

unesp



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ**

CAROLINA DE LIMA DULOR

**ESTUDO DE PLACAS COM VÁRIAS CONDIÇÕES DE CONTORNO E DE
CARREGAMENTO ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO**

Guaratinguetá
2012

CAROLINA DE LIMA DULOR

**ESTUDO DE PLACAS COM VÁRIAS CONDIÇÕES DE CONTORNO E DE
CARREGAMENTO ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO**

Trabalho de Graduação apresentado ao
Conselho de Curso de Graduação em
Engenharia Civil da Faculdade de Engenharia
do Campus de Guaratinguetá, Universidade
Estadual Paulista, como parte dos requisitos
para obtenção do diploma de Graduação em
Engenharia Civil

Orientador: Prof. Dr. Yzumi Taguti

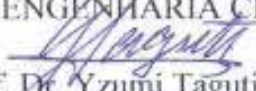
Guaratinguetá
2012

D884e	Dulor, Carolina de Lima Estudo de Placas com várias condições de contorno e de carregamento através do Método dos Elementos de Contorno / Carolina de Lima Dulor – Guaratinguetá : [s.n], 2012. 80 f. : il. Bibliografia : f. 79-80 Trabalho de Graduação em Engenharia Civil – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2012. Orientador: Prof. Dr. Yzumi Taguti 1. Lajes 2. Placas (Engenharia) I. Título CDU 624.073.6
-------	--

**ESTUDO DE PLACAS COM VÁRIAS CONDIÇÕES DE CONTORNO E DE
CARREGAMENTO ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO**

CAROLINA DE LIMA DULOR

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO
COMO PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE
GRADUADO EM ENGENHARIA CIVIL
APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL


Prof. Dr. Yzumi Taguti
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. Yzumi Taguti
Orientador/UNESP-FEG
Prof. Dr. Enos Arneiro Nogueira Silva
UNESP-FEG
Prof. Dr. Wellington Cyro de Almeida Leite
UNESP/FEG

Dezembro de 2012

DADOS CURRICULARES

CAROLINA DE LIMA DULOR

NASCIMENTO 07.06.1986 – SÃO PAULO / SP

FILIAÇÃO Luiz Fernando Lucas Dolor
Marta Ruiz Alves de Lima

2007/2012 Curso de Graduação em Engenharia Civil
Universidade Estadual Paulista – “Júlio de
Mesquita Filho”, Campus de Guaratinguetá.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao meu pai que sempre me apoiou, a minha mãe que sempre está do meu lado e a minha avó que sempre acreditou em mim. Agradeço também aos meus irmãos pelo amor e carinho e aos familiares próximos que estiveram presentes nessa fase da minha vida. Todos me ensinaram o valor das nossas conquistas.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, por me permitir as melhores experiências de vida e por colocar as pessoas certas em meu caminho,

ao meu professor e orientador *Prof. Dr. Yzumi Taguti*, que além do incentivo para escolha do tema deste trabalho, foi imprescindível para esclarecê-lo e pelos prestativos auxílios para o desenvolvimento do estudo,

ao meu pai Luis Fernando Lucas Dolor, por ser um pai maravilhoso, que sempre acreditou em mim, me deu suporte e que sempre apoiou minhas decisões,

à minha mãe Marta Ruiz Alves de Lima, que me ama incondicionalmente, me apoia nas horas mais difíceis da minha vida, me ergue e me põe de volta no caminho que eu devo seguir,

à minha avó Aurora Ruiz Alves de Lima, que é a minha segunda mãe, ajudou a me criar e é uma das pessoas que eu mais amo na vida,

aos meus irmãos Primo Ruiz Veloso Soares e Maria Clara Ruiz Veloso Soares, irmãos que eu amo e que tento sempre dar um bom exemplo,

à minha tia Denise Ruiz Alves de Lima pelo imenso apoio.

à toda minha família, pelos mais valiosos ensinamentos e por todo suporte e incentivo, principalmente quanto à faculdade, caso contrário, não estaríamos vivendo esta realização,

à República das Ursas, minha segunda família, que desde o primeiro instante eu amei, lutei por ela e lutarei por esse nome pra sempre, pois me proporcionou muitos momentos de aprendizado, alegria, diversão e responsabilidades. Nela, aprendi muitos valores e principalmente de respeito ao próximo, o que contribuiu e muito para o meu amadurecimento. Essa família sem duvidas eu carregarei para o resto da minha vida no meu coração,

à Nádia Flores pelos grandes conselhos,

à Renata de Moraes pelos seus valores,

à Ana Paula Costa de Lima pela alegria, determinação e coragem que sempre passou a todas as pessoas à sua volta,

à Francyanne Fracari Oishi pela competência de liderar um grupo, pelo seu senso de justiça e sinceridade,

à Adriana Naomi Oshiro amiga, irmã que eu sempre quero ter perto de mim,

à Carla Ferreira Teixeira pela alegria que contagia a todos,

à Bruna Pereira Prisco da Cunha, minha amiga e irmã que sempre me ouviu e nunca me julgou,

à Bruna Hitomi pelo seu conhecimento,

à Caroline Bispo Kina pelo seu carisma,

à Samantha Oliveira pelo seu amadurecimento ao longo do tempo,

à Kyrlla Fogaça pela pró-atividade mostrada e fico contente em saber que a nossa família esta em boas mãos,

à Juliana Günther pelas suas boas atitudes com as pessoas,

à Ana Luisa Funke pelo seu caráter,

à Lisia So, Melissa Muraoka e Fábria de Moraes por terem se integrado à república, pois são meninas muito especiais que vão levar essa família pelos próximos anos,

à Beatriz Helene Xavier, minha amiga e irmã que sempre está e compartilha tudo comigo, minha amiga pra sempre,

ao Jean Michel da Silva por ser meu melhor amigo

aos meus *Amigos* por todo companheirismo nos longos dias e noites de estudos e encontros. Foi um prazer partilhar os melhores anos da minha vida com pessoas de caráter e princípios.

DULOR, de L. C. **Estudo de placas com várias condições de contorno e de carregamento através do método dos elementos de contorno.** 2012. 75p. Trabalho de Graduação (Graduação em Engenharia Civil)-Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

RESUMO

Ainda hoje se utilizam tabelas no cálculo de estruturas formadas por elementos planos, esses métodos são aceitáveis apenas para um número limitado de casos, mas mesmo assim, em algumas situações, as tabelas são utilizadas. Com o tempo alguns métodos de resoluções de equações diferenciais foram surgindo e aceitados como solução mais eficaz. Hoje, com o avanço da tecnologia, já existem alguns programas capazes de solucionar problemas mais complexos em menor tempo através desses métodos.

Com o objetivo de otimizar tempo e entender melhor o comportamento físico de placas, este trabalho apresenta a teoria das placas, o Método de Elementos de Contorno (MEC) aplicados na resolução de problemas de placas(lajes) com diversas condições de contorno e de carregamento, por meio do programa **Placas2**(TAGUTI,Y.-2010) em Linguagem Fortran.

PALAVRAS CHAVES: Placas. Lajes. Teoria das Placas. Método de Elementos de Contorno

DULOR, L. C. **Studying plates with various boundary conditions and loading by the method of boundary elements**. 2012. 75p. Work Graduate (Degree in Civil Engineering) College of Engineering Campus Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

ABSTRACT

Even today tables are used in the calculation of structures formed by flat elements, these methods are acceptable only for a limited number of cases, but even so, in some situations, tables are used. With time some methods of differential equations resolutions were emerging and accepted as the most effective solution. Today, with the advancement in technology, there are already some programs able to solve more complex problems in less time using these methods.

Aiming to optimize time and better understand the physical behavior of plates, this work presents the theory of plate, the Boundary Element Method (BEM) applied to solve problems of plates (slabs) with various boundary conditions and load through the program Placas2 (TAGUTI, Y.-2010) in Fortran language

KEYWORDS: Plates. Slabs. Theory of Plates. Boundary Element Method

ÍNDICE DE ILUSTRAÇÕES

Figura 4.1.1 - Chapa fina com carregamento de forças no contorno.....	23
Figura 4.2.1 - Elemento representativo de estado plano de deformação	23
Figura 5.2.1 - Elemento representativo de placa	26
Figura 5.3.1 - Representação da tensão em relação ao deslocamento	28
Figura 5.3.2 - Representação da tensão	29
Figura 5.3.3 - Representação dos momentos fletores	30
Figura 5.3.4 - Representação dos momentos de torção	30
Figura 5.3.5 - Representação das cortantes	31
Figura 5.3.6 - Representação dos esforços em um elemento genérico de placa.....	31
Figura 6.1 - Ponto de deslocamento “p” e ponto de carregamento “q”	35
Figura 7.1.1 - Representação de uma placa finita contida em uma placa finita	36
Figura 7.1.2 - Sistema de Coordenadas (n, s).....	37
Figura 7.1.3 - Representação do canto "i" da placa.....	39
Figura 7.2.1 - Representação do contorno circular Γ_ξ	41
Figura 7.3.1 - Sistema de coordenadas associadas aos pontos anterior e posterior aos cantos $\lambda_+ + E \lambda_-$	43
Figura 7.4.1 - Região Carregada Ω_g	44
Figura 8.1.1 - Discretização do contorno da placa.	46
Figura 7.1.2 - Descrição geométrica do elemento linear.....	48
Figura 8.2.1 - Elemento Linear Contínuo.....	50
Figura 8.2.2 - Descontinuidades geométricas do contorno de uma Placa	50
Figura 8.3.1 - Elemento linear descontínuo.....	51
Figura 7.4.1 - Elemento linear misto.	52
Figura 8.5.1 - Canto "i" da placa com seus nós anteriores e posteriores, necessários para o cálculo das contribuições de canto na matriz H.	55
Figura 9.2.1.1 - Exemplo de Placa 1.....	62
Figura 9.2.1.2 - Placa com 20 elementos.....	63
Figura 9.2.1.3 - Placa com 44 elementos.....	63
Figura 9.2.2.1 - Exemplo de Placa 2.....	65
Figura 9.2.2.2 - Placa com 32 elementos.....	66

Figura 9.2.2.3 - Placa com 64 elementos.....	67
Figura 9.2.3.1 - Exemplo de Placa 3.....	69
Figura 9.2.3.2 - Placa com 15 elementos.....	70
Figura 9.2.3.3 - Placa com 30 elementos.....	70
Figura 9.2.4.1 - Exemplo de Placa 4.....	73
Figura 9.2.4.2 - Placa com 15 elementos.....	74
Figura 9.2.4.3 - Placa com 30 elementos.....	75

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 9.1.1 - Condições de Contorno.	58
Tabela 9.1.2 - Características da Placa.	59
Tabela 9.1.3 - Regiões de Carga.....	59
Tabela 9.1.4 - Discretização do Contorno	59
Tabela 9.1.5 - Nós Internos	59
Tabela 9.1.6 - Elementos do Contorno.....	60
Tabela 9.1.7 - Coordenadas da Região de Contorno.	60
Tabela 9.1.8 - Elementos da Região de Contorno.	60
Tabela 9.1.9 - Vinculações da placa.	60
Tabela 9.1.10 - Vinculações que sofrem Deslocamento Vertical Nulo.....	61
Tabela 9.1.11 - Vinculações que sofrem Giro Nulo.	61
Tabela 9.1.12 - Cantos da Placa.	61
Tabela 9.2.1.1 - Laje Retangular com 1 Bordo Engastado e 3 Apoiados – Czerny.	64
Tabela 9.2.1.2 - Resultado Exemplo 1.....	65
Tabela 9.2.2.1 - Laje Retangular com 1 Bordo Engastado e 3 Apoiados – Czerny.	67
Tabela 9.2.2.2 - Resultado Exemplo 2.....	68
Tabela 9.2.3.1 - Laje Retangular com 1 Bordo Engastado e 3 Apoiados - Czerny.....	71
Tabela 9.2.3.2 - Resultado Exemplo 3.....	72
Tabela 9.2.4.1 - Resultado Exemplo 4.....	76

LISTA DE SÍMBOLOS

σ	Tensão
ε	Deformação elástica
E	Módulo de Young
G	Módulo de elasticidade transversal
ν	Coefficiente de Poisson
W	Deslocamento
F_{res}	Força resultante
M	Momento
Q	Força cortante
D	Rigidez da placa à flexão
g	Total das resultantes das cargas transversais
q	Carga unitária aplicada num ponto no domínio
p	Resposta a carga unitária aplicada no domínio
Ω	Domínio
Ω_{∞}	Domínio infinito
Γ	Contorno
Γ_{∞}	Contorno infinito
R_{ci}	Reação no contorno i da placa
P	Resposta a carga unitária aplicada no contorno
Q	Carga unitária aplicada em um ponto do contorno
Γ_{ξ}	Contorno circular
ξ	Raio do contorno circular
λ	Pontos dos cantos
j	Elemento do contorno
N	Valores totais
φ	Função aproximadora
N_e	Elementos
N_n	Nós do contorno
h^i	Influência
g^i	Influência
$\hat{H}(Q)$ e $\underline{G}(Q)$	Matrizes de influência, que dependem da geometria

$\underline{H}_c(Q)$ e $\underline{G}_c(Q)$ Matrizes de influência

$\underline{T}(Q)$ Valor resultante da integração da região Ω_g

$\underline{H}_e$ e $\underline{G}_e$ Submatrizes formadas pelos coeficientes correspondentes a w_c e R_c

$\underline{H}$ e $\underline{\tilde{G}}$ Submatrizes que tem $(N_c) \times 2(N_n)$ elementos

$\underline{H}_c$ e $\underline{\tilde{G}}_c$ Submatrizes quadradas de ordem $\underline{N}_c$

$\underline{A}$ Matriz formada por elementos das matrizes $\underline{H}$ e $\underline{G}$

$\underline{B}$ Vetor obtido a partir da soma do vetor $\underline{T}$ juntamente com o vetor formado pelo produto dos elementos das matrizes $\underline{H}$ e $\underline{G}$

$\underline{X}$ Vetor das incógnitas procuradas, referente aos deslocamentos e esforços nodais

$\underline{X}_c$ Vetor das incógnitas procuradas, referente aos deslocamentos e esforços nos cantos das placas

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	OBJETIVOS E JUSTIFICATIVAS	19
2.1	OBJETIVO GERAL	19
2.2	OBJETIVO ESPECÍFICO	19
2.3	JUSTIFICATIVAS	19
3	TIPOS DE MÉTODOS NUMÉRICOS	20
3.1	MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	20
3.2	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	20
3.3	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	20
4	TEORIA DA ELASTICIDADE	22
4.1	ESTADO PLANO DE TENSÃO	22
4.2	ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO	23
4.3	LEI DE HOOKE	24
5	TEORIA DAS PLACAS	25
5.1	HIPÓTESES PARA O ESTUDO DE PLACAS DELGADAS	25
5.2	CONSIDERAÇÕES SOBRE PLACAS DELGADAS	25
5.3	ESFORÇOS EM UM ELEMENTO DE PLACA	28
6	SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DE PLACAS	34
7	EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA FLEXÃO DE PLACAS	36
7.1	EQUAÇÃO INTEGRAL PARA UM PONTO NO DOMÍNIO DA PLACA	36
7.2	EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA UM PONTO DO CONTORNO	40
7.3	SISTEMA DE COORDENADAS ASSOCIADAS AOS PONTOS ANTERIOR E POSTERIOR AOS CANTOS	43
7.4	TRANSFORMAÇÕES DAS INTEGRAIS DE DOMÍNIO RELATIVAS AO CARREGAMENTO	44
8	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	46
8.1	DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO	46
8.2	ELEMENTO LINEAR CONTÍNUO	49
8.3	ELEMENTO LINEAR DESCONTÍNUO	51
8.4	ELEMENTO LINEAR MISTO	52
8.5	TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS EM EQUAÇÕES ALGÉBRICAS	53
8.6	CONDIÇÃO DE CONTORNO	55

9	PROGRAMA PLACAS2.FOR.....	58
9.1	ENTRADA DE DADOS	58
9.2	APLICAÇÕES NUMÉRICAS	61
9.2.1	EXEMPLO 1	62
9.2.2	EXEMPLO 2	65
9.2.3	EXEMPLO 3	69
9.2.4	EXEMPLO 4	73
10	CONCLUSÕES.....	77

1 INTRODUÇÃO

Durante a graduação de Engenharia Civil o principal objeto de estudo são soluções de estruturas lineares contidas num plano, tais como pilares e vigas. Em relação às estruturas planas, apenas o caso de lajes são tratados, porém através de tabelas. Por isso, justifica-se o estudo de estruturas planas como placas (lajes) e chapas (paredes).

Os métodos numéricos foram desenvolvidos para resolver os problemas de engenharia da forma mais prática e precisa possível. Para verificar como se comporta um elemento estrutural é necessário dividi-lo em vários elementos para que se possa calcular com uma razoável precisão suas propriedades, pois quando se analisa a estrutura como um todo, os valores obtidos não são próximos do real. Por este motivo que o advento do computador foi essencial, para que se pudesse discretizar ao máximo um elemento estrutural, obtendo precisão em pouco tempo de cálculo. Sem a computação o tempo de cálculo seria impraticável.

No caso destas estruturas planas, ao longo do tempo, muitos estudos sobre resoluções de sistemas diferenciais duas das teorias são as principais utilizadas para a análise do comportamento das placas, a chamada Teoria Clássica, que foi formulada por G. Kirchhoff (1850) que é denominada simplificadora, pois analisa somente placas delgadas, admite quatro variáveis no contorno do problema, o que resulta numa equação diferencial de quarta ordem e tem relação direta duas a duas. E também Reissner (1944) e Mindlin(1951), que formularam teorias que originam equações diferenciais de sexta ordem, considerando deformações por cisalhamento e também relacionadas duas a duas. Estas duas teorias exprimem bem a Teoria Clássica.

Com o tempo, foram realizados e aperfeiçoados, mas a complexidade das equações diferenciais limitavam as soluções analíticas e com a chegada da informática esses problemas puderam ser resolvidos numericamente, permitindo resolver problemas mais complexos com outras condições de contorno.

