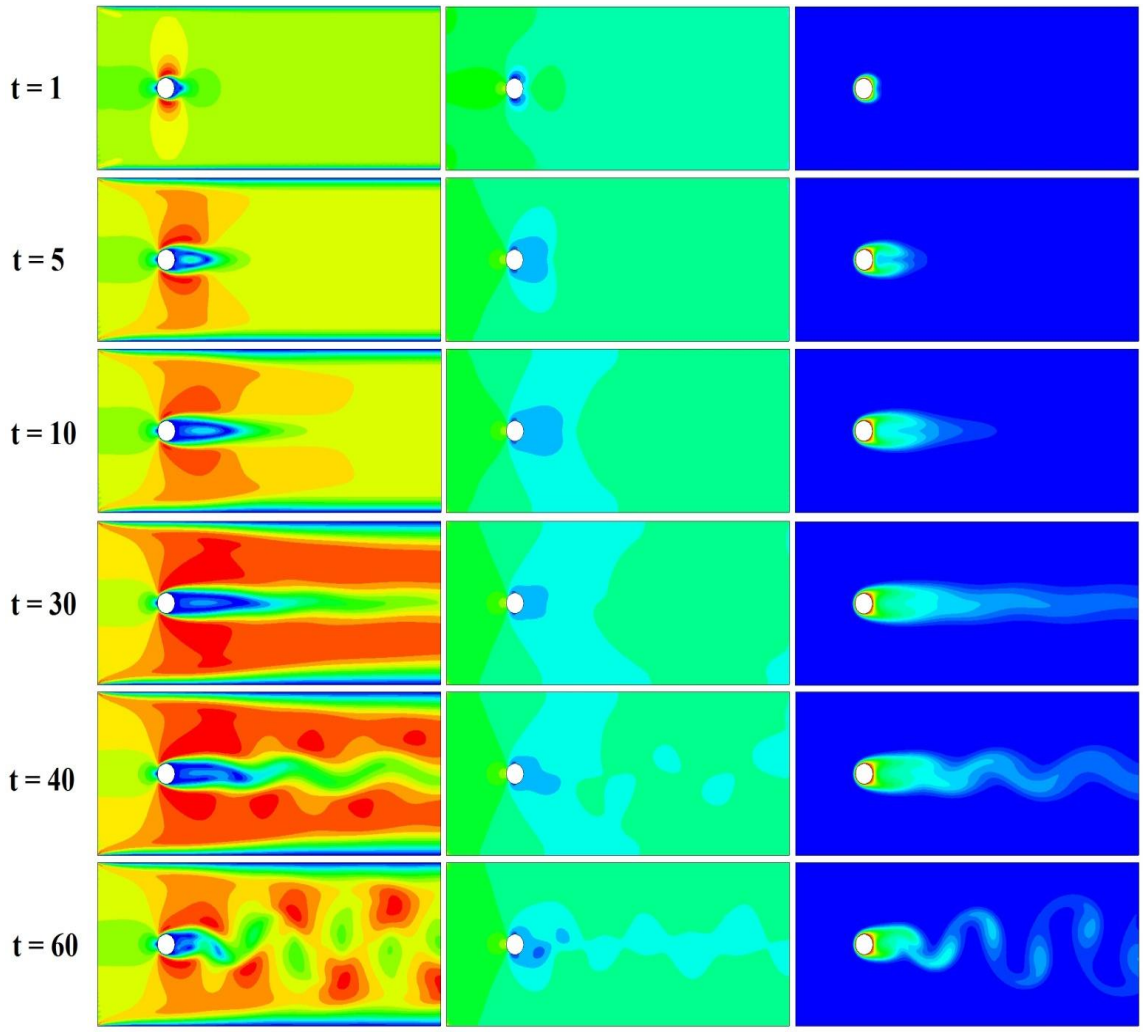
É possível calcular agora o número de Strouhal, Equação (134), a partir da freqüência de emissão dos vórtices *f*.

$$St = \frac{fD}{V} \tag{134}$$

O número de Strouhal encontrado para o exemplo acima foi de 0,1676. Este valor é bem próximo ao encontrado na literatura que é de 0,1666.

