



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de Ilha Solteira

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

MATEUS FARIA DE ANDRADE PASCHOAL

**ANÁLISE NUMÉRICA DA DINÂMICA DE CRESCIMENTO DA BOLHA DE
VAPOR EM EBULIÇÃO**

Ilha Solteira

2020

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA

MATEUS FARIA DE ANDRADE PASCHOAL

**ANÁLISE NUMÉRICA DA DINÂMICA DE CRESCIMENTO DA BOLHA DE
VAPOR EM EBULIÇÃO**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica. Área de Conhecimento: Ciências Térmicas.

Prof.^a Dra. Elaine Maria Cardoso
Orientadora

Prof. Dr. João Batista Campos Silva
Coorientador

Ilha Solteira

2020

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

A553a Paschoal, Mateus Faria de Andrade.
Análise numérica da dinâmica de crescimento da bolha de vapor em
ebulição / Mateus Faria de Andrade Paschoal. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2020
178 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de
Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Ciências Térmicas, 2020

Orientador: Elaine Maria Cardoso

Coorientador: João Batista Campos Silva

Inclui bibliografia

1. Elementos finitos. 2. Esquema CBS. 3. Ebulição em piscina. 4. Dinâmica de
crescimento de bolha. 5. Problema da cavidade. 6. *Level set*.


Raiane da Silva Santos
Supervisora Técnica de Seção
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação
CRB3 - 9999

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Análise Numérica Da Dinâmica De Crescimento Da Bolha De Vapor Em Ebulição

AUTOR: MATEUS FARIA DE ANDRADE PASCHOAL

ORIENTADORA: ELAINE MARIA CARDOSO

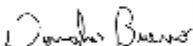
COORIENTADOR: JOÃO BATISTA CAMPOS SILVA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA MECÂNICA, área: Ciências Térmicas pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. JOAO BATISTA CAMPOS SILVA

Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP



Prof. Dr. DOUGLAS DOMINGUES BUENO

Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP



Prof. Dr. THIAGO ANTONINI ALVES

Departamento Acadêmico de Mecânica (DAMEC) / Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Ilha Solteira, 25 de junho de 2020

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho à minha mãe Regina Célia Faria de Andrade, aos meus irmãos Letícia Faria de Andrade Paschoal e Tiago Faria de Andrade Paschoal e ao meu avô Rubens de Andrade.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus por sua imensa bondade e ternura para comigo. Agradeço também à Maria Auxiliadora, nossa mãe celeste de cuja mão recebi e recebo muitas bênçãos. Agradeço também aos anjos santos de Deus, pelos quais Suas bençãos chegaram sobre mim. Em especial, agradeço ao Rafael e à Santa Rita de Cássia por todo o auxílio.

Agradeço também às pessoas mais importantes dessa vida: minha mãe Regina Célia; minha irmã Letícia e meu irmão Tiago. Não existem palavras para agradecer a cada momento que passo do lado deles, muito menos palavras para descrever esses momentos. Nessa pequena, singela e breve homenagem gostaria de deixar registrado que os amo muito.

Faço aqui um agradecimento especial a um homem que muito admiro, pois é nele em quem me espelho: meu avô Rubens. Infelizmente ele não se encontra entre nós fisicamente, mas sei que ele, juntamente com Maria e os anjos, estão todos os dias do meu lado me apoiando e me observando.

Agradeço aqui também às pessoas que fizeram dessa nova jornada do mestrado uma experiência mais do que única: à Laís Stocco, Isabelle de Paula, Renato Reis, Jean Carneiro, Gabriel Coelho, Bruna Ber, Lucas Castro, Igor Minari e Jaine Souza. Agradeço por todas as risadas, caronas, consolos, conselhos e jantas.

Agradeço também àqueles que me acompanharam dentro da faculdade. Em especial à todos que ficavam no nosso laboratório comigo: Iago Lessa, Fábio, Gilmar Donizeti, Gabriel Bertaco, Jéssica Nunes, Igor Kiyomura, Alex Pereira, Leonardo Manetti, Bruno Andrade e todo o grupo de pesquisa Nest-n.

Dos integrantes do grupo de pesquisa, que ainda não foram citados, devo um agradecimento especial a Ruhan Carlos Ponce de Oliveira e Victor Hugo Monghini. Não só ajudaram com boas histórias, piadas e pausas para o café, mas também contribuíram diretamente no desenvolvimento do código apresentado nesse trabalho.

Agradecimento especial também à minha orientadora Elaine Maria Cardoso e meu coorientador João Batista Campos Silva, por terem acreditado em mim, por terem me amparado em momentos de dificuldade, pelos puxões de orelha e me ajudado a desenvolver não só como pesquisador, mas também como pessoa.

Agradeço também com muito carinho minha namorada Fernanda. Agradeço por todas as vezes que ela me aguentou com minhas rabugices, minhas bravezas e minhas crises; mas com mais carinho ainda agradeço por todas as risadas, abraços, sorrisos e todos momentos gostosos que tive ao lado dela.

Agradeço ao Coral da Unesp de Ilha Solteira na pessoa do regente Márcio Guirado Zuanazzi por cada amizade, cada risada e cada momento que passei naquela sala.

Agradeço também à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira por ter sido minha casa por sete anos bem vividos. Agradeço à todos meus professores que passaram pela minha formação acadêmica e à cada servidor que tornou minha estadia aqui ser possível.

Por fim, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, e à Fundação de Amparo à Pesquisa de São Paulo (FAPESP), processos no 2013/05431-7, 2016/13685-0 e 2018/12010-4, pelo importante apoio financeiro recebido para o desenvolvimento da pesquisa aqui descrita.

"Eu te conheço. Eu sei quando você se levanta e quando você se deita.

Eu conheço você no seu íntimo e eu te amo muito. Eu compreendo as suas alegrias, suas dores, falhas e frustrações, e ainda te amo e sempre vou te amar.

Estou sempre na sua frente, atrás, e também ao seu lado, guiando você cada dia.

Não há lugar onde você possa fugir ou se esconder. A noite e o dia são a mesma coisa pra mim. Eu formei você exatamente como eu queria quando você ainda estava no ventre de sua mãe. Você é maravilhoso e belo. Até quando há defeitos (aqueles obstáculos e erros que os outros tem feito na sua vida). Eu tenho um plano perfeito e belo e é para o seu bem. Até antes do seu corpo se formar, eu já havia planejado todos seus dias. Eu quero que você me conheça mais e mais. Deixe-me revelar a você os sintomas e as raízes das suas dores, problemas e frustrações. Assim você reconhecerá seus pecados e se arrependerá, então guiarei você para viver todas as bênçãos que eu mesmo planejei pra você – ou melhor, para nós."

(Autor Desconhecido)

RESUMO

O presente trabalho possui enfoque em apresentar e desenvolver um programa capaz de simular a dinâmica de crescimento de uma bolha em regime de ebulição nucleada. Apresenta também fundamentos de mecânica dos fluidos, transferência de calor, métodos de rastreamento e/ou captura de fronteira e métodos computacionais. Com a linguagem de programação Fortran 90 acoplado à IDE do CodeBlocks fez-se um programa para simular escoamentos de fluidos incompressíveis em coordenadas cartesianas sem e com mudança de fase. Para discretizar as equações governantes do problema, usou-se o Método de Elementos Finitos com o esquema da Separação Baseado na Característica (CBS) para estabilização da solução. Apresenta-se também no texto o desenvolvimento teórico dos métodos de discretização e estabilização. O código referente às equações fluidodinâmicas e térmica implementado foi testado no problema da cavidade com tampa deslizante e com convecção natural cujo domínio foi discretizado por uma malha não estruturada de elementos tetraédricos lineares e com malha estruturada de elementos hexaédricos lineares. Verificou-se que malhas estruturadas mostraram uma maior estabilidade para simulação do campo de pressão. Testou-se também resolver o campo de pressão através da Equação de Poisson para pressão e pelo Método da Compressibilidade Artificial. Foi evidenciado que ambos os métodos geram resultados muito similares para o campo de velocidade. Pela comparação dos resultados obtidos com os resultados *benchmarking* observa-se em alguns casos que o programa feito é capaz de simular um escoamento com transferência de calor com baixas velocidades. O código referente às equações de captura de fronteira também foi testado com um método *Level Set* modificado, que se mostrou um método para captura de fronteira fácil de ser implementado e que retorna resultados coerentes com as simulações de referência. Por fim, a simulação da dinâmica de crescimento de uma bolha em regime de ebulição nucleada mostrou raios de crescimento coerentes com dados experimentais da literatura.

Palavras-chave: Elementos finitos. Esquema CBS. Ebulição em piscina. Dinâmica de crescimento de bolha. Problema da cavidade. *Level set*. *Volume of fluid*.

ABSTRACT

The present work aims to present and develop a program able to simulate a single bubble growth in the pool boiling regime. Also, it presents some fluid mechanical, heat transfer, front tracking, and computational methods fundamentals. By using Fortran 90 programming language coupled with CodeBlocks IDE was developed a frame to simulate incompressible fluid flows in Cartesian coordinates with and without phase change. In order to discretize the governing equations were used Finite Element Method with Characteristic Based Split (CBS) scheme to stabilize the solution. The theoretical development of the Finite Element Method and CBS scheme are also presented. The code was tested in a driven-lit cavity and the cavity problem with natural convection which domain was discretized by a non-structured mesh of linear tetrahedrons and a structure mesh of hexahedral linear elements. It was observed that structured meshes are more stable to obtain the pressure field. Moreover, it was tested the pressure field by Poisson Equation and by Artificial Compressibility. It was evidenced both gives similar temperature field. Comparing the obtained results and benchmarking results can be concluded that the implemented code is capable to simulate fluid flow with heat exchange with low velocities. The code implemented for front capturing was tested and was verified that the Level Set Method is an easy method to implement and returned reasonable results compared with the reference simulation. The simulation of a single bubble growth under the pool boiling regime shows a growth radius coherent to the literature experimental data.

Keywords: Finite Element Method. CBS scheme. Pool boiling. Bbubble growth dynamic. Cavity problem. Level set. Volume of fluid.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Dinâmica de uma bolha de vapor em ebulição	24
Figura 2 – Diferenciação da micro e macrocamada	25
Figura 3– Efeito do ângulo de contato no coeficiente de transferência de calor para ebulição da água sobre uma placa de aço inoxidável de comprimento $L = 0,5\text{mm}$ com um fluxo de calor aplicado de $1,1 \text{ W/cm}^2$ e um grau de superaquecimento de $6 \text{ }^\circ\text{C}$	27
Figura 4 – Curva característica da ebulição em piscina	28
Figura 5 – Distorção da convecção da função peso.....	46
Figura 6 – Característica no domínio tempo-espaço.	47
Figura 7 – Geometria de alguns tipos de elementos.....	61
Figura 8 – Elemento tetragonal em coordenadas locais adimensionais num elemento de referência	61
Figura 9 – Elemento hexagonal em coordenadas locais adimensionais num elemento de referência	62
Figura 10 – Domínio computacional e condições de contorno para o problema da cavidade descrita por Wong e Baker (2002).....	73
Figura 11 – Projeção bidimensional das linhas de corrente do problema da cavidade para $Re=100$ após 5 segundos de simulação utilizando uma malha tetraédrica não estruturada e a equação de Poisson para obtenção do campo de pressão	75
Figura 12 – Campo de pressão do problema da cavidade para $Re=100$ após 5 segundos de simulação utilizando uma malha tetraédrica não estruturada e a equação de Poisson para obtenção do campo de pressão	76
Figura 13 – Projeção bidimensional das linhas de corrente do problema da cavidade para $Re=100$ após 5 segundos de simulação utilizando uma malha tetraédrica não estruturada e o método da compressibilidade artificial para obtenção do campo de pressão	77
Figura 14 – Campo de pressão do problema da cavidade para $Re=100$ após 5 segundos de simulação utilizando uma malha tetraédrica não estruturada e o método da compressibilidade artificial para obtenção do campo de pressão	77
Figura 15 – Vetores velocidade para o problema descrito no item 5 para $Re = 100$	78
Figura 16 – Malha tetraédrica não estruturada usadas para discretização do problema da cavidade.	79
Figura 17 – Malha hexaédrica estruturada usadas para discretização do problema da cavidade.	79

Figura 18 – Comparação da velocidade no eixo x do presente trabalho com os dados de Wong e Baker (2002) para o problema da cavidade deslizante considerando $Re=100$	80
Figura 19 – Domínio computacional e condições de contorno para o problema da cavidade térmica sem convecção natural descrita por Wong e Baker (2002).	81
Figura 20 – Projeção bidimensional das linhas de corrente do problema da cavidade sob convecção natural para $Ra=10^3$ após 0,5 segundos de simulação	83
Figura 21 – Campo tridimensional de pressão do problema da cavidade sob convecção natural para $Ra=10^3$ após 0,5 segundos de simulação	83
Figura 22 – (a) Campo tridimensional e (b), (c) e (d) projeções bidimensionais nos planos cartesianos da temperatura do problema da cavidade sob convecção natural para $Ra=10^3$ após 0.5 segundos de simulação	84
Figura 23 – Comparação da temperatura no eixo z do presente trabalho com os de uma simulação de Silva (1998) para um tempo de simulação $t=0.5s$ para $Ra=10^3$	85
Figura 24 – Isotermas para o problema da cavidade sob convecção natural segundo Silva (1998) para $Ra=10^3$	86
Figura 25 – Posição da esfera ao longo do tempo	87
Figura 26 – Posição da esfera (isovalores da função <i>Level Set</i>) ao longo do tempo	88
Figura 27 – Domínio computacional sugerido por Kunkelmann (2011).....	91
Figura 28 – Sistema de coordenadas definido por Lesage, Cotton e Robinson (2013) para definição do formato da bolha	92
Figura 29 – Diferentes vistas da malha computacional não estruturada de 40010 nós e 197791 elementos tetraédricos lineares usada para discretização do domínio do problema de ebulição nucleada.....	97
Figura 30 – Formato da bolha para vários instantes de tempo para o caso descrito no item 6 tendo HFE-7100 como fluido de trabalho	98
Figura 31 – Comparação entre os dados experimentais e os resultados numéricos para o caso descrito no item 6 tendo HFE-7100 como fluido de trabalho	98
Figura 32 – Formato da bolha para vários instantes de tempo para o caso descrito no item 6 tendo água como fluido de trabalho	99
Figura 33 – Comparação entre: (a) dados numéricos do presente trabalho, (b) Cheng, Guo e Peng (2019), (c) Staniszewski (1959) No.1, (d) Staniszewski (1959) No.2, (e) Staniszewski (1959) No.3, (f) Staniszewski (1959) No.4, (g) Staniszewski (1959) No.5, (h) Yabuki & Nakabeppu (2014).	100
Figura 34 – Crescimento observado de uma bolha de gás injetado em meio líquido	101

Figura 35 – Perfil do crescimento de uma bolha de vapor de 0 a 0,33 ms para $r_c = 0,2715\text{mm}$ e $Bo_{r_c} = 0,0099$. e (b) Perfil 3D da bolha de vapor na condição de partida.....	103
Figura 36 – (a) Perfil do crescimento de uma bolha de vapor de 0 a 0,2 ms para $r_c = 0,4265\text{mm}$ e $Bo_{r_c} = 0,0244$. (b) Perfil 3D da bolha de vapor na condição de partida.....	104
Figura 37 – Perfil do crescimento de uma bolha de vapor de 0 a 0,48 ms para $r_c = 0,5925\text{mm}$ e $Bo_{r_c} = 0,0470$. e (b) Perfil 3D da bolha de vapor na condição de partida.....	105

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

CBS – *Characteristic Based Split*

LS – *Level Set*

VOF – *Volume of Fluid*

CLSVOF – *Coupled Level Set and Volume of Fluid*

Sng – Função Sinal

CHF – *Critical Heat Flux*

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos do alfabeto latino

- D_d – Diâmetro de partida de uma bolha de vapor $[m]$
 g – Aceleração da gravidade $[m/s^2]$
 T – Temperatura $[K]$ / Período $[s]$
 q'' – Fluxo de calor $[W/m^2]$
 C_p – Calor específico à pressão constante $[Jkg^{-1}K^{-1}]$
 h_{fg} – Entalpia de mudança de fase entre as fases líquida e de vapor $[J/kg]$
 k – Condutividade térmica $[Wm^{-1}K^{-1}]$
 c_i – Constante
 c – Velocidade do som $[m/s]$
 R – Função resíduo para o Método de Resíduos Ponderados
 W/w_i – Função peso
 N – Função de Interpolação
 t – Tempo $[s]$
 x, y, z – Sistema de coordenada cartesiana $[m]$
 $\vec{x}$ – Vetor posição $[m]$
 u – Componente de velocidade na direção x $[m/s]$
 v – Componente de velocidade na direção y $[m/s]$
 w – Componente de velocidade na direção z $[m/s]$
 P – Pressão $[Pa]$
 Q – termo fonte genérico
 $\tilde{u}_i$ – Velocidade intermediária na direção i
 h – coeficiente de transferência de calor $[W/m^2K]$
 h_e – Tamanho característico da malha $[m]$
 f – função genérica
 $\vec{m}$ – Vetor fluxo de massa $[kg.m^{-2}s^{-1}]$
 E – Fator de compressão
 H – Função de Heaviside
 $\vec{n}$ – vetor normal à uma superfície
 C_{CFL} – Constante
 C_{st} – Constante

r_c – raio da cavidade $[m]$

Pr – Número de Prandt

Re – Número de Reynolds

Ra – Número de Rayleigh

Bo – Número de Bond

Símbolos do alfabeto grego

θ_c – Difusividade térmica $[m^2/s]$ / Fração de vazio

θ_c – Ângulo de contato $[^\circ]$

θ – Parâmetro para indicar se a simulação acontecerá de forma implícita, explícita ou semi-implícita / Diferença entre a temperatura em um ponto e a temperatura muito longe de uma fonte de calor que não sofreu influência da mesma $[K]$

ρ – Densidade $[kg/m^3]$

μ – Viscosidade dinâmica $[kg/m/s]$

σ – Tensão superficial $[N/m]$

ψ – Ângulo de contato de recuo do líquido $[^\circ]$

χ – Ângulo de inclinação da superfície aquecida em relação à horizontal $[^\circ]$

ϕ – Escalar qualquer / Função *Level Set*

φ – Função conhecida aproximante do escalar ϕ

γ_ϕ – Variável escalar dependente de ϕ

$\vec{\tau}$ – Tensor de tensões $[Pa]$

τ – tempo real de simulação $[s]$ / subpasso de tempo $[s]$ / Constante do método CLSVOF

β_{AC} – Parâmetro do método de compressibilidade artificial que serve como aproximante para a velocidade do som

β – Coeficiente de compressibilidade térmica $[1/K]$

ξ, η, ζ – Coordenadas de referência

ξ – um parâmetro não nulo para que β_{AC} seja não nulo

ξ – Viscosidade cinemática $[m^2/s]$

Ω – Domínio do problema

Γ – Fronteira do domínio Ω / Constante do método CLSVOF

λ – Razão entre o passo do subpasso de tempo e o passo de tempo real

ε – Constante do método CLSVOF

δ – Função Delta de Dirac

δ_t – Espessura da camada limite térmica

κ – Curvatura

Subscritos

l ou f – Referente à fase líquida

g ou v – Referente à fase de vapor

s ou w – Referente à parede

sat – Indica estado de saturação

0 – Condição inicial

diff – Referente à processos de difusão

conv – Referente à processos de convecção

int – Referente à interface entre dois fluidos

max – Máximo

min – Mínimo

∞ – Referente ao fluido longe da fonte de calor e que não sofreu influência dessa fonte

Sobrescritos

n, m – Indica o passo de tempo ou pseudo passo de tempo

SUMÁRIO

1	ORGANIZAÇÃO TEXTUAL	20
2	INTRODUÇÃO.....	21
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	23
4	EQUACIOAMENTO E METODOLOGIA NUMÉRICA.....	35
4.1	Equações Fluidodinâmicas e Térmica	35
4.2	Técnicas de Rastreio e Captura de Fronteira Móvel.....	36
4.2.1	<i>Introdução</i>	36
4.2.2	<i>Level Set</i>	37
4.2.3	<i>Volume de Fluido</i>	40
4.2.4	<i>Método Level Set acoplado ao método de Volume de Fluido</i>	41
4.3	Método de Elementos Finitos.....	43
4.4	Esquema de Separação Baseado na Característica – CBS	44
4.4.1	<i>Métodos Baseados na Característica</i>	44
4.4.2	<i>Discretização Temporal e Procedimento de Separação</i>	49
4.5	Métodos de Resolução do Campo de Pressão para Escoamentos Incompressíveis	
	53	
4.5.1	<i>Método de Compressibilidade Artificial</i>	53
4.5.2	<i>Método da Equação de Poisson</i>	54
4.6	Equações Discretizadas	55
4.6.1	<i>Equações fluidodinâmicas e térmica</i>	56
4.6.2	<i>Equações de captura de fronteira</i>	58
4.7	Malha	60
4.8	Método de Integração	63
4.9	Funções de Interpolação.....	64
4.10	Mudança de Coordenada e Jacobiano da Transformação	66

4.11	Solução dos Sistemas Algébricos	67
4.11.1	<i>Diagonalização de matrizes</i>	67
4.11.2	<i>Método dos Gradientes Biconjugados</i>	68
4.12	Montagem das Matrizes	70
4.13	Programa Usado e Características dos Computadores Utilizados.....	71
5	VALIDAÇÕES.....	73
5.1	Validação do Código de Simulação das Equações de Continuidade, Momento e Pressão	73
5.2	Validação do Código de Simulação da Equação da Energia	81
5.3	Validação do Código de Captura de Fronteira	86
6	RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	90
7	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	107
7.1	Conclusões	107
7.2	Sugestões para Trabalhos Futuros.....	107
	REFERÊNCIAS.....	108
	APÊNDICE A -	117
	APÊNDICE B -	119
	APÊNDICE C -	147
	APÊNDICE D -	148
	APÊNDICE E -	152

1. ORGANIZAÇÃO TEXTUAL

O presente trabalho, além deste item, está estruturado nos seguintes capítulos:

O Capítulo 2 dedica-se a introduzir o leitor ao tema de estudo abordado, bem como indicar ao mesmo o objetivo do presente trabalho.

O Capítulo 3 apresenta uma revisão bibliográfica acerca de ebulição nucleada, elementos finitos, esquema CBS e métodos de captura de fronteira.

O Capítulo 4 é, inicialmente, dedicado a apresentação de toda a formulação matemática usada. Posteriormente, é dada toda a base do método de discretização usado: método de Elementos Finitos acoplado com o Esquema de Separação Baseada na Característica (CBS). Após aplicar a discretização espacial e temporal apresentada, as equações são mostradas em sua forma discretizada. Por fim, nesse capítulo mostra-se o detalhamento numérico usado, como malhas, método de integração, Jacobianos usados, métodos de solução de sistemas algébricos, montagem das matrizes globais e o setup das máquinas usadas.

O Capítulo 5 destina-se à validação dos *softwares* desenvolvidos. O mesmo é dividido em duas partes principais: mostrar e discutir os resultados do *software* fluidodinâmico e térmico e comparar os mesmos com resultados *benchmarking* para validar o código; mostrar e discutir os resultados do algoritmo de captura de fronteira implementado e validá-lo com um resultado de referência.

O Capítulo 6 se dedica a apresentar os resultados e discussões acerca dos resultados das simulações para o fenômeno de Ebulição Nucleada, bem como apresenta uma comparação dos presentes resultados com dados da literatura.

O Capítulo 7 apresenta por fim as conclusões do trabalho e algumas sugestões para trabalhos futuros a serem feitos a partir do presente estudo e com os *softwares* desenvolvidos.

No Apêndice A toda dedução matemática dos métodos utilizados nas equações governantes é apresentada; o Apêndice B mostra a base teórica do Método de Resíduos Ponderados, o qual é base para o Método de Elementos Finitos; o Apêndice C mostra a base teórica para o Método do Duplo Passo de Tempo; o Apêndice D apresenta alguns resultados complementares e, por fim, o Apêndice E mostra os resultados numéricos dos dados apresentados graficamente nos Capítulos 5 e 6 organizados em tabelas.

2. INTRODUÇÃO

O esforço para produzir equipamentos compactos evidenciou os problemas relacionados à dissipação térmica, presentes na maior parte dos produtos, principalmente, os que possuem microprocessadores que requerem controle de temperatura a fim de garantirem sua integridade física e funcionamento perfeito. O processo de ebulição possibilita a transferência de elevados fluxos de calor com pequenas diferenças entre as temperaturas da superfície aquecida e do fluido (YEOM; SRIDHARAN; CORRADINI, 2015).

A intensificação da transferência de calor por ebulição necessita de um bom conhecimento dos mecanismos fundamentais que governam esse fenômeno. O fenômeno de transferência de calor em um sistema em ebulição é mais complexo do que aquele encontrado em convecção monofásica, pois além de todas as variáveis associadas à convecção é necessário considerar a dependência dos fenômenos de interface líquido-superfície.

Dentre os estudos que são realizados, apenas alguns focam na física do fenômeno de ebulição; esses encontram-se em duas categorias: estudos experimentais e estudos numéricos. Pesquisas na área de simulação são de extrema importância, tanto para a formação de conhecimento quanto para indústrias, pois com as mesmas pode-se prever, sem realização de experimentação, o que acontecerá em um equipamento antes mesmo de construí-lo. No entanto, estudos experimentais são importantes para entender o fenômeno e validar estudos numéricos.

Na literatura encontram-se modelos e mecanismos de transferência de calor a fim de compreender e justificar as elevadas taxas de transferência de calor observadas no regime de ebulição nucleada, como: termocapilaridade (JABARDO, 1981), microconvecção (FORSTER E ZUBER, 1955) e superposição dos efeitos de convecção natural, evaporação da microcamada e um terceiro mecanismo relacionado ao modelo de Mikic e Rohsenow (1959) e Judd e Hwang (1976). Apesar da existência de modelos teóricos que tentam prever a dinâmica da bolha de vapor no processo de transferência de calor por ebulição, não há um modelo universal que represente o fenômeno, sendo necessária uma abordagem numérica (KIM, 2009; SIEDEL, 2012).

A abordagem numérica ao problema é uma alternativa viável para a análise. Pesquisas envolvendo abordagens numéricas do crescimento e partida de bolhas têm sido

publicadas recentemente, com resultados satisfatórios (MUKHERJEE E KANDLIKAR, 2007; WEI, FENG; LI, 2015; LI *et al.*, 2015).

Entretanto, poucos modelos desenvolvidos envolvendo a dinâmica de crescimento de bolha de vapor consideram a influência de vários sítios de nucleação e a distância entre esses, a morfologia da superfície e a presença de nanofluidos. Outra dificuldade encontrada nas simulações numéricas é, justamente, o problema de determinação da posição da fronteira móvel, uma vez que a bolha cresce em função do tempo.

Inserido neste contexto encontra-se o presente trabalho, cujo objetivo foi integrar as pesquisas citadas anteriormente: simulação tridimensional de bolhas de vapor no regime de ebulição nucleada, utilizando-se de técnicas numéricas de rastreamento da fronteira da bolha; e influência do fluido de trabalho (interação superfície-fluido). Os objetivos específicos deste trabalho são: fazer um *software* aberto em Fortran 90 capaz de simular tridimensionalmente escoamentos com troca térmica com baixas velocidades; um algoritmo de captura de fronteira; e um programa que simule o processo de crescimento de bolhas em regime de ebulição nucleada que integra os dois *softwares* anteriormente citados.

3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Comparado a sistemas monofásicos líquidos ou gasosos, o processo de ebulição apresenta um elevado coeficiente de transferência de calor (SATTARI *et al.*, 2014). Isso acontece, pois o calor latente necessário para realizar a mudança de fase de uma substância é muito maior do que o calor sensível para elevar a temperatura da mesma (BEJAN, 1993).

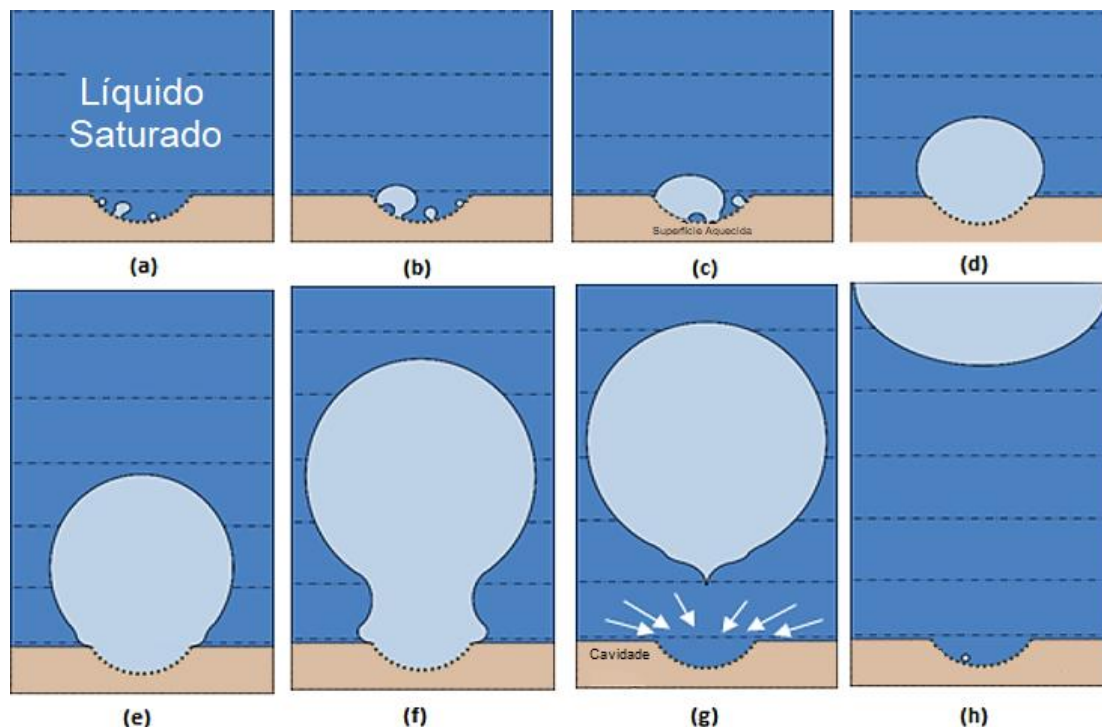
Devido à capacidade de retirada de altas taxas de calor, o tema é de grande interesse da indústria e da comunidade científica. Por exemplo, Tschui (2014) e Asperitas (2017) apresentam estudos sobre refrigeração de eletrônicos por imersão. Nestes, os autores evidenciam a eficiência do método e a superioridade deste em relação à refrigeração a ar. Também, a NASA (*National Aeronautics and Space Administration*) evidencia que os estudos sobre este tema serão importantes para aplicações em sistemas de refrigeração espaciais ou equipamentos subaquáticos (NASA, 2017). Outro exemplo de aplicação da ebulição nucleada pode ser visto em sistemas de inversores e concentradores solares (Ford Aerospace & Communications Corporation, 1982).

A ebulição em si consiste em um processo de não equilíbrio, no qual o líquido se encontra em um estado metaestável, precisando de uma leve perturbação para ebulir. Uma explicação do início deste processo é dada por Carey (1992), partindo do princípio de que toda superfície real possui cavidades, as quais, por sua vez, possuem gases presos no seu interior. Tais gases garantem a perturbação necessária para retirar a película de líquido, adjacente à superfície, do estado metaestável em um grau de superaquecimento menor do que em um processo de nucleação homogênea.

No regime de ebulição nucleada, as altas taxas de transferência de calor são essencialmente devido à micro convecção, condução transiente, evaporação da microcamada, e transferência de calor na linha de contato devido ao movimento das bolhas de vapor (KIM, 2009). A contribuição relativa de cada mecanismo de transferência de calor para a taxa de transferência de calor total é sensível às condições experimentais e, portanto, difícil de prever. O que se pode afirmar é que o coeficiente de transferência de calor em ebulição está intimamente ligado à dinâmica da bolha de vapor, *i.e.*, formação, crescimento e desprendimento da bolha, e também a fatores como: a densidade de sítios de nucleação, interações entre sítios vizinhos e bolhas sucessivas (DHIR, 2006). Portanto, a fim de aprimorar o conhecimento sobre os mecanismos de transferência de

calor em ebulição é fundamental o entendimento da dinâmica da bolha de vapor. Um esquema da dinâmica de uma bolha de vapor é mostrado na Figura 1.

Figura 1 – Dinâmica de uma bolha de vapor em ebulição



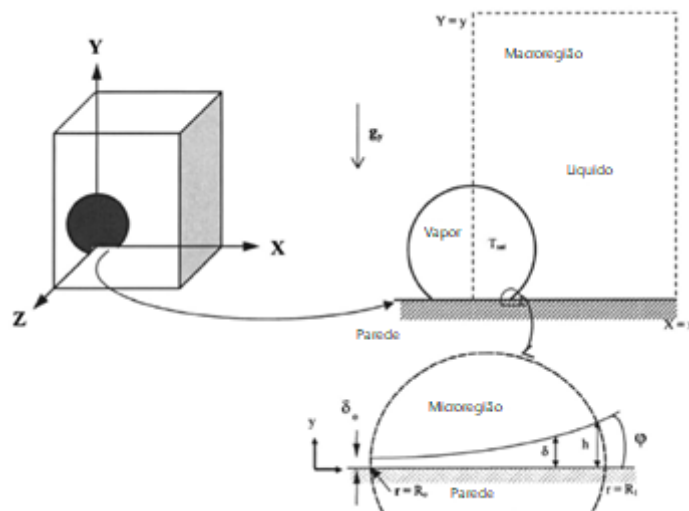
Fonte: Adaptado de El-Genk (2020).

No esquema da Figura 1 tem-se em (a) o momento em que o líquido adjacente à superfície aquecida se encontra saturado. A partir de então, a mudança de fase acontece e pequenos embriões de bolha de vapor aparecem em uma cavidade. Devido à contínua aplicação de fluxo de calor na superfície, os embriões de bolha tendem a crescer e podem até coalescer entre si, como mostrado em (b) e (c). A bolha formada em (d) continua seu crescimento devido à contínua mudança de fase. Entretanto, ao atingir um diâmetro no qual as forças adesivas sobre a superfície são iguais ou menores que as forças de empuxo, a bolha se desprende da superfície. A partir de então, o líquido adjacente retorna ao espaço anteriormente ocupado pelo vapor. A partir do momento em que o líquido atinge a condição de saturação junto a superfície, como mostrado em (h), novos embriões de bolha nucleiam, dando continuidade ao processo.

Moore e Mesler (1961) foram pioneiros na pesquisa do mecanismo de evaporação da microcamada reportando que, sob determinadas condições, as bolhas podem assumir a forma semiesférica, deixando, durante seu crescimento, uma camada de líquido

superaquecido de reduzida espessura junto à superfície aquecida, denominada de microcamada (Figura 2).

Figura 2 – Diferenciação da micro e macrocamada



Fonte: Adaptado de Dhir, Warrier e Aktinöl (2013).

Alguns pesquisadores atribuem a alta taxa de transferência de calor por ebulição ao fenômeno da evaporação da microcamada. Stephan e Hammer (1994) mostraram que a evaporação da microcamada contribui com 38% do total de calor retirado da superfície. Já Kim (2009) afirma que a convecção associada à condução transiente, nessa região, são os mecanismos mais influentes durante a ebulição nucleada. Porém, trabalhos como o de Colin (2016) mostram que ainda não há consenso na literatura sobre qual o mecanismo de troca de calor mais influente no processo de ebulição nucleada.

Outro mecanismo relevante no processo de ebulição é a microconvecção. Segundo Kim (2009), o crescimento de uma bolha de vapor afeta termicamente sua vizinhança, fazendo que ocorram diferenças de densidade ao redor da mesma e induzam, assim, o fenômeno de convecção natural nessa região. Reafirmando a divergência existente entre autores em relação à importância de cada mecanismo, Moghaddam e Kige (2009) afirmam que o processo de microconvecção é tão influente no processo de transferência de calor por ebulição quanto os efeitos citados por Kim (2009), listados anteriormente.

Segundo o modelo de Rohsenow (1952), o mecanismo de transferência de calor dominante é o de convecção no líquido resultante do movimento de líquido frio junto à superfície aquecida, promovido pelo desprendimento das bolhas de vapor desta. O tempo de espera e a transferência de calor por condução transiente na camada de líquido frio

constituem a base do modelo proposto por Han e Griffith (1965) e, posteriormente, retomado por Mikic e Rohsenow (1969). Neste modelo a superfície aquecida é dividida em duas regiões: a de influência das bolhas e aquela em que não há cavidades ativas, na qual o mecanismo de transferência de calor é a convecção natural.

O último mecanismo físico citado por Kim (2009) é a condução transiente na superfície onde ocorre a ebulição. Kunkelmann e Stephan (2010) mostraram em suas simulações que existe variação do campo de temperatura sob a superfície aquecida espacial e temporalmente, indicando que este mecanismo também deve ser considerado.

Além dos mecanismos citados, a termocapilaridade também é responsável pelas altas taxas de transferência de calor observadas em processos com mudança de fase. Esse fenômeno ocorre quando existe um gradiente térmico no fluido onde a bolha está imersa e, conseqüentemente, um gradiente de tensão superficial líquido/vapor que ajuda a desprender a bolha da superfície (MAREKA E STRAUB, 2001; ALHENDAL, TURAN E HOLLINGSWORTH, 2013).

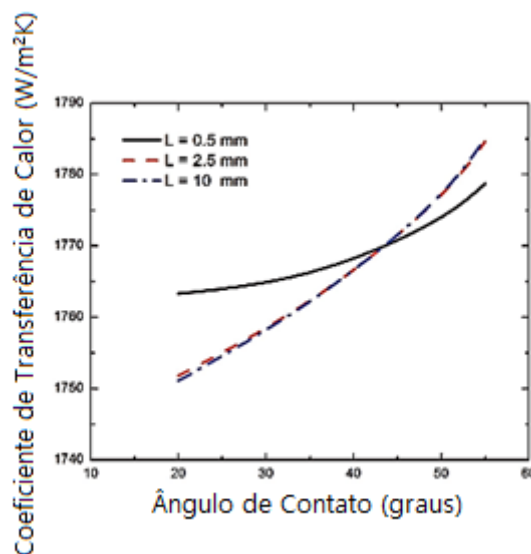
Em relação aos parâmetros que influenciam o processo de ebulição, o ângulo de contato entre a superfície aquecida e o fluido de trabalho merece destaque. Fritz, em 1935, formulou uma correlação que relaciona o diâmetro de partida da bolha da superfície aquecida, D_d , e o ângulo de contato θ_c , como mostrado na Equação (1):

$$D_d = 0,02089\theta_c \sqrt{\frac{\sigma}{g(\rho_l - \rho_g)}} \quad (1)$$

sendo g a aceleração da gravidade em m/s^2 , σ a tensão superficial em N/m , e ρ_l e ρ_g as densidades da fase líquida e da fase gasosa, respectivamente em kg/m^3 .

Aktinol e Dhir (2014) apresentaram uma proporcionalidade entre o coeficiente de transferência de calor e o ângulo de contato, conforme mostrado na Figura 3.

Figura 3– Efeito do ângulo de contato no coeficiente de transferência de calor para ebulição da água sobre uma placa de aço inoxidável de comprimento $L = 0,5\text{mm}$ com um fluxo de calor aplicado de $1,1\text{ W/cm}^2$ e um grau de superaquecimento de $6\text{ }^\circ\text{C}$



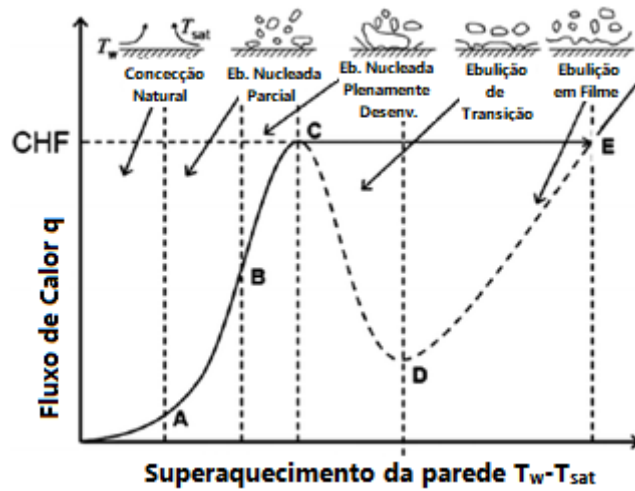
Fonte: Adaptado de Aktinol e Dhir (2014).

Visto que vários mecanismos influem no fenômeno de ebulição, diversos também são os modelos teóricos encontrados na literatura para descrever o fenômeno. Modelos como os de Rohsenow (1952) e Forster e Zuber (1955) propõem que o movimento causado pelo crescimento e partida das bolhas é modelado como sendo o mecanismo de transporte convectivo e o alto coeficiente de transferência de calor, associado à ebulição nucleada, é o resultado da agitação do fluido devido à partida das bolhas.

Modelos posteriores, como os de Han e Griffith (1965) e Mikic e Rohsenow (1969) propõem que após a partida da bolha da superfície aquecida, a mesma retira a camada de líquido superaquecido adjacente à superfície aquecida. Assim, o líquido sub-resfriado ou à temperatura de saturação ocupa o “vazio” deixado pela bolha de vapor, resfriando a superfície. No entanto, caso esse modelo representasse o fenômeno, dever-se-ia observar experimentalmente um gradiente de temperatura que se forma instantaneamente na região da bolha e seus arredores no momento de partida da mesma.

Alguns autores, no entanto, se empenham em encontrar correlações experimentais que representam o fenômeno de ebulição e seus regimes, incluindo o fluxo crítico. A Figura 4 mostra a curva característica do processo de ebulição em piscina com fluxo de calor prescrito (quando a ebulição ocorre com o fluido de trabalho estacionário).

Figura 4 – Curva característica da ebulição em piscina



Nota: CHF – *Critical heat flux* (fluxo de calor crítico)

Fonte: Adaptado de Carey (1992).

Para fluxo de calor prescrito, na Figura 4, a região compreendida entre A e B mostra o estágio inicial do processo de ebulição, no qual a frequência de partida das bolhas de vapor é baixa. Entre os pontos B e C têm-se a região completamente desenvolvida, na qual a frequência de saída de bolhas aumenta, formando colunas de vapor com coalescências verticais e horizontais entre as bolhas de vapor. No ponto C encontra-se o ponto crítico, cujo fluxo de calor correspondente é denominado fluxo de calor crítico (CHF – *Critical Heat Flux*). Nesse ponto, o calor aplicado à superfície aquecida é alto, aumentando significativamente a frequência de saída de bolhas e o grau de superaquecimento da parede, a ponto de formar um único filme de vapor sobre a superfície aquecida. Qualquer incremento no fluxo de calor a partir do ponto C causa uma degradação da transferência de calor e até mesmo da superfície. O ponto E representa o súbito aumento do grau de superaquecimento no ponto crítico. Nesse ponto, a ebulição acontece ainda com desprendimento de bolhas, mas com um filme de vapor uniforme sobre a superfície aquecida. No caso de temperatura prescrita, observam-se as seguintes regiões da Figura 4: A→B→C→D→E (CAREY, 1992).

Rohsenow (1952) correlacionou o fluxo de calor aplicado à superfície (q'') com a diferença de temperatura observada entre a temperatura do fluido e a da superfície (ΔT):

$$\frac{c_{pl}\Delta T}{h_{fg}} = C_{sf} \left\{ \frac{q''}{h_{fg}\mu_l} \left[\frac{\sigma}{g(\rho_l - \rho_g)} \right]^{1/2} \right\} \left(\frac{\mu_l c_{pl}}{k_l} \right)^n \quad (2)$$

sendo c_{pl} o calor específico à pressão constante da fase líquida em J/kg.K; h_{fg} a entalpia de mudança de fase em J/kg; μ_l a viscosidade dinâmica do fluido em kg/m.s; k_l a condutividade térmica do líquido em W/m.K e C_{sf} , m e n constantes experimentais. O coeficiente C_{sf} depende da combinação superfície/líquido.

Kandlikar (2001) desenvolveu uma correlação que estima o fluxo de calor crítico, tal como descrito na Equação (3):

$$q_c^* = h_{fg} \rho_g^{0.5} \left(\frac{1 + \cos \Psi}{16} \right) \left[\frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{4} (1 + \cos \Psi) \cos \chi \right]^{0.5} \left[\sigma g (\rho_l - \rho_g) \right]^{0.25} \quad (3)$$

Na Equação (3), ψ é o ângulo de contato de recuo do líquido com a superfície e χ refere-se à inclinação da superfície aquecida em relação a horizontal.

Em geral, pesquisas com enfoque experimental obtêm modelos matemáticos que reproduzem os dados experimentais obtidos. Contudo, é desejável a obtenção de uma correlação que permita uma correta descrição do fenômeno, que leve em consideração todos os dos mecanismos físicos envolvidos no fenômeno de ebulição.

Sato, Niceno e Smith (2019) afirmam que os estudos experimentais, além de serem financeiramente muito custosos, também não estão avançando na mesma velocidade que os estudos que realizam simulações do processo de ebulição. Desta forma, estudos com enfoque numérico são necessários nesta área para o entendimento da dinâmica da bolha de vapor. Afinal, o surgimento (nucleação), crescimento e a partida da bolha de vapor são etapas importantes do fenômeno.

Welch (1998) simulou o crescimento de uma bolha de vapor usando o Método de Volumes Finitos. Dentre suas considerações, o autor levou em consideração a condição transiente da temperatura na parede aquecida durante o processo e a troca de calor na região da microcamada, a qual, no entanto, foi modelada por correlações empíricas.

Abarajith e Dhir (2002) também simularam a dinâmica de crescimento de uma única bolha de vapor sobre a superfície aquecida, considerando o efeito do ângulo de contato. Os autores também consideraram a transferência de calor na microcamada, porém a temperatura da parede aquecida foi considerada constante.

Segundo Smolianski, Haario e Luukka (2008), apesar do avanço de simular várias bolhas de vapor ao mesmo tempo, seria mais interessante fazer comparações de resultados experimentais com resultados de simulações tridimensionais.

Pesquisadores como Zhao, Li e Zhang (2011) simularam o crescimento de uma bolha para verificar a influência da gravidade sobre o fenômeno e encontraram que o diâmetro de partida da bolha simulado concorda com a correlação empírica de Fritz (1935). Ainda na temática de ebulição nucleada em microgravidade, Aktinol *et al.* (2019) mostram a influência que a gravidade tem sobre o crescimento. Nesse trabalho, os autores evidenciam que os efeitos de gravidade alteram a dinâmica de crescimento de uma bolha, fazendo com que o desprendimento das bolhas de vapor ocorra com frequências menores. Além disso, os autores mostram que a dinâmica de crescimento de bolhas de vapor influencia diretamente o coeficiente de transferência de calor do processo.

Aktinol e Dhir (2014) simularam o processo de ebulição levando em consideração a condução transiente na superfície aquecida e compararam com o caso de temperatura da superfície constante. Eles encontraram que, durante o processo de ebulição, a temperatura da superfície aquecida varia espacial e temporalmente. Apesar dos autores quantificarem a dependência do tempo de espera com diferentes parâmetros, como fluxo de calor e propriedades termofísicas, não foi levado em consideração o efeito do ângulo de contato.

Zhang (2014), além dos resultados mostrarem boa concordância com a literatura, considerou os efeitos da condução transiente da parede. Paschoal, Cardoso e Silva (2017a, b) estudaram a influência de condução transiente em uma simulação bidimensional do crescimento de uma única bolha de vapor em um fluido em condições saturadas. Ambos os trabalhos constataram que esse efeito pode ser desconsiderado, pois os resultados são semelhantes a simulações que consideram a parede com temperatura constante ao longo do tempo.

Outros autores, como Liu *et al.* (2017) simularam a dinâmica de bolhas de vapor em *softwares* comerciais e compararam com resultados de correlações. No caso, os autores citados conseguiram realizar uma simulação, que afirmam ser validada pela correlação de Fritz (1935). Entretanto, não apresentam a comparação de resultados entre a simulação e a correlação citada.

Lee, Law e Lee (2019) estudaram a dinâmica de crescimento de uma bolha de vapor, mas com enfoque nos efeitos do fenômeno no domínio de líquido. Os autores concluem que os efeitos de turbulência têm grande importância nos resultados de simulações de ebulição nucleada; bem como afirmam que os efeitos de convecção natural podem ser negligenciados.

Outra linha de pesquisa numérica relativamente recente é a simulação da dinâmica de crescimento de uma bolha de vapor considerando nanopartículas dispersas no fluido de

trabalho. O grande ponto dessas simulações é justamente a variação de propriedades físicas do fluido refrigerante as quais, além de possuírem dependência com a temperatura, dependem também da concentração das partículas sólidas dispersas. Wu e Zhao (2013) mostraram que as propriedades dos nanofluidos (fluidos com nanopartículas em suspensão) são usualmente calculadas por meio de correlações.

Kamel *et al.* (2019) por exemplo fazem uso de correlações para cálculo das propriedades de água com nanopartículas de SiO_2 à baixa concentração (0,01% vol.) e constataram que as propriedades do fluido refrigerante não são afetadas significativamente pela presença do nanofluido. No entanto, os autores levam em consideração também os efeitos da mudança morfológica causada pela deposição das nanopartículas, cujo modelo simulado mostrou concordância com os dados experimentais apresentados no trabalho.

Wang e Wu (2015) simularam o crescimento e partida de uma única bolha de vapor durante o processo de ebulição convectiva de alumina suspensa em água. Os autores utilizaram correlações empíricas para contornar o problema das propriedades do fluido.

Recentemente, pesquisadores da área de simulação numérica estão se dedicando ao problema de movimentação da fronteira da bolha de vapor, a qual se modifica à medida que a bolha cresce, seja pela mudança de forma ou pelo aumento de tamanho da mesma. Lorenzini e Yogendra (2018) citam que os métodos mais utilizados para rastreamento e captura de fronteira são: *Level Set Method*, *Phase-Field Method* e *Volume of Fluid Method*. Os autores comentam que o *Level Set Method* é mais simples de ser implementado e retorna resultados precisos mais rapidamente; no entanto, não satisfaz precisamente a lei da conservação da massa. O *Volume of Fluid Method* soluciona o problema de conservação de massa, mas, por ser mais robusto, requer mais tempo de processamento. Sato, Niceno e Smith (2019), por exemplo, mostram em seu trabalho o quão custoso computacionalmente é simular o processo tanto de ebulição nucleada como convectiva utilizando-se do método *Volume of Fluid*.

Alguns autores, como Ling, Li e Tao (2014) e Mora (2018), propõem a união dos métodos *Level Set* e *Volume of Fluid*, a fim de conseguir a rápida e acurada convergência, fazendo com que o modelo numérico corresponda à física do problema.

Autores como Grave, Camata e Coutinho (2019) e Coupez (2006) mostram também um método de estabilização com custo computacional reduzido do método *Level Set*. Com a formulação sugerida pelos autores, é possível de tratar-se de problemas de

mudança de fronteira relativamente complexos com erros menores que 10% na conservação da massa.

Li e Bolotnov (2020) simulam processos de condensação e ebulição através do *software* PHAST, o qual usa Elementos Finitos para discretização das equações governantes e o método *Level Set* para captura de fronteira. Os autores afirmam que o método de captura de fronteira é promissor para simular processos de mudança de fase.

Já Li *et al.* (2019) também fazem uso da função *Level Set* para capturar a fronteira de bolhas de vapor no processo de ebulição. Os autores criaram um modelo dentro do método *Level Set* para controlar o ângulo de contato dinâmico. De acordo com os autores, o modelo desenvolvido concorda com o modelo analítico apresentado.