Pela ordem cronológica tem-se o Método das Diferenças Finitas - M.D.F. que surgiu antes do advento do computador, mas até hoje é utilizado. Em seguida vem o Método dos Elementos Finitos - M.E.F. (1960) introduzido durante os avanços tecnológicos, sendo este o método mais utilizado na época, por ser um método de ampla aplicação em várias das áreas da

engenharia e de relativamente fácil entendimento por parte dos engenheiros, por tratar com variáveis familiares a estes.

O objeto de estudo deste trabalho será o Método de Elemento de Contorno - M.E.C. (1978). A partir de estudos de problemas utilizando equações integrais, aplicadas à teoria de Betti (1872), e além de ser um método mais recente apresenta uma melhor realização por trabalhar com poucos dados, pois a discretização é feita sobre seu contorno deixando o problema com menor tempo de processamento dos dados e por consequência menor armazenamento na memória do computador.

Pelo Método de Elemento de Contorno serão montadas equações algébricas somente em função do deslocamento (w), para transferir toda a base de cálculo para o programa que realizará o cálculo.

2 OBJETIVOS E JUSTIFICATIVAS

2.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral deste estudo é discutir os conhecimentos de computação e os métodos numéricos de cálculo de placas delgadas.

2.2 OBJETIVO ESPECÍFICO

O objetivo específico desse trabalho é a aplicar o Método de Elemento de Contorno através do programa Placas2(TAGUTI,Y-2010), onde inicialmente será verificada toda a teoria para a aplicação do método e em seguida solucionado alguns exemplos.

2.3 JUSTIFICATIVAS

Primeiramente, no objetivo geral discutiremos sobre os conhecimentos de computação e os métodos numéricos de cálculo de placas delgadas, pois na graduação estes assuntos não são abordados e atualmente são conceitos e ferramentas necessárias.

Já no objetivo específico será verificada a confiabilidade do programa em relação as “Tabelas de Czerny”.

3 TIPOS DE MÉTODOS NUMÉRICOS

Existem vários tipos de métodos numéricos, mas os três principais serão descritos a seguir.

3.1 Método das Diferenças Finitas

É o método de resoluções de equações diferenciais que aproxima a solução das derivadas por diferenças finitas. É um método relativamente simples de se trabalhar, pois é composto de um sistema de equações lineares algébricas, que resultam em uma única solução aproximadora. Porém, serve somente para geometrias regulares e não pode ser aplicado onde as variáveis mudam muito rapidamente, tais como as de concentração de tensão.

3.2 Método dos Elementos Finitos

É a forma de solucionar numericamente um sistema de equações diferenciais parciais. A diferença desse método é que as subdivisões do elemento estrutural são conectadas por nós, então suas incógnitas são somente relativas aos seus nós através de equações algébricas lineares. É um método que executa também estruturas de geometria irregular e pode ser aplicado em variáveis que mudam rapidamente.

3.3 Método dos Elementos de Contorno

É originado a partir do desenvolvimento das técnicas de resoluções de equações de integrais de contorno, pois segundo Elliot, em 1923, Abel [18] deduziu uma equação integral para resolver o problema de pêndulo isócrono. Isso, seguidamente em 1837 Liouville [19] gerou uma equação integral a partir de um problema de valor inicial, e a resolveu por aproximações. Até que Betti [20] em 1872 incorporou as equações integrais na Teoria da Elasticidade.

Posteriormente deu origem a uma série de trabalhos, onde diversos estudiosos desenvolveram o problema, até chegar ao método utilizado atualmente. O MEC é basicamente

aproximações onde equações diferenciais governantes são aplicadas no contorno do problema. Toda a sua discretização é feita no contorno, subdivididos em elementos de contorno conectados por nós. Por esta razão tem-se um sistema de equações algébricas lineares mais simples do que as equações do Método dos Elementos Finitos.

4 TEORIA DA ELASTICIDADE

É necessário saber a definição de um elemento elástico para se entender a Teoria da Elasticidade. Quando um elemento possui elasticidade, significa que ele consegue se deformar quando sob ação externa e quando essa ação é removida o elemento retorna a sua forma original. Elementos que posteriormente não voltam a sua forma original são denominados inelásticos.

Então, estudar a Teoria da Elasticidade é analisar um dos segmentos da física, onde é verificado o comportamento de certos elementos “corpos” quando submetidos a ações de carregamentos externos. Verifica-se a deformação desse elemento que retorna a sua forma original após o carregamento externo é cessado. De acordo com o professor Taguti [17], na Teoria de Elasticidade estudam-se as relações entre as forças externas, deslocamentos, deformações e tensões em um corpo constituído de material elástico.

4.1 ESTADO PLANO DE TENSÃO

Quando um corpo é submetido a ações de um conjunto de forças, ele é deformado e isso gera tensões nele. Admitindo-se uma chapa de fina espessura contida num plano xy com um certo carregamento aplicado em seu contorno. Entende-se por estado plano de tensão as tensões aplicadas no plano das superfícies da chapa σ_x , σ_y e τ_{xy} , pois as componentes de tensões σ_z , τ_{xz} e τ_{yz} são nulas nas duas faces da chapa, além de se considerar também que são nulas no interior da chapa.

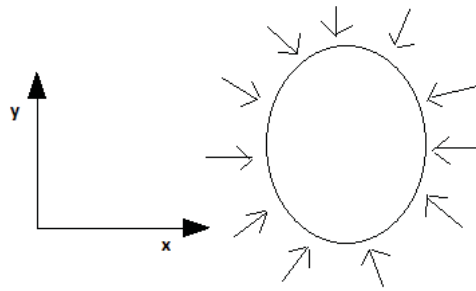


Figura 4.1.1 - Chapa fina com carregamento de forças no contorno.

4.2 ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO

Analogamente a tensão plana tem-se a definição para deformação plana. De acordo com a orientação do eixo tem-se as variações das deformações em um ponto numa estrutura carregada. Então, quando um elemento está sujeito a deformações somente em um plano, diz-se que ele está em estado de deformação plana. Mas é importante saber que em condições normais, os estados de tensões e deformações planas não ocorrem ao mesmo tempo.

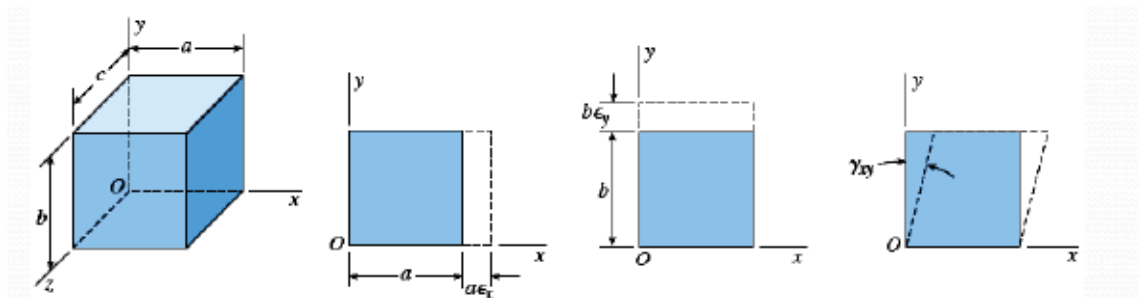


Figura 4.2.1 - Elemento representativo de estado plano de deformação

Considerando-se o elemento da figura 4.2, observa-se que as únicas deformações são as que ocorrem no plano xy , sendo assim tem-se que as deformações existentes são ϵ_x , ϵ_y e σ_{xy} .

$$\epsilon_z = 0 \quad (4.2.1)$$

$$\sigma_{xz} = 0 \quad (4.2.2)$$

$$\sigma_{yz} = 0 \quad (4.2.3)$$

4.3 LEI DE HOOKE

A Lei de Hooke (1676) diz que “As forças deformantes são proporcionais às deformações elásticas produzidas”, ou seja, é a relação linear que se tem entre tensão e deformação, já vistos anteriormente. A Lei pode ser expressa por:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (4.3.1)$$

onde, E é denominado Módulo de Young ou Módulo de Elasticidade que varia de acordo com o material utilizado.

A partir da equação (4.3.1) geram-se uma série de equações que podem ser reduzidas em duas, que serão escritas na forma indicial:

$$\sigma_{xy} = \left(\frac{2G\nu}{1-2\nu} \right) \varepsilon_{xx} \delta_{yy} + 2G \varepsilon_{xy} \quad (4.3.2)$$

ou

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2G} \left[\sigma_{xy} - \left(\frac{\nu}{1+\nu} \right) \sigma_{xx} \delta_{xy} \right] \quad (4.3.3)$$

juntamente com:

$$G = \frac{E}{2} (1 + \nu) \quad (4.3.4)$$

Chega-se, considerando (4.2.1), (4.2.2) e (4.2.3) em:

$$\sigma_{xx} = \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) (\varepsilon_{xx} + \nu \cdot \varepsilon_{yy}) \quad (4.3.5)$$

$$\sigma_{yy} = \left(\frac{E}{1-\nu^2} \right) (\varepsilon_{yy} + \nu \cdot \varepsilon_{xx}) \quad (4.3.6)$$

$$\sigma_{xy} = 2G \cdot \varepsilon_{xy} \quad (4.3.7)$$

Onde:

E: Módulo de Young;

G: Módulo de Elasticidade Transversal;

ν : Coeficiente de Poisson.

5 TEORIA DAS PLACAS

Quando se tem um elemento estrutural limitado por duas superfícies médias planas e esforços externos normais a esse plano, este é denominado como placa. Existe uma distancia entre estas superfícies, denominada espessura, que pode variar, mas é pequena em relação às outras dimensões.

A placa poderá ser classificada em espessa, delgada ou muito delgada, e isso irá depender da relação entre a espessura e a menor dimensão do plano da placa. No presente estudo teremos como base o fundamento das placas delgadas baseada na teoria de Kirchhoff, que melhor define o comportamento das placas.

5.1 HIPOTHESES PARA O ESTUDO DE PLACAS DELGADAS

- a) Isótropa: tendo propriedades iguais em qualquer direção.
- b) Homogêneo: suas propriedades são mantidas por toda a sua extensão.
- c) Elástico-linear: quando as tensões e deformações estão relacionados linearmente.
- d) Linear geometricamente.
- e) Placa pouco espessa em relação às outras dimensões e constante.
- f) Tensões desprezíveis nas superfícies limítrofes.
- g) Os pontos da placa situados numa reta normal ao plano médio estarão, após o equilíbrio, numa reta normal à superfície média da placa deformada.

5.2 CONSIDERAÇÕES SOBRE PLACAS DELGADAS

De acordo com a hipótese de tensões desprezíveis nas superfícies limítrofes tem-se:

$$\sigma_{zx} \cong 0 \quad (5.2.1)$$

$$\sigma_{zy} \cong 0 \quad (5.2.2)$$

$$\sigma_{zz} \cong 0 \quad (5.2.3)$$

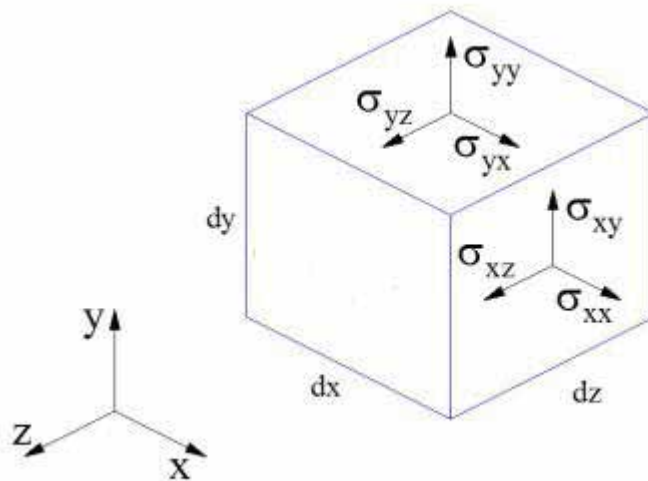


Figura 5.2.1 - Elemento representativo de placa

De acordo com as hipóteses de Teoria das Placas a, b e c, que são correspondentes à Lei de Hooke vista no item anterior, através das equações (4.3.2), (4.3.3) e (4.3.4), e considerando que tenha somente pequenos deslocamentos na placa, tem-se que a relação deformação por deslocamento será dada, num plano ij , por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.2.4)$$

Ao se substituir os valores das expressões (5.2.1), (5.2.2), (5.2.3) e (4.4.4) em (4.3.3) ficamos com valores nulos de ε , que ao substituir na expressão (5.2.4) na direção z , fica:

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (5.2.5)$$

$$\varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \quad (5.2.6)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \quad (5.2.7)$$

E, voltando a hipótese g, onde menciona que os pontos da placa situados numa reta normal ao plano médio estarão, após o equilíbrio, numa reta normal à superfície média da placa deformada, ou seja, a variação é linear. Propondo então:

$$\sigma_{xx} = a_1(x, y) + b_1(x, y)z \quad (5.2.8)$$

$$\sigma_{yy} = a_2(x, y) + b_2(x, y)z \quad (5.2.9)$$

Uma das equações mais importantes de se obter, é quando substitui-se (5.2.8) e (5.2.9) em (5.2.7) e integra-se em relação a z, ficando:

$$u_z = w(x, y) - \frac{\nu}{E}(a_1(x, y) + a_2(x, y))z + \frac{\nu}{E}(b_1(x, y) + b_2(x, y))\frac{z^2}{2} \quad (5.2.10)$$

Os termos relacionados a z valem zero, pois a coordenada em z vale zero, portanto serão desprezados.

Sabendo que:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (5.2.11)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (5.2.12)$$

Temos que substituir a equação (5.2.9) em (5.2.10) e (5.2.11) e integrar em relação a z para obter:

$$u_x = u(x, y) - z\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)(x, y) \quad (5.2.13)$$

$$u_y = v(x, y) - z\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)(x, y) \quad (5.2.14)$$

E, tendo a informação de que:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (5.2.15)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (5.2.16)$$

Substitui-se a equação (5.2.13) em (5.2.15), enquanto que se substitui (5.2.14) em (5.2.16), ficando então:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (5.2.17)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (5.2.18)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (5.2.19)$$

Sendo o segundo termo devido à flexão.

Com isso, substitui-se a equação (5.2.19) em (4.3.5), (4.3.6) e (4.3.7), tendo como resultado equações de tensão a partir de deslocamentos:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] \quad (5.2.20)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \quad (5.2.21)$$

$$\sigma_{xy} = 2G \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (5.2.22)$$

5.3 ESFORÇOS EM UM ELEMENTO DE PLACA

Deve-se chegar nas equações fundamentais em função do deslocamento, pois no software que será utilizado as incógnitas serão em função do deslocamento. Para isso, dá-se continuidade às deduções, chegando assim nas soluções fundamentais.

Assim sendo, toma-se como exemplo um elemento de placa, para que se visualize os esforços na placa.

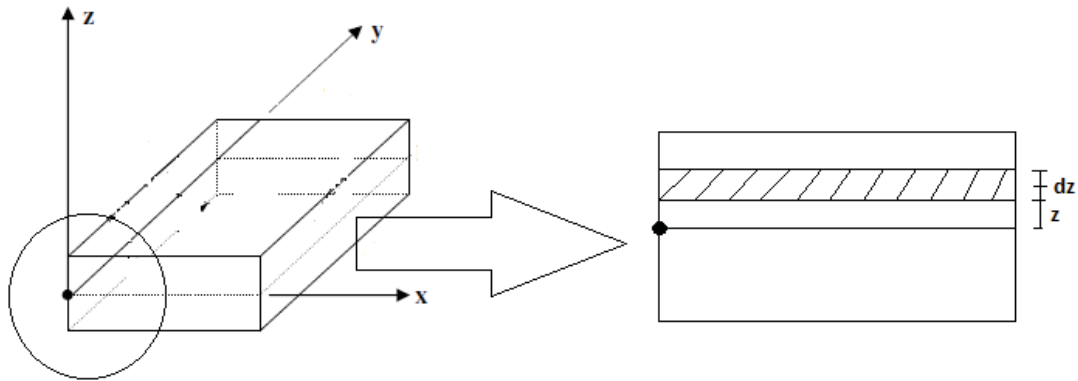


Figura 5.3.1 - Representação da tensão em relação ao deslocamento

De acordo com a figura (5.3.1) tem-se como exemplo que:

$$F_{res} = \sigma_{xx} x \cdot 1 \cdot dz \quad (5.3.1)$$

$$M_x = F_{res} \cdot z \quad (5.3.2)$$

Onde,

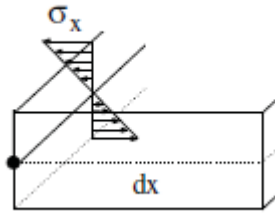


Figura 5.3.2 - Representação da tensão

E, com as tensões que foram representadas na figura (5.2.1), consegue-se a partir de integrais de tensões pela espessura h , definir os esforços solicitantes para que se chegue nas equações governantes.

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} z \cdot dz \quad (5.3.4)$$

$$M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yy} z \cdot dz \quad (5.3.5)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z \cdot dz \quad (5.3.6)$$

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz \quad (5.3.7)$$

$$Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} dz \quad (5.3.8)$$

Essas integrais relacionadas acima serão representadas pelas figuras a seguir, onde será verificado que quando se está fora de um dos eixos de origem um segundo termo é acrescentado nas equações.

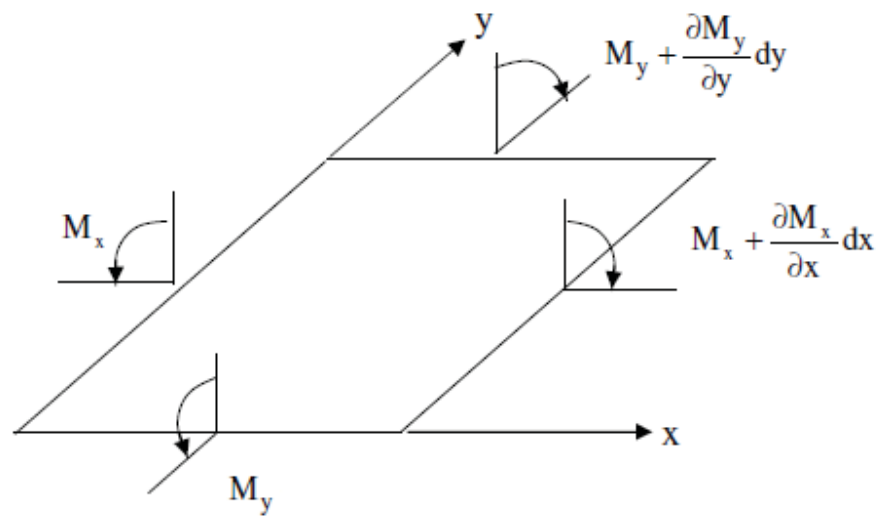


Figura 5.3.3 - Representação dos momentos fletores

A Figura (5.3.3) representa os Momentos Fletores, num elemento genérico de placa.