Na Figura C-9, são apresentadas imagens dos campos de velocidade, pressão e temperatura do escoamento em análise em diferentes instantes do tempo de simulação. É possível observar o início da formação da bolha de recirculação, até a sua desestabilização e o inicio da emissão de vórtices.

Figura 45. Resposta transiente para velocidade, pressão e temperatura.

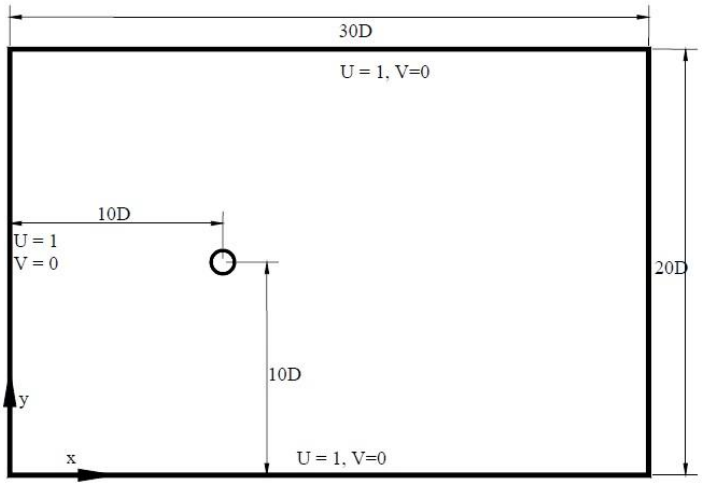


Fonte: Próprio autor.

A seguir, um novo caso bidimensional será estudado a fim de comparar resultados para valores de coeficiente de pressão, C_p, para um escoamento com número de Reynolds igual a 40. Para este novo caso será utilizado uma malha com as dimensões e condições de contorno ilustradas na Figura 46. A nova malha contém 80304 nós e 159744 elementos.

Este caso foi estudado com a finalidade de comparar os resultados com os apresentados por SILVA, (1998) e por CHENG e ARMFIELD, (1995). Portanto as mesmas condições de contorno e dimensões foram aqui reproduzidas.

Figura 46. Dimensões do domínio do cilindro e suas condições de contorno.



Fonte: Adaptado de Silva (1998).

É importante lembrar que a pressão é adimensionalizada da seguinte forma, (ver a Equação (6)):

$$p^* = \frac{p}{\rho u_\infty^2} \tag{135}$$

e que o coeficiente de pressão é calculado da seguinte maneira (Zdravkovich, 1997):

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2} \tag{136}$$

onde, u_∞ é a velocidade do fluxo não perturbado pelo cilindro e p_∞ é a pressão de estagnação medida na frente do cilindro.

Foram medidas as pressões adimensionais na superfície do cilindro a cada 10º, onde 0º é frente do cilindro, ou seja, utilizando a mesma variação do ângulo η, como mostrado anteriormente na Figura 25.

