IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT–T.009/02

O Operador Espalhamento para Férmions num Campo Externo em Thermofield Dynamics

Hebe Queiroz

Orientador
Prof. Dr. Jeferson de Lima Tomazelli
Co-orientador
Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar

agosto de 2002

Ao meu pai (in memoriam), a primeira e
principal inspiração para o meu *"fazer bem"*;
aos meus filhos, um dos principais
motivos para o meu *"estar bem"*.

“A natureza primeiro fez as coisas a seu modo e depois fabricou as razões dos homens, aptas a entendê-las.”

Sagredo (Galileu Galilei)

“... havemos de continuar a tentar desvendar os ‘mysis’ que só a Noite sabe como foram transmitidos aos iniciados.”

Ademir Santana

Agradecimentos

Acredito que, além de todo conhecimento trocado ao longo de trabalhos como este, os vários aspectos das relações humanas que experimentamos poderão fazer com que nos tornemos profissionais melhores. Aproveito este espaço para agradecer a todos que de alguma forma colaboraram para a concretização deste trabalho, em particular

a Jeferson e Bruto pelo estímulo e orientação paciente e, acima de tudo, pelo respeito e presença sempre amiga;

aos colegas do IFT, em especial a Alexandre Gadelha e Lúcio Campos pelas agradavelmente incansáveis horas de estudos, discussões e seminários;

aos funcionários do IFT, em particular às bibliotecárias Marina, Brígida, Ana e Luciana, pela presença sempre simpática e prestativa;

aos amigos Graça e Vicente pela ajuda inestimável com a digitação destas páginas;

aos amigos Gian e Li, Bruto e Tati que, com seu conhecimento da alma humana, não me deixaram desistir nos momentos de dificuldade;

e finalmente, mas principalmente, a meus filhos Gerson e Ana Paula por sua ajuda, paciência e incentivo constantes, por sua compreesão, por seu amor.

Este trabalho teve o apoio financeiro da CAPES.

Resumo

O método de segunda quantização é utilizado para construir o operador espalhamento $\underline{\widehat{\mathbf{S}}}$ no espaço de Fock, no contexto de Thermofield Dynamics (TFD), para o campo de Dirac sujeito a um potencial eletromagnético externo dependente do tempo. Esta descrição é baseada na abordagem construtiva do espaço de Fock, a qual é aplicada ao sistema original e a seu dual. Seguindo a prescrição de TFD, o operador $\underline{\widehat{\mathbf{S}}}$ é utilizado para avaliar o processo de produção de pares elétron-pósitron à temperatura finita, e uma análise do limiar de produção é feita a partir do cálculo da probabilidade total de transição.

Palavras Chaves: espaço de Fock; operador espalhamento; Thermofield Dynamics; produção de pares; tansformações de Bogoliubov; campo fermiônico.

Áreas do conhecimento: 1.05.03.00-5

Abstract

The second quantization method is used to build the scattering operator $\widehat{\underline{\mathbf{S}}}$ in Fock space, in the context of Thermofield Dynamics (TFD), for the Dirac field subject to an external time-dependent electromagnetic potential. This description is based on the constructive approach to the Fock space, which is applied to the original system and to its dual. Following TFD prescription, the operator $\widehat{\underline{\mathbf{S}}}$ is used to estimate the process of electron-positron pair production at finite temperature, and an analysis of the production threshold is done based on the calculation of the total transition probability.

Key-words: Fock space, scattering operator, Thermofield Dynamics, pair production, Bogoliubov transformations, fermion field.

Índice

Capítulo 1

Introdução

O entendimento das propriedades dos sistemas quânticos possuindo infinitos graus de liberdade tem sido alvo de atenção em várias áreas da física teórica. Neste sentido, o conceito de campos quânticos tem sido usado para tratar problemas de muitos corpos em física do estado sólido, física nuclear, física de altas energias, física da matéria condensada, cosmologia etc. A manifesta ção de efeitos térmicos nas diversas áreas em que são aplicados os métodos de teoria de campos levou ao estabelecimento de vários formalismos [1]-[19] para tratar campos quânticos à temperatura finita. Um deles foi proposto por *Matsubara* [1], o qual foi construído a partir da sua observação acerca da semelhança entre as propriedades da média estatística e do valor esperado no vácuo em teoria quântica de campos (TQC), possibilitando-o interpretar o tempo como uma quantidadeimaginária inversamente proporcional à temperatura. Nesta abordagem, que foi chamada de *formalismo de tempo imaginário*, as propriedades físicas podem ser calculadas com o uso das regras de Feynman. No entanto, algumas dificuldades se apresentaram no desenvolvimento deste formalismo, especialmente nas diversas situações em que se fazia necessário o tratamento de processos dependentes do tempo e da temperatura simultaneamente, ou seja, na descrição de processos fora do equilíbrio.

Tentativas foram feitas no sentido de se construir um *formalismo de tempo real*. Uma das que obteve grande êxito foi o formalismo estabelecido por *Schwinger* e *Keldysh* [3, 4] . Demonstrou-se sua equivalência com o formalismo de Matsubara, mas algumas dificuldades que este último apresentava se mantiveram, a exemplo do tratamento da quebra espontânea de simetria. Apesar do formalismo de tempo real estar sendo aplicado a situações de não equilíbrio, ele tem se mostrado mais conveniente para tratar estados estacionários.

Em 1975, *Takahashi* e *Umezawa* [13] , motivados pelo trabalho de Matsubara [1], apresentaram um formalismo de operadores, que foi intitulado *"Thermofield Dynamics"* (TFD), onde a operação de traço realizada no cálculo da média estatística foi substituída pelo valor esperado em um vácuo térmico (estado puro). Nesta abordagem, os efeitos de temperatura são introduzidos a partir do conceito de estado térmico. Estes estados são criados por transformações de Bogoliubov e são representados por vetores de estado que formam um espaço vetorial, e a cada vetor (estado térmico) deste espaço corresponde uma situação térmica (temperatura). Para esta construção foi necessário introduzir a duplicação do espaço de Hilbert do sistema, mas diferente da duplicação que foi introduzida no formalismo de Schwinger-Keldysh [13, 27]. O formalismo de TFD estendeu todas as propriedades de operadores em TQC a $T = 0$, mas agora para um sistema com graus de liberdade dobrados. Assim, as relações básicas da TQC à temperatura zero (as equações de movimento de Heisenberg e as relações de comutação canônicas para os operadores de campo) continuam valendo em TFD [23], acrescidas de uma condição subsidiária para o estado de vácuo térmico [24, 25], estabelecida pelos operadores de criação e aniquilação de partículas físicas. Com isso, os cálculos perturbativos são análogos aos cálculos à temperatura zero, sendo possível estabelecer uma fórmula de Wick [26] para o ordenamento normal de operadores, e as regras diagramáticas de Feynman [14, 24], [28]-[31] também são aplicáveis. No entanto, vários desenvolvimentos da TQC à temperatura zero ainda não foram abordados no contexto de TFD, a exemplo do formalismo de operador espalhamento no espaço de Fock, o qual será nosso objeto de estudo.

Alguns aspectos das relações entre TFD e outras abordagens da TQC à temperatura finita têm sido analisados e já são melhor entendidos [12]-[19],[23, 32]. Além disso, muitos outros avanços foram obtidos e aplicações têm sido objeto de estudo desde que o formalismo de TFD foi proposto, em 1975. A equivalência entre TFD e a abordagem via álgebra-C* da mecânica estatística [15] inaugurou uma linha de pesquisa sobre seus aspectos algébricos e suas consequências [33]-[36]. Foram também apresentados outros desenvolvimentos, dentre eles: teoria de renormalização [38, 39, 40]; teorema de equivalência e extensão às teorias de gauge [15, 39]; comportamento a baixas temperaturas [41]; formulação na representação de interação [17, 42]; formulação fora do equilíbrio e sistemas dissipativos [25], [43]-[47]; perturbativo [37, 48, 49]; método funcional [50, 51] etc. Com isso, suas aplicações têm atingido diversas áreas da física: relatividade geral e cosmologia, física nuclear, matéria condensada, óptica quântica, cromodinâmica quântica etc.

Neste trabalho, construiremos o operador espalhamento no espaço de Fock para TFD através do método de segunda quantização, o qual permite escrever uma teoria de muitas partículas (no espaço de Fock) a partir da teoria de uma partícula (no espaço de Hilbert). Para tanto, inicialmente descreveremos aspectos gerais do método de segunda quantização estendido ao formalismo de TFD, o qual requer um espaço de Fock duplicado. Esta descrição será baseada na abordagem construtiva do espaço de Fock, apresentada por Scharf et al [56], a qual foi usada na construção do operador espalhamento na formulação de segunda quantização [56]-[58] e aplicada no estudo de diversos aspectos nos problemas de campo externo em eletrodinâmica quântica [59]-[63]. Em seguida, aplicaremos este método ao campo de Dirac duplicado (campo original e seu dual) sujeito a um campo eletromagnético externo. Considerando campos externos dependentes do tempo, construiremos explicitamente o operador espalhamento no espaço de Fock de TFD a partir do operador espalhamento no espaço de Hilbert duplicado, o qual é definido a menos de uma fase, que está associada à transição vácuo térmico-vácuo térmico. Como aplicação, avaliaremos a produção de pares elétron-pósitron num campo eletromagnético, calculando a probabilidade total de transição do estado de vácuo térmico para o estado de pares à temperatura finita.

Este texto está organizado da seguinte forma. Uma breve revisão de "Thermofield Dynamics" será feita no *Capítulo 1*, onde apresentaremos seus elementos essenciais para os desenvolvimentos subseqüentes. O método de segunda quantização e a construção do operador espalhamento para o campo original e seu dual num campo eletromagnético externo serão apresentados separadamente nos *Capítulos 2* e *3*. A construção do operador espalhamento no espaço de Fock duplicado e e sua aplicação ao processo deprodução de pares elétron-pósitron num campo eletromagnético externo à temperatura finita comporão o *Capítulo 4*. Nas *Considerações Finais*, comentaremos sucintamente os pontos abordados no desenvolvimento deste trabalho e apresentaremos algumas novas questões que poderão ser tratadas em estudos futuros. Algumas discussões e demonstrações adicionais compõem os *Apêndices*, de forma a não comprometer a continuidade do texto apresentado.

Capítulo 2

"Thermofield Dynamics"

Neste capítulo apresentaremos um resumo de TFD contendo os principais elementos que faremos uso nos capítulos subseqüentes. Na *Seção 1.2*, apresentaremos considerações gerais e os elementos básicos para a construção do formalismo; na *Seção 1.3* aplicaremos a idéia desenvolvida na seção anterior, para os osciladores bosônico e fermiônico. A extensão para os campos bosônico e fermiônico livres é feita na *Seção 1.4*, onde apresentamos como exemplo o cálculo da função de Green de dois pontos à temperatura finita para o campo bosônico.

2.1 Considerações Gerais

O formalismo de TFD [13] foi construído de forma que as *médias estatísticas* sejam expressas como *valores esperados em um vácuo* $|0(\beta)\rangle$ dependente da temperatura, ou seja,

$$\langle\langle F\rangle\rangle = \frac{1}{Z(\beta)} Tr\,[\mathrm{e}^{-\beta \mathrm{H}}\mathrm{F}] = \langle 0(\beta)|\,\mathrm{F}\,|0(\beta)\rangle \ , \tag{2.1}$$

onde $\langle\langle\rangle\rangle$ denota a média estatística, H é o hamiltoniano do sistema e $Z(\beta)$ é a função de partição

$$Z(\beta) = Tr\,[\mathrm{e}^{-\beta H}] \ , \tag{2.2}$$

com $\beta = (k_B T)^{-1}$. Sendo assim, podemos escrever

$$\langle 0(\beta)|\,F\,|0(\beta)\rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n \langle n|F|n\rangle\, \mathrm{e}^{-\beta E_n} \ , \tag{2.3}$$

onde

$$H\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle \tag{2.4}$$

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn} \ . \tag{2.5}$$

Se adotamos a expansão do estado $|0(\beta)\rangle$ em termos dos autoestados de energia $|n\rangle$,

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n f_n(\beta)\,|n\rangle \ , \tag{2.6}$$

como é feito na teoria quântica usual, vemos que a igualdade (2.3) será satisfeita se os coeficientes $f_n(\beta)$ possuirem a propriedade de ortogonalidade

$$f_n^*(\beta)\, f_m(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)}\, \mathrm{e}^{-\beta E_n}\, \delta_{mn}\ . \tag{2.7}$$

Então, os $f_n(\beta)$ não podem ser números, mas devem ser vetores. Assim, o estado $|0(\beta)\rangle$ é um vetor de um espaço que é expandido pelo produto dos vetores $|n\rangle$ e $f_n(\beta)$. Isto significa que o espaço de Fock original é inadequado para tratar sistemas térmicos na representação de TFD.

Para construir essa representação, vamos introduzir um sistema adicional "idêntico" ao sistema dinâmico original, que chamaremos de *sistema dual*, de forma que os vetores $f_n(\beta)$ pertenç am ao espaço que é gerado pelos autoestados do operador hamiltoniano deste novo sistema*. Este sistema é caracterizado pelo hamiltoniano $\tilde{H}$ e seus autoestados $|\tilde{n}\rangle$, tal que

$$\begin{aligned} \tilde{H}\,|\tilde{n}\rangle &= E_n\,|\tilde{n}\rangle & (2.8)\\ \langle\tilde{m}|\tilde{n}\rangle &= \delta_{mn}\ . & (2.9) \end{aligned}$$

Os autovalores de energia E_n que aparecem na equação acima são, por definição, iguais àqueles da equação de autovalores para o sistema original, (2.4).

A equação (2.7) nos permite propor que os vetores $f_n(\beta)$ sejam definidos como

$$f_n(\beta) = \frac{1}{Z(\beta)^{\frac{1}{2}}}\, \mathrm{e}^{-\beta E_n/2}\, |\tilde{n}\rangle\ \ , \tag{2.10}$$

de modo que a expansão (2.6) para o estado $|0(\beta)\rangle$ fica dada por

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{Z(\beta)^{\frac{1}{2}}} \sum_n \mathrm{e}^{-\beta E_n/2}\, |n, \tilde{n}\rangle\ \ , \tag{2.11}$$

onde

$$|n, \tilde{m}\rangle \hat{=} |n\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle \equiv |n\rangle \otimes \langle m|\ . \tag{2.12}$$

Note que os vetores que expandem o estado $|0(\beta)\rangle$ são aqueles que resultam do produto direto de vetores com os mesmos autovalores de energia e, portanto, existe um estado formado pelo produto direto dos vácuos $|0\rangle$ e $|\tilde{0}\rangle$,

$$|0\rangle\!\rangle \hat{=} |0, \tilde{0}\rangle = |0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle = |0\rangle \otimes \langle 0|\ , \tag{2.13}$$

que chamaremos de *vácuo duplicado*. Para que a igualdade (2.3) seja satisfeita, o operador F deve agir somente no seu espaço correspondente, ou seja,

$$\begin{aligned} \langle\tilde{m}', n'|F|n, \tilde{m}\rangle &= \langle n'|F|n\rangle\, \langle\tilde{m}'|\tilde{m}\rangle \\ &= \langle n'|F|n\rangle\, \delta_{m'm}\ , & (2.14) \end{aligned}$$

*Todas as quantidades associadas ao sistema dual serão escritas com "til".

o que caracteriza a independência dos dois sistemas. Com esta motivação, podemos introduzir os operadores $\tilde{F}$ associados ao sistema dual, de forma que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{m}', n' | \tilde{F} | n, \tilde{m} \rangle &= \langle n' | n \rangle \, \langle \tilde{m}' | \tilde{F} | \tilde{m} \rangle \\ &= \langle \tilde{m}' | \tilde{F} | \tilde{m} \rangle \, \delta_{n'n} \ . \end{aligned} \tag{2.15}$$

Assim, podemos definir a ação dos operadores F, $\tilde{F}$ sobre um estado arbitrário $|\psi\rangle$ do espaço estendido, ao qual pertence $|0(\beta)\rangle$, como

$$F\,|\psi\rangle = F\,|\phi, \tilde{\phi}\rangle = [F\,|\phi\rangle] \otimes |\tilde{\phi}\rangle = [F\,|\phi\rangle] \otimes \langle\phi| \ , \tag{2.16}$$

$$\tilde{F}\,|\psi\rangle = \tilde{F}\,|\phi, \tilde{\phi}\rangle = |\phi\rangle \otimes \left[\tilde{F}\,|\tilde{\phi}\rangle\right] = |\phi\rangle \otimes \left[\langle\phi|\,F^{\dagger}\right] \ , \tag{2.17}$$

o que corresponde a escrever

$$F \ \hat{=} \ F \otimes 1 = F_R \otimes 1 \ , \tag{2.18}$$

$$\tilde{F} \ \hat{=} \ 1 \otimes \tilde{F} = 1 \otimes F_L^{\dagger} \ , \tag{2.19}$$

onde R significa que o operador age à direita e L à esquerda. Portanto, os operadores til estão associados a uma representação antiunitária.

A seguir, apresentaremos o estudo de sistemas de osciladores bosônico e fermiônico no contexto de TFD. Apesar da simplicidade dos sistemas, tais resultados serão úteis no tratamento de campos à temperatura finita.

2.2 Osciladores Harmônicos em TFD

Nesta seção aplicaremos o formalismo de TFD a *osciladores bosônico* e *fermiônico*. Este estudo mostrará que o processo de termalização é implementado por uma *transformação de Bogoliubov* dependente da temperatura. No que segue, apresentaremos simultaneamente os dois casos.

Um oscilador de freqüência ω é descrito pelo hamiltoniano

$$H = \omega\, a^{\dagger} a \ , \qquad (\hbar = 1) \tag{2.20}$$

sendo $a^{\dagger}$ o operador de *criação* e a o operador de *aniquilação*, os quais satisfazem a álgebra

$$\begin{aligned} [a, a^{\dagger}]_{\pm} &= 1 \ , \\ [a, a]_{\pm} &= 0 \ , \end{aligned} \tag{2.21}$$

onde $(+)$ significa anticomutação, para o caso de férmions, e $(-)$ comutação, para bósons. O estado de vácuo $|0\rangle$ do sistema é definido de forma que

$$\begin{aligned} a\,|0\rangle &= 0\ , \\ (a^\dagger)^n\,|0\rangle &= (n!)^{\frac{1}{2}}\,|n\rangle\ , \\ a\,|n\rangle &= n^{\frac{1}{2}}\,|n-1\rangle\ . \end{aligned} \tag{2.22}$$

Além disto, devido ao princípio de exclusão de Pauli para férmions, temos

$$(a^\dagger)^2\,|0\rangle = a^\dagger\,|1\rangle = 0\ , \tag{2.23}$$

o que proíbe a existência de estados com $n \geq 2$. Portanto, deveremos ter

$$\begin{aligned} n &= 0,1 && \text{para férmions,} \\ n &= 0,1,2,... && \text{para bósons.} \end{aligned} \tag{2.24}$$

Os estados $|n\rangle$ são ortonormalizados , isto é,

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn}\ , \tag{2.25}$$

e podemos definir o operador hermitiano

$$N = a^\dagger a\ , \tag{2.26}$$

tal que

$$N\,|n\rangle = n\,|n\rangle\ . \tag{2.27}$$

Este operador é interpretado como operador número e seus autovalores são números inteiros não negativos, os quais determinam os níveis de energia $(n\omega)$ do oscilador. Se, por exemplo, os operadores $a^\dagger$ e a descrevem férmions, como no caso do campo de Dirac, $|n\rangle$ é um estado de n férmions. Assim,

$$H\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle = n\omega\,|n\rangle\ . \tag{2.28}$$

Como vimos na seção anterior, para que possamos construir o estado térmico $|0(\beta)\rangle$ e implementar a proposta do formalismo TFD, devemos introduzir um sistema dual (til). Tal sistema é obtido seguindo as *regras de conjugação til*

$$\begin{aligned} \widetilde{(cA+B)} &= c^*\tilde{A} + \tilde{B}\ , \\ \widetilde{AB} &= \tilde{A}\,\tilde{B}\ , \\ \widetilde{A^\dagger} &= (\tilde{A})^\dagger\ , \\ \widetilde{(\tilde{A})} &= A\ , \\ \widetilde{|0\rangle\!\rangle} &= |0\rangle\!\rangle\ . \end{aligned} \tag{2.29}$$

A primeira regra estabelece uma mapeamento antilinear do espaço original no espaço dual; a segunda garante que o mapeamento de operadores compostos seja feito um-a-um, como, por exemplo, o operador número $N = a^\dagger a \rightarrow \tilde{N} = \tilde{a}^\dagger \tilde{a}$. Sendo assim, o sistema dual (til) fica descrito pelo hamiltoniano

$$\tilde{H} = \omega\, \tilde{a}^\dagger \tilde{a}\ , \qquad (\hbar = 1) \tag{2.30}$$

onde os autovalores de energia ω são idênticos àqueles do sistema original, e cujos operadores de criação e aniquilação satisfazem a mesma álgebra

$$\begin{aligned} [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger]_\pm &= 1\ , \\ [\tilde{a}, \tilde{a}]_\pm &= 0\ . \end{aligned} \tag{2.31}$$

Além disso, a independência dos sistemas original e seu dual é expressa pelas relações [13]

$$[a, \tilde{a}]_\pm = [a, \tilde{a}^\dagger]_\pm = 0\ . \tag{2.32}$$

Analogamente ao sistema original, o vácuo $|\tilde{0}\rangle$ é tal que

$$\begin{aligned} \tilde{a}\,|\tilde{0}\rangle &= 0\ , \\ (\tilde{a}^\dagger)^n\,|\tilde{0}\rangle &= (n!)^{\frac{1}{2}}\,|\tilde{n}\rangle\ , \\ \tilde{a}\,|\tilde{n}\rangle &= n^{\frac{1}{2}}\,|\tilde{n}-1\rangle\ , \end{aligned} \tag{2.33}$$

e

$$(\tilde{a}^\dagger)^2\,|\tilde{0}\rangle = \tilde{a}^\dagger\,|\tilde{1}\rangle = 0 \qquad \text{(férmions)}\ , \tag{2.34}$$

e definimos o operador número como

$$\begin{aligned} \tilde{N} &= \tilde{a}^\dagger \tilde{a}\ , \\ \tilde{N}\,|\tilde{n}\rangle &= n\,|\tilde{n}\rangle\ , \end{aligned} \tag{2.35}$$

cujos autovalores n são idênticos aos autovalores do operador N.

As definições (2.18), (2.19) estão em acordo com o fato dos operadores a e $\tilde{a}$ anularem o vácuo duplicado, ou seja,

$$\begin{aligned} a\,|0,\tilde{0}\rangle &= [a\,|0\rangle] \otimes |\tilde{0}\rangle = [a\,|0\rangle] \otimes \langle 0| = 0\ , \\ \tilde{a}\,|0,\tilde{0}\rangle &= |0\rangle \otimes \left[\tilde{a}\,|\tilde{0}\rangle\right] = |0\rangle \otimes \left[\langle 0|\,a^\dagger\right] = 0\ , \end{aligned} \tag{2.36}$$

Os vetores $|n,\tilde{n}\rangle$ que expandem o estado térmico $|0(\beta)\rangle$, de acordo com (2.22) e (2.33), podem ser escritos como

$$\begin{aligned} |n,\tilde{n}\rangle &= |n\rangle \otimes |\tilde{n}\rangle = (n!)^{-\frac{1}{2}}(a^\dagger)^n\,|0\rangle \otimes (n!)^{-\frac{1}{2}}(\tilde{a}^\dagger)^n\,|\tilde{0}\rangle \\ &= \frac{1}{n!}(a^\dagger)^n\,(\tilde{a}^\dagger)^n|0\rangle\!\rangle \end{aligned} \tag{2.37}$$

e um estado genérico $|n, \tilde{m}\rangle$ seria

$$|n, \tilde{m}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!m!}}(a^\dagger)^n\,(\tilde{a}^\dagger)^m|0\rangle\!\rangle \ , \tag{2.38}$$

onde $|0\rangle\!\rangle$ é definido por (2.13). Assim, podemos escrever o estado $|0(\beta)\rangle$, representado em (2.11), como

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}}\sum_n e^{-\beta E_n/2}|n, \tilde{n}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}}\sum_n e^{-\beta n\omega/2}\frac{1}{n!}(a^\dagger)^n(\tilde{a}^\dagger)^n|0\rangle\!\rangle \ . \end{aligned} \tag{2.39}$$

Para o caso fermiônico ($n = 0, 1$), esta expressão se reduz a

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle_F &= \frac{1}{\sqrt{Z_F(\beta)}}[|0, \tilde{0}\rangle + e^{-\beta\omega/2}|1, \tilde{1}\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{Z_F(\beta)}}[1 + e^{-\beta\omega/2}\, a^\dagger\, \tilde{a}^\dagger]\, |0\rangle\!\rangle \ . \end{aligned} \tag{2.40}$$

Exigindo a ortonormalidade deste estado, teremos

$$1 =_F \langle 0(\beta)|0(\beta)\rangle_F = \frac{1}{Z_F(\beta)}[1 + e^{-\beta\omega}] \ , \tag{2.41}$$

ou seja, a função de partição para férmions resulta em

$$Z_F(\beta) = 1 + \mathrm{e}^{-\beta\omega} \, . \tag{2.42}$$

A expressão (2.39) determina o estado $|0(\beta)\rangle$ para bósons, com $n = 0, 1, 2, ...$, isto é,

$$|0(\beta)\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{Z_B(\beta)}}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n\omega/2}\frac{1}{n!}(a^\dagger)^n(\tilde{a}^\dagger)^n|0\rangle\!\rangle \ . \tag{2.43}$$

Assim, da propriedade de ortonormalidade obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= {}_B\langle 0(\beta)|0(\beta)\rangle_B = \frac{1}{Z_B(\beta)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\langle \tilde{m}, m|e^{-\beta\omega(m+n)/2}|n, \tilde{n}\rangle \\ &= \frac{1}{Z_B(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\omega n} . \end{aligned}$$

Usando a soma da série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \ , \tag{2.44}$$

teremos para a função de partição bosônica

$$Z_B(\beta) = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\beta\omega}} \; . \tag{2.45}$$

As médias estatísticas do operador número N,

$$\langle\!\langle N \rangle\!\rangle = \langle 0(\beta)|\, a^\dagger a \,|0(\beta)\rangle \; , \tag{2.46}$$

podem ser calculadas usando os estados $|0(\beta)\rangle$ para os sitemas fermiônico (2.40) e bosônico (2.43), resultando em

$$\langle\!\langle N \rangle\!\rangle_F \;=\; \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\omega} + 1} \hat{=} f_F(\omega) \; , \tag{2.47}$$

$$\langle\!\langle N \rangle\!\rangle_B \;=\; \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\omega} - 1} \hat{=} f_B(\omega) \; , \tag{2.48}$$

onde $f_F(\omega)$ e $f_B(\omega)$ são, respectivamente, as distribuições de Fermi-Dirac e Bose-Einstein.

Uma outra forma de obtermos o estado $|0(\beta)\rangle$, (2.39), é realizar uma transformação unitária U sobre o vácuo duplicado $|0\rangle\!\rangle$,

$$|0(\beta)\rangle = U(\beta)\,|0\rangle\!\rangle \hat{=} \mathrm{e}^{i\,G(\beta)}\,|0\rangle\!\rangle \; , \tag{2.49}$$

onde†

$$G(\beta) = i\,\theta(\beta)\,(\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger) \; , \tag{2.50}$$

e, portanto,

$$U(\beta)^\dagger = U(\beta)^{-1} \, . \tag{2.51}$$

Tomando a transformação (2.49) como a definição do estado $|0(\beta)\rangle$ e expandindo a exponencial, podemos mostrar que ‡

$$|0(\beta)\rangle_F \;=\; [u_F(\beta) + v_F(\beta)\, a^\dagger \tilde{a}^\dagger]\,|0\rangle\!\rangle \; , \tag{2.52}$$

$$|0(\beta)\rangle_B \;=\; [u_B(\beta)]^{-1} \exp\{t_B(\beta)\, a^\dagger \tilde{a}^\dagger\}\,|0\rangle\!\rangle \; , \tag{2.53}$$

com

$$\begin{aligned} u_F(\beta) &= \cos\theta(\beta) = (1 + \mathrm{e}^{-\beta\omega})^{-\frac{1}{2}} \, , \\ v_F(\beta) &= \sin\theta(\beta) = (1 + \mathrm{e}^{\beta\omega})^{-\frac{1}{2}} \, , \\ t_F(\beta) &= \tan\theta(\beta) = \mathrm{e}^{-\beta\omega/2} \, , \end{aligned} \tag{2.54}$$

†Transformações canônicas lineares de dois modos podem ser produzidas por 10 geradores independentes [54]. No entanto, quatro deles acrescentam um fator de fase à invariância do vácuo; outros quatro são, na verdade, geradores de estados comprimidos de um modo; os dois restantes possuem uma forma similar. Dentre estes últimos, fizemos a mesma escolha que Takahashi e Umezawa [16], a qual é expressa em (2.50). O outro gerador é $G' = \theta(\beta)[\tilde{a}\,a + a^\dagger \tilde{a}^\dagger]$.

‡Esta demonstração está apresentada no *Apêndice A1*.

$$u_F^2(\beta) + v_F^2(\beta) = 1 \ , \tag{2.55}$$

e

$$\begin{aligned} u_B(\beta) &= \cosh\theta(\beta) = (1 - \mathrm{e}^{-\beta\omega})^{-\frac{1}{2}} \ , \\ v_B(\beta) &= \sinh\theta(\beta) = (\mathrm{e}^{\beta\omega} - 1)^{-\frac{1}{2}} \ , \\ t_B(\beta) &= \tanh\theta(\beta) = \mathrm{e}^{-\beta\omega/2} \ , \end{aligned} \tag{2.56}$$

$$u_B^2(\beta) - v_B^2(\beta) = 1 \ . \tag{2.57}$$

Das definições (2.54) e (2.56), podemos ver que $v_F^2(\beta)$ e $v_B^2(\beta)$ são respectivamente, as distribuições fermiônica $f_F(\omega)$, (2.47), e bosônica $f_B(\omega)$, (2.48).

Usando a transformação $U(\beta)$, podemos introduzir os operadores de criação e aniquilação dependentes da temperatura[§]

$$\begin{aligned} a(\beta) &= U(\beta)\, a\, U(\beta)^\dagger = u(\beta)\, a - v(\beta)\, \tilde{a}^\dagger \ , && \text{(a)} \\ a^\dagger(\beta) &= U(\beta)\, a^\dagger\, U(\beta)^\dagger = u(\beta)\, a^\dagger - v(\beta)\, \tilde{a} \ , && \text{(b)} \\ \tilde{a}(\beta) &= U(\beta)\, \tilde{a}\, U(\beta)^\dagger = u(\beta)\, \tilde{a} - \sigma\, v(\beta)\, a^\dagger \ , && \text{(c)} \\ \tilde{a}^\dagger(\beta) &= U(\beta)\, \tilde{a}^\dagger\, U(\beta)^\dagger = u(\beta)\, \tilde{a}^\dagger - \sigma\, v(\beta)\, a \ , && \text{(d)} \end{aligned} \tag{2.58}$$

as quais tem como inversas as expressões

$$\begin{aligned} a &= U(\beta)\, a(\beta)\, U(\beta)^\dagger = u(\beta)\, a(\beta) + v(\beta)\, \tilde{a}^\dagger(\beta) \ , \\ a^\dagger &= U(\beta)\, a^\dagger(\beta)\, U(\beta)^\dagger = u(\beta)\, a^\dagger(\beta) + v(\beta)\, \tilde{a}(\beta) \ , \\ \tilde{a} &= U(\beta)\, \tilde{a}(\beta)\, U(\beta)^\dagger = u(\beta)\, \tilde{a}(\beta) + \sigma\, v(\beta)\, a^\dagger(\beta) \ , \\ \tilde{a}^\dagger &= U(\beta)\, \tilde{a}^\dagger(\beta)\, U(\beta)^\dagger = u(\beta)\, \tilde{a}^\dagger(\beta) + \sigma\, v(\beta)\, a(\beta) \ , \end{aligned} \tag{2.59}$$

onde estamos usando $\sigma = -1$ para férmions e $\sigma = 1$ para bósons. O conjunto de expressões (2.58) define a conhecida *transformação de Bogoliubov térmica*, e o conjunto (2.59) a sua inversa. Devido à unitariedade da tranformação $U(\beta)$, a estrutura algébrica dos operadores a, $a^\dagger$ do sistema original é preservada, ou seja, os operadores termalizados satisfazem a mesma álgebra

$$\begin{aligned} [a(\beta), a^\dagger(\beta)]_\pm &= 1 \ , \\ [\tilde{a}(\beta), \tilde{a}^\dagger(\beta)]_\pm &= 1 \ , \end{aligned} \tag{2.60}$$

com os demais comutadores nulos.

[§]A demonstração da segunda igualdade das expressões (2.58) é feita no *Apêndice A2*.

O estado $|0(\beta)\rangle$ desempenha o papel de vácuo, já que é anulado pelos operadores de destruição dependentes da temperatura. De fato,

$$
\begin{aligned}
a(\beta)|0(\beta)\rangle &= U(\beta)aU(\beta)^{\dagger}\,U(\beta)|0\rangle\!\rangle = U(\beta)a\,|0\rangle\!\rangle \\
&= U(\beta)[a\,|0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle] = 0 \ , \qquad (2.61) \\
\tilde{a}(\beta)|0(\beta)\rangle &= U(\beta)\tilde{a}U(\beta)^{\dagger}\,U(\beta)|0\rangle\!\rangle = U(\beta)\tilde{a}\,|0\rangle\!\rangle \\
&= U(\beta)[|0\rangle \otimes \tilde{a}\,|\tilde{0}\rangle] = 0 \ . \qquad (2.62)
\end{aligned}
$$

Entretanto, tal estado não é anulado pelos operadores a e $\tilde{a}$, pois é uma combinação de estados multipares $(a\tilde{a})$, como mostra a equação (2.39). Neste sentido, $|0(\beta)\rangle$ é um estado térmico para os operadores a e $\tilde{a}$. Para os operadores térmicos, ele é um estado puro, e por isto é chamado de *vácuo térmico*. Outros estados térmicos podem ser construídos a partir da atuação sucessiva dos operadores de criação $a^{\dagger}(\beta)$, $\tilde{a}^{\dagger}(\beta)$ sobre o vácuo térmico $|0(\beta)\rangle$, ou seja,

$$
|0(\beta)\rangle\ ,\ a^{\dagger}(\beta)|0(\beta)\rangle\ ,\ \tilde{a}^{\dagger}(\beta)|0(\beta)\rangle\ , ...,\ [a^{\dagger}(\beta)]^{n}[\tilde{a}^{\dagger}(\beta)]^{m}|0(\beta)\rangle\ , ... \qquad (2.63)
$$

com n, m dados por (2.24). Estes estados não são autoestados do hamiltoniano H do sistema físico. No entanto, podemos introduzir o hamiltoniano total $\hat{H}$, que descreve o sistema duplicado,

$$
\begin{aligned}
\hat{H} &= H - \tilde{H} = H \otimes 1 - 1 \otimes \tilde{H} \\
&= \omega\,(a^{\dagger}a - \tilde{a}^{\dagger}\tilde{a})\ , \qquad (2.64)
\end{aligned}
$$

cujos autovalores são

$$
\begin{aligned}
\hat{H}|0(\beta)\rangle &= 0\ , \\
\hat{H}[a^{\dagger}(\beta)]^{m}[\tilde{a}^{\dagger}(\beta)]^{n}|0(\beta)\rangle &= (m-n)\omega\,[a^{\dagger}(\beta)]^{m}[\tilde{a}^{\dagger}(\beta)]^{n}|0(\beta)\rangle\ . \qquad (2.65)
\end{aligned}
$$

A transformação de Bogoliubov inversa (2.59) é útil pois as médias a serem calculadas no vácuo térmico envolverão combinações dos operadores a e $a^{\dagger}$, por se tratarem de observáveis do sistema físico. Um exemplo disso é o operador número N. Sua média estatística é dada por

$$
\begin{aligned}
n(\beta) &= \langle\!\langle N\rangle\!\rangle = \langle 0(\beta)|\,a^{\dagger}a\,|0(\beta)\rangle \\
&= \langle 0(\beta)|\,[u(\beta)\,a^{\dagger}(\beta) + v(\beta)\,\tilde{a}(\beta)]\,[u(\beta)\,a(\beta) + v(\beta)\,\tilde{a}^{\dagger}(\beta)]\,|0(\beta)\rangle \\
&= v^{2}(\beta)\ . \qquad (2.66)
\end{aligned}
$$

A transformação de Bogoliubov (2.58) pode ser escrita na forma matricial se introduzimos uma notação de dubleto,

$$
\begin{aligned}
A^{a} &= \begin{pmatrix} A^{1} \\ A^{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ \tilde{A}^{\dagger} \end{pmatrix}\ , \\
\bar{A}^{a} &= \begin{pmatrix} \bar{A}^{1} & \bar{A}^{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -\sigma\tilde{A}^{\dagger} \end{pmatrix}\ , \qquad (2.67)
\end{aligned}
$$

é que é a forma mais adequada para tratar sistemas com infinitos graus de liberdade, onde σ é definido como em (2.59). Assim, as equações (2.58a) e (2.58d) podem ser resumidas em

$$\begin{pmatrix} a(\beta) \\ \tilde{a}^{\dagger}(\beta) \end{pmatrix} = B(\beta) \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a}^{\dagger} \end{pmatrix} , \tag{2.68}$$

onde $B(\beta)$ é a matriz de Bogoliubov, definida como

$$B(\beta) = \begin{pmatrix} u(\beta) & -v(\beta) \\ -\sigma\, v(\beta) & u(\beta) \end{pmatrix} , \tag{2.69}$$

de forma que sua inversa é

$$B^{-1}(\beta) = \begin{pmatrix} u(\beta) & v(\beta) \\ \sigma\, v(\beta) & u(\beta) \end{pmatrix} , \tag{2.70}$$

e $B^{\dagger}(\beta) = B^{t}(\beta)$, onde t denota a operação de transposição matricial.

O dubleto conjugado de (2.67) tem sido definido por alguns autores de formas diferentes. Na construção que apresentaremos mais adiante, usaremos requisitos físicos para estabelecer sua definição.

Na próxima seção trataremos campos livres no contexto de TFD, seguindo o formalismo apresentado nas duas últimas seções.

2.3 Campos Livres

Os campos livres admitem soluções expandidas em termos dos operadores de criação $a^{\dagger}$ e de aniquilação a, ou seja, admitem a decomposição dos operadores de campo em partes de freqüência negativa e positiva. Então, é razoável pensar que o tratamento de campos térmicos possa ser feito seguindo o formalismo construído anteriormente. Sendo assim, devemos introduzir campos associados (duais) aos campos originais e os efeitos de temperatura seriam incorporados através de uma transformação de Bogoliubov entre os campos original e seu dual. Além disso, os exemplos que foram apresentados sugerem que é possível construir o formalismo lagrangiano e hamiltoniano da teoria. Seguindo essa idéia, apresentaremos a seguir elementos de TFD para o campo de Dirac, que serão necessários para a construção que faremos em capítulos posteriores, e para o campo de Klein-Gordon, que usaremos como um exemplo de aplicação desse formalismo.

2.3.1 Campo Escalar Complexo

Seja um sistema físico descrito pelo operador densidade lagrangiana $\mathcal{L}(x)$, função dos operadores de campo $\varphi(x)$ e $\varphi^\dagger(x)$, e suas derivadas $\partial_\mu\varphi(x)$ e $\partial_\mu\varphi^\dagger(x)$

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(\varphi^\dagger(x), \varphi(x)) \ . \tag{2.71}$$

Para que os efeitos de temperatura possam ser levados em conta, devemos introduzir um campo $\tilde{\varphi}(x)$ dual a $\varphi(x)$, seguindo as regras de conjugação til apresentadas em (2.29). Estas regras estabelecem que o operador densidade lagrangiana $\widetilde{\mathcal{L}}(x)$ para o campo dual $\tilde{\varphi}(x)$ fica dado por

$$\widetilde{\mathcal{L}}(x) = \mathcal{L}(\varphi^\dagger\widetilde{(x), \varphi}(x)) = \mathcal{L}^*(\widetilde{\varphi}^\dagger(x)^*, \widetilde{\varphi}(x)^*) \ . \tag{2.72}$$

A descrição do sistema duplicado, composto pelo sistema original e seu dual, é determinada pelo operador densidade lagrangiana total

$$\widehat{\mathcal{L}}(x) = \mathcal{L}(x) - \widetilde{\mathcal{L}}(x) \ , \tag{2.73}$$

e, em acordo com esta definição, sua evolução é estabelecida pelo hamiltoniano total

$$\widehat{H} = H - \widetilde{H} \ , \tag{2.74}$$

que corresponde a (2.64) em nível de operadores de criação e aniquilação.

Suponhamos que o campo original seja o operador campo escalar (bosônico) $\phi(x)$, descrito pelo operador densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}_\phi(x) = \partial_\mu\phi(x)\,\partial^\mu\phi(x) - m^2\phi^2(x) \ , \tag{2.75}$$

então sua dinâmica é determinada pela equação de Klein-Gordon

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\,\phi(x) = 0 \ , \tag{2.76}$$

que tem como solução o operador de campo

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_p}} \left[a(\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{-ip\cdot x} + a^\dagger(\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{ip\cdot x}\right] \\ &\hat{=} \ \phi_+(x) + \phi_-(x) \ , \end{aligned} \tag{2.77}$$

onde $E_p = +(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$, e $a^\dagger(\mathbf{p})$ e $a(\mathbf{p})$ são conjuntos de operadores de criação e aniquilação que satisfazem às relações de comutação

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')]_- &= \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \ , \\ [a(\mathbf{p}), a(\mathbf{p}')]_- &= [a^\dagger(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')]_- = 0 \ , \end{aligned} \tag{2.78}$$

Seguindo a prescrição de TFD, devemos introduzir o campo dual

$$\begin{aligned}
\widetilde{\phi}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_p}} \, [\tilde{a}(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{ip\cdot x} + \tilde{a}^\dagger(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-ip\cdot x}] \\
&\hat{=} \widetilde{\phi}_-(x) + \widetilde{\phi}_+(x) \ ,
\end{aligned} \tag{2.79}$$

de forma que os operadores de criação $\tilde{a}^\dagger(\mathbf{p})$ e aniquilação $\tilde{a}(\mathbf{p})$ satisfaçam as mesmas relações de comutação (2.78), ou seja,

$$\begin{aligned}
[\tilde{a}(\mathbf{p}), \tilde{a}^\dagger(\mathbf{p}')]_- &= \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \ , \\
[\tilde{a}(\mathbf{p}), \tilde{a}(\mathbf{p}')]_- &= [\tilde{a}^\dagger(\mathbf{p}), \tilde{a}^\dagger(\mathbf{p}')]_- = 0 \ ,
\end{aligned} \tag{2.80}$$

e

$$[a(\mathbf{p}), \tilde{a}^\dagger(\mathbf{p}')]_- = 0 \ . \tag{2.81}$$

As relações (2.78) e (2.80) levam os operadores de campo a satisfazerem as relações algébricas dadas por

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi^\dagger(x')]_- &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \ , \\
[\widetilde{\phi}(x), \widetilde{\phi}^\dagger(x')]_- &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \ , \\
[\phi(x), \widetilde{\phi}^\dagger(x')]_- &= 0 \ ,
\end{aligned} \tag{2.82}$$

com demais comutadores nulos.

No contexto de teoria quântica de campos usual (à temperatura zero), quantidades físicas podem ser calculadas tomando-se o valor esperado no vácuo (do sistema físico) dos operadores que as representam. Quando desejamos tratar com campos térmicos, devemos tomar o valor esperado dos mesmos operadores (ou seja, aqueles associados ao sistema físico à temperatura zero), mas agora no vácuo térmico $|0(\beta)\rangle$, o que corresponderia a calcular sua média estatística. Sendo assim, tal cálculo deverá envolver a transformação de Bogoliubov inversa, de forma análoga àquele realizado para o operador número N, (2.66). No entanto, para o caso de campos, o valor esperado é determinado de forma mais apropriada se escrevemos essas transformações na forma matricial, estendendo a notação de dubleto, definida em (2.67), para os campos $\phi(x)$ e $\tilde{\phi}(x)$. Então, para o campo de Klein-Gordon teremos o dubleto

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &\hat{=} \phi^\mu(x) = \begin{pmatrix} \phi^1(x) \\ \phi^2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \widetilde{\phi}^\dagger(x) \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_p}} \left[\begin{pmatrix} a(\mathbf{p}) \\ \tilde{a}^\dagger(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-ip\cdot x} + \begin{pmatrix} a^\dagger(\mathbf{p}) \\ \tilde{a}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{ip\cdot x} \right] .
\end{aligned} \tag{2.83}$$

O dubleto conjugado a $\Phi(x)$ será

$$
\begin{aligned}
[\Phi^{\ddagger}(x)]^t &\,\hat{=}\, \begin{pmatrix} \phi^{\dagger}(x) \\ -\widetilde{\phi}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ -\widetilde{\phi}^{\dagger}(x) \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_p}} \left[\begin{pmatrix} a(\mathbf{p}) \\ -\tilde{a}^{\dagger}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-ip\cdot x} + \begin{pmatrix} a^{\dagger}(\mathbf{p}) \\ -\tilde{a}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{ip\cdot x} \right] \quad (2.84)
\end{aligned}
$$

onde definimos

$$
\Phi^{\ddagger} \,\hat{=}\, (\phi^{\dagger} \,,\, \sigma\widetilde{\phi}) \,, \tag{2.85}
$$

e adotamos $\sigma = -1$.

Como os campos envolvem infinitos modos, a transformação unitária $U(\beta)$ que produz o vácuo térmico $|0(\beta)\rangle$ a partir do vácuo duplicado $|0\rangle\!\rangle$,

$$
|0(\beta)\rangle = U_B(\beta)\,|0\rangle\!\rangle = \mathrm{e}^{iG_B(\beta)}\,|0\rangle\!\rangle \,, \tag{2.86}
$$

será determinada pelo gerador

$$
G_B(\beta) = i \int d^3p\, \theta_p(\beta)\, [\tilde{a}(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) - a^{\dagger}(\mathbf{p})\tilde{a}^{\dagger}(\mathbf{p})] \,, \tag{2.87}
$$

que dará origem à transformação de Bogoliubov

$$
\begin{aligned}
a(\mathbf{p};\beta) &= \mathrm{e}^{iG_B(\beta)}\, a(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-iG_B(\beta)} = \cosh\theta_{\mathbf{p}}(\beta)\, a(\mathbf{p}) - \mathrm{senh}\theta_{\mathbf{p}}(\beta)\, \tilde{a}^{\dagger}(\mathbf{p}) \,, \\
a^{\dagger}(\mathbf{p};\beta) &= \mathrm{e}^{iG_B(\beta)}\, a^{\dagger}(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-iG_B(\beta)} = \cosh\theta_{\mathbf{p}}(\beta)\, a^{\dagger}(\mathbf{p}) - \mathrm{senh}\theta_{\mathbf{p}}(\beta)\, \tilde{a}(\mathbf{p}) \,, \\
\tilde{a}(\mathbf{p};\beta) &= \mathrm{e}^{iG_B(\beta)}\, \tilde{a}(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-iG_B(\beta)} = \cosh\theta_{\mathbf{p}}(\beta)\, \tilde{a}(\mathbf{p}) - \mathrm{senh}\theta_{\mathbf{p}}(\beta)\, a^{\dagger}(\mathbf{p}) \,, \\
\tilde{a}^{\dagger}(\mathbf{p};\beta) &= \mathrm{e}^{iG_B(\beta)}\, \tilde{a}^{\dagger}(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-iG_B(\beta)} = \cosh\theta_{\mathbf{p}}(\beta)\, \tilde{a}^{\dagger}(\mathbf{p}) - \mathrm{senh}\theta_{\mathbf{p}}(\beta)\, a(\mathbf{p}) \,, \quad (2.88)
\end{aligned}
$$

que na forma matricial pode ser escrita como

$$
\begin{pmatrix} a(\mathbf{p};\beta) \\ \tilde{a}^{\dagger}(\mathbf{p};\beta) \end{pmatrix} = B_p(\beta) \begin{pmatrix} a(\mathbf{p}) \\ \tilde{a}^{\dagger}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \,, \tag{2.89}
$$

onde

$$
B_{\mathbf{p}}(\beta) = \begin{pmatrix} \cosh\theta_{\mathbf{p}}(\beta) & -\mathrm{senh}\theta_{\mathbf{p}}(\beta) \\ -\mathrm{senh}\theta_{\mathbf{p}}(\beta) & \cosh\theta_{\mathbf{p}}(\beta) \end{pmatrix} \,. \tag{2.90}
$$

Como um exemplo de aplicação de TFD ao campo de Klein-Gordon, apresentaremos a função de Green de dois pontos à temperatura finita, definida por

$$
\Delta_{\beta}^{\mu\nu}(x-y) = \langle 0(\beta)| T\{\Phi(x)\Phi^{\ddagger}(y)\} |0(\beta)\rangle \,, \tag{2.91}
$$

onde Φ e $\Phi^{\ddagger}$ são os dubletos dados, respectivamente, por (2.83) e (2.85). A transformada de Fourier desta função de Green térmica é definida como

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\beta}^{\mu\nu}(x-y) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p\, \mathrm{e}^{-ip\cdot(x-y)}\, \Delta_{\beta}^{\mu\nu}(p) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p\, \mathrm{e}^{-ip\cdot(x-y)}\, [B_{\mathbf{p}}^{-1}(\beta)\, \Delta_0(p)\, B_{\mathbf{p}}(\beta)]^{\mu\nu} \,. \quad (2.92)
\end{aligned}
$$

A função de Green correspondente ao dubleto à temperatura zero, ou seja, calculada no vácuo duplicado $|0\rangle\rangle$, é escrita como

$$\begin{aligned}
\Delta_0^{\mu\nu}(x-y) &= \langle\langle 0|T\{\Phi(x)\Phi^{\ddagger}(y)\}|0\rangle\rangle \\
&= \langle\langle 0| \begin{bmatrix} T\{\phi(x)\phi(y)\} & -T\{\phi(x)\tilde{\phi}(y)\} \\ T\{\tilde{\phi}(x)\phi(y)\} & -T\{\tilde{\phi}(x)\tilde{\phi}(y)\} \end{bmatrix} |0\rangle\rangle \\
&= \langle\langle 0| \begin{bmatrix} T\{\phi(x)\phi(y)\} & 0 \\ 0 & -T\{\tilde{\phi}(x)\tilde{\phi}(y)\} \end{bmatrix} |0\rangle\rangle \\
&= \begin{bmatrix} \langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle & 0 \\ 0 & -\langle\tilde{0}|T\{\tilde{\phi}(x)\tilde{\phi}(y)\}|\tilde{0}\rangle \end{bmatrix} .
\end{aligned} \tag{2.93}$$

Os elementos da diagonal secundária se anulam pois os operadores do campo dual e do campo original comutam, fazendo com que os operadores de aniquilação anulem no vácuo à direita e os de criação no vácuo à esquerda. Assim,

$$\Delta_0^{\mu\nu}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\, \mathrm{e}^{-ip\cdot(x-y)} \begin{bmatrix} \frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{-i}{p^2-m^2-i\varepsilon} \end{bmatrix} \tag{2.94}$$

e, portanto,

$$\Delta_\beta^{\mu\nu}(p) = B_{\mathbf{p}}^{-1}(\beta) \begin{bmatrix} \frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{-i}{p^2-m^2-i\varepsilon} \end{bmatrix} B_{\mathbf{p}}(\beta) . \tag{2.95}$$

Como pode ser visto na expressão (2.94), $\Delta_0^{22}(p)$ é a função de Green avançada à temperatura zero. Usando a definição (2.90) para a matriz de Bogoliubov $B_p(\beta)$, as componentes $\Delta_\beta^{\mu\nu}(p)$ serão

$$\begin{aligned}
\Delta_\beta^{11}(p) &= \frac{i}{p^2-m^2+i\varepsilon} + 2\pi\, n(\mathbf{p})\, \delta(p^2-m^2) , \\
\Delta_\beta^{22}(p) &= \frac{-i}{p^2-m^2-i\varepsilon} + 2\pi\, n(\mathbf{p})\, \delta(p^2-m^2) , \\
\Delta_\beta^{12}(p) &= \Delta_\beta^{21}(p) = 2\pi\, [n(\mathbf{p}) + n^2(\mathbf{p})]^{1/2}\, \delta(p^2-m^2) .
\end{aligned} \tag{2.96}$$

A função de Green que deve ser usada para tratar as propriedades do sistema bosônico térmico é a componente $\Delta_\beta^{11}(p)$, já que os operadores til não descrevem variáveis físicas. Os elementos da diagonal formam a função de Green introduzida no formalismo de Schwinger-Keldysh.

2.3.2 Campo de Dirac

Consideremos, agora, o campo fermiônico $\psi(x)$, que satisfaz a equação de Dirac

$$[i\,\gamma^\mu\partial_\mu - m]\ \psi(x) = 0 , \tag{2.97}$$

onde $\gamma^0 = \beta$ e $\gamma^i = \beta\alpha^i$ $(i = 1, 2, 3)$ são as matrizes 4x4 de Dirac. A solução desta equação, escrita em termos dos operadores de criação e aniquilação, é dada por

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \int d^3p \left(\frac{m}{E_p}\right)^{1/2} [b_s(\mathbf{p})\, u_s(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-ip\cdot x} + d_s^\dagger(\mathbf{p})\, v_s(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{ip\cdot x}] \ , \quad (2.98)$$

onde $u_s(\mathbf{p})$ e $v_s(\mathbf{p})$ são os espinores de Dirac, $\mathbf{p}$ é o trimomento dos modos criados por $b_s^\dagger(\mathbf{p})$ e $d_s^\dagger(\mathbf{p})$, e a soma é realizada sobre os estados de spin. Os operadores $b_s(\mathbf{p}), b_s^\dagger(\mathbf{p})$, associados ao espectro de freqüência positiva, correspondem à partícula e $d_s(\mathbf{p}), d_s^\dagger(\mathbf{p})$, associados ao espectro de freqüência negativa, à antipartícula.

O operador de campo conjugado a $\psi(x)$ é

$$\psi^\dagger(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \int d^3p \left(\frac{m}{E_p}\right)^{1/2} [b_s^\dagger(\mathbf{p})\, u_s^\dagger(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{ip\cdot x} + d_s(\mathbf{p})\, v_s^\dagger(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-ip\cdot x}] \ . \quad (2.99)$$

Com o objetivo de aplicar o formalismo de TFD [55], introduzimos os campos duais $\widetilde{\psi}(x)$ e $\widetilde{\psi}^\dagger(x)$, definidos por

$$\widetilde{\psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \int d^3p \left(\frac{m}{E_p}\right)^{1/2} [\tilde{b}_s(\mathbf{p})\, u_s^\dagger(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{ip\cdot x} + \tilde{d}_s^\dagger(\mathbf{p})\, v_s^\dagger(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-ip\cdot x}] \ , \quad (2.100)$$

e

$$\widetilde{\psi}^\dagger(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \int d^3p \left(\frac{m}{E_p}\right)^{1/2} [\tilde{b}_s^\dagger(\mathbf{p})\, u_s(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-ip\cdot x} + \tilde{d}_s(\mathbf{p})\, v_s(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{ip\cdot x}] \ . \quad (2.101)$$

Os operadores de campo e seus duais satisfazem as relações de anticomutação [13]

$$\begin{aligned} \left[\psi(x), \psi^\dagger(x')\right]_+ &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \ , \\ \left[\widetilde{\psi}(x), \widetilde{\psi}^\dagger(x')\right]_+ &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \ , \\ \left[\psi(x), \widetilde{\psi}^\dagger(x')\right]_+ &= 0 \ , \end{aligned} \quad (2.102)$$

desde que os operadores de criação e aniquilação de partícula e antipartícula satisfaçam a

$$\begin{aligned} \left[b_s(\mathbf{p}), b_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')\right]_+ &= [d_s(\mathbf{p}), d_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')]_+ = \delta_{ss'}\, \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \ , \\ \left[\tilde{b}_s(\mathbf{p}), \tilde{b}_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')\right]_+ &= [\tilde{d}_s(\mathbf{p}), \tilde{d}_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')]_+ = \delta_{ss'}\, \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \ , \end{aligned} \quad (2.103)$$

com os demais anticomutadores nulos.

O vácuo duplicado $|0\rangle\rangle$ é anulado pelos operadores de aniquilação $b_s(\mathbf{p})$, $d_s(\mathbf{p})$ $\tilde{b}_s(\mathbf{p})$, $\tilde{d}_s(\mathbf{p})$. A partir da transformação unitária

$$U_F(\beta) = \mathrm{e}^{iG_F(\beta)} = \mathrm{e}^{i[G^{(+)}(\beta) + G^{(-)}(\beta)]} \ , \quad (2.104)$$

onde

$$G^{(+)}(\beta) \;=\; i\sum_s \int d^3p\, \theta^{(+)}_{\mathbf{p}}(\beta)\, [\tilde{b}_s(\mathbf{p})b_s(\mathbf{p}) - b^\dagger_s(\mathbf{p})\tilde{b}^\dagger_s(\mathbf{p})] \;, \tag{2.105}$$

$$G^{(-)}(\beta) \;=\; i\sum_s \int d^3p\, \theta^{(-)}_{\mathbf{p}}(\beta)\, [\tilde{d}_s(\mathbf{p})d_s(\mathbf{p}) - d^\dagger_s(\mathbf{p})\tilde{d}^\dagger_s(\mathbf{p})] \;, \tag{2.106}$$

construimos o vácuo térmico

$$|0(\beta)\rangle = \mathrm{e}^{iG_F(\beta)}\,|0\rangle\!\rangle \;, \tag{2.107}$$

e as transformações de Bogoliubov

$$\begin{aligned}
b_s(\mathbf{p};\beta) &= \mathrm{e}^{iG_F(\beta)}\, b_s(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-iG_F(\beta)} = \mathrm{e}^{iG^{(+)}(\beta)}\, b_s(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-iG^{(+)}(\beta)} \\
&= \cos\theta^{(+)}_{\mathbf{p}}(\beta)\, a(\mathbf{p}) - \mathrm{sen}\theta^{(+)}_{\mathbf{p}}(\beta)\, \tilde{a}^\dagger(\mathbf{p}) \\
d_s(\mathbf{p};\beta) &= \mathrm{e}^{iG_F(\beta)}\, d_s(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-iG_F(\beta)} = \mathrm{e}^{iG^{(-)}(\beta)}\, d_s(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-iG^{(-)}(\beta)} \\
&= \cos\theta^{(-)}_{\mathbf{p}}(\beta)\, a^\dagger(\mathbf{p}) - \mathrm{sen}\theta^{(-)}_{\mathbf{p}}(\beta)\, \tilde{a}(\mathbf{p}) \\
\tilde{b}_s(\mathbf{p};\beta) &= \mathrm{e}^{iG_F(\beta)}\, \tilde{b}_s(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-iG_F(\beta)} = \mathrm{e}^{iG^{(+)}(\beta)}\, \tilde{b}_s(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-iG^{(+)}(\beta)} \\
&= \cos\theta^{(+)}_{\mathbf{p}}(\beta)\, \tilde{a}(\mathbf{p}) + \mathrm{sen}\theta^{(+)}_{\mathbf{p}}(\beta)\, a^\dagger(\mathbf{p}) \\
\tilde{d}_s(\mathbf{p};\beta) &= \mathrm{e}^{iG_F(\beta)}\, \tilde{d}_s(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-iG_F(\beta)} = \mathrm{e}^{iG^{(-)}(\beta)}\, \tilde{d}_s(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-iG^{(-)}(\beta)} \\
&= \cos\theta^{(-)}_{\mathbf{p}}(\beta)\, \tilde{a}^\dagger(\mathbf{p}) + \mathrm{sen}\theta^{(-)}_{\mathbf{p}}(\beta)\, a(\mathbf{p} \;,
\end{aligned} \tag{2.108}$$

podem ser escritas como

$$\begin{pmatrix} b_s(\mathbf{p};\beta) \\ \sigma_F\, \tilde{b}^\dagger_s(\mathbf{p};\beta) \end{pmatrix} = B^{(+)}_{\mathbf{p}}(\beta) \begin{pmatrix} b_s(\mathbf{p}) \\ \sigma_F\, \tilde{b}^\dagger_s(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \;, \tag{2.109}$$

$$\begin{pmatrix} d_s(\mathbf{p};\beta) \\ \sigma_F\, \tilde{d}^\dagger_s(\mathbf{p};\beta) \end{pmatrix} = B^{(-)}_{\mathbf{p}}(\beta) \begin{pmatrix} d_s(\mathbf{p}) \\ \sigma_F\, \tilde{d}^\dagger_s(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \;, \tag{2.110}$$

onde as matrizes de Bogoliubov

$$B^{(\pm)}_{\mathbf{p}}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\theta^{(\pm)}_{\mathbf{p}}(\beta) & -\mathrm{sen}\theta^{(\pm)}_{\mathbf{p}}(\beta) \\ \mathrm{sen}\theta^{(\pm)}_{\mathbf{p}}(\beta) & \cos\theta^{(\pm)}_{\mathbf{p}}(\beta) \end{pmatrix} \tag{2.111}$$

dependem da energia positiva $E_{\mathbf{p}} = +(\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$. Como vimos anteriormente, os parâmentros $\theta^{(+)}_{\mathbf{p}}(\beta)$ e $\theta^{(-)}_{\mathbf{p}}(\beta)$ são determinados de forma que as médias estatísticas dos operadores número

$$N^{(+)}_s(\mathbf{p}) = b^\dagger_s(\mathbf{p})\, b_s(\mathbf{p}) \qquad \text{e} \qquad N^{(-)}_s(\mathbf{p}) = d^\dagger_s(\mathbf{p})\, d_s(\mathbf{p}) \tag{2.112}$$

resultem, respectivamente, nas distribuições de Fermi-Dirac para partícula e antipartícula. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathrm{sen}\theta^{(\pm)}_{\mathbf{p}}(\beta) &= \sqrt{n^{(\pm)}(\mathbf{p})} = [\mathrm{e}^{\beta(E_{\mathbf{p}} \mp \mu)} + 1]^{1/2} \,, \\
\cos\theta^{(\pm)}_{\mathbf{p}}(\beta) &= \sqrt{1 - n^{(\pm)}(\mathbf{p})} = [\mathrm{e}^{-\beta(E_{\mathbf{p}} \mp \mu)} + 1]^{1/2} \,,
\end{aligned} \tag{2.113}$$

onde μ é o potencial químico.

Voltamos a chamar a atenção com relação à conjugação dos dubletos (às vezes chamada de transposição til). O fator σ que aparece na definição dos dubletos bosônico, (2.85), e fermiônico, (2.109) e (2.110), tem sido escolhido por alguns autores [24, 31] como sendo $\sigma_B = -1$, $\sigma_F = 1$ e por outros [15, 52] $\sigma_B = 1$, $\sigma_F = i$. Na construção da matriz de espalhamento para o campo de Dirac sujeito a um campo externo à temperatura finita que apresentaremos em capítulos posteriores, não assumiremos nenhum dos valores acima para σ_F, investigando-o a partir de exigências físicas.

Capítulo 3

O Campo de Dirac em Segunda Quantização

A seguir apresentaremos uma revisão da construção do espaço de Fock e do operador espalhamento na formulação de segunda quantização, propostas por Scharf et al [56].

3.1 Segunda Quantização no Espaço de Fock

Um sistema físico de uma partícula sem spin tem seus estados representados por funções $\varphi_1(\mathbf{x})$ de quadro integrável $(L^2(\mathbb{R}^3))$ pertencentes ao espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$. O estado de duas partículas é descrito pela função $\varphi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, tal que

$$\varphi_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathcal{H}_2 \,\hat{=}\, \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \ . \tag{3.1}$$

Assim, um conjunto de n partículas tem seu estado dado por um elemento φ_n do espaço de Hilbert $\mathcal{H}^{\otimes n}$, definido por

$$\varphi_n(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) \in \mathcal{H}^{\otimes n} \,\hat{=}\, \underbrace{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{H}_1}_{n\, vezes} \ . \tag{3.2}$$

Como partículas idênticas obedecem à estatística de Bose-Einstein ou Fermi-Dirac, as funções que representam estados físicos devem ser simetrizadas

$$S_n^+ \varphi_n = \frac{1}{n!} \sum_r \varphi_n(\mathbf{x}_{r_1}, ..., \mathbf{x}_{r_n}) \ , \tag{3.3}$$

quando se tratar de bósons, ou antissimetrizadas

$$S_n^- \varphi_n = \frac{1}{n!} \sum_r (-1)^r \varphi_n(\mathbf{x}_{r_1}, ..., \mathbf{x}_{r_n}) \ , \tag{3.4}$$

se forem férmions. As somas em (3.3) e (3.4) são realizadas nas r permutações das n partículas. Os operadores de (anti)simetrização $S_n^\pm$ possuem as propriedades

$$\begin{aligned} (S_n^\pm)^2 &= S_n^\pm \ , \\ (\psi_n, S_n^\pm \varphi_n) &= (S_n^\pm \psi_n, \varphi_n) \ , \end{aligned} \tag{3.5}$$

ou seja, são *operadores de projeção* no espaço de Hilbert de n partículas. Assim, os espaços físicos de n partículas serão representados pelos espaços de Hilbert (anti)simetrizados

$$\mathcal{H}_n^{\pm} = S_n^{\pm}\, \mathcal{H}^{\otimes n} . \tag{3.6}$$

O espaço de Fock contruído a partir dos espaços de Hilbert $\mathcal{H}_n^{\pm}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{\pm} &\hat{=} \oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n^{\pm} \\ &= (\mathcal{H}_0) \oplus (\mathcal{H}_1) \oplus (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1)_2^{\pm} \oplus ... \oplus (\mathcal{H}^{\oplus n})_n^{\pm} \oplus ... \ , \end{aligned} \tag{3.7}$$

descreve todos os estados de muitas partículas simultaneamente, onde

$$\mathcal{H}_0 = \{\alpha\, \Omega\} \ , \qquad (\alpha \in \mathbb{C}) \tag{3.8}$$

é um espaço unidimensional que contém o vácuo Ω. Cada elemento do espaço de Fock $\mathcal{F}$ é denotado por

$$\Phi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ...) \in \mathcal{F} \ , \tag{3.9}$$

com

$$\varphi_0 = \alpha\Omega \in \mathcal{H}_0 \ , \qquad \varphi_n \in \mathcal{H}_n^{\pm} \ . \tag{3.10}$$

O espaço de Fock $\mathcal{F}$ é o espaço de todos os estados de muitas partículas com norma finita, ou seja,

$$\parallel \Phi \parallel^2 \hat{=} (\Phi, \Phi) = \sum_n \parallel \varphi \parallel_n^2 < \infty \ , \tag{3.11}$$

onde definimos o *produto escalar* de dois elementos desse espaço como

$$(\Phi, \Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi_n, \psi_n)_n \tag{3.12}$$

sendo $(\ ,\ )_n$ é o produto escalar de vetores de $\mathcal{H}_n$.