Outro detalhe interessante dos trabalhos referentes à simulação de dinâmica da bolha é quanto ao método de solução empregado pelos autores. Usualmente, os autores não comentam qual foi o método, deixando em aberto se as simulações foram obtidas por *softwares* comerciais ou livres, se os autores desenvolveram o *software* ou se os resultados são provenientes de módulos inseridos em programas autônomos. Um método comumente encontrado na literatura é o método de Lattice-Boltzman (GONG E CHENG, 2015; CUBEDDU, RAUH; ULRICH, 2017; FANG *et al.*, 2017; CHENG, ZHANG; GONG, 2017).

Com relação ao método de solução, um dos poucos autores que abordam o método de solução são Shah e Talat (2013). Eles fazem uma comparação entre o método *Characteristic Based Split* (CBS) e o Método *Multi-Grid* para solução das equações de Navier-Stokes incompressíveis. No entanto, a comparação foi, apenas, no âmbito da taxa de convergência, pois o Método CBS foi analisado com os termos transientes nas equações governantes do problema enquanto o método *Multi-Grid* foi aplicado às mesmas equações em regime estacionário. Logo, uma comparação concisa entre ambos os métodos não é muito eficiente. Além disso, mostra que o método *Multi-Grid* não seria eficiente para solução do problema de ebulição. No entanto, o trabalho é promissor em comparação entre métodos.

Outros métodos de estabilização também são usados, além do CBS, como em Ding, Luo, Li (2017). Eles demonstram uma análise de supressão de oscilações numéricas adicionando termos fontes às equações governantes de problemas com mudança de fase e usando o método *Volume of Fluid* (VOF) para capturar a fronteira entre as fases imiscíveis. Dentro do método proposto, os autores mostram que os termos de supressão

das oscilações também são adicionados nas equações de captura da fronteira, gerando resultados considerados por eles satisfatórios.

Hens, Biswas e De (2014) simulam em seu trabalho o fenômeno da ebulição de um filme de fluido sobre uma superfície aquecida usando o acoplamento dos métodos de captura de fronteira *Volume of Fluid* e *Level Set* (LS). No trabalho, os autores mostram a validade do método para analisar a relação entre o número de sítios de nucleação e o grau de superaquecimento da parede.

Sun, Zhang e Ren (2012) mostraram a validade do método CBS não somente para solução de problemas de escoamento com malhas estáticas, mas também que o método de estabilização leva a resultados satisfatórios para problemas de escoamentos de malha adaptativa.

Santis, Geraci e Guardone (2012) discretizaram e testaram as equações de Euler para o escoamento segundo o acoplamento dos métodos de Volumes Finitos e Elementos Finitos em coordenadas esféricas e cilíndricas. Apesar dos autores não terem aplicações específicas para tratar esse tipo de problema, eles mostram uma preocupação antiga de simular alguns problemas em coordenadas diferentes das cartesianas. Os resultados dos autores mostram que o acoplamento dos métodos trabalha de modo satisfatório em coordenadas curvilíneas.

Albadawi *et al.* (2017) mostraram resultados acerca da influência do termo de tensão superficial adicionado às equações do momento na acuracidade da captura da fronteira usando o acoplamento dos métodos VOF e LS. Os autores mostraram que calculando o termo fonte com a função delta de Dirac, ao invés de utilizar o laplaciano da função *Level Set*, aumenta a acuracidade do método de captura da fronteira.

Rajan *et al.* (2019) estudaram a dinâmica de crescimento de bolhas de vapor sobre ação de campos elétricos. Apesar de não ser o foco de análise do trabalho, os mesmos evidenciam a utilização do método *Level Set* para captura de fronteira, bem como o método de Elementos Finitos para discretização das equações de termo e fluido mecânicas. Mas, como objeto de estudo, os autores mostram a influência que o campo elétrico tem tanto na fluidodinâmica como no volume e tempo de partida da bolha de vapor.

Cui *et al.* (2020) apresentam a microconvecção como objeto de estudo, ou seja, estudam a ebulição acontecendo entre espaços micrométricos. Os mesmos mostram e simulam o aparecimento do primeiro embrião de bolha até a partida da mesma. O surgimento da fase gasosa é analisado pelas equações de equilíbrio térmico, mecânico e

químico, bem como a dinâmica das moléculas é simulada. Já as equações fluidodinâmicas são as clássicas equações de movimento e continuidade discretizadas por elementos finitos, cujos resultados mostraram-se de acordo com os resultados experimentais. Cui *et al.* (2020) mostram com seu trabalho que não somente a ebulição pode ser discretizada por elementos finitos, mas também em processos de mudança de fase em espaços de escala reduzida.

Com a presente revisão bibliográfica demonstra-se que esta é uma importante área a ser explorada visando explicações sobre os mecanismos envolvidos no regime de ebulição nucleada, ainda não totalmente esclarecidos. Desse modo, este projeto tem como objetivo simular tridimensionalmente o crescimento e partida de bolhas de vapor durante o regime de ebulição nucleada, considerando os efeitos da morfologia da superfície e interação superfície-fluido (tensão superficial). Para tanto, foi utilizado o método *Level Set* acoplado com sua equação de reinicialização a captura da fronteira móvel; e como método de discretização fez-se uso do Método de Elementos Finitos estabilizado pelo esquema de separação baseado na característica - CBS (*Characteristic Base Split*).

4. EQUACIOAMENTO E METODOLOGIA NUMÉRICA

4.1. Equações Fluidodinâmicas e Térmica

Para tratar o problema de dinâmica de crescimento de uma bolha de vapor são necessárias algumas hipóteses, para que a modelagem matemática seja definida. Para o escopo desse trabalho as seguintes hipóteses serão feitas:

- Cada fase será tratada como incompressível;
- As propriedades termodinâmicas de cada componente serão consideradas constantes;
- Os fluidos serão tratados como newtonianos;
- A temperatura da superfície aquecida será considerada constante ao longo do processo.

A última hipótese é usada em alguns trabalhos de simulação (LEE E NYDAHL, 1989; ABARAJITH E DHIR, 2002; SON E DHIR, 2008; BAKI E SAHEL, 2017; PASCHOAL, CARDOSO; SILVA, 2017a). Entretanto, em Paschoal, Cardoso e Silva (2017b) mostra-se que não há muita diferença entre considerar ou não a variação da temperatura na parede aquecida, visto que a mesma permanece com a temperatura praticamente constante ao longo do tempo.

O modelo matemático para a presente simulação são as equações de Navier-Stokes e a equação de energia térmica, as quais são escritas a seguir para o campo de velocidades e para a temperatura T do fluido:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (4)$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + [(\vec{u} - \vec{u}^c) \cdot \nabla] \vec{u} \right\} = \rho \vec{g} [1 - \beta(T - T_{sat})] \cos \chi - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} + \sigma \kappa \nabla H \quad (5)$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} - \vec{u}^c) \cdot \nabla T \right) = k \nabla^2 T + S \quad (6)$$

sendo $\vec{u}^c$ a velocidade da fronteira, $\vec{g}$ o vetor aceleração da gravidade, p o campo de pressão, κ a curvatura da superfície, dada pela Equação (7), k a condutividade térmica ponderada e S termos fontes de quaisquer natureza, c_p a capacidade calorífica ponderada,

χ a inclinação com relação ao eixo horizontal da superfície aquecida, σ é a tensão superficial entre as fases consideradas e β é o coeficiente de expansão térmica.

$$\kappa = \nabla \cdot \vec{n} \quad (7)$$

sendo $\vec{n}$ o vetor normal à fronteira móvel, dado por:

$$\vec{n} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \quad (8)$$

Vale-se destacar o último termo da Equação (5) que é adicionado à formulação original de Navier-Stokes. Esse termo é referente à transferência da quantidade de momento pela tensão superficial e foi adicionado para que a descontinuidade fosse tratada de maneira contínua na formulação. Vale lembrar que esse termo somente tem validade na interface líquido-vapor.

4.2. Técnicas de Rastreio e Captura de Fronteira Móvel

4.2.1. Introdução

Métodos de rastreio e captura de fronteira são utilizados dentro da computação para tratar problemas de localização de interfaces móveis. Dentre suas aplicações, encontram-se, por exemplo, processamento de imagem (JIANG; ZHANG; NIE, 2012) e identificação de falhas estruturais (MOES *et al.*, 2011), simulações de ebulição (WU; DHIR; QIAN, 2007), entre outras.

Por tratar de um problema com interface bem definida, a ebulição pode ser tratada com métodos de captura ou rastreio de fronteira. Cabe aqui uma pequena diferenciação entre métodos de captura e rastreio de fronteira (KHARANGATE E MUDAWAR, 2017):

Métodos de captura de fronteira são métodos eulerianos, ou seja, os elementos de análise são fixos no tempo; já métodos de rastreio de fronteira são métodos lagrangianos, ou seja, os elementos de análise variam sua posição temporalmente.

Métodos de rastreio de fronteira são mais precisos que os métodos de captura de fronteira; entretanto o custo computacional do primeiro é superior à aplicação do segundo

(KHARANGATE; MUDAWAR, 2017). Desse modo, nesse trabalho utilizou-se métodos de captura.

Lorenzini e Yogendra (2018) citam que os métodos mais utilizados para captura de fronteira dentre de ebulição nucleada (*pool boiling*) são: *Level Set Method*, *Phase-Field Method* e *Volume of Fluid Method*. Entretanto, métodos como *Ghost Fluid Method* (ZHANG *et al.*, 2015; URBANO *et al.*, 2018) e *Lattice Boltzmann Method* também são reportados na literatura de *pool boiling* (GONG E CHENG, 2015; CUBEDDU, RAUH; ULRICH, 2017; FANG *et al.*, 2017; CHENG, ZHANG; GONG, 2017).

Devido à simplicidade de implementação e reportada acuracidade dos métodos *Level Set* e *Volume of Fluid*, o presente trabalho fez uso desses métodos e de um acoplamento entre eles. Os tópicos seguintes darão o embasamento de cada um.

4.2.2. *Level Set*

O método *Level Set* possui a vantagem de ter uma boa acuracidade na determinação da fronteira (MORGAN E WALTZ, 2017), entretanto, restrição da equação de continuidade não é satisfeita tão bem, daí ser necessárias reinicializações para que a variável represente a função distância. Como mostrado por Gibou, Fedkiw e Osher (2018) em seu *review*, o método já possui aplicações diversas como simulações do crescimento epitaxial e a barreira de Ehrlich-Schwoebel, eletroporação de membranas celulares, ou ainda problemas de solidificação de ligas binárias. Tanguy, Ménard e Berlemont (2007), por exemplo, aplicaram o *Level Set* para simulações de mudança de fase.

Independente dos autores citados, todos dão a mesma base para a formulação do método, primeiramente, apresentada por Osher e Sethian em 1988. Assim faz-se necessário definir a função *Level Set* ϕ . Nesse trabalho, sua definição é descrita na Equação (9).

$$\phi = \begin{cases} -1, & \text{na fase gasosa} \\ 0, & \text{na interface} \\ 1, & \text{na fase líquida} \end{cases} \quad (9)$$

Depois, deve-se estabelecer as condições iniciais e de contorno do problema. Identificadas as condições citadas, deve-se determinar a função ϕ em cada passo de tempo. Para tal resolve-se a Equação (10).

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u}_{\text{int}} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (10)$$

sendo $\vec{u}_{\text{int}}$ a velocidade da fronteira. Alguns autores não especificam, claramente, a velocidade que aparece na Eq. (10). Em vários trabalhos já citados, esta velocidade aparece como sendo:

$$\vec{u}_{\text{int}} = \vec{u} \quad (11)$$

No entanto, Wu, Dhir e Qian (2007) explicitam que a velocidade da fronteira deve levar em consideração a evaporação que acontece justamente nessa interface, tal como mostrado na Equação (12).

$$\vec{u}_{\text{int}} = \vec{u} + \frac{\vec{m}}{\rho} \quad (12)$$

sendo $\vec{u}$ a velocidade solução da Equação (5), ρ a densidade da mistura (a qual será explicitada posteriormente) e $\vec{m}$ o vetor fluxo de massa devido à evaporação na fronteira da bolha. A velocidade da fronteira nesse trabalho será considerada tal como explicitada por Wu, Dhir e Qian (2007).

Ao resolver a equação de transporte descrita em (10), a função *Level Set* não mantém suas características de função distância. Desse modo, Sussman, Smereka e Osher (1994) propõem o uso da Equação (13) para reinicializar a função ϕ e assim recuperar sua identidade como função distância.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \text{sgn}(\phi_0)(|\nabla \phi| - 1) = 0 \quad (13)$$

sendo τ um subpasso de tempo e $\text{sgn}(\phi_0)$ é a função sinal da solução de ϕ .

Grave, Camata e Coutinho (2019) e Coupez (2006) propõem em seus trabalhos a seguinte definição:

$$\frac{\partial \phi(\vec{x}, t)}{\partial \tau} = \frac{\partial \phi(\vec{x}, t)}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \phi(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (14)$$

De modo que $\lambda \cong \frac{\Delta \tau}{\Delta t} < 1$.

Combinando as Equações (12), (13) e (14), é possível escrever a equação do método *Level Set* com reinicialização já embutida, como mostrada na Eq. (15)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u}_2 \cdot \nabla \phi - \lambda \text{sign}(\phi) S = 0 \quad (15)$$

$$\vec{u}_2 = \vec{u}_{\text{int}} + \lambda \text{sign}(\phi) \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|} \quad (16)$$

$$S = \|\nabla \phi\| \quad (17)$$

$$\text{sign}(\phi) = \begin{cases} 1, & \text{se } \phi > 0 \\ 0, & \text{se } \phi = 0 \\ -1, & \text{se } \phi < 0 \end{cases} \quad (18)$$

No entanto, percebe-se que a Eq. (16) somente é definida quando $\|\nabla \phi\| \neq 0$. Assim, os autores sugerem a modificação das Equações (16) e (17), como segue.

$$\vec{u}_2 = \vec{u}_{\text{int}} + \lambda \text{sign}(\phi) \frac{\nabla \phi}{\varepsilon + (1 - \varepsilon) \|\nabla \phi\|} \quad (19)$$

$$S = \frac{\|\nabla \phi\|^2}{\varepsilon + (1 - \varepsilon) \|\nabla \phi\|} \quad (20)$$

Sendo $\varepsilon \approx h_e$ um fator não nulo cujo valor pode ser aproximado pelo tamanho característico da malha. Nesse trabalho foi-se usado h_e como sendo a raiz cúbica do determinante do Jacobiano, o qual será explicitado posteriormente.

A fim de facilitar os cálculos, Grave, Camata e Coutinho (2019) e Coupez (2006) propõem uma normalização dos valores da função *Level Set*, tal como mostrada na Equação (21).

$$\tilde{\phi} = E \tanh\left(\frac{\phi}{E}\right) \quad (21)$$

Sendo E um fator de compressão definido pelo usuário. O mesmo, além de definir o máximo valor para ϕ , é também uma espessura “de segurança” para a definição da função *Level Set*. Ou seja, é a espessura de uma região $(-E, +E)$ na qual a função *Level Set* é definida como nula.

Essa normalização é vantajosa, pois o módulo do gradiente de $\tilde{\phi} = 1 - \left(\frac{\phi}{E}\right)^2$ e as equações governantes do problema (Equações (16), (19) e (20)) não alteram sua forma, ou seja:

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + \vec{u}_2 \cdot \nabla \tilde{\phi} - \lambda \text{sign}(\tilde{\phi}) S = 0 \quad (22)$$

$$\vec{u}_2 = \vec{u}_{\text{int}} + \lambda \text{sign}(\tilde{\phi}) \frac{\nabla \tilde{\phi}}{\varepsilon + (1 - \varepsilon) \|\nabla \tilde{\phi}\|} \quad (23)$$

$$S = \frac{\|\nabla \tilde{\phi}\|^2}{\varepsilon + (1 - \varepsilon) \|\nabla \tilde{\phi}\|} \quad (24)$$

A grande vantagem do método *Level Set* acoplado com sua equação de reinicialização é que o custo computacional da captura da fronteira é menor do que com o método *Level Set* original e do método *Volume of Fluid* (como será visto em seguida); além de manter a acuracidade do método.

4.2.3. *Volume de Fluido*

Já o método Volume de Fluido (VOF - *Volume of Fluid*) por outro lado tem como ponto forte ser regido pela lei da conservação de massa, o que deixa essa formulação fisicamente correta. Como consequência disso, com o VOF se é capaz de determinar interface de fluidos de maneira contínua, apesar do método não ser capaz de definir

fronteiras com tanta precisão (LING *et al.*, 2015). Tanto Ling *et al.* (2015) quanto Kunkelmann (2011) são exemplos da aplicabilidade para o método dentro do contexto de simulação de ebulição.

O método, primeiramente, proposto por Hirt e Nichols (1981), se baseia em calcular a fração de vazio α de cada ponto do domínio em cada passo de tempo. Para tal, resolve-se a Equação (25).

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha \vec{u}) = 0 \quad (25)$$

sendo que:

$$\begin{cases} \alpha=0, \text{ na fase gasosa} \\ 0<\alpha<1, \text{ na interface} \\ \alpha=1, \text{ na fase líquida} \end{cases} \quad (26)$$

De acordo com a literatura, a solução da Equação (25) não gera uma fronteira precisa. Portanto, fazem-se necessários métodos de correção da mesma, os quais são chamados de métodos de reconstrução de fronteira. Alguns desses métodos e seus detalhamentos se encontram em Kunkelmann (2011), Albadawi *et al.* (2012) e Wu, Young e Wu (2013).

4.2.4. **Método Level Set acoplado ao método de Volume de Fluido**

Pensando nas vantagens e desvantagens dos métodos apresentados anteriormente, autores como Ling (2011), Albadawi *et al.* (2017), Sato e Niceno (2017) e Mora (2018) acoplaram ambos os métodos para se obter um método de determinação de fronteiras preciso e que obedeça a lei de conservação de massa. Segundo os autores citados, para se determinar a fronteira de acordo com o CLSVOF (*Coupled Level Set and Volume of Fluid*) começa-se resolvendo a Equação (25) do VOF. Depois para corrigir posição da fronteira e deixá-la mais precisa, resolve-se então a equação de reinicialização do LS, a Equação (13), de modo que, no acoplamento:

$$\phi_0 = (2\alpha - 1)\Gamma \quad (27)$$

$$\Gamma = 0,25\Delta x \quad (28)$$

sendo Δx a menor distância entre dois nós consecutivos da malha.

Na Equação (13), os autores também definem $\Delta\tau = 0,1\Delta x$. A solução da equação somente necessitará de algumas poucas iterações (ϕ_{cor}) para convergir.

$$\phi_{cor} = \frac{\varepsilon}{\Delta\tau} \quad (29)$$

$$\varepsilon = 1,5\Delta x \quad (30)$$

Autores como Keshavarzi, Yeoh e Barber (2012) mostraram a vantagem do acoplamento CLSVOF em relação ao método *Volume of Fluid*. Os autores mostraram que o método VOF calcula uma fronteira difusa, pouco clara; ao passo que o CLSVOF obtém uma fronteira muito mais bem definida. Além disso, os autores mostraram que a transição da pressão na descontinuidade entre as fases acontece de maneira mais suave no CLSVOF do que no VOF.

Como dito anteriormente, uma das grandes vantagens de se usar métodos de captura de fronteira como LS, VOF e CLSVOF é que as propriedades do fluido usadas nas equações fluidodinâmicas e térmicas são valores ponderados entre cada fluido. Essa ponderação acontece de acordo com as Equações (31) e (32).

$$\rho = \rho_g + (\rho_l - \rho_g)H \quad (31)$$

$$\mu = \mu_g + (\mu_l - \mu_g)H \quad (32)$$

sendo H a função de Heaviside definida por:

$$H = \begin{cases} 0 & \text{se } \phi < -\varepsilon \\ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\phi}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \sin \left(\frac{\pi\phi}{\varepsilon} \right) \right] & \text{se } |\phi| \leq \varepsilon \\ 1 & \text{se } \phi > \varepsilon \end{cases} \quad (33)$$

O parâmetro ε possui uma função similar ao parâmetro E da função *Level Set* Modificada. Quando se usa a formulação *Level Set* acoplada com sua função de reinicialização, a definição da Equação (33) é analisada a partir do parâmetro E .

Outra função importante para a formulação que também é dependente de ϕ é a função Delta de Dirac (δ), definida por:

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{se } |\phi| > \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi\phi}{\varepsilon}\right) \right] & \text{se } |\phi| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (34)$$

4.3. Método de Elementos Finitos

Neste trabalho, foi aplicado às equações governantes do problema o método de Elementos Finitos em duas de suas vertentes: o Método de Galerkin Clássico (para discretização das equações fluidodinâmicas e térmica) e o Método de Elementos Finitos por Mínimos Quadrados (para discretização das equações de captura de fronteira).

Para introduzir ambos os métodos, é apresentado no Apêndice A o Método de Resíduos Ponderados, o qual é a base para diferentes métodos de discretização.

O método de elementos finitos, em geral, baseia-se na ideia de dividir o domínio Ω em vários elementos, que podem ser todos iguais ou não. Logo, discretiza-se espacialmente o domínio aproximando-o por uma união de vários elementos.

Matematicamente, é necessário identificar os nós que compõe cada elemento. A função responsável por localizar esses pontos é denominada Função de Interpolação (N). Tais funções são tabeladas e encontradas em livro como, por exemplo, Reddy (2006), Dhatt, Touzot e Lefrançois (2012), Lewis, Nithiarasu e Seetharamu (2004). Nessas mesmas referências encontram-se mais detalhes sobre o método de elementos finitos.

Considerando o exemplo dado no Apêndice A referente ao Método de Resíduos Ponderados, suponha que a Equação (A.2) é uma aproximação para a variável ϕ . Quando essa aproximação é feita por elementos finitos, a função conhecida ϕ é adotada como sendo a função de interpolação N . Ou seja:

$$\hat{\phi} = \phi_0 + \sum_{i=1}^n c_i N_i \quad (35)$$

O método de Galerkin Clássico por sua vez é um método no qual a função peso é dada como sendo igual à função de interpolação, ou seja, fazer $W_i = N_i$.

Já para o método de mínimos quadrados faz-se a minimização de um funcional definido pela integral do quadrado do resíduo R , $I = \int_{\Omega} R^2 d\Omega$. Fazendo $\delta I = 2 \int_{\Omega} \delta R R d\Omega = 0$ o que leva, considerando que o resíduo é uma função dos coeficientes c_i (Eq. (8)), a $\int_{\Omega} (\partial R / \partial c_i) R d\Omega = 0$, conclui-se, neste caso, que a função peso é dada por $W_i = \partial R / \partial c_i$.

No Apêndice B mostra-se o desenvolvimento da discretização das equações básicas para tratar o problema, bem como a forma final discretizada.

4.4. Esquema de Separação Baseado na Característica – CBS

4.4.1. Métodos Baseados na Característica

Em geral, problemas de engenharia requerem resoluções de equações de transporte, seja de vetores ou escalares. Para simplificações, nesse tópico será desenvolvida toda a metodologia considerando a equação de um escalar qualquer ϕ , unidimensionalmente, em coordenadas cartesianas, tal como descrita na Equação (36).

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - Q = 0 \quad (36)$$

De modo que Q é um termo fonte genérico e γ_{ϕ} é um coeficiente de difusão dependente da variável escalar ϕ .

A Equação (36) descreve a variação de ϕ com um campo de velocidade u ao longo do tempo de acordo com um referencial euleriano. Entretanto, pode-se descrever a mesma equação de transporte segundo um referencial lagrangiano seguindo o sistema de coordenadas tal como descrito em (37):

$$dx' = dx - udt \quad (37)$$

O novo sistema de referência lagrangiano descreve as direções características de partículas fluidas. Desse modo, o método a ser apresentado considera a descrição das equações de transporte com base nas direções características do escoamento.

4.4.4.1 Procedimento Direto de Galerkin Característico

Considere que a variável ϕ como uma função contínua. Assim, pode-se separar ϕ como descrito na Eq. (38):

$$\phi = \phi^* + \phi^{**} \quad (38)$$

Note que, fazendo uso da Eq.(38), a Equação (36) pode ser dividida em duas outras equações para serem resolvidas separadamente: uma puramente convectiva – Eq. (39) – e uma puramente difusiva – Eq. (40).

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (39)$$

$$\frac{\partial \phi^{**}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + Q = 0 \quad (40)$$

Desse modo, pode-se resolver separadamente cada equação, tendo como base as seguintes condições iniciais:

$$\phi^* = 0 \quad (41)$$

$$\phi^{**} = (\phi^*)^n \quad (42)$$

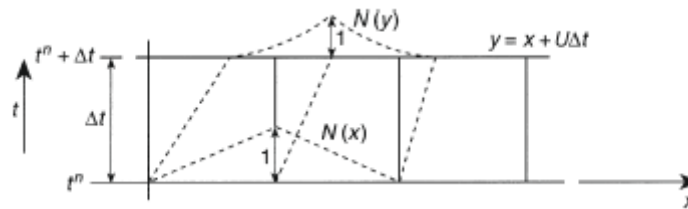
sendo que n representa o passo de tempo atual.

Dadas essas condições de contorno, resolve-se então a primeiramente a Equação (39) e dada sua solução, presume-se ϕ^* como constante ao longo da característica e calcula-se a Eq. (40).

Ressalta-se que a aproximação por Galerkin Clássico pode ser aplicada à todas as variáveis definidas nesse tópico, ou seja, $\phi(x,t) = \sum_{\alpha=1}^{n_{nos}} N_{1,\alpha}(x)\phi_{\alpha}(t)$; $\phi^*(x,t) = \sum_{\alpha=1}^{n_{nos}} N_{2,\alpha}(y)\tilde{\phi}_{\alpha}^*(t)$; $\phi^{**}(x,t) = \sum_{\alpha=1}^{n_{nos}} N_{3,\alpha}(x)\tilde{\phi}_{\alpha}^{**}(t)$, sendo N_i as funções de interpolação.

Pode-se observar a dependência espacial das funções N_2 , as quais dependem de uma variável $y = x + u\Delta t$. Apesar de considerar ϕ^* , observa-se na Figura 5 que ao admitir uma interpolação linear para a variável, a resolução da Equação (39) distorce a amplitude da variável e desloca a mesma espacialmente.

Figura 5 – Distorção da convecção da função peso



Fonte: Zienkiewicz et al. (2014)

A separação da variável ϕ se torna algo extremamente chamativo para solução das equações de continuidade e pressão, por exemplo. Pode-se fazer um *Split* de tal modo que uma parcela seja totalmente dependente da pressão enquanto a outra não. Isso faz com que se desacoplem as equações e consiga-se simular movimentos de fluidos em geral. Entretanto, essa parte do desacoplamento das variáveis velocidade e pressão será abordada posteriormente.

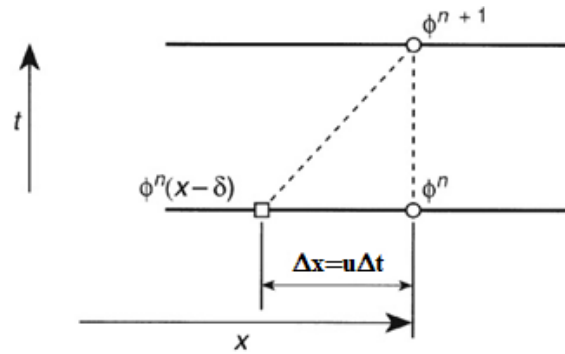
4.4.4.2 Procedimento Explícito de Galerkin Característico

Quando se trabalha com discretização de equações convectivas dominante por Galerkin Clássico, técnicas de estabilização fazem-se necessárias. Uma que tem apresentado bons resultados é o esquema *Characteristic Based Split (CBS)*, pois permite, numa primeira etapa, transformar as equações de movimentação de fluidos em equações com operadores auto adjuntos, pela eliminação dos termos advectivos. A consequência é usar um sistema de coordenadas móveis. O inconveniente de se trabalhar em um sistema

de coordenadas móveis é evitado mediante uma expansão em série de Taylor de termos da equação auto adjunta. Este processo recupera os termos advectivos da equação de forma explícita e leva ao aparecimento de novos termos na equação que funcionam como estabilizadores, como demonstrado em Zienkiewicz *et al.* (2014) e Baggio (2015).

Assim, considerando o transporte de uma grandeza qualquer ϕ , ao longo da linha característica, como mostra a Figura 6. O valor de uma variável genérica é apresentado em posições diferentes (x e $x+\Delta x$) e em diferentes instantes de tempo (n e $n+1$). Dessa figura, toda a base do esquema CBS será abordada, a qual foi baseada em Nithiarasu, Codina e Zienkiewicz (2006), Baggio (2015) e Baggio e Silva (2016).

Figura 6 – Característica no domínio tempo-espço.



Fonte: Adaptado de Zienkiewicz *et al.*, (2014)

Considerando como base a Equação (36), a qual é descrita por um sistema de coordenadas euleriano. Passando a análise para a abordagem lagrangiana, seguindo a linha característica apresentada na Figura 6, tem-se que a mesma equação pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(x'(t), t) - \frac{\partial}{\partial x'} \left(\gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x'} \right) - Q(x') = 0 \quad (43)$$

Nota-se que o mesmo problema visto sob dois sistemas de coordenadas diferentes mostra equações similares, porém ligeiramente diferentes. Comparando-se as Equações (36) e (43), observa-se que o termo convectivo não é explicitado quando o sistema de coordenadas de referência se movimenta juntamente com a velocidade u . A Equação (43) torna-se então uma equação de condução, cuja melhor solução pode ser obtida pelo Método de Galerkin Clássico, por ser o operador difusivo auto adjunto.

Discretizando a Equação (43) no tempo, pelo método de Euler, a forma semidiscreta pode ser escrita como:

$$\frac{\phi^{n+1}|_x - \phi^n|_{(x-\Delta x)}}{\Delta t} \approx \theta \left[\frac{\partial}{\partial x'} \left(\gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x'} \right) + Q \right]^{n+1} + (1-\theta) \left[\frac{\partial}{\partial x'} \left(\gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x'} \right) + Q \right]^n \Big|_{(x-\Delta x)} \quad (44)$$

sendo que o parâmetro θ varia entre zero e um. Se $\theta=0$, então tem-se a discretização explícita; se $\theta=1$ implícita; e $0 < \theta < 1$ tem-se a formulação semi-implícita.

Nota-se que a Equação (44) é muito complicada de se resolver teórica e numericamente, pois é equivalente a se trabalhar com um sistema de coordenadas móveis. Note que na Equação (44) para se ter as variáveis na mesma posição x , usa-se uma expansão em série de Taylor, o que equivale fixar o sistema de coordenadas. Usando, então, expansão em série de Taylor, tem-se:

$$\phi^n|_{x-\Delta x} = \phi^n|_x - \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} + O(\Delta x^3) \quad (45)$$

Analogamente, as expansões dos termos fonte e difusivo ficam na forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n \Big|_{x-\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n \Big|_x - \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^n \right] + O(\Delta x^2) \quad (46)$$

$$Q^n|_{x-\Delta x} = Q^n|_x - \Delta x \frac{\partial Q^n}{\partial x} + O(\Delta x^2) \quad (47)$$

Substituindo (45), (46) e (47) na Equação (44), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\phi^{n+1}|_x - \phi^n|_x}{\Delta t} = & -\frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\partial \phi^n}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial x^2} + \theta \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + Q \right]^{n+1} + \\ & + (1-\theta) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + Q \right]^n - (1-\theta) \Delta x \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial Q}{\partial x} \right]^n \Big|_x \end{aligned} \quad (48)$$

Pela Equação (48) nota-se que com essa aproximação proposta pelo esquema CBS, o termo convectivo volta a aparecer na formulação, através de $u = \Delta x / \Delta t$. O sistema de coordenadas pode voltar a ser tratado como euleriano e ainda aparece um termo de estabilização de segunda ordem. Esse termo de estabilização permite que o método de Galerkin Clássico seja aplicado sem oscilações na solução.

No escopo desse trabalho, as equações serão escritas na forma explícita, para reduzir o tempo de processamento em problemas 3D. Assim, a Equação (48) escrita na forma explícita, desprezando os termos de terceira ordem e estendendo a formulação para multidimensões, fica:

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} = - \left[u_j \frac{\partial \phi^n}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)^n - Q^n \right] + \frac{\Delta t}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[u_j \frac{\partial \phi^n}{\partial x_j} - Q^n \right] \quad (49)$$

4.4.2. Discretização Temporal e Procedimento de Separação

Neste tópico, será discutido a discretização temporal e o esquema de separação baseado no procedimento direto de separação de Galerkin característico das equações governantes da fluidodinâmica.

Primeiramente, a equação do momento de Cauchy foi escrita em notação indicial e em coordenadas cartesianas (ARIS, 1962):

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i \quad (50)$$

Sendo ρ a densidade do fluido, p a pressão do fluido, $\mathbf{g}$ o vetor de gravidade e τ o tensor de tensões de Cauchy.

Para obter o campo de velocidades através de simulações numéricas, pode-se aplicar o método de separação tal como descrito na Equação (38), ou seja:

$$u = u^* + u^{**} \quad (51)$$

Tal como o método de Galerkin Característico, pode-se discretizar o termo temporal pela aproximação de Euler, como mostrada nas Eq.(52), (53) e (54)

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u^{k+1} - u^k}{t^{k+1} - t^k} = \frac{\Delta u^*}{\Delta t} + \frac{\Delta u^{**}}{\Delta t} \quad (52)$$

$$\Delta u^* = \tilde{u} - u^k \quad (53)$$

$$\Delta u^{**} = u^{k+1} - \tilde{u} \quad (54)$$

De modo que $\tilde{u}$ é uma velocidade intermediária a ser calculada pelo esquema CBS.

Seguindo o procedimento do item 4.4.1 e substituindo ϕ da Equação (49) por u , a equação de Cauchy pode ser reescrita como mostrada nas Equações (55) e (56).

$$\begin{aligned} \rho(u_i^{n+1} - u_i^n) = \Delta t \left[-\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j)^n + \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} + (\rho g_i)^n - \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} \right] + \\ + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j)^n - \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} - (\rho g_i)^n + \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} \right] \end{aligned} \quad (55)$$

$$\frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} = (1 - \theta_2) \frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \theta_2 \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} \quad (56)$$

Deve-se notar que as velocidades e os termos de tensão estão todos calculados em t^n ao passo que a pressão está em $t^{n+\theta_2}$. Esse artifício pode ser aplicado pelo esquema de solução que será apresentado posteriormente.

A fim de aplicar o esquema de *Split* da Eq. (52) deve-se atentar que tanto a velocidade, cuja variável pretende-se fazer a separação em duas partes, quanto a pressão são variáveis na equação do momento (Eq. (5)). Como, nessa etapa, procura-se resolver o campo de velocidade, Zienkiewicz *et al.*, (2014) propõe que o gradiente pressão seja tratado como um termo fonte da equação do movimento e uma equação auxiliar seja usada para calcular o campo de pressão. Em outras palavras, o esquema CBS apresentado, além de permitir que a velocidade seja desacoplada da pressão, também oferece um esquema de estabilização para cálculo do campo de velocidade de acordo com o esquema de Galerkin Clássico. O método proposto, portanto, propõe que o esquema de solução das equações do movimento seja dado como se segue:

- 1º passo: Resolver o campo de velocidades intermediário Δu_i^*

- 2º passo: Com o campo de velocidades intermediário, usar uma equação para resolução do campo de pressão
- 3º passo: Com as variáveis recém-calculadas, calcula-se a correção da velocidade Δu_i^{**} e por fim, calcula-se o campo de velocidades $\mathbf{u}$.

Além desses três passos básicos, um quarto passo pode ser adicionado ao problema: o cálculo de escalares quaisquer, como o campo de temperatura do fluido, por exemplo. O cálculo dessas variáveis escalares é feito seguindo a formulação apresentada na Eq. (49).

Essa proposta de solução é o que torna possível calcular os campos de velocidade e pressão em instantes de tempo diferentes.

Outros dois pontos a serem analisados com essa proposta do esquema de solução são: como resolver o campo de pressão e em qual parcela de u (Δu_i^* ou Δu_i^{**}) que a pressão será levada em consideração nos cálculos.

O método de se calcular o campo de pressão será tratado em tópicos separados. No entanto, com relação à influência da pressão no campo de velocidade, Zienkiewicz *et al.*, (2014) faz duas propostas de cálculo do campo de velocidade, o qual os autores chamam de *Split A* e *Split B*.

Split A:

No *Split A* propõe-se que a velocidade intermediária Δu_i^* seja calculada desconsiderando o campo de pressão, ao passo que a pressão é levada em consideração na correção da velocidade Δu_i^{**} , tal como descrito nas Equações (57) e (58).

$$\begin{aligned} \rho \Delta u_i^* = & \Delta t \left[-\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j)^n + \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} + (\rho g_i)^n \right] + \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j)^n - \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} - (\rho g_i)^n \right] \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \rho \Delta u_i^{**} = & -\Delta t \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \theta_2 \frac{\partial (p^{n+1} - p^n)}{\partial x_i} \right) + \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \theta_2 \frac{\partial (p^{n+1} - p^n)}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (58)$$

Vale ressaltar que fazendo a escolha desse esquema de separação, faz-se necessário que os passos um ao três sejam iterados até que os campos de velocidade e pressão convirjam em cada passo de tempo. O último termo na Eq. (58), geralmente, é desconsiderado por ser um termo de segunda ordem na pressão.

O *Split A* é indicado para simular problemas super e hipersônicos. Mas Zienkiewicz *et al.* (2014) ainda recomenda que perto das ondas de choque, esquemas de amortecimento da solução são necessários.

Split B:

No *Split B*, a influência da pressão é contabilizada já na equação da velocidade intermediária Δu_i^* . As equações de acordo com o *Split B* são mostradas em (59) e (60)

$$\begin{aligned} \rho \Delta u_i^* = & \Delta t \left[-\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j)^n + \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} + (\rho g_i)^n - \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right] + \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j)^n - \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} - (\rho g_i)^n + \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right] \end{aligned} \quad (59)$$

$$\rho \Delta u_i^{**} = -\theta_2 \Delta t \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \quad (60)$$

Vale ressaltar que a correção para a velocidade no *Split B* contém apenas o termo de diferença de pressão uma vez que o termo da pressão no passo anterior já está incluso na equação de movimento, diferente do *Split A*. Além disso, se optar por um modelo totalmente explícito, ou seja, $\theta_2 = 0$, então não é necessário fazer o cálculo de u_i^{**} . O esquema de solução do *Split B*, também, não exige que a mesma esteja em um pseudo regime permanente em cada instante de tempo. Entretanto, deve-se atentar à escolha das

funções de interpolação a serem usadas para que as mesmas atendam a condição de Babuška–Brezzi.

No *software* de simulação programado ambas as discretizações foram testadas. O *Split B* totalmente explícito mostrou melhor convergência em menos tempo de processamento no código implementado. Assim, os resultados do item 0 foram todos obtidos fazendo uso do *Split B*. Além do mais, recomenda-se utilizar o *Split B* em trabalhos futuros de simulações de fluidos.

4.5. Métodos de Resolução do Campo de Pressão para Escoamentos Incompressíveis

4.5.1. Método de Compressibilidade Artificial

Escoamentos nos quais a densidade não varia expressivamente entre os estados termodinâmicos é denominado incompressível. De acordo com Hirsch (1989) *apud* Nithiarasu (2003), uma relação que pode ser usada entre a densidade e a pressão é dada pela Eq. (61).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\frac{1}{c^2} \right)^n \frac{\partial p}{\partial t} \quad (61)$$

Sendo n um fator de desvio da condição isoentrópica.

Fazendo analogia da Equação (61) com a equação da continuidade, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0$, tem-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\frac{1}{c^2} \right)^n \frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla(\rho \vec{u}) \quad (62)$$

Pela Equação (61) observa-se que considerando a variação de densidade nula e que o fluido esteja submetido a um gradiente não nulo de pressão, então a velocidade do som deve ser considerada infinita. Além disso, pela Equação (62) observa-se uma correlação entre o campo de pressão e a variação da densidade no fluido, as quais dependem diretamente da resolução do campo de velocidades.

Entretanto, de acordo com Zienkiewicz *et al.* (2014), considerar a velocidade do som como infinita traz complexidades com relação ao passo de tempo da simulação. A mesma dificuldade é vista quando se considera a velocidade do som finita, mas como um valor muito alto.

O método da compressibilidade artificial vem como uma solução para considerar a velocidade do som “baixa” e ainda conseguir calcular as variações de densidade e pressão de um escoamento. O método propõe a aproximação da Eq. (63):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\frac{1}{c^2} \right)^n \frac{\partial p}{\partial t} \approx \left(\frac{1}{\beta_{AC}^2} \right)^n \frac{\partial p}{\partial t} \quad (63)$$

Sendo β_{AC} um parâmetro com dimensão de velocidade, dado por:

$$\beta_{AC} = \max(\xi, u_{conv}, u_{diff}) \quad (64)$$

Sendo ξ um parâmetro não nulo para que β_{AC} seja não nulo, $u_{conv} = |\vec{u}|$ e $u_{diff} = \frac{\nu}{h_e}$. De modo que ν é a viscosidade cinemática do fluido e h_e é o tamanho característico da malha, a qual nesse trabalho será aproximado pela raiz cúbica do Jacobiano das transformações de coordenadas ($h_e = \sqrt[3]{|J|}$).

Segundo Nithiarasu (2003) e Zienkiewicz *et al.* (2014), o método da compressibilidade artificial requer que a cada passo de tempo seja atingido um “regime permanente instantâneo”. Para tal, os autores sugerem usar o método do duplo passo de tempo descrito no Apêndice C.

4.5.2. Método da Equação de Poisson

Abdallah (1987), Massarotti, Nithiarasu e Zienkiewicz (1998) e Liu (2005) mostram que uma solução para o campo de pressão em escoamentos incompressíveis é a equação de Poisson para pressão.

De acordo com Selvadurai (2000), equação de Poisson é qualquer equação do tipo $\nabla^2 \phi = f$, sendo ∇^2 o operador laplaciano, ϕ uma variável qualquer e f uma função qualquer.

Para se obter a equação de Poisson para pressão, aplica-se o divergente na equação de movimento e usa-se a equação da continuidade. No caso específico, aplicando o esquema CBS, aplica-se o divergente na correção da velocidade.

$$\frac{\rho \vec{u}^{n+1} - \rho \vec{u}}{\Delta t} = -\nabla p^n + \frac{\Delta t}{2} \vec{w} \cdot \nabla (\nabla p)^n \quad (65)$$

Aplicando o divergente em (65) resulta:

$$\frac{\nabla \cdot (\rho \vec{u}^{n+1}) - \nabla \cdot (\rho \vec{u})}{\Delta t} = -\nabla^2 p^n + \frac{\Delta t}{2} \nabla \cdot [\vec{w} \cdot \nabla (\nabla p)^n] \quad (66)$$

A Equação (66) ainda pode ser simplificada com o uso da equação da continuidade. Discretizando o termo temporal da equação da continuidade linearmente, obtêm-se a Equação (67).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) - \vec{u}^c \cdot \nabla \rho &= 0 \\ \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} + (1 - \theta_1) [\nabla \cdot (\rho \vec{u}) - \vec{u}^c \cdot \nabla \rho]^n + \theta_1 [\nabla \cdot (\rho \vec{u}) - \vec{u}^c \cdot \nabla \rho]^{n+1} &= 0 \end{aligned} \quad (67)$$

Aplicando a Eq. (67) na Eq. (66) e desprezando os termos de terceira ordem, chega-se na Equação de Poisson para a pressão, escrita em (68)

$$\nabla^2 p^n = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot (\rho \vec{u}) \quad (68)$$

4.6. Equações Discretizadas

Nesse tópico será exposta a forma final (matricial) das equações governantes do problema. A dedução de cada equação é mostrada no Apêndice B.

4.6.1. Equações fluidodinâmicas e térmica

❖ Passo 1:

$$[M]\{U_i^*\} = [M]\{U_i^n\} - \Delta t \left(\begin{aligned} & [C^u]\{U_i\} + [K^\mu]\{U_i\} + \\ & + [K^{\mu 1i}]\{U_1\} + [K^{\mu 2i}]\{U_2\} + [K^{\mu 3i}]\{U_3\} - \\ & - \frac{2}{3}[\Delta^{\mu i 1}]\{U_1\} - \frac{2}{3}[\Delta^{\mu i 2}]\{U_2\} - \frac{2}{3}[\Delta^{\mu i 3}]\{U_3\} - \\ & - \{F_i\} - \Delta t \left([K^{su}]\{U_i\} + \{F_i^s\} \right)^n - \\ & - [G_i]^T \{\tilde{p}\}^n + \frac{\Delta t}{2}[P_i]\{\tilde{p}\} \end{aligned} \right)^n \quad (69)$$

$$[M] = \int_{\Omega} \rho \{N\} \langle N \rangle d\Omega \quad (70)$$

$$[C^u] = \int_{\Omega} \rho w_j \{N\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle d\Omega \quad (71)$$

$$[K^\mu] = \int_{\Omega} \mu \left\{ \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle d\Omega \quad (72)$$

$$[K^{\mu ji}] = \int_{\Omega} \mu \left\{ \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_i} \right\rangle d\Omega \quad (73)$$

$$[\Delta^{\mu ij}] = \int_{\Omega} \mu \left\{ \frac{\partial N}{\partial x_i} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle d\Omega \quad (74)$$

$$\{F_i\} = \int_{\Omega} \{N\} f_i d\Omega + \int_{\Gamma} \{N\} n_j \tau_{ji} d\Gamma \quad (75)$$

$$[K^{su}] = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho w_j \left\{ \frac{\partial (w_k N)}{\partial x_k} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle d\Omega \quad (76)$$

$$\{F_i^s\} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial (w_k N)}{\partial x_k} \right]^T f_i d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} n_k w_k N^T \left(\rho w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} n_k w_k N^T f_i d\Gamma \quad (77)$$

$$[G_i]^T = \int_{\Omega} [N]^T \left[\frac{\partial N_p}{\partial x_i} \right] d\Omega \quad (78)$$

$$[P_i] = \int_{\Omega} \nabla \cdot ([N]^T \vec{w}) \left[\frac{\partial N_p}{\partial x_i} \right] d\Omega \quad (79)$$

$$\kappa = \nabla \cdot \vec{n} \quad (80)$$

$$\kappa = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) = \frac{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right]}{|\nabla \phi|^3} - \frac{2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} \right) + 2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y}}{|\nabla \phi|^3} \quad (81)$$

❖ Passo 2 (equação de Poisson)

$$[H]\{\tilde{p}\}^n = \frac{\rho}{\Delta t} [G^1]\{U\}^n + \frac{\rho}{\Delta t} [G^2]\{V\}^n + \frac{\rho}{\Delta t} [G^3]\{W\}^n \quad (82)$$

$$[H] = \int_{\Omega} \nabla [N_p]^T \cdot \nabla [N_p] d\Omega \quad (83)$$

$$[G^1] = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial N^p}{\partial x} \right\} \langle N \rangle d\Omega \quad (84)$$

$$[G^2] = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial N^p}{\partial y} \right\} \langle N \rangle d\Omega \quad (85)$$

$$[G^3] = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial N^p}{\partial z} \right\} \langle N \rangle d\Omega \quad (86)$$

$$\{f^p\} = \int_{\Gamma} [N^p]^T \vec{n} \cdot \nabla p^n d\Gamma - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Gamma} [N^p]^T \vec{n} \cdot (\vec{U})^n d\Gamma - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Gamma} [N^p]^T \vec{n} \cdot (\Delta \vec{U}^*) d\Gamma + \int_{\Omega} [N^p]^T \frac{\rho \Delta t}{2 \Delta \tau} (w_k \Delta u_i^m) \left[\frac{\partial N_k}{\partial x_i} \frac{\partial N_i}{\partial x_k} \right] \quad (87)$$

❖ Passo 2 (método da compressibilidade artificial)

$$([M_p] + \Delta t^2 \theta_1 \theta_2 [H])\{\Delta \tilde{p}\} = \frac{\rho}{\Delta t} [G^1]\{\tilde{U}\}^n + \frac{\rho}{\Delta t} [G^2]\{\tilde{V}\}^n + \frac{\rho}{\Delta t} [G^3]\{\tilde{W}\}^n + \theta_1 \frac{\rho}{\Delta t} [G^1]\{\Delta \tilde{U}^*\} + \theta_1 \frac{\rho}{\Delta t} [G^2]\{\Delta \tilde{V}^*\} + \theta_1 \frac{\rho}{\Delta t} [G^3]\{\Delta \tilde{W}^*\} - \Delta t \theta_1 [H]\{\tilde{p}\}^n + \{f^p\} \quad (88)$$

$$[M_p] = \int_{\Omega} \frac{1}{\beta_{AC}^2} \{N\} \langle N \rangle d\Omega \quad (89)$$

❖ Passo 3:

$$\rho \Delta u^{**} = -\theta_2 \Delta t \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \quad (90)$$

❖ Passo 4:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} - \vec{u}^c) \cdot \nabla T \right) = k \nabla^2 T + S \quad (91)$$

$$\begin{aligned} [M^*] \{T\}^{n+1} &= [M^*] \{T\}^n - \Delta t [[C] + [K]] \{T\}^n - \frac{\Delta t^2}{2} [C^{est}] \{T\}^n + \\ &+ \Delta t \{f^K\} + \frac{\Delta t^2}{2} \{f^{Cest}\} \end{aligned} \quad (92)$$

$$K_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \alpha \nabla N_{\alpha} \cdot \nabla N_{\beta} d\Omega \quad (93)$$

$$M_{\alpha\beta}^* = \int_{\Omega} N_{\alpha} N_{\beta} d\Omega \quad (94)$$

$$f_{\alpha}^K = \int_{\Omega} N_{\alpha} \|k \nabla T\| d\Omega + \int_{\Gamma} \vec{n} \cdot [N_{\alpha} (\gamma_{\phi} \nabla \phi)]^n d\Gamma \quad (95)$$

$$C_{\alpha\beta}^{est} = \int_{\Omega} \nabla \cdot (N_{\alpha} \vec{u}) [\vec{u} \cdot \nabla N_{\beta}] d\Omega \quad (96)$$

$$f_{\alpha}^{Cest} = \int_{\Omega} N_{\alpha} k \|\vec{u} (\vec{u} \cdot \nabla T)\| d\Omega + \int_{\Gamma} \vec{n} \cdot [N_{\alpha} \vec{u} (\vec{u} \cdot \nabla \phi)^n] d\Gamma \quad (97)$$

4.6.2. Equações de captura de fronteira

Método Volume de Fluido

$$[M] \{\alpha_q\}^{t+1} + \Delta t \theta [C] \{\alpha_q\}^{t+1} = [M] \{\alpha_q\}^t + \Delta t (1 - \theta) [C] \{\alpha_q\}^t \quad (98)$$

$$[M] = \int_{\Omega} \left[\{N_p\} \langle N_q \rangle + \Delta t \theta \{ \nabla \cdot (\vec{u} N_p) \} \langle N_q \rangle \right] d\Omega \quad (99)$$

$$[C] = \int_{\Omega} \left[\{N_p\} \langle \nabla \cdot (\vec{u} N_q) \rangle + \{ \Delta t \theta \nabla \cdot (\vec{u} N_p) \} \langle \nabla \cdot (\vec{u} N_q) \rangle \right] d\Omega \quad (100)$$

Método Level Set

Função principal:

$$\begin{aligned} & [[M^*] + \Delta t \theta [C]] \{\Phi_q\}^{n+1} + \Delta t \theta [[C]^T + \Delta t \theta [C^c]] \{\Phi_q\}^{n+1} = \\ & = [[M^*] + \Delta t \theta [C]] \{\Phi_q\}^n - \Delta t (1 - \theta) [[C]^T + \Delta t \theta [C^c]] \{\Phi_q\}^n \end{aligned} \quad (101)$$

$$[M^*] = \left[\int_{\Omega} \{N_p\} \langle N_q \rangle d\Omega \right] \quad (102)$$

$$[C] = \left[\int_{\Omega} \{ \vec{u} \cdot \nabla N_p \} \langle N_q \rangle d\Omega \right] \quad (103)$$

$$[C]^T = \left[\int_{\Omega} \{ \vec{u} \cdot \nabla N_q \} \langle N_p \rangle d\Omega \right] \quad (104)$$

$$[C^c] = \left[\int_{\Omega} \{ \vec{u} \cdot \nabla N_p \} \langle \vec{u} \cdot \nabla N_q \rangle d\Omega \right] \quad (105)$$

Função de Reinicialização:

$$[M]\{\phi\}^{t+1} + \Delta t \theta [C]\{\phi\}^{t+1} = [M]\{\phi\}^t + \Delta t (1 - \theta) [C]\{\phi\}^t + \{f_p\} \quad (106)$$

$$[M] = \int_{\Omega} \left\{ \{N_p\} + \Delta t \theta (\vec{w} \cdot \{\nabla N_p\}) \right\} \langle N_q \rangle d\Omega \quad (107)$$

$$[C] = \int_{\Omega} \left\{ \{N_p\} + \Delta t \theta (\vec{w} \cdot \{\nabla N_p\}) \right\} \vec{w} \cdot (\langle \nabla N_q \rangle) d\Omega \quad (108)$$

$$\{f\} = \int_{\Omega} \left\{ \{N_p\} + \Delta t \theta (\vec{w} \cdot \{\nabla N_p\}) \right\} \Delta t S(\phi) d\Omega \quad (109)$$

Método Level Set Modificado

$$\begin{aligned} & \left[[M^*] + \Delta t \theta ([C] + [C]^T + \Delta t \theta [C^c]) \right] \{\Phi_q\}^{n+1} = \\ & = \left[[M^*] + \Delta t \theta [C] \right] \{\Phi_q\}^n - \Delta t (1 - \theta) \left[[C]^T + \Delta t \theta [C^c] \right] \{\Phi_q\}^n + \{F\} \end{aligned} \quad (110)$$

$$[M^*] = \left[\int_{\Omega} \{N_p\} \langle N_q \rangle d\Omega \right] \quad (111)$$

$$[C] = \left[\int_{\Omega} \{ \vec{u}' \cdot \nabla N_p \} \langle N_q \rangle d\Omega \right] \quad (112)$$

$$[C]^T = \left[\int_{\Omega} \{N_p\} \langle \vec{u}' \cdot \nabla N_q \rangle d\Omega \right] \quad (113)$$

$$[C^c] = \left[\int_{\Omega} \{ \vec{u}' \cdot \nabla N_p \} \langle \vec{u}' \cdot \nabla N_q \rangle d\Omega \right] \quad (114)$$

$$\{F\} = \int_{\Omega} \Delta t (N_i + \theta \Delta t u' \nabla N_i) f d\Omega \quad (115)$$

$$f = \lambda \text{sng}(\phi^n) S \quad (116)$$

Sendo sng a função sinal:

$$\text{sng}(\phi^n) = \begin{cases} +1, & \text{se } \phi^n > 0 \\ 0, & \text{se } \phi^n = 0 \\ -1, & \text{se } \phi^n < 0 \end{cases} \quad (117)$$

$$S = \frac{\|\phi\|^2}{E + (1 - E)\|\phi\|} \quad (118)$$

$$\vec{U} = \text{sng}(\phi^n) \frac{\nabla \phi^n}{E + (1-E)\|\phi\|} \quad (119)$$

$$\vec{u} = \vec{u} - \lambda \vec{U} + \frac{k \nabla T}{h_v} \quad (120)$$

4.7. Malha

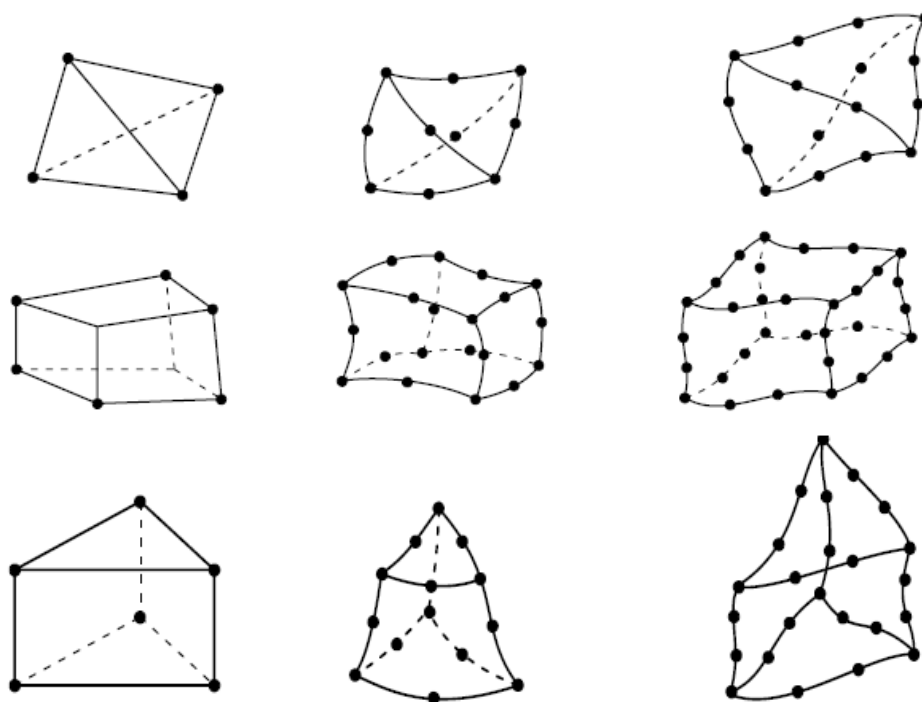
De acordo com Mavriplis (1996) existem as malhas estruturadas e as não estruturadas. Malhas estruturadas são aquelas que possuem uma matriz de conectividade regular, ou seja, os pontos de cada elemento são numerados sequencialmente através de uma lógica muito bem definida. Isso faz com que esse tipo de malha dispense o uso da matriz de conectividade e, com isso, seja mais eficiente em questão de armazenamento de dados na memória. Entretanto, a mesma somente apresenta bons resultados para geometrias simples, como hexaedros por exemplo.