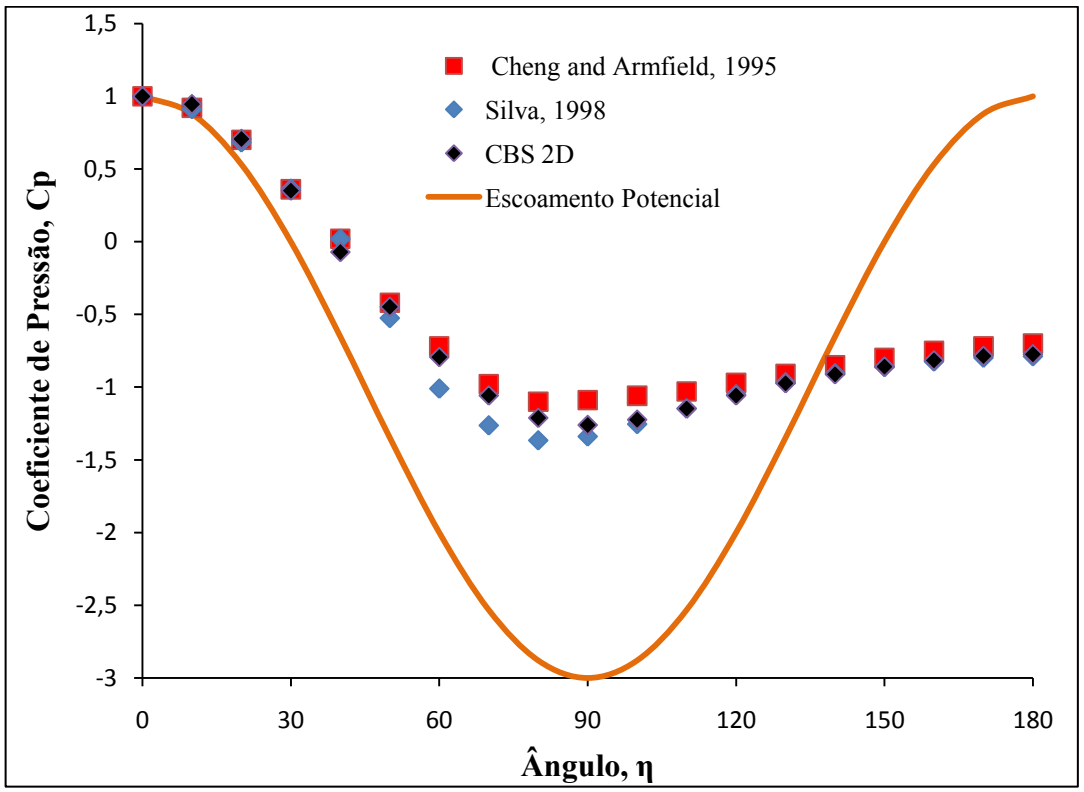
Os resultados são apresentados na Figura 47, na seguinte forma:

$$C_p = 1 + 2\left(P_i - P_\infty\right) \tag{137}$$

onde, P_i é a tomada de pressão adimensional medida na superfície do cilindro, P_∞ é a pressão adimensional de estagnação, medida na frente do cilindro. Na Figura 47, também está mostrado o resultado do escoamento ideal dado por $C_p = 1 - 4sen^2\theta$ (WHITE, 2011).

É possível observar que o resultado obtido neste trabalho concorda com os resultados da literatura utilizada.

Figura 47. Coeficiente de pressão na superfície do cilindro.



Fonte: Próprio autor.

APÊNDICE D - Tabelas de alguns dos resultados deste trabalho.

Neste apêndice é disponibilizado os valores calculados de alguns dos resultados apresentados neste trabalho. A intenção é disponibilizar dados para outros pesquisadores possam utilizar como fonte de comparação entre diferentes métodos com o método CBS.

Tabela 2. Resultados do código 3D referente às Figuras 7, 8 e 9.

Cavidade	***Re* 100**
y	***u***
1,00	1,000000
0,98	0,896579
0,95	0,741317
0,90	0,468222
0,85	0,262643
0,80	0,132178
0,75	0,001660
0,70	-0,063998
0,65	-0,129906
0,60	-0,173595
0,55	-0,203284
0,50	-0,223460
0,45	-0,219276
0,40	-0,209867
0,35	-0,191151
0,30	-0,175613
0,25	-0,159992
0,20	-0,131968
0,15	-0,103676
0,10	-0,071588
0,05	-0,035168
0,02	-0,014044
0,00	0,000000

