

UNESP
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá

Guaratinguetá
2001



1110000448



***"Estudo da Estrutura
Dinâmica de Satélites
Coorbitais.
Caso Não-Restrito"***

DÉCIO CARDOZO MOURÃO

134



DÉCIO CARDOZO MOURÃO

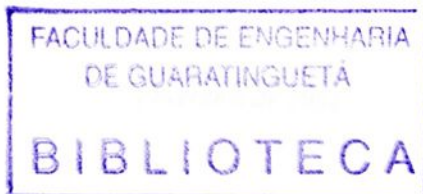
Dissertação apresentada à Faculdade
de Engenharia de Guaratinguetá da
Universidade Estadual Paulista para
a obtenção do título de Mestre em
Física.

Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter
Coorientador: Prof. Dr. Tadashi Yokoyama

Guaratinguetá
2001

448

DADOS CURRICULARES



00448



24/06/01
R720.00
Bibliografia

Ficha catalográfica preparada na Seção de Aquisição e Tratamento da
Informação da Biblioteca – FEG/UNESP

Mourão, Décio Cardozo
M929e Estudo da estrutura dinâmica de satélite coorbitais. caso não
restrito/Décio Cardozo Mourão. Guaratinguetá, 2001
134f.: il.; 30cm

Bibliografia: f.133-134

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2001.

Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter

Prof. Dr. Tadashi Yokoyama

1. Mecânica Celeste – Dinâmica Orbital I. Título

CDU 521.1_____

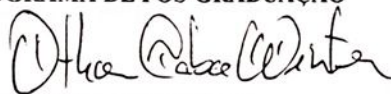
"ESTUDO DA ESTRUTURA DINÂMICA DE SATÉLITES COORBITAIS.
CASO NÃO-RESTRITO"

DÉCIO CARDOZO MOURÃO

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"MESTRE EM FÍSICA"

ESPECIALIDADE: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Dr. Othon Cabo Winter
Coordenador

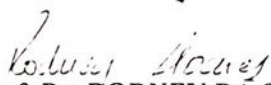
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. OTHON CABO WINTER
Orientador / Unesp-Feg



Prof. Dr. CRISTIÁN BEAUGÉ
UNCórdoba - Argentina



Prof. Dr. RODNEY DA SILVA GOMES
ON/RJ

T 521.1(043)

M929e

Fevereiro de 2001

DÉCIO CARDOZO MOURÃO

NASCIMENTO 01.03.1977 – MOGI DAS CRUZES / SP

FILIAÇÃO Décio Roberto Barba Mourão
Terezinha Cardozo Mourão

1995/1998 Curso de Graduação
Universidade Estadual Paulista- IGCE –Campus de Rio Claro

1999/2001 Curso de Pós-Graduação em Física, nível de Mestrado na
Universidade Estadual Paulista - FEG – Campus de
Guaratinguetá

Aos meus pais e minha irmã, que sempre me apoiaram e estimularam.

Agradecimentos

À Deus, fonte da vida e de toda sabedoria.

Aos meus orientadores Prof. Dr. Othon C. Winter e Prof. Dr. Tadashi Yokoyama, que viabilizaram e participaram ativamente neste trabalho.

À todos os colegas do Grupo de Dinâmica Orbital – FEG – Unesp, que das mais diversas maneiras colaboraram para a execução deste trabalho.



Este trabalho contou inicialmente com o apoio financeiro da PROPP-
UNESP/CAPES de 03/1999 até 07/1999 e posteriormente da FAPESP (processo
nº 98/1582-0) de 08/99 até 02/01



"Alguém que tenha experimentado uma só vez a compreensão perfeita de uma só coisa, e tenha verdadeiramente provado como se chega ao conhecimento, reconheceria que da infinidade de outras verdades nada compreende"

(Galileu Galilei)



Sumário

1	Introdução	23
2	Desenvolvimento	25
3	Resultados para o Sistema Saturno-Jano-Epimeteu	27
3.1	Introdução	27
3.2	Equações Gerais do Movimento	28
3.3	O potencial U	30
3.4	Equações do movimento	32
3.5	Os Pontos de Equilíbrio	34
3.6	Considerações analíticas	43
3.7	Resultados numéricos	50
3.8	A cinemática de satélites coorbitais	61
4	A influência do achatamento na dinâmica de satélites coorbitais	63
4.1	Introdução	63
4.2	Equações do movimento com o achatamento	63
4.3	Considerações analíticas com o achatamento	68
4.4	Resultados numéricos	79
5	A razão de massa entre os satélites	91
5.1	Introdução	91
5.2	Os pontos de equilíbrio com a variação da razão de massa	95
5.3	Dinâmica do sistema com a variação da razão de massa dos satélites	95
6	A relação de massa planeta-satélite	101
6.1	Introdução	101
6.2	Resultados	101
6.3	Conclusão e resultados finais	121
7	Mapeamento da separatriz girino-ferradura	122
8	Sumário e sugestão para trabalhos futuros	126

Lista de Figuras

- 1.1 A imagem da esquerda é de Jano obtida pela sonda Voyager 2 em 25 de Agosto de 1981. É a imagem disponível em maior resolução. À direita vemos a imagem de mais alta resolução de Epimeteu obtida pelas sondas espaciais Voyager. A Voyager 1 obteve esta foto em 11 de Novembro de 1980. Nesta imagem, o anel F de Saturno projeta uma sombra sobre a superfície de Epimeteu. Copyright 1999 Calvin J. Hamilton 24
- 3.1 Partícula P no espaço: o plano S' representa um plano de referência, enquanto o plano S é o plano de órbita de P , sendo i a inclinação do plano da órbita e Ω a longitude do nodo ascendente. 28
- 3.2 Três massas M_S , M_1 e M_3 , no espaço em relação a um referencial inercial X, Y, Z , e seus respectivos raios vetores R, R_1 e R_3 31
- 3.3 Posição do ponto lagrangiano L_1 em relação ao planeta, em função da relação de massa entre os satélites. Consideramos a distância entre o planeta e o satélite principal como unitária, o gráfico mostra que quanto maior for a relação de massa, culminando para massas iguais ($M_3/M_1 = 1$), mais este ponto de equilíbrio se aproxima do satélite principal. Para $M_3/M_1 = 0$, temos a localização de L_1 no caso restrito. 39
- 3.4 Posição do ponto lagrangiano L_2 em relação ao planeta, em função da relação de massa entre os satélites. Consideramos a distância entre o planeta e o satélite principal como unitária, o gráfico mostra que quanto maior for a relação de massa, culminando para massas iguais ($M_3/M_1 = 1$), mais este ponto de equilíbrio se aproxima do satélite principal. Para $M_3/M_1 = 0$, temos a localização de L_2 no caso restrito. 40
- 3.5 Evolução orbital para as massas de Jano e Epimeteu com $A = 1/3$, ou seja, os satélites estão defasados de 60 graus entre si, e permanecem estáticos no sistema girante durante toda integração. 52
- 3.6 Distâncias radiais de Jano e Epimeteu referente a Saturno contra o tempo para $A = 1/3$. Os gráficos estão sobrepostos, de modo que eles não alteram a distância radial entre si. 52

3.7	Posição angular de Jano e Epimeteu, que se mantém a distância de 60° entre si ao longo do tempo para os pontos Lagrangeanos para $A = 1/3$	53
3.8	Evolução de Jano e Epimeteu para $A = 0,3$. Neste caso os satélites esboçaram uma órbita do tipo girino, librando apenas em um ponto de equilíbrio	53
3.9	Distância radial de Jano e Epimeteu referente a Saturno contra o tempo para $A = 0,3$. Eles trocam de posição simultaneamente, e quando um está abaixo do semi-eixo médio ($r = 1$) o outro está acima.	54
3.10	Posição angular de Jano e Epimeteu contra o tempo para $A = 0,3$. A mínima aproximação é de cerca de 41 graus.	54
3.11	Órbita no eixo girante de Jano e Epimeteu para $A = 0,2$. Aqui temos um exemplo de uma órbita separatriz girino-ferradura. . . .	55
3.12	Distâncias radiais de Jano e Epimeteu em relação a Saturno contra o tempo para $A = 0,2$. Como nos casos anteriores, temos uma oscilação radial periódica	55
3.13	Posição angular de Jano e Epimeteu no tempo para $A = 0,2$. Podemos ver como os satélites tem uma mínima aproximação e se distanciam angularmente.	56
3.14	Órbita no sistema girante de Jano e Epimeteu para $A = 0,06$. Neste caso temos uma órbita do tipo ferradura que envolve os dois pontos de equilíbrio de cada satélite.	56
3.15	Distâncias radiais de Jano e Epimeteu contra o tempo para $A = 0,06$. A amplitude de oscilação radial aumenta significativamente em relação à órbita girino	57
3.16	Posição angular de Jano e Epimeteu no tempo para $A = 0,06$. A mínima aproximação é de cerca de 24 graus.	57
3.17	Período de oscilação de um sistema coorbital Saturno-Jano-Epimeteu para diferentes condições iniciais, indicadas pela mínima aproximação angular dos satélites ($\phi_{\min}$).	58
3.18	Evolução da ferradura para $A = 0.06$. Observa-se aqui a estabilidade deste sistema, pois os satélites mantêm a mesma evolução no sistema girante mesmo após 80 encontros sucessivos.	59
3.19	Raio orbital em função do tempo para o caso ferradura ($A = 0.06$) para o tempo de integração 10 vezes superior aos esboçados anteriormente.	59
3.20	Posição angular dos satélites em função do tempo para o caso ferradura por um período de integração 10 vezes superior aos esboçados anteriormente	60
3.21	Exemplos de órbitas: (a) girino; (b)separatriz; (c) ferradura	60

3.22	A figura mostra as posições relativas de dois satélites coorbitais genéricos em relação ao planeta Saturno. Os ângulos γ_1 e γ_3 representam a máxima libração angular de cada um dos satélites, além disso, consideramos como referência angular a linha tracejada. . .	62
4.1	A defasagem angular dos pontos estáveis de um par de satélites coorbitais em função do achatamento (J_2) do planeta. Quanto maior o achatamento, os pontos se aproximam angularmente . . .	78
4.2	O gráfico mostra a influência do achatamento do planeta na mínima aproximação angular entre satélites coorbitais para órbitas de transição girino-ferradura ($\phi_{\max} = 180$ graus). Quanto maior o parâmetro que representa o achatamento do planeta (J_2) mais os satélites se aproximam angularmente para este tipo de órbita.	79
4.3	Evolução dos satélites no eixo girante submetidos a 0.1% do achatamento real de Saturno.	80
4.4	Ângulos dos satélites em função do tempo para o caso ferradura sob 0.1% do achatamento real de Saturno.	80
4.5	Distância radial de Jano e Epimeteu a Saturno sob 0.1% do achatamento.	81
4.6	Ampliação do gráfico da distância radial contra o tempo para S_1 , em uma pequena região.	81
4.7	Evolução dos satélites no eixo girante submetidos a 1% do achatamento real de Saturno.	83
4.8	Ângulo dos satélites em função do tempo para o caso ferradura sob 1% do achatamento real de Saturno.	83
4.9	Distância radial para os satélites Jano e Epimeteu sob 1% do achatamento de Saturno. Houve um aumento de amplitude na oscilação radial de curto período, além da queda do semi-eixo médio	84
4.10	Evolução dos satélites Jano e Epimeteu no eixo girante submetidos a 10% do achatamento real de Saturno.	84
4.11	Ângulo dos satélites Jano e Epimeteu em função do tempo para o caso ferradura sob 10% do achatamento real de Saturno.	85
4.12	Evolução radial de Jano e Epimeteu a Saturno sob 10% do achatamento em S_1 . Ocorreu o aumento da oscilação radial de curto período, o que o que justifica o espessamento das linhas e a diminuição do semi-eixo médio, eles não oscilam mais ao redor de 1.	85
4.13	Evolução da distância de Epimeteu a Saturno contra o tempo para o achatamento real de Saturno.	86
4.14	Ângulos dos satélites S_1 e S_3 para o achatamento de Saturno. . .	86
4.15	Evolução para Jano e Epimeteu com o achatamento de Saturno. Este gráfico está em escala real, de modo não podemos visualizar a oscilação radial da ferradura.	87

4.16	Excentricidade pelo tempo, para os satélites Jano e Epimeteu onde Saturno não possui achatamento. Os valores dos dois satélites estão sobrepostos.	87
4.17	Excentricidade pelo tempo para os satélites Jano e Epimeteu, o corpo principal com 0.1% do achatamento de Saturno.	88
4.18	Excentricidade pelo tempo para os satélites Jano e Epimeteu, o corpo principal com 1% do achatamento de Saturno.	88
4.19	Excentricidade pelo tempo para os satélites Jano e Epimeteu, o corpo principal com 10% do achatamento de Saturno.	89
4.20	Excentricidade pelo tempo para os satélites Jano e Epimeteu, o corpo principal com achatamento real de Saturno.	89
4.21	Valores das excentricidades osculadoras de um sistema coorbital do tipo Saturno - Jano - Epimeteu em função do parâmetro J_2 , que representa o achatamento de Saturno. Conforme o valor de J_2 cresce, as excentricidades máximas alcançam valores cada vez maiores.	90
5.1	Evolução no eixo girante para dois satélites de massas iguais. Os dois satélites possuem evolução simétrica, como era esperado, pois as forças envolvidas são simétricas	91
5.2	Gráfico da distância radial contra o tempo para dois satélites de massas iguais no caso da separatriz, observamos a simetria entre no comportamento dos dois satélites	92
5.3	Evolução dos satélites para $M_3 = 0,075M_1$. Observamos que S_3 praticamente permanece estático e S_1 perfaz longas excursões . . .	92
5.4	Evolução radial para razão de massa $M_3 = 0,075M_1$. O satélite S_1 , praticamente não apresenta movimento radial.	93
5.5	Posição angular para razão de massa $M_3 = 0,075M_1$. O satélite S_1 praticamente não apresenta alteração angular no eixo girante. . .	93
5.6	Evolução de um sistema de satélites coorbitais na região de separatriz girino-ferradura para diferentes razões de massa entre os satélites. Observamos que quanto maior massa de um dos satélites menos este satélite oscila, enquanto o outro satélite apresenta movimentos de amplitudes crescentes.	94
5.7	O gráfico mostra o deslocamento angular em graus em relação ao eixo da média libração angular de S_1 de um dos pontos de equilíbrio de S_1 para a razão de massa M_3/M_1	96
5.8	O gráfico mostra o deslocamento do ponto de equilíbrio de S_1 em graus para a relação de massa M_3/M_1 , uma ampliação do gráfico anterior ao redor de $M_3 = M_1$	96

5.9	Dinâmica da evolução dos pontos de equilíbrio de satélites coorbitais com relação a razão de massa dos satélites: (a)- caso restrito com $M_3 = 0$; (b)- caso não restrito para $M_1 > M_3$; (c)- massas iguais, simetria na localização dos pontos; (d)- caso não restrito para $M_3 > M_1$; (e)- caso restrito com $M_1 = 0$. A defasagem entre os pontos de equilíbrio correspondentes permanece constante: 60 graus	97
5.10	Mínima aproximação em graus pela variação de massa para M_3 . A razão de massa não influi na mínima aproximação dos satélites para um mesmo A	98
5.11	Distâncias radiais máximas e mínimas para S_1 e S_3 . Para $M_1 = M_3$ percebe-se que os raios máximos ou mínimos dos satélites são iguais. As curvas de cada um dos satélites se tocam quando as massas são iguais, mostrando que também há simetria radial em satélites coorbitais de mesma massa.	99
5.12	Amplitude de oscilação radial dos satélites S_1 e S_3 para variação da razão de massa dos satélites na condição de órbita separatriz.	99
5.13	Máxima amplitude da oscilação angular de S_1 e S_3 em graus na condição de órbita separatriz em função da razão de massa entre os satélites.	100
6.1	A figura a mostra a evolução de dois satélites coorbitais quando a massa do planeta é igual a dos satélites para o caso transição girino-ferradura ($\phi_{\max} = 180$ graus), os satélites não mantêm mais a estrutura coorbital.	102
6.2	Distância radial no tempo para órbita de transição girino-ferradura ($\phi_{\max} = 180$ graus), quando para massa do planeta igual a dos satélites. O sistema coorbital não foi mantido, sendo que um dos satélites se afastou do sistema.	103
6.3	Evolução angular no tempo para órbita de transição girino-ferradura ($\phi_{\max} = 180$ graus), quando para massa do planeta igual a dos satélites. O sistema coorbital não foi mantido.	103
6.4	A figura a e b mostram respectivamente a evolução radial e angular para dois satélites coorbitais de massa iguais, tendo como condição inicial a órbita separatriz ($\phi_{\max} = 180$ graus) com $M_S = 2000M_3$. Os satélites permanecem apenas por alguns instantes coorbitais.	104
6.5	A figura superior é a evolução radial para satélites coorbitais em um exemplo órbita do tipo girino ($\phi_{\min} = 46$ graus), para massa do planeta é 2000 vezes a massa dos satélites. Constata-se que os satélites mantiveram oscilando em um típico movimento coorbital durante toda a integração, isto é visualizado pela figura inferior, que é um "zoom" superior	105

- 6.6 A figura superior é a evolução angular para satélites coorbitais em um exemplo órbita do tipo girino ($\phi_{\min} = 46$ graus), para massa do planeta é 2000 vezes a massa dos satélites. Constata-se que os satélites mantiveram librando em movimento coorbital durante toda a integração, isto é visualizado pela figura inferior, que é um "zoom" superior. 106
- 6.7 O valor de $Z = 1$ determina se os satélites são ininterruptamente coorbitais por 8000 períodos orbitais, caso contrário, $Z = -1$. O gráfico acima mostra o valor de Z em função da relação de massa planeta-satélite (M_S/M_{13}) para $\phi_{\min} = 46$ graus. A estrutura coorbital só é mantida durante todo este período somente se a massa do planeta for aproximadamente 500 vezes a massa dos satélites . 108
- 6.8 Os valores das mínimas e máximas (representados pelo índice max e min) distâncias radiais para um par satélites (representados pelos índices 1 e 3) em função da relação de massa satélite-planeta, tendo como condição inicial $\phi_{\min} = 46$ graus. Para massas do planeta aproximadamente menores que 500 vezes a massa dos satélites, os valores de máximos e mínimos radiais adquirem um comportamento não coorbital. 109
- 6.9 Valores da mínima aproximação angular entre dois satélites em função da relação de massa satélite-planeta. Como condição inicial os satélites são coorbitais, tendo $\phi_{\min} = 46$ graus. Para massas do planeta aproximadamente menores que 500 vezes a massa dos satélites, os valores de mínima aproximação não obedecem mais a condição inicial coorbital 110
- 6.10 Tempo que um par de satélites lançado em condições coorbitais, com $\phi_{\min} = 46$ graus, permanecem oscilando coorbitalmente em função da relação de massa planeta-satélite. A medida que aumentamos esta relação de massa, aumentamos o tempo em que os satélites permanecem coorbitais. A integração foi interrompida em 8000 períodos orbitais. 111
- 6.11 O valor de $Z = 1$ determina se os satélites são ininterruptamente coorbitais por 8000 períodos orbitais, caso contrário, $Z = -1$. O gráfico acima mostra o valor de Z em função da relação de massa planeta-satélite (M_S/M_{13}) para $\phi_{\max} = 180$ graus. A estrutura coorbital só é mantida durante todo este período somente se a massa do planeta for aproximadamente 4000 vezes a massa dos satélites 113

- 6.12 Valores das mínimas e máximas (representados pelo índice max e min) distâncias radiais para um par satélites (representados pelos índices 1 e 3) em função da relação de massa satélite-planeta, tendo como condição inicial $\phi_{\max} = 180$ graus. Para massas do planeta aproximadamente menores que 4000 vezes a massa dos satélites, os valores de máximos e mínimos radiais adquirem um comportamento não coorbital. 114
- 6.13 Valores da mínima aproximação angular entre dois satélites em função da relação de massa satélite-planeta. Como condição inicial os satélites são coorbitais, tendo $\phi_{\max} = 180$ graus. Para massas do planeta aproximadamente menores que 4000 vezes a massa dos satélites, os valores de mínima aproximação não obedecem mais a condição inicial coorbital. 115
- 6.14 Tempo que um par de satélites lançado em condições coorbitais, com $\phi_{\max} = 180$ graus, permanecem oscilando coorbitalmente em função da relação de massa planeta-satélite. A medida que aumentamos esta relação de massa, aumentamos o tempo em que os satélites permanecem coorbitais. A integração foi interrompida em 8000 períodos orbitais. 116
- 6.15 O valor de $Z = 1$ determina se os satélites são ininterruptamente coorbitais por 8000 períodos orbitais, caso contrário, $Z = -1$. O gráfico acima mostra o valor de Z em função da relação de massa planeta-satélite (M_S/M_{13}) para $\phi_{\max} = 6,88$ graus. A estrutura coorbital só é mantida durante todo este período somente se a massa do planeta for aproximadamente 10.000 vezes a massa dos satélites 117
- 6.16 Valores das mínimas e máximas (representados pelo índice max e min) distâncias radiais para um par satélites (representados pelos índices 1 e 3) em função da relação de massa satélite-planeta, tendo como condição inicial $\phi_{\min} = 6,88$ graus. Para massas do planeta aproximadamente menores que 10.000 vezes a massa dos satélites, os valores de máximos e mínimos radiais adquirem um comportamento não coorbital. 118
- 6.17 Valores da mínima aproximação angular entre dois satélites em função da relação de massa satélite-planeta. Como condição inicial os satélites são coorbitais, tendo $\phi_{\min} = 6,88$ graus. Para massas do planeta aproximadamente menores que 10.000 vezes a massa dos satélites, os valores de mínima aproximação não obedecem mais a condição inicial coorbital. 119

6.18	Tempo que um par de satélites lançado em condições coorbitais, com $\phi_{\min} = 6,88$ graus, permanecem oscilando coorbitalmente em função da relação de massa planeta-satélite. A medida que aumentamos esta relação de massa, aumentamos o tempo em que os satélites permanecem coorbitais. A integração foi interrompida em 8000 períodos orbitais.	120
6.19	Gráfico da mínima aproximação que satélites coorbitais podem ter para permanecerem estáveis por cerca de 8000 períodos orbitais em função da relação de massa planeta-satélite. Quanto maior esta relação de massa, mais os satélites podem se aproximar mantendo-se coorbitais durante toda a integração	121
7.1	Número percentual de órbitas girinos obtidas para cada lado em função da posição de saída de S_3	123
7.2	Número percentual de órbitas girinos obtidas para cada lado em função da posição de saída de S_3	123
7.3	Número percentual de órbitas girinos obtidas para cada lado em função da posição de saída de S_3	124
7.4	Número percentual de girinos obtidas para cada lado em função da posição de saída de S_3 , usamos a relação de massa $M_3 = 1/2M_1$.124	
7.5	Número percentual de girinos obtidas para cada lado em função da posição de saída de S_3 , usamos a relação de massa $M_3 = 1/3M_1$.125	

Lista de símbolos

S_1	primeiro satélite (Jano)
S_3	segundo satélite (Epimeteo)
M_S	massa do planeta (Saturno)
M_1	massa de S_1
M_3	massa do satélite
r_1	distância radial de S_1 ao planeta
r_3	distância radial de S_3 ao planeta
θ_1	posição angular de S_1
θ_3	posição angular de S_3
Δ	$\delta\sigma\tau\acute{\alpha}\nu\chi\iota\alpha\ \delta\epsilon\ \Sigma_1\ \alpha\ \Sigma_3$
$\mathcal{G}$	constante de gravitação universal
J_2	achatamento do planeta
γ_1	amplitude angular de libração de S_1
γ_3	amplitude angular de libração de S_3
ϕ	distância angular entre os satélites
$\phi_{\min}$	mínima aproximação angular dos satélites
$\phi_{\max}$	máxima distância angular entre os satélites
L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5	pontos de equilíbrio Langrangianos
n_0	média do movimento médio sem o achatamento
$\bar{n}$	movimento médio com o achatamento
$\mathcal{L}$	lagrangiana
T	energia cinética
U	energia potencial
L	momento angular
a_0	semi-eixo médio
(x, y, z)	referencial cartesiano centrado no planeta
I	inclinação

Ω longitude do nodo ascendente

ε excentricidade

ϕ anomalia verdadeira

ω argumento do pericentro

Mourão, D. C. *Estudo da Estrutura Dinâmica de Satélites Coorbitais. Caso Não-Restrito*. Guaratinguetá, 2001, p. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia, Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista.

Resumo

Jano e Epimeteo são dois satélites coorbitais que foram descobertos ao redor de Saturno. Epimeteo não libra apenas ao redor de um dos pontos de equilíbrio lagrangianos estáveis (L_4 ou L_5), mas sobre uma larga faixa que incluem os pontos lagrangianos L_4 , L_5 e L_3 . Este sistema possui também uma libração para o satélite Jano, de maior massa, de modo a surgir dois novos pontos de equilíbrio para este sistema. A localização dos pontos lagrangianos L_4 e L_5 para Epimeteo passam a depender da localização destes novos pontos. Isto ocorre devido ao fato da massa de Epimeteo ser considerável em relação a de Jano (a massa de Jano é aproximadamente cinco vezes a de Epimeteo), o que se faz necessário abandonar o problema restrito para este caso, e considerar as massas dos três corpos envolvidos. Neste trabalho realizou-se simulações numéricas através do problema de três corpos, no qual também apresentamos um desenvolvimento analítico, no caso não restrito para as massas de Saturno, Jano e Epimeteo e os respectivos semi-eixos orbitais dos satélites. Escolhendo-se diversas condições iniciais, em função da mínima aproximação entre os satélites, obteve-se as várias possibilidades de órbitas, desde órbitas do tipo girino até as órbitas do tipo ferradura. Considerou-se ainda casos com a presença do achatamento de Saturno. A inclusão do achatamento foi feita considerando vários casos com frações crescentes da intensidade real do achatamento de Saturno, de maneira a se identificar seu efeito na dinâmica deste sistema. Os resultados indicaram que o achatamento provoca uma libração radial na órbita dos satélites coorbitais e uma queda nos seus respectivos semi-eixos orbitais médios, causando um aumento na média dos movimentos médios. Em uma outra etapa realizou-se um conjunto de integrações numéricas para casos distintos de razão de massa entre os satélites, sem a presença do achatamento, no intuito de se explorar a dependência desta razão de massas sobre a estrutura dos pontos de equilíbrio e parâmetros que determinam o formato da órbita girino-ferradura. Através de sucessivas integrações numéricas para diferentes razões de massa planeta-satélite buscamos casos limites desta relação que permite a manutenção do sistema coorbital por um certo período. Finalmente, verificou-se a estabilidade do sistema em pontos próximos ao limite girino-ferradura para diferentes razões de massa.

PALAVRAS CHAVE: Satélites Coorbitais; Pontos de Equilíbrio Lagrangianos; Ressonância; Achatamento; Jano-Epimeteo.

Mourão, D. C. *Study of the Dynamical Structure of the Coorbital Satellites. Non-Restricted Case.* Guaratinguetá, 2001, p. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia, Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista.

ABSTRACT

Janus and Epimetheus are two coorbital satellites which were discovered around Saturn. Epimetheus do not librate about just one of the lagrangian stable points (L4 or L5), but on a wide strip that include the lagrangian points L4, L5 and L3. This system also shows an oscillation for the satellite Janus, in such a way that appear two new equilibrium points for this system. That happens due to the fact that Epimetheus mass is not negligible in comparison to the mass of Janus (the mass of Janus is approximately five times Epimetheus mass), what makes it necessary to abandon the restricted problem for this case, and to consider the masses of the three considered bodies. In the present work we performed numeric simulations adopting the three-body problem, we also present some analytic development, for the non-restricted case considering the masses of Saturn, Janus and Epimetheus, and their respective semi-major axes. Choosing several initial conditions, depending on the minimum approximation among the satellites, it was obtained the whole range of possible orbits, from tadpole orbits to horseshoe orbits. It was also considered cases with the presence of the oblateness of Saturn. The inclusion of the oblateness was made considering a set of cases with growing fractions of the real intensity of Saturn's oblateness, in order to allow the identification of its effect in the dynamics of this system. The results indicated that the oblateness provokes a radial oscillation in the orbit of the coorbital satellites and a decrease in its respective mean semi-major axes, causing an increase in the average of the mean motion. In another stage we performed numerical integrations for different satellite-satellite mass ratios, without oblateness, to explore the mass dependence on the structure of the equilibrium points and others parameters that define the shape of tadpole-horseshoe orbits. Through successive numeric integrations for different planet-satellite mass ratios looking for limiting cases of this relationship that allows the stability of the coorbital system for a certain period of time. Finally the stability of the system in the case of orbits close to the limit of tadpole-horseshoe orbits for different satellites mass ratios was estimated.

KEYWORDS: Coorbital Satellites; Lagrangian Equilibrium Points; Resonance; Janus-Epimetheus.

1 Introdução

Brown (1911) demonstrou a possibilidade de órbitas coorbitais do tipo girino para partículas ao redor do pontos triangulares estáveis (L_4 e L_5), objetos que libram ao redor dos pontos L_3 , L_4 e L_5 perfazem órbitas denominadas como ferradura.

Em 1980, foi descoberto no sistema de Saturno, através de observações, como mostrou Synnott *et al* (1981), um par de satélites coorbitais, Jano-Epimeteu, que apresenta uma evolução orbital peculiar em função de suas massas serem comparáveis. Eles descrevem, num sistema de coordenadas girantes, trajetórias onde não somente o satélite de massa menor (Epimeteu) perfaz um longo arco, envolvendo os pontos Lagrangianos L_4 , L_3 e L_5 , desenvolvendo uma órbita do tipo ferradura, mas Jano também descreve uma oscilação do mesmo tipo, porém de amplitude menor.

As massas destes satélites foi calculada, indiretamente através dos seus respectivos movimentos médios, com maior precisão através das observações terrestres e dados oriundos após o vôo das sondas Pioneer e Voyager I e II. Estes resultados são utilizados também para o cálculo do volume e densidade de cada um dos satélites, eles são efetuados através de suas respectivas médias. Isto é mostrado com cada vez maior precisão nos respectivos trabalhos de Dermott & Murray (1981b), Yoder *et al* (1983), Yoder *et al* (1989) e Nicholson *et al* (1992).

Harrington *et al* (1981) analisaram a estabilidade deste sistema com simulações numéricas levando em conta a perturbação mútua entre os satélites, o achatamento real de Saturno e os seus oito maiores satélites. Neste trabalho, observa-se que mesmo integrando este sistema e considerando os fatores citados por cerca de 200 anos, não há significativas alterações no tipo de órbita ferradura de Jano e Epimeteu.

Dermott & Murray (1981a) analisaram os casos de satélites coorbitais via problema plano, circular, restrito de três corpos (planeta-satélite-partícula) e encontraram uma relação da largura de oscilação radial e a curva de velocidade zero da partícula. Aplicando os resultados ao caso Saturno-Jano-Epimeteu, Dermott & Murray (1981b) concluem que a razão das larguras radiais das órbitas e a razão das amplitudes de oscilação são iguais a razão das massas dos satélites.

Posteriormente Yoder *et al* (1983) demonstraram as diversas possibilidades de órbitas girino e ferradura para sistemas do tipo Saturno-Jano-Epimeteu, e dentre outras relações eles derivaram uma expressão aproximada que permite calcular a mínima aproximação dos satélites, incluindo para o caso de transição de girino para ferradura. Neste trabalho Yoder *et al* também analisaram outros efeitos perturbativos nas órbitas de Jano e Epimeteu, concluindo que o achatamento e os principais satélites de Saturno não acarretam alterações significativas na dinâmica destes satélites. Conclusão semelhante é vista também por Lissauer *et al* (1985), que por sua vez considera os efeitos de torques devido ao anel A de Saturno.

Resumindo os dados destes satélites, podemos dizer que "Jano é o sexto

satélite conhecido de Saturno. Foi descoberto por Audouin Dollfus em 1966 e recebeu o nome mitológico do deus das portas e das entradas, representado por duas faces viradas para direções opostas. Jano tem uma forma irregular com 196 por 192 por 150 quilômetros de diâmetro. Está intensamente crivado de crateras, tendo algumas com 30 quilômetros de diâmetro. Na **figura** (1.1), à esquerda, é mostrada a imagem de Jano obtida pela sonda Voyager 2 em 25 de Agosto de 1981. É a imagem disponível em maior resolução.

Epimeteu é o quinto satélite de Saturno. Foi descoberto por R. Walker em 1980. Pela mitologia Epimeteu era filho de Japeto e irmão de Prometeu e Atlas. Epimeteu significa vista posterior em grego. Tem uma forma irregular com uma dimensão de 144x108x98 quilômetros de diâmetro. É atravessado por diversos vales e sulcos, grandes e pequenos. Podem ser vistas na superfície diversas crateras com mais de 30 km. Epimeteu e Jano partilham a mesma órbita a 151.472 quilômetros do centro de Saturno ou 91.000 quilômetros acima dos topos das nuvens. Estão separados radialmente por cerca de 50 quilômetros. Quando estes dois satélites se aproximam um do outro trocam um pequeno momento e mudam de órbita; o satélite de dentro passa para fora e o de fora é movido para a posição de dentro. Esta troca ocorre cerca de uma vez em cada quatro anos. A **figura** (1.1) mostra à direita a imagem de mais alta resolução de Epimeteu obtida pelas sondas espaciais Voyager. A Voyager 1 obteve esta foto em 11 de Novembro de 1980. Nesta imagem, o anel F de Saturno projeta uma sombra sobre a superfície de Epimeteu ” Copyright 1999 Calvin J. Hamilton - <http://www.solarviews.com>.

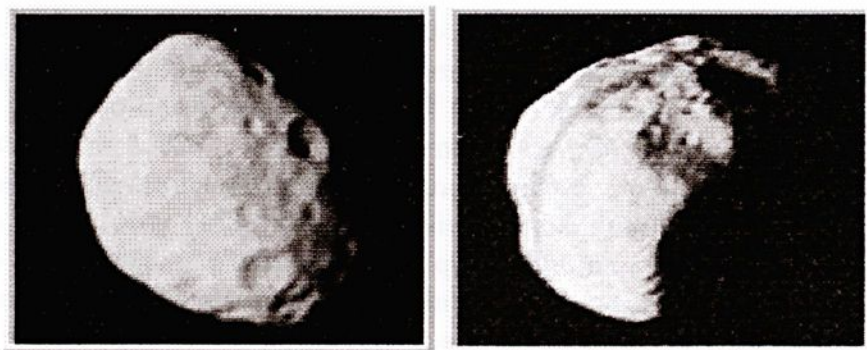


Figura 1.1: A imagem da esquerda é de Jano obtida pela sonda Voyager 2 em 25 de Agosto de 1981. É a imagem disponível em maior resolução. À direita vemos a imagem de mais alta resolução de Epimeteu obtida pelas sondas espaciais Voyager. A Voyager 1 obteve esta foto em 11 de Novembro de 1980. Nesta imagem, o anel F de Saturno projeta uma sombra sobre a superfície de Epimeteu. Copyright 1999 Calvin J. Hamilton

2 Desenvolvimento

Fizemos um estudo detalhado das análises apresentadas em Yoder *et al* (1989) e dos seus resultados que são definidos pelo parâmetro A , o qual gera o ângulo de mínima aproximação dos satélites ($\phi_{\min}$). Para isto usamos um modelo geral das equações do movimento, porém nesta primeira etapa não consideramos o efeito do achatamento indicado pelo parâmetro J_2 . Para todos os valores de A analisados, a configuração de coorbitais permanece mesmo após 80 aproximações sucessivas dos satélites.

Uma peculiaridade deste sistema é que se atribuirmos como condição inicial do sistema o seu valor de $A > 0.2$, os dois satélites perfazem órbitas do tipo girino librando apenas ao redor dos seus pontos de equilíbrio estáveis L_4 ou L_5 . Para $A < 0.2$ as órbitas são do tipo ferradura abarcando todos os pontos estáveis L_4 e L_5 e o ponto instável L_3 de ambos os satélites. Porém se $A = 0,2$, indicando que a máxima distância angular dos satélites ($\phi_{\max}$) é de 180° , ou seja o exato ponto L_3 , temos uma região de instabilidade, pois há uma indefinição entre órbitas ferraduras e girino. Para mapear a largura desta região, posteriormente fizemos diversas simulações nas proximidades de $\phi_{\max} = 180^\circ$, o resultado é que as regiões instáveis começam a aparecer quando $\phi_{\max} \approx 179,98$, de modo que podemos concluir que a separatriz entre as órbitas dos tipo girino e ferradura é consideravelmente estreita.

Conferimos o real efeito do achatamento em coorbitais, para isso fizemos diversos experimentos numéricos com o aumento gradual do achatamento em cada simulação, partindo de $J_2 = 1,628 \times 10^{-5}$ (0,1% do valor de J_2 para o planeta Saturno) até $J_2 = 1,628 \times 10^{-2}$ (achatamento real de Saturno). Observamos numericamente que o aumento deste parâmetro provoca o aumento da média do movimento médio, Roy (1988), o que implica também em um menor valor para o semi-eixo maior médio. Notamos porém que a mínima aproximação angular se mantém, de modo que a distância de mínima aproximação dos satélites diminui quanto mais achatado for o corpo principal. Além disso percebemos uma oscilação radial de curto período, sendo que, a amplitude desta oscilação bem como a excentricidade média da órbita de ambos os satélites aumenta com o valor de J_2 . E por fim, em uma análise analítica encontramos relações similares às obtidas por Yoder *et al* (1989), porém aqui consideramos a inclusão do parâmetro J_2 .

Em seguida realizamos ensaios variando a massa do satélite "Epimeteu" e observamos as conseqüências deste procedimento nos elementos deste sistema coorbital, entre eles: os pontos de equilíbrio e as amplitudes de oscilação radiais e angulares. Quanto maior for a massa de "Epimeteu" (M_3), mais os seus pontos de equilíbrio L_4 e L_5 (que passaremos a chamar respectivamente de L_{4S3} e L_{5S3}) aproximam-se angularmente, além de diminuir a oscilação radial e angular deste

satélite. O inverso ocorre para "Jano", ou seja, com o aumento da massa de "Epimeteu" os pontos de equilíbrio L_4 e L_5 de "Jano" (que passaremos a chamar respectivamente de L_{4S1} e L_{5S1}) distanciam-se angularmente mantendo uma separação angular de 60° dos respectivos L_{4S3} e L_{5S3} , além de aumentar a amplitude de oscilação radial e angular de "Jano".