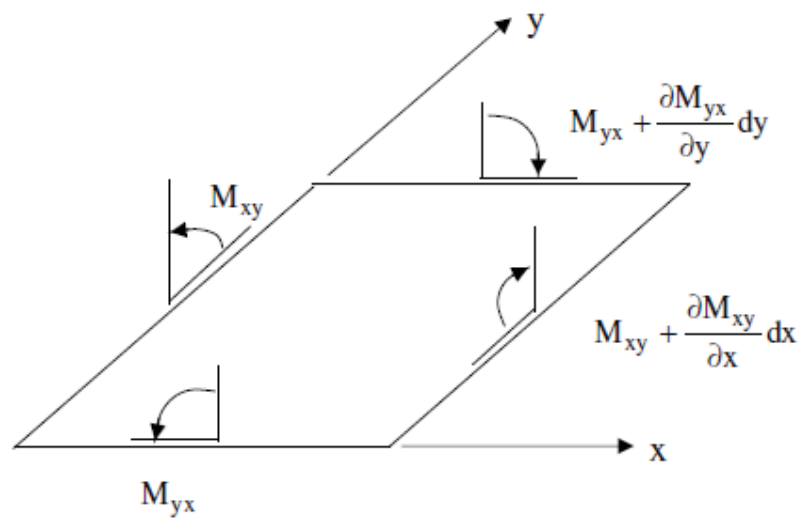


Figura 5.3.4 - Representação dos momentos de torção

A Figura (5.3.4) representa os Momentos de Torsão, num elemento genérico de placa.

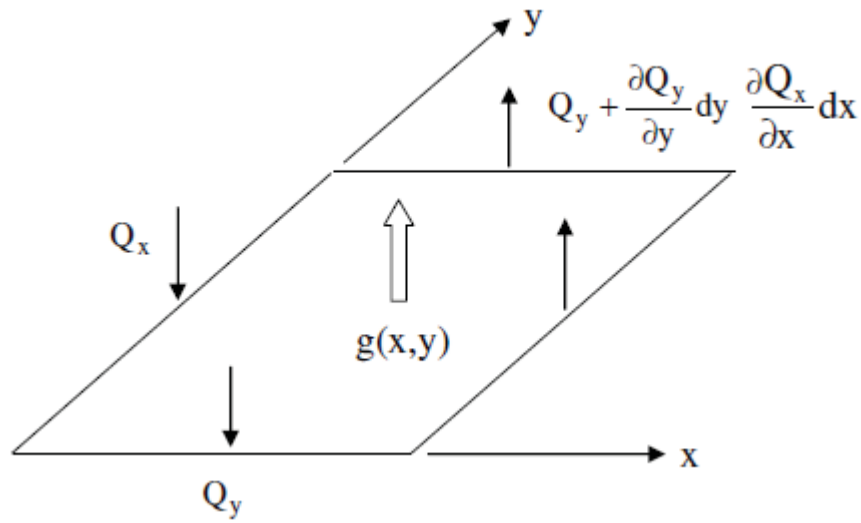


Figura 5.3.5 - Representação das cortantes

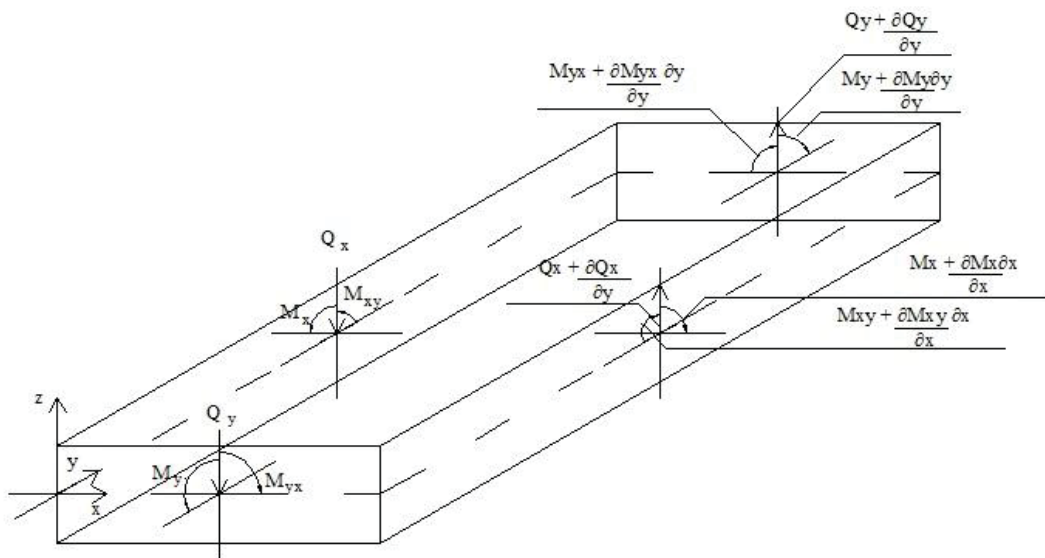


Figura 5.3.6 - Representação dos esforços em um elemento genérico de placa

Todos os esforços mencionados acima, são transformados nas equações a seguir, pela substituição das equações (5.2.20), (5.2.21) e (5.2.22) em (5.3.4), (5.3.5) e (5.3.6) respectivamente, ficando:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (5.3.9)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (5.3.10)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial xy} \quad (5.3.11)$$

Sendo que a rigidez da placa à flexão dá-se por:

$$D = \frac{E.h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (5.3.12)$$

A partir dos equilíbrios de esforços atuantes no elemento genérico de placa da figura (5.3.6) tem-se o equilíbrio de forças e momentos:

$$\Sigma F_x = 0 \quad (5.3.13)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad (5.3.14)$$

$$\Sigma F_z = 0 \quad (5.3.15)$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad (5.3.16)$$

$$\Sigma M_y = 0 \quad (5.3.17)$$

$$\Sigma M_z = 0 \quad (5.3.18)$$

E, os esforços cortantes, dados por:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dxdy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dydx + g.dxdy = 0 \quad (5.3.19)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + g(x, y) = 0 \quad (5.3.20)$$

Onde g representa o total das resultantes das cargas transversais.

Fazendo o equilíbrio de momentos em torno do eixo 0x:

$$\left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \partial x \right) dy - M_{xy} dy + \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} \partial y \right) dx - M_y dx - Q_y dxdy = 0$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = Q_y \quad (5.3.21)$$

Fazendo o equilíbrio de momentos em torno do eixo 0y:

$$\left(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \partial y \right) dx - M_{yx} dx + \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} \partial x \right) dy - M_x dy - Q_x dxdy = 0$$

E, pela consideração $M_{yx} = M_{xy}$, tem-se:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = Q_x \quad (5.3.22)$$

Então, na substituição das equações (5.3.21) e (5.3.22) em (5.3.20) obtém-se a equação fundamental em termos de momento:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -g \quad (5.3.23)$$

Para se obter a equação fundamental em termos de deslocamento transversal w , substitui-se as equações (5.3.9), (5.3.10) e (5.3.11) em (5.3.23), ficando então:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{g}{D} \quad (5.3.24)$$

Com essas duas últimas equações, será iniciadas as soluções fundamentais de placas para que se possa executar o programa baseado nessas equações.

6 SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DE PLACAS

Quando se aplica uma carga unitária “q” em um ponto num domínio, diz-se domínio fundamental, esta gera uma resposta “p” em outro ponto deste domínio, esta resposta é a solução fundamental.

Para estudar soluções fundamentais, é necessário ter como base soluções integrais. No caso das placas a solução fundamental se dá pelo deslocamento transversal w^* , em um ponto “p” no plano xy, dito ponto de deslocamento a partir da aplicação de uma força unitária aplicada no ponto “q” do plano xy. A equação que mostra a equação fundamental vem a seguir:

$$\Delta \Delta w^* = \frac{\delta(q,p)}{D} \quad (6.1)$$

Dentro de um domínio infinito.

O elemento $\delta(q,p)$ é denominado Delta de Dirac, que tem como propriedades:

q : ponto onde a carga é aplicada.

p : ponto onde recebe a resposta da carga aplicada.

$$\delta(q,p) = 0 \quad \text{quando } p \neq q \quad (6.2)$$

$$\delta(q,p) = \infty \quad \text{quando } p = q \quad (6.3)$$

$$\int_{\Omega} \phi(p) \delta(q,p) d\Omega = \phi(q) \quad (6.4)$$

Paul Adrien Maurice Dirac (1902) nasceu em Bristol-Inglaterra. Ele concluiu o curso de engenharia elétrica em 1921. Já em 1926, ele recebeu o título de Doutor em Matemática. Seus trabalhos são relacionados com aspectos matemáticos e teóricos da Mecânica Quântica. Em 1928, Dirac inicia uma pesquisa sobre a nova Mecânica Quântica, proposta por Heisenberg. A partir daí Dirac desenvolveu um modelo matemático, para calcular propriedades atômicas.

Como a integral da distribuição Delta de Dirac é uma força unitária que é aplicada no ponto “q” e $\phi(p)$ é uma função definida no domínio Ω , pode-se dizer que:

$$\int_{\Omega} \delta(q,p) d\Omega = 1 \quad (6.5)$$

Onde,

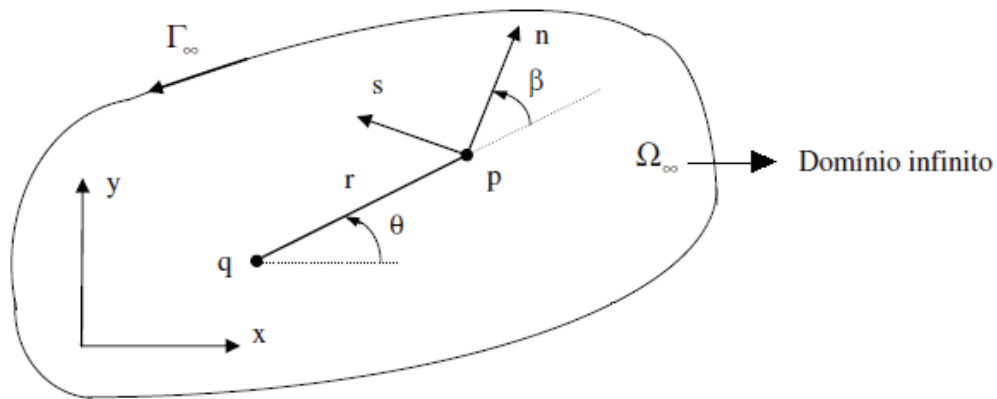


Figura 5.3.1 - Ponto de deslocamento “p” e ponto de carregamento “q”

Através da consideração da equação (6.1) que se aplica a todos os pontos do domínio, exceto no ponto “q”, de carregamento, diz-se:

$$\Delta \Delta w^* = 0 \quad (6.6)$$

Para se chegar a solução fundamental deve-se considerar um sistema de coordenadas polares, sendo que a origem se dá no ponto “q” de acordo com a figura 5.1 e considera-se também que existe simetria no domínio infinito

De acordo com Tejerina Calderón [2], quando se considera a simetria em relação ao ponto “q” e a condição de equilíbrio das forças verticais atuante em um círculo de raio “r”, cujo centro é o ponto de aplicação da carga unitária, obtém-se constantes. E algumas constantes que no caso de placa fundamental, podem assumir quaisquer valores de acordo com Stern, Bezine e Danson, que substituídas a solução fundamental w^* , fica:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \quad (6.7)$$

7 EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA FLEXÃO DE PLACAS

Para que o Método de Elemento de Contorno seja aplicado é essencial se obter equações integrais, pois elas que definem o problema envolvendo soluções fundamentais, e são obtidas pode se dar através da utilização dos resíduos ponderados ou pelo Teorema de Reciprocidade de Betti. No presente trabalho será levado em conta o Teorema de Betti, onde para se obter a equação integral para os pontos de contorno, primeiro será integrada a expressão que levará à equação integral de deslocamento.

7.1 EQUAÇÃO INTEGRAL PARA UM PONTO NO DOMÍNIO DA PLACA

Considerando uma placa de domínio Ω e contorno Γ , que fica contida em outra de domínio Ω_∞ e contorno Γ_∞ , e submetida a um carregamento g distribuído em uma área Ω_g dentro do domínio Ω , de acordo com a figura (7.1.1)

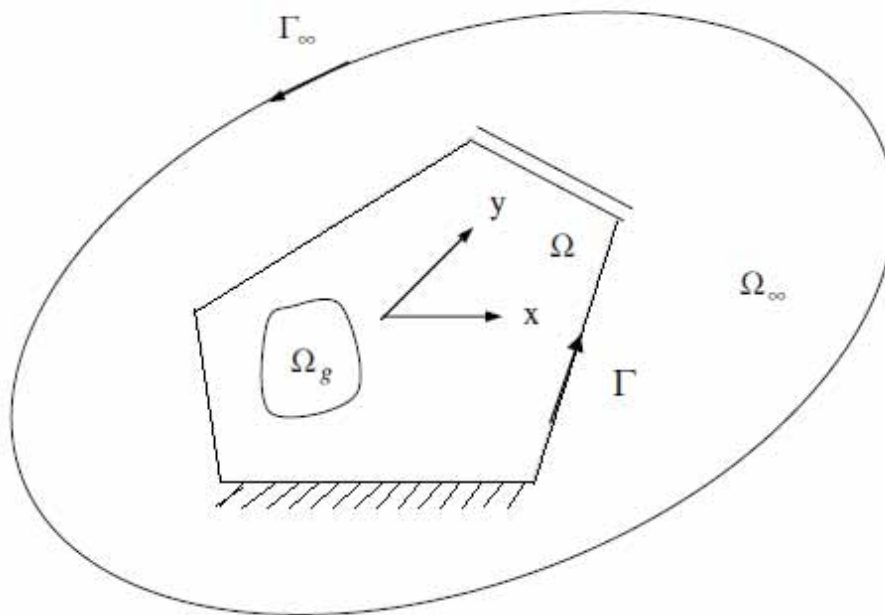


Figura 7.1.1 - Representação de uma placa finita contida em uma placa infinita

Betti, em seu teorema, considera a relação de dois estados distintos de tensão e deformação que podem existir em uma placa de domínio infinito, quando se considera dois

carregamentos não simultâneos g e g^* , com as superfícies w e w^* a eles relacionados. Com isso pode-se dizer que:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV \quad i,j = 1,2,3 \quad (7.1.1)$$

Onde,

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* = \sigma_x \varepsilon_x^* + \sigma_y \varepsilon_y^* + \sigma_z \varepsilon_z^* + 2(\sigma_{xy} \varepsilon_{xy}^* + \sigma_{xz} \varepsilon_{xz}^* + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz}^*) \quad (7.1.2)$$

Pode-se desprezar as tensões relacionadas à direção normal ao plano da placa, sendo ele denominado U , obtendo-se:

$$U = \int (\sigma_x \varepsilon_x^* + \sigma_y \varepsilon_y^* + 2\sigma_{xy} \varepsilon_{xy}^*) dV \quad (7.1.3)$$

De acordo com substituições e integrações ao longo da espessura da placa, pode-se escrever a equação a seguir:

$$U = \int_{\Omega} \left(-M_x \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \right) d\Omega \quad (7.1.4)$$

Com a finalidade de solucionar a equação diferencial de placas é necessário saber que os momentos fletores e forças cortantes podem ser escritos também em relação a um sistema qualquer de coordenadas n e s ortogonais. Essa transformação será importante para explicar as condições de contorno.

Para determinar as próximas equações é necessário demonstrar o sistema de coordenadas (n,s) , normal e tangente ao contorno.

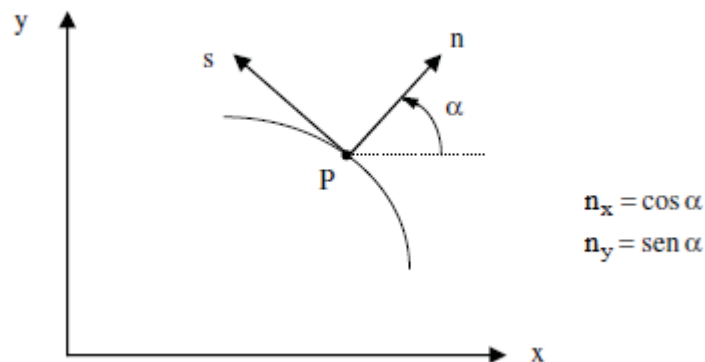


Figura 7.1.2 - Sistema de Coordenadas (n, s)

Portanto, é importante esclarecer que:

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \quad (7.1.5)$$

Dessa mesma figura (7.1.2) pode-se escrever que:

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} = \frac{\partial w^*}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial w^*}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s} \sin \alpha \quad (7.1.6)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial y} = \frac{\partial w^*}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial w^*}{\partial n} \sin \alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s} \cos \alpha \quad (7.1.7)$$

A equação descrita acima pode ser transformada parcialmente em um integral sobre o contorno Γ , se cada parcela for considerada separadamente, denominando-se para elas u_1 , u_2 e u_3 . Ficando então:

$$u_1 = \int_{\Gamma} \left(-M_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial M_x}{\partial x} w^* \cos \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} w^* d\Omega \quad (7.1.8)$$

$$u_2 = \int_{\Gamma} \left(-M_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + \frac{\partial M_y}{\partial y} w^* \sin \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} w^* d\Omega \quad (7.1.9)$$

$$u_3 = \int_{\Gamma} \left(-M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha - M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} w^* \cos \alpha + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} w^* \sin \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} w^* d\Omega \quad (7.1.10)$$

Voltando a substituir os valores de u_1 , u_2 e u_3 na equação (7.1.4), a partir das considerações das equações (5.3.21), (5.3.22) e (5.3.23), obtendo-se:

$$U = - \int_{\Gamma} \left(M_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + M_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha + M_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha \right) d\Gamma + \int_{\Gamma} Q_n w^* d\Gamma + \int_{\Omega} g w^* d\Omega_g \quad (7.1.11)$$

Considerando a equação:

$$R_{ci} = M_{nsi}^+ - M_{nsi}^- \quad (7.1.12)$$

De acordo com a figura (6.1.3) pode-se considerar que o termo $(M_{nsi}^+ - M_{nsi}^-)$ é a reação do canto i da placa.