Cavidade	***Re* 400**
y	***u***
1,00	1,000000
0,98	0,812984
0,96	0,626103
0,95	0,532662
0,94	0,452348
0,93	0,392647
0,92	0,333741
0,91	0,286362
0,90	0,240264
0,85	0,142523
0,80	0,109328
0,75	0,087442
0,70	0,065591
0,60	0,018647
0,50	-0,042296
0,40	-0,129052
0,35	-0,177138
0,30	-0,219694
0,25	-0,251619
0,20	-0,257328
0,15	-0,238594
0,10	-0,192355
0,05	-0,117636
0,02	-0,047054
0,01	-0,023527
0,00	0,000000

Cavidade	***Re* 1000**
y	***u***
1,00	1,000000
0,98	0,782291
0,96	0,564717
0,95	0,455930
0,94	0,364579
0,93	0,299740
0,92	0,236250
0,91	0,195678
0,90	0,158091
0,85	0,135724
0,80	0,120227
0,75	0,092503
0,70	0,072370
0,60	0,031051
0,50	-0,004567
0,40	-0,045484
0,35	-0,075760
0,30	-0,122188
0,25	-0,185017
0,20	-0,266429
0,15	-0,334022
0,10	-0,336075
0,05	-0,248272
0,02	-0,099309
0,01	-0,049654
0,00	0,000000

Fonte: Próprio autor.

Tabela 3. Resultados do código 3D referente às Figuras 28 e 29.

Esfera	***Re* 100**	***Re* 200**
η	***cp***	***cp***
0	1,1513	1,093286
10	1,08254	1,028664
20	0,91046	0,850928
30	0,65474	0,58704
40	0,35616	0,295138
50	0,02849	-0,03775
60	-0,238	-0,28641
70	-0,4579	-0,49259
80	-0,5704	-0,56926
90	-0,5951	-0,54818
100	-0,5568	-0,47759
110	-0,4758	-0,38076
120	-0,3915	-0,30353
130	-0,3195	-0,25291
140	-0,2657	-0,22928
150	-0,2256	-0,21383
160	-0,1891	-0,17918
170	-0,1606	-0,13417
180	-0,1495	-0,11273

Fonte: Próprio autor.

Tabela 4. Resultados do código 2D referente às Figuras 38 e 39.

***Re* 100**			
y	***u***	***x***	***v***
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,00873	-0,00604	0,03113	0,04723
0,04624	-0,03002	0,06758	0,09013
0,08375	-0,05107	0,10403	0,12139
0,12126	-0,07028	0,14048	0,14285
0,15877	-0,08848	0,17694	0,15629
0,19628	-0,10608	0,21339	0,16284
0,23379	-0,12344	0,24984	0,16423
0,27130	-0,14042	0,28629	0,16085
0,30882	-0,15658	0,32274	0,15317
0,34633	-0,17112	0,35919	0,14144
0,38384	-0,18306	0,39564	0,12557
0,42135	-0,19111	0,43210	0,10527
0,45886	-0,19390	0,46855	0,08057

***Re* 400**			
y	***u***	***x***	***v***
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,06000	-0,08093	0,00492	0,01802
0,08563	-0,11269	0,02951	0,09446
0,11126	-0,14451	0,05409	0,15038
0,13690	-0,17677	0,07867	0,19018
0,16253	-0,20900	0,10326	0,21853
0,18817	-0,23973	0,12784	0,23943
0,21380	-0,26675	0,15242	0,25531
0,23943	-0,28769	0,17701	0,26718
0,26507	-0,30045	0,20159	0,27508
0,29070	-0,30367	0,22617	0,27861
0,31634	-0,29728	0,25076	0,27729
0,34197	-0,28223	0,27534	0,27089
0,36761	-0,26040	0,29992	0,25945