Uma conclusão interessante é que conforme aumentamos M_3 mais o satélite "Epimeteu" tende a se estacionar nas proximidades de seu ponto de equilíbrio instável L_3 (que passaremos a chamar de L_{3S3}), de modo que L_{4S3} e L_{5S3} vão se aproximando de L_{3S3} . Com valores suficientemente grandes de M_3 , L_{4S3} e L_{5S3} convergem para L_{3S3} e "Epimeteu" passa a ficar estático no ponto onde outrora era L_{3S3} . Nesta configuração podemos dizer que estamos tratando do problema restrito de 3 corpos, com Saturno como corpo principal, "Epimeteu" o secundário e "Jano" a partícula.

Em uma outra etapa último período, variamos a massa do corpo principal, para encontrarmos a sua relevância na estabilidade deste satélites para um intervalo de tempo fixado. Constatamos que se a massa deste corpo for menor que um valor determinado pela mínima aproximação angular dos satélites, o satélites deixam de ser coorbitais durante o intervalo de tempo considerado.

Apresentamos como resultados inéditos:

- As equações e gráficos que determinam os pontos de equilíbrio para o problema de três corpos no caso não restrito, e sua concordância quando nos dirigimos ao caso restrito variando uma das massas.
- A inclusão gradual da intensidade do achatamento no sistema em simulações numéricas visando verificar o seu efeito no sistema coorbital. O efeito do achatamento na posição dos pontos de equilíbrio.
- O estudo para diferentes relações de massa dos satélites tendo em vista o seu efeito nos elementos dinâmicos do sistema e na posição dos pontos de equilíbrio dos satélites.
- Simulações numéricas para diferentes relações de massa planeta-satélites, visando encontrar casos limites desta relação que permite a manutenção estável do sistema coorbital por um certo período.

3 Resultados para o Sistema Saturno-Jano-Epimeteu

3.1 Introdução

O problema de 3 corpos no espaço, apesar de não possuir uma solução analítica, é muito famoso e estudado em Mecânica Celeste. No seu âmbito restrito, no qual é negligenciada a massa de um dos corpos denominada partícula, obtemos no sistema girante, 5 pontos de equilíbrio para a partícula, conhecidos como pontos Lagrangianos. Os pontos de equilíbrio são divididos em: estáveis se a partícula tender a permanecer librando na vizinhança do ponto uma vez deslocada ligeiramente dele ou instáveis no caso contrário. O problema restrito apresenta 3 pontos de equilíbrio instáveis (L_1 , L_2 e L_3), os quais se encontram todos alinhados com os dois corpos massivos. Além disso, se a razão de massa entre os dois corpos for menor que 0,04, então temos também dois pontos de equilíbrio estáveis (L_4 e L_5) que formam triângulos equiláteros com as duas massas (Blanco & McCuskey (1983)). Isto se refere exclusivamente ao caso restrito de três corpos, nossa motivação neste trabalho é a busca de relações e resultados que considerem as massas de todos os corpos envolvidos, em especial para o caso observado no sistema Saturno-Jano-Epimeteu, que talvez, ilustrem a relevância deste trabalho, tendo em vista que se referem a casos reais.

O primeiro passo nesta questão, que será desenvolvido neste capítulo, é encontrar as equações do movimento da dinâmica de um sistema coorbital Planeta-Satélite-Satélite, o qual posteriormente aplicaremos ao caso Saturno-Jano-Epimeteu, e faremos, a partir de então, algumas análises e algumas aproximações para o movimento destes satélites almejando encontrar expressões que nos mostrem as características dinâmicas deste sistema, tais como a mínima aproximação dos satélites e a amplitude de oscilação radial e angular e os pontos de equilíbrio.

Para realizar as análises analíticas deste problema mostrou-se mais conveniente trabalhar com as equações do movimento em coordenadas polares (r, θ), como feito na literatura em trabalhos como de Yoder *et al* (1983). Primeiramente encontramos expressões gerais na seção [3.2] através de uma Lagrangiana que está em uma função de um potencial U , o qual é desenvolvido na seção [3.3]. Esta Lagrangiana nos permite encontrar as equações do movimento mostradas na seção [3.4] para a integração do sistema para diversas condições iniciais na seção [3.7].

Este capítulo consiste em uma reprodução mais detalhada do estudo apresentado em Yoder *et al* (1981), acrescentando-se novas análises sobre os pontos de equilíbrio em satélites coorbitais para o caso não restrito na seção [3.5], em especial de como a massa do terceiro corpo influencia na posição dos pontos de equilíbrio.



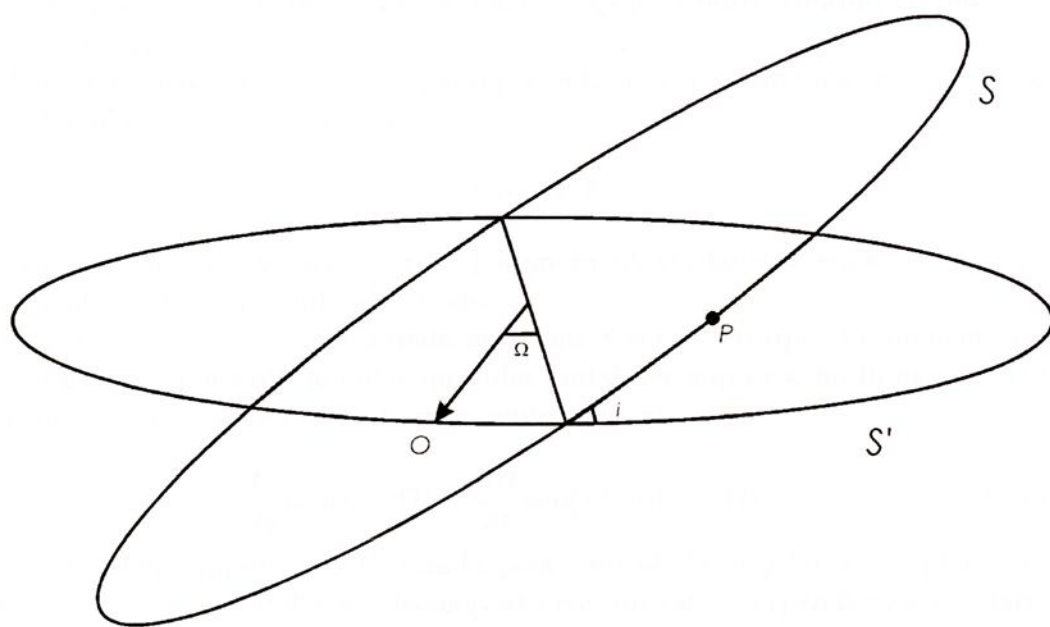


Figura 3.1: Partícula P no espaço: o plano S' representa um plano de referência, enquanto o plano S é o plano de órbita de P , sendo i a inclinação do plano da órbita e Ω a longitude do nodo ascendente.

3.2 Equações Gerais do Movimento

Inicialmente vamos supor um corpo qualquer no espaço, no intuito de considerarmos uma solução geral para a descrição de seu movimento. Em seguida restringiremos este problema para o caso plano e com um dos corpos de massa predominante em relação aos demais, no caso o planeta. Isto nos permite uma simplificação significativa no problema, que pode, dentro destas devidas restrições, ser aplicado no sistema real Saturno-Jano-Epimeteu nos resultados tendo em vista a baixa inclinação de Jano e Epimeteu ($< 0,34^\circ$) e da relação de massa entre os satélite e o planeta ($< 5,8 \times 10^{-9}$), como mostra Synnott *et al* (1981) e Yoder *et al* (1989). Lembramos que as massas entre os satélites, no caso Jano e Epimeteu, permanecem ao longo de todos os desenvolvimentos analíticos de mesma ordem.

Seguindo Brown & Shook (1964), faremos o equacionamento do movimento de uma partícula P que se move em uma órbita em dado plano S , comparado a um sistema inercial que contém um outro plano chamado S' , como é mostrado na **figura 3.1**.

Definimos a variável I como inclinação do plano de órbita S ao plano de referência S' , e Ω como a longitude do nodo ascendente em relação a uma linha O de referência no plano fixo.

Podemos decompor o momento angular nodal ($d\Omega/dt$) em dois vetores, sendo

um perpendicular ao plano S , valendo $d\Omega/dt \cos(I)$ e outro contido no plano S como $d\Omega/dt \sin(I)$.

Definamos agora a variável γ , que representa a posição angular angular P ao longo dos planos de S e S' como:

$$\gamma = \Omega + \omega + f$$

sendo ω o argumento do pericentro e f a anomalia verdadeira, então $\gamma - \Omega$ será a longitude de P com a linha dos nodos.

Para P se manter na órbita dada no plano S então o torque do momento da inclinação e do momento angular da linha nodal decompostos na linha que une o centro de órbita ao ponto P deve se anular, ou seja:

$$\frac{dI}{dt} \sin(\gamma - \Omega) = \frac{d\Omega}{dt} \sin(I) \cos(\gamma - \Omega) \quad (3.1)$$

A velocidade angular de P é dada pela velocidade angular P no plano S' , somado a velocidade de $d\Omega/dt$, decomposta em um vetor perpendicular ao plano S' , ou seja:

$$\frac{d}{dt}(\gamma - \Omega) + \frac{d\Omega}{dt} \cos(I) = \frac{d\gamma}{dt} - \Gamma \left(\frac{d\Omega}{dt} \right) \quad (3.2)$$

sendo:

$$\Gamma = (1 - \cos(I)) \quad (3.3)$$

Seja r a distância da partícula P ao sistema de referência, e no plano da órbita de S' a velocidade ao quadrado será:

$$|v|^2 = \frac{2T}{m'} = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\gamma}{dt} - \Gamma \frac{d\Omega}{dt} \right)^2 \quad (3.4)$$

sendo m' a massa de P' e T a energia cinética do sistema.

A energia cinética será, portanto:

$$T = \frac{1}{2} m' \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\gamma}{dt} - \Gamma \frac{d\Omega}{dt} \right)^2 \right] \quad (3.5)$$

definindo:

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} - \Gamma \frac{d\Omega}{dt} \quad (3.6)$$

e utilizando a formulação Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = T - V \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \quad (3.7)$$

sendo q uma das coordenadas generalizadas do sistema e:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\nu}{dt} \right)^2 \right] - U \quad (3.8)$$

e U é a energia potencial do sistema por unidade de massa m' , temos então 4 graus de liberdade: r, γ, Ω e Γ , e temos como equações do movimento, aplicando a formulação Lagrangiana nestas variáveis:

$$\ddot{r} - r \dot{\nu}^2 = - \frac{\partial U}{\partial r} \quad (3.9)$$

$$\frac{d}{dt}(r^2 \dot{\nu}) = - \frac{\partial U}{\partial \gamma} \quad (3.10)$$

$$\frac{d}{dt}(\Gamma r^2 \dot{\nu}) = \frac{\partial U}{\partial \Omega} \quad (3.11)$$

$$r^2 \dot{\nu} \dot{\Omega} = - \frac{\partial U}{\partial \Gamma} \quad (3.12)$$

Se nos limitarmos ao caso plano, ao qual se refere o sistema Saturno-Jano-Epimeteu, teremos $\Gamma(I) = 1$; e $\Omega = 0$ e chamando γ de θ ficamos com:

$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = - \frac{\partial U}{\partial r} \quad (3.13)$$

$$\frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = - \frac{\partial U}{\partial \theta} \quad (3.14)$$

o próximo passo agora é encontrar o potencial U para o caso de satélites coorbitais, que faremos na próxima seção.

3.3 O potencial U

Consideremos uma massa M_s como a massa de um planeta, que adotaremos como Saturno, e dois satélites coorbitais de massa M_1 e M_3 que adotaremos como as massas respectivas de Jano e Epimeteu. Definimos também um referencial inercial, onde $\vec{R}$ é o raio vetor de Saturno, $\vec{R}_1$ é o raio vetor de Jano e $\vec{R}_3$ é o raio vetor de Epimeteu. Declaremos como $\vec{r}_1$ o raio vetor de Jano em relação a Saturno, $\vec{r}_3$ o raio vetor de Epimeteu em relação a Saturno, $\vec{\Delta}$ o raio vetor de Epimeteu em relação a Jano, e $\mathcal{G}$ a constante de gravitação universal. Isto pode ser visualizado na **figura** (3.2). Diante disto temos como equações do movimento para os três corpos no referencial adotado:

$$M_s \ddot{\vec{R}}_s = \mathcal{G} \left\{ \frac{M_s M_1}{r_1^3} \vec{r}_1 + \frac{M_s M_3}{r_3^3} \vec{r}_3 \right\} \quad (3.15)$$

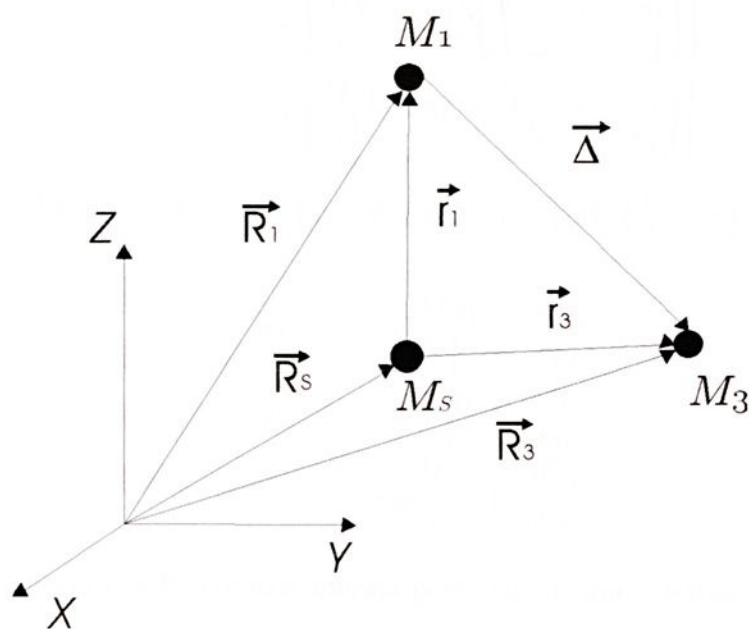


Figura 3.2: Três massas M_s , M_1 e M_3 , no espaço em relação a um referencial inercial X , Y , Z , e seus respectivos raios vetores $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_3$.

$$M_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 = \mathcal{G} \left\{ \frac{M_1 M_3}{\Delta^3} \vec{\Delta} - \frac{M_s M_1}{r_1^3} \vec{r}_1 \right\} \quad (3.16)$$

$$M_3 \ddot{\mathbf{R}}_3 = \mathcal{G} \left\{ -\frac{M_1 M_3}{\Delta^3} \vec{\Delta} - \frac{M_s M_3}{r_3^3} \vec{r}_3 \right\} \quad (3.17)$$

Subtraindo as equações (3.16) e (3.17) de (3.15) obtemos os movimentos dos satélites em relação a Saturno:

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathcal{G} \left\{ -\left(\frac{M_s + M_1}{r_1^2} \right) \vec{u}_1 + \left(\frac{M_3}{\Delta^2} \vec{u}_\Delta - \frac{M_3}{r_3^2} \vec{u}_3 \right) \right\} \quad (3.18)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_3 = \mathcal{G} \left\{ -\left(\frac{M_s + M_3}{r_3^2} \right) \vec{u}_3 - \left(\frac{M_1}{\Delta^2} \vec{u}_\Delta + \frac{M_1}{r_1^2} \vec{u}_1 \right) \right\} \quad (3.19)$$

onde $\vec{u}_1$, $\vec{u}_3$ e $\vec{u}_\Delta$ são os vetores unitários de $\vec{r}_1$, $\vec{r}_3$ e $\vec{\Delta}$, respectivamente. Considerando $M = M_s + M_1$ temos que a equação de movimento de Jano no sistema de coordenadas cartesiano (x, y, z) centrado em Saturno será dado por:

$$\ddot{x}_1 = -\mathcal{G} \left[\frac{M x_1}{r_1^3} - M_3 \left(\frac{x_3 - x_1}{\Delta^3} - \frac{x_3}{r_3^3} \right) \right] \quad (3.20)$$

$$\ddot{y}_1 = -\mathcal{G} \left[\frac{My_1}{r_1^3} - M_3 \left(\frac{y_3 - y_1}{\Delta^3} - \frac{y_3}{r_3^3} \right) \right] \quad (3.21)$$

$$\ddot{z}_1 = -\mathcal{G} \left[\frac{Mz_1}{r_1^3} - M_3 \left(\frac{z_3 - z_1}{\Delta^3} - \frac{z_3}{r_3^3} \right) \right] \quad (3.22)$$

Vamos definir uma função F_{13} tal que: $F_{13} = \mathcal{G}M_3 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3}{r_3^3} \right)$, então:

$$\ddot{x}_1 = -\mathcal{G} \frac{Mx_1}{r_1^3} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_1} \quad (3.23)$$

$$\ddot{y}_1 = -\mathcal{G} \frac{My_1}{r_1^3} + \frac{\partial F_{13}}{\partial y_1} \quad (3.24)$$

$$\ddot{z}_1 = -\mathcal{G} \frac{Mz_1}{r_1^3} + \frac{\partial F_{13}}{\partial z_1} \quad (3.25)$$

Se considerarmos U_1 como a energia potencial de Jano; então: $F_{13} = -\frac{dU_1}{dr_1} \mathbf{u}_1$:

$$U_1 = -\mathcal{G} \frac{M}{r_1} - F_{13} \quad (3.26)$$

e simetricamente, o potencial de Epimeteu U_3 é:

$$U_3 = -\mathcal{G} \frac{M'}{r_3} - F_{31} \quad (3.27)$$

onde:

$$M' = M_s + M_3 \quad (3.28)$$

$$F_{31} = \mathcal{G}M_1 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\vec{r}_3 \cdot \vec{r}_1}{r_1^3} \right) \quad (3.29)$$

E nesta parte conseguimos determinar o U para o sistema de satélites coorbitais, agora podemos obter as equações do movimento.

3.4 Equações do movimento

Substituindo U_1 da equação (3.26) na variável U das equações (3.13) e (3.14) obtemos para Jano

$$\frac{d}{dt}(r_1^2 \dot{\theta}_1) = \frac{\partial F_{13}}{\partial \theta_1} \quad (3.30)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} r_1 - r_1 \left(\frac{d}{dt} \theta_1 \right)^2 = -\frac{\mathcal{G}M}{r_1^2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial r_1} \quad (3.31)$$

e podemos reescrever:

$$F_{13} = \mathcal{G}M_3 \left[\frac{1}{\Delta} - \frac{r_1 \cos(\theta_1 - \theta_3)}{r_3^2} \right]; \quad (3.32)$$

$$\Delta = \sqrt{r_1^2 + r_3^2 - 2r_1r_3 \cos(\theta_1 - \theta_3)}; \quad (3.33)$$

e simetricamente, para Epimeteu:

$$\frac{d}{dt}(r_3^2 \dot{\theta}_3) = \frac{\partial F_{31}}{\partial \theta_3} \quad (3.34)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}r_3 - r_3 \left(\frac{d}{dt}\theta_3 \right)^2 = -\frac{\mathcal{G}M'}{r_3^2} + \frac{\partial F_{31}}{\partial r_3} \quad (3.35)$$

e podemos reescrever para Epimeteu:

$$F_{31} = \mathcal{G}M_1 \left[\frac{1}{\Delta} - \frac{r_3 \cos(\theta_3 - \theta_1)}{r_1^2} \right]; \quad (3.36)$$

Desmembrando as expressões (3.30) e (3.31) encontramos as equações do movimento para Jano:

$$\ddot{r}_1 = r_1 \dot{\theta}_1^2 - \mathcal{G} \frac{(M_S + M_1)}{r_1^2} \quad (3.37)$$

$$+ \mathcal{G}M_3 \left[-\Delta^{-3}r_1 + \Delta^{-3}r_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) - \frac{\cos(\theta_1 - \theta_3)}{r_3^2} \right]$$

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{2\dot{r}_1\dot{\theta}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{G}M_3r_3}{r_1} \sin(\theta_1 - \theta_3) \left(-\frac{1}{\Delta^3} + \frac{1}{r_3^3} \right) \quad (3.38)$$

e similarmente para Epimeteu, através das equações (3.34) e (3.35):

$$\ddot{r}_3 = r_3 \dot{\theta}_3^2 - \mathcal{G} \frac{(M_S + M_3)}{r_3^2} \quad (3.39)$$

$$+ \mathcal{G}M_1 \left[-\Delta^{-3}r_3 + \Delta^{-3}r_1 \cos(\theta_3 - \theta_1) - \frac{\cos(\theta_3 - \theta_1)}{r_1^2} \right]$$

$$\ddot{\theta}_3 = -\frac{2\dot{r}_3\dot{\theta}_3}{r_3} + \frac{\mathcal{G}M_1r_1}{r_3} \sin(\theta_3 - \theta_1) \left(-\frac{1}{\Delta^3} + \frac{1}{r_1^3} \right) \quad (3.40)$$

As equações (3.37), (3.38), (3.39) e (3.40) são as equações que descrevem o movimento de um par de satélites coorbitais coplanares de massas comparáveis que orbitam um planeta central, estão dispostas em coordenadas polares r e θ . Estas equações podem ser integradas numericamente e assim fornecer uma descrição do movimento de Jano e Epimeteu em relação a Saturno, de acordo com as condições iniciais impostas. Mostraremos mais adiante que estas condições iniciais são determinadas através da mínima aproximação angular dos satélites.

3.5 Os Pontos de Equilíbrio

Nesta seção buscamos encontrar os pontos de equilíbrio para satélites coorbitais de massas comparáveis. Por pontos de equilíbrio entendemos como, a posição na qual podemos, hipoteticamente, colocar os satélites e eles permanecerem nele ao longo do tempo em um sistema referência girante tendo o planeta como ponto fixo.

Os pontos de equilíbrio tem como característica o potencial ter um valor extremo de mínimo ou máximo, que implica neste ponto a força atuante ser nula. O que esperamos para condição dos satélites estarem em seus respectivos pontos de equilíbrio é para cada um dos satélites: $\ddot{r}_i = 0$, $\dot{r}_i = 0$ e $\ddot{\theta}_i = 0$. E além disso, nestas condições, o valor para $\dot{\theta}_i$ representa a velocidade angular do sistema de referência girante, e se os satélites estão estáticos em relação a este sistema de referência, então $\theta_1 = \theta_3$.

No momento que as equações que determinam as acelerações no movimento de cada um dos satélites forem nulas esperamos encontrar os pontos de equilíbrio, ou seja, quando um satélite não mais influir no movimento do outro. Diante disto, comparando estas informações com as equações (3.38) e (3.40), podemos dizer que estamos tratando de um ponto de equilíbrio quando:

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{2\dot{r}_1\dot{\theta}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{G}M_3r_3}{r_1} \sin(\theta_1 - \theta_3) \left(-\frac{1}{\Delta^3} + \frac{1}{r_3^3} \right) = 0 \quad (3.41)$$

$$\ddot{\theta}_3 = -\frac{2\dot{r}_3\dot{\theta}_3}{r_3} + \frac{\mathcal{G}M_1r_1}{r_3} \sin(\theta_3 - \theta_1) \left(-\frac{1}{\Delta^3} + \frac{1}{r_1^3} \right) = 0 \quad (3.42)$$

Como as velocidades radiais devem ser nulas nos ponto de equilíbrio ($\dot{r}_i = 0$), podemos dizer que:

$$\frac{\mathcal{G}M_3r_3}{r_1} \sin(\theta_1 - \theta_3) \left(-\frac{1}{\Delta^3} + \frac{1}{r_3^3} \right) = 0 \quad (3.43)$$

$$\frac{\mathcal{G}M_1r_1}{r_3} \sin(\theta_3 - \theta_1) \left(-\frac{1}{\Delta^3} + \frac{1}{r_1^3} \right) = 0 \quad (3.44)$$

Chamando $\theta_1 - \theta_3$ de ϕ , e lembrando que $\Delta = \sqrt{r_1^2 + r_3^2 - 2r_1r_3 \cos(\theta_1 - \theta_3)}$, temos:

$$\sin(\phi) \left(-\frac{1}{\Delta^3} + \frac{1}{r_3^3} \right) = 0 \quad (3.45)$$

$$\sin(\phi) \left(-\frac{1}{\Delta^3} + \frac{1}{r_1^3} \right) = 0 \quad (3.46)$$

Uma possibilidade de satisfazer simultaneamente as equações acima, e assim obter o primeiro ponto de equilíbrio, é igualar $\sin \phi = 0$. Para tanto podemos ter duas soluções para ϕ :

$$\phi' = 0^\circ \quad (3.47)$$

$$\phi'' = 180^\circ \quad (3.48)$$

Tomando o valor ϕ' , que substituindo nas equações (3.37) e (3.39):

$$\ddot{r}_1 = r_1 \dot{\theta}_1^2 - \mathcal{G} \frac{(M_S + M_1)}{r_1^2} \quad (3.49)$$

$$+ \mathcal{G} M_3 \left[-\Delta^{-3} r_1 + \Delta^{-3} r_3 - \frac{1}{r_3^2} \right]$$

$$\ddot{r}_3 = r_3 \dot{\theta}_3^2 - \mathcal{G} \frac{(M_S + M_3)}{r_3^2} \quad (3.50)$$

$$+ \mathcal{G} M_1 \left[-\Delta^{-3} r_3 + \Delta^{-3} r_1 - \frac{1}{r_1^2} \right]$$

Nas condições de equilíbrio, $\dot{\phi} = 0$, logo $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_3$, que passaremos a denominar $\dot{\theta}$. O valor de Δ é definido como $\sqrt{r_1^2 + r_3^2 - 2r_1 r_3 \cos(\phi)}$, que em $\phi = 0$ fica $\sqrt{r_1^2 + r_3^2 - 2r_1 r_3}$. As equações (3.49) e (3.50) então ficam:

$$\ddot{r}_1 = \dot{\theta}^2 r_1 - \mathcal{G} \frac{(M_S + M_1)}{r_1^2} \quad (3.51)$$

$$+ \mathcal{G} M_3 \left[-\left(r_1^2 + r_3^2 - 2r_1 r_3\right)^{-3/2} r_1 + \left(r_1^2 + r_3^2 - 2r_1 r_3\right)^{-3/2} r_3 - \frac{1}{r_3^2} \right]$$

$$\ddot{r}_3 = \dot{\theta}^2 r_3 - \mathcal{G} \frac{(M_S + M_3)}{r_3^2} \quad (3.52)$$

$$+ \mathcal{G} M_1 \left[-\left(r_1^2 + r_3^2 - 2r_1 r_3\right)^{-3/2} r_3 + \left(r_1^2 + r_3^2 - 2r_1 r_3\right)^{-3/2} r_1 - \frac{1}{r_1^2} \right]$$

ou simplificando:

$$\ddot{r}_1 = \dot{\theta}^2 r_1 - \mathcal{G} \frac{(M_S + M_1)}{r_1^2} + \mathcal{G} M_3 \left[\frac{1}{(r_3 - r_1)^2} - \frac{1}{r_3^2} \right] \quad (3.53)$$

$$\ddot{r}_3 = \dot{\theta}^2 r_3 - \mathcal{G} \frac{(M_S + M_3)}{r_3^2} + \mathcal{G} M_1 \left[-\frac{1}{(r_3 - r_1)^2} - \frac{1}{r_1^2} \right] \quad (3.54)$$

para $r_3 > r_1$, ou as equações (3.51) e (3.52) tornam-se:

$$\ddot{r}_1 = \dot{\theta}^2 r_1 - \mathcal{G} \frac{(M_S + M_1)}{r_1^2} + \mathcal{G} M_3 \left[-\frac{1}{(r_3 - r_1)^2} - \frac{1}{r_3^2} \right] \quad (3.55)$$

$$\ddot{r}_3 = \dot{\theta}^2 r_3 - \mathcal{G} \frac{(M_S + M_3)}{r_3^2} + \mathcal{G} M_1 \left[\frac{1}{(r_3 - r_1)^2} - \frac{1}{r_1^2} \right] \quad (3.56)$$

se $r_1 > r_3$

Pelas condições de ponto de equilíbrio sabemos que $\ddot{r}_1 = \ddot{r}_3 = 0$, logo as equações (3.53) e (3.54) que são válidas somente para $r_3 > r_1$ ficam:

$$0 = \dot{\theta}^2 r_1 - \mathcal{G} \frac{(M_S + M_1)}{r_1^2} + \mathcal{G} M_3 \left[\frac{1}{(r_3 - r_1)^2} - \frac{1}{r_3^2} \right] \quad (3.57)$$

$$0 = \dot{\theta}^2 r_3 - \mathcal{G} \frac{(M_S + M_3)}{r_3^2} + \mathcal{G} M_1 \left[-\frac{1}{(r_3 - r_1)^2} - \frac{1}{r_1^2} \right] \quad (3.58)$$

e as equações (3.55) e (3.56) que são referentes a $r_1 > r_3$:

$$0 = \dot{\theta}^2 r_1 - \mathcal{G} \frac{(M_S + M_1)}{r_1^2} + \mathcal{G} M_3 \left[-\frac{1}{(r_3 - r_1)^2} - \frac{1}{r_3^2} \right] \quad (3.59)$$

$$0 = \dot{\theta}^2 r_3 - \mathcal{G} \frac{(M_S + M_3)}{r_3^2} + \mathcal{G} M_1 \left[\frac{1}{(r_3 - r_1)^2} - \frac{1}{r_1^2} \right] \quad (3.60)$$

Igualando as equações (3.57) e (3.58) encontramos para $r_3 > r_1$:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 r_1 - \mathcal{G} \frac{(M_S + M_1)}{r_1^2} + \mathcal{G} M_3 \left[\frac{1}{(r_3 - r_1)^2} - \frac{1}{r_3^2} \right] &= \dot{\theta}^2 r_3 - \mathcal{G} \frac{(M_S + M_3)}{r_3^2} \\ &+ \mathcal{G} M_1 \left[-\frac{1}{(r_3 - r_1)^2} - \frac{1}{r_1^2} \right] \end{aligned} \quad (3.61)$$

ou ainda:

$$\dot{\theta}^2 (r_3 - r_1) + \mathcal{G} \frac{M_S}{r_1^2} - \mathcal{G} \frac{M_S}{r_3^2} - \mathcal{G} (M_1 + M_3) \frac{1}{(r_3 - r_1)^2} = 0 \quad (3.62)$$

Igualando as equações (3.59) e (3.60) encontramos para $r_1 > r_3$:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 r_1 - \mathcal{G} \frac{(M_S + M_1)}{r_1^2} + \mathcal{G} M_3 \left[-\frac{1}{(r_3 - r_1)^2} - \frac{1}{r_3^2} \right] &= \dot{\theta}^2 r_3 - \mathcal{G} \frac{(M_S + M_3)}{r_3^2} \\ &+ \mathcal{G} M_1 \left[\frac{1}{(r_3 - r_1)^2} - \frac{1}{r_1^2} \right] \end{aligned} \quad (3.63)$$

ou ainda:

$$\dot{\theta}^2(r_1 - r_3) - \mathcal{G} \frac{M_S}{r_1^2} + \mathcal{G} \frac{M_S}{r_3^2} - \mathcal{G}(M_1 + M_3) \frac{1}{(r_3 - r_1)^2} = 0 \quad (3.64)$$

A solução das equações (3.62) e (3.64) em r_1 e r_3 representa a posição dos pontos de equilíbrio, para um par de satélites coorbitais de massa M_1 e M_3 que orbitam um corpo central de massa M_S . Estes pontos são colineares e os raios vetores que une estes pontos ao corpo central estão defasados de 0 graus entre si.

Ainda na equação (3.64), se adotarmos M_3 como nulo, temos:

$$\dot{\theta}^2(r_1 - r_3) - \mathcal{G} \frac{M_S}{r_1^2} + \mathcal{G} \frac{M_S}{r_3^2} - \mathcal{G} M_1 \frac{1}{(r_3 - r_1)^2} = 0 \quad (3.65)$$

Como M_3 aqui é nulo, podemos dizer que M_1 se relaciona a M_S através do problema de dois corpos, de maneira que:

$$r_1^3 \dot{\theta}^2 = \mathcal{G}(M_S + M_1) \quad (3.66)$$

E normalizando $r_1 = 1$ e $\dot{\theta} = 1$, assim encontramos na expressão (3.65):

$$\mathcal{G}(M_S + M_1)(1 - r_3) - \mathcal{G} M_S + \mathcal{G} \frac{M_S}{r_3^2} - \mathcal{G} M_1 \frac{1}{(r_3 - 1)^2} = 0 \quad (3.67)$$

Como adotamos que $r_1 > r_3$, então teremos $\Delta = 1 - r_3$, o que torna a equação (3.67) como:

$$\mathcal{G}(M_S + M_1)\Delta - \mathcal{G} M_S + \mathcal{G} \frac{M_S}{r_3^2} - \mathcal{G} \Delta^{-2} M_1 = 0 \quad (3.68)$$

que pode ser reescrita como:

$$\mathcal{G} M_S \left(-\frac{1}{(1 - \Delta)^2} + 1 - \Delta \right) - \mathcal{G} M_1 \left(-\frac{1}{\Delta^2} + \Delta \right) = 0 \quad (3.69)$$

esta é a equação encontrada em Murray & Dermott (1999) para o ponto Lagrangiano L_1 no caso restrito.

Ainda supondo que M_3 , mas desta vez com $r_3 > r_1$, então tomamos a equação (3.62):

$$\dot{\theta}^2(r_3 - r_1) + \mathcal{G} \frac{M_S}{r_1^2} - \mathcal{G} \frac{M_S}{r_3^2} - \mathcal{G} M_1 \frac{1}{(r_3 - r_1)^2} = 0 \quad (3.70)$$

Normalizando novamente que $r_1 = 1$ e $\dot{\theta} = 1$, o que implica se negligenciarmos M_3 que $r_1^3 \dot{\theta}^2 = \mathcal{G}(M_S + M_1) = 1$; e definindo $\Delta = r_3 - 1$, temos que a equação (3.70) fica:

$$\mathcal{G}(M_S + M_1)\Delta + \mathcal{G} M_S - \mathcal{G} \frac{M_S}{(1 + \Delta)^2} - \mathcal{G} \Delta^{-2} M_1 = 0 \quad (3.71)$$

que pode ser reescrita como:

$$\mathcal{G}M_S \left(-\frac{1}{(1+\Delta)^2} + 1 + \Delta \right) + \mathcal{G}M_1 \left(-\frac{1}{\Delta^2} + \Delta \right) = 0 \quad (3.72)$$

esta é a equação encontrada em Murray & Dermott (1999) para o ponto Lagrangiano L_2 no caso restrito.

Tomando novamente a equação (3.64). Mas desta vez para $M_1 = M_3$ que denotaremos por M_{13} , temos que o ponto L_1 é dado por:

$$\dot{\theta}^2(r_1 - r_3) - \mathcal{G}\frac{M_S}{r_1^2} + \mathcal{G}\frac{M_S}{r_3^2} - 2\mathcal{G}M_{13}\frac{1}{(r_3 - r_1)^2} = 0 \quad (3.73)$$

e para o ponto L_2 tomamos a equação (3.62) e obtemos:

$$\dot{\theta}^2(r_3 - r_1) + \mathcal{G}\frac{M_S}{r_1^2} - \mathcal{G}\frac{M_S}{r_3^2} - 2\mathcal{G}M_{13}\frac{1}{(r_3 - r_1)^2} = 0 \quad (3.74)$$

As equações (3.73) e (3.74) nos mostram a posição dos pontos de equilíbrio instáveis L_1 e L_2 para um par de satélites de massa comparáveis. Numericamente, se adotarmos $r_1 = 1$, vemos que os pontos L_1 e L_2 de M_1 tendem a se distanciar cada vez mais da massa M_1 , conforme consideramos o aumento da massa de M_3 , isto é mostrado nas **figuras** (3.3) e (3.4), para um sistema de massas da ordem de Saturno e Epimeteu.

