

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA – UNESP
Faculdade de Engenharia e Ciências - Campus de Guaratinguetá

MARILIA FERNANDES VIDILLE

**IMPLEMENTAÇÃO DE UM ALGORITMO DO MÉTODO DE MULTIPÓLOS
RÁPIDOS PARA REDUZIR O TEMPO COMPUTACIONAL ASSOCIADO A
SIMULAÇÕES NUMÉRICAS LAGRANGIANAS DESTINADAS AO ESTUDO DE
ESCOAMENTOS EXTERNOS**

Guaratinguetá - SP
2025



MARILIA FERNANDES VIDILLE

**IMPLEMENTAÇÃO DE UM ALGORITMO DO MÉTODO DE MULTIPOLOS
RÁPIDOS PARA REDUZIR O TEMPO COMPUTACIONAL ASSOCIADO A
SIMULAÇÕES NUMÉRICAS LAGRANGIANAS DESTINADAS AO ESTUDO DE
ESCOAMENTOS EXTERNOS**

Dissertação apresentada à Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia e Ciências, Guaratinguetá, para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Transmissão e Conversão de Energia

Orientador(a): Prof. Dr. Alex Mendonça Bimbato

Guaratinguetá - SP

2025

V653i	<p>Vidille, Marilia Fernandes</p> <p>Implementação de um algoritmo do método de multipolos rápidos para reduzir o tempo computacional associado a simulações numéricas lagrangianas destinadas ao estudo de escoamentos externos / Marilia Fernandes Vidille - Guaratinguetá, 2025.</p> <p>172 f : il.</p> <p>Bibliografia: f. 134-142</p> <p>Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2025.</p> <p>Orientador: Prof. Dr. Alex Mendonça Bimbato</p> <p>1. Movimento turbulento. 2. Mecânica dos fluidos 3. Métodos de simulação. I. Título.</p> <p>CDU 532(043)</p>
-------	--

IMPACTO POTENCIAL DESTA PESQUISA

Essa pesquisa tem por objetivo permitir análises mais completas de escoamentos ao redor de corpos, sejam estes esbeltos ou rombudos, utilizando-se uma abordagem lagrangiana viabilizada pela utilização de um algoritmo acelerador, a fim de reduzir o tempo computacional das simulações. Tal estudo é relevante no aspecto da análise da eficiência energética de turbinas eólicas, construção de equipamentos de voo e plataformas, a fim de reduzir custos e viabilizar novos estudos.

POTENTIAL IMPACT OF THIS RESEARCH

This research aims to enable more complete analyses of flows around bodies, whether slender or blunt, using a Lagrangian approach made possible by the use of an accelerator algorithm, to reduce the computational time of the simulations. This study is relevant in the aspect of analyzing the energy efficiency of wind turbines, construction of flight equipment and platforms, in order to reduce costs and enable new studies.

MARILIA FERNANDES VIDILLE

**IMPLEMENTAÇÃO DE UM ALGORITMO DO MÉTODO DE MULTIPOLOS
RÁPIDOS PARA REDUZIR O TEMPO COMPUTACIONAL ASSOCIADO A
SIMULAÇÕES NUMÉRICAS LAGRANGIANAS DESTINADAS AO ESTUDO DE
ESCOAMENTOS EXTERNOS**

Dissertação apresentada à Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia e Ciências, Guaratinguetá, para obtenção do título de Mestre em Engenharia.

Área de Concentração: Transmissão e Conversão de Energia

Data da defesa: 15/05/2025

Banca Examinadora:

ALEX MENDONCA Assinado de forma digital por
ALEX MENDONCA
BIMBATO:951088 BIMBATO:95108874120
74120 Dados: 2025.05.15 11:55:35
-03'00'

Prof. Dr. Alex Mendonça Bimbato
UNESP – Faculdade de Engenharia e Ciências - Campus de Guaratinguetá

Documento assinado digitalmente
gov.br NELSON MANZANARES FILHO
Data: 15/05/2025 15:29:43-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Nelson Manzanares Filho
UNIFEI – Instituto de Engenharia Mecânica

Documento assinado digitalmente
gov.br THIAGO AVERALDO BIMESTRE
Data: 15/05/2025 15:13:50-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Thiago Averaldo Bimestre
UNESP – Faculdade de Engenharia e Ciências - Campus de Guaratinguetá

Dedico este trabalho a Deus e à minha família,
que são a base para que eu chegasse até aqui.

AGRADECIMENTOS

Escrever os agradecimentos deste trabalho não foi uma tarefa fácil, pois tenho uma grande quantidade de pessoas e fatos a citar. O que eu tenho a agradecer não se refere somente aos três anos que estive no mestrado, mas a muitas coisas, inclusive durante a minha graduação, também nesta universidade, que me fizeram amadurecer e ser uma pessoa diferente do que eu era no primeiro dia em que pisei na FEG, que me recordo como se fosse ontem, porém, já se foram mais de oito anos...

Meu percurso, durante o tempo nesta casa, foi cheio de altos e baixos, de pessoas que, mesmo tendo uma breve passagem nesta jornada, me mostraram outros pontos de vista, novos modos de ver as adversidades e, inclusive, que eu sou uma pessoa extremamente privilegiada por ter uma família que me ama e me apoia, sendo esta a base para que eu chegasse até aqui.

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por ter me dado força e fé, para que, ao longo deste tempo, eu jamais desistisse de chegar onde almejava. Agradeço a Ele também por ter colocado pessoas essenciais em meu caminho, que me ajudaram a enfrentar e superar as minhas dificuldades. Deus colocou tudo o que eu precisava, no momento que eu precisava, para chegar até aqui.

Agradeço à minha mãe, Rosana, que me apoiou e me deu aconchego nos momentos difíceis, que não me deixou desistir jamais e, mais ainda, nunca desistiu de mim, principalmente quando eu era muito criança e não entendia o porquê tinha de estudar. Ela que, durante vários anos do ensino primário, me obrigou a estudar mesmo quando eu não queria, dizendo que não aceitaria uma filha medíocre, com notas que apenas davam para passar de ano raspando, principalmente com todas as oportunidades que eu tinha de estudar em um bom colégio e com o conforto de nossa casa. Hoje eu entendo, mãe, tudo aquilo que você dizia quando eu era criança e isso fez com que eu tomasse gosto pelo estudo, principalmente nos últimos quatro anos de colégio (o último ano do ensino fundamental e todo o ensino médio), o que fez com que eu estudasse incansavelmente, me apaixonasse pelas exatas, passasse no vestibular para engenharia em algumas das melhores universidades do país e escolhesse a FEG para que eu trouxesse o diploma de engenheira e, posteriormente, o título de mestre para casa. Devo agradecer não apenas tudo o que você fez por mim, mãe, mas pelo modo como nos entendemos e preciso dizer que nossa ligação jamais será quebrada, por motivo algum no mundo.

Agradeço ao meu pai, Sérgio, por me mostrar, com exemplos claros, que o estudo é algo que ninguém poderá me tirar. Por ter me dado o melhor que podia para que eu estudasse em um bom colégio, tivesse conforto em casa e, posteriormente, condições para estudar fora de minha

cidade natal. Hoje eu sei, pai, o quanto os pais se sacrificam para dar tudo o que é possível para formar um filho e sei o quanto você valoriza isso, pois fez o mesmo para meus meios-irmãos, Simone e Fábio, dando a eles as melhores oportunidades possíveis para que tivessem uma excelente formação. Serei eternamente grata por tudo o que você e minha mãe me proporcionaram e pelos valores que me deram.

Agradeço ao Rodrigo, que conheci quando ele entrou na FEG, em 2019, ano em que nos tornamos amigos e percebemos que tínhamos muito em comum, uma vez que estudávamos no mesmo colégio, mesmo que lá não tivéssemos nenhum contato. Ele que, durante o mestrado, se tornou meu companheiro, dividiu muitas coisas comigo e me tranquilizou nos momentos adversos dessa jornada. Sem seu apoio, meu bem, durante esses anos, certamente eu não teria chegado até aqui, principalmente porque você me distraía quando tudo estava difícil e mais, me ajudou e apoiou em tudo o que pôde. Sei que você continuará a me ajudar e apoiar, assim como eu procuro fazer com você. Juntos chegaremos mais longe.

Agradeço à minha amiga de infância, Beatriz, que dividiu anos de escola comigo, que guarda meus segredos desde quando éramos pequenas, que divertia e ainda diverte meus dias com seu humor e sua forma de me entender. Que, durante todo o meu tempo de FEG, ouviu minhas angústias e me apoiou para que eu não desistisse, me lembrando sempre que eu seria capaz. Tô, sinto muita saudade de quando estávamos diariamente dividindo uma sala de aula, as mesmas piadas e até os olhares em que entendíamos perfeitamente o que a outra estava pensando sem precisar dizer nada. Você é minha irmã de outra mãe.

Agradeço à minha maior parceira de faculdade, Jaine, que se tornou muito próxima, especialmente nos meus anos de graduação, sendo uma irmã mais velha para mim em Guaratinguetá. Ela, que também ouvia minhas dificuldades, me apoiou muito e, literalmente, cuidou de mim quando dividíamos moradia, nos três primeiros anos de graduação. Sempre me recordo com muito carinho de todas as vezes que cozinávamos juntas (obviamente você cozinhando e eu lavando a louça, como sabe, nunca tive grandes talentos culinários) e de diversos outros momentos em que fomos companhia uma para a outra. Estes foram momentos muito felizes nos meus anos de graduação. Muito obrigada, Jaine, por todo o cuidado de irmã mais velha que você teve comigo neste período. Isso foi essencial para que eu terminasse a FEG e ganhasse certa independência, pois me inspirava em como você dava um jeito e se virava sozinha. Além disso, você passou a ser parte da minha vida também, uma vez que somos próximas até hoje, mesmo você estando na Alemanha e eu no Brasil.

Agradeço à Elisabete e à Paula, que foram duas mãezonas para mim nos momentos difíceis que passei nos últimos meses. Bete e Paulinha, muito obrigada por terem me fortalecido

e me ouvido todas as vezes que precisei. Sem vocês, eu também não teria tido forças para concluir este trabalho.

Agradeço ao pessoal que me aproximei durante o mestrado: Manuel, Junior, Santiago, Bruna e Abigail, que divertiram meus dias e fizeram esses anos passarem mais rápido.

Devo muito à parceria que temos no grupo de pesquisa que envolve a FEG e a UNIFEI. Em primeiro lugar, agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Alex Mendonça Bimbato, que me mostrou o quanto a Mecânica dos Fluidos é interessante, desde o início, quando fui sua aluna na graduação, durante o período que fiz iniciação científica, durante meu trabalho de graduação e, mais ainda, nestes anos de mestrado. Sem sua orientação, apoio e dedicação, seria impossível chegar até aqui. Obrigada por corrigir minuciosamente os meus erros, mesmo que pareça que eu fico brava com suas correções, especialmente nos textos, sei que faz com muito esmero, almejando que eu aprenda e me aprimore como pesquisadora.

Agradeço ao Dr. Paulo Guimarães de Moraes, que conheci durante o período de iniciação científica e me ajudou desde aquela época até o término desse trabalho. Obrigada, Paulo, por todas as muitas horas de ajuda, por todo o tempo que você disponibilizou para me apoiar com as rotinas de programação, a me explicar a física por trás de cada linha de código que estava programada e toda sua paciência e dedicação. Você é extremamente didático e, mesmo que eu não tenha sido, de fato, sua aluna, percebo o talento e vontade que você tem de ensinar e ajudar os demais.

Agradeço ao Prof. Dr. Luiz Antonio Alcântara Pereira que, principalmente durante os seminários que fazemos, traz sugestões de pesquisa e de resolução de problemas que encontramos no caminho, além de materiais de apoio que são essenciais para nossa equipe.

Agradeço ao Gabriel e ao Tiago por nossa parceria, pelo artigo que estamos preparando juntos, pelo apoio e saibam que admiro muito vocês.

Todos os professores que tive ao longo da vida me deixaram marcas e ensinamentos que jamais esquecerei. Em especial, àqueles que mais me marcaram e ajudaram a definir meu destino, eu gostaria de citar três que tive no colégio: a Mariângela Pelligotti, que me deu aulas em 2013, sendo a primeira a me mostrar o quanto a matemática é fascinante, o Gilmar Mignaco e o Marcelo Barão, que me deram aulas nos anos de 2015 e 2016, de matemática e física, respectivamente. Graças a vocês, eu escolhi a engenharia e, mais ainda, compreendi o quanto ser professor é uma tarefa árdua, porém, imagino o quão gratificante é ver seus ensinamentos sendo transmitidos. Com relação à FEG, tive muitos professores que me impulsionaram e me fizeram chegar até aqui. Gostaria de mencionar, especialmente, o Prof. Msc. Fernando Henrique Mayworm de Araújo, que me deu aulas de Sistemas Fluidomecânicos, em 2020, e, além de

lecionar esta disciplina, me ajudou na iniciação científica, que eu desenvolvia na época. Posteriormente, quando entrei no mestrado, viramos colegas de pós-graduação, algumas vezes tomamos café juntos e ele, sempre com conselhos sábios, me acalmou e aliviou minhas angústias, com palavras que tinham o mesmo efeito de um abraço. Sua partida me entristece até hoje, mas guardarei seus conselhos e sinto muito orgulho de ter sido sua aluna e, posteriormente, colega de pós-graduação.

Por fim, eu gostaria de agradecer a esta banca examinadora, pelo tempo de leitura e comentários a respeito dessa dissertação, e a todos os colaboradores da FEG que, diariamente, auxiliam os alunos em suas necessidades.

Essa dissertação contou com o apoio financeiro de agências de pesquisa: CAPES, código de financiamento: 88887.690941/2022-00; FAPESP, número do processo: 2022/03630-4; CNPq, número do processo: 404539/2023-8.

“Eu só queria ter do mato um gosto de framboesa
Para correr entre os canteiros
E esconder minha tristeza
Eu ainda sou bem moço para tanta tristeza
Deixemos de coisa, cuidemos da vida
Pois, senão chega a morte ou coisa parecida
E nos arrasta moço sem ter visto a vida.”

— Fagner, *Canteiros*

RESUMO

Este trabalho apresenta a formulação matemática referente ao escoamento turbulento ao redor de corpos esbeltos. A análise do comportamento aerodinâmico de corpos esbeltos é fundamental para o estudo do que ocorre em problemas de engenharia, além da melhora e criação de novos projetos. Neste trabalho, pretende-se estudar os fenômenos físicos que ocorrem no escoamento não permanente, bidimensional e incompressível de um fluido newtoniano que incide sobre um perfil NACA 0012 hidraulicamente liso ou rugoso, analisando diversos ângulos de ataque, a fim de capturar o fenômeno do estol. Para realizar as simulações numéricas, utiliza-se o método de vórtices discretos, em que o escoamento é analisado a partir do acompanhamento, durante todo o tempo de simulação, de vórtices discretos de Lamb, o que evidencia a característica lagrangiana do método de solução. A grande dificuldade da utilização deste método é o tempo computacional elevado, devido à interação vórtice-vórtice, responsável por uma das parcelas do cálculo do campo de velocidades do escoamento. Tal dificuldade se deve à utilização da lei de Biot-Savart no cômputo desta interação. A fim de reduzir a utilização desta lei, o algoritmo acelerador do método de multipolos rápidos é implementado, permitindo a redução do tempo computacional das simulações numéricas. Com a redução do tempo de CPU das simulações numéricas, da ordem de 28%, para as simulações cujo erro numérico no cálculo do campo de velocidades, ao final da simulações, esteve controlado, permitindo bons resultados para coeficientes de sustentação e arrasto médios, foi possível realizá-las com um incremento de tempo menor, bem como analisar o efeito da inclinação do perfil aerodinâmico utilizando intervalos de ângulo de ataque menores, para se encontrar o ponto em que o fenômeno de estol ocorre com maior precisão. O fenômeno de estol, para o perfil, ficou no intervalo de ângulos de ataque de 14° , em que a perda de sustentação é iniciada, e 21° , em que a sustentação começa a ser recuperada, para o caso do perfil hidraulicamente liso. Para os casos de rugosidade superficial, nota-se que a recuperação da sustentação ocorre antes, sendo estes dados encontrados validados com aqueles presentes na literatura.

Palavras-chave: método de vórtices discretos; método de multipolos rápidos; perfis aerodinâmicos; rugosidade superficial; estol.

ABSTRACT

This work presents the mathematical formulation related to turbulent flow around slender bodies. The analysis of the aerodynamic behaviour of slender bodies is fundamental for understanding engineering problems, as well as for the improvement and development of new designs. The aim of this study is to investigate the physical phenomena that occur in the unsteady, two-dimensional, and incompressible flow of a Newtonian fluid over a hydraulically smooth or rough NACA 0012 airfoil, considering various angles of attack to capture the stall phenomenon. To perform the numerical simulations, the discrete vortex method is used, in which the flow is analysed by tracking Lamb's discrete vortices throughout the simulation time, highlighting the Lagrangian nature of the solution method. A major challenge in using this method is its high computational cost due to vortex-vortex interactions, which are part of the velocity field computation and are calculated using the Biot-Savart law. To solve this problem and reduce computational time, the fast multipole method (FMM) accelerator algorithm is implemented, enabling a significant reduction in simulation runtimes. With a CPU time reduction of approximately 28% in simulations where the numerical error in the velocity field computation was controlled, accurate results for average lift and drag coefficients were achieved. This allowed simulations with smaller time steps and finer increments in angle of attack, improving the precision in identifying the stall angle.

For the hydraulically smooth airfoil case, stall was observed in the angle of attack range from 14° , where lift begins to decrease, to 21° , where lift starts to recover. In the cases involving surface roughness, lift recovery occurs earlier, with results validated against existing data in the literature.

Keywords: discrete vortex method; fast multipole method; aerofoils; surface roughness.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Domínio computacional inicial ($n = 0$).	38
Figura 2 – Divisão do domínio computacional quando se utiliza o algoritmo global: (a) $n = 1$; (b) $n = 2$	38
Figura 3 – Divisão do domínio computacional quando se utiliza o algoritmo adaptativo. ...	39
Figura 4 – Esteira desenvolvida a jusante do aerofólio NACA 0012 isolado com ângulo de ataque igual a 21°	49
Figura 5 – Geometria do problema proposto	51
Figura 6 – Volume de controle elementar, infinitesimal e fixo.....	53
Figura 7 – Decomposição da velocidade da partícula fluida em contato com a fronteira sólida nos componentes normal e tangencial	55
Figura 8 – Representação esquemática do problema após o processo de adimensionalização	63
Figura 9 – Singularidades do tipo vórtices distribuídas linearmente sobre os m painéis planos utilizados para discretizar um perfil aerodinâmico qualquer.....	71
Figura 10 – (a) Discretização de um corpo genérico em $m = 4$ painéis planos; (b) Componentes da velocidade induzida em um dos painéis utilizados para discretizar o corpo	72
Figura 11 – Velocidade induzida em um ponto i do domínio computacional por um painel qualquer, p , sobre o qual são distribuídas singularidades do tipo vórtice de maneira linear. .	74
Figura 12 – Geração de vórtices discretos de Lamb nas vizinhanças dos painéis utilizados para discretizar o corpo hidraulicamente liso	79
Figura 13 – Camada limite desenvolvida no escoamento ao redor de corpos: (a) Hidraulicamente lisos; (b) Hidraulicamente rugosos	80
Figura 14 – Representação da rugosidade superficial e os parâmetros envolvidos.....	81
Figura 15 – Influência da rugosidade de superfícies sólidas no desenvolvimento da turbulência no escoamento	82
Figura 16 – Velocidade induzida em um vórtice discreto qualquer, k , por um vórtice discreto j	84
Figura 17 – Distribuição uniforme de partículas no domínio quadrado de lado S : (a) $n = 0$; (b) $n = 3$	86
Figura 18 – Adaptação do modelo de turbulência para ser utilizado no método de vórtices discretos: (a) Definição da coroa circular; (b) Vórtices discretos dentro da coroa circular ..	89

Figura 19 – Estrutura do algoritmo computacional desenvolvido.....	95
Figura 20 – Esteira desenvolvida a jusante do cilindro no instante de tempo $t = 75,00$ da simulação utilizando-se a lei de Biot-Savart (<i>Euler</i> ; $m = 300$; $\Delta t = 0,05$; $\varepsilon = 0,000$; $Re = 1,0 \times 10^5$): (a) Esteira completa; (b) Dois primeiros pares de vórtices.....	98
Figura 21 – Cargas fluidodinâmicas obtidas em função do tempo para a simulação do cilindro liso utilizando-se a lei de Biot-Savart (<i>Euler</i> ; $m = 300$; $\Delta t = 0,05$; $\varepsilon = 0,000$; $Re = 1,0 \times 10^5$)	99
Figura 22 – Coeficiente de pressão médio obtido ao longo da superfície do cilindro liso utilizando-se a lei de Biot-Savart (<i>Euler</i> ; $m = 300$; $\Delta t = 0,05$; $\varepsilon = 0,000$; $Re = 1,0 \times 10^5$)....	100
Figura 23 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para as três simulações do cilindro circular em que se utiliza o método de multipolos variando-se o nível máximo de refinamento (<i>Euler</i> ; $m = 300$; $\Delta t = 0,05$; $\varepsilon = 0,000$; $Re = 1,0 \times 10^5$)	106
Figura 24 – Esteira desenvolvida a jusante do aerofólio NACA 0012 no instante de tempo $t = 75,00$ da simulação utilizando-se a lei de Biot-Savart (<i>Adams-Bashforth</i> ; $m = 200$; $\Delta t = 0,03$; $\varepsilon = 0,000$; $Re = 1,7 \times 10^5$): (a) Esteira completa; (b) Proximidades do corpo	110
Figura 25 – Cargas fluidodinâmicas obtidas em função do tempo para a simulação do aerofólio NACA 0012 liso (<i>Adams-Bashforth</i> ; $m = 200$; $\Delta t = 0,03$; $\varepsilon = 0,000$; $Re = 1,7 \times 10^5$)	111
Figura 26 – Análise do coeficiente de pressão médio para a simulação do aerofólio NACA 0012 liso (<i>Adams-Bashforth</i> ; $m = 200$; $\Delta t = 0,03$; $\varepsilon = 0,000$; $Re = 1,7 \times 10^5$).....	112
Figura 27 – Análise dos coeficientes médios de sustentação e de arrasto no escoamento ao redor do aerofólio liso variando-se os ângulos de ataque (<i>Adams-Bashforth</i> ; $m = 200$; $\Delta t = 0,03$; $\varepsilon = 0,000$; $Re = 1,7 \times 10^5$): (a) Coeficiente de sustentação médio em função do ângulo de ataque do perfil; (b) Coeficiente de arrasto médio em função do ângulo de ataque do perfil	113
Figura 28 – Esteira formada a jusante do perfil e coeficiente médio de pressão para cada um dos ângulos de ataque simulados para o perfil NACA 0012 liso (<i>Adams-Bashforth</i> ; $m = 200$; $\Delta t = 0,03$; $\varepsilon = 0,000$; $Re = 1,7 \times 10^5$): (a) Esteira formada a jusante do perfil aerodinâmico; (b) Coeficiente de pressão médio em função da corda.....	115
Figura 29 – Análise dos coeficientes médios de sustentação e de arrasto no escoamento ao redor do aerofólio rugoso variando-se os ângulos de ataque (<i>Adams-Bashforth</i> ; $m = 200$; $\Delta t = 0,03$; $\varepsilon = 0,002$; $Re = 1,7 \times 10^5$): (a) Coeficiente de sustentação médio; (b) Coeficiente de arrasto médio	125

Figura 30 – Análise dos coeficientes médios de sustentação e de arrasto no escoamento ao redor do aerofólio rugoso variando-se os ângulos de ataque (<i>Adams-Bashforth</i> ; $m = 200$; $\Delta t = 0,03$; $\varepsilon = 0,004$; $Re = 1,7 \times 10^5$): (a) Coeficiente de sustentação médio; (b) Coeficiente de arrasto médio	125
Figura 31 – Análise dos coeficientes médios de sustentação e de arrasto no escoamento ao redor do aerofólio rugoso variando-se os ângulos de ataque (<i>Adams-Bashforth</i> ; $m = 200$; $\Delta t = 0,03$; $\varepsilon = 0,007$; $Re = 1,7 \times 10^5$): (a) Coeficiente de sustentação médio; (b) Coeficiente de arrasto médio	126
Figura 32 – Análise dos coeficientes médios de sustentação e de arrasto no escoamento ao redor do aerofólio rugoso variando-se os ângulos de ataque (<i>Adams-Bashforth</i> ; $m = 200$; $\Delta t = 0,03$; $Re = 1,7 \times 10^5$): (a) Coeficiente de sustentação médio; (b) Coeficiente de arrasto médio	127
Figura 33 – Análise da eficiência do aerofólio NACA 0012 em função do ângulo de ataque e da rugosidade superficial (<i>Adams-Bashforth</i> ; $m = 200$; $\Delta t = 0,03$; $Re = 1,7 \times 10^5$)	128
Figura A.1 – Caixas vizinhas de uma caixa qualquer B do segundo nível de refinamento ..	145
Figura A.2 – Lista de interação da caixa b, filha da caixa B, no terceiro nível de refinamento	145
Figura A.3 – Montagem dos multipolos no nível máximo de refinamento.....	147
Figura A.4 – Translação da influência dos centroides das caixas do terceiro nível de refinamento para o centroide das caixas do segundo nível de refinamento (M2M).....	149
Figura A.5 - Primeiro nível de refinamento ($n = 1$).....	150
Figura A.6 – Interação entre caixas de um mesmo nível de refinamento de acordo com a lista criada na etapa de pré-processamento (M2L).....	151
Figura A.7 – Sequência dos passos M2M (entre caixas do terceiro e do segundo níveis de refinamento), M2L (entre as caixas do segundo nível de refinamento pertencentes à lista de interação) e L2L (entre caixas do segundo e do terceiro níveis de refinamento).....	153
Figura A.8 – Translação da influência do centroide de uma caixa genérica do nível máximo de refinamento para as partículas internas (L2P)	154
Figura B.1 - Esteira desenvolvida a jusante do cilindro no instante de tempo $t = 50,00$ da simulação utilizando-se o algoritmo computacional completo (<i>Euler</i> ; $m = 300$; $\Delta t = 0,05$; $\varepsilon = 0,000$; $Re = 1,0 \times 10^5$): (a) Esteira completa; (b) Dois primeiros pares de vórtices	157
Figura B.2 - Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o nível máximo de refinamento igual a 6 (<i>Euler</i> ; $\Delta t = 0,01$; $n = 6$; $Re = 1,0 \times 10^5$)	159
Figura B.3 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o nível máximo de refinamento igual a 7 (<i>Euler</i> ; $\Delta t = 0,01$; $n = 7$; $Re = 1,0 \times 10^5$)	159

Figura B.4 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o nível máximo de refinamento igual a 8 (<i>Euler</i> ; $\Delta t = 0,01$; $n = 8$; $Re = 1,0 \times 10^5$)	160
Figura B.5 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o nível máximo de refinamento igual a 6 (<i>Euler</i> ; $\Delta t = 0,025$; $n = 6$; $Re = 1,0 \times 10^5$)	160
Figura B.6 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o nível máximo de refinamento igual a 7 (<i>Euler</i> ; $\Delta t = 0,025$; $n = 7$; $Re = 1,0 \times 10^5$)	161
Figura B.7 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o nível máximo de refinamento igual a 8 (<i>Euler</i> ; $\Delta t = 0,025$; $n = 8$; $Re = 1,0 \times 10^5$)	161
Figura B.8 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o nível máximo de refinamento igual a 6 (<i>Euler</i> ; $\Delta t = 0,05$; $n = 6$; $Re = 1,0 \times 10^5$)	162
Figura B.9 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o nível máximo de refinamento igual a 7 (<i>Euler</i> ; $\Delta t = 0,05$; $n = 7$; $Re = 1,0 \times 10^5$)	162
Figura B.10 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o nível máximo de refinamento igual a 8 (<i>Euler</i> ; $\Delta t = 0,05$; $n = 8$; $Re = 1,0 \times 10^5$)	163
Figura B.11 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o número de termos da série de Taylor igual a 25 (<i>Euler</i> ; $\Delta t = 0,01$; $p = 25$; $Re = 1,0 \times 10^5$).....	165
Figura B.12 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o número de termos da série de Taylor igual a 50 (<i>Euler</i> ; $\Delta t = 0,01$; $p = 50$; $Re = 1,0 \times 10^5$).....	165
Figura B.13 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o número de termos da série de Taylor igual a 25 (<i>Euler</i> ; $\Delta t = 0,025$; $p = 25$; $Re = 1,0 \times 10^5$).....	166
Figura B.14 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o número de termos da série de Taylor igual a 50 (<i>Euler</i> ; $\Delta t = 0,025$; $p = 50$; $Re = 1,0 \times 10^5$).....	166
Figura B.15 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o número de termos da série de Taylor igual a 25 (<i>Euler</i> ; $\Delta t = 0,05$; $p = 25$; $Re = 1,0 \times 10^5$).....	167
Figura B.16 – Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o número de termos da série de Taylor igual a 50 (<i>Euler</i> ; $\Delta t = 0,05$; $p = 50$; $Re = 1,0 \times 10^5$).....	167

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros físicos e numéricos empregados nas simulações do cilindro circular	97
Tabela 2 – Coeficientes de arrasto e sustentação médios e número de Strouhal, obtidos na simulação utilizando-se apenas a lei de Biot-Savart, em comparação com os valores encontrados na literatura.....	100
Tabela 3 – Análise do erro no último passo de tempo das simulações e redução do tempo computacional viabilizada pela utilização do algoritmo do método de multipolos rápidos (<i>Euler</i> ; $m = 300$; $\Delta t = 0,05$; $\varepsilon = 0,000$; $Re = 1,0 \times 10^5$).....	104
Tabela 4 – Análise dos coeficientes fluidodinâmicos médios das simulações utilizando o método de multipolos rápidos em comparação com aqueles obtidos com a lei de Biot-Savart. (<i>Euler</i> ; m $= 300$; $\Delta t = 0,05$; $\varepsilon = 0,000$; $Re = 1,0 \times 10^5$).....	105
Tabela 5 – Análise dos coeficientes fluidodinâmicos médios das simulações utilizando método de multipolos rápidos variando-se os níveis máximos de refinamento em comparação com aqueles obtidos com a lei de Biot-Savart. (<i>Euler</i> ; $m = 300$; $\Delta t = 0,05$; $\varepsilon = 0,000$; $Re = 1,0 \times 10^5$)	107
Tabela 6 – Parâmetros físicos e numéricos empregados nas simulações do perfil NACA 0012	109
Tabela 7 – Comparação dos resultados obtidos para o perfil NACA 0012 hidraulicamente liso e com ângulo de ataque nulo para os casos simulados com a lei de Biot-Savart e o método de multipolos rápidos para contabilizar a parcela da interação vórtice-vórtice	129
Tabela B.1 – Parâmetros físicos e numéricos empregados na simulação do cilindro circular com o código computacional completo	156
Tabela B.2 – Parâmetros físicos e numéricos empregados nas simulações considerando-se apenas a etapa advectiva do código computacional	158
Tabela B.3 – Redução do tempo computacional viabilizada pela utilização do algoritmo acelerador do método de multipolos rápidos ($\Delta t = 0,01$)	169
Tabela B.4 – Redução do tempo computacional viabilizada pela utilização do algoritmo acelerador do método de multipolos rápidos ($\Delta t = 0,025$)	170
Tabela B.5 – Redução do tempo computacional viabilizada pela utilização do algoritmo acelerador do método de multipolos rápidos ($\Delta t = 0,05$)	171

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i>
COUP	Matriz de influência
COUPP	Matriz de influência de pressão
DNS	<i>Direct Numerical Simulation</i>
FMM	Método de multipolos rápidos (do inglês, <i>Fast Multipole Method</i>)
LES	<i>Large Eddy Simulation</i>
MVD	Método de Vórtices Discretos
NACA	<i>National Advisory Committee for Aeronautics</i>
N-S	Equações de Navier-Stokes
P.C.M	Princípio de Conservação da Massa
P.C.Q.M.L.	Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento Linear
RANS	<i>Reynolds Averaged Navier-Stokes</i>
RHS	Vetor coluna lado direito
RHSP	Vetor coluna lado direito de pressão

LISTA DE SÍMBOLOS

a_k	Coeficiente do multipolo
b_l	Coeficiente calculado no método de multipolos rápidos
\vec{b}	Raio da semicircunferência utilizada no modelo de rugosidade
c^*	Corda do aerofólio
C_D	Coeficiente de arrasto de atrito em um instante da simulação numérica
C_{Dm}	Coeficiente de arrasto médio
C_{ij}^*	Tensor Cruzado
C_k	Constante de Kolmogorov
C_L	Coeficiente de arrasto de sustentação em um instante da simulação numérica
C_{Lm}	Coeficiente de sustentação médio
C_p	Coeficiente de pressão
E	Erro no cálculo do campo de velocidades do escoamento
E^*	Espectro de energia cinética local
ϵ	Distância para geração de vórtices discretos medida a partir do ponto de controle de um painel utilizado para discretizar o corpo
\bar{F}_2^*	Função estrutura de velocidade de segunda ordem
L_{ij}^*	Tensor de Leonard
m	Número de painéis utilizados para discretizar o corpo
M	Número de Mach
n	Nível máximo de refinamento utilizado no método de multipolos rápidos
n_x	Componente do vetor unitário na direção x
n_y	Componente do vetor unitário na direção y
\vec{n}	Vetor unitário
N	Número de vórtices discretos presentes no interior da coroa circular
NR	Número de pontos rugosos
p	Número de termos da série de Taylor
p^*	Campo de pressões
P'	Número randômico entre 0 e 1

P''	Número randômico entre 0 e 1
pshed	Ponto de desprendimento de vórtices discretos
r	Distância de um ponto extremo de um painel até um ponto qualquer do domínio fluido
Re	Número de Reynolds
Re_c	Número de Reynolds modificado
r_{ext}	Raio externo da coroa circular
r_{int}	Raio interno da coroa circular
r_{kj}	Distância entre dois vórtices discretos quaisquer presentes no domínio
S_1	Superfície do corpo
S_2	Fronteira definida a grandes distâncias do corpo
St	Número de Strouhal
t	Tempo adimensional
\vec{u}	Campo de velocidades
U^*	Velocidade do escoamento incidente
\tilde{Y}	Trabalho específico
z	Distância complexa
Z	Número de vórtices discretos presentes no domínio

Letras gregas

β	Ângulo de ataque do perfil aerodinâmico
β_i	Ângulo de inclinação de um painel genérico do corpo
γ	Densidade de vórtice distribuída sobre um painel
Γ	Intensidade de um vórtice discreto de Lamb
Δr_k	Avanço radial de um vórtice discreto no cálculo da difusão da vorticidade
Δs	Comprimento de um painel plano utilizado para discretizar o corpo
Δt	Incremento de tempo da simulação numérica
Δx_{adv_k}	Deslocamento de um vórtice discreto qualquer, k , na direção x pelo processo de advecção
Δy_{adv_k}	Deslocamento de um vórtice discreto qualquer, k , na direção y pelo processo de advecção

Δx_{dif_k}	Deslocamento de um vórtice discreto qualquer, k, na direção x pelo processo de difusão
Δy_{dif_k}	Deslocamento de um vórtice discreto qualquer, k, na direção y pelo processo de difusão
$\Delta \theta_k$	Avanço circunferencial de um vórtice discreto no cálculo da difusão da vorticidade
ε	Rugosidade superficial relativa
θ	Ângulo de orientação de um ponto extremo do painel até um ponto arbitrário do domínio fluido;
μ	Coefficiente de viscosidade dinâmica
ν	Coefficiente de viscosidade cinemática
ν_t	Coefficiente de viscosidade turbulenta
ρ	Massa específica do fluido
σ_0	Raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb
σ_{oc_k}	Raio do núcleo de um vórtice discreto k modificado pelo modelo de rugosidade
φ	Ângulo de incidência do escoamento
ω	Componente do campo de vorticidades normal ao plano do escoamento
$\vec{\omega}$	Campo de vorticidades
Ω	Domínio fluido

Sobrescritos

* Variáveis dimensionais

Subescritos

x	Componente horizontal;
y	Componente vertical;
∞	Escoamento incidente.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	OBJETIVOS	26
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	28
2.1	O MÉTODO DE VÓRTICES DISCRETOS	28
2.2	O MÉTODO DE MULTIPÓLOS RÁPIDOS	33
2.3	O ESCOAMENTO AO REDOR DE AEROFÓLIOS	41
3	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA	51
3.1	DEFINIÇÕES GEOMÉTRICAS	51
3.2	HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS ADOTADAS	52
3.3	EQUAÇÕES GOVERNANTES E CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	52
3.3.1	Equações governantes	52
3.3.2	Condições de contorno	54
3.4	ESCOAMENTOS TURBULENTOS	55
3.4.1	Filtragem das equações governantes	57
3.4.2	Simulação de turbulência	59
3.5	ADIMENSIONALIZAÇÃO DO PROBLEMA	61
3.6	EQUAÇÃO DO TRANSPORTE DA VORTICIDADE	63
3.6.1	A lei de Biot-Savart	65
3.7	CARGAS FLUIDODINÂMICAS.....	65
4	MÉTODO DE SOLUÇÃO	68
4.1	DETERMINAÇÃO DO CAMPO DE VELOCIDADES DO ESCOAMENTO UTILIZANDO-SE UMA ABORDAGEM LAGRANGIANA.....	69
4.1.1	A contribuição do escoamento incidente	69
4.1.2	A contribuição da fronteira sólida: o método de painéis	70
4.1.3	Geração de vorticidade associada ao modelo de rugosidade	78
4.1.3.1	Modelagem da rugosidade superficial	80
4.1.4	A contribuição da nuvem de vórtices discretos	84
4.2	ADVECÇÃO DA NUVEM DE VÓRTICES DISCRETOS.....	87
4.3	DIFUSÃO DA VORTICIDADE	88
4.4	CÁLCULO NUMÉRICO DE CARGAS FLUIDODINÂMICAS	91
4.5	ALGORITMO DO MÉTODO DE VÓRTICES DISCRETOS	94
5	ANÁLISE DE RESULTADOS	96

5.1	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DO CILINDRO CIRCULAR LISO	96
5.1.1	Simulação do cilindro circular liso utilizando-se a lei de Biot-Savart	96
5.1.2	Simulações do cilindro circular liso utilizando-se o algoritmo acelerador... ..	101
5.2	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DO AEROFÓLIO NACA 0012.....	108
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	131
	REFERÊNCIAS.....	134
	APÊNDICE A – APRESENTAÇÃO DO MÉTODO DE MULTIPÓLOS	
	RÁPIDOS	143
	APÊNDICE B – RESULTADOS PRELIMINARES OBTIDOS COM O	
	MÉTODO DE MULTIPÓLOS RÁPIDOS.....	155

1 INTRODUÇÃO

A Mecânica dos Fluidos é um ramo da física que se dedica ao estudo do comportamento de líquidos e gases, estejam estes estáticos ou em movimento. É de fundamental importância para a compreensão do mundo natural e tem ampla gama de aplicações em engenharia, meteorologia e aerodinâmica.

Os princípios dessa área são regidos pelas leis fundamentais da física: conservação da massa, da quantidade de movimento linear, da quantidade de movimento angular e da energia. Essas leis são aplicadas de forma a descrever o comportamento dos fluidos em uma variedade de situações.

Além disso, a Mecânica dos Fluidos inclui o estudo sobre uma característica intrínseca aos fluidos: a viscosidade, caracterizada pela resistência de um fluido ao movimento. O fenômeno da turbulência também é de grande interesse dentro desse ramo da física, pois ele é presente na maior parte dos escoamentos que ocorrem em problemas práticos de engenharia. Compreender esse fenômeno capaz de tornar o movimento de um fluido caótico e imprevisível é imprescindível para aumentar a confiabilidade de sistemas da engenharia, bem como tornar os projetos mais seguros e precisos.

Na engenharia civil, utiliza-se a Mecânica dos Fluidos para projetar sistemas de distribuição de água e esgoto, pontes e túneis subaquáticos; na engenharia aeronáutica, ela é fundamental para o projeto de aeronaves eficientes e seguras. Ela está presente também em outras áreas, como a medicina, para se compreender o fluxo sanguíneo e auxiliar na concepção de dispositivos médicos. É notável que o estudo aprofundado desse ramo de pesquisa é crucial para a compreensão do mundo natural e tem um impacto significativo no cotidiano. Seu estudo contínuo e aplicação em diversas áreas da ciência e engenharia impulsionam o avanço tecnológico e a melhoria da qualidade de vida.

Atualmente, um modo de estudar os problemas práticos que envolvem a Mecânica dos Fluidos consiste em utilizar os métodos numéricos, que permitem que os engenheiros e cientistas compreendam o comportamento complexo dos escoamentos em uma ampla gama de cenários possíveis sem a necessidade de experimentos caros e demorados.

Para isso, é necessário, inicialmente, realizar uma modelagem matemática do problema, que é capaz de reunir as equações que descrevem o comportamento do escoamento. No presente trabalho, por exemplo, equações diferenciais são utilizadas para descrever a conservação de massa e de momento linear. Deve-se contabilizar as condições de contorno de maneira tão precisa quanto possível for, para que o escoamento do fluido seja estudado da maneira mais

representativa e fiel possível.

Após a criação do modelo matemático que representa o problema proposto, é feita, então, a solução numérica, em que o sistema de equações resultante é resolvido utilizando computadores de alta capacidade, com o uso de algoritmos iterativos para calcular as variáveis de interesse, como velocidade e pressão.

Com a solução do problema através dos métodos numéricos, é feita a visualização e análise, utilizando-se gráficos e animações para melhor compreensão a respeito do comportamento do escoamento, zonas de turbulência e gradientes de pressão. Após essa etapa, faz-se a validação e verificação dos resultados obtidos, comparando-os com dados experimentais, quando disponíveis, ou com outras soluções e métodos para verificar a consistência dos resultados.

Os métodos numéricos podem ser separados em duas grandes vertentes: métodos eulerianos e lagrangianos. Ambos servem para descrever o fluido em movimento, porém as diferenças se concentram no modo como eles fazem isso. Os métodos eulerianos se concentram em encontrar as propriedades do escoamento em pontos fixos no espaço, enquanto os métodos lagrangianos rastreiam o movimento individual de cada partícula utilizada para discretizar uma determinada propriedade do escoamento.

Os métodos eulerianos, que são base para a maior parte dos *softwares* comerciais utilizados em simulações numéricas, são caracterizados pela descrição do campo, em que o fluido é descrito em termo de suas propriedades (massa específica, velocidade e pressão) em pontos fixos no espaço. Assim, a descrição das propriedades dos fluidos é feita em um sistema de coordenadas fixo, utilizando malhas para esse fim. Nesses métodos não é possível fazer o rastreamento explícito das partículas individuais do fluido, pois esses métodos se concentram em como as propriedades do fluido variam no espaço e no tempo. A aplicação desses métodos é feita especialmente em simulações de fluido em grande escala, ou seja, focando no comportamento global e padrões de fluxo, como previsão do tempo e escoamento de fluidos em dutos.

Os métodos lagrangianos, cujo principal método desta classe é utilizado como ferramenta desse trabalho, são capazes de rastrear as partículas de maneira individual em seu movimento no espaço. Nele, uma propriedade do escoamento é discretizada, tendo, como mencionado anteriormente, o acompanhamento individual de partículas, a fim de capturar as propriedades de cada uma.