0,49637	-0,19018	0,50500	0,05131
0,53388	-0,17889	0,54145	0,01755
0,57139	-0,15968	0,57790	-0,02039
0,60890	-0,13259	0,61435	-0,06144
0,64642	-0,09818	0,65081	-0,10429
0,68393	-0,05731	0,68726	-0,14666
0,72144	-0,00991	0,72371	-0,18519
0,75895	0,04442	0,76016	-0,21564
0,79646	0,10897	0,79661	-0,23236
0,83397	0,19053	0,83306	-0,23153
0,87148	0,30008	0,86951	-0,20993
0,90899	0,45145	0,90597	-0,16797
0,94651	0,65211	0,94242	-0,10869
0,98402	0,89351	0,97887	-0,04047
1,00000	1,00000	1,00000	0,00000

0,39324	-0,23392	0,32451	0,24331
0,41887	-0,20486	0,34909	0,22304
0,44451	-0,17477	0,37368	0,19944
0,47014	-0,14466	0,39826	0,17336
0,49578	-0,11502	0,42284	0,14560
0,52141	-0,08593	0,44743	0,11688
0,54704	-0,05726	0,47201	0,08775
0,57268	-0,02877	0,49659	0,05859
0,59831	-0,00025	0,52118	0,02960
0,62395	0,02850	0,54576	0,00087
0,64958	0,05751	0,57034	-0,02768
0,67521	0,08675	0,59493	-0,05616
0,70085	0,11606	0,61951	-0,08487
0,72648	0,14519	0,64409	-0,11420
0,75212	0,17374	0,66868	-0,14473
0,77775	0,20132	0,69326	-0,17727
0,80339	0,22749	0,71784	-0,21271
0,82902	0,25212	0,74243	-0,25183
0,85465	0,27607	0,76701	-0,29475
0,88029	0,30352	0,79160	-0,33974
0,90592	0,34609	0,81618	-0,38221
0,93156	0,42804	0,84076	-0,41361
0,95719	0,58130	0,86535	-0,42236
0,98282	0,81845	0,88993	-0,39771
1,00000	1,00000	0,91451	-0,33560
		0,93910	-0,24327
		0,96368	-0,13800
		0,98826	-0,03974
		1,00000	0,00000

Fonte: Próprio autor.

Tabela 5. Resultados do código 2D referente às Figuras 40 e 41.

***Re* 1000**			
y	***u***	***x***	***v***
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,00463	-0,01699	0,00902	0,05677
0,03005	-0,09891	0,03455	0,17712
0,05548	-0,16643	0,06008	0,24828
0,08090	-0,22701	0,08561	0,29171
0,10633	-0,28260	0,11114	0,32150

***Re* 3200**			
y	***u***	***x***	***v***
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,00668	-0,06098	0,00287	0,03395
0,03210	-0,22337	0,02872	0,24541
0,05753	-0,32836	0,05456	0,33307
0,08295	-0,38887	0,08041	0,37923
0,10837	-0,39087	0,10625	0,38936