Adotando agora para a solução do sistema dado pelas equações (3.45) e (3.48) o valor de $\phi'' = 180^\circ$, implicando que $\Delta = r_1 + r_3$, temos que as equações (3.37) e (3.39) ficam:

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 = & r_1 \dot{\theta}_1^2 - \mathcal{G}\frac{(M_S + M_1)}{r_1^2} \\ & + \mathcal{G}M_3 \left[- (r_1 + r_3)^{-3} r_1 - (r_1 + r_3)^{-3} r_3 + \frac{1}{r_3^2} \right] \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} \ddot{r}_3 = & r_3 \dot{\theta}_3^2 - \mathcal{G}\frac{(M_S + M_3)}{r_3^2} \\ & + \mathcal{G}M_1 \left[- (r_1 + r_3)^{-3} r_3 - (r_1 + r_3)^{-3} r_1 + \frac{1}{r_1^2} \right] \end{aligned} \quad (3.76)$$

Como estamos tratando de um ponto de equilíbrio, então $\ddot{r}_1 = \ddot{r}_3 = 0$, logo as equações acima ficam se adotarmos $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_3 = \dot{\theta}$:

$$\begin{aligned} 0 = & r_1 \dot{\theta}^2 - \mathcal{G}\frac{(M_S + M_1)}{r_1^2} \\ & + \mathcal{G}M_3 \left[- (r_1 + r_3)^{-3} r_1 - (r_1 + r_3)^{-3} r_3 + \frac{1}{r_3^2} \right] \end{aligned} \quad (3.77)$$

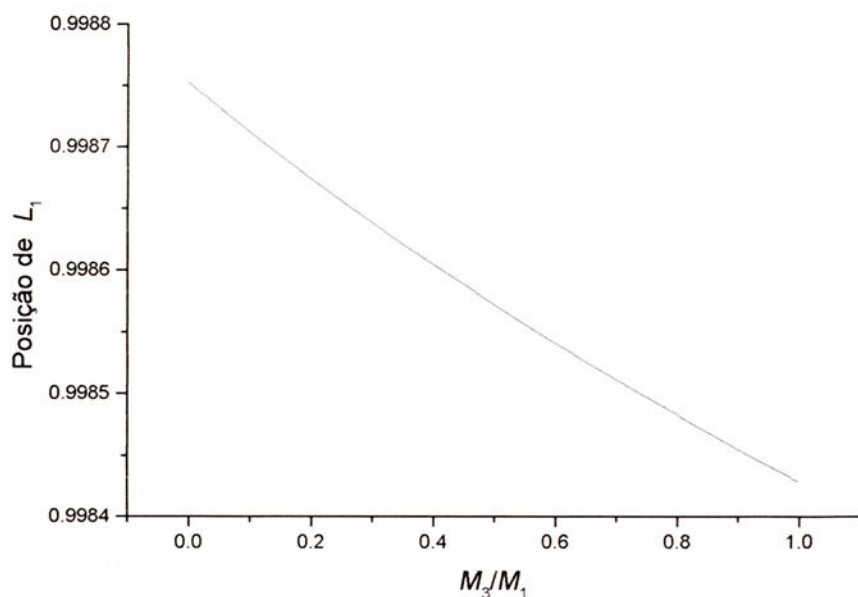


Figura 3.3: Posição do ponto lagrangiano L_1 em relação ao planeta, em função da relação de massa entre os satélites. Consideramos a distância entre o planeta e o satélite principal como unitária, o gráfico mostra que quanto maior for a relação de massa, culminando para massas iguais ($M_3/M_1 = 1$), mais este ponto de equilíbrio se aproxima do satélite principal. Para $M_3/M_1 = 0$, temos a localização de L_1 no caso restrito.

$$0 = r_3 \dot{\theta}^2 - \mathcal{G} \frac{(M_S + M_3)}{r_3^2} + \mathcal{G} M_1 \left[- (r_1 + r_3)^{-3} r_3 - (r_1 + r_3)^{-3} r_1 + \frac{1}{r_1^2} \right] \quad (3.78)$$

ou ainda:

$$0 = r_1 \dot{\theta}^2 - \mathcal{G} \frac{(M_S + M_1)}{r_1^2} + \mathcal{G} M_3 \left[- (r_1 + r_3)^{-2} + \frac{1}{r_3^2} \right] \quad (3.79)$$

$$0 = r_3 \dot{\theta}^2 - \mathcal{G} \frac{(M_S + M_3)}{r_3^2} + \mathcal{G} M_1 \left[- (r_1 + r_3)^{-2} + \frac{1}{r_1^2} \right] \quad (3.80)$$

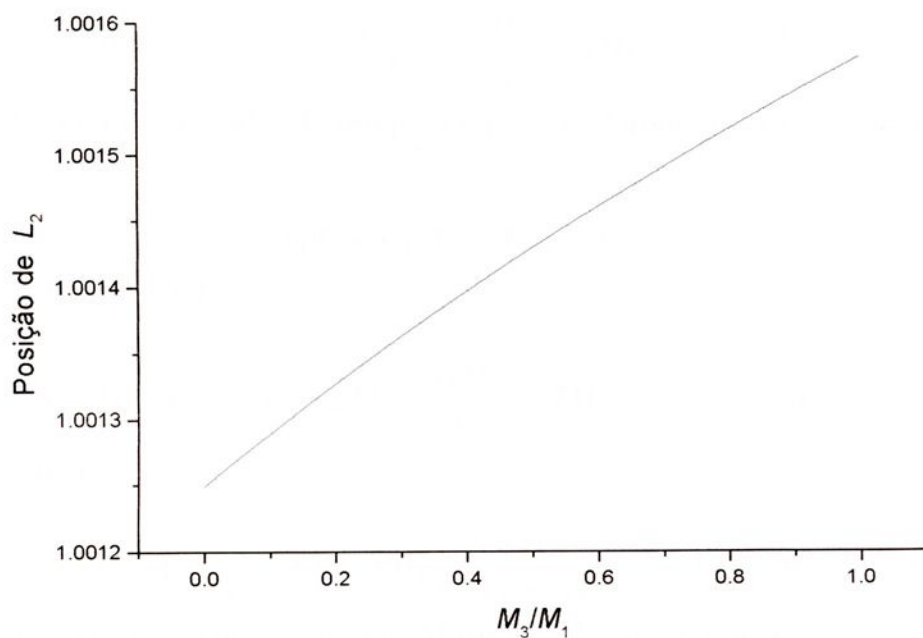


Figura 3.4: Posição do ponto lagrangiano L_2 em relação ao planeta, em função da relação de massa entre os satélites. Consideramos a distância entre o planeta e o satélite principal como unitária, o gráfico mostra que quanto maior for a relação de massa, culminando para massas iguais ($M_3/M_1 = 1$), mais este ponto de equilíbrio se aproxima do satélite principal. Para $M_3/M_1 = 0$, temos a localização de L_2 no caso restrito.

Somando as equações (3.79) e (3.80), e simplificando:

$$0 = \dot{\theta}^2 (r_1 + r_3) - \frac{\mathcal{G}M_S}{r_1^2} - \frac{\mathcal{G}M_S}{r_3^2} - \mathcal{G}(M_1 + M_3)(r_1 + r_3)^{-2} \quad (3.81)$$

cujas soluções representam a posição dos pontos equilíbrio quando os satélites estão opostos.

Se considerarmos $M_3 = 0$, o que significa que estamos tratando do caso restrito, então:

$$0 = \dot{\theta}^2 (r_1 + r_3) - \frac{\mathcal{G}M_S}{r_1^2} - \frac{\mathcal{G}M_S}{r_3^2} - \mathcal{G}M_1 (r_1 + r_3)^{-2} \quad (3.82)$$

e normalizando as unidades de tempo e espaço de forma que $r_1 = 1$ e $\dot{\theta} = 1$, temos:

$$r_1^3 \dot{\theta}^2 = \mathcal{G}(M_S + M_1) = 1 \quad (3.83)$$

então a equação (3.82):

$$(1 + r_3) \mathcal{G}(M_S + M_1) - \mathcal{G}M_S - \frac{\mathcal{G}M_S}{r_3^2} - \mathcal{G}M_1 (1 + r_3)^{-2} = 0 \quad (3.84)$$

ou reescrevendo:

$$\mathcal{G}M_S \left(-\frac{1}{r_3^2} + r_3 \right) + \mathcal{G}M_1 \left(-\frac{1}{(1 + r_3)^2} + 1 + r_3 \right) = 0 \quad (3.85)$$

Esta é a equação encontrada em Murray & Dermott (1999) para o ponto Lagrangiano L_3 no caso restrito.

Observamos uma sensível variação da localização do ponto L_3 em um sistema Saturno-Jano, com o aumento da relação de massa entre os satélites. O raio vetor de Saturno ao ponto L_3 tende a aumentar em módulo com o aumento da relação de massa entre os satélites, de modo a culminar para massas iguais, em módulo, ao mesmo valor do raio vetor de Saturno - Jano.

O que as equações (3.69), (3.72) e (3.85) nos mostram é que as equações que determinam os pontos de equilíbrio instáveis para o caso não restrito convergem para o caso restrito quando uma das massas é desprezíveis.

Retornando as equações (3.45) e (3.46), uma outra possibilidade de solução seria:

$$\left(-\frac{1}{\Delta^3} + \frac{1}{r_1^3} \right) = 0 \quad (3.86)$$

$$\left(-\frac{1}{\Delta^3} + \frac{1}{r_3^3} \right) = 0 \quad (3.87)$$

Esta solução só é possível se adotarmos $\Delta = r_1 = r_3$. E podemos reescrever a equação (3.86) como:

$$\frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_1^2 - 2r_1^2 \cos(\phi)}}^3 \quad (3.88)$$

e encontramos, isolando $\cos \phi$:

$$\cos \phi = \frac{1}{2} \quad (3.89)$$

isolando ϕ :

$$\phi = 60^\circ \quad (3.90)$$

E os satélites devem estar a mesma distância do planeta, defasados de 60 graus. Isto nos lembra os pontos de equilíbrio Lagrangianos L_4 e L_5 do problema de três corpos restrito, onde a partícula forma um triângulo equilátero o corpo primário e secundário. Substituindo o valor $\phi = 60$, $r_1 = r_3 = 1$ nas equações (3.37) e (3.39), temos:

$$\ddot{r}_1 = \dot{\theta}_1^2 - \mathcal{G}(M_S + M_1) - \mathcal{G}M_3 \quad (3.91)$$

$$\ddot{r}_3 = \dot{\theta}_3^2 - \mathcal{G}(M_S + M_3) - \mathcal{G}M_1 \quad (3.92)$$

No ponto de equilíbrio, devemos ter que $\ddot{r}_1 = \ddot{r}_3 = 0$, e normalizando a unidade de tempo, de maneira que $\mathcal{G}M_S = 1$, as equações acima ficam na forma:

$$0 = \dot{\theta}_1^2 - 1 - \mathcal{G}M_1 - \mathcal{G}M_3 \quad (3.93)$$

$$0 = \dot{\theta}_3^2 - 1 - \mathcal{G}M_3 - \mathcal{G}M_1 \quad (3.94)$$

E podemos determinar a nova velocidade angular de cada satélite como:

$$\dot{\theta}_1 = \sqrt{1 + \mathcal{G}(M_1 + M_3)} \quad (3.95)$$

$$\dot{\theta}_3 = \sqrt{1 + \mathcal{G}(M_1 + M_3)} \quad (3.96)$$

que determina, portanto, a velocidade angular do eixo de referência girante, onde colocados os satélites de maneira a formarem um triângulo equilátero com o planeta, eles permaneçam estáticos relativos a este eixo.

3.6 Considerações analíticas

As forças entre Jano e Epimeteu não são simétricas devido ao segundo fator das equações (3.32) e (3.36), onde deve-se trocar os índices de 1 por 3, e também os índices 3 por 1. Se $F_{13} = 0$, então voltariamos ao problema de 2-corpos para Jano e Saturno, e se $F_{31} = 0$, a recíproca é verdadeira e encontraríamos o problema de 2-corpos para Epimeteu e Saturno.

Suponhamos que Jano faça uma órbita circular de período n_0 e raio a_0 , logo:

$$n_0 = \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{2\pi}{T_0} \quad (3.97)$$

onde T_0 seria o período de Jano, a 3ª Lei de Kepler diz que:

$$T_0^2 = \mu a_0^3 \quad (3.98)$$

$$\frac{4\pi^2}{n_0^2} = \mu a_0^3 \implies n_0 = 2\pi \mu^{-1/2} a_0^{-3/2} \quad (3.99)$$

Desta forma a variação angular de Jano ($\dot{\theta}_1$) é o próprio n_0 . Porém, vamos agora considerar que a presença de Epimeteu provoca uma variação neste movimento médio δn_i oriunda da influência de Epimeteu, de modo que:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = n_0 + \delta n_i \quad (3.100)$$

Derivando n_0 em relação a a_0 , encontramos a variação da distância radial (da_0) deste satélite em relação a Saturno devido a uma perturbação no seu movimento médio (dn). Assim podemos escrever que r_1 é dado por a_0 acrescido desta perturbação de Epimeteu no movimento médio de Jano somada a uma perturbação radial:

$$dn_0 = 2\pi \mu^{-1/2} \left(-\frac{3}{2}\right) a_0^{-5/2} da \implies da_0 = -\frac{2}{3} \frac{dn_0}{2\pi \mu^{-1/2} a_0^{-5/2}} \quad (3.101)$$

$$r_1 = a_0 + da_0 + \delta r_1 \quad (3.102)$$

Assim sendo:

$$r_1 = a_0 - \frac{2}{3} \frac{dn}{2\pi \mu^{-1/2} a_0^{-5/2}} + \delta r_1 \quad (3.103)$$

ou ainda:

$$r_1 = a_0 - \frac{2}{3} a_0 \underbrace{\frac{dn}{2\pi \mu^{-1/2} a_0^{-6/2}}}_{n_0/2\pi} + \delta r_1 \quad (3.104)$$

E finalmente a distância radial de Jano em relação a Saturno é considerada como:

$$r_1 = a_0 \left[1 - \frac{2}{3} \frac{\delta n_1}{n_0} \right] + \delta r_1 \quad (3.105)$$

Vamos agora substituir a equação (3.100) e a equação (3.105) nas equações (3.30) e (3.31), porém sempre desprezando os termos de segunda ordem em δr_1 e δn_1 . Derivando a equação (3.100) e lembrando que n_0 é uma constante temos para o satélite Jano:

$$\frac{d\theta_1}{dt} = n_0 + \delta n_1 \quad (3.106)$$

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\delta n_1) \quad (3.107)$$

Substituindo as equações (3.106) e (3.107) em (3.30) e (3.31), chegamos a:

$$\frac{d}{dt} \left(r_1^2 \frac{d\theta_1}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(r_1^2 (n_0 + \delta n_1) \right) = \frac{\partial F_{13}}{\partial \theta_1} \quad (3.108)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} r_1 - r_1 \left(\frac{d}{dt} \theta_1 \right)^2 = \frac{d^2}{dt^2} r_1 - r_1 (n_0 + \delta n_1)^2 = -\frac{\mathcal{G}M}{r_1^2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial r_1} \quad (3.109)$$

tomando a equação (3.105):

$$r_1^2 = a_0^2 - \frac{4}{3} a_0^2 \frac{\delta n_1}{n_0} + 2a_0 \delta r_1 + \mathcal{O}(\delta r_1^2, \delta n_1^2) \quad (3.110)$$

e multiplicando por $(n_0 + \delta n_1)$:

$$r_1^2 (n_0 + \delta n_1) = a_0^2 n_0 - \frac{1}{3} a_0^2 \delta n_1 + 2a_0 n_0 \delta r_1 + \mathcal{O}(\delta r_1^2, \delta n_1^2) \quad (3.111)$$

Substituindo (3.111) em (3.108):

$$\frac{d}{dt} \left(r_1^2 \frac{d\theta_1}{dt} \right) \approx \frac{d}{dt} \left(a_0^2 n_0 - \frac{1}{3} a_0^2 \delta n_1 + 2a_0 n_0 \delta r_1 \right) = \frac{\partial F_{13}}{\partial \theta_1} \quad (3.112)$$

como a_0 e n_0 são constantes:

$$\frac{d}{dt} \left(r_1^2 \frac{d\theta_1}{dt} \right) \approx -\frac{1}{3} a_0^2 \frac{d}{dt} (\delta n_1) + 2a_0 n_0 \frac{d}{dt} (\delta r_1) = \frac{\partial F_{13}}{\partial \theta_1} \quad (3.113)$$

e finalmente:

$$-\frac{1}{3} a_0^2 \frac{d}{dt} (\delta n_1) + 2a_0 n_0 \frac{d}{dt} (\delta r_1) = \frac{\partial F_{13}}{\partial \theta_1} \quad (3.114)$$

Derivando a equação (3.105) obtemos:

$$\frac{dr_1}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{a_0}{n_0} \frac{d}{dt}(\delta n_1) + \frac{d}{dt}(\delta r_1) \quad (3.115)$$

assim sendo:

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} = -\frac{2}{3} \frac{a_0}{n_0} \frac{d^2}{dt^2}(\delta n_1) + \frac{d^2}{dt^2}(\delta r_1) \quad (3.116)$$

e

$$(n_0 + \delta n_1)^2 = n_0^2 + 2n_0 \delta n_1 \quad (3.117)$$

tomando r_1 da equação (3.105) e multiplicando por $(n_0 + \delta n_1)^2$ da equação acima:

$$r_1(n_0 + \delta n_1)^2 = \left(a_0 n_0^2 + \frac{4}{3} a_0 n_0 \delta n_1 - 2\delta r_1 n_0^2 \right) + 3\delta r_1 n_0^2 + \mathcal{O}(\delta r_1^2, \delta n_1^2) \quad (3.118)$$

Multiplicando o termo entre parênteses da equação (3.118) por r_1^2/r_1^2 temos lembrando da equação (3.110):

$$\begin{aligned} r_1(n_0 + \delta n_1)^2 &= \left[\left(a_0 n_0^2 + \frac{4}{3} a_0 n_0 \delta n_1 - 2\delta r_1 n_0^2 \right) + 3\delta r_1 n_0^2 + \mathcal{O}(\delta r_1^2, \delta n_1^2) \right] \\ &\quad \left[\frac{a_0^2 - \frac{4}{3} a_0^2 \frac{\delta n_1}{n_0} + 2a_0 \delta r_1 + \mathcal{O}(\delta r_1^2, \delta n_1^2)}{r_1^2} \right] \\ &= \left[a_0^3 n_0^2 + \frac{4}{3} a_0^3 n_0 \delta n_1 - 2\delta r_1 n_0^2 a_0^2 + 3\delta r_1 n_0^2 a_0^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{3} a_0^3 n_0^2 \frac{\delta n_1}{n_0} + 2a_0^2 n_0^2 \delta r_1 + \mathcal{O}(\delta r_1^2, \delta n_1^2) \right] \frac{1}{r_1^2} \end{aligned} \quad (3.119)$$

que pode ser simplificada lembrando que $a_0^3 n_0^2 = \mathcal{G}M$ na forma:

$$r_1(n_0 + \delta n_1)^2 = \frac{\mathcal{G}M}{r_1^2} + \frac{3\delta r_1 n_0^2 a_0^2}{r_1^2} + \mathcal{O}(\delta r_1^2, \delta n_1^2) \quad (3.120)$$

e ainda admitindo que $r_1^2 \approx a_0^2$, chegamos:

$$r_1(n_0 + \delta n_1)^2 \approx \frac{\mathcal{G}M}{r_1^2} + 3n_0^2 \delta r_1 \quad (3.121)$$

Substituindo as equações (3.116) e (3.121) na equação (3.122) temos:

$$\frac{d^2}{dt^2} r_1 - r_1 \left(\frac{d}{dt} \theta_1 \right)^2 = -\frac{2}{3} \frac{a_0}{n_0} \frac{d^2}{dt^2}(\delta n_1) + \frac{d^2}{dt^2}(\delta r_1) - \quad (3.122)$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{\mathcal{G}M}{r_1^2} + 3n_0^2 \delta r_1 \right) \\
& = - \frac{\mathcal{G}M}{r_1^2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial r_1}
\end{aligned}$$

assim:

$$-\frac{2}{3} \frac{a_0}{n_0} \frac{d^2}{dt^2} (\delta n_1) + \frac{d^2}{dt^2} (\delta r_1) - 3n_0^2 \delta r_1 = \frac{\partial F_{13}}{\partial r_1} \quad (3.123)$$

Reescrevendo a equação (3.114) e (3.123):

$$-\frac{1}{3} a_0^2 \frac{d}{dt} (\delta n_1) + 2a_0 n_0 \frac{d}{dt} (\delta r_1) = \frac{\partial F_{13}}{\partial \theta_1} \quad (3.124)$$

$$-\frac{2}{3} \frac{a_0}{n_0} \frac{d^2}{dt^2} (\delta n_1) + \frac{d^2}{dt^2} (\delta r_1) - 3n_0^2 \delta r_1 = \frac{\partial F_{13}}{\partial r_1} \quad (3.125)$$

temos as novas equações do movimento, que considerando as devidas aproximações, similares da equações (3.30) e (3.108).

Olhando agora somente para os termos da equação (3.124), vamos negligenciar os termos relativos a δr_1 , de maneira que $F_{13}(r_1, r_3, \theta_1 - \theta_3)$ torna-se $F_{13}(a_0, a_0, \theta_1 - \theta_3)$. Reescrevendo desta forma a distância entre os dois satélites (Δ), definindo $\theta_1 - \theta_3 = \phi$ como a separação angular entre os dois satélites, fica:

$$\Delta^2 = a_0^2 + a_0^2 - 2a_0 a_0 \cos \phi = 2a_0^2 (1 - \cos \phi) \quad (3.126)$$

sabendo que

$$2 (\sin(\phi/2))^2 = 1 - \cos \phi \quad (3.127)$$

obtemos:

$$\Delta^2 = 4a_0^2 (\sin(\phi/2))^2 \quad (3.128)$$

e a equação (3.32) será dada por:

$$F_{13} = \frac{\mathcal{G}M_3}{a_0} \left[\frac{1}{2 |\sin(\phi/2)|} - \cos \phi \right] \quad (3.129)$$

e similarmente para Epimeteu:

$$F_{31} = \frac{\mathcal{G}M_1}{a_0} \left[\frac{1}{2 |\sin(\phi/2)|} - \cos \phi \right] \quad (3.130)$$

Substituindo a equação (3.129) na equação (3.124) e sabendo pela equação (3.100) que:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{d^2(\theta_3 - \theta_1)}{dt^2} \quad (3.131)$$

e que $M_1 F_{13} = M_3 F_{31}$ chegamos em:

$$-\frac{1}{3}a_0^2 \frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{\partial \frac{\mathcal{G}(M_1+M_3)}{a_0} \left[\frac{1}{2|\sin(\phi/2)|} - \cos\phi \right]}{\partial\phi} \quad (3.132)$$

ou ainda

$$-\frac{1}{3} \frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{\mathcal{G}(M_1+M_3)}{a_0^3} \frac{\partial \left[\frac{1}{2|\sin(\phi/2)|} - \cos\phi \right]}{\partial\phi} \quad (3.133)$$

chamando $\epsilon = (M_3 + M_1/M_S)^{1/2}$:

$$\epsilon^2 = \frac{M_1 + M_3}{M_S} \quad (3.134)$$

multiplicando por n_0^2

$$\epsilon^2 n_0^2 = \frac{M_3 + M_1}{M_S} n_0^2 \quad (3.135)$$

Aplicando a equação (3.99) temos:

$$\epsilon^2 n_0^2 = \frac{\mathcal{G}(M_3 + M_1)}{a_0^3} \quad (3.136)$$

Substituindo a equação (3.136) na equação (3.133):

$$-\frac{1}{3} \frac{d^2\phi}{dt^2} = \epsilon^2 n_0^2 \frac{\partial}{\partial\phi} \left[\frac{1}{2|\sin(\phi/2)|} - \cos\phi \right] \quad (3.137)$$

Multiplicando a equação (3.136) por $d\phi/dt$, e rearranjando

$$0 = -\frac{1}{3} \frac{d\phi}{dt} \frac{d^2\phi}{dt^2} - \epsilon^2 n_0^2 \frac{\partial}{\partial\phi} \left[\frac{1}{2|\sin(\phi/2)|} - \cos\phi \right] \frac{d\phi}{dt} \quad (3.138)$$

Integrando a equação (3.138) chegamos a:

$$C = -\frac{1}{6} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \epsilon^2 n_0^2 \left[\frac{1}{2|\sin(\phi/2)|} - \cos\phi \right] \quad (3.139)$$

sendo C uma constante de integração, chamando:

$$x = \left| \sin \frac{\phi}{2} \right| \quad (3.140)$$

e por relação trigonométrica:

$$\cos \phi = 1 - 2 \sin^2(\phi/2) = 1 - 2x^2 \quad (3.141)$$

que substituindo na equação (3.139):

$$C = -\frac{1}{6} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \epsilon^2 n_0^2 \left[\frac{1}{2x} - 1 + 2x^2 \right] \quad (3.142)$$

Definindo $E = C + \epsilon^2 n_0^2$, temos:

$$E = -\frac{1}{6} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \frac{\epsilon^2 n_0^2}{2x} [1 + 4x^3] \quad (3.143)$$

A constante E é definida como negativa, pois como trabalhamos com o módulo de x no segundo termo e o segundo termo da soma deve ser sempre negativo e o primeiro termo, equivalente a energia cinética também é uma quantidade negativa.

Rearranjando a equação (3.143):

$$\sqrt{-6E} = \sqrt{\frac{x}{x + \frac{\epsilon^2 n_0^2}{2E} [1 + 4x^3]}} \left(\frac{d\phi}{dt} \right) \quad (3.144)$$

Definindo

$$R(x) = x - A [1 + 4x^3] \quad (3.145)$$

$$A = -\epsilon^2 n_0^2 / 2E \quad (3.146)$$

integrando a equação (3.144) obtemos:

$$(t - t_0)(-6E)^{1/2} = \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi \left(\frac{x}{R(x)} \right)^{1/2} \quad (3.147)$$

que representa a evolução angular de um par de satélites coorbitais no tempo para uma dada constante E .

Isolando $d\phi/dt$ na equação (3.144) temos:

$$\frac{d\phi}{dt} = \sqrt{-6E} \sqrt{\frac{R(x)}{x}} \quad (3.148)$$

Se $d\phi/dt = 0$ temos a mínima aproximação angular ($\phi_{\min}$), ou a máxima distância angular ($\phi_{\max}$) entre dois satélites coorbitais. Pela equação (3.148), esta condição se dá quando $R(x)$ é nulo, ou seja, na raiz do polinômio $R(x)$ encontramos os valores de x que nos permitem encontrar a máxima e mínima separação angular entre dois satélites coorbitais para um dado valor da constante A .

Definindo

$$\text{sen } \alpha = (3A)^{3/2} \quad (3.149)$$

Então para $R(x_1) = 0$ encontramos:

$$x_1 = \frac{\text{sen}(\frac{\alpha}{3})}{\sqrt{3A}} \quad (3.150)$$

E portanto a separação mínima angular é lembrando da equação (3.140):

$$\phi_{\min} = 2 \arcsen(x_1) \quad (3.151)$$

Havendo mais duas raízes ainda tal que:

$$x_2 = \frac{\text{sen}(\frac{\alpha}{3} + 120^\circ)}{\sqrt{3A}} \quad (3.152)$$

$$x_3 = \frac{\text{sen}(\frac{\alpha}{3} - 120^\circ)}{\sqrt{3A}} \quad (3.153)$$

A estabilidade (i.e. $d^2\phi/dt^2 = 0, d\phi/dt = 0$) corresponde derivando a equação (3.143):

$$\frac{d\left(\frac{\epsilon^2 n_0^2}{2x} [1 + 4x^3]\right)}{dx} \frac{dx}{d\phi} = 0 \quad (3.154)$$

$$\frac{\epsilon^2 n_0^2}{2} \left[-\frac{1}{x^2} + 8x\right] \frac{dx}{d\phi} = 0 \quad (3.155)$$

isto implica que:

$$x = \left(\frac{1}{8}\right)^{1/3} = 0,5 \quad (3.156)$$

de onde encontramos a $A = \frac{1}{3}$, $x_1 = \text{sen } 30^\circ$, ou seja $\phi = \pm 60^\circ$, que são os pontos Lagrangianos L_4 e L_5 .

Outro ponto interessante corresponde a transição girino ferradura, onde $\phi = \pi$ (o que implica que $x = 1$) e $d\phi/dt = 0$, substituindo estes valores na equação (3.143):

$$E = -\frac{5\epsilon^2 n_0^2}{2} \quad (3.157)$$

e $A = 0,2$ mas a condição $d\phi/dt = 0$ também é válida para a mínima aproximação $\phi_{\min}$, de modo que para esta mesma constante de E (transição girino-ferradura):

$$E = -\frac{5\epsilon^2 n_0^2}{2} = -\frac{\epsilon^2 n_0^2}{2x} [1 + 4x^3] \quad (3.158)$$

assim:

$$4x^3 - 5x + 1 = 0 \quad (3.159)$$

o qual encontramos como raízes: $\{x = 1\}$, $\{x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\}$, $\{x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\}$, o primeiro valor equivale a máxima separação angular $\phi_{\max} = \pi$, o terceiro nos levaria a um $\phi = 2 \arcsen(-1,2071)$ que pode fisicamente ser descartado, porém o segundo nos leva a mínima aproximação dos satélites, pois estabelecemos como condição $d\phi/dt = 0$, assim para a separatriz girino ferradura: $A = 0,2$ e $\phi_{\min} = 2 \arcsen\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 23,906$ graus.

3.7 Resultados numéricos

Introdução

Nesta parte realizamos as integrações das equações (3.37) até (3.40) para um problema plano relativo aos dados do sistema de satélite coorbitais Jano-Epimeteu relativo a Saturno como corpo central, para as mais diversas condições iniciais definidas pelo valor de A definido na equação (3.146), de modo a variarmos como condição inicial o ângulo de menor aproximação entre os satélites $\phi_{\min}$, que apesar de derivar de uma equação que é obtida através de algumas aproximações, é integrado usando as equações exatas de movimento. Apresentamos para cada uma das condições iniciais os respectivo gráficos da evolução orbital no sistema girante, a evolução das distâncias radiais no tempo e a evolução da posições angulares para cada um dos satélites.

Alguns dados importantes utilizados aqui, foram obtidos de Nicholson *et al* (1992) e Yoder *et al* (1983), são eles:

massa de Saturno: $M_s = 568,8 \cdot 10^{24}$ kg

massa de Jano: $M_1 = 1,98 \cdot 10^{18}$ kg

massa de Epimeteu: $M_3 = 5,5 \cdot 10^{17}$ kg

semi-eixo maior médio: $a_0 = 151450$ km

média do movimento médio: $n_0 = 516,8188258197442$ °/dia

Para efetuar o estudo deste sistema, estabelece-se um sistema girante centrado em Saturno. Este sistema possui a mesma velocidade angular que a média do movimento médio dos satélites Jano-Epimeteu (n_0). Usaremos neste novo sistema as coordenadas polares (r_i, φ_i) , onde o índice $i = 1$ se refere a Jano, e para $i = 3$ refere-se a Epimeteu.

Tipos de órbita e análise do movimento

A primeira integração feita foi para os satélites fixos nos pontos Lagrangianos, na qual $A = 1/3$, e $\phi_{\min} = 60^\circ$, observamos que os satélites permanecem fixos no sistema girante, mantendo a distância angular de 60° a (figura 3.5), e também não alterando sua distância radial (figura 3.6).

Cumpramos lembrar que em todos os gráficos aqui apresentados, a escala de tempo seguiu a normalização da média do movimento médio como sendo unitário, e o semi-eixo maior médio também unitário para a escala de distância.

Se tomarmos, como mero exemplo, $A = 0,3$ obtem-se que $\phi_{\min} = 41,294^\circ$, e integrando-se para este valor obtemos que a evolução para estes satélites no sistema girante, ou seja, o sistema que acompanha o movimento médio dos satélites, obedece o tipo de órbita girino para ambos satélites (**figura 3.8**), observamos também que eles trocam de posição simultaneamente, ou seja, enquanto um está percorrendo a parte inferior da órbita girino o outro se encontra na superior, (**figura 3.9**), e finalmente que estes satélites nunca se cruzam (**figura 3.10**) e possuem uma mínima aproximação quando se encontram em seu semi-eixo maior médio.

Colocando agora $A = 0,2$, que como vimos na seção anterior representa que os satélites tem $\phi_{\max} = 180$ graus, ou seja estão na transição entre girino e ferradura, isto implica que $\theta_{\min} = 23,906^\circ$, e integrando-se para este valor obteve-se a evolução para estes satélites no sistema girante mostrada na **figura 3.11**, radialmente eles permanecem trocando posição entre si (**figura 3.12**) e angularmente pode-se observar melhor a libração simultânea (**figura 3.13**) do que no caso anterior.

E se tomarmos agora a mínima aproximação observada para Jano-Epimeteu ($\theta_{\min} = 6,8^\circ$), que resultaria em $A = 0,06$, e integrando-se para este valor obtemos uma órbita do tipo ferradura para estes satélites no sistema girante (**figura 3.14**), com sua devida oscilação radial (**figura 3.15**) e angular (**figura 3.16**).

Estabilidade

Deve-se ressaltar que o período de libração aumenta com o aumento da largura angular da órbita girino, chegando a seu ápice na transição girino-ferradura e volta a retroagir na órbita ferradura, como mostrado na **figura (3.17)**. Isto ocorre devido ao fato de conforme se diminui o valor de A , a partir de uma órbita girino, tendendo a região de transição girino-ferradura, os satélites vão se aproximando cada vez mais do ponto de equilíbrio instável em que $\phi'' = 180$ graus, de maneira que eles tendem a permanecer por um longo tempo nesta configuração.

Para verificar a estabilidade deste tipo de órbita integrou-se estas equações por um período dez vezes maior na qual percebemos que os satélites aproximam-se cerca de 80 vezes (**figura 3.18, 3.19 e 3.20**), como cada período de encontro é de cerca de oito anos (Nicholson (1992)), podemos dizer que estes satélites podem permanecer neste tipo de órbita por mais de 320 anos.

Resumindo esta seção, mostramos as órbitas que podem ser possíveis em satélites coorbitais para o caso não restrito em função das condições iniciais do problema:

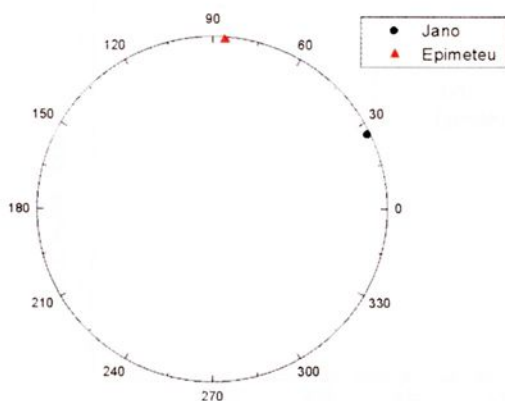


Figura 3.5: Evolução orbital para as massas de Jano e Epimeteu com $A = 1/3$, ou seja, os satélites estão defasados de 60 graus entre si, e permanecem estáticos no sistema girante durante toda integração.

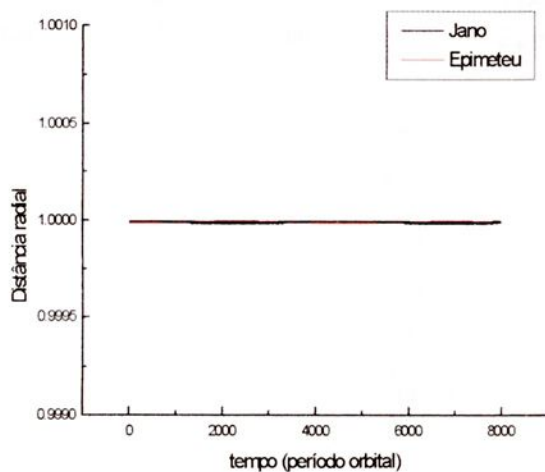


Figura 3.6: Distâncias radiais de Jano e Epimeteu referente a Saturno contra o tempo para $A = 1/3$. Os gráficos estão sobrepostos, de modo que eles não alteram a distância radial entre si.

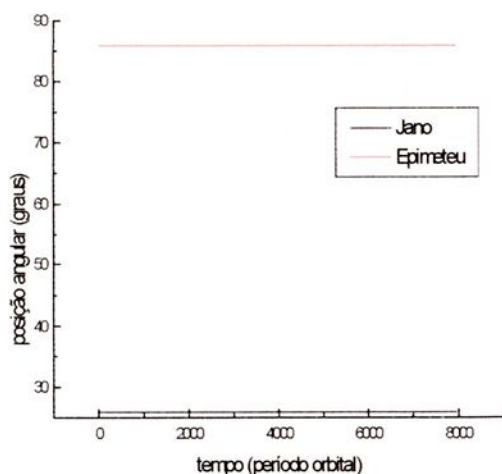


Figura 3.7: Posição angular de Jano e Epimeteu, que se mantém a distância de 60° entre si ao longo do tempo para os pontos Lagrangeanos para $A = 1/3$.

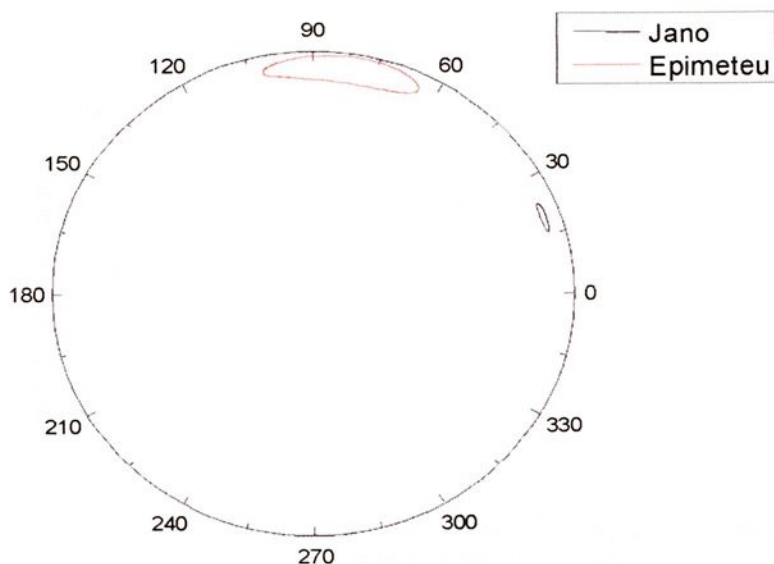


Figura 3.8: Evolução de Jano e Epimeteu para $A = 0,3$. Neste caso os satélites esboçaram uma órbita do tipo girino, librando apenas em um ponto de equilíbrio

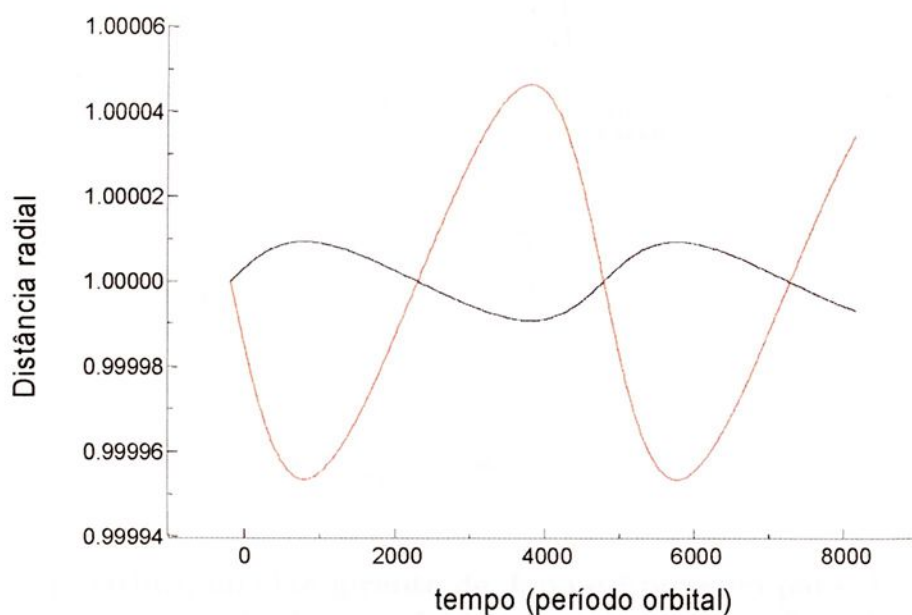


Figura 3.9: Distância radial de Jano e Epimeteu referente a Saturno contra o tempo para $A = 0,3$. Eles trocam de posição simultaneamente, e quando um está abaixo do semi-eixo médio ($r = 1$) o outro está acima.