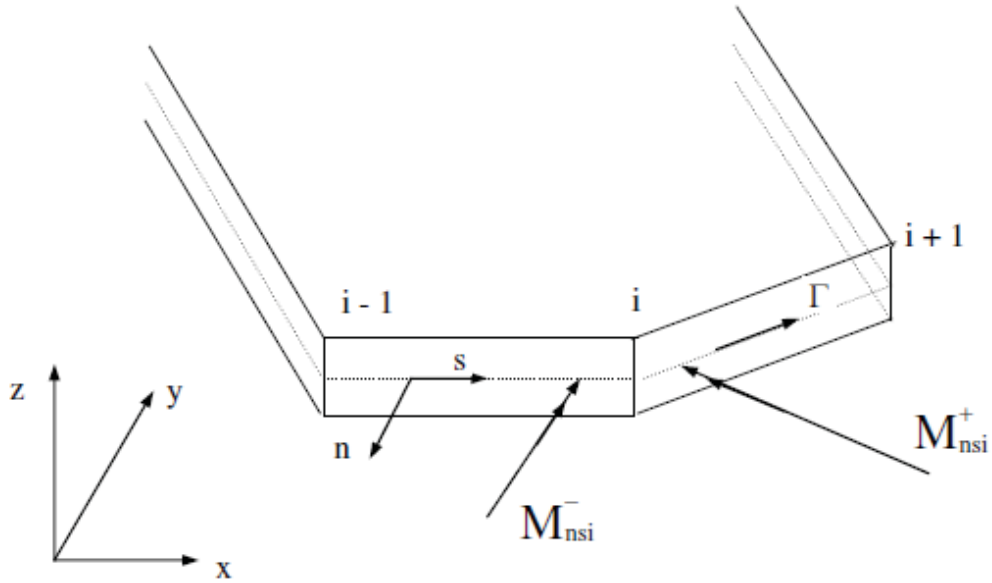


Figura 7.1.3 - Representação do canto "i" da placa

Substituindo-se as equações (7.1.6) e (7.1.7), na equação (7.1.11), pode-se transformar essa nova equação em equações que darão origem a reações nos cantos (angulosidades) da placa. Com isso, a equação (7.1.11) pode ser reescrita considerando (7.1.12) da seguinte forma:

$$U = \int_{\Gamma} \left(Q_n w^* + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \quad (7.1.13)$$

Levando-se em conta a equação (7.1.5) em (7.1.13) e considerando que g está distribuído em Ω_g , tem-se que:

$$U = \int_{\Gamma} \left(V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \quad (7.1.14)$$

Para finalizar, tem-se que o termo que não foi desenvolvido da equação (7.1.1), poderá ser desenvolvido da mesma maneira, e tendo-se o Teorema de Betti aplicado às placas ficará:

$$U' = \int_{\Gamma} \left(V_n^* w - M_n^* \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^* w_{ci} + \int_{\Omega_g} w g^* d\Omega_g \quad (7.1.15)$$

Basicamente tem que se supor que g^* seja uma carga unitária aplicada em um ponto “q” do domínio da placa e Delta de Dirac $\delta(p, q)$ seja sua representação. Então, aplicando-se sua propriedade tem-se na substituição da equação (7.1.15):

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \delta(q, p) w(p) d\Omega(p) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(q, P) w(P) - M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
& \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q, P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w^*(q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] d\Gamma(P) + \\
& \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q, P) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega(p)
\end{aligned} \tag{7.1.16}$$

Pela função Delta de Dirac escreve-se que:

$$\int_{\Omega} \delta(q, p) w(p) d\Omega(p) = w(q) \tag{7.1.17}$$

A equação (7.1.17) proporciona a expressão do Teorema de Betti para placas, pode ser escrita assim:

$$\begin{aligned}
& w(q) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(q, P) w(P) - M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
& \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q, P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n(P) w^*(q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] d\Gamma(P) + \\
& \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q, P) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega(p)
\end{aligned} \tag{7.1.18}$$

A equação (7.1.18) representa o deslocamento w , de um ponto “ q ” do domínio da placa.

7.2 EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA UM PONTO DO CONTORNO

Já foi verificadas equações para o ponto “ q ” do domínio, agora a intenção a obtenção de equações integrais para pontos “ Q ” do contorno. Com isso, será possível a formulação do problema de flexão de placas pelo Método dos Elementos de Contorno.

Inicialmente será determinado um ponto “ Q ” no contorno, que virá a pertencer ao domínio devido a acréscimo de um contorno circular denominado Γ_{ξ} , de raio ξ , onde “ Q ” ficará no centro desse novo contorno, de acordo com a figura (7.2.1) a seguir:

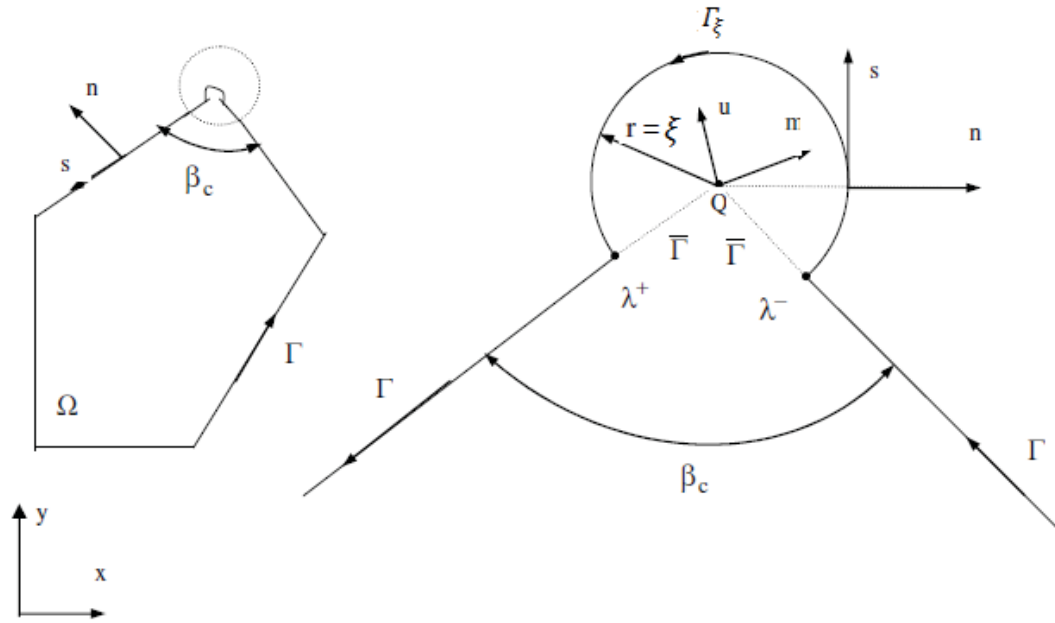


Figura 7.2.1 - Representação do contorno circular Γ_ξ

A equação que se origina a partir da figura (7.2.1) e da modificação da equação (7.1.18), ficando então:

$$\begin{aligned}
 w(Q) + \int_{\Gamma-F} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - \right. \\
 \left. M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_\xi(P) + \sum_{i=1}^{Nc-1} R_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) + R_{c\lambda-}^*(Q, P) w_{c\lambda-}(P) + \\
 R_{c\lambda+}^*(Q, P) w_{c\lambda+}(P) = \int_{\Gamma-F} V_n P w^*(Q, P) - M_n P \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) d\Gamma(P) + \int_{\Gamma_\xi} V_n P w^*(Q, P) - \\
 M_n P \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) d\Gamma_\xi(P) + \sum_{i=1}^{Nc-1} R_{ci} P w_{ci}^*(Q, P) + R_{c\lambda-} P w_{c\lambda-}^*(Q, P) + \\
 R_{c\lambda+} P w_{c\lambda+}^*(Q, P) + \Omega g g p w^*(Q, P) d\Omega(P) \quad (7.2.1)
 \end{aligned}$$

O ponto “Q” se aproxima do contorno, a medida que o raio ξ tende a zero, e nessa condição pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 w(Q) + \lim_{F \rightarrow 0} \int_{\Gamma-F} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \\
 \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma_\xi(P) + \sum_{i=1}^{Nc-1} R_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) + \\
 \lim_{\xi \rightarrow 0} [R_{c\lambda-}^*(Q, P) w_{c\lambda-}(P) + R_{c\lambda+}^*(Q, P) w_{c\lambda+}(P)] = \lim_{\Gamma \rightarrow 0} \int_{\Gamma-F} \left[V_n(Q, P) w^*(P) - \right. \\
 \left. M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n(Q, P) w^*(P) - \right.
 \end{aligned}$$

$$M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \Big] d\Gamma_\xi(P) + \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{ci}(P) w_{ci}^*(Q, P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} [R_{c\lambda-}(P) w_{c\lambda-}^*(Q, P) + R_{c\lambda+}(P) w_{c\lambda+}^*(Q, P)] + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega(p) \quad (7.2.2)$$

Na equação (7.2.2) os limites das integrais sobre $\Gamma - F$ representam o valor principal das mesmas formulações do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas, realizado por Paiva, J.B [12]. Com isso, pode-se dizer que:

$$\lim_{F \rightarrow 0} \int_{\Gamma-F} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) \quad (7.2.3)$$

$$\lim_{F \rightarrow 0} \int_{\Gamma-F} \left[V_n(Q, P) w^*(P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) = \int_{\Gamma} \left[V_n(Q, P) w^*(P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) \quad (7.2.4)$$

Para um dos limites $\Gamma_\xi \rightarrow 0$ nas integrais $w(P)$ e $\frac{\partial w}{\partial n}(P)$ obtém-se uma equação em função do ângulo β_c que é o ângulo do canto “Q” da placa. Já os demais limites serão nulos, deixando assim a equação para um ponto no contorno:

$$k(Q) w(Q) + \int_{\Gamma} \left[V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) + \int_{\Gamma} \left[V_n(Q, P) w^*(P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(Q, P) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega(p) \quad (7.2.5)$$

Onde,

$$K(Q) = \frac{\beta_c}{2\pi} \quad (7.2.6)$$

Calculando-se os limites $\lim_{F \rightarrow 0}$ e $\lim_{\xi \rightarrow 0}$, o ponto “Q”, que no início era do domínio, agora será ponto de contorno. E, dando a placa um deslocamento vertical de corpo rígido $-w(Q)$, as derivadas permanecerão inalteradas e não deixando-se de esquecer que os limites das integrais $\Gamma - F$ são os respectivos valores principais das integrais sobre o contorno Γ .

Se for admitido que o carregamento “g” seja variável linearmente na região Ω_g , ele poderá ser escrito em função das coordenadas (x,y), de modo que:

$$g(p) = Ax(p) + By(p) + C \quad (7.4.5)$$

E, em relação ao sistema $(\bar{x}, \bar{y})$, que tem origem em “q” determina-se:

$$g(p) = Ax(q) + By(q) + C + A\bar{x}(p) + B\bar{y}(p) = g(q) + A\bar{x}(p) + B\bar{y}(p) \quad (7.4.6)$$

Onde, sabe-se que g(p) é o valor da intensidade da carga no ponto “q”.

Se a região Ω_g for dividida em sub-regiões menores e fazendo-se o somatório das integrais sobre todas as células internas, consegue-se resolver integrais para uma carga qualquer g(p).

8 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Está claro que é praticamente impossível a resolução analítica das equações integrais do deslocamento e de suas derivadas, vistas nos capítulos anteriores. Através do Método de Elemento de Contorno pode-se ter uma alternativa para a resolução destas equações, por métodos numéricos, transformando as integrais em equações algébricas, possíveis de serem resolvidas. Para isso é necessário discretizar o contorno da placa. Isso pode ser realizado fazendo-se a divisão do contorno da placa em “elementos de contorno”, fazendo com que os deslocamentos e esforços sejam aproximados por funções conhecidas, em função dos seus valores nodais.

Com isso, pode-se definir um sistema de equações lineares, pois cada equação integral terá uma equação algébrica correspondente, sendo que as incógnitas são consideradas deslocamentos e esforços nos pontos do contorno. Assim os deslocamentos e esforços do domínio serão obtidos através da resolução do sistema, em termos de valores de contorno, pela imposição das condições de contorno do problema.

8.1 DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO

Para que o contorno seja bem representado, primeiramente deve-se aproximar o contorno real da placa em segmentos retos ou curvos, em números suficientes para dar um resultado preciso.

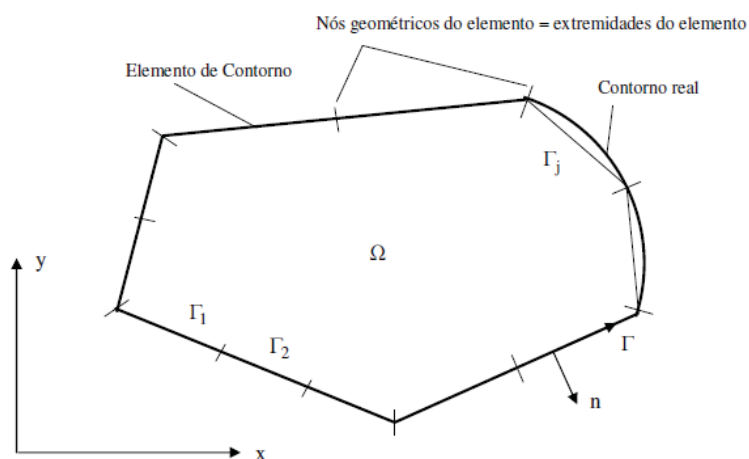


Figura 8.1.1 - Discretização do contorno da placa.

A criação de elementos de contorno na placa da figura (8.1.1) são aproximações de um numero conhecido de segmentos, escolhidos de forma que o contorno real fique representado da forma mais precisa possível.

Os deslocamentos e esforços são aproximados por funções (constantes, lineares e quadráticas), ditas polinomiais, em cada elemento de contorno, e estão associados aos pontos nodais do elemento. E cada valor das variáveis é chamado “valores nodais”.

No presente trabalho serão utilizadas somente funções lineares para aproximar a geometria e as variáveis do problema.

Expressar as coordenadas de cada ponto “P” de um elemento “j”, em função das coordenadas locais homogêneas ξ nos termos de matrizes facilita os cálculos das integrações numéricas.

$$\underline{x}(P) = \underline{\psi}^T(P) \underline{x}^N \quad (8.1.1)$$

Onde:

$$\underline{x}(P) = \begin{Bmatrix} x_1(P) \\ x_2(P) \end{Bmatrix} \quad (8.1.2)$$

$$\underline{\psi}^T(P) = \begin{bmatrix} \underline{\varphi}^T(P) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\varphi}^T(P) \end{bmatrix} \quad (8.1.3)$$

$$\underline{x}^N = \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_2^1 \\ x_2^2 \end{Bmatrix} \quad (8.1.4)$$

Sendo que N indica os valores nodais. Por exemplo:

x_i^N = coordenada nodal no nó “N” na direção “i”.

O vetor da função interpoladora é dada por:

$$\underline{\varphi}(P) = \begin{Bmatrix} \phi_1(P) \\ \phi_2(P) \end{Bmatrix} \quad (8.1.5)$$

Onde,

$$\phi_1(P) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (8.1.6)$$

$$\phi_2(P) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (8.1.7)$$

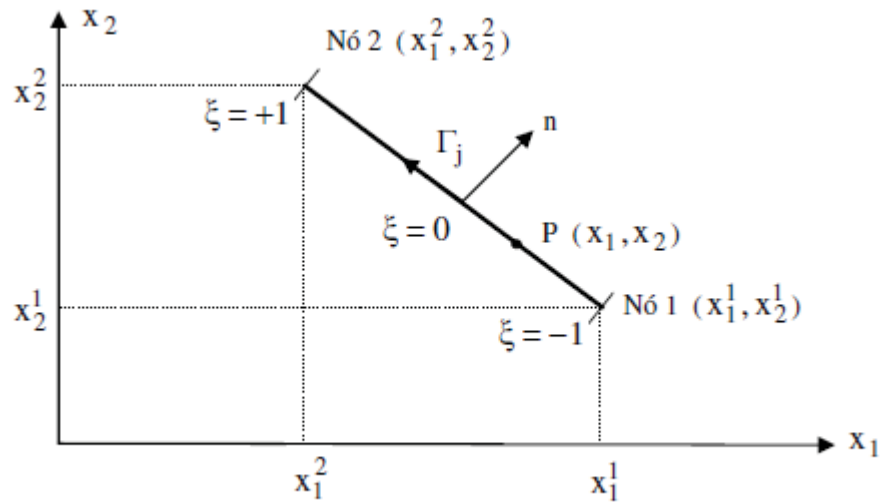


Figura 8.1.2 - Descrição geométrica do elemento linear.