As equações de movimento, como de Navier-Stokes, são responsáveis por descrever o comportamento do escoamento. A advecção da propriedade discretizada é naturalmente

inerente aos métodos lagrangianos, uma vez que as partículas são transportadas pelo próprio escoamento, permitindo simulação de fenômenos complexos, como a mistura de fluidos e a formação de estruturas vorticosas. Um diferencial desses métodos consiste na possibilidade de se rastrear bolhas, gotas ou partículas sólidas em suspensão. Isso os torna uma atrativa ferramenta para realizar algumas aplicações de escoamentos bifásicos.

A ausência de malhas torna esses métodos mais fáceis para serem utilizados em simulações de geometrias complexas, porém, suas limitações se concentram na necessidade de grande quantidade de computação, além de que a interpolação de dados de partículas para criar campos contínuos de velocidade e pressão pode ser complexa.

O principal método lagrangiano é o método de vórtices discretos (MVD), utilizado no presente trabalho para acompanhar o movimento individual de cada uma das partículas utilizadas para discretizar o campo de vorticidade do escoamento. Utiliza-se o método de painéis para a discretização da fronteira sólida presente, sendo este capaz de garantir que a condição de contorno de impenetrabilidade nas superfícies seja satisfeita.

Ao utilizar-se o método de vórtices discretos, a simulação numérica da evolução do campo de vorticidades no tempo é realizada pelo acompanhamento de uma nuvem de vórtices discretos de Lamb, sendo possível dividir essa evolução em dois processos distintos: a advecção e a difusão viscosa da vorticidade. Para se resolver esses processos, Chorin (1973) propôs o algoritmo de separação da parte viscosa da equação do transporte da vorticidade, em que é possível resolver a advecção e a difusão de maneira separada, mas dentro de um mesmo incremento de tempo da simulação numérica, de forma a tornar a implementação numérica deste método mais simples.

A solução da etapa de advecção é dada pelo cálculo do campo de velocidades do escoamento sobre cada um dos vórtices discretos utilizados para discretizar a vorticidade, em cada instante de tempo da simulação numérica. O campo de velocidades do escoamento sofre três tipos de influência: fronteiras sólidas, nuvem de vórtices discretos e escoamento incidente.

A influência da nuvem de vórtices discretos é a mais onerosa, pois cada um dos vórtices discretos presentes na nuvem induz velocidade em todos os outros (interação vórtice-vórtice), sendo esse cálculo realizado, normalmente, através da lei de Biot-Savart, em que são necessárias Z^2 operações do processador para cada Z vórtices discretos presentes na nuvem. Essa é a principal dificuldade do método: tempo computacional elevado, quando se tem uma quantidade grande de partículas no domínio computacional.

No que diz respeito à solução da equação da difusão da vorticidade, diversos métodos foram propostos. O que é utilizado no presente trabalho é chamado de Método de Avanço

Randômico, proposto por Chorin (1973) e modificado por Lewis (1991), em que os deslocamentos radial e circunferencial dos vórtices discretos são simulados através da geração de valores aleatórios. Este é um método de cunho probabilístico, em que a aplicação é limitada a problemas de escoamento com altos valores de número de Reynolds, porém, atende às necessidades do trabalho.

A simulação do escoamento ao redor de fronteiras sólidas deve levar em consideração a influência destas no cálculo do campo de velocidades. Assim, o método de painéis (KATZ; PLOTKIN, 1991) é inserido no presente trabalho para analisar o escoamento potencial ao redor de geometrias arbitrárias. Discretiza-se o corpo em questão em painéis planos, sob os quais singularidades do tipo vórtice são distribuídas de maneira linear, para garantir a condição de contorno de impenetrabilidade no ponto central, chamado de ponto de controle, de cada um dos painéis.

Na tentativa de reduzir o tempo computacional devido à interação vórtice-vórtice, é importante a utilização de algoritmos que acelerem o cálculo do campo de velocidades do escoamento. É nesse contexto que a presente dissertação de mestrado é desenvolvida, haja vista que sua principal contribuição reside em implementar numericamente o método de multipolos rápidos, do inglês *Fast Multipole Method*, FMM (GREENGARD; ROKHLIN, 1987; NISHIMURA, 2002; RICCIARDI; WOLF; BIMBATO, 2017a; RICCIARDI; WOLF; BIMBATO, 2017b) para que simulações numéricas mais acuradas possam ser realizadas com o uso do método de vórtices discretos em tempos de CPU aceitáveis. No caso do presente estudo, o interesse consiste em avaliar o efeito da rugosidade superficial de um perfil NACA 0012 em seu comportamento aerodinâmico, especialmente, o ângulo de ataque em que o fenômeno do estol se manifesta. Tal fenômeno precisa ser bem compreendido, pois causa um aumento substancial na força de arrasto e uma queda brusca na força de sustentação.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo do presente trabalho é trazer resultados obtidos a partir de um programa computacional capaz de realizar o estudo do desenvolvimento de esteiras a jusante de corpos hidraulicamente lisos ou rugosos, reduzindo o tempo das simulações com a utilização do FMM. Este programa utiliza como base o método de vórtices discretos para incluir os efeitos viscosos, em conjunto com o método de painéis, responsável pela solução potencial do problema a partir da discretização da geometria de interesse.

É importante reiterar que a grande contribuição do presente trabalho está na

implementação de um algoritmo acelerador, o método de multipolos rápidos, cujo princípio é substituir, em partes, a lei de Biot-Savart, responsável por calcular a parcela do campo de velocidades do escoamento devido à nuvem de vórtices discretos (interação vórtice-vórtice), que é a etapa mais onerosa do tempo de processamento do método lagrangiano utilizado.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A fim de apurar de que maneira os estudos envolvendo aerofólios, especialmente sob influência da rugosidade superficial, foram desenvolvidos ao longo do último século, esta seção concentra as principais referências bibliográficas sobre estes temas. Além disso, é importante averiguar o desenvolvimento e como se encontra a utilização das ferramentas numéricas que viabilizam o presente trabalho: o método de vórtices discretos, o método de painéis e o método de multipolos rápidos.

2.1 O MÉTODO DE VÓRTICES DISCRETOS

Os Métodos de Partículas foram propostos para solucionar as equações diferenciais utilizadas para modelar os problemas encontrados na Mecânica dos Fluidos na presença ou não do transporte de massa. Estes métodos contam com uma abordagem lagrangiana de solução, tornando-os mais atrativos do que os métodos eulerianos para resolver numericamente uma categoria de problemas.

A abordagem lagrangiana é utilizada para simular numericamente problemas que envolvem escoamentos viscosos, em regime não-permanente, com altos números de Reynolds nas proximidades de fronteiras sólidas, sendo que essas podem ser móveis ou deformáveis (KAMEMOTO, 2009).

Desenvolvido por Alexander Chorin e Anthony Leonard, nos Estados Unidos, e Conrad Rehbach, na França, o método de vórtices discretos surgiu na década de 1970, passando a ser utilizado para aspectos matemáticos, por exemplo, no caso das propriedades de convergência, nos anos de 1980. Apenas depois disso, a fim de tornar o método apto a simular escoamentos em regime não permanente, seu uso passou a ser comum para incluir os efeitos viscosos e as condições de contorno sobre superfícies sólidas, principalmente através da busca para reduzir os custos computacionais inerentes ao método, que, por vezes, o tornam proibitivo. Ainda nos tempos atuais, o tempo de processamento associado ao método de vórtices discretos pode ser um empecilho à utilização deste, o que justifica o desenvolvimento da presente dissertação de mestrado.

Tradicionalmente, os métodos numéricos utilizados em *softwares* comerciais, cuja principal função é simular escoamentos ao redor de corpos com geometrias arbitrárias, são fundamentados pela abordagem euleriana (Método de Volumes Finitos, Método de Elementos Finitos etc.) em que as propriedades do campo de escoamento são descritas como função de sua

posição no espaço e no tempo e o domínio fluido é discretizado com o auxílio de uma malha computacional, através da qual as grandezas de interesse são calculadas.

Os métodos eulerianos possuem desvantagens no que diz respeito à forma como os problemas são solucionados, uma vez que existem esforços computacionais para gerar as malhas e regiões com pouca ou nenhuma atividade relevante ao escoamento acabam sendo consideradas na solução do problema, o que torna a simulação dispendiosa neste sentido. Por esta razão, opta-se, no presente trabalho, pela utilização de uma abordagem lagrangiana de solução, cujo principal representante é o método de vórtices discretos.

Nesta abordagem, as propriedades de interesse são discretizadas e acompanhadas em função do tempo, ou seja, são tratadas como um conjunto de partículas seguidas individualmente em seus movimentos no domínio. No método de vórtices discretos, a discretização é feita apenas para o campo de vorticidades e somente nas regiões em que se encontram atividades relevantes ao escoamento é que se concentram esforços computacionais; regiões com pouco ou nenhum evento importante para o escoamento são desconsideradas.

A discretização do campo de vorticidades de forma lagrangiana faz com que as condições de contorno no infinito sejam automaticamente satisfeitas, por conta da característica dos vórtices discretos de marchar no tempo. Isto permite a simulação da dinâmica da vorticidade de maneira mais simples, por conta da ausência de massa destas partículas.

A abordagem lagrangiana é mais vantajosa do que a euleriana em diversos aspectos, especialmente porque, nos métodos eulerianos, são necessários cuidados para se gerar as malhas computacionais, principalmente em regiões em que há maiores gradientes de pressão e de velocidade. Assim, para se evitar a geração de malhas, utiliza-se um método lagrangiano para resolver o problema proposto neste trabalho.

Ao se utilizar o método de vórtices discretos, discretiza-se uma propriedade do escoamento, neste caso, a vorticidade, em vórtices discretos cujas trajetórias são acompanhadas durante todo o tempo de simulação. Os modelos utilizados para discretizar a vorticidade se baseiam nos vórtices de Rankine e de Lamb (SARPKAYA, 1994), em que as velocidades induzidas a partir da região potencial do vórtice são suavizadas pelo núcleo. Um vórtice é definido como uma região com vorticidade não nula circundada por uma região com vorticidade nula, sendo necessária a presença de núcleos de vórtices para representar a região rotacional do escoamento de maneira fidedigna.

No modelo de Lamb, utilizado no presente trabalho, o vórtice possui uma distribuição Gaussiana de vorticidade, sendo esta uma solução exata da equação da difusão da vorticidade (PANTON, 1984); o modelo de Rankine é caracterizado pela rotação da região interna do

vórtice, o núcleo, como um corpo rígido, assumindo o comportamento de vórtice potencial fora dessa região.

O princípio do método de vórtices discretos para simular numericamente o escoamento de fluidos viscosos é a discretização do campo de vorticidades através da utilização de vórtices discretos e é interessante ressaltar as principais características do método: as equações de Navier-Stokes são formuladas em termos do campo de vorticidades, não do campo de velocidades; o teorema de Helmholtz (BATCHELOR, 1967) é utilizado para criar uma correspondência entre as partículas materiais de fluido e os elementos de vorticidade, cuja representação é feita através da discretização do campo de vorticidades em vórtices discretos. Assim, os vórtices discretos são submetidos aos processos de advecção tendo a mesma velocidade das partículas fluidas, garantindo uma abordagem lagrangiana ao método; o vetor vorticidade $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$ deve ser definido para obter a velocidade do fluido. Assim, integrando-se o campo de vorticidades, determina-se o campo de velocidades, \vec{u} (lei de Biot-Savart).

É interessante estudar o escoamento viscoso através de um viés lagrangiano, pois, ao focar no campo de vorticidades, é possível ter um maior controle do que ocorre no escoamento, especialmente em casos de regime não permanente.

A equação do transporte da vorticidade (ETV) é obtida mediante a aplicação do operador rotacional nas equações de Navier-Stokes, sendo que o termo de pressão desaparece. Ao tomar-se o divergente das equações de Navier-Stokes, é possível recuperar o termo de pressão para, então, calcular as cargas fluidodinâmicas a partir de uma formulação integral, baseada em uma equação de Poisson para a pressão (SHINTANI; AKAMATSU, 1994).

Além disso, é possível destacar alguns aspectos que dificultam a utilização do método de vórtices discretos: o tempo de processamento para o cálculo da velocidade induzida na nuvem de vórtices discretos através da utilização da lei de Biot-Savart é elevado, uma vez que são necessárias Z^2 operações para cada Z vórtices discretos que compõem a nuvem; os efeitos viscosos em uma formulação lagrangiana devem ser contabilizados através de métodos estatísticos ou determinísticos, ao passo que a difusão é mais facilmente computada através dos métodos de malha; os incrementos de tempo utilizados devem ser os menores possíveis, pois os efeitos da evolução lagrangiana no tempo são melhor computados quanto menores os incrementos de tempo utilizados, o que acaba deixando as simulações mais custosas no que diz respeito ao tempo de processamento. Esse conjunto de características impede que, atualmente, o método de vórtices discretos esteja entre as ferramentas de CFD (do inglês, *Computational Fluid Dynamics*) mais estudadas e utilizadas.

É importante ressaltar, ainda, que, para esta dissertação, é utilizada uma abordagem bidimensional, que desconsidera a deformação dos tubos de vorticidade. Caso a simulação fosse realizada através de uma abordagem tridimensional, os tempos de simulação seriam ainda mais elevados, o que deixa claro a necessidade de se aprimorar o método, a fim de que ele possa ser utilizado em diferentes problemas, mais complexos e cada vez mais próximos da realidade, sem maiores restrições.

Para diminuir o tempo computacional, no que se refere ao cálculo do campo de velocidades do escoamento, é possível utilizar algoritmos capazes de reduzir os esforços computacionais inerentes à interação vórtice-vórtice (etapa mais onerosa do referido cálculo), como é o caso do método de multipolos rápidos (GREENGARD; ROKHLIN, 1987; CARRIER et al., 1988; NISHIMURA, 2002; RICCIARDI et al., 2017a; RICCIARDI et al., 2017b; VIDILLE et al., 2022).

Através deste método, o processador precisa realizar apenas $Z \log Z$ operações ou, na melhor das hipóteses, Z operações para cada Z vórtices discretos presentes na nuvem (KOMOUTSAKOS, 1993). É importante ressaltar que, apesar de reduzir o tempo computacional, há esforços empregados no que diz respeito à programação e o cálculo do campo de velocidades é penalizado com um erro numérico, que deve ser monitorado para que a utilização do método de multipolos rápidos não comprometa a acurácia dos resultados.

Para a inclusão dos efeitos da difusão viscosa no método de vórtices discretos, diversos métodos foram propostos. Foram desenvolvidos esquemas diferentes para incluir estes efeitos, seja de maneira determinística ou probabilística. Os principais são o Método de Avanço Randômico (CHORIN, 1973; LEWIS, 1991), de cunho probabilístico, cuja implementação e execução são fáceis, porém seu uso fica restrito a situações em que o número de Reynolds do escoamento é elevado; e o Método do Crescimento do Raio do Núcleo, que foi proposto por Leonard (1980), porém, foi provado por Greengard (1985) que este método não convergia para a solução das equações de Navier-Stokes para longos tempos de simulação. Sendo assim, Rossi (1996) propôs uma modificação para o método de Leonard (1980), batizada de refinamento espacial, para se atingir a convergência. Este método, com as modificações de Rossi (1996), ficou conhecido como o Método do Crescimento do Raio do Núcleo Modificado.

A solução proposta por Rossi (1996) para que o método seja convergente é baseada no crescimento do raio do núcleo dos vórtices discretos até um limite preestabelecido e, então, o vórtice discreto sofre um processo de partição, dividindo-se em quatro, que irão crescer e se dividir em outros quatro vórtices discretos, e assim sucessivamente. O grande impedimento da utilização deste método é ocasionado pelo aumento demasiado da população de vórtices

discretos no domínio computacional durante a simulação numérica, fazendo com que o tempo de processamento seja elevado a ponto de se tornar impraticável.

A resolução da etapa potencial do problema é feita através da utilização do método de painéis, originado a partir do Método dos Elementos de Contorno (BREBBIA et al., 1984), que tem como princípio a discretização do contorno da superfície sólida submetida ao escoamento.

Este método vem sendo utilizado na indústria aeronáutica, uma vez que o estudo dos escoamentos potenciais ao redor de geometrias arbitrárias, de corpos rombudos ou aerodinâmicos, é viabilizado através deste. Martensen (1959) foi o precursor do método, em cujo trabalho é apresentada uma forma de análise de perfis aerodinâmicos em escoamentos potenciais para aplicações na indústria aeronáutica.

Este método numérico tem por princípio dividir o corpo em painéis que, no caso bidimensional, podem ser planos ou curvos, sob os quais são dispostas singularidades fundamentais que podem ser de três tipos: vórtices, fontes ou dipolos, cuja finalidade é garantir a validade das condições de contorno. O trabalho de Pereira et al. (2004) apresenta um estudo comparativo das possibilidades de escolha de singularidades e a forma como estas são distribuídas sobre a superfície discretizada do corpo, a fim de se obter os melhores resultados possíveis.

De acordo com Erickson (1990), é possível dividir o método de painéis, no que diz respeito à ordem das singularidades distribuídas sobre os painéis planos, em inferior e superior. A primeira diz respeito às singularidades distribuídas de maneira constante, enquanto que a segunda diz respeito às singularidades distribuídas com o auxílio de funções lineares ou quadráticas (PEREIRA; BODSTEIN, 2004).

Para obter a solução do problema do escoamento potencial, é possível utilizar, também, combinações de singularidades para representar o fenômeno físico. Para distribuir as singularidades, é necessário discretizar a geometria em m painéis, que é um fator de acurácia do método, ou seja, quanto maior o número de painéis, maior a acurácia do método. Hess (1973) desenvolveu um estudo da precisão do método com a utilização de singularidades do tipo fontes com distribuição constante, chegando à conclusão de que a velocidade calculada convergia a uma taxa de $1/m^2$, enquanto que o efeito da curvatura do corpo sobre o cálculo das velocidades é da ordem de $1/m$ (BELLAMY-KNIGHTS et al., 1988).

Nas obras de Katz e Plotkin (1991) e Moran (1984), é possível encontrar detalhes a respeito do método de painéis e das teorias potenciais aplicadas aos escoamentos bidimensionais e incompressíveis ao redor de corpos esbeltos.

A utilização de singularidades do tipo fontes fica restrita a geometrias específicas, como aerofólios simétricos e com ângulo de ataque nulo, cilindros e contornos abertos. Na simulação de escoamentos assimétricos, deve-se utilizar outras singularidades (vórtices ou dipolos). Para simular o escoamento do presente trabalho, o método de painéis é utilizado com singularidades do tipo vórtices distribuídas de maneira linear sobre os painéis planos que discretizam o perfil aerodinâmico imerso no escoamento.

Alcântara Pereira (2002) propôs um modelo de turbulência para métodos lagrangianos, que foi aprimorado por Bimbato (2012), que também propôs um modelo de rugosidade para simular o escoamento ao redor de superfícies hidraulicamente rugosas; o modelo proposto por Bimbato (2012) foi validado em uma série de trabalhos posteriores (BIMBATO et al., 2019; BIMBATO et al., 2020; ALCÂNTARA PEREIRA et al., 2020; MORAES et al., 2021).

O modelo de rugosidade proposto por Bimbato (2012) é capaz de gerar resultados coerentes para os casos em que se utiliza o método de painéis com singularidades do tipo fontes de maneira constante. Para situações em que se utilizam singularidades do tipo vórtice de maneira linear, como o caso do presente trabalho, este modelo necessita da adaptação realizada por Carvalho (2023), a fim de reproduzir a física inerente aos escoamentos que incidem sobre perfis aerodinâmicos hidraulicamente rugosos submetidos a ângulos de ataque. A adaptação feita por Carvalho (2023) está presente no algoritmo utilizado no presente trabalho.

2.2 O MÉTODO DE MULTIPOLOS RÁPIDOS

Diversos métodos foram desenvolvidos e implementados com a finalidade de acelerar a etapa da advecção do método de vórtices discretos, a qual, quando realizada exclusivamente através da lei de Biot-Savart, possui custo computacional da ordem de Z^2 , sendo Z o número de partículas presentes no domínio computacional.

Barnes e Hut (1986) apresentaram um algoritmo revolucionário, a fim de melhorar a eficiência computacional ao calcular forças em sistemas com grande número de partículas, como as que são encontradas em simulações de dinâmica molecular e astrofísicas, sendo este conhecido como método de Barnes-Hut. A solução proposta neste método é a de divisão hierárquica do espaço, sendo possível representar os grupos de partículas em uma “célula” com um único “centro de massa”, sendo que, a cada nível hierárquico, o número de partículas em cada célula diminui, tornando os cálculos mais simples, e aproximação das interações distantes que faz com que as interações sejam feitas entre uma partícula e um grupo de partículas distantes, sendo este o esquema partícula-caixa. capaz de reduzir o custo computacional desta

etapa para $Z \log Z$, permitindo uma alta escalabilidade deste método, possibilitando a utilização deste para simular sistemas com um número alto de partículas como aqueles encontrados em cosmologia e dinâmica de fluidos computacional. Enquanto, quase que simultaneamente, Greengard e Rokhlin (1987) e Carrier et al. (1988) propuseram um esquema caixa-caixa capaz de reduzir o custo computacional da etapa da advecção para a ordem de Z .

O trabalho de Greengard e Rokhlin (1987) foi um marco para a área de métodos numéricos e computacionais, por conta do alto número de partículas que são utilizadas nas simulações. O esquema caixa-caixa por eles proposto ficou conhecido como método de multipolos rápidos (do inglês *Fast Multipole Method*, FMM), possibilitando o cálculo de interações de longo alcance, comumente encontradas em problemas de potencial, sendo estes de gravitação, eletrostática e interações de forças no geral. Os princípios fundamentais do FMM se baseiam no uso de expansões multipolares para representar as interações de partículas em regiões distantes. Estas expansões são feitas através de séries, capazes de representar os grupos de partículas por um conjunto de coeficientes multipolares, permitindo uma melhor eficiência no cálculo das interações durante as simulações numéricas. O método de multipolos rápidos organiza as partículas durante a simulação numérica utilizando uma estrutura hierárquica, em que cada nível de hierarquia, os coeficientes multipolares são calculados para realizar as interações caixa-caixa, que viabilizam a redução do tempo computacional. Esta decomposição divide o problema entre as interações de pares de partículas (tradicionalmente realizadas pela lei de Biot-Savart) em subproblemas, que é a criação das expansões e interação entre as caixas suficientemente distantes, cujo desenvolvimento é detalhado no Apêndice A do presente trabalho.

Conforme mencionado anteriormente, o trabalho de Carrier et al. (1988) aconteceu em paralelo ao de Greengard e Rokhlin (1987), buscando aprimorar a aplicabilidade e eficiência do FMM, tornando-o mais eficiente para resolver problemas envolvendo múltiplos corpos, como aqueles encontrados em simulações de sistemas gravitacionais, eletrostáticos e potenciais. Este trabalho, além de aprimorar a utilização do algoritmo acelerador, abordou questões que envolvem a paralelização e otimização de memória, facilitando o uso do método de multipolos rápidos de forma mais eficiente, bem como os autores garantiram que o método pudesse ser aplicado a sistemas com milhões de partículas, aprimorando as formas de realizar as expansões multipolares, conseqüentemente, refinaram a maneira de calcular os coeficientes multipolares, permitindo a realização de interações de longo alcance de forma mais eficiente e com menor erro.

Ao lançar mão desta ferramenta, é possível aumentar o número de vórtices discretos presentes no domínio e resolver problemas mais complexos que envolvem múltiplos corpos, além de viabilizar simulações numéricas mais refinadas, através da utilização de esquemas de marcha no tempo de ordem superior e de incrementos de tempo menores.

Strickland et al. (1999) apresentaram um estudo da combinação do método de multipolos rápidos e do método de vórtices discretos, com o objetivo de avaliar o comportamento do algoritmo acelerador, a fim de reduzir o tempo de simulação computacional. Este trabalho evidencia a redução no tempo computacional proporcionada pela utilização do algoritmo acelerador, tornando simulações complexas menos demoradas. A etapa de interação vórtice-vórtice, que, calculada utilizando a lei de Biot-Savart exige um custo computacional de Z^2 teve uma complexidade reduzida para $Z \log Z$, conforme encontrado em Barnes e Hut (1986), para o método partícula-caixa. Novamente, em Strickland et al. (1999), não houve comprometimento dos resultados obtidos e foi demonstrada a utilidade da combinação FMM e MVD para simulações envolvendo escoamento ao redor de geometrias mais complexas, como corpos em movimento e formas irregulares, que são facilmente encontradas em estudo de dinâmica dos fluidos.

Nishimura (2002) abordou uma técnica chamada de método de integrais de contorno (em inglês, *Boundary Integral Equation – BIE*), que foi acelerada utilizando-se o método de multipolos rápidos. Neste trabalho, fenômenos de mecânica estrutural, física e outras áreas de engenharia foram modelados, com a utilização do método de integrais de contorno, sendo este eficaz por reduzir a dimensionalidade do problema, envolvendo apenas a fronteira do domínio. Associou-se, então, o FMM para aceleração dos cálculos referentes a este método, com uma combinação entre eles através de um algoritmo que fosse capaz de reduzir o tempo computacional e aprimorar a escalabilidade do BIE em problemas tridimensionais. Para validar a utilização combinada do método de multipolos rápidos ao método de integrais de contorno, o autor compara as soluções por ele obtidas com aquelas encontradas na literatura, em que o método de integrais de contorno é utilizado sem o algoritmo acelerador, demonstrando que o FMM não altera de maneira significativa a acurácia das simulações. Como resultados e conclusões, o autor apresenta a aceleração significativa do FMM acoplado ao BIE, enfatizando o fato de essa redução ser extremamente necessária para os problemas tridimensionais. Com a eficiência computacional, é sugerido, então, que esta combinação seja utilizada em problemas mais complexos que envolvam mecânica dos sólidos, análise de estruturas, dinâmica de fluidos e eletromagnetismo.

É possível utilizar dois tipos de algoritmos neste método: o algoritmo global e o adaptativo. Maiores detalhes de como o algoritmo adaptativo se comporta podem ser encontrados em Li e Li (2015), em que é feita a adaptação dinâmica da hierarquia, baseada na distribuição espacial das partículas em todo domínio computacional. Neste tipo de abordagem, as caixas são ajustadas de acordo com a densidade de partículas nas regiões, garantindo que regiões mais densas sejam tratadas com mais caixas, ou seja, caixas menores, enquanto as regiões com menor densidade populacional são tratadas com caixas maiores (Figura 3). A ideia desta forma de divisão de caixas é acelerar os cálculos sem prejudicar a precisão das simulações. Este trabalho conclui que o uso da abordagem adaptativa do FMM reduz significativamente o número de operações necessárias para calcular as interações do método, em comparação com os resultados obtidos em estudos anteriores do método de multipolos rápidos que utiliza o algoritmo global (como é o caso do presente trabalho), reduzindo, então o custo computacional do FMM baseado no algoritmo global (em que todas as caixas de um mesmo nível de refinamento possuem o mesmo tamanho, independentemente da densidade populacional – vide Figura 2). Além disso, a utilização do algoritmo adaptativo foi capaz de manter a acurácia das simulações em sistemas complexos, ou seja, com uma grande quantidade de partículas distribuídas de maneira não uniforme.

É importante destacar que a implementação do algoritmo adaptativo nas simulações numéricas é bem mais complexa do que a implementação do algoritmo global (utilizado no presente trabalho), uma vez que o refinamento espacial, ou seja, a divisão do domínio em caixas quadradas, no algoritmo adaptativo segue outro padrão, em que, nos domínios com distribuição esparsa de partículas, faz-se o refinamento (divisão do domínio em caixas quadradas) mais vezes em regiões que acumulam uma maior quantidade de partículas, enquanto as regiões com menor quantidade de partículas permanecem com o refinamento mais grosseiro (com caixas maiores), ocorrendo, então, uma interação direta entre caixas maiores (de regiões com menos partículas) e caixas menores (de regiões com mais partículas).

Além disso, a atualização do refinamento espacial - divisão do domínio em caixas quadradas – no algoritmo adaptativo pode se tornar computacionalmente mais cara, pois, ao contrário das árvores hierárquicas fixas (aquelas encontradas no algoritmo global, em que todas as caixas pertencentes a um mesmo nível de refinamento possuem o mesmo tamanho, independentemente da quantidade de partículas dentro delas), as árvores hierárquicas adaptativas (encontradas no algoritmo adaptativo) precisam ser constantemente ajustadas durante a execução, acarretando uma sobrecarga computacional. Portanto, a gestão dinâmica no algoritmo adaptativo tende a ser bem mais complexa do que aquela feita no algoritmo global,

principalmente em sistemas com uma grande quantidade de partículas distribuídas de forma irregular.

A implementação do algoritmo adaptativo também gera um custo de memória e armazenamento mais alto do que aquele encontrado no algoritmo global, pois, trata-se de uma quantidade muito grande de dados da divisão das caixas e das partículas em cada nível a serem armazenados. Essa sobrecarga no que se refere à memória computacional pode se tornar um empecilho especialmente em problemas de grande escala e em máquinas mais limitadas.

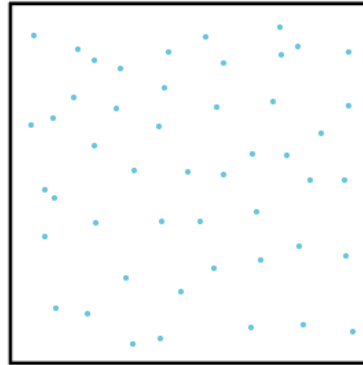
A paralelização no FMM com algoritmo adaptativo também é mais complexa, em comparação com o algoritmo global, que exige técnicas menos aprimoradas para realizar a paralelização do código.

É possível superar tais dificuldades encontradas no algoritmo adaptativo mediante a presença de *hardwares* mais potentes e maiores estudos a respeito desse tipo de hierarquia, a fim de melhorar o design do algoritmo. Porém, todas essas questões apresentadas precisam ser cuidadosamente avaliadas, a fim de manter a eficiência do método, ou seja, manter a redução do tempo computacional das simulações, bem como um nível de precisão adequado.

O algoritmo global é recomendado para situações em que a distribuição das partículas no domínio computacional é próxima da uniforme (Figura 1), sendo este utilizado no presente trabalho (GREENGARD; ROKHLIN, 1987).

O cerne do método de multipolos rápidos consiste em dividir o domínio computacional que, inicialmente, é uma caixa quadrada contendo todas as partículas (conforme apresentado na Figura 1), em caixas menores, também quadradas, todas com a mesma dimensão. Este processo é conhecido como refinamento espacial e é feito até um nível de refinamento, n , específico, o que viabiliza as interações entre caixas e substitui, em partes, a utilização da lei de Biot-Savart, responsável por tornar o cálculo do campo de velocidades oneroso ao se utilizar o método de vórtices discretos.

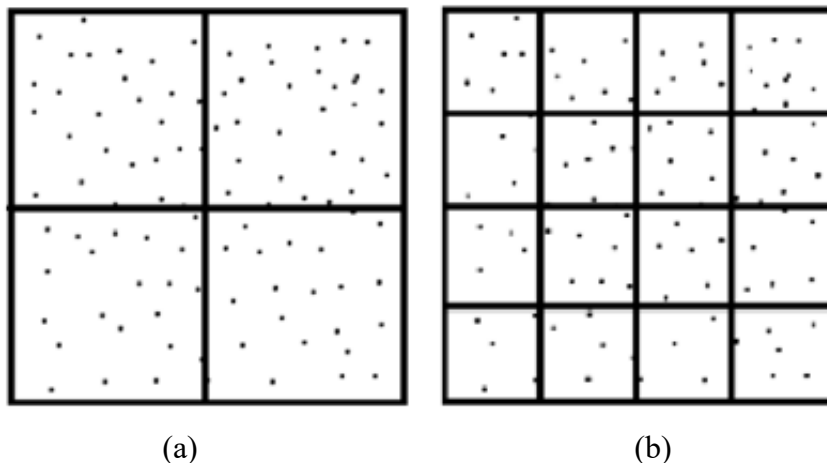
Figura 1 – Domínio computacional inicial ($n = 0$).



Fonte: Autoria própria.

Ao refinar o domínio computacional original, a caixa apresentada na Figura 1 é dividida em quatro caixas idênticas entre si, chamadas de filhas, conforme apresentado na Figura 2. Na Figura 2(a), apresentam-se as caixas-filhas oriundas da divisão do domínio computacional (Figura 1) em quatro partes de mesma dimensão (nível de refinamento 1), enquanto que, na Figura 2(b), apresentam-se as caixas-filhas provenientes da divisão das caixas do primeiro nível de refinamento em outras quatro, dando origem, assim, ao nível de refinamento 2.

Figura 2 – Divisão do domínio computacional quando se utiliza o algoritmo global: (a) $n = 1$;
(b) $n = 2$.



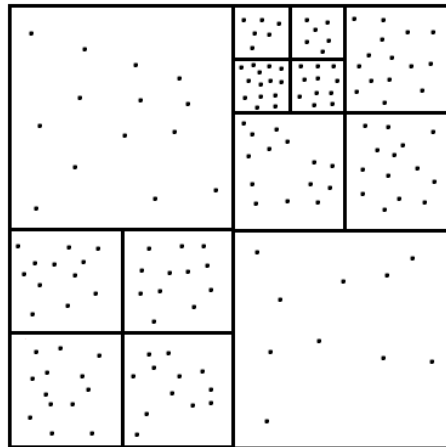
Fonte: Autoria própria.

Portanto, as caixas do nível de refinamento n ($n > 0$) são originadas pela partição do domínio computacional (Figura 1) em 4^n caixas de mesma dimensão. É possível refinar o domínio cada vez que o número de partículas dentro de uma caixa for maior do que um limite

previamente estabelecido no início da simulação ou até um nível máximo de refinamento predeterminado. Com a utilização do algoritmo global, duas listas de interação são geradas para cada uma das caixas em cada um dos níveis de refinamento (ver Apêndice A que detalha a explicação global do método de vórtices discretos e o algoritmo desenvolvido em Fortran, respectivamente).

A implementação do algoritmo adaptativo, conforme mencionado anteriormente, é mais complexa e exige maiores estudos, pois existem caixas de diferentes tamanhos dentro do domínio computacional, conforme apresentado na Figura 3. Diferentemente do algoritmo global, em que o domínio computacional é refinado como um todo, no algoritmo adaptativo, refina-se apenas as caixas em que a quantidade de partículas extrapola o limite preestabelecido inicialmente, o que facilita a utilização do algoritmo global nas simulações. Este algoritmo é mais interessante do que o algoritmo global no que diz respeito à redução no tempo de simulação numérica, frente aos resultados apresentados em Li e Li (2015), porém, sua implementação exige um domínio mais avançado de técnicas de programação.

Figura 3 – Divisão do domínio computacional quando se utiliza o algoritmo adaptativo.



Fonte: Autoria própria.

O presente trabalho teve como premissa aquele desenvolvido por Ricciardi (2016), cujo objetivo foi melhorar a eficiência computacional de simulações de escoamentos não-estacionários utilizando o método de multipolos rápidos como algoritmo acelerador, em conjunto com o método de vórtices discretos. No trabalho de Ricciardi (2016), o método de vórtices discretos foi utilizado para representar o conjunto de vórtices discretos presentes no domínio computacional, que possibilita uma descrição suficientemente precisa da dinâmica do fluido, inclusive em fluxos turbulentos e não-estacionários. O principal resultado obtido neste

trabalho foi que a integração entre FMM e MVD proporcionou uma redução significativa no tempo computacional, quando comparada simulações utilizando-se o algoritmo acelerador com aquelas em que apenas a lei de Biot-Savart é utilizada para calcular o campo de velocidades do escoamento devido à interação vórtice-vórtice. Tal resultado viabiliza simulações de problemas mais complexos. A redução do tempo computacional não foi o único destaque do trabalho de Ricciardi (2016), uma vez que a precisão nos cálculos do campo de velocidades do escoamento foi mantida, o que permite a utilização desta combinação para simulações de escoamento envolvendo múltiplos corpos. A sugestão de estudos futuros apresentada neste trabalho foi de simular cenários de escoamentos turbulentos e altamente dinâmicos, onde as interações vórtice-vórtice seriam inviáveis com a utilização apenas da lei de Biot-Savart.

Ricciardi (2016) trouxe uma contribuição significativa para o campo de simulação numérica de escoamentos, mostrando uma abordagem altamente eficaz para simulações de escoamentos incompressíveis. Ao reduzir o custo computacional e manter a acurácia, este trabalho abre caminho para a utilização desta técnica em diversos cenários, com aplicações possíveis em aeroespacial, engenharia civil e física computacional.

O trabalho de Ricciardi (2016) foi continuado em dois trabalhos: Ricciardi et. al., (2017a) e Ricciardi et al., (2017b), em que ambos reforçam a utilização do método de vórtices discretos acelerado pelo método de multipolos rápidos. No primeiro, é feita a introdução de parâmetros adaptativos para ajuste da precisão do método em regiões em que o domínio possui maior ou menor concentração de partículas, apresentando como resultados a aceleração significativa das simulações numéricas, validação do modelo com dados numéricos encontrados na literatura, afirmando que o FMM permite representar fluxos vorticais com boa acurácia, além de a abordagem ter demonstrado utilidade para simulações de fluxos não-lineares, comumente encontrados em dinâmica de fluidos e aerodinâmica. No segundo, o foco é o desenvolvimento do algoritmo acelerador para situações de fluxo periódico, encontrados em situações em que o fluxo se repete ao longo do tempo. O algoritmo computacional teve uma adaptação para lidar com condições de contorno periódicas, em que o domínio se repete periodicamente em diferentes direções do espaço. Novamente, o algoritmo acelerador, nesta abordagem, se mostrou eficiente no que diz respeito à redução do tempo de processamento, sem comprometer os resultados obtidos nas simulações, que foram validadas com casos já conhecidos. As conclusões obtidas neste trabalho permitem abertura de novas investigações a respeito do comportamento do FMM em cenários envolvendo problemas de engenharia com fluxos periódicos, que são encontrados em aerodinâmica.

2.3 O ESCOAMENTO AO REDOR DE AEROFÓLIOS

O comportamento aerodinâmico de diferentes corpos sujeitos a escoamentos é de grande interesse da Mecânica dos Fluidos, tanto os corpos rombudos, que são encontrados em diversas estruturas, como plataformas petrolíferas, chaminés, trocadores de calor, cabos de transmissão de energia elétrica e prédios, quanto os corpos esbeltos, encontrados em veículos aquáticos e terrestres, aeronaves e, também, em turbomáquinas. Ambos os tipos de corpos impulsionam pesquisas e desenvolvimentos de modelos capazes de simular os aspectos físicos envolvidos no escoamento que se desenvolve ao seu redor.

Diversos trabalhos teóricos e experimentais foram desenvolvidos para estudar e compreender os mecanismos envolvidos no comportamento aerodinâmico de aerofólios, a fim de garantir uma melhor utilização no que diz respeito à segurança e otimização nos processos de obtenção de energia, através da manipulação adequada das forças de arrasto e sustentação, que resultam da interação fluido-estrutura.

Estudos com abordagem analítica a respeito do escoamento ao redor de aerofólios são bastante limitados, uma vez que as equações de Navier-Stokes não apresentam solução analítica. Por conta dessa característica, as soluções analíticas apresentadas na literatura, principalmente em livros publicados no século XX, são resultado de simplificações matemáticas e hipóteses físicas bastante restritivas, que acabam por não representar, de maneira realista, os problemas encontrados em engenharia.

As simplificações para permitir a obtenção de solução analítica dos problemas envolvendo aerofólios são apresentadas em Bertin e Smith (1998), que utilizam o método de volume finito (FMV) para as simulações de fluidos, impossibilitando uma solução exata das equações diferenciais que governam o problema. Neste trabalho, é feita uma análise detalhada da discretização das equações de fluido, utilizando o FMV, em vez de buscar a solução exata das equações de conservação do escoamento do fluido e das equações de Navier-Stokes. Portanto, as equações diferenciais parciais são transformadas em equações algébricas, a fim de possibilitar a solução numérica destas, realizando-se integração das equações de conservação de massa, momento e energia para cada um dos volumes de controle definidos. As técnicas analíticas por eles utilizadas incluem esquemas de interpolação e algoritmos para reconstrução de gradientes, fazendo com que haja aproximações numéricas. A precisão deste tipo de abordagem varia muito conforme a escolha do tamanho do volume de controle e do tipo de esquema de interpolação. O método de volume finito também propicia problemas de instabilidade numérica, principalmente em fluxos turbulentos e compressíveis, gerando,

consequentemente, resultados não esperados para a física do problema, além de ser extremamente custoso em termos computacionais para problemas com geometrias mais complexas.

Os trabalhos de Anderson (1991) e Katz e Plotkin (1991) abordam métodos de solução analítica. O primeiro destes traz uma solução analítica para fluidos incompressíveis utilizando o método de vórtice, discutindo como representar o fluxo por um conjunto de vórtices, utilizando o potencial destes para modelar o comportamento do escoamento ao redor de corpos, a fim de compreender os fenômenos que envolvem a distribuição de pressão e o padrão de escoamento ao redor de superfícies. Para isso, Anderson (1991) utiliza a solução analítica das equações de Euler, utilizadas em fluxos sem viscosidade e incompressíveis, bem como uma abordagem linear para avaliar o comportamento do fluxo em condições de aerofólios submetidos a pequenos ângulos de ataque. Para uma aplicação restrita a fluxos sob superfícies simples, este trabalho apresenta boas aproximações, porém, nele são apresentadas as limitações deste tipo de abordagem para problemas complexos, que envolvem os fluxos turbulentos e compressíveis, por conta da incapacidade deste método em capturar fenômenos não-lineares. O segundo, de Katz e Plotkin (1991), foca em aerodinâmica de baixa velocidade, com abordagem de aplicação de métodos analíticos para resolver problemas encontrados em aerodinâmica. Nesta obra, os autores utilizam a teoria de circulação e o método de vórtices para solucionar problemas de escoamentos incompressíveis ao redor de superfícies aerodinâmicas, abordando, também, o método de painéis para discretização da superfície em um conjunto de painéis aos quais são atribuídos vórtices para calcular a distribuição de pressão sobre as superfícies, que é utilizada, posteriormente, para encontrar as forças aerodinâmicas. É utilizada a teoria de pequenos ângulos de ataque para resolver problemas de baixa velocidade, em que as aproximações lineares são capazes de capturar os coeficientes de sustentação e arrasto de forma simples. Embora estas abordagens sejam válidas e capturem com boa acurácia os fenômenos que ocorrem em fluxos de baixa velocidade, os autores comprovam a deficiência destas para regimes de alta velocidade, sugerindo a utilização de métodos numéricos.

Durante muitos anos, a principal fonte de conhecimento a respeito de escoamentos ao redor de corpos foi a realização de experimentos, devido à complexidade dos fenômenos físicos envolvidos, à dificuldade de se modelar numericamente e às restrições que a solução analítica impõe, conforme exposto nos trabalhos acima citados.

Escoamentos ao redor de aerofólios são foco de diversos estudos para impulsionar a indústria aeroespacial, a fim de se conhecer as cargas aerodinâmicas que atuam em sua

superfície e, conseqüentemente, o comportamento dos coeficientes de sustentação e arrasto, variando-se os ângulos de ataque e os números de Reynolds do escoamento.