O conjunto de operadores que atuam no espaço de Fock é constituído de operadores que conservam o número de partículas do estado, ou seja, o vetor de estado se mantém no mesmo setor do espaço de Fock, e também de operadores que mudam o número de partículas, passando o vetor de estado de um setor de Fock para outro. Podemos introduzir os operadores de criação (emissão) $a^{\dagger}(h)$ e aniquilação (absorção) $a(h)$ que atuam no espaço $\mathcal{F}$ mudando o número de partículas. Os *operadores de criação* $a^{\dagger}(h)$, definidos por

$$a^{\dagger}(h)\, \Omega = h \ , \tag{3.13}$$

$$\big(a^{\dagger}(h)\Phi\big)_n = \sqrt{n} S_n^{\pm}(h \otimes \varphi_{n-1}) \ , \qquad (n = 0, 1, 2, ...) \ . \tag{3.14}$$

criam partículas com "função de onda" $h \in \mathcal{H}_1$. O fator $\sqrt{n}$ faz com que os operadores de criação sejam não limitados para bósons. No entanto, para férmions estes são limitados,

$$\parallel a^\dagger(h)\Phi \parallel_n^2 \leq \parallel h \parallel_1^2 \parallel \Phi \parallel^2, \tag{3.15}$$

e definidos sobre todo $\mathcal{F}^-$, já que h são funções de quadro integrável e $\parallel \Phi \parallel^2 < \infty$. Associados aos operadores de criação, podemos definir os funcionais a valores de operadores $a^\dagger(\mathbf{x})$, chamados de *operadores de campo*, que realizam o mapeamento $h \rightarrow a^\dagger(h)$, expresso por

$$a^\dagger(h) = \int d^3x \, a^\dagger(\mathbf{x}) \, h(\mathbf{x}) \ . \tag{3.16}$$

No espaço dos momentos temos os operadores de campo, tais que

$$a^\dagger(h) = \int d^3k \, \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) \, \hat{h}(\mathbf{k}) \ , \tag{3.17}$$

onde o "chapéu" denota a transformada de Fourier.

Se consideramos os vetores h_j que formam uma base ortonormal completa de $\mathcal{H}_1$, e h_j^* seus conjugados, então as defini ções (3.16) e (3.17) podem ser escritas como o produto escalar complexo formal

$$a^\dagger(h_j) = (h_j^*(\mathbf{x}) \, , \, a^\dagger(\mathbf{x})) = (\hat{h}_j^*(\mathbf{k}) \, , \, \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})) \ . \tag{3.18}$$

Como estas expressões têm a mesma forma de coeficientes de Fourier, podemos representar os operadores de campo pelas somas formais

$$a^\dagger(\mathbf{x}) \ = \ \sum_j a^\dagger(h_j) \, h_j^*(\mathbf{x}) = \sum_j a^\dagger(h_j^*) \, h_j(\mathbf{x}) \ , \tag{3.19}$$

$$\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) \ = \ \sum_j \hat{a}^\dagger(\hat{h}_j) \, \hat{h}_j^*(\mathbf{k}) = \sum_j \hat{a}^\dagger(\hat{h}_j^*) \, \hat{h}_j(\mathbf{k}) \ , \tag{3.20}$$

as quais são independentes da base h_j.

O *operador de aniquilação* $a(h)$, definido como

$$\left(a(h)\Phi\right)_n(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) \ = \ \sqrt{n+1} \int d^3x \ h^*(\mathbf{x}) \, \varphi_{n+1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) \ , \qquad (n \ = \ 0, 1, 2, ...) \tag{3.21}$$

destrói uma partícula de função de onda h, onde estamos assumindo que $\mathcal{H}_1 = L^2(\mathbb{R}^3)$. Sobre o vácuo definimos

$$a(h)\Omega = 0 \ , \qquad \forall h \in \mathcal{H}_1 \ . \tag{3.22}$$

Pela expressão (3.21), vemos que $a(h)$ é antilinear em h. Usando as definições para os operadores de criação (3.14) e de destruição(3.21) podemos mostrar que

$$(\Psi \, , \, a(h)\Phi) = \left(a^\dagger(h) \, \Psi \, , \Phi\right) \ , \tag{3.23}$$

ou seja, o operador de criação $a^\dagger(h)$ é o adjunto do operador de aniquilação $a(h)$. Assim, os operadores de campo correspondentes ao operador de aniquilação (3.21) são tais que

$$\begin{aligned} a(h) &= \int d^3x\, h^*(\mathbf{x})\, a(\mathbf{x}) = \int d^3k\, \hat{h}^*(\mathbf{k})\, \hat{a}(\mathbf{k}) \ , & (3.24) \\ a(\mathbf{x}) &= \sum_j h_j(\mathbf{x})\, a(h_j) = \sum_j h_j^*(\mathbf{x})\, a(h_j^*) \ , & (3.25) \\ \hat{a}(\mathbf{k}) &= \sum_j \hat{h}_j(\mathbf{k})\, \hat{a}(\hat{h}_j) = \sum_j \hat{h}_j^*(\mathbf{k})\, \hat{a}(\hat{h}_j^*) \ . & (3.26) \end{aligned}$$

A propriedade de irredutibilidade da representação de Fock permite que qualquer operador (limitado) que atua no espaço de Fock $\mathcal{F}$ possa ser expresso em termos dos operadores de criação e aniquilação definidos acima. Podemos definir o operador $\underline{\mathbf{N}}$ em termos dos operadores de criação e aniquilação,

$$\underline{\mathbf{N}} = \int d^3x\, a^\dagger(\mathbf{x})\, a(\mathbf{x}) = \sum_j a^\dagger(h_j)\, a(h_j) \ , \tag{3.27}$$

que atuando num estado de Fock,

$$(\underline{\mathbf{N}}\Phi)_n = n\, S_n^\pm\, \varphi_n(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) = n\ (\Phi)_n \ , \tag{3.28}$$

não muda seu número de partículas. Em (3.28), $(\ )_n$ representa a n-ésima componente de um vetor no espaço de Fock. Por ter a propriedade de determinar o número de partículas do estado é chamado de *operador número*. Ele é um operador autoadjunto positivo não limitado, com domínio

$$\mathrm{D}(\underline{\mathbf{N}}) = \{\Phi \in \mathcal{F}\ \mid \sum_n n^2\, \|\varphi_n\|_n^2 = \|\underline{\mathbf{N}}\Phi\|^2 < \infty\} \ , \tag{3.29}$$

e todos os operadores $\underline{\mathbf{A}}$ que comutam com ele, não mudam o número de partículas dos estados.

De forma análoga, qualquer operador $A(\mathbf{x})$ de uma partícula, limitado no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$, é promovido a operador no espaço de Fock segundo a fórmula

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{A}} &= \int d^3x\, a^\dagger(\mathbf{x})\, A(\mathbf{x})\, a(\mathbf{x}) \\ &\hat{=} \sum_{jk} (h_j\,,\, A(\mathbf{x})\, h_k)\, a^\dagger(h_j)\, a(h_k) \ , & (3.30) \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} (\underline{\mathbf{A}}\, \Phi)_n &= n\, S_n^\pm\, A(\mathbf{x}_1)\, \varphi_n(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) \\ &= \sum_{m=1}^n A(\mathbf{x}_m)\, \varphi_n(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) \ , & (3.31) \end{aligned}$$

Supondo que o operador $A(\mathbf{x})$ seja limitado sobre $\mathcal{H}_1$, então

$$\| (\underline{\mathbf{A}}\,\Phi)_n \|_n \leq \sum_{m=1}^{n} \| A \|_1 \| \varphi_n \|_n = n \| A \|_1 \| \varphi_n \|_n \tag{3.32}$$

e

$$\begin{aligned} \|\underline{\mathbf{A}}\,\Phi\|_n^2 &= \| \underline{\mathbf{A}}\,\Phi \|_n \| \underline{\mathbf{A}}\,\Phi \|_n \leq \sum_n n^2 \| A \|_1^2 \| \varphi_n \|_n^2 = \\ &= \| A \|_1^2 \sum_n n^2 \| \varphi_n \|_n^2 \\ &= \| A \|_1^2 \| \underline{\mathbf{N}}\Phi \|^2 \ . \end{aligned}$$

Portanto, o domínio de $\underline{\mathbf{A}}$ contém o domínio do operador número de partículas,

$$\mathrm{D}\,(\underline{\mathbf{A}}) \supseteq D\,(\underline{\mathbf{N}}) \ , \tag{3.33}$$

que é um conjunto denso. Isto significa que $\underline{\mathbf{A}}$ é um operador compacto, ou seja, está na classe de Hilbert-Schmidt.

Estas definições podem ser estendidas a operadores de muitas partículas. Por exemplo, um operador de duas partículas fica definido como

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{V}} &= \int d^3x\, d^3x'\, a^\dagger(\mathbf{x}')\, a^\dagger(\mathbf{x})\, V(\mathbf{x},\mathbf{x}')\, a(\mathbf{x})\, a(\mathbf{x}') \\ &\hat{=} \sum_{jkj'k'} (h_j h_k \,,\, V(\mathbf{x})\, h_{k'} h_{j'})\, a^\dagger(h_j)\, a^\dagger(h_k)\, a(h_{k'})\, a(h_{j'}) \ . \end{aligned} \tag{3.34}$$

As expressões (3.30) e (3.34) são formalmente semelhantes aos elementos de matriz da mecânica quântica e se apresentam na forma *normalmente ordenada*, na qual os operadores de aniquilação aparecem à direita dos operadores de criação. Portanto, o valor esperado no vácuo dos operadores $\underline{\mathbf{A}}$ e $\underline{\mathbf{V}}$ é zero.

Os operadores de criação e aniquilação possuem a propriedade de satisfazerem a álgebra (anti)comutante. A partir das definições (3.14) e (3.21), obtemos as relações de comutação

$$\begin{aligned} [a(h_1)\,,\, a^\dagger(h_2)]\,\Phi &= (h_1,h_2)_1\Phi \ , \\ [a^\dagger(h_1)\,,\, a^\dagger(h_2)]\,\Phi &= 0 = [a(h_1)\,,\, a(h_2)]\,\Phi \ , \end{aligned} \tag{3.35}$$

para o caso de bósons, e de anticomutação

$$\begin{aligned} \{a(h_1)\,,\, a^\dagger(h_2)\}\,\Phi &= (h_1,h_2)_1\Phi \ , \\ \{a^\dagger(h_1)\,,\, a^\dagger(h_2)\}\,\Phi &= 0 = \{a(h_1)\,,\, a(h_2)\}\,\Phi \ , \end{aligned} \tag{3.36}$$

para férmions, onde Φ deve estar no domínio do lado esquerdo das equações (3.35) e (3.36). Podemos ver da expressão (3.36) que não é possível criar duas partículas fermiônicas num mesmo estado, ou seja, férmions obedecem ao princípio de Pauli. As equações (3.35) e (3.36) são equivalentes às relações

$$
\begin{aligned}
[a(\mathbf{x}_1)\,,\, a^\dagger(\mathbf{x}_2)]_\pm &= \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\,, \\
[\hat{a}(\mathbf{k}_1)\,,\, \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_2)]_\pm &= \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\,,
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

para os operadores de campo. É importante mencionar que qualquer representação irredutível de (3.35) e (3.36), com o vácuo definido por (3.22), é equivalente à representação de Fock construída acima, ou seja, assumindo a irredutibilidade da representação de Fock, podemos mostrar que existe uma equivalência unitária entre o espaço dos vetores $\mathcal{H}_n$ e o setor de n partículas do espaço de Fock $\mathcal{F}$. De fato, se consideramos o vácuo Ω, (3.22), o espaço de Fock é gerado pela base

$$
\mathcal{F}_0 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n!}} \prod_{j=1}^{n} a^\dagger(h_j)\,\Omega \mid \forall\, n, h_j \right\} \;, \tag{3.38}
$$

onde o conjunto $\{h_j\}$ forma uma base do espaço de Hilbert de uma partícula, $\mathcal{H}_1$. O setor de uma partícula $(\,\Phi)_1$ do espaço de Fock pode ser gerado por

$$
\frac{1}{\sqrt{1!}} a^\dagger(h)\,\Omega \;, \qquad h \in \mathcal{H}_1 \;. \tag{3.39}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
\big(a^\dagger(h_1)\,\Omega\,,\, a^\dagger(h_2)\,\Omega\big) &= \big(\Omega\,,\, a(h_1)\,a^\dagger(h_2)\,\Omega\big) \\
&= \big(\Omega\,,\, [(h_1,h_2) \pm a^\dagger(h_2)\,a(h_1)]\,\Omega\big) \\
&= (h_1,h_2)\;,
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

então o vetor do espaço de Fock $a^\dagger(h)\,\Omega$, (3.39), é unitariamente equivalente ao vetor h do espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$. De forma análoga,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2!}\big(a^\dagger(h_1)\,a^\dagger(h_2)\,\Omega\,,\, a^\dagger(h_1')\,a^\dagger(h_2')\,\Omega\big) &= \frac{1}{2!}\big(S_2^\pm(h_1\otimes h_2)\,,\, S_2^\pm(h_1'\otimes h_2')\big) \\
&= (\varphi_2, \varphi_2')
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

descreve a equivalência unitária para o setor de duas partículas, onde $\varphi_2, \varphi_2' \in \mathcal{H}_2$. Mais genericamente, os vetores

$$
\big(a^\dagger(h)\Phi\big)_n \quad \text{correspondem a} \quad \sqrt{n} S_2^\pm(h\otimes\varphi_{n-1}) \;. \tag{3.42}
$$

Esta equivalência nos permitirá descrever a evolução temporal no espaço de Fock a partir da dinâmica de uma partícula no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$, como apresentaremos a seguir.

3.2 Evolução Temporal no Espaço de Fock

A dinâmica de uma partícula no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$ é dada pela equação de Schrödinger

$$i\frac{dh}{dt} = H\,h\ , \qquad\qquad (\hbar = 1)\ , \tag{3.43}$$

cuja solução é a transformação unitária

$$h(t) = \mathrm{e}^{-iHt}h(0) \hat{=} U\,h\ , \tag{3.44}$$

onde $h \in \mathcal{H}_1$. Tomando as funções dependentes do tempo $h(t)$ para funções teste dos operadores no espaço de Fock, teremos

$$\begin{aligned} a^\dagger(h(t))\Phi &= a^\dagger(Uh)\Phi\ , \\ a(h(t))\Phi &= a(Uh)\Phi\ . \end{aligned} \tag{3.45}$$

Como o espaço de Fock é composto por todos os espaços de Hilbert de n partículas, é conveniente definir o operador unitário $\underline{\mathbf{U}}$, tal que

$$\begin{aligned} (\underline{\mathbf{U}}\,\Phi)_n &\hat{=} (\otimes_{j=1}^n U)\,\varphi_n \\ &= S_n^\pm(Uh_1 \otimes Uh_2 \otimes ... \otimes Uh_n)\ , \end{aligned} \tag{3.46}$$

onde

$$\varphi_n \hat{=} S_n^\pm(h_1 \otimes ... \otimes h_n)\,, \tag{3.47}$$

o qual mantém o vácuo invariante

$$\underline{\mathbf{U}}\,\Omega = \Omega\ . \tag{3.48}$$

Desta forma, a evolução temporal dos operadores de Fock fica escrita como

$$a^\dagger(h(t)) = a^\dagger(Uh) = \underline{\mathbf{U}}\,a^\dagger(h)\,\underline{\mathbf{U}}^{-1} = a_t^\dagger(h)\ , \tag{3.49}$$

$$a(h(t)) = a(Uh) = \underline{\mathbf{U}}\,a(h)\,\underline{\mathbf{U}}^{-1} = a_t(h)\ . \tag{3.50}$$

O operador $\underline{\mathbf{U}}$ no espaço de Fock é conhecido como a segunda quantização do operador U no espaço de Hilbert. Derivando a equação (3.46) com relação ao tempo obtemos

$$i\frac{d}{dt}\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{H}}\,\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{U}}\,\underline{\mathbf{H}}\ , \tag{3.51}$$

onde $\underline{\mathbf{H}}$ é tal que

$$\begin{aligned} (\underline{\mathbf{H}}\,\Phi)_n &= \sum_{j=1}^n (1 \otimes ... \otimes H_{(j)} \otimes ... \otimes 1)\,\varphi_n \\ &= \sum_{j=1}^n H(x_j)\,\varphi_n(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)\ . \end{aligned} \tag{3.52}$$

De acordo com (3.30), o operador $\underline{\mathbf{H}}$ pode ser escrito como

$$\underline{\mathbf{H}} \hat{=} \sum_{jk} (h_j\,,\, H(x)\, h_k)\, a^\dagger(h_j)\, a(h_k)\ . \tag{3.53}$$

Esta é a representação em segunda quantização do operador hamiltoniano $H(\mathbf{x})$, que se apresenta como um produto normal. Assim, o valor esperado no vácuo do operador hamiltoniano $\underline{\mathbf{H}}$ é zero. Isto significa que a energia do vácuo Ω não está sendo considerada.

A solução da equação (3.51) é a transformação unitária

$$\underline{\mathbf{U}} = \mathrm{e}^{-i\underline{\mathbf{H}}t}\,, \tag{3.54}$$

que leva as equações de evolução (3.49) e (3.50) a

$$\begin{aligned} a_t^\dagger(h) &= \mathrm{e}^{-i\underline{\mathbf{H}}t}\, a^\dagger(h)\, \mathrm{e}^{i\underline{\mathbf{H}}t}\,, \\ a_t(h)r &= \mathrm{e}^{-i\underline{\mathbf{H}}t}\, a(h)\, \mathrm{e}^{i\underline{\mathbf{H}}t}\,. \end{aligned} \tag{3.55}$$

As equações de movimento para os operadores $a_t^\dagger(h)$ são obtidas pela diferenciação da equação (3.49) em relação ao tempo, resultando em

$$i\,\frac{d}{dt} a_t^\dagger(h) = [\underline{\mathbf{H}}\,,\, a_t^\dagger(h)]_-\ , \tag{3.56}$$

que são conhecidas como equações de Heisenberg. Neste caso, os estados (espaço de Fock) se mantém constantes e as observáveis (operadores de Fock) evoluem com o tempo.

Neste formalismo, os processos físicos são avaliados através do valor esperado dos operadores (observáveis) no espaço de Fock, ou seja,

$$\langle \underline{\mathbf{A}} \rangle_\Phi = (\Phi, \underline{\mathbf{A}}\, \Phi)\ . \tag{3.57}$$

Seguindo no propósito de descrever a dinâmica do campo de Dirac na formulação de matriz espalhamento no espaço de Fock, na próxima seção apresentaremos o método de segunda quantização, descrito acima, aplicado ao campo de Dirac.

3.3 Campo de Dirac

O campo de Dirac* descreve partículas fermiônicas, que são representadas pela função de onda espinorial

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_1\ , \tag{3.58}$$

*Vide *Apêndice B1.*

com o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1 = (L^2(\mathbb{R}^3))^4$, sobre o qual definimos o produto escalar

$$
\begin{aligned}
(h, h') &= \sum_r \int d^3x \, h_r^*(\mathbf{x}) \, h_r'(\mathbf{x}) \qquad (r = 1, ..., 4) \\
&= (h'^\dagger, h^\dagger) \; . \qquad (3.59)
\end{aligned}
$$

Os operadores de aniquilação, de acordo com (3.24), são dados por

$$
a(h) = \int d^3x \, h^\dagger(\mathbf{x}) \, a(\mathbf{x}) \; , \qquad (3.60)
$$

sendo o operador de campo espinorial $a(\mathbf{x})$ uma matriz coluna 4×1. Os operadores de criação (3.16) são

$$
a^\dagger(h) = \int d^3x \, a^\dagger(\mathbf{x}) \, h(\mathbf{x}) \; . \qquad (3.61)
$$

Como podemos ver, $a^\dagger(h)$ é linear em h, enquanto $a(h)$ é antilinear.

A dinâmica de uma partícula em um campo eletromagnético externo independente do tempo é dada pela equação de movimento (3.43) com o operador hamiltoniano no espaço das coordenadas definido por

$$
\begin{aligned}
H &= H_0 + H_1 \\
&= (\beta m - i \, \vec{\alpha} \cdot \nabla) + e(V - \vec{\alpha} \cdot \mathbf{A})(\mathbf{x}) \; ,
\end{aligned}
$$

onde adotamos $\hbar$ = c = 1. Este operador possui um espectro cujo domínio é $(-\infty, +\infty)$, e pode ser decomposto em um subespaço de energia positiva e outro de energia negativa. A projeção em cada subespaço pode ser realizada pelos *operadores de projeção* $P_\pm$, que possuem as propriedades

$$
\begin{aligned}
(P_+) + (P_-) &= 1 \; , \qquad (3.62) \\
(P_+) \, (P_-) &= 0 \; . \qquad (3.63)
\end{aligned}
$$

Assim, o espaço de Hilbert dos estados de uma partícula poderá ser decomposto nos subespaços $\mathcal{H}_+$ e $\mathcal{H}_-$, tal que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}_1 &= P_+\mathcal{H}_1 \oplus P_-\mathcal{H}_1 \\
&= \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \; . \qquad (3.64)
\end{aligned}
$$

Esta decomposição espectral pode ser levada aos operadores de criação e aniquilação, resultando em

$$
\begin{aligned}
a^\dagger(h) &= b^\dagger(P_+h) + d^\dagger(P_-h) = b^\dagger(h_+) + d^\dagger(h_-) \; , \\
a(h) &= b(P_+h) + d(P_-h) = b(h_+) + d(h_-) \; , \qquad (3.65)
\end{aligned}
$$

estando b e $b^\dagger$ associados ao espectro positivo de H, e d e $d^\dagger$ ao espectro negativo, onde estamos assumindo

$$b(h_-) = 0 = d(h_+) \tag{3.66}$$

e denotando $h_\pm = P_\pm h \in \mathcal{H}_\pm$. Como $\mathcal{H}_\pm$ são subespaços invariantes com respeito a H, o operador hamiltoniano no espaço de Fock (3.53) corresponderá a

$$\underline{\mathbf{H}}' = \sum_{jk}[(f_j\,,\, H\, f_k)\, b^\dagger(f_j)\, b(f_k) + (g_j\,,\, H\, g_k)\, d^\dagger(g_j)\, d(g_k)]\ , \tag{3.67}$$

onde f_j é uma base em $\mathcal{H}_+$ e g_j uma base em $\mathcal{H}_-$. No entanto, tal prescrição leva a um operador hamiltoniano $\underline{\mathbf{H}}'$ no espaço Fock não limitado por baixo, uma vez que o operador hamiltoniano para o setor de uma partícula $(\underline{\mathbf{H}})_1$ coincide com H em $\mathcal{H}_1$. Para escrever operadores hamiltonianos limitados, trocamos os papéis dos operadores $d^\dagger$ e d, trocando simultaneamente a dependência em h, ou seja,

$$\begin{aligned} d^\dagger(h_-) &\rightarrow d(h_-^\dagger)\ , \\ d(h_-) &\rightarrow d^\dagger(h_-^\dagger)\ , \end{aligned} \tag{3.68}$$

garantindo que a linearidade de $a^\dagger(h)$ e a antilinearidade de $a(h)$ com respeito a h sejam mantidas. Portanto, pelas definições (3.60) e (3.61), teremos

$$\begin{aligned} d^\dagger(h_-^\dagger) &= \int d^3x\, h_-^\dagger(\mathbf{x})\, d^\dagger(\mathbf{x})\ , \\ d(h_-^\dagger) &= \int d^3x\, h_-(\mathbf{x})\, d(\mathbf{x})\ , \end{aligned} \tag{3.69}$$

ou seja, $d^\dagger$ passa a ser antilinear em h e d torna-se linear. Os operadores $b, b^\dagger$ ficam definidos como em (3.60) e (3.61), ou seja,

$$\begin{aligned} b(h) &= \int d^3x\, h^\dagger(\mathbf{x})\, b(\mathbf{x})\ , \\ b^\dagger(h) &= \int d^3x\, b^\dagger(\mathbf{x})\, h(\mathbf{x})\ . \end{aligned} \tag{3.70}$$

Após implementar tal substituição, as expressões (3.65) ficam reescritas como

$$\begin{aligned} \psi^\dagger(h) &= b^\dagger(h_+) + d(h_-)\ , \\ \psi(h) &= b(h_+) + d^\dagger(h_-)\ . \end{aligned} \tag{3.71}$$

Nesta nova notação, por simplicidade, omitiremos o adjunto na função teste h dos operadores d e $d^\dagger$, deixando implícita a dependência antilinear de $d^\dagger$ com relação a h e a dependência linear de d com h. Estas últimas expressões definem o campo de

Dirac na formulação de segunda quantização. Em concordância com as relações de anticomutação (3.36), os operadores ψ, $\psi^\dagger$ obedecem às relações

$$\begin{aligned} \{\psi(h)\,,\,\psi^\dagger(h')\} &= (h,h')\;, \\ \{\psi(h)\,,\,\psi(h')\} &= 0\;, \end{aligned} \tag{3.72}$$

e, consequentemente, os operadores de Fermi devem satisfazer as relações de anticomutação

$$\begin{aligned} \{b(h)\,,\,b^\dagger(h')\} &= (h_+\,,\,h'_+)\;, \quad \{b(h)\,,\,b(h')\} = 0\;, \\ \{d(h)\,,\,d^\dagger(h')\} &= (h'_-\,,\,h_-)\;, \quad \{d(h)\,,\,d(h')\} = 0\;, \end{aligned} \tag{3.73}$$

e as demais nulas. Analogamente a (3.60) e (3.61), podemos introduzir os operadores de campo

$$\begin{aligned} \psi(h) &= \int d^3x\, h^\dagger(\mathbf{x})\,\psi(\mathbf{x})\;, \\ \psi^\dagger(h) &= \int d^3x\, \psi^\dagger(\mathbf{x})\,h(\mathbf{x})\;, \end{aligned} \tag{3.74}$$

cuja evolução temporal, conforme (3.55), é dada por

$$\psi_t^\dagger(h) \,\hat{=}\, \psi^\dagger(\mathrm{e}^{iHt}h) = \mathrm{e}^{i\underline{\mathbf{H}}t}\,\psi^\dagger(h)\;\; \mathrm{e}^{-i\underline{\mathbf{H}}t}\;, \tag{3.75}$$

onde agora tomamos como funções teste $h(-t)$, o que corresponde a permutar os rótulos de partícula e antipartícula na densidade lagrangiana simetrizada, a qual é invariante CPT.

Trocando as definições (3.65) por (3.71), o operador hamiltoniano no espaço de Fock fica reescrito como

$$\underline{\mathbf{H}} = \sum_{jk} \Big[(f_j, H(\mathbf{x}) f_k) b^\dagger(f_j) b(f_k) - (g_j^\dagger, H(\mathbf{x}) g_k^\dagger) d^\dagger(g_k) d(g_j) \Big]\;, \tag{3.76}$$

a menos de uma constante aditiva $c \in \mathbb{C}$, que não contribuirá na evolução de $\psi_t^\dagger(h)$, (3.75). Já que

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{H}} \;\; | \;\; {}_{P_+\mathcal{H}_1} &= H\,|_{P_+\mathcal{H}_1} \geq 0\;, \\ \underline{\mathbf{H}} \;\; | \;\; {}_{P_-\mathcal{H}_1} &= -H\,|_{P_-\mathcal{H}_1} \geq 0\;, \end{aligned} \tag{3.77}$$

o hamiltoniano (3.76) é limitado inferiormente. Ele se apresenta na forma de um produto normalmente ordenado

$$\underline{\mathbf{H}} = \int d^3x\, {:}\psi^\dagger(\mathbf{x})\, H(\mathbf{x})\, \psi(\mathbf{x}){:} \tag{3.78}$$

que estamos denotando por : :.

Apesar da mudança (3.68) não modificar a estrutura algébrica da teoria, o vácuo que foi definido por

$$b(h)\,\Omega = 0 \;, \qquad d(h)\,\Omega = 0 \;, \qquad \forall\, h \in \mathcal{H}_1 \tag{3.79}$$

será modificado. O vácuo passa a ser definido por

$$\underline{\mathbf{H}}\,\Omega = 0 \;. \tag{3.80}$$

Derivando a expressão (3.75) com relação ao tempo, obtemos a equação de movimento de Heisenberg

$$i\frac{d}{dt}\psi_t^\dagger(h) = [\psi_t^\dagger(h)\,,\,\underline{\mathbf{H}}] \;. \tag{3.81}$$

Devido a esta equação, os operadores $\psi_t(h)$ são chamados de operadores de campo de Heisenberg.

A interpretação de partícula e antipartícula poderá ser obtida pela investigação da carga associada aos operadores b e d . O operador de carga no espaço de Fock é definido por

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{Q}} &= e\int d^3x \,{:}\psi^\dagger(x)\psi(x){:} \\ &= e\sum_j [b^\dagger(f_j)b(f_j) - d^\dagger(g_j)d(g_j)] \;. \end{aligned}$$

O sinal menos no segundo termo desta expressão indica que os operadores $d^\dagger, d$ estão associados às antipartículas. Portanto, nos referimos a $b^\dagger$ e b como operadores, respectivamente, de criação e aniquilação de elétrons, e a $d^\dagger$ e d como operadores de criação e aniquilação de pósitrons.

Segundo a definição dos operadores de campo no espaço das coordenadas, (3.25), e a decomposição (3.71), o campo de Dirac livre fica escrito como

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &= \sum_j [\psi(f_j)\, f_j(\mathbf{x}) + \psi(g_j)\, g_j(\mathbf{x})] \\ &= \sum_j [b(f_j)\, f_j(\mathbf{x}) + d^\dagger(g_j)\, g_j(\mathbf{x})] \;, \end{aligned} \tag{3.82}$$

com

$$f_j = \mathrm{P}_+\, h_j \in \mathcal{H}_+ \;, \qquad g_j = \mathrm{P}_-\, f_j \in \mathcal{H}_- \;, \tag{3.83}$$

sendo $h_j = \{f_j, g_j\}$ um conjunto ortonormal completo que forma uma base de $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$.

Considerando o caso particular da dinâmica do campo de Dirac livre[†], temos, de acordo com (B.28), que a função de onda de uma partícula é

$$h(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \sum_s \int d^3p \, [h_{s+}(\mathbf{p}) \, u_s(\mathbf{p}) \, \mathrm{e}^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + h_{s-}(\mathbf{p}) \, v_s(\mathbf{p}) \, \mathrm{e}^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}] \; , \tag{3.84}$$

onde definimos

$$\begin{aligned} h_{s+}(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2} u_s^\dagger(\mathbf{p}) \, \hat{h}(\mathbf{p}) \equiv f_s(\mathbf{p}) \; , \\ h_{s-}(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2} v_s^\dagger(\mathbf{p}) \, \hat{h}(-\mathbf{p}) \equiv g_s(\mathbf{p}) \; . \end{aligned} \tag{3.85}$$

O circunflexo denota a transformada de Fourier ordinária

$$h_j(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \, \hat{h}_j(\mathbf{p}) \, \mathrm{e}^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \, , \tag{3.86}$$

e os espinores $u_s(\mathbf{p})$ e $v_s(-\mathbf{p})$ satisfazem as relações de ortogonalidade

$$\begin{aligned} u_s^\dagger(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) &= 1 = v_s^\dagger(-\mathbf{p}) v_s(-\mathbf{p}) \\ u_s^\dagger(\mathbf{p}) v_s(-\mathbf{p}) &= 0 \; . \end{aligned}$$

Usando as definições (3.85), podemos introduzir os operadores de campo na representação dos momentos

$$\begin{aligned} \sum_j f_{js}(\mathbf{p}) \, b(f_j) &= \sum_j \frac{1}{2} u_s^\dagger(\mathbf{p}) \, f_j(\mathbf{p}) \, b(f_j) \hat{=} u_s^\dagger(\mathbf{p}) \, \hat{b}(\mathbf{p}) \\ &\hat{=} b_s(\mathbf{p}) \; , \\ \sum_j d^\dagger(g_j) \, g_{js}(\mathbf{p}) &= \sum_j d^\dagger(g_j) \, \frac{1}{2} v_s^\dagger(\mathbf{p}) \, g_j(-\mathbf{p}) \hat{=} v_s^\dagger(\mathbf{p}) \, \hat{d}^\dagger(-\mathbf{p}) \\ &\hat{=} d_s^\dagger(\mathbf{p}) \; , \end{aligned} \tag{3.87}$$

que satisfazem as relações de anticomutação

$$\begin{aligned} \{b_s(\mathbf{p}) \, , \, b_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')\} &= \sum_j (f_j, f_k) \, f_{js}(\mathbf{p}) \, f_{ks'}^\dagger(\mathbf{p}') \\ &= \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \, \delta_{ss'} \; , \\ \{d_s(\mathbf{p}) \, , \, d_{s'}^\dagger(\mathbf{p}')\} &= \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \, \delta_{ss'} \; . \end{aligned} \tag{3.88}$$

O campo de Dirac livre, descrito pelo operador hamiltoniano

$$H \equiv H_0 = \beta m - i \, \vec{\alpha} \cdot \nabla \; , \tag{3.89}$$

[†]Vide *Apêndice B1.*

tem sua evolução temporal dada pelo operador de campo dependente do tempo $\psi(x)\hat{=}\psi_t(\mathbf{x})$. De (3.75) segue que

$$\begin{aligned}
\psi(x) &\hat{=} \psi^{(-)}(x) + \psi^{(+)}(x) \\
&= \sum_j [\psi_t(f_j)\, f_j(\mathbf{x}) + \psi_t(g_j)\, g_j(\mathbf{x})] \\
&= \sum_j [b_t(f_j)\, f_j(\mathbf{x}) + d_t^\dagger(g_j)\, g_j(\mathbf{x})] \\
&= \sum_j [b(P_+ \mathrm{e}^{iH_0 t} f_j)\, f_j(\mathbf{x}) + d^\dagger(P_- \mathrm{e}^{iH_0 t} g_j)\, g_j(\mathbf{x})] \\
&= \sum_s \sum_j \int d^3p\, [(P_+ \mathrm{e}^{iH_0 t} f_j)_s^\dagger(\mathbf{p})\, b_s(\mathbf{p})\, f_j(\mathbf{x}) + \\
&\quad + (P_- \, \mathrm{e}^{iH_0 t}\, g_j)_s^\dagger(\mathbf{p})\, d_s^\dagger(\mathbf{p})\, g_j(\mathbf{x})] \\
&= (2\pi)^{-3/2} \sum_s \int d^3p\, [u_s(\mathbf{p})\, b_s(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-ip\cdot x} + v_s(\mathbf{p})\, d_s^\dagger(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{ip\cdot x}] \ , \qquad (3.90)
\end{aligned}$$

onde usamos as definições (3.69), (3.70) para os operadores $d^\dagger(h)$, $b(h)$ e a transformada de Fourier (3.86). A expressão (3.90) tem a mesma forma da solução geral da equação de Dirac, com o primeiro termo $\psi^{(-)}(x)$ contendo o operador de aniquilação de elétron e o segundo termo, $\psi^{(+)}(x)$, o operador de criação de pósitron. O campo adjunto de Dirac é obtido de (3.90) como

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}(x) &\hat{=} \psi^\dagger(x)\, \gamma^0 = \overline{\psi}^{(+)}(x) + \overline{\psi}^{(-)}(x) \\
&= (2\pi)^{-3/2} \sum_s \int d^3p\, [b_s^\dagger(\mathbf{p})\, \overline{u}_s(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{ip\cdot x} + d_s(\mathbf{p})\, \overline{v}_s(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-ip\cdot x}] \ , \qquad (3.91)
\end{aligned}$$

onde denotamos $\overline{u}(\mathbf{p}) = u^\dagger(\mathbf{p})\gamma^0$ e $\overline{v}(\mathbf{p}) = v^\dagger(\mathbf{p})\gamma^0$.

As relações de anticomutação básicas para o campo de Dirac livre para tempos arbitrários podem ser calculadas a partir das expressões (3.90) e (3.91) para os campos $\psi(x)$ e $\overline{\psi}(x)$, respectivamente, usando as relações de anticomutação (3.88), resultando em‡

$$\begin{aligned}
\{\psi(x)\, ,\, \overline{\psi}(y)\} &= \{\psi^{(+)}(x)\, ,\, \overline{\psi}^{(-)}(y)\} + \{\psi^{(-)}(x)\, ,\, \overline{\psi}^{(+)}(y)\} \\
&= [-i\, S^{(-)}(x-y)] + [-i\, S^{(+)}(x-y)] \\
&\hat{=} -i\, S(x-y) \ , \qquad (3.92)
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
\{\psi^{(+)}(x)\, ,\, \overline{\psi}^{(-)}(y)\} &= (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3p}{2E}\, \mathrm{e}^{-ip\cdot(x-y)}\, (\not{p} - m) \\
&\hat{=} -i\, S^{(-)}(x-y) \ , \qquad (3.93)
\end{aligned}$$

‡Vide *Apêndice B1.*

$$
\begin{aligned}
\{\psi^{(-)}(x)\,,\,\overline{\psi}^{(+)}(y)\} &= (2\pi)^{-3}\int\frac{d^3p}{2E}\,\mathrm{e}^{-ip\cdot(x-y)}\,(\not p+m) \\
&\hat{=}\; -i\,S^{(+)}(x-y)\;,
\end{aligned}
\tag{3.94}
$$

onde as integrais

$$
\{\psi_a^{(+)}(x)\,,\,\overline{\psi}_b^{(-)}(y)\} = (2\pi)^{-3}\sum_s\int d^3p\,\mathrm{e}^{ip\cdot(x-y)}\,v_{sa}(\mathbf{p})\,\overline{v}_{sb}(\mathbf{p}) \tag{3.95}
$$

e

$$
\{\psi_a^{(-)}(x)\,,\,\overline{\psi}_b^{(+)}(y)\} = (2\pi)^{-3}\sum_s\int d^3p\,\mathrm{e}^{-ip\cdot(x-y)}\,u_{sa}(\mathbf{p})\,\overline{u}_{sb}(\mathbf{p}) \tag{3.96}
$$

são entendidas como transformadas de Fourier distribucionais. Os demais anticomutadores são nulos. As distribuições $S^{(+)}$, $S^{(-)}$ e S são invariantes de Lorentz.

3.4 Operador Espalhamento no Espaço de Fock

Na *Seção 2.2* construimos a evolução temporal no espaço de Fock a partir da dinâmica no espaço de Hilbert de uma partícula. Por um procedimento análogo, introduziremos o operador espalhamento $\underline{\mathbf{S}}$ no espaço de Fock, a partir do operador espalhamento S no espaço de Hilbert.

A dinâmica de uma partícula é descrita pela equação de movimento (3.43)

$$
i\frac{dh}{dt} = H\,h\;, \qquad (\hbar = 1)\;. \tag{3.97}
$$

Se a partícula está sujeita a um potencial dependente do tempo, o operador hamiltoniano pode ser definido como

$$
H(t) = H_0 + H_1(t)\;, \tag{3.98}
$$

sendo

$$
H_0 = \beta m - i\,\vec{\alpha}\cdot\nabla \tag{3.99}
$$

o operador hamiltoniano livre e

$$
H_1(t) = e\,[V(x) - \vec{\alpha}\cdot\mathbf{A}(x)] \tag{3.100}
$$

o operador hamiltoniano de interação. A evolução temporal do estado $h\in\mathcal{H}_1$ é dada pela transformação unitária

$$
h(t) = U(t,s)\,h(s)\;, \tag{3.101}
$$

onde

$$
U(t,s) = \mathrm{e}^{-iH(t-s)} \tag{3.102}
$$

tem como propriedades

$$
\begin{aligned}
U^\dagger(t,s) &= U(s,t)\ , \\
U(t,s)U(s,r) &= U(t,r)\ .
\end{aligned} \tag{3.103}
$$

Assumindo que a interação $H_1(t)$ seja de alcance limitado, isto é, os potenciais se anulam para $t \to \pm\infty$, os operadores de onda

$$
\begin{aligned}
W_{\substack{in \\ out}} &= \lim_{t\to\pm\infty}^{(forte)} U(0,t)\, \mathrm{e}^{-iH_0 t} \\
&= \lim_{t\to\pm\infty}^{(forte)} \mathrm{e}^{iHt}\, \mathrm{e}^{-iH_0 t}\ ,
\end{aligned} \tag{3.104}
$$

existem como limites fortes em $\mathcal{H}_1$, e podemos definir o operador (matriz) espalhamento S no espaço de Hilbert

$$
\begin{aligned}
S &= W_{out}^\dagger W_{in} \\
&= \lim_{\substack{s\to-\infty \\ t\to+\infty}}^{(forte)} \mathrm{e}^{iH_0 t}\, U(t,s)\, \mathrm{e}^{-iH_0 s} \\
&= \lim_{\substack{s\to-\infty \\ t\to+\infty}}^{(forte)} \mathrm{e}^{iH_0 t}\, \mathrm{e}^{-iH(t-s)}\, \mathrm{e}^{-iH_0 s}\ ,
\end{aligned} \tag{3.105}
$$

que estabelece a transição de um estado assintótico inicial normalizado a um estado assintótico final normalizado espalhado. Como, por hipótese, para $t \to \pm\infty$ temos a dinâmica livre, a formulação de segunda quantização para o operador espalhamento é construída com base na representação de Fock do campo livre.

O campo livre de Dirac, na formulação de segunda quantização é representado pelo operador no espaço de Fock

$$
\psi(h) = b(P_+^0 h) + d^\dagger(P_-^0 h) \hat{=} b(f) + d^\dagger(g)\ , \tag{3.106}
$$

com o vácuo de Fock, Ω, definido pelas relações

$$
\begin{aligned}
b(h)\,\Omega &= \psi(f)\,\Omega = 0\ , \\
d(h)\,\Omega &= \psi(g)\,\Omega = 0\ , \\
\forall\, h &\in \mathcal{H}_1\ ,
\end{aligned} \tag{3.107}
$$

onde denotamos

$$
f = P_+^0 h \in \mathcal{H}_+\ , \qquad g = P_-^0 h \in \mathcal{H}_-\ , \tag{3.108}
$$

sendo P_+^0 e P_-^0, respectivamente, os operadores de projeção sobre os subespaços espectrais positivo e negativo do hamiltoniano H_0 (3.99). No que segue, omitiremos o índice zero dos operadores de projeção.

A matriz S em segunda quantização, se existe, corresponde ao operador $\underline{\mathbf{S}}$ no espaço de Fock, definido por

$$\begin{aligned} \psi(S^\dagger h) &= \underline{\mathbf{S}}^{-1}\, \psi(h)\, \underline{\mathbf{S}}\ , \\ \psi^\dagger(S^\dagger h) &= \underline{\mathbf{S}}^{-1}\, \psi^\dagger(h)\, \underline{\mathbf{S}}\ . \end{aligned} \tag{3.109}$$

Segue das definições acima que a matriz $\underline{\mathbf{S}}$ é unitária e determinada univocamente a menos de uma fase $\mathrm{e}^{i\lambda}$. Contudo, como λ depende do potencial externo $A^\mu(x)$, esta fase possui um significado físico e não pode ser negligenciada. Ela é fixada ao se exigir que o operador $\underline{\mathbf{S}}$ satisfaça a condição de causalidade local, que está discutida no *Apêndice D*.

A função teste que aparece no lado esquerdo das equações (3.109), usando a propriedade (3.62), pode ser decomposta como

$$\begin{aligned} S^\dagger h &= P_+\, S^\dagger\, h + P_-\, S^\dagger\, h \\ &= P_+ S^\dagger P_+\, h + P_+ S^\dagger P_-\, h + P_- S^\dagger P_+\, h + P_- S^\dagger P_-\, h \\ &= S^\dagger_{++}\, h + S^\dagger_{+-}\, h + S^\dagger_{-+}\, h + S^\dagger_{--}\, h\ , \end{aligned} \tag{3.110}$$

onde

$$\begin{aligned} & S^\dagger_{\pm\pm} \mathrel{\hat{=}} P_\pm\, S^\dagger\, P_\pm\ , \\ & S^\dagger_{+-} \mathrel{\hat{=}} (S_{-+})^\dagger\ . \end{aligned} \tag{3.111}$$

Se separamos o conjunto h nos subconjuntos

$$f = P_+\, h \in \mathcal{H}_+ \quad \text{e} \quad \mathrm{g} = \mathrm{P}_-\,\mathrm{h} \in \mathcal{H}_-\ , \tag{3.112}$$

a decomposição (3.110) se divide em

$$\begin{aligned} S^\dagger f &= S^\dagger_{++}\, f + S^\dagger_{-+}\, f\ , \\ S^\dagger g &= S^\dagger_{+-}\, g + S^\dagger_{--}\, g\ , \end{aligned}$$

que junto com a definição (3.66), levam as expressões (3.109) a serem reescritas como

$$b(f)\, \underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{S}}\, [b(S^\dagger_{++} f) + d^\dagger(S^\dagger_{-+} f)]\ , \tag{3.113}$$

$$d^\dagger(g)\, \underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{S}}\, [b(S^\dagger_{+-} g) + d^\dagger(S^\dagger_{--} g)]\ , \tag{3.114}$$

$$b^\dagger(f)\, \underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{S}}\, [b^\dagger(S^\dagger_{++} f) + d(S^\dagger_{-+} f)]\ , \tag{3.115}$$

$$d(g)\, \underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{S}}\, [b^\dagger(S^\dagger_{+-} g) + d(S^\dagger_{--} g)]\ . \tag{3.116}$$

A matriz S no espaço de Hilbert, (3.105), deve descrever os processos de espalhamento fisicamente possíveis de partículas e antipartículas descritas pelo campo de

Dirac. Portanto, $\underline{\mathbf{S}}$ em sua formulação no espaço de Fock deverá conter um termo envolvendo os operadores $b^\dagger, d^\dagger$, que corresponderá à produção de pares elétron-pósitron; outro contendo $b^\dagger, b$, que descreverá o espalhamento de elétrons pelo campo externo e um com $d^\dagger, d$ para o espalhamento de pósitrons e, finalmente, um termo envolvendo os operadores d, b, associado à destruição de pares elétron-pósitron. Sendo assim, a matriz $\underline{\mathbf{S}}$ é proposta como

$$\underline{\mathbf{S}} \hat{=} C\, \mathrm{e}^{A_1 b^\dagger d^\dagger} :\mathrm{e}^{\bar{A}_2 b^\dagger b}: :\mathrm{e}^{\bar{A}_3 d d^\dagger}: \mathrm{e}^{A_4 db}, \tag{3.117}$$

onde C é o fator de normalização, que depende do campo externo $A^\mu(x)$, que será discutido mais adiante. As exponenciais dão conta de qualquer número de processos de espalhamento acontecendo simultaneamente no sistema. Os fatores $A_1, ..., A_4$ são determinados de forma a respeitarem as relações de comutação entre os operadores $b, b^\dagger, d, d^\dagger$ e a matriz $\underline{\mathbf{S}}$, estabelecidas através de (3.113)-(3.116). A seguir, calcularemos estas relações de comutação usando a definição (3.117) para a matriz $\underline{\mathbf{S}}$. Para tanto, determinaremos, num primeiro momento, as relações de comutação desses operadores com cada fator exponencial de (3.117) e, em seguida, apresentaremos as relações de comutação de cada operador com a matriz $\underline{\mathbf{S}}$.

Com o objetivo de calcular explicitamente as relações de comutação a partir de (3.113)-(3.116), definimos os operadores

$$A_1 b^\dagger d^\dagger \;\hat{=}\; \sum_{jk} (f_j, A_1\, g_k)\, b^\dagger(f_j)\, d^\dagger(g_k)\ , \tag{3.118}$$

$$\bar{A}_2\, b^\dagger b \;\hat{=}\; \sum_{jk} (f_j, \bar{A}_2\, f_k)\, b^\dagger(f_j)\, b(f_k)\ , \tag{3.119}$$

$$\bar{A}_3 d^\dagger d \;\hat{=}\; \sum_{jk} (g_j, \bar{A}_3\, g_k)\, d^\dagger(g_j)\, d(g_k)\ , \tag{3.120}$$

onde A é um operador limitado em $\mathcal{H}_1$, $(,)$ denota o produto escalar em $\mathcal{H}_1$, f_j é uma base em $\mathcal{H}_+$ e g_k uma base em $\mathcal{H}_-$. Tais expressões estão em acordo com as definições dos operadores b's e d's. Assim, as exponenciais que aparecem na matriz $\underline{\mathbf{S}}$ ficam dadas por

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{A_1 b^\dagger d^\dagger} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A_1 b^\dagger d^\dagger)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{j_1 \cdots j_n \\ k_1 \cdots k_n}} (f_{j_1}, A_1\, g_{k_1}) ... (f_{j_n}, A_1\, g_{k_n})\, b^\dagger(f_{j_1}) d^\dagger(g_{k_1}) \cdot \\
&\quad ... b^\dagger(f_{j_n}) d^\dagger(g_{k_n}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{j_1 \cdots j_n \\ k_1 \cdots k_n}} (f_{j_1}, A_1\, g_{k_1}) ... (f_{j_n}, A_1\, g_{k_n})\, b^\dagger(f_{j_1}) ... b^\dagger(f_{j_n}) \cdot
\end{aligned}$$

$$\cdot d^\dagger(g_{k_n})...d^\dagger(g_{k_1}) \ , \tag{3.121}$$

Esta expressão não muda de sinal devido ao número par de transposições realizadas no reordenamento dos operadores $b^\dagger$ e $d^\dagger$. Analogamente, teremos

$$\begin{aligned} :\!\mathrm{e}^{\bar{A}_2 b^\dagger b}\!: \ &= \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{j_1\cdots j_n \\ k_1\cdots k_n}} (f_{j_1}, \bar{A}_2\, f_{k_1})...(f_{j_n}, \bar{A}_2\, f_{k_n})\, b^\dagger(f_{j_1})...b^\dagger(f_{j_n}) \cdot \\ &\quad \cdot b(f_{k_n})...b(f_{k_1}) \ , \end{aligned} \tag{3.122}$$

$$\begin{aligned} :\!\mathrm{e}^{\bar{A}_3 d d^\dagger}\!: \ &= \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{j_1\cdots j_n \\ k_1\cdots k_n}} (g_{j_1}, \bar{A}_3\, g_{k_1})...(g_{j_n}, \bar{A}_3\, g_{k_n})\, d^\dagger(g_{j_1})...d^\dagger(g_{j_n}) \cdot \\ &\quad \cdot d(g_{k_n})...d(g_{k_1})\, (-)^n \ . \end{aligned} \tag{3.123}$$

No que segue, usaremos a notação simplificada

$$\begin{aligned} (A)_i \ &= \ (h_{j_i}, A\, h'_{k_i}) \ , \\ b_{k_1} \ &= \ b(f_{k_1}) \ , \\ d_{k_1} \ &= \ d(g_{k_1}) \ . \end{aligned} \tag{3.124}$$

No cálculo das relações de comutação dos operadores de criação e aniquilação de partícula e antipartícula com cada exponencial, são realizadas sucessivas anticomutações, para as quais substituimos as correspondentes relações (3.73).

No caso do comutador entre $b(h)$ e a exponencial (3.121) teremos

$$\begin{aligned} b(h)\, \mathrm{e}^{A_1 b^\dagger d^\dagger} \ &= \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{j_1\cdots j_n \\ k_1\cdots k_n}} (A_1)_1...(A_1)_n\, b(h)\, b^\dagger_{j_1}...b^\dagger_{j_n}\, d^\dagger_{k_n}...d^\dagger_{k_1} \\ &= \ \mathrm{e}^{A_1 b^\dagger d^\dagger}\, b(h) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{j_1\cdots j_n \\ k_1\cdots k_n}} (A_1)_1...(A_1)_n \sum_{m=0}^{n} (-)^{m-1} (h_+, f_{j_m}) \cdot \\ &\quad \cdot b^\dagger_{j_1}...\, \cancel{b}^\dagger_{j_m}...b^\dagger_{j_n}\, d^\dagger_{k_n}...d^\dagger_{k_m}...d^\dagger_{k_1} \\ &= \ \mathrm{e}^{A_1 b^\dagger d^\dagger}\, b(h) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n} \sum_{\substack{j_1\cdots (j_m)\cdots j_n \\ k_1\cdots (k_m)\cdots k_n}} (A_1)_1...(\cancel{A}_1)_m...(A_1)_n \cdot \\ &\quad \cdot b^\dagger_{j_1}...\, \cancel{b}^\dagger_{j_m}...b^\dagger_{j_n}\, d^\dagger_{k_n}...\, \cancel{d}^\dagger_{k_m}...d^\dagger_{k_1} \sum_{j_m, k_m} (A_1)_m (h_+, f_{j_m}) d^\dagger_{k_m} \ , \end{aligned} \tag{3.125}$$

onde $\cancel{b}^\dagger_{j_m}$, $\cancel{d}^\dagger_{k_m}$, $(\cancel{A}_1)_m$ denotam fatores que não aparecem no produto e (j_m), (k_m) as somas que não estão sendo realizadas. Note que para que o operador $\cancel{d}^\dagger_{k_m}$ seja levado à última posição à direita, deveremos realizar $(m-1)$ anticomutações, aparecendo mais um fator $(-)^{m-1}$. A última soma em (3.125) resulta em

$$\begin{aligned}\sum_{j_m,k_m}(f_{j_m}, A_1\, g_{k_m})(P_+h, f_{j_m})\, d^\dagger_{k_m} &= \sum_{k_m}(P_+h, A_1\, g_{k_m})\, d^\dagger(g_{k_m}) \\ &= d^\dagger(A_1^\dagger P_+h)\ . \end{aligned} \tag{3.126}$$

Como existem n destes termos, já que $m = 1, ..., n$, então o fator $1/n!$ será mudado para $1/(n-1)!$. Portanto, a série exponencial é recuperada no segundo termo de (3.125), e a relação de comutação fica

$$b(h)\, \mathrm{e}^{A_1 b^\dagger d^\dagger} = \mathrm{e}^{A_1 b^\dagger d^\dagger}[b(h) + d^\dagger(A_1^\dagger\, P_+h)]\ . \tag{3.127}$$

Da mesma forma, encontramos

$$d(h)\, \mathrm{e}^{A_1 b^\dagger d^\dagger} = \mathrm{e}^{A_1 b^\dagger d^\dagger}[d(h) - b^\dagger(A_1\, P_-h)]\ . \tag{3.128}$$

As relações de comutação entre os operadores $b^\dagger(h)$ e $d^\dagger(h)$ e a última exponencial de (3.117) são obtidas pela conjugação hermitiana, respectivamente, das expressões (3.127) e (3.128), para as quais obtemos

$$b^\dagger(h)\, \mathrm{e}^{A_4 db} = \mathrm{e}^{A_4 db}[b^\dagger(h) - d(A_4\, P_+h)]\ , \tag{3.129}$$

e

$$d^\dagger(h)\, \mathrm{e}^{A_4 db} = \mathrm{e}^{A_4 db}[d^\dagger(h) + b(A_4^\dagger\, P_-h)]\ . \tag{3.130}$$

Seguindo o mesmo procedimento, o comutador entre $b(h)$ e a exponencial (3.122) fica dado por

$$b(h){:}\mathrm{e}^{\bar{A}_2 b^\dagger b}{:} = {:}\mathrm{e}^{\bar{A}_2 b^\dagger b}{:}\, [b(h) + b(\bar{A}_2^\dagger P_+h)] = {:}\mathrm{e}^{\bar{A}_2 b^\dagger b}{:}\, b([1 + \bar{A}_2^\dagger]\, P_+h)\ . \tag{3.131}$$

Substituindo $1 + \bar{A}_2 = A_2$, esta expressão pode ser escrita como

$$b(h){:}\mathrm{e}^{(A_2-1)b^\dagger b}{:} = {:}\mathrm{e}^{(A_2-1)b^\dagger b}{:}\, b(A_2^\dagger\, P_+h)\ . \tag{3.132}$$

Similarmente, podemos mostrar que

$$d(h){:}\mathrm{e}^{(1-A_3)dd^\dagger}{:} = {:}\mathrm{e}^{(1-A_3)_3 dd^\dagger}{:}\, d(A_3\, P_-h)\ . \tag{3.133}$$

Tomando o hermitiano conjugado destas expressões, obtemos as duas relações que faltam

$$b^\dagger(h){:}\mathrm{e}^{(A_2-1)b^\dagger b}{:} = {:}\mathrm{e}^{(A_2-1)b^\dagger b}{:}\, b^\dagger(A_{2++}^{-1}\, h)\ , \tag{3.134}$$

e

$$d^\dagger(h){:}\mathrm{e}^{(1-A_3)dd^\dagger}{:} = {:}\mathrm{e}^{(1-A_3)_3 dd^\dagger}{:}\, d^\dagger(A_{3--}^{\dagger -1}\, h)\ , \tag{3.135}$$

onde substituimos

$$\begin{aligned} P_+ A_2 P_+ h &= h' \quad \text{ou} \quad h = (A_{2++})^{-1} h' \ , \\ P_- A_3 P_- h &= h'' \quad \text{ou} \quad h = (A_{3--})^{-1} h'' \ , \end{aligned}$$

e definimos

$$\begin{aligned} (A_{++})^{-1} &= A_{++}^{-1} \ , \\ (A_{--})^{-1} &= A_{--}^{-1} \ , \end{aligned}$$

Assumindo a decomposição (3.112) e usando as propriedades (3.66), as relações de comutação (3.127)-(3.135) são transformadas em

$$\begin{aligned} b(f)\, e^{A_1 b^\dagger d^\dagger} &= e^{A_1 b^\dagger d^\dagger} [b(f) + d^\dagger (A^\dagger_{1-+}\, f)] \ , && (3.136) \\ d(g)\, e^{A_1 b^\dagger d^\dagger} &= e^{A_1 b^\dagger d^\dagger} [d(g) - b^\dagger (A_{1+-}\, g)] \ , && (3.137) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(f) {:}e^{(A_2-1) b^\dagger b}{:} &= {:}e^{(A_2-1) b^\dagger b}{:}\, b(A^\dagger_{2++}\, f) \ , && (3.138) \\ b^\dagger(f) {:}e^{(A_2-1) b^\dagger b}{:} &= {:}e^{(A_2-1) b^\dagger b}{:}\, b^\dagger(A^{-1}_{2++}\, f) \ , && (3.139) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(g) {:}e^{(1-A_3) d d^\dagger}{:} &= {:}e^{(1-A_3) d d^\dagger}{:}\, d(A_{3--}\, g) \ , && (3.140) \\ d^\dagger(g) {:}e^{(1-A_3) d d^\dagger}{:} &= {:}e^{(1-A_3) d d^\dagger}{:}\, d^\dagger(A^{\dagger -1}_{3--}\, g) \ , && (3.141) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^\dagger(f)\, e^{A_4 d b} &= e^{A_4 d b} [b^\dagger(f) - d(A_{4-+}\, f)] \ , && (3.142) \\ d^\dagger(g)\, e^{A_4 d b} &= e^{A_4 d b} [d^\dagger(g) + b(A^\dagger_{4+-}\, g)] \ . && (3.143) \end{aligned}$$

Voltando ao cálculo das relações de comutação entre os operadores $b, b^\dagger, d, d^\dagger$ e a matriz $\underline{\mathbf{S}}$, teremos

$$\begin{aligned} d^\dagger(g)\, \underline{\mathbf{S}} &= d^\dagger(g)\, C\, e^{A_1 b^\dagger d^\dagger}\, {:}e^{\bar{A}_2 b^\dagger b}{:}\, {:}e^{\bar{A}_3 d d^\dagger}{:}\, e^{A_4 d b} \\ &= C\, e^{A_1 b^\dagger d^\dagger}\, {:}e^{\bar{A}_2 b^\dagger b}{:}\, \underbrace{d^\dagger(g)\, {:}e^{\bar{A}_3 d d^\dagger}{:}}\, e^{A_4 d b} \\ &= C\, e^{A_1 b^\dagger d^\dagger}\, {:}e^{\bar{A}_2 b^\dagger b}{:}\, {:}e^{\bar{A}_3 d d^\dagger}{:}\, \underbrace{d^\dagger(A^{\dagger -1}_{3--}\, g)\, e^{A_4 d b}} \\ &= C\, e^{A_1 b^\dagger d^\dagger}\, {:}e^{\bar{A}_2 b^\dagger b}{:}\, {:}e^{\bar{A}_3 d d^\dagger}{:}\, e^{A_4 d b}\, [d^\dagger(A^{\dagger -1}_{3--}\, g) + b(A^\dagger_{4+-}\, A^{\dagger -1}_{3--}\, g)] \\ &= \underline{\mathbf{S}}\, [d^\dagger(A^{\dagger -1}_{3--}\, g) + b(A^\dagger_{4+-}\, A^{\dagger -1}_{3--}\, g)] \ , \qquad (3.144) \end{aligned}$$

onde foram usadas, respectivamente, as expressões (3.141) e (3.143). Além disto, quando o operador $d^\dagger$ passa pela primeira exponencial, aparece o fator $(-1)^{2n}$, já que anticomuta com os $2n$ operadores que comparecem no expoente. O mesmo ocorre com a segunda exponencial. Comparando o resultado (3.144) com (3.114), vemos que

$$A_3 = S_{--}^{-1} \tag{3.145}$$

e

$$A_4 = S_{--}^{-1}\, S_{-+}\ . \tag{3.146}$$

Os índices ($\pm\pm$) em A_i serão omitidos por simplicidade de notação.

Por um procedimento análogo, usando (3.139) e (3.142), obtemos

$$\begin{aligned} b^\dagger(f)\,\underline{\mathbf{S}} &= \underline{\mathbf{S}}\,[b^\dagger(A_{2++}^{-1}f) - d(A_{4-+}A_{2++}^{-1}f)] \\ &= \underline{\mathbf{S}}\,[b^\dagger(S_{++}^\dagger f) + d(S_{-+}^\dagger f)]\ , \end{aligned} \tag{3.147}$$

então

$$A_2 = S_{++}^{\dagger -1}\ , \tag{3.148}$$

$$A_4 = -\, S_{-+}^\dagger\, S_{++}^{-1\dagger}\ , \tag{3.149}$$

onde a última linha de (3.147) é a expressão (3.115). Usando as relações de comutação (3.136), (3.138), (3.141), (3.143) e (3.113), obtemos

$$\begin{aligned} b(f)\,\underline{\mathbf{S}} &= \underline{\mathbf{S}}\,[b(A_{2++}^{-1}f) + d^\dagger(A_{3--}^{\dagger -1}A_{1-+}^\dagger f) + b(A_{4+-}^\dagger A_{3--}^{\dagger -1}A_{1-+}^\dagger f)] \\ &= \underline{\mathbf{S}}\,[b(S_{++}^\dagger f) + d^\dagger(S_{-+}^\dagger f)]\ , \end{aligned}$$

então

$$A_1 = S_{+-}S_{--}^{-1}\ . \tag{3.150}$$

A relação (3.116), com (3.136), (3.139), (3.140) e (3.142) leva a outra definição para A_1,

$$A_1 = -\, S_{++}^{\dagger -1}S_{+-}^\dagger\ . \tag{3.151}$$

Se escrevemos S e $S^\dagger$ na forma matricial

$$S = \begin{pmatrix} S_{++} & S_{+-} \\ S_{-+} & S_{--} \end{pmatrix}\ , \qquad S^\dagger = \begin{pmatrix} S_{++}^\dagger & S_{+-}^\dagger \\ S_{-+}^\dagger & S_{--}^\dagger \end{pmatrix}\ , \tag{3.152}$$

podemos mostrar, a partir da relação de unitariedade $SS^\dagger = S^\dagger S = 1$, expressas pelas relações entre os elementos de matriz

$$S_{++}\,S_{++}^\dagger + S_{+-}\,S_{-+}^\dagger = S_{++}^\dagger\,S_{++} + S_{+-}^\dagger\,S_{-+} = 1\ , \tag{3.153}$$

$$S_{++}\,S_{+-}^\dagger + S_{+-}\,S_{--}^\dagger = S_{++}^\dagger\,S_{+-} + S_{+-}^\dagger\,S_{--} = 0\ , \tag{3.154}$$

$$S_{-+}\,S_{++}^\dagger + S_{--}\,S_{-+}^\dagger = S_{-+}^\dagger\,S_{++} + S_{--}^\dagger\,S_{-+} = 0\ , \tag{3.155}$$

$$S_{-+}\,S_{+-}^\dagger + S_{--}\,S_{--}^\dagger = S_{-+}^\dagger\,S_{+-} + S_{--}^\dagger\,S_{--} = 1\ , \tag{3.156}$$

que os resultados (3.146) e (3.149) estão em acordo, assim como (3.150) e (3.151). Portanto, com os resultados encontrados para os fatores $A_1, ..., A_4$, a matriz $\underline{\mathbf{S}}$ no espaço de Fock fica dada por

$$\underline{\mathbf{S}} \hat{=} C\, \mathrm{e}^{S_{+-} S_{--}^{-1} b^\dagger d^\dagger} :\mathrm{e}^{(S_{++}^{\dagger -1} - 1) b^\dagger b}: :\mathrm{e}^{(1 - S_{--}^{-1}) d d^\dagger}: \mathrm{e}^{S_{--}^{-1} S_{-+} d b} \ . \tag{3.157}$$

O fator de normalização C permanece indeterminado. Como $\underline{\mathbf{S}}$ é um operador unitário em $\mathcal{F}$, temos

$$1 = (\Omega, \underline{\mathbf{S}}^\dagger \underline{\mathbf{S}} \Omega) = (\underline{\mathbf{S}}\Omega, \underline{\mathbf{S}}\Omega) = \mid C \mid^2 (\mathrm{e}^{A_1 b^\dagger d^\dagger} \Omega, \mathrm{e}^{A_1 b^\dagger d^\dagger} \Omega) \ . \tag{3.158}$$

Não é óbvio que o produto escalar no lado direito de (3.158) seja finito. Fazer tal exigência levará a restrições sobre $\underline{\mathbf{S}}$, e conseqüentemente sobre os potenciais, já que A_1 depende de $A_\mu(x)$. Podemos calcular C escrevendo o operador A_1 na sua representação espectral. Desta forma, a constante C fica dada por

$$|C|^2 = \frac{1}{\det(1 + A_1^\dagger A_1)} \ . \tag{3.159}$$

Para que esta constante de normalização seja finita, o operador autoadjunto positivo $|A_1|$ deve possuir um espectro discreto, fazendo com que o determinante infinito em (3.159) seja bem definido. Esta condição é equivalente à exigência de que A_1 seja um operador convergente na norma de Hilbert-Schmidt. O operador A_1 é definido por

$$A_1 = S_{+-} S_{--}^{-1} = -\, S_{++}^{\dagger -1} S_{+-}^\dagger \ . \tag{3.160}$$

Pela expressão (3.157), vemos que S_{--}^{-1} está associado à exponencial de $dd^\dagger$, que comuta com o operador $\underline{\mathbf{N}}$ e, portanto, é um operador que está na classe de Hilbert-Schmidt. Então, a condição de Hilbert-Schmidt recai sobre o operador $S_{+-} = P_+ \, S \, P_-$. Se esta exigência não é satisfeita, o vetor

$$\mathrm{e}^{A_1 b^\dagger d^\dagger} \Omega \notin \mathcal{F} \tag{3.161}$$

não está no espaço de Fock. Isto significa que a produção de pares pelo campo externo não é controlada. Portanto, os potenciais que não satisfazem a condição de Hilbert-Schmidt não são fisicamente admissíveis.