Seguindo a mesma linha de raciocínio, pode-se escrever as variáveis $\underline{u}(P)$ e $\underline{p}(P)$, sendo que eles representam deslocamento e esforços, sobre cada elemento, por funções aproximadoras $\underline{\phi}(P)$ e valores nodais $\underline{U}^N$ e $\underline{P}^N$, ficando:

$$\underline{u}(P) = \underline{\phi}^T(P) \underline{U}^N \quad (8.1.8)$$

$$\underline{p}(P) = \underline{\phi}^T(P) \underline{P}^N \quad (8.1.9)$$

Ou, da mesma forma que:

$$\begin{Bmatrix} u_1(P) \\ u_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & \phi_2(P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(P) & \phi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_1^2 \\ U_2^1 \\ U_2^2 \end{Bmatrix} \quad (8.1.10)$$

$$\begin{Bmatrix} p_1(P) \\ p_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & \phi_2(P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1(P) & \phi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_1^2 \\ P_2^1 \\ P_2^2 \end{Bmatrix} \quad (8.1.11)$$

Então, nota-se que para um elemento “j” qualquer, os pontos nodais terão deslocamentos:

$$u_1(P) = w(P) \quad U_1^1 = w^1 \quad U_1^2 = w^2 \quad (8.1.12)$$

$$u_2(P) = \frac{\partial w}{\partial n}(P) \quad U_2^1 = \frac{\partial w^1}{\partial n} \quad U_2^2 = \frac{\partial w^2}{\partial n} \quad (8.1.13)$$

$$p_1(P) = V_n(P) \quad P_1^1 = V_n^1 \quad P_1^2 = V_n^2 \quad (8.1.14)$$

$$p_2(P) = M_n(P) \quad P_2^1 = M_n^1 \quad P_2^2 = M_n^2 \quad (8.1.15)$$

8.2 ELEMENTO LINEAR CONTÍNUO

Se não existir angulosidades ou carregamentos diferentes do contorno entre elementos vizinhos, então um elemento é dito contínuo, pois suas variáveis assumem valores únicos em seus nós.

Portanto, considera-se que $\underline{U}^N$ e $\underline{P}^N$ ficam localizados no nó correspondente a extremidade do elemento, sendo que as aproximações das variáveis são feitas por funções ϕ . Assim:

$$\phi_1(P) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (8.2.1)$$

$$\phi_2(P) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (8.2.2)$$

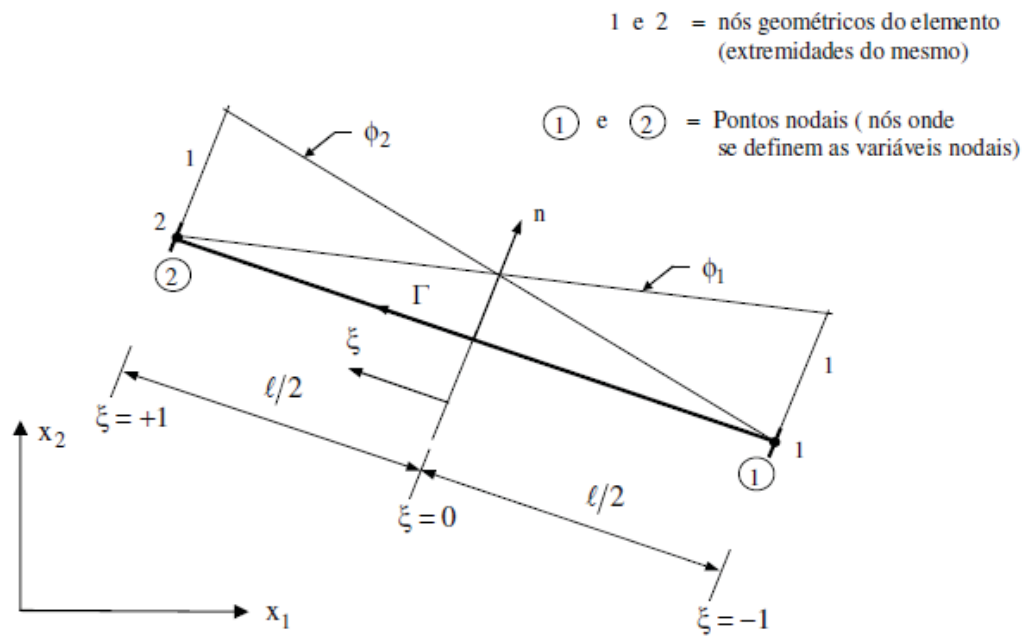


Figura 8.2.1 - Elemento Linear Contínuo.

Quando se tem angulosidade e vinculações diferentes no contorno de uma placa, se faz necessária a descontinuidade de variáveis nos casos práticos, mesmo em descontinuidade de carregamento, determinando-se então outros tipos de elementos que permitam expressar essa descontinuidade

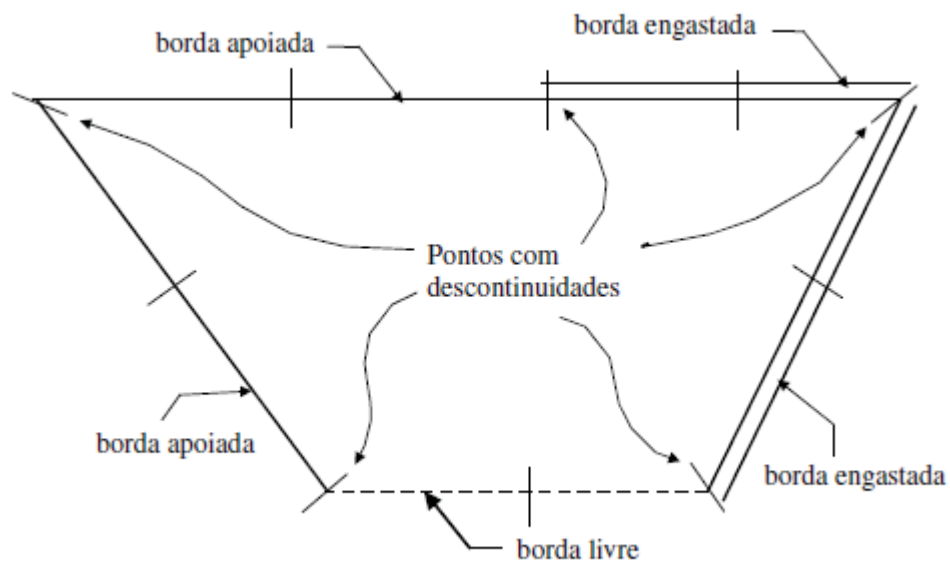


Figura 8.2.2 - Descontinuidades geométricas do contorno de uma Placa

8.3 ELEMENTO LINEAR DESCONTÍNUO

É a expressão de uma aproximação linear entre dois nós e permite que tenha descontinuidade das variáveis (deslocamentos e esforços) entre dois elementos. Para se determinar essa representação pode-se definir nós no interior do elemento. Assim, as variáveis $\underline{u}(P)$ e $\underline{p}(P)$ serão aproximações dadas pelas equações (8.1.8) e (8.1.9), ficando então:

$$\phi_1(P) = \frac{1}{\xi_2 - \xi_1} (\xi_2 - \xi) \quad (8.3.1)$$

$$\phi_2(P) = \frac{1}{\xi_1 - \xi_2} (\xi_1 - \xi) \quad (8.3.2)$$

Onde,

ξ_1 e ξ_2 : Posições dos nós com relação ao centro do elemento, em coordenada homogênea.

ξ : Coordenada homogênea.

ϕ_1 e ϕ_2 : Funções aproximadoras.

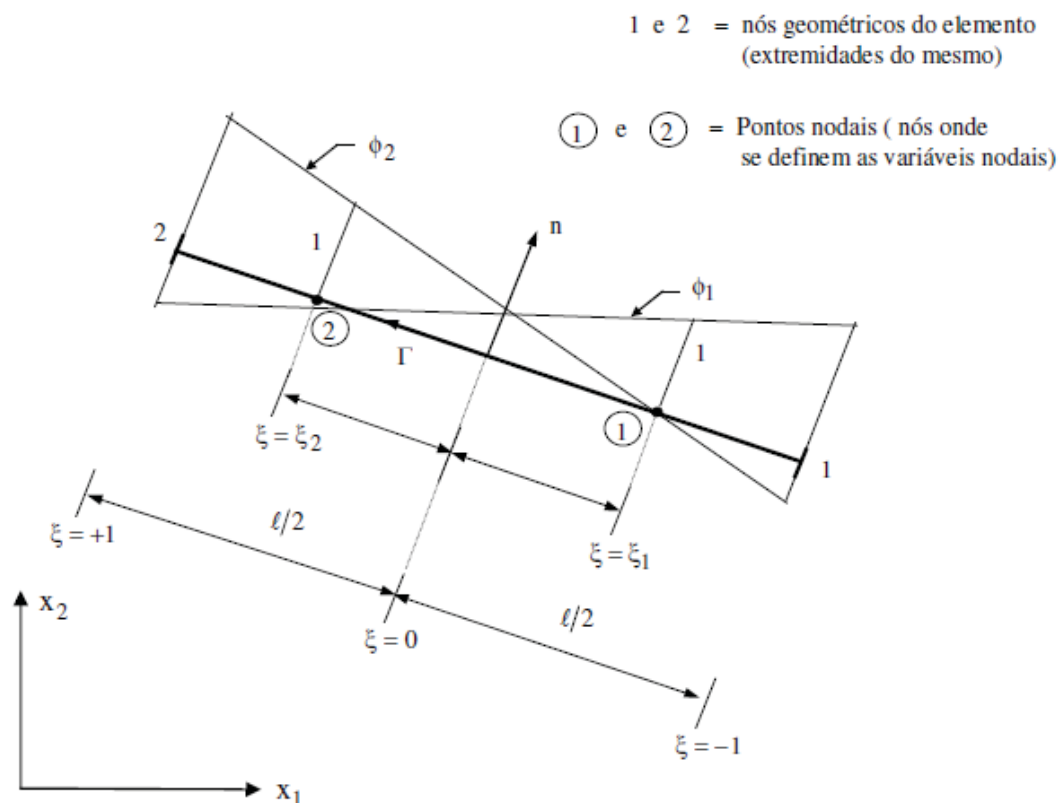


Figura 8.3.1 - Elemento linear descontínuo

8.4 ELEMENTO LINEAR MISTO

Quando se combina elementos contínuos e descontínuos é preciso que se utilize elementos mistos que expressam descontinuidade em apenas uma das extremidades figura (8.4.1).

É conveniente utilizar elementos descontínuos somente onde eles se fazem necessários (pontos onde há mudanças bruscas de geometria, de deslocamento ou de esforços no contorno), pois utilizar somente elementos descontínuos é desvantajoso por aumentar o número dos nós e assim consequentemente o número de equações. Então, utilizam-se elementos contínuos fora das regiões de descontinuidade e o elemento misto é utilizado para interligar o contínuo e o descontínuo.

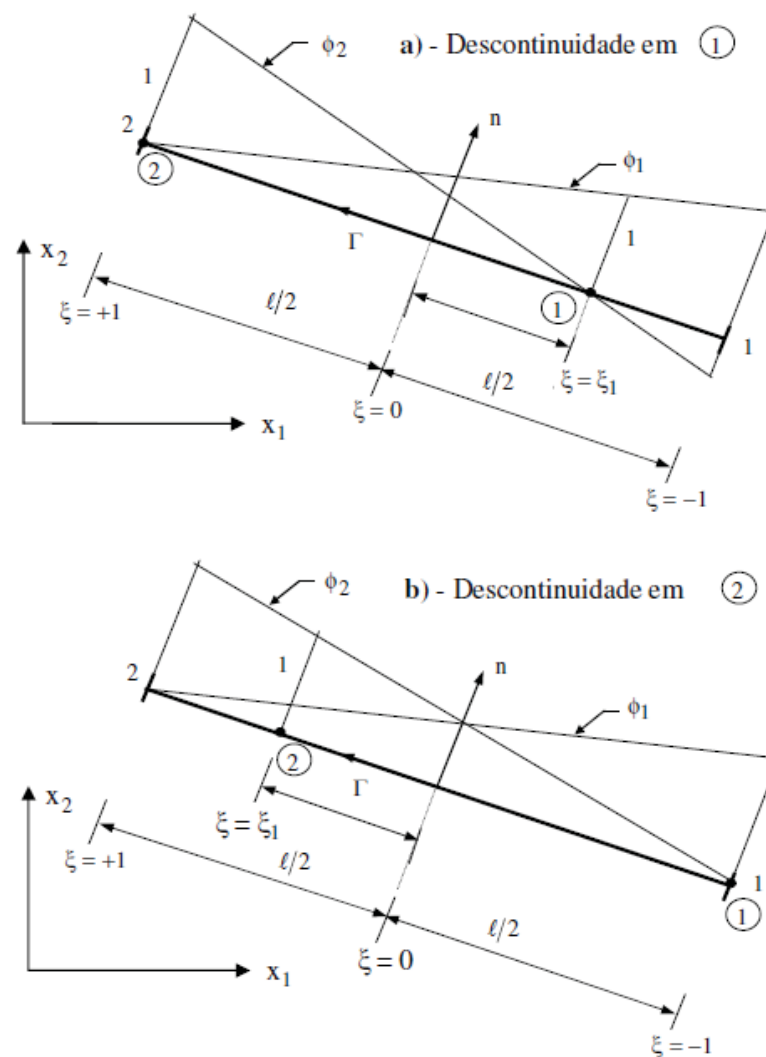


Figura 8.4.1 - Elemento linear misto.

8.5 TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS EM EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Para tal transformação tem-se a equação integral do deslocamento (7.2.5), de um ponto “Q” qualquer no contorno, visto anteriormente, que pode ser escrita da seguinte forma:

$$C(Q)u(Q) + \int_{\Gamma} \underline{p}^*(Q, P) \underline{u}(P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} p_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \underline{u}^*(Q, P) \underline{p}(P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} u_{ci}^* P_{ci}^*(Q, P) R_{ci}(P) + \int_{\Omega_g} g(p) u_g^*(Q, p) d\Omega_g(p) \quad (8.5.1)$$

Onde, sabe-se que através de variáveis generalizadas os esforços e os deslocamentos podem ser expressos. Então, tem-se que:

$$\underline{u}(P) = \left\{ \begin{matrix} w(P) \\ \frac{\partial w}{\partial n}(P) \end{matrix} \right\} \quad (8.5.2)$$

$$\underline{p}(P) = \left\{ \begin{matrix} V_n(P) \\ M_n(P) \end{matrix} \right\} \quad (8.5.3)$$

$$\underline{p}^*(Q, P) = \{V_n^*(Q, P) \quad -M_n^*(Q, P)\} \quad (8.5.4)$$

$$\underline{u}^*(Q, P) = \left\{ w^*(Q, P) \quad -\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right\} \quad (8.5.5)$$

$$P_{ci}^*(Q, P) = R_{ci}^*(Q, P) \quad (8.5.6)$$

$$u_{ci}^*(Q, P) = w_{ci}^*(Q, P) \quad (8.5.7)$$

$$u_g^*(Q, p) = w^*(Q, p) \quad (8.5.8)$$

$$u(Q) = w(Q) \quad (8.5.9)$$

$$C(Q) = \frac{\beta_c}{2\pi} \quad (8.5.10)$$

Se as variáveis por suas aproximações (8.1.8) e (8.1.9) forem substituídas em (8.5.1), considerando-se o contorno da placa discretizado por “Ne” elementos, tem-se:

$$C(Q)u(Q) + \sum_{j=1}^{N_e} \underline{p}^*(Q, P) \underline{\phi}^T(P) d\Gamma(P) \underline{U}_j^N + \sum_{i=1}^{N_c} p_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) = \sum_{j=1}^{N_e} \underline{u}^*(Q, P) \underline{\phi}^T(P) d\Gamma(P) \underline{P}_j^N + \sum_{i=1}^{N_c} u_{ci}^*(Q, P) R_{ci}(P) + \int_{\Omega_g} g(p) u_g^*(Q, p) d\Omega_g(p) \quad (8.5.11)$$

Sabe-se que as integrais de contorno da equação (8.5.11) são funções conhecidas, com isso, elas podem ser calculadas. Mas para facilitar definem-se integrais sob um elemento genérico.

$$\underline{h}^j(Q) = \int_{\Gamma_j} \underline{p}^*(Q, P) \underline{\phi}^T(P) d\Gamma(P) \quad (8.5.12)$$

$$\underline{g}^j(Q) = \int_{\Gamma} \underline{u}^*(Q, P) \underline{\phi}^T(P) d\Gamma(P) \quad (8.5.13)$$

Assim, após o somatório das influências $\underline{h}^j(Q)$ e $\underline{g}^j(Q)$ de todos os elementos “Ne” nos “Nn” nós do contorno, a equação algébrica será:

$$\underline{C}(Q)u(Q) + \underline{\hat{H}}(Q)\underline{U} + \underline{H}_c(Q)\underline{W}_c = \underline{G}(Q)\underline{P} + \underline{G}_c(Q)\underline{R}_c + T(Q) \quad (8.5.14)$$

Nota-se que o deslocamento $u(Q)$ pode ser escrito em função dos deslocamentos $\underline{U}$ do elemento ao qual pertence o ponto Q. Com isso, considerando-se todos os “Nn” nós, tem-se:

$$\underline{\hat{H}}(Q)\underline{U} + \underline{H}_c(Q)\underline{W}_c = \underline{G}(Q)\underline{P} + \underline{G}_c(Q)\underline{R}_c + T(Q) \quad (8.5.15)$$

Onde:

$$\underline{U}^T = \left\{ w^1 \quad \frac{\partial w^1}{\partial n} \quad \dots \quad w^{Nn} \quad \frac{\partial w^{Nn}}{\partial n} \right\} \quad (8.5.16)$$

$$\underline{P}^T = \{ V_n^1 \quad M_n^1 \quad \dots \quad V_n^{Nn} \quad M_n^{Nn} \} \quad (8.5.17)$$

$$\underline{W}_c^T = \{ w_{c1} \quad w_{c2} \quad \dots \quad w_{cNc} \} \quad (8.5.18)$$

$$\underline{R}_c^T = \{ R_{c1} \quad R_{c2} \quad \dots \quad R_{cNc} \} \quad (8.5.19)$$

Sendo que:

$\underline{\hat{H}}(Q)$ e $\underline{G}(Q)$: são as matrizes de influencia, que dependem da geometria do elemento e são formadas pelos coeficientes dos deslocamentos e das forças do contorno;

$\underline{H}_c(Q)$ e $\underline{G}_c(Q)$: são as matrizes de influência formadas pelos coeficientes dos deslocamentos e reações dos cantos da placa;

$T(Q)$: é o valor resultante da integração da região Ω_g .