Critzos et al. (1955) ensaiaram escoamentos em túneis de vento ao redor de um aerofólio NACA 0012, também sendo este o objeto de estudo do presente trabalho e que apresenta um perfil simétrico, com o mesmo formato de curvatura na parte superior e inferior da asa, significando que este não apresenta coeficiente de sustentação devido à sua curvatura, mas sim às variações do ângulo de ataque. O aerofólio NACA 0012 foi testado em túnel de vento com flaps de jatos, a fim de avaliar a interação entre o jato de ar e o fluxo ao redor da asa. Variaram-se, portanto, alguns parâmetros: a taxa de fluxo de ar, a direção do jato e o ângulo de ataque do perfil. A utilização do flap de jato corroborou o aumento significativo do coeficiente de sustentação, principalmente para ângulos de ataque mais elevados, evitando a separação do fluxo, fenômeno que ocorreria no perfil sem o flap de jato. Isso permite que o NACA 0012 opere em maiores ângulos de ataque sem entrar em estol. Ao aumentar a taxa do fluxo do jato, os autores notaram um aumento ainda mais significativo no coeficiente de sustentação, porém, até um certo limite, uma vez que este aumento também interfere no aumento do arrasto gerado sob o perfil. O coeficiente de arrasto também foi avaliado, em que os resultados obtidos mostram que o flap de jato reduziu o arrasto por manter o fluxo sobre a superfície da asa com maior estabilidade, reduzindo, também, a separação do fluxo. Novamente, notou-se que taxas de fluxo do jato muito elevadas aumentou o arrasto total, sendo esta taxa um parâmetro que precisa ser cuidadosamente balanceada, a fim de evitar os efeitos negativos nos coeficientes de arrasto e sustentação, por conta da turbulência adicional que este jato cria.

Abbott e von Doenhoff (1959) realizaram experimentos com diversos aerofólios da família NACA, incluindo o perfil NACA 0012, cuja obra combina a teoria aerodinâmica e dados experimentais para descrever os diferentes perfis estudados, em diversas condições de voo. Os autores utilizaram uma série de experimentos e estudos anteriores para fornecer uma teoria para explicar os resultados por eles obtidos. Para chegar-se às conclusões a respeito do comportamento do escoamento ao redor dos perfis, incluindo o NACA 0012, foram variados os ângulos de ataque e a velocidade do ar, para avaliar a sustentação e o arrasto nestes diferentes cenários. Para o NACA 0012, o coeficiente de sustentação foi estudado mediante variações dos ângulos de ataque, o que possibilitou a geração de uma curva da sustentação em função dos ângulos de ataque. Para avaliar o coeficiente de arrasto, os autores variaram as condições de fluxo, a fim de encontrar o comportamento aerodinâmico em termos do arrasto. Os resultados por eles apresentados mostram uma curva de sustentação próxima da linear até um ângulo de ataque de 12° , porém, a sustentação começa a cair drasticamente à medida que o ângulo de

ataque aumenta, devido à separação do fluxo. Para o coeficiente de arrasto, houve um aumento à medida que o ângulo de ataque cresceu, por conta da separação do fluxo e aumento na formação de vórtices na região posterior da asa. O estol por eles encontrado ficou na faixa de um ângulo de ataque de 14° a 16° . Como conclusão deste trabalho, os autores mencionam a capacidade do perfil de gerar sustentação em uma gama de ângulos de ataque moderados, porém, a capacidade de sustentação diminui drasticamente à medida que o ângulo de ataque aumenta, devido à separação do fluxo e ao estol, comentando a respeito da boa eficiência deste perfil para condições de voo moderadas e que, para ângulos de ataque mais elevados, são necessários flaps ou a escolha de outro perfil aerodinâmico mais adequado.

No que diz respeito ao aerofólio NACA 0012 submetido à vibração, é possível encontrar análises em Blevins (1984). Este perfil foi projetado para operar em condições estáveis, porém, todo perfil aerodinâmico pode estar sujeito aos efeitos de vibração, por conta de velocidades altas de voo e interações dinâmicas, sendo a combinação deste perfil em específico e a vibração analisadas por Blevins (1984). Caso a frequência de excitação, que pode ser gerada, por exemplo, por turbulência, coincidir com uma das frequências naturais da asa, é possível que haja o fenômeno da ressonância e, conseqüentemente, um dano estrutural, portanto, as frequências naturais das asas e os modos de vibração devem ser estudados para evitar tal problema. Os modos mais frequentes de vibração incluem a flexão e a torção, que precisam ser avaliadas no design estrutural das asas, incluindo o perfil NACA 0012. Tais perfis têm contam com um mecanismo de amortecimento para aliviar as vibrações e evitar o fenômeno da ressonância, para proteger a estrutura das asas.

Na obra de Hoerner e Borst (1985), é possível encontrar uma análise detalhada sobre uma ampla gama de perfis aerodinâmicos, incluindo o NACA 0012, sendo possível obter a relação entre sustentação, arrasto e vibrações. Os autores utilizam a teoria da camada limite para descrever como o fluxo de ar se comporta quando entra em contato com a superfície dos perfis e aplicam esta teoria para avaliar a distribuição de pressão ao longo da asa. Para chegar à sustentação e ao arrasto, foram utilizadas as equações de conservação de momento e energia, a fim de modelar o fluxo de ar e as forças resultantes nos perfis. É utilizado o conceito de curvas de polar para caracterizar o despenho aerodinâmico dos perfis, comparando os resultados por eles obtidos com aqueles presentes na literatura. Para o NACA 0012, os autores apresentam, em sua obra, concordância com aquilo que é esperado e encontrado na literatura: baixos ângulos de ataque geram pouca ou nenhuma sustentação no perfil, discutindo, também, a importância de tentar reduzir o arrasto, que varia com a velocidade do fluxo e o ângulo de ataque, a fim de manter a eficiência do perfil mais elevada. Em regimes de alta velocidade, a separação da

camada limite é mais evidente, acarretando o aumento do arrasto e redução da eficiência do perfil. A utilização deste tipo de perfil simétrico é particularmente encontrada em aeronaves com desempenho simétrico, como as militares ou acrobáticas, pois a ausência de curvatura do perfil ajuda a evitar a sustentação excessiva e o comportamento dinâmico quando a aeronave está operando em diferentes orientações. Embora Hoerner e Borst (1985) não tenham desenvolvido grandes pesquisas na área de vibrações, as análises de sustentação e arrasto contribuem para avaliar como o perfil NACA 0012 pode sofrer vibrações, que afetam o comportamento estrutural da asa, caso esta não seja projetada levando em conta as frequências naturais da estrutura e os modos de vibração.

Bertagnolio et al. (2001) realizaram simulações numéricas a respeito do comportamento do perfil NACA 0012 em diversas condições de fluxo e ângulos de ataque, para entender como se comportam os coeficientes de sustentação e arrasto, além da separação do fluxo sobre o perfil. Os autores utilizaram um código de Dinâmica de Fluidos Computacional (CFD) baseado em um método de volumes finitos, por conta da capacidade deste em calcular distribuições de pressão e velocidade ao longo do perfil. Foram consideradas as condições de contorno de fluxo livre e não-deslizamento e, para modelar o comportamento turbulento do fluxo, foi utilizado o modelo de turbulência K- ϵ . A malha computacional foi refinada cuidadosamente, especialmente na região de camada limite, a fim de garantir bons resultados, especialmente na área suscetível à ocorrência de separação do fluxo. Os resultados obtidos pelos autores demonstram que o coeficiente de sustentação cresce linearmente até um ângulo de ataque de 15° , em que começa o fenômeno de estol, que chega até os 18° , cujo fim é marcado pela recuperação do coeficiente de sustentação. O coeficiente de arrasto apresentou resultados de crescimento significativo, especialmente quando o ângulo de ataque é demasiadamente elevado e ocorre a perda de sustentação. A separação do fluxo foi mais pronunciada em simulações cujos ângulos de ataque eram mais elevados e ocorreu mais facilmente nas regiões da parte superior do perfil, em que o fluxo foi desacelerado e ficou turbulento. O estudo investigou também a influência do número de Reynolds no comportamento aerodinâmico do perfil, sendo que, para números de Reynolds mais baixos, a separação da camada limite ocorreu com maior facilidade e, para Reynolds mais altos, o fluxo se manteve com a camada limite sem separação por mais tempo, resultando em menor arrasto e maior sustentação. A comparação destes resultados com os experimentais demonstra que houve boa correspondência com aquilo que era esperado, validando a precisão do método utilizado.

Avvad et al. (2021) realizaram um experimento a partir de diferentes perfis simétricos de aerofólio (NACA 0015, NACA 0024 e NACA 0012) com diferentes ângulos de ataque testados

para diferentes velocidades de vento, a fim de determinar qual configuração garante melhor eficiência em turbinas eólicas, possibilitando uma maior geração de energia e reduzindo, então, os custos para o consumidor. Os métodos abordados neste trabalho se assemelham àqueles abordados por Bertagnolio et al. (2001), em que houve simulação baseada em CFD, desta vez, utilizando o ANSYS Fluent, com o mesmo modelo de turbulência K- ϵ , cuja malha computacional foi, também, refinada cuidadosamente, especialmente na região de camada limite, a fim de garantir bons resultados, especialmente na área suscetível à ocorrência de separação do fluxo. As condições de contorno por eles utilizadas são velocidade de entrada constante, representando o fluxo de ar, não-deslizamento e o fluxo de ar em regime incompressível. Variaram-se os números de Reynolds e os ângulos de ataque, a fim de avaliar o comportamento do perfil. Em concordância com o que foi apresentado por Bertagnolio et al. (2001), houve aumento próximo do linear para ângulos de ataque mais baixos, sendo que Avvad et al. (2021) encontraram o início do estol em um ângulo de ataque de 15° e a recuperação da sustentação a 18° , assim como os autores anteriormente citados. Novamente, o arrasto aumentou à medida que o ângulo de ataque cresceu, reduzindo a eficiência do perfil e a separação do fluxo ocorreu na região superior do perfil, sendo que, para baixos ângulos de ataque, houve uma distribuição de pressão mais estável e bom desempenho aerodinâmico.

Nas últimas três décadas, houve um aumento na quantidade de trabalhos realizados utilizando as ferramentas numéricas, devido ao avanço e desenvolvimento de tais técnicas, que permitem soluções aproximadas para analisar e compreender melhor o que ocorre com escoamentos complexos, que fazem parte dos problemas de engenharia. Da mesma maneira que Bertagnolio et al. (2001), Avvad et al. (2021) mostraram que a performance aerodinâmica do NACA 0012 melhora com o aumento do número de Reynolds, pois o fluxo se mantém mais comportado, resultando em maior sustentação e menor arrasto, ao contrário de condições de baixos números de Reynolds. Houve boa concordância com os resultados por eles apresentados e aqueles experimentais, obtidos com túneis de vento, presentes na literatura.

Srnivasan et al. (1995) simularam numericamente o escoamento em situação pré e em estol para um aerofólio NACA 0015 em movimento oscilatório, fornecendo as curvas de histerese dos carregamentos e dos coeficientes de pressão instantâneo. Os resultados obtidos com as simulações não apresentaram boa concordância com aqueles presentes na literatura, por conta de alguns fatores como: modelo de simulação utilizado, que simplifica os aspectos relacionados ao comportamento do escoamento do fluido (que dificultou a captura adequada da física do escoamento, principalmente na condição de estol), fenômenos complexos não resolvidos, uma vez que o movimento oscilatório de um aerofólio torna difícil modelar com

precisão a separação da camada limite e a formação de vórtices, diferenças nos parâmetros de entrada (frequência da oscilação, amplitude e as condições iniciais do escoamento) e a escolha de métodos pouco refinados para a captura da dinâmica do escoamento.

Akibari e Price (2003) utilizaram o método de rede de vórtices (do inglês, *Vortex Lattice Method*), técnica utilizada para estudar perfis de asas em fluxos incompressíveis, sendo baseada na discretização do perfil em uma malha de vórtices, em que cada vórtice induz um potencial de fluxo ao redor da superfície da asa. Novamente, como nos trabalhos anteriormente citados, as condições de contorno incluíram fluxo livre, ou seja, velocidade de entrada constante, e a condição de não-deslizamento. As simulações contaram com variações nos ângulos de ataque, número de Reynolds e intensidade de vórtices. Novamente, confirmou-se que o coeficiente de sustentação cresce linearmente até um valor de ângulo de ataque (de 15°) em que se inicia o fenômeno de estol (observado até 18°), em que se inicia a recuperação da sustentação. Para ângulos de ataque mais baixos (antes do estol), a distribuição de pressão sobre o perfil era suave, gerando uma sustentação. Conforme os trabalhos de Bertagnolio et al. (2001), Avvad et al. (2021), para ângulos de ataque elevados, a separação do fluxo começou a ocorrer na parte superior do perfil, indicando a separação da camada limite, bem como o ângulo de ataque aumentava à medida que o ângulo de ataque aumentava, especialmente após o estol, reduzindo a eficiência do perfil, além de os números de Reynolds mais elevados manterem o fluxo mais controlado ao redor do perfil, melhorando o coeficiente de sustentação e, em números de Reynolds baixos, a separação da camada limite ocorreu com maior facilidade, resultando em desempenho aerodinâmico reduzido. O trabalho de Akibari e Price (2003) teve seus resultados comparados com os experimentais encontrados na literatura, confirmando a boa concordância do método por eles adotado.

No que tange à influência da rugosidade superficial no comportamento aerodinâmico de aerofólios, é interessante mencionar que os principais problemas que ocorrem no desempenho de turbinas de correntes marítimas, por exemplo, são por conta da rugosidade das pás, que surge devido ao impacto, cavitação ou abrasão por partículas, como demonstrado em Fraenkel (2002) e Ng et al., (2013), que estudaram a influência da rugosidade superficial no perfil NACA 0012.

Fraenkel (2002) e Ng et al., (2013) demonstram que a rugosidade na superfície deixa o escoamento mais turbulento, aumentando a troca de energia entre a camada limite e o fluido, acarretando a separação precoce do escoamento e o aumento do arrasto. A rugosidade superficial, quando bem controlada, pode aumentar a sustentação, porém, há um limite tênue entre o aumento e a perda de sustentação devido à rugosidade superficial. Em perfis com superfícies lisas, o fluxo é capaz de se manter laminar até maiores ângulos de ataque, porém,

em superfícies rugosas, esse fluxo é mais turbulento, o que é capaz de alterar o estol em perfis aerodinâmicos.

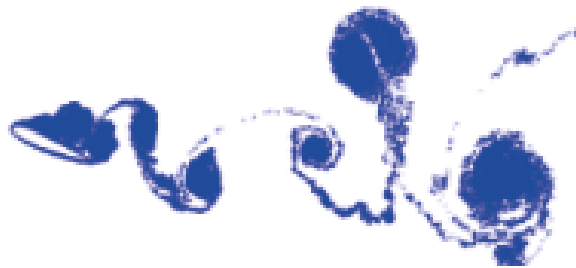
Timmer e Schaffarczyk (2004) investigaram o efeito da rugosidade do bordo de ataque em aerofólios espessos para aplicações em turbinas eólicas, concluindo que a presença de rugosidade no bordo de ataque, principalmente em aerofólios de maior espessura, prejudica a estabilidade do escoamento e aumenta a separação da camada limite, reduzindo a eficiência do aerofólio, bem como a indução de uma turbulência adicional no escoamento, modificando, então os coeficientes de sustentação e arrasto. Portanto, este trabalho deixa clara a necessidade de se controlar a rugosidade superficial de aerofólios, a fim de evitar as perdas de energia e melhorar a performance aerodinâmica do corpo.

Walker et al. (2014) apresentaram resultados experimentais e numéricos para uma turbina de corrente marinha de eixo horizontal de duas pás em escala modelo. A turbina foi testada em um tanque de reboque em diferentes condições: limpa, artificialmente suja e áspera, a fim de obter as curvas de sustentação e arrasto para estas condições. O aerofólio NACA 63-618 (utilizado nas pás da turbina) foi testado em um túnel de vento para possibilitar a criação de um método numérico, que foi validado, mediante comparação entre os resultados fornecidos por ele e os experimentais, indicando que o modelo numérico utilizado foi eficaz para prever o comportamento da turbina de corrente marinha. As conclusões obtidas neste trabalho se referem ao desempenho aerodinâmico da turbina, mostrando que a eficiência desta está diretamente ligada ao ângulo de ataque das pás, possibilitando uma compreensão de como a configuração de pás afeta a geração de energia, ao efeito da velocidade e das condições de corrente, identificando que a velocidade da corrente marinha e as condições variadas de escoamento impactam a geração de energia, de forma que regimes mais estáveis de escoamento possibilitam uma maior eficiência da turbina. Os autores também destacam questões a respeito do escalonamento da turbina, ou seja, eles mencionam o fato de que os resultados foram obtidos para escalas reduzidas, porém, questionam se escalas maiores podem alterar de forma mais brusca os resultados, por conta de efeitos de interação entre as pás e o fundo marinho, além de outros fenômenos que não são representados totalmente nos modelos de menor escala.

Compreender aspectos referentes à rugosidade superficial é importante no que diz respeito, por exemplo, ao desempenho de propulsores de navios e turbinas eólicas, além da eficiência dos processos de transferência de calor. De acordo com Zhou et al. (2015), o mecanismo fundamental dos diferentes tipos de rugosidade ainda não foi compreendido, de forma que a maioria dos estudos existentes se concentra em medições de forças atuantes em cilindros, principalmente sob escoamentos de ar, com uma faixa limitada de rugosidade.

Uma das contribuições do presente trabalho consiste em analisar o comportamento aerodinâmico de um corpo esbelto (perfil NACA 0012) hidraulicamente rugoso, variando-se os ângulos de ataque, em intervalos de 1° , a fim de verificar sob qual ângulo de ataque ocorre o fenômeno do estol. Para realizar este estudo, utiliza-se como base o trabalho de Carvalho (2023), o qual traz simulações do escoamento ao redor do perfil aerodinâmico NACA 0012, variando-se o ângulo de ataque entre 0° e 27° (em intervalos de 3°) e as rugosidades superficiais, $\varepsilon^*/c^* = 0,002$; $\varepsilon^*/c^* = 0,004$; $\varepsilon^*/c^* = 0,007$ (ε^* é a rugosidade absoluta da superfície e c^* é a corda do perfil aerodinâmico), para cada um dos ângulos de ataque simulados. Tais simulações foram realizadas com um incremento de tempo, Δt , igual a 0,03 e foi observado que o fenômeno do estol e o início da recuperação gradual do coeficiente de sustentação aconteceram, para o perfil hidraulicamente liso, em ângulos de ataque iguais a 15° e 21° , respectivamente. Na Figura 4 apresenta-se a esteira a jusante do perfil aerodinâmico no término do fenômeno de estol, no qual o ângulo de ataque do perfil aerodinâmico é de 21° . Observou-se, também, o atraso na ocorrência do fenômeno de estol e o atraso no início do gradiente positivo de sustentação para o perfil hidraulicamente rugoso.

Figura 4 – Esteira desenvolvida a jusante do aerofólio NACA 0012 isolado com ângulo de ataque igual a 21° .



Fonte: Carvalho (2023).

No trabalho de Carvalho (2023), fez-se uma adaptação ao modelo de rugosidade proposto por Bimbato (2012) para que este fosse utilizado nas simulações de um aerofólio NACA 0012 discretizado em painéis planos, sob os quais são dispostas, linearmente, singularidades do tipo vórtice (no trabalho de Bimbato (2012), o modelo de rugosidade foi testado em um cilindro de seção circular discretizado em painéis de fontes). No presente trabalho, para realizar simulações variando-se o ângulo de ataque a cada 1° , bem como reduzir o incremento de tempo, Δt , para um valor igual a 0,015, é utilizado o método de multipolos rápidos a fim de acelerar os cálculos

computacionais referentes à interação vórtice-vórtice, parcela mais onerosa do cálculo do campo de velocidades do escoamento. Esta é a principal contribuição desta dissertação de mestrado.

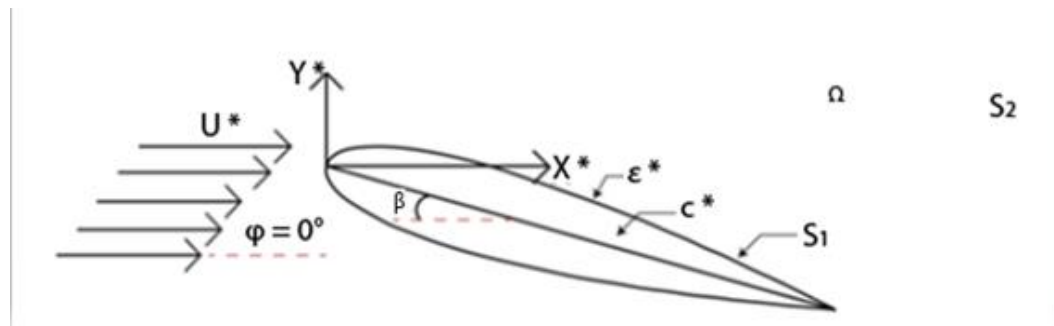
3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

Este capítulo apresenta o modelo matemático capaz de representar as características do escoamento turbulento que incide sobre um corpo rugoso.

3.1 DEFINIÇÕES GEOMÉTRICAS

Na Figura 5, é apresentado, esquematicamente, um escoamento viscoso bidimensional e incompressível que incide sobre o perfil aerodinâmico NACA 0012 de superfície hidráulicamente rugosa, cuja corda é c^* .

Figura 5 – Geometria do problema proposto.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 5, é possível definir algumas variáveis relacionadas com o problema proposto, dentre elas:

U^* : velocidade do escoamento incidente;

β : ângulo de orientação do perfil aerodinâmico;

φ : ângulo de incidência do escoamento;

c^* : comprimento característico do corpo (a corda, para o aerofólio);

ϵ^* : altura média da rugosidade superficial do corpo;

S_1 : contorno que delimita a superfície do corpo;

S_2 : fronteira definida a grandes distâncias do corpo (limite imaginário do domínio

computacional);

Ω : domínio fluido infinito.

3.2 HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS ADOTADAS

Para tornar a modelagem do problema menos complexa, algumas hipóteses simplificadoras a respeito do fluido, da geometria e do escoamento analisados são adotadas. Tais hipóteses são vantajosas, pois não comprometem a qualidade dos resultados, uma vez que o modelo ainda concentra os fenômenos físicos mais importantes; elas podem ser divididas em três classes:

a) Hipóteses relativas à geometria:

H1 – A região fluida é bidimensional e infinita;

H2 – O ângulo de incidência do escoamento é nulo, ou seja, $\varphi = 0^\circ$;

b) Hipóteses relativas às propriedades do fluido:

H3 – O fluido em escoamento é newtoniano;

H4 – As propriedades do fluido em escoamento são constantes, ou seja, a massa específica e a viscosidade não variam com o tempo;

c) Hipóteses relativas às propriedades do escoamento:

H5 – Escoamento incompressível, uma vez que $M < 0,3$, sendo M o número de Mach;

H6 – O escoamento é tratado como isotérmico, não havendo presença de gradientes de temperatura entre a fronteira sólida e o fluido em escoamento.

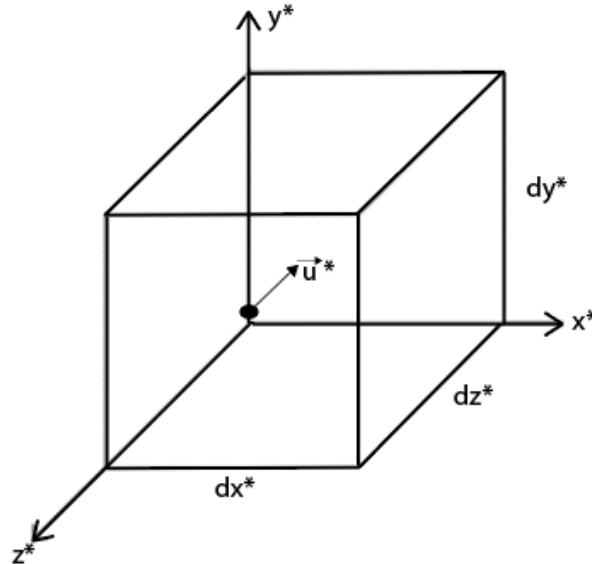
3.3 EQUAÇÕES GOVERNANTES E CONDIÇÕES DE CONTORNO

3.3.1 Equações governantes

Deduz-se as equações diferenciais básicas partindo-se de um volume de controle elementar, infinitesimal e fixo, de dimensões dx^* , dy^* , dz^* , de acordo com a Figura 6, em que a velocidade de um ponto no centro do volume de controle é \vec{u}^* , a massa específica é ρ e o

coeficiente de viscosidade dinâmica é μ .

Figura 6 – Volume de controle elementar, infinitesimal e fixo.



Fonte: Adaptado de Bimbato (2012).

a) Princípio de Conservação da Massa (P.C.M):

A partir da aplicação do balanço de massa em um volume de controle elementar, cartesiano e fixo (Figura 6), é possível verificar que, se o escoamento for incompressível, o divergente do campo de velocidades é nulo e a equação da continuidade, oriunda do balanço de massa, é dada por:

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*} = 0 \quad (1)$$

em que u_i^* é o componente i do vetor velocidade do fluido e, de acordo com a hipótese simplificadora referente ao escoamento bidimensional (H1), sabe-se que $i = 1, 2$, ou seja, u_1^* e u_2^* representam os componentes do vetor \vec{u}^* nas direções x^* e y^* , respectivamente.

b) Princípio de Conservação da Quantidade de Movimento Linear (P.C.Q.M.L.):

A partir da aplicação da segunda lei de Newton sobre um volume de controle elementar, cartesiano e fixo (Figura 6), é possível obter a equação diferencial da quantidade de movimento

linear (equação (2)):

$$\rho \frac{d\vec{u}^*}{dt^*} = \rho \vec{g}^* - \vec{\nabla}^* p^* + \vec{\nabla}^* \cdot \vec{t}_{ij}^* \quad (2)$$

sendo \vec{g}^* o vetor aceleração da gravidade local, p^* o campo de pressões e \vec{t}_{ij}^* o tensor das tensões viscosas que atuam sobre o elemento da Figura 6.

Aplicando-se as hipóteses simplificadoras H3, H4 e H5, obtém-se as equações de Navier-Stokes, dadas por:

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} (u_i^* u_j^*) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*} \right) \right] \quad (3)$$

em que ν é o coeficiente de viscosidade cinemática.

Uma vez que o escoamento é isotérmico (hipótese simplificadora H6), o Princípio de Conservação da Energia é desconsiderado nas análises.

3.3.2 Condições de contorno

Como mostrado na Figura 7, a velocidade de uma partícula de fluido, \vec{u}^* , pode ser decomposta em dois componentes: tangencial (u_t^*) e normal (u_n^*). A condição de aderência impõe que os componentes normal e tangencial da velocidade da partícula fluida sejam iguais aos componentes normal e tangencial da velocidade da fronteira sólida, respectivamente. Tem-se, então:

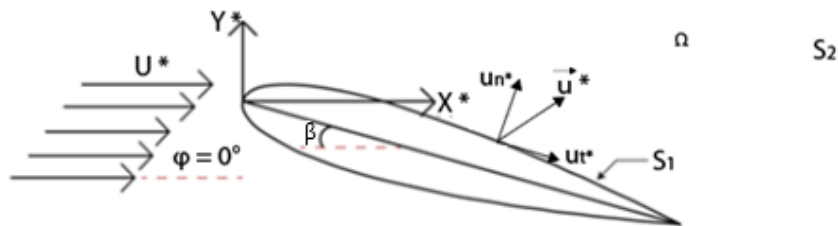
- Condição de impenetrabilidade, a qual impõe que o componente normal da velocidade da partícula fluida (u_n^*) em contato com a fronteira sólida seja igual ao componente normal da velocidade da fronteira (v_n^*), conforme a equação (4):

$$u_n^* - v_n^* = 0, \text{ em } S_1 \quad (4)$$

- Condição de escorregamento-nulo ou não-deslizamento, a qual impõe que o componente tangencial da velocidade da partícula fluida (u_t^*) em contato com a fronteira sólida seja igual ao componente tangencial da velocidade da fronteira (v_t^*), conforme a equação (5):

$$u_t^* - v_t^* = 0, \text{ em } S_1 \quad (5)$$

Figura 7 – Decomposição da velocidade da partícula fluida em contato com a fronteira sólida nos componentes normal e tangencial.



Fonte: Autoria própria.

Alguns fenômenos acontecem devido à condição de não-deslizamento, dentre eles: a rotação de partículas fluidas, com a conseqüente formação de uma camada limite que concentra os efeitos da viscosidade do fluido, a geração de vorticidade e, caso exista um gradiente de pressão adverso ao longo da superfície do corpo, a separação do escoamento com o desenvolvimento de uma esteira viscosa a jusante do corpo.

A última condição de contorno que deve ser respeitada é que o escoamento, a grandes distâncias do corpo, não é perturbado pela existência da fronteira sólida. Portanto, escreve-se que:

$$|\vec{u}^*| \rightarrow U^*, \text{ em } S_2 \quad (6)$$

O símbolo * indica que as variáveis apresentadas até o presente momento estão na forma dimensional.

3.4 ESCOAMENTOS TURBULENTOS

Os escoamentos turbulentos fazem parte de problemas práticos de engenharia, pois escoamentos laminares se limitam a restrições que a maior parte dos problemas não atende, como o transporte de fluidos em sistemas industriais, como transporte de petróleo, gás, água e produtos químicos, em que o escoamento presente, na maioria, se torna turbulento, por conta da alta velocidade dos fluxos. A turbulência, nestes casos, precisa ser analisada, pois acarreta perdas de carga e eficiência do sistema. O escoamento ao redor de aeronaves é

predominantemente turbulento também, o que afeta diretamente a sustentação, controle e arrasto da aeronave. Conforme exposto no capítulo anterior, o desenvolvimento de energias renováveis está diretamente ligado ao entendimento de como os escoamentos turbulentos se comportam, como no caso de projetos de turbinas eólicas, a fim de garantir a máxima eficiência do processo de conversão de energia e garantir o desempenho e durabilidade do material utilizado na construção das pás de turbinas eólicas, por exemplo. Inclusive projetos da área de engenharia civil necessitam deste tipo de estudo, por conta da análise da interação entre vento e estruturas, como nos casos de edifícios mais altos e pontes, pois, a turbulência pode gerar forças dinâmicas significativas, ocasionando vibrações ou danos a longo prazo. Portanto, compreender a física por trás dos escoamentos turbulentos é crucial para o desenvolvimento e melhorias em projetos. Por conta de não-linearidades, estes escoamentos são compostos por uma complexidade física.

As grandes escalas, que possuem mais energia, são regidas, predominantemente, pela geometria do corpo envolvido no escoamento, enquanto as pequenas escalas, responsáveis pela dissipação de energia, possuem altas frequências e obedecem às escalas de Kolmogorov, que são as menores possíveis neste tipo de escoamento e são regidas pela viscosidade molecular. As principais técnicas utilizadas para obter soluções no que diz respeito aos escoamentos turbulentos são:

- Simulação Numérica Direta, do inglês, *Direct Numerical Simulation*, DNS: uma malha fina é utilizada para discretizar e resolver todas as escalas do escoamento. Sua utilização é bastante restritiva, uma vez que é necessário ter uma capacidade computacional grande, pois são utilizados incrementos discretos de tempo muito pequenos (por volta de $\Delta t \cong 0,0025$), fazendo o seu uso ficar restrito a situações em que os valores de número de Reynolds são baixos (por volta de $Re = 180$), de acordo com Azeredo (2017).
- Simulação através de Equações Médias de Reynolds, do inglês, *Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations*, RANS: é utilizada com base na decomposição de Reynolds, que consiste em separar as grandezas do escoamento em uma parte filtrada e outra flutuante. É aplicada a média nas equações resultantes, tornando as quantidades médias que descrevem as flutuações iguais a zero. Nas equações de Navier-Stokes, surgem as tensões de Reynolds, devido às correlações de flutuação de velocidade, fazendo com que o número de incógnitas seja maior do que o número de equações (problema de fechamento da turbulência). Para resolver este problema, é necessário determinar as tensões de Reynolds

de alguma maneira.

- Simulação de Grandes Escalas, do inglês, *Large Eddy Simulation*, LES: nesta abordagem, é feita a separação das escalas do escoamento, porém utilizando uma filtragem das variáveis associadas ao escoamento. Como mencionado anteriormente, as menores escalas não sofrem alterações por conta da geometria, sendo possível utilizar um modelo para descrever estes efeitos. Enquanto as menores escalas são resolvidas através de um modelo, as grandes escalas são simuladas utilizando-se um método numérico adequado, como o método de vórtices discretos utilizado no presente trabalho.

3.4.1 Filtragem das equações governantes

Nesta dissertação, opta-se pela utilização da Simulação de Grandes Escalas (LES), por ser a mais adequada dentre as três anteriormente apresentadas para estudo do problema proposto no presente trabalho, uma vez que a DNS, conforme apresentado anteriormente, é bastante restritiva, uma vez que é necessário ter uma capacidade computacional grande e a RANS tem como principal empecilho o fato de que o número de incógnitas se torna maior do que o número de equações (problema de fechamento da turbulência).

Deve-se, então, realizar a separação das escalas do escoamento, a fim de se trabalhar com a Simulação de Grandes Escalas. As grandes escalas do escoamento são responsáveis por concentrar a maior parte das atividades de interesse, sendo simuladas utilizando o método de vórtices discretos. As pequenas escalas devem ser analisadas através de um modelo (LESIEUR; MÉTAIS, 1996).

Para separar as escalas, é feito um processo de filtragem, separando as variáveis encontradas nas equações em uma parte chamada de grandes escalas, $\bar{f}^*(\vec{x}^*, t^*)$ e outra parte chamada de submalha, $f'^*(\vec{x}^*, t^*)$, sendo:

$$f^*(\vec{x}^*, t^*) = \bar{f}^*(\vec{x}^*, t^*) + f'^*(\vec{x}^*, t^*) \quad (7)$$

A parte filtrada é dada por (SMAGORINSKY, 1963):

$$\bar{f}^*(\vec{x}^*, t^*) = \int_V \bar{G}(\vec{x}^* - \vec{y}^*) f^*(\vec{y}^*, t^*) d\vec{y}^* \quad (8)$$

sendo \bar{G} a função que caracteriza um filtro passa-baixa, utilizado para separar as maiores estruturas turbilhonares, que são resolvidas, das menores estruturas, que são modeladas.

Após este processo, as equações da continuidade e de Navier-Stokes ficam descritas, respectivamente, como:

$$\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_i^*} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} (\overline{u_i^* u_j^*}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i^*} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial \bar{u}_j^*}{\partial x_i^*} \right) \right] \quad (10)$$

O termo não-linear, $\overline{u_i^* u_j^*}$ deve ser decomposto, a fim de evitar problemas referentes à não-linearidade na solução. Este termo fica descrito de acordo com as equações (11) e (12):

$$\overline{u_i^* u_j^*} = \overline{(\bar{u}_i^* + u_i'^*)(\bar{u}_j^* + u_j'^*)} \quad (11)$$

$$\overline{u_i^* u_j^*} = \overline{\bar{u}_i^* \bar{u}_j^*} + \overline{\bar{u}_i^* u_j'^*} + \overline{u_i'^* \bar{u}_j^*} + \overline{u_i'^* u_j'^*} \quad (12)$$

O tensor de Leonard é definido como:

$$L_{ij}^* = \overline{\bar{u}_i^* \bar{u}_j^*} - \bar{u}_i^* \bar{u}_j^* \quad (13)$$

Assim, escreve-se:

$$\overline{u_i^* u_j^*} = \bar{u}_i^* \bar{u}_j^* + L_{ij}^* + \overline{\bar{u}_i^* u_j'^*} + \overline{u_i'^* \bar{u}_j^*} + \overline{u_i'^* u_j'^*} \quad (14)$$

Definem-se os tensores cruzado e de Reynolds, utilizando as equações (15) e (16), respectivamente, a fim de escrever a equação (14) de maneira compacta:

$$C_{ij}^* = \overline{\bar{u}_i^* u_j'^*} + \overline{u_i'^* \bar{u}_j^*} \quad (15)$$

$$\tau_{ij}^* = \overline{u_i'^* u_j'^*} \quad (16)$$

Fazendo as devidas substituições, a equação (14) é escrita como:

$$\overline{u_i^* u_j^*} = \bar{u}_i^* \bar{u}_j^* + L_{ij}^* + C_{ij}^* + \tau_{ij}^* \quad (17)$$

As verificações encontradas no trabalho de Silveira Neto et al. (1993) permitem desprezar o tensor de Leonard, L_{ij}^* , e o tensor cruzado, C_{ij}^* , quando estes são comparados com o tensor de Reynolds submalha, τ_{ij}^* . Esta situação é permitida quando são utilizados esquemas de transporte advectivo de até terceira ordem de precisão.

Com as conclusões de Silveira Neto et al. (1993), as equações (9) e (10) são descritas, respectivamente, como:

$$\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_i^*} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} (\bar{u}_i^* \bar{u}_j^*) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i^*} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial \bar{u}_j^*}{\partial x_i^*} \right) - \tau_{ij}^* \right] \quad (19)$$

O tensor de Reynolds submalha, τ_{ij}^* , deve ser modelado para que seja possível resolver o sistema formado pelas equações (18) e (19). Este tensor é responsável pelo transporte turbulento de quantidade de movimento entre as grandes escalas e as escalas submalha.

3.4.2 Simulação de turbulência

Para levar em consideração o efeito das pequenas escalas do escoamento, o tensor de Reynolds submalha deve ser modelado e esta modelagem é realizada a partir do coeficiente de viscosidade turbulenta, ν_t , que faz, de fato, a transferência de energia entre as grandes escalas do escoamento e as escalas submalha, até a energia ser dissipada na forma de calor, pelo coeficiente de viscosidade molecular, ν (BOUSSINESQ, 1877).

O tensor de Reynolds submalha é dado por:

$$\tau_{ij}^* = -2\nu_t \bar{S}_{ij}^* \quad (20)$$

sendo o tensor de deformação do campo filtrado definido por (SMAGORINSKY, 1963):

$$\bar{S}_{ij}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial \bar{u}_j^*}{\partial x_i^*} \right) \quad (21)$$

Escreve-se a equação (19) novamente, utilizando as equações (20) e (21):

$$\frac{\partial \bar{u}_i^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x_j^*} (\bar{u}_i^* \bar{u}_j^*) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i^*} + 2 \frac{\partial}{\partial x_j^*} [(\nu + \nu_t) \bar{S}_{ij}^*] \quad (22)$$

O coeficiente de viscosidade turbulenta pode ser definido através do espectro de energia cinética local, $E^*(K_c^*, t^*)$ (CHOLLET; LESIEUR, 1981):

$$\nu_t(K_c^*, t^*) = \frac{2}{3} C_k^{-3/2} \sqrt{\frac{E^*(K_c^*, t^*)}{K_c^*}} \quad (23)$$

sendo $C_k = 1,4$ a constante de Kolmogorov e K_c^* o número de onda de corte.

O modelo da função estrutura de velocidade de segunda ordem, \bar{F}_2^* , é utilizado por Métais e Lesieur (1992) para calcular o espectro de energia cinética local com a equação (24). Para tanto, a superfície de uma esfera com centro em \vec{x}^* e raio $|\vec{r}^*| = \Delta^*$ é utilizada para calcular a velocidade $\vec{u}^*(\vec{x}^* + \vec{r}^*, t^*)$, enquanto a velocidade $\vec{u}^*(\vec{x}^*, t^*)$ é calculada sobre o ponto do escoamento em que se deseja avaliar a atividade turbulenta (centro da esfera).

$$\bar{F}_2^*(\vec{x}^*, \Delta^*, t^*) = \left\| \overline{\vec{u}^*(\vec{x}^*, t^*) - \vec{u}^*(\vec{x}^* + \vec{r}^*, t^*)} \right\|_{|\vec{r}^*|=\Delta^*}^2 \quad (24)$$

Utilizando-se a função estrutura de velocidade de segunda ordem, o coeficiente de viscosidade turbulenta é descrito como (MÉTAIS; LESIEUR, 1992):

$$\nu_t(\vec{x}^*, \Delta^*, t^*) = 0,105 C_k^{-3/2} \Delta^* \sqrt{\bar{F}_2^*(\vec{x}^*, \Delta^*, t^*)} \quad (25)$$

Assim, para solucionar o problema proposto, as equações (18) e (22) devem ser utilizadas para simular os fenômenos que ocorrem nas maiores escalas, com a utilização do método de vórtices discretos, enquanto que, para computar a contribuição dos fenômenos que ocorrem nas menores escalas do escoamento, é utilizado um coeficiente de viscosidade turbulenta, definido na equação (25), que é obtido a partir da função estrutura de velocidade de segunda ordem, definida na equação (24). A modelagem aqui apresentada foi proposta para ser utilizada com o método de vórtices discretos por Alcântara Pereira (2002) e aprimorada posteriormente por Bimbato (2012).

3.5 ADIMENSIONALIZAÇÃO DO PROBLEMA

A análise dimensional é feita com o objetivo de reduzir a complexidade das variáveis envolvidas no problema e facilitar a comparação dos resultados obtidos com aqueles presentes na literatura. Deve-se, então, realizar a adimensionalização das equações governantes e das condições de contorno do problema.

Para isto, são escolhidas três grandezas características referentes ao problema, que podem ser encontradas na Figura 5, sendo elas:

- c^* : comprimento característico que, nesse caso, é a corda do aerofólio;
- U^* : escala de velocidade; nesse caso, a velocidade do escoamento incidente;
- $t^* = c^*/U^*$: escala de tempo.

Partindo destas três grandezas, é possível adimensionalizar as demais (o significado de algumas ficará mais claro com o decorrer do texto):

$x = x^*/c^*$, que representa a medida da abscissa do sistema de referência x^*Oy^* ;

$y = y^*/c^*$, que representa a medida da ordenada do sistema de referência x^*Oy^* ;

$\nabla = \nabla^*c^*$, que representa o operador gradiente;

$\nabla^2 = \nabla^{*2}c^{*2}$, que representa o operador laplaciano;

$\Delta s = \Delta s^*/c^*$, que representa o comprimento de cada painel utilizado para discretizar a fronteira sólida;

$\sigma_0 = \sigma_0^*/c^*$, que representa o raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb;

$\text{eps} = \text{eps}^*/c^*$, que representa a distância de geração de vórtices discretos de Lamb;

$\varepsilon = \varepsilon^*/c^*$, que representa a rugosidade relativa da superfície do corpo imerso no escoamento;

$\bar{u} = \bar{u}^*/U^*$, que representa o componente na direção x da velocidade filtrada, \vec{u} , do escoamento;

$\bar{v} = \bar{v}^*/U^*$, que representa o componente na direção y da velocidade filtrada, \vec{u} , do escoamento;

$\gamma = \gamma^*/U^*$, que representa a densidade de vórtices utilizados para discretizar o corpo;

$\bar{p} = \bar{p}^*/\rho U^{*2}$, que representa o campo de pressões filtrado;

$t = t^*(U^*/c^*)$, que representa um instante de tempo da simulação numérica;

$\Delta t = \Delta t^*(U^*/c^*)$, que representa o incremento de tempo da simulação numérica;

$\Gamma = \Gamma^*/(U^*c^*)$, que representa a intensidade de um vórtice discreto de Lamb;

$\omega = \omega^*(c^*/U^*)$, que representa o único componente não nulo do vetor vorticidade no plano de referência x^*Oy^* (hipótese de escoamento bidimensional);

$\text{Re} = (\rho U^*c^*/\mu)$, que representa o número de Reynolds do escoamento;

Após a adimensionalização destas grandezas, as equações que representam os princípios de conservação da massa e da quantidade de movimento linear são escritas por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} \bar{p} + \frac{1}{\text{Re}_c} \nabla^2 \vec{u} \quad (27)$$

Nas equações (26) e (27), os campos de velocidade e pressões filtrados são designados pela barra superior, a qual será omitida deste ponto em diante por comodidade de digitação.