Malhas não estruturadas, no entanto, são aquelas em que a matriz de conectividade se faz necessária, pois os pontos da malha não são ordenados sequencialmente. Apesar de trazerem a desvantagem da necessidade da matriz de conectividade, as malhas não estruturadas permitem simular problemas com geometrias mais complexas, como geometrias curvilíneas, vazadas, entre outras.

Para o problema de ebulição, o domínio de solução que será explicitado posteriormente é simples, entretanto escolheu-se usar malhas tetraédricas não estruturadas para discretizar o domínio, visto que malhas tetraédricas apresentam mais elementos que nós. Entretanto, malhas hexaédricas estruturadas foram testadas nos problemas *benchmarking*.

De acordo com Dhatt, Touzot e Lefrançois (2012), existem vários tipos de elementos que podem ser usados para construir uma malha, tal como mostrado na Figura 7.

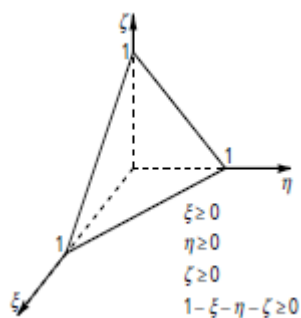
Figura 7 – Geometria de alguns tipos de elementos



Fonte: Adaptado de Dhatt, Touzot e Lefrançois (2012)

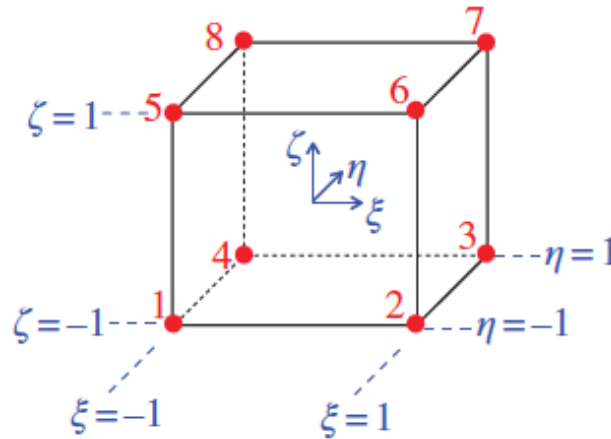
Dentre esses vários tipos de elementos foi usado o elemento tetragonal linear e o hexagonal linear, os quais são descritos em coordenadas locais, respectivamente, nas Figuras 8 e 9.

Figura 8 – Elemento tetragonal em coordenadas locais adimensionais num elemento de referência



Fonte: Dhatt, Touzot e Lefrançois (2012)

Figura 9 – Elemento hexagonal em coordenadas locais adimensionais num elemento de referência



Fonte: Koutromanos, McClure e Roy (2018)

Ressalta-se que se escolheu o elemento linear devido à sua simplicidade matemática e porque em trabalhos anteriores do grupo de pesquisa *Nest-n* (Núcleo de Estudos em Transferência de Calor e Nanotecnologia), como Baggio (2015) e Ponce *et al.* (2019) mostraram que elementos lineares produzem bons resultados para simulações fluidodinâmicas. Além disso, o elemento representado nas Figuras 8 e 9 estão em coordenadas locais (ξ, η, ζ) as quais variam entre 0 e 1 para o tetraedro; e entre -1 e 1 para o hexaedro. No programa desenvolvido, os elementos também foram descritos em coordenadas locais. Desse modo, os fenômenos volumétricos, bem como suas modelagens matemáticas foram descritas em coordenadas locais. Sendo assim deve-se aplicar operações de mudança de coordenadas nas integrais volumétricas para correlacionar os efeitos físicos entre as coordenadas locais e cartesianas. Tal correlação é descrita na Equação (121).

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\Omega'} f(\xi, \eta, \zeta) |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (121)$$

Sendo $|J|$ o determinante do Jacobiano da transformação das coordenadas cartesianas para as coordenadas locais, o qual depende das funções de interpolação de cada elemento.

4.8. Método de Integração

De acordo com Dhatt, Touzot e Lefrançois (2012), para efetuar as integrações para obtenção dos coeficientes das matrizes nos elementos é usada a quadratura de Gauss. Esse método aproxima uma integral por uma soma do integrando calculado em vários pontos pré-definidos (os pontos de Gauss, tabelados) ponderados por funções peso (também conhecidas). Matematicamente, o método se resume a:

$$\int_{-1}^1 f(\vec{x}) dx \cong \sum_{i=1}^{num_pontos_gauss} f(\vec{x}_{g_i}) w_i \quad (122)$$

sendo $\vec{x}_{g_i}$ as coordenadas dos pontos de Gauss, $\vec{x}$ um vetor posição e w_i a função peso correspondente ao i-ésimo ponto de Gauss.

A primeira observação a ser feita da Equação (122) é que o método de integração de Gauss foi pressuposto para integrar funções no limite de -1 a 1, evidenciando mais uma vez a praticidade e utilidade do uso de coordenadas locais. Outra observação é que se podem usar quantos pontos de Gauss se queiram na Equação (122). Computacionalmente, deve-se escolher um número de pontos de Gauss para integração dos polinômios que compõem o integrando nas integrais. Ainda, Dhatt, Touzot e Lefrançois (2012) propõe que o número mínimo de pontos de Gauss usados seja pelo menos $\frac{p+1}{2}$, sendo p o maior grau do polinômio de interpolação.

Pelo item 4.6, observa-se que o maior grau dos polinômios encontra nas matrizes de massa, cujo grau é dois. Para a malha tetraédrica usou-se cinco pontos de Gauss, tal como explicitada na Tabela 1; já para a malha hexaédrica, oito pontos descritos na Tabela 2. As funções pesos referentes a esses pontos de Gauss também são mostradas em suas respectivas tabelas.

Tabela 1 – Pontos de Gauss em coordenadas locais e funções peso (w_i) capaz de integrar um polinômio de até 9º grau referente a um elemento tetragonal.

Nº do ponto de Gauss	ξ	η	ζ	w_i
1	1/4	1/4	1/4	-2/15
2	1/6	1/6	1/6	3/40
3	1/6	1/6	1/2	3/40
4	1/6	1/2	1/6	3/40
5	1/2	1/6	1/6	3/40

Fonte: Dhatt, Touzout e Lefrançois (2012)

Tabela 2 – Pontos de Gauss em coordenadas locais e funções peso (w_i) referentes a esses pontos capaz de integrar um polinômio de até 15º grau referente a um elemento hexaédrico.

Nº do ponto de Gauss	ξ	η	ζ	w_i
1	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	1
2	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	1
3	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	1
4	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	1
5	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	1
6	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	1
7	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	1
8	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	1

Fonte: Koutromanos, McClure e Roy (2018)

4.9. Funções de Interpolação

Como mostrado nas Figuras 8 e 9, os livros de Dhatt, Touzout e Lefrançois (2012) e Koutromanos, McClure e Roy (2018) apresentam os elementos e as funções de

interpolação em coordenadas locais adimensionalizadas ou também denominadas de coordenadas abstratas num elemento de referência. Coordenadas locais são usadas, pois assim pode-se descrever um elemento independentemente do sistema de coordenadas usado e independe da forma do domínio. No caso do elemento tetragonal, as coordenadas locais (ξ, η, ζ) e o sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) estão relacionados pela Equação (123) (DHATT; TOUZOT; LEFRANÇOIS, 2012):

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta + (x_4 - x_1)\zeta \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta + (y_4 - y_1)\zeta \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)\xi + (z_3 - z_1)\eta + (z_4 - z_1)\zeta \end{cases} \quad (123)$$

sendo (x_i, y_i, z_i) os pontos do i -ésimo nó do elemento.

Segundo Dhatt, Touzot e Lefrançois (2012), as funções de interpolação para o tetraedro linear são:

$$\begin{cases} N_1 = 1 - \xi - \eta - \zeta \\ N_2 = \xi \\ N_3 = \eta \\ N_4 = \zeta \end{cases} \quad (124)$$

E segundo Koutromanos, McClure e Roy (2018) as funções de interpolação para um hexaedro linear são:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\ N_2 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta) \\ N_3 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\ N_4 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta) \\ N_5 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ N_6 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta) \\ N_7 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \\ N_8 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta) \end{array} \right. \quad (125)$$

4.10. Mudança de Coordenada e Jacobiano da Transformação

O método de integração adotado foi desenvolvido para ser aplicado em coordenadas locais num elemento de referência. No entanto, a formulação do problema está toda desenvolvida, em coordenadas cartesianas. Assim, para integrar segundo o método da quadratura de Gauss, é necessário fazer uma mudança de coordenadas, o que na integração equivale levar em consideração o Jacobiano da mudança de base. O Jacobiano da transformação do sistema de coordenada de referência para o sistema de coordenada cartesiano pode ser calculado por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (126)$$

Fazendo uso da Equação (123) em (126), tem-se a expressão para o Jacobiano J para o tetraedro linear.

$$J = \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & (z_2 - z_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) & (z_3 - z_1) \\ (x_4 - x_1) & (y_4 - y_1) & (z_4 - z_1) \end{bmatrix} \quad (127)$$

Já Koutromanos, McClure e Roy (2018) afirma que o Jacobiano pode ser calculado pela Eq. (128), cuja definição foi usada para obter o Jacobiano para o hexaedro linear.

$$J = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i \right) & \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \right) & \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \right) \\ \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \right) & \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \right) & \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \right) \\ \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i \right) & \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i \right) & \sum_{i=1}^8 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \right) \end{bmatrix} \quad (128)$$

4.11. Solução dos Sistemas Algébricos

Para finalizar a resolução do problema, faz-se necessário resolver os sistemas lineares do Apêndice B. O código desenvolvido utiliza duas técnicas diferentes para resolução de matrizes: a diagonalização de matrizes de massa e o método do gradiente conjugado.

4.11.1. Diagonalização de matrizes

De acordo com Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2013), existem vários métodos de diagonalização de matrizes. Um método clássico é determinar os autovalores e autovetores de uma determinada matriz e a partir dessas informações diagonalizar a matriz, dada por:

$$M_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} e N_{\alpha} N_{\beta} d\Omega \quad (129)$$

sendo e um escalar, M a matriz de massa e N as funções de interpolação.

Um método proposto por esses autores para que seja feita a diagonalização é a soma por linhas, para obtenção da denominada matriz concentrada (*lumped matrix*):

$$M_{\alpha\beta} = \begin{cases} \sum_c \int_{\Omega} e N_{\alpha} N_{\beta} d\Omega & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (130)$$

Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2013) afirmam que a matriz de massa para as equações de momento, energia, Poisson e continuidade geram matrizes de massa diagonais dominantes. Desse modo, sendo o problema totalmente explícito, para a solução dos sistemas dessas equações basta diagonalizar a matriz dada pela Equação (130), uma vez que a inversão de uma matriz diagonal é algo mais simples de efetuar.

4.11.2. *Método dos Gradientes Biconjugados*

Como as equações dos métodos de captura de fronteira utilizadas nesse trabalho são convectivas dominantes e, por conta disso, geram matrizes de massa cheias, ou seja, não diagonalmente dominantes, faz-se necessário um método para solução do problema. Visto que os métodos diretos de solução exigem o cálculo da inversa da matriz de massa e isso é muito custoso computacionalmente, pensou-se em usar um método iterativo. Um método de rápida convergência e de alta precisão é o Método dos Gradientes Biconjugados. O Método do Gradiente Conjugado é indicado para matrizes esparsas, simétricas e positivas-definidas. Além disso, esse método é aplicado por alguns autores para solução das equações dos métodos VOF ou LS, tais como Tanguy, Ménard e Berlemont (2007), Damián (2013), Gibou, Fedkiw e Osher (2018) e Wu, Dhir e Quian (2007).

Em Ponce *et al.* (2019), os autores apresentam um algoritmo revisado do Método de Gradiente Biconjugado (GBC) aplicado à solução Elemento por Elemento (EBE). Essa solução de sistemas vem para diminuir o espaço de memória utilizado pelos dados armazenados, uma vez que para resolução de um sistema somente é necessário um único vetor de resíduos. A matriz de massa será sempre calculada elementarmente. Além disso, o algoritmo é extremamente rápido em solução de sistemas de grandes dimensões, além de agregar a acuracidade do método de GBC.

Considerando que está se resolvendo um sistema linear que pode ser reduzido à $[A]\{x\} = \{b\}$, o algoritmo utilizado nesse trabalho é apresentado a seguir.

```

Aplique as condições de contorno em  $\{b\}$ 

for i=1,num_points
     $r_i \leftarrow 0$ 
     $D_i \leftarrow 0$ 
end for

for i=1,num_elements
    Aplique as condições de contorno em  $[A_e]$ 
     $r_e \leftarrow r_e + b_e - A_e x_e$ 
     $D_e \leftarrow D_e + \text{diag}(A_e)$ 
end for

for i=1,num_points
     $\bar{r}_i \leftarrow r_i$ 
     $d_i \leftarrow r_i / D_i$ 
     $\bar{d}_i \leftarrow \bar{r}_i / D_i$ 
     $q_i \leftarrow 0$ 
     $\bar{q}_i \leftarrow 0$ 
end for

 $\delta \leftarrow 0$ 

for i=1,num_points
     $\delta \leftarrow \delta + r_i \cdot d_i$ 
end for

while  $\delta > \text{tolerance}$  do
    for i=1,num_elements
        Aplique as condições de contorno em  $[A_e]$ 
         $q_e \leftarrow q_e + A_e d_e$ 
         $\bar{q}_e \leftarrow \bar{q}_e + A_e \bar{d}_e$ 
    end for

```

```

 $\alpha \leftarrow 0$ 

for i=1,num_points
 $\alpha \leftarrow \alpha + \bar{d}_i \cdot q_i$ 
end for

for i=1,num_points
 $x_i \leftarrow x_i + \frac{\delta}{\alpha} \cdot d_i$ 
 $r_i \leftarrow r_i - \frac{\delta}{\alpha} \cdot q_i$ 
 $\bar{r}_i \leftarrow \bar{r}_i - \frac{\delta}{\alpha} \cdot \bar{q}_i$ 
end for

 $\bar{\delta} \leftarrow \delta; \delta \leftarrow 0$ 

for i=1,num_points
 $d_i \leftarrow D_i \cdot r_i + \alpha \cdot d_i$ 
 $\bar{d}_i \leftarrow D_i \cdot \bar{r}_i + \alpha \cdot \bar{d}_i$ 
 $q \leftarrow 0$ 
 $\bar{q}_i \leftarrow 0$ 
end for
end while

```

4.12. Montagem das Matrizes

O algoritmo para montagem das matrizes usado foi a montagem de matrizes globais. Entretanto, a fim de armazenar o menor espaço possível na memória e acelerar o processo de solução armazenou-se não as matrizes cheias, mas a multiplicação das matrizes por seus respectivos vetores correspondentes. O algoritmo desenvolvido de montagem das matrizes é exemplificado pela montagem da matriz convectiva C do primeiro passo, multiplicada pelo vetor velocidade.

```

for ii = 1, num_elements
  C(:, :) = 0
  for i = 1, num_local_points
    iie(i) = matrix_conec(ii, i)
    for j = 1, num_local_points
      for k = 1, num_gauss_points
        Calcule u, v, w e  $\rho$  nos pontos de Gauss
        
$$func = N_i(i, k) \rho_g \left[ \begin{array}{l} \left( u_g \frac{\partial N_i}{\partial x}(j, k) \right) + \\ + \left( v_g \frac{\partial N_i}{\partial y}(j, k) \right) + \\ + \left( w_g \frac{\partial N_i}{\partial z}(j, k) \right) \end{array} \right]$$

        C(i, j) = C(i, j) + Gauss_weight_function * func
      end for
    end for
  end for
  for jj = 1, num_local_points
    f_c = 0
    for kk = 1, num_local_points
      f_c = f_c + (C(jj, kk) *  $\Delta t$  *  $u^n(iie(kk))$ )
    end for
  end for
end for

```

4.13. Programa Usado e Características dos Computadores Utilizados

Toda a formulação descrita no Apêndice B foi programada manualmente em Fortran 90 com o compilador GNU Fortran e com a IDE CodeBlocks.

As máquinas usadas estão instaladas no Laboratório de Simulações Numéricas em Ciências Térmicas no Departamento de Engenharia Mecânica da Unesp/Câmpus de Ilha Solteira e possuem as seguintes configurações:

- Máquina I
 - Computador Dell Inspiron 3647 (0611)
 - Placa mãe Dell 02YRK5
 - Processador Intel Inside Core i5
 - 8 Gb de memória RAM (4 núcleos)

- Máquina II
 - Placa mãe Supermicro X10DAi
 - Processador Intel Xeon E5-2660 v4 (56) @2.2GHz
 - 128 Gb de memória RAM (56 núcleos)

5. VALIDAÇÕES

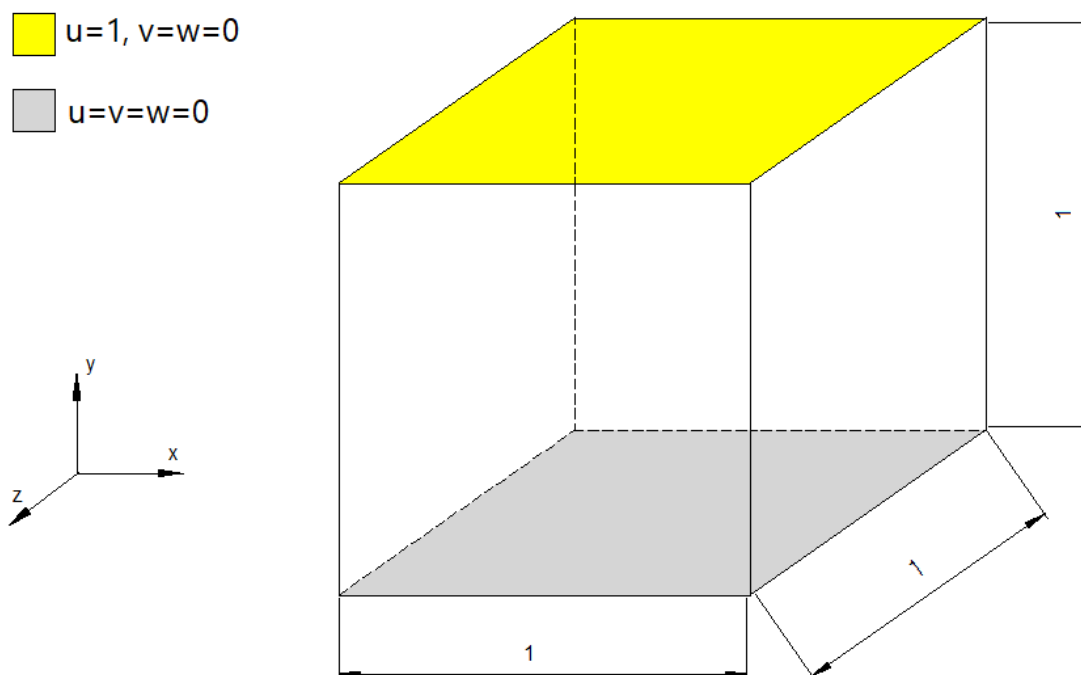
5.1. Validação do Código de Simulação das Equações de Continuidade, Momento e Pressão

Primeiramente, teve-se em mente que a formulação e, conseqüentemente, o programa desenvolvido levaram em consideração que o escoamento acontece para baixos números de Reynolds, ou seja, em baixas velocidades. Desse modo, procurou-se um caso *benchmarking* para validar as equações da continuidade e do movimento.

O problema de escoamento dentro de uma cavidade induzido pelo deslocamento de uma parede, apresentado por Wong e Baker (2002), foi usado como problema de validação para baixos números de Reynolds. Os autores propõem que as equações sejam tratadas como adimensionais. O presente trabalho, para adequar a formulação adimensional de Wong e Baker (2002) adotou $\rho = 1$ e $\mu = 1 / \text{Re}$.

As condições iniciais e de contorno, bem como o domínio de solução são mostrados na Figura 10.

Figura 10 – Domínio computacional e condições de contorno para o problema da cavidade descrita por Wong e Baker (2002)



Fonte: Próprio Autor.

Ressalta-se que na Figura 10 todas as grandezas estão adimensionalizadas. Ou seja, seus valores numéricos máximos são a unidade. A Equação (131) mostra a adimensionalização de cada termo. Além disso, em todo o domínio apresentado na figura, o gradiente da pressão nas paredes é nulo. Em todas as paredes da Figura 10, se adotou condição de não deslizamento, exceto na parede de topo, em cor amarela, em que a velocidade adimensional foi considerada igual a 1.

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{x^*}{L} \\
 u &= \frac{u^*}{u_w} \\
 p &= \frac{p^*}{\rho^* u_w^2} \\
 \rho &= \frac{\rho^*}{\rho_0} \\
 \mu &= \frac{\mu^*}{\mu_0} \\
 Re &= \frac{\rho^* u_w L}{\mu}
 \end{aligned} \tag{131}$$

Os sobrescritos * representam uma variável dimensional, o subscrito 0 um estado de referência, L o comprimento característico do domínio e u_w a velocidade da tampa deslizante.

Para essa comparação testou-se o equacionamento para $Re=100$. Para discretizar o domínio fez-se uso de uma malha não estruturada de tetraedros lineares e outra malha estruturada de hexaedros lineares. Para cada malha, testou-se ambos os equacionamentos de resolução para pressão previamente descritos: pelo Método da Equação de Poisson e pelo Método da Compressibilidade Artificial.

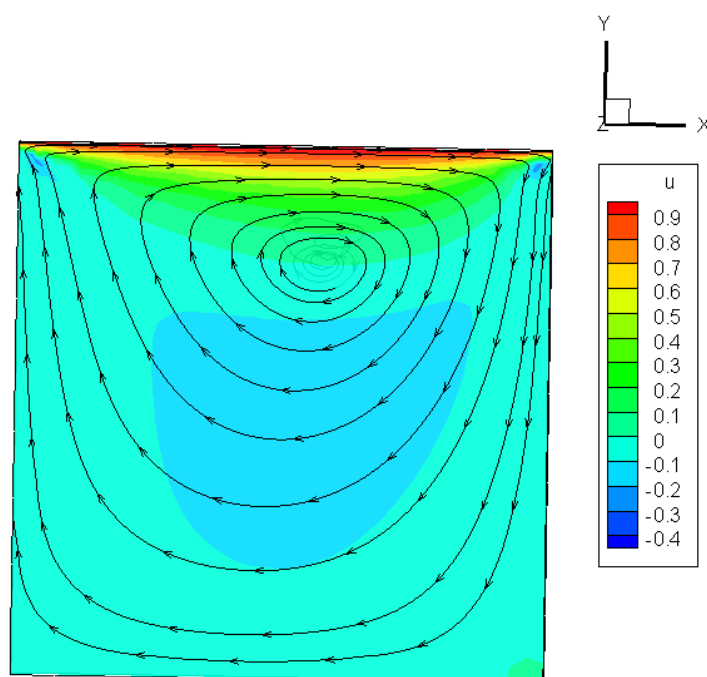
Para obter os resultados mostrados a seguir, algumas considerações foram feitas:

- O escoamento é tratado como incompressível (WONG E BAKER, 2002);
- A parcela de convecção natural também é desconsiderada.

Nas Figuras 11 e 12 que seguem são mostrados, respectivamente, uma projeção bidimensional do campo tridimensional de velocidade pelas linhas de corrente e o campo

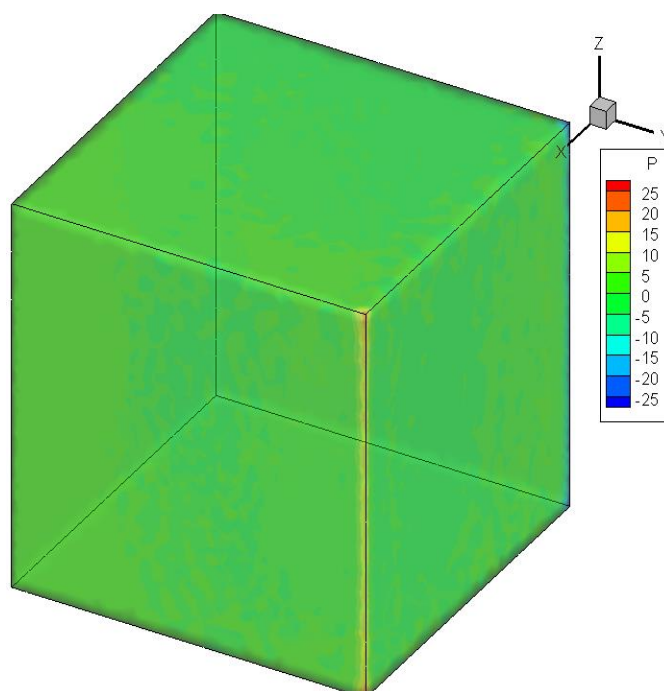
de pressão tridimensional após 5s, quando o escoamento atingiu o regime permanente, para $Re = 100$, considerando a resolução da pressão pela Equação de Poisson. Para esse resultado fez-se uso de uma malha não estruturada com 18339 nós e 90880 elementos tetraédricos. Além disso, simulou-se o problema de 0 à 50s sob um passo de tempo de $10^{-5}s$.

Figura 11 – Projeção bidimensional das linhas de corrente do problema da cavidade para $Re=100$ após 5 segundos de simulação utilizando uma malha tetraédrica não estruturada e a equação de Poisson para obtenção do campo de pressão



Fonte: Próprio Autor

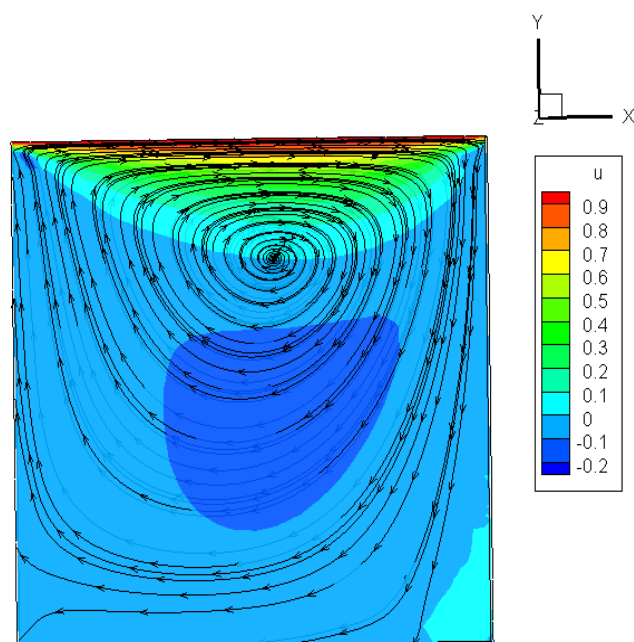
Figura 12 – Campo de pressão do problema da cavidade para $Re=100$ após 5 segundos de simulação utilizando uma malha tetraédrica não estruturada e a equação de Poisson para obtenção do campo de pressão



Fonte: Próprio Autor

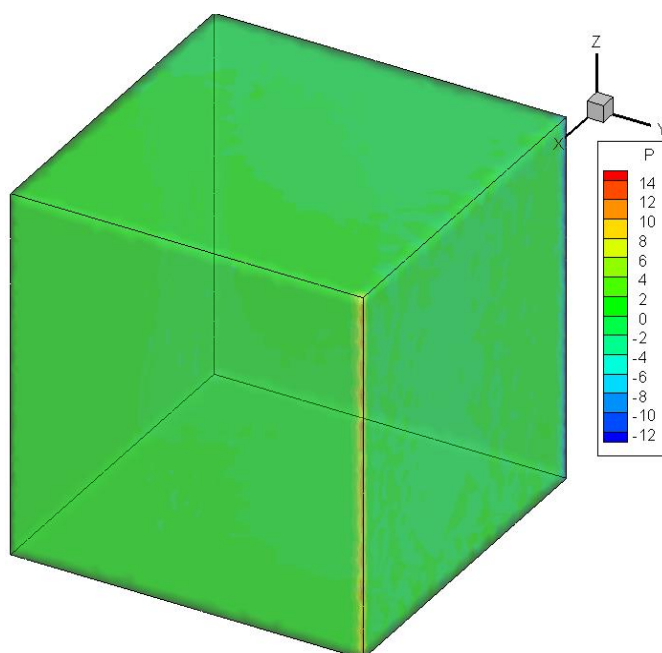
Nas Figuras 13 e 14 também são mostrados os resultados, para o problema da cavidade com $Re=100$, das projeções bidimensionais do campo de velocidade com as linhas de corrente vistas nesse plano e para o campo de pressão, respectivamente. Esses resultados foram obtidos usando a mesma malha tetraédrica não estruturada e a resolução do campo de pressão usado o método de compressibilidade artificial.

Figura 13 – Projeção bidimensional das linhas de corrente do problema da cavidade para $Re=100$ após 5 segundos de simulação utilizando uma malha tetraédrica não estruturada e o método da compressibilidade artificial para obtenção do campo de pressão



Fonte: Próprio Autor

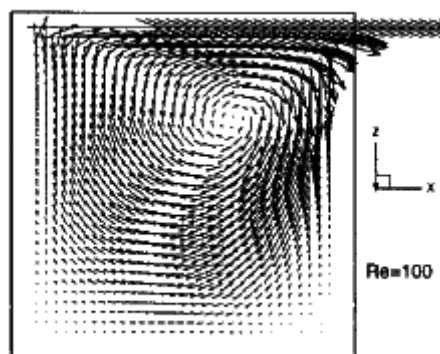
Figura 14 – Campo de pressão do problema da cavidade para $Re=100$ após 5 segundos de simulação utilizando uma malha tetraédrica não estruturada e o método da compressibilidade artificial para obtenção do campo de pressão



Fonte: Próprio Autor

No Apêndice D são mostrados os resultados para $Re=100$ fazendo uso de uma malha estruturada de 9261 nós e 8000 elementos hexaédricos lineares para discretizar o domínio. Para uma análise qualitativa dos resultados dos perfis de velocidade observado na Figura 11, Figura 13, Figura D.1 e na Figura D.3 será usado os resultados de Wong e Baker (2002), os quais se encontram na Figura 15, como referência.

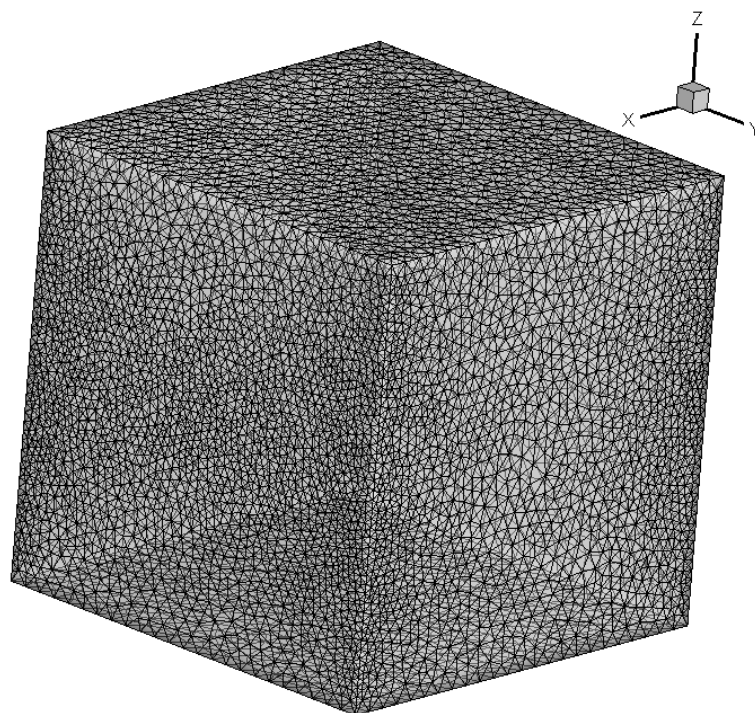
Figura 15 – Vetores velocidade para o problema descrito no item 5 para $Re = 100$



Fonte: Wong e Baker (2002)

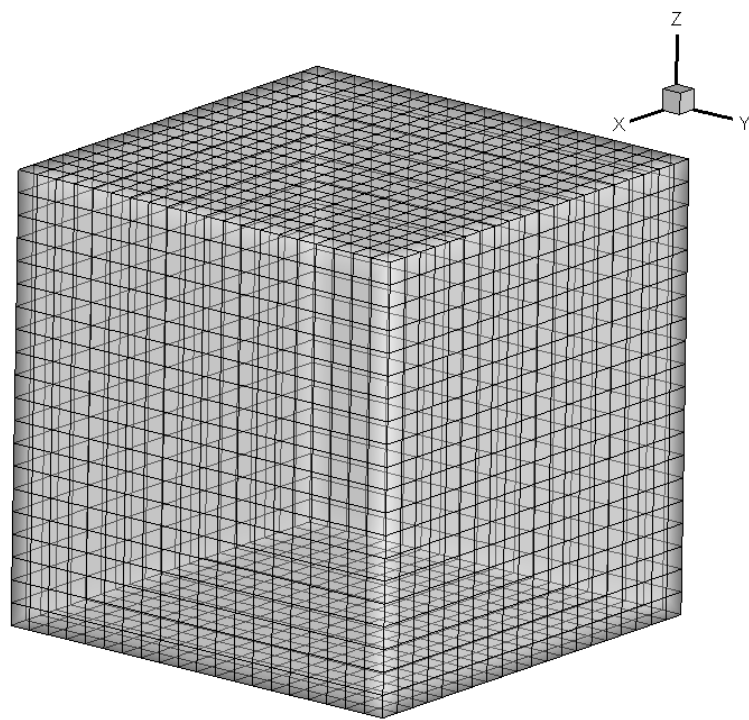
Pode-se observar que o código implementado foi capaz de captar os vórtices centrais. Quando compara-se somente as linhas de corrente do escoamento; não se percebe disparidades entre usar uma malha tetraédrica não estruturada e uma malha hexaédrica estruturada, nem entre usar a equação de Poisson ou o Método da Compressibilidade Artificial para cálculo do campo de pressão. Mas para o campo de pressão, observa-se que os que foram obtidos com o domínio discretizado com a malha estruturada mostrou uma divisão um pouco mais clara entre as zonas de alta e baixa pressão; em contraste com a malha tetraédrica, cuja divisão no interior do domínio foi menos evidenciada. Isso é observado porque o domínio do problema é um cubo, que é uma geometria computacionalmente muito simples. Assim, malhas estruturadas permitem uma discretização mais homogênea do domínio em comparação com a malha não estruturada usada. Para se mostrar a diferença entre ambas as malhas, são apresentadas as Figuras 16 (malha de tetraedros) e 17 (malha de hexaedros).

Figura 16 – Malha tetraédrica não estruturada usadas para discretização do problema da cavidade.



Fonte: Próprio Autor.

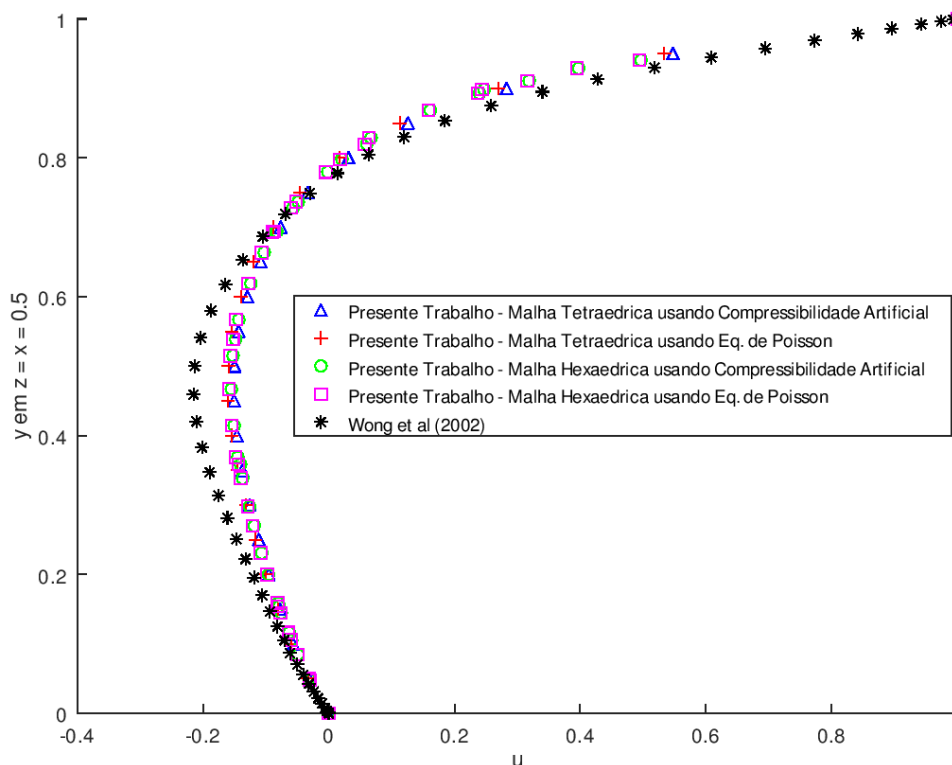
Figura 17 – Malha hexaédrica estruturada usadas para discretização do problema da cavidade.



Fonte: Próprio Autor.

A fim de fazer uma comparação quantitativa, é apresentada a Figura 18, que apresenta uma comparação dos valores previstos da componente x da velocidade observada no plano $z = 0,5$ por Wong e Baker (2002) e os obtidos no presente trabalho para $Re = 100$.

Figura 18 – Comparação da velocidade no eixo x do presente trabalho com os dados de Wong e Baker (2002) para o problema da cavidade deslizante considerando $Re=100$.



Fonte: Próprio Autor

As comparações da Figura 18 mostram que para $Re=100$ o comportamento do escoamento encontra-se como esperado; as máximas diferenças entre os casos simulados e o trabalho de referência estão abaixo de 12%. Vale ressaltar que 12% não é o erro entre os resultados, mas sim a máxima diferença percentual. Vale ressaltar também que mesmo observando as pequenas diferenças entre os resultados obtidos por diferentes tipos de malha ou diferentes métodos de obtenção do campo de pressão, os resultados mostraram-se quase coincidentes uns aos outros. No Apêndice E, se encontram os valores numéricos usados para construção da Figura 18.

5.2. Validação do Código de Simulação da Equação da Energia

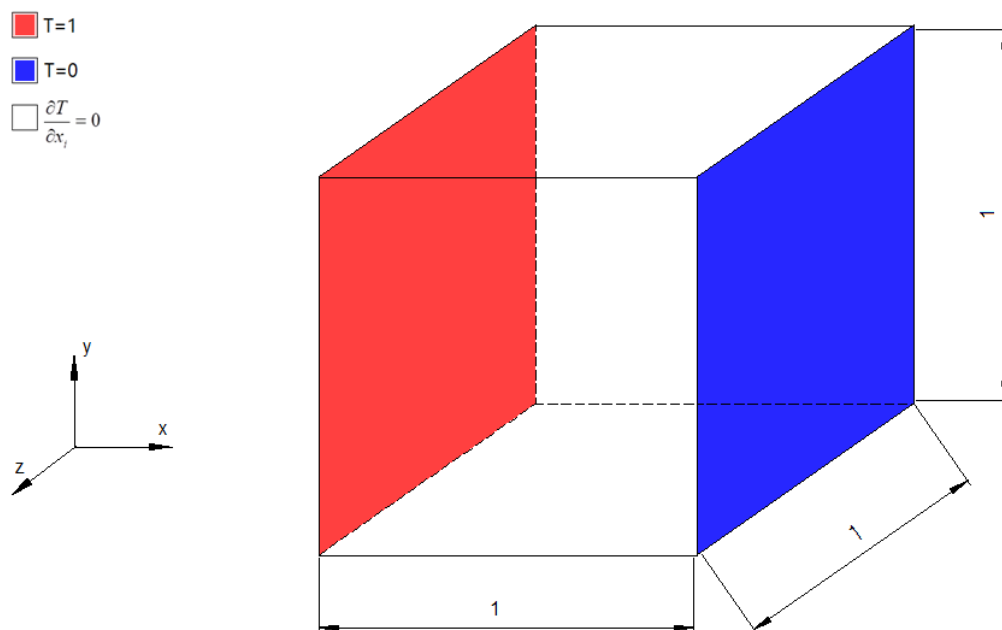
O *benchmarking* usado para validar a equação da energia foi também o problema da cavidade com a equação da energia acoplada com convecção natural. As condições fluido dinâmicas são as mesmas do item 5. As condições de contorno térmica são mostradas na Figura 10. Algo que foi testado pelo presente autor que não é citado em trabalhos que usam esse *benchmarking* é que as condições iniciais do domínio são: no contorno, tal como a Figura 19; no interior do domínio a temperatura adimensional, definida na Eq. (132), é especificada como nula.

$$\theta = \frac{T - T_r}{\Delta T} \quad (132)$$

sendo T a temperatura em um ponto da malha, T_r uma temperatura de referência e ΔT uma diferença de temperatura de referência.

Como citado anteriormente, sabe-se que o escoamento da cavidade é um problema de escoamento incompressível. Assim, as matrizes $[K^{\mu_{ji}}]$ e $[\Delta^{\mu_{ij}}]$ ainda são consideradas como nulas.

Figura 19 – Domínio computacional e condições de contorno para o problema da cavidade térmica sem convecção natural descrita por Wong e Baker (2002).



Fonte: Próprio Autor

Novamente, as equações e os resultados dessa simulação são todos adimensionais. Na Equação (6) a difusividade é adotada como sendo o inverso do número de Prandtl para que a equação fique adimensionalizada. As equações para esse problema adimensionalizadas são mostradas nas Equações (133) e (134):

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = \frac{Ra}{Pr} \bar{T} - \nabla p + \nabla^2 \vec{u} \quad (133)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \bar{T} = \nabla \cdot \left(\frac{1}{Pr} \nabla \bar{T} \right) \quad (134)$$

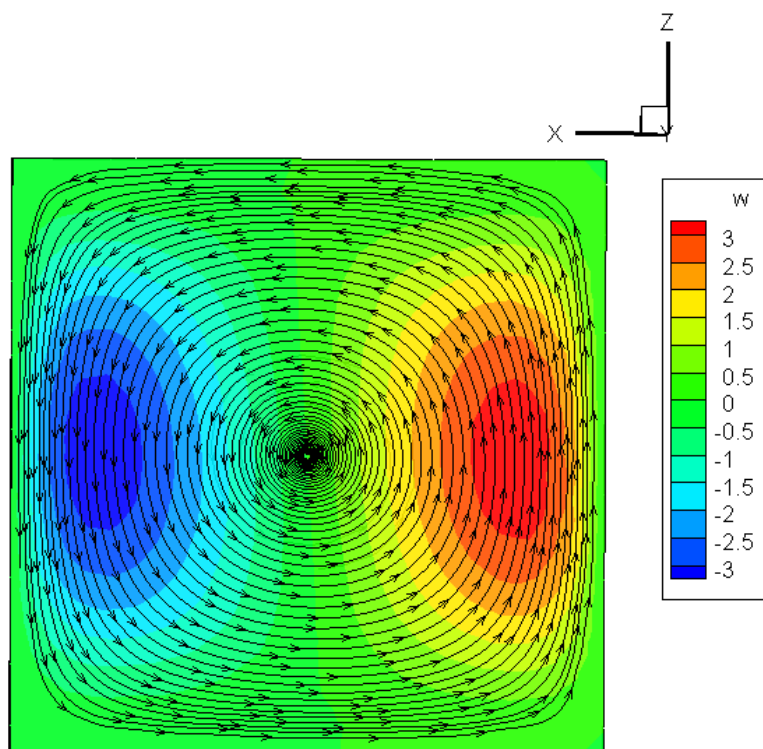
sendo $Ra = Gr.Pr$ o número de Rayleigh, $\vec{u}$ indica o vetor velocidade adimensional e $\bar{T}$ a temperatura adimensional.

Para que as Equações (5) e (6) se adequem ao problema de descrito pelas Equações (133) e (134) faz-se $\rho = 1$, $\mu = 1$, $\beta = Ra / Pr$ e $\alpha = 1 / Pr$. Além disso, adotou-se a hipótese de Boussinesq (na equação de movimento, a massa específica varia apenas no termo de empuxo).

A Figura 20 mostra o campo de velocidade para o problema de convecção natural considerando $Ra=10^3$; a Figura 21 o campo de pressão e Figura 22 o campo de temperatura. Já a Figura 23 mostra uma comparação do presente resultado e o resultado para convecção natural de Silva (1998).