Já os termos correspondentes a $\underline{W}_c$ e $\underline{R}_c$, podem ser considerados assim: como o coeficiente de w_c , de cada canto da placa, é dividido em duas partes, pode-se obter com isso a

contribuição dos nós anterior e posterior ao canto de acordo com a figura (8.5.1). Assim, as parcelas obtidas são adicionadas aos coeficientes correspondentes da matriz $\underline{\hat{H}}$.

A partir das rotações dos nós vizinhos escreve-se a reação R_c , e utiliza-se para tanto $R_{ci} = M_{nsi}^+ - M_{nsi}^-$.

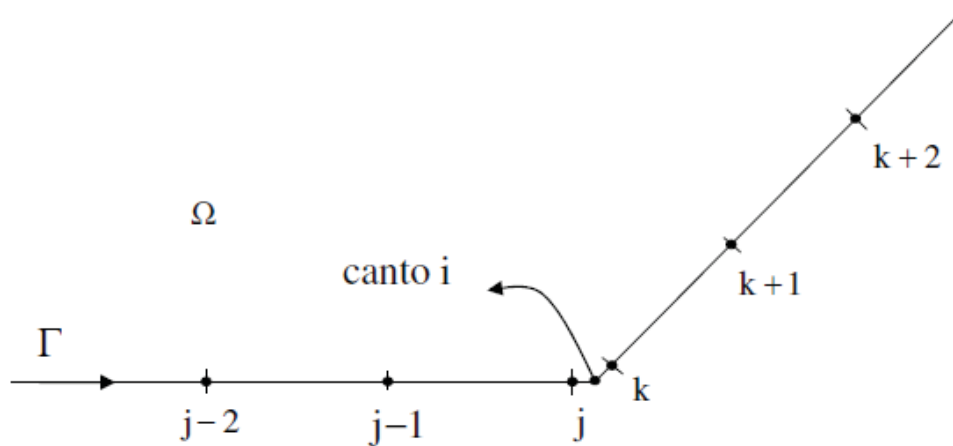


Figura 8.5.1 - Canto "i" da placa com seus nós anteriores e posteriores, necessários para o cálculo das contribuições de canto na matriz $\underline{H}$.

Então, pode-se reescrever a equação (8.5.15) de modo que fique:

$$\underline{H}(Q)\underline{U} = \underline{G}(Q)\underline{P} + T(Q) \quad (8.5.20)$$

Da mesma maneira que se obteve a equação (8.5.20), pode-se obter uma equação algébrica para a equação integral da derivada direcional do deslocamento, de um ponto "Q" qualquer do contorno, em função das correspondentes soluções fundamentais.

8.6 CONDIÇÃO DE CONTORNO

Associam-se quatro variáveis a cada nó devido a discretização do contorno da placa, sendo $w(P)$, $\frac{\partial w}{\partial n}(P)$, $V_n(P)$ e $M_n(P)$, das quais duas são conhecidas, pois são dadas pelas condições de contorno da placa. Quando se tem vinculações clássicas, escreve-se:

a) Borda engastada.

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad (8.6.1)$$

V_n e M_n desconhecidos

b) Borda simplesmente apoiada

$$w = M_n = 0 \quad (8.6.2)$$

V_n e $\frac{\partial w}{\partial n}$ desconhecidos

c) Borda livre

$$V_n = M_n \quad (8.6.3)$$

w e $\frac{\partial w}{\partial n}$ desconhecidos

Com isso, determinam-se as condições de contorno a todos os nós “Nn” da equação (8.5.20), obtendo-se o dobro de incógnitas “Nn”, fazendo-se necessárias duas equações para cada nó, para assim definir um sistema de equações lineares.

$$\underline{H} \underline{U} = \underline{G} \underline{P} + \underline{T} \quad (8.6.4)$$

Percebe-se que na equação (8.5.15) os termos associados aos cantos w_c e R_c , são considerados variáveis, segundo a publicação de Calderon [2], afirma que “um dos quais é possível conhecer-se nos casos clássicos de vinculação”. Com isso, admite-se “2Nn” incógnitas nos nós e “Nc” incógnitas nos cantos, isso faz com que seja obrigatório utilizar duas equações para cada nó e uma para cada canto, onde o sistema de equações lineares definido fica:

$$\begin{bmatrix} \underline{H} & \underline{H}_c \\ \underline{\bar{H}} & \underline{\bar{H}}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{U} \\ \underline{W}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G} & \underline{G}_c \\ \underline{\bar{G}} & \underline{\bar{G}}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{P} \\ \underline{R}_c \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{T} \\ \underline{T}_c \end{Bmatrix} \quad (8.6.5)$$

Onde:

$\underline{H}_c$ e $\underline{G}_c$: são consideradas submatrizes formadas pelos coeficientes correspondentes a w_c e R_c , e tem $2(Nn) \times (Nc)$ elementos.

$\underline{\bar{H}}$, $\underline{\bar{G}}$, $\underline{\bar{H}}_c$ e $\underline{\bar{G}}_c$: são consideradas submatrizes semelhantes a $\underline{H}$, $\underline{H}_c$, $\underline{G}$ e $\underline{G}_c$, derivadas das equações integrais de deslocamento que são aplicadas nos cantos da placa.

$\underline{T}_c$: é considerado semelhante a $\underline{T}$.

$\underline{\bar{H}}$ e $\underline{\bar{G}}$: são submatrizes que têm $(Nc) \times 2(Nn)$ elementos.

$\underline{\bar{H}}_c$ e $\underline{\bar{G}}_c$: são submatrizes quadradas de ordem (Nc) .

Com isso, escreve-se o sistema de equações (7.8.5), separando-se todas as incógnitas para o primeiro membro, e, conseqüentemente todas as parcelas que se sabe para o segundo membro, ficando então:

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{B} \quad (7.6.6)$$

Onde:

$\underline{A}$: é a matriz formada pelos elementos das matrizes $\underline{H}$ e $\underline{G}$, que se referem aos valores de $\underline{U}$ e $\underline{P}$ desconhecidos.

$\underline{B}$: é o vetor obtido a partir da soma do vetor $\underline{T}$ juntamente com o vetor formado pelo produto dos elementos das matrizes $\underline{H}$ e $\underline{G}$ pelos correspondentes valores $\underline{U}$ e $\underline{P}$, que são conhecidos.

$\underline{X}$: é o vetor das incógnitas procuradas, sendo ele referente aos deslocamentos e esforços nodais.

De forma análoga, pode-se resolver o sistema de equações para os cantos da placa, ficando então:

$$\underline{A}_c \underline{X}_c = \underline{B}_c \quad (7.6.7)$$

Onde:

$\underline{X}_c$: é o vetor das incógnitas procuradas, sendo que os elementos são os deslocamentos e esforços nos cantos da placa.

9 PROGRAMA PLACAS2.FOR

Este programa foi elaborado para microcomputadores e escrito em linguagem Fortran, que será utilizado nas aplicações numéricas. É utilizado somente equações integrais de w , e considera w_c e R_c como incógnita em cada canto. Os principais pontos “pontos fontes” são considerados no contorno e fora do domínio, com o parâmetro relativo à distancia do ponto externo ao ponto do contorno, $a=0,50$ da equação:

$$d = al_m \quad (9.1)$$

d : posição do ponto A a uma distancia do ponto nodal.

a : coeficiente maior que zero.

l_m : média dos comprimentos dos elementos concorrentes no nó, ou simplesmente o comprimento do elemento, no caso de nó duplo.

9.1 ENTRADA DE DADOS

A resolução do sistema de equações se dá pelo processo de Gauss, e a partir dos cálculos se obtém o vetor das incógnitas no contorno $\underline{X}_c$.

Pela linguagem Fortran executa-se o programa PLACAS2.FOR, através a introdução dos dados do contorno da placa, para isso discretiza-se a placa conforme os passos a seguir:

a) Determinar o número de nós no contorno, número de elementos, número de nós internos, números de regiões de carga e número de cantos.

NNC	NNC	NNC	NNC	NNC
nº de nós no contorno	nº de elementos do contorno	nº de nós internos	nº de regiões de carga	nº de cantos

Tabela 9.1.1 - Condições de Contorno.

- b) Determinar o módulo de elasticidade e a espessura da placa.

E	T
módulo de elasticidade	espessura da placa

Tabela 9.1.2 - Características da Placa.

- c) Definir as regiões de carga

I1	CARGA (I1)	NNCC (I1)	NECC
região	valor da carga	nº de nós de contorno da carga	nº de elementos do contorno da carga

Tabela 9.1.3 - Regiões de Carga

- d) Definir o contorno

I1	XI1	YI1	JNO(I1,1)	JNO(I1,2)
nó do contorno	coordenada x do contorno	coordenada y do contorno	elemento anterior ao nó	elemento posterior ao nó

Tabela 9.1.4 - Discretização do Contorno

- e) Definição dos nós internos

NO	XNO	YNO
nó interno	coordenada x do nó interno	coordenada y do nó interno

Tabela 9.1.5 - Nós Internos

f) Definição dos elementos do contorno

J1	IEL (J1,1)	IEL (J1,2)
elemento	nó inicial do elemento	nó final do elemento

Tabela 9.1.6 - Elementos do Contorno.

g) Definição das coordenadas da região de contorno

IR=1	I1	Xc	Yc
Região	nó do contorno da carga	coordenada x do nó do contorno da carga	coordenada y do nó do contorno da carga

Tabela 9.1.7 - Coordenadas da Região de Contorno.

h) Definição dos elementos da região de contorno

IR=1	J1	IELC(J1,1)	IELC(J1,2)
Região	elemento	nó inicial do elemento	nó final do elemento

Tabela 9.1.8 - Elementos da Região de Contorno.

i) Determinação das vinculações dos lados da placa

NDX	NDY	NLOAD
nº de nós com deslocamento vertical zero. (apoiado e engastado)	nº de nós com giro zero. (engastado)	nº de nós que sofrem recalque

Tabela 9.1.9 - Vinculações da placa.

- j) Definição das vinculações apoiadas e engastadas da placa

IPREX
nº dos nós que sofrem deslocamento vertical nulo

Tabela 9.1.10 - Vinculações que sofrem Deslocamento Vertical Nulo.

- k) Definição das vinculações engastadas na placa.

IPREY
nº dos nós que sofrem giro nulo

Tabela 9.1.11 - Vinculações que sofrem Giro Nulo.

- l) Definição dos cantos da placa.

I1	IDUP(I1,1)	IDUP(I1,2)
nº do canto	nó anterior ao canto	nó posterior ao canto

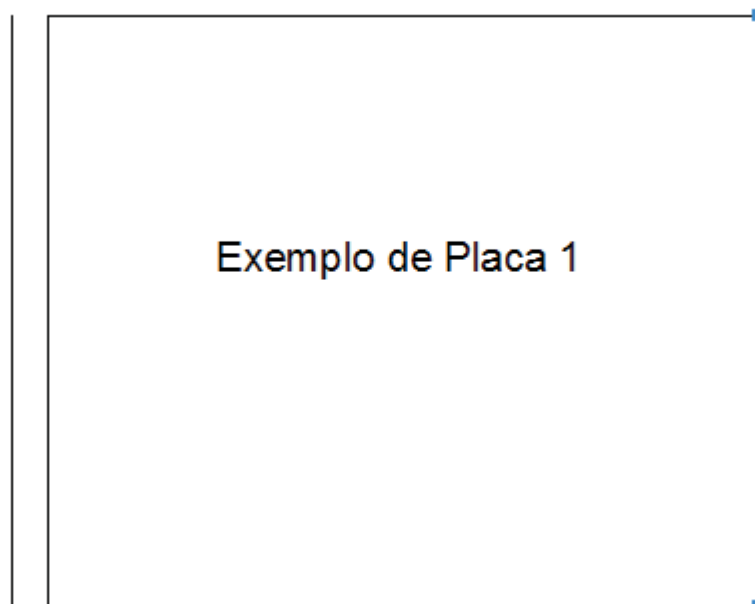
Tabela 9.1.12 - Cantos da Placa.

Depois de feita toda a discretização do contorno, pode-se executar o programa que gera três arquivos: ARQSAI1.SAI, ARQSAI2.SAI e ARQSAI3.SAI. A partir desses arquivos tem-se as reações e momentos nas bordas e nos pontos internos da placa.

9.2 APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Com o objetivo de exemplificar tudo visto anteriormente serão apresentados a seguir alguns resultados de exemplos executados no programa PLCAS2.FOR que serão comparados com os resultados obtidos pelas “Tabelas de Czerny”.

9.2.1 EXEMPLO 1

**Figura 9.2.1.1 - Exemplo de Placa 1**

Foram realizados dois exemplos da mesma placa, sendo que o primeiro exemplo com 20 elementos e o segundo com 44 elementos. Placa retangular simplesmente apoiada em três bordos e engastada em um dos bordos menores, submetida ao seu peso próprio $g=2,25 \times 10^{-4}$ kN/cm², sobrecarga $g_s=3,0 \times 10^{-4}$ kN/cm² e revestimento $g_r=0,5 \times 10^{-4}$ kN/cm² (Figura 9.2.1.1). Considerando-se o coeficiente de Poisson $\nu=0,2$ e o módulo de elasticidade longitudinal $E=2.50000,0$ kN/cm².

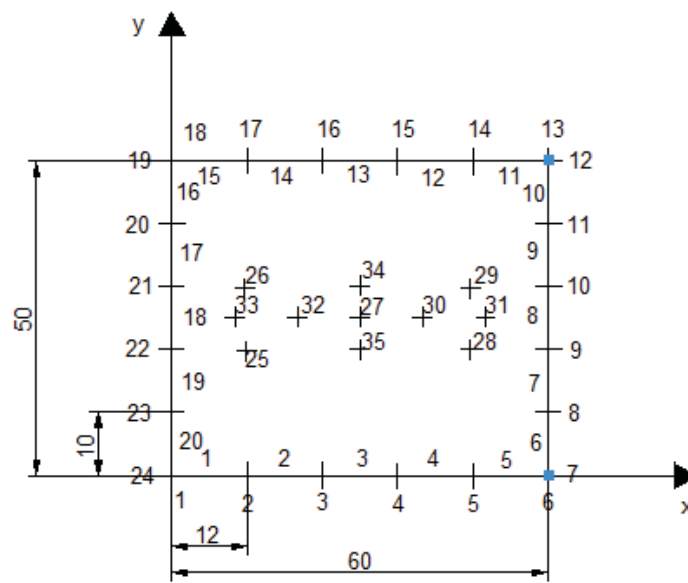


Figura 9.2.1.2 - Placa com 20 elementos.

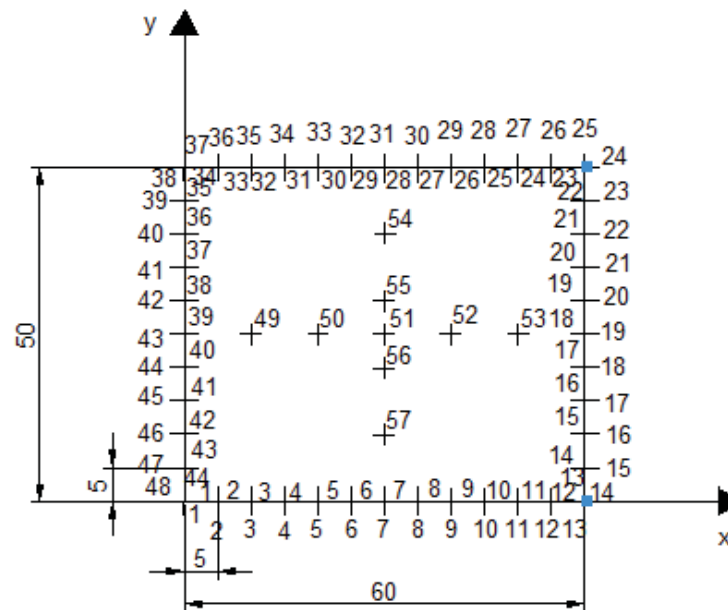


Figura 9.2.1.3 - Placa com 44 elementos.

Em seguida, transformam-se os dados das figuras (9.2.1.2) e (9.2.1.3) em dados para a execução do programa, sendo chamados de “e.carol1.dat” e “e.carol2.dat”, respectivamente.

O primeiro exemplo de placa foi discretizado em 20 elementos, com 24 nós e 4 cantos e o segundo exemplo em 44 elementos, com 48 nós e 4 cantos, executados no programa PLACAS2.

Os cálculos realizados através das Tabelas de Czerny serão apresentados a seguir:

Tabela de Czerny							
Laje Retangular com três Bordas Livrementemente Apoiadas e uma Borda menor lx Engastada – Carga Uniforme							
lx	ly	ly/lx	α_x	α_y	$-\beta_x$	$-\beta_y$	α_a
500cm	600cm	1,2	22,0	23,8	-	10,1	20,3

Tabela 9.2.1.1 - Laje Retangular com 1 Bordo Engastado e 3 Apoiados – Czerny.

Peso Próprio:

-peso próprio da placa: $2,5 \times 10^{-4}$ kN/cm²

-sobrecarga: $3,0 \times 10^{-4}$ kN/cm²

-acabamento: $0,5 \times 10^{-4}$ kN/cm²

-Total: $p_k = 5,75 \times 10^{-4}$ kN/cm²

$$M_x = \frac{pl_x^2}{\alpha_x} = \frac{5,75 \cdot 10^{-4} \cdot 500^2}{22,0} = -6,04 \text{ kN} \cdot \text{cm} \quad (9.2.1.1)$$

$$M_y = \frac{pl_x^2}{\alpha_y} = \frac{5,75 \cdot 10^{-4} \cdot 500^2}{23,8} = -6,53 \text{ kN} \cdot \text{cm} \quad (9.2.1.2)$$

$$M_{by} = \frac{pl_x^2}{\beta_y} = \frac{5,75 \cdot 10^{-4} \cdot 500^2}{10,1} = 14,23 \text{ kN} \cdot \text{cm} \quad (9.2.1.3)$$

Onde, será comparado o resultado das maiores reações de momentos gerados com o resultado da tabela de Czerny.