Nota-se que o número de Reynolds é modificado (Re_c) para incluir os efeitos da turbulência no escoamento, via simulação de grandes escalas (LESIEUR; MÉTAIS, 1996). O coeficiente de viscosidade turbulenta, utilizado para promover a transferência de energia entre as grandes escalas do escoamento e as escalas submalha, é somado ao coeficiente de viscosidade molecular e o número de Reynolds passa a ser escrito como:

$$Re_c = \frac{U^* c^*}{\nu + \nu_t} \quad (28)$$

Apenas nas regiões do escoamento em que as atividades turbulentas devem ser levadas em consideração, ou seja, onde $\nu_t \neq 0$, é que se considera essa modificação no número de Reynolds.

As condições de contorno, após a adimensionalização, ficam descritas como:

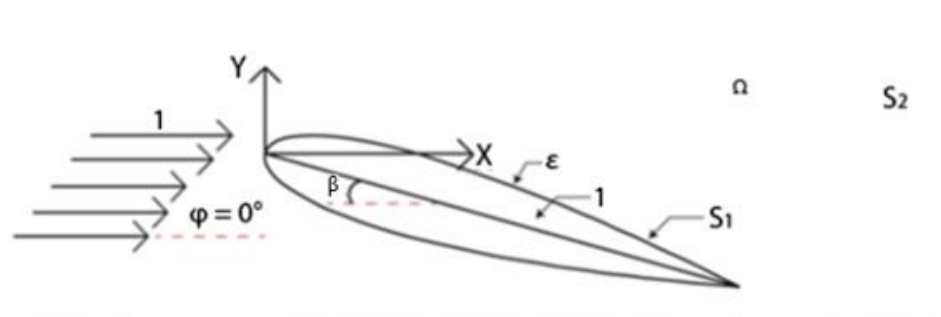
$$u_n - v_n = 0, \text{ em } S_1 \quad (29)$$

$$u_t - v_t = 0, \text{ em } S_1 \quad (30)$$

$$|\vec{u}| \rightarrow 1, \text{ em } S_2 \quad (31)$$

Na Figura 8, mostra-se, esquematicamente, como o problema se apresenta após a adimensionalização.

Figura 8 – Representação esquemática do problema após o processo de adimensionalização.



Fonte: Autoria própria.

3.6 EQUAÇÃO DO TRANSPORTE DA VORTICIDADE

Após a adimensionalização, escreve-se a equação da continuidade (equação (26)) e as equações de Navier-Stokes (equação (27)) na forma adimensionalizada. A presença do termo de pressão nas equações de Navier-Stokes torna a manipulação das equações complexa, dificultando a obtenção de uma solução válida. Para evitar este problema, aplica-se o operador rotacional em ambos os lados da equação (27), utilizando a definição matemática da vorticidade, ($\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$), sendo possível obter (BATCHELOR, 1967):

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \frac{1}{Re_c} \nabla^2 \vec{\omega} \quad (32)$$

sendo:

$\partial \vec{\omega} / \partial t$ - taxa de variação local da vorticidade;

$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega}$ - taxa de variação advectiva da vorticidade;

$(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$ - taxa de deformação dos tubos de vorticidade;

$(1/Re_c) \nabla^2 \vec{\omega}$ - taxa de variação difusiva da vorticidade.

Considerando-se a hipótese de escoamento bidimensional (H1), em que o vetor vorticidade se torna um escalar, possuindo apenas o componente normal ao plano do escoamento, é obtida a forma bidimensional da equação do transporte da vorticidade:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \omega = \frac{1}{Re_c} \nabla^2 \omega \quad (33)$$

Nota-se que na forma bidimensional da equação do transporte da vorticidade o termo referente à taxa de deformação dos tubos de vorticidade é nulo.

A equação (33) governa a evolução da vorticidade, em que o lado esquerdo é responsável pela advecção da vorticidade, devido à variação temporal, enquanto o lado direito é responsável pela difusão da vorticidade, a partir dos efeitos da viscosidade.

Partindo-se destas informações, Chorin (1973) propôs o algoritmo de separação da parte viscosa da equação do transporte da vorticidade. Com a utilização deste algoritmo, é possível calcular a advecção e a difusão da vorticidade de maneira separada dentro de um mesmo incremento de tempo. A advecção e a difusão da vorticidade são dadas, respectivamente, por

(CHORIN, 1973):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \omega = \frac{D\omega}{Dt} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{Re_c} \nabla^2 \omega \quad (35)$$

Quando o incremento de tempo tende a zero, a solução das equações (34) e (35) converge para a solução da equação do transporte da vorticidade (equação (33)). A advecção e a difusão são realizadas sucessivamente dentro do mesmo incremento de tempo da simulação numérica. A presença do termo de derivada material, $D\omega/Dt$, na equação referente à advecção (equação (34)), indica que a solução é realizada de uma maneira totalmente lagrangiana.

3.6.1 A lei de Biot-Savart

Para acompanhar a evolução da vorticidade no tempo, deve-se determinar o campo de velocidades do escoamento na posição ocupada por cada um dos vórtices discretos de Lamb utilizados para discretizar a vorticidade.

A Lei de Biot-Savart é utilizada para determinar o campo de velocidades do escoamento devido à interação vórtice-vórtice (uma das três componentes do campo de velocidades do escoamento) e pode ser descrita por:

$$\vec{u} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{\omega} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^2} d\Omega \quad (36)$$

sendo $\vec{u} = u\hat{i} + v\hat{j}$ a velocidade induzida em cada vórtice discreto utilizado para representar o campo de vorticidades, $\vec{\omega}$ o campo de vorticidades, \vec{r} a distância entre os vórtices discretos de Lamb e Ω o domínio fluido. Maiores detalhes a respeito desta dedução podem ser encontrados em Bimbatto (2012).

3.7 CARGAS FLUIDODINÂMICAS

O cálculo das cargas fluidodinâmicas que atuam em um corpo que está imerso em um

escoamento é o maior interesse quando se estuda este tipo de situação: escoamento ao redor de corpos.

O cálculo das cargas fluidodinâmicas pode ser realizado de algumas maneiras, destacando-se o esquema de Lewis (1991), em que as cargas fluidodinâmicas são calculadas considerando apenas a vorticidade gerada em um dado instante de tempo da simulação numérica e o método desenvolvido por Shintani e Akamatsu (1994), em que a influência de toda a vorticidade presente no domínio é considerada.

Neste trabalho, utiliza-se o método proposto por Shintani e Akamatsu (1994), uma vez que este apresenta maior precisão nos resultados obtidos. Maiores detalhes acerca desta formulação podem ser encontrados em Ricci (2002).

Para determinar a pressão em um ponto genérico, i , do domínio fluido, utiliza-se a equação (37) (RICCI, 2002):

$$\begin{aligned} \xi \tilde{Y}_i + \int_{S_1} \frac{1}{2\pi} \frac{n_x(x-x_i) + n_y(y-y_i)}{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \tilde{Y} dS = \\ = - \int_{\Omega} \frac{1}{2\pi} \frac{v(x-x_i) - u(y-y_i)}{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \omega d\Omega \\ - \frac{1}{Re} \int_{S_1} \frac{1}{2\pi} \frac{n_y(x-x_i) - n_x(y-y_i)}{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \omega dS \end{aligned} \quad (37)$$

em que ξ é uma constante que recebe o valor de 0,5 na fronteira sólida e de 1,0 no domínio fluido; n_x é o componente do vetor unitário, \vec{n} , na direção x ; n_y é o componente do vetor unitário, \vec{n} , na direção y ; (x, y) são as coordenadas de um ponto qualquer pertencente ao domínio fluido, que induz um trabalho específico, \tilde{Y} , no ponto $i(x_i, y_i)$ e dS é uma coordenada que percorre o perímetro da fronteira sólida S_1 .

Após determinar os valores da incógnita \tilde{Y} , é possível determinar os valores do coeficiente de pressão no ponto de controle do painel i (RICCI, 2002):

$$C_{p_i} = 2\tilde{Y}_i + 1 \quad (38)$$

O coeficiente de pressão, calculado pela equação (38), é utilizado para se obter o coeficiente de arrasto de forma e a parcela do coeficiente de sustentação, que, em conjunto com a parcela obtida pela tensão cisalhante, permite obter os coeficientes de sustentação e de arrasto total, sendo a parcela do arrasto total obtida pela tensão cisalhante desconsiderada do presente trabalho, tornando-se foco para um estudo posterior mais aprofundado, por exemplo, para o

mesmo problema proposto nesta dissertação, porém, levando-se em conta esta parcela na contabilização dos coeficientes de arrasto e sustentação totais.

4 MÉTODO DE SOLUÇÃO

Ao utilizar uma descrição lagrangiana, conforme o método de vórtices discretos possibilita, o campo de velocidades é calculado apenas nas posições em que há vórtices discretos. Encontrar o campo de velocidades de cada um dos vórtices discretos que compõe a nuvem é fundamental para garantir que a posição de cada um deles, no passo de tempo subsequente será encontrada de maneira adequada.

O cálculo do campo de velocidades do escoamento leva em consideração três influências:

- Escoamento incidente: essa influência é levada em consideração através de um cálculo simples, uma vez que o escoamento induz a mesma velocidade em todos os vórtices discretos presentes no domínio computacional;
- Fronteira sólida: induz velocidade na nuvem de vórtices discretos, a qual é calculada através do método de painéis (Katz & Plotkin, 1991);
- Nuvem de vórtices discretos: os vórtices discretos de Lamb interagem entre si, sendo esta a parcela mais custosa do cálculo do campo de velocidades do escoamento, uma vez que cada vórtice discreto induz velocidade em todos os outros presentes na nuvem.

Para este trabalho, o algoritmo utilizado segue um esquema de avanço de primeira ordem de Euler (FERZIGER, 1981) para simular a advecção da nuvem de vórtices discretos nas simulações realizadas com o cilindro circular, e o método de Adams-Bashforth (FERZIGER et al., 2020) nas simulações utilizando o aerofólio; o Método de Avanço Randômico (CHORIN, 1973; LEWIS, 1991) é o escolhido para contabilizar os efeitos da difusão viscosa da vorticidade. A solução da etapa potencial é obtida com a utilização do método de painéis, que é caracterizado por discretizar as fronteiras sólidas em painéis que podem ser planos ou curvos, sob os quais são dispostas singularidades que podem ser de três tipos: fontes, vórtices ou dipolos. Estas singularidades podem ser distribuídas de maneira constante, linear ou de ordens superiores (KATZ; PLOTKIN, 1991).

Além disso, para reduzir o tempo computacional devido à solução da etapa advectiva, implementa-se o método de multipolos rápidos (GREENGARD; ROKHLIN, 1987) para acelerar os cálculos da interação vórtice-vórtice. Este método tem por objetivo reduzir as interações entre cada um dos vórtices discretos, substituindo estas por interações entre caixas quadradas, que contêm conjuntos de vórtices discretos; tais caixas são criadas no domínio

computacional a fim de computar a influência da nuvem de vórtices discretos no cálculo do campo de velocidades do escoamento.

4.1 DETERMINAÇÃO DO CAMPO DE VELOCIDADES DO ESCOAMENTO UTILIZANDO-SE UMA ABORDAGEM LAGRANGIANA

Para acompanhar a trajetória de uma partícula de vorticidade qualquer, k , utiliza-se a equação (39):

$$\frac{d\vec{x}_k}{dt} = \vec{u}_k(\vec{x}_k, t) \quad (39)$$

Com base na equação (39), nota-se que é necessário calcular o campo de velocidades do escoamento na posição ocupada por cada um dos vórtices discretos de Lamb utilizados para discretizar o campo de vorticidade, para simular a advecção desta propriedade do escoamento. É possível dividir a etapa da solução da advecção em duas:

- Determinar, a cada passo de tempo, o campo de velocidades do escoamento na posição ocupada por cada um dos vórtices discretos de Lamb utilizados para discretizar a vorticidade;
- Após encontrar o campo de velocidades, resolve-se a equação da trajetória de cada vórtice discreto presente no domínio computacional (equação (39)).

4.1.1 A contribuição do escoamento incidente

Os cálculos para computar a parcela devido ao escoamento incidente são relativamente simples, uma vez que ele induz a mesma velocidade em cada um dos vórtices discretos presentes no domínio computacional. Assim, considerando o problema já adimensionalizado, é possível escrever os componentes da velocidade do escoamento incidente como:

$$u_\infty = U \cos \varphi = \cos \varphi = 1 \quad (40)$$

$$v_\infty = U \sin \varphi = \sin \varphi = 0 \quad (41)$$

sendo φ o ângulo de incidência do escoamento, u_∞ e v_∞ os componentes da velocidade do

escoamento incidente, U , nas direções x e y , respectivamente.

4.1.2 A contribuição da fronteira sólida: o método de painéis

Diversas aplicações em engenharia utilizam aerofólios da família *National Advisory Committee for Aeronautics* (NACA).

Opta-se, no presente trabalho, por utilizar o perfil NACA 0012 em todas as simulações, pois este perfil é utilizado em diversas situações práticas de engenharia, como turbinas eólicas, aeronaves e drones. Este perfil possui uma espessura máxima igual a 12% do valor da corda, sendo um dos perfis com menor espessura encontrados. A dificuldade de simular o comportamento aerodinâmico de corpos com a razão espessura-comprimento baixos está na necessidade de se fazer uma modelagem em escalas espaciais reduzidas, dificultando a convergência e estabilidade numérica dos algoritmos (TIMMER, 2009). Assim, avaliar o escoamento ao redor de um perfil NACA 0012 é uma boa forma de validar o algoritmo do método de vórtices discretos utilizado no presente trabalho.

Estes perfis, de quatro dígitos, são especificados de acordo com a nomenclatura NACA MPTT, sendo M o máximo arqueamento do perfil, P , a posição da corda em que o máximo arqueamento se encontra e TT a espessura máxima do perfil, medidos em porcentagem de corda do aerofólio.

Detalhes acerca da discretização de perfis aerodinâmicos da série NACA de quatro dígitos podem ser encontrados em Carvalho Júnior (2016).

A discretização do corpo em painéis é feita partindo-se do bordo de fuga e no sentido horário. Cada painel é delimitado por pontos extremos e cada ponto central é chamado de ponto de controle, no qual as condições de contorno de impenetrabilidade e de não-deslizamento, que compõem a condição de aderência, devem ser satisfeitas.

A condição de impenetrabilidade, em particular, é satisfeita com a utilização do método de painéis (KATZ; PLOTKIN, 1991), o qual consiste em distribuir singularidades (fontes, vórtices, dipolos) sobre os painéis que discretizam as fronteiras sólidas presentes no domínio computacional; tais singularidades podem ser distribuídas das seguintes formas:

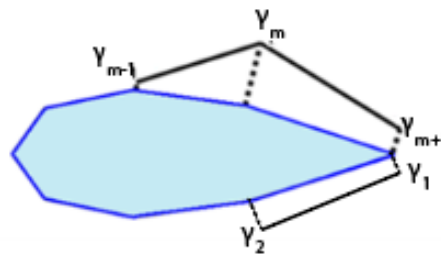
- Distribuição concentrada: quando a singularidade é alocada no ponto de controle do painel (o seu ponto central);
- Distribuição constante: quando as singularidades são distribuídas de maneira uniforme

sobre cada um dos painéis;

- Distribuição linear: quando as singularidades são distribuídas linearmente sobre os painéis.

Na Figura 9, apresenta-se um perfil aerodinâmico qualquer discretizado em m painéis planos com singularidades do tipo vórtices distribuídas de maneira linear.

Figura 9 – Singularidades do tipo vórtices distribuídas linearmente sobre os m painéis planos utilizados para discretizar um perfil aerodinâmico qualquer.



Fonte: Adaptado de Silva (2005).

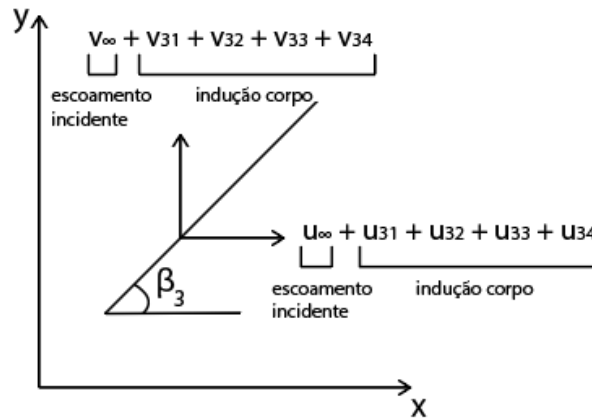
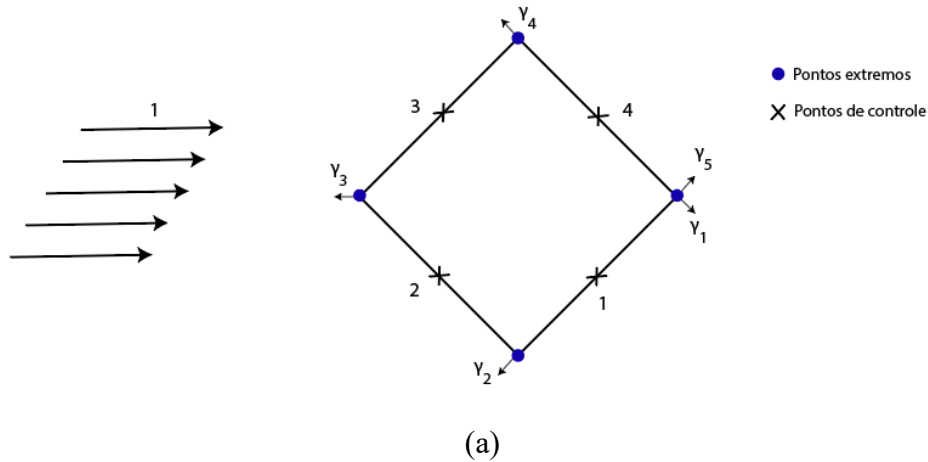
Para decidir qual a melhor singularidade a ser utilizada na modelagem do problema em estudo, deve-se levar em conta cada uma das situações físicas abordadas. Há um certo grau de arbitrariedade, porém, o conjunto de equações deve ser capaz de representar o fenômeno físico que se deseja estudar.

A discretização de corpos simétricos, como, por exemplo, os cilindros e alguns aerofólios, pode ser feita com qualquer uma das três singularidades. No caso do presente trabalho, apesar de o aerofólio em questão ser simétrico (NACA 0012), opta-se por utilizar singularidades do tipo vórtice para discretizá-lo, uma vez que se deseja calcular os coeficientes aerodinâmicos para situações em que o corpo está submetido a ângulos de ataque diversos e não seria possível captar as variações no coeficiente de sustentação utilizando-se singularidades do tipo fontes.

Assim, para o aerofólio, deve-se satisfazer a condição de contorno de Dirichlet (velocidade tangencial nula) (MARTENSEN, 1959).

A título de exemplificação, na Figura 10(a), apresenta-se um corpo genérico discretizado em quatro painéis planos, em que são distribuídas singularidades do tipo vórtice de maneira linear e, na Figura 10(b), apresenta-se os componentes da velocidade induzida no painel 3 pelos outros painéis que discretizam o corpo e pelo escoamento incidente.

Figura 10 – (a) Discretização de um corpo genérico em $m = 4$ painéis planos; (b) Componentes da velocidade induzida em um dos painéis utilizados para discretizar o corpo.



(b)

Fonte: Autoria própria.

Na Figura 10, β_i é o ângulo de inclinação do painel i , u_{ip} e v_{ip} são os componentes da velocidade induzida no ponto de controle do painel i pelas singularidades distribuídas sobre o painel p .

Assim, a condição de contorno de impenetrabilidade, garantida através da utilização do método de painéis, exige que (veja o painel 3 destacado na Figura 10(b)):

$$-u_{\infty} \sin \beta_3 + v_{\infty} \cos \beta_3 - u_{31} \sin \beta_3 + v_{31} \cos \beta_3 - u_{32} \sin \beta_3 + v_{32} \cos \beta_3 + u_{33} \sin \beta_3 + v_{33} \cos \beta_3 - u_{34} \sin \beta_3 + v_{34} \cos \beta_3 = 0 \quad (42)$$

A equação (42) impõe a condição de impenetrabilidade no painel 3, e o mesmo equacionamento deve ser realizado para todos os painéis utilizados para discretizar o corpo.

Como mencionado anteriormente, para a discretização do corpo são utilizados painéis

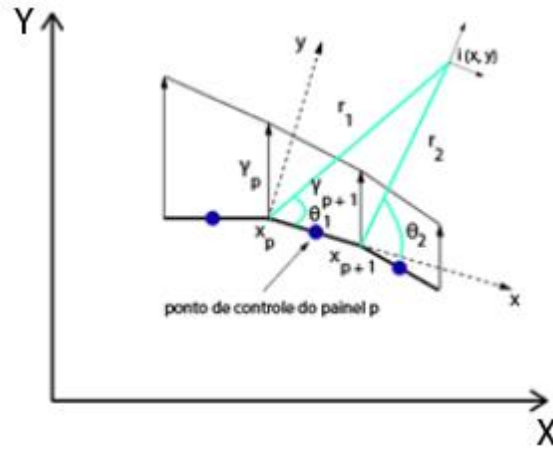
com singularidades do tipo vórtices distribuídas de maneira linear. Na Figura 11, mostram-se os componentes da velocidade, u_{ip} e v_{ip} induzidos pela distribuição linear de vorticidade de um painel p em um ponto i qualquer do domínio computacional. Estes componentes da velocidade induzida são calculados de acordo com as Eqs. (43) e (44) (KATZ; PLOTKIN, 1991).

$$u_{ip} = \frac{\gamma_p}{2\pi(x_{p+1} - x_p)} \left[(x_{p+1} - x)(\theta_2 - \theta_1) - y \ln \frac{r_2}{r_1} \right] + \frac{\gamma_{p+1}}{2\pi(x_{p+1} - x_p)} \left[x(\theta_2 - \theta_1) + y \ln \frac{r_2}{r_1} \right] \quad (43)$$

$$v_{ip} = \frac{\gamma_p}{2\pi(x_{p+1} - x_p)} \left[(x_{p+1} - x) \ln \frac{r_2}{r_1} - x_{p+1} + y(\theta_2 - \theta_1) \right] + \frac{\gamma_{p+1}}{2\pi(x_{p+1} - x_p)} \left[(x_{p+1} - x_p) - y(\theta_2 - \theta_1) + x \ln \frac{r_2}{r_1} \right] \quad (44)$$

Nas equações (43) e (44), γ_p representa o valor da distribuição de vórtices no primeiro ponto extremo do painel p (ponto $(x_p; 0)$), γ_{p+1} representa o valor da distribuição de vórtices no segundo ponto extremo do painel p (ponto $(x_{p+1}; 0)$) – veja a Figura (9) – r_1 , r_2 , θ_1 e θ_2 são definidos de acordo com a Figura 11 e $i(x; y)$ representa um ponto qualquer do domínio computacional (pode ser um local no domínio fluido ou o ponto de controle de um painel) cujas coordenadas $(x; y)$ são medidas em relação a um referencial local (definido no painel p).

Figura 11. Velocidade induzida em um ponto i do domínio computacional por um painel qualquer, p , sobre o qual são distribuídas singularidades do tipo vórtice de maneira linear.



Fonte: Adaptado de Carvalho Júnior (2016).

Para facilitar o equacionamento, é possível escrever as equações (43) e (44) como:

$$u_{ip} = \gamma_p A_{ip} + \gamma_{p+1} B_{ip} \quad (45)$$

$$v_{ip} = \gamma_p C_{ip} + \gamma_{p+1} D_{ip} \quad (46)$$

sendo:

$$A_{ip} = \frac{1}{2\pi(x_{p+1} - x_p)} \left[(x_{p+1} - x)(\theta_2 - \theta_1) - y \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

$$B_{ip} = \frac{1}{2\pi(x_{p+1} - x_p)} \left[x(\theta_2 - \theta_1) + y \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

$$C_{ip} = \frac{1}{2\pi(x_{p+1} - x_p)} \left[(x_{p+1} - x) \ln \frac{r_2}{r_1} - x_{p+1} + y(\theta_2 - \theta_1) \right]$$

$$D_{ip} = \frac{1}{2\pi(x_{p+1} - x_p)} \left[(x_{p+1} - x_p) - y(\theta_2 - \theta_1) + x \ln \frac{r_2}{r_1} \right]$$

As funções núcleo, designadas pelas variáveis A_{ip} , B_{ip} , C_{ip} e D_{ip} , se referem aos componentes da velocidade induzida no ponto de controle de um painel qualquer, i , quando a

distribuição de vórtices no painel p for unitária.

Partindo-se da equação (42) e utilizando as funções núcleo, escreve-se:

$$\begin{aligned} & \gamma_1(-A_{31} \operatorname{sen} \beta_3 + C_{31} \cos \beta_3) \\ & + \gamma_2(-B_{31} \operatorname{sen} \beta_3 + D_{31} \cos \beta_3 - A_{32} \operatorname{sen} \beta_3 + C_{32} \cos \beta_3) \\ & + \gamma_3(-B_{32} \operatorname{sen} \beta_3 + D_{32} \cos \beta_3 - A_{33} \operatorname{sen} \beta_3 + C_{33} \cos \beta_3) \\ & + \gamma_4(-B_{33} \operatorname{sen} \beta_3 + D_{33} \cos \beta_3 - A_{34} \operatorname{sen} \beta_3 + C_{34} \cos \beta_3) \\ & + \gamma_5(-B_{34} \operatorname{sen} \beta_3 + D_{34} \cos \beta_3) = u_\infty \operatorname{sen} \beta_3 - v_\infty \cos \beta_3 \end{aligned} \quad (47)$$

Para facilitar a compreensão da equação (47), os termos entre parênteses podem ser substituídos pelos seguintes coeficientes:

$$\begin{aligned} K_{31} &= -A_{31} \operatorname{sen} \beta_3 + C_{31} \cos \beta_3 \\ K_{32} &= -B_{31} \operatorname{sen} \beta_3 + D_{31} \cos \beta_3 - A_{32} \operatorname{sen} \beta_3 + C_{32} \cos \beta_3 \\ K_{33} &= -B_{32} \operatorname{sen} \beta_3 + D_{32} \cos \beta_3 - A_{33} \operatorname{sen} \beta_3 + C_{33} \cos \beta_3 \\ K_{34} &= -B_{33} \operatorname{sen} \beta_3 + D_{33} \cos \beta_3 - A_{34} \operatorname{sen} \beta_3 + C_{34} \cos \beta_3 \\ K_{35} &= -B_{34} \operatorname{sen} \beta_3 + D_{34} \cos \beta_3 \end{aligned}$$

Portanto, a equação (47) passa a ser escrita tal que:

$$K_{31}\gamma_1 + K_{32}\gamma_2 + K_{33}\gamma_3 + K_{34}\gamma_4 + K_{35}\gamma_5 = u_\infty \operatorname{sen} \beta_3 - v_\infty \cos \beta_3 \quad (48)$$

O lado direito da equação (48) pode ser escrito como:

$$\text{RHS}_3 = u_\infty \operatorname{sen} \beta_3 - v_\infty \cos \beta_3 \quad (49)$$

Substituindo a equação (49) na equação (48), obtém-se:

$$K_{31}\gamma_1 + K_{32}\gamma_2 + K_{33}\gamma_3 + K_{34}\gamma_4 + K_{35}\gamma_5 = \text{RHS}_3 \quad (50)$$

A equação (50) garante a condição de impenetrabilidade apenas para o painel 3 (Figura

10(b)). Estendendo esta condição para os demais painéis que discretizam o corpo, escreve-se:

$$\begin{aligned}
 K_{11}\gamma_1 + K_{12}\gamma_2 + K_{13}\gamma_3 + K_{14}\gamma_4 + K_{15}\gamma_5 &= \text{RHS}_1 \\
 K_{21}\gamma_1 + K_{22}\gamma_2 + K_{23}\gamma_3 + K_{24}\gamma_4 + K_{25}\gamma_5 &= \text{RHS}_2 \\
 K_{31}\gamma_1 + K_{32}\gamma_2 + K_{33}\gamma_3 + K_{34}\gamma_4 + K_{35}\gamma_5 &= \text{RHS}_3 \\
 K_{41}\gamma_1 + K_{42}\gamma_2 + K_{43}\gamma_3 + K_{44}\gamma_4 + K_{45}\gamma_5 &= \text{RHS}_4
 \end{aligned} \tag{51}$$

Às Eqs. (51) deve ser acrescentada uma equação que imponha a condição de Kutta, a qual garante a continuidade da pressão no bordo de fuga de perfis aerodinâmicos, fazendo com que as velocidades nos painéis inferior e superior do bordo de fuga (nesta explanação, seriam os painéis 1 e 4, respectivamente) sejam iguais. A condição de Kutta é válida apenas em regime permanente e, no caso do presente trabalho, deve ser imposta apenas quando não há vórtices discretos no domínio computacional, ou seja, quando a simulação numérica se encontra no passo zero ($step = 0$). Matematicamente, a condição de Kutta é escrita como:

$$\gamma_1 + \gamma_5 = 0 \tag{52}$$

Portanto, a equação (52) deve ser acrescentada às Eqs. (51) para formar um sistema de equações que, matricialmente, é escrito como:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{RHS}_1 \\ \text{RHS}_2 \\ \text{RHS}_3 \\ \text{RHS}_4 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{53}$$

É possível tornar a equação (53) genérica para os m painéis utilizados para discretizar o corpo, escrevendo-a como:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots & K_{1m} & K_{1m+1} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots & K_{2m} & K_{2m+1} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \dots & K_{3m} & K_{3m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ K_{m1} & K_{m2} & K_{m3} & \dots & K_{mm} & K_{mm+1} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \vdots \\ \gamma_m \\ \gamma_{m+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} RHS_1 \\ RHS_2 \\ RHS_3 \\ \vdots \\ RHS_m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (54)$$

É possível escrever a equação (54) de forma mais compacta:

$$[COUP]_{m+1 \times m+1} \{\gamma\}_{m+1} = \{RHS\}_{m+1} \quad (55)$$

sendo:

$COUP_{ip}$: elemento da matriz de influência de vórtices (oriunda do método de painéis – solução potencial do problema), que representa a velocidade normal induzida pelas singularidades distribuídas sobre o painel p , no ponto de controle do painel i ; os termos entre parênteses na equação (47) evidenciam que os coeficientes da matriz dependem apenas da geometria do problema. É importante informar que os coeficientes da diagonal principal da matriz têm o valor de $-1/2$ e correspondem à velocidade normal induzida em um painel sobre si, sendo possível encontrar maiores detalhes sobre a autoindução em Katz e Plotkin (1991);

γ_p : valor da singularidade (vórtice) no primeiro ponto extremo do painel p (veja as Figuras. 10(a) e 11); trata-se da incógnita do problema;

RHS_i : elemento do vetor que representa a velocidade normal induzida pelo escoamento incidente e pelo campo de vorticidades no ponto de controle do painel i .

Deve-se ressaltar que o vetor RHS_i apresentado na equação (49) inclui apenas a influência do escoamento incidente, correspondendo apenas à solução da etapa potencial da simulação numérica ($step = 0$). Porém, conforme mostrado na seção 4.1.3, a cada passo de tempo, vórtices discretos nascentes são incluídos no domínio computacional para representar o campo de vorticidades do escoamento. Assim, para levar em consideração a velocidade induzida pelos vórtices discretos no ponto de controle de cada um dos painéis, a partir do primeiro passo de

tempo da simulação numérica ($step \geq 1$), o vetor RHS deve ser atualizado conforme a equação (56):

$$RHS_i = u_\infty \sin \beta_i - v_\infty \cos \beta_i + \sum_{j=1}^Z (u_{ij} \sin \beta_i - v_{ij} \cos \beta_i) \quad (56)$$

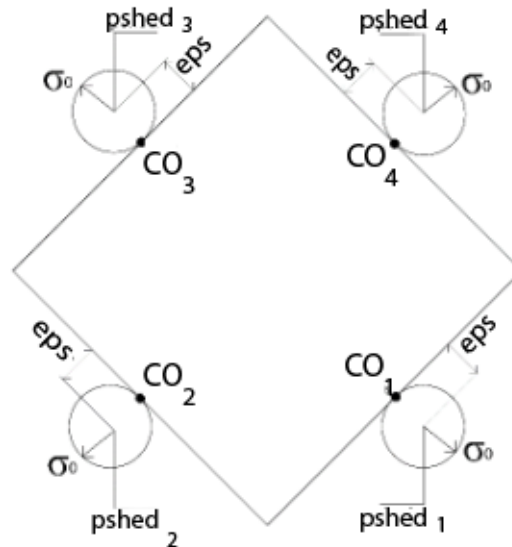
sendo u_{ij} e v_{ij} os componentes da velocidade induzida pelo vórtice discreto j no ponto de controle do painel i e Z o número total de vórtices discretos presentes no domínio computacional no instante de tempo em que este cálculo é realizado (veja a Seção 4.1.3).

4.1.3 Geração de vorticidade associada ao modelo de rugosidade

A viscosidade, presente nos fluidos, faz com que haja o desenvolvimento de camada limite no escoamento ao redor de fronteiras sólidas, gerando vorticidade nestas fronteiras.

Numericamente, para garantir a condição de não-deslizamento e anular o componente tangencial da velocidade da partícula fluida em contato com a superfície do corpo, vórtices discretos de Lamb são gerados a cada passo de tempo da simulação numérica. Essa geração ocorre posicionando um vórtice discreto, de modo a tangenciar o ponto de controle de cada um dos painéis utilizados para discretizar o corpo, a cada incremento de tempo, Δt . Para exemplificar a geração de vorticidade, a Figura 12 apresenta um corpo, de forma arbitrária, discretizado em quatro painéis planos.

Figura 12 – Geração de vórtices discretos de Lamb nas vizinhanças dos painéis utilizados para discretizar o corpo hidraulicamente liso.



Fonte: Adaptado de Bimbato (2012).

Na Figura 12 identifica-se:

co_1, co_2, co_3 e co_4 : pontos de controle dos painéis;

$pshed_1, pshed_2, pshed_3$ e $pshed_4$: pontos de desprendimento de vórtices discretos;

eps : distância de geração dos vórtices discretos, que, no caso do presente trabalho, é igual ao raio do núcleo dos vórtices discretos de Lamb (σ_0), impondo que os vórtices discretos nascentes sempre tangenciem o ponto de controle do painel onde ele é gerado (ALCÂNTARA PEREIRA, 1999).

Após a obtenção da solução da equação (54), a intensidade de cada um dos vórtices discretos gerados, a cada instante de tempo, é calculada utilizando-se a equação (57):

$$\Gamma_i = \frac{(\gamma_i + \gamma_{i+1})}{2} \Delta S_i \quad (57)$$

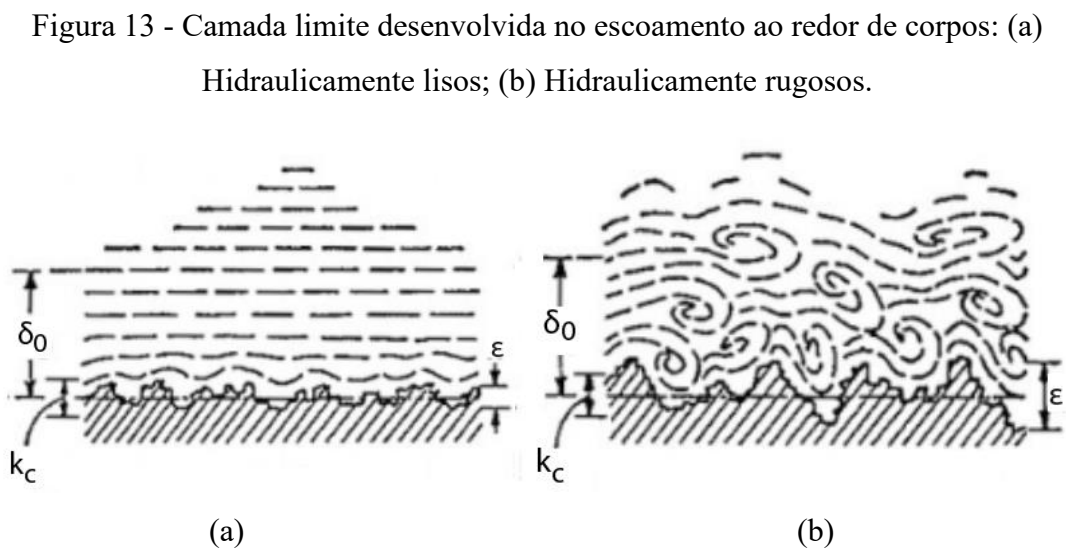
sendo ΔS_i o comprimento do painel i , γ_i e γ_{i+1} a intensidade da singularidade (vórtice) nos pontos extremos do painel i , calculada pela equação (55).

Por conta da condição de aderência (ação da viscosidade), o perfil de velocidades nas proximidades da parede não é uniforme, o que ocasiona a rotação das partículas fluidas no interior da camada limite. Esse efeito evidencia a presença da vorticidade nas proximidades da parede. A maiores distâncias da parede, ou seja, fora da camada limite, o perfil de velocidades do escoamento é uniforme (com velocidade igual à velocidade do escoamento incidente) e as

partículas fluidas não sofrem rotação nessa região, chamada de irrotacional.

4.1.3.1 Modelagem da rugosidade superficial

A rugosidade superficial está presente em todas as superfícies, seja ela de maior ou menor tamanho, uma vez que uma superfície perfeitamente lisa é impossível de se obter. É possível considerar uma superfície como sendo hidraulicamente lisa quando a dimensão de sua rugosidade superficial (ε) for menor do que a dimensão da espessura da subcamada viscosa (k_c), conforme esquematizado na Figura 13(a). Na Figura 13(b), apresenta-se a situação em que a rugosidade superficial supera a espessura da subcamada viscosa, causando perturbações na camada limite (δ_0) do escoamento; neste caso, a superfície é considerada hidraulicamente rugosa.

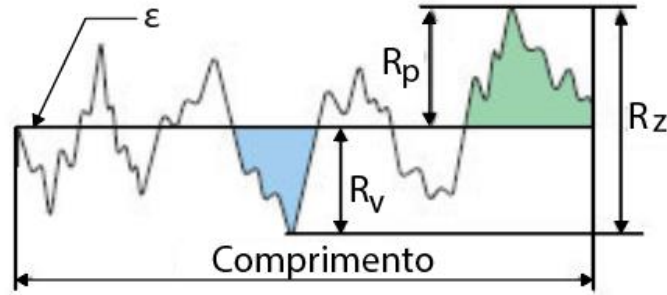


Fonte: Adaptado de Chow (1959).

Uma ilustração da rugosidade superficial é mostrada na Figura 14, na qual descreve-se os parâmetros utilizados para representar a rugosidade superficial, sendo eles: ε , a rugosidade superficial média; R_p , o maior pico em relação à média; R_v , o menor vale em relação à média;

R_z , a soma dos dois parâmetros anteriores ($R_z = R_p + R_v$) (JOSSO et al., 2002).

Figura 14 - Representação da rugosidade superficial e os parâmetros envolvidos.



Fonte: Adaptado de Josso et al., 2002.

O modelo numérico de rugosidade utilizado no presente trabalho origina-se do modelo desenvolvido por Bimbato (2012), o qual foi proposto para ser utilizado em simulações lagrangianas em conjunto com uma formulação do método de painéis que utilizava singularidades do tipo fontes para discretizar as fronteiras sólidas. Posteriormente, para se utilizar singularidades do tipo vórtice distribuídas linearmente, Carvalho (2023) adaptou o modelo proposto por Bimbato (2012), como é apresentado a seguir.

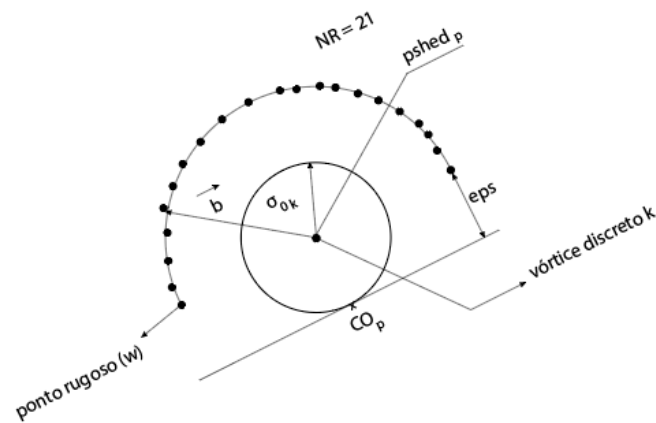
Bimbato (2012) partiu do princípio de que a rugosidade de um contorno sólido é capaz de estimular o desenvolvimento da turbulência no escoamento e utilizou a ideia da função estrutura de velocidade de segunda ordem (apresentada na equação (24)) com algumas adaptações, a fim de determinar a atividade turbulenta que existe em torno dos pontos de desprendimento de vórtices discretos (*psued*) associados a cada painel p utilizado para discretizar a superfície do corpo. No cálculo da função estrutura de velocidade de segunda ordem, os pontos sobre os quais as velocidades devem ser calculadas situam-se sobre uma semicircunferência definida por um raio que obedece a função $|\vec{b}| = 2\epsilon - eps$, cujo centro coincide com os pontos de desprendimentos dos vórtices discretos de um painel p (Figura 15) (BIMBATO, 2012):

$$\bar{F}_{2p}(t) = \frac{1}{NR} \sum_{w=1}^{NR} \left\| \vec{u}_{tp}(\vec{x}_p, t) - \vec{u}_{tw}(\vec{x}_p + \vec{b}, t) \right\|_w^2 (1 + \epsilon) \quad (58)$$

sendo $\vec{u}_{tp}(\vec{x}_p, t)$ o campo de velocidades do escoamento calculado no ponto \vec{x}_p e no instante

de tempo t , $\vec{u}_{t_w}(\vec{x}_p + \vec{b}, t)$, o campo de velocidades do escoamento calculado nos NR pontos rugosos situados sobre a semicircunferência (Figura 15) no instante de tempo t e $(1 + \varepsilon)$ é um termo responsável pela amplificação da energia cinética do escoamento por conta dos efeitos da rugosidade da superfície sólida.

Figura 15 – Influência da rugosidade de superfícies sólidas no desenvolvimento da turbulência no escoamento.



Fonte: Adaptado de Bimbato (2012).

Como consequência, pode-se obter o coeficiente de viscosidade turbulenta associado a cada ponto de desprendimento de vórtice discreto, como Bimbato (2012):

$$v_{t_p}(t) = 0,105 C_k^{-3/2} \sigma_{0k} \sqrt{\bar{F}_{2p}(t)} \quad (59)$$

em que σ_{0k} é o raio do núcleo de um vórtice discreto k , posicionado no ponto de desprendimento de um painel p , de maneira a tangenciar o ponto de controle deste (Figura 15).

Como consequência, deve ser feita uma modificação no número de Reynolds, de modo a acrescentar o coeficiente de viscosidade turbulenta, somando-o ao coeficiente de viscosidade molecular, conforme a equação (60). Tal modificação ocorre apenas nos pontos de desprendimento dos vórtices discretos em que os efeitos da rugosidade devem ser levados em consideração, ou seja, onde $v_{t_p}(t) \neq 0$. Uma vez que o raio do núcleo do vórtice discreto varia em função do número de Reynolds, o qual, por sua vez, varia com o coeficiente de viscosidade turbulenta, conclui-se que o raio do núcleo do vórtice discreto também deve ser modificado, a fim de considerar os efeitos da rugosidade no processo de geração dos vórtices discretos,

conforme a equação (62) (BIMBATO, 2012):

$$Re_{c_p}(t) = \frac{U^* c^*}{\nu + \nu_{tp}(t)} \quad (60)$$

$$\sigma_{0c_k}(t) = 4,48364 \sqrt{\frac{\Delta t}{Re} \left(1 + \frac{\nu_{tp}(t)}{\nu} \right)} \chi \quad (61)$$

sendo σ_{0c_k} o raio do núcleo de um vórtice discreto nascente k , levando-se em consideração o efeito da rugosidade superficial. Ele, assim como o número de Reynolds modificado, Re_c , é variável com o tempo, t , e o parâmetro χ é calculado de acordo com Bimbato (2012).