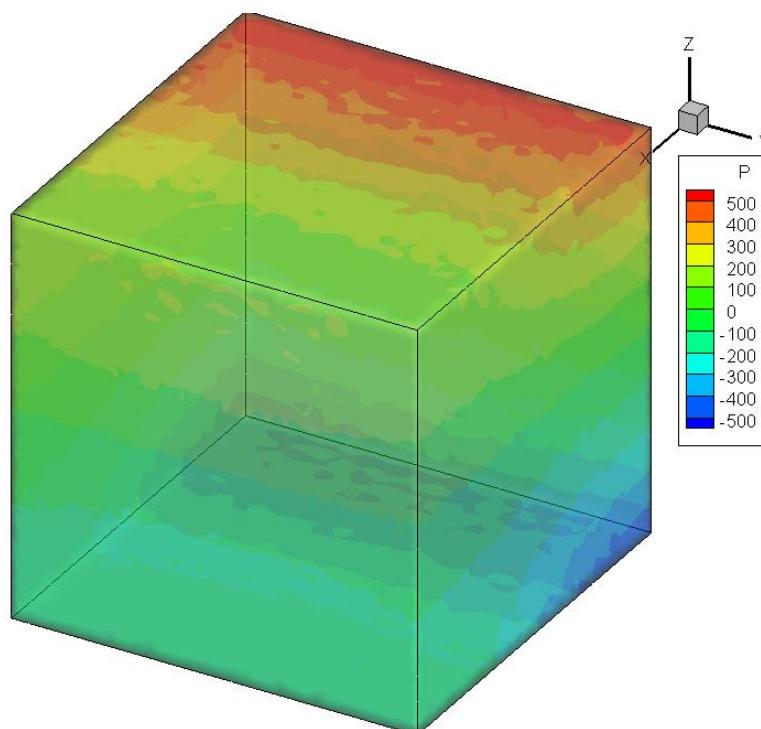
Para essas figuras foi-se usada uma malha não estruturada de 18339 nós e 90880 elementos tetraédricos lineares e usou-se a equação de Poisson para obtenção do campo de pressão. Além disso, simulou-se os resultados de 0 à 5s em um passo de tempo de 10^{-6} s.

Figura 20 – Projeção bidimensional das linhas de corrente do problema da cavidade sob convecção natural para $Ra=10^3$ após 0,5 segundos de simulação



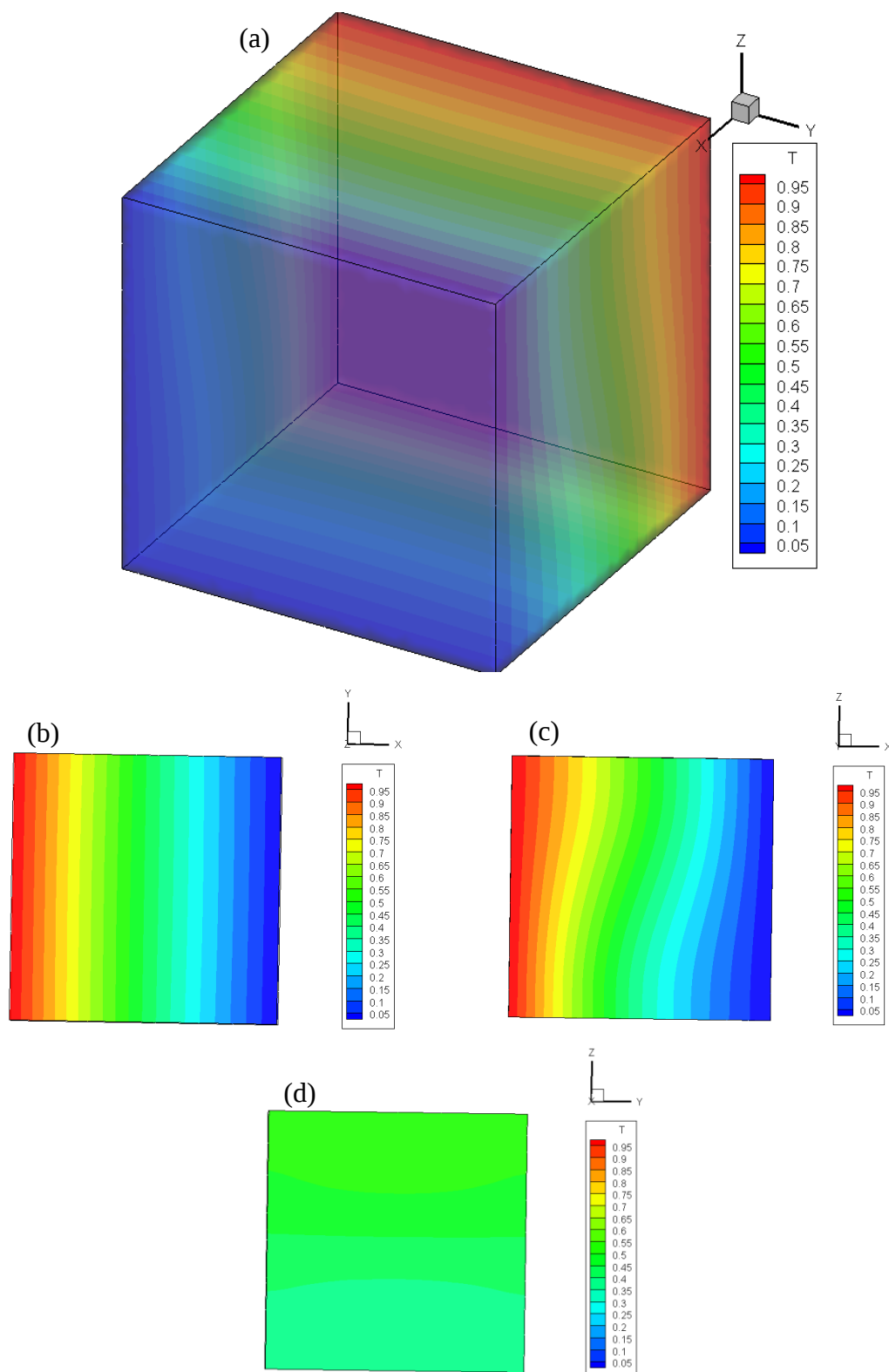
Fonte: Próprio Autor

Figura 21 – Campo tridimensional de pressão do problema da cavidade sob convecção natural para $Ra=10^3$ após 0,5 segundos de simulação



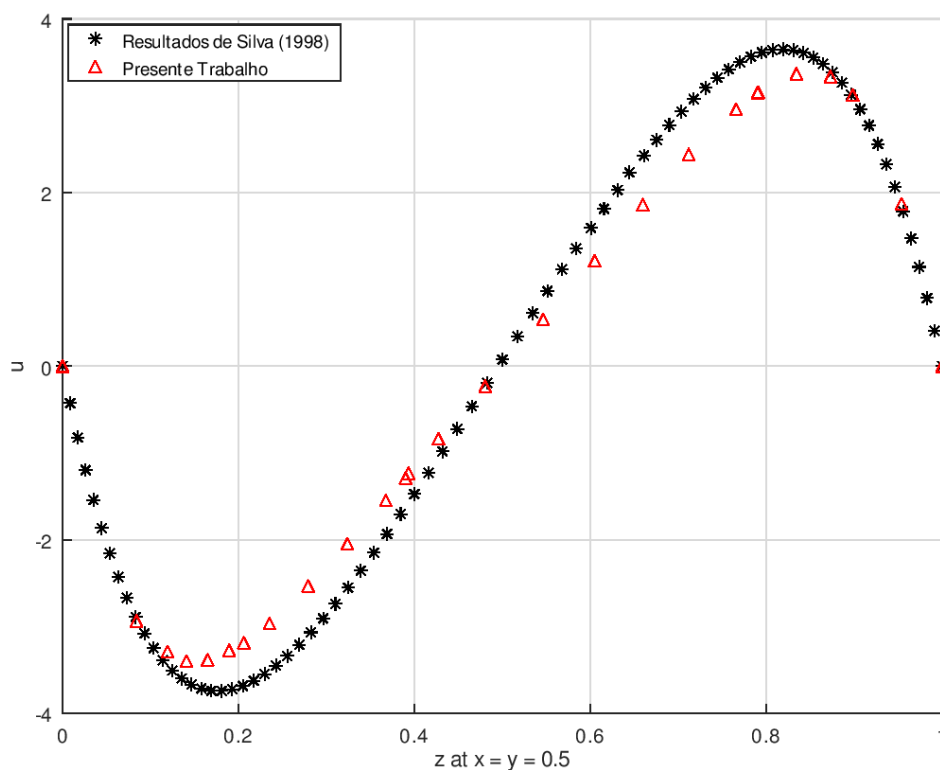
Fonte: Próprio Autor

Figura 22 – (a) Campo tridimensional e (b), (c) e (d) projeções bidimensionais nos planos cartesianos da temperatura do problema da cavidade sob convecção natural para $Ra=10^3$ após 0.5 segundos de simulação



Fonte: Próprio Autor

Figura 23 – Comparação da temperatura no eixo z do presente trabalho com os de uma simulação de Silva (1998) para um tempo de simulação $t=0.5s$ para $Ra=10^3$.

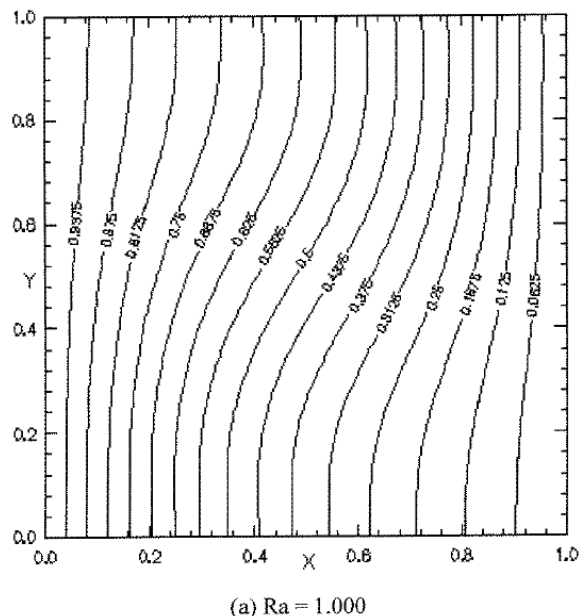


Fonte: Próprio Autor

Observa-se que a maior diferença entre a componente x da velocidade do resultado de Silva (1998) – 2D – e do presente resultado – 3D – é de 0,58. Ressalta-se novamente que a comparação é feita entre uma simulação bidimensional com uma simulação tridimensional.

Para uma análise qualitativa do campo de temperatura, nos baseamos nas isotermas para o problema da cavidade com $Ra=10^3$ de Silva (1998) mostradas na Figura 24.

Figura 24 – Isotermas para o problema da cavidade sob convecção natural segundo Silva (1998) para $Ra=10^3$



Fonte: Silva (1998)

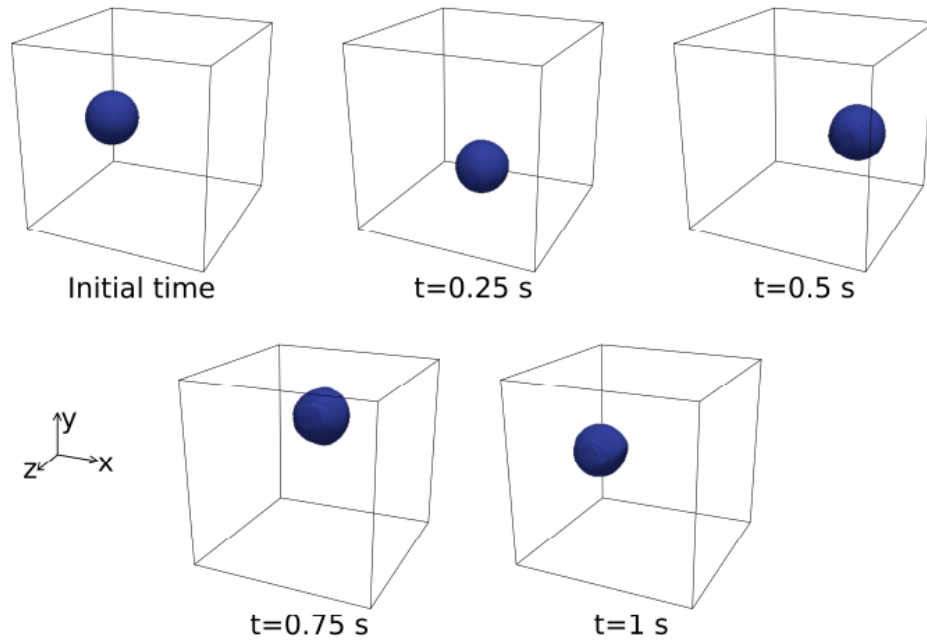
Observa-se também, qualitativamente, que os campos de temperatura apresentados pelo presente trabalho e Silva (1998) mostram-se semelhantes entre si, mostrando que as equações de temperatura implementadas estão gerando os resultados esperados.

5.3. Validação do Código de Captura de Fronteira

Dentre os métodos de captura de fronteira apresentados, optou-se por usar o Método *Level Set* Modificado por Grave, Camata e Coutinho (2019), os quais também apresentam em seu *paper* um *benchmarking* para validações. O resultado de referência apresentado por Grave, Camata e Coutinho (2019) é o da rotação de uma esfera de 0,15m de raio centrada em (0,25; 0,5; 0,5) m dentro de um cubo de 1 m x 1 m x 1 m. Segundo Grave, Camata e Coutinho (2019), aplicando um campo de velocidades, como descrito na Equação (135), a esfera deveria movimentar-se pelo domínio tal como mostra a Figura 25.

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= -2\pi(y - y_{(\text{centro do domínio})}) \\
 v(x, y, z, t) &= 2\pi(x - x_{(\text{centro do domínio})}) \\
 w(x, y, z, t) &= 0
 \end{aligned} \tag{135}$$

Figura 25 – Posição da esfera ao longo do tempo

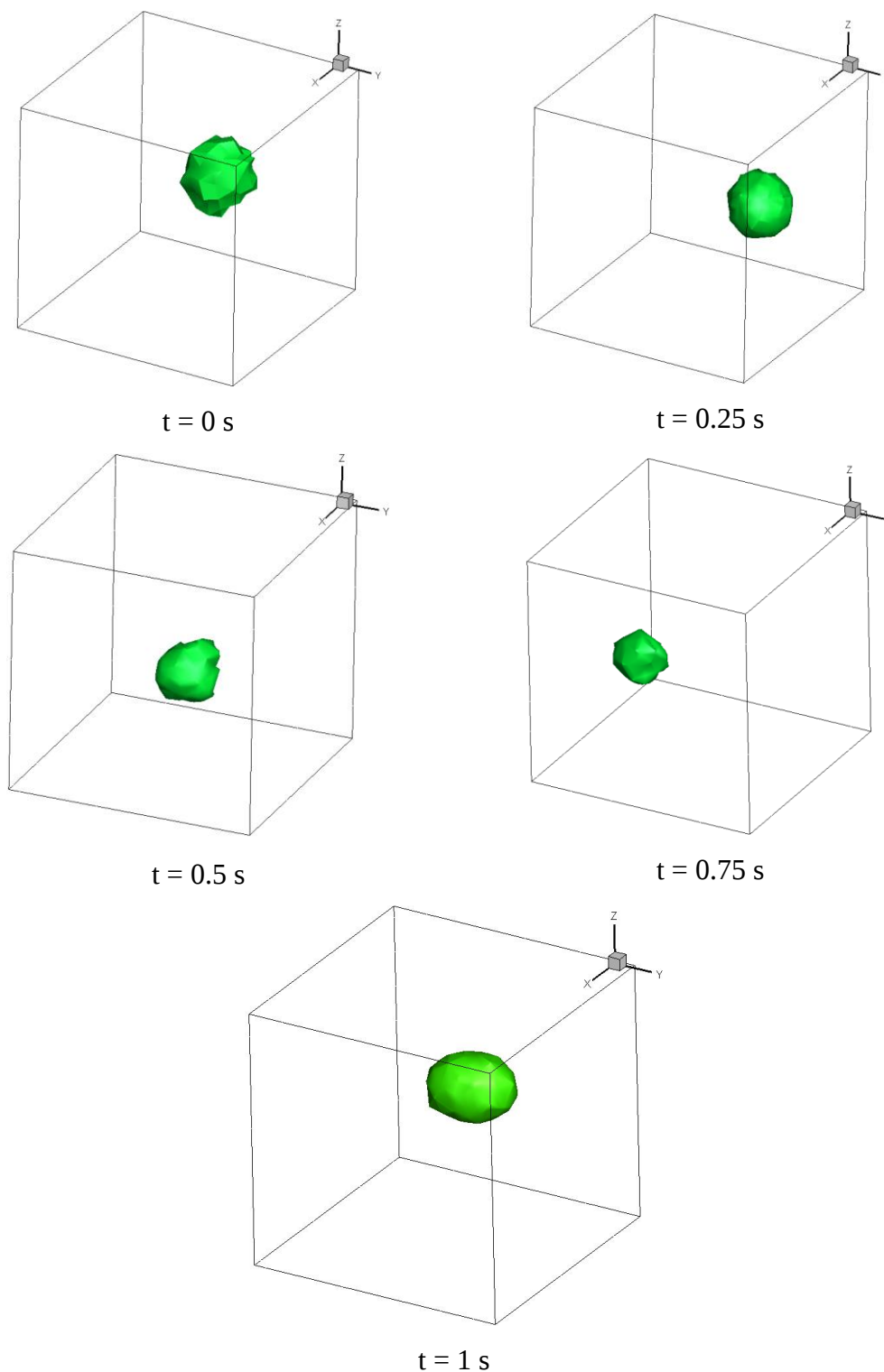


Fonte: Grave, Camata e Coutinho (2019)

Do trabalho de Grave, Camata e Coutinho (2019) é possível de extrair quase todas as condições para que o problema seja reproduzido. Os autores analisam o movimento da esfera com uma malha de elementos hexaédricos trilineares com 2x25x25 pontos iniciais; de 0 a 1 segundo, em um passo de tempo de 10^{-3} s. O parâmetro E especificado pelos autores foi de 0,025m. Apesar de todas essas especificações, os autores não comentam das condições de contorno do problema. Assim, foram testadas condições de contorno até concluir que a condição do contorno desse problema é prescrita com $\phi = 1$.

No presente trabalho, a única modificação feita com relação ao *benchmarking* é a malha, a qual é não estruturada e composta de 8170 pontos e 38782 tetraedros lineares. A Figura 26 mostra o resultado da reprodução desse algoritmo.

Figura 26 – Posição da esfera (isovalores da função *Level Set*) ao longo do tempo



Fonte: Próprio Autor

Pela comparação qualitativa entre a Figura 25 e Figura 26 nota-se que o algoritmo do método *Level Set* modificado implementado segue a mesma tendência mostrada por Grave, Camata e Coutinho (2019). Entretanto, observa-se que o programa de captura

implementado mostra que além da esfera movimentar-se pelo domínio, a mesma muda seu tamanho ao longo do tempo e mostra uma superfície rugosa. Isso deve-se ao fato de o presente estudo não possuir um refinamento de malha adaptativo, tal como o trabalho de Grave, Camata e Coutinho (2019). Ou seja, em Grave, Camata e Coutinho (2019) os autores fazem com que o contorno da bolha esteja sempre refinado. Mas o intuito do presente estudo é justamente aplicar o rastreamento de fronteira com o menor custo computacional possível; objetivo esse que foi atingido.

6. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Uma das formas de simular a dinâmica de crescimento de uma bolha de vapor é através da solução da equação de velocidade da interface; obtida com base nos fenômenos que ocorrem na ebulição. Seguindo Lesage, Cotton e Robinson (2013), as equações do raio da bolha e da velocidade da fronteira são mostradas nas Equações (136) e (137):

$$R^*(\hat{t}) = \frac{1 + \left[\sqrt{3} \left(\sqrt{\hat{t}} - \sqrt{\hat{t} + \bar{\delta}_0^2} + \bar{\delta}_0 \right) + 1 \right]^2}{2 \left[\sqrt{3} \left(\sqrt{\hat{t}} - \sqrt{\hat{t} + \bar{\delta}_0^2} + \bar{\delta}_0 \right) + 1 \right]} \quad (136)$$

$$\frac{\partial R^*}{\partial \hat{t}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{\hat{t}}} - \frac{1}{\sqrt{\hat{t} + \bar{\delta}_0^2}} \right) \left\{ 1 - \frac{1}{\left[\sqrt{3} \left(\bar{\delta}_0 + \sqrt{\hat{t}} - \sqrt{\hat{t} + \bar{\delta}_0^2} \right) + 1 \right]^2} \right\} \quad (137)$$

De modo que $R^* = R(t) / R_0$ é o raio adimensional, o tempo adimensional é descrito por $\hat{t} = t / t_{ja}$, $t_{ja} = \frac{\pi}{\alpha} \left(\frac{r_c}{4Ja} \right)^2$, o número de Jakob $Ja = \frac{C_{pl} \rho_l (T_{wall} - T_{sat})}{\rho_v h_{lv}}$ e

$\bar{\delta}_0 = \frac{\delta_0}{\sqrt{\alpha \pi t_{ja} / 3}}$ e $\delta_0 = \sqrt{\alpha \pi t_w}$ é a espessura da camada de líquido superaquecido.

O tempo de espera nesse trabalho foi calculado baseando-se em Carey (1992), como mostra a Eq. (138):

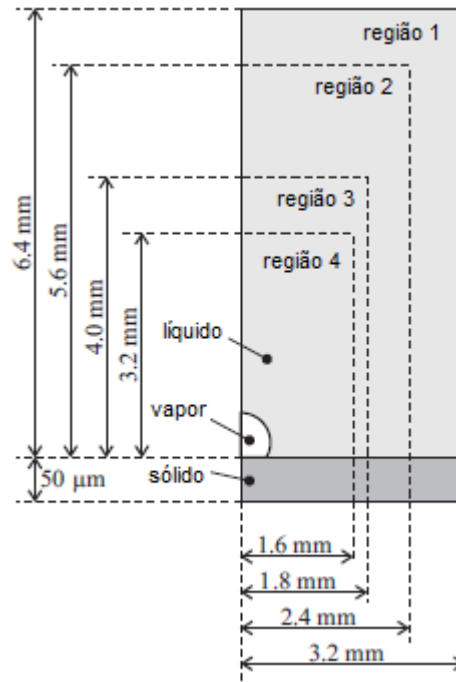
$$t_w = \frac{1}{4\alpha_l} \left\{ \frac{r_c}{\operatorname{erfc}^{-1} \left[\frac{T_{sat} - T_\infty}{T_{wall} - T_\infty} + \frac{2\sigma T_{sat} (\nu_v - \nu_l)}{(T_{wall} - T_\infty) h_{fg} r_c} \right]} \right\}^2 \quad (138)$$

A partir dos resultados das Equações (136) e (137) define-se o domínio onde a função *Level Set* vale -1 (domínio de vapor), 1 (domínio do líquido) e 0 (fronteira entre ambas as fases). Além disso, considera-se que dentro da bolha a temperatura e a pressão são a temperatura de superaquecimento e a pressão de saturação referente à temperatura de

superaquecimento. A velocidade no contorno da bolha é obtida como a primeira derivada do raio.

O domínio computacional, mostrado na Figura 27, foi adotado como sendo o mesmo domínio apresentado por Kunkelmann (2011).

Figura 27 – Domínio computacional sugerido por Kunkelmann (2011)



Fonte: Adaptado de Kunkelmann (2011)

Lesage, Cotton e Robinson (2013) deduzem a partir da Equação de Young-Laplace (que prevê a diferença entre as pressões interna e externa a uma bolha em função dos raios de curvatura e da tensão superficial), as Equações (139) à (141) de predição do formato teórico de uma bolha de vapor imersa em um líquido.

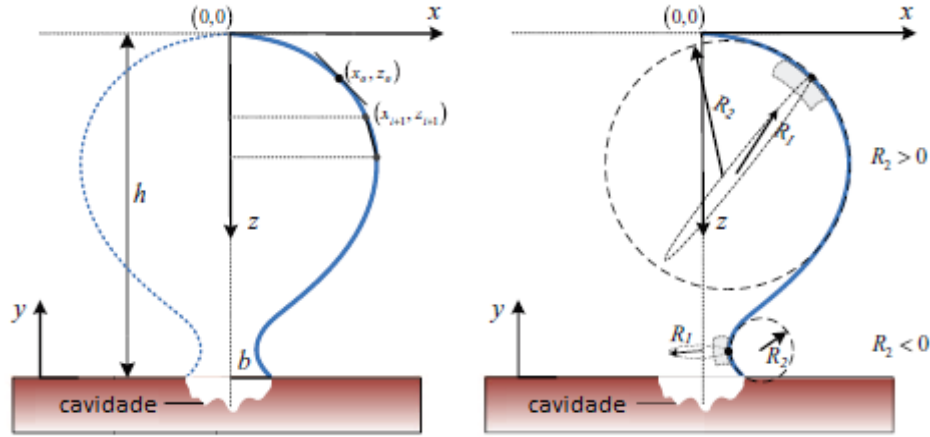
$$\frac{z^{**}}{(1+z^{**2})^{3/2}} + \frac{z^*}{x^*(1+z^{**2})^{1/2}} = \frac{2}{R_0} - Bo_{r_c} z^* \quad (139)$$

$$\frac{x^*}{x^*(1+x^{*2})^{1/2}} - \frac{x^{**}}{(1+x^{*2})^{3/2}} = \frac{2}{R_0} - Bo_{r_c} z^* \quad (140)$$

$$Bo_{r_c} = \frac{(\rho_l - \rho_g) g r_c^2}{\sigma} \quad (141)$$

sendo x^* e z^* as coordenadas adimensionalizadas ($x^* = x/R_0$), cuja origem e orientação estão na Figura 28; e Bo_{rc} é o número de Bond.

Figura 28 – Sistema de coordenadas definido por Lesage, Cotton e Robinson (2013) para definição do formato da bolha



Fonte: Adaptado de Lesage, Cotton e Robinson (2013)

Nota-se que os autores apresentam duas equações para determinação das coordenadas do formato da bolha, dado um determinado raio R : Equações (139) e (140). De acordo com Lesage, Cotton e Robinson (2013), deve-se resolver a Equação (139) até o ponto (x_0, z_0) , no qual a derivada z' seja igual à unidade. Depois, usa-se o ponto (x_0, z_0) como condição inicial para a Equação (140).

A condição de parada da Equação (140) é quando z atinge a altura h da bolha. Em Lesage e Marois (2013) e Lesage *et al.* (2014) os autores fornecem expressões para o cálculo dessa altura final, as quais são mostradas nas Equações (142) à (147).

As condições iniciais para a Eq. (139) são: $z_{(0)} = z'_{(0)} = 0$.

$$h = R + s + h_{\text{pescoço}} \quad (142)$$

$$s = \sqrt{R^2 - r_c^2} \quad (143)$$

$$h_{\text{pescoço}} = h_{\text{pescoço}}^* R_0 \quad (144)$$

$$h_{\text{pescoço}}^* = h_d^* \left(\frac{\hat{t}}{\hat{t}_d} \right)^{R_d^*} \quad (145)$$

$$h_d^* = 3,042 Bo_{rc}^{-0,309} - 0,101 Bo_{rc}^{0,9} \quad (146)$$

$$R_d^* = 0,805 Bo_{r_c}^{-0,309} - 0,149 Bo_{r_c}^{0,9} \quad (147)$$

É importante notar que em Lesage, Cotton e Robinson (2013) considera-se a hipótese de que a base da bolha estará sempre fixada nas extremidades da cavidade na qual ela nucleou.

De acordo com Sato e Niceno (2017), o passo de tempo mínimo ($\Delta t_{\min}$) que deve ser usado em simulações de ebulição nucleada é dado pela expressão:

$$\Delta t_{\min} = \min \left[C_{CFL} \frac{\Delta x}{|\vec{u}_{\max}|}; C_{st} \left(\frac{\bar{\rho} \Delta x^3}{2\pi\sigma} \right)^{1/2} \right] \quad (148)$$

De modo que $\vec{u}_{\max}$ é a velocidade máxima da malha; Δx é a menor distância entre malhas; $C_{CFL} = 0,25$ e $C_{st} = \left(\frac{\bar{\rho} \Delta x^3}{2\pi\sigma} \right)^{1/2}$. E $\bar{\rho}$ é uma média das densidades, ou seja,

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_l + \rho_v}{2}.$$

As condições de contorno para o problema são:

Na parede $z=0$

$$\begin{cases} u(x, y, 0, t) = v(x, y, 0, t) = w(x, y, 0, t) = 0 \\ T(x, y, 0, t) = T_s \\ P(x, y, 0, t) = P_{sat}(T_s) \\ \nabla \phi \cdot \vec{n}_s = \cos \psi \end{cases}$$

Na parede $z=6,4 \times 10^{-3}$

$$\begin{cases} u(x, y, 6,4 \times 10^{-3}, t) = v(x, y, 6,4 \times 10^{-3}, t) = w(x, y, 6,4 \times 10^{-3}, t) = 0 \\ T(x, y, 6,4 \times 10^{-3}, t) = T_\infty \\ P(x, y, 6,4 \times 10^{-3}, t) = P_{sat}(T_\infty) \\ \nabla \phi = 0 \end{cases}$$

Na parede $y=-1.6 \times 10^{-3}$

$$\begin{cases} u(x, -1.6 \times 10^{-3}, z, t) = v(x, -1.6 \times 10^{-3}, z, t) = w(x, -1.6 \times 10^{-3}, z, t) = 0 \\ T(x, -1.6 \times 10^{-3}, z, t) = T_{\infty} \\ P(x, -1.6 \times 10^{-3}, z, t) = P_{sat}(T_{\infty}) \\ \nabla \phi = 0 \end{cases}$$

Na parede $y=1.6 \times 10^{-3}$

$$\begin{cases} u(x, 1.6 \times 10^{-3}, z, t) = v(x, 1.6 \times 10^{-3}, z, t) = w(x, 1.6 \times 10^{-3}, z, t) = 0 \\ T(x, 1.6 \times 10^{-3}, z, t) = T_{\infty} \\ P(x, 1.6 \times 10^{-3}, z, t) = P_{sat}(T_{\infty}) \\ \nabla \phi = 0 \end{cases}$$

Na parede $x=-1.6 \times 10^{-3}$

$$\begin{cases} u(-1.6 \times 10^{-3}, y, z, t) = v(-1.6 \times 10^{-3}, y, z, t) = w(-1.6 \times 10^{-3}, y, z, t) = 0 \\ T(-1.6 \times 10^{-3}, y, z, t) = T_{\infty} \\ P(-1.6 \times 10^{-3}, y, z, t) = P_{sat}(T_{\infty}) \\ \nabla \phi = 0 \end{cases}$$

Na parede $x=1.6 \times 10^{-3}$

$$\begin{cases} u(1.6 \times 10^{-3}, y, z, t) = v(1.6 \times 10^{-3}, y, z, t) = w(1.6 \times 10^{-3}, y, z, t) = 0 \\ T(1.6 \times 10^{-3}, y, z, t) = T_{\infty} \\ P(1.6 \times 10^{-3}, y, z, t) = P_{sat}(T_{\infty}) \\ \nabla \phi = 0 \end{cases}$$

Já as condições iniciais para o escoamento são:

$$\begin{cases} u(x, y, z, 0) = v(x, y, z, 0) = w(x, y, z, 0) = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Para o fluido (fase líquida) fora da bolha} \\ T(x, y, z, 0) = T_{\infty} \\ P(x, y, z, 0) = P_{sat}(T_{\infty}) \\ \phi = 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Para o fluido (fase gasosa) dentro da bolha} \\ T(x, y, z, 0) = T_s \\ P(x, y, z, 0) = P_{sat}(T_s) \\ \phi = -1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Na superfície } z=z_{inf} \\ T(x, y, z, 0) = T_s \\ P(x, y, z, 0) = P_{sat}(T_s) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{Para os pontos pertencente à interface líquido/vapor} \\ \phi = 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

Já o raio inicial da bolha de vapor simulada foi considerado igual ao raio da cavidade, r_c . O raio da cavidade, por sua vez, pode ser calculado a partir da correlação empírica de Hsu, como apresentado em Carey (1992):

$$\left\{ \begin{matrix} r_{c,\max} \\ r_{c,\min} \end{matrix} \right\} = \frac{\delta_t}{4} \left[1 - \frac{\theta_{sat}}{\theta_w} \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\} \sqrt{\left(1 - \frac{\theta_{sat}}{\theta_w} \right)^2 - \frac{12,8\sigma T_{sat}(P_l)}{\rho_v h_{lv} \delta_t \theta_w}} \right] \quad (149)$$

sendo δ_t a espessura da camada limite térmica, a qual pode ser estimada pela Equação (150); e $\theta = T - T_\infty$.

$$\delta_t \approx \frac{k_l}{h} \quad (150)$$

sendo k_l a condutividade térmica do fluido de trabalho e h o coeficiente de transferência de calor por convecção. A estimativa do coeficiente de transferência de calor por ebulição também pode ser obtida a partir de dados experimentais.

Com a finalidade de comparação com dados experimentais do grupo de pesquisa *Nest-n* (PASCHOAL *et al.*, 2019), simulou-se o fluido HFE-7100 sob um fluxo de 14,66 kW/m² e um grau de superaquecimento de 14,39K. As propriedades do HFE-7100 (3M Novec®) foram consideradas à temperatura de saturação de 333,15K e uma pressão de saturação de 98 kPa:

- $C_{p_l} = 1156 J / kg.K$ (propriedade retirada do catálogo do fluido refrigerante)
- $Pr = 11,25$
- $h_{lv} = 111854 J / kg$ (propriedade retirada do software EES v6.345)
- $\rho_l = 1375 kg / m^3$ (propriedade retirada de RAUSCH *et al.* (2015))
- $\rho_v = 9,394 kg / m^3$ (propriedade retirada de RAUSCH *et al.* (2015))
- $\sigma = 1,36 \times 10^{-2} N / m$ (propriedade retirada de RAUSCH *et al.* (2015))
- $\mu_l = 5,8 \times 10^{-4} kg / m.s$ (propriedade retirada de RAUSCH *et al.* (2015))
- $k_l = 0,06218 W / m.K$ (propriedade retirada do catálogo do fluido refrigerante)

- $\alpha_l = 3,91 \times 10^{-8} \text{ m}^2 / \text{s}$ (propriedade retirada do catálogo do fluido refrigerante)

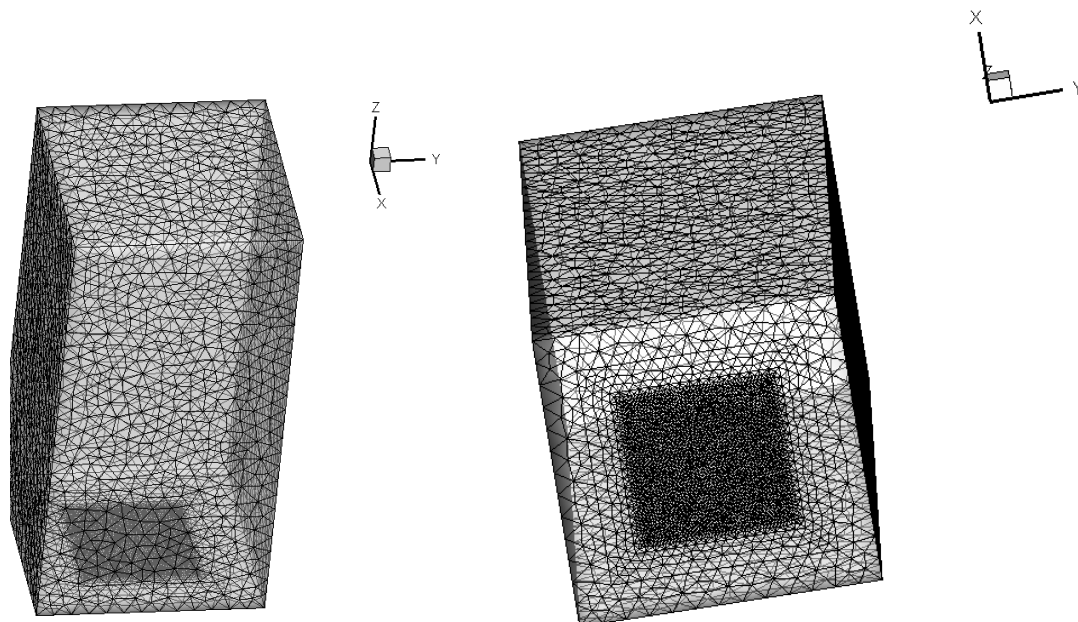
Resultados numéricos para a água saturada à 99°C com uma superfície 8°C superaquecida em relação ao fluido também serão comparados com dados presentes na literatura. As propriedades da água sob essas condições estão listadas abaixo:

- $C_{p_l} = 4,213 \text{ kJ} / \text{kg.K}$
- $C_{p_v} = 2,029 \text{ kJ} / \text{kg.K}$
- $h_{lv} = 2259 \text{ kJ} / \text{kg}$
- $\rho_l = 959,2 \text{ kg} / \text{m}^3$
- $\rho_v = 0,5778 \text{ kg} / \text{m}^3$
- $\sigma = 5,91 \times 10^{-2} \text{ N} / \text{m}$
- $\mu_l = 2,849 \times 10^{-4} \text{ kg} / \text{m.s}$
- $\mu_v = 1,223 \times 10^{-5} \text{ kg} / \text{m.s}$
- $k_l = 0,6789 \text{ W} / \text{m.K}$
- $k_v = 0,0248 \text{ W} / \text{m.K}$
- $\alpha_l = 3,91 \times 10^{-7} \text{ m}^2 / \text{s}$
- $\alpha_v = 2,191 \times 10^{-5} \text{ m}^2 / \text{s}$

Deve-se ressaltar que essas propriedades foram retiradas do software EES v6.345.

O tamanho do raio inicial R_0 foi retirado dos dados experimentais e o raio da cavidade foi considerado igual ao raio R_0 . O tempo de parada da simulação também foi coletado dos dados experimentais. A malha computacional usada, mostrada na Figura 29, para essa simulação possui 40010 nós e 197791 elementos tetraédricos lineares e é não estruturada.

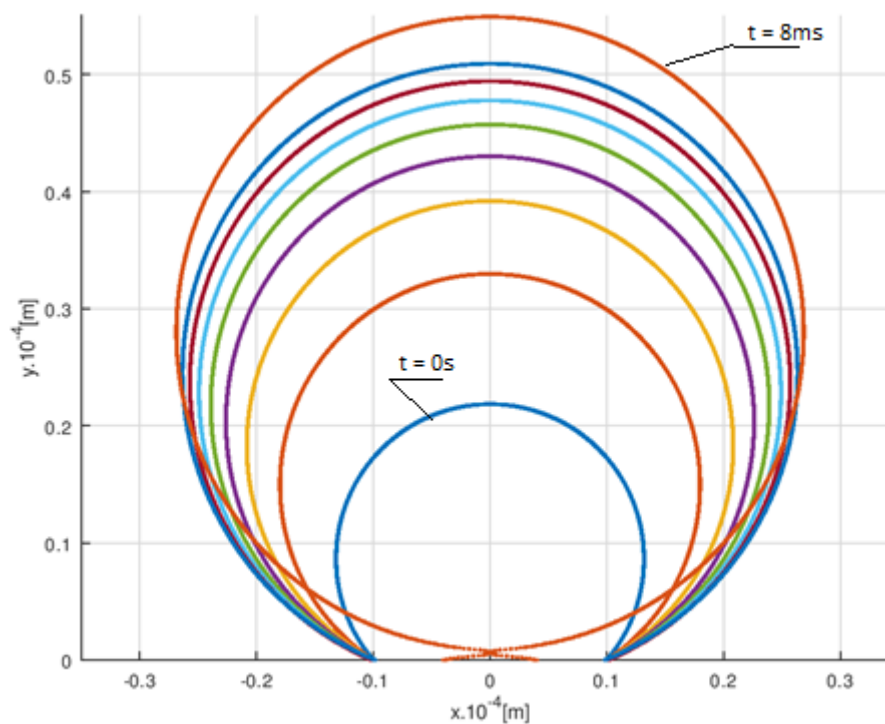
Figura 29 – Diferentes vistas da malha computacional não estruturada de 40010 nós e 197791 elementos tetraédricos lineares usada para discretização do domínio do problema de ebulição nucleada



Fonte: Próprio Autor.

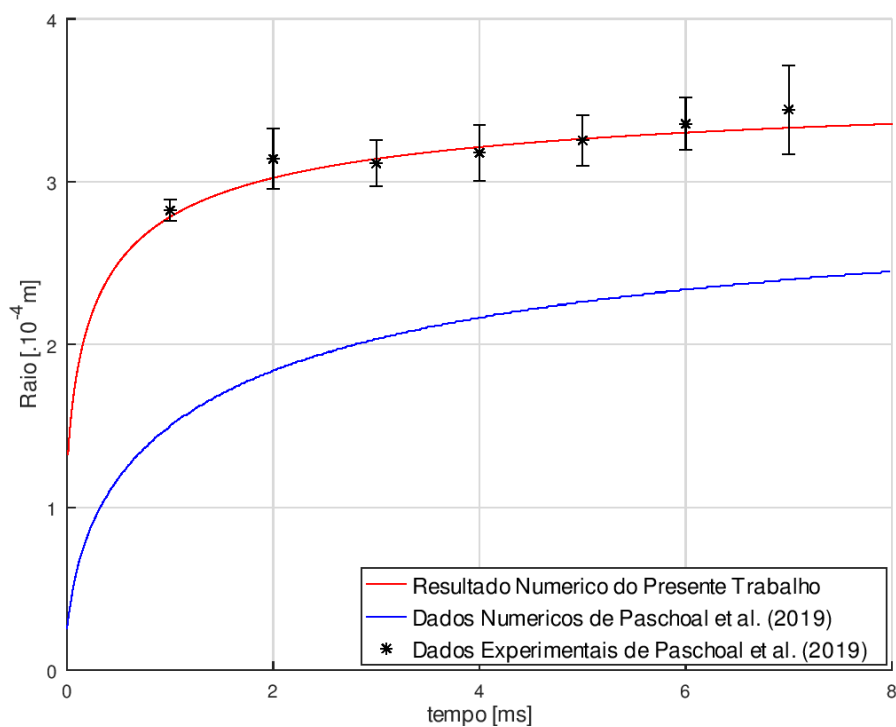
A Figura 30 mostra o formato da bolha em vários instantes de tempo, enquanto a Figura 31 mostra a comparação do raio obtido numericamente pela Equação (136) com os dados (experimental e numérico) de Paschoal *et al.* (2019) considerando o HFE-7100 como fluido de trabalho nas condições citadas anteriormente nesse item.

Figura 30 – Formato da bolha para vários instantes de tempo para o caso descrito no item 6 tendo HFE-7100 como fluido de trabalho



Fonte: Próprio Autor

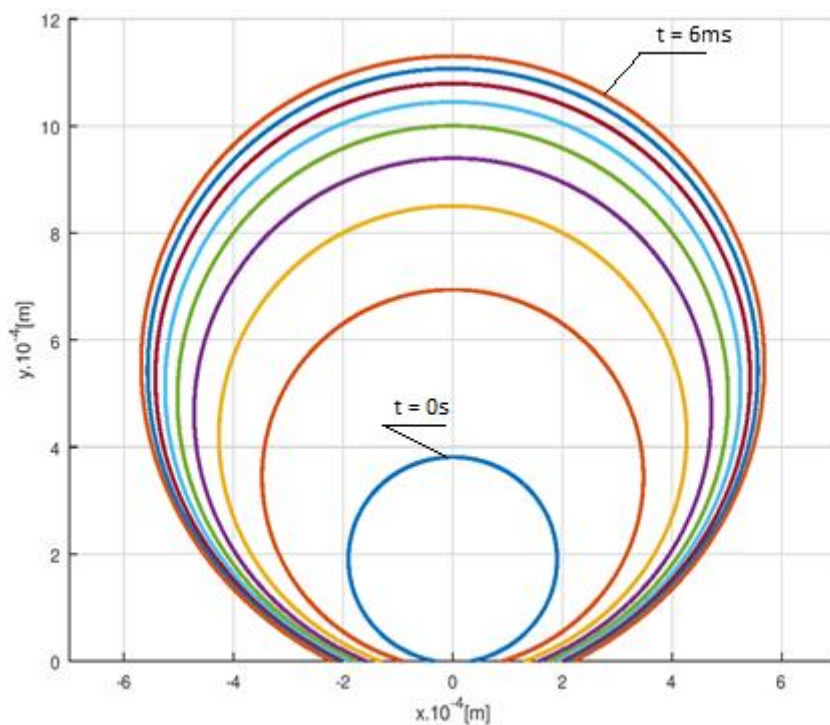
Figura 31 – Comparação entre os dados experimentais e os resultados numéricos para o caso descrito no item 6 tendo HFE-7100 como fluido de trabalho



Fonte: Próprio Autor

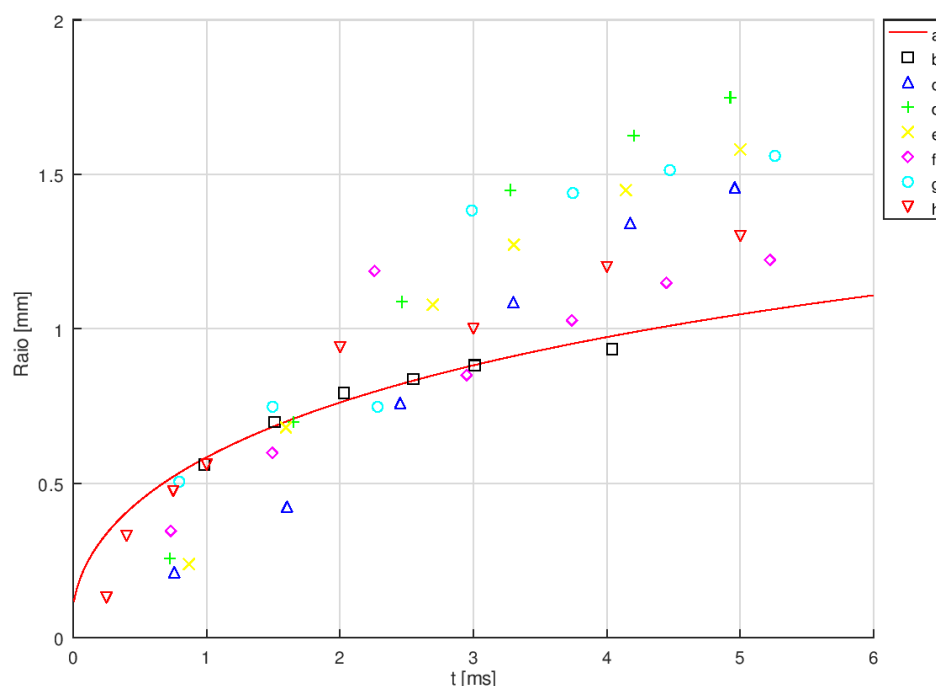
Já a Figura 32 mostra a forma da bolha de vapor ao longo do tempo de simulação. A Figura 33, por sua vez, mostra comparação dos valores de raio calculados numérica e experimentalmente com dados da literatura considerando como fluido refrigerante a água nas condições prescritas, anteriormente.

Figura 32 – Formato da bolha para vários instantes de tempo para o caso descrito no item 6 tendo água como fluido de trabalho



Fonte: Próprio Autor

Figura 33 – Comparação entre: (a) dados numéricos do presente trabalho, (b) Cheng, Guo e Peng (2019), (c) Staniszewski (1959) No.1, (d) Staniszewski (1959) No.2, (e) Staniszewski (1959) No.3, (f) Staniszewski (1959) No.4, (g) Staniszewski (1959) No.5, (h) Yabuki & Nakabeppu (2014).



Fonte: Próprio Autor

Pela Figura 30 e 32 nota-se que tanto para a água quanto para o HFE-7100 que ambas as bolhas mostraram um formato esférico ao longo do tempo. De acordo com Patil (1991) e Pastuszko (2012), em regime de ebulição nucleada (ebulição sobre baixos fluxos de calor) a bolha cresce e parte com formato esférico. Assim, observa-se que qualitativamente o resultado concorda com a literatura. Entretanto, para que se possa afirmar que o formato condiz com o formato real de bolhas de vapor durante a ebulição, faz-se necessário a comparação do perfil numérico com perfis experimentais.

Com relação à comparação qualitativa da Figura 31, observa-se que o maior erro médio absoluto entre os resultados experimentais é de 1%; enquanto o erro médio absoluto observado para os dados da Figura 33 foi de 24,4%. Esse erro menor que 30% da simulação com relação aos dados experimentais mostra que a Equação (134) pode ser usada para estimativa do raio da bolha de vapor de um líquido em regime de ebulição nucleada. Em outras palavras, para programas em que o rastreo da fronteira é feito somente com a solução da equação do método de captura e das equações fluidodinâmicas

e térmica, o cálculo do raio pela Equação (134) pode ser usada como uma aproximação inicial para a posição da interface líquido/vapor. Isso é útil para diminuir o tempo de processamento do algoritmo e aumentar a taxa de convergência do método de captura.

Além do software desenvolvido ter apresentado similitude com dados experimentais e com dados da literatura, observou-se também convergência nas soluções de todas as equações e que as equações fluidodinâmicas e térmica se mostraram estáveis para o acoplamento das mesmas com o método de captura de fronteira e com a Equação (134). Isso foi constatado quando observado o erro da solução do método de Gradientes Biconjugados, o qual sempre retornava em menos de cinco iterações a solução com um erro entre iterações menor do que 10^{-7} .

Como dito anteriormente, verificou-se qualitativamente a validade da equação de Young-Laplace para dedução do formato de bolhas de vapor em regime de ebulição nucleada. A mesma equação foi testada por Lesage, Cotton e Robinson (2013) para determinação do formato de bolhas de vapor formadas por injeção de ar em um domínio líquido. Entretanto, foi testado também as Equações (139) e (140) no algoritmo de ebulição nucleada, mas com as condições experimentais de Lesage, Cotton e Robinson (2013), apresentados na Figura 34. Vale ressaltar que as condições experimentais de Lesage, Cotton e Robinson (2013) não são referentes a um processo de ebulição, mas sim da injeção de ar em um domínio líquido. Mas tal comparação foi feita para verificar o comportamento do algoritmo desenvolvido sobre essas condições.

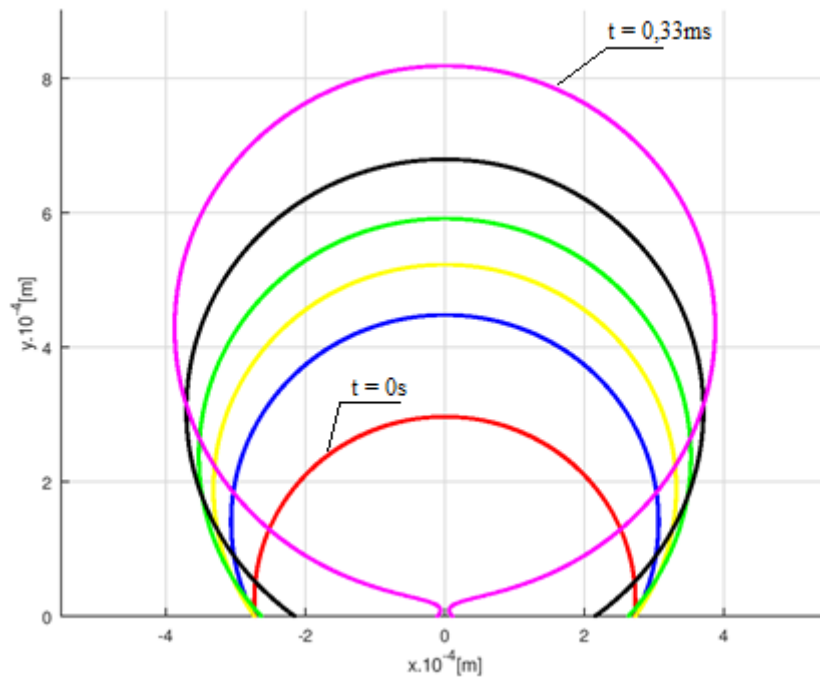
Figura 34 – Crescimento observado de uma bolha de gás injetado em meio líquido



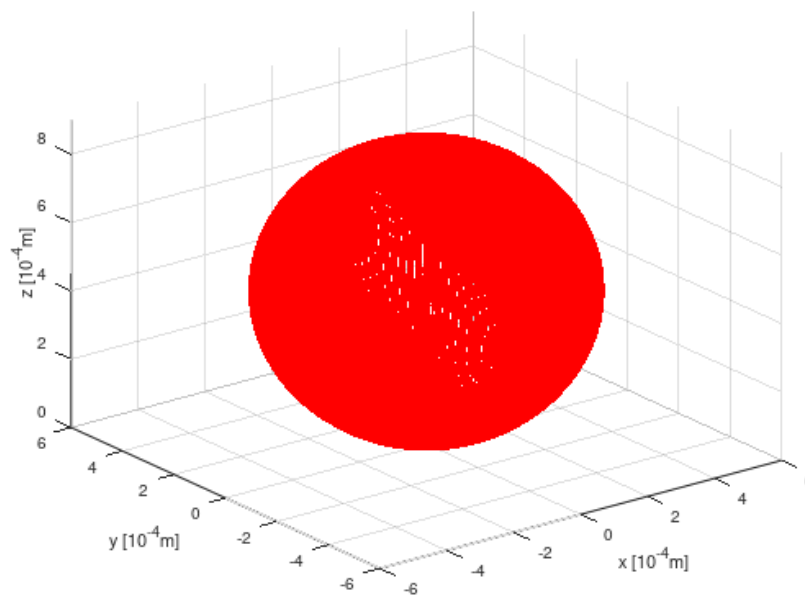
Fonte: Lesage, Cotton e Robinson (2013)

Na Figura 34, b representa o raio da cavidade em milímetro na qual a bolha de gás está sendo injetada. Aplicando as condições da Figura 34 no algoritmo de ebulição nucleada desenvolvido, verificou-se primeiramente que o tempo de simulação precisaria ser reduzido, pois o processo de crescimento de uma bolha de vapor em regime de ebulição nucleada está na ordem de 10^{-3} s. Aplicar tempos muito maiores, como os da Figura 34, levam à resultados irreais. Assim, simulou-se o problema não de 0 a 0.2 segundos, mas sim de 0 a 0.2ms. As Figuras 35 a 37 mostram os perfis de bolha obtidos em função do tempo, segundo as condições da Figura 34.