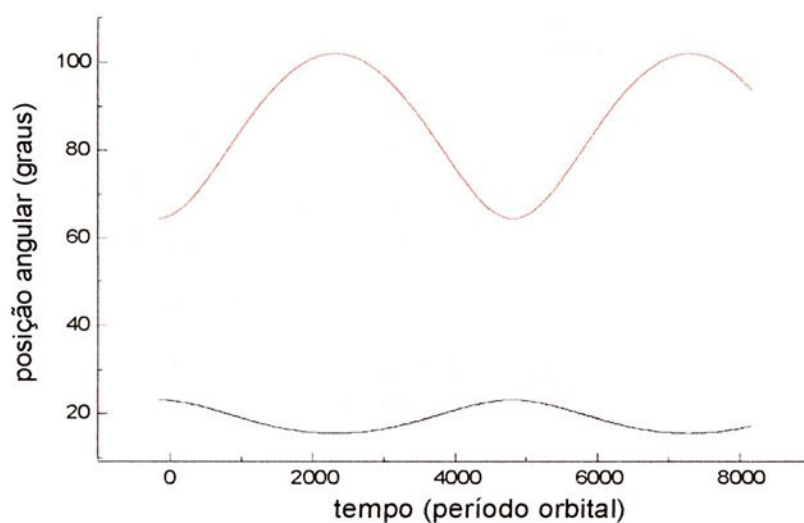


Figura 3.10: Posição angular de Jano e Epimeteu contra o tempo para $A = 0,3$. A mínima aproximação é de cerca de 41 graus.

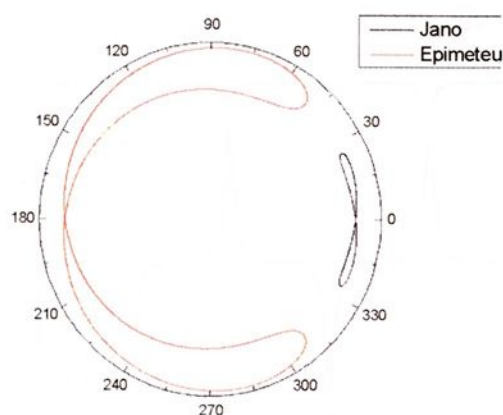


Figura 3.11: Órbita no eixo girante de Jano e Epimeteu para $A = 0,2$. Aqui temos um exemplo de uma órbita separatriz girino-ferradura.

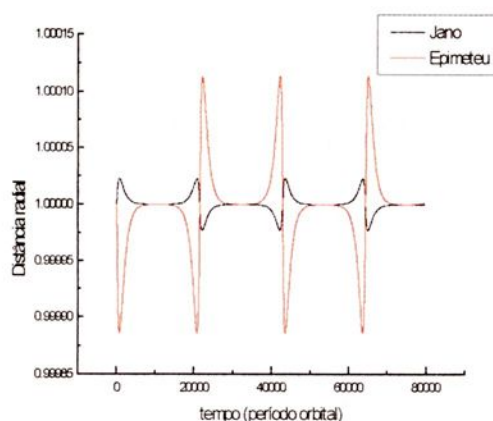


Figura 3.12: Distâncias radiais de Jano e Epimeteu em relação a Saturno contra o tempo para $A = 0,2$. Como nos casos anteriores, temos uma oscilação radial periódica

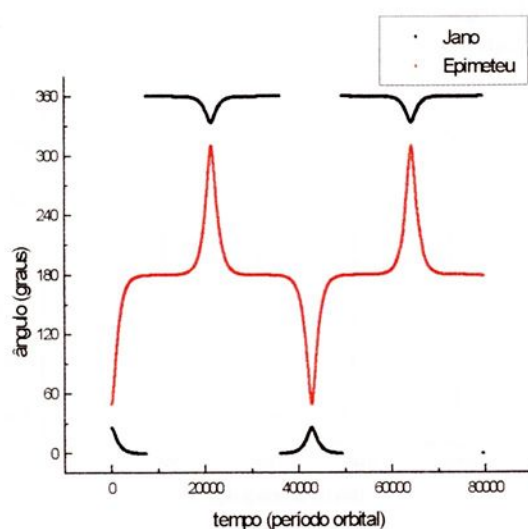


Figura 3.13: Posição angular de Jano e Epimeteu no tempo para $A = 0,2$. Podemos ver como os satélites tem uma mínima aproximação e se distanciam angularmente.

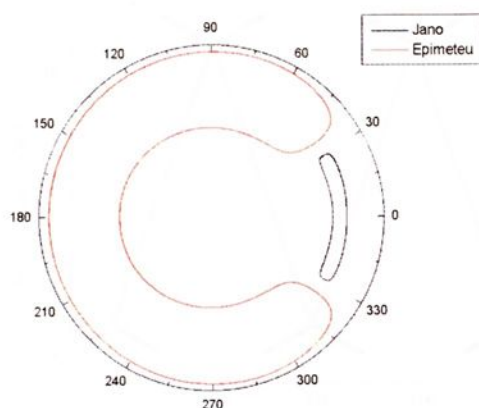


Figura 3.14: Órbita no sistema girante de Jano e Epimeteu para $A = 0,06$. Neste caso temos uma órbita do tipo ferradura que envolve os dois pontos de equilíbrio de cada satélite.

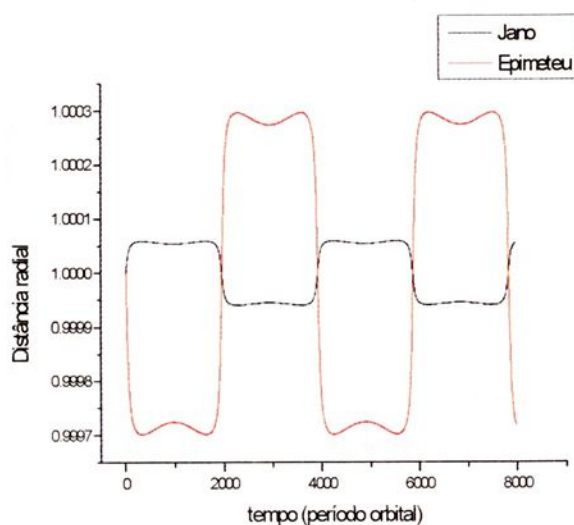


Figura 3.15: Distâncias radiais de Jano e Epimeteu contra o tempo para $A = 0,06$. A amplitude de oscilação radial aumenta significativamente em relação à órbita girino

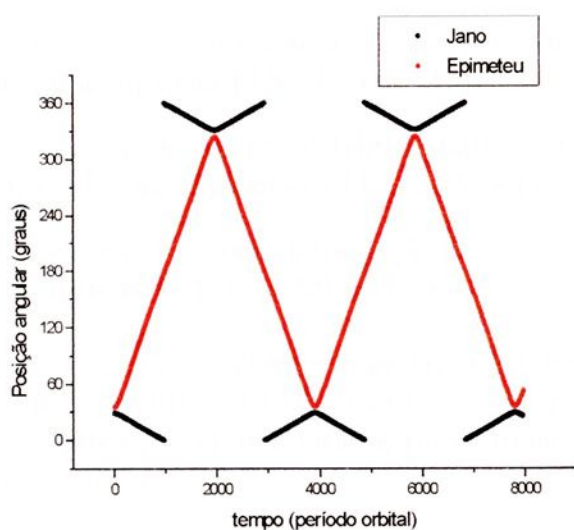


Figura 3.16: Posição angular de Jano e Epimeteu no tempo para $A = 0,06$. A mínima aproximação é de cerca de 24 graus.

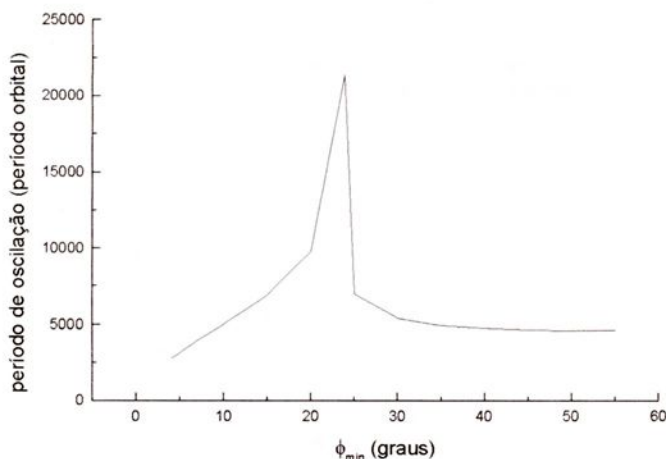


Figura 3.17: Período de oscilação de um sistema coorbital Saturno-Jano-Epimeteu para diferentes condições iniciais, indicadas pela mínima aproximação angular dos satélites ($\phi_{\min}$).

- Os satélites se mantêm nos pontos de equilíbrio, como mostram as **figuras** (3.5), (3.6) e 3.7, para isto eles deve estar defasados de 60 graus, ter a mesma distância radial e mesma velocidade angular
- girino, em uma curta de libração ao redor de um dos pontos de equilíbrio, como mostram as **figuras** (3.8), (3.9) e (3.10).
- ferradura, na qual cada um dos satélites abarcam dois pontos de equilíbrio estáveis, ilustrados nas **figuras** (3.14), (3.16) e (3.15);
- separatriz, que definimos como a transição da órbita girino para a ferradura, conforme as **figuras** (3.11), (3.12) e (3.13).

Concluimos também que os satélites mantêm a configuração atual observada por mais de 320 anos (**figuras** (3.18), (3.19) e (3.20)). E para encerrar este capítulo temos no **figura** (3.21) uma visão geral de todas as órbitas obtidas para diferentes condições iniciais.

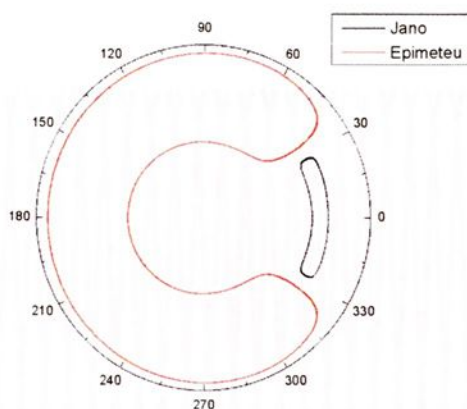


Figura 3.18: Evolução da ferradura para $A = 0.06$. Observa-se aqui a estabilidade deste sistema, pois os satélites mantêm a mesma evolução no sistema girante mesmo após 80 encontros sucessivos.

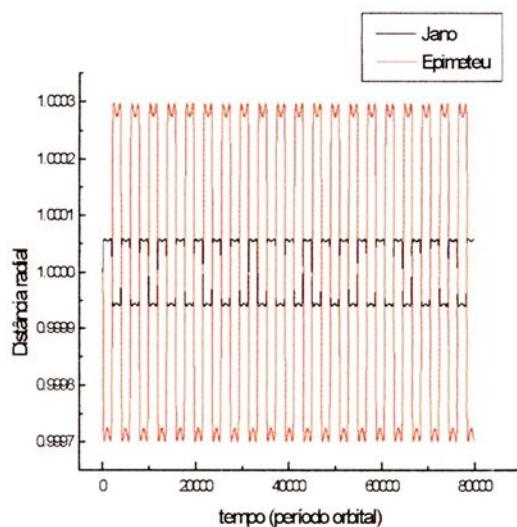


Figura 3.19: Raio orbital em função do tempo para o caso ferradura ($A = 0.06$) para o tempo de integração 10 vezes superior aos esboçados anteriormente.

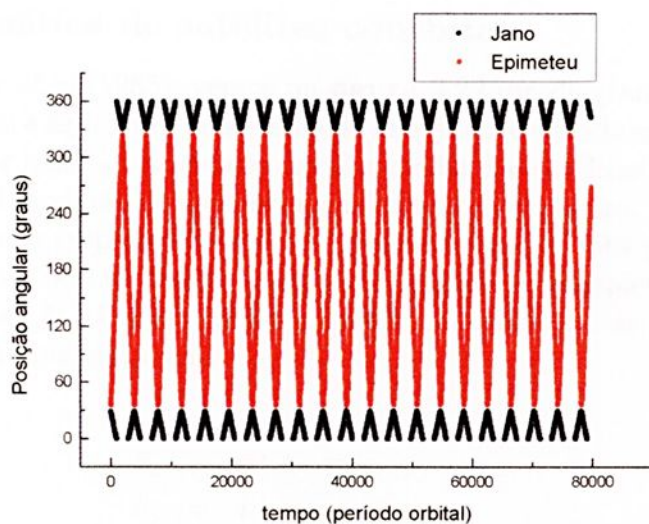


Figura 3.20: Posição angular dos satélites em função do tempo para o caso ferradura por um período de integração 10 vezes superior aos esboçados anteriormente

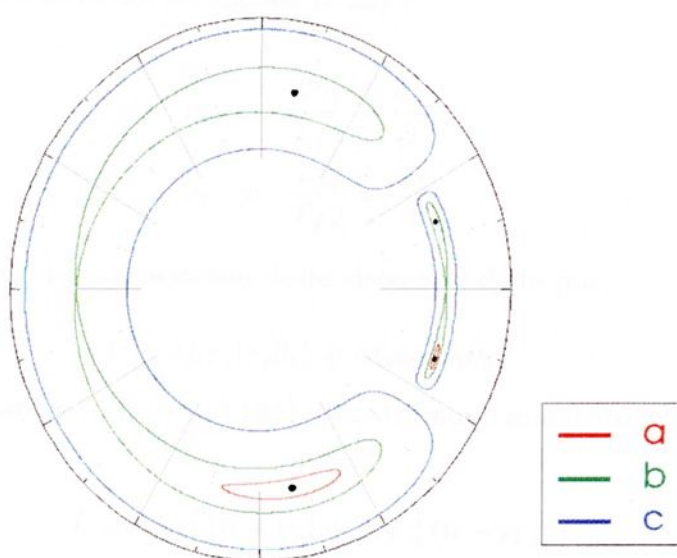


Figura 3.21: Exemplos de órbitas: (a) girino; (b)separatriz; (c) ferradura

3.8 A cinemática de satélites coorbitais

Seguindo Lissauer *et al* (1985), vemos na **figura 3.22** um diagrama esquemático das órbitas de Jano e Epimeteu no sistema de referência centrado em Saturno com velocidade angular igual à velocidade angular média dos satélites $\bar{n}$. Os satélites perturbam-se mutuamente quando se aproximam um do outro, o que provoca a alteração nas suas respectivas órbitas. Supondo-se que esta perturbação se dá em um curto período de tempo comparado a libração completa dos satélites coorbitais (Dermott & Murray (1981b)), podemos aproximar as longitudes dos satélites no sistema inercial como:

$$\theta_1 = \bar{n}t + \nu_1 t - \gamma_1 \quad (3.160)$$

$$\theta_3 = \bar{n}t - \nu_3 t + \pi + \gamma_3 \quad (3.161)$$

para $0 \leq t_{\text{Mod}(T)} \leq T/2$ e

$$\theta_1 = \bar{n}t - \nu_1 t - \gamma_1 \quad (3.162)$$

$$\theta_3 = \bar{n}t + \nu_3 t + \pi - \gamma_3 \quad (3.163)$$

para $T/2 \leq t_{\text{Mod}(T)} \leq T$, e onde T é o período de libração dos satélites, os ângulos γ_1 e γ_3 são definidos na **figura (3.22)** e

$$\nu_1 \equiv \frac{2\gamma_1}{T/2} = \frac{4\gamma_1}{T} \quad (3.164)$$

$$\nu_3 \equiv \frac{2\gamma_3}{T/2} = \frac{4\gamma_3}{T} \quad (3.165)$$

O momento angular aproximado deste sistema é dado por

$$L = M_1 r_1 (r_1 \dot{\theta}_1) + M_3 r_3 (r_3 \dot{\theta}_3) \quad (3.166)$$

Usando as equações (3.160) e (3.161) encontramos o momento angular descrito como:

$$L = M_1 r_1^2 (\bar{n} + \nu_1) + M_3 r_3^2 (\bar{n} - \nu_3) \quad (3.167)$$

para $0 \leq t_{\text{Mod}(T)} \leq T/2$, e pelas equações (3.162) e (3.163)

$$L = M_1 r_1^2 (\bar{n} - \nu_1) + M_3 r_3^2 (\bar{n} + \nu_3) \quad (3.168)$$

para $T/2 \leq t_{\text{Mod}(T)} \leq T$.

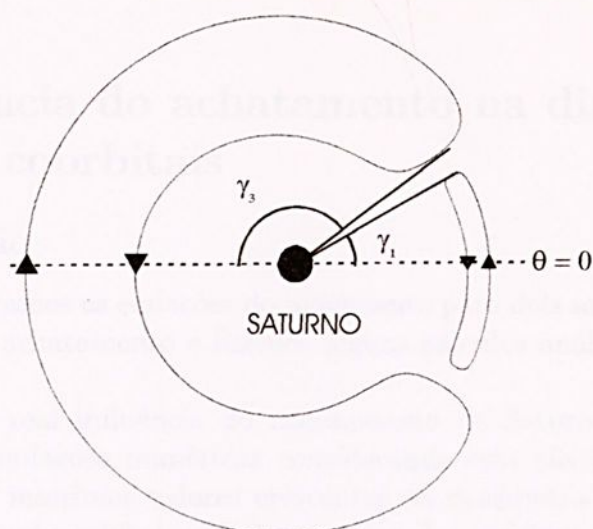


Figura 3.22: A figura mostra as posições relativas de dois satélites coorbitais genéricos em relação ao planeta Saturno. Os ângulos γ_1 e γ_3 representam a máxima libração angular de cada um dos satélites, além disso, consideramos como referência angular a linha tracejada.

Se tomarmos um instante tal que $t = T/2 - \epsilon$ e um outro $t = T/2 + \epsilon$, para ϵ muito pequenos, temos que pela **figura** (3.22) $r_1 = r_3$, além disso, pela conservação do momento angular, podemos igualar as equações (3.167) e (3.168) de maneira que:

$$M_1 r_1^2 (\bar{n} + \nu_1) + M_3 r_3^2 (\bar{n} - \nu_3) = M_1 r_1^2 (\bar{n} - \nu_1) + M_3 r_3^2 (\bar{n} + \nu_3)$$

que simplificando para $r_1 = r_3$

$$M_1 \nu_1 - M_3 \nu_3 = -M_1 \nu_1 + M_3 \nu_3$$

ou ainda:

$$\nu_1 M_1 = \nu_3 M_3$$

e lembrando das equações (3.164) e (3.165) concluímos que

$$\gamma_1 M_1 = \gamma_3 M_3$$

A conclusão importante aqui é que as amplitudes de libração angular são inversamente proporcionais as massa de seus respectivos satélites.

4 A influência do achatamento na dinâmica de satélites coorbitais

4.1 Introdução

Inicialmente encontramos as equações do movimento para dois satélites coorbitais considerando efeito achatamento e fizemos alguns cálculos análogos ao capítulo anterior.

Para verificar a real influência do achatamento de Saturno neste sistema, fizemos algumas simulações numéricas considerando este efeito, de forma que em cada uma delas inserimos valores crescentes do parâmetro J_2 de Saturno e monitoramos a evolução orbital, radial e angular dos satélites. Partimos de J_2 como 1 % do valor observado para este planeta até o seu valor real. Um ponto a ser ressaltado é o aumento da excentricidade média do sistema com o aumento deste parâmetro.

4.2 Equações do movimento com o achatamento

Buscamos aqui encontrar as equações do movimento para 3 corpos, sendo um considerado como corpo principal de massa M , e será usado como sistema de referência para outros dois (M_1 e M_3) que orbitam ao redor do primeiro e se perturbam mutuamente, o que difere aqui da seção 3.4, é que queremos a inclusão do achatamento de M nas equações do movimento de M_1 e M_3 .

Seja uma partícula qualquer a uma distância r de uma massa M com achatamento J_2 e raio equatorial R , vamos supor que a partícula perfaz um ângulo Θ com o plano equatorial de M . O potencial desta é descrito na obra de Roy (1988) como:

$$U = \frac{GM}{r} \left[1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \Theta \right) \right] \quad (4.1)$$

considerando que todos os corpos que envolveremos estão no plano equatorial de M , então $\Theta = 0$, logo:

$$U(r) = \frac{GM}{r} \left[1 + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] \quad (4.2)$$

ou ainda

$$U(r) = \mathcal{G} \frac{M}{r} + \frac{1}{2} \mathcal{G} \frac{M}{r^3} J_2 R^2 \quad (4.3)$$

A força gravitacional é calculada como:

$$\frac{\partial U(r)}{\partial r} = -\mathcal{G} \frac{M}{r^2} - \frac{3}{2} \mathcal{G} \frac{M}{r^4} J_2 R^2 \quad (4.4)$$

e portanto

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U = \mathcal{G} \frac{M}{r^3} \vec{r} + \frac{3}{2} \mathcal{G} \frac{M}{r^5} J_2 R^2 \vec{r} \quad (4.5)$$

Diante disto podemos equacionar o seguinte problema: em um dado sistema de referência seja um corpo principal de massa M , em uma posição $\vec{\mathbf{R}}_s$, com um achatamento definido por J_2 e raio equatorial R . Orbitando este corpo temos duas massas, uma de massa M_1 , localizada em $\vec{\mathbf{R}}_1$, distante de r_1 da massa M e outra de massa M_3 , localizada no sistema de referência na posição $\vec{\mathbf{R}}_3$ e distante r_3 do corpo M . As equações do movimento para estes três corpos neste referencial, considerando as suas mútuas perturbações gravitacionais são dadas por:

$$\begin{aligned} M_s \ddot{\mathbf{R}}_s &= \mathcal{G} M_s M_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} + M_1 \frac{3}{2} \mathcal{G} \frac{M_s}{r_1^5} J_2 R^2 \vec{r}_1 + \mathcal{G} M_s M_3 \frac{\vec{r}_3}{r_3^3} \\ &\quad + M_3 \frac{3}{2} \mathcal{G} \frac{M_s}{r_3^5} J_2 R^2 \vec{r}_3 \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$M_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 = \mathcal{G} M_1 M_3 \frac{(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)}{|r_3 - r_1|^3} - \mathcal{G} M_1 M_s \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - M_1 \frac{3}{2} \mathcal{G} \frac{M_s}{r_1^5} J_2 R^2 \vec{r}_1 \quad (4.7)$$

$$M_3 \ddot{\mathbf{R}}_3 = \mathcal{G} M_1 M_3 \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)}{|r_1 - r_3|^3} - \mathcal{G} M_s M_3 \frac{\vec{r}_3}{r_3^3} - M_3 \frac{3}{2} \mathcal{G} \frac{M_s}{r_3^5} J_2 R^2 \vec{r}_3 \quad (4.8)$$

Admitindo que M_s é muito superior de M_1 e M_3 , vamos colocar um novo centro de coordenadas inercial centrado em M_s , de modo que o movimento de M_1 e M_3 em relação as estas novas coordenadas serão dados pelas equações (4.10) para M_1 e (4.12) para M_3 .

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \ddot{\mathbf{R}}_1 - \ddot{\mathbf{R}}_s = \\ &\mathcal{G} M_3 \frac{(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)}{|r_3 - r_1|^3} - \mathcal{G} M_s \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{3}{2} \mathcal{G} \frac{M_s}{r_1^5} J_2 R^2 \vec{r}_1 \\ &\quad - \mathcal{G} M_1 \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - M_1 \frac{3}{2} \mathcal{G} \frac{1}{r_1^5} J_2 R^2 \vec{r}_1 - \mathcal{G} M_3 \frac{\vec{r}_3}{r_3^3} - M_3 \frac{3}{2} \mathcal{G} \frac{1}{r_3^5} J_2 R^2 \vec{r}_3 \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\mathcal{G} \left(\frac{M_s + M_1}{r_1^3} \right) \vec{r}_1 + \mathcal{G} \left(\frac{M_3}{\Delta^3} \Delta - \frac{M_3}{r_3^3} \vec{r}_3 \right) - \frac{3}{2} \mathcal{G} \frac{M_s}{r_1^5} J_2 R^2 \vec{r}_1 - M_1 \frac{3}{2} \mathcal{G} \frac{1}{r_1^5} J_2 R^2 \vec{r}_1 \\ &\quad - M_3 \frac{3}{2} \mathcal{G} \frac{1}{r_3^5} J_2 R^2 \vec{r}_3 \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_3 &= \ddot{\mathbf{R}}_3 - \ddot{\mathbf{R}}_S = \\ &\mathcal{G}M_1 \frac{(\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_3)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3} - \mathcal{G}M_s \frac{\ddot{\mathbf{r}}_3}{r_3^3} - \frac{3}{2}\mathcal{G}\frac{M_s}{r_3^5}J_2R^2\ddot{\mathbf{r}}_3 \\ &- \mathcal{G}M_1 \frac{\ddot{\mathbf{r}}_1}{r_1^3} - M_1 \frac{3}{2}\mathcal{G}\frac{1}{r_1^5}J_2R^2\ddot{\mathbf{r}}_1 - \mathcal{G}M_3 \frac{\ddot{\mathbf{r}}_3}{r_3^3} - M_3 \frac{3}{2}\mathcal{G}\frac{1}{r_3^5}J_2R^2\ddot{\mathbf{r}}_3\end{aligned}\quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_3 &= -\mathcal{G}\left(\frac{M_s + M_3}{r_3^3}\right)\ddot{\mathbf{r}}_3 - \mathcal{G}\left(\frac{M_1}{\Delta^3}\Delta + \frac{M_1}{r_1^3}\ddot{\mathbf{r}}_1\right) - \frac{3}{2}\mathcal{G}\frac{M_s}{r_3^5}J_2R^2\ddot{\mathbf{r}}_3 - M_1 \frac{3}{2}\mathcal{G}\frac{1}{r_1^5}J_2R^2\ddot{\mathbf{r}}_1 \\ &- M_3 \frac{3}{2}\mathcal{G}\frac{1}{r_3^5}J_2R^2\ddot{\mathbf{r}}_3\end{aligned}\quad (4.12)$$

× assim para este problema podemos generalizar o seguinte potencial U em coordenadas polares (r, θ) , sendo r o raio e θ o ângulo em relação a um dos eixos de referência:

$$U_i = -\mathcal{G}\frac{(M_s + M_i)}{r_i} - F_{ij} - \frac{1}{2}\mathcal{G}J_2R^2\frac{(M_s + M_i)}{r_i^3} + \frac{3}{8}\mathcal{G}J_2R^2M_j\frac{\ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_j}{r_j^5}\quad (4.13)$$

onde:

$$\begin{aligned}F_{ij} &= \mathcal{G}M_j \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \ddot{\mathbf{r}}_j}{r_j^3} \right) \\ &= \mathcal{G}M_j \left(\frac{1}{\sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\theta_i - \theta_j)}} - \frac{r_i \cos(\theta_i - \theta_j)}{r_j^2} \right)\end{aligned}\quad (4.14)$$

para $\Delta = \sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\theta_i - \theta_j)}$, e i e j variando entre 1 e 3 e $i \neq j$.

Portanto

$$\begin{aligned}U_i &= -\mathcal{G}\frac{(M_s + M_i)}{r_i} \\ &- \mathcal{G}M_j \left(\frac{1}{\sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\theta_i - \theta_j)}} - \frac{r_i \cos(\theta_i - \theta_j)}{r_j^2} \right) \\ &- \frac{1}{2}\mathcal{G}J_2R^2\frac{(M_s + M_i)}{r_i^3} + \frac{3}{8}\mathcal{G}J_2R^2M_j\frac{r_i \cos(\theta_i - \theta_j)}{r_j^4}\end{aligned}\quad (4.15)$$

E através das equações (3.13) e (3.14), podemos escrever:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = T_i - U_i &= \frac{1}{2}\dot{r}_i^2 + \frac{1}{2}r_i^2\dot{\theta}_i^2 + \mathcal{G}\frac{(M_S + M_i)}{r_i} \\ &+ \mathcal{G}M_j \left(\frac{1}{\sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\theta_i - \theta_j)}} - \frac{r_i \cos(\theta_i - \theta_j)}{r_j^2} \right) \\ &+ \frac{1}{2}\mathcal{G}J_2 R^2 \frac{(M_S + M_i)}{r_i^3} - \frac{3}{8}\mathcal{G}J_2 R^2 M_j \frac{r_i \cos(\theta_i - \theta_j)}{r_j^4}\end{aligned}\quad (4.16)$$

e portanto para a variável θ_i :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (r_i^2 \dot{\theta}_i) &= \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left(\mathcal{G}M_j \left(\frac{1}{\sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\theta_i - \theta_j)}} - \frac{r_i \cos(\theta_i - \theta_j)}{r_j^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\mathcal{G}J_2 R^2 \frac{(M_S + M_i)}{r_i^3} - \frac{3}{8}\mathcal{G}J_2 R^2 M_j \frac{r_i \cos(\theta_i - \theta_j)}{r_j^4} \right)\end{aligned}\quad (4.18)$$

$$= \mathcal{G}M_j \left(-\frac{r_i r_j \sin(\theta_i - \theta_j)}{\Delta^3} + \frac{r_i \sin(\theta_i - \theta_j)}{r_j^2} \right) \quad (4.19)$$

assim:

$$\begin{aligned}r_i^2 \ddot{\theta}_i + 2r_i \dot{r}_i \dot{\theta}_i &= \mathcal{G}M_j \left(-\frac{r_i r_j \sin(\theta_i - \theta_j)}{\Delta^3} + \frac{r_i \sin(\theta_i - \theta_j)}{r_j^2} \right) \\ &\quad + \frac{3}{8}\mathcal{G}J_2 M_j \frac{r_i \sin(\theta_i - \theta_j)}{r_j^4}\end{aligned}\quad (4.20)$$

isolando $\ddot{\theta}_i$

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_i &= -\frac{2\dot{r}_i}{r_i} \dot{\theta}_i + \frac{\mathcal{G}M_j}{r_i} \left(-\frac{r_j \sin(\theta_i - \theta_j)}{\Delta^3} + \frac{\sin(\theta_i - \theta_j)}{r_j^2} \right) \\ &\quad + \frac{3}{8} \frac{\mathcal{G}J_2 M_j \sin(\theta_i - \theta_j)}{r_i r_j^4}\end{aligned}\quad (4.21)$$

E analogamente para a variável r_i :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_i} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{r}_i) &= \frac{\partial}{\partial r_i} \left(\frac{1}{2} r_i^2 \dot{\theta}_i^2 + \mathcal{G} \frac{(M_S + M_i)}{r_i} \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{G} M_j \left(\frac{1}{\sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\theta_i - \theta_j)}} - \frac{r_i \cos(\theta_i - \theta_j)}{r_j^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \mathcal{G} J_2 R^2 \frac{(M_S + M_i)}{r_i^3} - \frac{3}{8} \mathcal{G} J_2 R^2 M_j \frac{r_i \cos(\theta_i - \theta_j)}{r_j^4} \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} &= r_i \dot{\theta}_i^2 - \mathcal{G} \frac{(M_S + M_i)}{r_i^2} \\ &\quad + \mathcal{G} M_j \left[-\Delta^{-3} r_i + \Delta^{-3} r_j \cos(\theta_i - \theta_j) - \frac{\cos(\theta_i - \theta_j)}{r_j^2} \right] \\ &\quad - \frac{3}{2} \mathcal{G} J_2 R^2 \frac{(M_S + M_i)}{r_i^4} + \frac{3}{8} \mathcal{G} J_2 R^2 M_j \frac{\cos(\theta_i - \theta_j)}{r_j^4} \end{aligned} \quad (4.24)$$

portanto

$$\begin{aligned} \ddot{r}_i &= r_i \dot{\theta}_i^2 - \mathcal{G} \frac{(M_S + M_i)}{r_i^2} \\ &\quad + \mathcal{G} M_j \left[-\Delta^{-3} r_i + \Delta^{-3} r_j \cos(\theta_i - \theta_j) - \frac{\cos(\theta_i - \theta_j)}{r_j^2} \right] \\ &\quad - \frac{3}{2} \mathcal{G} J_2 R^2 \frac{(M_S + M_i)}{r_i^4} + \frac{3}{8} \mathcal{G} J_2 R^2 M_j \frac{\cos(\theta_i - \theta_j)}{r_j^4} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Assim temos finalmente como equações de movimento para este problema

Para a massa M_1

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 &= r_1 \dot{\theta}_1^2 - \mathcal{G} \frac{(M_S + M_1)}{r_1^2} \\ &\quad + \mathcal{G} M_3 \left[-\Delta^{-3} r_1 + \Delta^{-3} r_3 \cos(\theta_1 - \theta_3) - \frac{\cos(\theta_1 - \theta_3)}{r_3^2} \right] \\ &\quad - \frac{3}{2} \mathcal{G} J_2 R^2 \frac{(M_S + M_1)}{r_1^4} + \frac{3}{8} \mathcal{G} J_2 R^2 M_3 \frac{\cos(\theta_1 - \theta_3)}{r_3^4} \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 &= -\frac{2\dot{r}_1 \dot{\theta}_1}{r_1} + \frac{\mathcal{G} M_3 r_3 \sin(\theta_3 - \theta_1)}{r_1} \left(-\frac{1}{\Delta^3} + \frac{1}{r_3^3} \right) \\ &\quad + \frac{3}{8} \mathcal{G} J_2 M_3 \frac{\sin(\theta_1 - \theta_3)}{r_1 r_3^4} \end{aligned} \quad (4.27)$$

e para a massa M_3

$$\ddot{r}_3 = r_3 \dot{\theta}_3^2 - \mathcal{G} \frac{(M_S + M_3)}{r_3^2}$$

$$+\mathcal{G}M_1 \left[-\Delta^{-3}r_3 + \Delta^{-3}r_1 \cos(\theta_3 - \theta_1) - \frac{\cos(\theta_3 - \theta_1)}{r_1^2} \right] \quad (4.28)$$

$$\ddot{\theta}_3 = -\frac{2\dot{r}_3 \dot{\theta}_3}{r_3} + \frac{\mathcal{G}M_1 r_1 \sin(\theta_3 - \theta_1)}{r_3} \left(-\frac{1}{\Delta^3} + \frac{1}{r_1^3} \right) + \frac{3}{8} \mathcal{G}J_2 M_1 \frac{\sin(\theta_3 - \theta_1)}{r_3 r_1^4} \quad (4.29)$$

As equações (4.26), (4.27), (4.28) e (4.29) são as equações que descrevem o movimento de um par de satélites coorbitais coplanares de massas comparáveis que orbitam um planeta central que possui um achatamento J_2 , estão dispostas em coordenadas polares r e θ . Estas equações podem ser integradas numericamente e assim fornecer uma descrição do movimento de Jano e Epimeteu em relação a Saturno, de acordo com as condições iniciais impostas. O que diferencia estas equações, das obtidas anteriormente sem o achatamento (3.37), (3.38), (3.39) e (3.40), são alguns termos que aparecem a mais, porém se adotarmos $J_2 = 0$, retornamos a mesma, mostrando a convergência das relações obtidas.

4.3 Considerações analíticas com o achatamento

Faremos nesta parte do trabalho cálculos similares aos realizados na seção 3.6. Porém os destacamos como resultados inéditos, devido a considerarmos o efeito do achatamento definido por J_2 .