Uma vez que cada vórtice discreto gerado nas proximidades dos painéis deve tangenciar o ponto de controle do respectivo painel, as posições dos pontos de desprendimento de vórtices discretos, bem como a distância desses pontos até o ponto de controle dos painéis, são variáveis no tempo.

O modelo proposto por Bimbato (2012) foi utilizado em diversos trabalhos que contam com singularidades do tipo fontes nos painéis planos utilizados para discretizar o corpo. Para se utilizar este modelo com singularidades do tipo vórtice, como é o caso do presente trabalho, Carvalho (2023) adaptou o modelo proposto por Bimbato (2012).

Esta adaptação foi feita, pois, da maneira como o modelo foi proposto por Bimbato (2012), não é possível realizar simulações dos efeitos da rugosidade superficial para as situações em que o raio do núcleo do vórtice discreto, σ_0 , supera o comprimento da rugosidade média, ε , da superfície do corpo ; nestas situações, que ocorrem frequentemente quando se utiliza o método de painéis com singularidades do tipo vórtice, a semicircunferência da Figura (15) fica dentro do núcleo do vórtice discreto de Lamb, impossibilitando a utilização do método (CARVALHO, 2023).

A fim de resolver este problema, Carvalho (2023) adaptou a posição dos pontos da semicircunferência originalmente construídos como na Figura 15. Para tanto, o raio da semicircunferência foi alterado de $|\vec{b}| = 2\varepsilon - eps$ para $|\vec{b}| = 2\varepsilon + eps$, garantindo que $|\vec{b}| \geq \sigma_0$, para qualquer valor que o raio do núcleo do vórtice discreto assuma durante a simulação numérica.

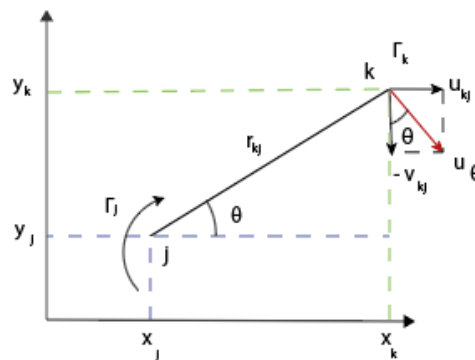
4.1.4 A contribuição da nuvem de vórtices discretos

Com as influências do escoamento incidente e da fronteira sólida no cálculo do campo de velocidades do escoamento, resta contabilizar a parcela relativa à nuvem de vórtices discretos, responsável pela maior parte do tempo de CPU.

Os elementos discretos de vorticidade são responsáveis por representar a vorticidade presente no escoamento, sendo transportados de acordo com a equação (33). A discretização do campo de vorticidades é fundamental para a obtenção de uma solução numérica acurada e deve ser feita de modo a não comprometer excessivamente o custo computacional das simulações numéricas.

No caso do presente trabalho, utiliza-se o modelo do vórtice discreto de Lamb, que possui o conceito de núcleo viscoso (para mais detalhes, veja Alcântara Pereira (1999)). Ao se considerar dois vórtices discretos quaisquer j e k (vide Figura 16), é possível obter os componentes da velocidade tangencial induzida no vórtice discreto k por conta da presença do vórtice discreto j , de acordo com as equações (62) e (63).

Figura 16 – Velocidade induzida em um vórtice discreto qualquer, k , por um vórtice discreto j .



Fonte: Autoria própria.

$$u_{kj} = \sum_{j=1}^Z \Gamma_j U_{kj}, j \neq k \quad (62)$$

$$v_{kj} = \sum_{j=1}^Z \Gamma_j V_{kj}, j \neq k \quad (63)$$

sendo, para os casos em que $r_{kj} \leq \sigma_{0c_j}$ (ALCÂNTARA PEREIRA, 1999):

$$U_{kj} = \frac{1}{2\pi} \frac{(y_k - y_j)}{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2} \left[1 - \exp\left(-5,02572 \frac{r_{kj}^2}{\sigma_{0c_j}^2}\right) \right] \quad (64)$$

$$V_{kj} = -\frac{1}{2\pi} \frac{(x_k - x_j)}{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2} \left[1 - \exp\left(-5,02572 \frac{r_{kj}^2}{\sigma_{0c_j}^2}\right) \right] \quad (65)$$

Para os casos em que $r_{kj} > \sigma_{0c_j}$, utiliza-se o modelo do vórtice potencial, que não possui o conceito do núcleo viscoso e, por esta razão, as expressões de U_{kj} e V_{kj} não apresentam o exponencial, o que contribui para a redução do tempo computacional da interação vórtice-vórtice.

$$U_{kj} = \frac{1}{2\pi} \frac{(y_k - y_j)}{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2} \quad (66)$$

$$V_{kj} = -\frac{1}{2\pi} \frac{(x_k - x_j)}{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2} \quad (67)$$

De acordo com as equações (62) e (63), conclui-se que um vórtice discreto não induz velocidade sobre ele mesmo.

Uma vez que para realizar os cálculos utilizando-se a lei de Biot-Savart são necessárias Z^2 operações do processador para Z vórtices discretos presentes na nuvem, o tempo de simulação, por vezes, torna-se impeditivo para situações em que se deseja simular o problema proposto com maior acurácia, ou seja, com maior quantidade de vórtices discretos no domínio computacional.

Portanto, para reduzir o tempo de CPU devido ao cálculo da interação vórtice-vórtice, utiliza-se um algoritmo acelerador denominado de método de multipolos rápidos, FMM (do inglês, *Fast Multipole Method*). Com a utilização deste método, a interação passa a ocorrer majoritariamente entre caixas quadradas, utilizadas para dividir o domínio computacional, não mais entre cada uma das partículas, como quando a lei de Biot-Savart é utilizada.

A lei de Biot-Savart não é completamente abandonada durante a simulação numérica, porém, seu uso passa a ocorrer apenas em situações específicas, não contempladas pelo método de multipolos rápidos

O Apêndice A, contido nesta dissertação, traz a formulação geral do método de multipolos

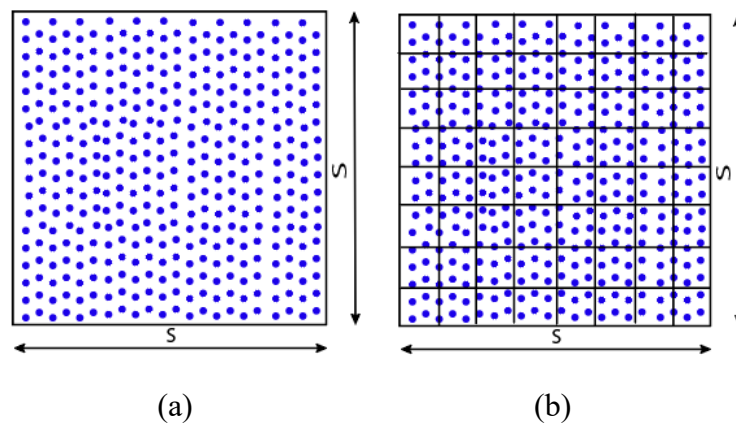
rápidos, bem como a sua implementação numérica no código computacional desenvolvido neste trabalho, e foi baseado nos trabalhos de Greengard e Rokhlin (1987), Nishimura (2002) e Ricciardi (2016).

Nesta seção, será apresentado um apanhado geral do método, a fim de esclarecer como ele funciona.

O modelo hierárquico utilizado é o de refinamento global, sendo mais conveniente em caso de distribuição uniforme de partículas no domínio. Esse algoritmo é baseado na divisão do domínio computacional em caixas quadradas, desde o primeiro nível de refinamento, que possui quatro caixas, até um nível de refinamento n , que possui 4^n caixas. Este refinamento pode ser feito até um nível previamente prescrito, ou todas as vezes em que a razão entre a quantidade de partículas e o número de caixas no domínio computacional, no nível máximo de refinamento, ultrapassar um limite. Uma caixa quadrada de um nível de refinamento n qualquer, chamada de caixa-pai, dá origem a quatro caixas-filhas no nível de refinamento $n + 1$.

A Figura 17(a) exemplifica o domínio computacional inicialmente delimitado por uma caixa quadrada e a Figura 17(b) mostra o domínio dividido até o terceiro nível de refinamento, que possui 64 caixas.

Figura 17 – Distribuição uniforme de partículas no domínio quadrado de lado S : (a) $n = 0$;
(b) $n = 3$.



Fonte: Autoria própria.

A implementação numérica do método pode ser dividida em algumas etapas. Inicialmente, é feito o pré-processamento, em que o domínio computacional é dividido em caixas quadradas, de acordo com o nível máximo de refinamento desejado; a seguir, são calculadas as posições dos vértices e dos centroides das caixas; além disso, são geradas duas listas: a lista de interação e a lista de caixas vizinhas, que vão determinar quais caixas irão ou

não interagir em cada um dos níveis de refinamento e, para finalizar esta etapa, é feito o mapeamento de partículas, a fim de saber em qual caixa, no nível máximo de refinamento, está cada uma das partículas.

Depois, são feitos os passos do método de multipolos rápidos propriamente dito. O primeiro passo é chamado *particle-to-multipole* e consiste em passar a influência de cada uma das partículas para o centroide da caixa em que elas estão alojadas, no nível máximo de refinamento. Esta é a razão para se fazer o mapeamento das partículas.

O segundo passo é chamado de *multipole-to-multipole*, no qual a influência é passada do centroide das caixas-filhas, no nível de refinamento $n + 1$, para o centroide da caixa-pai, no nível de refinamento n . Este passo é feito desde o nível máximo de refinamento até o segundo nível, pois no primeiro nível de refinamento não há caixas suficientemente distantes para interagir.

O terceiro passo é chamado de *multipole-to-local* e consiste na interação entre as caixas de um mesmo nível de refinamento, pertencentes à lista de interação. O quarto passo é chamado de *local-to-local* e consiste em passar a influência do centroide da caixa-pai, no nível de refinamento n , para a caixa filha, no nível de refinamento $n + 1$, sendo o contrário daquilo feito no passo *multipole-to-multipole*.

Por fim, a influência é passada do centroide das caixas do último nível de refinamento para as partículas que estão dentro delas no passo chamado *local-to-particle*. Além disso, as partículas de uma mesma caixa e de caixas pertencentes à lista de vizinhas interagem através da lei de Biot-Savart, apenas no nível máximo de refinamento, no passo chamado de *particle-to-particle*. Assim, é possível assegurar que todas as partículas interajam entre si, seja diretamente, através da lei de Biot-Savart, utilizada no último nível de refinamento, ou indiretamente, via método de multipolos rápidos.

A utilização correta deste método possibilita que o processador realize $Z \log Z$ operações para Z vórtices discretos ou, na hipótese mais ideal, Z operações para cada Z vórtices discretos presentes no domínio computacional (KOUMOUTSAKOS, 1993).

4.2 ADVECCÃO DA NUVEM DE VÓRTICES DISCRETOS

A velocidade de cada um dos vórtices discretos presentes no domínio computacional sofre a influência do escoamento incidente (equações (40) e (41)), da presença das fronteiras sólidas (equações (45) e (46)) e da nuvem de vórtices discretos, cuja contribuição é dada pelas equações (62) e (63), caso apenas a lei de Biot-Savart seja utilizada; no caso de se utilizar o método de

multipolos rápidos para acelerar esta parcela do cálculo do campo de velocidades do escoamento, utiliza-se as equações entre A.1 – A.15, demonstradas no Apêndice A.

Após realizar o cálculo do campo de velocidades do escoamento, é possível resolver a equação (39). Neste trabalho, nas simulações em que o escoamento ao redor do cilindro é analisado, utiliza-se o esquema de avanço de primeira ordem de Euler, de acordo com as equações (68) e (69) (FERZIGER, 1981), enquanto, nas simulações em que o escoamento ao redor do perfil aerodinâmico é analisado, utiliza-se o esquema de avanço de segunda ordem de Adams-Bashforth, de acordo com as equações (70) e (71).

$$\Delta x_{adv_k} = x_k(t + \Delta t) - x_k(t) = u_{t_k}(t)\Delta t \quad (68)$$

$$\Delta y_{adv_k} = y_k(t + \Delta t) - y_k(t) = v_{t_k}(t)\Delta t \quad (69)$$

$$\Delta x_{adv_k} = x_k(t + \Delta t) - x_k(t) = \left[\frac{3}{2} u_{t_k}(t) - \frac{1}{2} u_{t_k}(t - \Delta t) \right] \Delta t \quad (70)$$

$$\Delta y_{adv_k} = y_k(t + \Delta t) - y_k(t) = \left[\frac{3}{2} v_{t_k}(t) - \frac{1}{2} v_{t_k}(t - \Delta t) \right] \Delta t \quad (71)$$

Nas equações (68) até (71), u_{t_k} e v_{t_k} são as componentes do vetor velocidade do vórtice discreto k , nas direções x e y , respectivamente. Para as simulações em que se utiliza o método de Adams-Bashforth, é necessário armazenar a velocidade de cada um dos vórtices discretos no passo de tempo anterior ($t - \Delta t$).

4.3 DIFUSÃO DA VORTICIDADE

Com base no que foi proposto por Métails e Lesieur (1992), os fenômenos presentes nas escalas submalha do escoamento podem ser levados em conta utilizando-se o coeficiente de viscosidade turbulenta, definido como ν_t , de acordo com a equação (25), em que é utilizado o conceito da função estrutura de velocidade de segunda ordem, \bar{F}_2^* , apresentada na equação (24).

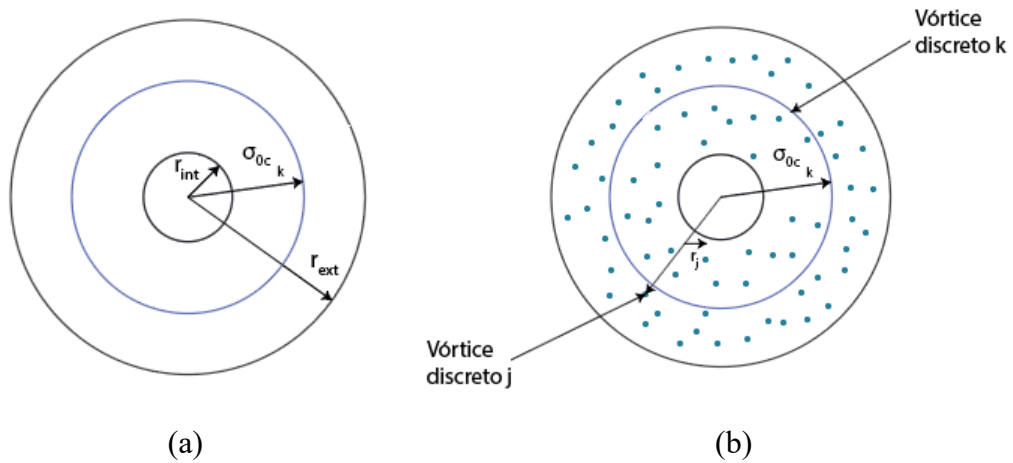
A implementação do modelo de turbulência, neste trabalho, segue duas adaptações apresentadas em Alcântara Pereira (2002):

- os pontos sob os quais as velocidades são calculadas devem estar localizados sobre uma coroa circular definida por $r_{int} = 0,1\sigma_0$ e $r_{ext} = sm \times \sigma_0$, em que r_{int} e r_{ext} são os raios

interno e externo, respectivamente, desta coroa e σ_{0c} é o raio do núcleo do vórtice discreto de Lamb, calculado de acordo com a equação (61) - veja a Figura 18(a). O valor de sm é obtido a partir de um estudo estatístico realizado por Bimbató (2012);

- os pontos em que são calculadas as velocidades devem coincidir com a posição dos vórtices discretos que se encontram nas vizinhanças do vórtice discreto considerado (interior da coroa circular) para calcular a função estrutura de velocidade de segunda ordem, conforme mostrado na Figura 18(b).

Figura 18 – Adaptação do modelo de turbulência para ser utilizado no método de vórtices discretos: (a) Definição da coroa circular; (b) Vórtices discretos dentro da coroa circular.



Fonte: Adaptado de Bimbató (2012).

Se houver vórtices discretos no interior da coroa circular definida ao redor do vórtice discreto em análise, k , a função estrutura de velocidade de segunda ordem é calculada de acordo com:

$$\bar{F}_{2k}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left\| \vec{u}_{tk}(\vec{x}_k, t) - \vec{u}_{tj}(\vec{x}_k + \vec{r}_j, t) \right\|^2 \left(\frac{\sigma_{0ck}}{\vec{r}_j(t)} \right)^{2/3} \quad (72)$$

em que \vec{u}_{tk} é a velocidade total do vórtice discreto k , N é o número de vórtices discretos no interior da coroa circular, \vec{r}_j é a distância entre o vórtice discreto analisado, k , e os pontos no interior da coroa em que se calculam as velocidades (vórtices discretos j) e o último termo, $\left(\sigma_{0ck} / \vec{r}_j(t) \right)^{2/3}$, é utilizado nesta expressão porque os vórtices discretos j não são equidistantes

do vórtice discreto em análise, k (uma adaptação da modelagem LES para métodos lagrangianos realizada por Alcântara Pereira (2002)).

Após o cálculo da função estrutura de velocidade de segunda ordem em um dado instante de tempo, para cada um dos vórtices discretos da nuvem deve-se calcular o coeficiente de viscosidade turbulenta nos pontos em que $\bar{F}_{2k}(t) \neq 0$. Assim:

$$v_{tk}(t) = 0,105C_k^{-3/2}\sigma_{0c_k}\sqrt{\bar{F}_{2k}(t)} \quad (73)$$

Reitera-se que $C_k = 1,4$ é a constante de Kolmogorov e σ_{0c_k} é o raio do núcleo do vórtice discreto, k , modificado pelo modelo de rugosidade.

O número de Reynolds modificado pelas atividades turbulentas é calculado de acordo com:

$$Re_{c_k}(t) = \frac{U^*c^*}{v + v_{tk}(t)} \quad (74)$$

A modificação no número de Reynolds deve ser feita localmente, por conta da atividade turbulenta presente nas vizinhanças da posição ocupada pelo vórtice discreto k . A difusão turbulenta é considerada apenas na etapa da difusão viscosa, pois esta é a etapa responsável pela dissipação de energia.

O Método de Avanço Randômico é o método utilizado no presente trabalho para simular a difusão viscosa da vorticidade. Este é um método de cunho probabilístico, em que a difusão é simulada através da geração de valores aleatórios responsáveis por computar os deslocamentos radial e circunferencial dos vórtices discretos (CHORIN, 1973).

De acordo com o Método de Avanço Randômico, o avanço temporal de um vórtice discreto qualquer, k , da nuvem de vórtices discretos de Lamb, é dado por (CHORIN, 1973):

$$\Delta x_{dif_k} = \Delta r_k \cos \Delta \theta_k \quad (75)$$

$$\Delta y_{dif_k} = \Delta r_k \sin \Delta \theta_k \quad (76)$$

em que Δr_k e $\Delta \theta_k$ são os deslocamentos radial e circunferencial dos vórtices discretos, respectivamente, e são calculados por:

$$\Delta r_k = \sqrt{\frac{4\Delta t}{Re_{c_k}} \ln \frac{1}{P'}} \quad (77)$$

$$\Delta \theta_k = 2\pi P'' \quad (78)$$

sendo P' e P'' números randômicos gerados entre 0 e 1.

Portanto, o avanço temporal de um vórtice discreto, k , da nuvem, é dado por:

$$x_k(t + \Delta t) = x_k(t) + \Delta x_{adv_k} + \Delta x_{dif_k} \quad (79)$$

$$y_k(t + \Delta t) = y_k(t) + \Delta y_{adv_k} + \Delta y_{dif_k} \quad (80)$$

4.4 CÁLCULO NUMÉRICO DE CARGAS FLUIDODINÂMICAS

É possível decompor as forças fluidodinâmicas em dois tipos: a força de arrasto, que resulta da integração dos componentes normal e tangencial (p e τ) da tensão e atua sempre na mesma direção do escoamento, porém, opondo-se ao movimento do corpo, e a força de sustentação, que também se origina da integração dos componentes normal e tangencial da tensão, porém, atua em uma direção perpendicular à do escoamento incidente. Levando-se em conta que o componente tangencial da tensão (τ) contribui muito pouco frente à contribuição dada pelo componente normal de tensão (p), assume-se que a força de sustentação é dada apenas pela integração do componente normal da tensão.

Corpos esbeltos que apresentam pequenos ângulos de ataque e estão isolados, quando sujeitos a escoamentos, não são capazes de fazer com que ocorra separação do escoamento e a esteira que se forma a jusante acaba sendo ínfima. Nesse caso, a força de arrasto é gerada pela integração apenas da tensão tangencial, ou seja, depende exclusivamente dos efeitos viscosos.

No caso de corpos rombudos ou corpos esbeltos com ângulos de ataque consideráveis, a separação do escoamento se faz presente, bem como a formação de uma grande esteira viscosa, que se desenvolve a jusante do corpo, sendo o componente de forma da força de arrasto predominante.

Nesta dissertação, é utilizada a formulação integral proposta por Shintani e Akamatsu (1994), que, de acordo com os estudos de Ricci (2002), se mostra mais acurada para determinar a distribuição de pressão sobre a superfície discretizada do corpo; para determinar a distribuição da tensão cisalhante, utiliza-se a formulação proposta por Renoldi (2019).

A formulação integral proposta por Shintani e Akamatsu (1994) é utilizada para determinar o valor da pressão em um ponto qualquer, i , do domínio fluido, segundo a equação (37), na qual a primeira integral representa a contribuição da superfície do corpo no cálculo da pressão, a segunda integral leva em consideração o efeito da vorticidade presente no domínio fluido e a terceira integral contabiliza a influência da vorticidade gerada na superfície da fronteira sólida.

Visando obter uma solução numérica, a equação (37) precisa ser discretizada e passa a ser escrita como (RICCI, 2002):

$$\begin{aligned} \xi \tilde{Y}_i + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^m \frac{n_{x_p}(x_p - x_i) + n_{y_p}(y_p - y_i)}{(x_p - x_i)^2 + (y_p - y_i)^2} \Delta S_p \tilde{Y}_p \\ = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^Z \frac{v_j(x_j - x_i) - u_j(y_j - y_i)}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \Gamma_j \\ + \frac{1}{2\pi \text{Re}} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^m \frac{n_{y_p}(x_p - x_i) - n_{x_p}(y_p - y_i)}{(x_p - x_i)^2 + (y_p - y_i)^2} \Delta S_p \frac{(\gamma_p + \gamma_{p+1})}{2} \end{aligned} \quad (81)$$

O somatório do lado esquerdo da equação (81) pode ser reescrito através de uma matriz de influência de pressão, $COUPP$ (RICCI, 2002):

$$COUPP_{i,p} = \frac{1}{2\pi} \frac{n_{x_p}(x_p - x_i) + n_{y_p}(y_p - y_i)}{(x_p - x_i)^2 + (y_p - y_i)^2} \Delta S_p \quad (82)$$

Para situações em que $p = i$, adota-se $COUPP_{i,p} = \xi = 1/2$, que é a influência de um painel sobre ele mesmo, condição conhecida como autoindução, ao se calcular a pressão.

O lado direito da equação (81) pode ser escrito como um vetor $RHSP$ (RICCI, 2002):

$$\begin{aligned} RHSP_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^Z \frac{v_j(x_j - x_i) - u_j(y_j - y_i)}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \Gamma_j \\ + \frac{1}{2\pi \text{Re}} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^m \frac{n_{y_p}(x_p - x_i) - n_{x_p}(y_p - y_i)}{(x_p - x_i)^2 + (y_p - y_i)^2} \Delta S_p \frac{(\gamma_p + \gamma_{p+1})}{2} \end{aligned} \quad (83)$$

Substituindo-se, portanto, as equações (82) e (83) na equação (81), para os m painéis

utilizados para discretizar a superfície do corpo, chega-se ao seguinte sistema linear de equações:

$$[\text{COUPP}]_{m \times m} \{\tilde{Y}\}_m = \{\text{RHSP}\}_m \quad (84)$$

Ao obter-se os valores da incógnita \tilde{Y}_i , calculados para os m painéis, é possível obter os valores do coeficiente de pressão (C_p) para cada um dos painéis planos através da equação (38).

A partir do cálculo do coeficiente de pressão de cada um dos painéis, é possível obter o coeficiente de arrasto de forma e a parcela do coeficiente sustentação, dados, respectivamente, por:

$$C_{D_{if}} = \sum_{i=1}^m C_{p_i} \Delta S_i \sin \beta_i \quad (85)$$

$$C_{L_{if}} = - \sum_{i=1}^m C_{p_i} \Delta S_i \cos \beta_i \quad (86)$$

Com relação ao cálculo do arrasto total, ele possui duas componentes: arrasto de forma, calculado utilizando-se a equação (85), e arrasto de atrito, que se torna importante nas simulações em que há um corpo esbelto com baixo ângulo de ataque, pois, nelas, não ocorre separação do escoamento, fazendo com que a força de arrasto seja majoritariamente originada a partir da integração da tensão tangencial, ou seja, dependente apenas dos efeitos viscosos. Porém, para o presente trabalho, desconsidera-se a tensão cisalhante, bem como o arrasto de atrito dela originado. Em corpos rombudos ocorre a separação do escoamento e, conseqüentemente, a formação da esteira viscosa, sendo o arrasto, neste caso, predominantemente originado pelo componente de forma (integração da pressão).

Portanto, o cálculo do arrasto total, neste trabalho, é dado apenas pela parcela referente ao arrasto de forma:

$$C_D = C_{D,f} \quad (87)$$

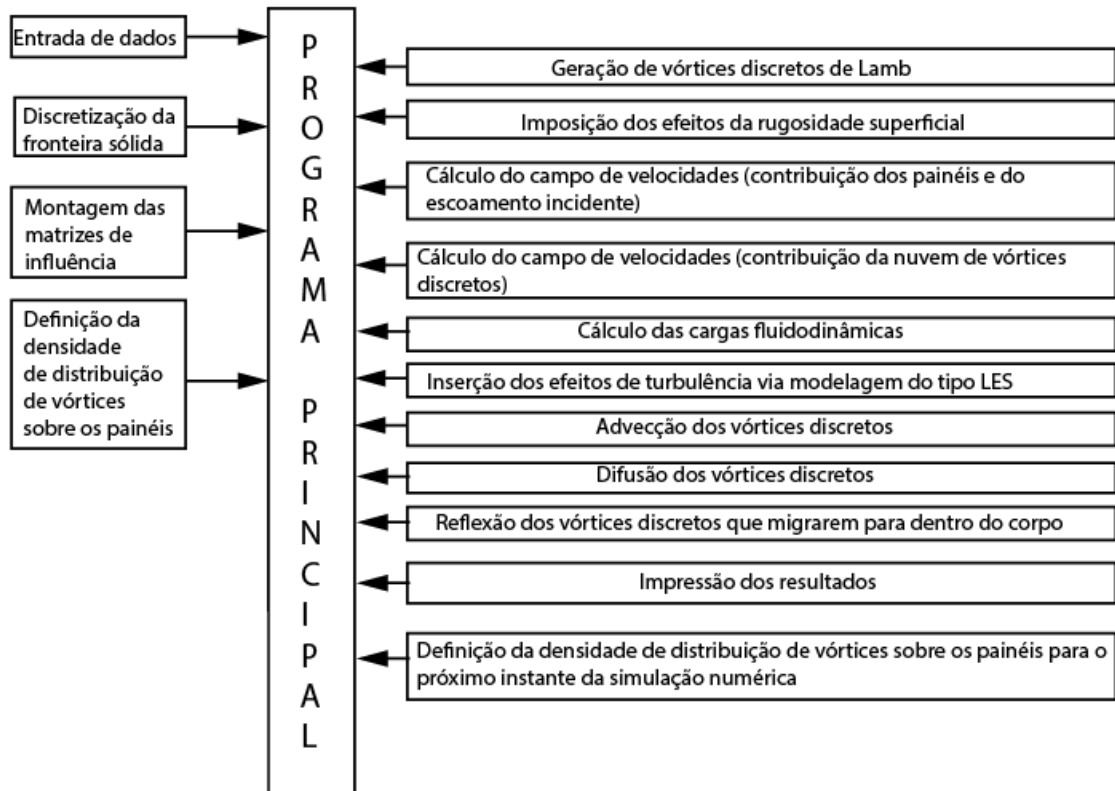
Da mesma maneira do arrasto total, calcula-se o coeficiente de sustentação total (em que a parcela decorrente da tensão cisalhante é desconsiderada):

$$C_L = C_{L,f} \quad (88)$$

4.5 ALGORITMO DO MÉTODO DE VORTICES DISCRETOS

O problema formulado matematicamente no Capítulo 3 tem sua solução numérica implementada de acordo com as equações algébricas apresentadas no presente capítulo. Para tanto, foi desenvolvido um programa computacional em linguagem de programação FORTRAN, cuja estrutura é apresentada na Figura 19. Neste código, há a opção de simular um corpo rombudo (cilindro circular) ou um corpo esbelto (perfil NACA 0012), ambos com superfície hidraulicamente lisa ou rugosa, tendo como base o modelo de camada limite com efeitos de rugosidade superficial desenvolvido por Bimbato (2012) e adaptado por Carvalho (2023).

Figura 19 - Estrutura do algoritmo computacional desenvolvido.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 19, apresenta-se a forma como são organizadas as rotinas dentro do programa principal. As rotinas do início do código são responsáveis pela discretização da geometria e solução do problema potencial, conforme apresentado nos quatro retângulos do lado esquerdo; no lado direito, apresentam-se as rotinas que são acionadas em cada um dos passos de tempo para resolver a geração da vorticidade, além dos deslocamentos por advecção e difusão dos vórtices discretos de Lamb, modelagem de turbulência e inserção dos efeitos de rugosidade superficial na camada limite que se desenvolve ao redor do corpo imerso no escoamento, bem como o cálculo dos coeficientes aerodinâmicos.

5 ANÁLISE DE RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentados os resultados obtidos nas simulações numéricas com o método de multipolos rápidos implementado, tanto para o cilindro circular, como para o perfil aerodinâmico.

Para analisar o comportamento do algoritmo acelerador, parte-se da análise do desempenho dele nas simulações numéricas utilizando-se o cilindro circular liso. Estas simulações foram realizadas por 1.500 passos de tempo e o objetivo é obter a melhor relação entre o número de vórtices discretos de Lamb e o número de caixas presentes no domínio computacional. Assim, é possível saber em que momento deve-se fazer o refinamento no método de multipolos rápidos, ou seja, aumentar o nível máximo de refinamento durante o decorrer das simulações, e, conseqüentemente, o número de caixas, sem perder a acurácia dos resultados. Uma vez que se pretende analisar, neste momento, a acurácia do método, faz-se uma simulação completa do cilindro liso utilizando-se apenas a lei de Biot-Savart para calcular o campo de velocidades do escoamento devido à interação vórtice-vórtice.

Nas simulações apresentadas na Seção 5.1, o método de multipolos rápidos é analisado variando-se alguns parâmetros específicos para avaliar os melhores resultados e definir de que maneira este pode ser utilizado nas simulações numéricas que envolvem o perfil aerodinâmico, uma vez que, quando o perfil aerodinâmico está sendo inclinado, a esteira que se forma a jusante dele se assemelha àquela formada a jusante do cilindro circular. Portanto, a avaliação do comportamento do algoritmo acelerador obtida com as simulações em que o corpo estudado é o cilindro de seção circular pode ser aproveitada nas simulações em que o corpo estudado é o perfil aerodinâmico.

Todas as simulações que envolvem o cilindro circular utilizam o esquema de avanço de primeira ordem de Euler, enquanto aquelas que envolvem o perfil aerodinâmico utilizam o esquema de avanço de segunda ordem de Adams-Bashforth.

5.1 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DO CILINDRO CIRCULAR LISO

5.1.1 Simulação do cilindro circular liso utilizando-se a lei de Biot-Savart

Como explicado anteriormente, faz-se, inicialmente, simulações numéricas do cilindro liso. Na primeira simulação, apenas a lei de Biot-Savart é utilizada para contabilizar a contribuição da nuvem de vórtices discretos no cálculo do campo de velocidades do

escoamento. Este procedimento é feito para permitir a comparação entre os resultados obtidos utilizando-se apenas a lei de Biot-Savart e aqueles que utilizam o algoritmo acelerador para calcular o campo de velocidades do escoamento devido à interação vórtice-vórtice.

Assim, é possível comparar os resultados obtidos com o algoritmo acelerador com aqueles obtidos exclusivamente pela lei de Biot-Savart, sendo possível avaliar o erro no cálculo do campo de velocidades quando se usa o método de multipolos rápidos. Os parâmetros comuns às simulações do cilindro circular são apresentados na Tabela 1.

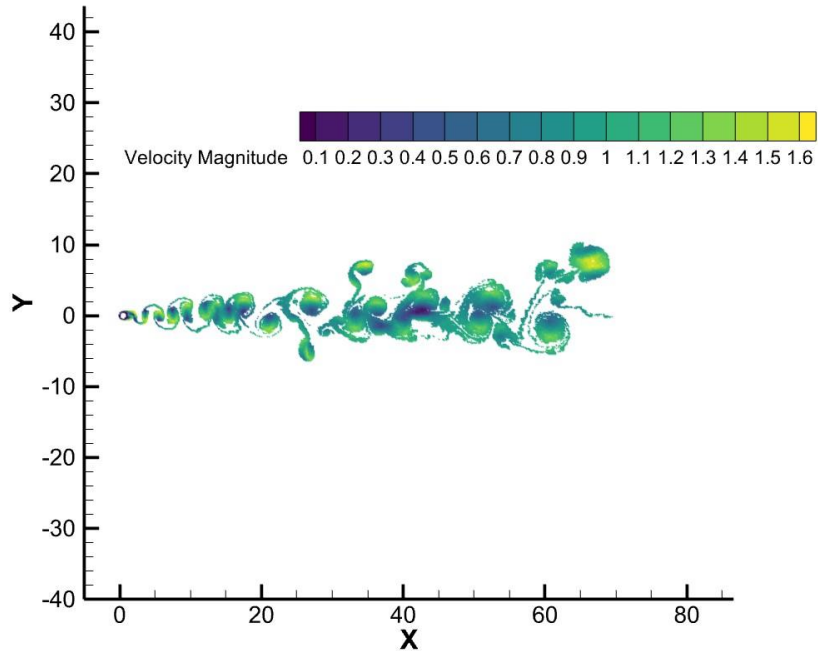
Tabela 1 - Parâmetros físicos e numéricos empregados nas simulações do cilindro circular.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Incremento de tempo	Δt	0,05
Número total de incrementos de tempo	stop	1.500
Tempo adimensional	t	75,00
Número de painéis	m	300
Raio do núcleo do vórtice discreto	σ_0	0,0096
Número de Reynolds	Re	$1,0 \times 10^5$

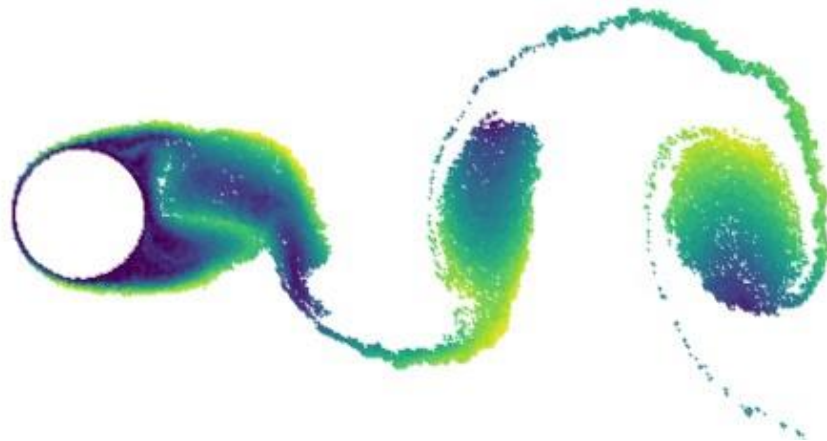
Fonte: Autoria própria.

Na Figura 20, apresenta-se a esteira formada a jusante do cilindro no último passo de tempo da simulação numérica, utilizando-se apenas a lei de Biot-Savart para calcular a interação vórtice-vórtice (parcela mais onerosa do cálculo do campo de velocidades do escoamento).

Figura 20 - Esteira desenvolvida a jusante do cilindro no instante de tempo $t = 75,00$ da simulação utilizando-se a lei de Biot-Savart (*Euler*; $m = 300$; $\Delta t = 0,05$; $\varepsilon = 0,000$; $Re = 1,0 \times 10^5$): (a) Esteira completa; (b) Dois primeiros pares de vórtices.



(a)

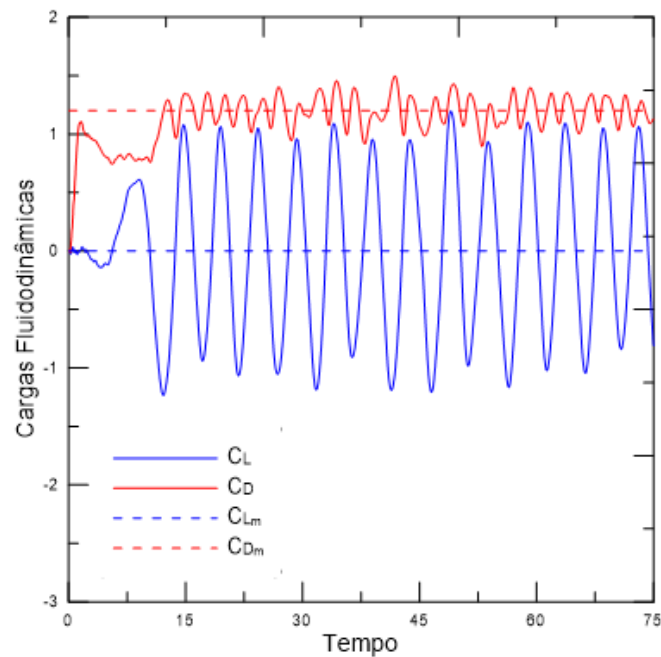


(b)

Fonte: Autoria própria.

Na Figura 21 apresentam-se os comportamentos dos coeficientes de arrasto (C_D) e de sustentação (C_L) obtidos nesta primeira simulação, em que apenas a lei de Biot-Savart é utilizada, bem como os valores médios desses coeficientes, sendo o coeficiente de arrasto médio representado na legenda por $C_{D,m}$ e o coeficiente de sustentação médio, por $C_{L,m}$.

Figura 21 - Cargas fluidodinâmicas obtidas em função do tempo para a simulação do cilindro liso utilizando-se a lei de Biot-Savart (*Euler*; $m = 300$; $\Delta t = 0,05$; $\varepsilon = 0,000$; $Re = 1,0 \times 10^5$).



Fonte: Autoria própria.

Na Tabela 2 apresentam-se os valores numéricos obtidos para as cargas fluidodinâmicas e para o número de Strouhal, para a presente simulação, comparando-a com resultados da literatura, a fim, inclusive, de validá-la.

O valor médio do coeficiente de sustentação é obtido pela média simples de todos os valores de coeficiente de sustentação que estão contidos no intervalo de tempo entre o primeiro pico do coeficiente de sustentação, C_L , depois da metade da simulação ($t = 37,50$) e o último pico antes do final da simulação ($t = 75,00$). O coeficiente de arrasto médio, C_{Dm} , é obtido pela média simples de todos os valores de coeficiente de arrasto dentro do mesmo intervalo em que é obtido o coeficiente de sustentação médio. Com relação ao número de Strouhal, St , ele é obtido, também, neste mesmo intervalo descrito, porém, utilizando-se a Transformada Rápida de Fourier.

O objetivo de desconsiderar a primeira metade da simulação numérica é não englobar o valor médio do transiente numérico; as demais simulações apresentadas nesta dissertação seguem estas mesmas diretrizes.

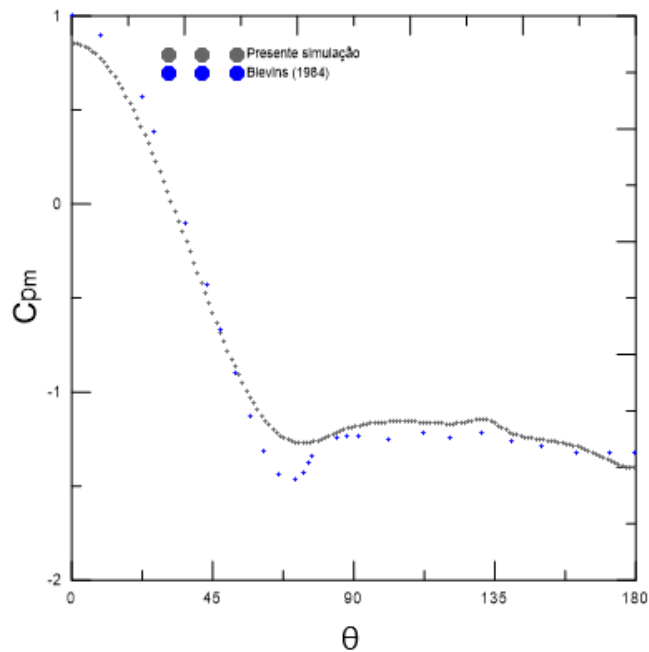
Tabela 2 - Coeficientes de arrasto e sustentação médios e número de Strouhal, obtidos na simulação utilizando-se apenas a lei de Biot-Savart.

Simulação	C_{D_m}	C_{L_m}	St
Blevins (1984)	1,200	-	0,190
Bimbato (2012)	1,223	0,021	0,207
Carvalho (2023)	1,231	-0,006	0,194
Presente simulação	1,202	0,00	0,200

Fonte: Autoria própria.

O gráfico referente à distribuição média do coeficiente de pressão sobre a superfície do cilindro circular, na presente simulação, é apresentado na Figura 22, cujos resultados são comparados por aqueles obtidos experimentalmente por Blevins (1984).

Figura 22 - Coeficiente de pressão médio obtido ao longo da superfície do cilindro liso utilizando-se a lei de Biot-Savart ($Euler; m = 300; \Delta t = 0,05; \varepsilon = 0,000; Re = 1,0 \times 10^5$).



Fonte: Autoria própria.

Uma vez que o código se mostrou capaz de simular o escoamento ao redor do cilindro circular liso, utilizando-se a lei de Biot-Savart, partiu-se para as simulações utilizando o método de multipolos rápidos, ainda com o cilindro circular liso como objeto de estudo.

5.1.2 Simulações do cilindro circular liso utilizando-se o algoritmo acelerador

Com a simulação do cilindro circular liso completa fazendo uso apenas da lei de Biot-Savart para calcular a interação vórtice-vórtice, parte-se para as simulações em que essa interação é calculada utilizando-se o algoritmo acelerador do método de multipolos rápidos. Para investigar o comportamento das soluções obtidas através do método de multipolos rápidos, um único parâmetro é variado: o nível máximo de refinamento, n . Além disso, há simulações em que o nível máximo de refinamento, n , é variado no decorrer da simulação numérica, ou seja, ao aumentar-se a quantidade de vórtices discretos no domínio, faz-se o refinamento espacial, a fim de aumentar, também, a quantidade de caixas e , consequentemente, as interações entre elas.