Figura 35 – Perfil do crescimento de uma bolha de vapor de 0 a 0,33 ms para $r_c = 0,2715\text{mm}$ e $Bo_{r_c} = 0,0099$. e (b) Perfil 3D da bolha de vapor na condição de partida



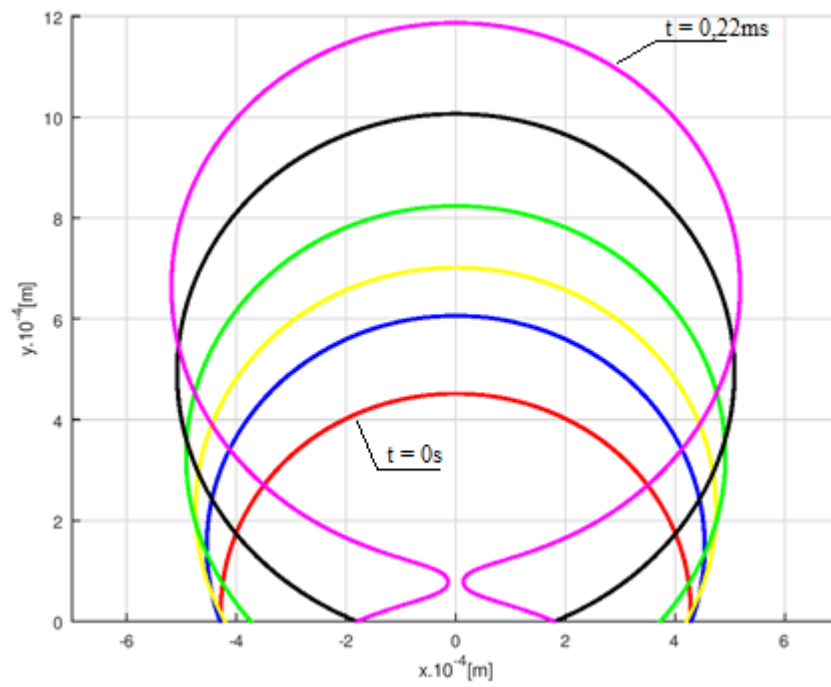
(a)



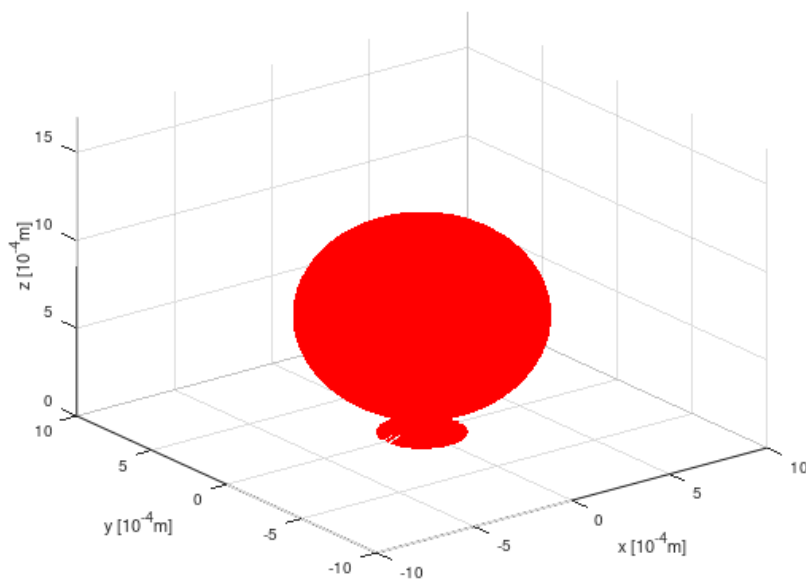
(b)

Fonte: Próprio Autor

Figura 36 – (a) Perfil do crescimento de uma bolha de vapor de 0 a 0,2 ms para $r_c = 0,4265\text{mm}$ e $Bo_{r_c} = 0,0244$. (b) Perfil 3D da bolha de vapor na condição de partida.



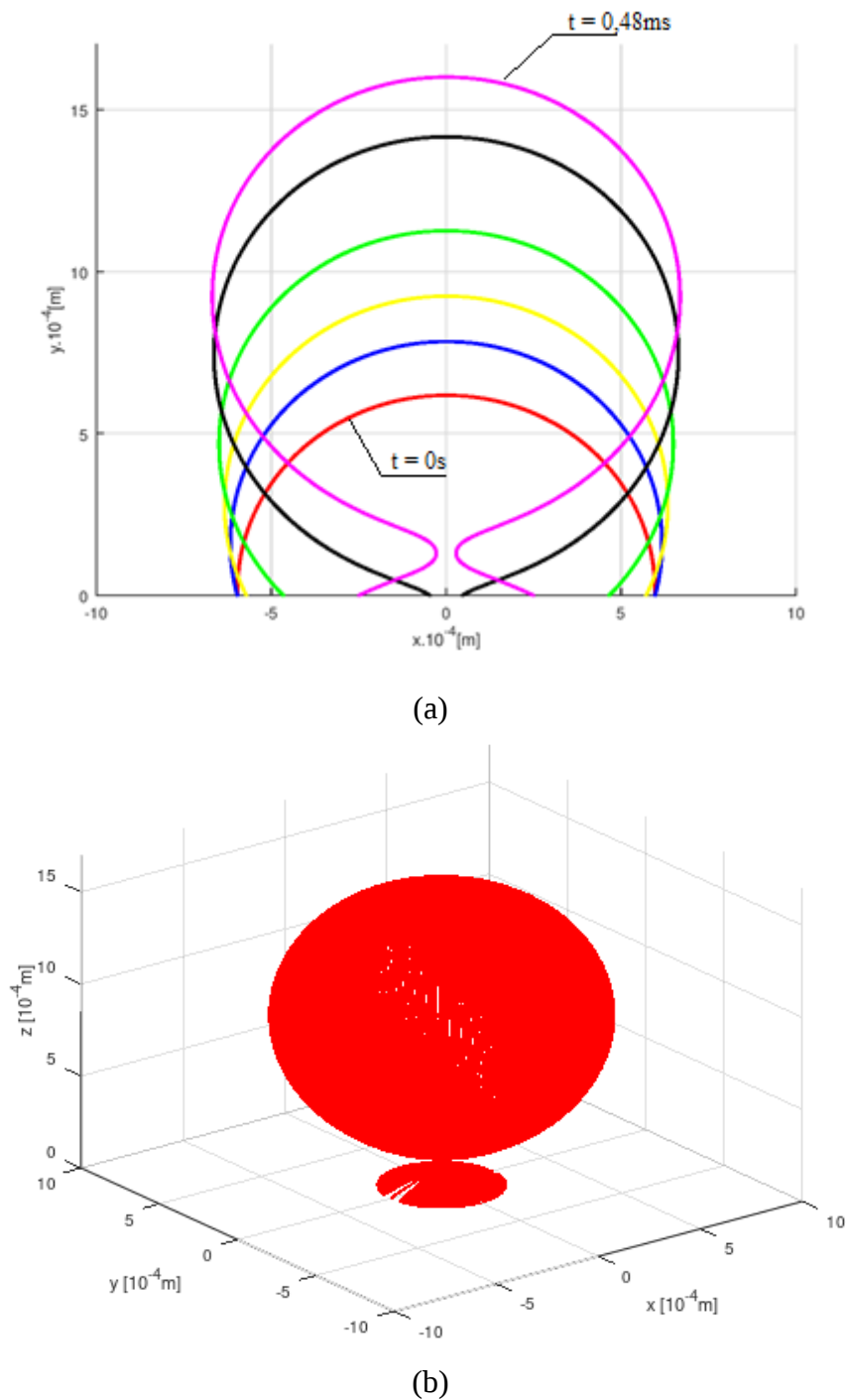
(a)



(b)

Fonte: Próprio Autor

Figura 37 – Perfil do crescimento de uma bolha de vapor de 0 a 0,48 ms para $r_c = 0,5925\text{mm}$ e $Bo_{r_c} = 0,0470$. e (b) Perfil 3D da bolha de vapor na condição de partida



Fonte: Próprio Autor

Observa-se que em todos os casos simulados, as bolhas permanecem esféricas ao longo do seu crescimento, o que é previsto pela literatura quando observado o fenômeno de crescimento de uma bolha de vapor em regime de ebulição nucleada.

Por observação também da Figura 35, Figura 36 e Figura 37 observa-se que à medida que o raio da cavidade e, conseqüentemente, número de Bond aumenta, aumenta-se também o diâmetro de partida da bolha de vapor. Da Equação (141) verifica-se que a definição do número de Bond é uma razão entre as forças de empuxo e as forças adesivas da bolha à parede aquecida. A força de empuxo por sua vez possui uma relação de proporcionalidade com o volume ocupado pelo corpo imerso no fluido. No caso da ebulição, a bolha de vapor que está envolta pelo líquido refrigerante mantém um formato praticamente esférico durante seu crescimento. Sendo a bolha de vapor esférica, aumentar o volume da mesma é o mesmo que aumentar seu diâmetro. Assim, como constatado pelos resultados, aumentar o número de Bond, implica em aumentar o diâmetro de partida da bolha de vapor.

7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

7.1. Conclusões

Neste trabalho foi simulado o problema da cavidade com convecção forçada e natural para validar o código de simulação de escoamentos com baixos números de Reynolds. Pelas simulações pôde-se constatar que o tipo de malha não influenciou muito sobre os resultados. Além disso, mostrou-se que calcular o campo de pressão por diferentes técnicas vão gerar campos de velocidade e temperatura similares.

Validou-se também o algoritmo de captura de fronteira pelo método *Level Set* Modificado. Pelos resultados, conclui-se que o método é simples de ser implementado e gera resultados com baixo custo computacional. Entretanto, pela comparação com a literatura, observa-se que utilizar métodos de captura de fronteira são computacionalmente menos custosos, mas não tem a acuracidade de métodos de rastreamento de fronteira.

Por fim, simulou-se um problema de ebulição nucleada com o acoplamento dos códigos de simulação fluidodinâmica e térmica com o método de captura de fronteira. Com a equação para cálculo do raio do crescimento de bolhas em regime de ebulição nucleada, constata-se que a mesma pode ser usada para predição de resultados experimentais e pode ser usada como aproximação de raios de simulações numéricas.

7.2. Sugestões para Trabalhos Futuros

O *software* desenvolvido possui alguns tópicos para torná-lo mais completo:

- Submeter o algoritmo de rastreamento de fronteira à outros testes;
- Implementar turbulência;
- Melhorar o código em questão de banco de dados para que o mesmo trabalhe com qualquer tipo de malha, estruturada ou não, mista ou não;
- Para a parte de mudança de fase, implementar código capaz de calcular e rastrear o crescimento da fase secundária, sem nenhuma correlação externa, ou seja, somente com as equações de continuidade, momento e energia;
- Implementar as equações governantes nos sistemas curvilíneos de coordenadas.

REFERÊNCIAS

- ABARAJITH, H. S.; DHIR, V. K. Effect of Contact Angle on the Dynamics of a Single Bubble During Pool Boiling Using Numerical Simulations. **Proceedings of IMECE2002 ASME International Mechanical Engineering Congress & Exposition**, New Orleans, LA, 2002, p. 467–475.
- ABFALLAH, S. Numerical Solutions for the Pressure Poisson Equation with Neumann Boundary Conditions Using a Non-staggered Grid, I. **Journal of Computational Physics** **70**, [s. l.], 1987.
- AKTINOL, E.; DHIR, V. K. Numerical Simulation of the Effect of Contact Angle on the Thermal Response of the Solid during Nucleate Pool Boiling. **Interfacial Phenomena and Heat Transfer**, [s. l.], p. 301–324, 2014.
- AKTINOL, E.; DHIR, V. K.; JAEGER, T.; MIRCZAK, W. Numerical simulations of nucleate boiling and film condensation heat transfer in a fixed-volume chamber in microgravity. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, [s. l.], v. 132, p. 889–905, 2019.
- ALBADAWI, A. *et al.* Influence of surface tension implementation in Volume of Fluid and coupled Volume of Fluid with Level Set methods for bubble growth and detachment. **International Journal of Multiphase Flow**, [s. l.], v. 53, 2017, p. 11–28.
- ALBADAWI, A. *et al.* Numerical investigation of volume of fluid and level set interface capturing methods for bubble growth and detachment. **Journal of Physics Conference Series**, [s. l.], 2012.
- ALHENDAL, Y.; Turan, A.; Hollingsworth, P. Thermocapillary simulation of single bubble dynamics in zero gravity. **Elsevier**, [s. l.], pg. 08-115, 2013.
- ARIS, R. Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanic. **Dover Publications, Inc**, [S. l.: s. n.], New York, 1962.
- ASPERITAS. "Whitepaper Immersed Computing". Disponível em <www.asperitas.com>. Dezembro de 2017.
- BAGGIO, G. A. P. **Solução das equações de Navier-Stokes e equação de transporte por um método de elementos finitos estabilizado pela técnica de separação baseada na característica**. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia -UNESP, Câmpus de Ilha Solteira, Ilha Solteira – SP, 2015.
- BAGGIO, G.A.P.; SILVA, J. B. C. Tridimensional Flow Simulation with Finite Elements Stabilized by CBS Scheme. **Proceedings of the XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**, ABMEC, Brasília, DF, Brazil, November, p. 6-9, 2016.
- BAKI, T.; SAHEL, D. Effet de l'Angle d'Orientation sur le Glissement d'une Bulle. **Journées Internationales de Thermique (JITH)**, 2017.
- BEJAN, A. Heat Transfer Textbook. **John Wiley & Sons**, 1993.

CAI, Z.; He, C.; Zhang, S. Discontinuous Finite Element Methods for Interface Problems: Robust A Priori And A Posteriori Error Estimates. **Siam J. Numer. Anal.** V. 55, No. 1, p. 400–418, 2017.

CAREY, V. Liquid–Vapor Phase-Change Phenomena. **Hemisphere Publishing Corporation**, [S. l.: s. n.], Washington DC, 1992.

CHENG, N.; GUO, Y.; PENG, C. A simulation of bubble growth on heating surface in subcooled boiling water based on the heat flows derived by experiment. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, 2019.

CHENG, P.; ZHANG, C.; GONG, S. Lattice Boltzmann Simulations of Macro/Microscale Effects on Satu-rated Pool Boiling Curves for Heated Horizontal Surfaces. **Journal of Heat Transfer**, [s. l.], 2017.

COLIN, C. *et al.* Nucleate Pool Boiling in Microgravity: Recent Progress and Future Prospects, C. R. Mecanique , <http://dx.doi.org/10.1016/j.crme.2016.10.004> Conjugate gradients, method of. G.D. Kim (originator), Encyclopedia of Mathematics. URL:http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Conjugate_gradients,_method_of&oldid=15751. Acessado em 13/06/2019, 2016.

COUPEZ, T. Reinitialisation convective et locale des fonctions Level Set pour le mouvement de surfaces et d’interfaces. **Journes Activits Universitaires et Mecanique**, La Rochelle, France, 2006.

CUBEDDU, A.; RAUH, C.; ULRICH, V. Simulations of bubble growth and interaction in high viscous fluids using the lattice Boltzmann method. **International Journal of Multiphase Flow**, [s. l.], v. 93, 2017, p. 108-114.

CUI, Y. *et al.* The numerical modeling of the vapor bubble growth on the silicon substrate inside the flat plate heat pipe. **International Journal of Heat Transfer**, [s. l.], v. 47, 2020,

DAMIÁN, S. M. **An Extended Mixture Model for the Simultaneous Treatment of Short and Long Scale Interfaces**. 2013. 231 f. Tesis de Doctorado - Curso de Ingenieria Mecánica Computacional, Facultad de Ingeniera y Ciencias Hídricas, Santa Fe, Argentina, 2013.

DHATT, G.; TOUZOUT, G; LEFRANÇOIS, E. Finite Element Method. Londres: **John Wiley & Sons, Inc.**, 2012.

DHIR, V. K. Mechanistic Prediction of Nucleate Boiling Heat Transfer - Achievable or a Hopeless Task? **ASME J. Heat Transfer**, [s. l.], v. 128(1), p. 1–12, 2006.

DING, S.T.; LUO, B.; LI, G. A volume of fluid-based method for vapor-liquid phase change simulation with numerical oscillation suppression. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, [s. l.], v. 110, 2017, p. 348–359.

EL-GENK; M. S. Bubbles Transient Growth in Saturation Boiling of PF-5060 Dielectric Liquid on Dimpled Cu Surfaces - Scientific Figure on ResearchGate. Disponível em:

https://www.researchgate.net/figure/illustrations-depicting-nucleation-and-growth-of-vapor-embryos-on-the-inside-surface-of-a_fig7_288887890 [acesso em fevereiro, 2020].

FANG, W.-Z.; CHEN, L.; KANG, Q.-J.; TAO, W.-Q. Lattice Boltzmann modeling of pool boiling with large liquid-gas density ratio. **International Journal of Thermal Sciences**, [s. l.], v. 114, 2017, p. 172-183.

FINLAYSON, A. B. The Method of Weighted Residuals and Variational Principles: with application in fluid mechanics, heat and mass transfer. **Academic Press**, United States of America, [S. l.: s. n.], 1972.

FORD AEROSPACE & COMMUNICATIONS CORPORATION (United States). Douglas B. Osborn; Robert L. Pons. So-lar power converter with pool boiling receiver and integral heat exchanger. US nº US 4335578 A, 30 maio 1980, 22 jun. 1982.
Frit, W. Maximum volume of vapor bubbles, **Physik Zeitschr.**, vol. 36, no. 11, p. 379–384, 1935.

GIBOU, F.; FEDKIW, R.; OSHER, S. A review of level-set methods and some recent applications. **Journal of Computational Physics**, [s. l.], v. 353, 2018, p. 82–109.

GONG, S.; CHENG, P. Lattice Boltzmann simulations for surface wettability effects in saturated pool boiling heat transfer. **International Journal Heat and Mass Transfer**, v. 85, 2015, p. 635-646.

GRAVE, M.; CAMATA, J. J.; COUTINHO, A. L. G. A. Implementation on the Convected Level-Set Method with Adaptive Mesh Refinement Using LibMesh. **Proceedings of the XL Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**, ABMEC. Natal/RN, Brazil, November 11-14, 2019

HAN, C. Y.; GRIFFITH, P. The mechanism of heat transfer in nucleate pool boiling. **Int. J. Heat Mass Transfer**, [s. l.], v. 8, 1965, p. 887–914.

HENS, A.; BISWAS, G.; DE, S. Analysis of interfacial instability and multimode bubble formation in saturated boiling using coupled level set and volume-of-fluid approach. **Physics of Fluids**, 2014; DOI: 10.1063/1.4861760

HIRSCH C. Numerical Computation of Internal and External Flows, vol. 1. **Wiley**: New York, 1989.

HIRT, C. W.; NICHOLS, B. D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundary. **J. Comput. Phys**, [s. l.], 1981

JIANG, X.; ZHANG, R.; NIE, S. Image Segmentation Based on Level Set Method. International Conference on Medical Physics and Biomedical Engineering, [s. l.], 2012
Moes, N.; Stolz, C.; Bernard, P.-E.; Chevaugeon, N. A level set based model for damage growth: The thick level set approach. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s. l.], v. 86(3), p. 358 – 380, 2011

KAMEL, M. S. *et al.* Simulation of pool boiling of nanofluids by using Eulerian multiphase model. **Journal of Thermal Analysis and Calorimetry**, [s. l.], 2019

Keshavarzi, G.; Yeoh, G. H.; Barber, T. Comparison of the VOF and CLSVOF Methods in Interface Capturing of a Rising Bubble. **Journal of Computational Multiphase Flows**, [s. l.], 2012

KHARANGATE, C. R.; MUDAWAR, I. Review of computational studies on boiling and condensation. **International Journal of Heat and Mass Transfer**. [s. l.], v. 108, 2017, pp. 1164–1196.

KIM, J. Review of nucleate pool boiling heat transfer mechanisms. **International Journal of Multiphase Flow**, [s. l.], v.35, 1067–1076, 2009.

KOUTROMANOS, I.; MCCLURE, J.; ROY, C. Fundamentals of Finite Element Analysis. **John Wiley & Sons Ltd**, [S. l.: s. n.], 2018.

KUNKELMANN, C.; STEPHAN, P. Numerical simulation of the transient heat transfer during nucleate boiling of refrigerant HFE-7100. **International Journal of Refrigeration**, [s. l.], v. 33(7), 2010, pp. 1221-1228.

KUNKELMANN, C. **Numerical Modeling and Investigation of Boiling Phenomena**. 2011. 137 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia, Technische Universität Darmstadt, Darmstadt, 2011.

LEE, G. L.; LAW, M. C.; LEE, V.C.-G. Model development and simulation of nucleate pool boiling in OpenFOAM: Boiling physics in bulk liquid and roles of freeboard region. **International Journal of Thermal Science**, [s. l.], v. 140, 2019, p. 255-279.

LEE, R. C.; NYDAHL, J. E. Numerical Calculation of Bubble Growth in Nucleate Boiling from Inception to Departure. **ASME J. Heat Transfer**, [s. l.], v. 111(2), p. 474–479, 1989

LESAGE, F. J.; MAROIS, F. Experimental and numerical analysis of quasi-static bubble size and shape characteristics at detachment. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, [s. l.], v. 64, 2013, p. 53–69.

LESAGE, F. J.; COTTON, J. S.; ROBINSON, A. J. Analysis of quasi-static vapour bubble shape during growth and departure. **Phys. Fluids**, [s. l.], v. 25, 2013; <https://doi.org/10.1063/1.4809795>

LESAGE, F. J.; SIEDEL, S.; COTTON, J. S.; ROBINSON, A. J. A mathematical model for predicting bubble growth for low Bond and Jakob number nucleate boiling. **Chemical Engineering Science**, [s. l.], v. 112, 2014, p. 35–46.

LEWIS, R. W.; NITHIARASU, P.; SEETHARAMU, K. N. Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow. **John Wiley & Sons**, [S. l.: s. n.], Ltd ISBNs: 0-470-84788-3 (HB); 0-470-84789-1 (PB), 2004.

LI, B. Q. Computational Fluid and Solid Mechanics. **Springer-Verlag London Limited**, [s. l.], 2006.

LI, M.; BOLOTNOV, I. A. The evaporation and condensation model with interface tracking. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, [s. l.], v. 150, 2020.

LI, M.; ZENG, K., WONNELL, L.; BOLOTNOV, I. A. Development of a New Contact Angle Control Algorithm for Level-Set Method. **Journal of Fluids Engineering**, [s. l.], v. 141, 2019.

LING, K. *et al.* Three-dimensional volume of fluid & level set (VOSET) method for incompressible two-phase flow. **Computers & Fluids**, [s. l.], v. 118, 2015, p. 293–304.

LING, K.; LI, Z. Y. and TAO, W. Q. A Direct Numerical Simulation for Nucleate Boiling by the VOSET Method. **Numerical Heat Transfer, Part A**, [s. l.], v. 65: 949-971, 2014

LIU, C.-B. **The Characteristic Based Split (CBS) scheme for laminar and turbulent incompressible flow simulations**. 2005, Tese. University of Wales Swansea.

Liu, J.*et al.*, Numerical Simulation of Single Bubble Boiling Behavior. **Propulsion and Power Research**, [s. l.], 2017.

LIU, P. An efficient artificial compressibility (AC) scheme based on the characteristic based split (CBS) method for incompressible flows. *International Journal for Numerical Methods In Engineering*, [s. l.], v. 56. P. 1815-1845, 2003; (DOI: 10.1002/nme.712)

Lorenzinim, D.; Yogendra, K. J. Computational Fluid Dynamics Modeling of Flow Boiling in Microchannels With Nonuniform Heat Flux. **Journal of Heat and Mass Transfer**, [s. l.], v. 140, 2018.

MALAN, A. G.; LEWIS, R. W.; NITHIARASU, P. An improved unsteady, unstructured, artificial compressibility, finite volume scheme for viscous incompressible flows. **International Journal for Numerical Methods in Engineering Int. J. Numer. Meth. Eng.** [s. l.], v. 54, p. 695-714, 2002; (DOI: 10.1002/nme.447)

MAREKA, R.; STRAUBB, J. The origin of thermocapillary convection in subcooled nucleate pool boiling, **Inter-national Journal of Heat and Mass Transfer**, [s. l.], v. 44, p. 619-632, 2001.

MASSAROTTI, N., NITHIARASU, P.; ZIENKIEWICZ, O. "Characteristic-based-split (CBS) algorithm for incompressible flow problems with heat transfer", **International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow**, [s. l.], v. 8, no. 8, p. 969-990, 1998. <https://doi.org/10.1108/09615539810244067>

MAVRIPLIS, D. J. Mesh generation and adaptivity for complex geometries and flows. **Handbook of Computational Fluid Mechanics**, [s. l.], p. 417–459, 1996. doi:10.1016/b978-012553010-1/50008-6

MIKIC, B. B.; ROHSENHOW, W. M. A new correlation of pool boiling data including the effect of heating surface characteristics. **J. Heat Transfer**, [s. l.], v. 9, p. 245–250, 1969.

MOGHADDAM, S.; KIGE, K. Physical mechanisms of heat transfer during single bubble nucleate boiling of FC-72 under saturation conditions - I. Experimental

investigation. **Article in International Journal of Heat and Mass Transfer**, [s. l.] v. 52(5-6): p. 1284-1294, 2009.

MOORE, F. D.; MESLER, R. B. The Measurement of Rapid Surface Temperature Fluctuations during Nucleate Boiling of Water. **AIChE J.** 7, [s. l.], p. 620-624, 1961.

MORA, A. E. M. **Estudo numérico do transporte de bolhas/gotas em fluidos Newtonianos através das metodologias VOF e S-CLSVOF utilizando o OpenFOAM**. 2018. 125 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2018.

MORGAN, N. R.; WALTZ, I. J. 3D Level set methods for evolving fronts on tetrahedral meshes with adaptive mesh refinement. **Journal of Computational Physics**, [s. l.], 2017.

NATIONAL AERONAUTICS AND SPACE ADMINISTRATION (NASA) (Org.). Nucleate Pool Boiling experiment (NPBX) - 12.13.17. 2017. Disponível em: <https://www.nasa.gov/mission_pages/station/research/experiments/229.html>. Acesso em: 20 dez. 2017.

NITHIARASU, P. An efficient artificial compressibility (AC) scheme based on the characteristic based split (CBS) method for incompressible flows. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s. l.], v. 56(13), p. 1815–1845, 2003. doi:10.1002/nme.712.

NITHIARASU, P. CODINA, R.; ZIENKIEWICZ, O. C. The Characteristic-Based Split (CBS) scheme-a unified approach to fluid dynamics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s. l.], v.66, p. 1514-1546, 2006.

OSHER, S. and SETHIAN, J. Fronts Propagating with Curvature Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton–Jacobi Formulations, **J. Comput. Phys.** v.79, p. 12–49, 1988.

PASCHOAL, M. F. A.; CARDOSO, E. M.; SILVA, J. B. C. Numerical Simulation of a Single Bubble Dynamic in Nucleate Pool Boiling by using Finite Difference Method. In **XXXVIII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**, ABMEC, Florianópolis, SC, Brazil, November 5-8, 2017.

PASCHOAL, M. F. A.; CARDOSO, E. M.; SILVA, J. B. C. Numerical Study of a Single Bubble Dynamic in Nucleate Pool Boiling. In **24th ABCM International Congress of Mechanical Engineering** December 3-8, 2017.

PASCHOAL, M. F. A.; CARDOSO, E. M.; SILVA, J. B. C.; MANETTI, L. L. Numerical Simulation and Experimental Analysis for the Bubble Growth Radius. **10th International Conference on Multiphase Flow, ICMF 2019**, Rio de Janeiro, Brazil, May 19 – 24, 2019.

PASTUSZKO, R. Pool boiling for extended surfaces with narrow tunnels – Visualization and a simplified model. **Experimental Thermal and Fluid Science**, [s. l.], v. 38, p. 149–164, 2012

PATIL, R. K. **A numerical model for a bubble in nucleate pool boiling**, Tese, Iowa State University, 1991.

PONCE, R.; WOISKI, E. R.; SILVA, J. B. C.; CARDOSO, E. M. Parallel programming approach in fem applied to turbulent compressible reactive flows on rocket engines with the new closure model using opencl and multiprocessing. **Proceedings of the XL Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC**. Natal/RN, Brazil, November 11-14, 2019

PRESS, W. H.; TEOKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T. Numerical Recipes in Fortran 90: The Art of PARALLEL Scientific Computing (ISBN 0-521-57439-0) Copyright (C) 1986-1996 by **Cambridge University Press**.

RAJAN, V. K. *et al.* Electrohydrodynamic Effects on Single Bubble Growth and Departure under Microgravity Conditions: A Numerical Investigation. **Microgravity Science and Technology**, [s. l.], v. 31, p. 805-819, 2019.

RAUSCH, M. H.; KRETSCHMER, L.; WILL, S.; LEIPERTZ, A.; FROBA, A. P. Density, Surface Tension, and Kinematic Viscosity of Hydrofluoroethers HFE-7000, HFE-7100, HFE-7200, HFE-7300, and HFE-7500, **J. Chemical & Engineering. Data**, [s. l.], p. 3759-3765, 2015. (<https://doi.org/10.1021/acs.jced.5b00691>)

REDDY, J. N. An Introduction to the Finite Element Method. **Mc Graw Hill** 3rd ed, 2006.

ROHSENOW, W. M. A Method of Correlating Heat Transfer Data for Surface Boiling Liquids, **Transactions of ASME**, [s. l.], v. 74, p. 969-976, 1952.

SANTIS, D.; GERACI, G.; GUARDONE, A. Finite Volume and Finite Element Schemes for the Euler Equation in Cylindrical and Spherical Coordinates. **Journal of Computational and Applied Mathematics, Elsevier**, [s. l.], 2012.

SATO, Y.; NICENO, B. A Conservative Local Interface Sharpening Scheme for the Constrained Interpolation Profile Method. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, [s. l.], v.70, p. 441-467, 2012

SATO, Y.; NICENO, B. Nucleate pool boiling simulations using the interface tracking method: Boiling regime from discrete bubble to vapor mushroom region. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, [s. l.], v. 105, p. 505-524, 2017.

SATO, Y.; NICENO, B.; SMITH, B. L. Departure from Nucleate Pool Boiling (DNB) Simulations Based on an Interface Tracking Method. **In proceedings of 18th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics (NURETH-18)**. Portland, OR, August 18-22, 2019.

SATTARI, E. *et al.* Numerical investigation the effects of working parameters on nucleate pool boiling. **Inter-national Communications in Heat and Mass Transfer**, p. 105-113, 2014.

SELVADURAI, A. P. S. Poisson's equation. *Partial Differential Equations in Mechanics* 2, p. 503–647, 2000; doi:10.1007/978-3-662-09205-7_2.

SHAH, T. M.; TALAT, N. A Comparison of Characteristic-Based Split Algorithm and Multi-Grid method for Solution of Incompressible Navier-Stokes Equations. **International Journal of Engineering & Technology IJET-IJENS**, [s. l.], v.13, No: 05, 2013.

SILVA, J. B. C. **Simulação Numérica de Escoamentos pelo Método de Elementos Finitos Baseado em Volumes de Controle**. 1998. 159f. Tese (Doutorado) – Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 159.

SMOLIANSKI, A.; HAARIO, H.; LUUKKA, P. Numerical Study of Dynamics of Single Bubbles and Bubble Swarms. **Applied Mathematical Modeling**, [s. l.], v. 32, p. 641–659, 2008.

SON, G.; DHIR, V. Numerical Simulation of Nucleate Boiling on a Horizontal Surface at High Heat Fluxes. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, [s. l.], v. 51, p. 2566–2582, 2008.

STANISZEWSKI, B. E. Nucleate boiling bubble growth and departure, **Tech. Rep. 16, Div. Sponsored Res., MIT**, [s. l.], 1959.

STEPHAN, P.; HAMME, J. A new model for nucleate boiling heat transfer. **Warme und Stoffübertragung**, v. 30, p. 119–125, 1994.

SUN, X.; ZHANG, J. Z.; REN, X. L. Characteristic-Based Split (CBS) Finite Element Method for Incompressible Viscous Flow with Moving Boundaries. **Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics**, [s. l.], v. 6, No.3, p. 461–474, 2012.

SUSSMAN, M.; SMEREKA, P.; OSHER, S. A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flow. **Journal of Computational Physics**, [s. l.], v. 114(1), p. 146–159, 1994; doi:10.1006/jcph.1994.1155

TANGUY, S., MÉNARD, T.; BERLEMONT, A. A Level Set Method for vaporizing two-phase flows. **Journal of Computational Physics**, [s. l.], v. 221, p. 837–853, 2007.

TSCHUI, B. Eletronics Take a Bath. **In: SVLG Data Center from Berkley Lab(org)**, [s. l.], 2014.

URBANO, A.; TANGUY, S.; HUBER, G., COLIN, C. Direct numerical simulation of nucleate boiling in micro-layer regime. **International Journal of Heat and Mass Transfer, Elsevier**, [s. l.], v. 123, p. 1128–1137, 2018. <10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.02.104>. <hal-01793518>

VALANCE, S. *et al.* A Finite Element Method for Level Sets. **ECCOMAS Multidisciplinary Jubilee Symposium, Computational Methods in Applied Sciences**, [s. l.], 2009.

WANG, Y.; WU, J. M. Numerical simulation on single bubble behavior during Al₂O₃/H₂O nanofluids flow boiling using Moving Particle Semi-implicit method. **Progress in Nuclear Energy**, [s. l.], v. 85, p. 130-139, 2015.

WELCH, S. W. J. Local simulation of two-phase flows including interface tracking with mass transfer. **J. Comp. Phys**, [s. l.], v. 121, p.142-154, 1995.

WONG, K. L.; BAKER, A. J. A 3D incompressible Navier–Stokes velocity–vorticity weak form finite element algorithm. **International Journal for Numerical Methods in Fluids Int. J. Numer. Meth. Fluids**, [s. l.], v. 38, p. 99-123, 2002; (DOI: 10.1002/d.204)

WU, C. S.; YOUNG, D. L.; Wu, H. C. Simulations of multidimensional interfacial flows by an improved volume-of-fluid method. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, [s. l.], v. 60, p. 739-755, 2013.

WU, J. M.; ZHAO, J. A review of nanofluid heat transfer and critical heat flux enhancement - Research gap to engineering application. *Progress in Nuclear Energy*, [s. l.] v. 66, p. 13-24, 2013

WU, J.; DHIR, V. K.; QIAN, J. Numerical Simulation of Subcooled Nucleate Boiling by Coupling Level-Set Method with Moving-Mesh Method. **Numerical Heat Transfer, Part B**, [s. l.], v. 51: p. 535–563, 2007

YABUKI, T.; NAKABEPPU, O. Heat transfer mechanisms in isolated bubble boiling of water observed with MEMS sensor. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, [s. l.], v. 76, p. 286-297, 2014.

ZHANG, L.; LI, Z.-D.; LI, K.; LI, H.-X.; ZHAO, J.-F. Influence of heater thermal capacity on bubble dynamics and heat transfer in nucleate pool boiling. **Applied Thermal Engineering**, [s. l.], v. 88, p. 118–126, 2015; doi:10.1016/j.applthermaleng.2014.11.080

ZHANG, X. H.; OUYANG, J.; ZHANG, L.. Characteristic based split (CBS) mesh free method modeling for viscoelastic flow. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, [s. l.], v. 34, p. 163-172, 2010.

ZHAO, J. F.; LI, Z. D.; ZHAN, L. Numerical Simulation of Single Bubble Pool Boiling in Different Gravity Conditions, **AIP Conf. Proc.**, [s. l.], v. 1376, p. 565–568, 2011.

ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, 7 ed., **Elsevier**, Oxford, 2013.

APÊNDICE A – BASE DO MÉTODO DE RESÍDUOS PONDERADOS

De acordo com Finlayson (1972), o Método de Resíduos Ponderados é um método genérico de solução de equações diferenciais. Nele, a solução desconhecida da equação é aproximada por uma série de funções conhecidas. A fim de entender o método, suponhamos querer resolver a equação:

$$\nabla^2 \phi = q'' \quad (\text{A.1})$$

Sendo $\phi = \phi(\vec{x}, t)$ um escalar qualquer

Suponha que a condição inicial da Equação (A.1) seja $\phi(\vec{x}, 0) = \phi_0$, $\phi(\vec{x}, 0) = \phi_0$

e que ϕ pode ser aproximado por: $\hat{\phi} = \phi_0 + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$

$$\hat{\phi} = \phi_0 + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \quad (\text{A.2})$$

de modo que c é uma constante e φ uma função conhecida. Substituindo a Equação (A.2) na Equação (A.1), tem-se:

$$\nabla^2 \hat{\phi} = q'' \rightarrow \nabla^2 \phi_0 + \sum_{i=1}^n c_i \nabla^2 \varphi_i = q'' \quad (\text{A.3})$$

Caso a solução dada na Equação (A.3) seja a solução real do problema, então a diferença $R = \nabla^2 \hat{\phi} - q'' = 0$. No entanto, sabendo que a solução aproximada não é exata, o resíduo R não será nulo. O método de resíduos ponderados força que esse resíduo seja zerado. Para isso, aplica-se o produto interno do resíduo R por uma função peso W . Portanto, o método de resíduos ponderados é resumido na Equação (A.4):

$$(R, W) = \int_{\Omega} R \cdot W dV = 0 \quad (\text{A.4})$$

sendo (R, W) o produto interno de R por W no domínio Ω .

Essa função peso W pode ser qualquer função desejada. A partir da escolha dessa função peso é que surgem as vertentes do método de resíduos ponderados, como por exemplo: o método de Diferenças Finitas, de Elementos Finitos e Volumes Finitos.

APÊNDICE B – DEDUÇÃO DA FORMA MATRICIAL FINAL DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

1. DISCRETIZAÇÃO FEM-CBS DAS EQUAÇÕES BÁSICAS EM COORDENADAS CARTESIANAS

$$\begin{aligned}
 \frac{\vec{\rho u} - \vec{\rho u}^n}{\Delta t} &= \vec{f}^n - \rho \left(\vec{w} \cdot \nabla \right) \vec{u} + \nabla \cdot \left[\mu \left(\nabla \vec{u} + \nabla^T \vec{u} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{u} \vec{I} \right) \right]^n + \\
 &+ \frac{\Delta t}{2} \vec{w} \cdot \nabla \left[\rho \left(\vec{w} \cdot \nabla \right) \vec{u} - \vec{f} \right]^n \\
 \vec{f} &= \rho \vec{g} \cos \phi + \sigma \kappa \nabla H
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \vec{A} &= \vec{e}_1 \left[\frac{\partial A_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{31}}{\partial x_3} \right] + \vec{e}_2 \left[\frac{\partial A_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{32}}{\partial x_3} \right] + \\
 &+ \vec{e}_3 \left[\frac{\partial A_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{33}}{\partial x_3} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{w} \rho \vec{u} &= \rho \left(w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2 + w_3 \vec{e}_3 \right) \left(u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3 \right) = \\
 &= \rho \left(w_1 u_1 \vec{e}_1 \vec{e}_1 + w_1 u_2 \vec{e}_1 \vec{e}_2 + w_1 u_3 \vec{e}_1 \vec{e}_3 \right) + \rho \left(w_2 u_1 \vec{e}_2 \vec{e}_1 + w_2 u_2 \vec{e}_2 \vec{e}_2 + w_2 u_3 \vec{e}_2 \vec{e}_3 \right) + \\
 &\rho \left(w_3 u_1 \vec{e}_3 \vec{e}_1 + w_3 u_2 \vec{e}_3 \vec{e}_2 + w_3 u_3 \vec{e}_3 \vec{e}_3 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \left(\vec{w} \rho \vec{u} \right) &= \vec{e}_i \frac{\partial \left(\vec{w} \rho \vec{u} \right)}{\partial x_i} = \vec{e}_i \frac{\partial \left(w_j \rho u_k \right)}{\partial x_i} \vec{e}_j \vec{e}_k = \frac{\partial \left(w_j \rho u_k \right)}{\partial x_i} \vec{e}_k = \vec{e}_i \frac{\partial \left(w_j \rho u_i \right)}{\partial x_j} \vec{e}_i \\
 \nabla \cdot \left(\vec{w} \rho \vec{u} \right) &= \frac{\partial \left(w_j \rho u_1 \right)}{\partial x_j} \vec{e}_1 + \frac{\partial \left(w_j \rho u_1 \right)}{\partial x_j} \vec{e}_1 + \frac{\partial \left(w_j \rho u_3 \right)}{\partial x_j} \vec{e}_3 = \\
 &\left[\frac{\partial \left(w_1 \rho u_1 \right)}{\partial x_1} + \frac{\partial \left(w_2 \rho u_1 \right)}{\partial x_2} + \frac{\partial \left(w_3 \rho u_1 \right)}{\partial x_3} \right] \vec{e}_1 + \left[\frac{\partial \left(w_1 \rho u_2 \right)}{\partial x_1} + \frac{\partial \left(w_2 \rho u_2 \right)}{\partial x_2} + \frac{\partial \left(w_3 \rho u_2 \right)}{\partial x_3} \right] \vec{e}_2 + \\
 &+ \left[\frac{\partial \left(w_1 \rho u_3 \right)}{\partial x_1} + \frac{\partial \left(w_2 \rho u_3 \right)}{\partial x_2} + \frac{\partial \left(w_3 \rho u_3 \right)}{\partial x_3} \right] \vec{e}_3 \\
 \rho \left(\vec{w} \cdot \nabla \right) \vec{u} &= \rho w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \vec{e}_i
 \end{aligned}$$

$$\left(\vec{w} \cdot \nabla\right) \left(\rho w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \vec{e}_j = w_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \vec{e}_i$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho \hat{u}_i - \rho u_i^n}{\Delta t} &= f_i^n - \rho w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right] \right\}^n - \\ &-\nabla p^n + \frac{\Delta t}{2} w_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - f + \nabla p \right)^n \end{aligned} \quad (B.2)$$

Discretização fem-Galerkin

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [N]^T \Delta U_i^* d\Omega &= \Delta t \left(-\int_{\Omega} [N]^T \rho w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) d\Omega + \right. \\ &+ \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) d\Omega - \frac{2}{3} \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) d\Omega + \\ &\left. + \int_{\Omega} [N]^T f_i d\Omega - \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial p^n}{\partial x_i} d\Omega \right)^n \\ &+ \frac{\Delta t^2}{2} \left(\int_{\Omega} [N]^T w_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) d\Omega - \right. \\ &\left. - \int_{\Omega} [N]^T w_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k} d\Omega + \int_{\Omega} [N]^T w_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) d\Omega \right)^n \end{aligned} \quad (B.3)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [N]^T \Delta U_i^* d\Omega = \Delta t \left(\begin{aligned} & -\int_{\Omega} [N]^T \rho w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Omega} \left[\frac{\partial N}{\partial x_j} \right]^T \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) d\Omega + \\ & -\int_{\Omega} \left[\frac{\partial N}{\partial x_j} \right]^T \left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) d\Omega + \frac{2}{3} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial N}{\partial x_i} \right]^T (\mu \Delta) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} [N]^T f_i d\Omega + \int_{\Gamma} n_j \left(N^T \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma} n_j \left(N^T \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) d\Gamma - \frac{2}{3} \int_{\Gamma} n_i (N^T \mu \Delta) d\Gamma - \\ & - \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial p}{\partial x_i} d\Omega \end{aligned} \right) + \\
& + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\begin{aligned} & -\int_{\Omega} \left[\frac{\partial (w_k N)}{\partial x_k} \right]^T \left(\rho w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial (w_k N)}{\partial x_k} \right]^T f_i d\Omega + \int_{\Gamma} n_k w_k N^T \left(\rho w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) d\Gamma - \\ & - \int_{\Gamma} n_k w_k N^T f_i d\Gamma + \int_{\Omega} [N]^T w_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) d\Omega \end{aligned} \right)^n
\end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\Delta = \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \{N\} \langle N \rangle d\Omega \{U_i^*\} &= \int_{\Omega} \rho \{N\} \langle N \rangle d\Omega \{U^n\} + \\ &+ \Delta t \left(- \int_{\Omega} \rho w_j \{N\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle d\Omega \{U_i\} - \int_{\Omega} \mu \left\{ \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle d\Omega \{U_i\} + \right. \\ &- \int_{\Omega} \mu \left\{ \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_i} \right\rangle d\Omega \{U_j\} + \frac{2}{3} \int_{\Omega} \mu \left\{ \frac{\partial N}{\partial x_i} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle d\Omega \{U_j\} \\ &\left. + \int_{\Omega} \{N\} f_i d\Omega + \int_{\Gamma} \{N\} n_j \tau_{ji} d\Gamma - \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial p}{\partial x_i} d\Omega \right) + \\ &+ \Delta t^2 \left(- \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho w_j \left\{ \frac{\partial (w_k N)}{\partial x_k} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle d\Omega \{U_i\} + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial (w_k N)}{\partial x_k} \right]^T f_i d\Omega + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} n_k w_k N^T \left(\rho w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} n_k w_k N^T f_i d\Gamma + \\ &\left. + \int_{\Omega} [N]^T w_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) d\Omega \right) \end{aligned} \quad (B.5)$$

$$[M] \{U_i^*\} = [M] \{U_i^n\} - \Delta t \left(\begin{aligned} &[C^u] \{U_i\} + [K^\mu] \{U_i\} + \\ &+ [K^{\mu 1i}] \{U_1\} + [K^{\mu 2i}] \{U_2\} + [K^{\mu 3i}] \{U_3\} - \\ &- \frac{2}{3} [\Delta^{\mu 11}] \{U_1\} - \frac{2}{3} [\Delta^{\mu 12}] \{U_2\} - \frac{2}{3} [\Delta^{\mu 13}] \{U_3\} \\ &- \{F_i\} - \Delta t ([K^{su}] \{U_i\} + \{F_i^s\}) \end{aligned} \right)^n \quad (B.6)$$

$$[M] = \int_{\Omega} \rho \{N\} \langle N \rangle d\Omega \quad (B.7)$$

$$[C^u] = \int_{\Omega} \rho w_j \{N\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle d\Omega \quad (B.8)$$

$$[K^\mu] = \int_{\Omega} \mu \left\{ \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle d\Omega \quad (B.9)$$

$$[K^{\mu ji}] = \int_{\Omega} \mu \left\{ \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_i} \right\rangle d\Omega \quad (\text{B.10})$$

$$[\Delta^{\mu ij}] = \int_{\Omega} \mu \left\{ \frac{\partial N}{\partial x_i} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle d\Omega \quad (\text{B.11})$$

$$\{F_i\} = \int_{\Omega} \{N\} f_i d\Omega + \int_{\Gamma} \{N\} n_j \tau_{ji} d\Gamma - \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial p}{\partial x_i} d\Omega \quad (\text{B.12})$$

$$[K^{su}] = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho w_j \left\{ \frac{\partial (w_k N)}{\partial x_k} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle d\Omega \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \{F_i^s\} = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial (w_k N)}{\partial x_k} \right]^T f_i d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} n_k w_k N^T \left(\rho w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) d\Gamma - \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} n_k w_k N^T f_i d\Gamma + \int_{\Omega} [N]^T w_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Variável maiúscula, nas equações a seguir, indica valor nodal

$$[M]\{U_1^*\} = [M]\{U_1^n\} - \Delta t \left(\begin{aligned} & [C^u]\{U_1\} + [K^{\mu}]\{U_1\} + \\ & + [K^{\mu j1}]\{U_j\} - \frac{2}{3}[\Delta^{\mu 1j}]\{U_j\} - \\ & - \{F_1\} - \Delta t \left([K^{su}]\{U_1\} + \{F_1^s\} \right)^n \end{aligned} \right) \quad (\text{B.15})$$

$$[M] = \int_{\Omega} \rho \{N\} \langle N \rangle d\Omega \quad (\text{B.16})$$

$$[C^u] = \int_{\Omega} \rho w_j \{N\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle d\Omega \quad (\text{B.17})$$

$$[K^{\mu}] = \int_{\Omega} \mu \left\{ \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle d\Omega \quad (\text{B.18})$$

$$[K^{\mu j1}] = \int_{\Omega} \mu \left\{ \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_1} \right\rangle d\Omega \quad (\text{B.19})$$

$$[\Delta^{\mu 1j}] = \int_{\Omega} \mu \left\{ \frac{\partial N}{\partial x_1} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle d\Omega \quad (\text{B.20})$$

$$\{F_1\} = \int_{\Omega} \{N\} f_1 d\Omega + \int_{\Gamma} \{N\} n_j \tau_{j1} d\Gamma - \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial p}{\partial x_1} d\Omega \quad (\text{B.21})$$

$$[K^{su}] = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho w_j \left\{ \frac{\partial(w_k N)}{\partial x_k} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle d\Omega \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{aligned} \{F_1^s\} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial(w_k N)}{\partial x_k} \right]^T f_1 d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} n_k w_k N^T \left(\rho w_j \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \right) d\Gamma - \\ &- \frac{1}{2} \int_{\Gamma} n_k w_k N^T f_1 d\Gamma + \int_{\Omega} [N]^T w_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$[M]\{U_2^*\} = [M]\{U_2^n\} - \Delta t \left(\begin{aligned} &[C^u]\{U_2\} + [K^u]\{U_2\} + \\ &+ [K^{\mu j^2}]\{U_j\} - \frac{2}{3} [\Delta^{\mu 2j}]\{U_j\} - \\ &- \{F_2\} - \Delta t ([K^{su}]\{U_2\} + \{F_2^s\})^n \end{aligned} \right)^n \quad (\text{B.24})$$

$$[K^{\mu j^2}] = \int_{\Omega} \mu \left\{ \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_2} \right\rangle d\Omega \quad (\text{B.25})$$

$$[\Delta^{\mu 2j}] = \int_{\Omega} \mu \left\{ \frac{\partial N}{\partial x_2} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle d\Omega \quad (\text{B.26})$$

$$\{F_2\} = \int_{\Omega} \{N\} f_1 d\Omega + \int_{\Gamma} \{N\} n_j \tau_{j1} d\Gamma - \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial p}{\partial x_2} d\Omega \quad (\text{B.27})$$

$$\begin{aligned} \{F_2^s\} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial(w_k N)}{\partial x_k} \right]^T f_2 d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} n_k w_k N^T \left(\rho w_j \frac{\partial u_2}{\partial x_j} \right) d\Gamma - \\ &- \frac{1}{2} \int_{\Gamma} n_k w_k N^T f_2 d\Gamma + \int_{\Omega} [N]^T w_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p}{\partial x_2} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

$$[M]\{U_3^*\} = [M]\{U_3^n\} - \Delta t \left(\begin{aligned} & \left[C^u \right] \{U_3\} + \left[K^\mu \right] \{U_3\} + \\ & + \left[K^{\mu j3} \right] \{U_j\} - \frac{2}{3} \left[\Delta^{\mu 3j} \right] \{U_j\} - \\ & - \{F_3\} - \Delta t \left(\left[K^{su} \right] \{U_3\} + \{F_3^s\} \right)^n \end{aligned} \right)^n \quad (\text{B.29})$$

$$\left[K^{\mu j3} \right] = \int_{\Omega} \mu \left\{ \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_3} \right\rangle d\Omega \quad (\text{B.30})$$

$$\left[\Delta^{\mu 3j} \right] = \int_{\Omega} \mu \left\{ \frac{\partial N}{\partial x_3} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle d\Omega \quad (\text{B.31})$$

$$\{F_3\} = \int_{\Omega} \{N\} f_1 d\Omega + \int_{\Gamma} \{N\} n_j \tau_{j1} d\Gamma - \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial p}{\partial x_3} d\Omega \quad (\text{B.32})$$

$$\begin{aligned} \{F_3^s\} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial (w_k N)}{\partial x_k} \right]^T f_3 d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} n_k w_k N^T \left(\rho w_j \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \right) d\Gamma - \\ &- \frac{1}{2} \int_{\Gamma} n_k w_k N^T f_3 d\Gamma + \int_{\Omega} [N]^T w_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p}{\partial x_3} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