O movimento médio $\bar{n}$ para um corpo que órbita um outro corpo principal achatado no plano equatorial deste, é dado segundo Roy (1988) por:

$$\bar{n} = n_0 \left[1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{p^2} (1 - e^2)^{1/2} \right] \quad (4.30)$$

onde n_0 seria o seu movimento médio se o corpo principal fosse esférico e $p = a_0(1 - e^2)$. Se tratarmos de problemas de pequena excentricidade temos:

$$\bar{n} = n_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right) \quad (4.31)$$

Assim sendo, sabendo que:

$$n_0 = \frac{2\pi}{T} \quad (4.32)$$

onde T seria o período orbital sem a presença do achatamento, encontramos:

$$\frac{4\pi^2}{n_0^2} = \mu a_0^3 \implies n_0 = 2\pi \mu^{-1/2} a_0^{-3/2} \quad (4.33)$$

e portanto:

$$\bar{n} = 2\pi\mu^{-1/2}a_0^{-3/2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right) \quad (4.34)$$

Consideraremos novamente que Jano faz uma órbita circular, com semi eixo maior a_0 e movimento médio n_0 , que perturbado pelo achatamento de Saturno se torna $\bar{n}$. Ele também é perturbado por Epimeteu na direção angular e radial, de modo que:

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \bar{n} + \delta n_1 \quad (4.35)$$

$$r_1 = a_0 + \delta r_1 \quad (4.36)$$

Substituindo a equação (4.34) na equação (4.35), ficamos com:

$$\frac{d\theta_1}{dt} = n_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right) + \delta n_1 \quad (4.37)$$

Derivando $\bar{n}$ em relação a a_0 , encontramos a variação da distância radial (da_0) de Jano em relação a Saturno devido a uma perturbação no seu movimento médio (dn). Assim podemos escrever que r_1 é dado por a_0 acrescido desta perturbação de Epimeteu no movimento médio de Jano (da_a) somada a perturbação radial (δr_1), ou seja:

$$r_1 = a_0 + da_0 + \delta r_1 \quad (4.38)$$

Derivando $\bar{n}$ em relação a a_0 :

$$d\bar{n} = -\frac{3}{2}\pi \frac{2a_0^2 + 7J_2 R^2}{\sqrt{\mu} (\sqrt{a_0})^9} da_0 \quad (4.39)$$

podemos encontrar da_0 como

$$da_0 = -\frac{2}{3\pi} \frac{\sqrt{\mu} (\sqrt{a_0})^9}{(2a_0^2 + 7J_2 R^2)} d\bar{n} \quad (4.40)$$

e portanto o r_1 reescrito como:

$$r_1 = a_0 - \frac{2}{3\pi} \frac{\sqrt{\mu} (\sqrt{a_0})^9}{(2a_0^2 + 7J_2 R^2)} d\bar{n} + \delta r_1 \quad (4.41)$$

e isolando a_0

$$r_1 = a_0 \left[1 - \frac{2}{3\pi} \frac{\sqrt{\mu} a_0^{7/2}}{(2a_0^2 + 7J_2 R^2)} \delta n_1 \right] + \delta r_1 \quad (4.42)$$

E usando a equação (4.33) na equação (4.42) temos:

$$r_1 = a_0 \left[1 - \frac{2}{3} \frac{\delta n_1}{n_0 \left(1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2} \right)} \right] + \delta r \quad (4.43)$$

Vamos agora substituir a equação (4.37) e a equação (4.43) nas equações (4.18) e (4.24) para $i = 1$ e $j = 3$, assim as equações (4.18) e (4.24) ficam reescritas como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (r_1^2 \dot{\theta}_1) &= \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\mathcal{G} M_1 \left(\frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_3^2 - 2r_1 r_3 \cos(\theta_1 - \theta_3)}} - \frac{r_1 \cos(\theta_1 - \theta_3)}{r_3^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \mathcal{G} J_2 R^2 \frac{(M_S + M_1)}{r_1^3} - \frac{3}{8} \mathcal{G} J_2 R^2 M_3 \frac{r_1 \cos(\theta_1 - \theta_3)}{r_3^4} \right) \end{aligned} \quad (4.44)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\dot{r}_1) &= \frac{\partial}{\partial r_1} \left(\frac{1}{2} r_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \mathcal{G} \frac{(M_S + M_1)}{r_1} \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{G} M_1 \left(\frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_3^2 - 2r_1 r_3 \cos(\theta_1 - \theta_3)}} - \frac{r_1 \cos(\theta_1 - \theta_3)}{r_3^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \mathcal{G} J_2 R^2 \frac{(M_S + M_1)}{r_1^3} - \frac{3}{8} \mathcal{G} J_2 R^2 M_3 \frac{r_1 \cos(\theta_1 - \theta_3)}{r_3^4} \right) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Definindo o termo G_{13} como o potencial perturbador de Epimeteu e do achatamento de Saturno em Jano de modo que:

$$\begin{aligned} G_{13} &= \mathcal{G} M_3 \left(\frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_3^2 - 2r_1 r_3 \cos(\theta_1 - \theta_3)}} - \frac{r_1 \cos(\theta_1 - \theta_3)}{r_3^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathcal{G} J_2 R^2 \frac{(M_S + M_1)}{r_1^3} - \frac{3}{8} \mathcal{G} J_2 R^2 M_3 \frac{r_1 \cos(\theta_1 - \theta_3)}{r_3^4} \end{aligned} \quad (4.46)$$

as equações (4.44) e (4.45) ficam:

$$\frac{d}{dt} (r_1^2 \dot{\theta}_1) = \frac{\partial}{\partial \theta_1} G_{13} \quad (4.47)$$

$$\ddot{r}_1 - r_1 \dot{\theta}_1^2 = -\mathcal{G} \frac{(M + M_1)}{r_1^2} + \frac{\partial}{\partial r_1} G_{13} \quad (4.48)$$

e ainda podemos reescrever a equação (4.47) como sendo:

$$r_1^2 \ddot{\theta}_1 + 2r_1 \dot{r}_1 \dot{\theta}_1 = \frac{\partial}{\partial \theta_1} (G_{13}) \quad (4.49)$$

Derivando a equação (4.37), e como n_0 , J_2 , R e a_0 são constantes, temos:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{d}{dt}(\delta n_1) \quad (4.50)$$

Substituindo as equações (4.37) e (4.50) em (4.47) e (4.48), chegamos:

$$\frac{d}{dt} (r_1^2 \dot{\theta}_1) = \frac{d}{dt} \left[r_1^2 \left(n_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right) + \delta n_1 \right) \right] = \frac{\partial G_{13}}{\partial \theta_1} \quad (4.51)$$

$$\ddot{r}_1 - r_1 (\dot{\theta}_1)^2 = \ddot{r}_1 - r_1 \left[n_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right) + \delta n_1 \right]^2 = -\frac{GM}{r_1^2} + \frac{\partial G_{13}}{\partial r_1} \quad (4.52)$$

mas tomando a equação (4.43):

$$r_1^2 = \left[a_0 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\delta n_1}{n_0 \left(1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2} \right)} \right) + \delta r_1 \right]^2 \quad (4.53)$$

negligenciado-se os termos com segunda ordem de δn_1 e δr_1 e abrindo a expressão:

$$r_1^2 = a_0^2 - \frac{4}{3} \frac{a_0^2 \delta n_1}{n_0 \left(1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2} \right)} + a_0^2 \left(\frac{2}{3} \frac{\delta n_1}{n_0 \left(1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2} \right)} \right)^2 \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} & + 2a_0 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\delta n_1}{n_0 \left(1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2} \right)} \right) \delta r_1 + (\delta r_1)^2 \\ & = a_0^2 - \frac{4}{3} a_0^2 \frac{\delta n_1}{n_0 \left(1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2} \right)} + 2a_0 \delta r_1 \end{aligned} \quad (4.55)$$

e usando a equação (4.37) e (4.55), negligenciando-se os termos com segunda ordem de δn_1 e δr_1 :

$$\begin{aligned} r_1^2 \dot{\theta}_1 &= \left(a_0^2 - \frac{4}{3} a_0^2 \frac{\delta n_1}{n_0 \left(1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2} \right)} + 2a_0 \delta r_1 \right) \left[n_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right) + \delta n_1 \right] \\ &= a_0^2 \left[n_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right) + \delta n_1 \right] - \frac{4}{3} a_0^2 \frac{\delta n_1}{n_0 \left(1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2} \right)} n_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right) \\ &\quad + 2a_0 \delta r_1 n_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right) \end{aligned}$$

que desmembrando:

$$\begin{aligned}
 r_1^2 \dot{\theta}_1 &= a_0^2 \left[n_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right) + \delta n_1 \right] - \frac{4}{3} a_0^2 \frac{\delta n_1}{n_0 \left(1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2} \right)} n_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right) \\
 &\quad + 2 a_0 \delta r_1 n_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right) \\
 &= a_0^2 n_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right) + a_0^2 \delta n_1 \left(1 - \left(\frac{4}{3} \right) \frac{1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}}{1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}} \right) + 2 \\
 &\quad a_0 \delta r_1 n_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right)
 \end{aligned} \quad (4.56)$$

Substituindo a equação (4.56) na (4.51):

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} (r_1^2 \dot{\theta}_1) &= \frac{d}{dt} \left[a_0^2 n_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right) + a_0^2 \delta n_1 \left(1 - \left(\frac{4}{3} \right) \frac{1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}}{1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 2 a_0 \delta r_1 n_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right) \right]
 \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$= \frac{\partial G_{13}}{\partial \theta_1} \quad (4.58)$$

Como a_0 , R , J_2 e n_0 são constantes temos finalmente que a equação (4.47) torna-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} (r_1^2 \dot{\theta}_1) &= a_0^2 \left(1 - \frac{4}{3} \frac{1 - \frac{3}{2} J_2 R^2 a_0^{-1}}{1 - \frac{5}{2} J_2 R^2 a_0^{-1}} \right) \frac{d}{dt} (\delta n_1) + 2 a_0 n_0 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0} \right) \frac{d}{dt} (\delta r_1) \\
 &= \frac{\partial G_{13}}{\partial \theta_1}
 \end{aligned} \quad (4.59)$$

Derivando a equação (4.43):

$$\frac{dr_1}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{a_0}{n_0 \left(1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2} \right)} \frac{d}{dt} (\delta n_1) + \frac{d}{dt} (\delta r_1) \quad (4.60)$$

$$\frac{d^2 r_1}{dt^2} = -\frac{2}{3} \frac{a_0}{n_0 \left(1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2} \right)} \frac{d^2}{dt^2} (\delta n_1) + \frac{d^2}{dt^2} (\delta r_1) \quad (4.61)$$

Sabendo da equação (4.42):

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}_1^2 &= \left[n_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right) + \delta n_1 \right]^2 \\
 &= n_0^2 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right)^2 + 2 n_0 \delta n_1 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right) + (\delta n_1)^2
 \end{aligned} \quad (4.62)$$

multiplicando a equação acima por r_1 dado pela equação (4.43) e negligenciando-se os termos com segunda ordem de δn_1 e δr_1 :

$$\begin{aligned}
 r_1 \dot{\theta}_1^2 &= \left[a_0 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\delta n_1}{n_0 \left(1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2} \right)} \right) + \delta r_1 \right] \\
 &\quad \left[n_0^2 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right)^2 + 2n_0 \delta n_1 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right) + (\delta n_1)^2 \right] \\
 &= a_0 n_0^2 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right)^2 - \frac{2}{3} \frac{a_0 \delta n_1}{\left(1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2} \right)} n_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right)^2 \\
 &\quad + \delta r_1 n_0^2 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right) + 2n_0 a_0 \delta n_1 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right) \\
 &= a_0 n_0^2 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right)^2 + 2a_0 n_0 \delta n_1 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0} - \frac{\left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right)^2}{3 \left(1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2} \right)} \right) \\
 &\quad + \delta r_1 n_0^2 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right) \quad (4.63)
 \end{aligned}$$

Analisando as equações (4.61) e (4.63) podemos reescrever a equação (4.52) na forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{dt^2} r_1 - r_1 \left(\frac{d}{dt} \theta_1 \right)^2 &= -\frac{2}{3} \frac{a_0}{n_0 \left(1 - \frac{5}{2} J_2 R^2 a_0^{-1} \right)} \frac{d^2}{dt^2} (\delta n_1) + \frac{d^2}{dt^2} (\delta r_1) \\
 &\quad - a_0 n_0^2 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0} \right)^2 \\
 &\quad - 2a_0 n_0 \delta n_1 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0} - \frac{\left(1 - \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0} \right)^2}{3 \left(1 - \frac{5}{2} J_2 R^2 a_0^{-1} \right)} \right) \\
 &\quad - \delta r_1 n_0^2 \left(1 - \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0} \right) \\
 &= -\frac{GM}{r_1^2} + \frac{\partial G_{13}}{\partial r_1} \quad (4.64)
 \end{aligned}$$

Olhando agora somente para os termos da equação (4.59), vamos negligenciar os termos relativos a δr_1 , de maneira que $G_{13}(r_1, r_3, \theta_1 - \theta_3)$ torna-se $G_{13}(a_0, a_0, \theta_1 - \theta_3)$. Reescrevendo desta forma a distância entre os dois satélites (Δ) é, se definirmos $\theta_1 - \theta_3 = \phi$ (separação angular entre os dois satélites):

$$\Delta^2 = a_0^2 + a_0^2 - 2a_0 a_0 \cos \phi = 2a_0^2 (1 - \cos \phi) \quad (4.65)$$

sabendo que

$$2(\sin(\phi/2))^2 = 1 - \cos \phi \quad (4.66)$$

temos:

$$\Delta^2 = 4a_0^2 (\sin(\phi/2))^2$$

e a equação (4.46) será dada por:

$$\begin{aligned} G_{13} &= \mathcal{G}M_3 \left(\frac{1}{\sqrt{4a_0^2 \sin^2(\phi/2)}} - \frac{\cos(\phi)}{a_0} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathcal{G}J_2 R^2 \frac{(M_s + M_1)}{a_0^3} - \frac{3}{8} \mathcal{G}J_2 R^2 M_3 \frac{\cos(\phi)}{a_0^3} \\ &= \mathcal{G}M_3 \left(\frac{1}{2a_0 |\sin(\phi/2)|} - \frac{\cos(\phi)}{a_0} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{G}J_2 R^2}{a_0^3} \left(M_s + M_1 - \frac{3}{4} M_3 \cos(\phi) \right) \end{aligned} \quad (4.67)$$

e similarmente para Epimeteu:

$$\begin{aligned} G_{31} &= \mathcal{G}M_1 \left(\frac{1}{2a_0 |\sin(\phi/2)|} - \frac{\cos(\phi)}{a_0} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{G}J_2 R^2}{a_0^3} \left(M_s + M_3 - \frac{3}{4} M_1 \cos(\phi) \right) \end{aligned} \quad (4.68)$$

Como definimos $\phi = \theta_1 - \theta_3$, então:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_3$$

e lembrando da equação (4.59) negligenciando-se δr_1 (pois tomamos $r_1 = a_0$) e sabendo que ela é equivalente para Epimeteu se trocarmos os índices 1 por 3 e 3 por 1:

$$\begin{aligned} a_0^2 \left(1 - \left(\frac{4}{3} \right) \frac{1 + \frac{3}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}}{1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}} \right) \frac{d^2(\phi)}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\mathcal{G} [M_1 + M_3] \left(\frac{1}{2a_0 |\sin(\phi/2)|} - \frac{\cos(\phi)}{a_0} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{G}J_2 R^2}{a_0^3} \left(-\frac{3}{4} \cos(\phi) \right) \right) \end{aligned}$$

ou ainda

$$\left(1 - \left(\frac{4}{3}\right) \frac{1 + \frac{3}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}}{1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}}\right) \frac{d^2 \phi}{dt^2} = \frac{\mathcal{G}(M_3 + M_1)}{a_0^3} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{2 |\sin(\phi/2)|} - \left(1 - \frac{3}{8} \frac{J_2 R^2}{a_0^2}\right) \cos(\phi) \right] \quad (4.69)$$

Definindo $\epsilon = (M_3 + M_1/M)^{1/2}$:

$$\epsilon^2 = \frac{M_3 + M_1}{M}$$

e multiplicando por n_0^2

$$\epsilon^2 n_0^2 = \frac{\mathcal{G}(M_3 + M_1)}{a_0^3} \quad (4.70)$$

Substituindo a equação (4.70) na equação (4.69):

$$\left(1 - \frac{4}{3} \frac{1 + \frac{3}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}}{1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}}\right) \frac{d^2 \phi}{dt^2} = \epsilon^2 n_0^2 \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{2 \sin(\phi/2)} - \left(1 - \frac{3}{8} \frac{J_2 R^2}{a_0^2}\right) \cos(\phi) \right] \quad (4.71)$$

Multiplicando a equação (4.71) por $d\phi/dt$, e rearranjando

$$0 = \left(1 - \frac{4}{3} \frac{1 + \frac{3}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}}{1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}}\right) \frac{d\phi}{dt} \frac{d^2 \phi}{dt^2} - \epsilon^2 n_0^2 \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\frac{1}{2 \sin(\phi/2)} - \left(1 - \frac{3}{8} \frac{J_2 R^2}{a_0^2}\right) \cos(\phi) \right] \frac{d\phi}{dt} \quad (4.72)$$

podemos então integrar a equação (4.72):

$$\bar{C} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{1 + \frac{3}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}}{1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}}\right) \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - \epsilon^2 n_0^2 \left[\frac{1}{2 \sin(\phi/2)} - \left(1 - \frac{3}{8} \frac{J_2 R^2}{a_0^2}\right) \cos(\phi) \right] \quad (4.73)$$

sendo $\bar{C}$ uma constante de integração, chamando:

$$x = \left| \sin \frac{\phi}{2} \right| \quad (4.74)$$

e pela relação trigonométrica:

$$\cos \phi = 1 - 2 \sin^2(\phi/2) = 1 - 2x^2 \quad (4.75)$$

que substituindo na equação (4.74) chegamos:

$$\begin{aligned} \bar{C} = & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{1 + \frac{3}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}}{1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}} \right) \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \\ & - \epsilon^2 n_0^2 \left[\frac{1}{2x} - 1 + 2x^2 - \frac{3}{8} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} (1 - 2x^2) \right] \end{aligned} \quad (4.76)$$

Definindo $\bar{E} = \bar{C} - \epsilon^2 n_0^2 - \frac{3}{8} \frac{J_2 R^2}{a_0^2}$, temos:

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{1 + \frac{3}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}}{1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}} \right) \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \frac{\epsilon^2 n_0^2}{2x} \left[1 + 4x^3 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} x^3 \right] \quad (4.77)$$

Assim como no caso sem achatamento constante E é definida como negativa, pois como trabalhamos com o módulo de x no segundo termo o segundo termo da expressão acima deve ser sempre negativo, e o primeiro termo, que é o equivalente a energia cinética, também é uma quantidade negativa.

Rearranjando a equação (4.77):

$$\sqrt{2\bar{E}} = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{4}{3} \frac{1 + \frac{3}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}}{1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}} \right)}{1 + \frac{\epsilon^2 n_0^2}{2x\bar{E}} \left[1 + 4x^3 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} x^3 \right]}} \left(\frac{d\phi}{dt} \right) \quad (4.78)$$

ou ainda:

$$\sqrt{2\bar{E}} = \left(1 - \frac{4}{3} \frac{1 + \frac{3}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}}{1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{x}{x + \frac{\epsilon^2 n_0^2}{2\bar{E}} \left[1 + \left(4 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right) x^3 \right]}} \left(\frac{d\phi}{dt} \right) \quad (4.79)$$

Definindo:

$$\bar{R}(x) = x + \frac{\epsilon^2 n_0^2}{2\bar{E}} \left[1 + \left(4 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} \right) x^3 \right]$$

e

$$\bar{A} = -\epsilon^2 n_0^2 / 2\bar{E} \quad (4.80)$$

chegamos a:

$$\sqrt{2\bar{E}} = \left(1 - \frac{4}{3} \frac{1 + \frac{3}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}}{1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{x}{\bar{R}(x)}} \left(\frac{d\phi}{dt} \right) \quad (4.81)$$

integrando:

$$(t - t_0)(2\bar{E})^{1/2} = \left(1 - \frac{4}{3} \frac{1 + \frac{3}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}}{1 + \frac{7}{2} J_2 R^2 a_0^{-2}}\right)^{1/2} \int_{\phi_0}^{\phi} d\phi \left(\frac{x}{\bar{R}(x)}\right)^{1/2} \quad (4.82)$$

Vemos pela equação (4.81) que para a raiz de $\bar{R}(x)$, então teremos o ponto de mínimo ϕ , ou seja a menor separação entre os satélites para uma órbita ferradura, ou a máxima ou mínima separação para uma órbita do tipo girino. Como $R(x)$ é uma equação cúbica encontramos 3 raízes de acordo com o valor de J_2 que nos fornecerão o seno da metade do ângulo de menor aproximação entre os satélites (equação 4.74).

A estabilidade (i.e. $d^2\phi/dt^2 = 0, d\phi/dt = 0$) corresponde derivando a equação (4.77):

$$\frac{d\left(\frac{\epsilon^2 n_0^2}{2} \left[\frac{1}{x} + 4x^2 + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{a_0^2} x^2\right]\right)}{dx} \frac{dx}{d\phi} = 0 \quad (4.83)$$

$$\left[\frac{1}{2} \epsilon^2 n_0^2 \left[-\frac{1}{x^2} + 8x + 3 \frac{J_2 R^2}{a_0^2} x\right]\right] \frac{dx}{d\phi} = 0 \quad (4.84)$$

isto implica que:

$$\left[-\frac{1}{x^2} + 8x + 3 \frac{J_2 R^2}{a_0^2} x\right] = 0 \quad (4.85)$$

cuja solução é:

$$x = \left(\frac{a_0^2}{8a_0^2 + 3J_2(R^2)}\right)^{1/3} \quad (4.86)$$

de modo que a defasagem entre os pontos de estabilidade de cada um dos satélites passa a depender do valor de J_2 , e é dado por

$$\bar{\phi}_{\min} = 2 \arcsen \left(\frac{a_0^2}{8a_0^2 + 3J_2(R^2)}\right)^{1/3}$$

para $J_2 = 0$, encontramos $\bar{\phi}_{\min} = 60$ graus, que são os pontos Lagrangianos no caso sem achatamento. A **figura** (4.1) mostra a defasagem dos pontos de estabilidade de um sistema coorbital da razão de massa da ordem de Saturno-Jano-Epimeteu, em função do achatamento do planeta, considerado pelo parâmetro J_2 . Observa-se que quanto maior o parâmetro J_2 , estes pontos tendem a se aproximar entre si, tendo uma suave queda, de cerca de 0,02 graus para o J_2 real de Saturno.

Um ponto interessante corresponde a transição girino ferradura, onde $\phi_{\max} = \pi$ (o que implica que $x = 1$) e $d\phi/dt = 0$, substituindo estes valores na equação (4.77):

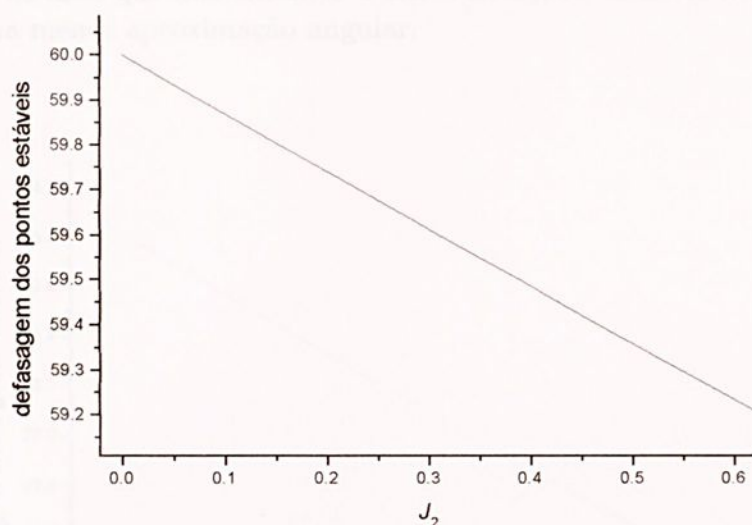


Figura 4.1: A defasagem angular dos pontos estáveis de um par de satélites coorbitais em função do achatamento (J_2) do planeta. Quanto maior o achatamento, os pontos se aproximam angularmente

$$\bar{E} = -\frac{\epsilon^2 n_0^2}{2} \left(5 + \frac{3 J_2 R^2}{2 a_0^2} \right) \quad (4.87)$$

e $A = -\epsilon^2 n_0^2 / \left(-2 \left(\frac{5\epsilon^2 n_0^2}{2} + \frac{3 J_2 R^2}{2 a_0^2} \right) \right)$ mas a condição $d\phi/dt = 0$ também poderia equivaler para a mínima aproximação $\phi_{\min}$, de modo que para esta mesma constante de $\bar{E}$ (transição girino-ferradura):

$$\bar{E} = -\frac{\epsilon^2 n_0^2}{2} \left(5 + \frac{3 J_2 R^2}{2 a_0^2} \right) = -\frac{\epsilon^2 n_0^2}{2x} \left[1 + 4x^3 + \frac{3 J_2 R^2}{2 a_0^2} x^3 \right]$$

que pode ser reescrita como:

$$0 = 1 - \left(5 + \frac{3 J_2 R^2}{2 a_0^2} \right) x + \left(4 + \frac{3 J_2 R^2}{2 a_0^2} \right) x^3$$

A solução para x na equação acima, fornece o seno da metade do ângulo de menor aproximação entre os satélites (equação 4.74) para o caso transição girino-ferradura, porém considerando o efeito do achatamento do planeta. A **figura** (4.2) mostra a relação entre o achatamento do planeta J_2 e a mínima para órbitas do tipo transição girino ferradura. Para $J_2 = 0$, retornamos ao caso

sem achatamento, em que $\phi_{\min} = 23,906$ graus, mostrando a convergência dos resultados. A medida que aumentamos o efeito de J_2 , os satélites neste tipo de órbita tem uma menor aproximação angular.

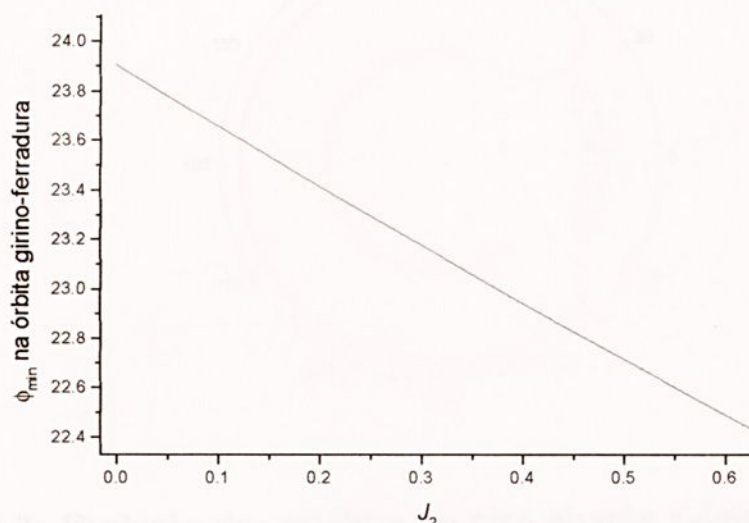


Figura 4.2: O gráfico mostra a influência do achatamento do planeta na mínima aproximação angular entre satélites coorbitais para órbitas de transição girino-ferradura ($\phi_{\max} = 180$ graus). Quanto maior o parâmetro que representa o achatamento do planeta (J_2) mais os satélites se aproximam angularmente para este tipo de órbita.

4.4 Resultados numéricos

Integramos as equações (4.26), (4.27), (4.28) e (4.29) simultaneamente para o sistema Saturno-Jano-Epimeteu. Para se verificar a real influência do achatamento de Saturno neste sistema, aumentou-se gradativamente o valor de J_2 para as mesmas condições iniciais que geraram a **figura 3.14**, passando por 0.1%, 1%, 10% e 100% do valor real de J_2 de Saturno, ou seja $0,01628$.

Tomando-se 0.1% do achatamento real de Saturno, $0,01628 \times 10^{-4}$, e integrando-se com este valor temos a evolução de Jano (S_1) e Epimeteu (S_3) no eixo girante mostrada pelas **figura 4.3**, **4.4** e **4.5**

Percebe-se pela **figura 4.5** que as linhas ficam mais espessas em relação a quando não há achatamento, e de fato se ampliarmos uma região dessas linhas para qualquer um dos satélites vemos uma oscilação de curto período como a mostrada pela **figura 4.6**. Esta oscilação é de cerca de 4 períodos orbitais.

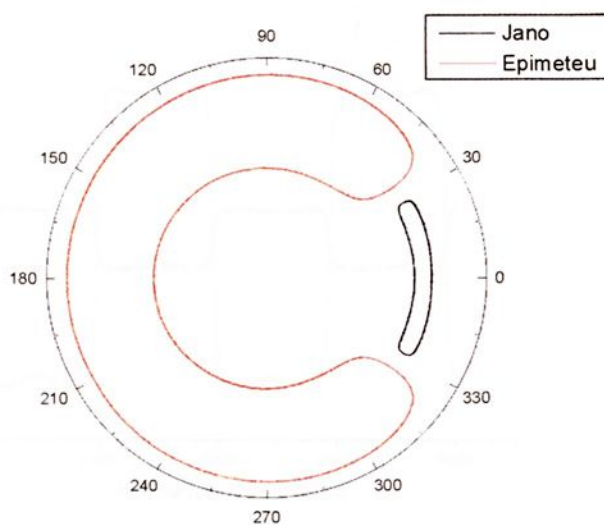


Figura 4.3: Evolução dos satélites no eixo girante submetidos a 0.1% do achatamento real de Saturno.

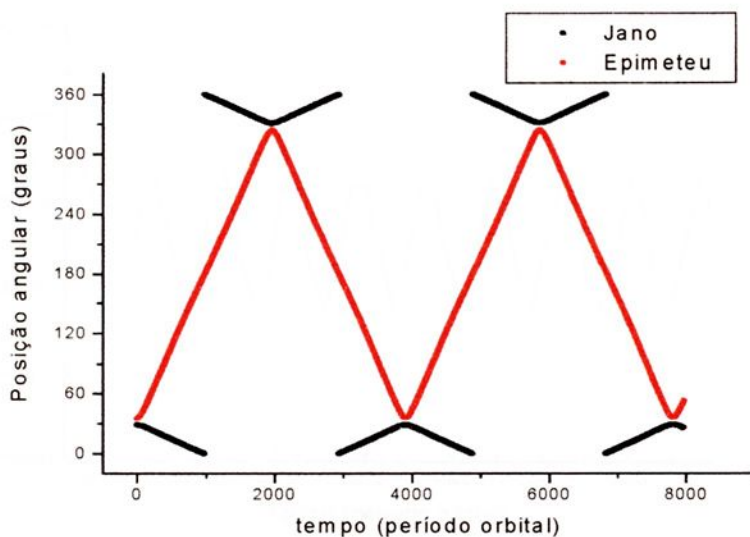


Figura 4.4: Ângulos dos satélites em função do tempo para o caso ferradura sob 0.1% do achatamento real de Saturno.

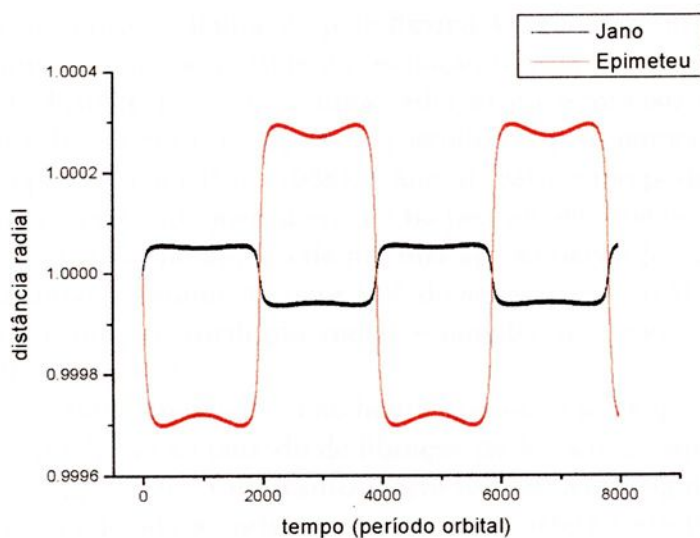


Figura 4.5: Distância radial de Jano e Epimeteu a Saturno sob 0.1% do achatamento.

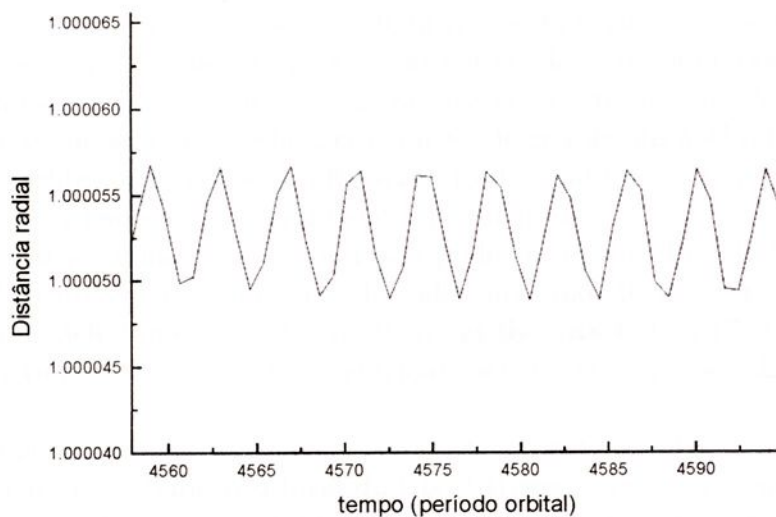


Figura 4.6: Ampliação do gráfico da distância radial contra o tempo para S1, em uma pequena região.

Aumentando o achatamento para 1% do achatamento real de Saturno, obtemos a evolução orbital mostrada pela **figura 4.7**.

O que se nota primordialmente pela **figura 4.7** e mais ainda pela **figura 4.9** é que há um aumento na amplitude da oscilação devida ao achatamento, percebe-se ainda pela **figura 4.7** que há uma redução do semi-eixo médio em relação ao caso sem achatamento, isto pode ser explicado pelo aumento do movimento médio, como previsto por Roy (1988), e apesar disto como pode ser observado na **figura 4.8** não houve qualquer alteração no período em que os satélites perfazem a ferradura bem como no ângulo de mínima aproximação ($\phi_{\min} = 6,9^\circ$).

Aumentando o achatamento para 10% do achatamento real, vê-se os seguintes resultados de evolução, oscilação radial e angular mostrados pelas respectivas **figuras 4.10, 4.12 e 4.11**.

Observamos inicialmente que não houve aparentemente qualquer alteração na **figura 4.11** em relação ao período de libração da ferradura bem como da mínima aproximação $\phi_{\min} = 6,9^\circ$. Entretanto houve um aumento significativo da amplitude da oscilação devida ao achatamento torna a órbita ferradura irreconhecível, acompanhada de uma nova queda do semi-eixo.

Na **figura 4.15** vemos a distância radial de Jano e Epimeteu contra o tempo para o achatamento de Saturno ($J_2 = 0.016$).

Para este grau de achatamento, a amplitude da oscilação radial de curto período se destaca, de modo a não ser mais possível visualizar a ferradura original no gráfico que representa a distância radial dos satélites a Saturno no tempo (**figura**). Entretanto, eles continuam perfazendo um sistema coorbital, onde um satélite nunca ultrapassa o outro angularmente, como mostra a **figura 4.14**.

Cumpre destacar que todas as figuras que mostram a evolução orbital dos satélites estão ampliadas. Colocando-as em escala real, não é possível visualizar a largura radial da ferradura nem a oscilação de curto período devida ao achatamento, mas somente uma órbita circular em forma de um anel falhado para cada um dos satélites, como mostra a **figura 4.15** da órbita dos satélites Jano e Epimeteu em escala real com o achatamento de Saturno.

A oscilação radial de curto período pode ser explicado pelo fato de ter sido detectada também um aumento do valor máximo da excentricidade e com o aumento do achatamento, como mostram as **figuras 4.16, 4.17, 4.18, 4.19 e 4.20**, nas quais vemos a variação da excentricidade com o tempo para diferentes valores de J_2 .

O aumento dos valores máximos que as excentricidades osculadoras podem assumir em um sistema coorbital do tipo Saturno - Jano - Epimeteu em função do parâmetro J_2 , que representa o achatamento, é mostrado na **figura (4.21)**. Conforme o valor de J_2 cresce, as excentricidades máximas alcançam valores cada vez maiores.

Vimos neste capítulo a influência do achatamento em satélites coorbitais, concluindo que o achatamento do corpo principal provoca oscilações radiais de curto período na órbita dos satélites e o aumento da excentricidade osculadora.

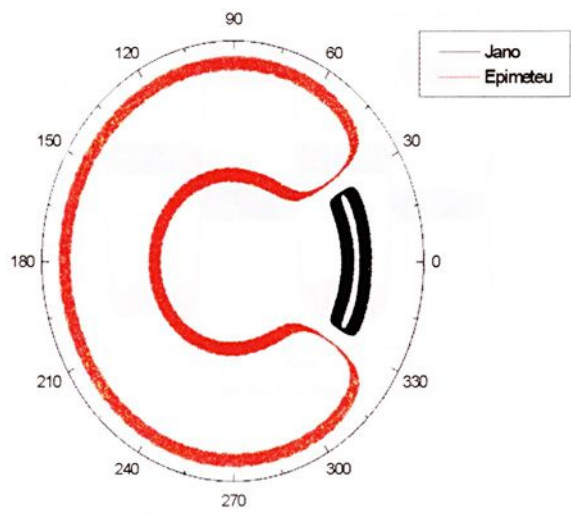


Figura 4.7: Evolução dos satélites no eixo girante submetidos a 1% do achatamento real de Saturno.

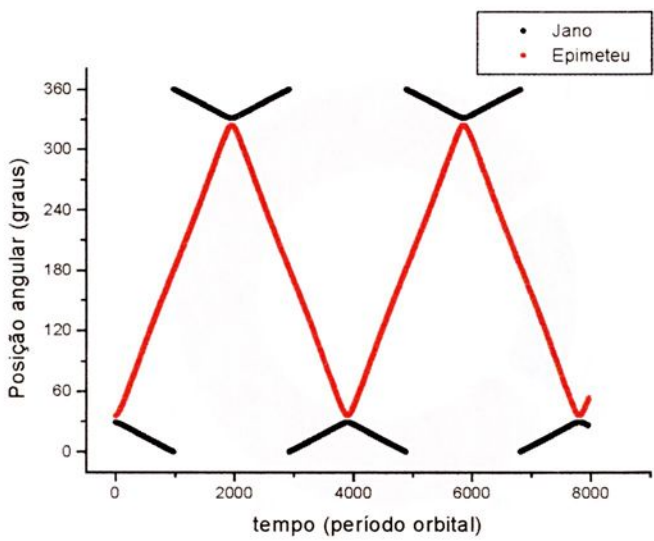


Figura 4.8: Ângulo dos satélites em função do tempo para o caso ferradura sob 1% do achatamento real de Saturno.

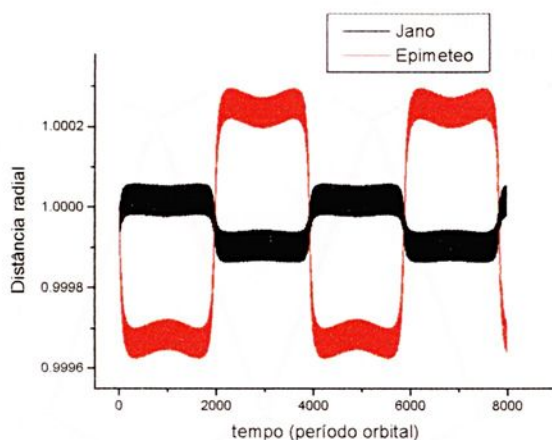


Figura 4.9: Distância radial para os satélites Jano e Epimeteu sob 1% do achatamento de Saturno. Houve um aumento de amplitude na oscilação radial de curto período, além da queda do semi-eixo médio

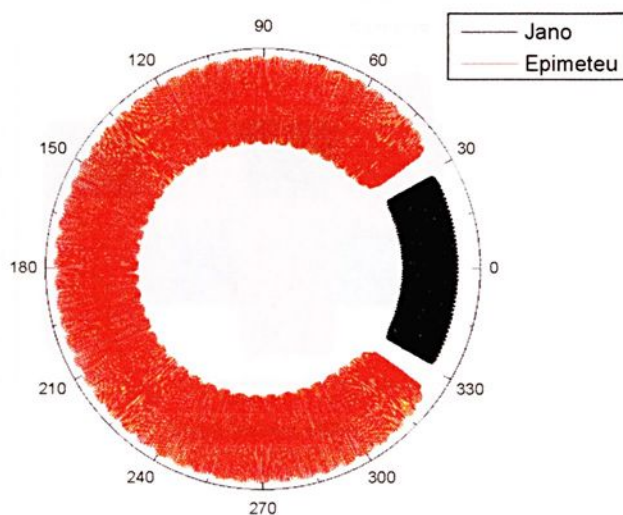


Figura 4.10: Evolução dos satélites Jano e Epimeteu no eixo girante submetidos a 10% do achatamento real de Saturno.

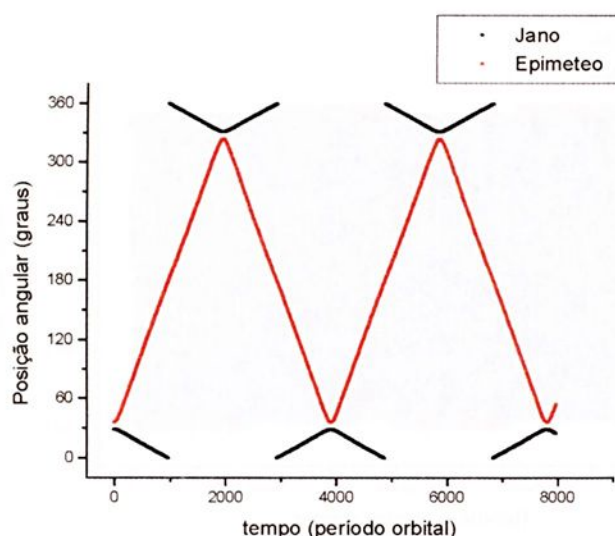


Figura 4.11: Ângulo dos satélites Jano e Epimeteu em função do tempo para o caso ferradura sob 10% do achatamento real de Saturno.