Estas simulações servem como uma espécie de guia, a fim de encontrar o melhor balanceamento entre o número de vórtices discretos presentes no domínio e o nível máximo de refinamento a ser utilizado.

O número de termos utilizados na série de Taylor, p , em todas as simulações que utilizam o algoritmo acelerador foi mantido igual a 50; este é um parâmetro que também interfere na acurácia do método e , conforme exemplificado no Apêndice B da presente dissertação, simulações com o número de termos na série de Taylor igual a 50 apresentam melhores resultados do que aquelas com um número inferior de termos na série.

Os principais parâmetros físicos e numéricos utilizados nestas simulações são os mesmos apresentados na Tabela 1. Com relação às particularidades do método de multipolos rápidos, elas se relacionam, como mencionado anteriormente, ao nível máximo de refinamento, que, em cada uma das simulações, foi diferente, bem como ao momento em que o método de multipolos rápidos passa a ser utilizado na simulação numérica.

A utilização do algoritmo acelerador do método de multipolos rápidos, quando há uma quantidade pequena de vórtices discretos, compromete a acurácia do método. Ou seja, utilizá-lo desde o início das simulações numéricas faria com que o erro no cálculo do campo de velocidades ultrapassasse valores aceitáveis. Desta forma, opta-se por iniciar a utilização do método, em todas as simulações, a partir de passos de tempo maiores do que 750 (metade da simulação numérica). Assim, todas as simulações foram iniciadas com a lei de Biot-Savart utilizada para calcular a interação vórtice-vórtice e , apenas quando a simulação atinge um passo de tempo superior a 750, utiliza-se o método de multipolos rápidos no cômputo do campo de velocidades.

No presente trabalho são feitas quinze simulações numéricas com o nível máximo de refinamento fixo, ou seja, o mesmo nível máximo de refinamento foi utilizado durante todo o tempo em que o método de multipolos rápidos é utilizado. Esses níveis máximos de refinamento são: $n = 4, 5, 6, 7$ e 8 . Os passos de tempo em que se iniciou a utilização do método de multipolos rápidos são $751, 1.001$ e 1.251 , totalizando as quinze simulações em que o nível máximo de refinamento utilizado no algoritmo acelerador foi constante.

Ainda, para o cilindro circular liso, com base nas quinze primeiras simulações, são feitas mais três, desta vez, variando-se o nível máximo de refinamento durante a utilização do algoritmo acelerador. Desta forma, ao aumentar-se a quantidade de vórtices discretos presentes no domínio, aumenta-se o nível máximo de refinamento utilizado e, conseqüentemente, o número de caixas utilizadas.

A primeira simulação com o nível máximo de refinamento variável, chamada de FMM variável (1), teve $n = 4$ entre os passos de tempo 751 e 1.199 , $n = 5$ entre os passos de tempo 1.200 e 1.399 e $n = 6$ para os passos de tempo finais, entre 1.400 e 1.500 . A segunda simulação com o nível máximo de refinamento variável, chamada de FMM variável (2), teve $n = 4$ entre os passos de tempo 1.001 e 1.099 , $n = 5$ entre os passos de tempo 1.100 e 1.299 , $n = 6$ para os passos de tempo entre 1.300 e 1.449 e $n = 7$ para os passos de tempo finais, entre 1.450 e 1.500 . A terceira simulação com o nível máximo de refinamento variável, chamada de FMM variável (3), teve $n = 4$ entre os passos de tempo 1.001 e 1.199 , $n = 5$ entre os passos de tempo 1200 e 1399 e $n = 6$ para os passos de tempo finais, entre 1.400 e 1.500 .

Para avaliar os resultados obtidos com as dezoito simulações utilizando-se o algoritmo acelerador, deve-se analisar o erro numérico imposto pelo processo de expansão em série de Taylor no cálculo do campo de velocidades do escoamento. Para isto, utiliza-se a equação (89) (CARRIER; GREENGARD; ROKHLIN,1988):

$$E = \left[\frac{\sum_{i=1}^Z (V_{FMM_i} - V_{BS_i})^2}{\sum_{i=1}^Z (V_{BS_i})^2} \right]^{1/2} \quad (89)$$

sendo:

- $V_{FMM_i} = \sqrt{(u_{FMM_i})^2 + (v_{FMM_i})^2}$
- $V_{BS_i} = \sqrt{(u_{BS_i})^2 + (v_{BS_i})^2}$
- E : erro;

- Z : número de vórtices discretos presentes no domínio computacional;
- u_{FMM_i} : componente u da velocidade da partícula i calculada através do método de multipolos rápidos;
- u_{BS_i} : componente u da velocidade da partícula i calculada através da lei de Biot-Savart;
- v_{FMM_i} : componente v da velocidade da partícula i calculada através do método de multipolos rápidos;
- v_{BS_i} : componente v da velocidade da partícula i calculada através da lei de Biot-Savart.

É importante salientar que o erro numérico é cumulativo, ou seja, no início da utilização do algoritmo acelerador ele é pequeno e vai crescendo à medida que os passos de tempo avançam.

Na Tabela 3 apresentam-se os resultados obtidos nas quinze simulações em que o método de multipolos foi utilizado sem variar o nível máximo de refinamento. Nela, apresentam-se os valores do erro no cálculo do campo de velocidades do escoamento no último passo de tempo da simulação, bem como o tempo de CPU, em horas, de cada uma delas. A análise do tempo de CPU também é fundamental, uma vez que o algoritmo acelerador é utilizado para reduzir o tempo computacional. Sendo assim, é necessário avaliar se a redução do tempo computacional está satisfatória, bem como se o erro no cálculo do campo de velocidades, por conta da utilização do método de multipolos rápidos, não compromete os resultados.

Tabela 3 - Análise do erro no último passo de tempo das simulações e redução do tempo computacional viabilizada pela utilização do algoritmo do método de multipolos rápidos

(*Euler*; $m = 300$; $\Delta t = 0,05$; $\varepsilon = 0,000$; $Re = 1,0 \times 10^5$).

Nível máximo de refinamento	Passo de tempo em que o FMM começa a ser usado	Erro velocidade (%)	Tempo de CPU (h)	Redução do tempo de CPU (%)
BS	-	-	245,45	-
n = 4	751	3,37	203,48	17,10
	1.001	1,80	211,55	13,81
	1.251	0,97	228,93	6,730
n = 5	751	4,64	183,40	25,28
	1.001	2,75	195,30	20,43
	1.251	1,59	219,51	10,57
n = 6	751	14,8	134,31	45,28
	1.001	7,49	173,61	29,27
	1.251	3,11	211,03	14,02
n = 7	751	19,7	116,44	52,56
	1.001	9,29	141,10	42,51
	1.251	4,55	191,26	22,08
n = 8	751	23,2	94,13	61,65
	1.001	11,9	123,02	49,88
	1.251	6,04	181,84	25,92

Fonte: Autoria própria.

Na Tabela 4 apresentam-se os valores médios dos coeficientes de sustentação e de arrasto para as simulações em que é utilizado o método de multipolos rápidos sem variação no nível máximo de refinamento, em comparação com aqueles obtidos pela simulação em que foi utilizada apenas a lei de Biot-Savart para calcular a contribuição do campo de vorticidade no cálculo do campo de velocidades do escoamento. O erro com relação ao coeficiente de sustentação médio foi desconsiderado, uma vez que esse coeficiente é muito próximo de zero, o que faz com que o erro calculado, em porcentagem, seja muito elevado, pois, para calcular o erro nesse caso, tem-se uma razão com denominador muito próximo de zero.

Tabela 4 - Análise dos coeficientes fluidodinâmicos médios das simulações utilizando o método de multipolos rápidos em comparação com aqueles obtidos com a lei de Biot-Savart.

(*Euler*; $m = 300$; $\Delta t = 0,05$; $\varepsilon = 0,000$; $Re = 1,0 \times 10^5$).

Nível máximo de refinamento	Passo de tempo em que o FMM começa a ser usado	C_{D_m}	Erro C_{D_m} (%)	C_{L_m}	St	Erro St (%)
BS	-	1,202	-	0,00	0,200	-
n = 4	751	1,250	3,99	0,04	0,200	0,00
	1.001	1,210	0,75	0,04	0,200	0,00
	1.251	1,200	0,00	0,04	0,200	0,00
n = 5	751	1,260	4,83	0,04	0,230	15,0
	1.001	1,220	1,50	0,04	0,220	10,0
	1.251	1,200	0,08	0,04	0,200	0,00
n = 6	751	1,330	10,65	0,04	0,220	10,0
	1.001	1,250	3,99	0,04	0,210	5,00
	1.251	1,210	0,67	0,04	0,200	0,00
n = 7	751	1,360	13,14	0,04	0,260	30,0
	1.001	1,270	5,66	0,04	0,230	15,0
	1.251	1,220	1,50	0,04	0,210	5,00
n = 8	751	1,380	14,81	0,04	0,290	45,0
	1.001	1,290	7,32	0,04	0,260	30,0
	1.251	1,230	2,33	0,04	0,230	15,0

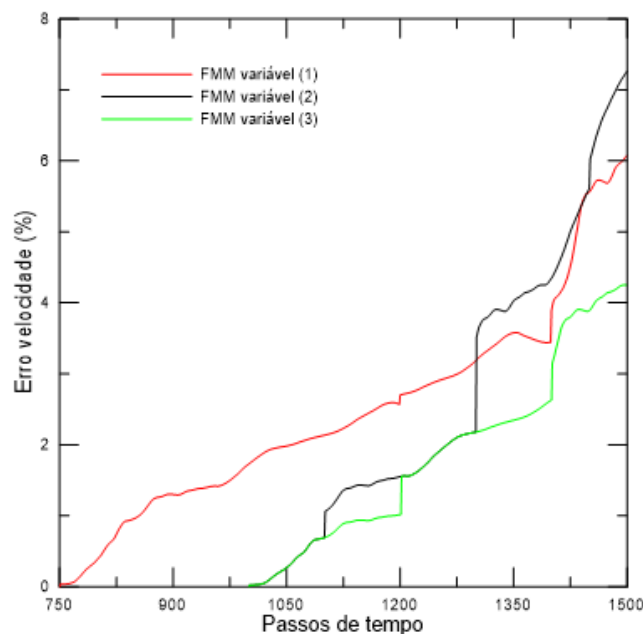
Fonte: Autoria própria.

Com base na Tabela 3, é possível notar que níveis máximos de refinamento, utilizados por muitos passos de tempo, ocasionam um erro numérico no cálculo do campo de velocidades do escoamento ao final das simulações mais alto do que quando se utiliza o algoritmo acelerador com níveis de refinamento menores e por menos passos de tempo. Percebe-se este comportamento comparando-se extremos: a simulação referente a $n = 8$, em que o algoritmo acelerador passou a ser utilizado no passo de tempo igual a 751 e a simulação referente a $n = 4$, em que o algoritmo acelerador passou a ser utilizado apenas no passo de tempo igual a 1.251. Os erros numéricos, ao final das simulações, são iguais a 23,2% e 0,97%, respectivamente. É

possível, também, comparar a redução nos tempos de CPU: a primeira, com o erro numérico mais elevado, possui uma redução de 61,65%, enquanto a segunda, com o erro numérico menor, possui uma redução igual a 6,7%. O nível máximo de refinamento utilizado por mais tempo na simulação numérica possibilita uma maior redução no tempo computacional, em comparação com a simulação em que a lei de Biot-Savart é utilizada, porém, o aumento do erro no cálculo do campo de velocidades do escoamento é bastante expressivo.

Para analisar como se comporta o erro, E , nas simulações em que o nível máximo de refinamento utilizado é variável, apresentam-se as curvas do erro numérico em função dos passos de tempo da simulação na Figura 23.

Figura 23 - Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para as três simulações do cilindro circular em que se utiliza o método de multipolos variando-se o nível máximo de refinamento ($Euler$; $m = 300$; $\Delta t = 0,05$; $\varepsilon = 0,000$; $Re = 1,0 \times 10^5$).



Fonte: Autoria própria.

A Tabela 5 apresenta os valores médios de coeficientes de sustentação e de arrasto para as simulações em que é utilizado o método de multipolos rápidos variando-se os níveis máximos de refinamento durante a simulação, em comparação com aqueles obtidos pela simulação em que foi utilizada apenas a lei de Biot-Savart para calcular a contribuição da interação vórtice-vórtice no cálculo do campo de velocidades do escoamento.

Tabela 5 - Análise dos coeficientes fluidodinâmicos médios das simulações utilizando método de multipolos rápidos variando-se os níveis máximos de refinamento em comparação com aqueles obtidos com a lei de Biot-Savart. (*Euler*; $m = 300$; $\Delta t = 0,05$; $\varepsilon = 0,000$; $Re = 1,0 \times 10^5$).

Nível máximo de refinamento	C_{D_m}	Erro C_{D_m} (%)	C_{L_m}	St	Erro St (%)	Redução do tempo de CPU (%)
BS	1,202	-	0,00	0,200	-	
FMM variável (1)	1,260	4,83	0,00	0,220	10,0	24,42
FMM variável (2)	1,250	3,99	0,00	0,230	15,0	26,99
FMM variável (3)	1,240	3,16	0,00	0,210	5,00	17,52

Fonte: Autoria própria.

Analisando-se as curvas apresentadas na Figura 23, bem como os dados presentes na Tabela 5, conclui-se que, das três simulações com o nível máximo de refinamento variável, a melhor delas é a de número 3, pois, ao final da simulação, o erro numérico no cálculo do campo de velocidades do escoamento é o menor das três (vide Figura 23), bem como os erros no coeficiente de arrasto médio, C_{D_m} , e no número de Strouhal, St , são os menores dentre os três casos.

Para determinar como deve ser feita a utilização do método de multipolos rápidos, a fim de se obter resultados mais precisos e redução de tempo de CPU, é feita uma análise da razão entre o número de vórtices discretos no domínio, Z , e o número de caixas no nível máximo de refinamento, que é igual a 4^n , sendo n o nível máximo de refinamento. Para se obter a quantidade de vórtices discretos, Z , em cada passo de tempo da simulação numérica, basta multiplicar o número de painéis utilizados para discretizar o corpo, m , pela quantidade de passos de tempo da simulação numérica.

Uma vez que o melhor resultado, dentre as três simulações que utilizam o FMM variando-se o nível máximo de refinamento, tendo o cilindro circular liso como corpo de estudo, analisa-se a razão entre os vórtices discretos presentes no domínio e a quantidade de caixas no nível máximo de refinamento nesta simulação. Tendo como base a simulação FMM variável (3), o nível máximo de refinamento $n = 4$ deve ser utilizado no intervalo em que essa razão ($Z/4^n$)

esteja entre 1.173 e 1.405, o nível máximo de refinamento $n = 5$ deve ser utilizado no intervalo em que a razão esteja entre 351 e 409 e o nível máximo de refinamento $n = 6$ deve ser utilizado no intervalo em que a razão esteja entre 102 e 109.

Portanto, para as simulações em que o corpo estudado é o aerofólio NACA 0012, estes intervalos de razão entre o número de vórtices discretos presentes no domínio e a quantidade de caixas no nível máximo de refinamento são respeitados. Deve-se lembrar, como será apresentado na seguinte seção, que o perfil aerodinâmico é discretizado em $m = 200$ painéis, portanto, o refinamento espacial, ou seja, o aumento no nível máximo de refinamento durante a simulação numérica ocorre em passos de tempo distintos. Além disso, as simulações envolvendo o corpo esbelto foram feitas com uma quantidade maior de passos de tempo, uma vez que utilizam incrementos de tempo, Δt , menores.

5.2 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DO AEROFÓLIO NACA 0012

Conforme explicado na seção anterior, foram feitas simulações com o cilindro circular liso como objeto de estudo, a fim de validar o código computacional (que permite simular tanto o cilindro circular como o perfil aerodinâmico isolados) comparando-se os resultados obtidos com a lei de Biot-Savart para calcular a interação vórtice-vórtice com aqueles presentes na literatura (veja a Tabela 2 e Figura 22). Após a validação, são feitas simulações com diferentes parâmetros do método de vórtices discretos, para encontrar uma maneira mais apropriada da utilização do algoritmo acelerador, ou seja, encontrar em quais os momentos da simulação numérica deve ser feito o refinamento espacial, bem como encontrar o momento em que o algoritmo acelerador deve começar a ser utilizado na simulação numérica, a fim de não comprometer os resultados.

Com essa análise feita para o cilindro circular liso, é possível aproveitá-la para fazer as simulações em que o objeto de estudo é o aerofólio NACA 0012. Dessa forma, mantém-se a utilização dos níveis máximos de refinamento para os mesmos intervalos de razão entre o número de vórtices discretos presentes no domínio e a quantidade de caixas no nível máximo de refinamento ($Z/4^n$). Uma vez que, como explicado anteriormente, as simulações realizadas para o perfil aerodinâmico são mais longas, opta-se por utilizar um nível de refinamento a mais nos últimos passos de tempo das simulações numéricas, como será detalhado adiante.

Na Tabela 6 apresentam-se os parâmetros físicos e numéricos comuns a todas as simulações envolvendo o perfil aerodinâmico.

Tabela 6 - Parâmetros físicos e numéricos empregados nas simulações do perfil NACA 0012.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Incremento de tempo	Δt	0,03
Número total de incrementos de tempo	stop	2.500
Tempo adimensional	t	75,00
Número de painéis	m	200
Raio do núcleo do vórtice discreto	σ_0	0,019
Número de Reynolds	Re	$1,7 \times 10^5$

Fonte: Autoria própria.

No caso das simulações do perfil NACA 0012, todas são feitas utilizando-se o algoritmo acelerador, ou seja, não há simulação completa utilizando-se apenas a lei de Biot-Savart para calcular a parcela devido à interação vórtice-vórtice do campo de velocidades.

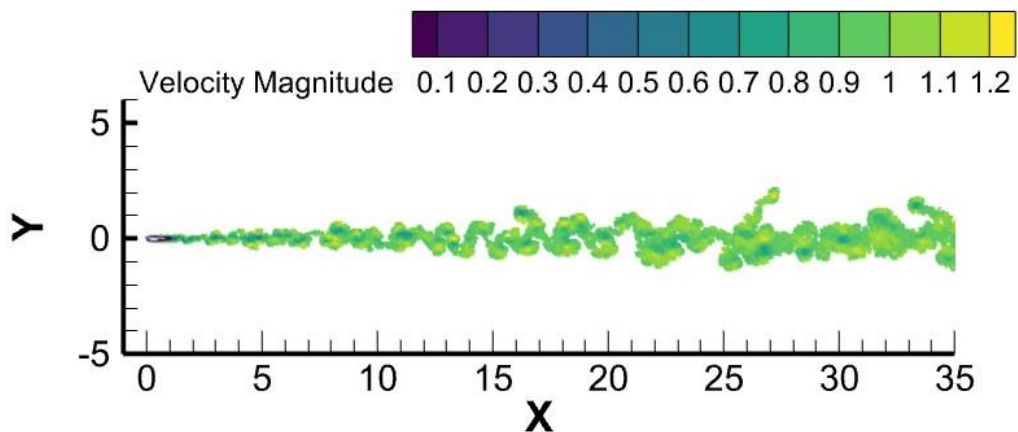
Todas as simulações envolvendo o perfil aerodinâmico são feitas da seguinte maneira: a lei de Biot-Savart é utilizada para calcular o campo de velocidades até o passo de tempo igual a 1.501, em que o número de vórtices discretos presentes no domínio é de 300.200. A partir do passo de tempo seguinte, passa-se a utilizar o método de multipolos rápidos com um nível de refinamento, n , igual a 4. Este nível máximo de refinamento é utilizado até o passo de tempo 1.797, portanto, a razão entre o número de vórtices discretos presentes no domínio e a quantidade de caixas no nível máximo de refinamento ($Z/4^n$) ficou entre, aproximadamente, 1.173 e 1.404. O nível máximo de refinamento, n , igual a 5 passou a ser utilizado no passo de tempo igual a 1.798 e foi até o passo de tempo igual a 2.088. Portanto, a razão entre o número de vórtices discretos presentes no domínio e a quantidade de caixas no nível máximo de refinamento ($Z/4^n$) ficou entre, aproximadamente, 351 e 408. O nível máximo de refinamento, n , igual a 6 passou a ser utilizado no passo de tempo igual a 2.089 e foi até o passo de tempo igual a 2.233. Portanto, a razão entre o número de vórtices discretos presentes no domínio e a quantidade de caixas no nível máximo de refinamento ($Z/4^n$) ficou entre, aproximadamente, 102 e 122. E, no final das simulações numéricas, utilizou-se o nível máximo de refinamento, n , igual a 7, que passou a ser utilizado no passo de tempo 2.234 e foi até o passo de tempo igual a 2.500. Portanto, a razão entre o número de vórtices discretos presentes no domínio e a quantidade de caixas no nível máximo de refinamento ($Z/4^n$) ficou entre, aproximadamente, 27 e 31.

Utilizando-se os parâmetros da Tabela 6, inicialmente, faz-se vinte e oito simulações para o perfil aerodinâmico com superfície hidraulicamente lisa ($\varepsilon = 0,000$), inclinando-se o perfil de 0° até 27° , com intervalos de 1° . Utiliza-se o método de multipolos rápidos da maneira

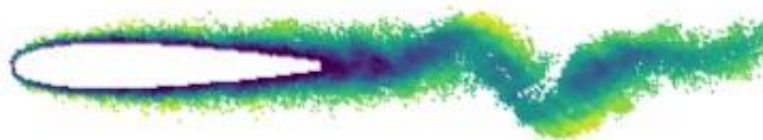
descrita anteriormente para essas vinte e oito simulações e, conforme apresentado nos resultados a seguir, esta maneira de utilizar o algoritmo acelerador demonstrou ser satisfatória. Portanto, ela foi mantida para as demais simulações do perfil NACA 0012 com a superfície hidraulicamente rugosa, que também variaram entre os ângulos de ataque de 0° e 27° , com intervalos de 1° .

Na Figura 24 apresentam-se os vórtices discretos dispostos na esteira que se forma a jusante do aerofólio NACA 0012 com ângulo de inclinação, β , nulo e com superfície hidraulicamente lisa, no instante de tempo $t = 75,00$.

Figura 24 - Esteira desenvolvida a jusante do aerofólio NACA 0012 no instante de tempo $t = 75,00$ da simulação utilizando-se a lei de Biot-Savart (*Adams-Bashforth*; $m = 200$; $\Delta t = 0,03$; $\varepsilon = 0,000$; $Re = 1,7 \times 10^5$): (a) Esteira completa; (b) Proximidades do corpo.



(a)



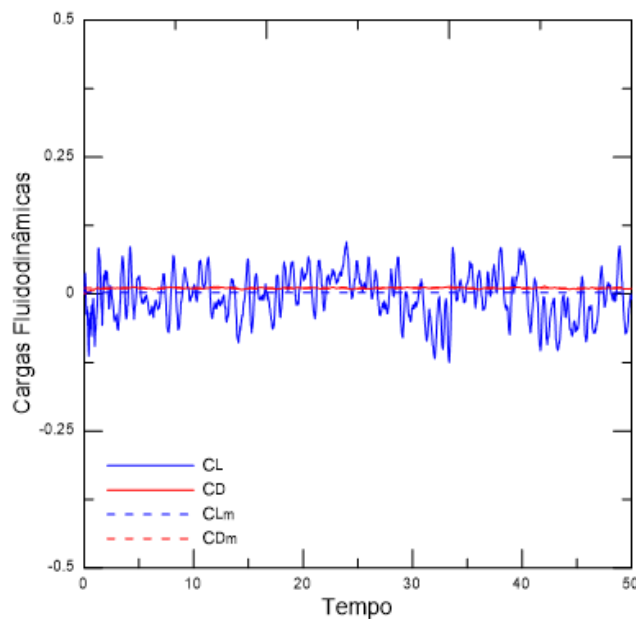
(b)

Fonte: Autoria própria.

Comparando-se as esteiras apresentadas nas Figuras 20 e 24, nota-se que a esteira de von Kármán formada pelo cilindro circular liso (Figura 20) possui um caráter oscilatório mais bem definido e é mais larga do que aquela formada a jusante do aerofólio liso com ângulo de ataque nulo. Inicialmente, esta diferença entre as esteiras poderia ser um empecilho na utilização dos mesmos critérios do método de multipolos que foram utilizados para o cilindro circular liso. Porém, ao analisar os coeficientes fluidodinâmicos, bem como os demais resultados, para os diferentes ângulos de ataque aos quais o aerofólio é submetido, nota-se que o critério adotado pode ser utilizado sem prejuízos nos resultados.

Na Figura 25 apresentam-se as cargas fluidodinâmicas exercidas sobre a superfície do aerofólio liso. Os coeficientes de sustentação, C_{Lm} , e de arrasto, C_{Dm} , médios obtidos nesta simulação são iguais a 0,011 e 0,002, respectivamente.

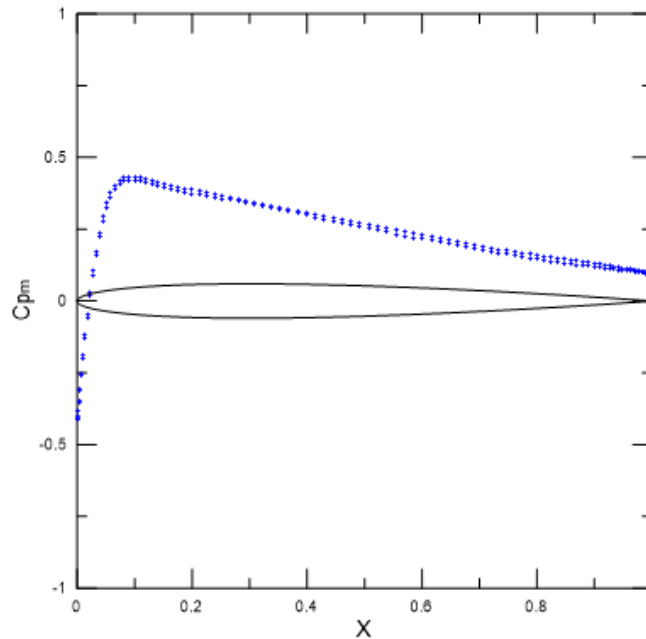
Figura 25 - Cargas fluidodinâmicas obtidas em função do tempo para a simulação do aerofólio NACA 0012 liso (*Adams-Bashforth*; $m = 200$; $\Delta t = 0,03$; $\varepsilon = 0,000$; $Re = 1,7 \times 10^5$).



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 26 apresenta-se o coeficiente de pressão médio ao longo da superfície do aerofólio NACA 0012. Nela, é possível notar o equilíbrio das forças do escoamento sobre a superfície do corpo, fazendo com que os valores médios dos coeficientes de sustentação e arrasto sejam próximos de zero, em concordância com o que é encontrado na literatura, especialmente para elevados números de Reynolds (CARVALHO, 2023).

Figura 26 - Análise do coeficiente de pressão médio para a simulação do aerofólio NACA 0012 liso (*Adams-Bashforth*; $m = 200$; $\Delta t = 0,03$; $\varepsilon = 0,000$; $Re = 1,7 \times 10^5$).



Fonte: Autoria própria.

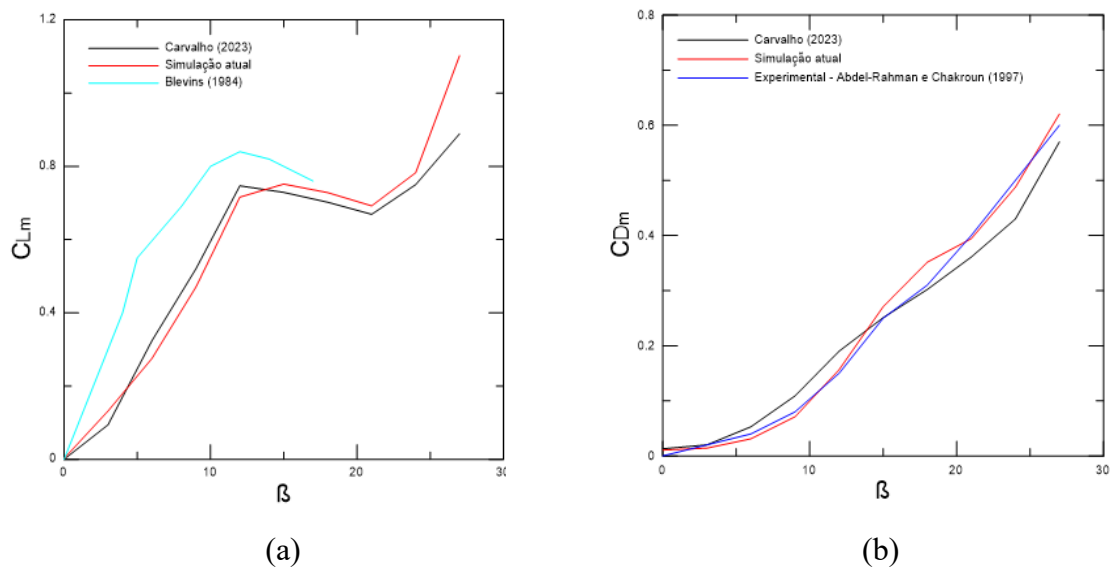
Como mencionado anteriormente, o aerofólio liso foi analisado em ângulos de ataque entre 0° e 27° , em intervalos de 1° , a fim de analisar os coeficientes de sustentação e arrasto médios. Nota-se, nas Figuras 27(a) e 27(b), que foi possível capturar os fenômenos que ocorrem no escoamento ao redor do aerofólio mantendo-se a utilização do método de multipolos rápidos como foi descrita anteriormente. Dessa forma, na Figura 27(a), para a presente simulação, observa-se uma variação próxima de linear do coeficiente de sustentação médio para ângulos de ataque, β , até a faixa de 12° . Após esta faixa, ocorre o início do estol (que é quando ocorre o pico de C_{Lm} e, também, a separação do escoamento) aos 14° e o início da recuperação da sustentação ocorre quando o ângulo de ataque do perfil é igual a 21° , pois, neste instante, ocorre o recolamento da camada limite.

Os resultados experimentais de Blevins (1984) e de Abdel-Rahman e Chakroun (1997) demonstram que o ângulo de ataque em que ocorre o estol para o aerofólio NACA 0012 é de 12° . Neste ângulo de ataque, o valor de coeficiente de sustentação médio, C_{Lm} , atinge o seu pico e, então, cai bruscamente, em razão da separação do escoamento. Com o aumento do ângulo de ataque, observa-se que o coeficiente de sustentação médio aumenta por volta de um ângulo de ataque igual a 18° , por conta do recolamento da camada limite (ABBOTT; VON DOENHOFF, 1959).

Os resultados obtidos com o método de vórtices discretos, utilizando-se o algoritmo acelerador, são capazes de capturar ambos os fenômenos (separação e recolamento da camada limite), porém, com alguma diferença, uma vez que o estol, na presente simulação, ocorreu aos 14° e a recuperação da sustentação ocorreu a um ângulo de ataque igual a 21° .

Com relação ao coeficiente de arrasto médio, este é mostrado na Figura 27(b) para os diferentes valores de ângulo de ataque analisados. Assim como o que é encontrado na literatura, o coeficiente de arrasto médio, C_{Dm} , aumenta consideravelmente com o aumento do ângulo de ataque do perfil aerodinâmico.

Figura 27 - Análise dos coeficientes médios de sustentação e de arrasto no escoamento ao redor do aerofólio liso variando-se os ângulos de ataque (*Adams-Bashforth*; $m = 200$; $\Delta t = 0,03$; $\varepsilon = 0,000$; $Re = 1,7 \times 10^5$): (a) Coeficiente de sustentação médio em função do ângulo de ataque do perfil; (b) Coeficiente de arrasto médio em função do ângulo de ataque do perfil.



Fonte: Autoria própria.

Nota-se, portanto, com base na Figura 27, que o comportamento dos coeficientes de sustentação e arrasto médios, C_{Lm} e C_{Dm} , respectivamente, em função do ângulo de ataque do perfil, β , é similar ao comportamento dos coeficientes que é apresentado na literatura, nos trabalhos experimentais de Abdel-Rahman e Chakroun (1997) e de Blevins (1984). Na Figura 27 apresentam-se, também, as curvas obtidas por Carvalho (2023) para o aerofólio NACA 0012 liso, mediante simulações em que o método de vórtices discretos é utilizado sem o algoritmo acelerador. Além disso, no trabalho de Carvalho (2023), as simulações são feitas com ângulos

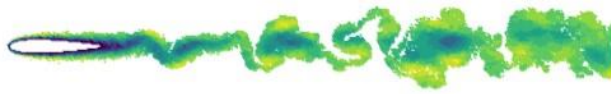
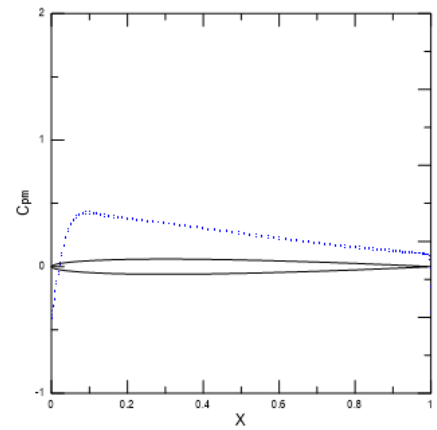
de ataque variando entre 0° e 27° , porém, em intervalos de 3° , bem como o tempo adimensional alcançado pelas simulações de Carvalho (2023) é menor, uma vez que ele utiliza o mesmo incremento de tempo, Δt , de 0,03, porém, as simulações deste autor foram realizadas para 2.000 avanços, alcançando um tempo adimensional igual a 60,00. Deve-se ressaltar que a utilização do algoritmo acelerador permite fazer simulações mais longas, ou seja, com mais passos de tempo, situação que fica custosa computacionalmente quando é utilizada apenas a lei de Biot-Savart para calcular a contribuição do campo de vorticidades no cálculo do campo de velocidades.

Carvalho (2023) descreve que, para o aerofólio liso, o ângulo de ataque em que ocorre o estol é igual a 15° e o ângulo de ataque em que ocorre a recuperação do coeficiente de sustentação médio é igual a 21° . A presente simulação obteve resultados bastante próximos destes descritos.

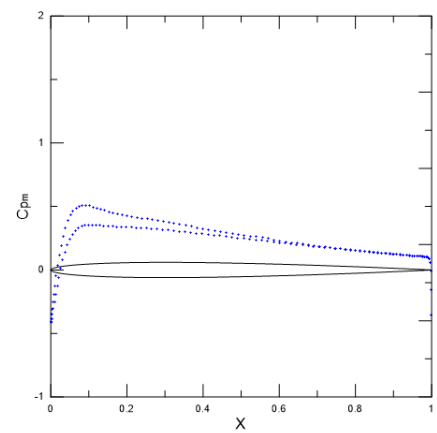
Com relação às simulações apresentadas na Figura 27, a esteira próxima do aerofólio e a média da distribuição de pressão na superfície discretizada do perfil NACA 0012 são detalhadas na Figura 28, que capta a perturbação na esteira causada pela inclinação do aerofólio, uma vez que, à medida que o ângulo de ataque do perfil (β) aumenta, a esteira fica mais larga, formando estruturas que se aproximam daquelas observadas no escoamento ao redor de corpos rombudos, como é o caso do cilindro circular, mostrada na Figura 20.

A variação no coeficiente de sustentação médio, apresentada na Figura 27(a), é verificada pela alteração na média do coeficiente de pressão. Desse modo, aumentando-se o ângulo de ataque e nas simulações antes do estol ($\beta < 14^\circ$), as distribuições de pressão no intradorso e extradorso do aerofólio formam uma área que aumenta conforme o ângulo de ataque do perfil aumenta. Entre os ângulos de ataque de 14° e 21° (região de estol), a área mostrada no gráfico dos valores médios de coeficiente de pressão diminui, conseqüentemente, os coeficientes de sustentação médios, também. E, após essa região ($\beta > 21^\circ$), a área volta a aumentar, aumentando, conseqüentemente, o coeficiente de sustentação médio.

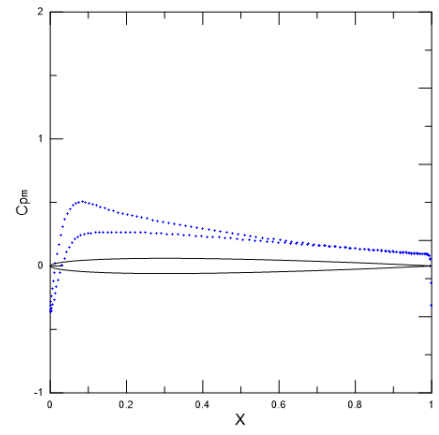
Figura 28 – Esteira formada a jusante do perfil e coeficiente médio de pressão para cada um dos ângulos de ataque simulados para o perfil NACA 0012 liso (*Adams-Bashforth*; $m = 200$; $\Delta t = 0,03$; $\varepsilon = 0,000$; $Re = 1,7 \times 10^5$): (a) Esteira formada a jusante do perfil aerodinâmico; (b) Coeficiente de pressão médio em função da corda.