A demonstração de que S_{+-} é um operador de Hilbert-Schmidt e, portanto, da existência da matriz $\underline{\mathbf{S}}$, está apresentada no *Apêndice C*.

3.5 Teoria de Perturbação

Uma questão que aparece no estudo dos processos de espalhamento é a necessidade de obtenção da série perturbativa para a matriz S de uma partícula, já que, de forma geral, os potenciais são dependentes do tempo. Este será o objetivo central desta seção.

O estado de uma partícula $h(t)$ para o campo de Dirac sujeito a uma interação dependente do tempo $H_1(t)$, (3.100), tem sua evolução dada pelo propagador unitário (3.102) tal que

$$h(t) = U(t,s)\, h(s) = \mathrm{e}^{-iH(t-s)}\, h(s) \tag{3.162}$$

é a solução da equação de Schrödinger (3.97), com $H(t) = H_0 + H_1(t)$. Tal estado pode ser levado à representação de interação pela transformação

$$h_I(t) = \mathrm{e}^{-iH_0 t}\, h(t) \ , \tag{3.163}$$

o qual satisfaz a equação de movimento

$$i\frac{d}{dt}h_I(t) = H_1^{(I)}(t)\, h(t) \ , \tag{3.164}$$

sendo

$$H_1^{(I)}(t) = \mathrm{e}^{iH_0 t} H_1(t) \mathrm{e}^{-iH_0 t} \tag{3.165}$$

o operador hamiltoniano na representação de interação com

$$H_1 = e\,[V(x) - \vec{\alpha}\cdot\mathbf{A}(x)] \ . \tag{3.166}$$

Se o operador $H_1(t)$ é limitado, a solução da equação (3.164) pode ser obtida de forma iterativa, levando à série de Dyson

$$\begin{aligned} h_I(t) &= \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-i)^n \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 ... \int_s^{t_{n-1}} dt_n\, H_1^{(I)}(t_1)\, H_1^{(I)}(t_2) ... H_1^{(I)}(t_n)\right] h_I(s) \\ &\hat{=}\ U^{(I)}(t,s)\, h_I(s) \ , \end{aligned} \tag{3.167}$$

que é convergente no sentido da norma de operadores. Na última igualdade assumimos a série de Dyson como definição do propagador unitário $U^{(I)}(t,s)$, que é o operador evolução temporal na descrição de interação. De acordo com (3.165), este operador é definido por

$$\begin{aligned} U^{(I)}(t,s) &\hat{=}\ \mathrm{e}^{iH_0 t}\, U(t,s)\, \mathrm{e}^{-iH_0 s} \\ &= \mathrm{e}^{iH_0 t}\, \mathrm{e}^{-iH(t-s)}\, \mathrm{e}^{-iH_0 s} \ . \end{aligned} \tag{3.168}$$

Comparando esta expressão com a definição da matriz S, (3.105), podemos notar que S é o limite do operador $U^{(I)}$

$$S = \lim_{\substack{s\to-\infty \\ t\to+\infty}} U^{(I)}(t,s) \ . \tag{3.169}$$

Então, a definição da matriz S pode ser expressa pela série de Dyson

$$\begin{aligned}
S &= \lim_{\substack{s\to-\infty \\ t\to+\infty}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 ... \int_s^{t_{n-1}} dt_n \, H_1^{(I)}(t_1)\, H_1^{(I)}(t_2) ... H_1^{(I)}(t_n) \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 ... \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \, H_1^{(I)}(t_1)\, H_1^{(I)}(t_2) ... H_1^{(I)}(t_n) \\
&\hat{=} \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} \ ,
\end{aligned} \tag{3.170}$$

com $S^{(0)} = 1$. Os fatores do integrando estão temporalmente ordenados, isto é, $t_1 > t_2 > ... > t_n$. As integrais em (3.170) poderão ser estendidas de $-\infty$ a $+\infty$ com a ajuda das distribuições Θ de Heaviside. Entretanto, como os fatores $H_1^{(I)}(t_j)$ não comutam, o ordenamento temporal deverá ser mantido.

Como estamos assumindo que os potenciais se anulam para $t \to \pm\infty$, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \ \left\| H_1^{(I)}(\tau) \right\| < \infty \ , \tag{3.171}$$

faz com que a série (3.170) também seja convergente na norma. Então ela define um operador unitário em $\mathcal{H}_1$, e, consequentemente, fica garantida a completeza dos estados assintóticos.

A matriz S no espaço dos momentos é obtida escrevendo os operadores hamiltoniano livre H_0 e de interação $H_1(t)$ no espaço dos momentos, sendo que o primeiro é o operador

$$H_0(\mathbf{p}) = \beta m + \vec{\alpha} \cdot \mathbf{p} \tag{3.172}$$

e o segundo uma convolução

$$[H_1(t)\, f](\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{-3/2}} \int d^3p' \, H_1(t; \mathbf{p} - \mathbf{p}')\, f(\mathbf{p}') \ . \tag{3.173}$$

Portanto, a n-ésima ordem da série (3.170), $S^{(n)}$, no espaço dos momentos fica dada por

$$\begin{aligned}
S^{(n)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{(-i)^n}{(2\pi)^{3n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 ... \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \int d^3p_1 ... d^3p_{n-1} \cdot \\
&\quad \cdot \mathrm{e}^{it_1 H_0(\mathbf{p})} \, H_1(t_1; \mathbf{p} - \mathbf{p}_1)\, \mathrm{e}^{-i(t_1 - t_2) H_0(\mathbf{p}_1)} \, H_1(t_2; \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) ... \\
&\quad ... \mathrm{e}^{-i(t_{n-1} - t_n) H_0(\mathbf{p}_{n-1})} \, H_1(t_n; \mathbf{p}_{n-1} - \mathbf{q})\, \mathrm{e}^{-it_n H_0(\mathbf{q})} \ .
\end{aligned} \tag{3.174}$$

A matriz espalhamento $\underline{\mathbf{S}}$ no espaço de Fock, (3.157), é escrita em termos dos elementos de matriz $S_{\pm\pm} = P_{\pm} S P_{\pm}$, os quais serão apresentados a seguir.

O elemento de matriz $S_{+-}^{(n)} = P_+ S^{(n)} P_-$ é obtido a partir dos operadores de projeção no espaço dos momentos[§]

$$\begin{aligned} P_+(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2E}(E + \vec{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \beta m) \ , \\ P_-(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2E}(E - \vec{\alpha}\cdot\mathbf{p} - \beta m) \ , \end{aligned} \tag{3.175}$$

resultando em

$$\begin{aligned} S_{+-}^{(n)}(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= P_+(\mathbf{p})\frac{(-i)^n}{(2\pi)^{3n/2}}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}dt_2 ... \int_{-\infty}^{t_{n-1}}dt_n \int d^3p_1 ... d^3p_{n-1}\,\cdot \\ &\quad \cdot \mathrm{e}^{it_1 H_0(\mathbf{p})}\, H_1(t_1;\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\,\mathrm{e}^{-i(t_1-t_2)H_0(\mathbf{p}_1)}\, H_1(t_2;\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2) ... \\ &\quad ...\mathrm{e}^{-i(t_{n-1}-t_n)H_0(\mathbf{p}_{n-1})}\, H_1(t_n;\mathbf{p}_{n-1}-\mathbf{q})\,\mathrm{e}^{-it_n H_0(\mathbf{q})} P_-(\mathbf{q}) \ . \\ &= \frac{(-i)^n}{(2\pi)^{3n/2}}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}dt_2 ... \int_{-\infty}^{t_{n-1}}dt_n\, \mathrm{e}^{it_1E(\mathbf{p})+it_nE(\mathbf{q})}\int d^3p_1 ... d^3p_{n-1}\,\cdot \\ &\quad \cdot P_+(\mathbf{p})\, H_1(t_1;\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\,\mathrm{e}^{-i(t_1-t_2)H_0(\mathbf{p}_1)}\, H_1(t_2;\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2) ... \\ &\quad ...\mathrm{e}^{-i(t_{n-1}-t_n)H_0(\mathbf{p}_{n-1})}\, H_1(t_n;\mathbf{p}_{n-1}-\mathbf{q})\, P_-(\mathbf{q}) \ , \end{aligned} \tag{3.176}$$

onde usamos

$$P_\pm(\mathbf{p})\, H_0(\mathbf{p}) = \pm E(\mathbf{p}) P_\pm(\mathbf{p}) = H_0(\mathbf{p})\, P_\pm(\mathbf{p}) \ , \tag{3.177}$$

$$P_\pm(\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{-itH_0(\mathbf{p})} = \mathrm{e}^{-itH_0(\mathbf{p})}\, P_\pm(\mathbf{p}) = \mathrm{e}^{\pm itE(\mathbf{p})}\, P_\pm(\mathbf{p}) \ , \tag{3.178}$$

e estamos denotando $p^0 = \pm E(\mathbf{p})$ e $q^0 = \pm E(\mathbf{q})$.

Como já foi dito anteriormente, para que S exista devemos ter a convergência na norma de Hilbert-Schmidt da série perturbativa $S_{+-}[A]$. A demonstração de que tal exigência é satisfeita está apresentada no *Apêndice C*.

As integrais em t na expressão (3.176) podem ser estendidas de $-\infty$ a $+\infty$ se usamos a função retardada

$$S_R(t_{j-1}-t_j;\mathbf{p}) \hat{=} \Theta(t_{j-1}-t_j)\,\mathrm{e}^{-i(t_{j-1}-t_j)H_0(\mathbf{p})} \ , \tag{3.179}$$

que garante o ordenamento temporal no termo $S^{(n)}$ da série de Dyson para a matriz S, já que

$$\Theta(t_{j-1}-t_j) = \begin{cases} 1\,, & \text{para } \ t_{j-1} > t_j \ , \\ 0\,, & \text{para } \ t_{j-1} < t_j \ . \end{cases} \tag{3.180}$$

Portanto, teremos

$$\begin{aligned} S_{+-}^{(n)}(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= \frac{(-i)^n}{(2\pi)^{3n/2}}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{\infty}dt_2 ... \int_{-\infty}^{\infty}dt_n\, \mathrm{e}^{it_1E(\mathbf{p})+it_nE(\mathbf{q})}\int d^3p_1 ... d^3p_{n-1}\,\cdot \\ &\quad \cdot P_+(\mathbf{p})\, H_1(t_1;\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\,\underbrace{\Theta(t_1-t_2)\,\mathrm{e}^{-i(t_1-t_2)H_0(\mathbf{p}_1)}}\, H_1(t_2;\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2) ... \\ &\quad ...\underbrace{\Theta(t_{n-1}-t_n)\,\mathrm{e}^{-i(t_{n-1}-t_n)H_0(\mathbf{p}_{n-1})}}\, H_1(t_n;\mathbf{p}_{n-1}-\mathbf{q})\, P_-(\mathbf{q}) \ . \end{aligned} \tag{3.181}$$

[§]Vide *Apêndice B1.*

Podemos calcular as integrais temporais com a ajuda da transformada de Fourier distribucional

$$\hat{S}_R(p_0,\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^\infty dt\, \mathrm{e}^{ip_0t-\varepsilon t}\, \mathrm{e}^{-itH_0(\mathbf{p})} \ , \tag{3.182}$$

sendo que

$$S_R(t;\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp_0\, \hat{S}_R(p_0,\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-ip_0t} \ . \tag{3.183}$$

A propriedade (3.62) dos operadores de projeção $P_\pm$, leva a definição (3.182) a ser escrita como

$$\begin{aligned}
\hat{S}_R(p_0,\mathbf{p}) &= (P_+ + P_-)\, \hat{S}_R(p_0,\mathbf{p}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^\infty dt\, [P_+(\mathbf{p})\mathrm{e}^{ip_0t-\varepsilon t}\, \mathrm{e}^{-itH_0(\mathbf{p})} + \\
&\quad +P_-(\mathbf{p})\mathrm{e}^{ip_0t-\varepsilon t}\, \mathrm{e}^{-itH_0(\mathbf{p})}] \\
&= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{P_+}{p_0 - E(\mathbf{p}) + i0} + \frac{P_-}{p_0 + E(\mathbf{p}) + i0}\right] \\
&= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{p_0\gamma^0 - \vec{\gamma}\cdot\mathbf{p} + m}{p_0^2 - E^2(\mathbf{p}) + ip_0 0}\right] \gamma^0 \ ,
\end{aligned} \tag{3.184}$$

onde usamos as expressões (B.31) e (B.32) para P_+ e P_-, com $\vec{\alpha} = \gamma^0\vec{\gamma}$. Fazendo as substituições

$$p_0 = E(\mathbf{p}) \ , \qquad p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2 \ , \qquad \not{p} = \gamma^0 p_0 - \vec{\gamma}\cdot\mathbf{p} \ , \tag{3.185}$$

a equação (3.184) pode ser escrita na forma covariante

$$\begin{aligned}
\hat{S}_R(p) &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + ip_0 0}\right] \gamma^0 \\
&= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} S^{ret}(p)\, \gamma^0 \ ,
\end{aligned} \tag{3.186}$$

sendo que estamos denotando $p = (p^0, \mathbf{p})$. Note que as funções $S^{ret}(p)$ diferem das transformadas de Fourier $\hat{S}^{ret}(p)$, (B.57), nas potências de (2π). Com o resultado (3.186), a expressão (3.183) fica

$$S_R(t;\mathbf{p}) = \frac{i}{2\pi} \int dp_0\, S^{ret}(p)\, \mathrm{e}^{-ip_0t}\, \gamma^0 \ , \tag{3.187}$$

e o elemento de matriz $S^{(n)}_{+-}$, (3.181), pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
S^{(n)}_{+-}(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= \frac{(-i)}{(2\pi)^{5n/2-1}} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 ... dt_n \int d^3p_1 ... d^3p_{n-1} \int dp_1^0 ... dp_{n-1}^0\, \mathrm{e}^{it_1E(\mathbf{p}) + it_nE(\mathbf{q})} \cdot \\
&\quad \cdot P_+(\mathbf{p})\, H_1(t_1; \mathbf{p} - \mathbf{p}_1)\, S^{ret}(p_1)\, \mathrm{e}^{-i(t_1-t_2)(p_1)_0}\, \gamma^0 H_1(t_2; \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) ... \\
&\quad ... S^{ret}(p_{n-1})\, \mathrm{e}^{-i(t_{n-1}-t_n)(p_{n-1})_0}\, \gamma^0 H_1(t_n; \mathbf{p}_{n-1} - \mathbf{q})\, P_-(\mathbf{q})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(-i)}{(2\pi)^{5n/2-1}} \int d^4p_1 ... d^4p_{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 ... dt_n \, \mathrm{e}^{it_1 E(\mathbf{p}) + it_n E(\mathbf{q})} \, \cdot \\
&\quad \cdot P_+(\mathbf{p}) \, H_1(t_1; \mathbf{p} - \mathbf{p}_1) \, S^{ret}(p_1) \, \mathrm{e}^{-i(t_1 - t_2)(p_1)_0} \, \gamma^0 H_1(t_2; \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) ... \\
&\quad ... S^{ret}(p_{n-1}) \, \mathrm{e}^{-i(t_{n-1} - t_n)(p_{n-1})_0} \, \gamma^0 H_1(t_n; \mathbf{p}_{n-1} - \mathbf{q}) \, P_-(\mathbf{q}) \; . \qquad (3.188)
\end{aligned}
$$

Usando a expressão covariante

$$
\begin{aligned}
\gamma^0 H_1(t_j; \mathbf{p}_{j-1} - \mathbf{p}_j) &= e \, (\gamma^0 V - \vec{\gamma} \cdot \mathbf{A})(t_j; \mathbf{p}_{j-1} - \mathbf{p}_j) \\
&= e \; \not{A}(t_j; \mathbf{p}_{j-1} - \mathbf{p}_j) \qquad (3.189)
\end{aligned}
$$

e a transformada de Fourier do campo eletromagnético externo

$$
\not{A}(t_j; \mathbf{p}_{j-1} - \mathbf{p}_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk_j \; \not{A}(k_j; \mathbf{p}_{j-1} - \mathbf{p}_j) \, \mathrm{e}^{-ik_j t_j} \; , \qquad (3.190)
$$

podemos facilmente realizar as integrações em $t_1, ..., t_n$ e depois em $k_1, ..., k_n$, de forma que o elemento $S^{(n)}_{+-}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ resulta em

$$
\begin{aligned}
S^{(n)}_{+-}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{(-i)}{(2\pi)^{2n-1}} \, e^n \int d^4p_1 ... d^4p_{n-1} \, P_+(\mathbf{p}) \, \gamma^0 \; \not{A}(p - p_1) \, S^{ret}(p_1) \, \cdot \\
&\quad \cdot \not{A}(p_1 - p_2) \, S^{ret}(p_2) ... \, S^{ret}(p_{n-1}) \; \not{A}(p_{n-1} - q) \, P_-(\mathbf{q}) \; . \qquad (3.191)
\end{aligned}
$$

Por um procedimento análogo, obtemos as outras três projeções

$$
\begin{aligned}
S^{(n)}_{++}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= P_+(\mathbf{p}) \, S^{(n)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \, P_+(\mathbf{q}) \; , \qquad (3.192) \\
S^{(n)}_{-+}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= P_-(\mathbf{p}) \, S^{(n)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \, P_+(\mathbf{q}) \; , \qquad (3.193) \\
S^{(n)}_{--}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= P_-(\mathbf{p}) \, S^{(n)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \, P_-(\mathbf{q}) \; . \qquad (3.194)
\end{aligned}
$$

As quatro projeções podem ser resumidas na expressão

$$
\begin{aligned}
S^{(n)}_{\pm\pm}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{(-i)}{(2\pi)^{2n-1}} \, e^n \int d^4p_1 ... d^4p_{n-1} \, P_\pm(\mathbf{p}) \, \gamma^0 \; \not{A}(p - p_1) \, S^{ret}(p_1) \, \cdot \\
&\quad \cdot \not{A}(p_1 - p_2) \, S^{ret}(p_2) ... \, S^{ret}(p_{n-1}) \; \not{A}(p_{n-1} - q) \, P_\pm(\mathbf{q}) \; . \qquad (3.195)
\end{aligned}
$$

Os processos de espalhamento são avaliados pela probabilidade de transição entre os estados assintóticos Φ e Ψ no espaço de Fock, definida por

$$
\mathrm{P_{fi}} = |\underline{\mathbf{S}}_{\mathrm{fi}}|^2 = |(\Phi, \underline{\mathbf{S}}\Psi)|^2 \; . \qquad (3.196)
$$

O cálculo do elemento de matriz $\underline{\mathbf{S}}_{fi}$ envolverá as projeções $S_{\pm\pm}$, cujo termo de n -ésima ordem é dado pela expressão (3.195). Por exemplo, o espalhamento de elétrons no campo externo descrito pela segunda exponencial de (3.157), está associado à projeção S_{++}; a produção de pares elétron-pósitron, representada pela primeira exponencial de (3.157), envolve as projeções S_{++} e S_{-+}. Como veremos mais adiante, no cálculo da produção de pares elétron-pósitron a uma temperatura diferente de zero, haverá a necessidade de se calcular o processo de produção destes pares à temperatura zero, obtida a partir da expressão (3.195).

Capítulo 4

O Campo de Dirac Dual em Segunda Quantização

O objetivo central deste trabalho é construir a representação de Fock para o formalismo de matriz espalhamento para tratar processos de espalhamento à temperatura finita para o campo de Dirac. A temperatura será introduzida no formalismo de matriz $\underline{\mathbf{S}}$ através do método de TFD. Neste formalismo os efeitos de temperatura são introduzidos através de uma transformação de Bogoliubov térmica realizada sobre o espaço correspondente a um sistema duplicado, composto pelo sistema original (à temperatura zero) e seu dual, que é construído seguindo as regras de conjugação dual (til). Portanto, para que seja aplicada esta abordagem ao formalismo de matriz espalhamento, deveremos definir todos os elementos apresentados no *Capítulo 2* para o sistema dual (til), e com isto construir a teoria de espalhamento para o sistema duplicado e introduzir os efeitos de temperatura através da transformação de Bogoliubov.

Neste capítulo apresentaremos a construção da matriz espalhamento no espaço de Fock para o campo de Dirac dual sob a ação do campo eletromagnético externo $A^{\mu}(x)$. Apesar da semelhança entre o sistema dual e o original, optamos por apresentar a construção para o sistema dual à imagem daquela para o sistema original (*Capítulo 2*) para deixar claro seus detalhes e, principalmente, para destacar suas peculiaridades.

No *Capítulo 1* apresentamos os elementos de TFD numa notação diferente da usada na construção da matriz $\underline{\mathbf{S}}$ para o campo de Dirac (*Capítulo 2*). No que segue, adaptaremos a notação de TFD de forma a ficar próxima daquela usada na construção da matriz espalhamento.

Como vimos, o sistema dual é obtido a partir de um mapeamento antilinear do espaço direto, o qual é explicitado pelas definições (2.16), (2.17)

$$\begin{aligned} F\,|\psi\rangle &= F\,|\phi,\widetilde{\phi}\rangle = [F\,|\phi\rangle]\otimes|\widetilde{\phi}\rangle = [F\,|\phi\rangle]\otimes\langle\phi|\ , \\ \widetilde{F}\,|\psi\rangle &= \widetilde{F}\,|\phi,\widetilde{\phi}\rangle = |\phi\rangle\otimes\left[\widetilde{F}\,|\widetilde{\phi}\rangle\right] = |\phi\rangle\otimes\left[\langle\phi|\,F^{\dagger}\right]\ . \end{aligned} \tag{4.1}$$

Apesar de todos os elementos do sistema dual serem diferenciados dos seus correspondentes no sistema original apenas pelo til, eles escondem o comportamento associado a um sistema conjugado, como mostram as definições (4.1). Melhor dizendo, quando escrevemos que uma "partícula" de função de onda $\tilde{h}$ é criada como resultado da atuação do operador de criação $\tilde{a}^\dagger(\tilde{h})$ no vácuo $|\tilde{0}\rangle$, isto corresponde a

$$\tilde{h} = \tilde{a}^\dagger(\tilde{h})\,|\tilde{0}\rangle = \langle 0|\,a(h) = h^\dagger \ , \tag{4.2}$$

ou seja, na verdade este operador cria uma "partícula" com função de onda* $h^\dagger$. Na notação que adotaremos usaremos o *"til"* para representar todos os elementos correspondentes ao sistema dual, a qual não deixará explícitas as propriedades dos espaços conjugados. No entanto, em pontos deste desenvolvimento que se faça necessário, voltaremos a destacar esta característica do sistema dual.

4.1 Segunda Quantização no Espaço de Fock Dual

O espaço de Fock é definido como a soma direta de todos os espaços de Hilbert de muitas partículas. O espaço de Hilbert dual de uma "partícula"†, $\widetilde{\mathcal{H}}$, é o conjunto de todos os estados de uma partícula $\widetilde{\varphi}_1(\mathbf{x})$ de quadrado integrável ($L^2(\mathbb{R}^3)$). Definimos o estado de n partículas como

$$\widetilde{\varphi}_n(\mathbf{x}) \in \widetilde{\mathcal{H}}_n \hat{=} \underbrace{\widetilde{\mathcal{H}}_1 \otimes ... \otimes \widetilde{\mathcal{H}}_1}_{n\, fatores} \ . \tag{4.3}$$

Os estados que representam muitas partículas idênticas devem ser simetrizados ou antissimetrizados. Se definimos o operador de (anti)simetrização $S_n^\pm$, teremos o estado simetrizado

$$S_n^+\,\widetilde{\varphi}_n = \frac{1}{n!}\sum_\pi \widetilde{\varphi}_n(\mathbf{x}_{\pi_1}, ..., \mathbf{x}_{\pi_n}) \tag{4.4}$$

para as partículas que obedecem à estatística de Bose, e o estado antissimetrizado

$$S_n^-\,\widetilde{\varphi}_n = \frac{1}{n!}\sum_\pi (-1)^\pi\,\widetilde{\varphi}_n(\mathbf{x}_{\pi_1}, ..., \mathbf{x}_{\pi_n}) \tag{4.5}$$

para as partículas que obedecem à estatística de Fermi. Esses operadores $S_n^\pm$ são os mesmos operadores de projeção definidos pelas expressões (3.5). Sendo assim, os espaços duais de n partículas são os espaços de Hilbert (anti)simetrizados

$$\widetilde{\mathcal{H}}_n^\pm \hat{=} S_n^\pm\,\widetilde{\mathcal{H}}_n \ , \tag{4.6}$$

*Como $\tilde{h}$ denota a função de onda de uma partícula dual, a função conjugada deveria ser representada por $\tilde{h}^*$. No entanto, antecipando a notação apropriada para o tratamento de quadriespinores, estamos adotando $\tilde{h}^\dagger$.

†Para o sistema dual escrevemos "partícula" (entre aspas) já que não se trata de partícula física. No entanto, no que segue omitiremos as aspas por simplicidade.

e o espaço de Fock correspondente a sistemas duais de muitas partículas é definido como

$$\widetilde{\mathcal{F}}^{\pm} \hat{=} \oplus_{n=0}^{\infty} \widetilde{\mathcal{H}}_n^{\pm} = \widetilde{\mathcal{H}}_0 \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_1 \oplus (\widetilde{\mathcal{H}}_1 \otimes \widetilde{\mathcal{H}}_1)_2^{\pm} \oplus ... \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_n^{\pm} \oplus ... \ , \tag{4.7}$$

onde

$$\widetilde{\mathcal{H}}_0 \hat{=} \tilde{\alpha}\, \widetilde{\Omega} \ , \qquad (\tilde{\alpha} \in \mathbb{C}) \tag{4.8}$$

é o espaço unidimensional que constitui o vácuo do sistema dual[‡].

Um elemento do espaço de Fock $\widetilde{\mathcal{F}}$ é dado por

$$\widetilde{\Phi}^{\pm} = \left(\widetilde{\varphi}_0 \, , \widetilde{\varphi}_1 \, , \widetilde{\varphi}_2^{\pm} \, , ...\right) \in \widetilde{\mathcal{F}}^{\pm} \tag{4.9}$$

onde

$$\widetilde{\varphi}_n^{\pm} \in \widetilde{\mathcal{H}}_n^{\pm} \tag{4.10}$$

e

$$\widetilde{\varphi}_0 = \tilde{\alpha}\, \widetilde{\Omega} \in \widetilde{\mathcal{H}}_0 \tag{4.11}$$

são os estados (anti)simetrizados de n partículas. A partir deste ponto usaremos a notação simplificada na qual omitiremos o sinal $\pm$ nas quantidades (anti)simetrizadas.

O produto escalar entre dois elementos do espaço de Fock dual é definido como

$$(\widetilde{\Phi} \, , \widetilde{\Psi}) = \sum_{n=0}^{\infty} (\widetilde{\varphi}_n \, , \widetilde{\psi}_n)_n \tag{4.12}$$

onde $(\ ,\ )_n$ é o produto escalar em $\widetilde{\mathcal{H}}_n$. A independência entre os sistemas original e dual leva a

$$(\Phi \, , \widetilde{\Psi}) = 0 \ , \tag{4.13}$$

sendo Φ um vetor do espaço de Fock $\mathcal{F}$ do sistema original e $\widetilde{\Psi}$ um vetor do espaço de Fock $\widetilde{\mathcal{F}}$ do sistema dual.

O espaço de Fock $\widetilde{\mathcal{F}}$ é o espaço composto por todos os estados de muitas partículas de norma finita,

$$\parallel \widetilde{\Phi} \parallel^2 \hat{=} (\widetilde{\Phi} \, , \widetilde{\Phi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \|\widetilde{\varphi}\|_n^2 < \infty \ . \tag{4.14}$$

Podemos definir operadores de criação e operadores de aniquilação, que mudam o número de partículas do sistema. Os *operadores de criação* $\tilde{a}^{\dagger}(\tilde{h})$, que criampartículas de função de onda $\tilde{h} \in \widetilde{\mathcal{H}}_1$, são tais que

$$\tilde{a}^{\dagger}(\tilde{h})\, \widetilde{\Omega} = \tilde{h} \ , \tag{4.15}$$

[‡]Na notação de TFD, o vácuo normalizado $\widetilde{\Omega}$ é representado por $|\tilde{0}\rangle$.

onde $\tilde{h} \in \widetilde{\mathcal{H}}_1$. Sua ação sobre o espaço de Fock dual muda o estado do sistema de um setor de $(n-1)$ partículas para o setor de n partículas, ou seja,

$$(\tilde{a}^\dagger(\tilde{h})\,\widetilde{\Phi})_n = \sqrt{n}\,S_n^\pm(\tilde{h} \otimes \widetilde{\varphi}_{n-1})_n \ . \tag{4.16}$$

O fator $\sqrt{n}$ torna estes operadores não limitados para bósons. No entanto, para férmions, os mesmos são limitados

$$\| \ \tilde{a}^\dagger(\tilde{h})\,\widetilde{\Phi}\ \|_n^2 \leq \|\ \tilde{h}\ \|_1^2 \,\|\ \widetilde{\Phi}\ \|^2 \tag{4.17}$$

e definidos sobre todo $\widetilde{\mathcal{F}}^-$. Os operadores de criação $\tilde{a}^\dagger(\tilde{h})$ podem ser escritos em termos de funcionais a valores de operadores $\tilde{a}^\dagger(\mathbf{x})$ e $\tilde{a}^\dagger(\mathbf{k})$, que são geralmente chamados, respectivamente, de *operadores de campo no espaço das coordenadas* e *operadores de campo no espaço dos momentos*. Estes funcionais definem o mapeamento $\tilde{h} \to \tilde{a}^\dagger(\tilde{h})$

$$\begin{aligned}\tilde{a}^\dagger(\tilde{h}) &= \int d^3x\, \tilde{a}^\dagger(\mathbf{x})\,\tilde{h}(\mathbf{x}) \\ &= \int d^3k\, \tilde{a}^\dagger(\mathbf{k})\,\tilde{h}(\mathbf{k}) \ ,\end{aligned} \tag{4.18}$$

que expressa a linearidade de $\tilde{a}^\dagger$ com respeito a $\tilde{h}$. Na definição acima, $\tilde{h}(\mathbf{k})$ é a transformada de Fourier de $\tilde{h}(\mathbf{x})$.

Seja o conjunto $\{\tilde{h}_j\}$ dos vetores que formam uma base ortonormal em $\widetilde{\mathcal{H}}_1$, e $\{\tilde{h}_j^\dagger\}$ seus conjugados. As definições (4.18) podem ser escritas como um produto escalar complexo formal

$$\tilde{a}^\dagger(\tilde{h}_j) = (\tilde{h}_j^\dagger\,, \tilde{a}^\dagger(\mathbf{x}))\ , \tag{4.19}$$

onde definimos

$$(\tilde{h}, \tilde{h}') = \int d^3x\, \tilde{h}^\dagger(\mathbf{x})\,\tilde{h}'(\mathbf{x}) = \sum_j \int d^3x\, \tilde{h}_j^\dagger(\mathbf{x})\,\tilde{h}_j'(\mathbf{x}) \ . \tag{4.20}$$

Motivados pela semelhança entre a expressão (4.19) e a definição dos coeficientes de Fourier, podemos escrever os operadores de campo como

$$\tilde{a}^\dagger(\mathbf{x}) = \sum_j \tilde{a}^\dagger(\tilde{h}_j)\,\tilde{h}_j^\dagger(\mathbf{x}) = \sum_j \tilde{a}^\dagger(\tilde{h}_j^\dagger)\,\tilde{h}_j(\mathbf{x}) \ , \tag{4.21}$$

$$\tilde{a}^\dagger(\mathbf{k}) = \sum_j \tilde{a}^\dagger(\tilde{h}_j)\,\tilde{h}_j^\dagger(\mathbf{k}) = \sum_j \tilde{a}^\dagger(\tilde{h}_j^\dagger)\,\tilde{h}_j(\mathbf{k}) \ . \tag{4.22}$$

Os *operadores de aniquilação* $\tilde{a}(\tilde{h})$ eliminam partículas de função de onda $\tilde{h}$, reduzindo o número de partículas do sistema. Eles são definidos como

$$(\tilde{a}(\tilde{h})\,\widetilde{\Phi})_n(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) = \sqrt{n+1} \int d^3x\, \tilde{h}^\dagger(\mathbf{x})\,\widetilde{\varphi}_{n+1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) \tag{4.23}$$

$$\tilde{a}(\tilde{h})\,\widetilde{\Omega} = 0\ , \quad \forall\ \tilde{h} \in \widetilde{\mathcal{H}}_1 \ . \tag{4.24}$$

A expressão (4.23) mostra a dependência antilinear de $\widetilde{a}(\tilde{h})$ com respeito $\tilde{h}$, e vale a relação

$$(\tilde{a}^{\dagger}(\tilde{h})\,\widetilde{\Psi},\widetilde{\Phi}) = (\widetilde{\Psi},\,\tilde{a}(\tilde{h})\,\widetilde{\Phi}) \ . \tag{4.25}$$

Portanto, os operadores de criação, definidos em (4.16), são os adjuntos dos operadores de aniquilação (4.23). Da mesma forma que para os operadores de criação, podemos definir os *operadores de campo no espaço das coordenadas*, $\tilde{a}(\mathbf{x})$, e *dos momentos*, $\tilde{a}(\mathbf{k})$, tais que

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(\tilde{h}) &= \int d^3x\, \tilde{h}^{\dagger}(\mathbf{x})\, \tilde{a}(\mathbf{x}) \\
&= \int d^3k\, \tilde{h}^{\dagger}(\mathbf{k})\, \tilde{a}(\mathbf{k}) \ ,
\end{aligned} \tag{4.26}$$

e

$$\tilde{a}(\mathbf{x}) = \sum_j \tilde{h}_j(\mathbf{x})\, \tilde{a}(\tilde{h}_j) = \sum_j \tilde{h}_j^{\dagger}(\mathbf{x})\, \tilde{a}(\tilde{h}_j^{\dagger}) \ , \tag{4.27}$$

$$\tilde{a}(\mathbf{k}) = \sum_j \tilde{h}_j(\mathbf{k})\, \tilde{a}(\tilde{h}_j) = \sum_j \tilde{h}_j^{\dagger}(\mathbf{k})\, \tilde{a}(\tilde{h}_j^{\dagger}) \ . \tag{4.28}$$

O conjunto dos operadores que atuam no espaço de Fock $\widetilde{\mathcal{F}}$ é formado pelos operadores que mantém o número de partículas constante e pelos operadores que mudam o número de partículas do estado dual, como os de criação e de aniquilação. Podemos definir o operador número de partículas

$$\underline{\widetilde{\mathbf{N}}} = \sum_j \tilde{a}^{\dagger}(\tilde{h}_j)\, \tilde{a}(\tilde{h}_j) = \int d^3x\, \tilde{a}^{\dagger}(\mathbf{x})\, \tilde{a}(\mathbf{x}) \ , \tag{4.29}$$

que não muda o número de partículas do estado. De fato, sua atuação num estado de Fock resulta em

$$\begin{aligned}
(\underline{\widetilde{\mathbf{N}}}\,\widetilde{\Phi})_n &= \sum_j (\tilde{a}^{\dagger}(\tilde{h}_j)\, \tilde{a}(\tilde{h}_j)\, \widetilde{\Phi})_n \\
&= n\, S_n^{\pm}\, \widetilde{\varphi}_n(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) \\
&= n(\widetilde{\Phi})_n \ ,
\end{aligned} \tag{4.30}$$

onde $(\ )_n$ representa a n-ésima componente do espaço de Fock. O resultado (4.30) mostra que o operador $\underline{\widetilde{\mathbf{N}}}$ tem a propriedade de determinar o número n de partículas do estado. Este é um operador autoadjunto positivo, e todos os operadores $\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}$ que comutam com ele não mudam o número de partículas do sistema.

A qualquer operador (limitado) $\widetilde{A}(\mathbf{x})$ de uma partícula, que atua no espaço de Hilbert $\widetilde{\mathcal{H}}_1$, pode ser associado um operador $\underline{\widetilde{\mathbf{A}}}$ que atua no espaço de Fock, definido como

$$
\begin{aligned}
\underline{\widetilde{\mathbf{A}}} &= \int d^3x \, \tilde{a}^\dagger(\mathbf{x}) \, \widetilde{A}(\mathbf{x}) \, \tilde{a}(\mathbf{x}) \\
&= \sum_{jk} (\tilde{h}_j \, , \, \widetilde{A}(\mathbf{x}) \tilde{h}_k) \, \tilde{a}^\dagger(\tilde{h}_j) \, \tilde{a}(\tilde{h}_k) \ , \qquad (4.31)
\end{aligned}
$$

tal que

$$
\begin{aligned}
(\underline{\widetilde{\mathbf{A}}} \widetilde{\Phi})_n &= \sum_{jk} \Big[(\tilde{h}_j \, , \, \widetilde{A}(\mathbf{x}) \, \tilde{h}_k) \, \tilde{a}^\dagger(\tilde{h}_j) \, \tilde{a}(\tilde{h}_k) \, \widetilde{\Phi} \Big]_n \\
&= \sum_{m=1}^{n} \widetilde{A}(\mathbf{x}_m) \, \widetilde{\varphi}_n(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) \ . \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

Os operadores de criação e aniquilação devem satisfazer a ágebra comutante $(-)$, no caso de sistemas bosônicos, ou anticomutante $(+)$, para sistemas fermiônicos, cujas relações básicas são

$$
\Big[\tilde{a}(\tilde{h}_1) \, , \tilde{a}^\dagger(\tilde{h}_2) \Big]_{\mp} = (\tilde{h}_1 \, , \tilde{h}_2) \ , \qquad (4.33)
$$

sendo as demais nulas. Estas relações de (anti)comutação podem ser obtidas a partir das definições dos operadores de criação, (4.16), e de aniquilação, (4.23). A independência do sistema original e seu dual (til) faz com que todas as relações de (anti)comutação entre operadores dos dois sistemas se anulem.

Como no caso do sitema original (*Seção 2.1*), a irredutibilidade do espaço de Fock e as relações de (anti)comutação (4.33) levam a uma equivalência entre os vetores $\tilde{h}_n^\dagger$ do espaço de Hilbert $\widetilde{\mathcal{H}}_n$, e o setor de n partículas do espaço de Fock $\widetilde{\mathcal{F}}$. Podemos mostrar esta propriedade considerando que o setor de uma partícula $(\widetilde{\Phi})_1$ do espaço de Fock possa sergerado pelo vetor

$$
\frac{1}{\sqrt{1!}} \tilde{a}^\dagger(\tilde{h}) \, \widetilde{\Omega} \ , \qquad (4.34)
$$

e então

$$
\begin{aligned}
(\tilde{a}^\dagger(\tilde{h}_1) \, \widetilde{\Omega} \, , \, \tilde{a}^\dagger(\tilde{h}_2) \, \widetilde{\Omega}) &= (\widetilde{\Omega} \, , \, \tilde{a}(\tilde{h}_1) \, \tilde{a}^\dagger(\tilde{h}_2) \, \widetilde{\Omega}) \\
&= (\widetilde{\Omega} \, , \, [(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) \pm \tilde{a}^\dagger(\tilde{h}_2) \, \tilde{a}(\tilde{h}_1)] \, \widetilde{\Omega}) \\
&= (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2) \ , \qquad (4.35)
\end{aligned}
$$

ou seja, o vetor do espaço de Fock $\tilde{a}^\dagger(\tilde{h}) \, \widetilde{\Omega}$, (4.34), é unitariamente equivalente ao vetor $\tilde{h}$ do espaço de Hilbert $\widetilde{\mathcal{H}}_1$. A extensão para o setor de n partículas leva à correspondência entre os vetores

$$
(\tilde{a}^\dagger(\tilde{h}) \, \widetilde{\Phi})_n \qquad \text{e} \qquad \sqrt{n} \, S_n^{\pm}(\tilde{h} \otimes \widetilde{\varphi}_{n-1})_n \ . \qquad (4.36)
$$

Esta equivalência permite-nos definir a evolução temporal dos vetores no espaço de Fock a partir da dinâmica de uma partícula definida sobre o espaço de Hilbert $\widetilde{\mathcal{H}}_1$.

4.2 Evolução Temporal no Espaço de Fock Dual

O formalismo de TFD estabelece que os operadores, estados e equações associados ao sistema dual devem ser obtidos do sistema original, através das regras de conjugação dual (*til*) (2.29). Portanto, a um sistema cuja dinâmica de uma partícula é regida pela equação tipo Schrödinger

$$i\frac{dh}{dt} = H\,h \;, \tag{4.37}$$

corresponderá um sistema dual com a dinâmica dada pela equação

$$i\frac{d\tilde{h}}{dt} = -\,\widetilde{H}\,\tilde{h} \;, \tag{4.38}$$

que tem como solução a transformação unitária

$$\tilde{h}(t) = \mathrm{e}^{i\widetilde{H}t}\,\tilde{h}(0) = \widetilde{U}\,\tilde{h} \;, \tag{4.39}$$

onde $\widetilde{H}$ é o operador hamiltoniano do sistema dual, e $\widetilde{U}$ o operador de evolução temporal. Comparando a expressão (4.39) com aquela para o sistema original, (3.44), vemos que a evolução temporal de $\tilde{h}$ se dá no sentido inverso da evolução de h.

Se, no lugar de $\tilde{h}$, tomamos as funções $\tilde{h}(t)$ como funções teste dos operadores no espaço de Fock, teremos

$$\tilde{a}^{\dagger}(\tilde{h}(t))\,\widetilde{\Phi} = \tilde{a}^{\dagger}(\widetilde{U}\tilde{h})\,\widetilde{\Phi} \;. \tag{4.40}$$

Podemos introduzir o operador evolução temporal $\underline{\widetilde{\mathbf{U}}}$ no espaço de Fock tal que este mantenha o vácuo invariante,

$$\underline{\widetilde{\mathbf{U}}}\,\widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega} \;, \tag{4.41}$$

e seja definido por

$$\begin{aligned}
(\underline{\widetilde{\mathbf{U}}}\,\widetilde{\Phi})_n &\hat{=} (\otimes_{j=1}^{n}\widetilde{U})\widetilde{\varphi}_n \\
&= S_n^{\pm}(\widetilde{U}\tilde{h}_1 \otimes \widetilde{U}\tilde{h}_2 \otimes ... \otimes \widetilde{U}\tilde{h}_n) \;,
\end{aligned} \tag{4.42}$$

onde $\widetilde{\varphi}_n$ é um estado de n partículas

$$\widetilde{\varphi}_n = S_n^{\pm}(\tilde{h}_1 \otimes \tilde{h}_2 \otimes ... \otimes \tilde{h}_n) \;. \tag{4.43}$$

O operador $\underline{\widetilde{\mathbf{U}}}$ é unitário, portanto, existe o operador $\underline{\widetilde{\mathbf{U}}}^{-1}$, tal que $\underline{\widetilde{\mathbf{U}}}\underline{\widetilde{\mathbf{U}}}^{\dagger} = \underline{\widetilde{\mathbf{U}}}\underline{\widetilde{\mathbf{U}}}^{-1} = 1$, de forma que podemos escrever

$$\begin{aligned}
(\underline{\widetilde{\mathbf{U}}}\tilde{a}^{\dagger}(\tilde{h})\,\widetilde{\Phi})_n &= (\underline{\widetilde{\mathbf{U}}}\,\tilde{a}^{\dagger}(\tilde{h})\,\underline{\widetilde{\mathbf{U}}}^{-1}\underline{\widetilde{\mathbf{U}}}\,\widetilde{\Phi})_n \\
&= (\underline{\widetilde{\mathbf{U}}}\,\tilde{a}^{\dagger}(\tilde{h})\,\underline{\widetilde{\mathbf{U}}}^{-1}\widetilde{\Psi})_n \;.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

onde definimos $\widetilde{\Psi} = \underline{\widetilde{\mathbf{U}}}\,\widetilde{\Phi}$. Por outro lado, usando a definição (4.43) temos

$$\begin{aligned}
(\underline{\widetilde{\mathbf{U}}}\tilde{a}^\dagger(\tilde{h})\,\widetilde{\Phi})_n &= (\otimes_{j=1}^n \widetilde{U})\sqrt{n}\,S_n^\pm(\tilde{h}\otimes\widetilde{\varphi}_{n-1}) \\
&= \sqrt{n}\,S_n^\pm(\widetilde{U}\tilde{h}\otimes(\otimes_{j=1}^{n-1}\widetilde{U})\widetilde{\varphi}_{n-1}) \\
&= \sqrt{n}\,S_n^\pm(\widetilde{U}\tilde{h}\otimes\widetilde{\psi}_{n-1}) \\
&= (\tilde{a}^\dagger(\widetilde{U}\tilde{h})\,\widetilde{\Psi})_n \ , \qquad (4.45)
\end{aligned}$$

Comparando os resultados (4.44) e (4.45), vemos que o operador de criação dependente do tempo pode ser escrito como

$$\tilde{a}^\dagger(\tilde{h}(t)) = \tilde{a}^\dagger(\widetilde{U}\tilde{h}) = \underline{\widetilde{\mathbf{U}}}\,\tilde{a}^\dagger(\tilde{h})\,\underline{\widetilde{\mathbf{U}}}^{-1} \hat{=} \tilde{a}_t^\dagger(\tilde{h}) \ , \qquad (4.46)$$

e seu conjugado

$$\tilde{a}(\tilde{h}(t)) = \tilde{a}(\widetilde{U}\tilde{h}) = \underline{\widetilde{\mathbf{U}}}\,\tilde{a}(\tilde{h})\,\underline{\widetilde{\mathbf{U}}}^{-1} \hat{=} \tilde{a}_t(\tilde{h}) \ . \qquad (4.47)$$

Se derivamos a equação (4.42) com relação ao tempo,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\underline{\widetilde{\mathbf{U}}}\,\widetilde{\Phi})_n &= \frac{d}{dt}(\otimes_{j=1}^n \widetilde{U})\,\widetilde{\varphi}_n = \frac{d}{dt}S_n^\pm(\widetilde{U}\tilde{h}_1\otimes\widetilde{U}\tilde{h}_2\otimes\ldots\otimes\widetilde{U}\tilde{h}_n) \\
&= i\sum_{j=1}^n(\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes\widetilde{H}_{(j)}\otimes\ldots\otimes\mathbf{1})\,(\underline{\widetilde{\mathbf{U}}}\,\widetilde{\Phi})_n \\
&= i\left[\underline{\widetilde{\mathbf{H}}}(\underline{\widetilde{\mathbf{U}}}\,\widetilde{\Phi})_n\right] \ , \qquad (4.48)
\end{aligned}$$

obtemos a equação de evolução para o operador $\underline{\widetilde{\mathbf{U}}}$

$$i\,\frac{d}{dt}\underline{\widetilde{\mathbf{U}}} = -\underline{\widetilde{\mathbf{H}}}\,\underline{\widetilde{\mathbf{U}}} = -\underline{\widetilde{\mathbf{U}}}\,\underline{\widetilde{\mathbf{H}}} \ , \qquad (4.49)$$

onde definimos o operador hamiltoniano $\underline{\widetilde{\mathbf{H}}}$ no espaço de Fock como

$$\underline{\widetilde{\mathbf{H}}} \hat{=} \sum_{j=1}^n(\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes\widetilde{H}_{(j)}\otimes\ldots\otimes\mathbf{1}) \ . \qquad (4.50)$$

Nesta expressão o índice (j) significa que o operador $\widetilde{H}$ ocupa a posição j no produto direto. A solução da equação (4.49) é a transformação unitária

$$\underline{\widetilde{\mathbf{U}}} = \mathrm{e}^{i\underline{\widetilde{\mathbf{H}}}t} \ . \qquad (4.51)$$

Na expressão (4.31), estabelecemos a relação entre operadores no espaço de Hilbert e seu correspondente no espaço de Fock. De acordo com esta definição, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\underline{\widetilde{\mathbf{H}}} &= \sum_{jk}(\tilde{h}_j\,,\,\widetilde{H}(\mathbf{x})\,\tilde{h}_k)\,\tilde{a}^\dagger(\tilde{h}_j)\,\tilde{a}(\tilde{h}_k) \\
&= \int d^3x\,\tilde{a}^\dagger(\mathbf{x})\,\widetilde{H}(\mathbf{x})\,\tilde{a}(\mathbf{x}) \ , \qquad (4.52)
\end{aligned}$$

e sua atuação num estado de Fock fica dada por

$$
\begin{aligned}
(\underline{\mathbf{H}}\,\Phi)_n &= \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{1} \otimes ... \otimes \widetilde{H}_{(j)} \otimes ... \otimes \mathbf{1})\,\widetilde{\varphi}_n \\
&= \sum_{j=1}^{n} \widetilde{H}(\mathbf{x}_j)\,\widetilde{\varphi}_n(\mathbf{x}_1, .., \mathbf{x}_n)\ . \qquad (4.53)
\end{aligned}
$$

Os operadores de criação $\tilde{a}_t^\dagger(\tilde{h})$ e de aniquilação $\tilde{a}_t(\tilde{h})$ têm sua evolução temporal dada pela equação de Heisenberg,

$$
\frac{d}{dt}\tilde{a}_t^\dagger(\tilde{h}) = i\,[\underline{\widetilde{\mathbf{H}}}\ ,\ \tilde{a}_t^\dagger(\tilde{h})]_-\ , \qquad (4.54)
$$

que pode ser obtida diferenciando a expressão (4.46) com relação ao tempo e levando em conta a definição (4.51).

Para o sistema dual, várias quantidades associadas aos observáveis do sistema original são calculadas como valores esperados dos correspondentes operadores no estado de Fock, a saber

$$
\langle \underline{\widetilde{\mathbf{A}}} \rangle_{\widetilde{\Phi}} = (\widetilde{\Phi}, \underline{\widetilde{\mathbf{A}}}\,\widetilde{\Phi})\ . \qquad (4.55)
$$

Na próxima seção iremos aplicar o método de segunda quantização, apresentado nesta seção, ao campo de Dirac dual sujeito ao campo eletromagnético externo independente do tempo $A^\mu(\mathbf{x})$.

4.3 Campo de Dirac Dual

O campo de Dirac dual tem seu espaço de Hilbert de uma partícula $\widetilde{\mathcal{H}}_1 = (L^2(\mathbb{R}^3))^4$ formado pelas funções de onda espinoriais[§]

$$
\tilde{h} = \begin{pmatrix} \tilde{h}_1 & \tilde{h}_2 & \tilde{h}_3 & \tilde{h}_4 \end{pmatrix}\ , \qquad (4.56)
$$

e dotado do produto escalar

$$
\begin{aligned}
(\tilde{h}, \tilde{h}') &= (\tilde{h}'^\dagger, \tilde{h}^\dagger) = \int d^3x\, \tilde{h}'(\mathbf{x})\, \tilde{h}^\dagger(\mathbf{x}) \\
&= \sum_r \int d^3x\, \tilde{h}'_r(\mathbf{x})\, \tilde{h}_r^\dagger(\mathbf{x})\ , \qquad (4.57)
\end{aligned}
$$

onde $r = 1, 2, 3, 4$ e $\tilde{h}^\dagger$ é o quadriespinor

$$
\tilde{h}^\dagger = \begin{pmatrix} \tilde{h}_1^\dagger \\ \tilde{h}_2^\dagger \\ \tilde{h}_3^\dagger \\ \tilde{h}_4^\dagger \end{pmatrix}\ . \qquad (4.58)
$$

[§]Como podemos notar, o vetor $\tilde{h}$ pertence ao espaço formado pelos vetores de estado usualmente representados por $\langle \tilde{h}|$.

A dinâmica do campo de Dirac dual num campo eletromagnético externo independente do tempo, em $\widetilde{\mathcal{H}}_1$, é dada pelo operador hamiltoniano

$$\widetilde{H} = \widetilde{H}_0 + H_1 \ , \tag{4.59}$$

onde

$$H_1 = e\,(V - \vec{\alpha}\cdot\mathbf{A})(\mathbf{x}) \ , \tag{4.60}$$

e fizemos $\hbar = c = 1$. O hamiltoniano $\widetilde{H}$ possui um espectro formado por um subespaço de energia positiva e outro de energia negativa. A projeção em cada subespaço é realizada pelos mesmos operadores de projeção $P_\pm$, definidos em (B.31) e (B.32), com as propriedades (3.62) e (3.63). Portanto, o espaço de Hilbert $\widetilde{\mathcal{H}}$ pode ser decomposto em

$$\widetilde{\mathcal{H}}_\pm = P_\pm \widetilde{\mathcal{H}}_1 \ , \tag{4.61}$$

tal que

$$\widetilde{\mathcal{H}}_1 = P_+ \widetilde{\mathcal{H}}_1 \oplus P_- \widetilde{\mathcal{H}}_1 \ . \tag{4.62}$$

Os operadores de campo também podem ser decompostos em partes correspondentes à energia positiva ($\tilde{d}$) e energia negativa ($\tilde{b}$), como

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\tilde{h}) &= \tilde{b}(P_-\tilde{h}) + \tilde{d}(P_+\tilde{h}) \ , && (4.63)\\ \tilde{a}^\dagger(\tilde{h}) &= \tilde{b}^\dagger(P_-\tilde{h}) + \tilde{d}^\dagger(P_+\tilde{h}) \ , && (4.64) \end{aligned}$$

onde estamos assumindo

$$\tilde{b}(P_+\tilde{h}) = 0 = \tilde{d}(P_-\tilde{h}) \ . \tag{4.65}$$

Assim, a definição do vácuo $\widetilde{\Omega}$, (4.24), torna-se

$$\tilde{b}(P_-\tilde{h})\ \widetilde{\Omega} = 0 = \tilde{d}(P_+\tilde{h})\ \widetilde{\Omega} \ . \tag{4.66}$$

O operador hamiltoniano no espaço de Fock foi definido em (4.52) como

$$\underline{\widetilde{\mathbf{H}}}' = \sum_{jk} (\tilde{h}_j\, ,\, \widetilde{H}(\mathbf{x})\, \tilde{h}_k)\, \tilde{a}^\dagger(\tilde{h}_j)\, \tilde{a}(\tilde{h}_k) \ , \tag{4.67}$$

onde $\tilde{h}_i$ é a base de $\widetilde{\mathcal{H}} = \widetilde{\mathcal{H}}_+ \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_-$ e escrevemos o lado esquerdo de uma forma ligeiramente diferente, adequada aos nossos propósitos mais adiante. Se separarmos o conjunto $\{\tilde{h}_i\}$ em $\tilde{f}_i$ e $\tilde{g}_i$, de forma que $\tilde{f}_i$ seja base de $\widetilde{\mathcal{H}}_+$ e $\tilde{g}_i$ base de $\widetilde{\mathcal{H}}_-$, o hamiltoniano (4.67) pode ser escrito em função dos operadores de campo $\tilde{b}, \tilde{b}^\dagger, \tilde{d}, \tilde{d}^\dagger$ como

$$\underline{\widetilde{\mathbf{H}}}' = \sum_{jk} \Big[(\tilde{g}_j\, ,\, \widetilde{H}\ \tilde{g}_k)\, \tilde{b}^\dagger(\tilde{g}_j)\, \tilde{b}(\tilde{g}_k) + (\tilde{f}_j\, ,\, \widetilde{H}\ \tilde{f}_k)\, \tilde{d}^\dagger(\tilde{f}_j)\, \tilde{d}(\tilde{f}_k) \Big] \ . \tag{4.68}$$

Assim como o hamiltoniano $\widetilde{H}$ no espaço de Hilbert, o operador (4.68) no espaço de Fock não é limitado. No caso do sistema dual, enquanto $\underline{\mathbf{H}}$ do sistema físico deve ser limitado inferiormente, $\underline{\widetilde{\mathbf{H}}}$ deve ser limitado superiormente. Para contornar este inconveniente, trocamos os papéis dos operadores $\tilde{d}^\dagger$ e $\tilde{d}$, levando a definição (4.63) a

$$\widetilde{\psi}(\tilde{h}) = \tilde{b}(\tilde{h}_-) + \tilde{d}^\dagger(\tilde{h}_+^\dagger) \ , \tag{4.69}$$

onde $\tilde{h}_\pm \hat{=} P_\pm \tilde{h}$. O adjunto na função teste de $\tilde{d}^\dagger$ é necessário para não alterar a linearidade de $\widetilde{\psi}$ com respeito a $\tilde{h}$. Com objetivo de simplificar a notação, omitiremos o adjunto e assumiremos, daqui em diante, a convenção de que $\tilde{d}^\dagger(\tilde{h})$ é linear em $\tilde{h}$ já que $\widetilde{\psi}(\tilde{h})$ é um operador de aniquilação, e $\tilde{d}(\tilde{h})$ é antilinear. Portanto, teremos os operadores de Dirac

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}(\tilde{h}) &\hat{=} \tilde{b}(\tilde{h}_-) + \tilde{d}^\dagger(\tilde{h}_+) \ , \\
\widetilde{\psi}^\dagger(\tilde{h}) &\hat{=} \tilde{b}^\dagger(\tilde{h}_-) + \tilde{d}(\tilde{h}_+) \ ,
\end{aligned} \tag{4.70}$$

que, de acordo com (4.33), satisfazem a relação de anticomutação

$$\{\widetilde{\psi}(\tilde{h}_1)\,,\widetilde{\psi}^\dagger(\tilde{h}_2)\} = (\tilde{h}_1\,,\,\tilde{h}_2) \ , \tag{4.71}$$

e, conseqüentemente, os operadores que correspondem aos subespaços $\widetilde{\mathcal{H}}_-$ e $\widetilde{\mathcal{H}}_+$ satisfazem a mesma álgebra,

$$\begin{aligned}
\{\tilde{b}(\tilde{h}_1)\,,\tilde{b}^\dagger(\tilde{h}_2)\} &= (P_-\tilde{h}_1\,,P_-\tilde{h}_2) \ , \\
\{\tilde{d}(\tilde{h}_1)\,,\tilde{d}^\dagger(\tilde{h}_2)\} &= (P_+\tilde{h}_1^\dagger\,,P_+\tilde{h}_2^\dagger) = (P_+\tilde{h}_2\,,P_+\tilde{h}_1) \ .
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Assim como para o sistema original, os operadores $\tilde{b}$,$\tilde{b}^\dagger$ estão associados à partícula dual e os operadores $\tilde{d}$,$\tilde{d}^\dagger$ à antipartícula.

Os operadores de campo, de acordo com (4.18), (4.21), (4.26) e (4.27), ficam dados por

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}^\dagger(\tilde{h}) &= \int d^3x\,\widetilde{\psi}^\dagger(\mathbf{x})\,\tilde{h}(\mathbf{x}) \ , \\
\widetilde{\psi}(\tilde{h}) &= \int d^3x\,\tilde{h}^\dagger(\mathbf{x})\,\widetilde{\psi}(\mathbf{x}) \ ,
\end{aligned} \tag{4.73}$$

e

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) &= \sum_j \widetilde{\psi}^\dagger(\tilde{h}_j)\,\tilde{h}_j^\dagger(\mathbf{x}) = \sum_j \widetilde{\psi}^\dagger(\tilde{h}_j^\dagger)\,\tilde{h}_j(\mathbf{x}) \ , \\
\widetilde{\psi}(\mathbf{x}) &= \sum_j \tilde{h}(\mathbf{x})\,\widetilde{\psi}(\tilde{h}_j) = \sum_j \tilde{h}^\dagger(\mathbf{x})\,\widetilde{\psi}(\tilde{h}_j^\dagger) \ .
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Se usamos a separação $\{\tilde{h}_i\} = \{\tilde{f}_i, \tilde{g}_i\}$ dos vetores da base de $\widetilde{\mathcal{H}}$, estas expressões tornam-se

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}^\dagger(\mathbf{x}) &= \sum_j \left[\widetilde{\psi}^\dagger(\tilde{g}_j)\,\tilde{g}_j^\dagger(\mathbf{x}) + \widetilde{\psi}^\dagger(\tilde{f}_j)\,\tilde{f}_j^\dagger(\mathbf{x})\right] \\
&= \sum_j \left[\tilde{b}^\dagger(\tilde{g}_j)\,\tilde{g}_j^\dagger(\mathbf{x}) + \tilde{d}(\tilde{f}_j)\,\tilde{f}_j^\dagger(\mathbf{x})\right] \\
&= \sum_j \left[\tilde{b}^\dagger(\tilde{g}_j^\dagger)\,\tilde{g}_j(\mathbf{x}) + \tilde{d}(\tilde{f}_j^\dagger)\,\tilde{f}_j(\mathbf{x})\right]\;, \qquad (4.75)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}(\mathbf{x}) &= \sum_j \left[\widetilde{\psi}(\tilde{g}_j)\,\tilde{g}_j(\mathbf{x}) + \widetilde{\psi}(\tilde{f}_j)\,\tilde{f}_j(\mathbf{x})\right] \\
&= \sum_j \left[\tilde{b}(\tilde{g}_j)\,\tilde{g}_j(\mathbf{x}) + \tilde{d}^\dagger(\tilde{f}_j)\,\tilde{f}_j(\mathbf{x})\right] \\
&= \sum_j \left[\tilde{b}(\tilde{g}_j^\dagger)\,\tilde{g}_j^\dagger(\mathbf{x}) + \tilde{d}^\dagger(\tilde{f}_j^\dagger)\,\tilde{f}_j^\dagger(\mathbf{x})\right]\,, \qquad (4.76)
\end{aligned}$$

onde os vetores $\tilde{f}_j \in \widetilde{\mathcal{H}}_+$ e $\tilde{g}_j \in \widetilde{\mathcal{H}}_-$ formam uma base ortonormal de $\widetilde{\mathcal{H}}_1$. Das expressões (4.73) temos que

$$\begin{aligned}
\tilde{b}^\dagger(\tilde{h}) &= \int d^3x\,\tilde{b}^\dagger(\mathbf{x})\,\tilde{h}(\mathbf{x}) = \int d^3p\,\tilde{b}^\dagger(\mathbf{p})\,\tilde{h}(\mathbf{p})\,, \\
\tilde{b}(\tilde{h}) &= \int d^3x\,\tilde{h}^\dagger(\mathbf{x})\,\tilde{b}(\mathbf{x}) = \int d^3p\,\tilde{h}^\dagger(\mathbf{p})\,\tilde{b}(\mathbf{p})\,, \qquad (4.77)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{d}^\dagger(\tilde{h}) &= \int d^3x\,\tilde{d}^\dagger(\mathbf{x})\,\tilde{h}^\dagger(\mathbf{x}) = \int d^3p\,\tilde{d}^\dagger(\mathbf{p})\,\tilde{h}^\dagger(\mathbf{p})\,, \\
\tilde{d}(\tilde{h}) &= \int d^3x\,\tilde{h}(\mathbf{x})\,\tilde{d}(\mathbf{x}) = \int d^3p\,\tilde{h}(\mathbf{p})\,\tilde{d}(\mathbf{p})\,, \qquad (4.78)
\end{aligned}$$

e, de (4.74), obtemos

$$\begin{aligned}
\tilde{b}^\dagger(\mathbf{x}) &= \sum_j \tilde{b}^\dagger(\tilde{h}_j)\,\tilde{h}_j^\dagger(\mathbf{x}) = \sum_j \tilde{b}^\dagger(\tilde{h}_j^\dagger)\,\tilde{h}_j(\mathbf{x})\,, \\
\tilde{b}(\mathbf{x}) &= \sum_j \tilde{b}(\tilde{h}_j)\,\tilde{h}_j(\mathbf{x}) = \sum_j \tilde{b}(\tilde{h}_j^\dagger)\,\tilde{h}_j^\dagger(\mathbf{x})\,, \qquad (4.79)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{d}^\dagger(\mathbf{x}) &= \sum_j \tilde{d}^\dagger(\tilde{h}_j)\,\tilde{h}_j(\mathbf{x}) = \sum_j \tilde{d}^\dagger(\tilde{h}_j^\dagger)\,\tilde{h}_j^\dagger(\mathbf{x})\,, \\
\tilde{d}(\mathbf{x}) &= \sum_j \tilde{d}(\tilde{h}_j)\,\tilde{h}_j^\dagger(\mathbf{x}) = \sum_j \tilde{d}(\tilde{h}_j^\dagger)\,\tilde{h}_j(\mathbf{x})\,. \qquad (4.80)
\end{aligned}$$

O operador hamiltoniano no espaço de Fock, (4.68), com a redefinição (4.69) dos operadores de campo, fica escrito como

$$\begin{aligned}\underline{\widetilde{\mathbf{H}}} &= \sum_{jk}\Big[(\tilde{g}_j\,,\,\widetilde{H}\tilde{g}_k)\,\tilde{b}^\dagger(\tilde{g}_j)\,\tilde{b}(\tilde{g}_k) + (\tilde{f}_j\,,\,\widetilde{H}\tilde{f}_k)\,\tilde{d}(\tilde{f}_j)\,\tilde{d}^\dagger(\tilde{f}_k)\Big] \\ &= \sum_{jk}\Big[(\tilde{g}_j\,,\,\widetilde{H}\tilde{g}_k)\,\tilde{b}^\dagger(\tilde{g}_j)\,\tilde{b}(\tilde{g}_k) - (\tilde{f}_j\,,\,\widetilde{H}\tilde{f}_k)\,\tilde{d}^\dagger(\tilde{f}_k)\,\tilde{d}(\tilde{f}_j) + c\Big]\;, \qquad (4.81)\end{aligned}$$

o qual é limitado superiormente, já que $\tilde{b}^\dagger, \tilde{b}$ correspondem ao espectro negativo e $\tilde{d}^\dagger, \tilde{d}$ ao espectro positivo. Os operadores $\tilde{b}, \tilde{b}^\dagger$ estão associados à partícula dual de e $\tilde{d}, \tilde{d}^\dagger$ à antipartícula dual, as quais correpondem aos espectros de energia invertidos com relação ao sistema original. Portanto, o operador hamiltoniano $\underline{\widetilde{\mathbf{H}}}$ admite um máximo correspondendo ao vácuo. Como $c \in \mathbb{C}$ não contribuirá para a dinâmica dos campos $\widetilde{\psi}$, não será considerado no que segue. Fazer isto é o mesmo que tomar como definição do operador $\underline{\widetilde{\mathbf{H}}}$, o produto normalmente ordenado

$$\underline{\widetilde{\mathbf{H}}} = \int dx^3 \,{:}\widetilde{\psi}^\dagger(\mathbf{x})\,\widetilde{H}(\mathbf{x})\,\widetilde{\psi}(\mathbf{x}){:}\;. \qquad (4.82)$$

Com a nova definição (4.70) para os operadores de campo, o vácuo $\widetilde{\Omega}$ não pode mais ser definido por (4.66). O novo vácuo deverá ser tal que

$$\underline{\widetilde{\mathbf{H}}}\,\widetilde{\Omega} = 0\;. \qquad (4.83)$$

Assim como em (3.75), podemos introduzir os operadores de campo dependentes do tempo

$$\widetilde{\psi}^\dagger_t(\tilde{h}) \,\hat{=}\, \widetilde{\psi}^\dagger(\mathrm{e}^{-i\widetilde{H}t}\tilde{h}) = \mathrm{e}^{-i\underline{\widetilde{\mathbf{H}}}t}\,\widetilde{\psi}^\dagger(\tilde{h})\,\mathrm{e}^{i\underline{\widetilde{\mathbf{H}}}t}, \qquad (4.84)$$

cuja evolução temporal é dada pela equação de Heisenberg

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\psi}^\dagger_t(\tilde{h}) = i\,[\widetilde{\psi}^\dagger_t(\tilde{h})\,,\,\underline{\widetilde{\mathbf{H}}}]_-\;. \qquad (4.85)$$

Aqui, assim como em (3.75), em (4.84) estamos tomando como funções teste $\tilde{h}(-t)$, o que corresponde a trocar partícula por antipartícula duais.