Resultado Final do Exemplo 1			
	PLACAS2 - (24 elementos)	PLACAS2 - (48 elementos)	Czerny
Momento Máximo no Bordo Engastado (kN.cm)	14,04	14,23	14,23
Momento Máximo Mx no Centro da Placa (kN.cm)	-5,98	-5,99	-6,04
Momento Máximo My no Centro da Placa (kN.cm)	-6,50	-6,51	-6,53

Tabela 9.2.1.2 - Resultado Exemplo 1.

9.2.2 EXEMPLO 2

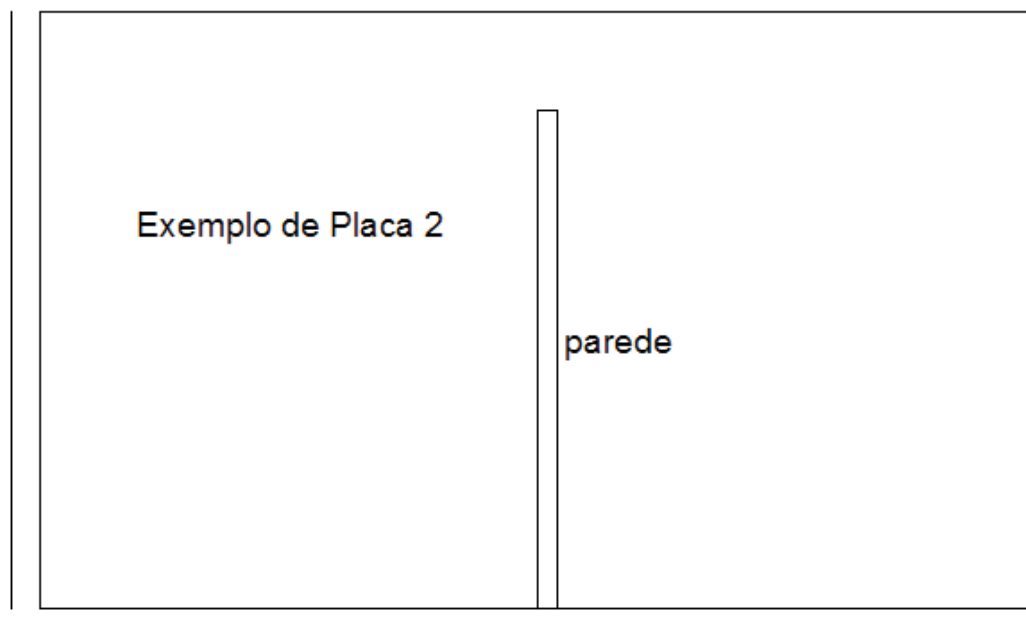


Figura 9.2.2.1 - Exemplo de Placa 2.

Foram realizados dois exemplos da mesma placa, sendo que o primeiro exemplo com 32 elementos e o segundo com 64 elementos. Placa retangular simplesmente apoiada em dois bordos e engastada em dois dos bordos, submetida ao seu peso próprio $g=5,0 \times 10^{-4}$ kN/cm², sobrecarga $g_s=3,0 \times 10^{-4}$ kN/cm², revestimento $g_r=0,5 \times 10^{-4}$ kN/cm² e o peso próprio da parede $g_p=0,67 \times 10^{-4}$ kN/cm² (Figura 9.2.2.1). Considerando-se o coeficiente de Poisson $\nu=0,2$ e o módulo de elasticidade longitudinal $E=2.50000,0$ kN/cm².

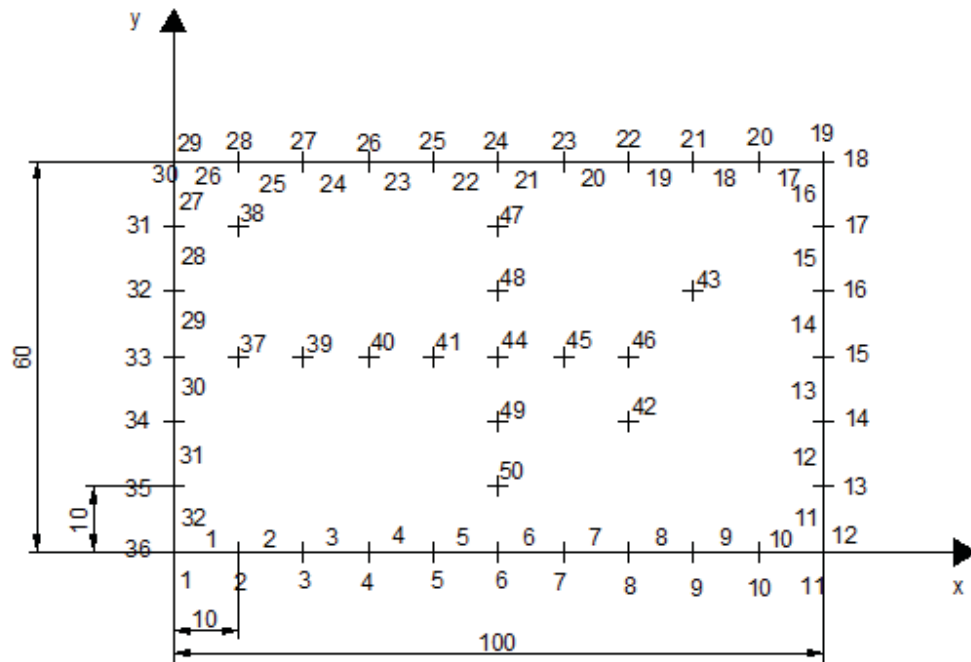


Figura 9.2.2.2 - Placa com 32 elementos.

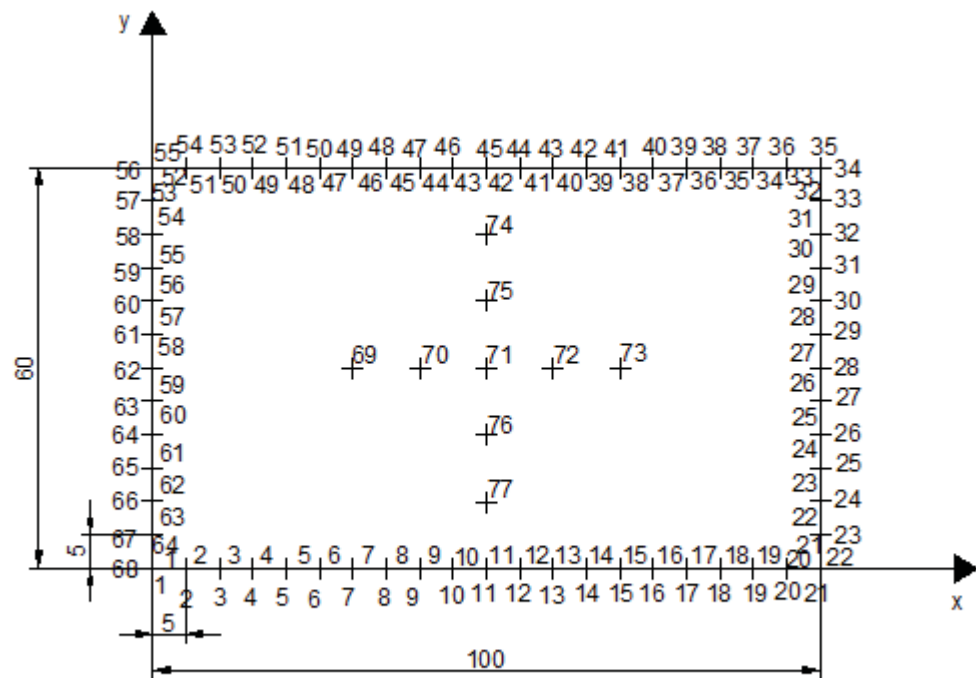


Figura 9.2.2.3 - Placa com 64 elementos.

Em seguida, transformam-se os dados das figuras (9.2.2.2) e (9.2.2.3) em dados para a execução do programa, sendo chamados de “e.carol3.dat” e “e.carol4.dat”, respectivamente.

O primeiro exemplo de placa foi discretizado em 32 elementos, com 36 nós e 4 cantos e o segundo exemplo em 64 elementos, com 68 nós e 4 cantos, executados no programa PLACAS2.

Os cálculos realizados através das Tabelas de Czerny serão apresentados a seguir:

Tabela de Czerny							
Laje Retangular com duas Bordas Livrementemente Apoiadas e duas Bordas lx e ly Engastadas – Carga Uniforme							
Lx	ly	ly/lx	α_x	α_y	$-\beta_x$	$-\beta_y$	α_a
600cm	1000cm	1,67	19,04	40,02	9,02	12,2	19,58

Tabela 9.2.2.1 - Laje Retangular com 1 Bordo Engastado e 3 Apoiados – Czerny.

Peso Próprio:

-peso próprio da placa: $5,0 \times 10^{-4}$ kN/cm²

-sobrecarga: $3,0 \times 10^{-4}$ kN/cm²

-revestimento: $0,5 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$

-peso próprio da parede: $0,7 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$

-Total: $p_k = 9,2 \times 10^{-4} \text{ kN/cm}^2$

$$M_x = \frac{pl_x^2}{\alpha_x} = \frac{9,2 \cdot 10^{-4} \cdot 600^2}{19,04} = -17,40 \text{ kN.cm} \quad (9.2.2.1)$$

$$M_y = \frac{pl_y^2}{\alpha_y} = \frac{9,2 \cdot 10^{-4} \cdot 600^2}{40,02} = -8,24 \text{ kN.cm} \quad (9.2.2.2)$$

$$M_{bx} = \frac{pl_x^2}{\beta_x} = \frac{9,2 \cdot 10^{-4} \cdot 600^2}{9,02} = 36,72 \text{ kN.cm} \quad (9.2.2.3)$$

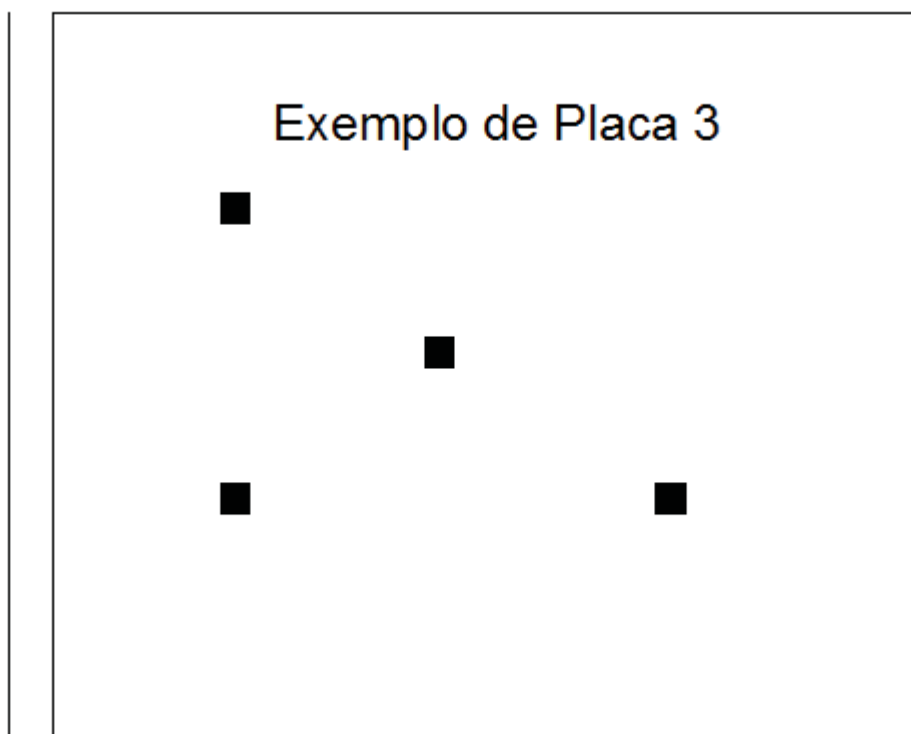
$$M_{by} = \frac{pl_y^2}{\beta_y} = \frac{9,2 \cdot 10^{-4} \cdot 600^2}{12,2} = 27,15 \text{ kN.cm} \quad (9.2.2.4)$$

Onde, será comparado o resultado das maiores reações de momentos gerados com o resultado da tabela de Czerny.

Resultado Final do Exemplo 2			
	PLACAS2 - (36 elementos)	PLACAS2 - (68 elementos)	Czerny
Momento Máximo Mx no Bordo Engastado (kN.cm)	39,89	40,42	36,72
Momento Máximo My no Bordo Engastado (kN.cm)	27,66	27,90	27,15
Momento Máximo Mx no Centro da Placa (kN.cm)	-19,31	-19,32	-17,40
Momento Máximo My no Centro da Placa (kN.cm)	-9,39	-9,39	-8,24

Tabela 9.2.2.2 - Resultado Exemplo 2.

9.2.3 EXEMPLO 3

**Figura 9.2.3.1 - Exemplo de Placa 3.**

Foram realizados dois exemplos da mesma placa, sendo que o primeiro exemplo com 15 elementos e o segundo com 30 elementos. Placa retangular simplesmente apoiada em dois bordos e engastada em um dos bordos menores, submetida ao seu peso próprio $g=2,5 \times 10^{-4}$ kN/cm², sobrecarga $g_s=3,0 \times 10^{-4}$ kN/cm², acabamento $g_r=0,5 \times 10^{-4}$ kN/cm² e quatro cargas concentradas de 4kN cada. (Figura 9.2.3.1). Considerando-se o coeficiente de Poisson $\nu=0,2$ e o módulo de elasticidade longitudinal $E=2.50000,0$ kN/cm².

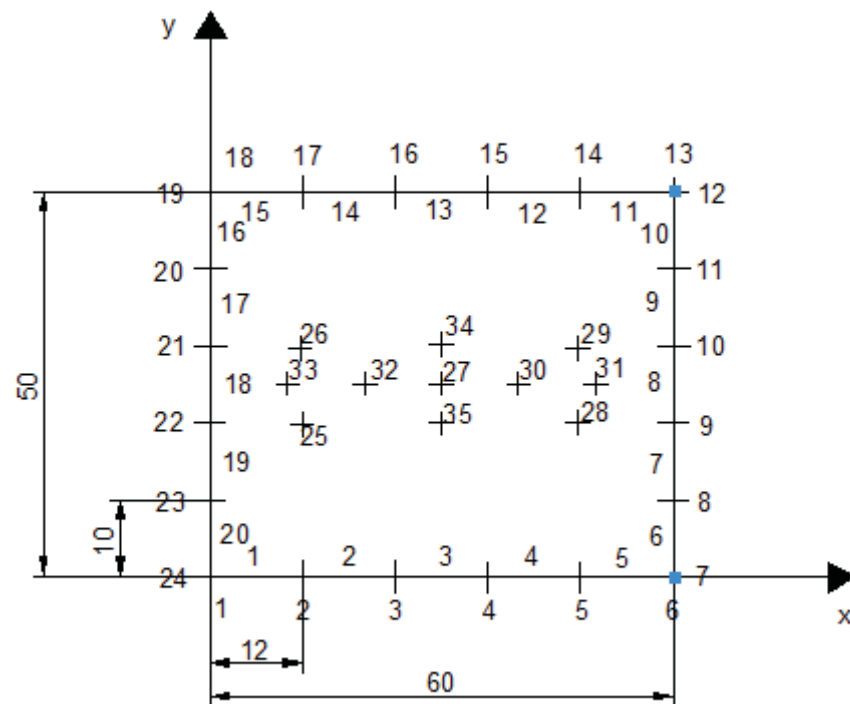


Figura 9.2.3.2 - Placa com 15 elementos.

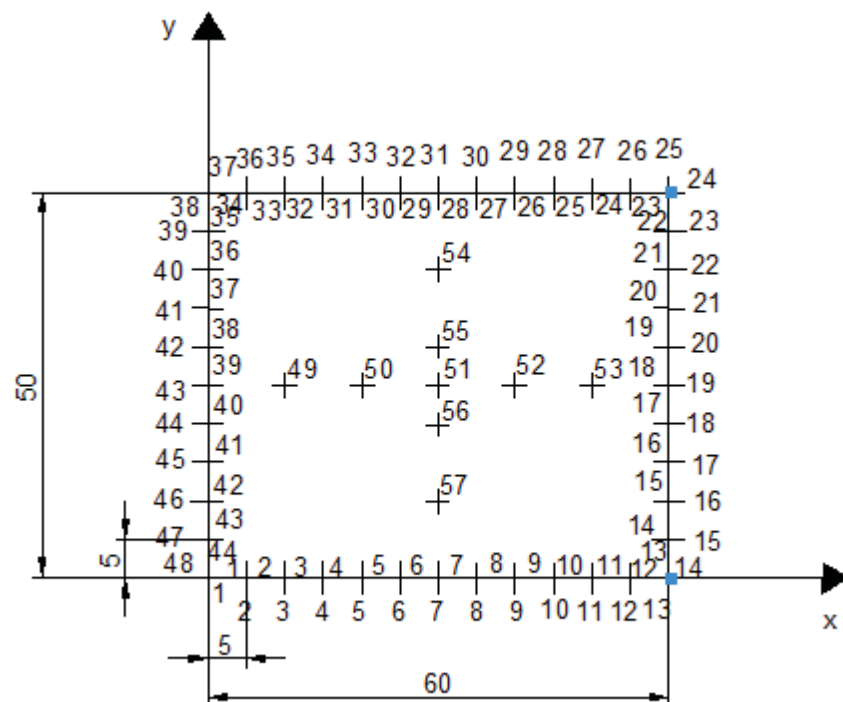


Figura 9.2.3.3 - Placa com 30 elementos.

Em seguida, transformam-se os dados das figuras (9.2.4.1) e (9.2.4.2) em dados para a execução do programa, sendo chamados de “e.carol7.dat” e “e.carol8.dat”, respectivamente.

O primeiro exemplo de placa foi discretizado em 20 elementos, com 24 nós e 4 cantos e o segundo exemplo em 44 elementos, com 48 nós e 4 cantos, executados no programa PLACAS2.