(a) $\beta = 0^\circ$ 

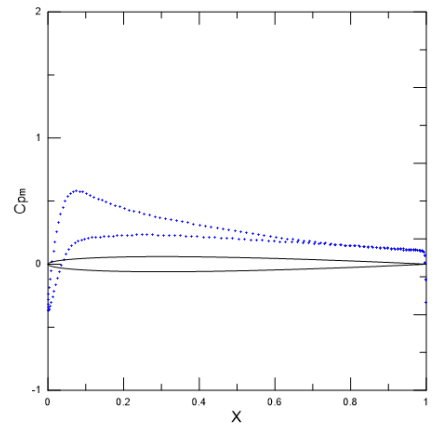
(b)

(a) $\beta = 1^\circ$ 

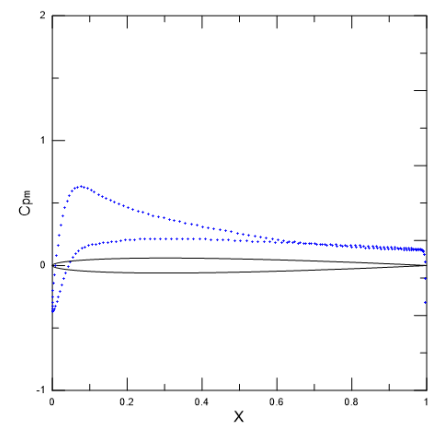
(b)

(a) $\beta = 2^\circ$ 

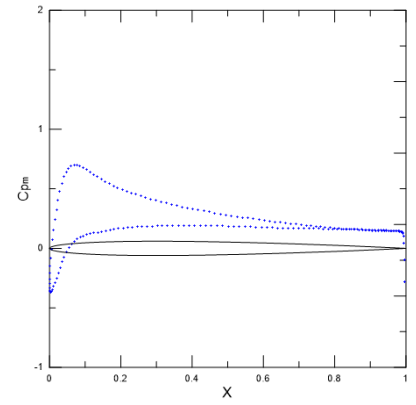
(b)

(a) $\beta = 3^\circ$ 

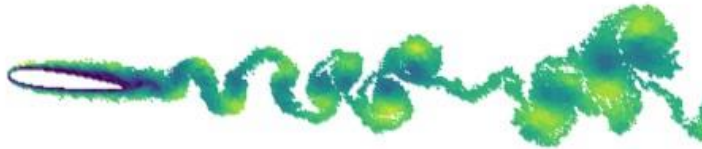
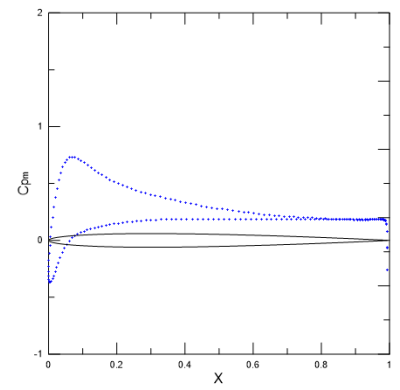
(b)

(a) $\beta = 4^\circ$ 

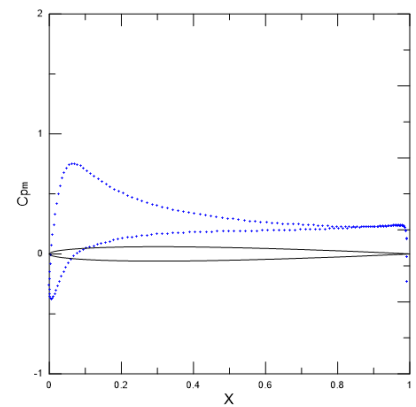
(b)

(a) $\beta = 5^\circ$ 

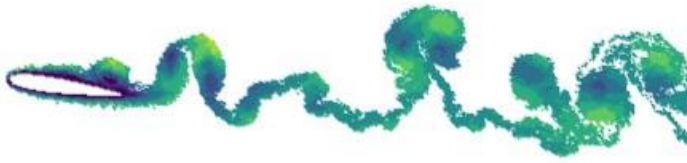
(b)

(a) $\beta = 6^\circ$ 

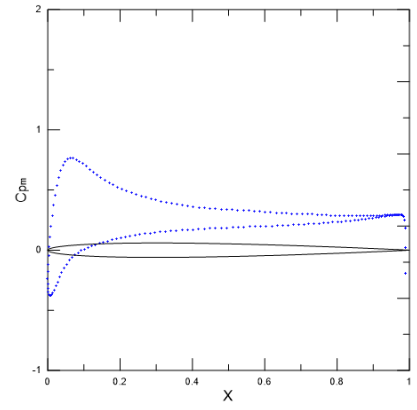
(b)

(a) $\beta = 7^\circ$ 

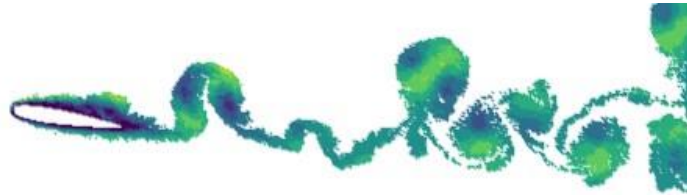
(b)



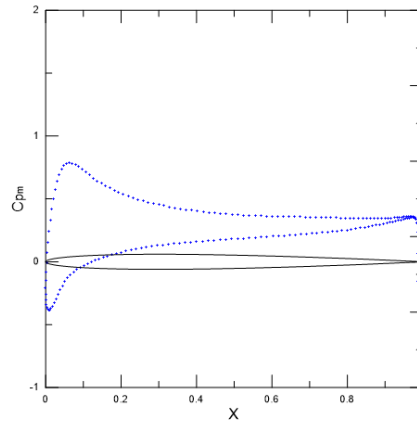
(a) $\beta = 8^\circ$



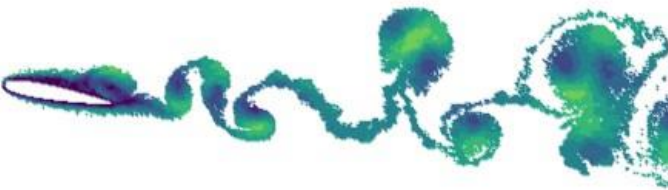
(b)



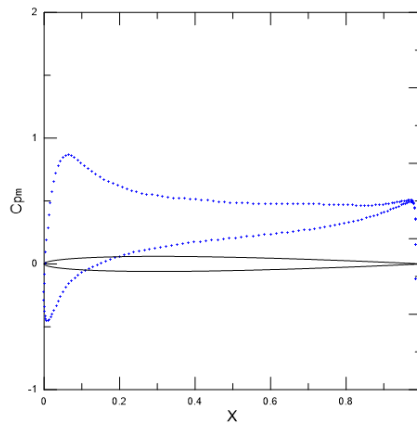
(a) $\beta = 9^\circ$



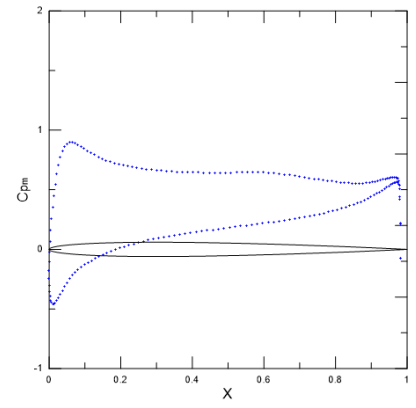
(b)



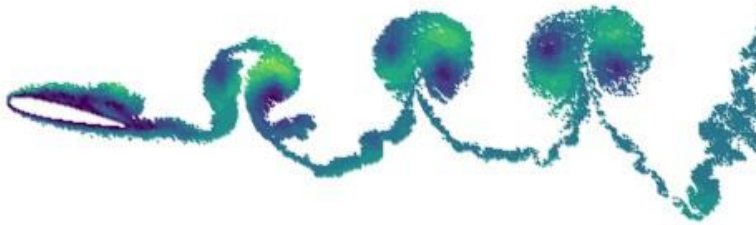
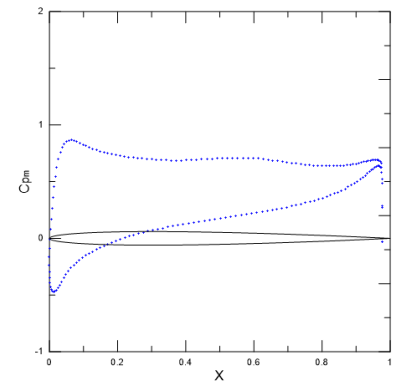
(a) $\beta = 10^\circ$



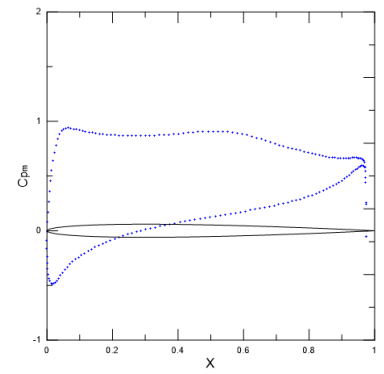
(b)

(a) $\beta = 11^\circ$ 

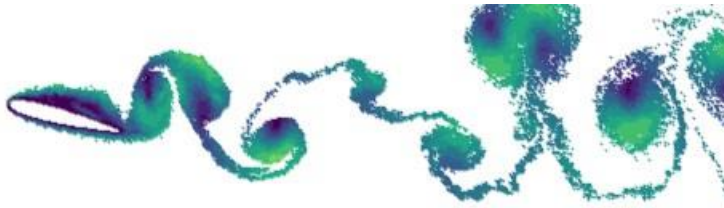
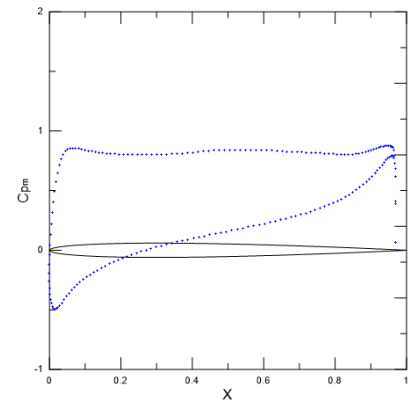
(b)

(a) $\beta = 12^\circ$ 

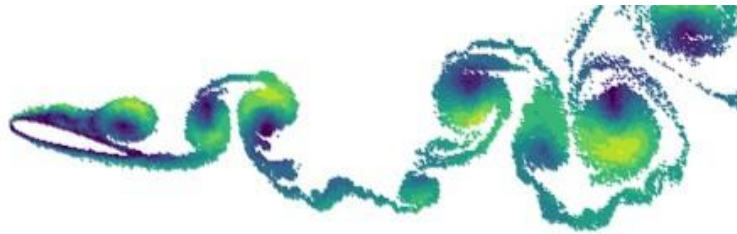
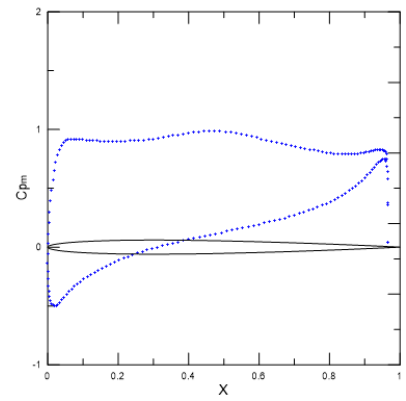
(b)

(a) $\beta = 13^\circ$ 

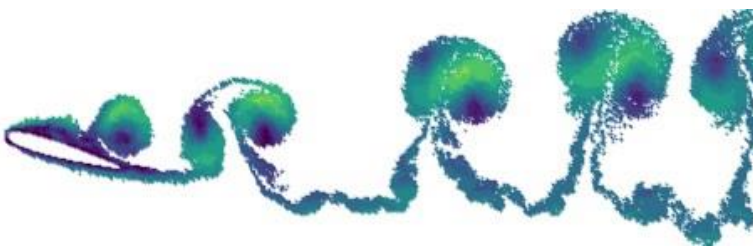
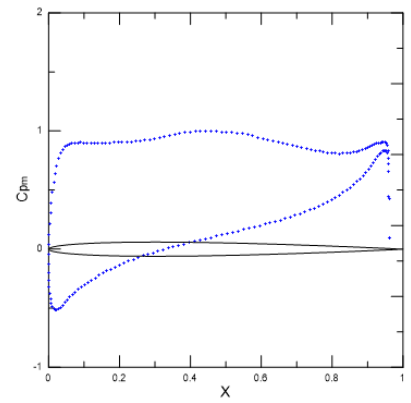
(b)

(a) $\beta = 14^\circ$ 

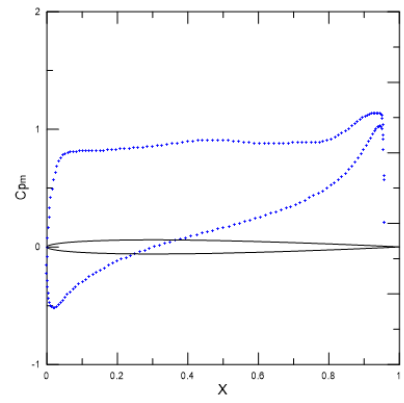
(b)

(a) $\beta = 15^\circ$ 

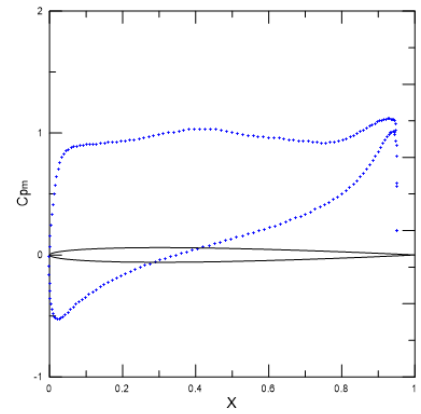
(b)

(a) $\beta = 16^\circ$ 

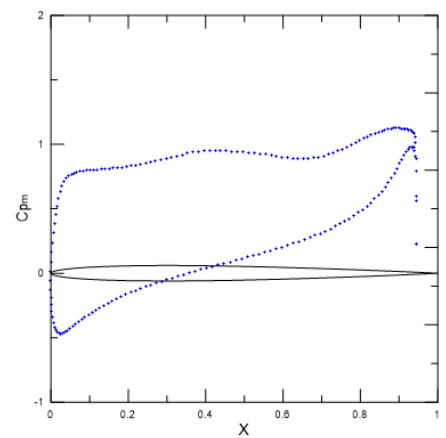
(b)

(a) $\beta = 17^\circ$ 

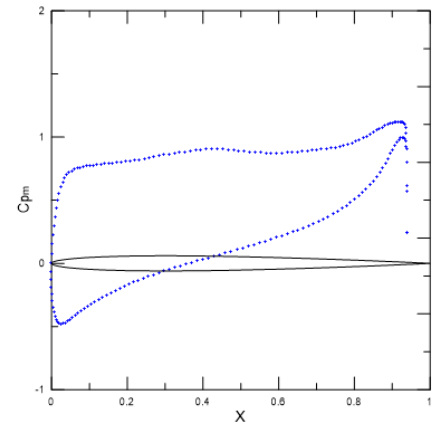
(b)

(a) $\beta = 18^\circ$ 

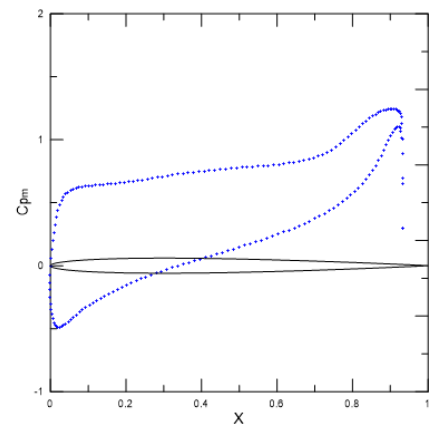
(b)

(a) $\beta = 19^\circ$ 

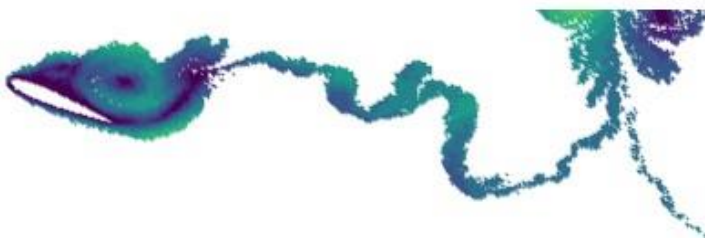
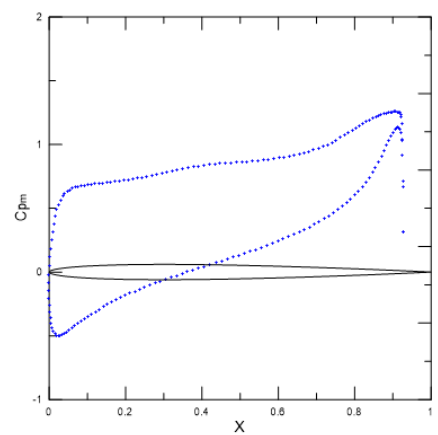
(b)

(a) $\beta = 20^\circ$ 

(b)

(a) $\beta = 21^\circ$ 

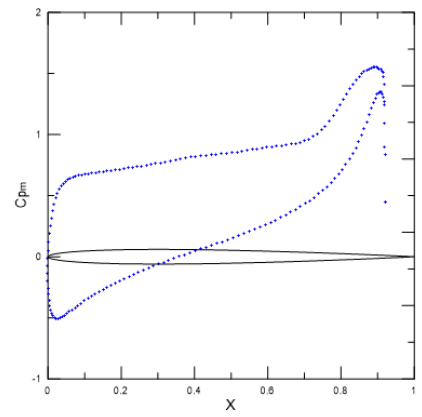
(b)

(a) $\beta = 22^\circ$ 

(b)



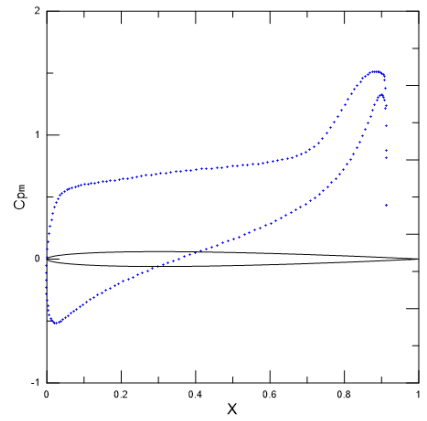
(a) $\beta = 23^\circ$



(b)



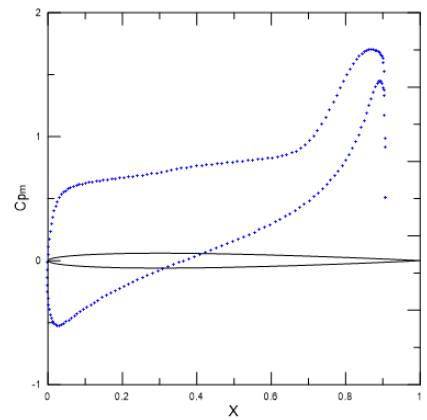
(a) $\beta = 24^\circ$



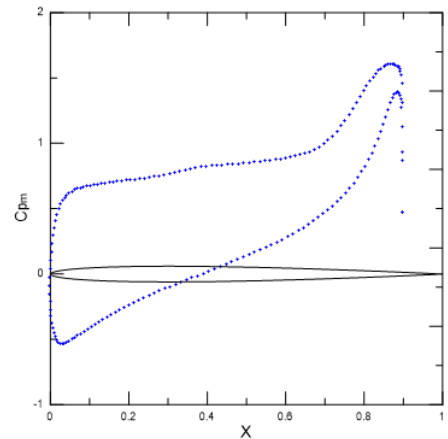
(b)



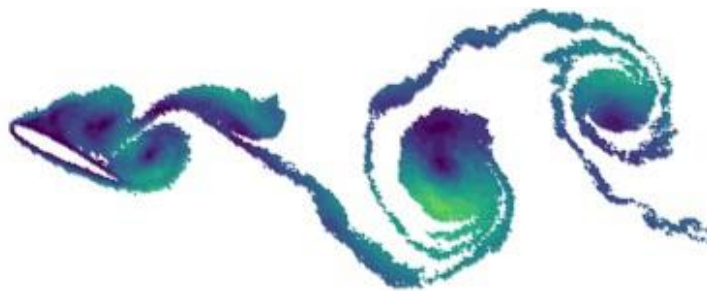
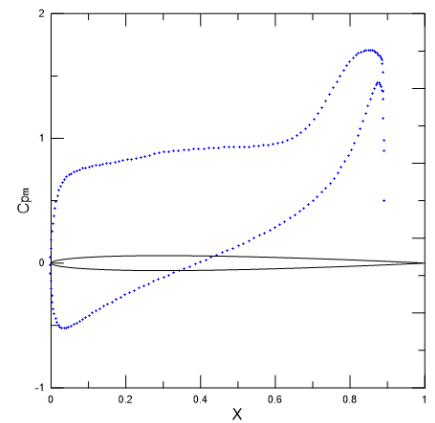
(a) $\beta = 25^\circ$



(b)

(a) $\beta = 26^\circ$ 

(b)

(a) $\beta = 27^\circ$ 

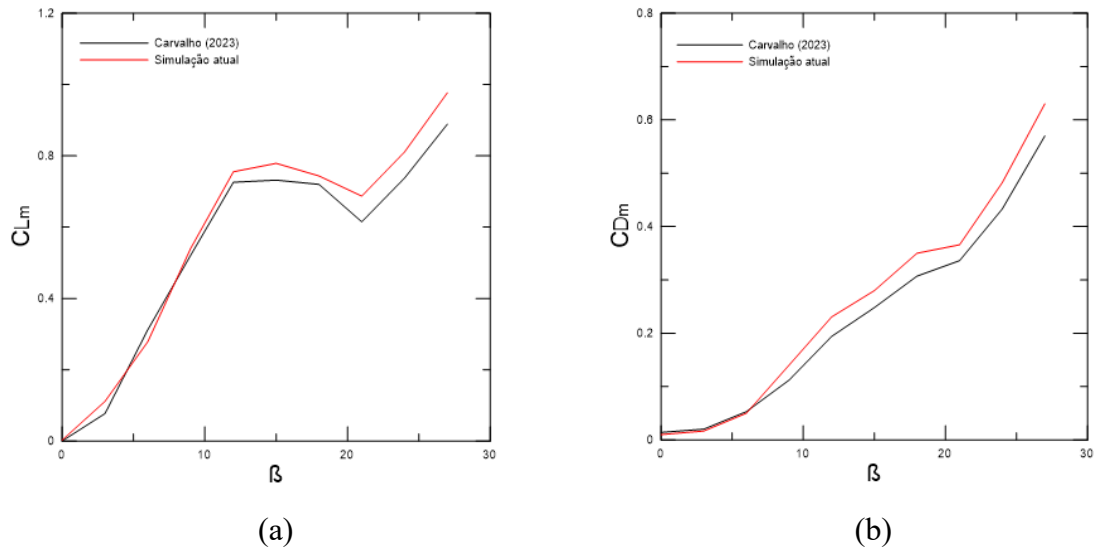
(b)

Fonte: Autoria própria.

Após analisar os resultados obtidos nas simulações do aerofólio NACA 0012 com superfície hidraulicamente lisa, foram realizadas simulações com valores crescentes de rugosidade superficial média, ε , de acordo com as adaptações feitas por Carvalho (2023) em relação ao modelo proposto de camada limite sob efeito de parede rugosa por Bimbato (2012). Os parâmetros utilizados para as simulações cuja superfície do aerofólio é hidraulicamente rugosa são os mesmos utilizados nas simulações para o aerofólio liso, bem como o método de multipolos rápidos foi utilizado da mesma maneira.

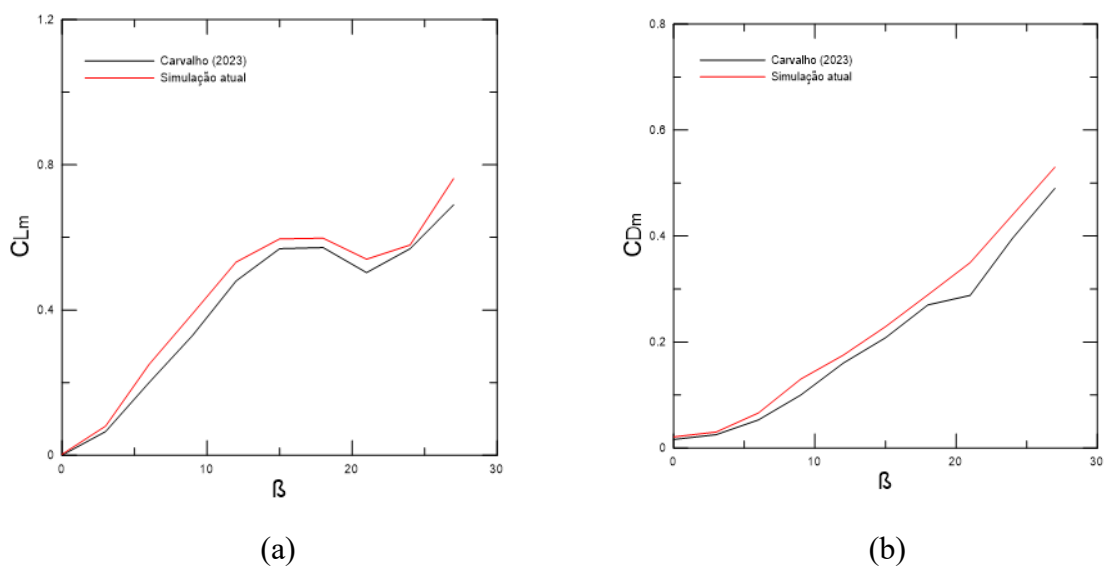
Os valores de rugosidade superficial analisados são: $\varepsilon = 0,002$; $\varepsilon = 0,004$ e $\varepsilon = 0,007$, a fim de comparar os resultados obtidos na presente dissertação com aqueles apresentados por (CARVALHO, 2023). As Figuras 29, 30 e 31 apresentam os coeficientes de sustentação e de arrasto médios, C_{L_m} e C_{D_m} , respectivamente, para os três valores de rugosidade superficial.

Figura 29 - Análise dos coeficientes médios de sustentação e de arrasto no escoamento ao redor do aerofólio rugoso variando-se os ângulos de ataque (*Adams-Bashforth*; $m = 200$; $\Delta t = 0,03$; $\varepsilon = 0,002$; $Re = 1,7 \times 10^5$): (a) Coeficiente de sustentação médio; (b) Coeficiente de arrasto médio.



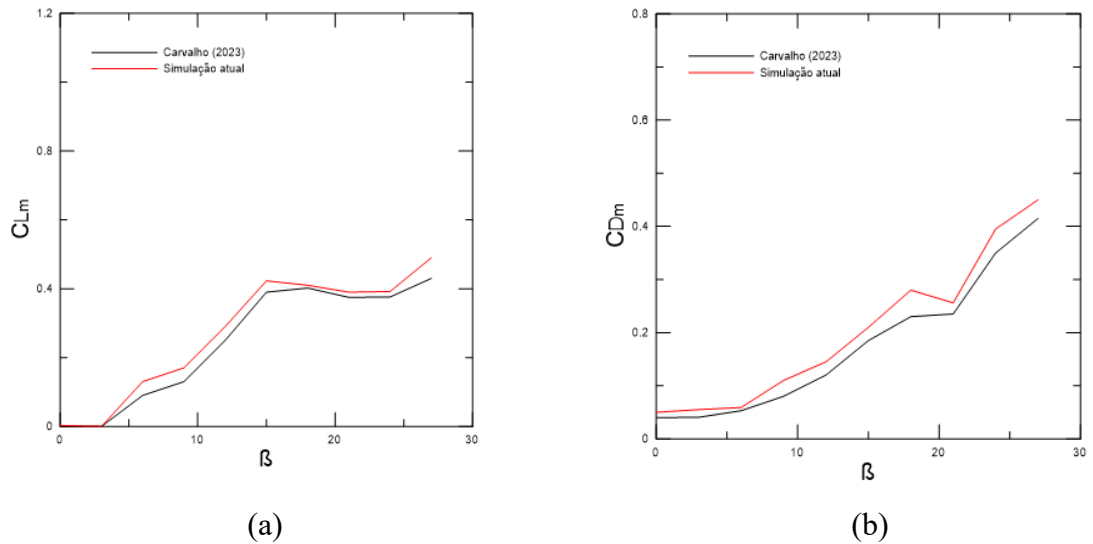
Fonte: Autoria própria.

Figura 30 - Análise dos coeficientes médios de sustentação e de arrasto no escoamento ao redor do aerofólio rugoso variando-se os ângulos de ataque (*Adams-Bashforth*; $m = 200$; $\Delta t = 0,03$; $\varepsilon = 0,004$; $Re = 1,7 \times 10^5$): (a) Coeficiente de sustentação médio; (b) Coeficiente de arrasto médio.



Fonte: Autoria própria.

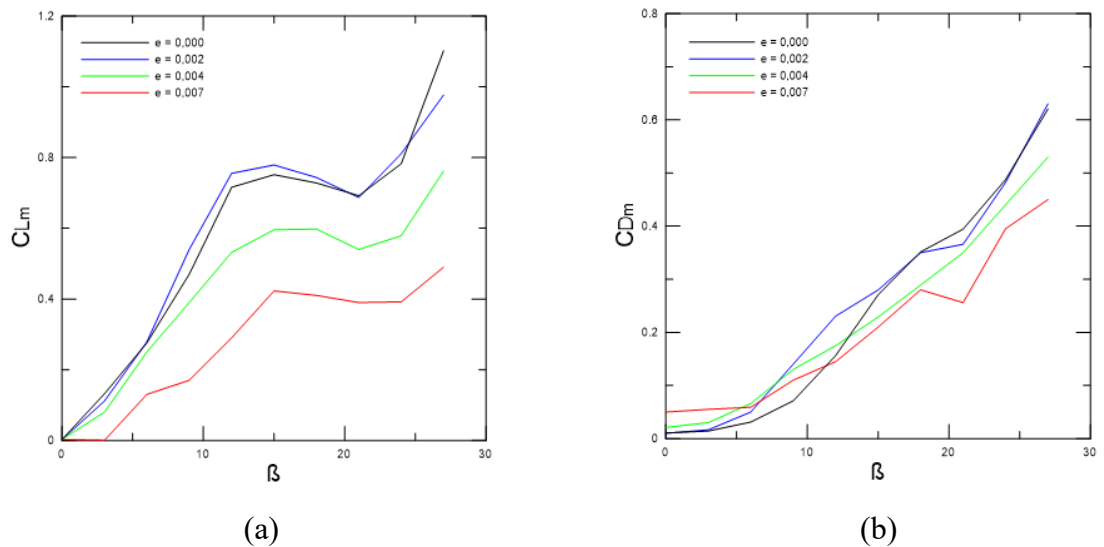
Figura 31 - Análise dos coeficientes médios de sustentação e de arrasto no escoamento ao redor do aerofólio rugoso variando-se os ângulos de ataque (*Adams-Bashforth*; $m = 200$; $\Delta t = 0,03$; $\varepsilon = 0,007$; $Re = 1,7 \times 10^5$): (a) Coeficiente de sustentação médio; (b) Coeficiente de arrasto médio.



Fonte: Autoria própria.

A fim de validar os resultados obtidos nestas simulações, apresenta-se aqueles obtidos por Carvalho (2023), que utilizou o método de vórtices discretos sem o algoritmo acelerador e, conforme detalhado para o aerofólio com a superfície hidraulicamente lisa, fez as simulações até um tempo adimensional $t = 60,00$. Nota-se, para os três valores de rugosidade superficial simulados, que os resultados estão próximos daqueles encontrados por Carvalho (2023). Na Figura 32 apresentam-se os valores de coeficiente de sustentação e de arrasto médios para os três valores diferentes de rugosidade superficial.

Figura 32 - Análise dos coeficientes médios de sustentação e de arrasto no escoamento ao redor do aerofólio rugoso variando-se os ângulos de ataque (*Adams-Bashforth*; $m = 200$; $\Delta t = 0,03$; $Re = 1,7 \times 10^5$): (a) Coeficiente de sustentação médio; (b) Coeficiente de arrasto médio.



Fonte: Autoria própria.

De acordo com as curvas de coeficiente de sustentação médio, apresentadas na Figura 32(a), a sustentação é sensível às variações de rugosidade superficial do perfil aerodinâmico, uma vez que a sustentação cai bastante ao aumentar-se a rugosidade superficial. Esta sensibilidade é menor com relação ao coeficiente de arrasto médio, apresentado na Figura 32(b), em que é possível notar que a rugosidade superficial afeta os valores de arrasto médios, porém, de forma mais discreta.

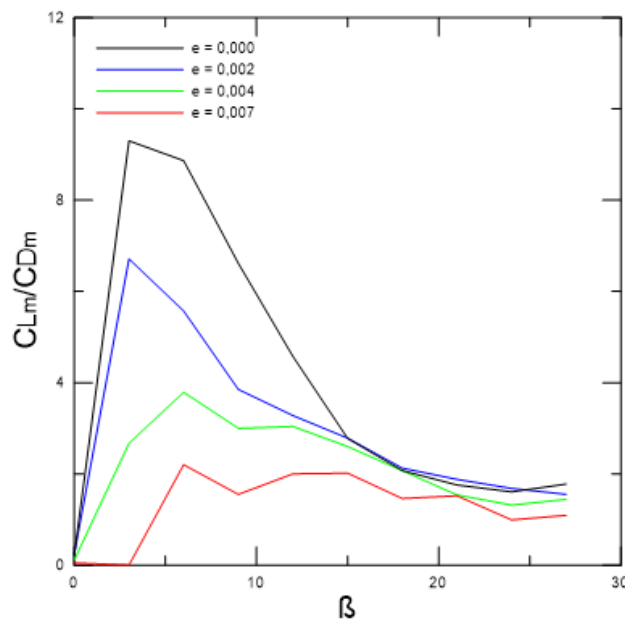
A rugosidade superficial $\epsilon = 0,004$ fez com que o estol iniciasse apenas em $\beta = 18^\circ$ e a recuperação do coeficiente de sustentação se deu em $\beta = 21^\circ$, ou seja, o fenômeno do estol foi atrasado e foi iniciada a recuperação do coeficiente de sustentação médio mais brevemente. No caso da rugosidade superficial $\epsilon = 0,007$, o fenômeno de estol se iniciou quando o perfil atingiu um ângulo de inclinação $\beta = 15^\circ$ e a recuperação do coeficiente de sustentação ocorreu em $\beta = 24^\circ$.

Por fim, analisa-se a eficiência aerodinâmica do aerofólio, que é dada pela razão entre os coeficientes de sustentação e de arrasto médios obtidos em cada uma das simulações. A eficiência aerodinâmica é um indicador de quão bem um aerofólio desempenha sua função, seja ela a sustentação de uma aeronave ou *downforce* de um carro. A rugosidade superficial, de

modo geral, tem um impacto negativo na eficiência do perfil aerodinâmico, pois ela aumenta o arrasto por atrito, gerando uma maior resistência aerodinâmica devido a este efeito. Além disso, é possível que superfícies muito rugosas apresentem uma separação precoce do escoamento o que leva à formação de zonas de baixa pressão e ao aumento do arrasto de forma.

Em alguns casos, a presença de rugosidade superficial controlada (na forma de microtexturas ou tubérculos) pode fazer com que a eficiência aumente, promovendo uma transição turbulenta controlada e, conseqüentemente, reduzindo a separação do escoamento. Isto pode ser útil em condições específicas, como asas de aeronaves que operam em ângulos de ataque elevados ou superfícies de esportes aquáticos, que possuem texturizações. Na Figura 33 apresenta-se a eficiência aerodinâmica do aerofólio para as simulações em que há rugosidade superficial ($\varepsilon \neq 0$).

Figura 33 - Análise da eficiência do aerofólio NACA 0012 em função do ângulo de ataque e da rugosidade superficial (*Adams-Bashforth*; $m = 200$; $\Delta t = 0,03$; $Re = 1,7 \times 10^5$).



Fonte: Autoria própria.

Na Figura 33, nota-se que, ao aumentar a rugosidade superficial, a eficiência aerodinâmica é reduzida, conforme era esperado, mediante as razões descritas anteriormente.

A fim de validar, de fato, a utilização do método de multipolos rápidos nos casos em que o perfil NACA 0012 foi objeto de estudo, faz-se duas simulações, com o perfil hidraulicamente liso, com ângulo de inclinação, β , igual a 0° . A primeira utilizando apenas a lei de Biot-Savart para calcular a interação vórtice-vórtice e a segunda utilizando o FMM conforme descrito

anteriormente, a fim de avaliar a redução do tempo computacional, bem como o erro no cálculo do campo de velocidades ao final da simulação. Na Tabela 7, apresenta-se o tempo de CPU de cada uma das simulações e o erro numérico associado ao algoritmo acelerador para o último passo de tempo da simulação.

Tabela 7. Comparação dos resultados obtidos para o perfil NACA 0012 hidraulicamente liso e com ângulo de ataque nulo para os casos simulados com a lei de Biot-Savart e o método de multipolos rápidos para contabilizar a parcela da interação vórtice-vórtice.

Método utilizado	Erro velocidade (%)	Tempo de CPU (h)	Redução do tempo de CPU (%)
BS	-	484,23	-
FMM	6,51	345,54	28,64

Fonte: Autoria própria.

Nota-se, portanto, uma redução de 28,64% de tempo de processamento, neste caso, com um erro no cálculo do campo de velocidades, ao final da simulação numérica, de 6,51%, valor considerado aceitável.

Todas as simulações em que o tempo de CPU do método de multipolos rápidos foi comparado com aquele obtido pela utilização da lei de Biot-Savart para computar a interação vórtice-vórtice foram realizados em Workstations cujas configurações são:

- Placa-mãe: Chipset X570;
- Processador: AMD Ryzen 9 5900X, com 12 núcleos e 24 *threads*, cuja frequência base é de 3.7GHz;
- Memória RAM: 64 GB;
- Armazenamento: SSD de 1TB, utilizado como unidade principal para o sistema operacional e *softwares* de simulação e 2 HDDs de 2TB cada, utilizados para armazenamento de dados e *backups*.

As demais simulações em que o objetivo não foi avaliar a redução do tempo de CPU associada à utilização do FMM para computar a interação vórtice-vórtice foram realizados com o apoio de uma Workstation cujas configurações são:

- Placa-mãe: Chipset AMD X570;
- Processador: AMD Ryzen 9 5950X, com 16 núcleos e 32 *threads*, cuja frequência base é de 3,4GHz e turbo de até 4,9GHz;
- Memória RAM: 128 GB;

- Armazenamento: SSD de 1TB, utilizado como unidade principal para o sistema operacional e *softwares* de simulação e 2 HDDs de 2TB cada, utilizados para armazenamento de dados e *backups*.

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Os resultados apresentados nesta dissertação demonstram a eficácia do método de multipolos rápidos (FMM) como uma ferramenta que permite realizar simulações de escoamento ao redor de corpos aerodinâmicos em um tempo reduzido. Os resultados exploram a aplicação do algoritmo acelerador tanto em cilindro circulares quanto no aerofólio NACA 0012, trazendo parâmetros de eficiência computacional, acurácia numérica e análises dos fenômenos físicos associados aos escoamentos analisados.

As simulações realizadas inicialmente no cilindro circular liso servem como base para validar o modelo computacional e estabelecer alguns critérios para utilização do FMM. A esteira de von Kármán, característica de escoamentos ao redor de cilindros, para o caso apresentado, em que o número de Reynolds é elevado ($Re = 1,0 \times 10^5$), foi reproduzida apresentando boa concordância com os dados experimentais presentes na literatura. O coeficiente de arrasto médio ($C_{D_m} = 1,202$) e o número de Strouhal ($St = 0,200$) corroboram a validade do código computacional.

As simulações referentes ao cilindro circular com o método de multipolos rápidos implementado demonstram que a redução no tempo computacional pode ser expressiva. Por exemplo, com o nível máximo de refinamento, n , igual a 8, sendo este utilizado desde o meio da simulação numérica até o final, foi possível reduzir o tempo de CPU em 61,65%, quando comparado à simulação do cilindro circular liso em que apenas a lei de Biot-Savart foi utilizada para calcular a parcela do campo de velocidades do escoamento devido à interação vórtice-vórtice. No entanto, esta redução no tempo de processamento acarretou um erro no cálculo do campo de velocidades, E , de 23,2%.

Por outro lado, na simulação do cilindro circular liso em que o nível máximo de refinamento utilizado foi igual a 4 e o algoritmo acelerador passou a ser utilizado mais tardiamente (no passo de tempo igual a 1251), o erro foi reduzido para 0,97%, porém, o tempo de CPU foi reduzido em apenas 6,73%. Esta análise reforça que o uso do FMM deve ser adaptado às condições das simulações numéricas.

Quando o refinamento espacial foi variável ao longo das simulações do cilindro circular liso, especialmente na última delas, houve um melhor equilíbrio entre a precisão e a eficiência computacional. Nesta simulação, o erro numérico associado ao método foi controlado (em torno de 3,2%), reduzindo, ainda, o tempo de processamento em 17,5%.

Partindo-se dos critérios de refinamento definidos nas simulações do cilindro circular liso,

o método de multipolos rápidos foi utilizado nas simulações envolvendo o aerofólio NACA 0012. Os resultados para o perfil aerodinâmico demonstram que os fenômenos físicos essenciais foram capturados com precisão. Dentre estes fenômenos físicos, foi possível avaliar o momento em que há a separação e o recolamento da camada limite, para cada uma das rugosidades superficiais avaliadas, determinando, assim, o momento em que ocorre o estol.

Nas simulações em que foi avaliado o comportamento do aerofólio liso, a distribuição de pressão ao longo do intradorso e do extradorso demonstrou o comportamento típico de perfis aerodinâmicos: para baixos ângulos de ataque ($\beta < 12^\circ$), o escoamento permanece aderido à superfície, gerando uma diferença de pressão significativa entre o intradorso (alta pressão) e o extradorso (baixa pressão), resultando em maiores valores de sustentação. O estol foi identificado quando o ângulo de ataque atingiu 14° , ocorrendo a separação do escoamento no extradorso, causando uma queda brusca no coeficiente de sustentação médio, bem como um aumento acentuado no arrasto. A recuperação da sustentação ocorreu quando o ângulo de ataque atingiu 21° , momento em que ocorre o recolamento da camada limite do escoamento.

Os resultados para o aerofólio liso apresentam boa concordância com a literatura. Carvalho (2023) observou o estol quando o perfil estava posicionado com um ângulo de ataque de 15° , bem como a recuperação na sustentação a 21° . Os valores obtidos neste estudo se aproximam daqueles obtidos por Carvalho (2023).

A rugosidade superficial do aerofólio foi analisada com valores $\varepsilon = 0,002$; $\varepsilon = 0,004$ e $\varepsilon = 0,007$. Este parâmetro foi responsável por influenciar diretamente os fenômenos de separação e recolamento da camada limite do escoamento, retardando o estol (por exemplo, na maior rugosidade superficial analisada, o estol aconteceu apenas quando o ângulo de ataque do perfil aerodinâmico atingiu 15°). No entanto, o aumento da rugosidade superficial resultou em uma queda na eficiência aerodinâmica (C_{Lm}/C_{Dm}). Analisar o comportamento da eficiência aerodinâmica do perfil demonstra ser útil em aplicações específicas, como superfícies destinadas a melhorar a estabilidade após o estol.

Ao aplicar o método de multipolos rápidos nas simulações do aerofólio NACA 0012, foi possível alcançar tempos adimensionais maiores ($t = 75$) do que aqueles alcançados quando apenas a lei de Biot-Savart é utilizada para calcular a parcela devido à interação vórtice-vórtice no cálculo do campo de velocidades do escoamento ($t = 60$, em Carvalho, 2023). Isto faz com que seja possível analisar fenômenos de longa duração no escoamento, mantendo a acurácia dos coeficientes aerodinâmicos médios e a observação dos fenômenos envolvidos no escoamento, como o estol.

O estudo demonstra que o método de multipolos rápidos é uma solução eficiente para

simulações numéricas de escoamentos envolvendo corpos como o cilindro circular e perfis aerodinâmicos. Com a utilização dele, foi possível capturar os fenômenos físicos fundamentais do escoamento, reduzindo o tempo computacional, o que permite que sejam realizadas simulações mais longas, com tempos adimensionais maiores.

Destaca-se, como uma linha promissora de trabalhos futuros, o aprofundamento da utilização do método de multipolos rápidos, cuja eficiência se mostra vantajosa em simulações de escoamento de grandes escalas. É possível desenvolver estratégias híbridas, que combinem o FMM com técnicas de malha adaptativa ou modelagem de elementos finitos, permitindo maior flexibilidade na resolução de regiões com elevados gradientes de velocidade ou pressão.

A paralelização do código computacional desenvolvido no presente trabalho possibilita que o tempo de processamento em simulações complexas seja reduzido ainda mais, quando comparado aos tempos de simulação numérica utilizando-se apenas a lei de Biot-Savart para calcular a interação vórtice-vórtice. Para isso, é possível utilizar arquiteturas de alto desempenho, como CUDA, para GPUs e OpenMP para CPUs multicore.

Com o desenvolvimento de códigos computacionais capazes de fazer simulações complexas em menor tempo, é possível realizar simulações tridimensionais, estendendo o método para casos com maior complexidade geométrica e presença de efeitos tridimensionais significativos no escoamento.

REFERÊNCIAS

ABBOTT, I.H.; VON DOENHOFF, A.E. **Theory of wing sections (Including a summary of airfoil data)**. New York: Dover Publications, 1949. 705p.

ALCÂNTARA PEREIRA, L. A. **Simulação numérica do escoamento em torno de um corpo de forma arbitrária utilizando o método de vórtices discretos**. 1999. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Energia) – Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 1999.

ALCÂNTARA PEREIRA, L.A. **Simulação numérica do escoamento ao redor de perfis aerodinâmicos montados em grades lineares de turbomáquinas utilizando o método de vórtices discretos**. 2002. Tese (Doutorado em Engenharia de Energia) – Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2002.

ALCÂNTARA PEREIRA, L. A.; OLIVEIRA, M. A.; MORAES, P. G.; BIMBATO, A. M. Numerical experiments of the flow around a bluff body with and without roughness model near a moving wall. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Rio de Janeiro, v. 42, n. 3, p. 1-17, 2020.

ANDERSON, J. **Fundamentals of Aerodynamics**. Cambridge: McGraw Hill Education, 2017. 1130 p.

AVVAD, M.; VISHWANATH, K. C.; KALADGI, A. R.; MUNEER, R.; KAREEMULLAH, M.; NAVANEETH, I. M. Performance analysis of aerofoil blades at different pitch angles and wind speeds. **Materials Today: Proceedings**, Amsterdam, v. 47, pt. 17, p. 6249-6256, 2021.

AZEREDO, M. A. **Estudos de escoamentos turbulentos completamente desenvolvidos em canais via simulação numérica direta processada em um simulador comercial**. 2017. 65 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico, Vitória, 2017.

BARNES, J. E.; HUT, P. A hierarchical $O(N \log N)$ force-calculation algorithm. **Nature**, London, v. 324, p. 446-449, 1986.

BATCHELOR, G. K. **An introduction to fluid dynamics**. Nova Delhi: Cambridge University Press, 1967. 615 p.

BELLAMY-KNIGHTS, P. G; MASKELL, S.; KATZ, J. Convergence properties of panel methods. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Amsterdam, v. 76, p. 171-178, 1988. Disponível em: <https://ur.booksc.eu/book/8524763/258aae>. Acesso em: 5 jul. 2022.

BERTAGNOLIO, F.; SØRENSEN, N. N.; JOHANSEN, J.; FUGLSANG, P. **Wind Turbine Airfoil Catalogue**. Denmark: Ris0 National Laboratory, 2001. 85 p.

BERTIN, J.J.; SMITH, M.L., **Aerodynamics for Engineers**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1998. 478 p.

BIMBATO, A. M. **Estudo de escoamentos turbulentos em torno de um corpo rombudo de superfície hidraulicamente lisa ou rugosa utilizando o método de vórtices discretos**. 2012. 165 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2012.

BIMBATO, A. M.; ALCÂNTARA PEREIRA, L. A.; HIRATA, M. H., Suppression of Vortex Shedding on a Bluff Body. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, Amsterdam, v. 121, p. 16-28, 2013.

BIMBATO, A. M.; ALCÂNTARA PEREIRA, L. A.; HIRATA, M. H., Development of a new Lagrangian vortex method for evaluating effects of surfaces roughness. **European Journal of Mechanics: B/Fluids**, Amsterdam, v. 74, p. 291-301, 2019.

BIMBATO, A. M.; ALCÂNTARA PEREIRA, L. A.; HIRATA, M. H. Study of surface roughness effect on a bluff body - The formation of asymmetric separation bubbles. **Energies**, Basel, v. 13, n. 22, p. 6094, 2020.

BLEVINS, R. D. **Applied fluid dynamics handbook**. San Diego: San Diego State University, 1984. 397 p.

BOUSSINESQ, J. Theorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes a grande section. **Fautiers-Villars**, Paris, v. 2, p. 74, 1877. Disponível em: <http://hdl.handle.net/1908/3743>. Acesso em: 25 ago. 2022.

BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. **Boundary element techniques: theory and applications in engineering**. Berlin-Heidelberg: Springer, 1984. 472 p.

CARRIER, J.; GREENGARD, L.; ROKHLIN, V. Multipole algorithm for particle simulations. **SIAM Journal of Scientific Statistics and Computation**, Philadelphia, v. 9, n. 4, p. 669-686, 1988. Disponível em: <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/0909044>. Acesso em: 10 jun. 2022.

CARVALHO, F. E. F. **Estudo de escoamentos turbulentos em torno de corpos rombudos e esbeltos de superfície hidraulicamente lisa ou rugosa utilizando o método de vórtices discretos**. 2023. 101f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Guaratinguetá, 2023.

CARVALHO JÚNIOR, C. F. **Estudo numérico do escoamento ao redor de corpos esbeltos utilizando o método de vórtices discretos**. 2016. 72f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Guaratinguetá, 2016.