Passo 2

U nas equações a seguir tem a densidade embutida, $\vec{U} = \rho \vec{u}$

$$\nabla^2 p^n = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \left(\rho \vec{u} \right) \quad (\text{B.34})$$

$$\nabla^2 p^n = \frac{1}{\Delta t} \left[\nabla \cdot \left(\vec{U} \right)^n + \nabla \cdot \left(\Delta \vec{U}^* \right) \right]$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla \cdot \left([N^p]^T \nabla p^n \right) d\Omega - \int_{\Omega} \nabla [N^p]^T \cdot \nabla p^n d\Omega = \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \nabla \cdot \left([N^p]^T \left(\vec{U} \right)^n \right) d\Omega - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \nabla [N^p]^T \cdot \left(\vec{U} \right)^n d\Omega + \\ &+ \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \nabla \cdot \left([N^p]^T \left(\Delta \vec{U}^* \right) \right) d\Omega - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \nabla [N^p]^T \cdot \left(\Delta \vec{U}^* \right) d\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \nabla [N^p]^T \cdot \nabla p^n d\Omega = \\
& = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \nabla [N^p]^T \cdot (\vec{U})^n d\Omega + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \nabla [N^p]^T \cdot (\Delta \vec{U}^*) d\Omega + \\
& + \int_{\Gamma} [N^p]^T \vec{n} \cdot \nabla p d\Gamma - \int_{\Gamma} [N^p]^T \vec{n} \cdot (\vec{U})^n d\Gamma - \int_{\Gamma} [N^p]^T \vec{n} \cdot (\Delta \vec{U}^*) d\Gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \nabla [N^p]^T \cdot \nabla [N^p] d\Omega \{p\}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \nabla [N^p]^T \cdot (U)^n d\Omega + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \nabla [N^p]^T \cdot (V)^n d\Omega + \\
& + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \nabla [N^p]^T \cdot (W)^n d\Omega + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \nabla [N^p]^T \cdot (\Delta U^*) d\Omega + \\
& + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \nabla [N^p]^T \cdot (\Delta V^*) d\Omega + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \nabla [N^p]^T \cdot (\Delta W^*) d\Omega \\
& + \int_{\Gamma} [N^p]^T \vec{n} \cdot \nabla p d\Gamma - \int_{\Gamma} [N^p]^T \vec{n} \cdot (\vec{U})^n d\Gamma - \int_{\Gamma} [N^p]^T \vec{n} \cdot (\Delta \vec{U}^*) d\Gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \nabla [N^p]^T \cdot \nabla [N^p] d\Omega \{p\}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} [N^p]^T \cdot [N] d\Omega \{U\}^n + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} [N^p]^T \cdot [N] d\Omega \{V\}^n + \\
& + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} [N^p]^T \cdot [N] d\Omega \{W\}^n + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} [N^p]^T \cdot [N] d\Omega \{\Delta U^*\}^n + \\
& + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} [N^p]^T \cdot [N] d\Omega \{\Delta V^*\}^n + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial z} [N^p]^T \cdot [N] d\Omega \{\Delta W^*\}^n + \\
& + \int_{\Gamma} [N^p]^T \vec{n} \cdot \nabla p d\Gamma - \int_{\Gamma} [N^p]^T \vec{n} \cdot (\vec{U})^n d\Gamma - \int_{\Gamma} [N^p]^T \vec{n} \cdot (\Delta \vec{U}^*) d\Gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[H] \{p\}^n &= \frac{1}{\Delta t} [G^1] \{U\}^n + \frac{1}{\Delta t} [G^2] \{V\}^n + \frac{1}{\Delta t} [G^3] \{W\}^n + \\
& + \frac{1}{\Delta t} [G^1] \{\Delta U^*\}^n + \frac{1}{\Delta t} [G^2] \{\Delta V^*\}^n + \frac{1}{\Delta t} [G^3] \{\Delta W^*\}^n + \{f^p\}
\end{aligned} \tag{B.35}$$

$$[H] = \int_{\Omega} \nabla [N^p]^T \cdot \nabla [N^p] d\Omega \tag{B.36}$$

$$[G^1] = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial N^p}{\partial x} \right\} \langle N \rangle d\Omega \tag{B.37}$$

$$[G^2] = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial N^p}{\partial y} \right\} \langle N \rangle d\Omega \tag{B.38}$$

$$[G^3] = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial N^p}{\partial z} \right\} \langle N \rangle d\Omega \quad (\text{B.39})$$

$$\{f^p\} = \int_{\Gamma} [N^p]^T \vec{n} \cdot \nabla p d\Gamma - \int_{\Gamma} [N^p]^T \vec{n} \cdot (\vec{U})^n d\Gamma - \int_{\Gamma} [N^p]^T \vec{n} \cdot (\Delta \vec{U}^*) d\Gamma \quad (\text{B.40})$$

Passo 3

$$\Delta \vec{U}^{**} = -\theta_2 \Delta t \nabla (\Delta p) \quad (\text{B.41})$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [N]^T \Delta \vec{U}^{**} d\Omega &= -\theta_2 \Delta t \int_{\Omega} [N]^T \nabla (\Delta p)^n d\Omega \\ &= \theta_2 \Delta t \int_{\Omega} \nabla [N]^T (\Delta p)^n d\Omega - \theta_2 \Delta t \int_{\Gamma} ([N]^T (\Delta p)^n) \vec{n} d\Gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [N]^T [N] d\Omega \left\{ \Delta \vec{U}^{**} \right\} &= \theta_2 \Delta t \int_{\Omega} [N]^T \nabla [N_p] \{(\Delta \tilde{p})\} d\Omega - \\ &- \theta_2 \Delta t \int_{\Gamma} ([N]^T [N_p]) \{(\Delta \tilde{p})\} \vec{n} d\Gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [N]^T [N] d\Omega \left\{ \Delta \vec{U}_i^{**} \right\} &= \theta_2 \Delta t \int_{\Omega} [N]^T \frac{\partial [N_p]}{\partial x_i} \{(\Delta \tilde{p})\} d\Omega - \\ &- \theta_2 \Delta t \int_{\Gamma} ([N]^T [N_p]) \{(\Delta \tilde{p})\} \vec{n} d\Gamma \end{aligned}$$

$$[M] \{ \Delta \vec{U}_1^{**} \} = \theta_2 \Delta t [G_1]^T \{ \Delta \tilde{p} \} - \theta_2 \Delta t \{ f^{**} \} \quad (\text{B.42})$$

$$[M] \{ \Delta \vec{U}_2^{**} \} = \theta_2 \Delta t [G_2]^T \{ \Delta \tilde{p} \} - \theta_2 \Delta t \{ f^{**} \} \quad (\text{B.43})$$

$$[M] \{ \Delta \vec{U}_3^{**} \} = \theta_2 \Delta t [G_3]^T \{ \Delta \tilde{p} \} - \theta_2 \Delta t \{ f^{**} \} \quad (\text{B.44})$$

$$[G_1]^T = \int_{\Omega} [N]^T \left[\frac{\partial N_p}{\partial x} \right] d\Omega \quad (\text{B.45})$$

$$[G_2]^T = \int_{\Omega} [N]^T \left[\frac{\partial N_p}{\partial y} \right] d\Omega \quad (\text{B.46})$$

$$[G_3]^T = \int_{\Omega} [N]^T \left[\frac{\partial N_p}{\partial z} \right] d\Omega \quad (\text{B.47})$$

$$\{f^{**}\} = \int_{\Gamma} ([N]^T [N_p]) \{(\Delta \tilde{p})\} \vec{n} d\Gamma \quad (\text{B.48})$$

Passo 4

Baseando-se na Eq. (A.33) resulta

$$\rho C_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\vec{u} - \vec{u}^c \right) \cdot \nabla T \right] = k \nabla^2 T + S \quad (\text{B.49})$$

$$\begin{aligned} [M^*] \{T\}^{n+1} &= [M^*] \{T\}^n - \Delta t [[C] + [K]] \{T\}^n - \frac{\Delta t^2}{2} [C^{est}] \{T\}^n + \\ &+ \Delta t \{f^K\} + \frac{\Delta t^2}{2} \{f^{Cest}\} \end{aligned} \quad (\text{B.50})$$

$$K_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \alpha \nabla N_{\alpha} \cdot \nabla N_{\beta} d\Omega$$

1.1 Matrizes Explícitas

Tratando-se de coordenadas cartesianas, as matrizes descritas nesse item são facilmente integradas manualmente. Assim, segue as matrizes integradas e explícitas.

1.1.1 Matrizes do Primeiro Passo

$$[M] = \frac{\det J}{720} \begin{bmatrix} 2(3\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4) & (2\rho_1 + 2\rho_2 + \rho_3 + \rho_4) & (2\rho_1 + \rho_2 + 2\rho_3 + \rho_4) & (2\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + 2\rho_4) \\ (2\rho_1 + 2\rho_2 + \rho_3 + \rho_4) & 2(\rho_1 + 3\rho_2 + \rho_3 + \rho_4) & (\rho_1 + 2\rho_2 + 2\rho_3 + \rho_4) & (\rho_1 + 2\rho_2 + \rho_3 + 2\rho_4) \\ (2\rho_1 + \rho_2 + 2\rho_3 + \rho_4) & (\rho_1 + 2\rho_2 + 2\rho_3 + \rho_4) & 2(\rho_1 + \rho_2 + 3\rho_3 + \rho_4) & (\rho_1 + \rho_2 + 2\rho_3 + 2\rho_4) \\ (2\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + 2\rho_4) & (\rho_1 + 2\rho_2 + \rho_3 + 2\rho_4) & (\rho_1 + \rho_2 + 2\rho_3 + 2\rho_4) & 2(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + 3\rho_4) \end{bmatrix} \quad (\text{A.51})$$

$$[C^u] = \int_{\Omega} \rho w_j \{N\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle d\Omega \quad (\text{B.52})$$

$$C_{1\beta} = \langle \rho_1 \quad \rho_2 \quad \rho_3 \quad \rho_4 \rangle \begin{bmatrix} \frac{1}{120} & \frac{1}{360} & \frac{1}{360} & \frac{1}{360} \\ \frac{1}{360} & \frac{1}{360} & \frac{1}{720} & \frac{1}{720} \\ \frac{1}{360} & \frac{1}{720} & \frac{1}{360} & \frac{1}{720} \\ \frac{1}{360} & \frac{1}{720} & \frac{1}{720} & \frac{1}{360} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} w_{1,1} \\ w_{1,2} \\ w_{1,3} \\ w_{1,4} \end{bmatrix} b_{\beta} + \begin{bmatrix} w_{2,1} \\ w_{2,2} \\ w_{2,3} \\ w_{2,4} \end{bmatrix} c_{\beta} + \begin{bmatrix} w_{3,1} \\ w_{3,2} \\ w_{3,3} \\ w_{3,4} \end{bmatrix} d_{\beta} \right\} \quad (\text{B.53})$$

$$C_{1\beta} = \left\langle \frac{\rho_1}{120} + \frac{\rho_2}{360} + \frac{\rho_3}{360} + \frac{\rho_4}{360} \frac{\rho_1}{360} + \frac{\rho_2}{360} + \frac{\rho_3}{720} + \frac{\rho_4}{720} \frac{\rho_1}{360} + \frac{\rho_2}{720} + \frac{\rho_3}{360} + \frac{\rho_4}{720} \frac{\rho_1}{360} + \frac{\rho_2}{720} + \frac{\rho_3}{720} + \frac{\rho_4}{360} \right\rangle$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} w_{1,1} \\ w_{1,2} \\ w_{1,3} \\ w_{1,4} \end{bmatrix} b_\beta + \begin{bmatrix} w_{2,1} \\ w_{2,2} \\ w_{2,3} \\ w_{2,4} \end{bmatrix} c_\beta + \begin{bmatrix} w_{3,1} \\ w_{3,2} \\ w_{3,3} \\ w_{3,4} \end{bmatrix} d_\beta \right\}$$

(B.54)

$$C_{1\beta} = \left[\begin{aligned} &\left(\frac{\rho_1}{120} + \frac{\rho_2}{360} + \frac{\rho_3}{360} + \frac{\rho_4}{360} \right) w_{1,1} + \left(\frac{\rho_1}{360} + \frac{\rho_2}{360} + \frac{\rho_3}{720} + \frac{\rho_4}{720} \right) w_{1,2} + \\ &+ \left(\frac{\rho_1}{360} + \frac{\rho_2}{720} + \frac{\rho_3}{360} + \frac{\rho_4}{720} \right) w_{1,3} + \left(\frac{\rho_1}{360} + \frac{\rho_2}{720} + \frac{\rho_3}{720} + \frac{\rho_4}{360} \right) w_{1,4} \end{aligned} \right] b_\beta +$$

$$+ \left[\begin{aligned} &\left(\frac{\rho_1}{120} + \frac{\rho_2}{360} + \frac{\rho_3}{360} + \frac{\rho_4}{360} \right) w_{2,1} + \left(\frac{\rho_1}{360} + \frac{\rho_2}{360} + \frac{\rho_3}{720} + \frac{\rho_4}{720} \right) w_{2,2} + \\ &+ \left(\frac{\rho_1}{360} + \frac{\rho_2}{720} + \frac{\rho_3}{360} + \frac{\rho_4}{720} \right) w_{2,3} + \left(\frac{\rho_1}{360} + \frac{\rho_2}{720} + \frac{\rho_3}{720} + \frac{\rho_4}{360} \right) w_{2,4} \end{aligned} \right] c_\beta +$$

$$+ \left[\begin{aligned} &\left(\frac{\rho_1}{120} + \frac{\rho_2}{360} + \frac{\rho_3}{360} + \frac{\rho_4}{360} \right) w_{3,1} + \left(\frac{\rho_1}{360} + \frac{\rho_2}{360} + \frac{\rho_3}{720} + \frac{\rho_4}{720} \right) w_{3,2} + \\ &+ \left(\frac{\rho_1}{360} + \frac{\rho_2}{720} + \frac{\rho_3}{360} + \frac{\rho_4}{720} \right) w_{3,3} + \left(\frac{\rho_1}{360} + \frac{\rho_2}{720} + \frac{\rho_3}{720} + \frac{\rho_4}{360} \right) w_{3,4} \end{aligned} \right] d_\beta$$

(B.55)

$$C_{1\beta} = [\rho_{11} w_{1,1} + \rho_{12} w_{1,2} + \rho_{13} w_{1,3} + \rho_{14} w_{1,4}] b_\beta +$$

$$+ [\rho_{11} w_{2,1} + \rho_{22} w_{1,2} + \rho_{23} w_{2,3} + \rho_{24} w_{2,4}] c_\beta +$$

$$+ [\rho_{11} w_{3,1} + \rho_{22} w_{3,2} + \rho_{33} w_{2,3} + \rho_{34} w_{2,4}] d_\beta$$

(B.56)

$$\rho_{11} = \frac{\rho_1}{120} + \frac{\rho_2}{360} + \frac{\rho_3}{360} + \frac{\rho_4}{360}$$

(B.57)

$$\rho_{12} = \frac{\rho_1}{360} + \frac{\rho_2}{360} + \frac{\rho_3}{720} + \frac{\rho_4}{720}$$

(B.58)

$$\rho_{13} = \frac{\rho_1}{360} + \frac{\rho_2}{720} + \frac{\rho_3}{360} + \frac{\rho_4}{720}$$

(B.59)

$$\rho_{14} = \frac{\rho_1}{360} + \frac{\rho_2}{720} + \frac{\rho_3}{720} + \frac{\rho_4}{360}$$

(B.60)

$$C_{2\beta} = [\rho_{21} w_{1,1} + \rho_{22} w_{1,2} + \rho_{23} w_{1,3} + \rho_{24} w_{1,4}] b_\beta +$$

$$+ [\rho_{21} w_{2,1} + \rho_{22} w_{2,2} + \rho_{23} w_{2,3} + \rho_{24} w_{2,4}] c_\beta +$$

$$+ [\rho_{21} w_{3,1} + \rho_{22} w_{3,2} + \rho_{23} w_{2,3} + \rho_{24} w_{2,4}] d_\beta$$

(B.61)

$$\rho_{21} = \frac{\rho_1}{360} + \frac{\rho_2}{360} + \frac{\rho_3}{720} + \frac{\rho_4}{720}$$

(B.62)

$$\rho_{22} = \frac{\rho_1}{360} + \frac{\rho_2}{120} + \frac{\rho_3}{360} + \frac{\rho_4}{360} \quad (\text{B.63})$$

$$\rho_{23} = \frac{\rho_1}{720} + \frac{\rho_2}{360} + \frac{\rho_3}{360} + \frac{\rho_4}{720} \quad (\text{B.64})$$

$$\rho_{24} = \frac{\rho_1}{720} + \frac{\rho_2}{360} + \frac{\rho_3}{720} + \frac{\rho_4}{360} \quad (\text{B.65})$$

$$\begin{aligned} C_{3\beta} = & \left[\rho_{31} w_{1,1} + \rho_{32} w_{1,2} + \rho_{33} w_{1,3} + \rho_{34} w_{1,4} \right] b_\beta + \\ & + \left[\rho_{31} w_{2,1} + \rho_{32} w_{2,2} + \rho_{33} w_{2,3} + \rho_{34} w_{2,4} \right] c_\beta + \\ & + \left[\rho_{31} w_{3,1} + \rho_{32} w_{3,2} + \rho_{33} w_{3,3} + \rho_{34} w_{3,4} \right] d_\beta \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

$$\rho_{31} = \frac{\rho_1}{360} + \frac{\rho_2}{720} + \frac{\rho_3}{360} + \frac{\rho_4}{720} \quad (\text{B.67})$$

$$\rho_{32} = \frac{\rho_1}{720} + \frac{\rho_2}{360} + \frac{\rho_3}{360} + \frac{\rho_4}{720} \quad (\text{B.68})$$

$$\rho_{33} = \frac{\rho_1}{360} + \frac{\rho_2}{360} + \frac{\rho_3}{120} + \frac{\rho_4}{360} \quad (\text{B.69})$$

$$\rho_{34} = \frac{\rho_1}{720} + \frac{\rho_2}{720} + \frac{\rho_3}{360} + \frac{\rho_4}{360} \quad (\text{B.70})$$

$$\begin{aligned} C_{4\beta} = & \left[\rho_{41} w_{1,1} + \rho_{42} w_{1,2} + \rho_{43} w_{1,3} + \rho_{44} w_{1,4} \right] b_\beta + \\ & + \left[\rho_{41} w_{2,1} + \rho_{42} w_{2,2} + \rho_{43} w_{2,3} + \rho_{44} w_{2,4} \right] c_\beta + \\ & + \left[\rho_{41} w_{3,1} + \rho_{42} w_{3,2} + \rho_{43} w_{3,3} + \rho_{44} w_{3,4} \right] d_\beta \end{aligned} \quad (\text{B.71})$$

$$\rho_{41} = \frac{\rho_1}{360} + \frac{\rho_2}{720} + \frac{\rho_3}{720} + \frac{\rho_4}{360} \quad (\text{B.72})$$

$$\rho_{42} = \frac{\rho_1}{720} + \frac{\rho_2}{360} + \frac{\rho_3}{720} + \frac{\rho_4}{360} \quad (\text{B.73})$$

$$\rho_{43} = \frac{\rho_1}{720} + \frac{\rho_2}{720} + \frac{\rho_3}{360} + \frac{\rho_4}{360} \quad (\text{B.74})$$

$$\rho_{44} = \frac{\rho_1}{360} + \frac{\rho_2}{360} + \frac{\rho_3}{360} + \frac{\rho_4}{120} \quad (\text{B.75})$$

$$\left[K^\mu \right] = \int_\Omega \mu \left\{ \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle d\Omega \quad (\text{B.76})$$

$$K_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{24 \det[J]} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) (b_\alpha b_\beta + c_\alpha c_\beta + d_\alpha d_\beta) \quad (\text{B.77})$$

$$\left[K^{su} \right] = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho w_j \left\{ \frac{\partial (w_k N)}{\partial x_k} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle d\Omega \quad (\text{B.78})$$

$$K_{1\beta}^{su} = -\frac{1}{240} \frac{1}{\det[J]} \left(\begin{array}{l} (w_{1,1}b_1 + w_{1,2}b_2 + w_{1,3}b_3 + w_{1,4}b_4) + \\ + (w_{2,1}c_1 + w_{2,2}c_2 + w_{2,3}c_3 + w_{2,4}c_4) + \\ + (w_{3,1}d_1 + w_{3,2}d_2 + w_{3,3}d_3 + w_{3,4}d_4) \end{array} \right) \left[\begin{array}{l} (2(\rho w_1)_1 + (\rho w_1)_2 + (\rho w_1)_3 + (\rho w_1)_4)b_{\beta} + \\ + (2(\rho w_2)_1 + (\rho w_2)_2 + (\rho w_2)_3 + (\rho w_2)_4)c_{\beta} + \\ + (2(\rho w_3)_1 + (\rho w_3)_2 + (\rho w_3)_3 + (\rho w_3)_4)d_{\beta} \end{array} \right] + \left(\begin{array}{l} + B_{\alpha} b_{\beta} + C_{\alpha} c_{\beta} + D_{\alpha} d_{\beta} \end{array} \right) \quad (\text{B.79})$$

$$B_{\alpha} = \left(\begin{array}{l} b_{\alpha} (2w_{1,1} + w_{1,2} + w_{1,3} + w_{1,4}) \\ + c_{\alpha} (2w_{2,1} + w_{2,2} + w_{2,3} + w_{2,4}) \\ + d_{\alpha} (2w_{3,1} + w_{3,2} + w_{3,3} + w_{3,4}) \end{array} \right) (\rho w_1)_1 + \left(\begin{array}{l} b_{\alpha} (w_{1,1} + 2w_{1,2} + w_{1,3} + w_{1,4}) \\ + c_{\alpha} (w_{2,1} + 2w_{2,2} + w_{2,3} + w_{2,4}) \\ + d_{\alpha} (w_{3,1} + 2w_{3,2} + w_{3,3} + w_{3,4}) \end{array} \right) (\rho w_1)_2 + \\ + \left(\begin{array}{l} b_{\alpha} (w_{1,1} + w_{1,2} + 2w_{1,3} + w_{1,4}) \\ + c_{\alpha} (w_{2,1} + w_{2,2} + 2w_{2,3} + w_{2,4}) \\ + d_{\alpha} (w_{3,1} + w_{3,2} + 2w_{3,3} + w_{3,4}) \end{array} \right) (\rho w_1)_3 + \left(\begin{array}{l} b_{\alpha} (w_{1,1} + w_{1,2} + w_{1,3} + 2w_{1,4}) \\ + c_{\alpha} (w_{2,1} + w_{2,2} + w_{2,3} + 2w_{2,4}) \\ + d_{\alpha} (w_{3,1} + w_{3,2} + w_{3,3} + 2w_{3,4}) \end{array} \right) (\rho w_1)_4 \quad (\text{B.80})$$

$$C_{\alpha} = \left(\begin{array}{l} b_{\alpha} (2w_{1,1} + w_{1,2} + w_{1,3} + w_{1,4}) \\ + c_{\alpha} (2w_{2,1} + w_{2,2} + w_{2,3} + w_{2,4}) \\ + d_{\alpha} (2w_{3,1} + w_{3,2} + w_{3,3} + w_{3,4}) \end{array} \right) (\rho w_2)_1 + \left(\begin{array}{l} b_{\alpha} (w_{1,1} + 2w_{1,2} + w_{1,3} + w_{1,4}) \\ + c_{\alpha} (w_{2,1} + 2w_{2,2} + w_{2,3} + w_{2,4}) \\ + d_{\alpha} (w_{3,1} + 2w_{3,2} + w_{3,3} + w_{3,4}) \end{array} \right) (\rho w_2)_2 + \\ + \left(\begin{array}{l} b_{\alpha} (w_{1,1} + w_{1,2} + 2w_{1,3} + w_{1,4}) \\ + c_{\alpha} (w_{2,1} + w_{2,2} + 2w_{2,3} + w_{2,4}) \\ + d_{\alpha} (w_{3,1} + w_{3,2} + 2w_{3,3} + w_{3,4}) \end{array} \right) (\rho w_2)_3 + \left(\begin{array}{l} b_{\alpha} (w_{1,1} + w_{1,2} + w_{1,3} + 2w_{1,4}) \\ + c_{\alpha} (w_{2,1} + w_{2,2} + w_{2,3} + 2w_{2,4}) \\ + d_{\alpha} (w_{3,1} + w_{3,2} + w_{3,3} + 2w_{3,4}) \end{array} \right) (\rho w_2)_4 \quad (\text{B.81})$$

$$D_{\alpha} = \left(\begin{array}{l} b_{\alpha} (2w_{1,1} + w_{1,2} + w_{1,3} + w_{1,4}) \\ + c_{\alpha} (2w_{2,1} + w_{2,2} + w_{2,3} + w_{2,4}) \\ + d_{\alpha} (2w_{3,1} + w_{3,2} + w_{3,3} + w_{3,4}) \end{array} \right) (\rho w_3)_1 + \left(\begin{array}{l} b_{\alpha} (w_{1,1} + 2w_{1,2} + w_{1,3} + w_{1,4}) \\ + c_{\alpha} (w_{2,1} + 2w_{2,2} + w_{2,3} + w_{2,4}) \\ + d_{\alpha} (w_{3,1} + 2w_{3,2} + w_{3,3} + w_{3,4}) \end{array} \right) (\rho w_3)_2 + \\ + \left(\begin{array}{l} b_{\alpha} (w_{1,1} + w_{1,2} + 2w_{1,3} + w_{1,4}) \\ + c_{\alpha} (w_{2,1} + w_{2,2} + 2w_{2,3} + w_{2,4}) \\ + d_{\alpha} (w_{3,1} + w_{3,2} + 2w_{3,3} + w_{3,4}) \end{array} \right) (\rho w_3)_3 + \left(\begin{array}{l} b_{\alpha} (w_{1,1} + w_{1,2} + w_{1,3} + 2w_{1,4}) \\ + c_{\alpha} (w_{2,1} + w_{2,2} + w_{2,3} + 2w_{2,4}) \\ + d_{\alpha} (w_{3,1} + w_{3,2} + w_{3,3} + 2w_{3,4}) \end{array} \right) (\rho w_3)_4 \quad (\text{B.82})$$

$$K_{2\beta}^{su} = -\frac{1}{240} \frac{1}{\det[J]} \left[\begin{array}{l} \left((w_{1,1}b_1 + w_{1,2}b_2 + w_{1,3}b_3 + w_{1,4}b_4) + \right. \\ \left. + (w_{2,1}c_1 + w_{2,2}c_2 + w_{2,3}c_3 + w_{2,4}c_4) + \right. \\ \left. + (w_{3,1}d_1 + w_{3,2}d_2 + w_{3,3}d_3 + w_{3,4}d_4) \right) \\ \left. + B_\alpha b_\beta + C_\alpha c_\beta + D_\alpha d_\beta \right] \left[\begin{array}{l} ((\rho w_1)_1 + 2(\rho w_1)_2 + (\rho w_1)_3 + (\rho w_1)_4)b_\beta + \\ ((\rho w_2)_1 + 2(\rho w_2)_2 + (\rho w_2)_3 + (\rho w_2)_4)c_\beta + \\ ((\rho w_3)_1 + 2(\rho w_3)_2 + (\rho w_3)_3 + (\rho w_3)_4)d_\beta \end{array} \right] + \end{array} \right] \quad (B.83)$$

$$K_{3\beta}^{su} = -\frac{1}{240} \frac{1}{\det[J]} \left[\begin{array}{l} \left((w_{1,1}b_1 + w_{1,2}b_2 + w_{1,3}b_3 + w_{1,4}b_4) + \right. \\ \left. + (w_{2,1}c_1 + w_{2,2}c_2 + w_{2,3}c_3 + w_{2,4}c_4) + \right. \\ \left. + (w_{3,1}d_1 + w_{3,2}d_2 + w_{3,3}d_3 + w_{3,4}d_4) \right) \\ \left. + B_\alpha b_\beta + C_\alpha c_\beta + D_\alpha d_\beta \right] \left[\begin{array}{l} ((\rho w_1)_1 + (\rho w_1)_2 + 2(\rho w_1)_3 + (\rho w_1)_4)b_\beta + \\ ((\rho w_2)_1 + (\rho w_2)_2 + 2(\rho w_2)_3 + (\rho w_2)_4)c_\beta + \\ ((\rho w_3)_1 + (\rho w_3)_2 + 2(\rho w_3)_3 + (\rho w_3)_4)d_\beta \end{array} \right] + \end{array} \right] \quad (B.84)$$

$$K_{4\beta}^{su} = -\frac{1}{240} \frac{1}{\det[J]} \left[\begin{array}{l} \left((w_{1,1}b_1 + w_{1,2}b_2 + w_{1,3}b_3 + w_{1,4}b_4) + \right. \\ \left. + (w_{2,1}c_1 + w_{2,2}c_2 + w_{2,3}c_3 + w_{2,4}c_4) + \right. \\ \left. + (w_{3,1}d_1 + w_{3,2}d_2 + w_{3,3}d_3 + w_{3,4}d_4) \right) \\ \left. + B_\alpha b_\beta + C_\alpha c_\beta + D_\alpha d_\beta \right] \left[\begin{array}{l} ((\rho w_1)_1 + (\rho w_1)_2 + (\rho w_1)_3 + 2(\rho w_1)_4)b_\beta + \\ ((\rho w_2)_1 + (\rho w_2)_2 + (\rho w_2)_3 + 2(\rho w_2)_4)c_\beta + \\ ((\rho w_3)_1 + (\rho w_3)_2 + (\rho w_3)_3 + 2(\rho w_3)_4)d_\beta \end{array} \right] + \end{array} \right] \quad (B.85)$$

$$[K^{\mu ji}] = \int_\Omega \mu \left\{ \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_i} \right\rangle d\Omega \quad (B.86)$$

$$[K^{\mu ji}]\{U_j\} = [K^{\mu li}]\{U_1\} + [K^{\mu 2i}]\{U_2\} + [K^{\mu 3i}]\{U_3\} \quad (B.87)$$

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta}^{\mu 11} &= \int_\Omega \mu \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} d\Omega = \frac{1}{24 \det[J]} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) b_\alpha b_\beta \\ K_{\alpha\beta}^{\mu 21} &= \int_\Omega \mu \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} d\Omega = \frac{1}{24 \det[J]} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) c_\alpha b_\beta \\ K_{\alpha\beta}^{\mu 31} &= \int_\Omega \mu \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} d\Omega = \frac{1}{24 \det[J]} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) d_\alpha b_\beta \end{aligned} \quad (B.88)$$

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta}^{\mu 12} &= \int_\Omega \mu \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} d\Omega = \frac{1}{24 \det[J]} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) b_\alpha c_\beta \\ K_{\alpha\beta}^{\mu 22} &= \int_\Omega \mu \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} d\Omega = \frac{1}{24 \det[J]} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) c_\alpha c_\beta \\ K_{\alpha\beta}^{\mu 32} &= \int_\Omega \mu \frac{\partial N_\alpha}{\partial z} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} d\Omega = \frac{1}{24 \det[J]} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) d_\alpha c_\beta \end{aligned} \quad (B.89)$$

$$\begin{aligned}
K_{\alpha\beta}^{\mu 13} &= \int_{\Omega} \mu \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial z} d\Omega = \frac{1}{24 \det[J]} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) b_{\alpha} d_{\beta} \\
K_{\alpha\beta}^{\mu 23} &= \int_{\Omega} \mu \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial z} d\Omega = \frac{1}{24 \det[J]} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) c_{\alpha} d_{\beta} \\
K_{\alpha\beta}^{\mu 33} &= \int_{\Omega} \mu \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial z} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial z} d\Omega = \frac{1}{24 \det[J]} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) d_{\alpha} d_{\beta}
\end{aligned} \tag{B.90}$$

$$[\Delta^{\mu ij}] = \int_{\Omega} \mu \left\{ \frac{\partial N}{\partial x_i} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_j} \right\rangle d\Omega \tag{B.91}$$

$$[\Delta^{\mu ij}] \{U_j\} = [\Delta^{\mu i1}] \{U_1\} + [\Delta^{\mu i2}] \{U_2\} + [\Delta^{\mu i3}] \{U_3\} \tag{B.92}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{\alpha\beta}^{\mu 11} &= \int_{\Omega} \mu \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} d\Omega = \frac{1}{24 \det[J]} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) b_{\alpha} b_{\beta} \\
\Delta_{\alpha\beta}^{\mu 12} &= \int_{\Omega} \mu \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial y} d\Omega = \frac{1}{24 \det[J]} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) b_{\alpha} c_{\beta} \\
\Delta_{\alpha\beta}^{\mu 13} &= \int_{\Omega} \mu \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial z} d\Omega = \frac{1}{24 \det[J]} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) b_{\alpha} d_{\beta}
\end{aligned} \tag{B.93}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{\alpha\beta}^{\mu 21} &= \int_{\Omega} \mu \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} d\Omega = \frac{1}{24 \det[J]} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) c_{\alpha} b_{\beta} \\
\Delta_{\alpha\beta}^{\mu 22} &= \int_{\Omega} \mu \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial y} d\Omega = \frac{1}{24 \det[J]} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) c_{\alpha} c_{\beta} \\
\Delta_{\alpha\beta}^{\mu 23} &= \int_{\Omega} \mu \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial z} d\Omega = \frac{1}{24 \det[J]} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) c_{\alpha} d_{\beta}
\end{aligned} \tag{B.94}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{\alpha\beta}^{\mu 31} &= \int_{\Omega} \mu \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial z} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} d\Omega = \frac{1}{24 \det[J]} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) d_{\alpha} b_{\beta} \\
\Delta_{\alpha\beta}^{\mu 32} &= \int_{\Omega} \mu \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial z} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial y} d\Omega = \frac{1}{24 \det[J]} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) d_{\alpha} c_{\beta} \\
\Delta_{\alpha\beta}^{\mu 33} &= \int_{\Omega} \mu \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial z} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial z} d\Omega = \frac{1}{24 \det[J]} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) d_{\alpha} d_{\beta}
\end{aligned} \tag{B.95}$$

$$[\Delta^{ij}] = [K^{ij}] ; [K^{ji}] = [K^{ij}]^T \tag{B.96}$$

$$\{F_i\} = \int_{\Omega} \{N\} f_i d\Omega + \int_{\Gamma} \{N\} n_j \tau_{ji} d\Gamma \quad (\text{B.97})$$

$$F_{i\alpha} = \int_{\Omega} N_{\alpha} \rho g_i \cos \phi d\Omega + \int_{\Omega} N_{\alpha} \sigma \kappa \frac{\partial H}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Gamma} N_{\alpha} (n_1 \tau_{1i} + n_2 \tau_{2i} + n_3 \tau_{3i}) d\Gamma \quad (\text{B.98})$$

$$\begin{aligned} F_{i\alpha}^s &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_k \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x_k} \rho g_i \cos \phi d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} w_k \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x_k} \sigma \kappa \frac{\partial H}{\partial x_i} d\Omega + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} N_{\alpha} \rho g_i \cos \phi d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} N_{\alpha} \sigma \kappa \frac{\partial H}{\partial x_i} d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.99})$$

1.1.2 Matrizes do Segundo Passo

$$\begin{aligned} [H] &= \int_{\Omega} \nabla [N_p]^T \cdot \nabla [N_p] d\Omega \\ H_{\alpha\beta} &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} + \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial y} + \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial z} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial z} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.100})$$

$$H_{\alpha\beta} = \frac{1}{6 \det[J]} (b_{\alpha} b_{\beta} + c_{\alpha} c_{\beta} + d_{\alpha} d_{\beta}) \quad (\text{B.101})$$

$$\begin{aligned} [G^1] &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial N^p}{\partial x} \right\} \langle N \rangle d\Omega \\ G_{\alpha\beta}^1 &= \int_{\Omega} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x} N_{\beta} d\Omega = \frac{b_{\alpha}}{24} \end{aligned} \quad (\text{B.102})$$

$$\begin{aligned} [G^2] &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial N^p}{\partial y} \right\} \langle N \rangle d\Omega \\ G_{\alpha\beta}^2 &= \int_{\Omega} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial y} N_{\beta} d\Omega = \frac{c_{\alpha}}{24} \end{aligned} \quad (\text{B.103})$$

$$[G^3] = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial N^p}{\partial z} \right\} \langle N \rangle d\Omega$$

$$G_{\alpha\beta}^3 = \int_{\Omega} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial z} N_{\beta} d\Omega = \frac{d_{\alpha}}{24} \quad (\text{B.104})$$

$$[G_1]^T = \int_{\Omega} [N]^T \left[\frac{\partial N_p}{\partial x} \right] d\Omega$$

$$G_{1\alpha\beta}^T = \int_{\Omega} N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} d\Omega = \frac{b_{\beta}}{24} \quad (\text{B.105})$$

$$[P_1] = \int_{\Omega} \nabla \cdot ([N]^T \vec{w}) \left[\frac{\partial N_p}{\partial x} \right] d\Omega$$

$$\begin{aligned} P_{1\alpha\beta} &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial(N_{\alpha} w_1)}{\partial x} + \frac{\partial(N_{\alpha} w_2)}{\partial y} + \frac{\partial(N_{\alpha} w_3)}{\partial z} \right) \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \left(\langle w_1 \rangle \{N\} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x} + \langle w_2 \rangle \{N\} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial y} + \langle w_3 \rangle \{N\} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial z} \right) \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \left(\langle w_1 \rangle \left\{ \frac{\partial N}{\partial x} \right\} + \langle w_2 \rangle \left\{ \frac{\partial N}{\partial y} \right\} + \langle w_3 \rangle \left\{ \frac{\partial N}{\partial z} \right\} \right) N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} d\Omega \end{aligned} \quad (\text{B.106})$$

$$\begin{aligned} P_{1\alpha\beta} &= \frac{1}{24 \det[J]} \left((w_{1,1} + w_{1,2} + w_{1,3} + w_{1,4}) b_{\alpha} + (w_{2,1} + w_{2,2} + w_{2,3} + w_{2,4}) c_{\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + (w_{3,1} + w_{3,2} + w_{3,3} + w_{3,4}) d_{\alpha} \right) b_{\beta} + \\ &+ \frac{1}{24 \det[J]} \left((w_{1,1} b_1 + w_{1,2} b_2 + w_{1,3} b_3 + w_{1,4} b_4) + (w_{2,1} c_1 + w_{2,2} c_2 + w_{2,3} c_3 + w_{2,4} c_4) + \right. \\ &\quad \left. + (w_{3,1} d_1 + w_{3,2} d_2 + w_{3,3} d_3 + w_{3,4} d_4) \right) b_{\beta} \end{aligned}$$

(B.107)

$$[G_2]^T = \int_{\Omega} [N]^T \left[\frac{\partial N_p}{\partial y} \right] d\Omega$$

$$G_{2\alpha\beta}^T = \int_{\Omega} N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial y} d\Omega = \frac{c_{\beta}}{24} \quad (\text{B.108})$$

$$[P_2] = \int_{\Omega} \nabla \cdot ([N]^T \vec{w}) \left[\frac{\partial N_p}{\partial y} \right] d\Omega$$

$$\begin{aligned}
P_{2\alpha\beta} = & \frac{1}{24 \det[J]} \left((w_{1,1} + w_{1,2} + w_{1,3} + w_{1,4}) b_\alpha + (w_{2,1} + w_{2,2} + w_{2,3} + w_{2,4}) c_\alpha + \right. \\
& \left. + (w_{3,1} + w_{3,2} + w_{3,3} + w_{3,4}) d_\alpha \right) c_\beta + \\
& + \frac{1}{24 \det[J]} \left((w_{1,1} b_1 + w_{1,2} b_2 + w_{1,3} b_3 + w_{1,4} b_4) + (w_{2,1} c_1 + w_{2,2} c_2 + w_{2,3} c_3 + w_{2,4} c_4) + \right. \\
& \left. + (w_{3,1} d_1 + w_{3,2} d_2 + w_{3,3} d_3 + w_{3,4} d_4) \right) c_\beta
\end{aligned}
\tag{B.109}$$

$$\begin{aligned}
[G_3]^T &= \int_{\Omega} [N]^T \left[\frac{\partial N_p}{\partial z} \right] d\Omega \\
G_{3\alpha\beta}^T &= \int_{\Omega} N_\alpha \frac{\partial N_\beta}{\partial z} d\Omega = \frac{d_\beta}{24}
\end{aligned}
\tag{B.110}$$

$$\begin{aligned}
[P_3] &= \int_{\Omega} \nabla \cdot ([N]^T \vec{w}) \left[\frac{\partial N_p}{\partial z} \right] d\Omega \\
P_{3\alpha\beta} &= \frac{1}{24 \det[J]} \left((w_{1,1} + w_{1,2} + w_{1,3} + w_{1,4}) b_\alpha + (w_{2,1} + w_{2,2} + w_{2,3} + w_{2,4}) c_\alpha + \right. \\
& \left. + (w_{3,1} + w_{3,2} + w_{3,3} + w_{3,4}) d_\alpha \right) d_\beta + \\
& + \frac{1}{24 \det[J]} \left((w_{1,1} b_1 + w_{1,2} b_2 + w_{1,3} b_3 + w_{1,4} b_4) + (w_{2,1} c_1 + w_{2,2} c_2 + w_{2,3} c_3 + w_{2,4} c_4) + \right. \\
& \left. + (w_{3,1} d_1 + w_{3,2} d_2 + w_{3,3} d_3 + w_{3,4} d_4) \right) d_\beta
\end{aligned}
\tag{B.111}$$

1.1.3 Matrizes do Quarto Passo

$$[M^*] = \frac{V}{20} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{\det[J]}{120} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
C_{\alpha\beta} &= \int_{\Omega} N_\alpha \vec{w} \cdot \nabla N_\beta d\Omega \\
C_{1\beta} &= \frac{1}{120} \langle 2 \ 1 \ 1 \ 1 \rangle \left\{ \begin{bmatrix} w_{1,1} \\ w_{1,2} \\ w_{1,3} \\ w_{1,4} \end{bmatrix} b_\beta + \begin{bmatrix} w_{2,1} \\ w_{2,2} \\ w_{2,3} \\ w_{2,4} \end{bmatrix} c_\beta + \begin{bmatrix} w_{3,1} \\ w_{3,2} \\ w_{3,3} \\ w_{3,4} \end{bmatrix} d_\beta \right\}
\end{aligned}
\tag{B.112}$$

$$C_{2\beta} = \frac{1}{120} \langle 1 \ 2 \ 1 \ 1 \rangle \left\{ \begin{pmatrix} w_{1,1} \\ w_{1,2} \\ w_{1,3} \\ w_{1,4} \end{pmatrix} b_\beta + \begin{pmatrix} w_{2,1} \\ w_{2,2} \\ w_{2,3} \\ w_{2,4} \end{pmatrix} c_\beta + \begin{pmatrix} w_{3,1} \\ w_{3,2} \\ w_{3,3} \\ w_{3,4} \end{pmatrix} d_\beta \right\} \quad (\text{B.112})$$

$$C_{3\beta} = \frac{1}{120} \langle 1 \ 1 \ 2 \ 1 \rangle \left\{ \begin{pmatrix} w_{1,1} \\ w_{1,2} \\ w_{1,3} \\ w_{1,4} \end{pmatrix} b_\beta + \begin{pmatrix} w_{2,1} \\ w_{2,2} \\ w_{2,3} \\ w_{2,4} \end{pmatrix} c_\beta + \begin{pmatrix} w_{3,1} \\ w_{3,2} \\ w_{3,3} \\ w_{3,4} \end{pmatrix} d_\beta \right\} \quad (\text{B.114})$$

$$C_{4\beta} = \frac{1}{120} \langle 1 \ 1 \ 1 \ 2 \rangle \left\{ \begin{pmatrix} w_{1,1} \\ w_{1,2} \\ w_{1,3} \\ w_{1,4} \end{pmatrix} b_\beta + \begin{pmatrix} w_{2,1} \\ w_{2,2} \\ w_{2,3} \\ w_{2,4} \end{pmatrix} c_\beta + \begin{pmatrix} w_{3,1} \\ w_{3,2} \\ w_{3,3} \\ w_{3,4} \end{pmatrix} d_\beta \right\} \quad (\text{B.115})$$

$$K_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \nabla N_\alpha \cdot \left[(\alpha \nabla N_\beta) \right] d\Omega$$