Os cálculos realizados através das Tabelas de Czerny serão apresentados a seguir:

Tabela de Czerny							
Laje Retangular com três Bordas Livrementemente Apoiadas e uma Borda menor lx Engastada – Carga Uniforme							
lx	ly	ly/lx	α_x	α_y	$-\beta_x$	$-\beta_y$	α_a
500cm	600cm	1,2	22,0	23,8	-	10,1	20,3

Tabela 9.2.3.1 - Laje Retangular com 1 Bordo Engastado e 3 Apoiados - Czerny.

Peso Próprio:

-peso próprio da placa: $2,5 \times 10^{-4}$ kN/cm²

-sobrecarga: $3,0 \times 10^{-4}$ kN/cm²

-revestimento: $0,5 \times 10^{-4}$ kN/cm²

-cargas concentradas distribuídas na área da placa: $0,53 \times 10^{-4}$ kN/cm²

-Total: $p_k = 6,53 \times 10^{-4}$ kN/cm²

$$M_y = \frac{pl_x^2}{\alpha_x} = \frac{6,53 \cdot 10^{-4} \cdot 500^2}{22,0} = -7,42 \text{ kN} \cdot \text{cm} \quad (9.2.1.1)$$

$$M_x = \frac{pl_y^2}{\alpha_y} = \frac{6,53 \cdot 10^{-4} \cdot 600^2}{23,8} = -6,86 \text{ kN} \cdot \text{cm} \quad (9.2.1.2)$$

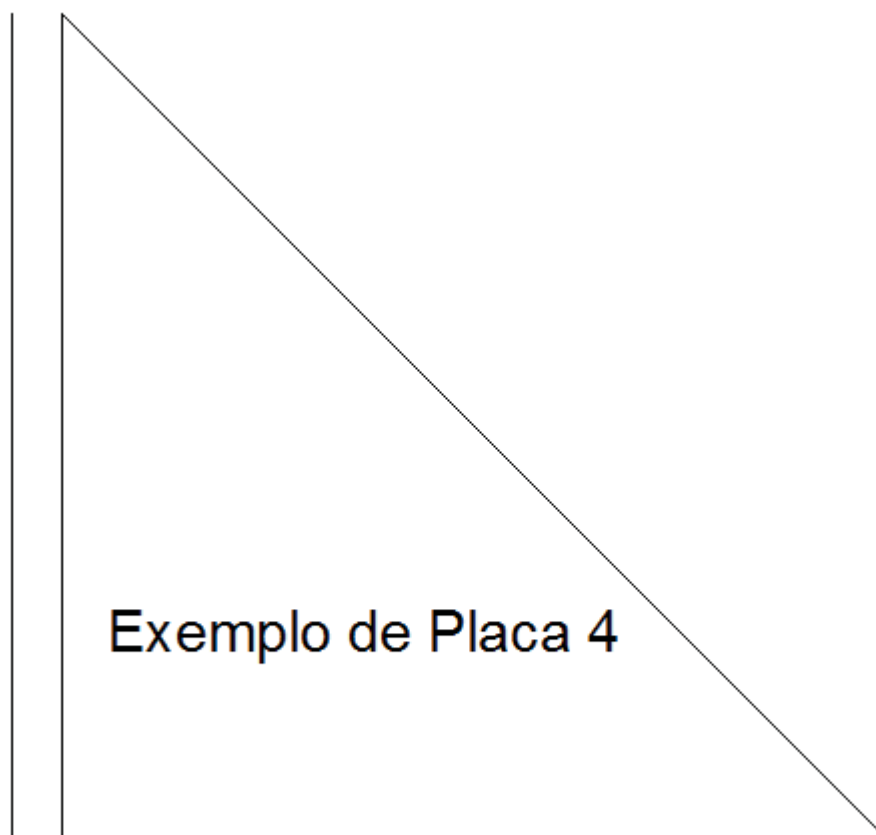
$$M_{by} = \frac{pl_x^2}{\beta_y} = \frac{6,53 \cdot 10^{-4} \cdot 500^2}{10,1} = 16,16 \text{ kN} \cdot \text{cm} \quad (9.2.1.3)$$

Onde, será comparado o resultado das maiores reações de momentos gerados com o resultado da tabela de Czerny.

Resultado Final do Exemplo 3			
	PLACAS2 - (24 elementos)	PLACAS2 - (48 elementos)	Czerny
Momento Máximo no Bordo Engastado (kN.cm)	16,48	16,63	16,16
Momento Máximo Mx no Centro da Placa (kN.cm)	-7,23	-7,23	-6,86
Momento Máximo My no Centro da Placa (kN.cm)	-8,20	-8,21	-7,42

Tabela 9.2.3.2 - Resultado Exemplo 3.

9.2.4 EXEMPLO 4

**Figura 9.2.4.1 - Exemplo de Placa 4.**

Foram realizados dois exemplos da mesma placa, sendo que o primeiro exemplo com 15 elementos e o segundo com 30 elementos. Placa triangular (triângulo retângulo) simplesmente apoiada em dois bordos e engastada em um dos bordos, submetida ao seu peso próprio $g=2,5 \times 10^{-4}$ kN/cm², sobrecarga $g_s=3,0 \times 10^{-4}$ kN/cm² e revestimento $g_r=0,5 \times 10^{-4}$ kN/cm² (Figura 9.2.4.1). Considerando-se o coeficiente de Poisson $\nu=0,2$ e o módulo de elasticidade longitudinal $E=2.50000,0$ kN/cm².

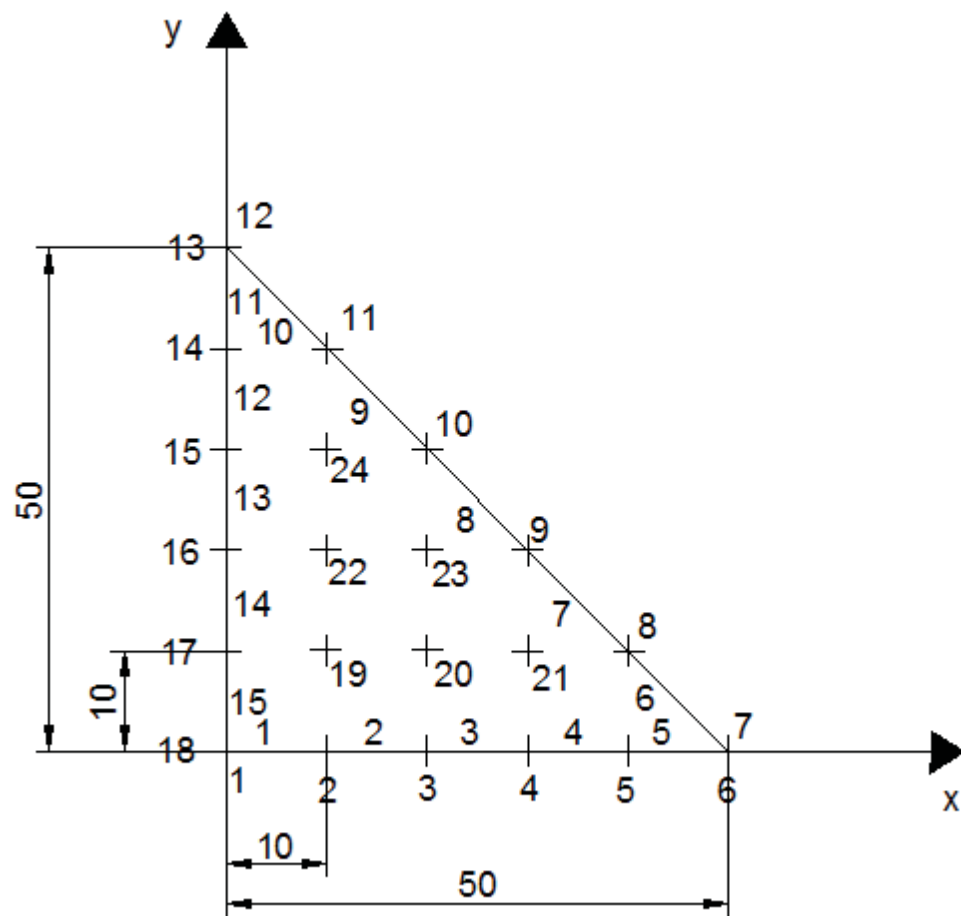


Figura 9.2.4.2 - Placa com 15 elementos.

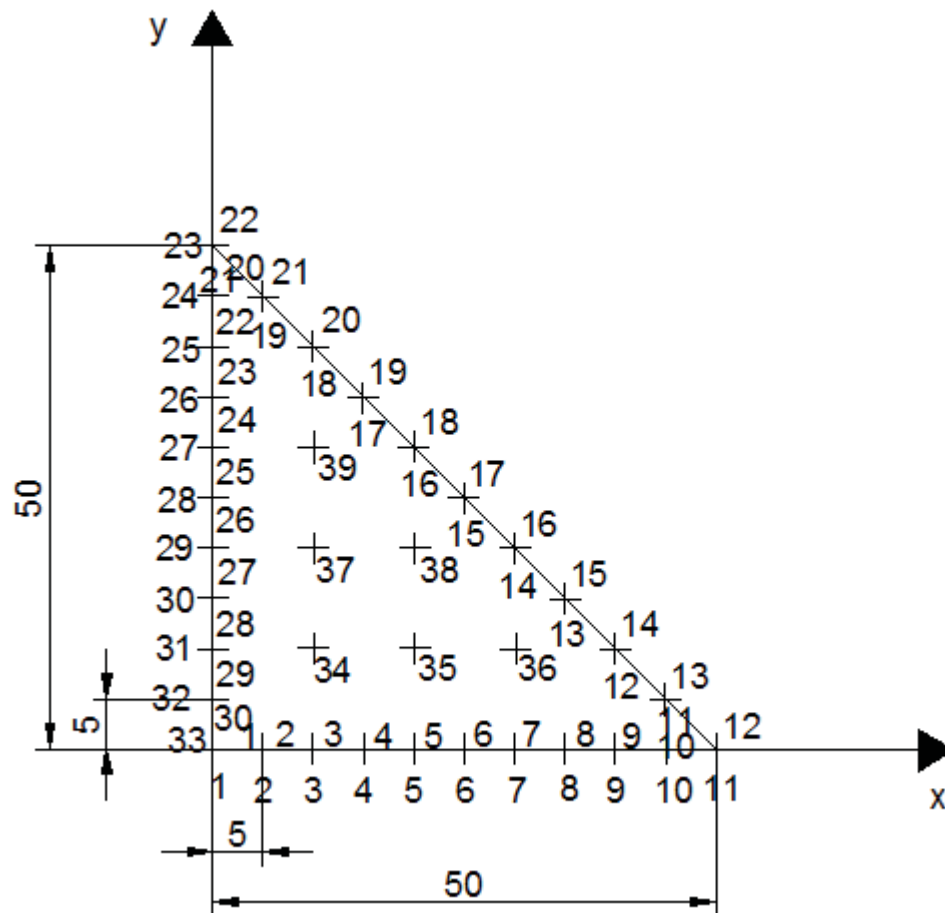


Figura 9.2.4.3 - Placa com 30 elementos.

Em seguida, transformam-se os dados das figuras (9.2.4.2) e (9.2.4.3) em dados para a execução do programa, sendo chamados de “e.carol5.dat” e “e.carol6.dat”, respectivamente.

O primeiro exemplo de placa foi discretizado em 15 elementos, com 18 nós e 3 cantos e o segundo exemplo em 30 elementos, com 33 nós e 3 cantos, executados no programa PLACAS2.

Onde, será comparado o resultado das maiores reações de momentos gerados de acordo com a tabela (9.2.4.1).

Resultado Final do Exemplo 4		
	PLACAS2 - (15 elementos)	PLACAS2 - (30 elementos)
Momento Máximo M no Bordo Engastado (kN.cm)	4,67	4,77
Momento Máximo Mx no Centro da Placa (kN.cm)	-1,29	-1,29
Momento Máximo My no Centro da Placa (kN.cm)	-1,76	-1,77

Tabela 9.2.4.1 - Resultado Exemplo 4.

10 CONCLUSÕES

Durante o curso de Engenharia Civil, normalmente, para o cálculo de placas, utilizam-se as “Tabelas de Czerny”, que são práticas, eficientes e fornecem resultados bem detalhados, mesmo sendo restritas a alguns casos de contorno e carregamento.

A partir de toda a teoria sobre o Método de Elementos de Contorno, foi possível entender sua origem e compreender sua finalidade. Além disso, através do desenvolvimento da Teoria de Placas, não vista na graduação, melhorou o embasamento teórico e auxiliou no entendimento do significado físico dos resultados tanto das tabelas de Czerny quanto os dos numéricos.

Nota-se também que o programa PLACAS2 desenvolvido para executar o método é essencial visto que ele permite que a discretização seja muito extensa e as incógnitas são muitas. Então o programa facilita ainda, e muito, a resolução do problema, se o programa não existisse a resolução do problema seria inviável e, com isso, o método das “Tabelas de Czerny” seria mais eficiente.

No primeiro exemplo nota-se que o programa “Placas2” é eficiente, pela proximidade do seu resultado comparado com o resultado da “Tabela de Czerny”, uma vez que o exemplo possui carga uniformemente distribuída, exigência para a execução da “Tabela de Czerny”.

Já no segundo exemplo estudado, existia, além das cargas uniformemente distribuídas, uma “região de carga” (parede) e os resultados não foram tão próximos. Isso se explica pelo fato de que Czerny trabalha somente com cargas uniformemente distribuídas. Com isso, nota-se que os resultados do programa “Placas2” são mais precisos por não serem baseados em aproximações.

Isto também aconteceu no segundo exemplo acontece no terceiro, já que também se tem “regiões de carga”. Nesse exemplo existem quatro cargas concentradas na placa que provocam resultados distintos entre o programa “Placas2” e a “Tabela de Czerny”.

Por fim, o exemplo quatro não pôde ser comparado à “Tabela de Czerny”, pois a placa do exemplo é triangular e Czerny só admite placas retangulares.

Neste trabalho, pode-se entender o Método de Elementos de Contorno, que é uma ferramenta de cálculo estrutural muito importante para a solução de problemas da Engenharia de modo geral e especificamente na resolução envolvendo placas.

Demonstrou-se através dos exemplos a utilidade e a confiabilidade dos métodos numéricos. Resolveram-se problemas com várias discretizações, onde foi demonstrado que

quanto maior o refinamento da discretização os resultados tendem a valores mais próximos do real. E, através dos exemplos apresentados conseguiu-se resolver problemas com condições de contorno e carregamentos diferentes daquelas estabelecidas pelas tabelas de Czerny.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] AZEVEDO, Álvaro F. M. **Método dos Elementos Finitos**. Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto. 1ª edição, abril de 2003.
- [2] CALDERÓN, E. T. Uma formulação alternativa para o estudo de placas sobre fundações elástica pelo Método dos Elementos de Contorno. São Carlos-USP, 1991. 191p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1991.
- [3] CHAVES, Eduardo. W. V.(1997). **Análise de placas com variação de espessura através do método dos elementos de contorno**. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.
- [4] PT.KNOWLEDGER. **História da Engenharia Estrutural**. Disponível em < <http://pt.knowledger.de/06220216/HistoriaDeEngenhariaEstrutural> > Data de acesso: 07 de outubro de 2012.
- [5] PUC-MG. **Apostila de elementos Finitos**. Disponível em: <http://www.matematica.pucminas.br/lcn/apostilas/Apostila%20de%20Elementos%20Finitos.pdf> > Data de Acesso: 20 de outubro de 2012.
- [6] FERNANDES, G. R. (1998). **O método dos elementos de contorno aplicado à análise não linear de placas**. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.
- [7] GAELZER, Rudi. **Distribuições e a “Função” Delta de Dirac**. IFM/UFPel, 2006. Impresso em 9 de março de 2011.
- [8] HIBBELER, R.C., **Resistência dos Materiais**, 5ª. Ed. São Paulo, Prentice Hall. 2004.
- [9] Instituto Superior Tecnico – Universidade Técnica de Lisboa. **Capítulo 2 - Método das diferenças finitas**. Disponível em < <http://aero.ist.utl.pt/~ggb/principal.pdf> > Data de acesso: 09 de outubro de 2012.
- [10] LAS CASAS, Estevam B. **Notas sobre o Método dos Elementos Finitos, capítulo 3**. Disponível em < <http://www.cadtec.dees.ufmg.br/NucleoEAD/Forum/Arquivos/cap3.PDF> > Data de Acesso: 13 de outubro de 2012.
- [11] OLIVEIRA, L. N. (1991). **Análise de placas de borda curva pelo método dos elementos de contorno**. São Carlos. Dissertação - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.
- [12] PAIVA, J.B. Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estrutura. São Carlos-USP, 1987. 195p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos USP, 1987. Pg 189

- [13] PALERMO, Leandro J. (1989). **Análise de peças de seção delgada como associação de placas pelo método dos elementos de contorno**. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.
- [14] PESSOLANI, R. B. V. **Introdução aos métodos dos elementos de contorno**. 2007 – Universidade Federal Fluminense, 2007.
- [15] RIBEIRO, Gabriel O. (1992). **Sobre a formulação do método dos elementos de contorno para a flexão de placas usando as hipóteses de Reissner**. São Carlos. Dissertação (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.
- [16] SCUCIATO, R. F. **Estudo teórico e implementação computacional do método de elementos de contorno aplicado a problemas elastostáticos lineares bidimensionais**. 2007 –Universidade Federal do Paraná, 2007.
- [17] TAGUTI, Yzumi. **Método dos Elementos de Contorno da Resolução do Problema de Segunda Ordem em Placas Delgadas**. 2010 – Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2010. Disponível em < <http://www.feg.unesp.br/~elfsenne/alunos/2010-taguti.pdf> página 20 > Data de Acesso: 23 de outubro de 2012.
- [18] ABEL, N. H. **Quevres Complete**. Norvégien Christiania, 1981. V.1, 621p.
- [19] LIOUVILLE, V. D. Sur le développement des fonctions. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, 2: 16-35, 1837.
- [20] BETTI, E. Teoria dell elasticita. **II Nuovo Cimento**, 7-10, 1872.