0,13175	-0,32761	0,13666	0,34045	0,13380	-0,36018	0,13209	0,37161
0,15717	-0,35441	0,16219	0,34721	0,15922	-0,32752	0,15794	0,34235
0,18260	-0,35970	0,18772	0,34153	0,18465	-0,30161	0,18378	0,31264
0,20802	-0,34624	0,21325	0,32524	0,21007	-0,27920	0,20963	0,28535
0,23345	-0,32081	0,23878	0,30145	0,23549	-0,25735	0,23547	0,25960
0,25887	-0,29079	0,26431	0,27358	0,26092	-0,23534	0,26132	0,23446
0,28429	-0,26101	0,28984	0,24437	0,28634	-0,21333	0,28716	0,20963
0,30972	-0,23349	0,31537	0,21547	0,31177	-0,19145	0,31300	0,18511
0,33514	-0,20821	0,34090	0,18755	0,33719	-0,16974	0,33885	0,16090
0,36057	-0,18441	0,36643	0,16062	0,36261	-0,14815	0,36469	0,13696
0,38599	-0,16128	0,39196	0,13441	0,38804	-0,12666	0,39054	0,11326
0,41141	-0,13832	0,41748	0,10864	0,41346	-0,10523	0,41638	0,08973
0,43684	-0,11529	0,44301	0,08307	0,43889	-0,08381	0,44223	0,06634
0,46226	-0,09210	0,46854	0,05756	0,46431	-0,06236	0,46807	0,04302
0,48769	-0,06874	0,49407	0,03203	0,48973	-0,04085	0,49391	0,01973
0,51311	-0,04519	0,51960	0,00644	0,51516	-0,01922	0,51976	-0,00359
0,53853	-0,02143	0,54513	-0,01928	0,54058	0,00258	0,54560	-0,02701
0,56396	0,00258	0,57066	-0,04518	0,56601	0,02461	0,57145	-0,05057
0,58938	0,02692	0,59619	-0,07133	0,59143	0,04696	0,59729	-0,07437
0,61481	0,05167	0,62172	-0,09778	0,61685	0,06968	0,62314	-0,09844
0,64023	0,07696	0,64725	-0,12456	0,64228	0,09288	0,64898	-0,12288
0,66565	0,10293	0,67278	-0,15164	0,66770	0,11663	0,67482	-0,14774
0,69108	0,12975	0,69830	-0,17890	0,69313	0,14104	0,70067	-0,17311
0,71650	0,15759	0,72383	-0,20622	0,71855	0,16624	0,72651	-0,19906
0,74193	0,18653	0,74936	-0,23360	0,74398	0,19231	0,75236	-0,22571
0,76735	0,21652	0,77489	-0,26169	0,76940	0,21940	0,77820	-0,25317
0,79277	0,24717	0,80042	-0,29278	0,79482	0,24768	0,80404	-0,28148
0,81820	0,27764	0,82595	-0,33179	0,82025	0,27743	0,82989	-0,31022
0,84362	0,30656	0,85148	-0,38431	0,84567	0,30910	0,85573	-0,33815
0,86905	0,33210	0,87701	-0,44718	0,87110	0,34271	0,88158	-0,36592
0,89447	0,35260	0,90254	-0,49065	0,89652	0,37614	0,90742	-0,41032
0,91989	0,37119	0,92807	-0,45888	0,92194	0,40310	0,93327	-0,49556
0,94532	0,41771	0,95359	-0,32202	0,94737	0,41416	0,94500	-0,52009
0,97074	0,58583	0,97912	-0,13128	0,97279	0,46401	0,95000	-0,51653
0,99617	0,93990	1,00000	0,00000	0,99822	0,95054	0,95500	-0,50167
1,00000	1,00000			1,00000	1,00000	0,95911	-0,47980
						0,98495	-0,17399
						1,00000	0,00000

Fonte: Próprio autor.

Tabela 6. Resultados do código 2D referente à Figura 47.

ângulo	***p****	c_p	**Silva, 1998**	**Cheng e Armfield, 1995**
0	0,645164	1	1	1
10	0,618208	0,946088	0,912	0,92
20	0,498537	0,706746	0,683	0,7
30	0,320795	0,351262	0,364	0,36
40	0,109758	-0,070812	0,0196	0,02
50	-0,0785057	-0,4473394	-0,525	-0,42
60	-0,251575	-0,793478	-1,01	-0,72
70	-0,383656	-1,05764	-1,263	-0,98
80	-0,460661	-1,21165	-1,366	-1,1
90	-0,48516	-1,260648	-1,339	-1,09
100	-0,466928	-1,224184	-1,254	-1,06
110	-0,428564	-1,147456	-1,147	-1,03
120	-0,383575	-1,057478	-1,05	-0,97
130	-0,341535	-0,973398	-0,967	-0,91
140	-0,310621	-0,91157	-0,905	-0,85
150	-0,28433	-0,858988	-0,862	-0,8
160	-0,262806	-0,81594	-0,824	-0,75
170	-0,247765	-0,785858	-0,798	-0,72
180	-0,24182	-0,773968	-0,788	-0,7

Fonte: Próprio autor.