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{24 \det[J]} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) (b_\alpha b_\beta + c_\alpha c_\beta + d_\alpha d_\beta) \quad (\text{B.116})$$

$$f_\alpha^Q = \int_{\Omega} N_\alpha Q^n d\Omega = \int_{\Omega} N_\alpha \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \rangle d\Omega \{Q^n\} \quad (\text{B.117})$$

$$f_1^Q = \int_{\Omega} N_1 Q^n d\Omega = \int_{\Omega} N_1 \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \rangle d\Omega \{Q^n\} =$$

$$= \frac{\det[J]}{120} \langle 2 \ 1 \ 1 \ 1 \rangle \{Q^n\} \quad (\text{B.118})$$

$$f_2^Q = \frac{\det[J]}{120} \langle 1 \ 2 \ 1 \ 1 \rangle \{Q^n\} \quad (\text{B.119})$$

$$f_3^Q = \frac{\det[J]}{120} \langle 1 \ 1 \ 2 \ 1 \rangle \{Q^n\} \quad (\text{B.120})$$

$$f_4^Q = \frac{\det[J]}{120} \langle 1 \ 1 \ 1 \ 2 \rangle \{Q^n\} \quad (\text{B.121})$$

$$C_{\alpha\beta}^{\text{est}} = \int_{\Omega} \nabla \cdot (N_\alpha \vec{w}) \left[(\vec{w} \cdot \nabla N_\beta) \right] d\Omega$$

$$C_{1\beta}^{est} = \frac{1}{120} \frac{1}{\det[J]} \left(\begin{aligned} & \left((w_{1,1}b_1 + w_{1,2}b_2 + w_{1,3}b_3 + w_{1,4}b_4) + \right. \\ & \left. + (w_{2,1}c_1 + w_{2,2}c_2 + w_{2,3}c_3 + w_{2,4}c_4) + \right. \\ & \left. + (w_{3,1}d_1 + w_{3,2}d_2 + w_{3,3}d_3 + w_{3,4}d_4) \right) \langle 2 \ 1 \ 1 \ 1 \rangle + \\ & \left(b_1 \langle w_{1,1} \ w_{1,2} \ w_{1,3} \ w_{1,4} \rangle + \right. \\ & \left. + c_1 \langle w_{2,1} \ w_{2,2} \ w_{2,3} \ w_{2,4} \rangle + \right. \\ & \left. + d_1 \langle w_{3,1} \ w_{3,2} \ w_{3,3} \ w_{3,4} \rangle \right) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right) \times \left\{ \begin{bmatrix} w_{1,1} \\ w_{1,2} \\ w_{1,3} \\ w_{1,4} \end{bmatrix} b_\beta + \begin{bmatrix} w_{2,1} \\ w_{2,2} \\ w_{2,3} \\ w_{2,4} \end{bmatrix} c_\beta + \begin{bmatrix} w_{3,1} \\ w_{3,2} \\ w_{3,3} \\ w_{3,4} \end{bmatrix} d_\beta \right\} \quad (\text{B.122})$$

$$C_{2\beta}^{est} = \frac{1}{120} \frac{1}{\det[J]} \left(\begin{aligned} & \left((w_{1,1}b_1 + w_{1,2}b_2 + w_{1,3}b_3 + w_{1,4}b_4) + \right. \\ & \left. + (w_{2,1}c_1 + w_{2,2}c_2 + w_{2,3}c_3 + w_{2,4}c_4) + \right. \\ & \left. + (w_{3,1}d_1 + w_{3,2}d_2 + w_{3,3}d_3 + w_{3,4}d_4) \right) \langle 1 \ 2 \ 1 \ 1 \rangle + \\ & \left(b_2 \langle w_{1,1} \ w_{1,2} \ w_{1,3} \ w_{1,4} \rangle + \right. \\ & \left. + c_2 \langle w_{2,1} \ w_{2,2} \ w_{2,3} \ w_{2,4} \rangle + \right. \\ & \left. + d_2 \langle w_{3,1} \ w_{3,2} \ w_{3,3} \ w_{3,4} \rangle \right) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right) \times \left\{ \begin{bmatrix} w_{1,1} \\ w_{1,2} \\ w_{1,3} \\ w_{1,4} \end{bmatrix} b_\beta + \begin{bmatrix} w_{2,1} \\ w_{2,2} \\ w_{2,3} \\ w_{2,4} \end{bmatrix} c_\beta + \begin{bmatrix} w_{3,1} \\ w_{3,2} \\ w_{3,3} \\ w_{3,4} \end{bmatrix} d_\beta \right\} \quad (\text{B.123})$$

$$C_{3\beta}^{est} = \frac{1}{120} \frac{1}{\det[J]} \left(\begin{aligned} & \left((w_{1,1}b_1 + w_{1,2}b_2 + w_{1,3}b_3 + w_{1,4}b_4) + \right. \\ & \left. + (w_{2,1}c_1 + w_{2,2}c_2 + w_{2,3}c_3 + w_{2,4}c_4) + \right. \\ & \left. + (w_{3,1}d_1 + w_{3,2}d_2 + w_{3,3}d_3 + w_{3,4}d_4) \right) \langle 1 \ 1 \ 2 \ 1 \rangle + \\ & \left(b_3 \langle w_{1,1} \ w_{1,2} \ w_{1,3} \ w_{1,4} \rangle + \right. \\ & \left. + c_3 \langle w_{2,1} \ w_{2,2} \ w_{2,3} \ w_{2,4} \rangle + \right. \\ & \left. + d_3 \langle w_{3,1} \ w_{3,2} \ w_{3,3} \ w_{3,4} \rangle \right) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right) \times \left\{ \begin{bmatrix} w_{1,1} \\ w_{1,2} \\ w_{1,3} \\ w_{1,4} \end{bmatrix} b_\beta + \begin{bmatrix} w_{2,1} \\ w_{2,2} \\ w_{2,3} \\ w_{2,4} \end{bmatrix} c_\beta + \begin{bmatrix} w_{3,1} \\ w_{3,2} \\ w_{3,3} \\ w_{3,4} \end{bmatrix} d_\beta \right\} \quad (\text{B.124})$$

$$C_{4\beta}^{est} = \frac{1}{120} \frac{1}{\det[J]} \left(\begin{aligned} & \left((w_{1,1}b_1 + w_{1,2}b_2 + w_{1,3}b_3 + w_{1,4}b_4) + \right. \\ & \left. + (w_{2,1}c_1 + w_{2,2}c_2 + w_{2,3}c_3 + w_{2,4}c_4) + \right. \\ & \left. + (w_{3,1}d_1 + w_{3,2}d_2 + w_{3,3}d_3 + w_{3,4}d_4) \right) \langle 1 \ 1 \ 1 \ 2 \rangle + \\ & \left(b_4 \langle w_{1,1} \ w_{1,2} \ w_{1,3} \ w_{1,4} \rangle + \right. \\ & \left. + c_4 \langle w_{2,1} \ w_{2,2} \ w_{2,3} \ w_{2,4} \rangle + \right. \\ & \left. + d_4 \langle w_{3,1} \ w_{3,2} \ w_{3,3} \ w_{3,4} \rangle \right) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right) \times \left\{ \begin{bmatrix} w_{1,1} \\ w_{1,2} \\ w_{1,3} \\ w_{1,4} \end{bmatrix} b_\beta + \begin{bmatrix} w_{2,1} \\ w_{2,2} \\ w_{2,3} \\ w_{2,4} \end{bmatrix} c_\beta + \begin{bmatrix} w_{3,1} \\ w_{3,2} \\ w_{3,3} \\ w_{3,4} \end{bmatrix} d_\beta \right\} \quad (\text{B.125})$$

$$f_\alpha^{Qest} = \int_\Omega N_\alpha \vec{w} \cdot \nabla Q^n d\Omega = \int_\Omega N_\alpha w_1 \frac{\partial Q^n}{\partial x} d\Omega + \int_\Omega N_\alpha w_2 \frac{\partial Q^n}{\partial y} d\Omega + \int_\Omega N_\alpha w_3 \frac{\partial Q^n}{\partial z} d\Omega \quad (\text{B.126})$$

$$\begin{aligned}
f_{\alpha}^{Qest} = & \left\langle w_{1,1} \quad w_{1,2} \quad w_{1,3} \quad w_{1,4} \right\rangle \int_{\Omega} N_{\alpha} \left\{ \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{matrix} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial x} \right\rangle d\Omega \{Q^n\} + \\
& + \left\langle w_{2,1} \quad w_{2,2} \quad w_{2,3} \quad w_{2,4} \right\rangle \int_{\Omega} N_{\alpha} \left\{ \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{matrix} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial y} \right\rangle d\Omega \{Q^n\} + \\
& + \left\langle w_{3,1} \quad w_{3,2} \quad w_{3,3} \quad w_{3,4} \right\rangle \int_{\Omega} N_{\alpha} \left\{ \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{matrix} \right\} \left\langle \frac{\partial N}{\partial z} \right\rangle d\Omega \{Q^n\}
\end{aligned} \tag{B.127}$$

$$\begin{aligned}
f_{\alpha}^{Qest} = & \left\langle w_{1,1} \quad w_{1,2} \quad w_{1,3} \quad w_{1,4} \right\rangle \int_{\Omega} N_{\alpha} \left\{ \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{matrix} \right\} d\Omega \frac{1}{\det[J]} \langle b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \rangle \{Q^n\} + \\
& + \left\langle w_{2,1} \quad w_{2,2} \quad w_{2,3} \quad w_{2,4} \right\rangle \int_{\Omega} N_{\alpha} \left\{ \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{matrix} \right\} d\Omega \frac{1}{\det[J]} \langle c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \rangle \{Q^n\} + \\
& + \left\langle w_{3,1} \quad w_{3,2} \quad w_{3,3} \quad w_{3,4} \right\rangle \int_{\Omega} N_{\alpha} \left\{ \begin{matrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{matrix} \right\} d\Omega \frac{1}{\det[J]} \langle d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \rangle \{Q^n\}
\end{aligned} \tag{B.128}$$

$$\begin{aligned}
f_1^{Qest} = & \frac{1}{120} (2w_{1,1} + w_{1,2} + w_{1,3} + w_{1,4}) \langle b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \rangle \{Q^n\} + \\
& + \frac{1}{120} (2w_{2,1} + w_{2,2} + w_{2,3} + w_{2,4}) \langle c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \rangle \{Q^n\} + \\
& + \frac{1}{120} (2w_{3,1} + w_{3,2} + w_{3,3} + w_{3,4}) \langle d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \rangle \{Q^n\}
\end{aligned} \tag{B.129}$$

$$\begin{aligned}
f_2^{Qest} &= \frac{1}{120} (w_{1,1} + 2w_{1,2} + w_{1,3} + w_{1,4}) \langle b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \rangle \{Q^n\} + \\
&+ \frac{1}{120} (w_{2,1} + 2w_{2,2} + w_{2,3} + w_{2,4}) \langle c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \rangle \{Q^n\} + \\
&+ \frac{1}{120} (w_{3,1} + 2w_{3,2} + w_{3,3} + w_{3,4}) \langle d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \rangle \{Q^n\}
\end{aligned} \tag{B.130}$$

$$\begin{aligned}
f_3^{Qest} &= \frac{1}{120} (w_{1,1} + w_{1,2} + 2w_{1,3} + w_{1,4}) \langle b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \rangle \{Q^n\} + \\
&+ \frac{1}{120} (w_{2,1} + w_{2,2} + 2w_{2,3} + w_{2,4}) \langle c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \rangle \{Q^n\} + \\
&+ \frac{1}{120} (w_{3,1} + w_{3,2} + 2w_{3,3} + w_{3,4}) \langle d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \rangle \{Q^n\}
\end{aligned} \tag{B.131}$$

$$\begin{aligned}
f_4^{Qest} &= \frac{1}{120} (w_{1,1} + w_{1,2} + w_{1,3} + 2w_{1,4}) \langle b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \rangle \{Q^n\} + \\
&+ \frac{1}{120} (w_{2,1} + w_{2,2} + w_{2,3} + 2w_{2,4}) \langle c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \rangle \{Q^n\} + \\
&+ \frac{1}{120} (w_{3,1} + w_{3,2} + w_{3,3} + 2w_{3,4}) \langle d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \rangle \{Q^n\}
\end{aligned} \tag{B.132}$$

2. DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES CLSVOF PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS POR MÍNIMOS QUADRADOS

De acordo com Jiang (1998), definindo R de acordo com a Eq. (A.132), aplica-se o Least Square FEM como segue:

$$\frac{\alpha^{t+1} - \alpha^t}{\Delta t} + (1 - \theta) \nabla \cdot (\bar{u} \alpha)^t + \theta \nabla \cdot (\bar{u} \alpha)^{t+1} = R \tag{B.133}$$

$$0 \leq \theta \leq 1$$

Funcional

$$I(\alpha) = \int_{\Omega} R^2 d\Omega = \int_{\Omega} R^T \cdot R d\Omega \tag{B.134}$$

Primeira variação do funcional

$$\delta I(\alpha) = 2 \int_{\Omega} R \delta R d\Omega = 0 \quad (\text{minimiza o resíduo quadrado})$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial \alpha_n} R \delta \alpha_n d\Omega = 0$$

$$\delta \alpha_n \int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial \alpha_n} R d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial \alpha_n} R d\Omega = 0 \quad (\text{B.135})$$

$$R = \frac{\langle N_q \rangle \{\alpha_q\}^{t+1} - \langle N_q \rangle \{\alpha_q\}^t}{\Delta t} + (1 - \theta) \nabla \cdot (\bar{u} \langle N_q \rangle) \{\alpha_q\}^t + \theta \nabla \cdot (\bar{u} \langle N_q \rangle) \{\alpha_q\}^{t+1}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha^{t+1}} = \frac{\langle N_p \rangle}{\Delta t} + \theta \nabla \cdot (\bar{u} \langle N_p \rangle)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left\{ \langle N_p \rangle + \Delta t \theta \nabla \cdot (\bar{u} \langle N_p \rangle) \right\} \langle N_q \rangle d\Omega \{\alpha_q\}^{t+1} + \\ & \Delta t \theta \int_{\Omega} \left\{ \langle N_p \rangle + \Delta t \theta \nabla \cdot (\bar{u} \langle N_p \rangle) \right\} \nabla \cdot (\bar{u} \langle N_q \rangle) d\Omega \{\alpha_q\}^{t+1} = \\ & = \int_{\Omega} \left\{ \langle N_p \rangle + \Delta t \theta \nabla \cdot (\bar{u} \langle N_p \rangle) \right\} \langle N_q \rangle d\Omega \{\alpha_q\}^t - \\ & - \Delta t (1 - \theta) \int_{\Omega} \left\{ \langle N_p \rangle + \Delta t \theta \nabla \cdot (\bar{u} \langle N_p \rangle) \right\} \nabla \cdot (\bar{u} \langle N_q \rangle) d\Omega \{\alpha_q\}^t \\ & \int_{\Omega} \left[\langle N_p \rangle \langle N_q \rangle + \Delta t \theta \left\{ \nabla \cdot (\bar{u} N_p) \right\} \langle N_q \rangle \right] d\Omega \{\alpha_q\}^{t+1} + \\ & \Delta t \theta \int_{\Omega} \left[\langle N_p \rangle \left\{ \nabla \cdot (\bar{u} N_q) \right\} + \left\{ \Delta t \theta \nabla \cdot (\bar{u} N_p) \right\} \left\{ \nabla \cdot (\bar{u} N_q) \right\} \right] d\Omega \{\alpha_q\}^{t+1} = \\ & = \int_{\Omega} \left[\langle N_p \rangle \langle N_q \rangle + \Delta t \theta \left\{ \nabla \cdot (\bar{u} N_p) \right\} \langle N_q \rangle \right] d\Omega \{\alpha_q\}^t - \\ & - \Delta t (1 - \theta) \int_{\Omega} \left[\langle N_p \rangle \left\{ \nabla \cdot (\bar{u} N_q) \right\} + \left\{ \Delta t \theta \nabla \cdot (\bar{u} N_p) \right\} \left\{ \nabla \cdot (\bar{u} N_q) \right\} \right] d\Omega \{\alpha_q\}^t \end{aligned}$$

$$[M] \{\alpha_q\}^{t+1} + \Delta t \theta [C] \{\alpha_q\}^{t+1} = [M] \{\alpha_q\}^t + \Delta t (1 - \theta) [C] \{\alpha_q\}^t \quad (\text{B.136})$$

$$[M] = \int_{\Omega} \left[\{N_p\} \langle N_q \rangle + \Delta t \theta \{ \nabla \cdot (\bar{u} N_p) \} \langle N_q \rangle \right] d\Omega$$

$$[C] = \int_{\Omega} \left[\{N_p\} \langle \nabla \cdot (\bar{u} N_q) \rangle + \{ \Delta t \theta \nabla \cdot (\bar{u} N_p) \} \langle \nabla \cdot (\bar{u} N_q) \rangle \right] d\Omega$$

$$M_{pq} = \int_{\Omega} \left(N_p N_q + \Delta t \theta \nabla \cdot (\bar{u} N_p) N_q \right) d\Omega$$

$$C_{pq} = \int_{\Omega} \left(N_p \nabla \cdot (\bar{u} N_q) + \Delta t \theta \nabla \cdot (\bar{u} N_p) \nabla \cdot (\bar{u} N_q) \right) d\Omega$$

$$\nabla \cdot (\bar{u} N_p) = \bar{u} \cdot \nabla N_p + \nabla \cdot \bar{u} N_p$$

p e q varia de 1 até o número de nós do elemento (p, q = 1, 4)

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \bar{w} \cdot \nabla \phi = S(\phi) \quad (B.137)$$

$$\bar{w} = S(\phi) \frac{\nabla d}{|\nabla d|}$$

$$\frac{\phi^{\tau+1} - \phi^{\tau}}{\Delta \tau} + (1 - \theta) (\bar{w} \cdot \nabla \phi)^{\tau} + \theta (\bar{w} \cdot \nabla \phi)^{\tau+1} = S(\phi)$$

$$\frac{\phi^{\tau+1} - \phi^{\tau}}{\Delta \tau} + (1 - \theta) (\bar{w} \cdot \nabla \phi)^{\tau} + \theta (\bar{w} \cdot \nabla \phi)^{\tau+1} - S(\phi) = R$$

$$R = \frac{\langle N \rangle \{ \phi \}^{\tau+1} - \langle N \rangle \{ \phi \}^{\tau}}{\Delta \tau} + (1 - \theta) (\bar{w} \cdot \langle \nabla N \rangle)^{\tau} \{ \phi \}^{\tau} + \theta (\bar{w} \cdot \langle \nabla N \rangle) \{ \phi \}^{\tau+1} - S(\phi)$$

$$\frac{\partial R}{\partial d^{\tau+1}} = \frac{\langle N \rangle}{\Delta \tau} + \theta (\bar{w} \cdot \langle \nabla N \rangle)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial d^{\tau+1}} R d\Omega = 0$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left\{ \{N_p\} + \Delta t \theta (\vec{w} \cdot \{\nabla N_p\}) \right\} \langle N_q \rangle d\Omega \{\phi_q\}^{t+1} + \\
& \Delta t \theta \int_{\Omega} \left\{ \{N_p\} + \Delta t \theta (\vec{w} \cdot \{\nabla N_p\}) \right\} \vec{w} \cdot (\langle \nabla N_q \rangle) d\Omega \{\phi_q\}^{t+1} = \\
& = \int_{\Omega} \left\{ \{N_p\} + \Delta t \theta (\vec{w} \cdot \{\nabla N_p\}) \right\} \langle N_q \rangle d\Omega \{\phi_q\}^t - \\
& - \Delta t (1 - \theta) \int_{\Omega} \left\{ \{N_p\} + \Delta t \theta (\vec{w} \cdot \{\nabla N_p\}) \right\} \vec{w} \cdot (\langle \nabla N_q \rangle) d\Omega \{\phi_q\}^t + \\
& + \int_{\Omega} \left\{ \{N_p\} + \Delta t \theta (\vec{w} \cdot \{\nabla N_p\}) \right\} S(\varphi) d\Omega
\end{aligned}$$

$$[M] \{\phi_q\}^{t+1} + \Delta t \theta [C] \{\phi_q\}^{t+1} = [M] \{\phi_q\}^t + \Delta t (1 - \theta) [C] \{\phi_q\}^t + \{f_p\} \quad (\text{B.138})$$

$$\begin{aligned}
[M] &= \int_{\Omega} \left\{ \{N_p\} + \Delta t \theta (\vec{w} \cdot \{\nabla N_p\}) \right\} \langle N_q \rangle d\Omega \\
[C] &= \int_{\Omega} \left\{ \{N_p\} + \Delta t \theta (\vec{w} \cdot \{\nabla N_p\}) \right\} \vec{w} \cdot (\langle \nabla N_q \rangle) d\Omega \\
\{f\} &= \int_{\Omega} \left\{ \{N_p\} + \Delta t \theta (\vec{w} \cdot \{\nabla N_p\}) \right\} \Delta \tau S(\varphi) d\Omega
\end{aligned}$$

3. DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES CLSVOF PELO MÉTODO DE GALERKIN CLÁSSICO

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V} \alpha) = 0 \quad (\text{B.139})$$

Multiplicando (A.139) por uma função peso N_i e integrando num volume Ω :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial t} N_i d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{V} \alpha) N_i d\Omega = 0 \quad (\text{B.140})$$

Mas:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{V} \alpha) N_i d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{V} \alpha N_i) d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla N_i \cdot \vec{V}) \alpha d\Omega = \int_{\Gamma} \alpha N_i \vec{V} \cdot \vec{n} d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla N_i \cdot \vec{V}) \alpha d\Omega \quad (\text{B.141})$$

Sendo Γ a fronteira do volume Ω .

Aplicando Galerkin Clássico:

$$\alpha_e = \sum_{j=1}^{nnod} A_{j(t)} N_{j(\tilde{x})}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial A_e}{\partial t} N_i N_j d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla N_i \cdot \vec{V}) A_e N_j d\Omega - \int_{\Gamma} A_e N_i N_j \vec{V} \cdot \vec{n} d\Gamma = 0 \quad (B.142)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \vec{w} \cdot \nabla \phi = S(\phi) \quad (B.143)$$

Multiplicando (A.143) por uma função peso N_i e integrando num volume Ω :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} N_i d\Omega + \int_{\Omega} \vec{w} \cdot \nabla \phi N_i d\Omega = \int_{\Omega} S(\phi) N_i d\Omega \quad (B.144)$$

Mas:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{w} \phi) d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{w} \alpha) d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \phi \cdot \vec{w}) d\Omega = \int_{\Gamma} \phi \vec{w} \cdot \vec{n} d\Gamma - \int_{\Omega} (\nabla \phi \cdot \vec{w}) d\Omega \quad (B.145)$$

Sendo Γ a fronteira do volume Ω .

Aplicando Galerkin Clássico:

$$\phi_e = \sum_{j=1}^{nnod} F_{j(t)} N_{j(\tilde{x})}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F_e}{\partial t} N_i N_j d\Omega + \int_{\Omega} F (\nabla N_j \cdot \vec{w}) N_i d\Omega - \int_{\Gamma} F \vec{w} \cdot \vec{n} N_i N_j d\Gamma = \int_{\Omega} S(\phi) N_i d\Omega \quad (B.146)$$

4. DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO MÉTODO *LEVEL SET* ACOPLADA COM SUA EQUAÇÃO DE ESTABILIZAÇÃO

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\vec{u} + \lambda \vec{U}_{\varepsilon}) \cdot \nabla \phi - \lambda \text{sign}(\phi) S_{\varepsilon} = 0 \quad (B.147)$$

$$\vec{U}_\varepsilon = \text{sign}(\phi) \frac{\nabla \phi}{\varepsilon + (1-\varepsilon)\|\nabla \phi\|} \quad (\text{B.148})$$

$$S_\varepsilon = \frac{\|\nabla \phi\|}{\varepsilon + (1-\varepsilon)\|\nabla \phi\|} S = \frac{\|\nabla \phi\|}{\varepsilon + (1-\varepsilon)\|\nabla \phi\|} \cdot \left[1 - \left(\frac{\phi}{E} \right)^2 \right] \quad (\text{B.149})$$

$$S = \|\nabla \phi\| = 1 - \left(\frac{\phi}{E} \right)^2 \quad (\text{B.150})$$

$$\phi = E \tanh \left(\frac{\phi}{E} \right) \quad (\text{B.151})$$

Sendo: E uma espessura definida pelo usuário

ε o comprimento característico da malha

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{\Delta t}$$

ϕ a função *level set* modificada

ϕ a função *level set* original

Usando a aproximação de Taylor para o termo temporal:

$$\frac{\phi^{k+1} - \phi^k}{\Delta t} + \left(\vec{u}^{k+1} + \lambda \vec{U}_\varepsilon^k \right) \cdot \nabla \phi^k - \lambda \text{sign}(\phi^k) S_\varepsilon^k = R \quad (\text{B.152})$$

Definindo R como um resíduo e supondo, pelo método de Elementos Finitos, que

$$\phi(\vec{x}, t) = \langle N(\vec{x}) \rangle \{ \Phi(t) \}; \text{ Então,}$$

$$R = \frac{1}{\Delta t} \langle N \rangle \{ \Phi^{k+1} \} - \frac{1}{\Delta t} \langle N \rangle \{ \Phi^k \} + \left\langle \left(\vec{u}^{k+1} + \lambda \vec{U}_\varepsilon^k \right) \cdot \nabla N \right\rangle \{ \Phi^k \} - \lambda \text{sign}(\phi^k) S_\varepsilon^k$$

$$\frac{\partial R}{\partial \Phi_i^{k+1}} = \frac{N_i}{\Delta t}$$

Para minimizar R, aplicando LS-FEM totalmente explícito:

$$\int \frac{\partial R}{\partial \phi} R = 0$$

$$\int_{\Omega} N_i \left[\frac{1}{\Delta t} \langle N \rangle \{ \Phi^{k+1} \} - \frac{1}{\Delta t} \langle N \rangle \{ \Phi^k \} + \left\langle \left(\vec{u}^{k+1} + \lambda \vec{U}_{\varepsilon}^k \right) \cdot \nabla N \right\rangle \{ \Phi^k \} - \lambda \text{sign}(\phi^k) S_{\varepsilon}^k \right] d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} \{ N \} \left[\frac{1}{\Delta t} \langle N \rangle \{ \Phi^{k+1} \} - \frac{1}{\Delta t} \langle N \rangle \{ \Phi^k \} + \left\langle \left(\vec{u}^{k+1} + \lambda \vec{U}_{\varepsilon}^k \right) \cdot \nabla N \right\rangle \{ \Phi^k \} - \lambda \text{sign}(\phi^k) S_{\varepsilon}^k \right] d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{\Delta t} \{ N \} \langle N \rangle \{ \Phi^{k+1} \} - \frac{1}{\Delta t} \{ N \} \langle N \rangle \{ \Phi^k \} + \{ N \} \left\langle \left(\vec{u}^{k+1} + \lambda \vec{U}_{\varepsilon}^k \right) \cdot \nabla N \right\rangle \{ \Phi^k \} - \{ N \} \lambda \text{sign}(\phi^k) S_{\varepsilon}^k \right] d\Omega = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} \{ N \} \langle N \rangle d\Omega \{ \Phi^{k+1} \} &= \int_{\Omega} \frac{1}{\Delta t} \{ N \} \langle N \rangle d\Omega \{ \Phi^k \} - \int_{\Omega} \{ N \} \left\langle \left(\vec{u}^{k+1} + \lambda \vec{U}_{\varepsilon}^k \right) \cdot \nabla N \right\rangle d\Omega \{ \Phi^k \} \\ &+ \int_{\Omega} \{ N \} \lambda \text{sign}(\phi^k) S_{\varepsilon}^k d\Omega \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\Delta t} [M] \{ \Phi^{k+1} \} = \frac{1}{\Delta t} [M] \{ \Phi^k \} - [C] \{ \Phi^k \} + \{ f \} \quad (\text{B.153})$$

$$[M] = \int_{\Omega} \{ N \} \langle N \rangle d\Omega ; \quad (\text{B.154})$$

$$M_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} N_{\alpha} N_{\beta} d\Omega$$

$$[C] = \int_{\Omega} \{ N \} \left\langle \left(\vec{u}^{k+1} + \lambda \vec{U}_{\varepsilon}^k \right) \cdot \nabla N \right\rangle d\Omega ; \quad (\text{B.155})$$

$$C_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} N_{\alpha} \left(\vec{u}^{k+1} + \lambda \vec{U}_{\varepsilon}^k \right) \cdot \nabla N_{\beta} d\Omega ; \quad (\text{B.156})$$

$$C_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} N_{\alpha} \left[\left(u^{k+1} + \lambda U_{\varepsilon}^k \right) \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} + \left(v^{k+1} + \lambda V_{\varepsilon}^k \right) \frac{\partial N_{\beta}}{\partial y} + \left(w^{k+1} + \lambda W_{\varepsilon}^k \right) \frac{\partial N_{\beta}}{\partial z} \right] d\Omega ; \quad (\text{B.157})$$

$$\{ f \} = \int_{\Omega} \{ N \} \lambda \text{sign}(\phi^k) S_{\varepsilon}^k d\Omega ; \quad (\text{B.158})$$

$$f_{\alpha} = \int_{\Omega} N_{\alpha} \lambda \text{sign}(\phi^k) S_{\varepsilon}^k d\Omega . \quad (\text{B.159})$$

APÊNDICE C - MÉTODO DO PASSO DE TEMPO DUPLO

O equacionamento descrito pelo método de compressibilidade artificial aproxima diferenças de densidade sofrida por um material através de uma relação entre uma variação de pressão e uma compressibilidade do fluido, como descrito anteriormente. Assim, a Equação (62) somente representa escoamentos incompressíveis quando tratada no regime permanente.

Para simular, portanto, um escoamento incompressível utilizando o equacionamento de compressibilidade artificial, faz-se necessário que em todo passo de tempo a condição de regime permanente seja obedecida. O método de passo de tempo duplo, ou *dual time step*, propõe que cada passo de tempo real seja iterado dentro de pequenos passos de tempo artificial afim de atingir o “regime estacionário instantâneo”. De acordo com Nithiarasu (2003) e Zienkiewicz *et al.*, (2014) para que isso aconteça, adiciona-se um termo de passo de tempo artificial nas equações do momento, tal como descrito na Eq. (C.1).

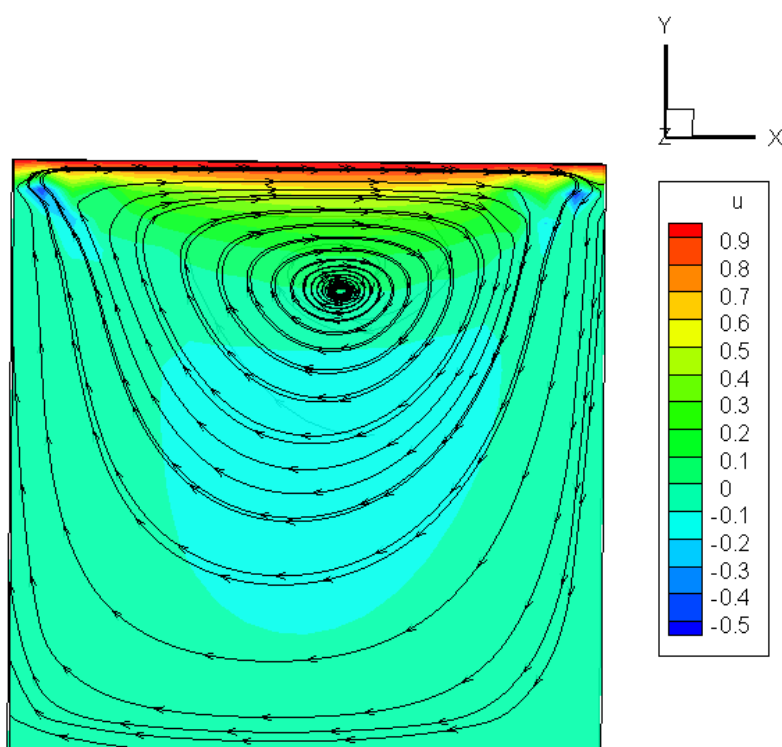
$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \vec{u}^m}{\partial \tau} + \rho \frac{\partial \vec{u}^n}{\partial t} + \rho \left[\left(\vec{u}^n - \vec{u}^c \right) \cdot \nabla \right] \vec{u}^n = \rho \vec{g} \cos \chi - \\ - \nabla p + \nabla \cdot \left[\mu \left(\nabla \vec{u}^n + \nabla^T \vec{u}^n - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{u}^n \vec{I} \right) \right] \end{aligned} \quad (C.1)$$

Na Equação (C.1) o superescrito m se refere ao instante de tempo real, τ é tempo real e t é o pseudo tempo. Nithiarasu (2003) e Zienkiewicz *et al.*, (2014) afirmam que os resultados das iterações intermediárias não influem no passo de tempo real. Além do mais, o *dual time step* não adiciona nenhuma restrição para a resolução do passo de tempo real, bem como estabiliza os termos convectivos da equação do momento e estabiliza a solução de simulações explícitas no tempo sem adicionar nenhum procedimento adicional de solução.

Como esse método exige que seja atingido o “regime permanente instantâneo”, o mesmo é muito custoso em questão de tempo real de simulação. Devido à isso, o mesmo não foi implementado no presente trabalho. Entretanto, vale ressaltar que o método gera bons resultados para simulações de fluido dinâmica, como reportado por Malan, Lewis e Nithiarasu (2002) e Nithiarasu (2005).

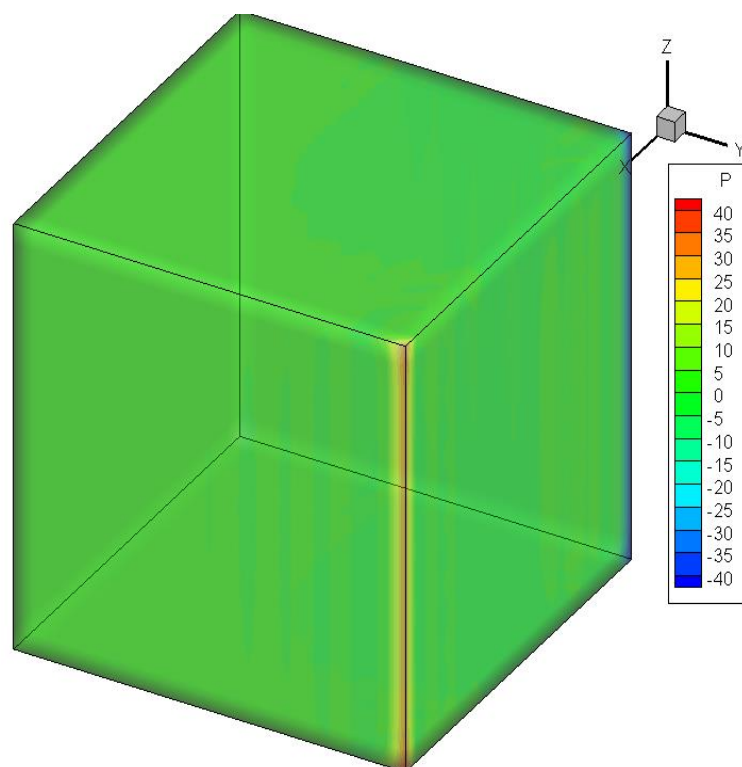
APÊNDICE D – RESULTADOS PARA O PROBLEMA DA CAVIDADE CONSIDERANDO UMA MALHA HEXAÉDRICA

Figura D. 1 – Projeção bidimensional das linhas de corrente do problema da cavidade para $Re=100$ após 5 segundos de simulação utilizando uma malha hexaédrica estruturada e a equação de Poisson para obtenção do campo de pressão



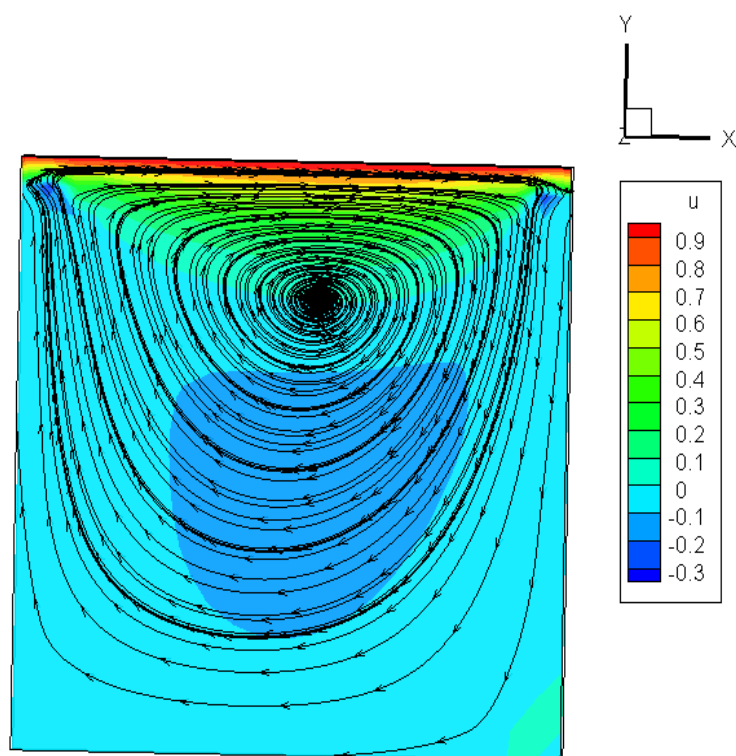
Fonte: Próprio Autor (2020)

Figura D. 2 – Campo de pressão do problema da cavidade para $Re=100$ após 5 segundos de simulação utilizando uma malha hexaédrica estruturada e equação de Poisson para obtenção do campo de pressão



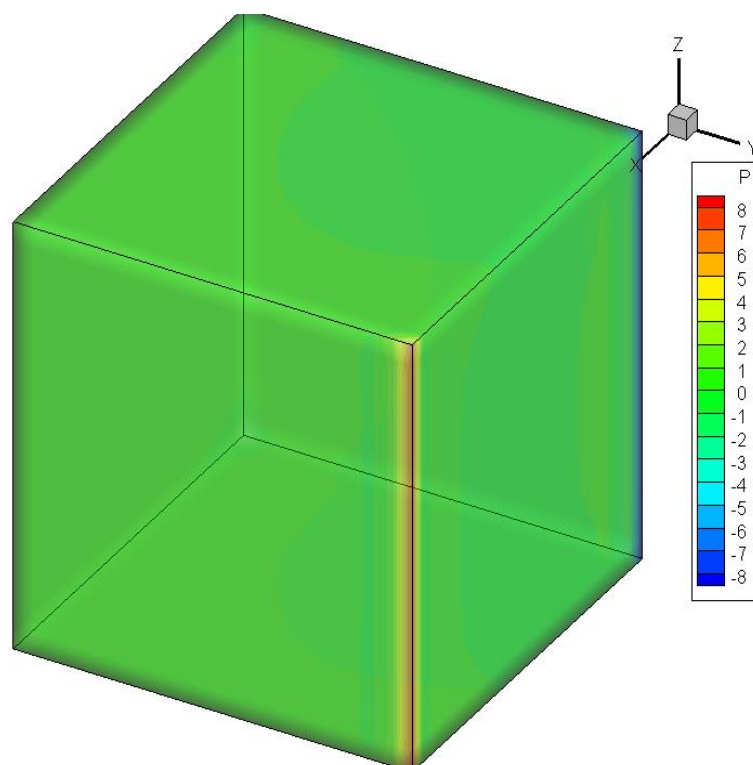
Fonte: Próprio Autor (2020)

Figura D. 3 – Projeção bidimensional das linhas de corrente do problema da cavidade para $Re=100$ após 5 segundos de simulação utilizando uma malha hexaédrica estruturada e o método da compressibilidade artificial para obtenção do campo de pressão



Fonte: Próprio Autor (2020)

Figura D. 4 – Campo de pressão do problema da cavidade para $Re=100$ após 5 segundos de simulação utilizando uma malha hexaédrica estruturada e o método da compressibilidade artificial para obtenção do campo de pressão



Fonte: Próprio Autor (2020)

APÊNDICE E – RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesse Apêndice são mostradas tabelas com valores numéricos de resultados mostrados graficamente nos itens 5 e 6. As Tabelas a seguir indicam à qual Figura elas se referem.

Tabela E.1 – Valores numéricos referentes à Figura 18

Resultados para Malha Hexaédrica			Resultados para Malha Tetraédrica		
y em x=z=0,5	u resolvendo a pressão pelo método da Compressibilidade Artificial	u resolvendo a pressão pela Equação de Poisson	y em x=z=0,5	u resolvendo a pressão pelo método da Compressibilidade Artificial	u resolvendo a pressão pela Equação de Poisson
0,00	0	0	0,000	0,000	0,00
0,05	-0,0320	-0,0300	0,467	-0,15509	-0,16
0,10	-0,0570	-0,0600	0,515	-0,15256	-0,16
0,15	-0,0770	-0,0800	0,369	-0,14504	-0,15
0,20	-0,0960	-0,1000	0,414	-0,15071	-0,15
0,25	-0,1120	-0,1200	0,539	-0,14834	-0,15
0,30	-0,1260	-0,1300	0,567	-0,1432	-0,15
0,35	-0,1380	-0,1500	0,339	-0,1373	-0,14
0,40	-0,1460	-0,1500	0,358	-0,14055	-0,14
0,45	-0,1510	-0,1600	0,619	-0,12413	-0,13
0,50	-0,1500	-0,1600	0,298	-0,12633	-0,13
0,55	-0,1440	-0,1500	0,27	-0,1187	-0,12
0,60	-0,1300	-0,1400	0,231	-0,10669	-0,11
0,65	-0,1080	-0,1200	0,663	-0,10287	-0,11
0,70	-0,0770	-0,0900	0,2	-0,09601	-0,1
0,75	-0,0340	-0,0500	0,693	-0,08555	-0,09
0,80	0,0313	0,0180	0,694	-0,08295	-0,09
0,85	0,1259	0,1130	0,159	-0,08043	-0,08
0,90	0,2829	0,2690	0,154	-0,07915	-0,08
0,95	0,5476	0,5340	0,145	-0,07563	-0,08
1,00	1,0000	1,0000	0,105	-0,05917	-0,06
-	-	-	0,728	-0,05673	-0,06
-	-	-	0,116	-0,06294	-0,06
-	-	-	0,085	-0,04905	-0,05
-	-	-	0,737	-0,04867	-0,05
-	-	-	0,048	-0,02966	-0,03
-	-	-	0,049	-0,03074	-0,03
-	-	-	0,779	-0,00166	-0,01
-	-	-	0,798	0,02076	0,02
-	-	-	0,82	0,06028	0,06
-	-	-	0,829	0,06714	0,06

Tabela E.1 – Valores numéricos referentes à Figura 18 (continuação)

Resultados para Malha Hexaédrica	Resultados para Malha Tetraédrica
----------------------------------	-----------------------------------

y em x=z=0,5	u resolvendo a pressão pelo método da Compressibilidade Artificial	u resolvendo a pressão pela Equação de Poisson	y em x=z=0,5	u resolvendo a pressão pelo método da Compressibilidade Artificial	u resolvendo a pressão pela Equação de Poisson
-	-	-	0,868	0,16144	0,16
-	-	-	0,893	0,23968	0,24
-	-	-	0,898	0,24712	0,24
-	-	-	0,911	0,31891	0,32
-	-	-	0,929	0,39765	0,39
-	-	-	0,941	0,49689	0,49
-	-	-	1,000	1,000	1,00

Fonte: Elaborado pelo autor (2020)

Tabela E.2 – Valores numéricos referentes à várias Figuras

Dados referentes à Figura 23		Dados referentes à Figura 31		Dados referentes à Figura 33	
y	u	Tempo(ms)	Raio(mm)	Tempo(ms)	Raio(mm)
0,0000	0,0000	0,008	0,137188976	0,006	0,117498975
0,084035	-2,93555	0,016	0,145472276	0,012	0,130810301
0,1195	-3,28899	0,024	0,152476117	0,018	0,142242879
0,141028	-3,39766	0,032	0,1585973	0,024	0,152414153
0,164871	-3,38499	0,04	0,164060209	0,03	0,161660603
0,1894	-3,27443	0,048	0,169007328	0,036	0,170190346
0,206	-3,18781	0,056	0,173536172	0,042	0,178143014
0,235279	-2,96419	0,064	0,177717101	0,048	0,185617801
0,2792	-2,53432	0,072	0,181602921	0,054	0,192688226
0,323784	-2,0462	0,08	0,185234501	0,06	0,199410611
0,367602	-1,54841	0,088	0,188644251	0,066	0,205829246
0,389892	-1,29011	0,096	0,191858395	0,072	0,211979723
0,393362	-1,23409	0,104	0,194898513	0,078	0,217891155
0,427329	-0,83956	0,112	0,197782612	0,084	0,223587726
0,48039	-0,23374	0,12	0,200525908	0,09	0,229089783
0,54646	0,53797	0,128	0,203141392	0,096	0,234414645
0,605012	1,21495	0,136	0,205640258	0,102	0,239577197
0,659806	1,86011	0,144	0,208032234	0,108	0,244590345
0,711851	2,44082	0,152	0,210325833	0,114	0,249465366
0,765621	2,95745	0,16	0,212528557	0,12	0,254212184
0,79024	3,14908	0,168	0,214647053	0,126	0,258839586
0,790689	3,15708	0,176	0,216687243	0,132	0,263355399
0,834277	3,36658	0,184	0,218654431	0,138	0,267766628
0,872962	3,33295	0,192	0,220553385	0,144	0,272079574
0,898156	3,12384	0,2	0,222388411	0,15	0,276299929
0,953715	1,86955	0,208	0,224163413	0,156	0,280432854
1,00000	0,0000	0,216	0,225881941	0,162	0,28448305
-	-	0,224	0,227547234	0,168	0,288454809
-	-	0,232	0,229162259	0,174	0,292352064
-	-	0,24	0,230729735	0,18	0,296178431
-	-	0,248	0,232252169	0,186	0,299937243
-	-	0,256	0,233731869	0,192	0,303631577
-	-	0,264	0,235170973	0,198	0,307264285
-	-	0,272	0,236571458	0,204	0,310838016
-	-	0,28	0,237935164	0,21	0,314355232
-	-	0,288	0,239263799	0,216	0,31781823
-	-	0,296	0,240558957	0,222	0,321229156
-	-	0,304	0,241822125	0,228	0,324590016
-	-	0,312	0,243054695	0,234	0,327902693
-	-	0,32	0,244257968	0,24	0,331168953
-	-	0,328	0,245433167	0,246	0,334390459

Tabela E.2 – Valores numéricos referentes à várias Figuras (continuação)

Dados referentes à Figura 23		Dados referentes à Figura 31		Dados referentes à Figura 33	
y	u	Tempo(ms)	Raio(mm)	Tempo(ms)	Raio(mm)
-	-	0,336	0,246581439	0,252	0,337568774
-	-	0,344	0,247703865	0,258	0,340705375
-	-	0,352	0,248801459	0,264	0,343801655
-	-	0,36	0,249875182	0,27	0,346858933
-	-	0,368	0,250925936	0,276	0,349878456
-	-	0,376	0,251954579	0,282	0,352861407
-	-	0,384	0,252961918	0,288	0,355808908
-	-	0,392	0,253948719	0,294	0,358722025
-	-	0,4	0,254915709	0,3	0,361601773
-	-	0,408	0,255863578	0,306	0,364449116
-	-	0,416	0,256792978	0,312	0,367264975
-	-	0,424	0,257704534	0,318	0,370050225
-	-	0,432	0,258598835	0,324	0,372805705
-	-	0,44	0,259476447	0,33	0,375532214
-	-	0,448	0,260337907	0,336	0,378230516
-	-	0,456	0,261183725	0,342	0,380901344
-	-	0,464	0,262014393	0,348	0,383545398
-	-	0,472	0,262830375	0,354	0,386163349
-	-	0,48	0,263632119	0,36	0,388755842
-	-	0,488	0,264420051	0,366	0,391323494
-	-	0,496	0,26519458	0,372	0,393866899
-	-	0,504	0,265956096	0,378	0,396386627
-	-	0,512	0,266704975	0,384	0,398883227
-	-	0,52	0,267441575	0,39	0,401357226
-	-	0,528	0,268166241	0,396	0,403809133
-	-	0,536	0,268879305	0,402	0,406239435
-	-	0,544	0,269581083	0,408	0,408648606
-	-	0,552	0,270271881	0,414	0,411037098
-	-	0,56	0,270951992	0,42	0,413405352
-	-	0,568	0,271621698	0,426	0,415753791
-	-	0,576	0,272281271	0,432	0,418082823
-	-	0,584	0,272930973	0,438	0,420392844
-	-	0,592	0,273571055	0,444	0,422684235
-	-	0,6	0,274201759	0,45	0,424957366
-	-	0,608	0,27482332	0,456	0,427212595
-	-	0,616	0,275435964	0,462	0,429450267
-	-	0,624	0,276039907	0,468	0,431670718
-	-	0,632	0,276635361	0,474	0,433874271
-	-	0,64	0,277222527	0,48	0,436061242
-	-	0,648	0,277801602	0,486	0,438231935
-	-	0,656	0,278372775	0,492	0,440386646

Tabela E.2 – Valores numéricos referentes à várias Figuras (continuação)

Dados referentes à Figura 23		Dados referentes à Figura 31		Dados referentes à Figura 33	
y	u	Tempo(ms)	Raio(mm)	Tempo(ms)	Raio(mm)
-	-	0,672	0,279492143	0,498	0,442525663
-	-	0,68	0,280040685	0,504	0,444649263
-	-	0,688	0,280582023	0,51	0,446757717
-	-	0,696	0,281116316	0,516	0,448851288
-	-	0,704	0,28164372	0,522	0,45093023
-	-	0,712	0,282164386	0,528	0,452994793
-	-	0,72	0,282678459	0,534	0,455045217
-	-	0,728	0,28318608	0,54	0,457081736
-	-	0,736	0,283687388	0,546	0,459104579
-	-	0,744	0,284182513	0,552	0,461113968
-	-	0,752	0,284671587	0,558	0,463110119
-	-	0,76	0,285154733	0,564	0,465093242
-	-	0,768	0,285632073	0,57	0,467063542
-	-	0,776	0,286103725	0,576	0,46902122
-	-	0,784	0,286569803	0,582	0,470966469
-	-	0,792	0,287030419	0,588	0,472899479
-	-	0,8	0,287485682	0,594	0,474820435
-	-	0,808	0,287935695	0,6	0,476729518
-	-	0,816	0,288380561	0,606	0,478626903
-	-	0,824	0,28882038	0,612	0,480512762
-	-	0,832	0,289255248	0,618	0,482387263
-	-	0,84	0,289685259	0,624	0,484250569
-	-	0,848	0,290110505	0,63	0,48610284
-	-	0,856	0,290531075	0,636	0,487944232
-	-	0,864	0,290947055	0,642	0,489774897
-	-	0,872	0,291358529	0,648	0,491594984
-	-	0,88	0,291765581	0,654	0,493404638
-	-	0,888	0,29216829	0,66	0,495204003
-	-	0,896	0,292566734	0,666	0,496993216
-	-	0,904	0,292960989	0,672	0,498772414
-	-	0,912	0,29335113	0,678	0,500541729
-	-	0,92	0,293737228	0,684	0,502301293
-	-	0,928	0,294119355	0,69	0,504051231
-	-	0,936	0,294497579	0,696	0,505791669
-	-	0,944	0,294871966	0,702	0,507522729
-	-	0,952	0,295242584	0,708	0,509244529
-	-	0,96	0,295609495	0,714	0,510957188
-	-	0,968	0,295972761	0,72	0,512660819
-	-	0,976	0,296332444	0,726	0,514355534
-	-	0,984	0,296688603	0,732	0,516041443
-	-	0,992	0,297041297	0,738	0,517718654

Tabela E.2 – Valores numéricos referentes à várias Figuras (continuação)

Dados referentes à Figura 23		Dados referentes à Figura 31		Dados referentes à Figura 33	
y	u	Tempo(ms)	Raio(mm)	Tempo(ms)	Raio(mm)
-	-	1	0,297390581	0,744	0,519387273
-	-	1,008	0,297736511	0,75	0,521047402
-	-	1,016	0,298079142	0,756	0,522699143
-	-	1,024	0,298418526	0,762	0,524342596
-	-	1,032	0,298754715	0,768	0,525977858
-	-	1,04	0,299087759	0,774	0,527605024
-	-	1,048	0,299417709	0,78	0,529224188
-	-	1,056	0,299744611	0,786	0,530835442
-	-	1,064	0,300068514	0,792	0,532438877
-	-	1,072	0,300389463	0,798	0,534034581
-	-	1,08	0,300707505	0,804	0,53562264
-	-	1,088	0,301022682	0,81	0,537203141
-	-	1,096	0,301335039	0,816	0,538776167
-	-	1,104	0,301644617	0,822	0,5403418
-	-	1,112	0,301951459	0,828	0,541900121
-	-	1,12	0,302255604	0,834	0,543451209
-	-	1,128	0,302557093	0,84	0,544995142
-	-	1,136	0,302855965	0,846	0,546531997
-	-	1,144	0,303152257	0,852	0,548061849
-	-	1,152	0,303446007	0,858	0,549584772
-	-	1,16	0,303737251	0,864	0,551100839
-	-	1,168	0,304026026	0,87	0,55261012
-	-	1,176	0,304312367	0,876	0,554112686
-	-	1,184	0,304596307	0,882	0,555608606
-	-	1,192	0,304877881	0,888	0,557097948
-	-	1,2	0,305157121	0,894	0,558580779
-	-	1,208	0,305434061	0,9	0,560057164
-	-	1,216	0,305708731	0,906	0,561527167
-	-	1,224	0,305981164	0,912	0,562990853
-	-	1,232	0,306251389	0,918	0,564448283
-	-	1,24	0,306519436	0,924	0,565899519
-	-	1,248	0,306785336	0,93	0,567344621
-	-	1,256	0,307049116	0,936	0,568783649
-	-	1,264	0,307310806	0,942	0,570216662
-	-	1,272	0,307570432	0,948	0,571643716
-	-	1,28	0,307828022	0,954	0,573064869
-	-	1,288	0,308083604	0,96	0,574480177
-	-	1,296	0,308337202	0,966	0,575889694
-	-	1,304	0,308588843	0,972	0,577293475
-	-	1,312	0,308838553	0,978	0,578691573
-	-	1,32	0,309086355	0,984	0,58008404

Tabela E.2 – Valores numéricos referentes à várias Figuras (continuação)

Dados referentes à Figura 23		Dados referentes à Figura 31		Dados referentes à Figura 33	
y	u	Tempo(ms)	Raio(mm)	Tempo(ms)	Raio(mm)
-	-	1,328	0,309332274	0,99	0,581470929
-	-	1,336	0,309576335	0,996	0,582852289
-	-	1,344	0,309818561	1,002	0,584228172
-	-	1,352	0,310058975	1,008	0,585598626
-	-	1,36	0,310297599	1,014	0,5869637
-	-	1,368	0,310534456	1,02	0,588323443
-	-	1,376	0,310769569	1,026	0,589677902
-	-	1,384	0,311002957	1,032	0,591027122
-	-	1,392	0,311234643	1,038	0,592371151
-	-	1,4	0,311464647	1,044	0,593710033
-	-	1,408	0,31169299	1,05	0,595043814
-	-	1,416	0,311919691	1,056	0,596372536
-	-	1,424	0,312144771	1,062	0,597696244
-	-	1,432	0,312368249	1,068	0,59901498
-	-	1,44	0,312590144	1,074	0,600328786
-	-	1,448	0,312810475	1,08	0,601637705
-	-	1,456	0,31302926	1,086	0,602941776
-	-	1,464	0,313246517	1,092	0,604241041
-	-	1,472	0,313462265	1,098	0,60553554
-	-	1,48	0,31367652	1,104	0,606825311
-	-	1,488	0,3138893	1,11	0,608110394
-	-	1,496	0,314100622	1,116	0,609390826
-	-	1,504	0,314310503	1,122	0,610666647
-	-	1,512	0,314518959	1,128	0,611937893
-	-	1,52	0,314726006	1,134	0,613204601
-	-	1,528	0,314931661	1,14	0,614466807
-	-	1,536	0,315135938	1,146	0,615724547
-	-	1,544	0,315338854	1,152	0,616977856
-	-	1,552	0,315540423	1,158	0,618226771
-	-	1,56	0,31574066	1,164	0,619471324
-	-	1,568	0,315939581	1,17	0,62071155
-	-	1,576	0,316137199	1,176	0,621947483
-	-	1,584	0,316333529	1,182	0,623179156
-	-	1,592	0,316528585	1,188	0,624406602
-	-	1,6	0,31672238	1,194	0,625629852
-	-	1,608	0,316914929	1,2	0,62684894
-	-	1,616	0,317106245	1,206	0,628063896
-	-	1,624	0,317296341	1,212	0,629274753
-	-	1,632	0,317485229	1,218	0,630481539
-	-	1,64	0,317672923	1,224	0,631684287
-	-	1,648	0,317859436	1,23	0,632883026