Associado ao operador dependente do tempo $\widetilde{\psi}^\dagger_t(\tilde{h})$, teremos o operador de campo no espaço das coordenadas $\widetilde{\psi}^\dagger_t(\mathbf{x}) \hat{=} \widetilde{\psi}^\dagger(x)$, definido de forma análoga a (4.75),

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}^\dagger(x) &= \sum_j\Big[\widetilde{\psi}^\dagger_t(\tilde{g}_j)\,\tilde{g}^\dagger_j(\mathbf{x}) + \widetilde{\psi}^\dagger_t(\tilde{f}_j)\,\tilde{f}^\dagger_j(\mathbf{x})\Big] \\ &= \sum_j\Big[\widetilde{\psi}^\dagger(\mathrm{e}^{-i\widetilde{H}_0t}\tilde{g}_j)\,\tilde{g}^\dagger_j(\mathbf{x}) + \widetilde{\psi}^\dagger(\mathrm{e}^{-i\widetilde{H}_0t}\tilde{f}_j)\,\tilde{f}^\dagger_j(\mathbf{x})\Big] \\ &= \sum_j\Big[\tilde{b}^\dagger(\mathrm{e}^{-i\widetilde{H}_0t}\tilde{g}_j)\,\tilde{g}^\dagger_j(\mathbf{x}) + \tilde{d}(\mathrm{e}^{-i\widetilde{H}_0t}\tilde{f}_j)\,\tilde{f}^\dagger_j(\mathbf{x})\Big] \\ &\hat{=}\; \widetilde{\psi}^\dagger(x)^{(-)} + \widetilde{\psi}^\dagger(x)^{(+)}\;, \qquad (4.86)\end{aligned}$$

onde substituimos (4.84). Os índices (+) e (−) nas expressões acima significam que as quantidades estão associadas, respectivamente, ao subespaço positivo e negativo do espectro de $\widetilde{H}_0$.

Considerando o caso particular da dinâmica do campo de Dirac dual livre, temos, de acordo com (B.73), que a função de onda de uma partícula é

$$\tilde{h}^\dagger(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \sum_s \int d^3p \left[\tilde{h}^\dagger_{s+}(\mathbf{p})\, u_s(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \tilde{h}^\dagger_{s-}(\mathbf{p})\, v_s(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right] \quad , \tag{4.87}$$

onde definimos

$$\begin{aligned} \tilde{h}^\dagger_{s-}(\mathbf{p}) &= u^\dagger_s(\mathbf{p})\, \tilde{h}^\dagger(\mathbf{p}) \ , \\ \tilde{h}^\dagger_{s+}(\mathbf{p}) &= v^\dagger_s(\mathbf{p})\, \tilde{h}^\dagger(-\mathbf{p}) \ , \end{aligned} \tag{4.88}$$

e sua conjugada é dada por

$$\tilde{h}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \sum_s \int d^3p \left[u^\dagger_s(\mathbf{p})\, \tilde{h}_{s+}(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + v^\dagger_s(\mathbf{p})\, \tilde{h}_{s-}(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right] \quad . \tag{4.89}$$

Se usamos (4.88) e as definições dos operadores de campo, (4.77) e (4.78), os operadores $\tilde{d}$ e $\tilde{b}^\dagger$, que aparecem na expressão (4.86), podem ser escritos como

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\mathrm{e}^{-i\widetilde{H}_0 t}\tilde{f}_j) &= \sum_s \int d^3p\, \tilde{d}_s(\mathbf{p})\, (\mathrm{e}^{-i\widetilde{H}_0 t}\, \tilde{f}_j)_s(\mathbf{p}) \\ &= \sum_s \int d^3p\, \tilde{d}_s(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-i\widetilde{H}_0 t}\, v_s(\mathbf{p})\, \tilde{f}_j(-\mathbf{p}) \\ &= \sum_s \int d^3p\, \mathrm{e}^{iE_{\mathbf{p}}t}\, v_s(\mathbf{p})\, \tilde{f}_j(-\mathbf{p})\, \tilde{d}_s(\mathbf{p}) \end{aligned} \tag{4.90}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{b}^\dagger(\mathrm{e}^{-i\widetilde{H}_0 t}\tilde{g}_j) &= \sum_s \int d^3p\, \tilde{b}^\dagger_s(\mathbf{p})\, (\mathrm{e}^{-i\widetilde{H}_0 t}\, \tilde{g}_j)_s(\mathbf{p}) \\ &= \sum_s \int d^3p\, \tilde{b}^\dagger_s(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-i\widetilde{H}_0 t}\, u_s(\mathbf{p})\, \tilde{g}_j(\mathbf{p}) \\ &= \sum_s \int d^3p\, \mathrm{e}^{-iE_{\mathbf{p}}t}\, u_s(\mathbf{p})\, \tilde{g}_j(\mathbf{p})\, \tilde{b}^\dagger_s(\mathbf{p}) \ . \end{aligned} \tag{4.91}$$

Assim, o operador de campo $\widetilde{\psi}^\dagger(x)$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}^\dagger(x) &= \sum_j \sum_s \int d^3p \Big[\mathrm{e}^{iE_{\mathbf{p}}t}\, v_s(\mathbf{p})\, \tilde{f}_j(-\mathbf{p})\, \tilde{d}_s(\mathbf{p})\, \tilde{f}^\dagger_j(\mathbf{x}) + \\ &\qquad + \mathrm{e}^{-iE_{\mathbf{p}}t}\, u_s(\mathbf{p})\, \tilde{g}_j(\mathbf{p})\, \tilde{b}^\dagger_s(\mathbf{p})\, \tilde{g}^\dagger_j(\mathbf{x})\Big] \\ &= (2\pi)^{-3/2} \sum_s \int d^3p\, \left[\tilde{d}_s(\mathbf{p})\, v_s(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{ip\cdot x} + \tilde{b}^\dagger_s(\mathbf{p})\, u_s(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-ip\cdot x}\right] \\ &= \widetilde{\psi}^\dagger(x)^{(+)} + \widetilde{\psi}^\dagger(x)^{(-)} \ , \end{aligned} \tag{4.92}$$

onde usamos a definição de transformada de Fourier

$$\tilde{h}_j^\dagger(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p'\, \tilde{h}_j^\dagger(\mathbf{p}')\, \mathrm{e}^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}} \;, \tag{4.93}$$

e

$$\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}') = \sum_j \tilde{h}_j(\mathbf{p})\, \tilde{h}_j^\dagger(\mathbf{p}') \;, \tag{4.94}$$

lembrando que os índices $(+)$ e $(-)$ referem-se aos subespaços espectrais, conforme a equação (4.86). Obtemos o operador adjunto, $\widetilde{\overline{\psi}}(x)$, multiplicando o hermitiano conjugado de (4.92) por γ^0, resultando em

$$\begin{aligned}
\widetilde{\overline{\psi}}(x) &= \widetilde{\psi}(x)\, \gamma^0 = \\
&= (2\pi)^{-3/2} \sum_s \int d^3p \left[\tilde{d}_s^\dagger(\mathbf{p})\, \overline{v}_s(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{-ip\cdot x} + \tilde{b}_s(\mathbf{p})\, \overline{u}_s(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{ip\cdot x} \right] \\
&= \widetilde{\overline{\psi}}(x)^{(-)} + \widetilde{\overline{\psi}}(x)^{(+)} \;,
\end{aligned} \tag{4.95}$$

onde

$$\overline{u}_s(\mathbf{p}) \,\hat{=}\, u_s^\dagger(\mathbf{p})\, \gamma^0 \;, \qquad \overline{v}_s(\mathbf{p}) \,\hat{=}\, v_s^\dagger(\mathbf{p})\, \gamma^0 \;. \tag{4.96}$$

As relações de anticomutação entre os operadores de campo (livre) para tempos arbitrários resultam em funções que serão úteis na construção da teoria de espalhamento. Elas são definidas como

$$\{\widetilde{\psi}^\dagger(x), \widetilde{\overline{\psi}}(y)\} = \{\widetilde{\psi}^\dagger(x)^{(-)}, \widetilde{\overline{\psi}}(y)^{(+)}\} + \{\widetilde{\psi}^\dagger(x)^{(+)}, \widetilde{\overline{\psi}}(y)^{(-)}\} \;, \tag{4.97}$$

cujos campos são dados pelas expressões (4.92) e (4.95). Os outros dois anticomutadores são nulos pois envolvem os operadores $\tilde{b}$ e $\tilde{d}$. Para as parcelas de (4.97) teremos[¶]

$$\begin{aligned}
\{\widetilde{\psi}^\dagger(x)^{(+)}, \widetilde{\overline{\psi}}(y)^{(-)}\} &= (2\pi)^{-3} \int d^3p\, \frac{(\not{p}-m)}{2E_{\mathbf{p}}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{ip}\cdot(\mathrm{x}-\mathrm{y})} \\
&\hat{=}\; -i\, S^{(-)}(x-y) \;,
\end{aligned} \tag{4.98}$$

e

$$\begin{aligned}
\{\widetilde{\psi}^\dagger(x)^{(-)}, \widetilde{\overline{\psi}}(y)^{(+)}\} &= (2\pi)^{-3} \int d^3p\, \frac{(\not{p}+m)}{2E_{\mathbf{p}}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{ip}\cdot(\mathrm{x}-\mathrm{y})} \\
&\hat{=}\; -i\, S^{(+)}(x-y) \;,
\end{aligned} \tag{4.99}$$

e então,

$$\begin{aligned}
\{\widetilde{\psi}^\dagger(x), \widetilde{\overline{\psi}}(y)\} &= -i\, S^{(+)}(x-y) - i\, S^{(-)}(x-y) \\
&= -i\, S(x-y) \;,
\end{aligned} \tag{4.100}$$

[¶]Vide *Apêndice B1.*

que são as mesmas funções (3.92)-(3.94) definidas para o sistema original. Portanto, a distribuição retardada $S^{ret}(p)$, (B.57), a distribuição avançada $S^{av}(p)$, (B.58), e o propagador de Feynman $S^F(p)$, (B.61), serão também utilizados na construção da matriz espalhamento para o sistema dual.

4.4 Operador Espalhamento no Espaço de Fock Dual

Nesta seção construiremos o operador espalhamento (matriz $\underline{\widetilde{\mathbf{S}}}$) no espaço de Fock dual, que estabelece a transição entre estados de um sistema que é descrito pelo operador hamiltoniano $\widetilde{H}(t)$ dependente do tempo. O operador $\underline{\widetilde{\mathbf{S}}}$ pode ser escrito em termos da matriz $\widetilde{S}$ de uma partícula, definida sobre o espaço de Hilbert $\widetilde{\mathcal{H}}_1$. Sendo assim, partiremos da dinâmica de uma partícula descrita pelo operador hamiltoniano dependente do tempo

$$\widetilde{H}(t) = \widetilde{H}_0 + H_1(t) \tag{4.101}$$

com

$$H_1(t) = e\,(V(t,\mathbf{x}) - \vec{\alpha}\cdot\mathbf{A})(t,\mathbf{x}) \ , \tag{4.102}$$

cuja a evolução temporal é dada, de acordo com (4.39), pela transformação unitária

$$\tilde{h}(t) = \widetilde{U}(t,s)\,\tilde{h} = \mathrm{e}^{i\widetilde{H}(t-s)}\,\tilde{h}(s)\,, \tag{4.103}$$

onde

$$\begin{aligned} \widetilde{U}^{\dagger}(t,s) &= \widetilde{U}(s,t) \ , \\ \widetilde{U}(t,s)\,\widetilde{U}(s,r) &= \widetilde{U}(t,r) \ , \end{aligned} \tag{4.104}$$

e $A^{\mu}(x)\hat{=}(V(x),\mathbf{A}(x))$ é um potencial real. Para sistemas cuja interação é de alcance finito, ou seja, para potenciais que se anulam para $t \to \pm\infty$, existem os operadores de onda

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{\substack{in \\ out}} &= \overset{(forte)}{\lim_{t\to\mp\infty}} \widetilde{U}(0,t)\,\mathrm{e}^{i\widetilde{H}_0 t} \\ &= \overset{(forte)}{\lim_{t\to\mp\infty}} \mathrm{e}^{-i\widetilde{H}t}\,\mathrm{e}^{i\widetilde{H}_0 t} \end{aligned} \tag{4.105}$$

e a matriz espalhamento $\widetilde{S}$

$$\begin{aligned} \widetilde{S} &= \widetilde{W}^{\dagger}_{out}\,\widetilde{W}_{in} \\ &= \overset{(forte)}{\lim_{\substack{s\to-\infty \\ t\to+\infty}}} \mathrm{e}^{-i\widetilde{H}_0 t}\widetilde{U}(t,0)\widetilde{U}(0,s)\,\mathrm{e}^{i\widetilde{H}_0 s} \\ &= \overset{(forte)}{\lim_{\substack{s\to-\infty \\ t\to+\infty}}} \mathrm{e}^{-i\widetilde{H}_0 t}\widetilde{U}(t,s)\,\mathrm{e}^{i\widetilde{H}_0 s} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\substack{s\to-\infty\\ t\to+\infty}}^{(forte)} \mathrm{e}^{-i\widetilde{H}_0 t}\mathrm{e}^{i\widetilde{H}(t-s)}\,\mathrm{e}^{i\widetilde{H}_0 s} \tag{4.106}$$

como limites fortes em $\widetilde{\mathcal{H}}_1$, a qual é um operador unitário.

Na seção anterior discutimos, na abordagem de segunda quantização, o campo de Dirac submetido a um campo eletromagnético externo, $A^\mu(\mathbf{x})$, independente do tempo. O espaço de Fock $\widetilde{\mathcal{F}}$ foi construído a partir do vácuo definido pelas relações

$$\begin{aligned} \tilde{b}(\tilde{h})\,\widetilde{\Omega} &= 0 = \widetilde{\psi}(P_-\tilde{h})\,\widetilde{\Omega}\ , \\ \tilde{d}(\tilde{h})\,\widetilde{\Omega} &= 0 = \widetilde{\psi}(P_+\tilde{h})\,\widetilde{\Omega}\ , \\ \forall\,\tilde{h} &\in \widetilde{\mathcal{H}}_1\ , \end{aligned} \tag{4.107}$$

onde $P_\pm$ são, respectivamente, os operadores de projeção nos subespaços espectrais positivo e negativo do operador hamiltoniano de uma partícula, $\widetilde{H}(x)$. Assumindo que os potenciais $A^\mu(x)$ se anulam para $t \to \pm\infty$, nestes limites teremos a dinâmica livre. Portanto, esta hipótese nos permitirá descrever a evolução temporal do sistema a partir da representação de Fock do campo de Dirac dual livre.

O campo de Dirac dual livre, no formalismo de segunda quantização, é representado pelo operador no espaço de Fock

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}(\tilde{h}) &= \tilde{b}(P_-^0\tilde{h}) + \tilde{d}^\dagger(P_+^0\tilde{h}) \\ &= \tilde{b}(\tilde{h}_-) + \tilde{d}^\dagger(\tilde{h}_+)\ , \end{aligned} \tag{4.108}$$

sendo $P_\pm^0$ os operadores de projeção correspondentes ao operador hamiltoniano livre $\widetilde{H}_0$. No que segue usaremos a notação $P_\pm$ para os projetores associados ao hamiltoniano livre $\widetilde{H}_0$.

O operador espalhamento $\underline{\widetilde{\mathbf{S}}}$ no espaço de Fock, se existe, é definido como

$$\widetilde{\psi}(\widetilde{S}^\dagger\,\tilde{h}) = \underline{\widetilde{\mathbf{S}}}^{-1}\,\widetilde{\psi}(\tilde{h})\,\underline{\widetilde{\mathbf{S}}} \qquad\qquad (\forall\,\tilde{h}\in\widetilde{\mathcal{H}}_1) \tag{4.109}$$

e, portanto,

$$\widetilde{\psi}^\dagger(\widetilde{S}^\dagger\,\tilde{h}) = \underline{\widetilde{\mathbf{S}}}^{-1}\,\widetilde{\psi}^\dagger(\tilde{h})\,\underline{\widetilde{\mathbf{S}}}\ . \tag{4.110}$$

As definições (4.109) e (4.110) estabelecem que $\underline{\widetilde{\mathbf{S}}}$ é um operador unitário e pode ser determinado a menos de uma fase, que depende do campo externo $A^\mu(x)$. Esta fase está associada à amplitude vácuo-vácuo dual, e será discutida mais adiante.

Das definições acima para o operador $\underline{\widetilde{\mathbf{S}}}$ temos que

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}(\tilde{h})\,\underline{\widetilde{\mathbf{S}}} &= \underline{\widetilde{\mathbf{S}}}\,\widetilde{\psi}(\widetilde{S}^\dagger\,\tilde{h})\ , \\ \widetilde{\psi}^\dagger(\tilde{h})\,\underline{\widetilde{\mathbf{S}}} &= \underline{\widetilde{\mathbf{S}}}\,\widetilde{\psi}^\dagger(\widetilde{S}^\dagger\,\tilde{h})\ . \end{aligned} \tag{4.111}$$

Se consideramos a separação das funções $\tilde{h} \in \widetilde{\mathcal{H}}_1$ nos subconjuntos $\tilde{f} \in \widetilde{\mathcal{H}}_+$ e $\tilde{g} \in \widetilde{\mathcal{H}}_-$, ou seja,

$$\tilde{h} = P_+ \tilde{h} + P_- \tilde{h} = \tilde{f} + \tilde{g} \ , \tag{4.112}$$

e escrevemos os operadores de campo $\widetilde{\psi}, \widetilde{\psi}^\dagger$ usando a decomposição (4.70), as expressões (4.111) resultam em

$$\begin{aligned}
\underline{\widetilde{\mathbf{S}}}\, \widetilde{\psi}(\widetilde{S}^\dagger \tilde{f}) &= \widetilde{\psi}(\tilde{f})\, \underline{\widetilde{\mathbf{S}}} \\
\underline{\widetilde{\mathbf{S}}} \left[\tilde{b}(\widetilde{S}^\dagger \tilde{f}) + \tilde{d}^\dagger(\widetilde{S}^\dagger \tilde{f}) \right] &= \left[\tilde{b}(\tilde{f}) + \tilde{d}^\dagger(\tilde{f}) \right] \underline{\widetilde{\mathbf{S}}} \\
&= \tilde{d}^\dagger(\tilde{f})\, \underline{\widetilde{\mathbf{S}}} \ ,
\end{aligned} \tag{4.113}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\widetilde{\mathbf{S}}}\, \widetilde{\psi}(\widetilde{S}^\dagger \tilde{g}) &= \widetilde{\psi}(\tilde{g})\, \underline{\widetilde{\mathbf{S}}} \\
\underline{\widetilde{\mathbf{S}}} \left[\tilde{b}(\widetilde{S}^\dagger \tilde{g}) + \tilde{d}^\dagger(\widetilde{S}^\dagger \tilde{g}) \right] &= \left[\tilde{b}(\tilde{g}) + \tilde{d}^\dagger(\tilde{g}) \right] \underline{\widetilde{\mathbf{S}}} \\
&= \tilde{b}(\tilde{g})\, \underline{\widetilde{\mathbf{S}}} \ ,
\end{aligned} \tag{4.114}$$

e

$$\begin{aligned}
\underline{\widetilde{\mathbf{S}}}\, \widetilde{\psi}^\dagger(\widetilde{S}^\dagger \tilde{f}) &= \widetilde{\psi}^\dagger(\tilde{f})\, \underline{\widetilde{\mathbf{S}}} \\
\underline{\widetilde{\mathbf{S}}} \left[\tilde{b}^\dagger(\widetilde{S}^\dagger \tilde{f}) + \tilde{d}(\widetilde{S}^\dagger \tilde{f}) \right] &= \left[\tilde{b}^\dagger(\tilde{f}) + \tilde{d}(\tilde{f}) \right] \underline{\widetilde{\mathbf{S}}} \\
&= \tilde{d}(\tilde{f})\, \underline{\widetilde{\mathbf{S}}} \ ,
\end{aligned} \tag{4.115}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\widetilde{\mathbf{S}}}\, \widetilde{\psi}^\dagger(\widetilde{S}^\dagger \tilde{g}) &= \widetilde{\psi}^\dagger(\tilde{g})\, \underline{\widetilde{\mathbf{S}}} \\
\underline{\widetilde{\mathbf{S}}} \left[\tilde{b}^\dagger(\widetilde{S}^\dagger \tilde{g}) + \tilde{d}(\widetilde{S}^\dagger \tilde{g}) \right] &= \left[\tilde{b}^\dagger(\tilde{g}) + \tilde{d}(\tilde{g}) \right] \underline{\widetilde{\mathbf{S}}} \\
&= \tilde{b}^\dagger(\tilde{g})\, \underline{\widetilde{\mathbf{S}}} \ ,
\end{aligned} \tag{4.116}$$

onde subtituimos (4.65). Usando a mesma decomposição (4.112) para $\widetilde{S}^\dagger \tilde{f}$ e $\widetilde{S}^\dagger \tilde{g}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}^\dagger \tilde{f} &= P_+ \widetilde{S}^\dagger \tilde{f} + P_- \widetilde{S}^\dagger \tilde{f} = P_+ \widetilde{S}^\dagger P_+ \tilde{f} + P_- \widetilde{S}^\dagger P_+ \tilde{f} \ , \\
\widetilde{S}^\dagger \tilde{g} &= P_+ \widetilde{S}^\dagger \tilde{g} + P_- \widetilde{S}^\dagger \tilde{g} = P_+ \widetilde{S}^\dagger P_- \tilde{g} + P_- \widetilde{S}^\dagger P_- \tilde{g} \ ,
\end{aligned} \tag{4.117}$$

já que $\tilde{f} = P_+ \tilde{f}$ e $\tilde{g} = P_- \tilde{g}$. Então as expressões (4.113)-(4.116) ficam escritas como

$$\tilde{d}^\dagger(\tilde{f})\, \underline{\widetilde{\mathbf{S}}} = \underline{\widetilde{\mathbf{S}}} \left[\tilde{b}(\widetilde{S}^\dagger_{-+} \tilde{f}) + \tilde{d}^\dagger(\widetilde{S}^\dagger_{++} \tilde{f}) \right] \ , \tag{4.118}$$

$$\tilde{b}(\tilde{g})\, \underline{\widetilde{\mathbf{S}}} = \underline{\widetilde{\mathbf{S}}} \left[\tilde{b}(\widetilde{S}^\dagger_{--} \tilde{g}) + \tilde{d}^\dagger(\widetilde{S}^\dagger_{+-} \tilde{g}) \right] \ , \tag{4.119}$$

$$\tilde{d}(\tilde{f})\, \underline{\widetilde{\mathbf{S}}} = \underline{\widetilde{\mathbf{S}}} \left[\tilde{b}^\dagger(\widetilde{S}^\dagger_{-+} \tilde{f}) + \tilde{d}(\widetilde{S}^\dagger_{++} \tilde{f}) \right] \ , \tag{4.120}$$

$$\tilde{b}^\dagger(\tilde{g})\, \underline{\widetilde{\mathbf{S}}} = \underline{\widetilde{\mathbf{S}}} \left[\tilde{b}^\dagger(\widetilde{S}^\dagger_{--} \tilde{g}) + \tilde{d}(\widetilde{S}^\dagger_{+-} \tilde{g}) \right] \ , \tag{4.121}$$

onde definimos $\widetilde{S}^\dagger_{\pm\pm} = P_\pm\, \widetilde{S}^\dagger\, P_\pm$.

A seguir, construiremos explicitamente a matriz espalhamento no espaço de Fock dual. Este operador deverá descrever todos os processos de espalhamento envolvendo o campo de Dirac dual e o campo eletromagnético externo, que são: aniquilação de pares elétron-pósitron, espalhamento de elétrons, espalhamento de pósitrons, e criação de pares elétron-pósitron. Além disso, a matriz espalhamento deverá levar em conta os processos envolvendo quaisquer números de partículas e antipartículas duais. Assim, a matriz $\underline{\widetilde{\mathbf{S}}}$ no espaço de Fock é proposta ser da forma

$$\underline{\widetilde{\mathbf{S}}} = \widetilde{C}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_1 \tilde{b}\tilde{d}}\ {:}\mathrm{e}^{\widetilde{\widetilde{A}}_2 \tilde{b}\tilde{b}^\dagger}{:}\ {:}\mathrm{e}^{\widetilde{\widetilde{A}}_3 \tilde{d}^\dagger\tilde{d}}{:}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_4 \tilde{d}^\dagger\tilde{b}^\dagger}\ , \tag{4.122}$$

onde : : denota o ordenamento normal dos operadores, e a dependência dos potenciais $A^\mu(x)$ está nos coeficientes $\widetilde{A}_i$ e no fator de normalização $\widetilde{C}$. Para determinarmos os coeficientes $\widetilde{A}_i$, calcularemos as relações de comutação (4.118)-(4.121) usando a definição (4.122) para a matriz $\underline{\widetilde{\mathbf{S}}}$. Desenvolveremos este cálculo em duas etapas: primeiro estabeleceremos as relações de comutação entre os operadores $\tilde{b}^\dagger, \tilde{b}, \tilde{d}^\dagger, \tilde{d}$ e cada uma das exponenciais que aparecem em (4.122), e depois comporemos as relações de comutação desses operadores com a expressão completa de $\underline{\widetilde{\mathbf{S}}}$.

Podemos definir o produto de operadores da primeira exponencial de (4.122) como

$$\widetilde{A}_1 \tilde{b}\tilde{d} \,\hat{=} \sum_{jk} (\tilde{f}_k\, ,\, \widetilde{A}_1 \tilde{g}_j) \tilde{b}(\tilde{g}_j)\, \tilde{d}(\tilde{f}_k)\ . \tag{4.123}$$

De fato, usando a definição do produto escalar, (4.57), e as expressões (4.79) e (4.80), teremos

$$\begin{aligned}
\sum_{jk} (\tilde{f}_k\, ,\, \widetilde{A}_1 \tilde{g}_j)\, \tilde{b}(\tilde{g}_j)\, \tilde{d}(\tilde{f}_k) &= \sum_{jk} \int d^3x\, \tilde{f}_k^\dagger(\mathbf{x})\, \widetilde{A}_1(\mathbf{x})\, \tilde{g}_j(\mathbf{x})\, \tilde{b}(\tilde{g}_j)\, \tilde{d}(\tilde{f}_k) \\
&= \int d^3x\, \widetilde{A}_1(\mathbf{x}) \sum_j \tilde{g}_j(\mathbf{x})\, \tilde{b}(\tilde{g}_j) \sum_k \tilde{f}_k^\dagger(\mathbf{x})\, \tilde{d}(\tilde{f}_k) \\
&= \int d^3x\, \widetilde{A}_1(\mathbf{x})\, \tilde{b}(\mathbf{x})\, \tilde{d}(\mathbf{x}) \\
&= \widetilde{A}_1 \tilde{b}\tilde{d}\ .
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\widetilde{\widetilde{A}}_2 \tilde{b}\tilde{b}^\dagger \,\hat{=} \sum_{jk} (\tilde{g}_k\, ,\, \widetilde{\widetilde{A}}_2 \tilde{g}_j)\, \tilde{b}(\tilde{g}_j)\, \tilde{b}^\dagger(\tilde{g}_k)\ , \tag{4.124}$$

$$\widetilde{\widetilde{A}}_3 \tilde{d}^\dagger\tilde{d} \,\hat{=} \sum_{jk} (\tilde{f}_k\, ,\, \widetilde{\widetilde{A}}_3 \tilde{f}_j)\, \tilde{d}^\dagger(\tilde{f}_j)\, \tilde{d}(\tilde{f}_k)\ . \tag{4.125}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d})^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{j_1\cdots j_n\\k_1\ldots k_n}}(\widetilde{A}_1)_1\ldots(\widetilde{A}_1)_n\,\tilde{b}_{j_1}\tilde{d}_{k_1}\ldots\tilde{b}_{j_n}\tilde{d}_{k_n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{j_1\cdots j_n\\k_1\ldots k_n}}(\widetilde{A}_1)_1\ldots(\widetilde{A}_1)_n\,\tilde{b}_{j_1}\ldots\tilde{b}_{j_n}\,\tilde{d}_{k_n}\ldots\tilde{d}_{k_1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{j_1\cdots j_n\\k_1\ldots k_n}}(\widetilde{A}_1)_1\ldots(\widetilde{A}_1)_n\,\tilde{d}_{k_1}\ldots\tilde{d}_{k_n}\,\tilde{b}_{j_n}\ldots\tilde{b}_{j_1}(-)^n \qquad (4.126)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{:}\mathrm{e}^{\widetilde{\overline{A}}_2\tilde{b}\tilde{b}^\dagger}{:} &= {:}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{j_1\cdots j_n\\k_1\ldots k_n}}(\widetilde{\overline{A}}_2\tilde{b}\tilde{b}^\dagger)^n{:} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{j_1\cdots j_n\\k_1\ldots k_n}}(-)^n(\widetilde{\overline{A}}_2)_1\ldots(\widetilde{\overline{A}}_2)_n\,\tilde{b}^\dagger_{k_1}\ldots\tilde{b}^\dagger_{k_n}\,\tilde{b}_{j_n}\ldots\tilde{b}_{j_1}\ , \qquad (4.127)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{:}\mathrm{e}^{\widetilde{\overline{A}}_3\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}{:} &= {:}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\widetilde{\overline{A}}_3\tilde{d}^\dagger\tilde{d})^n{:} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{j_1\cdots j_n\\k_1\ldots k_n}}(\widetilde{\overline{A}}_3)_1\ldots(\widetilde{\overline{A}}_3)_n\,\tilde{d}^\dagger_{j_1}\ldots\tilde{d}^\dagger_{j_n}\,\tilde{d}_{k_n}\ldots\tilde{d}_{k_1}\ , \qquad (4.128)
\end{aligned}
$$

onde estamos denotando

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{A}_1)_i &= (\tilde{f}_{k_i}\,,\,\widetilde{A}_1\tilde{g}_{j_i})\ , \\
(\widetilde{\overline{A}}_2)_i &= (\tilde{g}_{k_i}\,,\widetilde{\overline{A}}_2\tilde{g}_{j_i})\ , \\
(\widetilde{\overline{A}}_3)_i &= (\tilde{f}_{k_i}\,,\widetilde{\overline{A}}_3\tilde{f}_{j_i})\ , \qquad (4.129)\\
\tilde{b}_{j_i} &= \tilde{b}(\tilde{g}_{j_i})\ , \\
\tilde{d}_{k_i} &= \tilde{d}(\tilde{f}_{k_i})\ .
\end{aligned}
$$

As relações que envolvem a última exponencial de (4.122) serão obtidas tomando o hermitiano conjugado das relações correspondentes à primeira exponencial.

Os operadores $\tilde{b},\tilde{d}$ comutam com $\mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}$, os operadores $\tilde{b},\tilde{b}^\dagger$ comutam com ${:}\mathrm{e}^{\widetilde{\overline{A}}_3\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}{:}$ e os operadores $\tilde{d},\tilde{d}^\dagger$ comutam com ${:}\mathrm{e}^{\widetilde{\overline{A}}_2\tilde{b}\tilde{b}^\dagger}{:}$, já que todas estas situações correspondem a números pares de anticomutação. Para calcular os demais comutadores utilizaremos as relações de comutação (4.72) e as definições (4.77)-(4.80).

A relação de comutação entre a exponencial (4.126) e o operador $\tilde{b}^{\dagger}(\tilde{h})$ fica

$$
\begin{aligned}
\tilde{b}^{\dagger}(\tilde{h})\,\mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}} &= \tilde{b}^{\dagger}(\tilde{h})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{j_1\dots j_n\\ k_1\dots k_n}}(\widetilde{A}_1)_1\dots(\widetilde{A}_1)_n\,\tilde{b}_{j_1}\dots\tilde{b}_{j_n}\,\tilde{d}_{k_n}\dots\tilde{d}_{k_1}\\
&= \mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\,\tilde{b}^{\dagger}(\tilde{h})+\\
&\quad+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{j_1\dots j_n\\ k_1\dots k_n}}(\widetilde{A}_1)_1\dots(\widetilde{A}_1)_n\sum_{m=1}^{n}(-)^{m-1}(\tilde{g}_{j_m},\tilde{h}_-)\,\cdot\\
&\quad\cdot\tilde{b}_{j_1}\dots\cancel{\tilde{b}}_{j_m}\dots\tilde{b}_{j_n}\,\tilde{d}_{k_n}\dots\tilde{d}_{k_1}\\
&= \mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\,\tilde{b}^{\dagger}(\tilde{h})+\\
&\quad+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=1}^{n}\sum_{\substack{j_1\dots(j_m)\dots j_n\\ k_1\dots(k_m)\dots k_n}}(\widetilde{A}_1)_1\dots(\cancel{\widetilde{A}_1})_m\dots(\widetilde{A}_1)_n\,\tilde{b}_{j_1}\dots\cancel{\tilde{b}}_{j_m}\dots\tilde{b}_{j_n}\,\cdot\\
&\quad\cdot\tilde{d}_{k_n}\dots\cancel{\tilde{d}}_{k_m}\dots\tilde{d}_{k_1}\sum_{j_m,k_m}(\widetilde{A}_1)_m\,(\tilde{g}_{j_m},\tilde{h}_-)\,\tilde{d}_{k_m}\ .
\end{aligned}
\tag{4.130}
$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
\sum_{j_m,k_m}(\widetilde{A}_1)_m\,(\tilde{g}_{j_m},\tilde{h}_-)\,\tilde{d}_{k_m} &= \sum_{j_m,k_m}(\tilde{f}_{k_m}\,,\,\widetilde{A}_1\tilde{g}_{j_m})\,(\tilde{g}_{j_m},\tilde{h}_-)\,\tilde{d}(\tilde{f}_{k_m})\\
&= \tilde{d}(\widetilde{A}_{1+-}\,\tilde{h})\ ,
\end{aligned}
$$

então

$$
\begin{aligned}
\tilde{b}^{\dagger}(\tilde{h})\,\mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}} &= \mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\,\tilde{b}^{\dagger}(\tilde{h})+\\
&\quad+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=1}^{n}\sum_{\substack{j_1\dots(j_m)\dots j_n\\ k_1\dots(k_m)\dots k_n}}(\widetilde{A}_1)_1\dots(\cancel{\widetilde{A}_1})_m\dots(\widetilde{A}_1)_n\,\tilde{b}_{j_1}\dots\cancel{\tilde{b}}_{j_m}\dots\tilde{b}_{j_n}\,\cdot\\
&\quad\cdot\tilde{d}_{k_n}\dots\cancel{\tilde{d}}_{k_m}\dots\tilde{d}_{k_1}\,\tilde{d}(\widetilde{A}_{1+-}\,\tilde{h})\\
&= \mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\,\tilde{b}^{\dagger}(\tilde{h})+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}n\sum_{\substack{j_1\dots j_{n-1}\\ k_1\dots k_{n-1}}}(\widetilde{A}_1)_1\dots(\widetilde{A}_1)_{n-1}\,\tilde{b}_{j_1}\dots\tilde{b}_{j_{n-1}}\,\cdot\\
&\quad\cdot\tilde{d}_{k_{n-1}}\dots\tilde{d}_{k_1}\,\tilde{d}(\widetilde{A}_{1+-}\,\tilde{h})\ ,
\end{aligned}
\tag{4.131}
$$

onde denotamos $\widetilde{A}_{1+-}=P_+\widetilde{A}_1P_-$ e estamos usando $\cancel{\tilde{b}}_{k_m},\cancel{\tilde{d}}_{k_m}$ e $(\cancel{\widetilde{A}_1})_m$ para representar os fatores que não aparecem no produto e $(j_m),(k_m)$ para as somas que não estão sendo realizadas. No segundo termo de (4.131) a série exponencial é recuperada, resultando em

$$
\tilde{b}^{\dagger}(\tilde{h})\,\mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}=\mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\left[\tilde{b}^{\dagger}(\tilde{h})+\tilde{d}(\widetilde{A}_{1+-}\,\tilde{h})\right]\ .
\tag{4.132}
$$

Para a mesma exponencial (4.126) e o operador $\tilde{d}^\dagger(\tilde{h})$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\tilde{d}^\dagger(\tilde{h})\,\mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}} &= \tilde{d}^\dagger(\tilde{h})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{j_1\cdots j_n\\ k_1\ldots k_n}}(-)^n(\widetilde{A}_1)_1\ldots(\widetilde{A}_1)_n\,\tilde{d}_{k_1}\ldots\tilde{d}_{k_n}\,\tilde{b}_{j_n}\ldots\tilde{b}_{j_1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=1}^{n}\sum_{\substack{j_1\cdots(j_m)\cdots j_n\\ k_1\cdots(k_m)\cdots k_n}}(-)^n(\widetilde{A}_1)_1\ldots(\cancel{\widetilde{A}_1})_m\ldots(\widetilde{A}_1)_n\,\tilde{d}_{k_1}\ldots\cancel{\tilde{d}_{k_m}}\ldots\tilde{d}_{k_n}\,\cdot \\
&\quad\cdot\tilde{b}_{j_n}\ldots\cancel{\tilde{b}_{j_m}}\ldots\tilde{b}_{j_1}\sum_{j_m,k_m}(\widetilde{A}_1)_m\,(\tilde{h}_+,\tilde{f}_{k_m})\,\tilde{b}_{j_m}+\mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\,\tilde{d}^\dagger(\tilde{h}) \qquad (4.133)
\end{aligned}
$$

Para a última soma do primeiro termo temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{j_m,k_m}(\widetilde{A}_1)_m\,(\tilde{h}_+,\tilde{f}_{k_m})\,\tilde{b}_{j_m} &= \sum_{j_m,k_m}(\tilde{f}_{k_m}\,,\,\widetilde{A}_1\tilde{g}_{j_m})\,(\tilde{h}_+,\tilde{f}_{k_m})\,\tilde{b}(\tilde{g}_{j_m}) \\
&= \sum_{j_m}(\tilde{h}_+,\widetilde{A}_1\tilde{g}_{j_m})\,\tilde{b}(\tilde{g}_{j_m}) \\
&= \int d^3x\,(\widetilde{A}_1^\dagger\tilde{h}_+)^\dagger(\mathbf{x})\,\tilde{b}(\mathbf{x})=\tilde{b}(\widetilde{A}^\dagger_{1-+}\,\tilde{h})\ ,
\end{aligned}
$$

e, portanto,

$$
\begin{aligned}
\tilde{d}^\dagger(\tilde{h})\,\mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}} &= \mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\,\tilde{d}^\dagger(\tilde{h})+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,n\sum_{\substack{j_1\cdots(j_m)\cdots j_n\\ k_1\cdots(k_m)\cdots k_n}}(-)^n(\widetilde{A}_1)_1\ldots(\cancel{\widetilde{A}_1})_m\ldots(\widetilde{A}_1)_n\,\cdot \\
&\quad\cdot\tilde{d}_{k_1}\ldots\cancel{\tilde{d}_{k_m}}\ldots\tilde{d}_{k_n}\,\tilde{b}_{j_n}\ldots\cancel{\tilde{b}_{j_m}}\ldots\tilde{b}_{j_1}\tilde{b}(\widetilde{A}^\dagger_{1-+}\,\tilde{h}) \\
&= \mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\,\tilde{d}^\dagger(\tilde{h})-\mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\,\tilde{b}(\widetilde{A}^\dagger_{1-+}\,\tilde{h}) \\
&= \mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\left[\tilde{d}^\dagger(\tilde{h})-\tilde{b}(\widetilde{A}^\dagger_{1-+}\,\tilde{h})\right]\ . \qquad (4.134)
\end{aligned}
$$

Uma relação para a exponencial (4.127) é

$$
\begin{aligned}
\tilde{b}(\tilde{h}){:}\mathrm{e}^{\widetilde{\bar{A}}_2\tilde{b}\tilde{b}^\dagger}{:} &= \tilde{b}(\tilde{h})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{\substack{j_1\cdots j_n\\ k_1\ldots k_n}}(-)^n(\widetilde{\bar{A}}_2)_1\ldots(\widetilde{\bar{A}}_2)_n\,\tilde{b}^\dagger_{k_1}\ldots\tilde{b}^\dagger_{k_n}\tilde{b}_{j_n}\ldots\tilde{b}_{j_1} \\
&= {:}\mathrm{e}^{\widetilde{\bar{A}}_2\tilde{b}\tilde{b}^\dagger}{:}\,\tilde{b}(\tilde{h})+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=1}^{n}\sum_{\substack{j_1\cdots(j_m)\cdots j_n\\ k_1\cdots(k_m)\cdots k_n}}(-)^n(\widetilde{\bar{A}}_2)_1\ldots(\cancel{\widetilde{\bar{A}}_2})_m\ldots(\widetilde{\bar{A}}_2)_n\,\cdot \\
&\quad\cdot\tilde{b}^\dagger_{k_1}\ldots\cancel{\tilde{b}^\dagger_{k_m}}\ldots\tilde{b}^\dagger_{k_n}\tilde{b}_{j_n}\ldots\cancel{\tilde{b}_{j_m}}\ldots\tilde{b}_{j_1}\sum_{j_m,k_m}(\widetilde{\bar{A}}_2)_m(\tilde{h}_-,\tilde{g}_{k_m})\,\tilde{b}_{j_m}\ .
\end{aligned}
$$

O primeiro termo tem a exponencial recuperada, e para o segundo termo calculamos

$$
\begin{aligned}
\sum_{j_m,k_m}(\widetilde{\bar{A}}_2)_m(\tilde{h}_-,\tilde{g}_{k_m})\,\tilde{b}_{j_m} &= \sum_{j_m,k_m}(\tilde{g}_{k_m}\,,\widetilde{\bar{A}}_2\,\tilde{g}_{j_m})\,(\tilde{h}_-,\tilde{g}_{k_m})\,\tilde{b}(\tilde{g}_{j_m}) \\
&= \sum_{j_m}(\tilde{h}_-,\widetilde{\bar{A}}_2\,\tilde{g}_{j_m})\,\tilde{b}(\tilde{g}_{j_m}) \\
&= \int d^3x\,(\widetilde{\bar{A}}^\dagger_{2--}\tilde{h})^\dagger(\mathbf{x})\,\tilde{b}(\mathbf{x})=\tilde{b}(\widetilde{\bar{A}}^\dagger_{2--}\tilde{h})\ .
\end{aligned}
$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\tilde{b}(\tilde{h}) : \mathrm{e}^{\widetilde{\bar{A}}_2 \tilde{b}\tilde{b}^\dagger} : &= :\mathrm{e}^{\widetilde{\bar{A}}_2 \tilde{b}\tilde{b}^\dagger}:\tilde{b}(\tilde{h}) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{j_1 ..(j_m)...j_n \\ k_1 ...(k_m)...k_n}} (-)^n (\widetilde{\bar{A}}_2)_1 ... (\cancel{\widetilde{\bar{A}}}_2)_m ... \\
&\quad ...(\widetilde{\bar{A}}_2)_n \, \tilde{b}^\dagger_{k_1} ... \cancel{\tilde{b}}^\dagger_{k_m} ... \tilde{b}^\dagger_{k_n} \, \tilde{b}_{j_n} ... \cancel{\tilde{b}}_{j_m} ... \tilde{b}_{j_1} \, \tilde{b}(\widetilde{\bar{A}}^\dagger_{2--} \tilde{h}) \\
&= :\mathrm{e}^{\widetilde{\bar{A}}_2 \tilde{b}\tilde{b}^\dagger}: \tilde{b}(\tilde{h}) - :\mathrm{e}^{\widetilde{\bar{A}}_2 \tilde{b}\tilde{b}^\dagger}: \tilde{b}(\widetilde{\bar{A}}^\dagger_{2--} \tilde{h}) \\
&= :\mathrm{e}^{\widetilde{\bar{A}}_2 \tilde{b}\tilde{b}^\dagger}: \left[\tilde{b}(\tilde{h}) - \tilde{b}(\widetilde{\bar{A}}^\dagger_{2--} \tilde{h}) \right] \\
&= :\mathrm{e}^{\widetilde{\bar{A}}_2 \tilde{b}\tilde{b}^\dagger}: \tilde{b}([1 - \widetilde{\bar{A}}^\dagger_{2--}] \tilde{h}) \ .
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $(1 - \widetilde{\bar{A}}_2) = \widetilde{A}_2$, a expressão acima fica escrita como

$$\tilde{b}(\tilde{h}) : \mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^\dagger} : = :\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^\dagger}: \tilde{b}(\widetilde{A}^\dagger_{2--} \tilde{h}) \ . \tag{4.135}$$

Tomando o hermitiano conjugado desta última expressão, obtemos a relação entre a exponencial (4.127) e $\tilde{b}^\dagger(\tilde{h})$. Como

$$\begin{aligned}
\left[\tilde{b}(\tilde{h}) : \mathrm{e}^{(1-\widetilde{B})\tilde{b}\tilde{b}^\dagger} : \right]^\dagger &= \left[:\mathrm{e}^{(1-\widetilde{B})\tilde{b}\tilde{b}^\dagger}: \tilde{b}(\widetilde{B}^\dagger_{--} \tilde{h}) \right]^\dagger , \\
:\mathrm{e}^{(1-\widetilde{B}^\dagger)\tilde{b}\tilde{b}^\dagger}: \tilde{b}^\dagger(\tilde{h}) &= \tilde{b}^\dagger(\widetilde{B}^\dagger_{--} \tilde{h}) :\mathrm{e}^{(1-\widetilde{B}^\dagger)\tilde{b}\tilde{b}^\dagger}: ,
\end{aligned}$$

então

$$\tilde{b}^\dagger(\widetilde{A}_{2--} \tilde{h}) :\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^\dagger}: = :\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^\dagger}: \tilde{b}^\dagger(\tilde{h}) \ . \tag{4.136}$$

Escrevendo

$$\widetilde{A}_{2--} \, \tilde{h} = \tilde{h}' \quad \to \quad \tilde{h} = \widetilde{A}^{-1}_{2--} \, \tilde{h}' \ , \tag{4.137}$$

a expressão (4.136) fica

$$\tilde{b}^\dagger(\tilde{h}) :\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^\dagger}: = :\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^\dagger}: \tilde{b}^\dagger(\widetilde{A}^{-1}_{2--} \tilde{h}) \ . \tag{4.138}$$

O comutador entre a exponencial (4.128) e $\tilde{d}(\tilde{h})$ fica

$$\begin{aligned}
\tilde{d}(\tilde{h}) : \mathrm{e}^{\widetilde{\bar{A}}_3 \tilde{d}^\dagger \tilde{d}} : &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{j_1 ...j_n \\ k_1 ...k_n}} (\widetilde{\bar{A}}_3)_1 ... (\widetilde{\bar{A}}_3)_n \, \underbrace{\tilde{d}(\tilde{h}) \, \tilde{d}^\dagger_{j_1}} ... \tilde{d}^\dagger_{j_n} \, \tilde{d}_{k_n} ... \tilde{d}_{k_1} \\
&= :\mathrm{e}^{\widetilde{\bar{A}}_3 \tilde{d}^\dagger \tilde{d}}: \tilde{d}(\tilde{h}) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{m=1}^{n} \sum_{\substack{j_1 ..(j_m)...j_n \\ k_1 ...(k_m)...k_n}} (\widetilde{\bar{A}}_3)_1 ... (\widetilde{\bar{A}}_3)_m ... (\widetilde{\bar{A}}_3)_n \, \cdot \\
&\quad \cdot \tilde{d}^\dagger_{j_1} ... \cancel{\tilde{d}}^\dagger_{j_m} ... \tilde{d}^\dagger_{j_n} \, \tilde{d}_{k_n} ... \cancel{\tilde{d}}_{k_m} ... \tilde{d}_{k_1} \sum_{j_m , k_m} (\widetilde{\bar{A}}_3)_m (\tilde{f}_{j_m} \, , \, \tilde{h}_+) \, \tilde{d}_{k_m} \ .
\end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
\sum_{j_m,k_m} (\widetilde{\widetilde{A}}_3)_m(\tilde{f}_{j_m}\,,\,\tilde{h}_+)\,\tilde{d}_{k_m} &= \sum_{j_m,k_m} (\tilde{f}_{k_m}\,,\widetilde{\widetilde{A}}_3\tilde{f}_{j_m})\,(\tilde{f}_{j_m}\,,\,\tilde{h}_+)\,\tilde{d}(\tilde{f}_{k_m}) \\
&= \sum_{k_m}(\tilde{f}_{k_m}\,,\widetilde{\widetilde{A}}_3\tilde{h}_+)\,\tilde{d}(\tilde{f}_{k_m}) \\
&= \int d^3x\,(\widetilde{\widetilde{A}}_3\tilde{h}_+)(\mathbf{x})\,\tilde{d}(\mathbf{x}) = \tilde{d}(\widetilde{\widetilde{A}}_{3++}\,\tilde{h})\ ,
\end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned}
\tilde{d}(\tilde{h}) \quad &: \quad \mathrm{e}^{\widetilde{\widetilde{A}}_3\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}\!: = :\!\mathrm{e}^{\widetilde{\widetilde{A}}_3\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}\!: \tilde{d}(\tilde{h}) + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=1}^{n}\sum_{\substack{j_1\ldots(j_m)\ldots j_n\\ k_1\ldots(k_m)\ldots k_n}} (\widetilde{\widetilde{A}}_3)_1\ldots(\cancel{\widetilde{\widetilde{A}}_3})_m\ldots \\
&\quad \ldots(\widetilde{\widetilde{A}}_3)_n\,\tilde{d}^\dagger_{j_1}\ldots\cancel{\tilde{d}^\dagger_{j_m}}\ldots\tilde{d}^\dagger_{j_n}\,\tilde{d}_{k_n}\ldots\cancel{\tilde{d}_{k_m}}\ldots\tilde{d}_{k_1}\,\tilde{d}(\widetilde{\widetilde{A}}_{3++}\,\tilde{h}) \\
&= :\!\mathrm{e}^{\widetilde{\widetilde{A}}_3\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}\!: \tilde{d}(\tilde{h}) + :\!\mathrm{e}^{\widetilde{\widetilde{A}}_3\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}\!: \tilde{d}(\widetilde{\widetilde{A}}_{3++}\,\tilde{h}) \\
&= :\!\mathrm{e}^{\widetilde{\widetilde{A}}_3\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}\!: \left[\tilde{d}(\tilde{h}) + \tilde{d}(\widetilde{\widetilde{A}}_{3++}\,\tilde{h})\right] \\
&= :\!\mathrm{e}^{\widetilde{\widetilde{A}}_3\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}\!: \tilde{d}([1+\widetilde{\widetilde{A}}_{3++}]\,\tilde{h})\ ,
\end{aligned}$$

que, com a substituição $(1+\widetilde{\widetilde{A}}_3) = \widetilde{A}_3$, resulta em

$$\tilde{d}(\tilde{h}):\!\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}\!: = :\!\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}\!:\ \tilde{d}(\widetilde{A}_{3++}\,\tilde{h})\ . \tag{4.139}$$

A relação desta mesma exponencial com $\tilde{d}^\dagger(\tilde{h})$ é obtida pelo hermitiano conjugado da expressão acima,

$$\begin{gathered}
\left[\tilde{d}(\tilde{h}):\!\mathrm{e}^{(\widetilde{D}-1)\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}\!:\right]^\dagger = \left[:\!\mathrm{e}^{(\widetilde{D}-1)\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}\!: \tilde{d}(\widetilde{D}_{++}\,\tilde{h})\right]^\dagger \\
:\!\mathrm{e}^{(\widetilde{D}^\dagger-1)\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}\!: \tilde{d}^\dagger(\tilde{h}) = \tilde{d}^\dagger(\widetilde{D}_{++}\,\tilde{h})\,:\!\mathrm{e}^{(\widetilde{D}^\dagger-1)\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}\!:\ ,
\end{gathered}$$

ou seja,

$$:\!\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}\!: \tilde{d}^\dagger(\tilde{h}) = \tilde{d}^\dagger(\widetilde{A}^\dagger_{3++}\,\tilde{h})\,:\!\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}\!:\ , \tag{4.140}$$

que pode ser reescrita como

$$\tilde{d}^\dagger(\tilde{h})\,:\!\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}\!: = :\!\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}\!: \tilde{d}^\dagger(\widetilde{A}^{\dagger-1}_{3++}\tilde{h})\ , \tag{4.141}$$

se definimos

$$\widetilde{A}^\dagger_{3++}\,\tilde{h} = \tilde{h}' \quad \Rightarrow \quad \tilde{h} = \widetilde{A}^{\dagger-1}_{3++}\,\tilde{h}'\ . \tag{4.142}$$

As relações de comutação para a última exponencial de (4.122) são as hermitianas conjugadas da expressão (4.132),

$$\begin{aligned}
\left[\tilde{b}^\dagger(\tilde{h})\,\mathrm{e}^{\widetilde{A}\tilde{b}\tilde{d}}\right]^\dagger &= \left[\mathrm{e}^{\widetilde{A}\tilde{b}\tilde{d}}\,(\tilde{b}^\dagger(\tilde{h}) + \tilde{d}(\widetilde{A}_{+-}\,\tilde{h}))\right]^\dagger \\
\mathrm{e}^{\widetilde{A}^\dagger\tilde{d}^\dagger\tilde{b}^\dagger}\,\tilde{b}(\tilde{h}) &= \left[\tilde{b}(\tilde{h}) + \tilde{d}^\dagger(\widetilde{A}_{+-}\,\tilde{h})\right]\,\mathrm{e}^{\widetilde{A}^\dagger\tilde{d}^\dagger\tilde{b}^\dagger} \\
&= \tilde{b}(\tilde{h})\,\mathrm{e}^{\widetilde{A}^\dagger\tilde{d}^\dagger\tilde{b}^\dagger} + \mathrm{e}^{\widetilde{A}^\dagger\tilde{d}^\dagger\tilde{b}^\dagger}\,\tilde{d}^\dagger(\widetilde{A}_{+-}\,\tilde{h})\ ,
\end{aligned}$$

e da expressão (4.134),

$$\begin{aligned}
\left[\tilde{d}^{\dagger}(\tilde{h})\,\mathrm{e}^{\widetilde{A}\tilde{b}\tilde{d}}\right]^{\dagger} &= \left[\mathrm{e}^{\widetilde{A}\tilde{b}\tilde{d}}\,(\tilde{d}^{\dagger}(\tilde{h}) - \tilde{b}(\widetilde{A}^{\dagger}_{-+}\,\tilde{h}))\right]^{\dagger} \\
\mathrm{e}^{\widetilde{A}^{\dagger}\tilde{d}^{\dagger}\tilde{b}^{\dagger}}\,\tilde{d}(\tilde{h}) &= \left[\tilde{d}(\tilde{h}) - \tilde{b}^{\dagger}(\widetilde{A}^{\dagger}_{-+}\,\tilde{h})\right]\,\mathrm{e}^{\widetilde{A}^{\dagger}\tilde{d}^{\dagger}\tilde{b}^{\dagger}} \\
&= \tilde{d}(\tilde{h})\,\mathrm{e}^{\widetilde{A}^{\dagger}\tilde{d}^{\dagger}\tilde{b}^{\dagger}} - \mathrm{e}^{\widetilde{A}^{\dagger}\tilde{d}^{\dagger}\tilde{b}^{\dagger}}\,\tilde{b}^{\dagger}(\widetilde{A}^{\dagger}_{-+}\,\tilde{h})\ ,
\end{aligned}$$

ou, respectivamente,

$$\tilde{b}(\tilde{h})\,\mathrm{e}^{\widetilde{A}_4\tilde{d}^{\dagger}\tilde{b}^{\dagger}} = \mathrm{e}^{\widetilde{A}_4\tilde{d}^{\dagger}\tilde{b}^{\dagger}}\,\left[\tilde{b}(\tilde{h}) - \tilde{d}^{\dagger}(\widetilde{A}^{\dagger}_{4+-}\,\tilde{h})\right]\ , \tag{4.143}$$

$$\tilde{d}(\tilde{h})\,\mathrm{e}^{\widetilde{A}_4\tilde{d}^{\dagger}\tilde{b}^{\dagger}} = \mathrm{e}^{\widetilde{A}_4\tilde{d}^{\dagger}\tilde{b}^{\dagger}}\,\left[\tilde{d}(\tilde{h}) + \tilde{b}^{\dagger}(\widetilde{A}_{4-+}\,\tilde{h})\right]\ . \tag{4.144}$$

Levando em conta as novas definições das exponenciais que correspondem ao espalhamento de partículas, (4.135), e de antipartículas, (4.139), a expressão para a matriz espalhamento, definida em (4.122), fica escrita como

$$\underline{\widetilde{\mathbf{S}}} = \widetilde{C}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\ {:}\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^{\dagger}}{:}\ {:}\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^{\dagger}\tilde{d}}{:}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_4\tilde{d}^{\dagger}\tilde{b}^{\dagger}}\ . \tag{4.145}$$

A relação de comutação entre o operador $\tilde{b}$ e a matriz $\underline{\widetilde{\mathbf{S}}}$ resulta em

$$\begin{aligned}
\tilde{b}(\tilde{g})\,\underline{\widetilde{\mathbf{S}}} &= \widetilde{C}\ \underbrace{\tilde{b}(\tilde{g})\,\mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}}\ {:}\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^{\dagger}}{:}\ {:}\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^{\dagger}\tilde{d}}{:}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_4\tilde{d}^{\dagger}\tilde{b}^{\dagger}} \\
&= \widetilde{C}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\ \underbrace{\tilde{b}(\tilde{g})\,{:}\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^{\dagger}}{:}}\ {:}\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^{\dagger}\tilde{d}}{:}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_4\tilde{d}^{\dagger}\tilde{b}^{\dagger}} \\
&= \widetilde{C}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\ {:}\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^{\dagger}}{:}\ \underbrace{\tilde{b}(\widetilde{A}^{\dagger}_{2--}\tilde{g})\,{:}\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^{\dagger}\tilde{d}}{:}}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_4\tilde{d}^{\dagger}\tilde{b}^{\dagger}} \\
&= \widetilde{C}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\ {:}\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^{\dagger}}{:}\ {:}\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^{\dagger}\tilde{d}}{:}\ \underbrace{\tilde{b}(\widetilde{A}^{\dagger}_{2--}\tilde{g})\,\mathrm{e}^{\widetilde{A}_4\tilde{d}^{\dagger}\tilde{b}^{\dagger}}} \\
&= \widetilde{C}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\ {:}\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^{\dagger}}{:}\ {:}\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^{\dagger}\tilde{d}}{:}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_4\tilde{d}^{\dagger}\tilde{b}^{\dagger}}\ \left[\tilde{b}(\widetilde{A}^{\dagger}_{2--}\tilde{g}) - \tilde{d}^{\dagger}(\widetilde{A}^{\dagger}_{4+-}\widetilde{A}^{\dagger}_{2--}\tilde{g})\right] \\
&= \underline{\widetilde{\mathbf{S}}}\ \left[\tilde{b}(\widetilde{A}^{\dagger}_{2--}\tilde{g}) + \tilde{d}^{\dagger}(-\widetilde{A}^{\dagger}_{4+-}\widetilde{A}^{\dagger}_{2--}\tilde{g})\right] \\
&= \underline{\widetilde{\mathbf{S}}}\ \left[\tilde{b}(\widetilde{S}^{\dagger}_{--}\,\tilde{g}) + \tilde{d}^{\dagger}(\widetilde{S}^{\dagger}_{+-}\,\tilde{g})\right]\ ,
\end{aligned} \tag{4.146}$$

onde substituimos (4.135), (4.143) e (4.119). Usando os resultados (4.139), (4.144) e (4.120) teremos

$$\begin{aligned}
\tilde{d}(\tilde{f})\,\underline{\widetilde{\mathbf{S}}} &= \widetilde{C}\ \underbrace{\tilde{d}(\tilde{f})\,\mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}}\ {:}\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^{\dagger}}{:}\ {:}\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^{\dagger}\tilde{d}}{:}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_4\tilde{d}^{\dagger}\tilde{b}^{\dagger}} \\
&= \widetilde{C}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\ \underbrace{\tilde{d}(\tilde{f})\,{:}\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^{\dagger}}{:}}\ {:}\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^{\dagger}\tilde{d}}{:}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_4\tilde{d}^{\dagger}\tilde{b}^{\dagger}} \\
&= \widetilde{C}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\ {:}\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^{\dagger}}{:}\ \underbrace{\tilde{d}(\tilde{f})\,{:}\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^{\dagger}\tilde{d}}{:}}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_4\tilde{d}^{\dagger}\tilde{b}^{\dagger}} \\
&= \widetilde{C}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\ {:}\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^{\dagger}}{:}\ {:}\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^{\dagger}\tilde{d}}{:}\ \underbrace{\tilde{d}(\widetilde{A}_{3++}\tilde{f})\,\mathrm{e}^{\widetilde{A}_4\tilde{d}^{\dagger}\tilde{b}^{\dagger}}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \widetilde{C}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\ {:}\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^\dagger}{:}\ {:}\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}{:}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_4\tilde{d}^\dagger\tilde{b}^\dagger}\ \left[\tilde{d}(\widetilde{A}_{3++}\tilde{f}) + \tilde{b}^\dagger(\widetilde{A}_{4-+}\widetilde{A}_{3++}\tilde{f})\right] \\
&= \underline{\widetilde{\mathbf{S}}}\ \left[\tilde{d}(\widetilde{A}_{3++}\tilde{f}) + \tilde{b}^\dagger(\widetilde{A}_{4-+}\widetilde{A}_{3++}\tilde{f})\right] \\
&= \underline{\widetilde{\mathbf{S}}}\ \left[\tilde{d}(\widetilde{S}^\dagger_{++}\,\tilde{f}) + \tilde{b}^\dagger(\widetilde{S}^\dagger_{-+}\,\tilde{f})\right]\ . \qquad (4.147)
\end{aligned}
$$

Para as relações entre os operadores $b^\dagger$ e $d^\dagger$ e $\underline{\widetilde{\mathbf{S}}}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\tilde{b}^\dagger(\tilde{g})\,\underline{\widetilde{\mathbf{S}}} &= \widetilde{C}\ \underbrace{\tilde{b}^\dagger(\tilde{g})\,\mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}}\ {:}\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^\dagger}{:}\ {:}\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}{:}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_4\tilde{d}^\dagger\tilde{b}^\dagger} \\
&= \widetilde{C}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\ \underbrace{\left[\tilde{b}^\dagger(\tilde{g}) + \tilde{d}(\widetilde{A}_{1+-}\tilde{g})\right]\ {:}\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^\dagger}{:}}\ {:}\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}{:}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_4\tilde{d}^\dagger\tilde{b}^\dagger} \\
&= \widetilde{C}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\ {:}\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^\dagger}{:}\ \underbrace{\left[\tilde{b}^\dagger(\widetilde{A}^{-1}_{2--}\tilde{g}) + \tilde{d}(\widetilde{A}_{1+-}\tilde{g})\right]\ {:}\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}{:}}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_4\tilde{d}^\dagger\tilde{b}^\dagger} \\
&= \widetilde{C}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\ {:}\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^\dagger}{:}\ {:}\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}{:}\ \underbrace{\left[\tilde{b}^\dagger(\widetilde{A}^{-1}_{2--}\tilde{g}) + \tilde{d}(\widetilde{A}_{3++}\widetilde{A}_{1+-}\tilde{g})\right]\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_4\tilde{d}^\dagger\tilde{b}^\dagger}} \\
&= \widetilde{C}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\ {:}\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^\dagger}{:}\ {:}\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}{:}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_4\tilde{d}^\dagger\tilde{b}^\dagger}\ \Big[\tilde{b}^\dagger(\widetilde{A}^{-1}_{2--}\tilde{g}) + \tilde{d}(\widetilde{A}_{3++}\widetilde{A}_{1+-}\tilde{g}) + \\
&\quad + \tilde{b}^\dagger(\widetilde{A}_{4-+}\widetilde{A}_{3++}\widetilde{A}_{1+-}\tilde{g})\Big] \\
&= \underline{\widetilde{\mathbf{S}}}\ \left[\tilde{b}^\dagger([\widetilde{A}^{-1}_{2--} + \widetilde{A}_{4-+}\widetilde{A}_{3++}\widetilde{A}_{1+-}]\tilde{g}) + \tilde{d}(\widetilde{A}_{3++}\widetilde{A}_{1+-}\tilde{g})\right] \\
&= \underline{\widetilde{\mathbf{S}}}\ \left[\tilde{b}^\dagger(\widetilde{S}^\dagger_{--}\,\tilde{g}) + \tilde{d}(\widetilde{S}^\dagger_{+-}\,\tilde{g})\right]\ , \qquad (4.148)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\tilde{d}^\dagger(\tilde{f})\,\underline{\widetilde{\mathbf{S}}} &= \widetilde{C}\ \underbrace{\tilde{d}^\dagger(\tilde{f})\,\mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}}\ {:}\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^\dagger}{:}\ {:}\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}{:}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_4\tilde{d}^\dagger\tilde{b}^\dagger} \\
&= \widetilde{C}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\ \underbrace{\left[\tilde{d}^\dagger(\tilde{f}) - \tilde{b}(\widetilde{A}^\dagger_{1-+}\tilde{f})\right]\ {:}\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^\dagger}{:}}\ {:}\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}{:}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_4\tilde{d}^\dagger\tilde{b}^\dagger} \\
&= \widetilde{C}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\ {:}\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^\dagger}{:}\ \underbrace{\left[\tilde{d}^\dagger(\tilde{f}) - \tilde{b}(\widetilde{A}^\dagger_{2--}\widetilde{A}^\dagger_{1-+}\tilde{f})\right]\ {:}\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}{:}}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_4\tilde{d}^\dagger\tilde{b}^\dagger} \\
&= \widetilde{C}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\ {:}\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^\dagger}{:}\ {:}\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}{:}\ \underbrace{\left[\tilde{d}^\dagger(\widetilde{A}^{\dagger-1}_{3++}\tilde{f}) - \tilde{b}(\widetilde{A}^\dagger_{2--}\widetilde{A}^\dagger_{1-+}\tilde{f})\right]\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_4\tilde{d}^\dagger\tilde{b}^\dagger}} \\
&= \widetilde{C}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_1\tilde{b}\tilde{d}}\ {:}\mathrm{e}^{(1-\widetilde{A}_2)\tilde{b}\tilde{b}^\dagger}{:}\ {:}\mathrm{e}^{(\widetilde{A}_3-1)\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}{:}\ \mathrm{e}^{\widetilde{A}_4\tilde{d}^\dagger\tilde{b}^\dagger}\ \Big[\tilde{d}^\dagger(\widetilde{A}^{\dagger-1}_{3++}\tilde{f}) - \tilde{b}(\widetilde{A}^\dagger_{2--}\widetilde{A}^\dagger_{1-+}\tilde{f}) + \\
&\quad + \tilde{d}^\dagger(\widetilde{A}^\dagger_{4+-}\widetilde{A}^\dagger_{2--}\widetilde{A}^\dagger_{1-+}\tilde{f})\Big] \\
&= \underline{\widetilde{\mathbf{S}}}\ \left[\tilde{b}(-\widetilde{A}^\dagger_{2--}\widetilde{A}^\dagger_{1-+}\tilde{f}) + \tilde{d}^\dagger([\widetilde{A}^{\dagger-1}_{3++} + \widetilde{A}^\dagger_{4+-}\widetilde{A}^\dagger_{2--}\widetilde{A}^\dagger_{1-+}]\tilde{f})\right] \\
&= \underline{\widetilde{\mathbf{S}}}\ \left[\tilde{b}(\widetilde{S}^\dagger_{-+}\,\tilde{f}) + \tilde{d}^\dagger(\widetilde{S}^\dagger_{++}\,\tilde{f})\right]\ , \qquad (4.149)
\end{aligned}
$$

onde usamos, respectivamente, as relações de comutação (4.132), (4.138) (4.139), (4.144), (4.121) e (4.134), (4.135), (4.141), (4.143), (4.118). Comparando as duas últimas linhas de (4.146), concluimos que

$$
\widetilde{A}_2 = \widetilde{S}_{--} \qquad (4.150)
$$

e

$$\widetilde{A}_4 = -\widetilde{S}_{--}^{-1}\,\widetilde{S}_{-+}\ , \tag{4.151}$$

com

$$(\widetilde{S}_{-+})^\dagger = (P_-\widetilde{S}P_+)^\dagger = P_+\widetilde{S}^\dagger P_- = \widetilde{S}^\dagger_{+-}\ . \tag{4.152}$$

De (4.147) obtemos

$$\widetilde{A}_3 = \widetilde{S}^\dagger_{++} \tag{4.153}$$

e

$$\widetilde{A}_4 = \widetilde{S}^\dagger_{-+}\,\widetilde{S}^{\dagger-1}_{++}\ . \tag{4.154}$$

As expressões (4.148) e (4.149) levam, respectivamente, a

$$\widetilde{A}_1 = \widetilde{S}^{\dagger-1}_{++}\,\widetilde{S}^\dagger_{+-} \tag{4.155}$$

e

$$\widetilde{A}_1 = -\widetilde{S}_{+-}\,\widetilde{S}^{-1}_{--}\ , \tag{4.156}$$

onde substituimos (4.150) e (4.153).