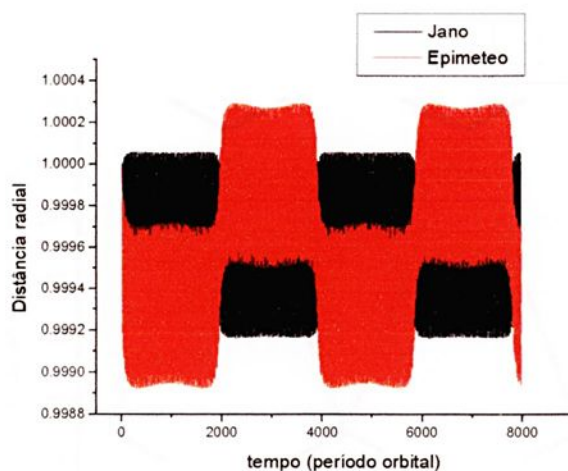


Figura 4.12: Evolução radial de Jano e Epimeteu a Saturno sob 10% do achatamento em S . Ocorreu o aumento da oscilação radial de curto período, o que o que justifica o espessamento das linhas e a diminuição do semi-eixo médio, eles não oscilam mais ao redor de 1.

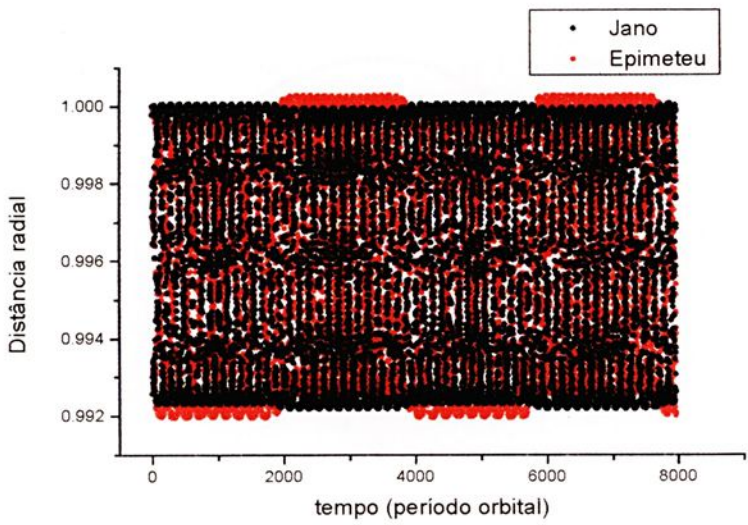


Figura 4.13: Evolução da distância de Epimeteu a Saturno contra o tempo para o achatamento real de Saturno.

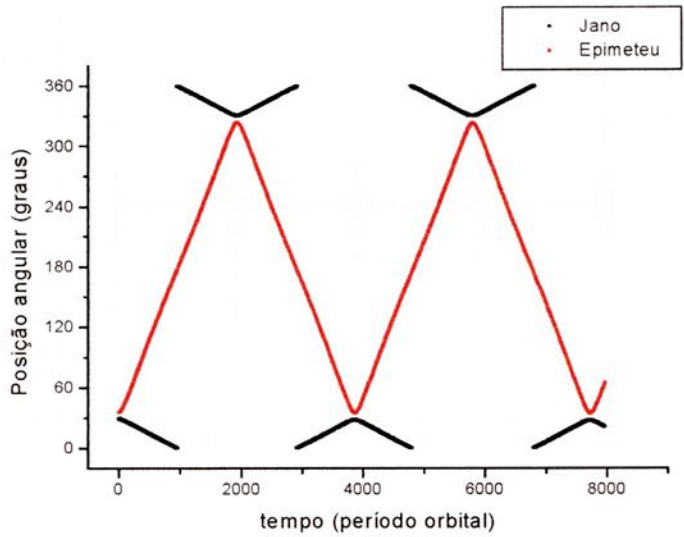


Figura 4.14: Ângulos dos satélites S_1 e S_3 para o achatamento de Saturno.

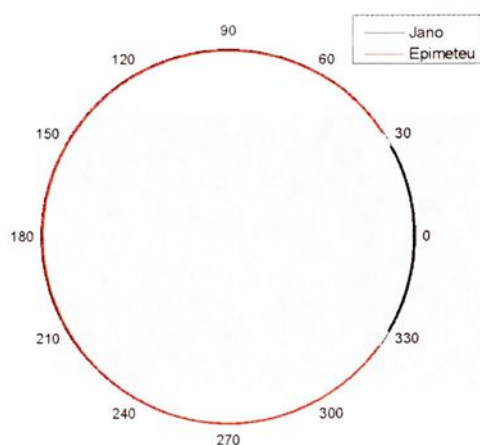


Figura 4.15: Evolução para Jano e Epimeteu com o achatamento de Saturno. Este gráfico está em escala real, de modo não podemos visualizar a oscilação radial da ferradura.

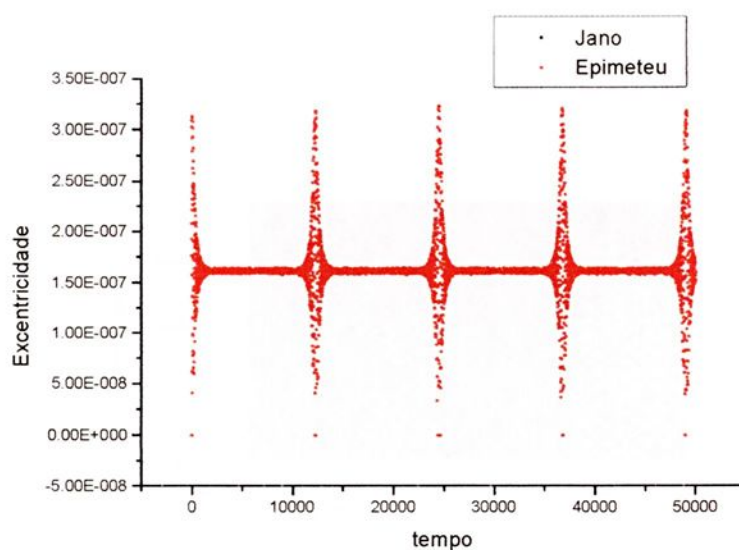


Figura 4.16: Excentricidade pelo tempo, para os satélites Jano e Epimeteu onde Saturno não possui achatamento. Os valores dos dois satélites estão sobrepostos.

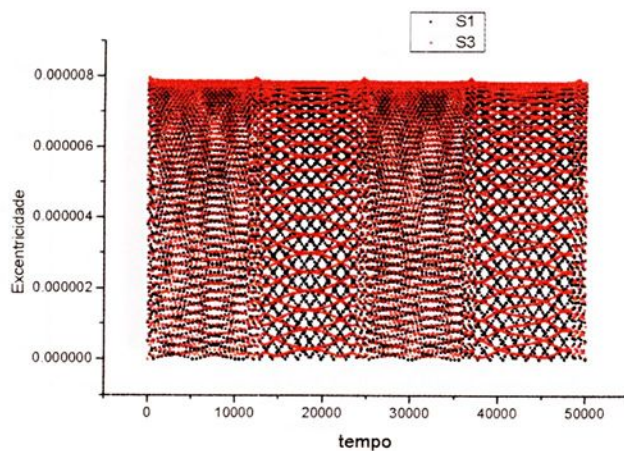


Figura 4.17: Excentricidade pelo tempo para os satélites Jano e Epime-teu, o corpo principal com 0.1% do achatamento de Saturno.

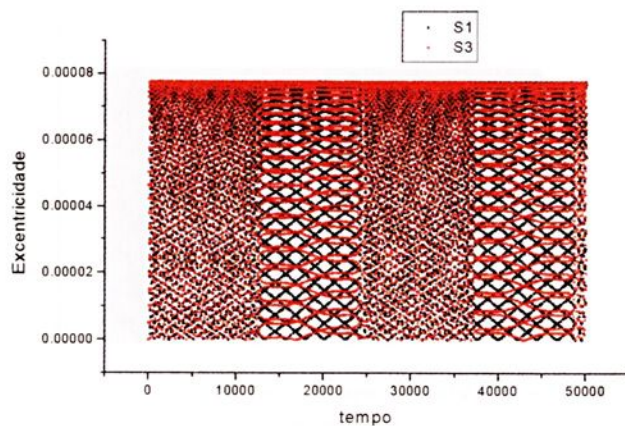


Figura 4.18: Excentricidade pelo tempo para os satélites Jano e Epime-teu, o corpo principal com 1% do achatamento de Saturno.

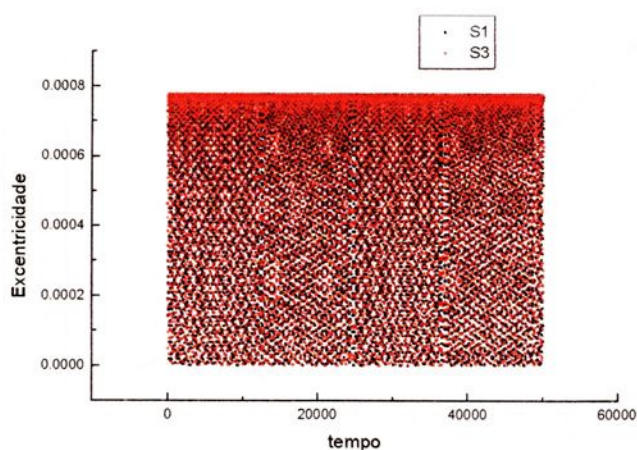


Figura 4.19: Excentricidade pelo tempo para os satélites Jano e Epime-teu, o corpo principal com 10% do achatamento de Saturno.

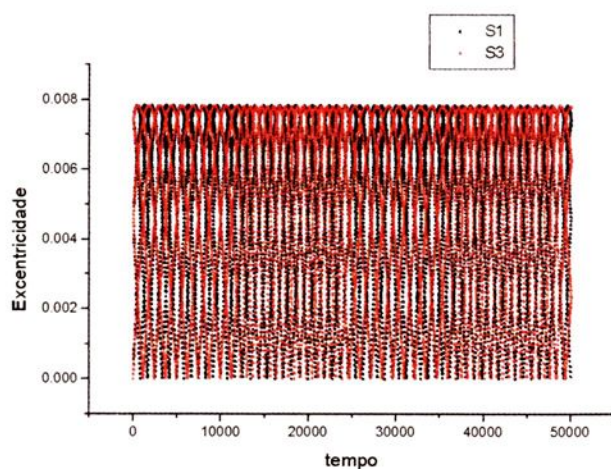


Figura 4.20: Excentricidade pelo tempo para os satélites Jano e Epime-teu, o corpo principal com achatamento real de Saturno.

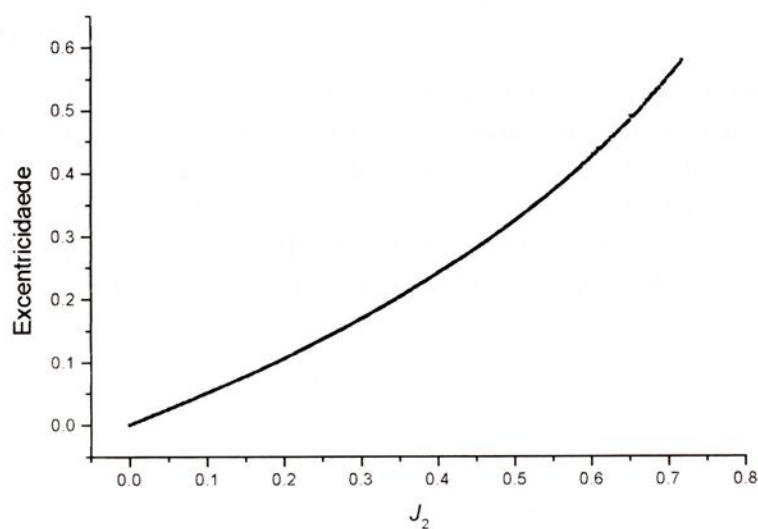


Figura 4.21: Valores das excentricidades osculadoras de um sistema coorbital do tipo Saturno - Jano - Epimeteu em função do parâmetro J_2 , que representa o achatamento de Saturno. Conforme o valor de J_2 cresce, as excentricidades máximas alcançam valores cada vez maiores.

5 A razão de massa entre os satélites

5.1 Introdução

Nesta parte busca-se verificar o que ocorre com um sistema coorbital composto de dois satélites genéricos S_1 e S_3 com a variação da massa de um dos satélites. Para tanto, nos referiremos unicamente às condições iniciais de $A = 0,2$ (separatriz). Para massas iguais $M_1 = M_3$, observa-se a simetria tanto na evolução (**figura 5.1**) bem como na posição radial (**figura 5.2**). Isto era esperado, pois as forças envolvidas neste sistema são simétricas para cada um dos satélites.

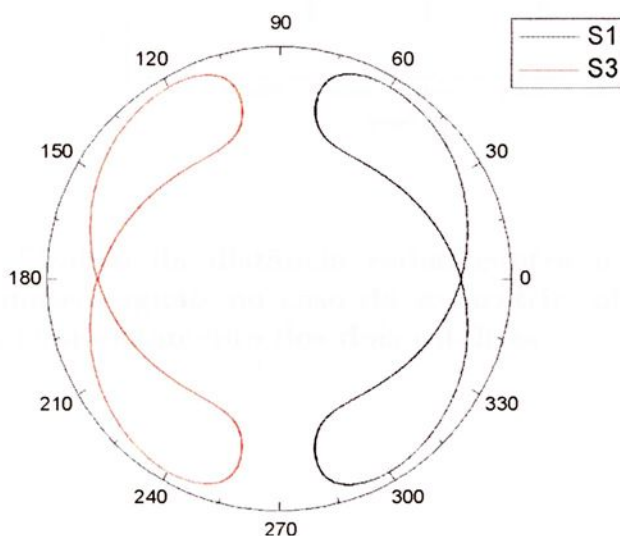


Figura 5.1: Evolução no eixo girante para dois satélites de massas iguais. Os dois satélites possuem evolução simétrica, como era esperado, pois as forças envolvidas são simétricas

Tomando como exemplo $M_3 = 0,075M_1$, obtém-se os gráficos de evolução orbital, radial e angular, pelas respectivas **figuras** (5.3), (5.4) e (5.5). Observa-se que neste caso S_1 permanece praticamente estático em relação ao sistema girante, enquanto S_3 perfaz grandes excursões. Este caso pode ser quase considerado como o restrito, pois uma das massas (no caso M_3), praticamente, não interfere na outra (M_1).

A evolução para diversos valores da razão M_3/M_1 é mostrada simultaneamente pela **figura 5.6**, de modo, que partimos do caso restrito para M_3 , passamos pela simetria de massas e chegamos ao caso restrito de M_1 .

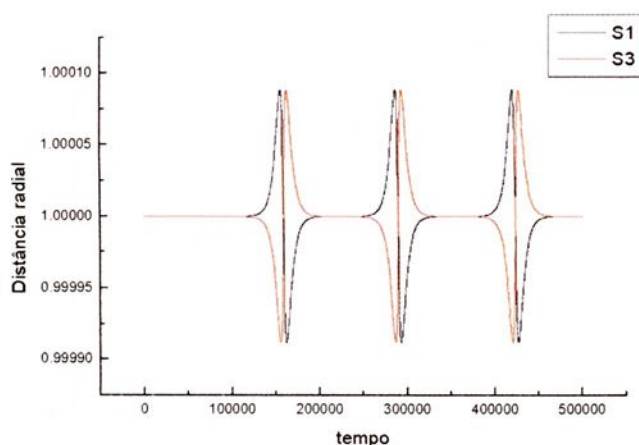


Figura 5.2: Gráfico da distância radial contra o tempo para dois satélites de massas iguais no caso da separatriz, observamos a simetria entre no comportamento dos dois satélites

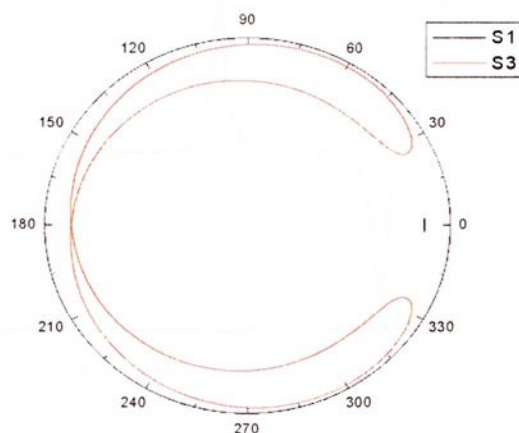


Figura 5.3: Evolução dos satélites para $M_3 = 0,075M_1$. Observamos que S_3 praticamente permanece estático e S_1 perfaz longas excursões

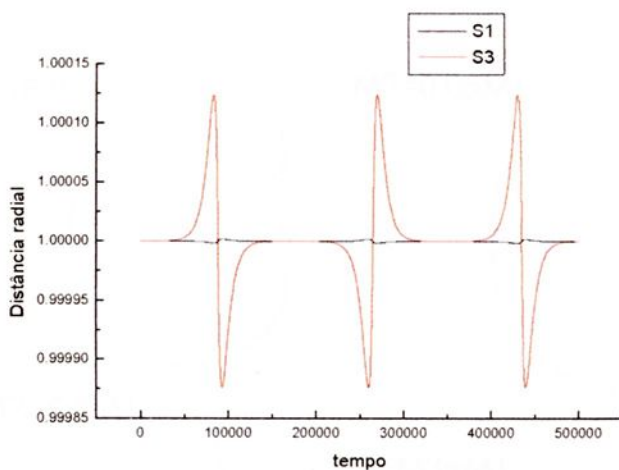


Figura 5.4: Evolução radial para razão de massa $M_3 = 0,075M_1$. O satélite S_1 , praticamente não apresenta movimento radial.

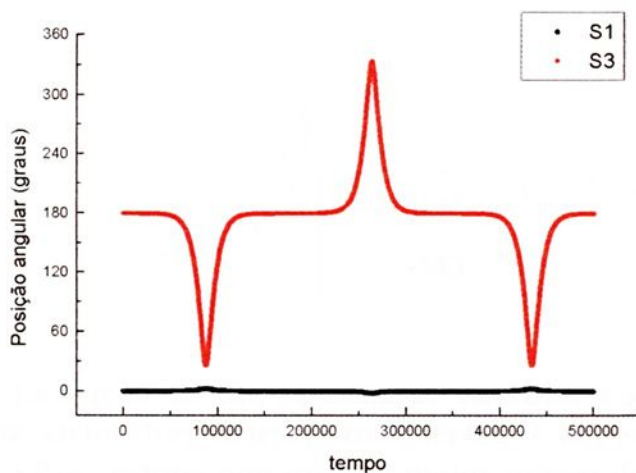


Figura 5.5: Posição angular para razão de massa $M_3 = 0,075M_1$. O satélite S_1 praticamente não apresenta alteração angular no eixo girante.

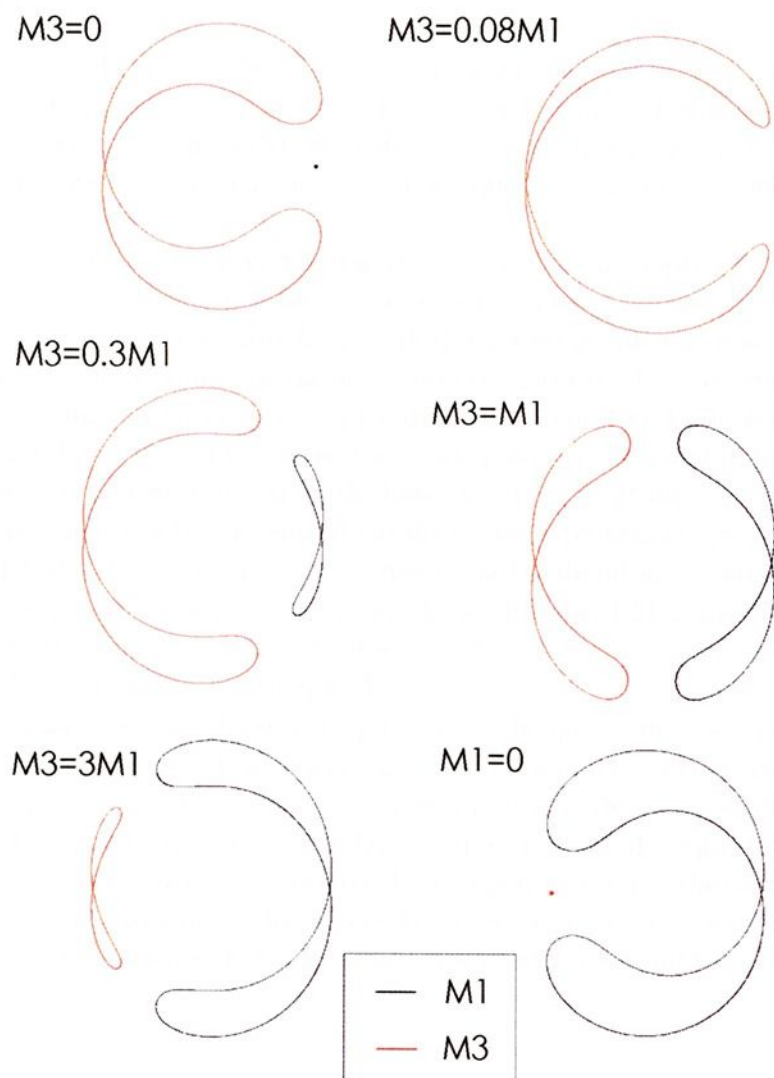


Figura 5.6: Evolução de um sistema de satélites coorbitais na região de separatriz girino-ferradura para diferentes razões de massa entre os satélites. Observamos que quanto maior massa de um dos satélites menos este satélite oscila, enquanto o outro satélite apresenta movimentos de amplitudes crescentes.

5.2 Os pontos de equilíbrio com a variação da razão de massa

Fazendo a variação da massa de S_3 , observamos que as posições angulares dos dois pontos estabilidade de S_1 , tendem a ficar cada vez mais deslocados entre si. A **figura** (5.7) mostra a variação angular de um destes pontos (L_{5S1}) com a razão de massa M_3/M_1 medida em relação a um eixo que corta a amplitude média da libração angular de S_3 .

Um ponto a ser ressaltado na **figura** (5.8), que é uma ampliação da **figura** (5.7) na região de $M_3 = M_1$, é o fato de que para massas iguais ($M_1 = M_3$), o ponto de estabilidade Lagrangiano L_{5S1} se desloca a 60 graus em relação ao eixo que passa pela posição angular média de S_1 no eixo girante. Isto justifica a simetria observada na **figura** (5.1), pois o próximo ponto conjugado de estabilidade L_{5S3} deve estar 60 graus de L_{5S1} , logo todos os 4 pontos de estabilidade (tanto da girino do lado esquerdo quanto os do lado direito). Portanto, para satélites de massas iguais, os 6 pontos de equilíbrio do sistema (contando os 2 instáveis) se localizam distribuídos simetricamente, distanciados de 60 graus entre si.

O limite superior da posição deste ponto deve estar em 120 graus, que corresponderia ao caso restrito onde M_1 seria desprezível em relação ao M_3 , e o inferior em 0 graus onde M_1 é muito maior que M_3 .

O que se percebe essencialmente é que a medida que vamos aumentando a massa de S_3 , os pontos de equilíbrio deste satélite tendem a se aproximarem entre si, convergindo para o ponto instável L_{3S3} enquanto os de S_1 a se distanciam mutuamente. Portanto para $M_3 \gg M_1$, os dois pontos de equilíbrio de S_3 : L_{4S3} e L_{5S3} se sobrepõe, surgem os pontos Lagrangianos de instabilidade L_1 , L_2 , portanto estamos tratando agora do caso restrito de três corpos. A análise inversa para S_1 também é verdadeira. Esta dinâmica dos pontos de equilíbrio é ilustrado na **figura** (5.9).

5.3 Dinâmica do sistema com a variação da razão de massa dos satélites

Monitoramos também outros elementos dinâmicos deste sistema com a variação de massa de M_3 como as oscilações radiais e angulares de ambos os satélites.

Primeiramente não foi detectado aumento da mínima distância angular entre os dois satélites com o aumento da massa, como ilustra a **figura** (5.10).

Quanto maior a massa de S_3 implica que maior será a amplitude de oscilação radial e angular para S_1 e menor a de S_3 . Isto é mostrado radialmente nas **figuras** (5.11) e (5.12) e angularmente na **figura** (5.13). Lembrando que o limite do

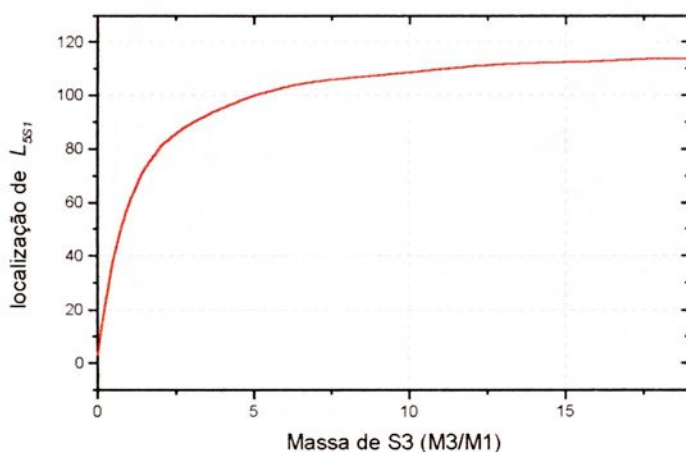


Figura 5.7: O gráfico mostra o deslocamento angular em graus em relação ao eixo da média libração angular de S_1 de um dos pontos de equilíbrio de S_1 para a razão de massa M_3/M_1 .

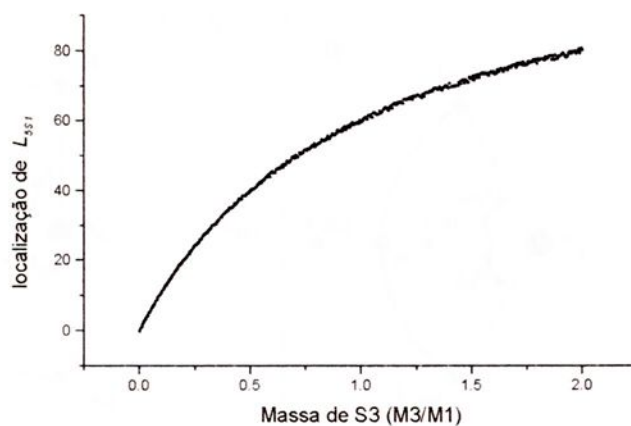


Figura 5.8: O gráfico mostra o deslocamento do ponto de equilíbrio de S_1 em graus para a relação de massa M_3/M_1 , uma ampliação do gráfico anterior ao redor de $M_3 = M_1$.

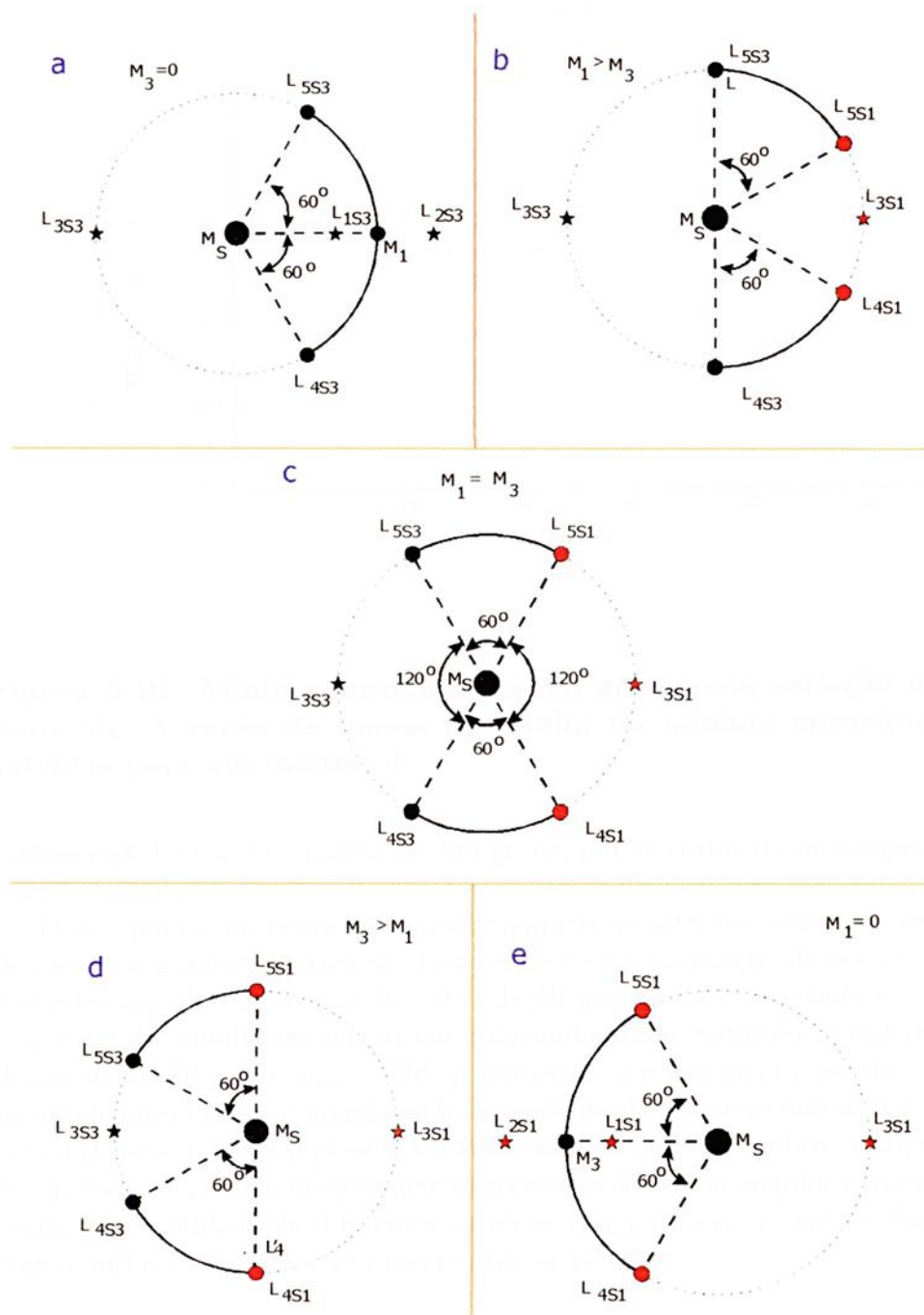


Figura 5.9: Dinâmica da evolução dos pontos de equilíbrio de satélites coorbitais com relação a razão de massa dos satélites: (a)- caso restrito com $M_3 = 0$; (b)- caso não restrito para $M_1 > M_3$; (c)- massas iguais, simetria na localização dos pontos; (d)- caso não restrito para $M_3 > M_1$; (e)- caso restrito com $M_1 = 0$. A defasagem entre os pontos de equilíbrio correspondentes permanece constante: 60 graus

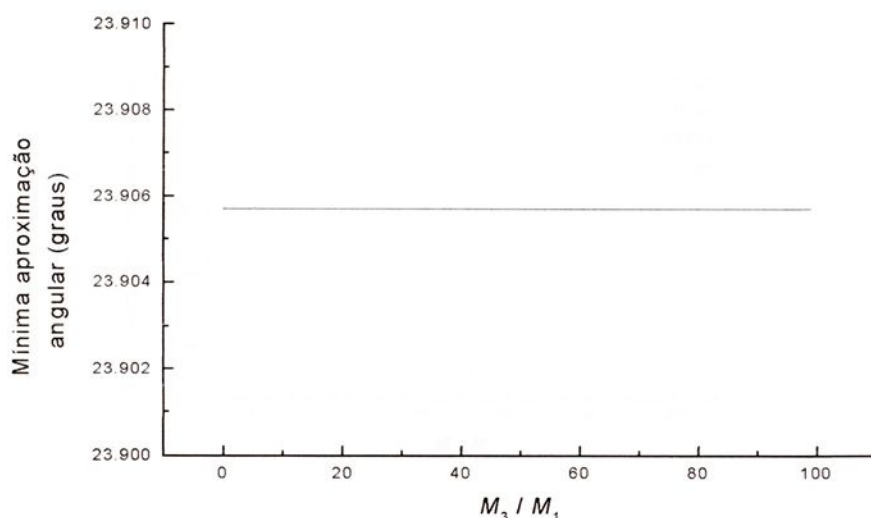


Figura 5.10: Mínima aproximação em graus pela variação de massa para M_3 . A razão de massa não influi na mínima aproximação dos satélites para um mesmo A .

último não deverá ultrapassar de 180 graus, por se tratar da interseção de girino para ferradura.

Outro ponto interessante é aquele quando os satélites estão nos seus pontos de mínimos e máximos radiais. Independente da proporção de massa, eles estão distantes angularmente um do outro de 60 graus. Este resultado é o esperado, pois fazendo simulações numéricas colocando como condição inicial os satélites dafasados de 60 graus, $\phi_{\min} = 60^\circ$, percebemos que eles não apresentam variações de amplitudes radiais e angulares independente da razão de massa. De modo que esta distância angular representa pontos estáveis que nos lembra os Lagrangianos. A conclusão é que não há qualquer alteração na distância angular entre os mesmos pontos de equilíbrio de diferentes satélites (L_{4S1} e L_{4S3} , ou então, L_{5S1} e L_{5S3}) com a variação da razão de massa entre os satélites.

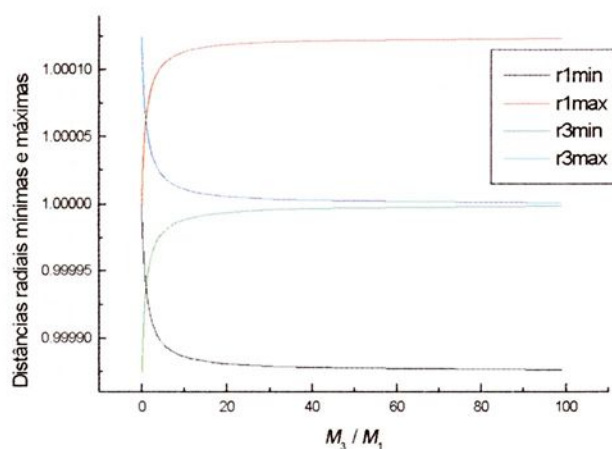


Figura 5.11: Distâncias radiais máximas e mínimas para S_1 e S_3 . Para $M_1 = M_3$ percebe-se que os raios máximos ou mínimos dos satélites são iguais. As curvas de cada um dos satélites se tocam quando as massas são iguais, mostrando que também há simetria radial em satélites coorbitais de mesma massa.

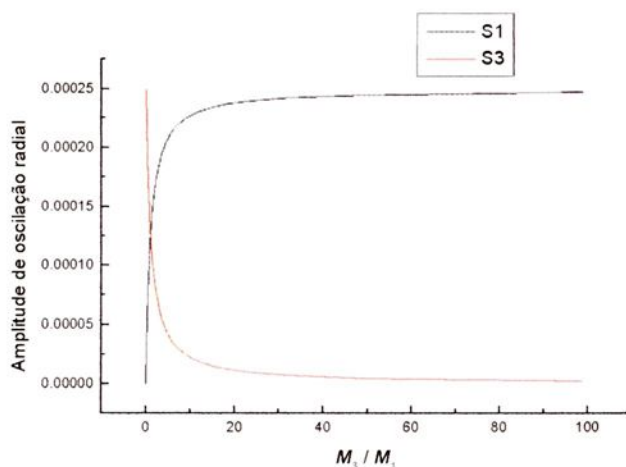


Figura 5.12: Amplitude de oscilação radial dos satélites S_1 e S_3 para variação da razão de massa dos satélites na condição de órbita separtriz.

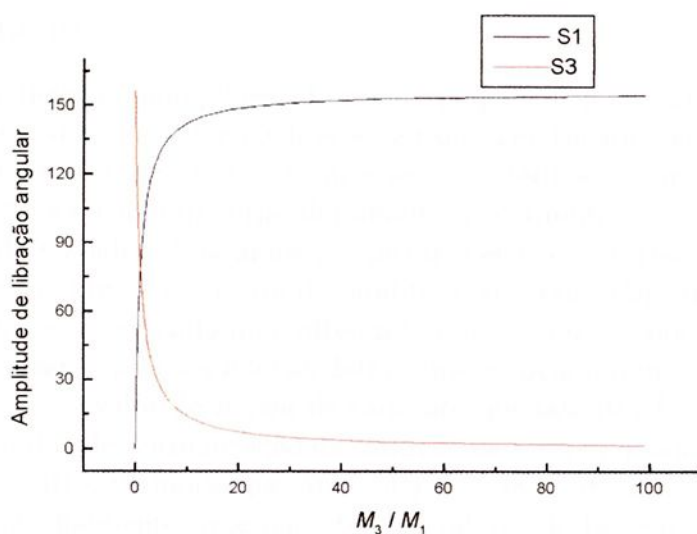


Figura 5.13: Máxima amplitude da oscilação angular de S_1 e S_3 em graus na condição de órbita separatriz em função da razão de massa entre os satélites.

6 A relação de massa planeta-satélite

6.1 Introdução

Se a massa de um determinado planeta for muito pequena em relação aos satélites coorbitais por ele envolvidos, é lógico de se supor que a estrutura não se mantenha por muito tempo, tendo em vista que as massas dos satélites passam a influenciar o planeta, e não temos nenhum corpo dominante no conjunto.

Nesta etapa do trabalho, buscamos encontrar o efeito da variação da relação de massa planeta-satélite na estrutura de satélites coorbitais. Para tanto, fizemos simulações numéricas, e em cada uma alterando unicamente o valor da massa do planeta, para diversas condições iniciais determinadas pela mínima aproximação dos satélites ($\phi_{\min}$). O valor de massa de cada um dos satélites foram mantidos constantes, e para fins de normalização da unidade de tempo, igualamos a massa de um satélite ao outro, de modo que $M_1 = M_3 = 1,98 \times 10^{21}$ g.