Tabela E.2 – Valores numéricos referentes à várias Figuras (continuação)

Dados referentes à Figura 23		Dados referentes à Figura 31		Dados referentes à Figura 33	
y	u	Tempo(ms)	Raio(mm)	Tempo(ms)	Raio(mm)
-	-	1,656	0,318044779	1,236	0,634077786
-	-	1,664	0,318228965	1,242	0,635268595
-	-	1,672	0,318412007	1,248	0,636455484
-	-	1,68	0,318593915	1,254	0,637638481
-	-	1,688	0,318774702	1,26	0,638817613
-	-	1,696	0,31895438	1,266	0,63999291
-	-	1,704	0,319132959	1,272	0,641164398
-	-	1,712	0,319310451	1,278	0,642332105
-	-	1,72	0,319486866	1,284	0,643496059
-	-	1,728	0,319662217	1,29	0,644656284
-	-	1,736	0,319836513	1,296	0,645812809
-	-	1,744	0,320009765	1,302	0,646965659
-	-	1,752	0,320181984	1,308	0,64811486
-	-	1,76	0,32035318	1,314	0,649260437
-	-	1,768	0,320523363	1,32	0,650402416
-	-	1,776	0,320692542	1,326	0,651540821
-	-	1,784	0,320860729	1,332	0,652675677
-	-	1,792	0,321027932	1,338	0,653807009
-	-	1,8	0,321194162	1,344	0,65493484
-	-	1,808	0,321359427	1,35	0,656059194
-	-	1,816	0,321523738	1,356	0,657180096
-	-	1,824	0,321687102	1,362	0,658297567
-	-	1,832	0,32184953	1,368	0,659411632
-	-	1,84	0,322011031	1,374	0,660522312
-	-	1,848	0,322171612	1,38	0,661629632
-	-	1,856	0,322331284	1,386	0,662733612
-	-	1,864	0,322490054	1,392	0,663834275
-	-	1,872	0,322647931	1,398	0,664931642
-	-	1,88	0,322804923	1,404	0,666025736
-	-	1,888	0,322961039	1,41	0,667116578
-	-	1,896	0,323116287	1,416	0,668204188
-	-	1,904	0,323270675	1,422	0,669288588
-	-	1,912	0,323424211	1,428	0,670369799
-	-	1,92	0,323576902	1,434	0,67144784
-	-	1,928	0,323728757	1,44	0,672522733
-	-	1,936	0,323879783	1,446	0,673594497
-	-	1,944	0,324029988	1,452	0,674663152
-	-	1,952	0,324179378	1,458	0,675728717
-	-	1,96	0,324327963	1,464	0,676791213
-	-	1,968	0,324475748	1,47	0,677850658
-	-	1,976	0,324622741	1,476	0,678907072

Tabela E.2 – Valores numéricos referentes à várias Figuras (continuação)

Dados referentes à Figura 23		Dados referentes à Figura 31		Dados referentes à Figura 33	
y	u	Tempo(ms)	Raio(mm)	Tempo(ms)	Raio(mm)
-	-	1,984	0,324768949	1,482	0,679960472
-	-	1,992	0,324914379	1,488	0,681010879
-	-	2	0,325059037	1,494	0,68205831
-	-	2,008	0,325202932	1,5	0,683102784
-	-	2,016	0,325346069	1,506	0,684144319
-	-	2,024	0,325488456	1,512	0,685182933
-	-	2,032	0,325630098	1,518	0,686218643
-	-	2,04	0,325771002	1,524	0,687251467
-	-	2,048	0,325911175	1,53	0,688281423
-	-	2,056	0,326050623	1,536	0,689308527
-	-	2,064	0,326189352	1,542	0,690332798
-	-	2,072	0,326327368	1,548	0,691354251
-	-	2,08	0,326464678	1,554	0,692372904
-	-	2,088	0,326601287	1,56	0,693388773
-	-	2,096	0,326737202	1,566	0,694401874
-	-	2,104	0,326872429	1,572	0,695412224
-	-	2,112	0,327006972	1,578	0,696419839
-	-	2,12	0,327140839	1,584	0,697424735
-	-	2,128	0,327274034	1,59	0,698426927
-	-	2,136	0,327406564	1,596	0,699426432
-	-	2,144	0,327538433	1,602	0,700423265
-	-	2,152	0,327669648	1,608	0,701417441
-	-	2,16	0,327800213	1,614	0,702408976
-	-	2,168	0,327930134	1,62	0,703397884
-	-	2,176	0,328059417	1,626	0,70438418
-	-	2,184	0,328188067	1,632	0,70536788
-	-	2,192	0,328316088	1,638	0,706348998
-	-	2,2	0,328443486	1,644	0,707327548
-	-	2,208	0,328570267	1,65	0,708303546
-	-	2,216	0,328696434	1,656	0,709277004
-	-	2,224	0,328821993	1,662	0,710247938
-	-	2,232	0,328946949	1,668	0,711216362
-	-	2,24	0,329071307	1,674	0,712182288
-	-	2,248	0,329195071	1,68	0,713145732
-	-	2,256	0,329318246	1,686	0,714106707
-	-	2,264	0,329440837	1,692	0,715065226
-	-	2,272	0,329562849	1,698	0,716021302
-	-	2,28	0,329684285	1,704	0,71697495
-	-	2,288	0,329805151	1,71	0,717926181
-	-	2,296	0,329925451	1,716	0,71887501
-	-	2,304	0,33004519	1,722	0,719821449

Tabela E.2 – Valores numéricos referentes à várias Figuras (continuação)

Dados referentes à Figura 23		Dados referentes à Figura 31		Dados referentes à Figura 33	
y	u	Tempo(ms)	Raio(mm)	Tempo(ms)	Raio(mm)
-	-	2,312	0,330164371	1,728	0,720765511
-	-	2,32	0,330283	1,734	0,721707209
-	-	2,328	0,33040108	1,74	0,722646555
-	-	2,336	0,330518615	1,746	0,723583562
-	-	2,344	0,330635611	1,752	0,724518242
-	-	2,352	0,33075207	1,758	0,725450608
-	-	2,36	0,330867997	1,764	0,726380671
-	-	2,368	0,330983397	1,77	0,727308445
-	-	2,376	0,331098273	1,776	0,72823394
-	-	2,384	0,331212628	1,782	0,729157169
-	-	2,392	0,331326468	1,788	0,730078143
-	-	2,4	0,331439796	1,794	0,730996874
-	-	2,408	0,331552615	1,8	0,731913375
-	-	2,416	0,33166493	1,806	0,732827655
-	-	2,424	0,331776745	1,812	0,733739727
-	-	2,432	0,331888062	1,818	0,734649602
-	-	2,44	0,331998886	1,824	0,735557292
-	-	2,448	0,33210922	1,83	0,736462806
-	-	2,456	0,332219069	1,836	0,737366157
-	-	2,464	0,332328435	1,842	0,738267355
-	-	2,472	0,332437322	1,848	0,739166411
-	-	2,48	0,332545733	1,854	0,740063336
-	-	2,488	0,332653673	1,86	0,74095814
-	-	2,496	0,332761144	1,866	0,741850835
-	-	2,504	0,33286815	1,872	0,74274143
-	-	2,512	0,332974694	1,878	0,743629936
-	-	2,52	0,33308078	1,884	0,744516363
-	-	2,528	0,33318641	1,89	0,745400723
-	-	2,536	0,333291589	1,896	0,746283023
-	-	2,544	0,333396319	1,902	0,747163276
-	-	2,552	0,333500603	1,908	0,748041491
-	-	2,56	0,333604445	1,914	0,748917677
-	-	2,568	0,333707848	1,92	0,749791846
-	-	2,576	0,333810815	1,926	0,750664005
-	-	2,584	0,333913348	1,932	0,751534166
-	-	2,592	0,334015452	1,938	0,752402337
-	-	2,6	0,334117128	1,944	0,753268529
-	-	2,608	0,334218381	1,95	0,754132751
-	-	2,616	0,334319213	1,956	0,754995012
-	-	2,624	0,334419626	1,962	0,755855322
-	-	2,632	0,334519624	1,968	0,756713689

Tabela E.2 – Valores numéricos referentes à várias Figuras (continuação)

Dados referentes à Figura 23		Dados referentes à Figura 31		Dados referentes à Figura 33	
y	u	Tempo(ms)	Raio(mm)	Tempo(ms)	Raio(mm)
-	-	2,64	0,33461921	1,974	0,757570123
-	-	2,648	0,334718386	1,98	0,758424634
-	-	2,656	0,334817155	1,986	0,75927723
-	-	2,664	0,33491552	1,992	0,76012792
-	-	2,672	0,335013484	1,998	0,760976713
-	-	2,68	0,33511105	2,004	0,761823618
-	-	2,688	0,33520822	2,01	0,762668643
-	-	2,696	0,335304997	2,016	0,763511799
-	-	2,704	0,335401383	2,022	0,764353092
-	-	2,712	0,335497381	2,028	0,765192532
-	-	2,72	0,335592995	2,034	0,766030127
-	-	2,728	0,335688225	2,04	0,766865886
-	-	2,736	0,335783075	2,046	0,767699817
-	-	2,744	0,335877548	2,052	0,768531929
-	-	2,752	0,335971646	2,058	0,769362229
-	-	2,76	0,336065371	2,064	0,770190726
-	-	2,768	0,336158726	2,07	0,771017429
-	-	2,776	0,336251714	2,076	0,771842344
-	-	2,784	0,336344336	2,082	0,772665481
-	-	2,792	0,336436595	2,088	0,773486847
-	-	2,8	0,336528494	2,094	0,77430645
-	-	2,808	0,336620034	2,1	0,775124298
-	-	2,816	0,336711219	2,106	0,7759404
-	-	2,824	0,33680205	2,112	0,776754761
-	-	2,832	0,33689253	2,118	0,777567391
-	-	2,84	0,336982661	2,124	0,778378297
-	-	2,848	0,337072445	2,13	0,779187487
-	-	2,856	0,337161885	2,136	0,779994967
-	-	2,864	0,337250982	2,142	0,780800747
-	-	2,872	0,337339739	2,148	0,781604832
-	-	2,88	0,337428159	2,154	0,782407231
-	-	2,888	0,337516242	2,16	0,78320795
-	-	2,896	0,337603992	2,166	0,784006998
-	-	2,904	0,33769141	2,172	0,78480438
-	-	2,912	0,337778499	2,178	0,785600105
-	-	2,92	0,33786526	2,184	0,78639418
-	-	2,928	0,337951696	2,19	0,787186612
-	-	2,936	0,338037808	2,196	0,787977407
-	-	2,944	0,3381236	2,202	0,788766572
-	-	2,952	0,338209072	2,208	0,789554116
-	-	2,96	0,338294226	2,214	0,790340044

Tabela E.2 – Valores numéricos referentes à várias Figuras (continuação)

Dados referentes à Figura 23		Dados referentes à Figura 31		Dados referentes à Figura 33	
y	u	Tempo(ms)	Raio(mm)	Tempo(ms)	Raio(mm)
-	-	2,968	0,338379065	2,22	0,791124363
-	-	2,976	0,338463591	2,226	0,79190708
-	-	2,984	0,338547805	2,232	0,792688203
-	-	2,992	0,33863171	2,238	0,793467736
-	-	3	0,338715307	2,244	0,794245689
-	-	3,008	0,338798598	2,25	0,795022066
-	-	3,016	0,338881585	2,256	0,795796874
-	-	3,024	0,33896427	2,262	0,796570121
-	-	3,032	0,339046655	2,268	0,797341812
-	-	3,04	0,339128742	2,274	0,798111954
-	-	3,048	0,339210531	2,28	0,798880553
-	-	3,056	0,339292026	2,286	0,799647616
-	-	3,064	0,339373228	2,292	0,800413149
-	-	3,072	0,339454139	2,298	0,801177158
-	-	3,08	0,33953476	2,304	0,80193965
-	-	3,088	0,339615093	2,31	0,80270063
-	-	3,096	0,33969514	2,316	0,803460106
-	-	3,104	0,339774902	2,322	0,804218082
-	-	3,112	0,339854382	2,328	0,804974566
-	-	3,12	0,33993358	2,334	0,805729562
-	-	3,128	0,340012499	2,34	0,806483078
-	-	3,136	0,340091141	2,346	0,807235118
-	-	3,144	0,340169506	2,352	0,80798569
-	-	3,152	0,340247597	2,358	0,808734798
-	-	3,16	0,340325414	2,364	0,809482449
-	-	3,168	0,340402961	2,37	0,810228649
-	-	3,176	0,340480237	2,376	0,810973403
-	-	3,184	0,340557246	2,382	0,811716716
-	-	3,192	0,340633988	2,388	0,812458596
-	-	3,2	0,340710464	2,394	0,813199047
-	-	3,208	0,340786677	2,4	0,813938075
-	-	3,216	0,340862628	2,406	0,814675685
-	-	3,224	0,340938319	2,412	0,815411884
-	-	3,232	0,34101375	2,418	0,816146676
-	-	3,24	0,341088924	2,424	0,816880068
-	-	3,248	0,341163841	2,43	0,817612064
-	-	3,256	0,341238504	2,436	0,81834267
-	-	3,264	0,341312914	2,442	0,819071891
-	-	3,272	0,341387071	2,448	0,819799733
-	-	3,28	0,341460979	2,454	0,820526202
-	-	3,288	0,341534637	2,46	0,821251301

Tabela E.2 – Valores numéricos referentes à várias Figuras (continuação)

Dados referentes à Figura 23		Dados referentes à Figura 31		Dados referentes à Figura 33	
y	u	Tempo(ms)	Raio(mm)	Tempo(ms)	Raio(mm)
-	-	3,296	0,341608048	2,466	0,821975037
-	-	3,304	0,341681213	2,472	0,822697415
-	-	3,312	0,341754133	2,478	0,823418441
-	-	3,32	0,341826809	2,484	0,824138118
-	-	3,328	0,341899243	2,49	0,824856453
-	-	3,336	0,341971437	2,496	0,82557345
-	-	3,344	0,342043391	2,502	0,826289114
-	-	3,352	0,342115107	2,508	0,827003451
-	-	3,36	0,342186586	2,514	0,827716466
-	-	3,368	0,34225783	2,52	0,828428163
-	-	3,376	0,342328839	2,526	0,829138547
-	-	3,384	0,342399616	2,532	0,829847624
-	-	3,392	0,342470161	2,538	0,830555398
-	-	3,4	0,342540475	2,544	0,831261874
-	-	3,408	0,342610561	2,55	0,831967058
-	-	3,416	0,342680418	2,556	0,832670953
-	-	3,424	0,342750049	2,562	0,833373564
-	-	3,432	0,342819455	2,568	0,834074897
-	-	3,44	0,342888636	2,574	0,834774955
-	-	3,448	0,342957595	2,58	0,835473745
-	-	3,456	0,343026331	2,586	0,836171269
-	-	3,464	0,343094847	2,592	0,836867534
-	-	3,472	0,343163144	2,598	0,837562543
-	-	3,48	0,343231222	2,604	0,838256302
-	-	3,488	0,343299083	2,61	0,838948814
-	-	3,496	0,343366728	2,616	0,839640084
-	-	3,504	0,343434159	2,622	0,840330117
-	-	3,512	0,343501376	2,628	0,841018917
-	-	3,52	0,34356838	2,634	0,841706489
-	-	3,528	0,343635173	2,64	0,842392837
-	-	3,536	0,343701755	2,646	0,843077966
-	-	3,544	0,343768129	2,652	0,843761879
-	-	3,552	0,343834294	2,658	0,844444582
-	-	3,56	0,343900252	2,664	0,845126078
-	-	3,568	0,343966005	2,67	0,845806372
-	-	3,576	0,344031552	2,676	0,846485468
-	-	3,584	0,344096896	2,682	0,847163371
-	-	3,592	0,344162037	2,688	0,847840084
-	-	3,6	0,344226976	2,694	0,848515612
-	-	3,608	0,344291715	2,7	0,849189959
-	-	3,616	0,344356253	2,706	0,849863129

Tabela E.2 – Valores numéricos referentes à várias Figuras (continuação)

Dados referentes à Figura 23		Dados referentes à Figura 31		Dados referentes à Figura 33	
y	u	Tempo(ms)	Raio(mm)	Tempo(ms)	Raio(mm)
-	-	3,624	0,344420594	2,712	0,850535126
-	-	3,632	0,344484737	2,718	0,851205955
-	-	3,64	0,344548683	2,724	0,851875619
-	-	3,648	0,344612434	2,73	0,852544123
-	-	3,656	0,34467599	2,736	0,853211471
-	-	3,664	0,344739352	2,742	0,853877666
-	-	3,672	0,344802522	2,748	0,854542712
-	-	3,68	0,344865501	2,754	0,855206615
-	-	3,688	0,344928288	2,76	0,855869377
-	-	3,696	0,344990886	2,766	0,856531002
-	-	3,704	0,345053296	2,772	0,857191495
-	-	3,712	0,345115517	2,778	0,857850859
-	-	3,72	0,345177552	2,784	0,858509098
-	-	3,728	0,345239401	2,79	0,859166216
-	-	3,736	0,345301064	2,796	0,859822217
-	-	3,744	0,345362544	2,802	0,860477105
-	-	3,752	0,345423841	2,808	0,861130883
-	-	3,76	0,345484955	2,814	0,861783556
-	-	3,768	0,345545888	2,82	0,862435126
-	-	3,776	0,345606641	2,826	0,863085598
-	-	3,784	0,345667214	2,832	0,863734976
-	-	3,792	0,345727608	2,838	0,864383262
-	-	3,8	0,345787825	2,844	0,865030461
-	-	3,808	0,345847865	2,85	0,865676577
-	-	3,816	0,345907728	2,856	0,866321613
-	-	3,824	0,345967417	2,862	0,866965572
-	-	3,832	0,346026931	2,868	0,867608459
-	-	3,84	0,346086272	2,874	0,868250276
-	-	3,848	0,34614544	2,88	0,868891028
-	-	3,856	0,346204436	2,886	0,869530717
-	-	3,864	0,346263261	2,892	0,870169349
-	-	3,872	0,346321917	2,898	0,870806924
-	-	3,88	0,346380402	2,904	0,871443449
-	-	3,888	0,34643872	2,91	0,872078925
-	-	3,896	0,346496869	2,916	0,872713356
-	-	3,904	0,346554852	2,922	0,873346747
-	-	3,912	0,346612669	2,928	0,873979099
-	-	3,92	0,34667032	2,934	0,874610417
-	-	3,928	0,346727807	2,94	0,875240703
-	-	3,936	0,34678513	2,946	0,875869962
-	-	3,944	0,34684229	2,952	0,876498197

Tabela E.2 – Valores numéricos referentes à várias Figuras (continuação)

Dados referentes à Figura 23		Dados referentes à Figura 31		Dados referentes à Figura 33	
y	u	Tempo(ms)	Raio(mm)	Tempo(ms)	Raio(mm)
-	-	3,952	0,346899288	2,958	0,87712541
-	-	3,96	0,346956125	2,964	0,877751606
-	-	3,968	0,3470128	2,97	0,878376787
-	-	3,976	0,347069316	2,976	0,879000957
-	-	3,984	0,347125673	2,982	0,879624119
-	-	3,992	0,347181872	2,988	0,880246276
-	-	4	0,347237912	2,994	0,880867432
-	-	4,008	0,347293796	3	0,881487589
-	-	4,016	0,347349524	3,006	0,882106751
-	-	4,024	0,347405096	3,012	0,882724922
-	-	4,032	0,347460514	3,018	0,883342103
-	-	4,04	0,347515777	3,024	0,883958299
-	-	4,048	0,347570887	3,03	0,884573512
-	-	4,056	0,347625845	3,036	0,885187746
-	-	4,064	0,34768065	3,042	0,885801004
-	-	4,072	0,347735305	3,048	0,886413288
-	-	4,08	0,347789809	3,054	0,887024602
-	-	4,088	0,347844163	3,06	0,887634949
-	-	4,096	0,347898368	3,066	0,888244332
-	-	4,104	0,347952424	3,072	0,888852754
-	-	4,112	0,348006333	3,078	0,889460218
-	-	4,12	0,348060095	3,084	0,890066726
-	-	4,128	0,34811371	3,09	0,890672283
-	-	4,136	0,34816718	3,096	0,89127689
-	-	4,144	0,348220504	3,102	0,891880551
-	-	4,152	0,348273684	3,108	0,892483269
-	-	4,16	0,34832672	3,114	0,893085047
-	-	4,168	0,348379613	3,12	0,893685887
-	-	4,176	0,348432364	3,126	0,894285792
-	-	4,184	0,348484973	3,132	0,894884766
-	-	4,192	0,34853744	3,138	0,895482811
-	-	4,2	0,348589767	3,144	0,89607993
-	-	4,208	0,348641954	3,15	0,896676126
-	-	4,216	0,348694001	3,156	0,897271402
-	-	4,224	0,34874591	3,162	0,897865759
-	-	4,232	0,348797681	3,168	0,898459203
-	-	4,24	0,348849314	3,174	0,899051734
-	-	4,248	0,348900811	3,18	0,899643356
-	-	4,256	0,348952171	3,186	0,900234072
-	-	4,264	0,349003395	3,192	0,900823884
-	-	4,272	0,349054484	3,198	0,901412795

Tabela E.2 – Valores numéricos referentes à várias Figuras (continuação)

Dados referentes à Figura 23		Dados referentes à Figura 31		Dados referentes à Figura 33	
y	u	Tempo(ms)	Raio(mm)	Tempo(ms)	Raio(mm)
-	-	4,28	0,349105439	3,204	0,902000808
-	-	4,288	0,34915626	3,21	0,902587925
-	-	4,296	0,349206948	3,216	0,903174149
-	-	4,304	0,349257503	3,222	0,903759483
-	-	4,312	0,349307925	3,228	0,90434393
-	-	4,32	0,349358217	3,234	0,904927491
-	-	4,328	0,349408377	3,24	0,905510171
-	-	4,336	0,349458406	3,246	0,906091971
-	-	4,344	0,349508306	3,252	0,906672894
-	-	4,352	0,349558077	3,258	0,907252942
-	-	4,36	0,349607719	3,264	0,907832119
-	-	4,368	0,349657232	3,27	0,908410426
-	-	4,376	0,349706618	3,276	0,908987867
-	-	4,384	0,349755877	3,282	0,909564444
-	-	4,392	0,349805009	3,288	0,910140159
-	-	4,4	0,349854016	3,294	0,910715015
-	-	4,408	0,349902897	3,3	0,911289014
-	-	4,416	0,349951653	3,306	0,91186216
-	-	4,424	0,350000284	3,312	0,912434454
-	-	4,432	0,350048792	3,318	0,913005899
-	-	4,44	0,350097176	3,324	0,913576497
-	-	4,448	0,350145437	3,33	0,914146251
-	-	4,456	0,350193577	3,336	0,914715164
-	-	4,464	0,350241594	3,342	0,915283237
-	-	4,472	0,35028949	3,348	0,915850474
-	-	4,48	0,350337265	3,354	0,916416876
-	-	4,488	0,350384921	3,36	0,916982447
-	-	4,496	0,350432456	3,366	0,917547187
-	-	4,504	0,350479872	3,372	0,918111101
-	-	4,512	0,350527169	3,378	0,91867419
-	-	4,52	0,350574348	3,384	0,919236456
-	-	4,528	0,35062141	3,39	0,919797902
-	-	4,536	0,350668354	3,396	0,92035853
-	-	4,544	0,350715181	3,402	0,920918343
-	-	4,552	0,350761892	3,408	0,921477343
-	-	4,56	0,350808487	3,414	0,922035532
-	-	4,568	0,350854967	3,42	0,922592913
-	-	4,576	0,350901332	3,426	0,923149488
-	-	4,584	0,350947582	3,432	0,923705258
-	-	4,592	0,350993719	3,438	0,924260227
-	-	4,6	0,351039742	3,444	0,924814396

Tabela E.2 – Valores numéricos referentes à várias Figuras (continuação)

Dados referentes à Figura 23		Dados referentes à Figura 31		Dados referentes à Figura 33	
y	u	Tempo(ms)	Raio(mm)	Tempo(ms)	Raio(mm)
-	-	4,608	0,351085652	3,45	0,925367769
-	-	4,616	0,35113145	3,456	0,925920346
-	-	4,624	0,351177135	3,462	0,926472131
-	-	4,632	0,351222709	3,468	0,927023125
-	-	4,64	0,351268172	3,474	0,927573331
-	-	4,648	0,351313524	3,48	0,928122751
-	-	4,656	0,351358766	3,486	0,928671387
-	-	4,664	0,351403898	3,492	0,929219242
-	-	4,672	0,35144892	3,498	0,929766317
-	-	4,68	0,351493834	3,504	0,930312615
-	-	4,688	0,351538639	3,51	0,930858137
-	-	4,696	0,351583336	3,516	0,931402887
-	-	4,704	0,351627926	3,522	0,931946865
-	-	4,712	0,351672408	3,528	0,932490075
-	-	4,72	0,351716784	3,534	0,933032518
-	-	4,728	0,351761053	3,54	0,933574197
-	-	4,736	0,351805216	3,546	0,934115113
-	-	4,744	0,351849274	3,552	0,934655269
-	-	4,752	0,351893227	3,558	0,935194667
-	-	4,76	0,351937075	3,564	0,935733308
-	-	4,768	0,351980819	3,57	0,936271195
-	-	4,776	0,352024459	3,576	0,93680833
-	-	4,784	0,352067996	3,582	0,937344715
-	-	4,792	0,35211143	3,588	0,937880353
-	-	4,8	0,352154761	3,594	0,938415244
-	-	4,808	0,35219799	3,6	0,938949391
-	-	4,816	0,352241117	3,606	0,939482796
-	-	4,824	0,352284143	3,612	0,940015461
-	-	4,832	0,352327067	3,618	0,940547389
-	-	4,84	0,352369892	3,624	0,94107858
-	-	4,848	0,352412615	3,63	0,941609037
-	-	4,856	0,35245524	3,636	0,942138763
-	-	4,864	0,352497764	3,642	0,942667758
-	-	4,872	0,35254019	3,648	0,943196025
-	-	4,88	0,352582517	3,654	0,943723566
-	-	4,888	0,352624746	3,66	0,944250383
-	-	4,896	0,352666877	3,666	0,944776478
-	-	4,904	0,35270891	3,672	0,945301852
-	-	4,912	0,352750846	3,678	0,945826508
-	-	4,92	0,352792686	3,684	0,946350447
-	-	4,928	0,352834429	3,69	0,946873671

Tabela E.2 – Valores numéricos referentes à várias Figuras (continuação)

Dados referentes à Figura 23		Dados referentes à Figura 31		Dados referentes à Figura 33	
y	u	Tempo(ms)	Raio(mm)	Tempo(ms)	Raio(mm)
-	-	4,936	0,352876076	3,696	0,947396183
-	-	4,944	0,352917627	3,702	0,947917984
-	-	4,952	0,352959083	3,708	0,948439076
-	-	4,96	0,353000445	3,714	0,94895946
-	-	4,968	0,353041711	3,72	0,94947914
-	-	4,976	0,353082884	3,726	0,949998116
-	-	4,984	0,353123962	3,732	0,95051639
-	-	4,992	0,353164947	3,738	0,951033965
-	-	5	0,353205839	3,744	0,951550841
-	-	5,008	0,353246639	3,75	0,952067022
-	-	5,016	0,353287345	3,756	0,952582508
-	-	5,024	0,35332796	3,762	0,953097302
-	-	5,032	0,353368483	3,768	0,953611405
-	-	5,04	0,353408914	3,774	0,954124819
-	-	5,048	0,353449255	3,78	0,954637546
-	-	5,056	0,353489505	3,786	0,955149588
-	-	5,064	0,353529664	3,792	0,955660946
-	-	5,072	0,353569734	3,798	0,956171622
-	-	5,08	0,353609713	3,804	0,956681619
-	-	5,088	0,353649604	3,81	0,957190937
-	-	5,096	0,353689405	3,816	0,957699578
-	-	5,104	0,353729118	3,822	0,958207545
-	-	5,112	0,353768742	3,828	0,958714838
-	-	5,12	0,353808279	3,834	0,95922146
-	-	5,128	0,353847727	3,84	0,959727413
-	-	5,136	0,353887088	3,846	0,960232697
-	-	5,144	0,353926362	3,852	0,960737315
-	-	5,152	0,35396555	3,858	0,961241269
-	-	5,16	0,354004651	3,864	0,96174456
-	-	5,168	0,354043666	3,87	0,962247189
-	-	5,176	0,354082595	3,876	0,962749159
-	-	5,184	0,354121438	3,882	0,963250471
-	-	5,192	0,354160197	3,888	0,963751127
-	-	5,2	0,35419887	3,894	0,964251129
-	-	5,208	0,35423746	3,9	0,964750477
-	-	5,216	0,354275964	3,906	0,965249175
-	-	5,224	0,354314385	3,912	0,965747222
-	-	5,232	0,354352723	3,918	0,966244622
-	-	5,24	0,354390977	3,924	0,966741375
-	-	5,248	0,354429147	3,93	0,967237484
-	-	5,256	0,354467236	3,936	0,967732949

Tabela E.2 – Valores numéricos referentes à várias Figuras (continuação)

Dados referentes à Figura 23		Dados referentes à Figura 31		Dados referentes à Figura 33	
y	u	Tempo(ms)	Raio(mm)	Tempo(ms)	Raio(mm)
-	-	5,264	0,354505242	3,942	0,968227773
-	-	5,272	0,354543165	3,948	0,968721957
-	-	5,28	0,354581007	3,954	0,969215503
-	-	5,288	0,354618767	3,96	0,969708412
-	-	5,296	0,354656447	3,966	0,970200685
-	-	5,304	0,354694045	3,972	0,970692325
-	-	5,312	0,354731562	3,978	0,971183333
-	-	5,32	0,354768999	3,984	0,971673711
-	-	5,328	0,354806356	3,99	0,97216346
-	-	5,336	0,354843634	3,996	0,972652581
-	-	5,344	0,354880831	4,002	0,973141076
-	-	5,352	0,35491795	4,008	0,973628947
-	-	5,36	0,35495499	4,014	0,974116195
-	-	5,368	0,354991951	4,02	0,974602822
-	-	5,376	0,355028833	4,026	0,97508883
-	-	5,384	0,355065637	4,032	0,975574219
-	-	5,392	0,355102364	4,038	0,976058991
-	-	5,4	0,355139013	4,044	0,976543148
-	-	5,408	0,355175585	4,05	0,977026692
-	-	5,416	0,355212079	4,056	0,977509623
-	-	5,424	0,355248497	4,062	0,977991944
-	-	5,432	0,355284839	4,068	0,978473655
-	-	5,44	0,355321104	4,074	0,978954758
-	-	5,448	0,355357293	4,08	0,979435256
-	-	5,456	0,355393407	4,086	0,979915148
-	-	5,464	0,355429445	4,092	0,980394437
-	-	5,472	0,355465408	4,098	0,980873124
-	-	5,48	0,355501296	4,104	0,98135121
-	-	5,488	0,35553711	4,11	0,981828698
-	-	5,496	0,355572849	4,116	0,982305588
-	-	5,504	0,355608514	4,122	0,982781882
-	-	5,512	0,355644105	4,128	0,983257581
-	-	5,52	0,355679623	4,134	0,983732686
-	-	5,528	0,355715067	4,14	0,9842072
-	-	5,536	0,355750438	4,146	0,984681123
-	-	5,544	0,355785736	4,152	0,985154457
-	-	5,552	0,355820962	4,158	0,985627203
-	-	5,56	0,355856115	4,164	0,986099364
-	-	5,568	0,355891197	4,17	0,986570939
-	-	5,576	0,355926206	4,176	0,98704193
-	-	5,584	0,355961144	4,182	0,98751234

Tabela E.2 – Valores numéricos referentes à várias Figuras (continuação)

Dados referentes à Figura 23		Dados referentes à Figura 31		Dados referentes à Figura 33	
y	u	Tempo(ms)	Raio(mm)	Tempo(ms)	Raio(mm)
-	-	5,592	0,35599601	4,188	0,987982168
-	-	5,6	0,356030805	4,194	0,988451418
-	-	5,608	0,35606553	4,2	0,988920089
-	-	5,616	0,356100183	4,206	0,989388183
-	-	5,624	0,356134767	4,212	0,989855703
-	-	5,632	0,35616928	4,218	0,990322648
-	-	5,64	0,356203723	4,224	0,99078902
-	-	5,648	0,356238097	4,23	0,991254822
-	-	5,656	0,356272401	4,236	0,991720053
-	-	5,664	0,356306636	4,242	0,992184716
-	-	5,672	0,356340802	4,248	0,992648811
-	-	5,68	0,356374899	4,254	0,99311234
-	-	5,688	0,356408927	4,26	0,993575305
-	-	5,696	0,356442887	4,266	0,994037706
-	-	5,704	0,35647678	4,272	0,994499545
-	-	5,712	0,356510604	4,278	0,994960824
-	-	5,72	0,356544361	4,284	0,995421543
-	-	5,728	0,35657805	4,29	0,995881704
-	-	5,736	0,356611672	4,296	0,996341308
-	-	5,744	0,356645228	4,302	0,996800356
-	-	5,752	0,356678716	4,308	0,99725885
-	-	5,76	0,356712138	4,314	0,997716791
-	-	5,768	0,356745494	4,32	0,99817418
-	-	5,776	0,356778784	4,326	0,998631019
-	-	5,784	0,356812007	4,332	0,999087308
-	-	5,792	0,356845166	4,338	0,99954305
-	-	5,8	0,356878259	4,344	0,999998244
-	-	5,808	0,356911286	4,35	1,000452894
-	-	5,816	0,356944249	4,356	1,000906998
-	-	5,824	0,356977147	4,362	1,00136056
-	-	5,832	0,35700998	4,368	1,00181358
-	-	5,84	0,357042749	4,374	1,00226606
-	-	5,848	0,357075454	4,38	1,002718
-	-	5,856	0,357108095	4,386	1,003169402
-	-	5,864	0,357140672	4,392	1,003620268
-	-	5,872	0,357173185	4,398	1,004070597
-	-	5,88	0,357205636	4,404	1,004520392
-	-	5,888	0,357238023	4,41	1,004969654
-	-	5,896	0,357270347	4,416	1,005418384
-	-	5,904	0,357302609	4,422	1,005866583
-	-	5,912	0,357334808	4,428	1,006314252

Tabela E.2 – Valores numéricos referentes à várias Figuras (continuação)

Dados referentes à Figura 23		Dados referentes à Figura 31		Dados referentes à Figura 33	
y	u	Tempo(ms)	Raio(mm)	Tempo(ms)	Raio(mm)
-	-	5,92	0,357366945	4,434	1,006761393
-	-	5,928	0,35739902	4,44	1,007208006
-	-	5,936	0,357431033	4,446	1,007654093
-	-	5,944	0,357462984	4,452	1,008099656
-	-	5,952	0,357494874	4,458	1,008544694
-	-	5,96	0,357526702	4,464	1,00898921
-	-	5,968	0,35755847	4,47	1,009433204
-	-	5,976	0,357590176	4,476	1,009876679
-	-	5,984	0,357621822	4,482	1,010319634
-	-	5,992	0,357653407	4,488	1,010762071
-	-	6	0,357684932	4,494	1,011203991
-	-	6,008	0,357716397	4,5	1,011645395
-	-	6,016	0,357747802	4,506	1,012086285
-	-	6,024	0,357779147	4,512	1,012526662
-	-	6,032	0,357810432	4,518	1,012966526
-	-	6,04	0,357841658	4,524	1,013405879
-	-	6,048	0,357872825	4,53	1,013844722
-	-	6,056	0,357903933	4,536	1,014283056
-	-	6,064	0,357934983	4,542	1,014720883
-	-	6,072	0,357965973	4,548	1,015158202
-	-	6,08	0,357996905	4,554	1,015595016
-	-	6,088	0,358027779	4,56	1,016031326
-	-	6,096	0,358058595	4,566	1,016467132
-	-	6,104	0,358089353	4,572	1,016902436
-	-	6,112	0,358120053	4,578	1,017337239
-	-	6,12	0,358150696	4,584	1,017771542
-	-	6,128	0,358181281	4,59	1,018205345
-	-	6,136	0,358211809	4,596	1,018638651
-	-	6,144	0,35824228	4,602	1,01907146
-	-	6,152	0,358272695	4,608	1,019503773
-	-	6,16	0,358303052	4,614	1,019935592
-	-	6,168	0,358333354	4,62	1,020366917
-	-	6,176	0,358363599	4,626	1,020797749
-	-	6,184	0,358393788	4,632	1,02122809
-	-	6,192	0,35842392	4,638	1,02165794
-	-	6,2	0,358453998	4,644	1,022087301
-	-	6,208	0,358484019	4,65	1,022516174
-	-	6,216	0,358513985	4,656	1,022944559
-	-	6,224	0,358543896	4,662	1,023372458
-	-	6,232	0,358573752	4,668	1,023799872
-	-	6,24	0,358603553	4,674	1,024226802

Tabela E.2 – Valores numéricos referentes à várias Figuras (continuação)

Dados referentes à Figura 23		Dados referentes à Figura 31		Dados referentes à Figura 33	
y	u	Tempo(ms)	Raio(mm)	Tempo(ms)	Raio(mm)
-	-	6,248	0,358633299	4,68	1,024653249
-	-	6,256	0,35866299	4,686	1,025079213
-	-	6,264	0,358692628	4,692	1,025504697
-	-	6,272	0,35872221	4,698	1,0259297
-	-	6,28	0,358751739	4,704	1,026354225
-	-	6,288	0,358781214	4,71	1,026778271
-	-	6,296	0,358810635	4,716	1,027201841
-	-	6,304	0,358840003	4,722	1,027624934
-	-	6,312	0,358869317	4,728	1,028047553
-	-	6,32	0,358898578	4,734	1,028469697
-	-	6,328	0,358927785	4,74	1,028891369
-	-	6,336	0,35895694	4,746	1,029312569
-	-	6,344	0,358986042	4,752	1,029733297
-	-	6,352	0,359015092	4,758	1,030153556
-	-	6,36	0,359044089	4,764	1,030573346
-	-	6,368	0,359073033	4,77	1,030992667
-	-	6,376	0,359101926	4,776	1,031411522
-	-	6,384	0,359130766	4,782	1,03182991
-	-	6,392	0,359159555	4,788	1,032247834
-	-	6,4	0,359188292	4,794	1,032665293
-	-	6,408	0,359216977	4,8	1,03308229
-	-	6,416	0,359245611	4,806	1,033498824
-	-	6,424	0,359274194	4,812	1,033914897
-	-	6,432	0,359302726	4,818	1,034330509
-	-	6,44	0,359331207	4,824	1,034745663
-	-	6,448	0,359359637	4,83	1,035160358
-	-	6,456	0,359388016	4,836	1,035574595
-	-	6,464	0,359416345	4,842	1,035988377
-	-	6,472	0,359444624	4,848	1,036401702
-	-	6,48	0,359472853	4,854	1,036814574
-	-	6,488	0,359501031	4,86	1,037226991
-	-	6,496	0,35952916	4,866	1,037638956
-	-	6,504	0,359557239	4,872	1,038050469
-	-	6,512	0,359585268	4,878	1,038461532
-	-	6,52	0,359613248	4,884	1,038872144
-	-	6,528	0,359641179	4,89	1,039282308
-	-	6,536	0,35966906	4,896	1,039692023
-	-	6,544	0,359696893	4,902	1,040101292
-	-	6,552	0,359724676	4,908	1,040510114
-	-	6,56	0,359752411	4,914	1,040918491
-	-	6,568	0,359780098	4,92	1,041326423

Tabela E.2 – Valores numéricos referentes à várias Figuras (continuação)

Dados referentes à Figura 23		Dados referentes à Figura 31		Dados referentes à Figura 33	
y	u	Tempo(ms)	Raio(mm)	Tempo(ms)	Raio(mm)
-	-	6,576	0,359807736	4,926	1,041733912
-	-	6,584	0,359835325	4,932	1,042140958
-	-	6,592	0,359862867	4,938	1,042547563
-	-	6,6	0,35989036	4,944	1,042953727
-	-	6,608	0,359917806	4,95	1,043359451
-	-	6,616	0,359945204	4,956	1,043764736
-	-	6,624	0,359972554	4,962	1,044169583
-	-	6,632	0,359999857	4,968	1,044573993
-	-	6,64	0,360027113	4,974	1,044977967
-	-	6,648	0,360054321	4,98	1,045381505
-	-	6,656	0,360081482	4,986	1,045784608
-	-	6,664	0,360108597	4,992	1,046187278
-	-	6,672	0,360135664	4,998	1,046589515
-	-	6,68	0,360162686	5,004	1,04699132
-	-	6,688	0,36018966	5,01	1,047392694
-	-	6,696	0,360216588	5,016	1,047793638
-	-	6,704	0,36024347	5,022	1,048194152
-	-	6,712	0,360270306	5,028	1,048594238
-	-	6,72	0,360297096	5,034	1,048993897
-	-	6,728	0,36032384	5,04	1,049393128
-	-	6,736	0,360350538	5,046	1,049791934
-	-	6,744	0,360377191	5,052	1,050190314
-	-	6,752	0,360403798	5,058	1,05058827
-	-	6,76	0,36043036	5,064	1,050985803
-	-	6,768	0,360456877	5,07	1,051382914
-	-	6,776	0,360483349	5,076	1,051779603
-	-	6,784	0,360509776	5,082	1,05217587
-	-	6,792	0,360536157	5,088	1,052571718
-	-	6,8	0,360562495	5,094	1,052967147
-	-	6,808	0,360588787	5,1	1,053362157
-	-	6,816	0,360615036	5,106	1,05375675
-	-	6,824	0,36064124	5,112	1,054150926
-	-	6,832	0,3606674	5,118	1,054544686
-	-	6,84	0,360693515	5,124	1,054938031
-	-	6,848	0,360719587	5,13	1,055330962
-	-	6,856	0,360745615	5,136	1,055723479
-	-	6,864	0,3607716	5,142	1,056115584
-	-	6,872	0,36079754	5,148	1,056507277
-	-	6,88	0,360823438	5,154	1,056898558
-	-	6,888	0,360849292	5,16	1,05728943
-	-	6,896	0,360875102	5,166	1,057679892

Tabela E.2 – Valores numéricos referentes à várias Figuras (continuação)

Dados referentes à Figura 23		Dados referentes à Figura 31		Dados referentes à Figura 33	
y	u	Tempo(ms)	Raio(mm)	Tempo(ms)	Raio(mm)
-	-	6,904	0,36090087	5,172	1,058069946
-	-	6,912	0,360926595	5,178	1,058459592
-	-	6,92	0,360952277	5,184	1,058848831
-	-	6,928	0,360977916	5,19	1,059237663
-	-	6,936	0,361003513	5,196	1,05962609
-	-	6,944	0,361029067	5,202	1,060014113
-	-	6,952	0,361054578	5,208	1,060401732
-	-	6,96	0,361080048	5,214	1,060788947
-	-	6,968	0,361105475	5,22	1,06117576
-	-	6,976	0,36113086	5,226	1,061562172
-	-	6,984	0,361156204	5,232	1,061948183
-	-	6,992	0,361181505	5,238	1,062333794
-	-	7	0,361206765	5,244	1,062719006
-	-	7,008	0,361231984	5,25	1,06310382
-	-	7,016	0,361257161	5,256	1,063488236
-	-	7,024	0,361282296	5,262	1,063872255
-	-	7,032	0,361307391	5,268	1,064255877
-	-	7,04	0,361332444	5,274	1,064639105
-	-	7,048	0,361357456	5,28	1,065021938
-	-	7,056	0,361382428	5,286	1,065404377
-	-	7,064	0,361407358	5,292	1,065786422
-	-	7,072	0,361432248	5,298	1,066168076
-	-	7,08	0,361457098	5,304	1,066549338
-	-	7,088	0,361481907	5,31	1,066930209
-	-	7,096	0,361506675	5,316	1,06731069
-	-	7,104	0,361531404	5,322	1,067690782
-	-	7,112	0,361556092	5,328	1,068070485
-	-	7,12	0,36158074	5,334	1,0684498
-	-	7,128	0,361605349	5,34	1,068828728
-	-	7,136	0,361629917	5,346	1,069207269
-	-	7,144	0,361654446	5,352	1,069585425
-	-	7,152	0,361678936	5,358	1,069963196
-	-	7,16	0,361703386	5,364	1,070340583
-	-	7,168	0,361727796	5,37	1,070717586
-	-	7,176	0,361752167	5,376	1,071094207
-	-	7,184	0,3617765	5,382	1,071470445
-	-	7,192	0,361800793	5,388	1,071846302
-	-	7,2	0,361825047	5,394	1,072221779
-	-	7,208	0,361849262	5,4	1,072596875
-	-	7,216	0,361873439	5,406	1,072971593
-	-	7,224	0,361897577	5,412	1,073345932

Tabela E.2 – Valores numéricos referentes à várias Figuras (continuação)

Dados referentes à Figura 23		Dados referentes à Figura 31		Dados referentes à Figura 33	
y	u	Tempo(ms)	Raio(mm)	Tempo(ms)	Raio(mm)
-	-	7,232	0,361921676	5,418	1,073719893
-	-	7,24	0,361945737	5,424	1,074093477
-	-	7,248	0,36196976	5,43	1,074466685
-	-	7,256	0,361993744	5,436	1,074839517
-	-	7,264	0,362017691	5,442	1,075211974
-	-	7,272	0,362041599	5,448	1,075584057
-	-	7,28	0,362065469	5,454	1,075955767
-	-	7,288	0,362089302	5,46	1,076327103
-	-	7,296	0,362113097	5,466	1,076698068
-	-	7,304	0,362136854	5,472	1,077068661
-	-	7,312	0,362160574	5,478	1,077438883
-	-	7,32	0,362184256	5,484	1,077808735
-	-	7,328	0,362207901	5,49	1,078178218
-	-	7,336	0,362231509	5,496	1,078547332
-	-	7,344	0,362255079	5,502	1,078916077
-	-	7,352	0,362278613	5,508	1,079284456
-	-	7,36	0,362302109	5,514	1,079652468
-	-	7,368	0,362325569	5,52	1,080020114
-	-	7,376	0,362348992	5,526	1,080387395
-	-	7,384	0,362372379	5,532	1,080754311
-	-	7,392	0,362395728	5,538	1,081120862
-	-	7,4	0,362419042	5,544	1,081487051
-	-	7,408	0,362442319	5,55	1,081852877
-	-	7,416	0,36246556	5,556	1,082218341
-	-	7,424	0,362488764	5,562	1,082583444
-	-	7,432	0,362511933	5,568	1,082948186
-	-	7,44	0,362535065	5,574	1,083312568
-	-	7,448	0,362558162	5,58	1,083676591
-	-	7,456	0,362581223	5,586	1,084040255
-	-	7,464	0,362604248	5,592	1,084403561
-	-	7,472	0,362627238	5,598	1,084766509
-	-	7,48	0,362650192	5,604	1,085129101
-	-	7,488	0,36267311	5,61	1,085491337
-	-	7,496	0,362695994	5,616	1,085853217
-	-	7,504	0,362718842	5,622	1,086214743
-	-	7,512	0,362741654	5,628	1,086575914
-	-	7,52	0,362764432	5,634	1,086936732
-	-	7,528	0,362787175	5,64	1,087297198
-	-	7,536	0,362809883	5,646	1,08765731
-	-	7,544	0,362832556	5,652	1,088017072
-	-	7,552	0,362855194	5,658	1,088376482

Tabela E.2 – Valores numéricos referentes à várias Figuras (continuação)

Dados referentes à Figura 23		Dados referentes à Figura 31		Dados referentes à Figura 33	
y	u	Tempo(ms)	Raio(mm)	Tempo(ms)	Raio(mm)
-	-	7,56	0,362877798	5,664	1,088735542
-	-	7,568	0,362900367	5,67	1,089094252
-	-	7,576	0,362922902	5,676	1,089452613
-	-	7,584	0,362945403	5,682	1,089810626
-	-	7,592	0,362967869	5,688	1,090168291
-	-	7,6	0,362990301	5,694	1,090525609
-	-	7,608	0,363012699	5,7	1,09088258
-	-	7,616	0,363035063	5,706	1,091239206
-	-	7,624	0,363057393	5,712	1,091595485
-	-	7,632	0,363079689	5,718	1,091951421
-	-	7,64	0,363101951	5,724	1,092307012
-	-	7,648	0,36312418	5,73	1,09266226
-	-	7,656	0,363146375	5,736	1,093017164
-	-	7,664	0,363168537	5,742	1,093371727
-	-	7,672	0,363190665	5,748	1,093725948
-	-	7,68	0,36321276	5,754	1,094079828
-	-	7,688	0,363234821	5,76	1,094433367
-	-	7,696	0,36325685	5,766	1,094786567
-	-	7,704	0,363278845	5,772	1,095139427
-	-	7,712	0,363300808	5,778	1,095491949
-	-	7,72	0,363322737	5,784	1,095844133
-	-	7,728	0,363344634	5,79	1,096195979
-	-	7,736	0,363366498	5,796	1,096547489
-	-	7,744	0,363388329	5,802	1,096898662
-	-	7,752	0,363410127	5,808	1,0972495
-	-	7,76	0,363431893	5,814	1,097600002
-	-	7,768	0,363453627	5,82	1,09795017
-	-	7,776	0,363475328	5,826	1,098300004
-	-	7,784	0,363496998	5,832	1,098649505
-	-	7,792	0,363518634	5,838	1,098998674
-	-	7,8	0,363540239	5,844	1,09934751
-	-	7,808	0,363561812	5,85	1,099696014
-	-	7,816	0,363583353	5,856	1,100044188
-	-	7,824	0,363604862	5,862	1,100392031
-	-	7,832	0,363626339	5,868	1,100739545
-	-	7,84	0,363647784	5,874	1,101086729
-	-	7,848	0,363669198	5,88	1,101433584
-	-	7,856	0,36369058	5,886	1,101780112
-	-	7,864	0,363711931	5,892	1,102126312
-	-	7,872	0,36373325	5,898	1,102472185
-	-	7,88	0,363754539	5,904	1,102817731

Tabela E.2 – Valores numéricos referentes à várias Figuras (continuação)

Dados referentes à Figura 23		Dados referentes à Figura 31		Dados referentes à Figura 33	
y	u	Tempo(ms)	Raio(mm)	Tempo(ms)	Raio(mm)
-	-	7,888	0,363775795	5,91	1,103162952
-	-	7,896	0,363797021	5,916	1,103507848
-	-	7,904	0,363818215	5,922	1,103852419
-	-	7,912	0,363839379	5,928	1,104196666
-	-	7,92	0,363860512	5,934	1,104540589
-	-	7,928	0,363881613	5,94	1,104884189
-	-	7,936	0,363902684	5,946	1,105227467
-	-	7,944	0,363923724	5,952	1,105570423
-	-	7,952	0,363944734	5,958	1,105913057
-	-	7,96	0,363965713	5,964	1,106255371
-	-	7,968	0,363986661	5,97	1,106597365
-	-	7,976	0,364007579	5,976	1,106939039
-	-	7,984	0,364028467	5,982	1,107280394
-	-	7,992	0,364049324	5,988	1,10762143

Fonte: Próprio Autor (2020).