Se escrevemos o operador espalhamento $\widetilde{S}$ na forma matricial

$$\widetilde{S} \hat{=} \begin{pmatrix} \widetilde{S}_{++} & \widetilde{S}_{+-} \\ \widetilde{S}_{-+} & \widetilde{S}_{--} \end{pmatrix}\ , \qquad \widetilde{S}^\dagger \hat{=} \begin{pmatrix} \widetilde{S}^\dagger_{++} & \widetilde{S}^\dagger_{+-} \\ \widetilde{S}^\dagger_{-+} & \widetilde{S}^\dagger_{--} \end{pmatrix}\ , \tag{4.157}$$

a propriedade de unitariedade $\widetilde{S}\widetilde{S}^\dagger = \widetilde{S}^\dagger\widetilde{S} = 1$ estabelece as relações

$$\widetilde{S}_{++}\,\widetilde{S}^\dagger_{++} + \widetilde{S}_{+-}\,\widetilde{S}^\dagger_{-+} = \widetilde{S}^\dagger_{++}\,\widetilde{S}_{++} + \widetilde{S}^\dagger_{+-}\,\widetilde{S}_{-+} = 1\ , \tag{4.158}$$

$$\widetilde{S}_{++}\,\widetilde{S}^\dagger_{+-} + \widetilde{S}_{+-}\,\widetilde{S}^\dagger_{--} = \widetilde{S}^\dagger_{++}\,\widetilde{S}_{+-} + \widetilde{S}^\dagger_{+-}\,\widetilde{S}_{--} = 0\ , \tag{4.159}$$

$$\widetilde{S}_{-+}\,\widetilde{S}^\dagger_{++} + \widetilde{S}_{--}\,\widetilde{S}^\dagger_{-+} = \widetilde{S}^\dagger_{-+}\,\widetilde{S}_{++} + \widetilde{S}^\dagger_{--}\,\widetilde{S}_{-+} = 0\ , \tag{4.160}$$

$$\widetilde{S}_{-+}\,\widetilde{S}^\dagger_{+-} + \widetilde{S}_{--}\,\widetilde{S}^\dagger_{--} = \widetilde{S}^\dagger_{-+}\,\widetilde{S}_{+-} + \widetilde{S}^\dagger_{--}\,\widetilde{S}_{--} = 1\ , \tag{4.161}$$

entre seus elementos de matriz. Com as expressões (4.159) e (4.160) podemos mostrar que as definições (4.151) para $\widetilde{A}_4$ e (4.156) para $\widetilde{A}_1$ estão em acordo, respectivamente, com (4.154) e (4.155).

A matriz $\underline{\widetilde{\mathbf{S}}}$, definida em (4.145), com os coeficientes $\widetilde{A}_i$ dados por (4.150), (4.153), (4.151) e (4.156), fica

$$\underline{\widetilde{\mathbf{S}}} = \widetilde{C}\ \mathrm{e}^{-\widetilde{S}_{+-}\,\widetilde{S}^{-1}_{--}\tilde{b}\tilde{d}}\ :\!\mathrm{e}^{(1-\widetilde{S}_{--})\tilde{b}\tilde{b}^\dagger}\!:\ :\!\mathrm{e}^{(\widetilde{S}^\dagger_{++}-1)\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}\!:\ \mathrm{e}^{-\widetilde{S}^{-1}_{--}\,\widetilde{S}_{-+}\tilde{d}^\dagger\tilde{b}^\dagger}\ . \tag{4.162}$$

O fator de normalização $\widetilde{C}$ comporá a definição da constante normalização $\widehat{C}$ do operador duplicado $\underline{\widetilde{\mathbf{S}}}$.

4.5 Teoria de Perturbação

O operador espalhamento no espaço de Fock, $\underline{\widetilde{\mathbf{S}}}$, construído na seção anterior, é escrito em termos dos elementos da matriz espalhamento no espaço de Hilbert, $\widetilde{S}_{\pm\pm}$. Portanto, qualquer processo de espalhamento descrito pelo operador $\underline{\widetilde{\mathbf{S}}}$ terá suas quantidades "físicas" dependentes das projeções $\widetilde{S}_{\pm\pm}$. Sendo assim, deveremos determinar explicitamente estes elementos de matriz para o campo de Dirac dual sob a ação de um campo eletromagnético externo dependente do tempo $A^{\mu}(x)$.

O campo de Dirac dual sujeito a uma interação dependente do tempo $H_1(t)$, na representação de Schrödinger, tem sua dinâmica dada pela equação

$$i\frac{d}{dt}\tilde{h}(t) = -[\widetilde{H}_0 + H_1(t)]\,\tilde{h}(t)\ . \tag{4.163}$$

Para o sistema que desejamos tratar, o operador hamiltoniano de interação no espaço das coordenadas é o potencial real

$$H_1(t) = e\,(V - \vec{\alpha}\cdot\mathbf{A})(t,\mathbf{x})\ . \tag{4.164}$$

Podemos passar da representação de Schrödinger para a representação de interação fazendo a substituição

$$\tilde{h}(t) = \mathrm{e}^{i\widetilde{H}_0 t}\,\tilde{h}_I(t)\ , \tag{4.165}$$

o que levará à equação de movimento (4.163) a ser escrita como

$$i\,\frac{d}{dt}\tilde{h}_I(t) = -\,\widetilde{H}_1^{(I)}(t)\,\tilde{h}_I(t)\ , \tag{4.166}$$

onde

$$\widetilde{H}_1^{(I)}(t) = \mathrm{e}^{-i\widetilde{H}_0 t}H_1(t)\,\mathrm{e}^{i\widetilde{H}_0 t}\ . \tag{4.167}$$

O índice (I) nas equações acima significa que as quantidades estão definidas na representação de interação.

Pela expressão (4.167), o operador evolução temporal na representação de interação é dado por

$$\widetilde{U}^{(I)}(t,s) = \mathrm{e}^{-i\widetilde{H}_0 t}\,\widetilde{U}(t,s)\,\mathrm{e}^{i\widetilde{H}_0 s}\ , \tag{4.168}$$

e, portanto, podemos escrever a definição da matriz $\widetilde{S}$, (4.106), como o limite forte sobre $\widetilde{\mathcal{H}}_1$ de $\widetilde{U}^{(I)}(t,s)$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{S} &= \overset{(forte)}{\lim_{\substack{s\to-\infty\\ t\to+\infty}}}\widetilde{U}^{(I)}(t,s)\\
&= \overset{(forte)}{\lim_{\substack{s\to-\infty\\ t\to+\infty}}}\mathrm{e}^{-i\widetilde{H}_0 t}\mathrm{e}^{i\widetilde{H}(t-s)}\,\mathrm{e}^{i\widetilde{H}_0 s}\\
&= \lim_{\substack{s\to+\infty\\ t\to-\infty}}\mathrm{e}^{i\widetilde{H}_0 t}\mathrm{e}^{-i\widetilde{H}(t-s)}\,\mathrm{e}^{-i\widetilde{H}_0 s}\,,
\end{aligned} \tag{4.169}$$

sendo que na última linha fizemos as substituições $t \to -t$ e $s \to -s$ e redefinimos os limites assintóticos. Comparando (4.169) com a definição da matriz S para o sistema original, (3.105), vemos que as expressões são análogas e que para o sistema dual a evolução temporal se apresenta em sentido invertido com relação a evolução do sistema original. Portanto, a série de Dyson para a matriz $\widetilde{S}$ será a mesma que aquela para S, (3.170), mas com os limites de integração temporal invertidos, ou seja, $t \to -\infty$ e $s \to +\infty$, e com H, H_0 substituidos por $\widetilde{H}$, $\widetilde{H}_0$. Assim, o termo de n-ésima ordem $\widetilde{S}^{(n)}$ no espaço dos momentos, correspondente a $S^{(n)}$ (3.174), fica dado por

$$\begin{aligned}\widetilde{S}^{(n)}(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= \frac{(i)^n}{(2\pi)^{3n/2}} \int_{+\infty}^{-\infty} dt_1 \int_{+\infty}^{t_1} dt_2 ... \int_{+\infty}^{t_{n-1}} dt_n \int d^3p_1 ... \int d^3p_{n-1} \cdot \\ &\cdot e^{it_1 \widetilde{H}_0(\mathbf{p})} H_1(t_1; \mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\, e^{-i(t_1-t_2)\widetilde{H}_0(\mathbf{p}_1)} H_1(t_2;\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2) ... \\ &... e^{-i(t_{n-1}-t_n)\widetilde{H}_0(\mathbf{p}_{n-1})} H_1(t_n;\mathbf{p}_{n-1}-\mathbf{q})\, e^{-it_n\widetilde{H}_0(\mathbf{q})} \ , \end{aligned} \tag{4.170}$$

com $\widetilde{S}^{(0)} = 1$. Comparando as expressões (3.174) e (4.170), vemos que nesta última existe um fator $(-)^n$ que não aparece em (3.174). Ele é consequência do sinal $(-)$ na equação de movimento (4.166), o qual não existe na equação (3.164). Desta expressão geral para $\widetilde{S}^{(n)}$, podemos encontrar $\widetilde{S}^{(n)}_{\pm\pm}$ aplicando os operadores de projeção $P_\pm$. Assim,

$$\begin{aligned}\widetilde{S}^{(n)}_{+-}(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= P_+\, \widetilde{S}^{(n)}(\mathbf{p},\mathbf{q})\, P_- \\ &= P_+(\mathbf{p}) \frac{(i)^n}{(2\pi)^{3n/2}} \int_{+\infty}^{-\infty} dt_1 \int_{+\infty}^{t_1} dt_2 ... \int_{+\infty}^{t_{n-1}} dt_n \int d^3p_1 ... \\ &\quad ... \int d^3p_{n-1} e^{it_1\widetilde{H}_0(\mathbf{p})} H_1(t_1;\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\, e^{-i(t_1-t_2)\widetilde{H}_0(\mathbf{p}_1)} \cdot \\ &\quad \cdot H_1(t_2;\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2) ... e^{-i(t_{n-1}-t_n)\widetilde{H}_0(\mathbf{p}_{n-1})} H_1(t_n;\mathbf{p}_{n-1}-\mathbf{q}) \cdot \\ &\quad \cdot e^{-it_n\widetilde{H}_0(\mathbf{q})} P_-(\mathbf{q}) \\ &= \frac{(i)^n}{(2\pi)^{3n/2}} \int_{+\infty}^{-\infty} dt_1 \int_{+\infty}^{t_1} dt_2 ... \int_{+\infty}^{t_{n-1}} dt_n \int d^3p_1 ... \cdot \\ &\quad ... \int d^3p_{n-1} P_+(\mathbf{p})\, e^{it_1\widetilde{H}_0(\mathbf{p})} H_1(t_1;\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\, e^{-i(t_1-t_2)\widetilde{H}_0(\mathbf{p}_1)} \cdot \\ &\quad \cdot H_1(t_2;\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2) ... e^{-i(t_{n-1}-t_n)\widetilde{H}_0(\mathbf{p}_{n-1})} H_1(t_n;\mathbf{p}_{n-1}-\mathbf{q}) \cdot \\ &\quad \cdot e^{-it_n\widetilde{H}_0(\mathbf{q})}\, P_-(\mathbf{q}) \end{aligned} \tag{4.171}$$

As integrais em t_j com limites entre $+\infty$ e t_{j-1} podem ser transfomadas em integrais com limites entre $+\infty$ e $-\infty$, se usamos a função

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_A(t_{j-1}-t_j;\mathbf{p}) &= \Theta(t_j - t_{j-1})\, e^{-i(t_{j-1}-t_j)\widetilde{H}_0(\mathbf{p})} \\ &= \Theta(-(t_{j-1}-t_j))\, e^{-i(t_{j-1}-t_j)\widetilde{H}_0(\mathbf{p})} \ . \end{aligned} \tag{4.172}$$

De fato,

$$\int_{+\infty}^{-\infty} dt_j\,\Theta(t_j - t_{j-1})\,\mathrm{e}^{-i(t_{j-1}-t_j)\widetilde{H}_0(\mathbf{p})} = \int_{+\infty}^{t_{j-1}} dt_j\,\mathrm{e}^{-i(t_{j-1}-t_j)\widetilde{H}_0(\mathbf{p})}\,, \tag{4.173}$$

já que

$$\Theta(t_j - t_{j-1}) = \begin{cases} 1\,, & \text{para} \;\; t_j > t_{j-1}\;, \\ 0\,, & \text{para} \;\; t_j < t_{j-1}\;. \end{cases} \tag{4.174}$$

Portanto, a matriz $\widetilde{S}$ tem os fatores do integrando dispostos na ordem antitemporal, ou seja, $t_n > t_{n-1} > ... > t_2 > t_1$ [42]. Então, o elemento de matriz $\widetilde{S}^{(n)}_{+-}(\mathbf{p},\mathbf{q})$, dado por (4.171), pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}^{(n)}_{+-}(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= \frac{(i)^n}{(2\pi)^{3n/2}}\int_{+\infty}^{-\infty} dt_1...dt_n \int d^3p_1...d^3p_{n-1}\,P_+(\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{it_1\widetilde{H}_0(\mathbf{p})}\,\cdot \\
&\quad \cdot H_1(t_1;\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\,\Theta(t_2-t_1)\,\mathrm{e}^{-i(t_1-t_2)\widetilde{H}_0(\mathbf{p}_1)}H_1(t_2;\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)... \\
&\quad ...\Theta(t_n-t_{n-1})\,\mathrm{e}^{-i(t_{n-1}-t_n)\widetilde{H}_0(\mathbf{p}_{n-1})}H_1(t_n;\mathbf{p}_{n-1}-\mathbf{q})\,\cdot \\
&\quad \cdot \mathrm{e}^{-it_n\widetilde{H}_0(\mathbf{q})}\,P_-(\mathbf{q}) \\
&= \frac{(-i)^n}{(2\pi)^{3n/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1...dt_n \int d^3p_1...d^3p_{n-1}\,P_+(\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{it_1\widetilde{H}_0(\mathbf{p})}\,\cdot \\
&\quad \cdot H_1(t_1;\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\,\Theta(t_2-t_1)\,\mathrm{e}^{-i(t_1-t_2)\widetilde{H}_0(\mathbf{p}_1)}H_1(t_2;\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)... \\
&\quad ...\Theta(t_n-t_{n-1})\,\mathrm{e}^{-i(t_{n-1}-t_n)\widetilde{H}_0(\mathbf{p}_{n-1})}H_1(t_n;\mathbf{p}_{n-1}-\mathbf{q})\,\cdot \\
&\quad \cdot \mathrm{e}^{-it_n\widetilde{H}_0(\mathbf{q})}\,P_-(\mathbf{q})\;.
\end{aligned} \tag{4.175}$$

onde o fator $(-1)^n$ vem da inversão de limites das integrações temporais. De acordo com (B.31) e (B.32), os operadores de projeção são definidos por

$$\begin{aligned}
P_+(\mathbf{p})\,\widetilde{H}_0(\mathbf{p}) &= E_{\mathbf{p}}\,P_+(\mathbf{p}) = \widetilde{H}_0(\mathbf{p})\,P_+(\mathbf{p})\;, \\
P_-(\mathbf{p})\,\widetilde{H}_0(\mathbf{p}) &= -E_{\mathbf{p}}\,P_-(\mathbf{p}) = \widetilde{H}_0(\mathbf{p})\,P_-(\mathbf{p})\;,
\end{aligned} \tag{4.176}$$

e, portanto,

$$P_\pm(\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{-it\tilde{H}_0(\mathbf{p})} = \mathrm{e}^{-it[\pm E(\mathbf{p})]}\,P_\pm(\mathbf{p}) = \mathrm{e}^{-it\tilde{H}_0(\mathbf{p})}\,P_\pm(\mathbf{p})\;. \tag{4.177}$$

Substituindo este resultado na equação (4.175), obtemos

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}^{(n)}_{+-}(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= \frac{(-i)^n}{(2\pi)^{3n/2}}\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1...dt_n \int d^3p_1...d^3p_{n-1}\,\mathrm{e}^{i[t_1E(\mathbf{p})+t_nE(\mathbf{q})]}\,\cdot \\
&\quad \cdot P_+(\mathbf{p})\,\tilde{H}_1(t_1;\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\,\Theta(t_2-t_1)\,\mathrm{e}^{-i(t_1-t_2)\tilde{H}_0(\mathbf{p}_1)}\,\cdot \\
&\quad \cdot \tilde{H}_1(t_2;\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)...\Theta(t_n-t_{n-1})\,\mathrm{e}^{-i(t_{n-1}-t_n)\tilde{H}_0(\mathbf{p}_{n-1})} \\
&\quad \cdot \tilde{H}_1(t_n;\mathbf{p}_{n-1}-\mathbf{q})\,P_-(\mathbf{q})
\end{aligned} \tag{4.178}$$

As integrais em t nesta última expressão poderão ser calculadas com a ajuda da transformada de Fourier distribucional de

$$\widetilde{S}_A(p_0;\mathbf{p}) = \Theta(-t)\,\mathrm{e}^{-it\tilde{H}_0(\mathbf{p})}\,, \tag{4.179}$$

definida por

$$\widetilde{S}_A(p_0;\mathbf{p}) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{0} dt\,\mathrm{e}^{-it\widetilde{H}_0(\mathbf{p})}\,\mathrm{e}^{it(p_0-i\varepsilon)}\ . \tag{4.180}$$

Introduzindo a decomposição nos subespaços espectrais de $\widetilde{H}_0$,

$$P_+ + P_- = 1\ , \tag{4.181}$$

a expressão (4.180) fica escrita como

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}_A(p_0;\mathbf{p}) &= (P_+ + P_-)\,\widetilde{S}_A(p_0;\mathbf{p}) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{0} dt\,\mathrm{e}^{it(p_0-i\varepsilon)}\left[P_+\,\mathrm{e}^{-it\widetilde{H}_0(\mathbf{p})} + P_-\,\mathrm{e}^{-it\widetilde{H}_0(\mathbf{p})}\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{0} dt\,\mathrm{e}^{it(p_0-i\varepsilon)}\left[P_+\,\mathrm{e}^{-itE_{\mathbf{p}}} + P_-\,\mathrm{e}^{itE_{\mathbf{p}}}\right] \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{0} dt\,\left[P_+\,\mathrm{e}^{[i(p_0-E_{\mathbf{p}})+\varepsilon]t} + P_-\,\mathrm{e}^{[i(p_0+E_{\mathbf{p}})+\varepsilon]t}\right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{P_+\,\mathrm{e}^{[i(p_0-E_{\mathbf{p}})+\varepsilon]t}}{i(p_0-E_{\mathbf{p}}-i\varepsilon)} + \frac{P_-\,\mathrm{e}^{[i(p_0+E_{\mathbf{p}})+\varepsilon]t}}{i(p_0+E_{\mathbf{p}}-i\varepsilon)}\right]_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{P_+}{i(p_0-E_{\mathbf{p}}-i\varepsilon)} + \frac{P_-}{i(p_0+E_{\mathbf{p}}-i\varepsilon)}\right] \\
&= \frac{(-i)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{P_+}{p_0-E_{\mathbf{p}}-i0} + \frac{P_-}{p_0+E_{\mathbf{p}}-i0}\right]\ .
\end{aligned} \tag{4.182}$$

Usando as definições dos operadores de projeção P_+, (B.31), e P_-, (B.32), e

$$\alpha^j = \gamma^0\gamma^j\ , \qquad \beta = \gamma^0\ , \qquad (\alpha^j)^2 = \beta^2 = 1\ , \tag{4.183}$$

a expressão (4.182) resulta em

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}_A(p_0;\mathbf{p}) &= \frac{(-i)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\left[\frac{(E_{\mathbf{p}} + \vec{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \beta m)}{p_0-E_{\mathbf{p}}-i0} + \frac{(E_{\mathbf{p}} - \vec{\alpha}\cdot\mathbf{p} - \beta m)}{p_0+E_{\mathbf{p}}-i0}\right] \\
&= \frac{(-i)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\left[\frac{E_{\mathbf{p}}\gamma^0 - \vec{\gamma}\cdot\mathbf{p} + m}{p_0-E_{\mathbf{p}}-i0} + \frac{E_{\mathbf{p}}\gamma^0 + \vec{\gamma}\cdot\mathbf{p} - m}{p_0+E_{\mathbf{p}}-i0}\right]\gamma^0 \qquad (4.184) \\
&= \frac{(-i)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}}\frac{1}{(p_0-E_{\mathbf{p}}-i0)(p_0+E_{\mathbf{p}}-i0)}\ .
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \cdot\big\{(E_{\mathbf{p}}\gamma^0-\vec{\gamma}\cdot\mathbf{p}+m)(p_0+E_{\mathbf{p}}-i0)+ \\
& +(E_{\mathbf{p}}\gamma^0+\vec{\gamma}\cdot\mathbf{p}-m)(p_0-E_{\mathbf{p}}-i0)\big\}\;\gamma^0 \\
= \;& \frac{(-i)}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{p_0\gamma^0-\vec{\gamma}\cdot\mathbf{p}+m}{p_0^2-E_{\mathbf{p}}^2-ip_0 0}\right]\gamma^0\ .
\end{aligned} \tag{4.185}
$$

Podemos escrever esta expressão na forma covariante introduzindo

$$
p_0=E_{\mathbf{p}}\ ,\qquad p^2=p_0^2-\mathbf{p}^2\ ,\qquad \not{p}=\gamma^0p_0-\vec{\gamma}\cdot\mathbf{p}\ ,\qquad E^2=\mathbf{p}^2+m^2\ , \tag{4.186}
$$

para a qual obtemos

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S}_A(p_0;\mathbf{p}) &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\not{p}+m}{p_0^2-(\mathbf{p}^2+m^2)-ip_0 0}\right]\gamma^0 \\
&= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\not{p}+m}{p^2-m^2-ip_0 0}\right]\gamma^0 \\
&\hat{=} \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}S^{av}(p)\,\gamma^0\ ,
\end{aligned} \tag{4.187}
$$

que tem como transformada inversa

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S}_A(t;\mathbf{p}) &\hat{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dp^0\,\widetilde{S}_A(p^0;\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{-ip^0t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dp^0\frac{(-i)}{\sqrt{2\pi}}\,S^{av}(p)\,\gamma^0\,\mathrm{e}^{-ip^0t} \\
&= \frac{(-i)}{2\pi}\int dp^0\,S^{av}(p)\,\mathrm{e}^{-ip^0t}\,\gamma^0\ .
\end{aligned} \tag{4.188}
$$

De volta ao termo $\widetilde{S}^{(n)}$ da matriz espalhamento, (4.178), substituimos (4.172) e (4.188), obtendo

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S}^{(n)}_{+-}(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= \frac{(-i)^n}{(2\pi)^{3n/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}dt_1...dt_n\int d^3p_1...d^3p_{n-1}\,\mathrm{e}^{i[t_1E(\mathbf{p})+t_nE(\mathbf{q})]}\,\cdot \\
&\quad \cdot P_+(\mathbf{p})\,H_1(t_1;\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\,\overbrace{\Theta(t_2-t_1)\,\mathrm{e}^{-i(t_1-t_2)\widetilde{H}_0(\mathbf{p}_1)}}\,\cdot \\
&\quad \cdot H_1(t_2;\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)...\overbrace{\Theta(t_n-t_{n-1})\,\mathrm{e}^{-i(t_{n-1}-t_n)\widetilde{H}_0(\mathbf{p}_{n-1})}}\,\cdot \\
&\quad \cdot H_1(t_n;\mathbf{p}_{n-1}-\mathbf{q})\,P_-(\mathbf{q}) \\
&= \frac{(-i)^n}{(2\pi)^{3n/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}dt_1...dt_n\int d^3p_1...d^3p_{n-1}\,\mathrm{e}^{i[t_1E(\mathbf{p})+t_nE(\mathbf{q})]}\,\cdot \\
&\quad \cdot P_+(\mathbf{p})\,H_1(t_1;\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\,\widetilde{S}_A(t_1-t_2;\mathbf{p}_1)\,H_1(t_2;\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)... \\
&\quad ...\widetilde{S}_A(t_{n-1}-t_n;\mathbf{p}_{n-1})\,H_1(t_n;\mathbf{p}_{n-1}-\mathbf{q})\,P_-(\mathbf{q}) \\
&= \frac{(-i)^n}{(2\pi)^{3n/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}dt_1...dt_n\int d^3p_1...d^3p_{n-1}\,\mathrm{e}^{i[t_1E(\mathbf{p})+t_nE(\mathbf{q})]}\,\cdot
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \cdot P_+(\mathbf{p}) H_1(t_1; \mathbf{p}-\mathbf{p}_1) \, \frac{(-i)}{2\pi} \int dp_1^0 \, S^{av}(p_1) \, \mathrm{e}^{-ip_1^0(t_1-t_2)} \cdot \\
& \cdot \gamma^0 \, H_1(t_2; \mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2) ... \frac{(-i)}{2\pi} \int dp_{n-1}^0 \, S^{av}(p_{n-1}) \cdot \\
& \cdot \mathrm{e}^{-ip_{n-1}^0(t_{n-1}-t_n)} \, \gamma^0 \, H_1(t_n; \mathbf{p}_{n-1}-\mathbf{q}) \, P_-(\mathbf{q}) \\
= \; & \frac{(-)^n \, i}{(2\pi)^{5n/2-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 ... dt_n \int d^4p_1 ... d^4p_{n-1} \cdot \\
& \cdot \mathrm{e}^{i[t_1 E(\mathbf{p}) + t_n E(\mathbf{q})]} \, P_+(\mathbf{p}) \, \gamma^0 \, H_1(t_1; \mathbf{p}-\mathbf{p}_1) \, S^{av}(p_1) \cdot \\
& \cdot \mathrm{e}^{-ip_1^0(t_1-t_2)} \, \gamma^0 \, H_1(t_2; \mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2) ... S^{av}(p_{n-1}) \cdot \\
& \cdot \mathrm{e}^{-ip_{n-1}^0(t_{n-1}-t_n)} \, \gamma^0 \, H_1(t_n; \mathbf{p}_{n-1}-\mathbf{q}) \, P_-(\mathbf{q}) \; . \qquad (4.189)
\end{aligned}
$$

Pela definição de $H_1(t)$, (4.164), temos que

$$
\begin{aligned}
\gamma^0 H_1(t_j; \mathbf{p}_{j-1}-\mathbf{p}_j) &= e \, \gamma^0 (V - \vec{\alpha} \cdot \mathbf{A})(t_j; \mathbf{p}_{j-1}-\mathbf{p}_j) \\
&\hat{=} \; e \, \not{A}(t_j; \mathbf{p}_{j-1}-\mathbf{p}_j) \; , \qquad (4.190)
\end{aligned}
$$

e podemos reescrever (4.189) como

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S}_{+-}^{(n)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \; & \frac{(-)^n \, i}{(2\pi)^{5n/2-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 ... dt_n \int d^4p_1 ... d^4p_{n-1} \, \mathrm{e}^{i[t_1 E(\mathbf{p}) + t_n E(\mathbf{q})]} P_+(\mathbf{p}) \, \gamma^0 \cdot \\
& \cdot \underbrace{\gamma^0 H_1(t_1; \mathbf{p}-\mathbf{p}_1)} \, S^{av}(p_1) \, \mathrm{e}^{-ip_1^0(t_1-t_2)} \, \underbrace{\gamma^0 H_1(t_2; \mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)} ... \\
& ... S^{av}(p_{n-1}) \, \mathrm{e}^{-ip_{n-1}^0(t_{n-1}-t_n)} \, \underbrace{\gamma^0 H_1(t_n; \mathbf{p}_{n-1}-\mathbf{q})} \, P_-(\mathbf{q}) \\
= \; & \frac{i \, (-e)^n}{(2\pi)^{5n/2-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 ... dt_n \int d^4p_1 ... d^4p_{n-1} \, \mathrm{e}^{i[t_1 E(\mathbf{p}) + t_n E(\mathbf{q})]} P_+(\mathbf{p}) \, \gamma^0 \cdot \\
& \cdot \not{A}(t_1; \mathbf{p}-\mathbf{p}_1) \, S^{av}(p_1) \, \mathrm{e}^{-ip_1^0(t_1-t_2)} \; \not{A}(t_2; \mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2) ... \\
& ... S^{av}(p_{n-1}) \, \mathrm{e}^{-ip_{n-1}^0(t_{n-1}-t_n)} \; \not{A}(t_n; \mathbf{p}_{n-1}-\mathbf{q}) \, P_-(\mathbf{q}) \; . \qquad (4.191)
\end{aligned}
$$

Introduzindo a transformada de Fourier na coordenada temporal dos potenciais

$$
\not{A}(t_1; \mathbf{p}-\mathbf{p}_1) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int dk_1 \; \not{A}(k_1; \mathbf{p}-\mathbf{p}_1) \, \mathrm{e}^{-ik_1 t_1} \, , \qquad (4.192)
$$

a expressão (4.191) torna-se

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S}_{+-}^{(n)}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \; & \frac{i \, (-e)^n}{(2\pi)^{5n/2-1}} \int d^4p_1 ... d^4p_{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 ... dt_n \, \mathrm{e}^{i[t_1 E(\mathbf{p}) + t_n E(\mathbf{q})]} P_+(\mathbf{p}) \, \gamma^0 \cdot \\
& \cdot \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int dk_1 \; \not{A}(k_1; \mathbf{p}-\mathbf{p}_1) \, \mathrm{e}^{-ik_1 t_1} \, S^{av}(p_1) \, \mathrm{e}^{-ip_1^0(t_1-t_2)} \cdot \\
& \cdot \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int dk_2 \; \not{A}(k_2; \mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2) \, \mathrm{e}^{-ik_2 t_2} ... S^{av}(p_{n-1}) \, \mathrm{e}^{-ip_{n-1}^0(t_{n-1}-t_n)} \cdot \\
& \cdot \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int dk_n \; \not{A}(k_n; \mathbf{p}_{n-1}-\mathbf{q}) \, \mathrm{e}^{-ik_n t_n} \, P_-(\mathbf{q})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= & \frac{i\,(-e)^n}{(2\pi)^{3n-1}} \int d^4p_1 ... d^4p_{n-1} \int dk_1 ... dk_n \, P_+(\mathbf{p})\, \gamma^0 \cdot \\
& \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \, \mathrm{e}^{it_1 p^0} \mathrm{e}^{-ik_1 t_1} \mathrm{e}^{-ip_1^0 t_1} \;\not{A}(k_1; \mathbf{p} - \mathbf{p}_1)\, S^{av}(p_1) ... \\
& ... \int_{-\infty}^{+\infty} dt_n \, \mathrm{e}^{-it_n q^0} \mathrm{e}^{-ik_n t_n} \mathrm{e}^{ip_{n-1}^0 t_n} \;\not{A}(k_n; \mathbf{p}_{n-1} - \mathbf{q})\, P_-(\mathbf{q}) \;, \qquad (4.193)
\end{aligned}
$$

onde usamos as definições

$$
p^0 = \pm E(\mathbf{p}) \;, \qquad q^0 = \pm E(\mathbf{q}) \;. \qquad (4.194)
$$

Mas

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \, \mathrm{e}^{i(p^0 - p_1^0 - k_1)t_1} &= 2\pi\, \delta(p^0 - p_1^0 - k_1) \;, \\
& \vdots \qquad (4.195) \\
\int_{-\infty}^{+\infty} dt_n \, \mathrm{e}^{i(p_{n-1}^0 - q^0 - k_n)t_n} &= 2\pi\, \delta(p_{n-1}^0 - q^0 - k_n) \;,
\end{aligned}
$$

então,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S}^{(n)}_{+-}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{i\,(-e)^n}{(2\pi)^{3n-1}} \int d^4p_1 ... d^4p_{n-1} \int dk_1 ... dk_n \, P_+(\mathbf{p})\, \gamma^0 \cdot \\
& \cdot 2\pi\, \delta(p^0 - p_1^0 - k_1) \;\not{A}(k_1; \mathbf{p} - \mathbf{p}_1)\, S^{av}(p_1) ... \\
& ... 2\pi\, \delta(p_{n-1}^0 - q^0 - k_n) \;\not{A}(k_n; \mathbf{p}_{n-1} - \mathbf{q})\, P_-(\mathbf{q}) \\
&= \frac{i\,(-e)^n}{(2\pi)^{2n-1}} \int d^4p_1 ... d^4p_{n-1} \, P_+(\mathbf{p})\, \gamma^0 \;\not{A}(p - p_1)\, S^{av}(p_1) ... \\
& ... S^{av}(p_{n-1}) \;\not{A}(p_{n-1} - q)\, P_-(\mathbf{q}) \;. \qquad (4.196)
\end{aligned}
$$

Podemos obter os outros elementos de matriz

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S}^{(n)}_{++}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= P_+(\mathbf{p})\, \widetilde{S}^{(n)}(\mathbf{p}, \mathbf{q})\, P_+(\mathbf{q}) \;, \\
\widetilde{S}^{(n)}_{-+}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= P_-(\mathbf{p})\, \widetilde{S}^{(n)}(\mathbf{p}, \mathbf{q})\, P_+(\mathbf{q}) \;, \qquad (4.197) \\
\widetilde{S}^{(n)}_{--}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= P_-(\mathbf{p})\, \widetilde{S}^{(n)}(\mathbf{p}, \mathbf{q})\, P_-(\mathbf{q}) \;,
\end{aligned}
$$

pelo mesmo procedimento adotado no cálculo de $\widetilde{S}^{(n)}_{+-}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, (4.196). Para este caso, na expressão (4.193) substitutimos $p^0 = E(\mathbf{p})$ e $q^0 = -E(\mathbf{q})$. Para $\widetilde{S}^{(n)}_{++}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ deveremos usar $p^0 = E(\mathbf{p})$ e $q^0 = E(\mathbf{q})$, resultando na expressão

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S}^{(n)}_{++}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{i\,(-e)^n}{(2\pi)^{2n-1}} \int d^4p_1 ... d^4p_{n-1} \, P_+(\mathbf{p})\, \gamma^0 \;\not{A}(p - p_1) \\
& S^{av}(p_1) ... S^{av}(p_{n-1}) \;\not{A}(p_{n-1} - q)\, P_+(\mathbf{q}) \;,
\end{aligned}
$$

e de forma análoga para $\widetilde{S}^{(n)}_{-+}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ e $\widetilde{S}^{(n)}_{--}(\mathbf{p},\mathbf{q})$. Assim, as quatro expressões podem ser resumidas em

$$\begin{aligned}\widetilde{S}^{(n)}_{\pm\pm}(\mathbf{p},\mathbf{q}) \;&=\; \frac{i\,(-e)^n}{(2\pi)^{2n-1}} P_{\pm}(\mathbf{p})\,\gamma^0 \int d^4p_1 ... d^4p_{n-1}\;\; \not{A}(p-p_1)\, S^{av}(p_1)\,\cdot \\ &\cdot\, \not{A}(p_1-p_2)\, S^{av}(p_2) ... S^{av}(p_{n-1})\;\; \not{A}(p_{n-1}-q)\, P_{\pm}(\mathbf{q})\;. \end{aligned} \tag{4.198}$$

Estas expressões, junto com aquelas $S^{(n)}_{\pm\pm}(\mathbf{p},\mathbf{q})$ para o sistema original, (3.195), comporão a descrição dinâmica do sistema duplicado ($\widehat{\underline{\mathbf{S}}} = \underline{\mathbf{S}}\,\widetilde{\underline{\mathbf{S}}}$), possibilitando o cálculo de processos de espalhamento levando em conta os efeitos de temperatura. Como aplicação, trataremos da produção de pares elétron-pósitron num campo eletromagnético externo a temperatura finita.

Capítulo 5

Operador Espalhamento à Temperatura Finita

5.1 Espaço de Fock Duplicado

O formalismo de TFD estabelece que a introdução dos efeitos de temperatura a sistemas de campos quânticos é feita através de uma transformação de Bogoliubov sobre operadores que descrevem observáveis, definidos num espaço de Fock duplicado. Este espaço duplicado é formado pela soma direta do espaço de Fock do sistema original e seu dual, este último obtido a partir das regras de conjugação dual (til) (2.29). Assim, para descrevermos sistemas a $T \neq 0$, devemos sair dos espaços de Hilbert originais ($\mathcal{H}_n^{\pm}$) e construir os espaços de Hilbert estendidos

$$\widehat{\mathcal{H}}_n^{\pm} = \mathcal{H}_n^{\pm} \otimes \widetilde{\mathcal{H}}_n^{\pm} \;\; , \tag{5.1}$$

correspondentes aos sistemas duplicados. A partir destes, construimos o espaço de Fock duplicado

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{F}}^{\pm} \;\; &\hat{=} \;\; \mathcal{F}^{\pm} \oplus \widetilde{\mathcal{F}}^{\pm} \\ &= \;\; \left(\mathcal{H}_n^{\pm} \otimes \widetilde{\mathcal{H}}_n^{\pm}\right) \\ &= \;\; \left[\mathcal{H}_0 \otimes \widetilde{\mathcal{H}}_0\right] \oplus \left[\mathcal{H}_1 \otimes \widetilde{\mathcal{H}}_1\right] \oplus \left[\mathcal{H}_2^{\pm} \otimes \widetilde{\mathcal{H}}_2^{\pm}\right] \oplus ... \oplus \left[\mathcal{H}_n^{\pm} \otimes \widetilde{\mathcal{H}}_n^{\pm}\right] \oplus ... \;, \end{aligned} \tag{5.2}$$

onde os vetores do espaço de Hilbert estendido são definidos como

$$(\widehat{\alpha}\, \Omega\, \widetilde{\Omega}) \in \left(\mathcal{H}_0 \otimes \widetilde{\mathcal{H}}_0\right) \tag{5.3}$$

e

$$(\widetilde{\varphi})_n = (\varphi\, \widetilde{\varphi})_n = (\varphi(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) \otimes \widetilde{\varphi}(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)) \in \left(\mathcal{H}_n^{\pm} \otimes \widetilde{\mathcal{H}}_n^{\pm}\right) . \tag{5.4}$$

Desta forma, os vetores no espaço de Fock duplicado serão

$$(\widehat{\Phi})_n \hat{=} (\Phi\, \widetilde{\Phi})_n = (\widehat{\varphi}_0, \widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2, ...) \in \widehat{\mathcal{F}}^{\pm} \tag{5.5}$$

Como vimos no *Capítulo 2*, os vetores de estado do espaço duplicado que expandem o vácuo térmico $|O(\beta)\rangle$ possuem os mesmos autovalores de energia, ou seja, $|n,\widetilde{n}\rangle$. Assim, os vetores do espaço de Fock de TFD serão compostos por produtos de mesmo número de partículas, ou seja,

$$\widehat{\varphi}_0 = \widehat{\alpha}\,\Omega\,\widetilde{\Omega}, \qquad \widehat{\varphi}_1 = \varphi_1 \otimes \widetilde{\varphi}_1, ..., \widehat{\varphi}_n = \varphi_n \otimes \widetilde{\varphi}_n \tag{5.6}$$

Podemos definir o operador unitário $\widehat{\underline{\mathbf{U}}}$ no espaço de Fock,

$$\widehat{\underline{\mathbf{U}}} = \underline{\mathbf{U}}\,\widetilde{\underline{\mathbf{U}}} = \otimes_{j=1}^{n}\widehat{U} = \otimes_{j=1}^{n} U\widetilde{U}, \tag{5.7}$$

que dá a evolução temporal do sistema duplicado livre, de forma que

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\underline{\mathbf{U}}}\widehat{\Phi}\right)_n &= \left(\otimes_{j=1}^{n}\widehat{U}\right)(\varphi\,\widetilde{\varphi})_n = \left(\otimes_{j=1}^{n}U\right)\varphi_n \otimes \left(\otimes_{j=1}^{n}\widetilde{U}\right)\widetilde{\varphi}_n \\ &= S_n^{\pm}\left(Uh_1 \otimes ... \otimes Uh_n\right) \otimes S_n^{\pm}\left(\widetilde{U}\tilde{h}_1 \otimes ... \otimes \widetilde{U}\tilde{h}_n\right), \end{aligned} \tag{5.8}$$

onde $\underline{\mathbf{U}}$ e $\widetilde{\underline{\mathbf{U}}}$ foram definidos, respectivamente, em (4.38) e (4.42). Derivando a expressão (5.8) com respeito ao tempo, teremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\widehat{\underline{\mathbf{U}}}\,\widehat{\Phi}\right)_n &= \frac{d}{dt}\left(\otimes_{j=1}^{n}\widehat{U}\right)(\widehat{\varphi})_n \\ &= \frac{d}{dt}\left[S_n^{\pm}\left(U\,f_1 \otimes ... \otimes U\,f_n\right) \otimes S_n^{\pm}\left(\widetilde{U}\;\tilde{f}_1 \otimes ... \otimes \widetilde{U}\;\tilde{f}_n\right)\right] \\ &= -i\sum_{j=1}^{n}\left(\mathbf{1} \otimes ... \otimes H_{(j)} \otimes ... \otimes \mathbf{1}\right) S_n^{\pm}\left(U\,f_1 \otimes ... \otimes U\,f_n\right) \otimes \\ &\quad \otimes S_n^{\pm}\left(\widetilde{U}\;\tilde{f}_1 \otimes ... \otimes \widetilde{U}\;\tilde{f}_n\right) + S_n^{\pm}\left(U\,f_1 \otimes ... \otimes U\,f_n\right) \otimes \\ &\quad \otimes i\sum_{j=1}^{n}\left(\mathbf{1} \otimes ... \otimes \widetilde{H}_{(j)} \otimes ... \otimes \mathbf{1}\right) S_n^{\pm}\left(\widetilde{U}\;\tilde{f}_1 \otimes ... \otimes \widetilde{U}\;\tilde{f}_n\right) \\ &= -i\left[\left(\underline{\mathbf{H}} \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes \widetilde{\underline{\mathbf{H}}}\right)\left(\widehat{\underline{\mathbf{U}}}\,\widehat{\Phi}\right)\right]_n \\ &= -i\left(\widehat{\underline{\mathbf{H}}}\,\widehat{\underline{\mathbf{U}}}\,\widehat{\Phi}\right)_n \quad , \end{aligned} \tag{5.9}$$

ou seja, o operador $\widehat{\underline{\mathbf{U}}}$ satisfaz a equação de evolução

$$i\frac{d}{dt}\widehat{\underline{\mathbf{U}}} = \widehat{\underline{\mathbf{H}}}\,\widehat{\underline{\mathbf{U}}} = \widehat{\underline{\mathbf{U}}}\,\widehat{\underline{\mathbf{H}}}\ , \tag{5.10}$$

onde definimos o operador hamiltoniano $\widehat{\underline{\mathbf{H}}}$ como

$$\widehat{\underline{\mathbf{H}}} = \left(\underline{\mathbf{H}} \otimes 1 - 1 \otimes \widetilde{\underline{\mathbf{H}}}\right). \tag{5.11}$$

A propriedade de comutação entre os operadores $\widehat{\underline{\mathbf{U}}}$ e $\widehat{\underline{\mathbf{H}}}$,

$$\left[\widehat{\underline{\mathbf{U}}}\,,\,\widehat{\underline{\mathbf{H}}}\right]_- = 0\ , \tag{5.12}$$

decorre das relações de comutação

$$[\underline{\mathbf{U}}\,,\underline{\mathbf{H}}]_- = 0 \tag{5.13}$$

para o sistema original e

$$\left[\underline{\widetilde{\mathbf{U}}}\,,\underline{\widetilde{\mathbf{H}}}\right]_- = 0 \tag{5.14}$$

para o sistema dual, que são conseqüências, respectivamente, das definições $U = \mathrm{e}^{-iHt}$ e $\widetilde{U} = \mathrm{e}^{i\widetilde{H}t}$.

A solução da equação de movimento (5.10) é a transformação unitária

$$\underline{\widehat{\mathbf{U}}} = \mathrm{e}^{-i\underline{\widehat{\mathbf{H}}}t}\ . \tag{5.15}$$

O operador hamiltoniano no espaço de Fock duplicado, de acordo com (3.52) e (4.52), é escrito em termos dos operadores de criação e aniquilação como

$$\begin{aligned} \underline{\widehat{\mathbf{H}}} &= \left(\underline{\mathbf{H}} \otimes 1 - 1 \otimes \underline{\widetilde{\mathbf{H}}}\right) \\ &= \sum_{jk} \left[(h_j\,,\, H(\mathbf{x})h_k)\ a^\dagger(h_j)\,a(h_k) - \left(\tilde{h}_j\ \widetilde{H}(\mathbf{x})\tilde{h}_k\right)\ \tilde{a}^\dagger(\tilde{h}_j)\,\tilde{a}(\tilde{h}_k)\right] \end{aligned} \tag{5.16}$$

de forma que

$$\begin{aligned} \left(\underline{\widehat{\mathbf{H}}}\,\widehat{\Phi}\right)_n &= \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\mathbf{1} \otimes ... \otimes H_{(j)} \otimes ... \otimes \mathbf{1}\right) \varphi_n \otimes (\mathbf{1})\widetilde{\varphi}_n\right] + \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n} \left[(\mathbf{1})\varphi_n \otimes \left(\mathbf{1} \otimes ... \otimes \widetilde{H}_{(j)} \otimes ... \otimes \mathbf{1}\right) \widetilde{\varphi}_n\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left[H(\mathbf{x}_j)\varphi_n(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) \otimes 1 - 1 \otimes \widetilde{H}(\mathbf{x}_j)\widetilde{\varphi}_n(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)\right]. \end{aligned}$$

Algumas quantidades físicas de sistemas a $T \neq 0$ poderão ser calculadas como o valor esperado no espaço de Fock térmico, por exemplo*,

$$\left\langle \underline{\widehat{\mathbf{A}}} \right\rangle_{\widehat{\Phi}_\beta} \widehat{=} \left(\widehat{\Phi}_\beta, \underline{\widehat{\mathbf{A}}}\widehat{\Phi}_\beta\right). \tag{5.17}$$

onde os vetores $\widehat{\Phi}_\beta$ são obtidos pela transformação de Bogoliubov sobre o espaço duplicado dos vetores $\widehat{\Phi}$, (5.5).

*Aqui manteremos a notação usada nos *Capítulos 1* e *3*. Na notação de TFD, a expressão (5.17) seria escrita como $\left\langle \underline{\widehat{A}} \right\rangle_{\widehat{\Phi}_\beta} \widehat{=} \left\langle \widehat{\Phi}_\beta \middle| \underline{\widehat{A}} \middle| \widehat{\Phi}_\beta \right\rangle$.

5.2 Operador Espalhamento $\underline{\widehat{\mathbf{S}}}$ no Espaço de Fock Duplicado

O operador espalhamento no espaço de Fock $\widehat{\mathcal{F}}$ pode ser definido, analogamente ao operador de evolução temporal $\underline{\mathbf{U}}$, como

$$\underline{\widehat{\mathbf{S}}} = \underline{\mathbf{S}}\,\underline{\widetilde{\mathbf{S}}}\ . \tag{5.18}$$

A unitariedade dos operadores $\underline{\mathbf{S}}$ e $\underline{\widetilde{\mathbf{S}}}$ garante a unitariedade de $\underline{\widehat{\mathbf{S}}}$. Este operador fará a transição entre os estados de Fock duplicados $\widehat{\Phi}$ e $\widehat{\Psi}$, que são criados pela atuação dos dubletos de criação e aniquilação sobre o vácuo $\widehat{\Omega}$, definidos, de acordo com (2.67), por

$$\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} b \\ \sigma\tilde{b}^{\dagger} \end{pmatrix}, & D &= \begin{pmatrix} d \\ \sigma\tilde{d}^{\dagger} \end{pmatrix}, \\
B^{\dagger} &= \begin{pmatrix} b^{\dagger} & \sigma^{*}\tilde{b} \end{pmatrix}, & D^{\dagger} &= \begin{pmatrix} d^{\dagger} & \sigma^{*}\tilde{d} \end{pmatrix}, \\
\bar{B} &= \begin{pmatrix} b & \sigma\tilde{b}^{\dagger} \end{pmatrix}, & \bar{D} &= \begin{pmatrix} d & \sigma\tilde{d}^{\dagger} \end{pmatrix}, \\
\bar{B}^{\dagger} &= \begin{pmatrix} b^{\dagger} \\ \sigma^{*}\tilde{b} \end{pmatrix}, & \bar{D}^{\dagger} &= \begin{pmatrix} d^{\dagger} \\ \sigma^{*}\tilde{d} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{5.19}$$

com $\sigma \in \mathbb{C}$. Usando esta notação, podemos escrever o operador hamiltoniano (5.16) como

$$\begin{aligned}
\underline{\widehat{\mathbf{H}}} &= \sum_{jk} A^{\dagger}\mathbf{H}\,A \\
&= \sum_{jk} \Big[(h_j, H(\mathbf{x})h_k)\ a^{\dagger}(h_j)\,a(h_k) \pm |\sigma|^{-2}(\tilde{h}_k, \widetilde{H}(\mathbf{x})\tilde{h}_j)\,\tilde{a}(\tilde{h}_j)\,\tilde{a}^{\dagger}(\tilde{h}_k) \Big] \\
&= \sum_{jk} \Big[(h_j, H(\mathbf{x})h_k)\ a^{\dagger}(h_j)\,a(h_k) - |\sigma|^{-2}(\tilde{h}_k, \widetilde{H}(\mathbf{x})\tilde{h}_j)\,\tilde{a}^{\dagger}(\tilde{h}_k)\,\tilde{a}(\tilde{h}_j) \Big]
\end{aligned} \tag{5.20}$$

a menos de uma constante aditiva, onde usamos as relações de (anti)comutação e definimos

$$\mathbf{H} \hat{=} \begin{pmatrix} (h_j, H(\mathbf{x})h_k) & 0 \\ 0 & \pm|\sigma|^{-2}(\tilde{h}_k, \widetilde{H}(\mathbf{x})\tilde{h}_j) \end{pmatrix}, \tag{5.21}$$

sendo o sinal $(+)$ para o caso de férmions e $(-)$ para bósons.

Nos *Capítulos 1* e *3* apresentamos a construção das matrizes espalhamento para o campo de Dirac num campo externo dependente do tempo $A^{\mu}(x)$ no espaço de Fock original, dada pela expressão (3.157)

$$\underline{\mathbf{S}} = C\,\mathrm{e}^{(S_{+-}S_{--}^{-1})b^{\dagger}d^{\dagger}}\,{:}\mathrm{e}^{(S_{++}^{\dagger -1}-1)b^{\dagger}b}{:}\,{:}\mathrm{e}^{(1-S_{--}^{-1})dd^{\dagger}}{:}\,\mathrm{e}^{(S_{--}^{-1}S_{-+})db}, \tag{5.22}$$

e no espaço dual

$$\underline{\widetilde{\mathbf{S}}} = \widetilde{C}\, \mathrm{e}^{-(\tilde{S}_{+-}\tilde{S}^{-1}_{--})\tilde{b}\tilde{d}} :\mathrm{e}^{-(\tilde{S}_{--}-1)\tilde{b}\tilde{b}^\dagger}: :\mathrm{e}^{-(1-\tilde{S}^\dagger_{++})\tilde{d}^\dagger\tilde{d}}: \mathrm{e}^{-(\tilde{\mathrm{S}}^{-1}_{--}\tilde{\mathrm{S}}_{-+})\tilde{\mathrm{d}}^\dagger\tilde{\mathrm{b}}^\dagger}\,, \tag{5.23}$$

definida em (4.162). Motivados por esta estrutura e usando a notação de dubleto (5.19), propomos uma definição para o operador espalhamento $\underline{\widehat{\mathbf{S}}}$ no espaço de Fock duplicado na forma matricial

$$\begin{aligned}
\underline{\widehat{\mathbf{S}}} &= \widehat{C}\mathrm{e}^{B^\dagger \mathbf{A}_1 \bar{D}^\dagger} :\mathrm{e}^{B^\dagger(\mathbf{A}_2-\lambda)B}: :\mathrm{e}^{\bar{D}(\gamma-\mathbf{A}_3)\bar{D}^\dagger}: \mathrm{e}^{\bar{D}\mathbf{A}_4 B} \\
&= C\widetilde{C}\mathrm{e}^{b^\dagger A_1 d^\dagger + \tilde{b}(\sigma^*)^2\tilde{A}_1\tilde{d}} :\mathrm{e}^{b^\dagger(A_2-\lambda_{11})b+\tilde{b}|\sigma|^2(\tilde{A}_2-\lambda_{22})\tilde{b}^\dagger}: \cdot \\
&\quad \cdot :\mathrm{e}^{d(\gamma_{11}-A_3)d^\dagger+\tilde{d}^\dagger|\sigma|^2(\gamma_{22}-\tilde{A}_3)\tilde{d}}: \mathrm{e}^{dA_4 b+\tilde{d}^\dagger\sigma^2\tilde{A}_4\tilde{b}^\dagger}\,,
\end{aligned} \tag{5.24}$$

onde definimos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 \\ 0 & \lambda_{22} \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 \\ 0 & \gamma_{22} \end{pmatrix}. \tag{5.25}$$

Por outro lado, pelas expressões (5.18), (5.22) e (5.23), o operador $\underline{\widehat{\mathbf{S}}}$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\underline{\widehat{\mathbf{S}}} &= \underline{\mathbf{S}}\,\underline{\widetilde{\mathbf{S}}} \\
&= \widehat{C}\,\mathrm{e}^{b^\dagger(S_{+-}S^{-1}_{--})d^\dagger-\tilde{b}(\widetilde{S}_{+-}\widetilde{S}^{-1}_{--})\tilde{d}} :\mathrm{e}^{b^\dagger(S^{\dagger-1}_{++}-1)b-\tilde{b}(\widetilde{S}_{--}-1)\tilde{b}^\dagger}: \cdot \\
&\quad \cdot :\mathrm{e}^{d(1-S^{-1}_{--})d^\dagger-\tilde{d}^\dagger(1-\widetilde{S}^\dagger_{++})\tilde{d}}: \mathrm{e}^{d(S^{-1}_{--}S_{-+})b-\tilde{d}^\dagger(\widetilde{S}^{-1}_{--}\widetilde{S}_{-+})\tilde{b}^\dagger}\,,
\end{aligned} \tag{5.26}$$

onde usamos o fato de que as exponenciais em (5.23) comutam com aquelas em (5.22). Comparando (5.24) com (5.26), vemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 &= \begin{pmatrix} S_{+-}S^{-1}_{--} & 0 \\ 0 & -(\sigma^*)^{-2}\,\widetilde{S}_{+-}\widetilde{S}^{-1}_{--} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} S_{+-} & 0 \\ 0 & \widetilde{S}_{+-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{-1}_{--} & 0 \\ 0 & -(\sigma^*)^{-2}\,\widetilde{S}^{-1}_{--} \end{pmatrix} \hat{=}\, \underline{\widehat{S}}_{+-}\,\underline{\widehat{S}}^{-1}_{--} \qquad (5.27) \\
&= \begin{pmatrix} -S^{\dagger-1}_{++}\widetilde{S}^\dagger_{+-} & 0 \\ 0 & (\sigma^*)^{-2}\,\widetilde{S}^{\dagger-1}_{++}\widetilde{S}^\dagger_{+-} \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} S^{\dagger-1}_{++} & 0 \\ 0 & -(\sigma^*)^{-2}\,\widetilde{S}^{\dagger-1}_{++} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{S}^\dagger_{+-} & 0 \\ 0 & \widetilde{S}^\dagger_{+-} \end{pmatrix} = -\underline{\widehat{S}}^{\dagger-1}_{++}\,\underline{\widehat{S}}^\dagger_{+-} \qquad (5.28)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} S^{\dagger-1}_{++} & 0 \\ 0 & -|\sigma|^{-2}\,\widetilde{S}_{--} \end{pmatrix}, \tag{5.29}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} S^{-1}_{--} & 0 \\ 0 & -|\sigma|^{-2}\,\widetilde{S}^\dagger_{++} \end{pmatrix} \tag{5.30}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_4 &= \begin{pmatrix} S_{--}^{-1}S_{-+} & 0 \\ 0 & -\sigma^{-2}\,\widetilde{S}_{--}^{-1}\widetilde{S}_{-+} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} S_{--}^{-1} & 0 \\ 0 & -\sigma^{-2}\,\widetilde{S}_{--}^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{-+} & 0 \\ 0 & \widetilde{S}_{-+} \end{pmatrix} \hat{=}\, \underline{\widehat{S}}_{--}^{-1}\,\underline{\widehat{S}}_{-+} && (5.31) \\
&= \begin{pmatrix} -S_{-+}^{\dagger}S_{++}^{\dagger-1} & 0 \\ 0 & \sigma^{-2}\,\widetilde{S}_{-+}^{\dagger}\widetilde{S}_{++}^{\dagger-1} \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} S_{-+}^{\dagger} & 0 \\ 0 & \widetilde{S}_{-+}^{\dagger} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{++}^{\dagger-1} & 0 \\ 0 & -\sigma^{-2}\,\widetilde{S}_{++}^{\dagger-1} \end{pmatrix} \hat{=} -\underline{\widehat{S}}_{-+}^{\dagger}\,\underline{\widehat{S}}_{++}^{\dagger-1} && (5.32)
\end{aligned}
$$

e

$$
\lambda = \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -|\sigma|^{-2} \end{pmatrix} . \tag{5.33}
$$

Pelas definições (5.27) e (5.31) vemos que

$$
\underline{\widehat{S}}_{--}^{-1} = \begin{pmatrix} S_{--}^{-1} & 0 \\ 0 & -(\sigma^*)^{-2}\,\widetilde{S}_{--}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{--}^{-1} & 0 \\ 0 & -\sigma^{-2}\,\widetilde{S}_{--}^{-1} \end{pmatrix} , \tag{5.34}
$$

e de (5.28) e (5.32), obtemos

$$
\underline{\widehat{S}}_{++}^{\dagger-1} = \begin{pmatrix} S_{++}^{\dagger-1} & 0 \\ 0 & -(\sigma^*)^{-2}\,\widetilde{S}_{++}^{\dagger-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{++}^{\dagger-1} & 0 \\ 0 & -\sigma^{-2}\,\widetilde{S}_{++}^{\dagger-1} \end{pmatrix} . \tag{5.35}
$$

Como $\sigma \in \mathbb{C}$, então, escrevendo $\sigma \hat{=} a + bi$, teremos

$$
(a^2 - b^2) - 2abi = (a^2 - b^2) + 2abi \ , \tag{5.36}
$$

então,

$$
a = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0 \ , \tag{5.37}
$$

ou seja,

$$
\sigma \in \mathrm{Re} \quad \text{ou} \quad \sigma \in \mathrm{Im} \ , \tag{5.38}
$$

Portanto, os elementos de matriz $\underline{\widehat{S}}_{\pm\pm}$ definidos em (5.27), (5.28), (5.31) e (5.32), ficam escritos como

$$
\underline{\widehat{S}}_{--}^{-1} = \begin{pmatrix} S_{--}^{-1} & 0 \\ 0 & -\sigma^{-2}\,\widetilde{S}_{--}^{-1} \end{pmatrix} , \tag{5.39}
$$

$$
\underline{\widehat{S}}_{++}^{\dagger-1} = \begin{pmatrix} S_{++}^{\dagger-1} & 0 \\ 0 & -\sigma^{-2}\,\widetilde{S}_{++}^{\dagger-1} \end{pmatrix} , \tag{5.40}
$$

$$
\underline{\widehat{S}}_{+-} = \begin{pmatrix} S_{+-} & 0 \\ 0 & \widetilde{S}_{+-} \end{pmatrix} , \tag{5.41}
$$

$$\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{+-} = \begin{pmatrix} S^{\dagger}_{+-} & 0 \\ 0 & \widetilde{S}^{\dagger}_{+-} \end{pmatrix} , \tag{5.42}$$

$$\underline{\widehat{S}}_{-+} = \begin{pmatrix} S_{-+} & 0 \\ 0 & \widetilde{S}_{-+} \end{pmatrix} , \tag{5.43}$$

$$\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{-+} = \begin{pmatrix} S^{\dagger}_{-+} & 0 \\ 0 & \widetilde{S}^{\dagger}_{-+} \end{pmatrix} . \tag{5.44}$$

Estas definições devem satisfazer as condições de unitariedade da matriz $\underline{\widehat{\mathbf{S}}}$,

$$\underline{\widehat{\mathbf{S}}}^{\dagger}\underline{\widehat{\mathbf{S}}} = \underline{\widehat{\mathbf{S}}}\,\underline{\widehat{\mathbf{S}}}^{\dagger} = 1 \ , \tag{5.45}$$

onde

$$\underline{\widehat{\mathbf{S}}} \hat{=} \begin{pmatrix} \underline{\widehat{S}}_{++} & \underline{\widehat{S}}_{+-} \\ \underline{\widehat{S}}_{-+} & \underline{\widehat{S}}_{--} \end{pmatrix} ; \qquad \underline{\widehat{\mathbf{S}}}^{\dagger} \hat{=} \begin{pmatrix} \underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{++} & \underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{+-} \\ \underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{-+} & \underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{--} \end{pmatrix} . \tag{5.46}$$

ou seja,

$$\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{++}\underline{\widehat{S}}_{++} + \underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{+-}\underline{\widehat{S}}_{-+} = \underline{\widehat{S}}_{++}\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{++} + \underline{\widehat{S}}_{+-}\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{-+} = 1 \ , \tag{5.47}$$

$$\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{++}\underline{\widehat{S}}_{+-} + \underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{+-}\underline{\widehat{S}}_{--} = \underline{\widehat{S}}_{++}\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{+-} + \underline{\widehat{S}}_{+-}\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{--} = 0 \ , \tag{5.48}$$

$$\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{-+}\underline{\widehat{S}}_{++} + \underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{--}\underline{\widehat{S}}_{-+} = \underline{\widehat{S}}_{-+}\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{++} + \underline{\widehat{S}}_{--}\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{-+} = 0 \ , \tag{5.49}$$

$$\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{-+}\underline{\widehat{S}}_{+-} + \underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{--}\underline{\widehat{S}}_{--} = \underline{\widehat{S}}_{-+}\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{+-} + \underline{\widehat{S}}_{--}\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{--} = 1 \ . \tag{5.50}$$

Para verificar esta propriedade, substituimos as definições (5.39)-(5.43) nas relações acima. Da relação (5.48) temos que

$$\begin{aligned} \underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{++}\,\underline{\widehat{S}}_{+-} &= -\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{+-}\,\underline{\widehat{S}}_{--} \\ \underline{\widehat{S}}^{\dagger -1}_{++}\,\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{++}\,\underline{\widehat{S}}_{+-} &= -\underline{\widehat{S}}^{\dagger -1}_{++}\,\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{+-}\,\underline{\widehat{S}}_{--} \\ \underline{\widehat{S}}_{+-}\,\underline{\widehat{S}}^{-1}_{--} &= -\underline{\widehat{S}}^{\dagger -1}_{++}\,\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{+-}\,\underline{\widehat{S}}_{--}\,\underline{\widehat{S}}^{-1}_{--} \\ \underline{\widehat{S}}_{+-}\,\underline{\widehat{S}}^{-1}_{--} &= -\underline{\widehat{S}}^{\dagger -1}_{++}\,\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{+-} \ , \end{aligned} \tag{5.51}$$

que, usando (5.39)-(5.42), ficam

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} S_{+-} & 0 \\ 0 & \widetilde{S}_{+-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{-1}_{--} & 0 \\ 0 & -\sigma^{-2}\widetilde{S}^{-1}_{--} \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} S^{\dagger -1}_{++} & 0 \\ 0 & -\sigma^{-2}\widetilde{S}^{\dagger -1}_{++} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{\dagger}_{+-} & 0 \\ 0 & \widetilde{S}^{\dagger}_{+-} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} S_{+-}S^{-1}_{--} & 0 \\ 0 & -\sigma^{-2}\widetilde{S}_{+-}\,\widetilde{S}^{-1}_{--} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -S^{\dagger -1}_{++}S^{\dagger}_{+-} & 0 \\ 0 & \sigma^{-2}\widetilde{S}^{\dagger -1}_{++}\widetilde{S}^{\dagger}_{+-} \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{5.52}$$

Então,

$$\begin{aligned} S_{+-}S^{-1}_{--} &= -S^{\dagger -1}_{++}S^{\dagger}_{+-} \\ S_{+-}S^{-1}_{--}S_{--} &= -S^{\dagger -1}_{++}S^{\dagger}_{+-}S_{--} \\ S^{\dagger}_{++}S_{+-} &= -S^{\dagger}_{++}S^{\dagger -1}_{++}S^{\dagger}_{+-}S_{--} \\ S^{\dagger}_{++}S_{+-} + S^{\dagger}_{+-}S_{--} &= 0 \ , \end{aligned} \tag{5.53}$$

que é a relação de unitariedade (3.154), e

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S}_{+-}\widetilde{S}^{-1}_{--} &= -\widetilde{S}^{\dagger-1}_{++}\widetilde{S}^{\dagger}_{+-} \\
\widetilde{S}_{+-}\widetilde{S}^{-1}_{--}\widetilde{S}_{--} &= -\widetilde{S}^{\dagger-1}_{++}\widetilde{S}^{\dagger}_{+-}\widetilde{S}_{--} \\
\widetilde{S}^{\dagger}_{++}\widetilde{S}_{+-} &= -\widetilde{S}^{\dagger}_{++}\widetilde{S}^{\dagger-1}_{++}\widetilde{S}_{-+}\widetilde{S}_{--} \\
\widetilde{S}^{\dagger}_{++}\widetilde{S}_{+-} + \widetilde{S}^{\dagger}_{+-}\widetilde{S}_{--} &= 0 \,,
\end{aligned}
\tag{5.54}
$$

que concorda com (4.159).