Notamos primordialmente, que para baixos valores desta relação de massa, a estrutura coorbital é destruída, o que nos levou a nos perguntar qual o valor limite para a massa de um planeta que permita a existência de satélites coorbitais. Percebemos que este limite é influenciado pela condições iniciais dadas aos satélites determinadas por $\phi_{\min}$, de maneira que, quanto mais os satélites se aproximam um do outro, maior deve ser a massa do planeta para manter este sistema coorbital por um certo tempo.

Nos sistemas que percebemos a estrutura coorbital não foi mantida, observamos que quando aumentamos massa do planeta, acarreta um maior tempo de manutenção do sistema coorbital.

O critério utilizado para determinar se a estrutura coorbital é mantida ou não é o monitoramento das posições angulares dos satélites, de maneira que se um dos satélites ultrapassar angularmente o outro, o sistema coorbital foi quebrado. Além disso acompanhamos também a mínima aproximação entre os satélites e a distância radial dos satélites ao planeta de forma a interromper a integração em caso de colisão.

6.2 Resultados

Resultados preliminares

Se a relação de massa entre os planeta e os satélites for inferior a um valor, que depende do quanto os satélites se aproximam angularmente entre si, temos que a estrutura coorbital é destruída, conforme mostram a **figuras** (6.1), (6.2) e (6.3), onde tomamos um exemplo em que $M_S = M_1 = M_3$, e simulamos uma órbita do tipo de transição girino-ferradura para a massa do planeta igual a massa dos satélites. Nesta simulação, verificamos que um dos satélites tende a se distanciar do centro de referência, no qual esta situado um dos corpos, enquanto o outro



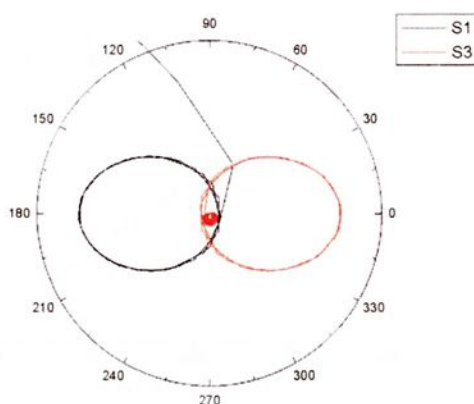


Figura 6.1: A figura a mostra a evolução de dois satélites coorbitais quando a massa do planeta é igual a dos satélites para o caso transição girino-ferradura ($\phi_{\max} = 180$ graus), os satélites não mantêm mais a estrutura coorbital.

permanece na proximidade deste. Como as massas são iguais, e posicionadas inicialmente em condições simétricas, não há preferência para qual dos corpos se distanciará e qual se manterá em órbita ao redor do corpo central. Isto foi verificado, refazendo esta simulação numérica repetidas vezes, havendo inclusive casos em que ambos os corpos se distanciam do centro de referência, no qual está posicionado o corpo central.

Conforme fizemos outras simulações com valores crescentes de M_S , notamos que surgiram casos em que a estrutura coorbital é mantida por alguns instantes. Como exemplo deste caso temos a **figura** (6.4), onde a massa do planeta é cerca de 2000 vezes maior que a dos satélites e estipulamos como condição inicial $\phi_{\max} = 180$ graus, que implica que $\phi_{\min} = 23,9$ graus, ou seja estamos tratando da transição de órbitas girino-ferradura. Entretanto, se integrarmos para esta relação de massa novamente alterando como condição inicial $\phi_{\min} = 46$ graus, tratando portanto de órbita do tipo girino, a estrutura coorbital é mantida por todo intervalo de integração, conforme mostram as **figura** (6.5) e (6.6). A primeira é a evolução radial no tempo e uma ampliação onde podemos visualizar melhor a oscilação coorbital radial e a segunda é a evolução angular no tempo e uma ampliação para se visualizar a libração angular coorbital.

Concluimos com isto, que o fato de os satélites se manterem coorbitais não depende unicamente da massa do corpo principal, mas também do quanto os satélites podem se aproximar um do outro determinada pela condição inicial que adotamos na simulação.

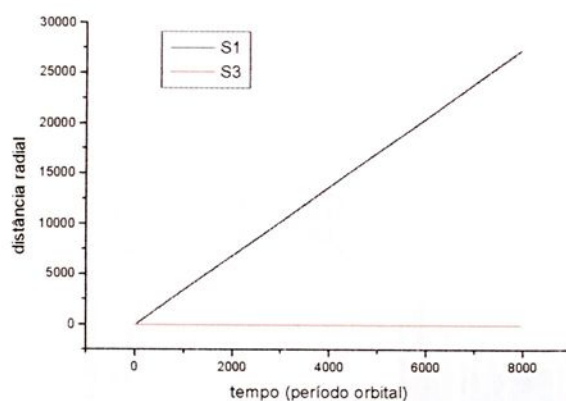


Figura 6.2: Distância radial no tempo para órbita de transição girino-ferradura ($\phi_{\max} = 180$ graus), quando para massa do planeta igual a dos satélites. O sistema coorbital não foi mantido, sendo que um dos satélites se afastou do sistema.

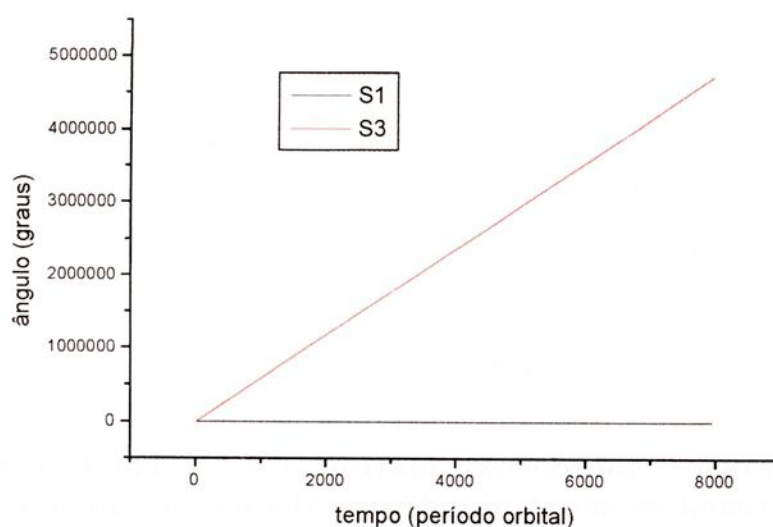
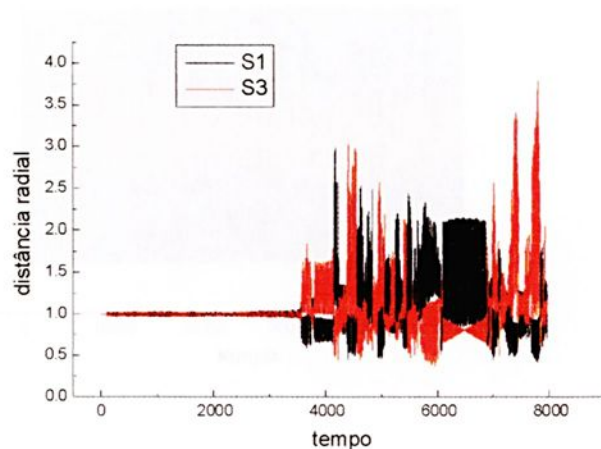


Figura 6.3: Evolução angular no tempo para órbita de transição girino-ferradura ($\phi_{\max} = 180$ graus), quando para massa do planeta igual a dos satélites. O sistema coorbital não foi mantido.

a



b

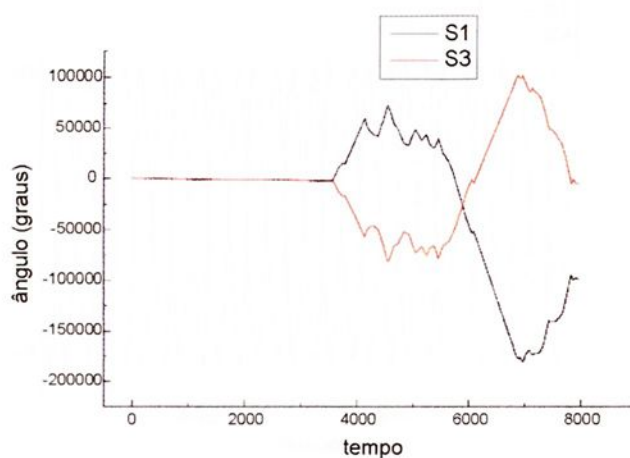


Figura 6.4: A figura a e b mostram respectivamente a evolução radial e angular para dois satélites coorbitais de massa iguais, tendo como condição inicial a órbita separatriz ($\phi_{\max} = 180$ graus) com $M_S = 2000M_3$. Os satélites permanecem apenas por alguns instantes coorbitais.

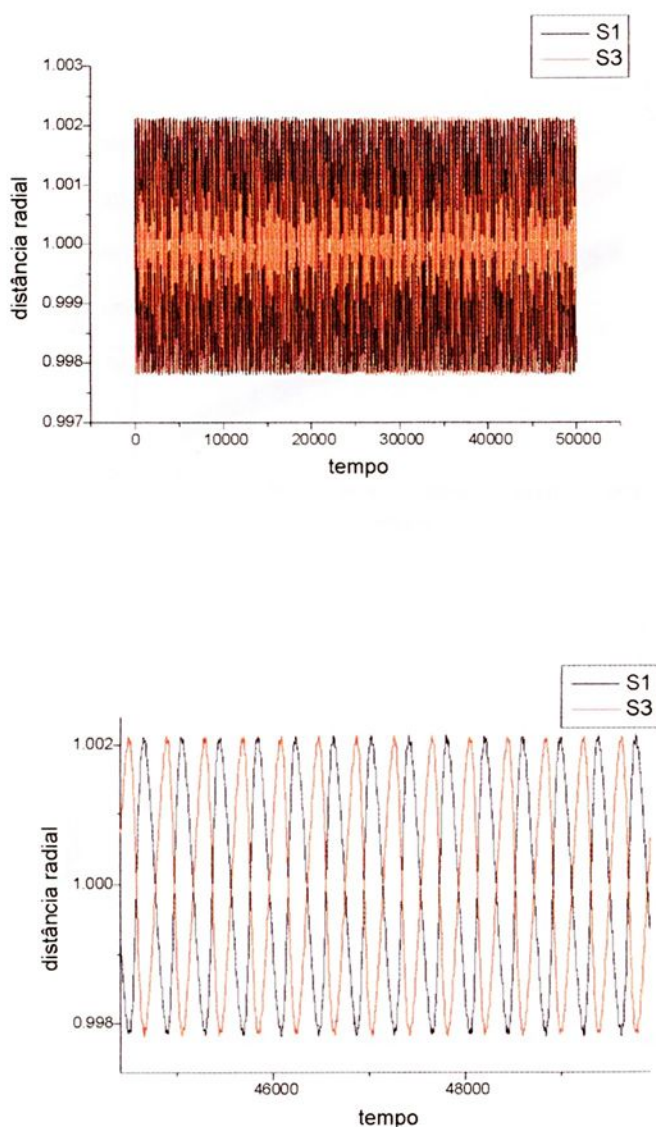


Figura 6.5: A figura superior é a evolução radial para satélites coorbitais em um exemplo órbita do tipo girino ($\phi_{\min} = 46$ graus), para massa do planeta é 2000 vezes a massa dos satélites. Constata-se que os satélites mantiveram oscilando em um típico movimento coorbital durante toda a integração, isto é visualizado pela figura inferior, que é um "zoom" superior

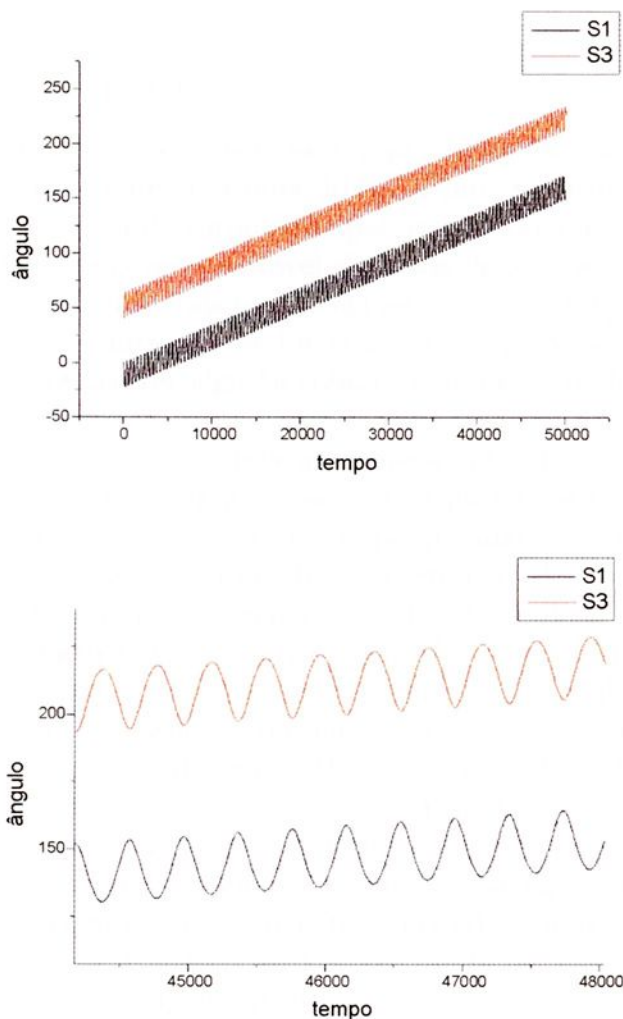


Figura 6.6: A figura superior é a evolução angular para satélites coorbitais em um exemplo órbita do tipo girino ($\phi_{\min} = 46$ graus), para massa do planeta é 2000 vezes a massa dos satélites. Constata-se que os satélites mantiveram librando em movimento coorbital durante toda a integração, isto é visualizado pela figura inferior, que é um "zoom" superior.

Prosseguindo este estudo, vamos a seguir analisar o efeito da relação de massa planeta-satélites para três exemplos distintos: (a) girino, onde tomamos genericamente $\phi_{\min} = 46$ graus, (b) transição girino ferradura $\phi_{\max} = 180$ graus e (c) ferradura, onde escolhemos $\phi_{\min} = 6,88$ graus, que representa o valor observado em Jano-Epimeteu.

Resultados numéricos: girino

Realizamos diversas integrações numéricas, sempre adotando como condição inicial $\phi_{\min} = 46$ graus, que representa uma órbita girino. Em cada uma das integrações aumentamos a massa do corpo principal, mantendo a massa dos satélites constantes. Adotaremos uma nova variável chamada de Z , que recebe valor 1 se os satélites se mantiverem coorbitais por aproximadamente 8000 períodos orbitais dos satélites, e valor -1 se durante este intervalo de tempo a estrutura coorbital for destruída, ou seja, se ocorrer alguma colisão ou um dos satélites ultrapassou o outro angularmente.

Plotamos o gráfico de Z contra a relação de massa planeta satélite (M_S/M_{13}), mostrado na **figura** (6.7). Nesta figura, observamos que para esta condição inicial ($\phi_{\min} = 46$ graus) a massa do planeta deve ser aproximadamente 50 vezes a massa satélites para a existência de coorbitais durante este período. Isto é confirmado pelo monitoramento das mínimas e máximas distâncias radiais dos satélites ao planeta, esboçado na **figura** (6.8), em que para $M_S/M_{13} < 500$, o sistema fica absolutamente imprevisível. Outro fator que confirma este resultado é o gráfico da mínima aproximação apresentada durante a integração contra a relação de massa planeta satélite, visto na **figura** (6.9), em que para $M_S/M_{13} < 500$ vemos um resultado incompatível com as condições iniciais dadas.

Como dissemos na introdução deste capítulo, conforme aumentamos o valor de M_S/M_{13} , aumentamos o período em que os satélites se apresentam como coorbital. Para tanto, construímos numericamente a curva do tempo em que o sistema se mantém coorbital contra M_S/M_{13} , tendo como limite de tempo 8000 períodos orbitais, esta curva é vista na **figura** (6.10)

Resultados numéricos: transição girino-ferradura

Realizamos diversas integrações numéricas, sempre adotando como condição inicial $\phi_{\max} = 180$ graus, que representa uma órbita de transição girino-ferradura. Em cada uma das integrações aumentamos a massa do corpo principal, mantendo a massa dos satélites constantes. Adotaremos uma nova variável chamada de Z , que recebe valor 1 se os satélites se mantiverem coorbitais por aproximadamente 8000 períodos orbitais dos satélites, e valor -1 se durante este intervalo de tempo a estrutura coorbital for destruída, ou seja, ocorrer alguma colisão ou um dos satélites ultrapassar o outro angularmente.

Plotamos o gráfico de Z contra a relação de massa planeta satélite (M_S/M_{13}),

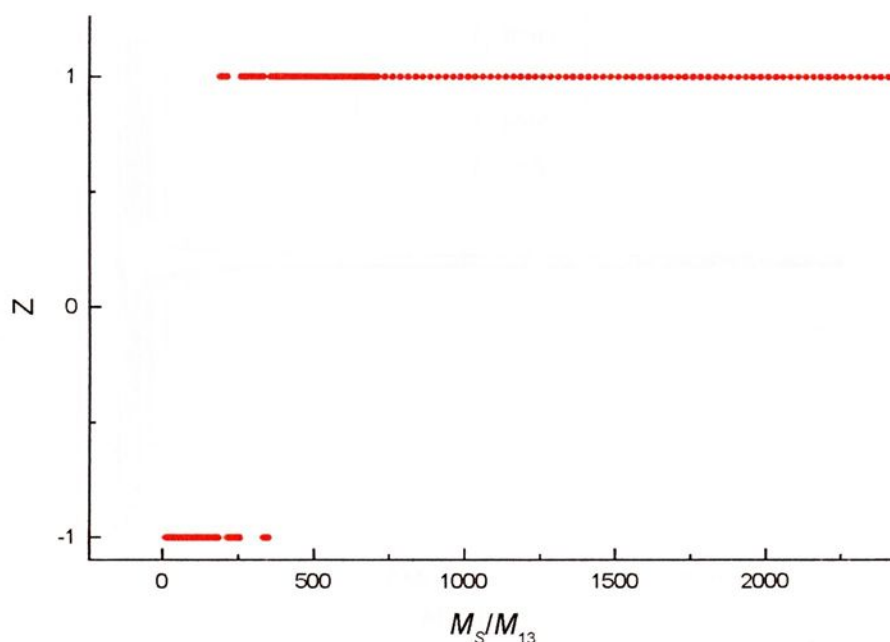


Figura 6.7: O valor de $Z = 1$ determina se os satélites são ininterruptamente coorbitais por 8000 períodos orbitais, caso contrário, $Z = -1$. O gráfico acima mostra o valor de Z em função da relação de massa planeta-satélite (M_S/M_{13}) para $\phi_{\min} = 46$ graus. A estrutura coorbital só é mantida durante todo este período somente se a massa do planeta for aproximadamente 500 vezes a massa dos satélites

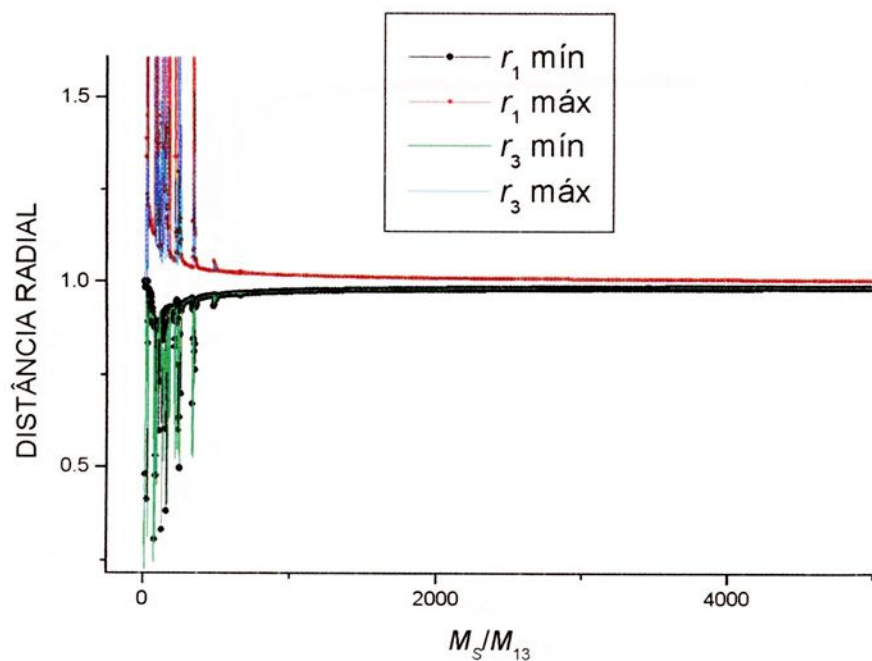


Figura 6.8: Os valores das mínimas e máximas (representados pelo índice max e min) distâncias radiais para um par satélites (representados pelos índices 1 e 3) em função da relação de massa satélite-planeta, tendo como condição inicial $\phi_{\min} = 46$ graus. Para massas do planeta aproximadamente menores que 500 vezes a massa dos satélites, os valores de máximos e mínimos radiais adquirem um comportamento não coorbital.

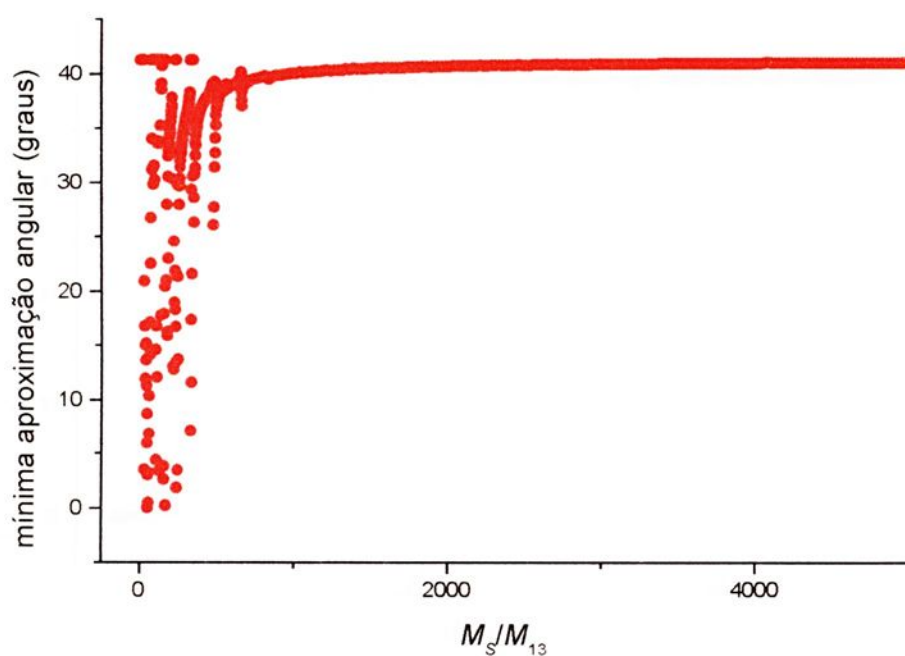


Figura 6.9: Valores da mínima aproximação angular entre dois satélites em função da relação de massa satélite-planeta. Como condição inicial os satélites são coorbitais, tendo $\phi_{\min} = 46$ graus. Para massas do planeta aproximadamente menores que 500 vezes a massa dos satélites, os valores de mínima aproximação não obedecem mais a condição inicial coorbital

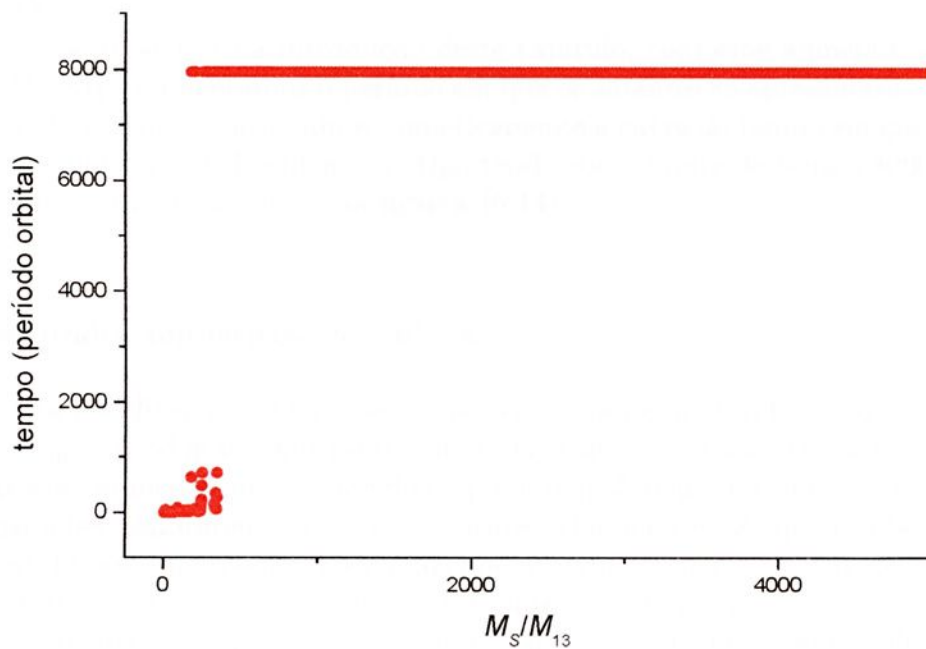


Figura 6.10: Tempo que um par de satélites lançado em condições coorbitais, com $\phi_{\min} = 46$ graus, permanecem oscilando coorbitalmente em função da relação de massa planeta-satélite. A medida que aumentamos esta relação de massa, aumentamos o tempo em que os satélites permanecem coorbitais. A integração foi interrompida em 8000 períodos orbitais.

mostrado na **figura** (6.11). Nesta figura, observamos que para esta condição inicial ($\phi_{\max} = 180$ graus) a massa do planeta deve ser aproximadamente 4000 vezes a massa dos satélites para a existência de coorbitais durante este período. Isto é confirmado pelo monitoramento das mínimas e máximas distâncias radiais dos satélites ao planeta, esboçado na **figura** (6.12), em que para $M_S/M_{13} < 4000$, o sistema fica absolutamente imprevisível. Outro fator que confirma este resultado é o gráfico da mínima aproximação apresentada durante a integração contra a relação de massa planeta satélite, visto na **figura** (6.13), em que para $M_S/M_{13} < 4000$ vemos um resultado incompatível com as condições iniciais dadas.

Como dissemos na introdução deste capítulo, conforme aumentamos o valor de M_S/M_{13} , aumentamos o período em que os satélites se apresentam como coorbital. Para tanto, construímos numericamente a curva do tempo em que o sistema se mantém coorbital contra M_S/M_{13} , tendo como limite de tempo 8000 períodos orbitais, esta curva é vista na **figura** (6.14)

Resultados numéricos: ferradura

Realizamos diversas integrações numéricas, sempre adotando como condição inicial $\phi_{\min} = 6,88$ graus, que representa uma órbita ferradura. Em cada uma das integrações aumentamos a massa do corpo principal, mantendo a massa dos satélites constantes. Adotaremos uma nova variável chamada de Z , que recebe valor 1 se os satélites se mantiverem coorbitais por aproximadamente 8000 períodos orbitais dos satélites, e valor -1 se durante este intervalo de tempo a estrutura coorbital for destruída, ou seja, ocorrer alguma colisão ou um dos satélites ultrapassar o outro angularmente.

Plotamos o gráfico de Z contra a relação de massa planeta satélite (M_S/M_{13}), mostrado na **figura** (6.15). Nesta figura, observamos que para esta condição inicial ($\phi_{\min} = 6,88$ graus) a massa do planeta deve ser aproximadamente 10.000 vezes a massa satélites para a existência de coorbitais durante este período. Isto é confirmado pelo monitoramento das mínimas e máximas distâncias radiais dos satélites ao planeta, esboçado na **figura** (6.16), em que para $M_S/M_{13} < 10.000$, o sistema fica absolutamente imprevisível. Outro fator que confirma este resultado é o gráfico da mínima aproximação apresentada durante a integração contra a relação de massa planeta satélite, visto na **figura** (6.17), em que para $M_S/M_{13} < 10.000$ vemos um resultado incompatível com as condições iniciais dadas.

Como dissemos na introdução deste capítulo, conforme aumentamos o valor de M_S/M_{13} , aumentamos o período em que os satélites se apresentam como coorbital. Para tanto, construímos numericamente a curva do tempo em que o sistema se mantém coorbital contra M_S/M_{13} , tendo como limite de tempo 8000 períodos orbitais, esta curva é vista na **figura** (6.18).

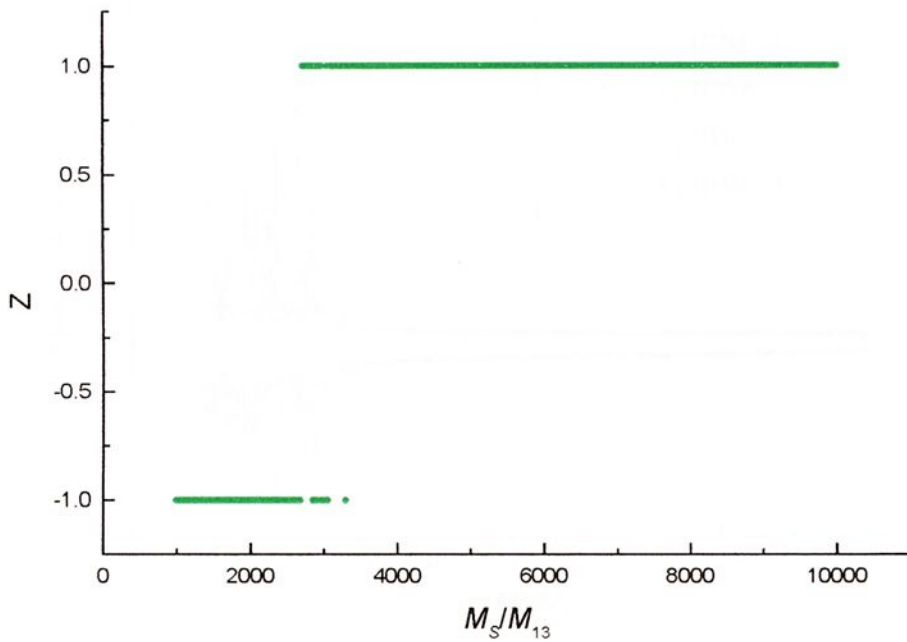


Figura 6.11: O valor de $Z = 1$ determina se os satélites são ininterruptamente coorbitais por 8000 períodos orbitais, caso contrário, $Z = -1$. O gráfico acima mostra o valor de Z em função da relação de massa planeta-satélite (M_S/M_{13}) para $\phi_{\max} = 180$ graus. A estrutura coorbital só é mantida durante todo este período somente se a massa do planeta for aproximadamente 4000 vezes a massa dos satélites

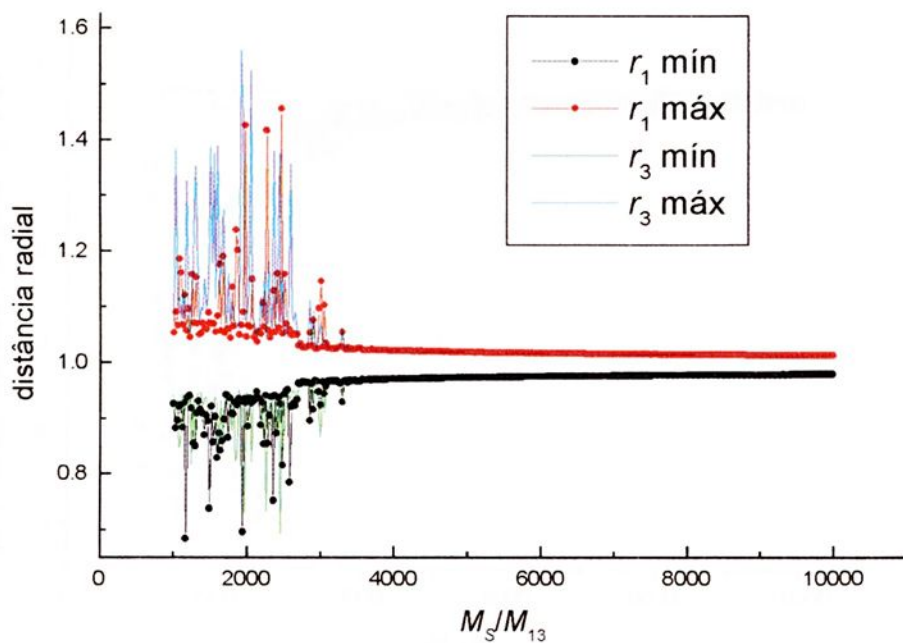


Figura 6.12: Valores das mínimas e máximas (representados pelo índice max e min) distâncias radiais para um par satélites (representados pelos índices 1 e 3) em função da relação de massa satélite-planeta, tendo como condição inicial $\phi_{\max} = 180$ graus. Para massas do planeta aproximadamente menores que 4000 vezes a massa dos satélites, os valores de máximos e mínimos radiais adquirem um comportamento não coorbital.

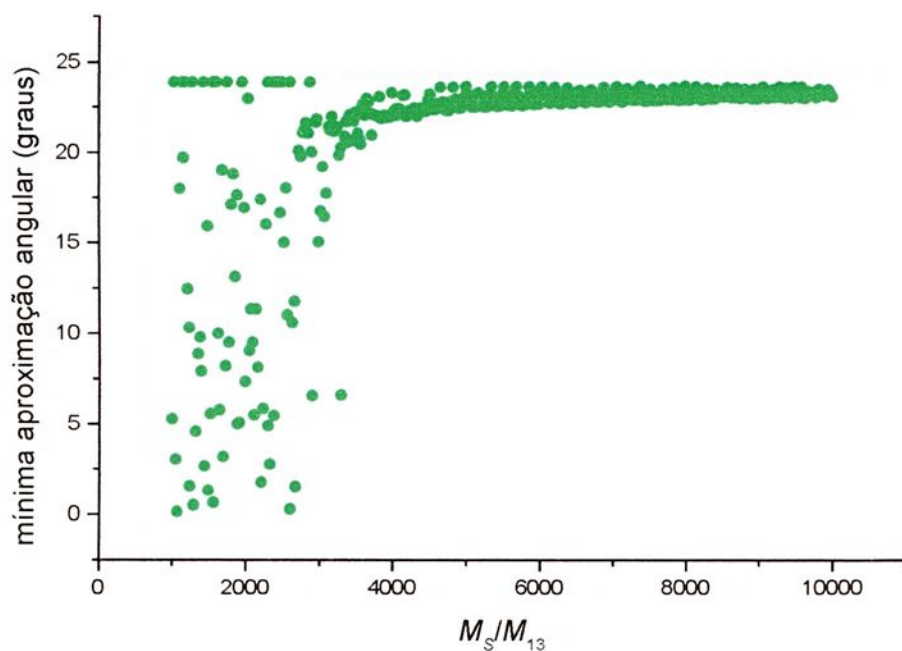


Figura 6.13: Valores da mínima aproximação angular entre dois satélites em função da relação de massa satélite-planeta. Como condição inicial os satélites são coorbitais, tendo $\phi_{\max} = 180$ graus. Para massas do planeta aproximadamente menores que 4000 vezes a massa dos satélites, os valores de mínima aproximação não obedecem mais a condição inicial coorbital.

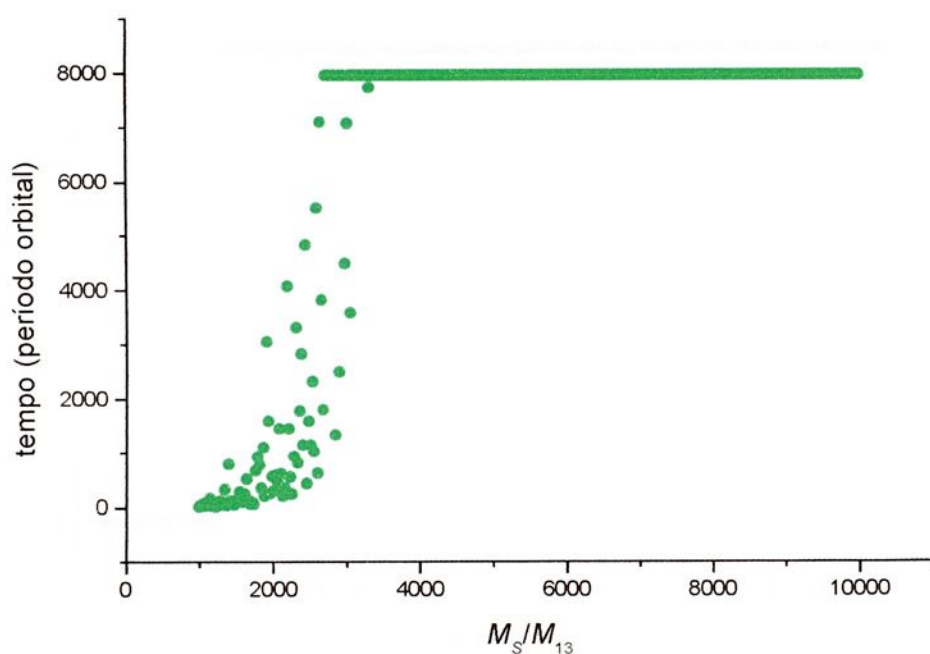


Figura 6.14: Tempo que um par de satélites lançado em condições coorbitais, com $\phi_{\max} = 180$ graus, permanecem oscilando coorbitalmente em função da relação de massa planeta-satélite. A medida que aumentamos esta relação de massa, aumentamos o tempo em que os satélites permanecem coorbitais. A integração foi interrompida em 8000 períodos orbitais.