A partir da relação (5.49), obtemos

$$
\begin{aligned}
\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{-+}\underline{\widehat{S}}_{++} &= -\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{--}\underline{\widehat{S}}_{-+} \\
\underline{\widehat{S}}_{-+}\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{++}\underline{\widehat{S}}^{\dagger-1}_{++} &= -\underline{\widehat{S}}_{--}\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{-+}\underline{\widehat{S}}^{\dagger-1}_{++} \\
\underline{\widehat{S}}^{-1}_{--}\underline{\widehat{S}}_{-+} &= -\underline{\widehat{S}}^{-1}_{--}\underline{\widehat{S}}_{--}\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{-+}\underline{\widehat{S}}^{\dagger-1}_{++} \\
\underline{\widehat{S}}^{-1}_{--}\underline{\widehat{S}}_{-+} &= -\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{-+}\underline{\widehat{S}}^{\dagger-1}_{++} \,,
\end{aligned}
\tag{5.55}
$$

então, de (5.39), (5.40), (5.43) e (5.44), esta relação fica escrita como

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} S^{-1}_{--} & 0 \\ 0 & -\sigma^{-2}\widetilde{S}^{-1}_{--} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{-+} & 0 \\ 0 & \widetilde{S}_{-+} \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} S^{\dagger}_{-+} & 0 \\ 0 & \widetilde{S}^{\dagger}_{-+} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S^{\dagger-1}_{++} & 0 \\ 0 & -\sigma^{-2}\widetilde{S}^{\dagger-1}_{++} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} S^{-1}_{--}S_{-+} & 0 \\ 0 & -\sigma^{-2}\widetilde{S}^{-1}_{--}\widetilde{S}_{-+} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -S^{\dagger}_{-+}S^{\dagger-1}_{++} & 0 \\ 0 & -\sigma^{-2}\widetilde{S}^{\dagger}_{-+}\widetilde{S}^{\dagger-1}_{++} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{5.56}
$$

$$
\begin{aligned}
S^{-1}_{--}S_{-+} &= -\,S^{\dagger}_{-+}S^{\dagger-1}_{++} \\
S_{--}S^{-1}_{--}S_{-+} &= -\,S_{--}S^{\dagger}_{-+}S^{\dagger-1}_{++} \\
S_{-+}S^{\dagger}_{++} &= -\,S_{--}S^{\dagger}_{-+}S^{\dagger-1}_{++}S^{\dagger}_{++} \\
S_{-+}S^{\dagger}_{++} + S_{--}S^{\dagger}_{-+} &= 0 \,,
\end{aligned}
\tag{5.57}
$$

que é idêntica a (3.155), e

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S}^{-1}_{--}\widetilde{S}_{-+} &= -\,\widetilde{S}^{\dagger}_{-+}\widetilde{S}^{\dagger-1}_{++} \\
\widetilde{S}_{--}\widetilde{S}^{-1}_{--}\widetilde{S}_{-+} &= -\,\widetilde{S}_{--}\widetilde{S}^{\dagger}_{-+}\widetilde{S}^{\dagger-1}_{++} \\
\widetilde{S}_{-+}\widetilde{S}^{\dagger}_{++} &= -\,\widetilde{S}_{--}\widetilde{S}^{\dagger}_{-+}\widetilde{S}^{\dagger-1}_{++}\widetilde{S}^{\dagger}_{++} \\
\widetilde{S}_{-+}\widetilde{S}^{\dagger}_{++} + \widetilde{S}_{--}\widetilde{S}^{\dagger}_{-+} &= 0 \,,
\end{aligned}
\tag{5.58}
$$

que corresponde a (4.160).

A relação (5.47) pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
\underline{\widehat{S}}_{++}\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{++} + \underline{\widehat{S}}_{+-}\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{-+} &= 1 \\
\underline{\widehat{S}}_{++}\,\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{++}\,\underline{\widehat{S}}^{\dagger-1}_{++} + \underline{\widehat{S}}_{+-}\,\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{-+}\,\underline{\widehat{S}}^{\dagger-1}_{++} &= \underline{\widehat{S}}^{\dagger-1}_{++} \\
\underline{\widehat{S}}_{++}\,\underline{\widehat{S}}^{-1}_{++} + \underline{\widehat{S}}_{+-}\,\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{-+}\,\underline{\widehat{S}}^{\dagger-1}_{++}\,\underline{\widehat{S}}^{-1}_{++} &= \underline{\widehat{S}}^{\dagger-1}_{++}\,\underline{\widehat{S}}^{-1}_{++} \\
\underline{\widehat{S}}^{\dagger-1}_{++}\,\underline{\widehat{S}}^{-1}_{++} - \underline{\widehat{S}}_{+-}\,\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{-+}\,\underline{\widehat{S}}^{\dagger-1}_{++}\,\underline{\widehat{S}}^{-1}_{++} &= 1 \,.
\end{aligned}
\tag{5.59}
$$

Substituindo (5.40), (5.41) e (5.44), a equação acima fica

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} S_{++}^{\dagger -1} & 0 \\ 0 & -\sigma^{-2}\widetilde{S}_{++}^{\dagger -1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{++}^{-1} & 0 \\ 0 & -\sigma^{-2}\widetilde{S}_{++}^{-1} \end{pmatrix} + \\
&\quad - \begin{pmatrix} S_{+-} & 0 \\ 0 & \widetilde{S}_{+-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{-+}^{\dagger} & 0 \\ 0 & \widetilde{S}_{-+}^{\dagger} \end{pmatrix} \cdot \\
&\quad \cdot \begin{pmatrix} S_{++}^{-1\dagger} & 0 \\ 0 & -\sigma^{-2}\widetilde{S}_{++}^{\dagger -1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{++}^{-1} & 0 \\ 0 & -\sigma^{-2}\widetilde{S}_{++}^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} S_{++}^{\dagger -1} S_{++}^{-1} & 0 \\ 0 & \sigma^{-4}\widetilde{S}_{++}^{\dagger -1}\widetilde{S}_{++}^{-1} \end{pmatrix} + \\
&\quad - \begin{pmatrix} S_{+-}S_{-+}^{\dagger}S_{++}^{-1\dagger}S_{++}^{-1} & 0 \\ 0 & \sigma^{-4}\widetilde{S}_{+-}\widetilde{S}_{-+}^{\dagger}\widetilde{S}_{++}^{\dagger -1}\widetilde{S}_{++}^{-1} \end{pmatrix} ,
\end{aligned} \tag{5.60}
$$

então

$$
\begin{aligned}
S_{++}^{\dagger -1}S_{++}^{-1} - S_{+-}S_{-+}^{\dagger}S_{++}^{-1\dagger}S_{++}^{-1} &= 1 \\
S_{++}^{\dagger -1}S_{++}^{-1}S_{++} - S_{+-}S_{-+}^{\dagger}S_{++}^{-1\dagger}S_{++}^{-1}S_{++} &= S_{++} \\
S_{++}S_{++}^{\dagger} + S_{+-}S_{-+}^{\dagger} &= 1 ,
\end{aligned} \tag{5.61}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S}_{++}^{\dagger -1}\widetilde{S}_{++}^{-1} - \widetilde{S}_{+-}\widetilde{S}_{-+}^{\dagger}\widetilde{S}_{++}^{\dagger -1}\widetilde{S}_{++}^{-1} &= \sigma^4 \\
\widetilde{S}_{++}^{\dagger -1}\widetilde{S}_{++}^{-1}\widetilde{S}_{++} - \widetilde{S}_{+-}\widetilde{S}_{-+}^{\dagger}\widetilde{S}_{++}^{\dagger -1}\widetilde{S}_{++}^{-1}\widetilde{S}_{++} &= \sigma^4\widetilde{S}_{++} \\
\widetilde{S}_{++}^{\dagger -1}\widetilde{S}_{++}^{\dagger} - \widetilde{S}_{+-}\widetilde{S}_{-+}^{\dagger}\widetilde{S}_{++}^{\dagger -1}\widetilde{S}_{++}^{\dagger} &= \sigma^4\widetilde{S}_{++}\widetilde{S}_{++}^{\dagger} \\
\widetilde{S}_{+-}\widetilde{S}_{-+}^{\dagger} + \sigma^4\widetilde{S}_{++}\widetilde{S}_{++}^{\dagger} &= 1 .
\end{aligned} \tag{5.62}
$$

Estamos assumindo que a matriz $\underline{\widehat{S}}_{++}^{-1}$, que usamos na expressão (5.60), seja obtida pela conjugação

$$
\underline{\widehat{S}}_{++}^{-1} = \left(\underline{\widehat{S}}_{++}^{-1}\right)^{\dagger} , \tag{5.63}
$$

devido ao fato de que conectam estados definidos no mesmo espaço espectral.

A expressão (5.61) é a relação (3.153). Pela relação de unitariedade (4.158) da matriz $\widetilde{S}$ devemos ter

$$
\sigma^4 = 1 , \tag{5.64}
$$

e, pela condição (5.38), concluimos que

$$
\sigma = \begin{cases} \pm i , \\ \pm 1 . \end{cases} \tag{5.65}
$$

A expressão (5.20) para o operador hamiltoniano $\widehat{\underline{\mathbf{H}}}$, com os valores de σ dados por(5.65), fica escrita como

$$\widehat{\underline{\mathbf{H}}} = \sum_{jk} \Big[(h_j, H(\mathbf{x}) h_k)\; a^\dagger(h_j)\, a(h_k) + (\tilde{h}_k, \widetilde{H}(\mathbf{x}) \tilde{h}_j)\, \tilde{a}^\dagger(\tilde{h}_k)\, \tilde{a}(\tilde{h}_j) \Big] \ , \tag{5.66}$$

que é a definição (5.16).

Finalmente, de (5.50) obtemos

$$\begin{aligned}
\underline{\widehat{S}}_{-+}\, \underline{\widehat{S}}^\dagger_{+-} + \underline{\widehat{S}}_{--}\, \underline{\widehat{S}}^\dagger_{--} &= 1 \\
\underline{\widehat{S}}_{-+}\, \underline{\widehat{S}}^\dagger_{+-}\, \underline{\widehat{S}}^{\dagger -1}_{--} + \underline{\widehat{S}}_{--}\, \underline{\widehat{S}}^\dagger_{--}\, \underline{\widehat{S}}^{\dagger -1}_{--} &= \underline{\widehat{S}}^{\dagger -1}_{--} \\
\underline{\widehat{S}}_{-+}\, \underline{\widehat{S}}^\dagger_{+-}\, \underline{\widehat{S}}^{\dagger -1}_{--}\, \underline{\widehat{S}}^{-1}_{--} + 1 &= \underline{\widehat{S}}^{\dagger -1}_{--}\, \underline{\widehat{S}}^{-1}_{--} \ ,
\end{aligned} \tag{5.67}$$

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} S_{-+} & 0 \\ 0 & \widetilde{S}_{-+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^\dagger_{+-} & 0 \\ 0 & \widetilde{S}^\dagger_{+-} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{-1\dagger}_{--} & 0 \\ 0 & -\sigma^{-2} \widetilde{S}^{\dagger -1}_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{-1}_{--} & 0 \\ 0 & -\sigma^{-2} \widetilde{S}^{-1}_{--} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} S^{-1\dagger}_{--} & 0 \\ 0 & -\sigma^{-2} \widetilde{S}^{\dagger -1}_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{-1}_{--} & 0 \\ 0 & -\sigma^{-2} \widetilde{S}^{-1}_{--} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} S_{-+} S^\dagger_{+-} S^{-1\dagger}_{--} S^{-1}_{--} & 0 \\ 0 & \sigma^{-4} \widetilde{S}_{-+} \widetilde{S}^\dagger_{+-} \widetilde{S}^{\dagger -1}_{--} \widetilde{S}^{-1}_{--} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} S^{-1\dagger}_{--} S^{-1}_{--} - 1 & 0 \\ 0 & \sigma^{-4} \widetilde{S}^{\dagger -1}_{--} \widetilde{S}^{-1}_{--} - 1 \end{pmatrix} \ ,
\end{aligned} \tag{5.68}$$

onde substituimos (5.39), (5.42) e (5.43). Na expressão (5.67), em analogia a (5.63), adotamos a definição

$$S^{-1\dagger}_{--} = \left(S^{-1}_{--} \right)^\dagger \ . \tag{5.69}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
S_{-+} S^\dagger_{+-} S^{-1\dagger}_{--} S^{-1}_{--} + 1 &= S^{-1\dagger}_{--} S^{-1}_{--} \\
S_{-+} S^\dagger_{+-} S^{-1\dagger}_{--} + S_{--} &= S^{-1\dagger}_{--} \\
S_{-+} S^\dagger_{+-} S^{-1\dagger}_{--} S^\dagger_{--} + S_{--} S^\dagger_{--} &= S^{-1\dagger}_{--} S^\dagger_{--} \\
S_{-+} S^\dagger_{+-} + S_{--} S^\dagger_{--} &= 1 \ ,
\end{aligned} \tag{5.70}$$

que é a condição (3.156), e

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}_{-+} \widetilde{S}^\dagger_{+-} \widetilde{S}^{\dagger -1}_{--} \widetilde{S}^{-1}_{--} &= \widetilde{S}^{\dagger -1}_{--} \widetilde{S}^{-1}_{--} - \sigma^4 \\
\widetilde{S}_{-+} \widetilde{S}^\dagger_{+-} \widetilde{S}^{\dagger -1}_{--} \widetilde{S}^{-1}_{--} \widetilde{S}_{--} &= \widetilde{S}^{\dagger -1}_{--} \widetilde{S}^{-1}_{--} \widetilde{S}_{--} - \sigma^4 \widetilde{S}_{--} \\
\widetilde{S}_{-+} \widetilde{S}^\dagger_{+-} \widetilde{S}^{\dagger -1}_{--} \widetilde{S}^\dagger_{--} &= \widetilde{S}^{\dagger -1}_{--} \widetilde{S}^\dagger_{--} - \sigma^4\, \widetilde{S}_{--} \widetilde{S}^\dagger_{--} \\
\widetilde{S}_{-+} \widetilde{S}^\dagger_{+-} + \sigma^4\, \widetilde{S}_{--} \widetilde{S}^\dagger_{--} &= 1 \ ,
\end{aligned} \tag{5.71}$$

que, com (5.65), fica

$$\widetilde{S}_{-+}\widetilde{S}^{\dagger}_{+-} + \widetilde{S}_{--}\widetilde{S}^{\dagger}_{--} = 1 \ . \tag{5.72}$$

Esta é a expressão (4.161).

Substituindo a condição (5.65) nas definições (5.39) -(5.44) e (5.33), teremos

$$\underline{\widehat{S}}_{+-} = \begin{pmatrix} S_{+-} & 0 \\ 0 & \widetilde{S}_{+-} \end{pmatrix} \ ; \qquad \underline{\widehat{S}}_{-+} = \begin{pmatrix} S_{-+} & 0 \\ 0 & \widetilde{S}_{-+} \end{pmatrix} \ , \tag{5.73}$$

$$\underline{\widehat{S}}^{-1}_{--} = \begin{pmatrix} S^{-1}_{--} & 0 \\ 0 & \pm\widetilde{S}^{-1}_{--} \end{pmatrix} \ , \qquad \underline{\widehat{S}}^{\dagger-1}_{++} = \begin{pmatrix} S^{\dagger-1}_{++} & 0 \\ 0 & \pm\widetilde{S}^{\dagger-1}_{++} \end{pmatrix} \ , \tag{5.74}$$

$$\underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{-+} = \begin{pmatrix} S^{\dagger}_{-+} & 0 \\ 0 & \widetilde{S}^{\dagger}_{-+} \end{pmatrix} \ , \qquad \underline{\widehat{S}}^{\dagger}_{+-} = \begin{pmatrix} S^{\dagger}_{+-} & 0 \\ 0 & \widetilde{S}^{\dagger}_{+-} \end{pmatrix} \ . \tag{5.75}$$

e

$$\lambda = \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \tau_{\mathbf{3}}. \tag{5.76}$$

As definições de $\mathbf{A}_2$ e $\mathbf{A}_3$, respectivamente (5.29) e (5.30), com a substituição da condição (5.65), ficam

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} S^{\dagger-1}_{++} & 0 \\ 0 & -\,\widetilde{S}_{--} \end{pmatrix} \ , \tag{5.77}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} S^{-1}_{--} & 0 \\ 0 & -\,\widetilde{S}^{\dagger}_{++} \end{pmatrix} \ . \tag{5.78}$$

Se adotamos a mesma convenção que nas matrizes $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_4$, ou seja, definir a matriz no espaço duplicado $\underline{\widehat{S}}^{\dagger-1}_{++}$ associada à matriz $S^{\dagger-1}_{++}$, teremos

$$\underline{\widehat{S}}^{\dagger-1}_{++} = \begin{pmatrix} S^{\dagger-1}_{++} & 0 \\ 0 & -\,\widetilde{S}_{--} \end{pmatrix} \tag{5.79}$$

e

$$\underline{\widehat{S}}^{-1}_{--} = \begin{pmatrix} S^{-1}_{--} & 0 \\ 0 & -\,\widetilde{S}^{\dagger}_{++} \end{pmatrix} \ , \tag{5.80}$$

que, comparadas com (5.74), nos levam a concluir que

$$\widetilde{S}^{-1}_{--} = \pm\,\widetilde{S}^{\dagger}_{++} \ . \tag{5.81}$$

Como aplicação do formalismo de matriz espalhamento à temperatura finita, avaliaremos o processo de produção de pares elétron-pósitron por um campo eletromagnético externo dependente do tempo, $A^{\mu}(x)$, calculando o valor esperado da matriz espalhamento construída para o sistema duplicado,

$$\underline{\widehat{\mathbf{S}}} = \widehat{C}\mathrm{e}^{B^{\dagger}\mathbf{A}_1\bar{D}^{\dagger}} :\mathrm{e}^{B^{\dagger}(\mathbf{A}_2-\tau_3)B}: :\mathrm{e}^{\bar{D}(\tau_3-\mathbf{A}_3)\bar{D}^{\dagger}}: \mathrm{e}^{\bar{D}\mathbf{A}_4B} \ , \tag{5.82}$$

entre o estado inicial de vácuo térmico e o estado final de pares elétron-pósitron criados a partir do vácuo térmico.

5.3 Produção de Par à Temperatura Finita

Como aplicação do formalismo construído na seção anterior, estudaremos a produção de pares elétron-pósitron (e^-e^+) à temperatura finita.

A produção de pares elétron-pósitron (e^-e^+) por campos eletromagnéticos externos dependentes do tempo à temperatura zero é descrita pelo operador espalhamento $\underline{\mathbf{S}}$, que conecta o estado assintótico inicial de vácuo ao estado assintótico final de pares elétron-pósitron. Este processo é avaliado através do cálculo do elemento de matriz

$$\underline{\mathbf{S}}_{fi} = \langle e^-, e^+ | \, \underline{\mathbf{S}} \, |0\rangle = \langle 0| \, d \, b \, \underline{\mathbf{S}} \, |0\rangle = C \, \langle 0| \, d \, b \, \mathrm{e}^{b^\dagger A_1 d^\dagger} \, |0\rangle \ . \tag{5.83}$$

onde b e d são os operadores de Fock correspondentes, respectivamente, à partícula e à antipartícula e $\underline{\mathbf{S}}$ é o operador espalhamento no espaço de Fock do sistema físico, que foi construído no *Capítulo 2.* Para o processo de produção de pares e^-e^+ à temperatura finita, devemos calcular o elemento de matriz $\widehat{\underline{\mathbf{S}}}_{fi}$ no vácuo térmico

$$\begin{aligned} \widehat{\underline{\mathbf{S}}}_{fi}(\beta) &= \langle 0(\beta)| \, \bar{D} \, B \, \widehat{\underline{\mathbf{S}}} \, |0(\beta)\rangle \\ &= \widehat{C} \, \langle 0(\beta)| \, \bar{D} \, B \, \mathrm{e}^{B^\dagger \mathbf{A}_1 \bar{D}^\dagger} \, |0(\beta)\rangle \ , \end{aligned} \tag{5.84}$$

onde $\widehat{\underline{\mathbf{S}}}$ é o operador espalhamento no espa ço de Fock duplicado, definidos por (5.82), e $\bar{D}$, B os dubletos definidos segundo a prescrição de TFD (5.19). Com a notação condensada

$$b^\dagger \mathrel{\hat{=}} b^\dagger(\Phi) \ ; \qquad d^\dagger \mathrel{\hat{=}} d^\dagger(\Psi) \ ; \quad \tilde{b} \mathrel{\hat{=}} b^\dagger(\widetilde{\Phi}) \ ; \qquad \tilde{d} \mathrel{\hat{=}} d^\dagger(\widetilde{\Psi}) \ , \tag{5.85}$$

denotamos os dubletos D e $\bar{B}$ por

$$\bar{D} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} d & \sigma \tilde{d}^\dagger \end{pmatrix}; \quad B \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} b \\ \sigma \tilde{b}^\dagger \end{pmatrix} \ , \tag{5.86}$$

e seus conjugados

$$\bar{D}^\dagger \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} d^\dagger \\ \sigma^* \tilde{d} \end{pmatrix}; \quad B^\dagger \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} b^\dagger & \sigma^* \tilde{b} \end{pmatrix}. \tag{5.87}$$

O vácuo térmico $|0(\beta)\rangle$ para o campo de Dirac é obtido a partir do vácuo duplicado $|0\rangle\!\rangle \mathrel{\hat{=}} \left|0 \otimes \tilde{0}\right\rangle$, (2.13), pela transformação unitária [55]

$$|0(\beta)\rangle = \mathrm{e}^{iG(\theta)} \, |0\rangle\!\rangle \,, \tag{5.88}$$

com o gerador $G(\theta)$ definido por

$$G(\theta) = G^+(\theta) + G^-(\theta) \,, \tag{5.89}$$

$$G^{+}(\theta) = i\sum_s \int d^3p\,\theta^{+}_{\mathbf{p}}\,\left[b_{\mathbf{p}s}\tilde{b}_{\mathbf{p}s} - \tilde{b}^{\dagger}_{\mathbf{p}s}b^{\dagger}_{\mathbf{p}s}\right] , \tag{5.90}$$

$$G^{-}(\theta) = i\sum_s \int d^3p\,\theta^{-}_{\mathbf{p}}\,\left[d_{\mathbf{p}s}\tilde{d}_{\mathbf{p}s} - \tilde{d}^{\dagger}_{\mathbf{p}s}d^{\dagger}_{\mathbf{p}s}\right] , \tag{5.91}$$

conforme as equações (2.104)-(2.107), onde $\theta^{\pm}_{\mathbf{p}} = \theta^{\pm}_{\mathbf{p}}(\beta)$ são parâmetros determinados de forma que a média estatística dos operadores número partícula $n^{-}(\mathbf{p})$ e de antipartícula $n^{+}(\mathbf{p})$ sejam dados por

$$n^{\pm}_{\mathbf{p}}(\beta) = \mathrm{sen}^2\theta^{\pm}_{\mathbf{p}}(\beta) = \left[\mathrm{e}^{\beta(E_{\mathbf{p}}\mp\mu)} + 1\right]^{-1} , \tag{5.92}$$

e, portanto,

$$\cos^2\theta^{\pm}_{\mathbf{p}} = \left[\mathrm{e}^{-\beta(E_{\mathbf{p}}\mp\mu)} + 1\right]^{-1} . \tag{5.93}$$

Os operadores de criação e aniquilação satisfazem as relações de comutação (3.73) ou (4.72).

Os operadores de criação e aniquilação dependentes da temperatura $b_{\mathbf{p}s}(\beta)$, $\tilde{b}_{\mathbf{p}s}(\beta)$, $d_{\mathbf{p}s}(\beta)$, $\tilde{d}_{\mathbf{p}s}(\beta)$, são definidos pelas transformações de Bogoliubov (2.108). Para o que segue, assumiremos o potencial químico $\mu = 0$.

O valor esperado (5.84), com a definição (5.88), fica escrito como

$$\begin{aligned}
\underline{\widehat{\mathbf{S}}}_{fi}(\beta) &= \widehat{C}\,\langle 0(\beta)|\,\bar{D}\,B\,\mathrm{e}^{B^{\dagger}\mathbf{A}_1\bar{D}^{\dagger}}|0(\beta)\rangle \\
&= \widehat{C}\,\langle\!\langle 0|\mathrm{e}^{-iG(\theta)}\,\bar{D}\,B\,\mathrm{e}^{B^{\dagger}\mathbf{A}_1\bar{D}^{\dagger}}\mathrm{e}^{iG(\theta)}|0\rangle\!\rangle \\
&= \widehat{C}\,\langle\!\langle 0|\mathrm{e}^{-iG(\theta)}\bar{D}\,\mathrm{e}^{iG(\theta)}\,\mathrm{e}^{-iG(\theta)}B\,\mathrm{e}^{iG(\theta)}\,\mathrm{e}^{-iG(\theta)}\,\mathrm{e}^{B^{\dagger}\mathbf{A}_1\bar{D}^{\dagger}}\mathrm{e}^{iG(\theta)}|0\rangle\!\rangle\,.
\end{aligned} \tag{5.94}$$

A seguir, calcularemos as transformações de Bogoliubov para cada operador no valor esperado acima. Para o dubleto $\bar{D}$ temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-iG(\theta)}\bar{D}\,\mathrm{e}^{iG(\theta)} &= \mathrm{e}^{-iG(\theta)}\begin{pmatrix} d(\Psi) & \sigma\tilde{d}^{\dagger}(\widetilde{\Psi}) \end{pmatrix}\mathrm{e}^{iG(\theta)} \\
&= \int d^3p \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{iG^{-}(-\theta)}d_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-iG^{-}(-\theta)}\Psi_{\mathbf{p}} \\ \sigma\,\mathrm{e}^{iG^{-}(-\theta)}\tilde{d}^{\dagger}_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-iG^{-}(-\theta)}\widetilde{\Psi}^{\dagger}_{\mathbf{p}} \end{pmatrix}^{t} \\
&= \int d^3p \begin{pmatrix} \cos\theta_{\mathbf{p}}(\beta)\,d_{\mathbf{p}}\,\Psi_{\mathbf{p}} + \mathrm{sen}\theta_{\mathbf{p}}(\beta)\,\tilde{d}^{\dagger}_{\mathbf{p}}\,\Psi_{\mathbf{p}} \\ \sigma\,[\cos\theta_{\mathbf{p}}(\beta)\,\tilde{d}^{\dagger}_{\mathbf{p}}\,\widetilde{\Psi}^{\dagger}_{\mathbf{p}} - \mathrm{sen}\theta_{\mathbf{p}}(\beta)\,d_{\mathbf{p}}\,\widetilde{\Psi}^{\dagger}_{\mathbf{p}}] \end{pmatrix}^{t} \\
&= \begin{pmatrix} d(\cos\theta\Psi) + \tilde{d}^{\dagger}(\mathrm{sen}\theta\Psi) \\ \sigma\,[\tilde{d}^{\dagger}(\cos\theta\widetilde{\Psi}) - d(\mathrm{sen}\theta\widetilde{\Psi}^{\dagger})] \end{pmatrix}^{t} ,
\end{aligned} \tag{5.95}$$

onde usamos as transformações de Bogoliubov (2.108) e as definições (3.69), (3.70) para os operadores de aniquilação e criação. No que segue, usaremos a notação

$$d_{\mathbf{p}} = d(\mathbf{p}) \ , \quad d_{\mathbf{p}} = d(\mathbf{p}) \ , \quad \Psi_{\mathbf{p}} = \Psi(\mathbf{p}) \ , \quad \widetilde{\Psi}^{\dagger}_{\mathbf{p}} = \widetilde{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{p}) \ , \tag{5.96}$$

e omitiremos o índice de spin. Como a função de onda Ψ da antipartícula está associada ao espectro negativo, e a funç ão de onda $\widetilde{\Psi}$ da antipartícula dual ao espectro positivo, então, de acordo com (3.66) (4.65), temos

$$d(\text{sen}\theta\widetilde{\Psi}^{\dagger}) = 0 = \tilde{d}^{\dagger}(\cos\theta\Psi) \ . \tag{5.97}$$

Assim, a transformação (5.95) se reduz a

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-iG(\theta)}\bar{D}\,\mathrm{e}^{iG(\theta)} &= \begin{pmatrix} d(\cos\theta\Psi) \\ \sigma\,\tilde{d}^{\dagger}(\cos\theta\widetilde{\Psi}) \end{pmatrix}^{t} \\ &= \begin{pmatrix} d_{\theta} & \sigma\,\tilde{d}^{\dagger}_{\theta} \end{pmatrix} \hat{=}\ \bar{D}_{\theta} \ . \end{aligned} \tag{5.98}$$

Analogamente, teremos para a transformação de Bogoliubov de $\bar{B}_1$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-iG(\theta)}B\,\mathrm{e}^{iG(\theta)} &= \mathrm{e}^{-iG(\theta)}\begin{pmatrix} b \\ \sigma\tilde{b}^{\dagger} \end{pmatrix}\mathrm{e}^{iG(\theta)} \\ &= \begin{pmatrix} b(\cos\theta\Phi) \\ \sigma\,\tilde{b}^{\dagger}(\cos\theta\widetilde{\Phi}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_{\theta} \\ \sigma\,\tilde{b}^{\dagger}_{\theta} \end{pmatrix} \hat{=}\ \bar{B}_{\theta} \,. \end{aligned} \tag{5.99}$$

Para calcular a última transformação que aparece em (5.94),

$$\mathrm{e}^{-iG(\theta)}\mathrm{e}^{B^{\dagger}\mathbf{A}_1\bar{D}^{\dagger}}\mathrm{e}^{iG(\theta)} = \mathrm{e}^{-iG(\theta)}\mathrm{e}^{b^{\dagger}A_1 d^{\dagger}}\mathrm{e}^{iG(\theta)}\mathrm{e}^{-iG(\theta)}\mathrm{e}^{\tilde{b}\,\tilde{A}_1\tilde{d}}\mathrm{e}^{iG(\theta)} \,, \tag{5.100}$$

primeiro determinaremos a transformação dos expoentes. Assim,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-iG(\theta)}b^{\dagger}A_1 d^{\dagger}\mathrm{e}^{iG(\theta)} &= \int d^3p \mathrm{e}^{iG(-\theta)}b^{\dagger}_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{-iG(-\theta)}\,A_1(\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{-iG(\theta)}d^{\dagger}_{\mathbf{p}}\mathrm{e}^{iG(\theta)} \\ &= \int d^3p\,[\cos\theta^{b}_{\mathbf{p}}\,b^{\dagger}_{\mathbf{p}} + \text{sen}\theta^{\tilde{b}}_{\mathbf{p}}\,\tilde{b}_{\mathbf{p}}]\,A_1(\mathbf{p})\,[\cos\theta^{d}_{\mathbf{p}}\,d^{\dagger}_{\mathbf{p}} + \text{sen}\theta^{\tilde{d}}_{\mathbf{p}}\,\tilde{d}_{\mathbf{p}}] \\ &= \int d^3p\,\cos\theta^{b}_{\mathbf{p}}\,b^{\dagger}_{\mathbf{p}}\,A_1(\mathbf{p})\,d^{\dagger}_{\mathbf{p}}\cos\theta^{d}_{\mathbf{p}} + \\ &\quad + \int d^3p\,\cos\theta^{b}_{\mathbf{p}}\,b^{\dagger}_{\mathbf{p}}\,A_1(\mathbf{p})\,\text{sen}\theta^{\tilde{d}}_{\mathbf{p}}\,\tilde{d}_{\mathbf{p}} + \\ &\quad + \int d^3p\,\text{sen}\theta^{\tilde{b}}_{\mathbf{p}}\,\tilde{b}_{\mathbf{p}}\,A_1(\mathbf{p})\,\cos\theta^{d}_{\mathbf{p}}\,d^{\dagger}_{\mathbf{p}} + \\ &\quad + \int d^3p\,\text{sen}\theta^{\tilde{b}}_{\mathbf{p}}\,\tilde{b}_{\mathbf{p}}\,A_1(\mathbf{p})\,\tilde{d}_{\mathbf{p}}\text{sen}\theta^{\tilde{d}}_{\mathbf{p}} \ . \end{aligned}$$

Como cada uma destas parcelas pode ser escrita como um produto escalar entre as funções de onda correspondentes aos operadores que aparecem no produto, como definido em (3.118) e (4.123), a independência entre espaços do sistema direto e do dual, conforme (4.13), faz com que a segunda e a terceira parcelas da soma acima sejam zero. Então,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-iG(\theta)} b^\dagger A_1 d^\dagger \mathrm{e}^{iG(\theta)} &= \int d^3p\, [\cos\theta^b_{\mathbf{p}}\, b^\dagger_{\mathbf{p}}\, A_1(\mathbf{p})\, d^\dagger_{\mathbf{p}} \cos\theta^d_{\mathbf{p}} + \\
&\quad + \mathrm{sen}\theta^{\tilde{b}}_{\mathbf{p}}\, \tilde{b}_{\mathbf{p}}\, A_1(\mathbf{p})\, \tilde{d}_{\mathbf{p}} \mathrm{sen}\theta^{\tilde{d}}_{\mathbf{p}}] \\
&= b^\dagger\, (A_1)_{\theta_1}\, d^\dagger + \tilde{b}(A_1)_{\widetilde{\theta}_2}\, \tilde{d}. \qquad (5.101)
\end{aligned}$$

O índice b nas equações acima significa que θ está associada ao operador $b^\dagger$, portanto deverá ter o mesmo índice de momento que a função de onda do elétron. O índice $\tilde{b}$ corresponde ao elétron dual, os índices d e $\tilde{d}$, correspondem, respectivamente, ao pósitron e ao pósitron dual.

Para o outro expoente teremos

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-iG(\theta)} \tilde{b}\, \tilde{A}_1 \tilde{d} \mathrm{e}^{iG(\theta)} &= \int d^3p \mathrm{e}^{iG(-\theta)} \tilde{b}_{\mathbf{p}} \mathrm{e}^{-iG(-\theta)}\, \tilde{A}_1(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{iG(-\theta)} \tilde{d}_{\mathbf{p}} \mathrm{e}^{-iG(-\theta)} \\
&= \int d^3p [\cos\theta^{\tilde{b}}_{\mathbf{p}}\, \tilde{b}_{\mathbf{p}} - \mathrm{sen}\theta^b_{\mathbf{p}}\, b^\dagger_{\mathbf{p}}]\, \tilde{A}_1(\mathbf{p})\, [\cos\theta^{\tilde{d}}_{\mathbf{p}}\, \tilde{d}_{\mathbf{p}} - \mathrm{sen}\theta^d_{\mathbf{p}}\, d^\dagger_{\mathbf{p}}] \\
&= \int d^3p [\tilde{b}_{\mathbf{p}} \cos\theta^{\tilde{b}}_{\mathbf{p}}\, \tilde{A}_1(\mathbf{p}) \cos\theta^{\tilde{d}}_{\mathbf{p}}\, \tilde{d}_{\mathbf{p}} + \\
&\quad + b^\dagger_{\mathbf{p}} \mathrm{sen}\theta^b_{\mathbf{p}}\, \tilde{A}_1(\mathbf{p}) \mathrm{sen}\theta^d_{\mathbf{p}}\, d^\dagger_{\mathbf{p}}] \\
&= \tilde{b}\, (\tilde{A}_1)_{\widetilde{\theta}_1}\, \tilde{d} + b^\dagger (\tilde{A}_1)_{\theta_2}\, d^\dagger\ . \qquad (5.102)
\end{aligned}$$

Nas expressões (5.101) e (5.102) denotamos

$$\begin{aligned}
(A_1)_{\theta_1} &\hat{=} \cos\theta^b A_1 \cos\theta^d, \\
(A_1)_{\theta_2} &\hat{=} \mathrm{sen}\theta^b A_1 \mathrm{sen}\theta^d, \\
(\tilde{A}_1)_{\widetilde{\theta}_1} &= \cos\theta^{\tilde{b}} \tilde{A}_1 \cos\theta^{\tilde{d}}, \\
(\tilde{A}_1)_{\widetilde{\theta}_2} &= \mathrm{sen}\theta^{\tilde{b}} \tilde{A}_1 \mathrm{sen}\theta^{\tilde{d}}.
\end{aligned}$$

Portanto, usando (5.101) e (5.102), a transformação da exponencial em (5.94) fica dada

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-iG(\theta)} \mathrm{e}^{B^\dagger \mathbf{A}_1 \bar{D}^\dagger} \mathrm{e}^{iG(\theta)} &= \mathrm{e}^{b^\dagger (A_1)_{\theta_1} d^\dagger} \mathrm{e}^{\tilde{b}(A_1)_{\widetilde{\theta}_2} \tilde{d}} \mathrm{e}^{\tilde{b}(\tilde{A}_1)_{\widetilde{\theta}_1} \tilde{d}} \mathrm{e}^{b^\dagger (\tilde{A}_1)_{\theta_2} d^\dagger} \\
&= \mathrm{e}^{b^\dagger [(A_1)_{\theta_1} + (\tilde{A}_1)_{\theta_2}] d^\dagger} \mathrm{e}^{\tilde{b}[(A_1)_{\widetilde{\theta}_2} + (\tilde{A}_1)_{\widetilde{\theta}_1}] \tilde{d}} \\
&\hat{=} \mathrm{e}^{b^\dagger \mathsf{A}_\theta d^\dagger} \mathrm{e}^{\tilde{b} \mathsf{A}_{\widetilde{\theta}} \tilde{d}}, \qquad (5.103)
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}_\theta &= (A_1)_{\theta_1} + (\tilde{A}_1)_{\theta_2} \\
\mathsf{A}_{\widetilde{\theta}} &= (A_1)_{\widetilde{\theta}_2} + (\tilde{A}_1)_{\widetilde{\theta}_1} \qquad (5.104)
\end{aligned}$$

Substituindo os resultados (5.98), (5.99) e (5.103) na expressão (5.94), obteremos

$$\begin{aligned}
\underline{\widehat{\mathbf{S}}}_{fi}(\beta) &= \widehat{C}\,\langle\!\langle 0|\bar{D}_\theta\, B_\theta\, \mathrm{e}^{b^\dagger \mathsf{A}_\theta d^\dagger} \mathrm{e}^{\tilde{b}\mathsf{A}_{\tilde{\theta}}\tilde{d}}|0\rangle\!\rangle \\
&= \widehat{C}\,\langle\!\langle 0|\bar{D}_\theta\, \bar{B}_\theta\, \mathrm{e}^{b^\dagger \mathsf{A}_\theta d^\dagger}|0\rangle\!\rangle \\
&= \widehat{C}\,\langle\!\langle 0|\begin{pmatrix} d_\theta & \sigma\tilde{d}^\dagger_\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_\theta \\ \sigma\tilde{b}^\dagger_\theta \end{pmatrix} \mathrm{e}^{b^\dagger \mathsf{A}_\theta d^\dagger}|0\rangle\!\rangle \\
&= \widehat{C}\,\langle\!\langle 0|\left(d_\theta b_\theta + \sigma d_\theta \tilde{b}^\dagger_\theta + \sigma\tilde{d}^\dagger_\theta b_\theta + \sigma^2 \tilde{d}^\dagger_\theta \tilde{b}^\dagger_\theta\right) \mathrm{e}^{b^\dagger \mathsf{A}_\theta d^\dagger}|0\rangle\!\rangle \\
&= \widehat{C}\,\langle 0|d_\theta b_\theta \mathrm{e}^{b^\dagger \mathsf{A}_\theta d^\dagger}|0\rangle\ .
\end{aligned} \tag{5.105}$$

Este valor esperado pode ser calculado como

$$\begin{aligned}
\underline{\widehat{\mathbf{S}}}_{fi}(\beta) &= \widehat{C}\,\langle 0|\, d_\theta \mathrm{e}^{b^\dagger \mathsf{A}_\theta d^\dagger}[b_\theta + d^\dagger(\mathsf{A}^\dagger_\theta \cos\theta^b \Phi)]\,|0\rangle \\
&= \widehat{C}\,\langle 0|\, \mathrm{e}^{b^\dagger \mathsf{A}_\theta d^\dagger}[d_\theta - b^\dagger(\mathsf{A}_\theta \cos\theta^b \Psi)][b_\theta + d^\dagger(\mathsf{A}^\dagger_\theta \cos\theta^b \Phi)]\,|0\rangle \\
&= \widehat{C}\,\langle 0|\, d(\cos\theta^b \Psi) d^\dagger(\mathsf{A}^\dagger_\theta \cos\theta^b \Phi)\,|0\rangle \\
&= \widehat{C}\,\left((\cos\theta^d \Psi)^\dagger, (\mathsf{A}^\dagger_\theta \cos\theta^b \Phi)^\dagger\right) \\
&= \widehat{C}\,\left(\Phi, (\cos\theta^d \mathsf{A}_\theta \cos\theta^b \Psi\right)\ ,
\end{aligned} \tag{5.106}$$

onde usamos as relações de comutação (3.127) e (3.128). Substituindo a função de onda do elétron

$$\Phi(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \sum_s \int d^3p\, \Phi_s(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) \mathrm{e}^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\ \in \mathcal{H}_+\ , \tag{5.107}$$

e a função de onda do pósitron

$$\Psi(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \sum_s \int d^3p\, \Psi_s(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) \mathrm{e}^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\ \in \mathcal{H}_-\ , \tag{5.108}$$

o valor esperado (5.106) fica escrito como

$$\begin{aligned}
\underline{\widehat{\mathbf{S}}}_{fi}(\beta) &= \widehat{C} \int d^3x\, \Phi^\dagger(\mathbf{x})\, [\cos\theta^d \mathsf{A}_\theta \cos\theta^b](\mathbf{x})\, \Psi(\mathbf{x}) \\
&= \int d^3p d^3q\, \Phi^*_s(\mathbf{p})\, S^\dagger_{ss'}(\beta; \mathbf{p}, -\mathbf{q})\, \Psi_{s'}(\mathbf{q})\,,
\end{aligned} \tag{5.109}$$

onde definimos

$$S^\dagger_{ss'}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \widehat{C}\, u^\dagger_s(\mathbf{p})\, \Lambda(\beta; \mathbf{p}, -\mathbf{q})\, v_{s'}(\mathbf{q}) \tag{5.110}$$

e, usando (5.104), o fator Λ dependente da temperatura é dado por

$$\begin{aligned}
\Lambda(\beta; \mathbf{p}, -\mathbf{q}) &= \cos^2\theta_{\mathbf{p}} A_1(\mathbf{p}, -\mathbf{q}) \cos^2\theta_{\mathbf{q}} + \\
&\quad + \cos\theta_{\mathbf{p}} \mathrm{sen}\theta_{\mathbf{p}} \tilde{A}_1(\mathbf{p}, -\mathbf{q}) \mathrm{sen}\theta_{\mathbf{q}}\ cos\theta_{\mathbf{q}}\ ,
\end{aligned} \tag{5.111}$$

com A_1 dado pela expressão (3.151) e $\tilde{A}_1$ por (4.155).

A probabilidade total de transição $\mathrm{P}(\beta)$ entre o estado inicial (vácuo térmico) e o estado final (pares elétron-pósitron a $T \neq 0$) é dada pela soma sobre os estados finais f da probabilidade de transição $\Pi_{fi}(p)$, definida por

$$
\begin{aligned}
\Pi_{fi}(\beta) &= \left|\underline{\widehat{\mathbf{S}}}_{fi}(\beta)\right|^2 \\
&= \int d^3p d^3q d^3p' d^3q' \, \Phi^*_{s_1}(\mathbf{p}) \, S^\dagger_{s_1 s'_1}(\beta; \mathbf{p}, -\mathbf{q}) \, \Psi_{s'_1}(\mathbf{q}) \cdot \\
&\quad \cdot \Psi^*_{s_2}(\mathbf{q}') \, S_{s_2 s'_2}(\beta; \mathbf{p}', -\mathbf{q}') \, \Phi_{s_2}(\mathbf{p}') \ . \qquad (5.112)
\end{aligned}
$$

Então,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\beta) &\hat{=} \sum_f \Pi_{fi}(\beta) \\
&= \sum_{ss'} \int d^3p d^3q \, |S^\dagger_{ss'}(\beta; \mathbf{p}, -\mathbf{q})|^2 \\
&= |\widehat{C}|^2 \sum_{ss'} \int d^3p d^3q \, |u^\dagger_s(\mathbf{p}) \, \Lambda(\beta; \mathbf{p}, -\mathbf{q}) \, v_{s'}(\mathbf{q})|^2 \qquad (5.113)
\end{aligned}
$$

onde usamos a relação de completeza dos estados finais

$$
\begin{aligned}
\sum_f \Phi^{*f}_{s_1}(\mathbf{p}) \, \Phi^f_{s_2}(\mathbf{p}') &= \delta_{s_1 s_2} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \ , \\
\sum_f \Psi^f_{s'_1}(\mathbf{q}) \, \Psi^{*f}_{s'_2}(\mathbf{q}') &= \delta_{s'_1 s'_2} \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \ . \qquad (5.114)
\end{aligned}
$$

Para dar continuidade ao cálculo da probabilidade total de transição P, deveremos determinar A_1 e $\tilde{A}_1$, que aparecem na função Λ. De acordo com (3.151) e (4.155), temos, respectivamente,

$$
A_1 = -S^{-1\dagger}_{++} \, S^\dagger_{+-} \qquad (5.115)
$$

e

$$
\tilde{A}_1 = \widetilde{S}^{-1\dagger}_{++} \widetilde{S}^\dagger_{+-} = \left(\widetilde{S}_{-+} \widetilde{S}^{-1}_{++}\right)^\dagger \ . \qquad (5.116)
$$

Como estas duas definições envolvem as mesmas projeções dos respectivos operadores espalhamento, e seus cálculos são análogos, determinaremos somente $\tilde{A}_1$.

O termo de n-ésima ordem do elemento de matriz $\widetilde{S}_{++}$, de acordo com (4.198), é

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{S}_{++})_n(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= 2\pi i (2\pi)^{-2n} (-e)^n P_+(\mathbf{p}) \gamma^0 \int d^4p_1 ... d^4p_{n-1} \ \cdot \\
&\quad \cdot \not{A}(p - p_1) S^{av}(p_1) \not{A}(p_1 - p_2) S^{av}(p_2) ... \cdot \\
&\quad ... S^{av}(p_{n-1}) \not{A}(p_{n-1} - q) P_+(\mathbf{q}) \ , \qquad (5.117)
\end{aligned}
$$

onde

$$S^{av}(p)\hat{=}\frac{\not p+m}{p^2-m^2-ip^00}\ . \tag{5.118}$$

Em teoria de perturbação, o inverso da expressão série $\widetilde{S}_{++}$ pode ser determinado pela expansão

$$\begin{aligned}\widetilde{S}^{-1} &= \left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{S}_n\right)^{-1}\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{n_1+...+n_j=n}(-1)^{j+1}\widetilde{S}_{n_1}\widetilde{S}_{n_2}...\widetilde{S}_{n_j}\right]\ ,\end{aligned} \tag{5.119}$$

com termo de n-ésima ordem dado por

$$\begin{aligned}(\widetilde{S}^{-1})_n &= -\widetilde{S}_n-\widetilde{S}_{n-1}\widetilde{S}_1+\widetilde{S}_{n-2}(\widetilde{S}_2-\widetilde{S}_1\widetilde{S}_1)+\\ &\quad+\widetilde{S}_{n-3}(\widetilde{S}_3-\widetilde{S}_2\widetilde{S}_1-\widetilde{S}_1\widetilde{S}_2+\widetilde{S}_1\widetilde{S}_1\widetilde{S}_1)+...\\ &\hat{=}\ \widetilde{S}_n^1+\widetilde{S}_n^2+\widetilde{S}_n^3+\widetilde{S}_n^4+...\ .\end{aligned} \tag{5.120}$$

O primeiro termo $\widetilde{S}_n^1$ é dado pela expressão (5.117). O segundo termo será

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_n^2 &\hat{=}\ (\widetilde{S}_{n-1}\widetilde{S}_1)_{++}(\mathbf{p},\mathbf{q})=\int d^3q'(\widetilde{S}_{++})_{n-1}(\mathbf{p},\mathbf{q}')(\widetilde{S}_{++})_1(\mathbf{q}',\mathbf{q})\\ &= 2\pi i(2\pi)^{-2n}(-e)^nP_+(\mathbf{p})\gamma^0\int d^4p_1...d^4p_{n-1}\ \not A(p-p_1)S^{av}(p_1)\cdot\\ &\quad\cdot\ \not A(p_1-p_2)S^{av}(p_2)...S^{av}(p_{n-2})\ \not A(p_{n-2}-p_{n-1})\cdot\\ &\quad\cdot\left[2\pi iP_+(p_{n-1})\gamma^0\delta(p_{n-1}^0-E_{p_{n-1}})\right]\ \not A(p_{n-1}-q)P_+(\mathbf{q})\end{aligned} \tag{5.121}$$

Somando os dois primeiros termos de (5.120), dados, respectivamente, por (5.117) e (5.121), teremos

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_n^1+\widetilde{S}_n^2 &= -\left(\widetilde{S}_n-\widetilde{S}_{n-1}\widetilde{S}_1\right)_{++}(\mathbf{p},\mathbf{q})\\ &= -2\pi i(2\pi)^{-2n}(-e)^nP_+(\mathbf{p})\gamma^0\int d^4p_1...d^4p_{n-1}\cdot\\ &\quad\cdot\not A(p-p_1)S^{av}(p_1)...S^{av}(p_{n-2})\ \not A(p_{n-2}-p_{n-1})\cdot\\ &\quad\cdot\left[S^{av}(p_{n-1})-2\pi iP_+(\mathbf{p}_{n-1})\gamma^0\delta(p_{n-1}^0-E_{p_{n-1}})\right]\cdot\\ &\quad\cdot\not A(p_{n-1}-q)P_+(\mathbf{q})\ .\end{aligned} \tag{5.122}$$

A expressão entre colchetes nesta equação resultará em

$$\begin{aligned}[...] &= \left[\left(\frac{1}{p^0-E_{\mathbf{p}}-i0}-2\pi i\delta(p^0-E_{\mathbf{p}})\right)P_+(\mathbf{p})+\frac{P_-(\mathbf{p})}{p^0+E_{\mathbf{p}}-i0}\right]\gamma^0\\ &= \left[\left(VP\frac{1}{p^0-E_{\mathbf{p}}}-\pi i\delta(p^0-E_{\mathbf{p}})\right)P_+(\mathbf{p})+\frac{P_-(\mathbf{p})}{p^0+E_{\mathbf{p}}-i0}\right]\gamma^0\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{E_{\mathbf{p}}\gamma^0 - \mathbf{p}\cdot\vec{\gamma} + m}{p^0 - E_{\mathbf{p}} + i0} + \frac{E_{\mathbf{p}}\gamma^0 + \mathbf{p}\cdot\vec{\gamma} - m}{p^0 + E_{\mathbf{p}} - i0}\right]\frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \\
&= \frac{p_0\gamma^0 - \mathbf{p}\cdot\vec{\gamma} + m}{p^2 - m^2 + i0} = \frac{\not p + m}{p^2 - m^2 + i0} \hat{=} S^F(p) \ , \qquad (5.123)
\end{aligned}
$$

onde substituimos (4.184). Assim, (5.122) fica

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S}^1_n + \widetilde{S}^2_n &= -2\pi i(2\pi)^{-2n}(-e)^n P_+(\mathbf{p})\gamma^0 \int d^4p_1...d^4p_{n-1} \cdot \\
&\cdot \not A(p-p_1)\, S^{av}(p_1)...S^{av}(p_{n-2})\ \not A(p_{n-2}-p_{n-1}) \cdot \\
&\cdot S^F(p_{n-1})\ \not A(p_{n-1}-q)P_+(\mathbf{q}) \ . \qquad (5.124)
\end{aligned}
$$

O terceiro termo da expansão (5.120) será

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S}^3_n &\hat{=} [\widetilde{S}_{n-2}(\widetilde{S}_2 - \widetilde{S}_1\widetilde{S}_1)]_{++}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = 2\pi i(2\pi)^{-2n}(-e)^n P_+(\mathbf{p})\gamma^0 \cdot \\
&\cdot \int d^4p_1...d^4p_{n-1}\, \not A(p-p_1)S^{av}(p_1)...S^{av}(p_{n-3}) \cdot \\
&\cdot \not A(p_{n-3}-p_{n-2})\,[2\pi i P_+(\mathbf{p}_{n-2})\gamma^0\delta(p^0_{n-2} - E_{p_{n-2}})] \cdot \\
&\cdot \not A(p_{n-2}-p_{n-1})S^F(p_{n-1})\ \not A(p_{n-1}-q)P_+(\mathbf{q}) \ . \qquad (5.125)
\end{aligned}
$$

Somando este resultado com a soma dos dois primeiros termos, (5.124), obtemos

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S}^1_n + \widetilde{S}^2_n + \widetilde{S}^3_n &= [-\widetilde{S}_n + \widetilde{S}_{n-1}\widetilde{S}_1 + \widetilde{S}_{n-2}(\widetilde{S}_2 - \widetilde{S}_1\widetilde{S}_1)](\mathbf{p},\mathbf{q}) \\
&= -2\pi i(2\pi)^{-2n}(-e)^n P_+(\mathbf{p})\gamma^0 \int d^4p_1...d^4p_{n-1}\ \not A(p-p_1) \cdot \\
&\cdot S^{av}(p_1)...\ \not A(p_{n-3}-p_{n-2})[S^{av}(p_{n-2}) - 2\pi i P_+(\mathbf{p}_{n-2})\gamma^0 \cdot \\
&\cdot \delta(p^0_{n-2} - E_{p_{n-2}})]\ \not A(p_{n-2}-p_{n-1})S^F(p_{n-1})\ \not A(p_{n-1}-q)P_+(\mathbf{q}) \\
&= -2\pi i(2\pi)^{-2n}(-e)^n P_+(\mathbf{p})\gamma^0 \int d^4p_1...d^4p_{n-1}\ \not A(p-p_1) \cdot \\
&\cdot S^{av}(p_1)...S^{av}(p_{n-3})\ \not A(p_{n-3}-p_{n-2})S^F(p_{n-2}) \cdot \\
&\cdot \not A(p_{n-2}-p_{n-1})S^F(p_{n-1})\ \not A(p_{n-1}-q)P_+(\mathbf{q}) \ . \qquad (5.126)
\end{aligned}
$$

Seguindo o mesmo procedimento acima, e somando todos os termos da expansão (5.120), todas as funções S^{av} serão transformadas em S^F e a expressão final para o termo de n -ésima ordem da inversa $(\widetilde{S}^{-1}_{++})_n$, (5.120), fica

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{S}^{-1}_{++})_n(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= -2\pi i(2\pi)^{-2n}(-e)^n P_+(\mathbf{p})\gamma^0 \int d^4p_1...d^4p_{n-1} \cdot \\
&\cdot \not A(p-p_1)S^F(p_1)...S^F(p_{n-1})\ \not A(p_{n-1}-q)P_+(\mathbf{q}) \ . \qquad (5.127)
\end{aligned}
$$

O outro elemento de matriz que usaremos para compor $\widetilde{A}_1$ é

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{S}_{-+})_n(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= 2\pi i\,(-e)^n(2\pi)^{2n} P_-(\mathbf{p})\gamma^0 \int d^4p_1...d^4p_{n-1}\,\not A(p-p_1) \cdot \\
&\cdot S^{av}(p_1)...S^{av}(p_{n-1})\ \not A(p_{n-1}-q)P_+(\mathbf{q}) \ , \qquad (5.128)
\end{aligned}
$$

A n-ésima ordem do produto (5.116) será dada por[†]

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{A}_1^\dagger)_n &= (\widetilde{S}_{-+}\widetilde{S}_{++}^{-1})_n(\mathbf{p},\mathbf{q}) \\
&= \int d^3q'\,[(\widetilde{S}_{-+})_n(\mathbf{p},\mathbf{q}')(\widetilde{S}_{++}^{-1})(\mathbf{q}',\mathbf{q}) + (\widetilde{S}_{-+})_{n-1}(\mathbf{p},\mathbf{q}')\cdot \\
&\quad \cdot(\widetilde{S}_{++}^{-1})_1(\mathbf{q}',\mathbf{q}) + ... + (\widetilde{S}_{-+})_1(\mathbf{p},\mathbf{q})(\widetilde{S}_{++}^{-1})_{n-1}(\mathbf{p},\mathbf{q})]\ . \qquad (5.129)
\end{aligned}
$$

Os dois primeiros termos desta expansão, de acordo com (5.127) e (5.128), são

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{A}_1^\dagger)_n^1 &= [(\widetilde{S}_{-+})_n(\widetilde{S}_{++}^{-1})_0](\mathbf{p},\mathbf{q}) \\
&= 2\pi i(2\pi)^{-2n}(-e)^n P_-(\mathbf{p})\gamma^0 \int d^4p_1...d^4p_{n-1}\, \not{A}(p-p_1)\cdot \\
&\quad \cdot S^{av}(p_1)...S^{av}(p_{n-1})\, \not{A}(p_{n-1}-q)P_+(\mathbf{q})\ . \qquad (5.130)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{A}_1^\dagger)_n^2 &= [(\widetilde{S}_{-+})_{n-1}(\widetilde{S}_{++}^{-1})_1](\mathbf{p},\mathbf{q}) \\
&= \int d^3q'\,[2\pi i(2\pi)^{-2(n-1)}(-e)^{(n-1)}P_-(\mathbf{p})\gamma^0 \int d^4p_2...d^4p_{n-2}\cdot \\
&\quad \cdot \not{A}(p-p_1)S^{av}(p_1)...S^{av}(p_{n-2})\, \not{A}(p_{n-2}-q')P_+(\mathbf{q}')]\cdot \\
&\quad \cdot[-2\pi i(2\pi)^{-2}(-e)P_+(\mathbf{q}')\gamma^0\, \not{A}(q'-q)P_+(\mathbf{q}) \\
&= 2\pi i(2\pi)^{-2n}(-e)^n P_-(\mathbf{p})\gamma^0 \int d^4p_1...d^4p_{n-1}\, \not{A}(p-p_1)\cdot \\
&\quad \cdot S^{av}(p_1)...S^{av}(p_{n-2})\, \not{A}(p_{n-2}-p_{n-1})[-2\pi i\, P_+(\mathbf{p}_{n-1})\gamma^0\cdot \\
&\quad \cdot\delta(p_{n-1}-E_{p_{n-1}})]\, \not{A}(p_{n-1}-q)P_-(\mathbf{q})\ , \qquad (5.131)
\end{aligned}
$$

que somados resultam em

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{A}_1^\dagger)_n^1 + (\widetilde{A}_1^\dagger)_n^2 &= [(\widetilde{S}_{-+})_n(\widetilde{S}_{++}^{-1})_0 + (\widetilde{S}_{-+})_{n-1}(\widetilde{S}_{++}^{-1})_1](\mathbf{p},\mathbf{q}) \\
&= 2\pi i(2\pi)^{-2n}(-e)^n P_-(\mathbf{p})\gamma^0 \int d^4p_1...d^4p_{n-1}\, \not{A}(p-p_1)\cdot \\
&\quad \cdot S^{av}(p_1)...S^{av}(p_{n-2})\, \not{A}(p_{n-2}-p_{n-1})[S^{av}(p_{n-1}) + \\
&\quad -2\pi i\, P_+(\mathbf{p}_{n-1})\gamma^0\delta(p_{n-1}-E_{p_{n-1}})]\, \not{A}(p_{n-1}-q)P_+(\mathbf{q}) \\
&= 2\pi i(2\pi)^{-2n}(-e)^n P_-(\mathbf{p})\gamma^0 \int d^4p_1...d^4p_{n-1}\, \not{A}(p-p_1)\cdot \\
&\quad \cdot S^{av}(p_1)...S^{av}(p_{n-2})\, \not{A}(p_{n-2}-p_{n-1})S^F(p_{n-1})\cdot \\
&\quad \cdot\, \not{A}(p_{n-1}-q)P_+(\mathbf{q}) \qquad (5.132)
\end{aligned}
$$

Como pode ser visto na expressão acima, com os termos somados até a ordem $(n-1)$ de $(\widetilde{S}_{-+})$, a última função $S^{av}(p_{n-1})$ foi transformada em $S^F(p_{n-1})$. Se somarmos

[†]O último termo da expansão (5.129) não é $(\widetilde{S}_{-+})_0(\widetilde{S}_{++}^{-1})_n$, pois este seria um termo $(++)$e não $(-+)$ já que $(\widetilde{S}_{-+})_0 = 1$.

até a primeira ordem em $(\widetilde{S}_{-+})$, todas as funções S^{av} terão sido convertidas em S^F. Portanto, a expressão final para $(\widetilde{S}_{-+}\widetilde{S}^{-1}_{++})_n$ será

$$\begin{aligned}
(\widetilde{S}_{-+}\widetilde{S}^{-1}_{++})_n(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= i(2\pi)^{-2n+1}(-e)^n P_-(\mathbf{p})\gamma^0 \int d^4p_1...d^4p_{n-1}\, \not{A}(p-p_1)\cdot \\
&\quad \cdot S^F(p_1)...S^F(p_{n-1})\, \not{A}(p_{n-1}-q)P_+(\mathbf{q})\ . \qquad (5.133)
\end{aligned}$$

Tomando a adjunta desta expressão, teremos

$$\begin{aligned}
(\widetilde{S}^{-1\dagger}_{++}\widetilde{S}^{\dagger}_{+-})_n(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= -2\pi i(2\pi)^{-2n}(-e)^n P_+(\mathbf{p})\gamma^0 \int d^4p_1...d^4p_{n-1}\cdot \\
&\quad \cdot \not{A}(p-p_1)S^{AF}(p_1)...S^{AF}(p_{n-1})\cdot \\
&\quad \cdot \not{A}(p_{n-1}-q)P_-(\mathbf{q})\ , \qquad (5.134)
\end{aligned}$$

onde definimos

$$\gamma^0[S^F(p)]^\dagger = \frac{\not{p}+m}{p^2-m^2-i0}\gamma^0 = S^{AF}(p)\gamma^0\,, \qquad (5.135)$$

e usamos o fato do potencial ser real, ou seja, $A^\dagger(p) = A(-p)$.

Por um procedimento análogo podemos obter a expansão (5.115), cujo termo de n-ésima é dado por [56]

$$\begin{aligned}
(S^{-1\dagger}_{++}S^{\dagger}_{+-})_n(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= i(2\pi)^{-2n+1}e^n P_+(\mathbf{p})\gamma^0 \int d^4p_1...d^4p_{n-1}\, \not{A}(p-p_1)\cdot \\
&\quad \cdot S^F(p_1)...S^F(p_{n-1})\, \not{A}(p_{n-1}-q)P_-(\mathbf{q})\ . \qquad (5.136)
\end{aligned}$$

As expressões (5.134) e (5.136) levam as séries (5.115) e (5.116) a serem escritas, respectivamente, como

$$\begin{aligned}
A_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= -2\pi i\sum_{n=1}^{\infty}(2\pi)^{-2n}e^n P_+(\mathbf{p})\gamma^0 \int d^4p_1...d^4p_{n-1}\, \not{A}(p-p_1)\cdot \\
&\quad \cdot S^F(p_1)...S^F(p_{n-1})\, \not{A}(p_{n-1}-q)P_-(\mathbf{q}) \qquad (5.137)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= -2\pi i\sum_{n=1}^{\infty}(2\pi)^{-2n}(-e)^n P_+(\mathbf{p})\gamma^0 \int d^4p_1...d^4p_{n-1}\cdot \\
&\quad \cdot \not{A}(p-p_1)S^F(p_1)...S^F(p_{n-1})\, \not{A}(p_{n-1}-q)P_+(\mathbf{q})\ , \qquad (5.138)
\end{aligned}$$

que em mais baixa ordem $(n = 1)$ são dadas por

$$A_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = -2\pi i(2\pi)^{-2}eP_+(\mathbf{p})\gamma^0\, \not{A}(p-q)P_-(\mathbf{q}) \qquad (5.139)$$

e

$$\tilde{A}_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) = -2\pi i\,(2\pi)^{-2}(-e)P_+(\mathbf{p})\gamma^0\, \not{A}(p-q)P_+(\mathbf{q})\ . \qquad (5.140)$$

Como podemos ver pelas expressões (5.139) e (5.140), $\tilde{A}_1 = -A_1$. Assim, a função Λ definida em (5.111) torna-se

$$\begin{aligned}
\Lambda(\beta;\mathbf{p},-\mathbf{q}) &= [\cos^2\theta_{\mathbf{p}}\cos^2\theta_{\mathbf{q}} + \\
&\quad - \cos\theta_{\mathbf{p}}\mathrm{sen}\theta_{\mathbf{p}}\mathrm{sen}\theta_{\mathbf{q}}\cos\theta_{\mathbf{q}}]\, A_1(\mathbf{p},-\mathbf{q}) \\
&= A_1(\mathbf{p},-\mathbf{q})\{1 - [n_{\mathbf{q}}(\beta) + n_{\mathbf{p}}(\beta)(1-n_{\mathbf{q}}(\beta)) + \\
&\quad + \sqrt{n_{\mathbf{p}}(\beta)(1-n_{\mathbf{p}}(\beta))}\sqrt{n_{\mathbf{q}}(\beta)(1-n_{\mathbf{q}}(\beta))}]\} \\
&= [1 - \Gamma_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\beta)]\, A_1(\mathbf{p},-\mathbf{q}) \ ,
\end{aligned} \tag{5.141}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\beta) &\hat{=} n_{\mathbf{q}}(\beta) + n_{\mathbf{p}}(\beta)(1-n_{\mathbf{q}}(\beta)) + \\
&\quad + \sqrt{n_{\mathbf{p}}(\beta)(1-n_{\mathbf{p}}(\beta))}\sqrt{n_{\mathbf{q}}(\beta)(1-n_{\mathbf{q}}(\beta))} \ .
\end{aligned} \tag{5.142}$$

e usamos (5.92), com o potencial químico $\mu = 0$.

Para a probabilidade total de transição, (5.113), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\beta) &= |\widehat{C}|^2 \sum_{ss'} \int d^3p d^3q \, |u_s^\dagger(\mathbf{p})\,[1-\Gamma_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\beta)]\, A_1(\mathbf{p},-\mathbf{q})\, v_{s'}(\mathbf{q})|^2 \\
&= \frac{|\widehat{C}|^2}{(2\pi)^2} \sum_{ss'} \int d^3p d^3q \, [u_s^\dagger(\mathbf{p}) P_+(\mathbf{p})\gamma^0 e \not{A}(p+q) P_-(-\mathbf{q})\, v_{s'}(\mathbf{q})] \cdot \\
&\quad \cdot [u_s^\dagger(\mathbf{p}) P_+(\mathbf{p})\gamma^0 e \not{A}(p+q) P_-(-\mathbf{q})\, v_{s'}(\mathbf{q})]^\dagger \, [1-\Gamma_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\beta)]^2 \, .
\end{aligned} \tag{5.143}$$

Mas, o primeiro fator entre colchetes é

$$\begin{aligned}
[...] &= u_s^\dagger(\mathbf{p}) \sum_\sigma u_\sigma(\mathbf{p}) u_\sigma^\dagger(\mathbf{p}) \gamma^0\gamma^\mu e A_\mu(p+q) \sum_\sigma v_{\sigma'}(\mathbf{q}) v_{\sigma'}^\dagger(\mathbf{q}) v_{s'}(\mathbf{q}) \\
&= [\bar{u}_s(\mathbf{p})\gamma^\mu v_{s'}(\mathbf{q})]\, e A_\mu(p+q) \ ,
\end{aligned} \tag{5.144}$$

então a expressão (5.143) fica

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\beta) &= |\widehat{C}|^2 \sum_{ss'} \int d^3p d^3q \, [\bar{u}_s(\mathbf{p})\gamma^\mu v_{s'}(\mathbf{q}) \bar{v}_{s'}(\mathbf{q})\gamma^\nu u_s(\mathbf{p})] \cdot \\
&\quad \cdot e A_\mu(p+q)\, e A_\nu(-p-q)\, [1-\Gamma_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\beta)]^2 \\
&= \frac{|\widehat{C}|^2}{(2\pi)^2} \int d^3p d^3q \left[\frac{\not{p}+m}{2E_{\mathbf{p}}}\right]^{\lambda\sigma} \left[\gamma^\mu \frac{\not{q}-m}{2E_{\mathbf{q}}}\gamma^\nu\right]_{\sigma\lambda} \cdot \\
&\quad \cdot e A_\mu(p+q)\, e A_\nu(-p-q)\, [1-\Gamma_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\beta)]^2 \\
&= \frac{|\widehat{C}|^2}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}}} \frac{d^3q}{2E_{\mathbf{q}}} \mathrm{Tr}[(\not{p}+m)\gamma^\mu(\not{q}-m)\gamma^\nu] \cdot \\
&\quad \cdot e A_\mu(p+q)\, e A_\nu(-p-q)\, [1-\Gamma_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\beta)]^2 \ .
\end{aligned} \tag{5.145}$$

Definindo como uma nova variável de integração, o resultado (5.145) pode ser escrito como

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\beta) &= \frac{|\widehat{C}|^2}{(2\pi)^2}\int d^4k \int \frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}}}\frac{d^3q}{2E_{\mathbf{q}}}\mathrm{Tr}[(\not p+m)\gamma^\mu(\not q-m)\gamma^\nu]\,\cdot \\
&\quad \cdot\,\delta^4(p+q-k)\,[1-\Gamma_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\beta)]^2\,eA_\mu(k)\,eA_\nu(-k) \\
&= (2\pi)^{-2}\int d^4k\,T^{\mu\nu}_\beta(k)\,eA_\mu(k)\,eA_\nu(-k)\ , \qquad (5.146)
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
T^{\mu\nu}_\beta(k) &= |\widehat{C}|^2\int \frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}}}\frac{d^3q}{2E_{\mathbf{q}}}\delta^4(p+q-k)\,\cdot \\
&\quad \cdot\mathrm{Tr}[(\not p+m)\gamma^\mu(\not q-m)\gamma^\nu][1-\Gamma_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\beta)]^2\,. \qquad (5.147)
\end{aligned}
$$

O tensor dependente da temperatura $T^{\mu\nu}_\beta(k)$ pode ser reescrito sob outra forma se as integrais tridimensionais são substituídas pelas integrais no quadriespaço de Minkowski com a medida invariante de Lorentz

$$
\int \frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}}}... = \int d^4p\delta(p^2-m^2)\,\Theta(p^0)...\ . \qquad (5.148)
$$

A função Θ limita o intervalo de integração paea $E > 0$. Assim, o tensor (5.147) fica dado por

$$
\begin{aligned}
T^{\mu\nu}_\beta(k) &= |\widehat{C}|^2\int d^4p\,\delta(p^2-m^2)\,\Theta(p^0)\,\delta([k-p]^2-m^2)\,\Theta(k^0-p^0)\,\cdot \\
&\quad \cdot\mathrm{Tr}\left[(\not p+m)\gamma^\mu(\not k-\not p-m)\gamma^\nu\right]\,[1-\Gamma_{p^0,k^0-p^0}(\beta)]^2\,, \qquad (5.149)
\end{aligned}
$$

onde realizamos a integração no quadrimomento q.

O tensor dependente da temperatura pode ser escrito como

$$
T^{\mu\nu}_\beta(k) = T^{\mu\nu}_0(k) + \delta T^{\mu\nu}_\beta(k)\ , \qquad (5.150)
$$

sendo

$$
\begin{aligned}
T^{\mu\nu}_0(k) &= |\widehat{C}|^2\int d^4p\,\delta(p^2-m^2)\,\Theta(p^0)\,\delta([k-p]^2-m^2)\,\Theta(k^0-p^0)\,\cdot \\
&\quad \cdot\mathrm{Tr}\left[(\not p+m)\gamma^\mu(\not k-\not p-m)\gamma^\nu\right] \qquad (5.151)
\end{aligned}
$$

o tensor à temperatura zero, e

$$
\begin{aligned}
\delta T^{\mu\nu}_\beta(k) &= -|\widehat{C}|^2\int \frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}}}\,\delta([k-p]^2-m^2)\,\Theta(k^0-p^0)\,\cdot \\
&\quad \cdot\mathrm{Tr}[(\not p+m)\gamma^\mu(\not k-\not p-m)\gamma^\nu]\,[2-\Gamma_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\beta)]\,\Gamma_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\beta) \qquad (5.152)
\end{aligned}
$$

a correção de temperatura.

Para o tensor $T_0^{\mu\nu}(k)$ à temperatura zero, o traço e a integração no trimomento podem ser calculados, como veremos a seguir.

O traço que aparece nas expressões (5.151) e (5.152) é

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[...] &= \mathrm{Tr}\{(k_\beta - p_\beta)\gamma^\beta + m)\gamma^\mu(p_\alpha\gamma^\alpha - m)\gamma^\nu\} \\ &= \mathrm{Tr}\left\{(k_\beta - p_\beta)\gamma^\beta\gamma^\mu p_\alpha\gamma^\alpha\gamma^\nu + m\gamma^\mu p_\alpha\gamma^\alpha\gamma^\nu)\gamma^\mu + \right. \\ &\left. - \, m^2\gamma^\mu\gamma^\nu\right\} \ . \end{aligned} \tag{5.153}$$

O segundo e o terceiro termo não contribuem, já que o traço de um produto de um número ímpar de matrizes γ é nulo. Para o primeiro e último termos, usaremos, respectivamente, as identidades

$$\mathrm{Tr}[\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\nu] = 4(g^{\beta\mu}g^{\alpha\nu} + g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\beta\alpha}g^{\mu\nu}) \tag{5.154}$$

e

$$\mathrm{Tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu} \ , \tag{5.155}$$

onde $g^{\mu\nu}$ denota o tensor métrico de Minkowski. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[...] &= \mathrm{Tr}\left\{(k_\beta - p_\beta)\gamma^\beta\gamma^\mu p_\alpha\gamma^\alpha\gamma^\nu - m^2\gamma^\mu\gamma^\nu\right\} \\ &= 4\{(k^\mu - p^\mu)p^\nu + (k^\nu - p^\nu)p^\mu - (k_\beta - p_\beta)p^\beta g^{\mu\nu} - m^2 g^{\mu\nu}\} \\ &= 4\{k^\mu p^\nu + k^\nu p^\mu - 2p^\mu p^\nu - k\cdot p g^{\mu\nu}\} \ . \end{aligned} \tag{5.156}$$

No último termo, a parcela $(p^2 - m^2)$ foi eliminada pois $T^{\mu\nu}$, (5.151), contém uma $\delta(p^2 - m^2)$. Substituindo o resultado (5.156) no tensor $T_0^{\mu\nu}(k)$, obtemos

$$\begin{aligned} T_0^{\mu\nu}(k) &= |\widehat{C}|^2 \int d^4p\, \delta(p^2 - m^2)\, \Theta(p^0)\, \delta((k-p)^2 - m^2)\, \Theta(k^0 - p^0) \cdot \\ &\cdot 4[k^\mu p^\nu + k^\nu p^\mu - 2p^\mu p^\nu - k\cdot p g^{\mu\nu}] \ , \end{aligned} \tag{5.157}$$

a qual é explicitamente covariante (tensor de Lorentz). A invariância de gauge de $T_0^{\mu\nu}$ é expressa pela propriedade

$$k_\mu T_0^{\mu\nu}(k) = 0 \ , \tag{5.158}$$

conhecida como identidade de Ward, que pode ser verificada facilmente. A invariância de gauge do tensor $T_0^{\mu\nu}$ leva à invariância de gauge da probabilidade total de transição P_0 do estado inicial de vácuo para o estado final de pares elétron pósitron, à temperatura zero, dada por

$$\mathrm{P}_0 = (2\pi)^{-2} \int d^4k\, T_0^{\mu\nu}(k)\, eA_\mu(k)\, eA_\nu(-k) \ . \tag{5.159}$$

O tensor $T_0^{\mu\nu}$, (5.157), depende somente de k, já que está sendo realizada a integração no quadrimomento p. Assim, de forma geral, ele pode ser escrito como

$$T_0^{\mu\nu}(k) = A(k^2)g^{\mu\nu} + B(k^2)k^\mu k^\nu \ , \tag{5.160}$$

onde A e B são construídas de forma que seja invariantes de Lorentz, por isto sua dependência somente em k^2. Usando a identidade de Ward, teremos

$$k_\mu T_0^{\mu\nu}(k) = A(k^2)k^\nu + B(k^2)k^2 k^\nu = 0 \ , \tag{5.161}$$

ou seja,

$$A(k^2) = -k^2 B(k^2) \ . \tag{5.162}$$

Assim,

$$\begin{aligned} T_0^{\mu\nu}(k) &= -k^2 B(k^2)g^{\mu\nu} + B(k^2)k^\mu k^\nu \\ &= (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})B(k^2) \ . \end{aligned} \tag{5.163}$$

Para obtermos a forma explícita de $B(k^2)$, calculemos $\Sigma_\mu T^\mu_{\ \mu}$. De (5.162) temos que

$$\begin{aligned} \sum_\mu T_0{}^\mu_{\ \mu}(k) &= \sum_\mu (k^\mu k_\mu - k^2 g^\mu_{\ \mu})B(k^2) \\ &= (k^2 - 4k^2)B(k^2) \\ &= -3k^2 B(k^2) \ . \end{aligned} \tag{5.164}$$

Por outro lado, de (5.157) vem

$$\begin{aligned} \sum_\mu T_0{}^\mu_{\ \mu}(k) &= |\widehat{C}|^2 \int d^4p\, \delta(p^2 - m^2) \cdot \\ &\quad \cdot \Theta(p^0)\, \delta((k-p)^2 - m^2)\, \Theta(k^0 - p^0) 4[-2k \cdot p - 2p^2] \ . \end{aligned}$$

Comparando esta com (5.164), vemos que

$$\begin{aligned} B(k^2) &= \frac{4}{3}|\widehat{C}|^2 \int d^4p\, \delta(p^2 - m^2)\, \Theta(p^0)\, \delta((k-p)^2 - m^2)\, \Theta(k^0 - p^0) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{k^2}[2k \cdot p + 2p^2] \\ &= \frac{4}{3}|\widehat{C}|^2 \int d^4p\, \delta(p^2 - m^2)\, \Theta(p^0)\, \delta(k^2 - 2k \cdot p)\, \Theta(k^0 - p^0) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{k^2}[k^2 + 2m^2] \\ &= \frac{4}{3}|\widehat{C}|^2 [1 + \frac{2m^2}{k^2}] \int d^4p\, \delta(p^2 - m^2)\, \Theta(p^0)\, \delta(k^2 - 2k \cdot p) \cdot \\ &\quad \cdot \Theta(k^0 - p^0) \ . \end{aligned} \tag{5.165}$$

Como p e q são vetores tipo tempo, o mesmo acontece com $k = p + q$. Portanto, existe um sistema de referência tal que $k = (k_0, \mathbf{0})$. Neste referencial de Lorentz, o fator $B(k^2)$ assume uma forma mais simples

$$\begin{aligned} B(k_0^2) &= \frac{4}{3}|\widehat{C}|^2 \left[1 + \frac{2m^2}{k^2}\right] \int d^4p\, \delta(p^2 - m^2)\, \Theta(p^0)\, \delta(k_0^2 - 2k_0 p^0)\, \Theta(k^0 - p^0) \\ &= \frac{4}{3}|\widehat{C}|^2 \left[1 + \frac{2m^2}{k_0^2}\right] \int \frac{d^3p}{2E_{\mathbf{p}}}\, \delta(k_0^2 - 2k_0 E_{\mathbf{p}})\, \Theta(k^0 - E_{\mathbf{p}}) \ . \end{aligned} \qquad (5.166)$$

Aqui fizemos a substituição inversa de (5.148) e $p_0 = E_{\mathbf{p}}$. Escrevendo a integração no triespaço dos momentos em coordenadas esféricas,

$$\int d^3p \to \int_0^\infty d|\mathbf{p}|\, \mathbf{p}^2 \int_0^\pi d\theta \mathrm{sen}\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \int_0^\infty d|\mathbf{p}|\, \mathbf{p}^2 \qquad (5.167)$$

teremos

$$B(k_0^2) = \frac{4}{3}|\widehat{C}|^2 \left[1 + \frac{2m^2}{k_0^2}\right] 4\pi \int_0^\infty \frac{d|\mathbf{p}|}{2E_{\mathbf{p}}}\, \mathbf{p}^2\, \delta(k_0^2 - 2k_0 E_{\mathbf{p}})\, \Theta(k_0 - E_{\mathbf{p}}) \ . \qquad (5.168)$$

Mas, a função δ no integrando estabelece a condição $k_0^2 - 2k_0 p^0 = 0$, então

$$\frac{k_0}{2} = E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \qquad (5.169)$$

e

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{\frac{k_0}{4} - m^2} \ . \qquad (5.170)$$

Desta expressão temos que

$$k_0^2 > 4m^2 \ , \qquad (5.171)$$

então introduzimos $\Theta(k_0^2 - 4m^2)$ em (5.168), resultando em

$$B(k_0^2) = \frac{2}{3}|\widehat{C}|^2 \left[1 + \frac{2m^2}{k^2}\right] 4\pi\, \Theta(k_0^2 - 4m^2) \int_0^\infty \frac{d|\mathbf{p}|}{2E_{\mathbf{p}}}\, \mathbf{p}^2\, \frac{\delta(k_0/2 - E_{\mathbf{p}})}{2k_0}\, \Theta(k_0 - E_{\mathbf{p}}) \ , \qquad (5.172)$$

para $k_0 > 0$. Trocando a integração em $|\mathbf{p}|$ pela integração em $E_{\mathbf{p}}$, e fazendo a substituição

$$\mathbf{p}^2 = E_{\mathbf{p}}^2 - m^2 \qquad \Rightarrow \qquad d|\mathbf{p}| = \frac{E_{\mathbf{p}}}{|\mathbf{p}|} dE_{\mathbf{p}} \ , \qquad (5.173)$$

a expressão (5.172) fica escrita como

$$\begin{aligned} B(k_0^2) &= \frac{2}{3}|\widehat{C}|^2 \left[1 + \frac{2m^2}{k_0^2}\right] 4\pi\, \Theta(k_0^2 - 4m^2) \int_m^\infty dE_{\mathbf{p}}\, |\mathbf{p}|\, \frac{\delta(k_0/2 - E_{\mathbf{p}})}{2k_0}\, \Theta(k_0 - E_{\mathbf{p}}) \\ &= \frac{2\pi}{3}|\widehat{C}|^2 \left[1 + \frac{2m^2}{k_0^2}\right] \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k_0^2}} \Theta(k_0^2 - 4m^2)\, \Theta(k_0/2) \ , \end{aligned}$$

com as condições $E_{\mathbf{p}} > m$ e $k_0 > 0$, que são garantidas pelas funções Θ. Como B depende somente de k_0^2, é um invariante de Lorentz. Portanto, pode ser escrito em um referencial inercial qualquer como

$$B(k^2) = \frac{2\pi}{3}|\widehat{C}|^2 \left[1 + \frac{2m^2}{k^2}\right] \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \Theta(k^2 - 4m^2)\, \Theta(k_0) \ . \tag{5.174}$$

Substituindo (5.174) em (5.163), teremos

$$T_0^{\mu\nu}(k) = \frac{2\pi}{3}|\widehat{C}|^2 \left[1 + \frac{2m^2}{k^2}\right] \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \Theta(k^2 - 4m^2)\, \Theta(k_0)\, (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \tag{5.175}$$

e este resultado na equação (5.159), a probabilidade total de produção de pares à temperatura zero fica dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_0 \ &= \ |\widehat{C}|^2 \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k \, \frac{2\pi}{3} \left[1 + \frac{2m^2}{k^2}\right] \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \Theta(k^2 - 4m^2)\, \Theta(k_0)\, e^2 \cdot \\ &\quad \cdot (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})\, A_\mu(k)\, A_\nu^*(k) \ . \end{aligned} \tag{5.176}$$

Nesta expressão ainda permanece a condição $k_0 > 0$, expressa pela função $\Theta(k_0)$. No entanto, esta equação é par em relação a k, e portanto a k_0. Assim, podemos estender a integral em k_0 para $(-\infty, +\infty)$ e dividir a expressão por dois. Então, (5.159) fica escrita como

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_0 \ &= \ |\widehat{C}|^2 \left(\frac{e}{2\pi}\right)^2 \frac{\pi}{3} \int d^4k \left[1 + \frac{2m^2}{k^2}\right] \sqrt{1 - \frac{4m^2}{k^2}} \Theta(k^2 - 4m^2) \cdot \\ &\quad \cdot (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu})\, A_\mu(k)\, A_\nu^*(k) \ . \end{aligned} \tag{5.177}$$

A função Θ, na expressão acima, impõe que a integração se dê sobre os momentos em que $k^2 > 4m^2$. Fisicamente isto significa que a energia mínima que deve ser fornecida pelo campo externo para a produção de pares à temperatura finita é $2m$.

A avaliação do comportamento da probabilidade total de criação de pares elétron-pósitron por um campo eletromagnético externo dependente do tempo, em função da temperatura, pode ser feita pela análise dos limites das baixas e altas temperaturas do fator $\Gamma_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\beta)$. Podemos avaliar o fator $\Gamma_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\beta)$ para os limites de $T \to 0$ e $T \to \infty$, em primeira aproximação.

A distribuição média de partículas com momento $\mathbf{p}$, de acordo com (5.92), é dada por

$$n_{\mathbf{p}}(\beta) = \mathrm{sen}^2\theta_{\mathbf{p}}(\beta) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta E_{\mathbf{p}}} + 1}. \tag{5.178}$$

Se consideramos o limite de $T \to 0$, ou $\beta \to \infty$, teremos $n_{\mathbf{p}}(\beta \to \infty) \to 0$ e, de acordo com (5.152), $\Gamma_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\beta \to \infty) \to 0$. Então, $T^{\mu\nu}_{\beta\to\infty}(k) \to T_0^{\mu\nu}(k)$ e $\mathrm{P}(\beta \to \infty) \to$

P_0, recuperando a descrição para $T = 0$. Para temperaturas muito altas, $\Gamma_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\beta)$ tende a 1 e a probabilidade total $P(\beta)$, dada por (5.146), tende a zero. Portanto, quanto maior a temperatura a que o campo está submetido, menor é a taxa de produção, o que evidencia a competição entre o campo eletromagnético externo e o banho térmico, a qual tende a inibir a produção de pares, à medida que T aumenta, tornando inacessíveis estados menos energéticos, que já se encontram ocupados.

Capítulo 6

Considerações Finais

Neste trabalho foi construído o espaço de Fock para o campo de Dirac e o operador espalhamento $\widehat{\underline{\mathbf{S}}}$ em segunda quantização num campo eletromagnético externo, no contexto de "Thermofield Dynamics" (TFD). Como foi mostrado, este operador fica definido a menos de uma fase, que está associada à amplitude de transição vácuo térmico-vácuo térmico, na presenç a de um campo eletromagnético externo.

Segundo a prescrição de TFD, os efeitos de temperatura são introduzidos através das transformações de Bogoliubov realizadas sobre vetores que geram um espaço vetorial duplicado. Portanto, o espaço de Fock de TFD é aquele formado pelo produto direto dos espaços de Fock do sistema físico e o do sistema dual, os quais foram construídos a partir dos respectivos espaços de Hilbert através do método de segunda quantização. Apesar da semelhança entre o espaço dual e o espaço de Fock original, o primeiro guarda algumas diferenças que merecem ser destacadas.

Pelas regras de conjugação til, da equação de movimento para o campo de Dirac $\psi(x)$, obtém-se a equação para o campo dual $\widetilde{\psi}(x)$, a qual é idêntica àquela para o campo adjunto $\overline{\psi}(x)$. Portanto, os operadores $\tilde{b}^\dagger, \tilde{b}$ associados à partícula dual e $\tilde{d}^\dagger, \tilde{d}$ correspondentes à antipartícula dual são definidos, respectivamente, nos subespaços espectrais de energia negativa e positiva, inversamente ao que acontece para o sistema físico original. Como conseqüência, o operador hamiltoniano no espaço de Fock dual é limitado superiormente, ao contrário do operador hamiltoniano do sistema físico, limitado inferiormente. Isto possibilita definir um operador hamiltoniano total, cujo valor esperado no vácuo térmico é zero. Partindo da dinâmica livre de uma partícula dual no espaço de Hilbert, foi obtida a série perturbativa (de Dyson) para o operador espalhamento $\widetilde{S}$, para o campo de Dirac sujeito a um potencial externo dependente do tempo, a qual se apresentou na forma de um produto temporalmente antiordenado, em contraste com a série de Dyson S para o sistema original. A partir dos operadores S e $\widetilde{S}$ foram definidos os respectivos operadores $\underline{\mathbf{S}}$ e $\widetilde{\underline{\mathbf{S}}}$ na formulação de segunda quantização. O operador espalhamento $\widehat{\underline{\mathbf{S}}}$ no espaço de Fock duplicado foi construído como o produto direto dos operadores $\underline{\mathbf{S}}$ e $\underline{\widetilde{\mathbf{S}}}$.

Como uma aplicação do formalismo desenvolvido, o processo de produção de pares elétron-pósitron à temperatura finita, na presença de um campo eletromagnético externo, foi avaliado. Foi mostrado que a probabilidade total de produção de pares pelo campo externo à temperatura finita decresce com o aumento da temperatura. Isto significa que o limiar de energia para a produção de pares cresce com o aumento da temperatura.

O formalismo de TFD estabelece que sistemas à temperatura finita têm suas quantidades físicas calculadas como valores esperados no vácuo térmico de produtos de operadores. No entanto, estas quantidades são usualmente calculadas como o valor esperado no vácuo duplicado (à temperatura zero) dos mesmos operadores, mas agora termalizados através das transformações de Bogoliubov. A equivalência desses dois procedimentos ainda não foi mostrada para uma situaç ão geral. Usando a construção rigorosa para os espaços de Fock original e seu dual, apresentada neste trabalho, foi possível mostrar esta equivalência na descrição do processo de produção de pares elétron-pósitron à temperatura finita.

Finalmente, como uma primeira proposta para estudos futuros, coloca-se a questão da análise detalhada do comportamento do termo de correção de temperatura na probabilidade total de produção de pares elétron-pósitron. Fica colocada também a possibilidade do estudo de sistemas bosônicos, levando em conta o problema da unitariedade do operador espalhamento [68]. Outros desafios se propõem no sentido da continuidade dos desenvolvimentos aqui apresentados, como por exemplo, a construção do formalismo de operador espalhamento no espaço de Fock duplicado para o campo eletromagnético quantizado, e a investigação da equivalência entre os dois procedimentos de cálculo do valor esperado de operadores em TFD, usando as propriedades dos espaços de Fock aqui apresentadas.

Apêndice A

Expressões de "Thermofield Dynamics"

A.1 Expansão do Vácuo Térmico

O estado de vácuo da "Thermofield Dynamics", $|0(\beta)\rangle$, pode ser obtido da transformação unitária

$$|0(\beta)\rangle = \mathrm{e}^{-i\,G(\beta)}\,|0\rangle\!\rangle \ , \tag{A.1}$$

onde

$$G(\beta) \hat{=} -i\,\theta(\beta)\,(\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger) \tag{A.2}$$

e

$$|0\rangle\!\rangle = |0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle = |0\rangle\,\langle 0| \ . \tag{A.3}$$

Vamos mostrar a seguir que, expandindo a exponencial, podemos escrever a definição (A.1) como

$$|0(\beta)\rangle_F = \left[\cos\theta(\beta) + \mathrm{sen}\theta(\beta)\,a^\dagger \tilde{a}^\dagger\right]\,|0\rangle\!\rangle \tag{A.4}$$

para férmions e

$$|0(\beta)\rangle_B = \frac{1}{\cosh\theta(\beta)}\exp\left[\tanh\theta(\beta)\,a^\dagger \tilde{a}^\dagger\right]\,|0\rangle\!\rangle \tag{A.5}$$

para bósons. Estas expressões têm a vantagem de tornar mais simples alguns cálculos dos valores esperados no vácuo térmico.

Para o caso fermiônico, teremos

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle_F &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[-iG_F(\beta)]^n\,|0\rangle\!\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[-\theta(\beta)\,(\tilde{a}a - a^\dagger\tilde{a}^\dagger)]^n\,|0\rangle\!\rangle \\
&= \{1 - \frac{1}{1!}\theta(\beta)(\tilde{a}a - a^\dagger\tilde{a}^\dagger) + \frac{1}{2!}\theta(\beta)^2(\tilde{a}a - a^\dagger\tilde{a}^\dagger)^2 +
\end{aligned}$$

$$
-\frac{1}{3!}\theta(\beta)^3(\tilde{a}a-a^\dagger\tilde{a}^\dagger)^3+\frac{1}{4!}\theta(\beta)^4(\tilde{a}a-a^\dagger\tilde{a}^\dagger)^4+
-\frac{1}{5!}\theta(\beta)^5(\tilde{a}a-a^\dagger\tilde{a}^\dagger)^5+\frac{1}{6!}\theta(\beta)^6(\tilde{a}a-a^\dagger\tilde{a}^\dagger)^6+...\}|0\rangle\rangle\ . \quad (A.6)
$$

Mas, usando as relações de anticomutação [13]

$$
\begin{aligned}
[a,a^\dagger]_+ &= 1\ , \qquad [a,a]_+=0 \\
[\tilde{a},\tilde{a}^\dagger]_+ &= 1\ , \qquad [\tilde{a},\tilde{a}]_+=0 \\
[a,\tilde{a}]_+ &= [a,\tilde{a}^\dagger]_+=0
\end{aligned} \quad (A.7)
$$

e que

$$
(a^\dagger)^n\,|0\rangle\rangle=0=(\tilde{a}^\dagger)^n\,|0\rangle\rangle \quad (A.8)
$$

para $n\geq 2$, os termos de (A.6) resultarão em

$$
(\tilde{a}a-a^\dagger\tilde{a}^\dagger)\,|0\rangle\rangle=-a^\dagger\tilde{a}^\dagger\,|0\rangle\rangle \quad (A.9)
$$

$$
\begin{aligned}
(\tilde{a}a-a^\dagger\tilde{a}^\dagger)^2\,|0\rangle\rangle &= (\tilde{a}a-a^\dagger\tilde{a}^\dagger)(\tilde{a}a-a^\dagger\tilde{a}^\dagger)|0\rangle\rangle=-\,(\tilde{a}a-a^\dagger\tilde{a}^\dagger)\,a^\dagger\tilde{a}^\dagger\,|0\rangle\rangle \\
&= -\,\tilde{a}a\,a^\dagger\tilde{a}^\dagger\,|0\rangle\rangle=-\,\tilde{a}\tilde{a}^\dagger aa^\dagger\,|0\rangle\rangle=-\,\tilde{a}\tilde{a}^\dagger\,|0\rangle\rangle= \\
&= -\,|0\rangle\rangle
\end{aligned} \quad (A.10)
$$

$$
\begin{aligned}
(\tilde{a}a-a^\dagger\tilde{a}^\dagger)^3\,|0\rangle\rangle &= (\tilde{a}a-a^\dagger\tilde{a}^\dagger)\,\underbrace{(\tilde{a}a-a^\dagger\tilde{a}^\dagger)^2\,|0\rangle\rangle}=-(\tilde{a}a-a^\dagger\tilde{a}^\dagger)\,|0\rangle\rangle \\
&= a^\dagger\tilde{a}^\dagger\,|0\rangle\rangle
\end{aligned} \quad (A.11)
$$

$$
\begin{aligned}
(\tilde{a}a-a^\dagger\tilde{a}^\dagger)^4\,|0\rangle\rangle &= (\tilde{a}a-a^\dagger\tilde{a}^\dagger)\,\underbrace{(\tilde{a}a-a^\dagger\tilde{a}^\dagger)^3\,|0\rangle\rangle}=(\tilde{a}a-a^\dagger\tilde{a}^\dagger)a^\dagger\tilde{a}^\dagger\,|0\rangle\rangle \\
&= \tilde{a}aa^\dagger\tilde{a}^\dagger\,|0\rangle\rangle=|0\rangle\rangle
\end{aligned} \quad (A.12)
$$

$$
\begin{aligned}
(\tilde{a}a-a^\dagger\tilde{a}^\dagger)^5\,|0\rangle\rangle &= (\tilde{a}a-a^\dagger\tilde{a}^\dagger)\,\underbrace{(\tilde{a}a-a^\dagger\tilde{a}^\dagger)^4\,|0\rangle\rangle}=(\tilde{a}a-a^\dagger\tilde{a}^\dagger)\,|0\rangle\rangle \\
&= -a^\dagger\tilde{a}^\dagger\,|0\rangle\rangle
\end{aligned} \quad (A.13)
$$

$$
\begin{aligned}
(\tilde{a}a-a^\dagger\tilde{a}^\dagger)^6\,|0\rangle\rangle &= (\tilde{a}a-a^\dagger\tilde{a}^\dagger)\,\underbrace{(\tilde{a}a-a^\dagger\tilde{a}^\dagger)^5\,|0\rangle\rangle}=-(\tilde{a}a-a^\dagger\tilde{a}^\dagger)\,a^\dagger\tilde{a}^\dagger\,|0\rangle\rangle \\
&= -\,|0\rangle\rangle \\
&\ \ \vdots
\end{aligned} \quad (A.14)
$$

levando o vácuo térmico a ser escrito como

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle_F &= \left\{1 + \frac{1}{1!}\theta(\beta)a^\dagger\tilde{a}^\dagger - \frac{1}{2!}\theta(\beta)^2 - \frac{1}{3!}\theta(\beta)^3 a^\dagger\tilde{a}^\dagger + \right. \\
&\left. + \frac{1}{4!}\theta(\beta)^4 + \frac{1}{5!}\theta(\beta)^5 a^\dagger\tilde{a}^\dagger - \frac{1}{6!}\theta(\beta)^6 + ... \right\} |0\rangle\!\rangle \\
&= \left\{ \left[1 - \frac{1}{2!}\theta(\beta)^2 + \frac{1}{4!}\theta(\beta)^4 - \frac{1}{6!}\theta(\beta)^6 + ...\right] + \right. \\
&\left. + \left[\frac{1}{1!}\theta(\beta)a^\dagger\tilde{a}^\dagger - \frac{1}{3!}\theta(\beta)^3 a^\dagger\tilde{a}^\dagger + \frac{1}{5!}\theta(\beta)^5 a^\dagger\tilde{a}^\dagger - ...\right]\right\} |0\rangle\!\rangle \\
&= \left[\cos\theta(\beta) + \mathrm{sen}\theta(\beta)\, a^\dagger\tilde{a}^\dagger\right] |0\rangle\!\rangle \ . \qquad \text{(A.15)}
\end{aligned}$$

Por outro lado, vimos que o vácuo $|0(\beta)\rangle_F$ para o oscilador fermiônico, (2.40), é dado por

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle_F &= \frac{1}{(1+\mathrm{e}^{-\beta\omega})^{\frac{1}{2}}}[1 + \mathrm{e}^{-\beta\omega/2}\, a^\dagger\tilde{a}^\dagger]\, |0\rangle\!\rangle \\
&= \left[(1+\mathrm{e}^{-\beta\omega})^{-\frac{1}{2}} + (\mathrm{e}^{\beta\omega}+1)^{\frac{1}{2}}\, a^\dagger\tilde{a}^\dagger\right] |0\rangle\!\rangle \ . \qquad \text{(A.16)}
\end{aligned}$$

Comparando esta expressão com (A.15)

$$\begin{aligned}
\cos\theta(\beta) &= (1+\mathrm{e}^{-\beta\omega})^{-\frac{1}{2}} \,, \\
\mathrm{sen}\theta(\beta) &= (1+\mathrm{e}^{\beta\omega})^{-\frac{1}{2}} \,, \qquad \text{(A.17)}
\end{aligned}$$

então

$$\mathrm{sen}^2\theta(\beta) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\beta\omega}} \ , \qquad \text{(A.18)}$$

que é a distribuição de Fermi-Dirac, e vale a relação

$$\cos^2\theta(\beta) + \mathrm{sen}^2\theta(\beta) = \frac{\mathrm{e}^{\beta\omega}}{\mathrm{e}^{\beta\omega}+1} + \frac{1}{1+\mathrm{e}^{\beta\omega}} = 1 \ , \qquad \text{(A.19)}$$

e portanto todas as relações trigonométricas podem ser usadas.

Ao oscilador bosônico é permitida a existência de todos os estados $|n\rangle$, com $n = 0, 1, 2, ...$. Portanto, não vale a restrição (A.8), o que leva a expansão da exponencial adquirir uma forma mais complicada. Para contornar esta dificuldade iremos escrever a exponencial da soma

$$\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle_B &= \mathrm{e}^{-i\,G_B(\beta)}\, |0\rangle\!\rangle \\
&= \mathrm{e}^{\theta(\beta)\,(-\tilde{a}a + a^\dagger\tilde{a}^\dagger)}\, |0\rangle\!\rangle \\
&= \mathrm{e}^{\theta\,(A+B)}\, |0\rangle\!\rangle \qquad \text{(A.20)}
\end{aligned}$$

num produto de exponenciais, onde usamos a notação simplificada $\theta = \theta(\beta)$. Como o comutador $C = [A, B]$ dos operadores

$$\begin{aligned} A &= -\tilde{a}a \\ B &= a^\dagger \tilde{a}^\dagger \end{aligned} \tag{A.21}$$

não é um número, não poderemos usar a fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff [64]. No entanto, os operadores A, B e C formam uma álgebra fechada, ou seja, satisfazem a identidade de Jacobi

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0 \ . \tag{A.22}$$

De fato,

$$\begin{aligned} [A, B] &= [-\tilde{a}a, a^\dagger \tilde{a}^\dagger] = -\tilde{a}[a, a^\dagger \tilde{a}^\dagger] - [\tilde{a}, a^\dagger \tilde{a}^\dagger]a \\ &= -\tilde{a}\,[a, a^\dagger]\,\tilde{a}^\dagger - a^\dagger\,[\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger]\,a \\ &= -\tilde{a}\tilde{a}^\dagger - a^\dagger a = C \ , \end{aligned} \tag{A.23}$$

$$\begin{aligned} [B, C] &= [a^\dagger \tilde{a}^\dagger, -\tilde{a}\tilde{a}^\dagger - a^\dagger a] = -[a^\dagger \tilde{a}^\dagger, \tilde{a}\tilde{a}^\dagger + a^\dagger a] \\ &= -[a^\dagger \tilde{a}^\dagger, \tilde{a}\tilde{a}^\dagger] - [a^\dagger \tilde{a}^\dagger, a^\dagger a] = -a^\dagger[\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}]\tilde{a}^\dagger - a^\dagger[a^\dagger, a]\tilde{a}^\dagger \\ &= a^\dagger \tilde{a}^\dagger + a^\dagger \tilde{a}^\dagger = 2a^\dagger \tilde{a}^\dagger = 2B \ , \end{aligned} \tag{A.24}$$

$$\begin{aligned} [C, A] &= [-\tilde{a}\tilde{a}^\dagger - a^\dagger a, -\tilde{a}a] = [\tilde{a}\tilde{a}^\dagger + a^\dagger a, \tilde{a}a] \\ &= [\tilde{a}\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}a] + [a^\dagger a, \tilde{a}a] = \tilde{a}[\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}]a + \tilde{a}[a^\dagger, a]a \\ &= -\tilde{a}a - \tilde{a}a = -2\tilde{a}a = 2A \ , \end{aligned} \tag{A.25}$$

então

$$[C, C] + [2B, A] + [2A, B] = 2[B, A] - 2[B, A] \equiv 0 \ . \tag{A.26}$$

Essa propriedade nos permite propor a fatoração

$$E(\theta) = \mathrm{e}^{\theta\,(A+B)} = \mathrm{e}^{\alpha(\theta)B}\,\mathrm{e}^{\rho(\theta)C}\,\mathrm{e}^{\gamma(\theta)A} \,, \tag{A.27}$$

cujos coeficientes α, ρ e γ poderão ser encontrados a partir da solução da equação diferencial

$$\frac{dE(\theta)}{d\theta} = (A + B)\,\mathrm{e}^{\theta\,(A+B)} = \frac{d}{d\theta}[\mathrm{e}^{\alpha(\theta)B}\,\mathrm{e}^{\rho(\theta)C}\,\mathrm{e}^{\gamma(\theta)A}] \ , \tag{A.28}$$

sujeita à condição de contorno

$$E(0) = 1 \Rightarrow \alpha(0) = p(0) = \gamma(0) = 0 \ , \tag{A.29}$$

ou

$$\frac{d\rho}{d\theta}\, C\, \mathrm{e}^{\rho(\theta)C} + \mathrm{e}^{\rho(\theta)C}\, \frac{d\gamma}{d\theta}\, A \;=\; [\mathrm{e}^{-\alpha(\theta)B}\, A\, \mathrm{e}^{\alpha(\theta)B}]\, \mathrm{e}^{\rho(\theta)C} + \\ +(1-\frac{d\alpha}{d\theta})\, [\mathrm{e}^{-\alpha(\theta)B} B\, \mathrm{e}^{\alpha(\theta)B}]\, \mathrm{e}^{\rho(\theta)C}\;. \qquad (A.30)$$

Os fatores entre colchêtes nesta expressão podem ser obtidos pela fórmula

$$\mathrm{e}^{-\alpha B}\mathcal{O}\,\mathrm{e}^{\alpha B} = \mathcal{O} - \frac{\alpha}{1!}[B,\mathcal{O}] + \frac{\alpha^2}{2!}[B,[B,\mathcal{O}]] - \frac{\alpha^3}{3!}[B,[B,[B,\mathcal{O}]]] + ...\;, \qquad (A.31)$$

resultando em

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\alpha B} B\, \mathrm{e}^{\alpha B} &= B - \frac{\alpha}{1!}[B,B] + \frac{\alpha^2}{2!}[B,[B,B]] - \frac{\alpha^3}{3!}[B,[B,[B,B]]] + ... \\ &= B\;, \end{aligned} \qquad (A.32)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-\alpha B} A\, \mathrm{e}^{\alpha B} &= A - \frac{\alpha}{1!}[B,A] + \frac{\alpha^2}{2!}[B,[B,A]] - \frac{\alpha^3}{3!}[B,[B,[B,A]]] + ... \\ &= A + \frac{\alpha}{1!}\, C - \frac{\alpha^2}{2!}[B,C] + \frac{\alpha^3}{3!}[B,[B,C]] + ... \\ &= A + \frac{\alpha}{1!}\, C - \frac{\alpha^2}{2!} 2B + \frac{\alpha^3}{3!}[B,2B] + ... \\ &= A + \alpha\, C - \alpha^2\, B\;, \end{aligned} \qquad (A.33)$$

onde substituimos (A.23) e (A.24). Portanto, a equação (A.30) fica

$$[A + \alpha\, C - \alpha^2\, B]\, \mathrm{e}^{\rho(\theta)C} + (1-\frac{d\alpha}{d\theta})\, B\, \mathrm{e}^{\rho(\theta)C} - \frac{d\rho}{d\theta}\, C\, \mathrm{e}^{\rho(\theta)C} - \mathrm{e}^{\rho(\theta)C}\, \frac{d\gamma}{d\theta}\, A = 0 \qquad (A.34)$$

ou ainda

$$A - \frac{d\gamma}{d\theta}\, [\mathrm{e}^{\rho(\theta)C}\, A\, \mathrm{e}^{-\rho(\theta)C}] + (1 - \alpha^2 - \frac{d\alpha}{d\theta})\, B + (\alpha - \frac{d\rho}{d\theta})\, C = 0\;. \qquad (A.35)$$

Usando a fórmula (A.31), o fator entre colchêtes que aparece nesta expressão fica dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\rho C} A \mathrm{e}^{-\rho C} &= A + \frac{\rho}{1!}[C,A] + \frac{\rho^2}{2!}[C,[C,A]] + \frac{\rho^3}{3!}[C,[C,[C,A]]] + ... \\ &= A + \frac{\rho}{1!} 2A + \frac{\rho^2}{2!}[C,2A] + \frac{\rho^3}{3!} 2\,[C,2A] + \frac{\rho^4}{4!} 2^2\,[C,2A] + ... \\ &= A + \frac{\rho}{1!} 2A + \frac{\rho^2}{2!} 2^2\, A + \frac{\rho^3}{3!} 2^3\, A + \frac{\rho^4}{4!} 2^4\, A + ... \\ &= \mathrm{e}^{2\rho}\, A\;. \end{aligned} \qquad (A.36)$$

Portanto, de (A.35) e (A.36), obtemos

$$(1 - \frac{d\gamma}{d\theta}\, \mathrm{e}^{2\rho})\, A + (1 - \alpha^2 - \frac{d\alpha}{d\theta})\, B + (\alpha - \frac{d\rho}{d\theta})\, C = 0\;. \qquad (A.37)$$

Como os operadores A, B e C são linearmente independentes, para que a expressão acima seja identicamente nula deveremos ter

$$
\begin{aligned}
1-\frac{d\gamma}{d\theta}\,\mathrm{e}^{2\rho} &= 0 &\text{(A.38)}\\
1-\alpha^2-\frac{d\alpha}{d\theta} &= 0 &\text{(A.39)}\\
\alpha-\frac{d\rho}{d\theta} &= 0 &\text{(A.40)}
\end{aligned}
$$

Da equação diferencial (A.39) obtemos

$$d\theta=\frac{d\alpha}{1-\alpha^2} \quad\Rightarrow\quad \theta+C=\int\frac{d\alpha}{1-\alpha^2}\ , \tag{A.41}$$

a qual tem como soluções [65]

$$\theta=\mathrm{arctanh}\alpha \quad , \qquad\qquad \text{para } |\alpha|<1\ , \tag{A.42}$$

ou seja,

$$\alpha(\theta)=\tanh\theta\ , \tag{A.43}$$

onde usamos as condições de contorno (A.29). Substituindo este resultado na equação (A.40), obtemos

$$\rho=\int\tanh\theta\,d\theta=[\ln\cosh\theta]+C \tag{A.44}$$

e com as condições de contorno (A.29) resulta em

$$\rho(\theta)=\ln\cosh\theta \tag{A.45}$$

Pela equação (A.38),

$$\frac{d\gamma}{d\theta}=\mathrm{e}^{-2\rho}\quad , \tag{A.46}$$

ou

$$
\begin{aligned}
\gamma+C &= \int\mathrm{e}^{-2\rho}\,d\theta=\int\mathrm{e}^{-2\ln\cosh\theta}\,d\theta=\int\mathrm{e}^{\ln(\cosh\theta)^{-2}}\,d\theta\\
&= \int\frac{1}{(\cosh\theta)^2}\,d\theta=\tanh\theta\ ,
\end{aligned} \tag{A.47}
$$

portanto

$$\gamma(\theta)=\tanh\theta\,, \tag{A.48}$$

onde substituimos o resultado (A.44) e as condições de contorno (A.29). Portanto, por (A.43), (A.45), (A.47) e usando as definições

$$a\,|0\rangle\!\rangle=0=\tilde{a}\,|0\rangle\!\rangle\ , \tag{A.49}$$

a expressão (A.20) resulta em

$$
\begin{aligned}
|0(\beta)\rangle_B &= \mathrm{e}^{\theta(\beta)\,(-\tilde{a}a+a^\dagger\tilde{a}^\dagger)}\,|0\rangle\!\rangle \\
&= \mathrm{e}^{\alpha(\theta)B}\,\mathrm{e}^{\rho(\theta)C}\,\mathrm{e}^{\gamma(\theta)A} \\
&= \mathrm{e}^{a^\dagger\tilde{a}^\dagger\tanh\theta}\,\mathrm{e}^{-(\tilde{a}\tilde{a}^\dagger+a^\dagger a)\ln\cosh\theta}\,\mathrm{e}^{-\tilde{a}a\tanh\theta}\,|0\rangle\!\rangle \\
&= \mathrm{e}^{a^\dagger\tilde{a}^\dagger\tanh\theta}\,\mathrm{e}^{-(\tilde{a}\tilde{a}^\dagger+a^\dagger a)\ln\cosh\theta}\,(1-\tilde{a}a\tanh\theta+...)\,|0\rangle\!\rangle \\
&= \mathrm{e}^{a^\dagger\tilde{a}^\dagger\tanh\theta}\,\mathrm{e}^{-(\tilde{a}\tilde{a}^\dagger+a^\dagger a)\ln\cosh\theta}\,|0\rangle\!\rangle \\
&= \mathrm{e}^{a^\dagger\tilde{a}^\dagger\tanh\theta}\,\mathrm{e}^{-(1+\tilde{a}^\dagger\tilde{a})\ln\cosh\theta}\,|0\rangle\!\rangle \\
&= \mathrm{e}^{a^\dagger\tilde{a}^\dagger\tanh\theta}\,\mathrm{e}^{-\ln\cosh\theta}\,|0\rangle\!\rangle \\
&= \mathrm{e}^{a^\dagger\tilde{a}^\dagger\tanh\theta}\,\mathrm{e}^{\ln(\cosh\theta)^{-1}}\,|0\rangle\!\rangle \\
&= \frac{1}{\cosh\theta(\beta)}\mathrm{e}^{a^\dagger\tilde{a}^\dagger\tanh\theta(\beta)}\,|0\rangle\!\rangle\ ,
\end{aligned}
\tag{A.50}
$$

que é exatamente a expressão (A.5).

A.2 Transformações de Bogoliubov

Os operadores de criação e aniquilação dependentes da temperatura $(a(\beta), a^\dagger(\beta), \tilde{a}(\beta), \tilde{a}^\dagger(\beta))$, no formalismo de "Thermofield Dynamics", foram definidos a partir dos operadores correspondentes ao sistema físico $(a, a^\dagger)$ e ao sistema dual $(\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger)$ através da transformação unitária

$$
\begin{aligned}
a(\beta) &= \mathrm{e}^{-i\,G(\beta)}\,a\,\mathrm{e}^{i\,G(\beta)} && \text{(A.51)}\\
a^\dagger(\beta) &= \mathrm{e}^{-i\,G(\beta)}\,a^\dagger\,\mathrm{e}^{i\,G(\beta)} \\
\tilde{a}(\beta) &= \mathrm{e}^{-i\,G(\beta)}\,\tilde{a}\,\mathrm{e}^{i\,G(\beta)} && \text{(A.52)}\\
\tilde{a}^\dagger(\beta) &= \mathrm{e}^{-i\,G(\beta)}\,\tilde{a}^\dagger\,\mathrm{e}^{i\,G(\beta)}
\end{aligned}
$$

onde

$$G(\beta) = -i\,\theta(\beta)\,(\tilde{a}a - a^\dagger\tilde{a}^\dagger)\ . \tag{A.53}$$

Usando a fórmula de expansão de operadores (A.31), as definições (A.51) e (A.52) podem ser escritas como

$$a(\beta) = a - \frac{(i)}{1!}[G,a] + \frac{(i)^2}{2!}[G,[G,a]] - \frac{(i)^3}{3!}[G,[G,[G,a]]] + ... \tag{A.54}$$

e

$$\tilde{a}(\beta) = \tilde{a} - \frac{(i)}{1!}[G,\tilde{a}] + \frac{(i)^2}{2!}[G,[G,\tilde{a}]] - \frac{(i)^3}{3!}[G,[G,[G,\tilde{a}]]] + ...\ , \tag{A.55}$$

onde $[\,,]$ representa o comutador.

Se os operadores $a, a^\dagger, \tilde{a}, \tilde{a}^\dagger$ estão associados a um sistema fermiônico, satisfazem às relações de anticomutação [13]

$$\begin{aligned}
[a, a^\dagger]_+ &= [\tilde{a}, \tilde{a}^\dagger]_+ = 1 \; , \\
[a, a]_+ &= [\tilde{a}, \tilde{a}]_+ = [a, \tilde{a}^\dagger]_+ = 0 \; .
\end{aligned} \tag{A.56}$$

e possuem a restrição

$$(a^\dagger)^n |0\rangle\!\rangle = (\tilde{a}^\dagger)^n |0\rangle\!\rangle = 0 \; , \qquad \text{para n} \geq 2 \; . \tag{A.57}$$

Usando as relações (A.56) e (A.57), calculamos cada termo das expressões (A.54) e (A.55), ou seja,

$$\begin{aligned}
[G_F\,, a] &= (-i\,\theta)\,[(\tilde{a}a - a^\dagger\tilde{a}^\dagger), a] = (-i\,\theta)\,\left\{[\tilde{a}a, a] - [a^\dagger\tilde{a}^\dagger, a]\right\} \\
&= -(-i\,\theta)\,[a^\dagger\tilde{a}^\dagger, a] = -(-i\,\theta)(a^\dagger\tilde{a}^\dagger a - a a^\dagger\tilde{a}^\dagger) \\
&= (-i\,\theta)(a^\dagger a\tilde{a}^\dagger + a a^\dagger\tilde{a}^\dagger) = (-i\,\theta)\,\tilde{a}^\dagger
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[G_F, [G_F\,, a]] &= (-i\,\theta)\,[G_F, \tilde{a}^\dagger] = (-i\,\theta)^2\,[(\tilde{a}a - a^\dagger\tilde{a}^\dagger), \tilde{a}^\dagger] \\
&= (-i\,\theta)^2\,\left\{[\tilde{a}a, \tilde{a}^\dagger] - \; [a^\dagger\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}^\dagger]\right\} = (-i\,\theta)^2\,[\tilde{a}a, \tilde{a}^\dagger] \\
&= (-i\,\theta)^2\,(\tilde{a}a\tilde{a}^\dagger - \tilde{a}^\dagger\tilde{a}a) = (-i\,\theta)^2\,(-\tilde{a}\tilde{a}^\dagger a - \tilde{a}^\dagger\tilde{a}a) \\
&= -(-i\,\theta)^2\,a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[G_F, [G_F, [G_F\,, a]]] &= -(-i\,\theta)^2\,[G_F, a] = -(-i\,\theta)^3\,\tilde{a}^\dagger \\
[G_F, [G_F, [G_F, [G_F\,, a]]]] &= -(-i\,\theta)^3\,[G_F, \tilde{a}^\dagger] = (-i\theta)^4\,a \\
[G_F, [G_F, [G_F, [G_F, [G_F\,, a]]]]] &= (-i\,\theta)^4\,[G_F, a] = (-i\theta)^5\,\tilde{a}^\dagger \\
&\vdots
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[G_F\,, \tilde{a}] &= (-i\,\theta)\,[(\tilde{a}a - a^\dagger\tilde{a}^\dagger), \tilde{a}] = (-i\,\theta)\,\left\{[\tilde{a}a, \tilde{a}] - [a^\dagger\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}]\right\} \\
&= -(-i\,\theta)\,[a^\dagger\tilde{a}^\dagger, \tilde{a}] = -(-i\,\theta)(a^\dagger\tilde{a}^\dagger\tilde{a} - \tilde{a}a^\dagger\tilde{a}^\dagger) \\
&= -(-i\,\theta)(a^\dagger\tilde{a}^\dagger\tilde{a} + a^\dagger\tilde{a}\tilde{a}^\dagger) = -(-i\,\theta)\,a^\dagger
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[G_F, [G_F\,, \tilde{a}]] &= -(-i\,\theta)\,[G_F, a^\dagger] = -(-i\,\theta)^2\,[(\tilde{a}a - a^\dagger\tilde{a}^\dagger), a^\dagger] \\
&= -(-i\,\theta)^2\,\left\{[\tilde{a}a, a^\dagger] - \; [a^\dagger\tilde{a}^\dagger, a^\dagger]\right\} = -(-i\,\theta)^2\,[\tilde{a}a, a^\dagger] \\
&= -(-i\,\theta)^2\,(\tilde{a}aa^\dagger - a^\dagger\tilde{a}a) = -(-i\,\theta)^2\,(\tilde{a}aa^\dagger + \tilde{a}a^\dagger a) \\
&= -(-i\,\theta)^2\,\tilde{a}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[G_F,[G_F,[G_F\,,\tilde{a}]]] &= -(-i\,\theta)^2\,[G_F,\tilde{a}] = (-i\,\theta)^3\,a^\dagger \\
[G_F,[G_F,[G_F,[G_F\,,\tilde{a}]]]] &= (-i\,\theta)^3\,[G_F,a^\dagger] = (-i\theta)^4\,\tilde{a} \\
[G_F,[G_F,[G_F,[G_F,[G_F\,,\tilde{a}]]]]] &= (-i\,\theta)^4\,[G_F,\tilde{a}] = -(-i\theta)^5\,a^\dagger \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

levando a

$$
\begin{aligned}
a_F(\beta) &= a - \frac{1}{1!}\theta(\beta)\tilde{a}^\dagger - \frac{1}{2!}\theta(\beta)^2 a + \frac{1}{3!}\theta(\beta)^3\tilde{a}^\dagger + \frac{1}{4!}\theta(\beta)^4 a - \frac{1}{5!}\theta(\beta)^5\tilde{a}^\dagger + ... \\
&= a\left[1 - \frac{1}{2!}\theta(\beta)^2 + \frac{1}{4!}\theta(\beta)^4 - ...\right] - \tilde{a}^\dagger\left[\frac{1}{1!}\theta(\beta) - \frac{1}{3!}\theta(\beta)^3 + \frac{1}{5!}\theta(\beta)^5 - ...\right] \\
&= a\cos\theta(\beta) - \tilde{a}^\dagger \mathrm{sen}\theta(\beta)\ , \qquad (A.58)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\tilde{a}_F(\beta) &= \tilde{a} + \frac{1}{1!}\theta(\beta)a^\dagger - \frac{1}{2!}\theta(\beta)^2\tilde{a} - \frac{1}{3!}\theta(\beta)^3 a^\dagger + \frac{1}{4!}\theta(\beta)^4\tilde{a} + \frac{1}{5!}\theta(\beta)^5 a^\dagger + ... \\
&= \tilde{a}\left[1 - \frac{1}{2!}\theta(\beta)^2 + \frac{1}{4!}\theta(\beta)^4 + ...\right] + a^\dagger\left[\frac{1}{1!}\theta(\beta) - \frac{1}{3!}\theta(\beta)^3 + \frac{1}{5!}\theta(\beta)^5 + ...\right] \\
&= \tilde{a}\cos\theta(\beta) + a^\dagger \mathrm{sen}\theta(\beta)\ . \qquad (A.59)
\end{aligned}
$$

Para o caso bosônico valem as relações de comutação [13]

$$
\begin{aligned}
[a,a^\dagger]_- &= [\tilde{a},\tilde{a}^\dagger]_- = 1\ , \\
[a,a]_- &= [\tilde{a},\tilde{a}]_- = [a,\tilde{a}^\dagger]_- = 0\ , \qquad (A.60)
\end{aligned}
$$

as quais levam os comutadores que aparecem nas expressões (A.54) e (A.55) a serem dados por

$$
\begin{aligned}
[G_B\,,a] &= (-i\,\theta)\,[(\tilde{a}a - a^\dagger\tilde{a}^\dagger),a] = (-i\,\theta)\,\left\{[\tilde{a}a,a] - [a^\dagger\tilde{a}^\dagger,a]\right\} \\
&= -(-i\,\theta)\,[a^\dagger\tilde{a}^\dagger,a] = -(-i\,\theta)\,[a^\dagger,a]\tilde{a}^\dagger = (-i\,\theta)\,\tilde{a}^\dagger
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[G_B\,,[G_B\,,a]] &= (-i\,\theta)\,[G_B\,,\tilde{a}^\dagger] = (-i\,\theta)^2\,[(\tilde{a}a - a^\dagger\tilde{a}^\dagger),\tilde{a}^\dagger] \\
&= (-i\,\theta)^2\,\left\{[\tilde{a}a,\tilde{a}^\dagger] - [a^\dagger\tilde{a}^\dagger,\tilde{a}^\dagger]\right\} = (-i\,\theta)^2\,[\tilde{a}a,\tilde{a}^\dagger] \\
&= (-i\,\theta)^2\,[\tilde{a},\tilde{a}^\dagger]a = (-i\,\theta)^2\,a
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[G_B\,,[G_B\,,[G_B\,,a]]] &= (-i\,\theta)^2\,[G_B\,,a] = (-i\,\theta)^3\,\tilde{a}^\dagger \\
[G_B\,,[G_B\,,[G_B\,,[G_B\,,a]]]] &= (-i\,\theta)^3\,[G_B\,,\tilde{a}^\dagger] = (-i\,\theta)^4\,a \\
[G_B\,,[G_B\,,[G_B\,,[G_B\,,[G_B\,,a]]]]] &= (-i\,\theta)^4\,[G_B\,,a] = (-i\,\theta)^5\,\tilde{a}^\dagger \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

e

$$\begin{aligned}
[G_B\,,\tilde{a}] &= (-i\,\theta)\,[(\tilde{a}a - a^\dagger\tilde{a}^\dagger),\tilde{a}] = (-i\,\theta)\,\left\{[\tilde{a}a,\tilde{a}] - [a^\dagger\tilde{a}^\dagger,\tilde{a}]\right\} \\
&= -(-i\,\theta)\,[a^\dagger\tilde{a}^\dagger,\tilde{a}] = -(-i\,\theta)\,a^\dagger[\tilde{a}^\dagger,\tilde{a}] = (-i\,\theta)\,a^\dagger
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[G_B\,,[G_B\,,\tilde{a}]] &= (-i\,\theta)\,[G_B\,,a^\dagger] = (-i\,\theta)^2\,[(\tilde{a}a - a^\dagger\tilde{a}^\dagger),a^\dagger] \\
&= (-i\,\theta)^2\,\left\{[\tilde{a}a,a^\dagger] - [a^\dagger\tilde{a}^\dagger,a^\dagger]\right\} = (-i\,\theta)^2\,[\tilde{a}a,a^\dagger] \\
&= (-i\,\theta)^2\,\tilde{a}[a,a^\dagger] = (-i\,\theta)^2\,\tilde{a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[G_B\,,[G_B\,,[G_B\,,\tilde{a}]]] &= (-i\,\theta)^2\,[G_B\,,\tilde{a}] = (-i\,\theta)^3\,a^\dagger \\
[G_B\,,[G_B\,,[G_B\,,[G_B\,,\tilde{a}]]]] &= (-i\,\theta)^3\,[G_B\,,a^\dagger] = (-i\,\theta)^4\,\tilde{a} \\
[G_B\,,[G_B\,,[G_B\,,[G_B\,,[G_B\,,\tilde{a}]]]]] &= (-i\,\theta)^4\,[G_B\,,\tilde{a}] = (-i\,\theta)^5\,a^\dagger \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Portanto, as expressões para o sistema de bósons, correspondentes a (A.58) e (A.59), serão

$$\begin{aligned}
a_B(\beta) &= a - \frac{1}{1!}\theta(\beta)\tilde{a}^\dagger + \frac{1}{2!}\theta(\beta)^2 a - \frac{1}{3!}\theta(\beta)^3\tilde{a}^\dagger + \frac{1}{4!}\theta(\beta)^4 a - \frac{1}{5!}\theta(\beta)^5\tilde{a}^\dagger + ... \\
&= a\left[1 + \frac{1}{2!}\theta(\beta)^2 + \frac{1}{4!}\theta(\beta)^4 + ...\right] - \tilde{a}^\dagger\left[\frac{1}{1!}\theta(\beta) + \frac{1}{3!}\theta(\beta)^3 + \frac{1}{5!}\theta(\beta)^5 + ...\right] \\
&= a\cosh\theta(\beta) - \tilde{a}^\dagger \mathrm{senh}\theta(\beta)\ , \qquad (A.61)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_B(\beta) &= \tilde{a} - \frac{1}{1!}\theta(\beta)a^\dagger + \frac{1}{2!}\theta(\beta)^2\tilde{a} - \frac{1}{3!}\theta(\beta)^3 a^\dagger + \frac{1}{4!}\theta(\beta)^4\tilde{a} - \frac{1}{5!}\theta(\beta)^5 a^\dagger + ... \\
&= \tilde{a}\left[1 + \frac{1}{2!}\theta(\beta)^2 + \frac{1}{4!}\theta(\beta)^4 + ...\right] - a^\dagger\left[\frac{1}{1!}\theta(\beta) + \frac{1}{3!}\theta(\beta)^3 + \frac{1}{5!}\theta(\beta)^5 + ...\right] \\
&= \tilde{a}\cosh\theta(\beta) - a^\dagger \mathrm{senh}\theta(\beta)\ . \qquad (A.62)
\end{aligned}$$

Os operadores conjugados $a^\dagger(\beta)$ e $\tilde{a}^\dagger(\beta)$ podem ser obtidos de forma análoga, ou simplesmente substituindo cada operador por seu conjugado nas expressões (A.58), (A.59), (A.61) e (A.62).