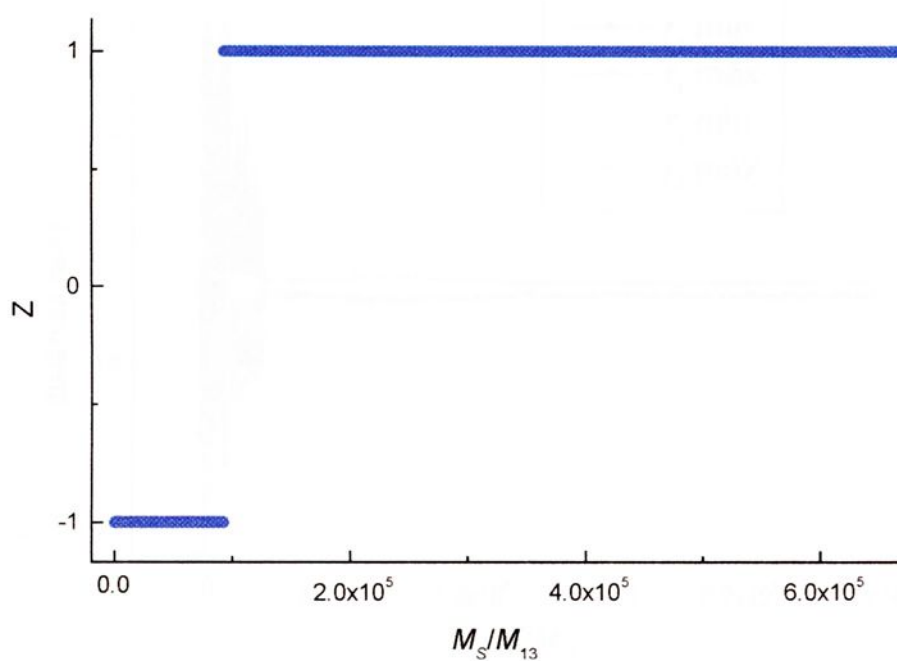


Figura 6.15: O valor de $Z = 1$ determina se os satélites são ininterruptamente coorbitais por 8000 períodos orbitais, caso contrário, $Z = -1$. O gráfico acima mostra o valor de Z em função da relação de massa planeta-satélite (M_S/M_{13}) para $\phi_{\max} = 6,88$ graus. A estrutura coorbital só é mantida durante todo este período somente se a massa do planeta for aproximadamente 10.000 vezes a massa dos satélites

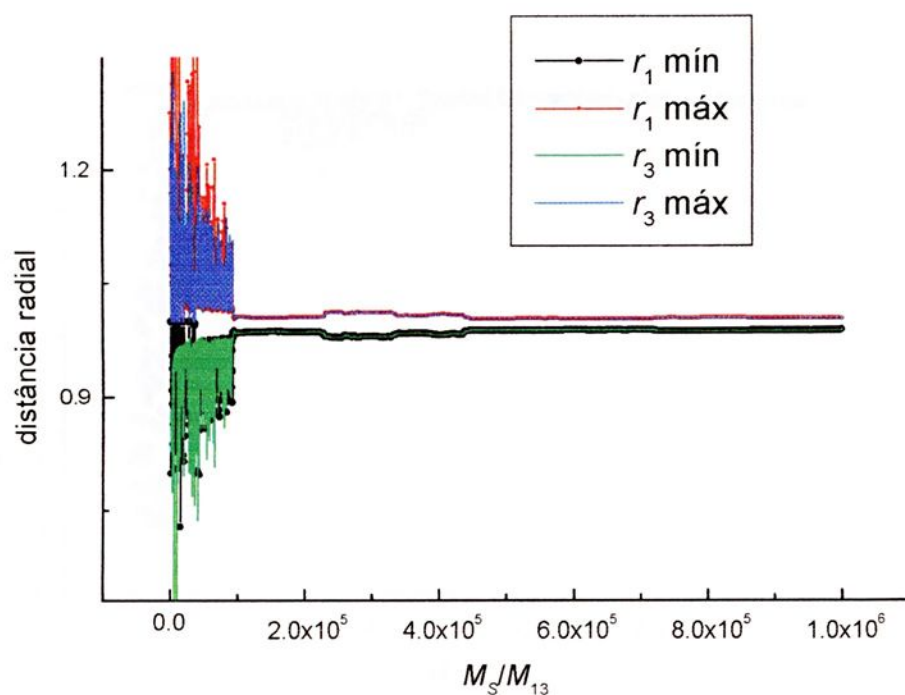


Figura 6.16: Valores das mínimas e máximas (representados pelo índice max e min) distâncias radiais para um par satélites (representados pelos índices 1 e 3) em função da relação de massa satélite-planeta, tendo como condição inicial $\phi_{\min} = 6,88$ graus. Para massas do planeta aproximadamente menores que 10.000 vezes a massa dos satélites, os valores de máximos e mínimos radiais adquirem um comportamento não coorbital.

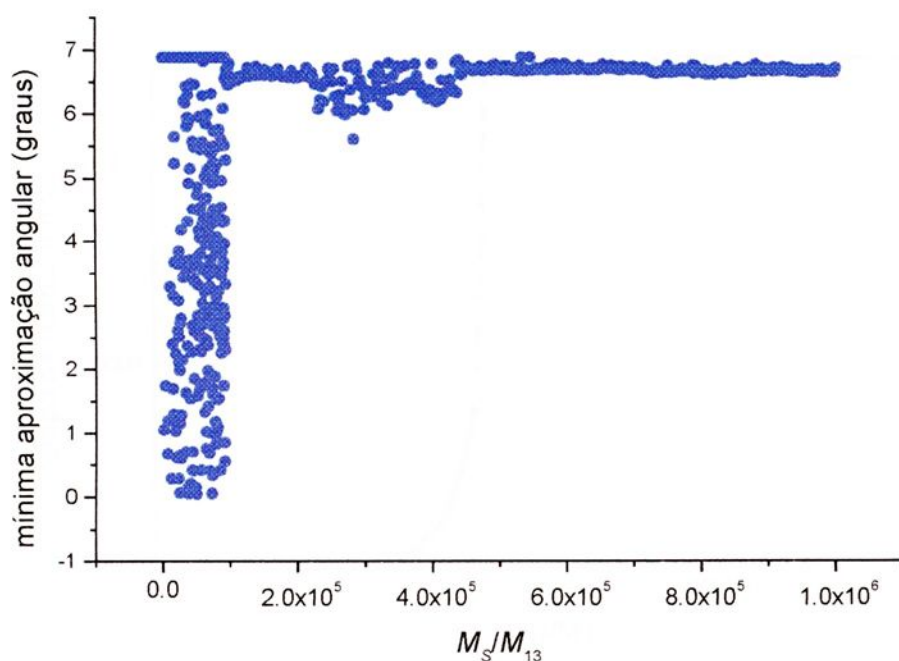


Figura 6.17: Valores da mínima aproximação angular entre dois satélites em função da relação de massa satélite-planeta. Como condição inicial os satélites são coorbitais, tendo $\phi_{\min} = 6,88$ graus. Para massas do planeta aproximadamente menores que 10.000 vezes a massa dos satélites, os valores de mínima aproximação não obedecem mais a condição inicial coorbital.

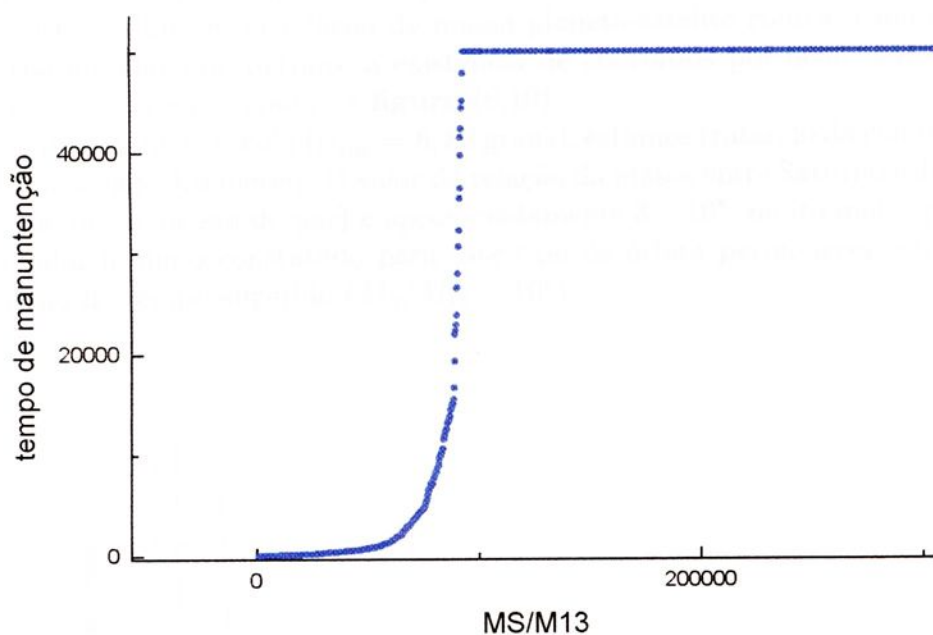


Figura 6.18: Tempo que um par de satélites lançado em condições coorbitais, com $\phi_{\min} = 6,88$ graus, permanecem oscilando coorbitalmente em função da relação de massa planeta-satélite. A medida que aumentamos esta relação de massa, aumentamos o tempo em que os satélites permanecem coorbitais. A integração foi interrompida em 8000 períodos orbitais.

6.3 Conclusão e resultados finais

Neste capítulo estudamos a relevância do valor da massa do planeta em relação a massa dos satélites para três exemplos órbitas: girino, ferradura e transição girino-ferradura. Para isto mantivemos a relação de massa entre os satélites sempre constantes e alteramos a massa do planeta em sucessivas integrações

Para cada um dos tipos órbita obtivemos graficamente o valor limite da relação de massa. planeta-satélite que permite os satélites permanecerem coorbitais ininterruptamente por cerca de 8000 períodos orbitais. Como os sistemas coorbitais podem ser classificados pela mínima aproximação angular ($\phi_{\min}$), podemos levantar a curva do limite da relação de massa planeta-satélite contra a mínima aproximação angular que permite a existência de coorbitais por 8000 períodos orbitais. Esta curva é mostrada na **figura** (6.19).

No caso ferradura estudado ($\phi_{\min} = 6,88$ graus), estamos tratando da condição observada para Jano-Epimeteu. O valor da relação da massa entre Saturno e Jano (o satélite de maior massa do par) é aproximadamente 3×10^8 , muito maior portando do valor mínimo constatado para este tipo de órbita permanecer estável pelo intervalo de tempo sugerido ($M_S/M_{I3} = 10^4$).

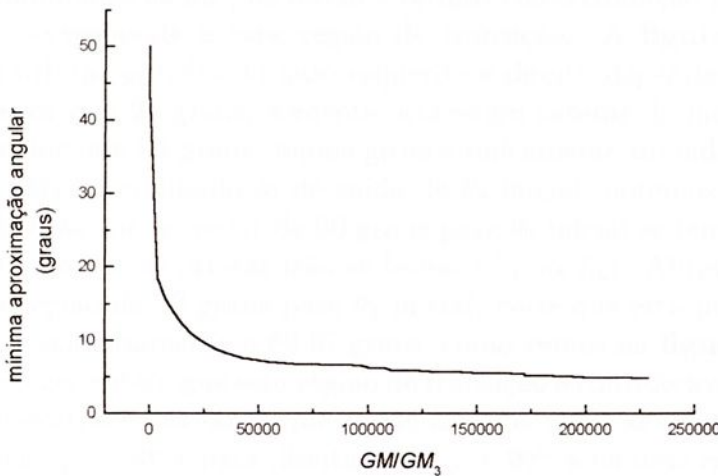


Figura 6.19: Gráfico da mínima aproximação que satélites coorbitais podem ter para permanecerem estáveis por cerca de 8000 períodos orbitais em função da relação de massa planeta-satélite. Quanto maior esta relação de massa, mais os satélites podem se aproximar mantendo-se coorbitais durante toda a integração

7 Mapeamento da separatriz girino-ferradura

Nesta etapa colocou-se os satélites gradativamente cada vez mais próximos da região de transição girino-ferradura (separatriz L_3) e observou-se o tipo de órbitas (girino ou ferradura) e direção possíveis (sob qual dos pontos estáveis os satélites se encontram librando).

Lembrando-se da **figura** (3.21), definimos como libração "esquerda" aquela que ocorre ao redor do ponto L_4 , e como "direita" que ocorre ao redor de L_5 .

Desta forma trabalhamos com 3 possibilidades:

- sempre ocorrer girinos do lado direito (e atribuímos direita=100%)
- sempre ocorrer girinos do lado esquerdo (e atribuímos esquerda=100%)
- ocorrer girinos duplas intermitentes (quase ferradura), onde verificaremos qual a porcentagem de órbitas girinos do lado direito e do lado esquerdo.

Sendo assim, vamos fixar como condições inicial de S_3 em $\theta_3 = 270^\circ$ e variar θ_1 nas proximidades de 90° , de modo a termos como condição inicial $\phi_{\max} \approx 180$ graus, que corresponde a esta região de transição. A **figura** (7.1) mostra o número de órbitas obtidas do lado esquerdo e direito dependendo do θ_1 inicial. Para θ_1 menor que 90 graus, somente ocorreram órbitas do lado direito, e para θ_1 inicial maior que 90 graus, temos girinos unicamente do lado esquerdo, neste caso $M_1 = M_3$. Ampliando-se de saída de θ_3 inicial, obtemos na **figura** (7.2). Nesta se observa que ao redor de 90 graus para θ_3 inicial se tem uma indefinição sob qual dos pontos as órbitas irão se fechar (L_4 ou L_5). Abrindo-se ainda mais a escala na região de 90 graus para θ_3 inicial, vê-se que esta indefinição começa a ocorrer aproximadamente a 89.97 graus, como vemos na **figura** (7.3).

Pode-se dizer então, que esta região de transição é consideravelmente pequena, ou seja a separatriz é estreita, o que queremos dizer é que as órbitas tendem para a esquerda se $\phi_{\max} > 90^\circ$ e para direita se $\phi_{\max} < 90^\circ$, e há uma certa instabilidade para $\phi_{\max} = 90^\circ$

Considerou-se ainda casos para $M_3 = 2M_1$, mostrado pela **figura** (7.4); e para $M_3 = 1/3M_1$ na **figura** (7.5), e mesmo assim a separatriz se mostrou relativamente estreita, por volta de 0.02 graus.

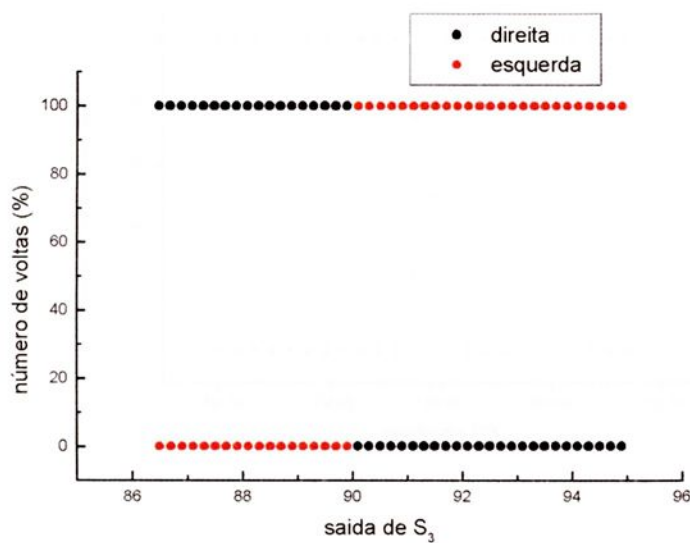


Figura 7.1: Número percentual de órbitas girinos obtidas para cada lado em função da posição de saída de S_3 .

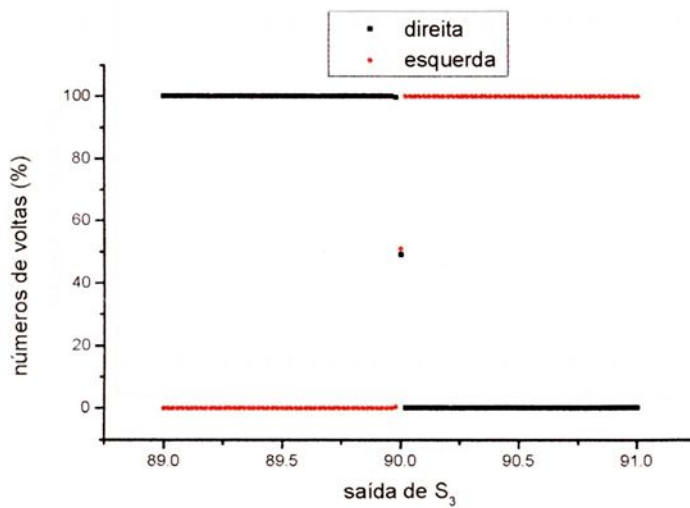


Figura 7.2: Número percentual de órbitas girinos obtidas para cada lado em função da posição de saída de S_3 .

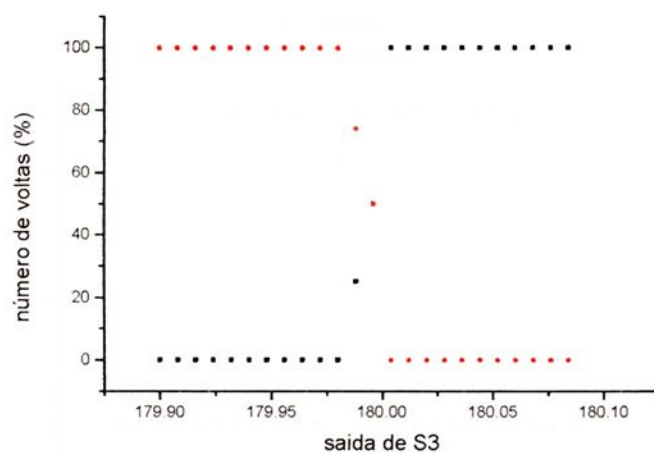


Figura 7.3: Número percentual de órbitas girinos obtidas para cada lado em função da posição de saída de S_3 .

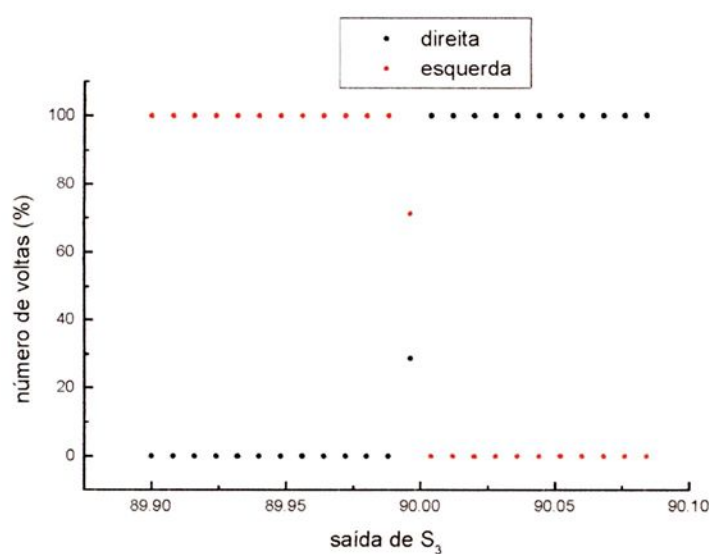


Figura 7.4: Número percentual de girinos obtidas para cada lado em função da posição de saída de S_3 , usamos a relação de massa $M_3 = 1/2 M_1$.

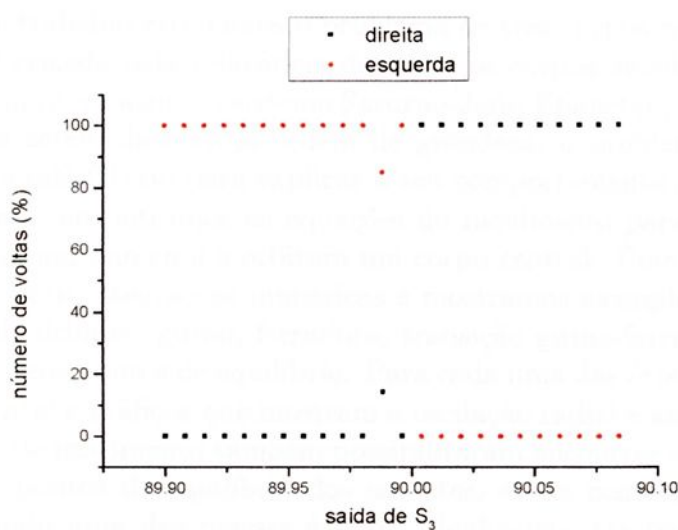


Figura 7.5: Número percentual de girinos obtidas para cada lado em função da posição de saída de S_3 , usamos a relação de massa $M_3 = 1/3M_1$.

8 Sumário e sugestão para trabalhos futuros

No presente trabalho estudamos o problema de três corpos no caso não restrito, que é caracterizado pela relevância de todos os corpos envolvidos. Tivemos no trabalho sempre em mente o sistema Saturno-Jano-Epimeteu, que devido a massa dos satélites serem da mesma ordem de grandeza, o problema restrito de três corpos não é satisfatório para explicar o seu comportamento dinâmico.

Para tanto, encontramos as equações do movimento para dois satélites que se perturbam mutuamente e orbitam um corpo central. Com estas equações em mãos, realizamos integrações numéricas e mostramos exemplos de diversas possibilidades de órbitas: girino, ferradura, transição girino-ferradura e os satélites estáticos em seus pontos de equilíbrio. Para cada uma das órbitas apresentamos a evolução orbital e gráficos que mostram a oscilação radial e angular dos satélites. As equações de movimento também possibilitaram encontrar as equações que determinam o pontos de equilíbrio dos satélites, e sua convergência para o caso restrito quando uma das massas é nula. Realizamos também algumas análise analíticas que determinaram constantes de movimento para este sistema.

Vimos também a influência do achatamento em satélites coorbitais, concluindo que o achatamento do corpo principal provoca oscilações radiais de curto período na órbita dos satélites e o aumento da excentricidade osculadora. Entretanto não constatamos casos em que os satélites deixam de ser coorbitais devido ao achatamento.

Em seguida verificamos a influência da razão de massa entre os satélites na dinâmica de satélites coorbitais. Destacamos como principal resultado a análise dos pontos de equilíbrio com esta razão de massa, verificando que para diferentes simulações numéricas, com valores crescentes da massa de um dos satélites, seus respectivos pontos de equilíbrio estáveis tendem a coalescerem entre si. Esboçamos também o comportamento de outros elementos dinâmicos para diferentes valores de razão de massa entre os satélites, observando que quanto maior a massa de um dos satélites, menores serão suas oscilações angulares e radiais.

A relação de massa entre o corpo principal e os satélites também foi abordada. Nesta etapa, basicamente nos preocupamos em encontrar qual o valor mínimo desta relação para que seja possível a existência de órbitas estáveis de satélites coorbitais. Consideramos como conclusão importante deste estudo que este valor mínimo depende essencialmente do quanto os satélites se aproximam entre si.

Por fim analisamos o comportamento de órbitas próximas à região de transição girino-ferradura no intuito de verificar a largura a região de instabilidade. Constatamos após refinamentos cada vez maiores que ela é consideravelmente estreita.

Como sugestão para trabalhos futuros, encaramos como ponto de suma importância estudar as condições que determinam a origem de satélites coorbitais, em especial a formação do par Jano-Epimeteu. Existe a possibilidade de Jano e Epimeteu terem sido formados a partir da quebra de um único satélite-pai, para formar dois satélites coorbitais. Se for este o caso, a quebra pode ter acontecido



muito cedo na história do sistema solar, tendo em vista as marcantes crateras em ambos os satélites e sabendo da estabilidade deste sistema. Um dos fatos que não devemos nos esquivar durante a abordagem deste problema são as prováveis migrações nas órbitas dos satélites de Saturno ocorridas nos primórdios do sistema solar.

O efeito do arrasto gasoso logo após as primeiras etapas de formação dos planetas é outro ponto de interesse a ser considerado em etapas futuras. Murray (1994) estudou a evolução dos pontos de equilíbrio do problema restrito considerando vários tipos de arrasto. Um estudo interessante seria refazê-lo para o caso não restrito. Kary & Lissauer (1995) estudaram a captura destes corpos no estágio de formação do sistema solar e Peale (95) analisou o efeito do gás sobre os troianos primordiais.

Ademais, há outros fatos ainda não explicados em sistemas saturnianos, como os levantados por Fleming & Hamilton (2000), por exemplo, o motivo pelo qual dentre os seis maiores satélites de Saturno, somente Tetis e Dione apresentarem três troianos, enquanto os outros, Mimas, Enceladus, Rea e Titã, não possuem nenhum. Esta ocorrência é curiosa porque não há aparentemente qualquer motivo para Tetis e Dione terem algum privilégio na captura de troianos. Os autores apontam, pelo contrário, que os satélites que durante a formação do sistema saturniano migraram para fora, têm maior facilidade em capturar troianos. O estudo desta questão pode sugerir algo sobre a origem de satélites coorbitais internos, como é o caso de Jano-Epimeteu.



Apêndice: Equações do movimento em coordenadas retangulares

Iremos aqui buscar as equações de movimento para um par de satélites coorbitais de massas comparáveis, levando em consideração o achatamento (J_2), do mesmo modo que fizemos na seção 4.2, a diferença é que desta vez usaremos coordenadas as cartesianas (x, y), e não mais as coordenadas polares (r, θ).

Partindo do potencial com achatamento e recordando a equação (4.13) :

$$U_i = -\mathcal{G} \frac{(M_S + M_i)}{r_i} - \mathcal{R}_i - \frac{1}{2} \mathcal{G} J_2 R^2 \frac{(M_S + M_i)}{r_i^3} + \frac{3}{8} \mathcal{G} J_2 R^2 M_j \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j}{r_j^5} \quad (1)$$

$$\mathcal{R}_i = \mathcal{G} M_j \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j}{r_j^3} \right) \quad (2)$$

para $\Delta = \sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\theta_i - \theta_j)}$. Vamos nos limitar ao caso plano, e portanto não usaremos a coordenada z , as equações do movimento ficam:

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} = - \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} = - \left(\frac{\partial U}{\partial y_i} \right) \quad (4)$$

como: $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ e $\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j = x_i x_j + y_i y_j$, temos:

$$\begin{aligned} U_i = & -\mathcal{G} \frac{(M_S + M_i)}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} \\ & -\mathcal{G} M_j \left(\frac{1}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j}{\sqrt{x_j^2 + y_j^2}^3} \right) \\ & -\frac{1}{2} \mathcal{G} J_2 R^2 \frac{(M_S + M_i)}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}^3} + \frac{3}{8} \mathcal{G} J_2 R^2 M_j \frac{x_i x_j + y_i y_j}{\sqrt{x_j^2 + y_j^2}^5} \end{aligned} \quad (5)$$

e portanto:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \mathcal{G} \frac{M_S + M_i}{(\sqrt{x_i^2 + y_i^2})^3} x_i \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
& -\mathcal{G}M_j \left(-\frac{1}{2 \left(\sqrt{(x_j^2 - 2x_i x_j + x_i^2 + y_j^2 - 2y_i y_j + y_i^2)} \right)^3} (-2x_j + 2x_i) \right. \\
& \quad \left. - \frac{x_j}{\left(\sqrt{(x_j^2 + y_j^2)} \right)^3} \right) \\
& + \frac{3}{2} \mathcal{G}J_2(R^2) \frac{M_S + M_i}{\left(\sqrt{(x_i^2 + y_i^2)} \right)^5} x_i + \frac{3}{8} \mathcal{G}J_2(R^2) M_j \frac{x_j}{\left(\sqrt{(x_j^2 + y_j^2)} \right)^5}
\end{aligned}$$

simplificando

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_i}{\partial x_i} &= \mathcal{G} \frac{M_S + M_i}{\left(\sqrt{(x_i^2 + y_i^2)} \right)^3} x_i \\
& - \mathcal{G}M_j \left(\frac{x_j - x_i}{\left(\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \right)^3} - \frac{x_j}{\left(\sqrt{(x_j^2 + y_j^2)} \right)^3} \right) \\
& + \frac{3}{2} \mathcal{G}J_2(R^2) \frac{M_S + M_i}{\left(\sqrt{(x_i^2 + y_i^2)} \right)^5} x_i + \frac{3}{8} \mathcal{G}J_2(R^2) M_j \frac{x_j}{\left(\sqrt{(x_j^2 + y_j^2)} \right)^5}
\end{aligned}$$

e finalmente:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial U_i}{\partial x_i} &= -\mathcal{G} \frac{M_S + M_i}{\left(\sqrt{(x_i^2 + y_i^2)} \right)^3} x_i \\
& + \mathcal{G}M_j \left(\frac{x_j - x_i}{\left(\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \right)^3} - \frac{x_j}{\left(\sqrt{(x_j^2 + y_j^2)} \right)^3} \right) \quad (7) \\
& - \frac{3}{2} \mathcal{G}J_2(R^2) \frac{M_S + M_i}{\left(\sqrt{(x_i^2 + y_i^2)} \right)^5} x_i \\
& - \frac{3}{8} \mathcal{G}J_2(R^2) M_j \frac{x_j}{\left(\sqrt{(x_j^2 + y_j^2)} \right)^5}
\end{aligned}$$

e ainda

$$\frac{\partial U_i}{\partial y_i} = \mathcal{G} \frac{M_S + M_i}{\left(\sqrt{(x_i^2 + y_i^2)} \right)^3} y_i \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
& -\mathcal{G}M_j \left(-\frac{1}{2 \left(\sqrt{(x_j^2 - 2x_i x_j + x_i^2 + y_j^2 - 2y_i y_j + y_i^2)} \right)^3} (-2y_j + 2y_i) \right. \\
& \quad \left. - \frac{y_j}{\left(\sqrt{(x_j^2 + y_j^2)} \right)^3} \right) \\
& + \frac{3}{2} \mathcal{G}J_2 (R^2) \frac{M_S + M_i}{\left(\sqrt{(x_i^2 + y_i^2)} \right)^5} y_i + \frac{3}{8} \mathcal{G}J_2 (R^2) M_j \frac{y_j}{\left(\sqrt{(x_j^2 + y_j^2)} \right)^5}
\end{aligned}$$

simplificando:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_i}{\partial y_i} &= \mathcal{G} \frac{M_S + M_i}{\left(\sqrt{(x_i^2 + y_i^2)} \right)^3} y_i \\
& - \mathcal{G}M_j \left(\frac{y_j - y_i}{\left(\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \right)^3} - \frac{y_j}{\left(\sqrt{(x_j^2 + y_j^2)} \right)^3} \right) \quad (9) \\
& + \frac{3}{2} \mathcal{G}J_2 (R^2) \frac{M_S + M_i}{\left(\sqrt{(x_i^2 + y_i^2)} \right)^5} y_i \\
& + \frac{3}{8} \mathcal{G}J_2 (R^2) M_j \frac{y_j}{\left(\sqrt{(x_j^2 + y_j^2)} \right)^5}
\end{aligned}$$

e finalmente:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial U_i}{\partial y_i} &= -\mathcal{G} \frac{M_S + M_i}{\left(\sqrt{(x_i^2 + y_i^2)} \right)^3} y_i \\
& + \mathcal{G}M_j \left(\frac{y_j - y_i}{\left(\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \right)^3} - \frac{y_j}{\left(\sqrt{(x_j^2 + y_j^2)} \right)^3} \right) \quad (10) \\
& - \frac{3}{2} \mathcal{G}J_2 (R^2) \frac{M_S + M_i}{\left(\sqrt{(x_i^2 + y_i^2)} \right)^5} y_i \\
& - \frac{3}{8} \mathcal{G}J_2 (R^2) M_j \frac{y_j}{\left(\sqrt{(x_j^2 + y_j^2)} \right)^5}
\end{aligned}$$

Comparando as equações (5) com as equações (7) e (10) chegamos a:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_i = & -\mathcal{G} \frac{M_S + M_i}{\left(\sqrt{(x_i^2 + y_i^2)}\right)^3} x_i \\
& + \mathcal{G} M_j \left(\frac{x_j - x_i}{\left(\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}\right)^3} - \frac{x_j}{\left(\sqrt{(x_j^2 + y_j^2)}\right)^3} \right) \\
& - \frac{3}{2} \mathcal{G} J_2 (R^2) \frac{M_S + M_i}{\left(\sqrt{(x_i^2 + y_i^2)}\right)^5} x_i \\
& - \frac{3}{8} \mathcal{G} J_2 (R^2) M_j \frac{x_j}{\left(\sqrt{(x_j^2 + y_j^2)}\right)^5}
\end{aligned} \quad (11)$$

e

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_i = & -\mathcal{G} \frac{M_S + M_i}{\left(\sqrt{(x_i^2 + y_i^2)}\right)^3} y_i \\
& + \mathcal{G} M_j \left(\frac{y_j - y_i}{\left(\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}\right)^3} - \frac{y_j}{\left(\sqrt{(x_j^2 + y_j^2)}\right)^3} \right) \\
& - \frac{3}{2} \mathcal{G} J_2 (R^2) \frac{M_S + M_i}{\left(\sqrt{(x_i^2 + y_i^2)}\right)^5} y_i \\
& - \frac{3}{8} \mathcal{G} J_2 (R^2) M_j \frac{y_j}{\left(\sqrt{(x_j^2 + y_j^2)}\right)^5}
\end{aligned} \quad (12)$$

E assim para a massa M_1 :

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 = & -\mathcal{G} \frac{M_S + M_1}{\left(\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)}\right)^3} x_1 \\
& + \mathcal{G} M_3 \left(\frac{x_3 - x_1}{\left(\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}\right)^3} - \frac{x_3}{\left(\sqrt{(x_3^2 + y_3^2)}\right)^3} \right) \\
& - \frac{3}{2} \mathcal{G} J_2 (R^2) \frac{M_S + M_1}{\left(\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)}\right)^5} x_1 - \frac{3}{8} \mathcal{G} J_2 (R^2) M_3 \frac{x_3}{\left(\sqrt{(x_3^2 + y_3^2)}\right)^5}
\end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_1 = & -\mathcal{G} \frac{M_S + M_1}{\left(\sqrt{(x_1 + y_1)}\right)^3} y_1 \\
& \mathcal{G} M_3 \left(\frac{y_3 - y_1}{\left(\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}\right)^3} - \frac{y_3}{\left(\sqrt{(x_3 + y_3)}\right)^3} \right) \\
& - \frac{3}{2} \mathcal{G} J_2 (R^2) \frac{M_S + M_1}{\left(\sqrt{(x_1 + y_1)}\right)^5} y_1 - \frac{3}{8} \mathcal{G} J_2 (R^2) M_3 \frac{y_3}{\left(\sqrt{(x_3 + y_3)}\right)^5}
\end{aligned} \quad (14)$$

E para a massa M_3 :

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_3 = & -\mathcal{G} \frac{M_S + M_3}{\left(\sqrt{(x_3 + y_3)}\right)^3} x_3 \\
& + \mathcal{G} M_1 \left(\frac{x_1 - x_3}{\left(\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}\right)^3} - \frac{x_1}{\left(\sqrt{(x_1 + y_1)}\right)^3} \right) \\
& - \frac{3}{2} \mathcal{G} J_2 (R^2) \frac{M_S + M_3}{\left(\sqrt{(x_3 + y_3)}\right)^5} x_3 - \frac{3}{8} \mathcal{G} J_2 (R^2) M_1 \frac{x_1}{\left(\sqrt{(x_1 + y_1)}\right)^5}
\end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_3 = & -\mathcal{G} \frac{M_S + M_3}{\left(\sqrt{(x_3 + y_3)}\right)^3} y_3 \\
& \mathcal{G} M_1 \left(\frac{y_1 - y_3}{\left(\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}\right)^3} - \frac{y_1}{\left(\sqrt{(x_1 + y_1)}\right)^3} \right) \\
& - \frac{3}{2} \mathcal{G} J_2 (R^2) \frac{M_S + M_3}{\left(\sqrt{(x_3 + y_3)}\right)^5} y_3 - \frac{3}{8} \mathcal{G} J_2 (R^2) M_1 \frac{y_1}{\left(\sqrt{(x_1 + y_1)}\right)^5}
\end{aligned} \quad (16)$$

E temos as mesmas equações do movimento para Jano e Epimeteu visto na seção 4.2, porém desta vez em coordenadas cartesianas.

Bibliografia

- [1] Blanco, V. M. and S. W. McCuskey (1983). *Introduction to Celestial Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, London.
- [2] Brown, E. W. (1911). On a new family of periodic orbits in the problem of three bodies. *Mon Not. R. Astron. Soc.*, **71**, 438-454.
- [3] Brown, E. W. and C. A. Shook (1964). *Planetary Theory*. Dover. New York.
- [4] Dermott, S. F. and C. D. Murray (1981a). The dynamics of tadpole and horseshoe orbits I. The coorbital satellites of Saturn, *Icarus*, **48**, 1-11.
- [5] Dermott, S. F. and C. D. Murray (1981b). The dynamics of tadpole and horseshoe orbits II. The coorbital satellites of Saturn, *Icarus*, **48**, 12-22.
- [6] Fleming, H. J. and D. P. Hamilton (2000). The origin of the trojan asteroids: effects of Jupiter's mass accretion and radial migration, *Icarus*, **148**, 479-493
- [7] Harrington R. S. and P. K. Seidelmann (1981). The dynamics of saturnian satellites 1990S1 and 1980S3. *Icarus* **47**, 97-99.
- [8] Kary, D. M. and J. J. Lissauer (1995). Nebular gas drag in the planetary accretion II. Planet on an eccentric orbit. *Icarus*, **117**, 1-24.
- [9] Lissauer, J. J., P. Goldreich and S. Tremaine (1985). Evolution of the Janus-Epimetheus coorbital resonance due to torques from Saturn's rings. *Icarus*, **64**, 425-434.
- [10] Murray, C. D. (1994). Dynamical effects of drags in the circular restricted three-body problem 1: Location and stability of the Lagrangian equilibrium points, *Icarus*, **112**, 465-484.
- [11] Murray, C. D. and S. F. Dermott (1999). *Solar System Dynamics*. Cambridge Univ. Press.
- [12] Nicholson P. D., Hamilton D. P., Matthews K. and Yoder C. F. (1992). New observations of Saturn's coorbital satellites. *Icarus*, **100**, 464-484.



- [13] Peale, S. J. (1993). The effect of the nebula on the Trojan precursor. *Icarus*, **56**, 308-322.
- [14] Roy A. E. (1988). *Orbital Motion*, Institute of Physics Publishing, Philadelphia
- [15] Synnott, S. P., C. F. Peters, B. A. Smith and L. A. Morabito (1981). Orbits of the small satellites of Saturn. *Science*, **212**, 191-192.
- [16] Yoder C. F., G. Colombo, S. P. Synnott, and K. A. Yoder (1983). Theory of Motion of Saturn's Coorbiting Satellites. *Icarus* **53**, 431-443.
- [17] Yoder, C. F., S. P. Synnott and H. Salo (1989). Orbits and Masses of Saturn's Co-orbiting Satellites, Janus and Epimetheus. *The Astronomical Journal*, **98**, 1875-1889.