Apêndice B

O Campo de Dirac

B.1 Equação de Dirac Livre

As partículas livres de spin 1/2 (férmions) são descritas pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = \overline{\psi}(x) \left[i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m \right] \psi(x) \; , \tag{B.1}$$

onde m é a massa da partícula,

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \; , \; \; x^\mu = (t, \mathbf{x}) \; , \tag{B.2}$$

assumindo que $\hbar = c = 1$, com métrica do espaço de Minkowski $diag\,(+ - - -)$. As matrizes γ^μ satisfazem as relações de anticomutação

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2g^{\mu\nu} \; , \tag{B.3}$$

e as condições de hermiticidade

$$[\gamma^\mu]^+ = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \; , \tag{B.4}$$

e são definidas na representação de Dirac-Pauli como

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \; , \quad \gamma^j = \beta \alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \tag{B.5}$$

sendo

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; , \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \; , \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{B.6}$$

as matrizes de Pauli.

A equação de Dirac, que estabelece a dinâmica de férmions livres, pode ser obtida da densidade lagrangiana (B.1) através da equação de movimento de Euler-Lagrange.

Assim, a "função de onda" de uma partícula

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \tag{B.7}$$

e sua adjunta

$$\overline{\psi}(x) \hat{=} \psi^\dagger(x)\,\gamma^0 \ , \tag{B.8}$$

com

$$\psi^\dagger(x) = \begin{pmatrix} \psi_1^*(x) & \psi_2^*(x) & \psi_3^*(x) & \psi_4^*(x) \end{pmatrix} \ , \tag{B.9}$$

satisfazem, respectivamente, as equações

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\ \psi(x) = 0 \tag{B.10}$$

e

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\ \overline{\psi}(x) = 0 \ . \tag{B.11}$$

A equação (B.10), na forma hamiltoniana, é escrita como

$$\begin{aligned} i\frac{\partial \psi(x)}{\partial t} &= [m\beta - i\vec{\alpha}\cdot\nabla]\ \psi(x) \\ &\hat{=} H_0(\mathbf{x})\,\psi(x) \ ; \end{aligned} \tag{B.12}$$

onde o operador hamiltoniano H_0 é autoadjunto no espaço de Hilbert $\mathcal{H} = (L^2(\mathbb{R}^3))^4$, de elementos $\psi(x)$, definidos por (B.7). A solução da equação de Dirac (B.12) é dada pela transformação unitária

$$\psi(t,\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{-iH_0 t}\psi(0,\mathbf{x}) \ , \tag{B.13}$$

a qual torna o produto escalar invariante

$$\int d^3x\, \psi^\dagger(t,\mathbf{x})\,\psi(t,\mathbf{x}) = \int d^3x\, \psi^\dagger(0,\mathbf{x})\,\psi(0,\mathbf{x}) \ . \tag{B.14}$$

O operador hamiltoniano H_0 no espaço dos momentos é dado por

$$H_0(\mathbf{p}) = \beta m + \vec{\alpha}\cdot\mathbf{p} \ , \tag{B.15}$$

de forma que

$$H_0(\mathbf{p})\,\psi(\mathbf{p}) = E(\mathbf{p})\,\psi(\mathbf{p}) \ , \tag{B.16}$$

sendo

$$\psi(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3/2}\int d^3x\,\psi(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \tag{B.17}$$

a transformada de Fourier em $\mathcal{H}$, onde $E(\mathbf{p})$ corresponde à relação de dispersão para uma partícula relativística

$$E(\mathbf{p}) = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \ . \tag{B.18}$$

A equação (B.12) possui quatro soluções na forma de ondas planas, sendo duas de energia positiva

$$u_s(\mathbf{p})\,\frac{\mathrm{e}^{-ip\cdot x}}{(2\pi)^{3/2}} \tag{B.19}$$

e duas de energia negativa

$$v_s(\mathbf{p})\,\frac{\mathrm{e}^{ip\cdot x}}{(2\pi)^{3/2}} \ , \tag{B.20}$$

onde

$$\begin{aligned} u_s(\mathbf{p}) &= \sqrt{\frac{E+m}{2E}}\begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi_s \end{pmatrix} && \text{(B.21)} \\ v_s(-\mathbf{p}) &= \sqrt{\frac{E+m}{2E}}\begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix} && \text{(B.22)} \end{aligned}$$

com

$$\chi_s = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{para} \quad s = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{para} \quad s = -1 \end{cases} \tag{B.23}$$

Os estados de energia positiva e de energia negativa são normalizados

$$\begin{aligned} u_s^\dagger(\mathbf{p})\,u_{s'}(\mathbf{p}) &= \delta_{ss'} \\ v_s^\dagger(-\mathbf{p})\,v_{s'}(-\mathbf{p}) &= \delta_{ss'} \end{aligned} \tag{B.24}$$

e ortogonais

$$u_s^\dagger(\mathbf{p})\,v_{s'}(-\mathbf{p}) = 0 \ , \tag{B.25}$$

e satisfazem as equações de autovalores

$$\begin{aligned} H_0(\mathbf{p})\,u_s(\mathbf{p}) &= E(\mathbf{p})\,u_s(\mathbf{p}) \ , \\ H_0(\mathbf{p})\,v_s(-\mathbf{p}) &= -E(\mathbf{p})\,v_s(-\mathbf{p}) \ . \end{aligned} \tag{B.26}$$

A solução geral da equação de Dirac é a função de onda composta pela superposição das soluções (B.19) e (B.20),

$$\begin{aligned} \psi(x) &= (2\pi)^{-3/2}\sum_s \int d^3p\, \left[\psi_{s+}(\mathbf{p})\,u_s(\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{-ip\cdot x} + \right. \\ & \left. +\psi_{s-}(\mathbf{p})\,v_s(\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{ip\cdot x}\right] \ , \end{aligned} \tag{B.27}$$

onde os índices (+) e (−) correpondem, respectivamente, às solu ções de energia positiva e negativa. A solução para $t = 0$

$$\psi(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \sum_s \int d^3p \, \left[\psi_{s+}(\mathbf{p}) \, u_s(\mathbf{p}) \, \mathrm{e}^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} + \psi_{s-}(\mathbf{p}) \, v_s(\mathbf{p}) \, \mathrm{e}^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\right] \tag{B.28}$$

pode ser escrita como uma transformada de Fourier ordinária

$$\psi(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3p \, \psi(\mathbf{p}) \, \mathrm{e}^{-ip\cdot x} \tag{B.29}$$

se definimos

$$\begin{aligned} \psi_{s+}(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2} \, u_s^\dagger(\mathbf{p}) \, \psi(\mathbf{p}) \ , \\ \psi_{s-}(\mathbf{p}) &= \frac{1}{2} v_s^\dagger(\mathbf{p}) \, \psi(-\mathbf{p}) \ , \end{aligned} \tag{B.30}$$

e usamos a ortogonalidade dos espinores de Dirac, (B.24).

Podemos definir os operadores de projeção

$$\begin{aligned} P_+(\mathbf{p}) &= \sum_s u_s(\mathbf{p}) u_s^\dagger(\mathbf{p}) \\ &= \frac{1}{2E} \left(E + \vec{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m\right) \end{aligned} \tag{B.31}$$

e

$$\begin{aligned} P_-(\mathbf{p}) &= \sum_s v_s(-\mathbf{p}) v_s^\dagger(-\mathbf{p}) \\ &= \frac{1}{2E} \left(E - \vec{\alpha} \cdot \mathbf{p} - m\beta\right) \ , \end{aligned} \tag{B.32}$$

que têm a propriedade de selecionar, respectivamente, as soluç ões de energia positiva e negativa da combinação linear (B.27), expressas por,

$$\begin{aligned} P_+(\mathbf{p}) \, u_s(\mathbf{p}) &= u_s(\mathbf{p}) \ , \\ P_-(\mathbf{p}) \, v_s(-\mathbf{p}) &= v_s(-\mathbf{p}) \ , \end{aligned} \tag{B.33}$$

e

$$P_+(\mathbf{p}) \, v_s(-\mathbf{p}) = 0 = P_-(\mathbf{p}) \, u_s(\mathbf{p}) \ . \tag{B.34}$$

A partir das definições (B.31) e (B.32), é fácil mostrar que os operadores de projeção são ortogonais, e satisfazem

$$\begin{aligned} P_+(\mathbf{p}) + P_-(\mathbf{p}) &= 1 \\ P_+(\mathbf{p}) \, P_-(\mathbf{p}) &= 0 \\ \left[P_\pm(\mathbf{p})\right]^2 &= P_\pm(\mathbf{p}) \\ \left[P_\pm(\mathbf{p})\right]^\dagger &= P_\pm(\mathbf{p}) \ . \end{aligned} \tag{B.35}$$

Eles podem ser expressos na forma covariante se multiplicamos (B.31) e (B.32) por γ^0, ou seja,

$$\begin{aligned}
\sum_s u_s(\mathbf{p})\,\bar{u}_s(\mathbf{p}) &= \frac{\not{p}+m}{2E}\ , \\
\sum_s v_s(\mathbf{p})\,\bar{v}_s(\mathbf{p}) &= \frac{\not{p}-m}{2E}\ ,
\end{aligned} \tag{B.36}$$

onde denotamos

$$\not{p} = p_0\,\gamma^0 - \mathbf{p}\cdot\vec{\gamma} = p_\mu\gamma^\mu\ . \tag{B.37}$$

A solução geral da equação de Dirac, (B.27), pode ser escrita na formulação de segunda quantização, na qual os coeficientes $\psi_{s\pm}(\mathbf{p})$ e $\psi^\dagger_{s\pm}(\mathbf{p})$ são os operadores de aniquilação $b_s(\mathbf{p})$, $d_s(\mathbf{p})$ e de criação $d^\dagger_s(\mathbf{p})$, $b^\dagger_s(\mathbf{p})$, que satisfazem relações de anticomuta ção.

B.1.1 Funções Comutação

O campo de Dirac livre $\psi(x)$ na formulação de segunda quantização é dado pela expansão em ondas planas

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= (2\pi)^{-3/2}\sum_s \int d^3p\,\left[b_s(\mathbf{p})\,u_s(\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{-ip\cdot x} + d^\dagger_s(\mathbf{p})\,v_s(\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{ip\cdot x}\right]\ , \\
&\hat{=}\ \psi^\dagger(x) + \psi^{(-)}(x)\ ,
\end{aligned} \tag{B.38}$$

onde $b_s(\mathbf{p})$ é o operador de aniquilação de partícula e $d^\dagger_s(\mathbf{p})$ o operador de criação de antipartícula. O campo adjunto é obtido de (B.38) como

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}(x) &= \psi^\dagger(x)\,\gamma^0 \\
&= (2\pi)^{-3/2}\sum_s \int d^3p\,\left[b^\dagger_s(\mathbf{p})\,\bar{u}_s(\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{ip\cdot x} + d_s(\mathbf{p})\,\bar{v}_s(\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{-ip\cdot x}\right] \\
&\hat{=}\ \overline{\psi}(x) + \overline{\psi}^\dagger(x)\ .
\end{aligned} \tag{B.39}$$

Os sinais $(+)$ e $(-)$ significam que as quantidades estão associadas, respectivamente, às soluções de energia positiva e de energia negativa.

Os operadores b's e d's satisfazem as relações de anticomutação

$$\begin{aligned}
\{b_s(\mathbf{p})\,,\,b^\dagger_{s'}(\mathbf{p}')\} &= \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,\delta_{ss'}\ , \\
\{d_s(\mathbf{p})\,,\,d^\dagger_{s'}(\mathbf{p}')\} &= \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\,\delta_{ss'}\ ,
\end{aligned} \tag{B.40}$$

sendo as demais nulas.

As relações de anticomutação para o campo de Dirac livre, para tempos arbitrários, são quantidades importantes na sua descrição. Das expressões (B.39) e (B.40) encontramos

$$\begin{aligned}\{\psi(x)\,,\overline{\psi}(x)\} &= \{\psi^{(+)}(x)\,,\overline{\psi}^{(-)}(y)\}+\{\psi^{(-)}(x)\,,\overline{\psi}^{(+)}(y)\}\ ,\\ &\hat{=}\ -iS^{+}(x-y)-iS^{-}(x-y)\ .\end{aligned}\tag{B.41}$$

A função $S^{(+)}(x)$ é definida como a transformada de Fourier distribucional

$$\begin{aligned}S^{(+)}(x) &\hat{=} \frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2E}(\not{p}+m)\,\mathrm{e}^{-ip\cdot x}\\ &= \frac{i}{(2\pi)^3}(i\not{\partial}_x+m)\int\frac{d^3p}{2E}\,\mathrm{e}^{-ip\cdot x}\\ &\hat{=} (i\not{\partial}_x+m)\,D^{(+)}(x)\ .\end{aligned}\tag{B.42}$$

A função $D^{(+)}(x)$ pode ser escrita na forma invariante pela introdução da função δ

$$\delta(p^2-m^2)=\frac{\delta(p_0-E)}{2E}+\frac{\delta(p_0+E)}{2E}\ .\tag{B.43}$$

Como $p_0=E>0$, pois $p=(p_0,\mathbf{p})$ é um quadrivetor tipo tempo, para que o segundo termo seja eliminado, devemos introduzir a funç ão $\Theta(p^0)$. Assim,

$$D^{(+)}(x)=\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4p\,\delta(p^2-m^2)\,\Theta(p^0)\,\mathrm{e}^{-ip\cdot x}\ ,\tag{B.44}$$

a qual é um escalar de Lorentz.

De forma análoga, para $S^{(-)}(x)$ temos

$$\begin{aligned}S^{(-)}(x) &\hat{=} \frac{i}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3p}{2E}(\not{p}-m)\,\mathrm{e}^{ip\cdot x}\\ &= -\frac{i}{(2\pi)^3}(i\not{\partial}_x+m)\int\frac{d^3p}{2E}\,\mathrm{e}^{ip\cdot x}\\ &\hat{=} (i\not{\partial}_x+m)\,D^{(-)}(x)\ ,\end{aligned}\tag{B.45}$$

e $D^{(-)}(x)$ pode ser escrita na forma invariante como

$$\begin{aligned}D^{(-)}(x) &= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4p\,\delta(p^2-m^2)\,\Theta(p^0)\,\mathrm{e}^{ip\cdot x}\\ &= -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d^4p\,\delta(p^2-m^2)\,\Theta(-p^0)\,\mathrm{e}^{-ip\cdot x}\ .\end{aligned}\tag{B.46}$$

O anticomutador (B.41) para o campo de Dirac fica dado por

$$\begin{aligned}S(x) &= S^{(+)}(x)+S^{(-)}(x)\\ &\hat{=} (i\not{\partial}_x+m)\,D(x)\ ,\end{aligned}\tag{B.47}$$

sendo

$$\begin{aligned} D(x) &= D^{(-)}(x) + D^{(+)}(x) \\ &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^4p \, \delta(p^2 - m^2) \, sgn(p^0) \, \mathrm{e}^{-ip\cdot x} \ , \end{aligned} \tag{B.48}$$

a função de Pauli-Jordan, a qual admite a decomposição causal em funções retardada e avançada

$$D(x) = D^{ret}(x) - D^{av}(x) \ , \tag{B.49}$$

com

$$\begin{aligned} D^{ret}(x) &= \Theta(x^0) \, D(x) \\ D^{av}(x) &= -\Theta(-x^0) \, D(x) \ . \end{aligned} \tag{B.50}$$

A representação de Fourier destas funções é

$$D^{ret}(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{\mathrm{e}^{-ip\cdot x}}{p^2 - m^2 + ip^0 0} \tag{B.51}$$

e

$$D^{av}(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{\mathrm{e}^{-ip\cdot x}}{p^2 - m^2 - ip^0 0} \ , \tag{B.52}$$

cujas transformadas de Fourier são

$$D^{ret}(p) = \frac{-1}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 - m^2 + ip^0 0} \ , \tag{B.53}$$

e

$$D^{av}(p) = \frac{-1}{(2\pi)^2} \frac{1}{p^2 - m^2 - ip^0 0} \ . \tag{B.54}$$

A partir da definição (B.47), podemos introduzir as distribui ções retardada e avançada para o campo de Dirac

$$\begin{aligned} S^{ret}(x) &\hat{=} (i \not{\partial}_x + m) \, D^{ret}(x) \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + ip^0 0} \mathrm{e}^{-ip\cdot x} , \end{aligned} \tag{B.55}$$

$$\begin{aligned} S^{av}(x) &\hat{=} (i \not{\partial}_x + m) \, D^{av}(x) \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 - ip^0 0} \mathrm{e}^{-ip\cdot x} \ , \end{aligned} \tag{B.56}$$

que no espaço dos momentos são dadas por

$$S^{ret}(p) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + ip^0 0} \ , \tag{B.57}$$

$$S^{av}(p) = -\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{\not p + m}{p^2 - m^2 - ip^0 0} \ . \tag{B.58}$$

Os propagadores de Feynmam são definidos como

$$\begin{aligned} S^F(x) &= \Theta(x_0)\, S^{(+)}(x) - \Theta(-x_0)\, S^-(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p \frac{\not p + m}{p^2 - m^2 + i0}\, \mathrm{e}^{-ip\cdot x} \end{aligned} \tag{B.59}$$

$$\begin{aligned} D^F(x) &= \Theta(x^0)\, D^{(+)}(x) - \Theta(-x^0)\, D^{(-)}(x) \\ &= \frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4p \frac{\mathrm{e}^{-ip\cdot x}}{p^2 - m^2 + i0} \ , \end{aligned} \tag{B.60}$$

com sua representação no espaço dos momentos dada por

$$S^F(p) = \frac{1}{(2\pi)^2}\, \frac{\not p + m}{p^2 - m^2 + i0} \ , \tag{B.61}$$

$$D^F(p) = -\frac{1}{(2\pi)^2}\, \frac{1}{p^2 - m^2 + i0} \ . \tag{B.62}$$

B.2 Campo de Dirac Dual

O formalismo de "Thermofield Dynamics" estabelece que o campo dual é obtido a partir do campo original através das regras de conjugação til (2.29). Desta forma, o operador densidade lagrangiana que caracteriza o campo de Dirac dual livre fica dada por

$$\widetilde{\mathcal{L}}(x) = \widetilde{\overline{\psi}}(x) \left[i\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m \right] \widetilde{\psi}^\dagger(x) \tag{B.63}$$

a qual leva à equação de movimento

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\ \widetilde{\psi}^\dagger(x) = 0 \tag{B.64}$$

e sua adjunta

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)\ \widetilde{\overline{\psi}}(x) = 0 \ , \tag{B.65}$$

onde

$$\widetilde{\psi}^\dagger(x) = \begin{pmatrix} \widetilde{\psi}_1^*(x) \\ \widetilde{\psi}_2^*(x) \\ \widetilde{\psi}_3^*(x) \\ \widetilde{\psi}_4^*(x) \end{pmatrix} \ , \tag{B.66}$$

$$\widetilde{\psi}(x) = \begin{pmatrix} \widetilde{\psi}_1(x) & \widetilde{\psi}_2(x) & \widetilde{\psi}_3(x) & \widetilde{\psi}_4(x) \end{pmatrix} \ , \tag{B.67}$$

e

$$\widetilde{\overline{\psi}}(x) \,\hat{=}\, \widetilde{\psi}(x)\, \gamma^0 \ . \tag{B.68}$$

A equação de Dirac para o campo dual livre, (B.64), na formula ção hamiltoniana fica escrita como

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial\widetilde{\psi}^{\dagger}(x)}{\partial t} &= \left[m\beta - i\vec{\alpha}\cdot\nabla\right]\widetilde{\psi}^{\dagger}(x) \\
&\hat{=} \widetilde{H}_0(x)\,\widetilde{\psi}^{\dagger}(x)\ ,
\end{aligned}
\tag{B.69}
$$

onde $\widetilde{H}_0$ é um operador autoadjunto no espaço de Hilbert $\widetilde{\mathcal{H}} = (L^2(\mathbb{R}^3)^4$, cujos elementos são as funções de onda duais $\widetilde{\psi}^{\dagger}(x)$, (B.66).

O operador hamiltoniano $\widetilde{H}_0$ no espaço dos momentos é dado por

$$
\widetilde{H}_0(\mathbf{p}) = \beta m + \vec{\alpha}\cdot\mathbf{p}\ ,
\tag{B.70}
$$

e $\widetilde{\psi}^{\dagger}$ satisfaz a equação de autovalores

$$
\widetilde{H}_0(\mathbf{p})\,\widetilde{\psi}^{\dagger}(\mathbf{p}) = E(\mathbf{p})\,\widetilde{\psi}^{\dagger}(\mathbf{p})\ ,
\tag{B.71}
$$

onde

$$
\widetilde{\psi}^{\dagger}(\mathbf{p}) = (2\pi)^{-3}\int d^3x\,\widetilde{\psi}^{\dagger}(\mathbf{x})\,\mathrm{e}^{-ip\cdot x}\ .
\tag{B.72}
$$

A equação (B.71) é resolvida de forma análoga à equação (B.12) para o sistema original, cuja solução é a função de onda dual

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\psi}^{\dagger}(x) &= (2\pi)^{-3/2}\sum_s\int d^3p\left[\widetilde{\psi}^{\dagger}_{s+}(\mathbf{p})\,u_s(\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{-ip\cdot x} + \widetilde{\psi}^{\dagger}_{s-}(\mathbf{p})\,v_s(\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{ip\cdot x}\right] \\
&\hat{=} \widetilde{\psi}^{\dagger}(x)^{(+)} + \widetilde{\psi}^{\dagger}(x)^{(-)}
\end{aligned}
\tag{B.73}
$$

e sua conjugada é

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\psi}(x) &= (2\pi)^{-3/2}\sum_s\int d^3p\left[\widetilde{\psi}_{s-}(\mathbf{p})\,u^{\dagger}_s(\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{ip\cdot x} + \widetilde{\psi}_{s+}(\mathbf{p})\,v^{\dagger}_s(\mathbf{p})\,\mathrm{e}^{-ip\cdot x}\right] \\
&\hat{=} \widetilde{\psi}(x)^{(-)} + \widetilde{\psi}(x)^{(+)}\ .
\end{aligned}
\tag{B.74}
$$

onde mantivemos a convenção das quantidades correspondentes à solução de energia positiva serem denotadas com $(+)$ e as associadas à solução de energia negativa com $(-)$.

As equações (B.10), (B.12) e (B.16) para o campo original $\psi(x)$ são idênticas às equações (B.64), (B.69) e (B.71) para o campo dual $\widetilde{\psi}^{\dagger}(x)$. Portanto, as definições dos espinores $u_s(\mathbf{p})$ e $v_s(\mathbf{p})$, dos operadores de projeção $P_+(\mathbf{p})$ e $P_-(\mathbf{p})$ e todas as suas relações são aplicáveis ao campo de Dirac dual, bem como a estrutura algébrica das matrizes γ^{μ} de Dirac.

Apêndice C

Condição de Hilbert-Schmidt

No *Capítulo 2* apresentamos a construção da matriz $\underline{\mathbf{S}}$ no espaço de Fock para o campo de Dirac sujeito a um potencial eletromagnético externo dependente do tempo, $A^{\mu}(x)$. No entanto, para que $\underline{\mathbf{S}}$ exista, o elemento de matriz $S_{+-} = P_+ S P_-$ deve ser um operador de Hilbert-Schmidt [56], onde S é dada pela série perturbativa (de Dyson) (3.170) definida sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$.

A n-ésima ordem de $S^{(n)}$ da série S, (3.174), é escrita no espaço dos momentos como

$$\begin{aligned} S^{(n)}(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= \frac{(-i)^n}{(2\pi)^{3n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 ... \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \int d^3p_1 ... d^3p_{n-1} \cdot \\ & \cdot \mathrm{e}^{it_1 H_0(\mathbf{p})} H_1(t_1, \mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\, \mathrm{e}^{-i(t_1-t_2)H_0(\mathbf{p}_1)} H_1(t_2, \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) ... \\ & ... \mathrm{e}^{-i(t_{n-1}-t_n)H_0(\mathbf{p}_{n-1})} H_1(t_n, \mathbf{p}_{n-1} - \mathbf{q})\, \mathrm{e}^{-it_n H_0(\mathbf{q})}. \end{aligned} \tag{C.1}$$

Com os operadores de projeção $P_+(\mathbf{p})$ e $P_-(\mathbf{p})$, definidos, respectivamente, em (B.31) e (B.32), escrevemos o elemento de matriz $P_+ S^{(n)} P_-$ na forma

$$\begin{aligned} P_+(\mathbf{p})\, S^{(n)}(\mathbf{p},\mathbf{q}) P_-(\mathbf{q}) &= \frac{(-i)^n}{(2\pi)^{3n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 ... \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n\, \mathrm{e}^{it_1 E(\mathbf{p}) + it_n E(\mathbf{q})} \cdot \\ & \cdot \int d^3p_1 ... d^3p_{n-1} P_+(\mathbf{p}) H_1(t_1, \mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\, \mathrm{e}^{-i(t_1-t_2)H_0(\mathbf{p}_1)} ... \\ & ... \mathrm{e}^{-i(t_{n-1}-t_n)H_0(\mathbf{p}_{n-1})} H_1(t_n, \mathbf{p}_{n-1} - \mathbf{q})\, P_-(\mathbf{q}) \ , \end{aligned} \tag{C.2}$$

dada pela equação (3.176), onde usamos

$$P_{\pm}(\mathbf{p})\, \mathrm{e}^{itH_0(\mathbf{p})} = \mathrm{e}^{\pm itE(\mathbf{p})} P_{\pm}(\mathbf{p}) \ . \tag{C.3}$$

Para avaliar este operador integral, introduzimos as novas coordenadas temporais s_j, definidas por

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{n}(t_1 + t_2 + ... + t_n) \ , & & -\infty < s_1 < \infty \\ s_j &= t_j - t_{j-1} \ , \qquad (j = 2, 3, ..., n) \ , & & -\infty < s_j \leq 0 \ , \end{aligned} \tag{C.4}$$

cuja transformação inversa é

$$
\begin{aligned}
t_1 &= s_1 - \frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n}(n-j+1)\,s_j \ , \\
t_n &= s_1 + \frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n}(j-1)\,s_j \ , \\
t_k &= s_1 + \frac{1}{n}\sum_{j=2}^{k}(j-1)\,s_j - \frac{1}{n}\sum_{j=k+1}^{n}(n-j+1)\,s_j \ ,
\end{aligned}
\tag{C.5}
$$

onde $2 \leq k \leq n-1$. Como o jacobiano da transformação é

$$
\det\left(\frac{\partial s_j}{\partial t_k}\right) = 1 \ , \tag{C.6}
$$

podemos escrever a equação (C.2) como

$$
\begin{aligned}
S_{+-}^{(n)}(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= \frac{(-i)^n}{(2\pi)^{3n/2}}\int_{-\infty}^{\infty} ds_1 \int_{-\infty}^{0} ds_2 ... \int_{-\infty}^{0} ds_n \,\cdot \\
&\cdot \exp\left\{ i\left[s_1 - \frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n}(n-j+1)\,s_j \right] E(\mathbf{p}) \right\} \\
&\cdot \exp\left\{ i\left[s_1 + \frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n}(j-1)\,s_j \right] E(\mathbf{q}) \right\} \cdot \\
&\cdot \int d^3p_1 ... \int d^3p_{n-1} F_n(s_1,...,s_n;\mathbf{p},\mathbf{p}_1,...,\mathbf{p}_{n-1},\mathbf{q}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} ds_1 \int_{-\infty}^{0} ds_2 ... \int_{-\infty}^{0} ds_n \, \mathrm{e}^{is_1[E(\mathbf{p})+E(\mathbf{q})]} \,\cdot \\
&\cdot \exp\left\{ -\frac{i}{n}\sum_{j=2}^{n} s_j\,[(n-j+1)\,E(\mathbf{p}) - (j-1)\,E(\mathbf{q})] \right\} \cdot \\
&\cdot T_n(s_1,...,s_n;\mathbf{p},\mathbf{q}) \ ,
\end{aligned}
\tag{C.7}
$$

onde

$$
T_n(s_1,...,s_n;\mathbf{p},\mathbf{q}) \,\hat{=}\, \frac{(-i)^n}{(2\pi)^{3n/2}} \int d^3p_1 ... d^3p_{n-1} F_n(s_1,...,s_n;\mathbf{p},\mathbf{p}_1,...,\mathbf{p}_{n-1},\mathbf{q}) \ . \tag{C.8}
$$

Realizando duas vezes integração por partes com respeito a s_1, a expressão (C.7) torna-se

$$
\begin{aligned}
S_{+-}^{(n)}(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= -\int_{-\infty}^{\infty} ds_1 \int_{-\infty}^{0} ds_2 ... \int_{-\infty}^{0} ds_n \frac{\mathrm{e}^{is_1[E(\mathbf{p})+E(\mathbf{q})]}}{[E(\mathbf{p})+E(\mathbf{q})]^2} \exp\left\{ -\frac{i}{n}\sum_{j=2}^{n} s_1\,[...] \right\} \cdot \\
&\cdot \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} T_n(s_1,...,s_n;\mathbf{p},\mathbf{q}) \ .
\end{aligned}
\tag{C.9}
$$

Os termos limites resultantes das integrações por partes são zero, pois H_1 se anula para $s_1 = \pm\infty$. Como

$$t_{k+1} - t_k = s_{k+1} \ , \tag{C.10}$$

as exponenciais

$$\mathrm{e}^{-i(t_1-t_2)H_0(\mathbf{p}_1)}...\mathrm{e}^{-i(t_{n-1}-t_n)H_0(\mathbf{p}_{n-1})} \ , \tag{C.11}$$

ficam

$$\mathrm{e}^{is_2 H_0(\mathbf{p}_1)}...\mathrm{e}^{is_n H_0(\mathbf{p}_{n-1})} \ , \tag{C.12}$$

e, portanto, a dependência de T_n em s_1 é somente nos potenciais H_1. Sendo assim, somente os potenciais deverão ser diferenciados. Reescrevemos a expressão (C.9) nas variáveis originais $t_1, ..., t_n$, usando

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial t_k}{\partial s_1}\frac{\partial}{\partial t_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t_k} \ , \\ \frac{\partial^2}{\partial s_1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t_k} \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t_m} = \sum_{k,m=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial t_k \partial t_m} \ , \end{aligned} \tag{C.13}$$

a qual fica

$$S_{+-}^{(n)}(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 ... \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \frac{\mathrm{e}^{it_1 E(\mathbf{p}) + it_n E(\mathbf{q})}}{[E(\mathbf{p}) + E(\mathbf{q})]^2} \partial^2 T_n(t_1, ..., t_n; \mathbf{p}, \mathbf{q}) \ , \tag{C.14}$$

onde $\partial^2 T_n(t_1, ..., t_n; \mathbf{p}, \mathbf{q})$ é obtida como segue. Das expressões (C.9) e (C.12), temos que $\partial^2 T_n / \partial s_1^2$ se reduz a

$$\frac{\partial^2}{\partial s_1^2}\left[H_1^1 ... H_1^n\right] \hat{=} \frac{\partial^2}{\partial s_1^2}\left[H_1^1(s_1, ..., s_n; \mathbf{p}, \mathbf{q}) ... H_1^n(s_1, ..., s_n; \mathbf{p}, \mathbf{q})\right] \ , \tag{C.15}$$

onde o índice j em H_1^j significa que o potencial teve origem em $H_1(t_j; \mathbf{p}_{j-1}, \mathbf{p}_j)$. Mas, $\partial^2[H_1^1 ... H_1^n]/\partial s_1^2$ pode ser obtida pela fórmula geral da derivada do produto

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n}{\partial s^n}[F_1 ... F_m] &= \sum_{k_1=0}^{n} \sum_{k_2=0}^{n-k_1} ... \sum_{k_{m-1}=0}^{n-\Sigma_{j=1}^{m-2} k_j} \begin{pmatrix} n \\ k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} ... \begin{pmatrix} n - \sum_{j=1}^{m-2} k_j \\ k_{m-1} \end{pmatrix} . \\ &\quad \cdot F_1^{(k_1)} F_2^{(k_2)} ... F_m^{(k_m)} \ , \end{aligned} \tag{C.16}$$

onde

$$k_m = n - \sum_{j=1}^{m-1} k_j \ , \tag{C.17}$$

resultando em

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial s_1^2}[H_1^1...H_1^n] &= \sum_{k_1=0}^{2}\sum_{k_2=0}^{2-k_1}...\sum_{k_{n-1}=0}^{2-\Sigma_{j=1}^{n-2}k_j}\frac{2!}{k_1!...k_{n-1}!}\frac{1}{(2-(k_1+...+k_{n-1}))!}\cdot\\ &\cdot H_1^{1(k_1)}H_1^{2(k_2)}...H_1^{n(k_n)}\\ &= \sum_{k_1=0}^{2}\sum_{k_2=0}^{2-k_1}...\sum_{k_{n-1}=0}^{n-\Sigma_{j=1}^{n-2}k_j}\alpha(k_1,...,k_{n-1})\,H_1^{1(k_1)}...H_1^{n(k_n)}\ , \end{aligned}\tag{C.18}$$

onde

$$k_n = 2-\sum_{j=1}^{n-1}k_j \quad\Rightarrow\quad \sum_{j=1}^{n}k_j = 2\ . \tag{C.19}$$

Voltaremos às variáveis originais

$$\frac{\partial^2}{\partial s_1^2}T_n \quad\to\quad \partial^2 T_n \mathrel{\hat{=}} T_n^{(2)}\ . \tag{C.20}$$

Como

$$\frac{\partial^2}{\partial s_1^2}[H_1^1...H_1^n] = \sum_{k_1...k_{n-1}}\alpha(k_1,...,k_{n-1})\,H_1^{1(k_1)}...H_1^{n(k_n)} \tag{C.21}$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial s_1^2} = \sum_{a,b=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t_a}\frac{\partial}{\partial t_b}\ , \tag{C.22}$$

então, de (C.18), temos

$$\frac{\partial^2}{\partial s_1^2}[H_1^1...H_1^n] = \sum_{j_1...j_{n-1}}\alpha(k_1,...,k_{n-1})\,H_1^{(j_1)}(t_1,...)...H_1^{(j_n)}(t_n,...)\ , \tag{C.23}$$

onde o índice $j_r = 0,1,2$ denota a derivada de H_1^r com relaç ão a t_r, uma vez que H_1^r só depende de t_r. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial s_1^2}[H_1^1...H_1^n] &= \sum_{j_1=0}^{2}...\sum_{j_{n-1}=0}^{2-\Sigma_{i=1}^{n-2}j_i}\frac{2!}{j_1!...j_{n-1}!}\frac{1}{[2-(j_1+...+j_{n-1})]!}\cdot\\ &\cdot H_1^{(j_1)}(t_1,...)...H_1^{(j_n)}(t_n,...)\end{aligned}\tag{C.24}$$

$$\text{com}\qquad 2 = \sum_{i=1}^{n}j_i\ .$$

Portanto, $T_n^{(2)} = \partial^2 T_n$ fica expressa por

$$\begin{aligned}T_n^{(2)} &= -\frac{(-i)^n}{(2\pi)^{3n/2}}\sum_{j_1=0}^{2}\sum_{j_2=0}^{2-j_1}\sum_{j_{n-1}=0}^{2-\Sigma_{j=1}^{n-2}k_j}\frac{2!}{j_1!...j_{n-1}!}\frac{1}{[2-(j_1+...+j_{n-1})]!}\cdot\\ &\cdot\int d^3p_1...\int d^3p_{n-1}\,P_+(\mathbf{p})\,H_1^{j_1}(t_1,\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)\,\mathrm{e}^{-i(t_1-t_2)H_0(\mathbf{p}_1)}...\\ &...\mathrm{e}^{-i(t_{n-1}-t_n)H_0(\mathbf{p}_{n-1})H_1^{j_n}(t_n,\mathbf{p}_{n-1}-\mathbf{q})\,P_-(\mathbf{q})}\ .\end{aligned}\tag{C.25}$$

Na expressão (C.24) existem n termos em segundas derivadas; $(n-1)$ termos com primeira derivada em $H_1(t_1,...)$, multiplicados pelo fator 2; $(n-2)$ termos com primeira derivada em $H_1(t_2,...)$, com fator $2;...;$ 2 termos com primeira derivada em $H_1(t_{n-2},...)$, com fator 2; e 1 termo com primeira derivada em $H_1(t_{n-1},...)$, com fator 2. Então teremos N termos, onde

$$\begin{aligned} N &= n + 2(n-1) + 2(n-2) + ... + 2(2) + 2(1) \\ &= 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] - n = n^2 \ . \end{aligned}$$

Seguindo na avaliação de $S_{+-}^{(n)}$, primeiro estimamos a matriz "kernel" de (C.25) na norma $\mathbb{C}^4$, a qual denotamos $| \quad |$. Como os operadores de projeção obedecem

$$|P_\pm| \leq 1, \tag{C.26}$$

temos

$$\begin{aligned} \left|\frac{\mathrm{e}^{it_1E(\mathbf{p})+it_nE(\mathbf{q})}}{[E(\mathbf{p})+E(\mathbf{q})]^2}T_n^2\right| &= \left|\frac{\mathrm{e}^{it_1E(\mathbf{p})+it_nE(\mathbf{q})}}{[E(\mathbf{p})+E(\mathbf{q})]^2}\right|\left|T_n^2\right| = \\ &= \frac{1}{|\,[E(\mathbf{p})+E(\mathbf{q})]^2\,|}\left|T_n^2\right| \leq \frac{1}{E^2(\mathbf{p})}\left|T_n^2\right| = \\ &\leq \frac{1}{E^2(\mathbf{p})}\left|\frac{-i^n}{(2\pi)^{3n/2}}\right|\sum_{j_1\cdots j_n}\int d^3p_1...d^3p_{n-1}|P_+(\mathbf{p})|\cdot \\ &\quad \cdot|H_1^{j_1}(t_1,\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)|\cdot|\mathrm{e}^{-i(t_1-t_2)H_0(\mathbf{p}_1)}|...|\mathrm{e}^{-i(t_{n-1}-t_n)H_0(\mathbf{p}_{n-1})}|\cdot \\ &\quad \cdot|H_1^{j_n}(t_n,\mathbf{p}_{n-1}-\mathbf{q})||P_-(\mathbf{q})| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}E^2(\mathbf{p})}\sum_{j_1\cdots j_n}\int d^3p_1...d^3p_{n-1}\,|H_1^{j_1}(t_1,\mathbf{p}-\mathbf{p}_1)|\cdot \\ &\quad \cdot|H_1^{j_2}(t_2,\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)|...|H_1^{j_n}(t_n,\mathbf{p}_{n-1}-\mathbf{q})| \ . \end{aligned} \tag{C.27}$$

Introduzindo novas variáveis de integração

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{q} \ \Rightarrow \ \mathbf{p}_i = \mathbf{k}_i + \mathbf{q} \ , \tag{C.28}$$

a equação (C.27) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \left|\frac{\mathrm{e}^{i(t_1E(\mathbf{p})+t_2E(\mathbf{q})}}{[E(\mathbf{p})+E(\mathbf{q})]^2}T_n^2\right| &\leq \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}E^2(\mathbf{p})}\sum_{j_1\cdots j_n}\int d^3k_1...d^3k_{n-1}\cdot \\ &\quad \cdot|H_1^{j_1}(t_1,\mathbf{p}-\mathbf{q}-\mathbf{k}_1)|\cdot|H_1^{j_2}(t_2,\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)|... \\ &\quad ...|H_1^{j_n}(t_n,\mathbf{k}_{n-1})| \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}E^2(\mathbf{p})}\sum_{j_1\cdots j_n}\int d^3k_1...d^3k_{n-2}\cdot \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \cdot|H_1^{j_1}(t_1,\mathbf{p}-\mathbf{q}-\mathbf{k}_1)|\cdot|H_1^{j_2}(t_2,\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)|... \\
& ...\int d^3k_{n-1}|H_1^{j_{n-1}}(t,\mathbf{k}_{n-1}-\mathbf{k}_{n-2})||H_1^{j_n}(t_n,\mathbf{k}_{n-1})| \\
= \;& \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}E^2(\mathbf{p})}\sum_{j_1\cdots j_n}\int d^3k_1...d^3k_{n-2}\cdot \\
& |H_1^{j_1}(t_1,\mathbf{p}-\mathbf{q}-\mathbf{k}_1)|\cdot|H_1^{j_2}(t_2,\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)|... \\
& ...\left(|H_1^{j_{n-1}}(t_1)|*|H_1^{j_n}(t_n)|\right)(\mathbf{k}_3) \\
& \vdots \\
= \;& \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}E^2(\mathbf{p})}\sum_{j_1\cdots j_n}\left(|H_1^{j_1}(t_1)|*|H_1^{j_2}(t_2)|*...\right. \\
& \left. ...*|H_1^{j_n}(t_n)|\right)(\mathbf{p}-\mathbf{q})\ ,
\end{aligned}
\tag{C.29}
$$

onde os asteriscos significam convoluções. Denotando o operador integral (C.14) pela forma sintética

$$
S_{+-}^{(n)}(\mathbf{p},\mathbf{q})=\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}dt_2...\int_{-\infty}^{t_{n-1}}dt_n\ \left[S_n^{(2)}\right]\ , \tag{C.30}
$$

podemos estimar a norma de Hilbert-Schmidt de $S_n^{(2)}$

$$
\begin{aligned}
\left\|S_n^{(2)}\right\|_{HS}^2 \;&\hat{=}\; \int d^3p\int d^3q\left|S_n^{(2)}(\mathbf{p},\mathbf{q})\right|^2\le \\
&\le \int d^3pd^3q\left|\frac{1}{(2\pi)^{3n/2}E^2(\mathbf{p})}\sum_{j_1\cdots j_n}\left(|H_1^{j_1}(t_1)|*...*|H_1^{j_n}(t_n)|\right)(\mathbf{p},\mathbf{q})\right|^2= \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3n}}\int\frac{d^3p}{E^4(\mathbf{p})}d^3q'\left|\sum_{j_1\cdots j_n}\left(|H_1^{j_1}(t_1)|*...*|H_1^{j_n}(t_n)|\right)(\mathbf{q}')\right|^2\ ,
\end{aligned}
\tag{C.31}
$$

onde usamos (C.29). A integral

$$
\int\frac{d^3p}{E^4(\mathbf{p})}=4\pi\int_0^{\infty}dp\frac{\mathbf{p}^2}{(p^2+m^2)^2}\ , \tag{C.32}
$$

pode ser calculada usando a fórmula [65]

$$
\int_0^{\infty}\frac{x^{\mu-1}dx}{(qx^{\nu}+p)^{n+1}}=\frac{1}{\nu p^{n+1}}\left(\frac{p}{q}\right)^{\mu/\nu}\frac{\Gamma(\mu/\nu)\,\Gamma(1+n-\mu/\nu)}{\Gamma(1+n)}\quad(n+1>\mu/\nu>0)\ , \tag{C.33}
$$

resultando no valor finito

$$
\int\frac{d^3p}{E^4(\mathbf{p})}=\frac{\pi^2}{m}\ . \tag{C.34}
$$

O segundo fator em (C.31) é uma norma L^2

$$
\left\|\sum_{j_1\cdots j_n}|H_1^{j_1}|*|H_1^{j_2}|*...*|H_1^{j_n}|\right\|_2\le\sum_{j_1\cdots j_n}\left\||H_1^{j_1}|*|H_1^{j_2}|*...*|H_1^{j_n}|\right\|_2\ , \tag{C.35}
$$

na qual as convoluções são estimadas pela desigualdade de Young

$$\|f * g\|_2 \leq \|f\|_1 \, \|g\|_2 \tag{C.36}$$

em termos das normas L^2 e L^1, resultando em

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j_1 \cdots j_n} |H_1^{j_1}| * ... * |H_1^{j_n}| \right\|_2 &\leq \sum_{j_1 \cdots j_n} \| \, H_1^{j_1} \, \|_1 \left\| \sum_{j_1 \cdots j_n} |H_1^{j_1}| * ... * |H_1^{j_n}| \right\|_2 \leq ... \\ &\leq \sum_{j_1 \cdots j_n} \| \, H_1^{j_1} \, \|_1 ... \| \, H_1^{j_{n-1}} \, \|_1 \| \, H_1^{j_n} \, \|_2 \quad . \end{aligned} \tag{C.37}$$

Assumindo que o potencial é de alcance finito

$$H_1 = e(V - \vec{\alpha} \cdot \mathbf{A})(t, \mathbf{p}) \tag{C.38}$$

é duas vezes diferenciável em t, e

$$\| \, H_1^j \, \|_p \leq F(t) \, , \qquad \text{para} \quad p = 1, 2 \quad , \tag{C.39}$$

onde $j = 0, 1, 2$ indicam derivadas temporais, então $F(t)$ decresce a zero para $t \to \pm\infty$, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) \, dt = b < \infty \quad . \tag{C.40}$$

Portanto, de (C.31), (C.37) e (C.39), temos

$$\left\| S_n^{(2)}(t_1, ..., t_n) \right\|_{HS}^2 \leq \frac{1}{(2\pi)^{3n}} \frac{\pi^2}{m} \left[n^2 F(t_1) \, F(t_2) ... F(t_n) \right]^2 \quad . \tag{C.41}$$

Com o resultado (C.41), a norma de Hilbert-Schmidt de (C.14) fica

$$\begin{aligned} \left\| S_{+-}^n \right\|_{HS} &\leq \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 ... \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \left\| S_n^{(2)}(t_1, ..., t_n) \right\|_{HS} \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}} \frac{\pi}{\sqrt{m}} \, n^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 ... \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n F(t_1) . F(t_2) ... F(t_n) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}} \frac{\pi}{\sqrt{m}} \, n^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 ... F(t_1) \, F(t_2) ... \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n F(t_n) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}} \frac{\pi}{\sqrt{m}} \, n^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 ... F(t_1) \, F(t_2) ... F(t_{n-1}) \, F(t_n) |_{-\infty}^{t_{n-1}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}} \frac{\pi}{m^{1/2}} \, n^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 F(t_1) \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 F(t_2) ... \int_{-\infty}^{t_{n-2}} dt_{n-1} F^2(t_{n-1}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}} \frac{\pi}{m^{1/2}} \, n^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 F(t_1) \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 F(t_2) ... \int_{-\infty}^{t-n-3} dt_{n-2} F^3(t_{n-2}) \frac{1}{2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}} \frac{\pi}{m^{1/2}}\, n^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 F^n(t_1) \frac{1}{(n-1)!} \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}} \frac{\pi}{m^{1/2}}\, n^2 \frac{1}{(n-1)!} \frac{b^n}{n} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3n/2}} \frac{\pi}{m^{1/2}}\, n^2 \frac{b^n}{n!} \quad . \qquad \text{(C.42)}
\end{aligned}
$$

Devido ao fatorial, a soma sobre n converge para qualquer valor de b, então, para a norma de Hilbert-Schmidt da série perturbativa (C.30) obtemos

$$
\begin{aligned}
\|S_{+-}\|_{HS} &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} S_{+-}^{(n)} \right\|_{HS} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| S_{+-}^{(n)} \right\|_{HS} \\
&\leq \frac{\pi}{m^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{(2\pi)^{3/2}} \right)^n \frac{n^2}{n!} < \infty \ . \qquad \text{(C.43)}
\end{aligned}
$$

Portanto, supondo o potencial $A^\mu(t, \mathbf{p})$ duas vezes diferenciável em t e

$$
\left\| \frac{\partial^j}{\partial t^j} A^\mu(t, \mathbf{p}) \right\|_q \leq F(t) \qquad \text{(C.44)}
$$

para $j = 0, 1, 2$ e $q = 1, 2$ com

$$
\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, dt < \infty \ \ , \qquad \text{(C.45)}
$$

$S_{+-}\,[A]$ é um operador de Hilbert-Schmidt e a série perturbativa para S_{+-} converge na norma de Hilbert-Schmidt.

A mesma demontração vale para potenciais contínuos e duas vezes diferenciáveis parcialmente, sendo que a primeira derivada pode ter um número finito de descontinuidades.

Apêndice D

Condições de Causalidade e a Fase Causal

O *princípio de causalidade,* aquele que diz que todo *efeito* tem uma *causa*, é um dos princípios básicos que norteiam o estabelecimento das teorias físicas. Sua definição se baseia na idéia de que os fenômenos físicos são interdependentes e que esta interdependência pode ser apresentada na forma de leis físicas, as quais estabelecem um *ordenamento espaço-temporal* dos eventos. Isto significa que é possível localizar e destinguir espaço-temporalmente a causa e o efeito, e que existe uma conexão entre eles (interação) no espaço-tempo, a qual pode ser chamada de *condição de interação local.* Este princípio leva ao estabelecimento das *condições de causalidade* para cada problema, as quais são matematicamente bem definidas para cada caso. Apesar do princípio de causalidade localizar temporalmente a causa e o efeito, as condições de causalidade podem ser formuladas tanto para sistemas que contêm uma direção preferida no tempo, quanto para aqueles que são invariantes sob reversão temporal.

As *condições de causalidade* são expressas por uma *relação de dispersão,* que é uma relação integral entre a parte real e a parte imaginária de uma quantidade dependente da freqüência (ou da energia). Estas relações são muito gerais e não dependem dos detalhes de cada problema específico. Portanto, para derivar uma relação de dispersão não é necessário conhecer os detalhes da interação, pois ela expressa somente suas propriedades mais gerais. Por exemplo, a relação de dispersão para a amplitude de espalhamento é equivalente a afirmar que uma onda espalhada não sai do centro espalhador antes da onda incidente atingí-lo; ou, no caso da suscetibilidade magnética, ela nos diz que a magnetização de uma parte do material magnético não aparece antes que o campo magnético seja aplicado.

A condição de causalidade para os processos de espalhamento, à temperatura zero, descritos pelo operador S no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1$, pode ser expressa pela fatoração

$$S\,[A] = S_2\,S_1\ , \qquad S_j \,\hat{=}\, S\,[A_j]\ , \tag{D.1}$$

onde consideramos o potencial eletromagnético externo

$$A^\mu(x) = A_1^\mu(x) + A_2^\mu(x) \ , \tag{D.2}$$

tal que

$$\begin{aligned} \mathrm{supp} A_1 &\subset (-\infty, r] \ , \\ \mathrm{supp} A_2 &\subset [r, +\infty) \ . \end{aligned} \tag{D.3}$$

As definições (D.2), (D.3) significam que a interação é inicialmente estabelecida pelo potencial A_1, e o potencial A_2 passa a ser diferente de zero a partir do momento em que A_1 deixa de agir.

O operador espalhamento $\underline{\mathbf{S}}$ no espaço de Fock, devido a (3.109) admite uma fatoração análoga à (D.1), que leva à *condição de causalidade global*

$$(\Omega\,, \underline{\mathbf{S}}\,\Omega) = (\Omega\,, \underline{\mathbf{S}}_2\,\underline{\mathbf{S}}_1\Omega) \ , \tag{D.4}$$

a qual implica na condição sobre o operador espalhamento

$$\underline{\mathbf{S}}\,[A_1 + A_2] = \underline{\mathbf{S}}[A_1]\,\underline{\mathbf{S}}[A_2] \ . \tag{D.5}$$

Desta condição podemos derivar a *condição de causalidade local* [66, 67]

$$\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)}\left(\underline{\mathbf{S}}\,\Omega, \frac{\delta \underline{\mathbf{S}}}{\delta A_\mu(x)}\Omega\right) = 0 \ , \qquad \text{para} \ \ x^0 < y^0 \ . \tag{D.6}$$

No *Capítulo 2* definimos o operador espalhamento $\underline{\mathbf{S}}$ no espaço de Fock, a menos de uma fase $\mathrm{e}^{i\varphi[A]}$ dependente do potencial eletromagnético externo $A^\mu(x)$. Para que a condição (D.6) seja satisfeita, o potencial A deverá ser escolhido convenientemente. Escrevendo

$$\underline{\mathbf{S}} = \mathrm{e}^{i\varphi}\overline{\underline{\mathbf{S}}} \ , \tag{D.7}$$

onde $\overline{\underline{\mathbf{S}}}$ é o operador unitário definido em (3.117), a condição de causalidade local (D.6) resulta na equação que define a *fase causal* φ

$$\frac{\delta^2 \varphi}{\delta A_\mu(y)\delta A_\nu(x)} = i\frac{\delta}{\delta A_\mu(y)}\left(\overline{\underline{\mathbf{S}}}\,\Omega, \frac{\delta \overline{\underline{\mathbf{S}}}}{\delta A_\nu(x)}\Omega\right) \ . \tag{D.8}$$

Em mais baixa ordem em teoria de pertubação, esta fase causal fica dada por

$$\varphi[A] = -\left(\frac{e}{4\pi}\right)^2 \int d^4k\, A_\mu^*(k)\left(\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} - g^{\mu\nu}\right) Q(k)\, A_\nu(k) \ , \tag{D.9}$$

com

$$Q(k) \mathrel{\hat{=}} -\frac{2}{3}k^4\, \mathsf{P}\int_{4m^2}^{\infty} ds \frac{s + 2m^2}{s^2(s - k^2)}\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \ , \tag{D.10}$$

a qual é real. Na expressão acima, P indica que deve ser tomado o valor principal da integral. Então, o operador $\underline{\mathbf{S}}$ no espaço de Fock, definido por (3.117) e (D.7) fica completamente determinado.

A amplitude vácuo-vácuo é obtida através do valor esperado

$$\begin{aligned}(\Omega, \underline{\mathbf{S}}\,\Omega) &= C\,\mathrm{e}^{i\varphi}(\Omega, \mathrm{e}^{A_1 b^\dagger d^\dagger}\Omega) \\ &= C\,\mathrm{e}^{i\varphi}\ ,\end{aligned} \tag{D.11}$$

cujo quadrado do valor absoluto,

$$|(\Omega, \underline{\mathbf{S}}\,\Omega)|^2 = C^2 = 1 - P\ , \tag{D.12}$$

deve ser igual à unidade menos a probabilidade de produção de pares. Escrevendo a constante C como uma exponencial, podemos combiná-la com a fase causal (D.9), resultando em

$$C\,\mathrm{e}^{i\varphi} = \exp\left\{-i\left(\frac{e}{4\pi}\right)^2 \int d^4k A^*_\mu(k)\left(\frac{k^\mu k^\nu}{k^2} - g^{\mu\nu}\right)\Pi(k)\,A_\nu(k) + \mathcal{O}(A^4)\right\}\ , \tag{D.13}$$

onde o $\Pi(k)$ está relacionado com o tensor de polarização do vácuo [56].

Para os processos de espalhamento à temperatura finita, descritos pelo operador $\widehat{\underline{\mathbf{S}}}$, teremos a *condição de causalidade global* dada por*

$$(\Omega(\beta)\,, \widehat{\underline{\mathbf{S}}}\,\Omega(\beta)) = (\Omega(\beta)\,, \widehat{\underline{\mathbf{S}}}_2\,\widehat{\underline{\mathbf{S}}}_1\Omega(\beta))\ . \tag{D.14}$$

Analogamente a (D.6), para a *condição de causalidade local* à temperatura finita obtemos

$$\frac{\delta}{\delta A_\nu(y)}\left(\widehat{\underline{\mathbf{S}}}\,\Omega(\beta)\,, \frac{\delta\widehat{\underline{\mathbf{S}}}}{\delta A_\mu(x)}\Omega(\beta)\right) = 0\ , \qquad \text{para}\ \ x^0 < y^0\ , \tag{D.15}$$

e, portanto, a *fase causal térmica*† φ fica definida por

$$\frac{\delta^2\varphi}{\delta A_\mu(y)\delta A_\nu(x)} = i\frac{\delta}{\delta A_\mu(y)}\left(\widehat{\widehat{\underline{\mathbf{S}}}}\,\Omega(\beta)\,, \frac{\delta\widehat{\widehat{\underline{\mathbf{S}}}}}{\delta A_\nu(x)}\Omega(\beta)\right)\ , \tag{D.16}$$

com

$$\underline{\mathbf{S}}\ =\ \mathrm{e}^{i\varphi}\widehat{\widehat{\underline{\mathbf{S}}}} = C\widetilde{C}\,\mathrm{e}^{i\varphi}\,\mathrm{e}^{B^\dagger \mathbf{A}_1 \bar{D}^\dagger} : \mathrm{e}^{B^\dagger(\mathbf{A}_2 - \tau_3)B} \colon : \mathrm{e}^{\bar{D}(\tau_3 - \mathbf{A}_3)\bar{D}^\dagger} \colon \mathrm{e}^{\bar{D}\mathbf{A}_4 B}\ , \tag{D.17}$$

onde $\widehat{\widehat{\underline{\mathbf{S}}}}$ é o operador unitário (5.82). Assim como à temperatura zero, a fase causal φ estará associada à amplitude vácuo térmico-vácuo térmico, através do valor esperado

$$(\Omega(\beta)\,, \widehat{\underline{\mathbf{S}}}\,\Omega(\beta))\ . \tag{D.18}$$

---

*Estamos usando $\Omega(\beta) = |0(\beta) >$ para denotar o vácuo térmico.

†A expressão *térmica* significa apenas que a fase causal φ está associada a processos à temperatura finita.

Referências

[1] T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **14**(1955)351.

[2] H. Ezawa, Y. Tomozawa, H. Umezawa, N. Cimento **5**(1957)810.

[3] J. Schwinger, J. Math. Phys. **2**(1961)407.

[4] L.V. Keldysh, Sov. Phys. JETP **20**(1965)1018.

[5] E.S. Fradkin, Proc. Lebedev Inst. **29**(1965)6.

[6] A.A. Abrikosov, L. Gor'kov, I. Dyzaloshinski, *"Method of Quantum Field Theory in Statistical Physics"*, Oxford, Pergamon, 1965.

[7] R.A. Craig, J. Math. Phys. **9**(1968)605.

[8] R. Mills, *"Propagators for Many-Particle Systems"* , NY, Gordon and Breach, 1969.

[9] C. Bernard, Phys. Rev. D **9**(1974)3312.

[10] L. Dolan, R. Jackiw, Phys. Rev. D **9**(1974)3320.

[11] S. Weinberg, Phys. Rev. D **9**(1974)3357.

[12] L. Leplae, H. Umezawa, F. Mancini, Phys. Rev. C **10**(1974)151.

[13] Y. Takahashi, H. Umezawa, Collect. Phenom. 2(1975)55 [reeditado em Int. J. Mod. Phys. B **10**(1996)1755].

[14] H. Matsumoto, Fortschr. Phys. **25**(1977)1.

[15] I. Ojima, Ann. Phys. (NY) **137**(1981)1.

[16] H. Umezawa, H. Matsumoto, M. Tachiki, *"Thermo Field Dynamics and Condensed States"*, North-Holland, Amsterdan, 1982.

[17] H. Matsumoto, Y. Nakano, H. Umezawa, F. Mancini, M. Marinaro, Prog. Theor. Phys. **70**(1983)599.

[18] H. Matsumoto, Y. Nakano, H. Umezawa, J. Math. Phys. **25**(1984)3076.

[19] A.J. Niemi, G.W. Semenoff, Ann. Phys. **152**(1984)105.

[20] M. Le Bellac, "*Thermal Fields Theory*", Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[21] H. Umezawa, *"Advanced Field Theory: Micro, Macro, and Thermal Physics"*, American Inst. of Physics, NY, 1993.

[22] H. Umezawa, Prog. Theor. Supl. **80**(1985)126.

[23] H. Matsumoto, em *"Progress in Quantum Field Theory"*, ed. H.Ezawa and S.Kamefuchi, North-Holland, Amsterdan, 1986.

[24] H. Matsumoto, Y. Nakano, H. Umezawa, Phys. Rev. D **31**(1985)429.

[25] T. Arimitsu, H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **74**(1985)429.

[26] M. Revzen, Phys. Rev. E **49**(1994)2688.

[27] "*Physics Essays"*, edição especial em homenagem a Hiromi Umezawa, ed. E.Panaralla e R.Kobes, vol.**9**(4), 1996.

[28] H. Matsumoto, H. Umezawa, Phys. Lett. A **103**(1984)405.

[29] H. Chu, H. Umezawa, Phys. Lett. A **177**(1993)385.

[30] H. Chu, H. Umezawa, Int. J. Mod. Phys. A **9**(1994)2363.

[31] H. Matsumoto, H. Umezawa, Phys. Rev. B **31**(1985)4433.

[32] A.A. Abrikosov, Mod. Phys. Lett. A **5**(1990)2183.

[33] A.E. Santana, F.C. Khanna, Phys. Lett. A **203**(1995)68.

[34] A.E. Santana, F.C. Khanna, H. Chu, Y.C. Chang, Ann. Phys. **249**(1996)481.

[35] A.E. Santana, A.M. Neto, J.D.M.Vianna, F.C. Khanna, Int. J. Theor. Phys. **38**(1999)641.

[36] A.M. Neto, J.D.M. Vianna, A.E. Santana, F.C. Khanna, Phys. Essays **9**(1996)596.

[37] H. Matsumoto, I. Ojima, H. Umezawa, Ann. Phys. **152**(1984)348.

[38] H. Matsumoto, Y. Nakano, H. Umezawa, Phys. Rev. D **29**(1984)1116.

[39] H. Matsumoto, Y. Nakano, H. Umezawa, Phys. Rev. D **28**(1983)1931.

[40] H. Matsumoto, Z. Phys. C **34**(1987)335.

[41] J.P. Whitehead, H. Matsumoto, H. Umezawa, Phys. Rev. B **29**(1984)423.

[42] T.S. Evans, I. Hardman, H. Umezawa, Y. Yamanaka, J. Math. Phys. **33**(1992)370.

[43] T. Arimitsu, H. Umezawa, Y. Yamanaka, J. Math. Phys. **28**(1987)2741.

[44] E. Ahmed, Int. J. Theor. Phys. **28**(1989)1351.

[45] Y. Yamanaka, H. Umezawa, K. Nakamura, T. Arimitsu, Int. J. Mod. Phys. A **9**(1994)1153.

[46] T. Arimitsu, Phys. Essays **9**(1996)591.

[47] T.S. Evans, I. Hardman, H. Umezawa, Y. Yamanaka, Fortschr. Phys. **41**(1993)151.

[48] H. Matsumoto, H. Umezawa, J.P. Whitehead, Prog. Theor. Phys. **76**(1986)260.

[49] H. Matsumoto, Prog. Theor. Phys. **80**(1988)57.

[50] G.W. Semenoff, H. Umezawa, Nucl. Phys. B **220**(1983)196.

[51] T. Arimitsu, J. Pradko, H. Umezawa, Physica A **135**(1986)487.

[52] H. Henning, H. Umezawa, Nucl. Phys. B **417**(1994)463.

[53] Ademir, manuscritos *"An Introduction to Thermofield Dynamics"* 2002.

[54] G.J. Milburn, J. Phys. A **17**(1984)737.

[55] K.Soutome, Z. Phys. C **40**(1988)479.

[56] G. Scharf, *"Finite Quantum Electrodynamics"*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[57] H.P. Seipp, Helv. Phys. Acta **55**(1982)1.

[58] G. Scharf, N. Cimento A **74**(1983)302.

[59] M. Klaus, G. Scharf, Helv. Phys. Acta **50**(1977)779.

[60] M. Klaus, G. Scharf, Helv. Phys. Acta **50**(1977)803.

[61] H. Fierz, G. Scharf, Helv. Phys. Acta **52**(1979)437.

[62] G. Scharf, H.P. Seipp, Phys. Lett. B **108**(1982)196.

[63] G. Scharf, W.F. Wreszinski, N. Cimento A **93**(1986)1.

[64] L. Mandel, E. Wolf, *"Optical Coherence and Quantum Optics"*, Cambridge, London, 1995.

[65] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *"Table of Integrals, Series, and Products"*, Academic Press, NY, 1965.

[66] E.C.G. Stueckelberg, D. Rivier, Helv. Phys. Acta **23**(1950)215.

[67] N.N. Bogoliubov, B.V. Medvedev, M.K. Polivanov, *"Problems in the Theory of Dispersion Relations"*, Fizmatgiz, Moscow, 1958, traduzido em Fortschr. Phys. **6**(1958)169.

[68] Hebe Queiroz, J.L.Tomazelli, *"O Problema da Unitariedade do Operador S na Teoria de Duffin-Kemmer-Petiau para s-QED"*, XXII Enc. Nac. d Física de Partículas e Campos,S. Lourenço, MG, 2001.