CHOLLET, J. P.; LESIEUR, M. Parameterization of small scales of three-dimensional isotropic turbulence utilizing spectral closures. **Journal of the Atmospheric Sciences**, Boston, v. 38, p. 2747-2757, 1981. Disponível em: [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1981\)0382.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1981)0382.0.CO;2). Acesso em: 26 jul. 2022.

CHORIN, A. J. Numerical study of slightly viscous flows. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v. 57, p. 785-796, 1973. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/numerical-study-of-slightly-viscous-flow/4E4FE6AE32F826FFFD6F46E3E86F330A>. Acesso em: 20 jun. 2022.

CHOW, V.T. **Open Channel Hydraulics**. McGraw-Hill, New York, 1959. 680 p.

CRITZOS, C.C.; HEYSON, H.H.; BOSWINKLE, JR., R.W. **Aerodynamic characteristics of NACA 0012 airfoil section at angles of attack from 0° to 180°**. NACA TN 3361.

Washington, DC: National Advisory Committee for Aeronautics, 1955.

ERICKSON, L. L. Panel method - an introduction. **NASA Technical Paper 2995**, Moffett Field, 1990. 68p. Disponível em:

<http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19910009745.pdf>. Acesso em: 30 out. 2022.

FERZIGER, J. H.; PERIĆ, M.; STREET, R. L. **Computational methods for fluid dynamics**. 3th ed. New York: Springer International Publishing, 2020. 586 p.

FRAENKEL, P. L. Power from marine currents. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, Part A: Journal of Power and Energy, London, v. 216, p. 1-14, 2002.

GREENGARD, L.; ROKHLIN, V. A fast algorithm for particle simulations. **Journal of Computational Physics**, Cambridge, v. 73, p. 325-348, 1987. Disponível em:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999187901409>. Acesso em: 17 jun. 2022.

GREENGARD, C. The core spreading method approximates the wrong equation. **Journal of Computational Physics**, Cambridge, v. 61, p. 345-348, 1985. Disponível em:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999185900919?via%3Dihub>. Acesso em: 2 jun. 2022.

HESS, J. I.; SMITH, A. M. O. Calculation of potential flow about arbitrary bodies. **Progress in Aeronautical Sciences**, Oxford, v. 8, p. 1-138, 1967. Disponível em:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0376042167900036>. Acesso em: 3 jul. 2022.

HOERNER, S.F.; BORST, H.V. **Fluid-Dynamic lift**. Wayne: Mrs. Liselotte A. Hoerner, 1985. 507p.

JOSSO, B.; BURTON, D. R.; LALOR, M. J. Frequency normalised wavelet transform for surface roughness analysis and characterisation. **Wear**, [S.l.], v. 252, n. 5, p. 491-500, 2002.

KAMEMOTO, K. Perspective characteristics of a lagrangian vortex method in application into vortex flows of moving boundary problems. *In*: WORKSHOP – FROM FAST CARS TO SLOW FLOWS OVER BLUFF BODIES. **Proceedings** [...]. London: Imperial College, 2009.

KATZ, J.; PLOTKIN, A. **Low speed aerodynamics**: from wing theory to panel methods. Cambridge: McGraw Hill Inc, 1991. 632 p.

KOMOUTSAKOS, P. D. **Direct numerical simulations of unsteady separated flows using vortex methods**. 1993. Thesis (Ph.D. Aeronautics) - California Institute of Technology, Pasadena, 1993.

LEWIS, R. I. **Vortex element method for fluid dynamic analysis of engineering systems**. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991. Disponível em:
<https://www.cambridge.org/br/academic/subjects/engineering/thermal-fluids-engineering/vortex-element-methods-fluid-dynamic-analysis-engineering-systems?format=PB>. Acesso em: 15 jun. 2022.

LEONARD, A. Vortex methods for flow simulation. **Journal of Computational Physics**, Maryland Heights, v. 37, p. 289-335, 1980. Disponível em:
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999180900406>. Acesso em: 2 jun. 2022.

LESIEUR, M.; MÉTAIS, O. New trends in large-eddy simulation of turbulence. **An Review in Fluid Mechanics**, Palo Alto, v. 28, p. 45-82, 1996.

MARTENSEN, E. Berechnung der druckverteilung an gitterprofilen in ebener potentialströmung mit einer fredholmschen integralgleichung. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Heidelberg, v. 3, p. 235-270, 1959. Disponível em:
<https://link.springer.com/article/10.1007%2FBF00284179> - citeas. Acesso em: 30 jul. 2022.

MÉTAIS, O.; LESIEUR, M. Spectral large-eddy simulations of isotropic and stably-stratified

turbulence. **Journal of Fluid Mechanics**, London, v. 239, p. 157-194, 1992. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/spectrallargeeddy-simulation-of-isotropic-and-stably-stratifiedturbulence/EF78722DA97C9197C06234B4861E4A48>. Acesso em: 26 maio 2023.

MORAES, P. G.; OLIVEIRA, M. A.; ANDRADE, C. L.; BIMBATO, A. M.; ALCÂNTARA PEREIRA, L. A. Effects of surface roughness and wall confinement on bluff body aerodynamics at large-gap regime. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Rio de Janeiro, v. 43, n. 8, 2021.

MORAN, J. **An introduction to theoretical and computational aerodynamics**. New York: John Wiley & Sons, 1984. 400 p.

NISHIMURA, N. Fast multipole accelerated boundary integral equation methods. **Applied Mechanics Reviews**, New York, v. 55, n. 4, p. 299-324, 2002.

PANTON, R. L. **Incompressible flow**. Austin: John Wiley and Sons, 1984. 564 p.

PEREIRA, L. H. G.; BODSTEIN, G. C. R. Método dos painéis com distribuições de singularidade quadráticas aplicados a escoamentos bidimensionais sobre aerofólios. *In*: BRAZILIAN CONGRESS OF THERMAL SCIENCES AND ENGINEERING, 10., 2004, Rio de Janeiro. **Anais [...]**. Rio de Janeiro, 2004.

RENOLDI, R. G. F. **Desenvolvimento de uma formulação para o cálculo do componente viscoso do arrasto para ser incorporada a um método de vórtices lagrangiano**. 2019. 71f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Guaratinguetá, 2019.

RENOLDI, R.G.F., BIMBATO, A. M.; ALCÂNTARA PEREIRA, L. A. Development of a pressure formulation to consider friction drag in the vortex method. *In*: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, 25., 2019, Uberlândia. **Proceedings [...]**. Uberlândia, 2019.

RICCI, J. E. R. **Simulação numérica do escoamento ao redor de um corpo de forma**

arbitrária, estacionado nas imediações de uma superfície plana, com o emprego do método de vórtices. 2002. Tese (Doutorado em Engenharia de Energia) – Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2002. Disponível em:
<https://repositorio.unifei.edu.br/jspui/handle/163456659/1160>. Acesso em: 26 ago. 2022.

RICCIARDI, T.R. **Fast multipole discrete vortex method applied to unsteady vortex flows.** 2016. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2016.

RICCIARDI, T. R.; WOLF, W. R.; BIMBATO, A. M. Fast multipole method applied to lagrangian simulations of vortical flows. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, Amsterdam, v. 51, p. 180-197, 2017a. Disponível em:
<https://repositorio.unesp.br/handle/11449/159542>. Acesso em: 4 jun. 2022.

RICCIARDI, T. R.; WOLF, W. R.; BIMBATO, A. M. A fast algorithm for simulation of periodic flows using discrete vortex particles. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Heidelberg, v. 39, p. 45-55, 2017b. Disponível em:
<https://repositorio.unesp.br/handle/11449/159889?locale-attribute=en>. Acesso em: 4 jun. 2022.

ROSSI, L. F. Resurrecting core spreading vortex methods: a new scheme that is both deterministic and convergent. **SIAM Journal on Scientific Computing**, Philadelphia, v. 17, n. 2, p. 370-397, 1996. Disponível em:
https://www.researchgate.net/publication/247404841_Resurrecting_Core_Spreading_Vortex_Methods_A_New_Scheme_that_is_Both_Deterministic_and_Convergent. Acesso em: 3 jun. 2022.

SARPKAYA, T. Vortex element methods for flow simulation. **Advances in Applied Mechanics**, Maryland Heights, v. 31, p. 113-247, 1994. Disponível em:
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0065215608702564>. Acesso em: 3 jun. 2022.

SILVA, F. D. C. E. **Simulação numérica do escoamento ao redor de aerofólios via método de vórtices associado ao método dos painéis**, 2005. 175f. Tese (Doutorado em Engenharia

de Energia) – Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2005.

SILVEIRA NETO, A. A numerical investigation of the coherent structures of turbulence behind a backward-facing step. **International Journal of Fluid Mechanics**, New York, v. 256, p. 1-25, 1993. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluidmechanics/article/numerical-investigation-of-the-coherent-vortices-in-turbulence-behind-a-backward-facing-step/872B8F0C8ABDD71FD0582113C20FB858>. Acesso em: 26 maio 2023.

SHINTANI, M.; AKAMATSU, Y. Investigation of two-dimensional discrete vortex method with viscous diffusion model. **Computational Fluid Dynamics Journal**, Japan, v. 3, n. 2, p. 237-254, 1994.

SMAGORINSKY, J. General circulation experiments with the primitive equations. **Monthly Weather Review**, Boston, v. 91, n.3, p 99-164, 1963.

STRICKLAND, J.W.; RAMACHANDRAN, B. R.; GOLDSTEIN, D. B.; SMITH, T. A. The fast multipole method for the discretized vortex method. **Journal of Computational Physics**, v. 146, n. 2, p. 341-362, 1999.

TIMMER, W. An overview of NACA 6-digit airfoil series characteristics with reference to airfoils for large wind turbine blades. *In: AIAA SCITECH FORUM*, 47., 2009, Orlando. **Proceedings** [...]. Orlando: AIAA, 2009. Disponível em: <https://arc.aiaa.org/doi/book/10.2514/MASM09>. Acesso em 22 dez. 2023.

TIMMER, W. A.; SCHAFFARCZYK, A.P. The effect of roughness at high Reynolds numbers on the performance of aerofoil DU 97-W-300Mod. **Wind Energy**, United Kingdon, v. 7, p. 295-307, 2004.

VIDILLE, M. F.; ALCÂNTARA PEREIRA, L. A.; BIMBATO, A. M. Implementation of an accelerator algorithm to reduce the computational costs in Lagrangian simulations. *In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING*, 26., 2021, Florianópolis. **Proceedings** [...]. Florianópolis, 2021.

VIDILLE, M.; MORAES, P. G.; ALCÂNTARA PEREIRA, L. A.; BIMBATO, A. M. Use of a fast multipole method to reduce the computational costs of aircraft wakes simulations. *In: BRAZILIAN CONGRESS OF THERMAL SCIENCES AND ENGINEERING*, 19., 2022, Bento Gonçalves. **Proceedings** [...]. Bento Gonçalves: ABCM, 2022.

WALKER, J. M.; FLACK, K. A.; LUST, E. E.; SCHULTZ, M. P.; LUZNIK, L. Experimental and numerical studies of blade roughness and fouling on marine current turbine performance. **Renewable Energy**, United Kingdom, v. 66, p. 257-267, 2014.

ZDRAVKOVICH, M. M.; BEARMAN, P. W. Flow around circular cylinders. **Journal of Fluids Engineering**, New York, v. 120, p. 216-216, 1998. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/flow-around-a-circular-cylinder-near-a-plane-boundary/477306B7F49C7D7EB7AE9E2D597C78A6>. Acesso em: 26 set. 2022.

ZHOU, B.; WANG, X.; GHO, W. M.; TAN, S. K. Force and flow characteristics of a circular cylinder with uniform surface roughness at subcritical Reynolds numbers. **Applied Ocean Research**, Singapore, v. 49, p. 20-26, 2015.

APÊNDICE A – APRESENTAÇÃO DO MÉTODO DE MULTIPÓLOS RÁPIDOS

Conforme mencionado na Seção 4.1.4, a utilização do método de multipolos rápidos viabiliza a redução do tempo computacional das simulações devido à redução da utilização da lei de Biot-Savart para computar a interação vórtice-vórtice no cálculo do campo de velocidades.

O modelo hierárquico utilizado é o de refinamento global, que é predominantemente indicado quando os vórtices discretos estão distribuídos uniformemente no domínio computacional (GREENGARD; ROKHLIN, 1987), o que não acontece nos estudos realizados no presente trabalho. Entretanto, tal modelo hierárquico é aqui utilizado pelas razões expostas na Seção 2.1 e, também, pelo fato de propiciar uma satisfatória redução do tempo de processamento das simulações, como pode ser comprovado pelos resultados apresentados no Capítulo 5.

Para realizar a implementação numérica do método de maneira mais simples, é possível dividi-la em algumas etapas:

a) Pré-processamento

É necessário realizar uma etapa de pré-processamento, previamente, antes de se aplicar o método de multipolos rápidos propriamente dito. Nesta etapa, o domínio que, inicialmente, é uma caixa quadrada, é dividido em partes menores, criando os níveis de refinamento, que são compostos por caixas.

As caixas são criadas a partir da divisão do domínio em quatro partes iguais: inicia-se na caixa quadrada que contempla o domínio computacional. Esta é dividida em quatro, originando o primeiro nível de refinamento. Ao passar para o segundo nível de refinamento, estas quatro caixas que compõe o primeiro nível de refinamento são divididas em quatro partes iguais, obtendo-se dezesseis caixas. Ou seja, a quantidade de caixas presentes no domínio computacional é igual a 4^n , sendo n o nível de refinamento. Sucessivamente, deve-se dividir o domínio até um nível máximo de refinamento desejado ou cada vez que o número de partículas internas a uma caixa, no último nível de refinamento, ultrapassar um limite arbitrado no início da simulação. Quando uma caixa é dividida em quatro partes iguais, diz-se que a caixa-pai (do nível de refinamento n) deu origem a quatro caixas-filhas (do nível de refinamento $n + 1$). Por vezes, utiliza-se a nomenclatura p e f no decorrer deste apêndice, para designar as caixas-pai e as caixas-filhas, respectivamente.

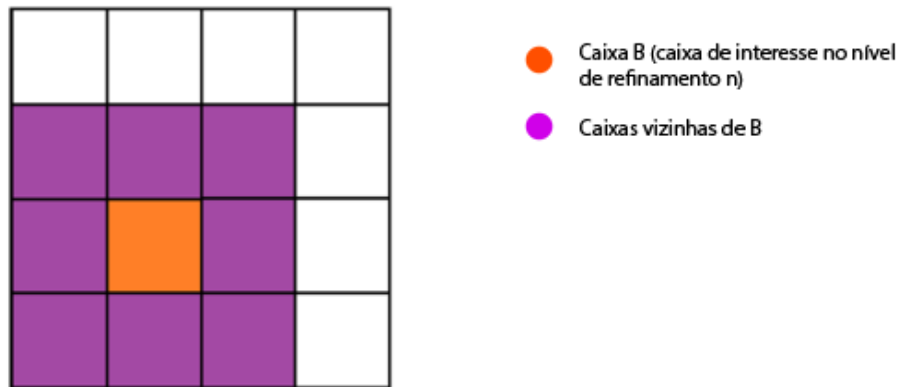
Após a criação das caixas de todos os níveis de refinamento, é necessário calcular as posições dos vértices e dos centroides de cada uma delas, pois estes são utilizados em etapas posteriores, a saber: no mapeamento de partículas, na criação das listas de interação e na translação de influências (velocidade induzida) das partículas para o centroide da caixa que as contém (e vice-versa) no nível máximo de refinamento.

Após o cálculo dos vértices e centroides de cada caixa, em todos os níveis de refinamento, devem ser geradas as listas que ditam as relações entre as caixas, também para cada nível de refinamento, até chegar ao último. Para o caso do algoritmo global, utilizado no presente trabalho, existem apenas duas listas de caixas. As caixas, de todos os níveis de refinamento, devem ser organizadas em:

- Lista de caixas vizinhas: composta por, no máximo, nove caixas, sendo oito delas caixas que compartilham pelo menos um vértice com a caixa de interesse no nível de refinamento n , além da própria caixa de interesse;
- Lista de interação: composta pelas, no máximo, vinte e sete caixas suficientemente distantes das caixas filhas da caixa de interesse no nível de refinamento n (ou seja, que não compartilham nenhum vértice com esta); as caixas da lista de interação são filhas das caixas vizinhas da caixa-pai (nível de refinamento n) da caixa de interesse no nível de refinamento $n + 1$.

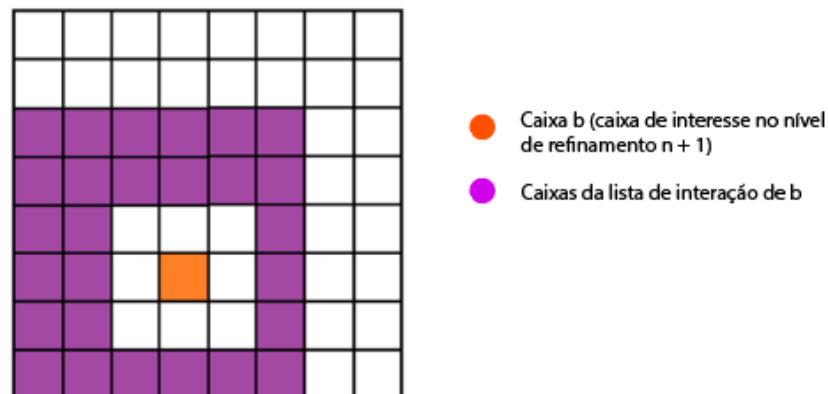
Na Figura A.1, é mostrada a lista de caixas vizinhas, pintadas em cor roxa, de uma caixa qualquer B (caixa de interesse no nível de refinamento n), pintada em cor laranja, no segundo nível de refinamento. Na Figura A.2 indica-se a lista de interação, cuja caixas também estão pintadas em cor roxa, de uma das quatro filhas da caixa B , chamada de b (caixa de interesse no nível de refinamento $n+1$), também destacada em cor laranja.

Figura A.1 – Caixas vizinhas de uma caixa qualquer B do segundo nível de refinamento.



Fonte: Autoria própria.

Figura A.2 – Lista de interação da caixa b , filha da caixa B , no terceiro nível de refinamento.



Fonte: Autoria própria.

Na Figura A.2, nota-se que há caixas suficientemente distantes da caixa b que não fazem parte de sua lista de interação. Isto ocorre pelo fato de que a caixa B , pai de b , interage com as caixas-pai daquelas caixas suficientemente distantes, porém, excluídas da lista de interação da caixa b . Esta interação é transladada de um nível de refinamento menor (neste caso, o segundo nível de refinamento) para um nível de refinamento maior (neste caso, o terceiro nível de refinamento), em uma etapa do algoritmo chamada *Local-to-Local* (L2L), explicada adiante.

Ao final da etapa de pré-processamento, faz-se o mapeamento das partículas dentro do domínio computacional, a fim de que cada vórtice discreto seja localizado dentro de sua

respectiva caixa, em cada um dos níveis de refinamento. Isto deve ser feito para que, no nível máximo de refinamento, seja possível transferir a intensidade de cada partícula para o centroide da caixa em que ela se encontra. Este mapeamento de partículas é feito em todos os passos de tempo da simulação numérica, uma vez que as partículas podem mudar de caixa conforme a simulação avança.

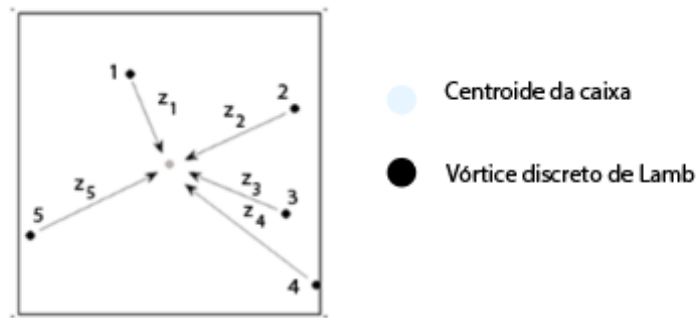
Em todos os passos de tempo da simulação, é feito um procedimento de checagem, a fim de averiguar se todas as partículas (vórtices discretos de Lamb) estão, de fato, dentro do domínio computacional inicial (nível de refinamento $n = 0$ – veja a Figura 1); caso não estejam, a caixa do nível de refinamento 0 é expandida e são calculadas, novamente, as posições dos vértices e dos centroides das caixas de todos os níveis de refinamento. Com o mapeamento de partículas, é possível contabilizar o número máximo de vórtices discretos em cada caixa no nível máximo de refinamento, para que, caso desejado, executar um refinamento do domínio, o que significa aumentar o nível máximo de refinamento, reduzindo, assim, o número médio de partículas por caixa. Com o aumento do nível máximo de refinamento, aumenta-se a quantidade de interações entre caixas, em detrimento da utilização da lei de Biot-Savart, no intuito de deixar a simulação numérica menos onerosa em termos de tempo de processamento.

b) *Particle-to-Multipole* (P2M)

Após a realização do pré-processamento, faz-se a montagem dos multipolos no maior nível de refinamento, etapa que consiste em passar a influência das partículas para o centroide da caixa que as contém, no nível máximo de refinamento. Por este motivo, fez-se o mapeamento anteriormente, a fim de saber em qual caixa as partículas estão.

Na Figura A.3, é mostrada uma caixa no nível máximo de refinamento, que contém cinco partículas, destacadas em cor preta; a influência dessas partículas é passada e agrupada no centroide da caixa que as contém, cujo centroide é destacado na cor cinza.

Figura A.3 – Montagem dos multipolos no nível máximo de refinamento.



Fonte: Autoria própria.

O potencial de uma partícula em um ponto específico do espaço é calculado através da equação (A.1):

$$\phi_i(o') = \Gamma_i \cdot \log(z_i) \quad (\text{A.1})$$

em que Γ_i é a intensidade da partícula i (equação (58)), o' é a posição no espaço em que se deseja encontrar o potencial e z_i é a posição complexa da partícula i .

É possível reescrever a equação (A.1) da seguinte maneira:

$$\phi_i(o') = \Gamma_i \cdot \log(z_c) + \Gamma_i \cdot \log\left(1 - \frac{z}{z_c}\right) \quad (\text{A.2})$$

sendo z_c a posição complexa do centroide da caixa que contém a partícula i no nível máximo de refinamento e $z = z_c - z_i$, ou seja, a distância entre o centroide da caixa e a partícula i (Figura A.3).

A influência das partículas presentes em uma caixa pode ser calculada utilizando-se um somatório, de acordo com a equação (A.3):

$$\phi_A = \sum_{i=1}^{npartbox} \phi_i = \sum_{i=1}^{npartbox} \Gamma_i \cdot \log(z_c) + \sum_{i=1}^{npartbox} \Gamma_i \cdot \log\left(1 - \frac{z}{z_c}\right) \quad (\text{A.3})$$

em que ϕ_A é a translação das intensidades de todas as partículas ($npartbox$) contidas em uma

caixa pertencente ao nível máximo de refinamento.

É possível reescrever o último termo da equação (A.3) de outra forma, expandindo o logaritmo em série de Taylor, até chegar no lado direito da equação (A.5):

$$\sum_{i=1}^{\text{npartbox}} \Gamma_i \cdot \log\left(1 - \frac{z}{z_c}\right) = \sum_{i=1}^{\text{npartbox}} \left(\Gamma_i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \left(\frac{z}{z_c}\right)^k \cdot \frac{1}{k} \right) \quad (\text{A.4})$$

$$\sum_{i=1}^{\text{npartbox}} \left(\Gamma_i \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \left(\frac{z}{z_c}\right)^k \cdot \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^{\text{npartbox}} (-\Gamma_i) \cdot \left(\frac{z^k}{k}\right)}{z_c^k} \right) \quad (\text{A.5})$$

Dessa forma, o potencial de todas as partículas de uma caixa é calculado de acordo com a equação (A.6):

$$\phi_A = a_0 \cdot \log(z_c) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k}{z_c^k} \right) \quad (\text{A.6})$$

sendo a_0 a soma das intensidades das partículas dentro da caixa do nível máximo de refinamento e a_k o coeficiente do multipolo, dado por:

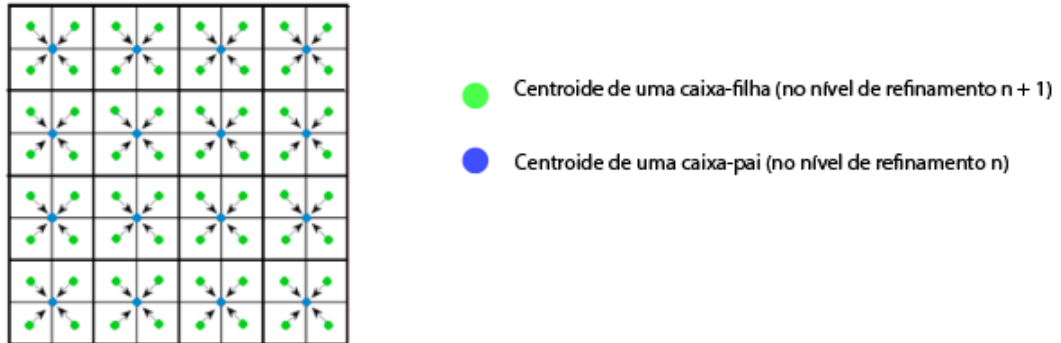
$$a_k = \sum_{i=1}^{\text{npartbox}} \frac{(-\Gamma_i) \cdot z^k}{k} \quad (\text{A.7})$$

c) *Multipole-to-Multipole* (M2M)

Com a criação dos multipolos de cada caixa no maior nível de refinamento, faz-se a mudança do centro da expansão dos multipolos: a influência é passada do centroide das caixas de níveis de refinamento mais elevados para o centroide das caixas de níveis de refinamento mais baixos, passando-se do centroide das caixas-filhas para o centroide das respectivas caixas-pai, desde o nível máximo de refinamento até o segundo nível de refinamento. Não é necessário realizar este passo até o primeiro nível de refinamento, uma vez que este não possui caixas suficientemente distantes para interagir no passo seguinte, chamado *Multipole-to-Local* (M2L).

A título de exemplo, na Figura A.4, apresenta-se a translação da influência dos centroides das caixas do terceiro nível de refinamento para o centroide das caixas do segundo nível de refinamento.

Figura A.4 – Translação da influência dos centroides das caixas do terceiro nível de refinamento para o centroide das caixas do segundo nível de refinamento (M2M).



Fonte: Autoria própria.

Na equação (A.8), é mostrada a expansão em multipolos em um ponto z_p (centroide da caixa pai, no nível n) devido a um conjunto de partículas cuja intensidade foi passada para a posição z_f (centroide da caixa filha, no nível $n+1$):

$$\phi(z_p) = a_0^{(n+1)} \cdot \log(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^{(n)}}{(z)^k} \quad (\text{A.8})$$

sendo $a_0^{(n+1)}$ a soma das intensidades das partículas dentro da caixa filha, no nível de refinamento $n+1$, e $z = z_f - z_p$ (GREENGARD; ROKHLIN, 1987).

A equação (A.8) pode ser reescrita como:

$$\phi(z_p) = a_0^{(n+1)} \cdot \log(z_p) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{a_l^{(n)}}{z_p^l} \quad (\text{A.9})$$

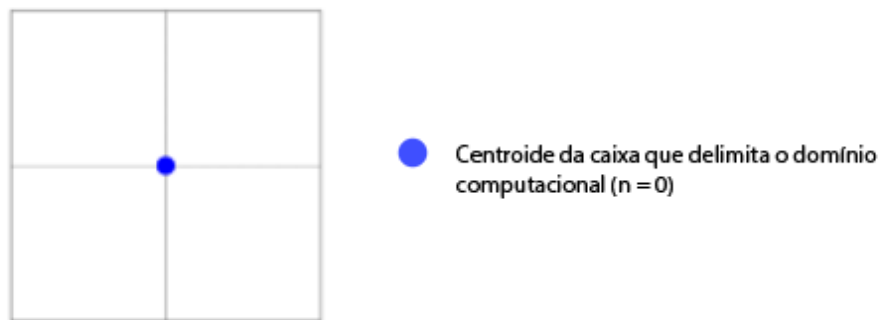
em que $a_k^{(n)}$ é o coeficiente de multipolos da caixa de interesse, no nível de refinamento n , representado por:

$$a_k^{(n)} = \frac{-a_0^{(n+1)} \cdot z^l}{1} + \sum_{k=1}^l a_k^{(n+1)} \cdot z^{l-k} \cdot \binom{l-1}{k-1} \quad (\text{A.10})$$

Os passos *Particle-to-Multipole* (P2M) e *Multipole-to-Multipole* (M2M), realizados em sequência, fazem parte do chamado *upward pass*, pois eles se iniciam no maior nível de refinamento e sobem a árvore genealógica, até o segundo nível de refinamento. Ressalta-se que

não é necessário realizar o passo M2M até o primeiro nível de refinamento, uma vez que neste nível não há caixas suficientemente distantes para interagir, ou seja, todas fazem parte da lista de caixas vizinhas umas das outras, pois compartilham um vértice central comum, destacado na cor azul na Figura A.5.

Figura A.5 - Primeiro nível de refinamento ($n = 1$).

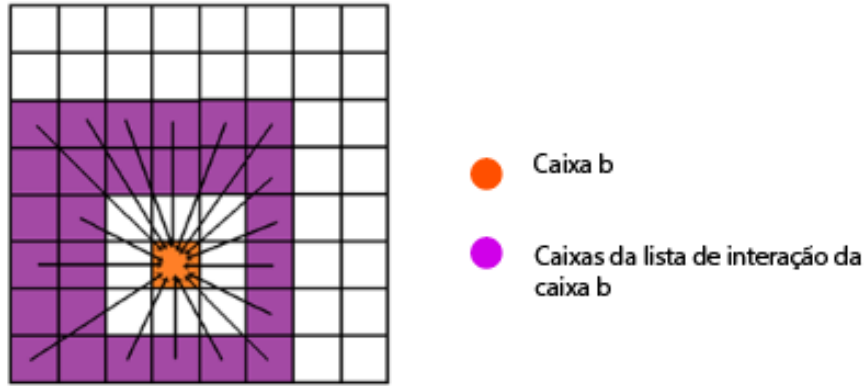


Fonte: Autoria própria.

d) *Multipole-to-Local* (M2L)

As interações entre caixas pertencentes a um mesmo nível de refinamento ocorrem, de fato, neste passo. Todas as interações entre caixas de um mesmo nível seguem a lista de interação criada no pré-processamento. Esta interação entre caixas de um mesmo nível (por exemplo, para $n = 3$) é ilustrada na Figura A.6.

Figura A.6 – Interação entre caixas de um mesmo nível de refinamento de acordo com a lista criada na etapa de pré-processamento (M2L).



Fonte: Autoria própria.

A influência (contabilizada através da interação entre as caixas) de um conjunto de partículas, cujo centro está no mesmo local do centroide da caixa b' (que pertence à lista de interação, em cor roxa, na Figura A.6), em um ponto suficientemente distante para ser possível utilizar o método de multipolos rápidos, que, neste caso, seria o centroide da caixa b (caixa de interesse, em laranja, na Figura A.6), é dada por:

$$\phi(z_b) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l \cdot z^l \quad (\text{A.11})$$

sendo $z = z_{b'} - z_b$, a distância complexa entre os centroides das caixas e $\phi(z_b)$ é a influência contabilizada através da interação entre caixas.

As equações (A.12) e (A.13) são o primeiro termo do somatório, b_l , para $l = 0$ e $l \geq 1$, respectivamente:

$$b_0 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \cdot (-1)^k \right) + a_0 \cdot \log(-z) \quad (\text{A.12})$$

$$b_l = \left(\frac{1}{z^l} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \cdot \binom{l+k-1}{k-1} \cdot (-1)^k \right) - \frac{a_0}{l \cdot z^l} \quad (\text{A.13})$$

sendo a_0 a soma das intensidades das partículas da caixa b' (em cor roxa na Figura A.6),

pertencente à lista de interação da caixa b (em cor laranja na Figura A.6).

e) *Local-to-Local* (L2L)

Esta etapa faz, basicamente, o inverso do que foi feito no passo M2M. Nela, deve-se passar a influência dos centroides das caixas-pai (do nível de refinamento n) para os centroides das caixas-filhas (do nível de refinamento $n+1$) após o passo M2L. Este passo é iniciado no segundo nível de refinamento e é feito até o penúltimo nível, não sendo necessário realizá-lo no último nível de refinamento, pois as caixas deste nível não possuem filhas para se transferir a influência através dos centroides.

A translação da influência do centroide de uma caixa-pai, do nível n , para o centroide de uma caixa-filha, do nível $n+1$, é dada por:

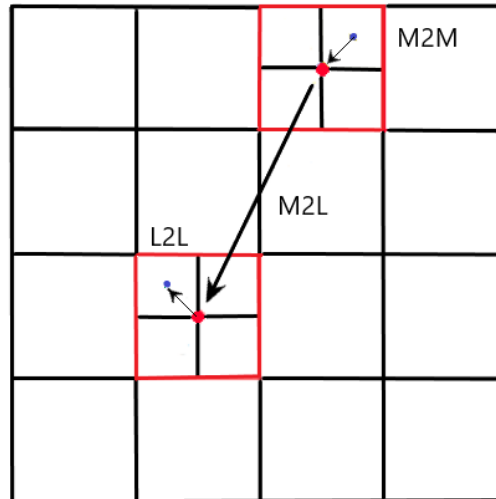
$$b_l^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} b_l^{(n)} \cdot \binom{l}{k} \cdot [-z]^{l-k} \quad (\text{A.14})$$

sendo $z = z_p - z_f$, a distância complexa entre os centroides das caixas-pai e os centroides das respectivas caixas-filhas.

Os passos *Multipole-to-Local* (M2L) e *Local-to-Local* (L2L), realizados em sequência, fazem parte do *downward pass*, pois iniciam no segundo nível de refinamento e descem até o penúltimo nível de refinamento.

A título de exemplo, na Figura (A.7), são mostrados os passos M2M, M2L e L2L, realizados em sequência, entre o segundo e o terceiro níveis de refinamento.

Figura A.7 – Sequência dos passos M2M (entre caixas do terceiro e do segundo níveis de refinamento), M2L (entre as caixas do segundo nível de refinamento pertencentes à lista de interação) e L2L (entre caixas do segundo e do terceiro níveis de refinamento).



Fonte: Autoria própria.

f) *Local-to-Particle* (L2P)

Este passo consiste em fazer, basicamente, o contrário daquilo feito no passo P2M: devolver a influência do centroide das caixas do nível máximo de refinamento para as partículas, após ter passado pelos passos P2M, M2M, M2L e L2L. É o último passo do método de multipolos rápidos.

Porém, para calcular, de fato, o campo de velocidades do escoamento, é necessário realizar duas operações: em transferir a influência dos centroides das caixas do maior nível de refinamento de volta para as partículas (passo L2P) e realizar a interação entre as partículas de uma mesma caixa e de caixas vizinhas, no nível máximo de refinamento, utilizando a lei de Biot-Savart (veja a Seção 3.6.1, a Figura (16) e as equações (63-68)).

A translação da influência do centroide da caixa para uma partícula interna a ela é dada por:

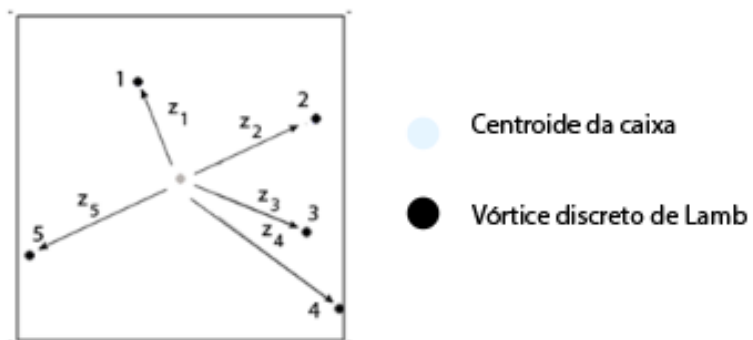
$$\phi(z_i) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l \cdot z^l \quad (\text{A.15})$$

sendo $z = z_i - z_c$, a distância complexa entre a partícula i e o centroide da caixa que a contém (Figura A.8); b_l é o coeficiente calculado através das equações (A.12) e (A.13).

Na Figura A.8, é mostrado o processo de passar a influência do centroide de uma caixa

genérica, do nível máximo de refinamento, para as partículas contidas nela.

Figura A.8 – Translação da influência do centroide de uma caixa genérica do nível máximo de refinamento para as partículas internas (L2P).



Fonte: Autoria própria.

APÊNDICE B – RESULTADOS PRELIMINARES OBTIDOS COM O MÉTODO DE MULTIPOLOS RÁPIDOS

Neste apêndice, são apresentados os resultados preliminares obtidos das simulações numéricas com o método de multipolos rápidos implementado, partindo-se de uma simulação da esteira do cilindro.

Para analisar o comportamento do algoritmo acelerador, faz-se uma simulação numérica completa do cilindro liso, utilizando-se apenas a lei de Biot-Savart para computar a interação vórtice-vórtice. Esta simulação foi realizada por 1.000 passos de tempo e o seu objetivo consiste em obter a esteira viscosa que se desenvolve a jusante do cilindro de seção circular.

Uma vez que a intenção inicial é avaliar apenas o comportamento do método de multipolos rápidos, parte-se dos dados da esteira que se desenvolve a jusante do cilindro, no milésimo passo de tempo e, a partir de então, faz-se apenas a etapa advectiva do algoritmo computacional, ou seja, a esteira obtida consiste em um dado de entrada para uma série de simulações numéricas que calculam, apenas, a contribuição do campo de vorticidades no cálculo do campo de velocidades do escoamento. Deste modo, esta série de simulações mais simples permite realizar a comparação entre os resultados obtidos com a lei de Biot-Savart e com o método de multipolos rápidos. O método de multipolos rápidos, nestas simulações, também é analisado variando-se alguns parâmetros específicos para avaliar os melhores resultados e definir de que maneira este pode ser utilizado em simulações numéricas quando todas as etapas do algoritmo computacional são realizadas.

Portanto, deve ser enfatizado que, uma vez que apenas a etapa advectiva é considerada nas simulações numéricas aqui apresentadas, não há as etapas de discretização da geometria, geração de vórtices discretos de Lamb, cálculo das contribuições dos painéis e do escoamento incidente na determinação do campo de velocidades, cálculo das cargas fluidodinâmicas, difusão dos vórtices discretos, reflexão dos vórtices discretos que migrarem para o corpo (uma vez que este não foi discretizado) e definição da densidade da distribuição de vórtices sobre os painéis para o próximo instante de tempo da simulação numérica. Há, apenas, as etapas de entrada de dados, composta pela leitura da esteira do cilindro e por alguns parâmetros físicos e numéricos, cálculo do campo de velocidades (contribuição da nuvem de vórtices discretos), advecção dos vórtices discretos e impressão dos resultados.

Todas as simulações apresentadas neste apêndice utilizam o esquema de avanço de primeira ordem de Euler.

Como explicado anteriormente, faz-se, inicialmente, uma simulação numérica do cilindro

utilizando todas as etapas do algoritmo computacional até o milésimo passo de tempo, em que apenas a lei de Biot-Savart foi utilizada para contabilizar a contribuição da nuvem de vórtices discretos no cálculo do campo de velocidades do escoamento. Os parâmetros dessa simulação são apresentados na Tabela B.1.

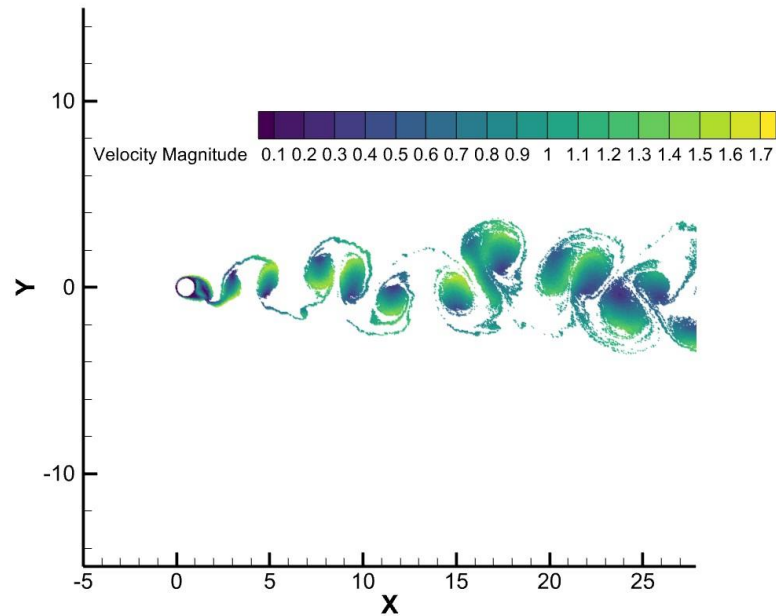
Tabela B.1 - Parâmetros físicos e numéricos empregados na simulação do cilindro circular com o código computacional completo.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Incremento de tempo	Δt	0,05
Número total de incrementos de tempo	stop	1000
Tempo adimensional	t	50,00
Número de painéis	m	300
Número de Reynolds	Re	$1,0 \times 10^5$

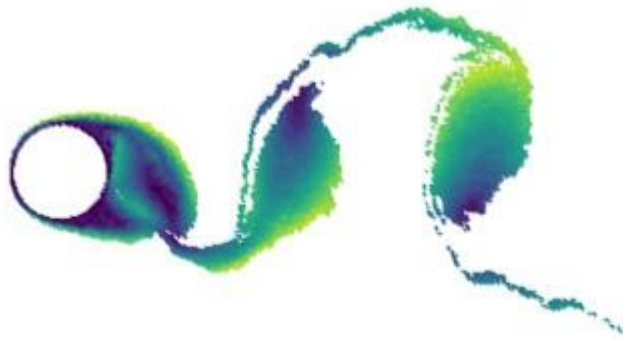
Fonte: Autoria própria.

Na Figura B.1, apresenta-se a esteira do cilindro no milésimo passo de tempo.

Figura B.1 - Esteira desenvolvida a jusante do cilindro no instante de tempo $t = 50,00$ da simulação utilizando-se o algoritmo computacional completo (*Euler*; $m = 300$; $\Delta t = 0,05$; $\varepsilon = 0,000$; $Re = 1,0 \times 10^5$): (a) Esteira completa; (b) Dois primeiros pares de vórtices.



(a)



(b)

Fonte: Autoria própria.

A partir da esteira do cilindro obtida anteriormente, algumas simulações são feitas com a utilização da lei de Biot-Savart e com o método de multipolos rápidos (para computar a contribuição da nuvem de vórtices discretos no cálculo do campo de velocidades do escoamento). Para investigar o comportamento das soluções obtidas através do método de multipolos rápidos, dois parâmetros são variados: o número de termos utilizados na série de Taylor, p , e o nível máximo de refinamento, n .

Os principais parâmetros utilizados nestas simulações são apresentados na Tabela B.2.

Tabela B.2 - Parâmetros físicos e numéricos empregados nas simulações considerando-se apenas a etapa advectiva do código computacional.

Parâmetro	Símbolo	Valor
Incremento de tempo	Δt	0,01; 0,025; 0,05
Número total de incrementos de tempo	stop	1000
Tempo adimensional	t	10,00; 25,00; 50,00
Número de Reynolds	Re	$1,0 \times 10^5$
Número de termos da série de Taylor	p	5; 10; 20; 25; 30; 35; 50
Nível máximo de refinamento	n	6; 7; 8

Fonte: Autoria própria.

Nota-se, portanto, que foram feitas três simulações utilizando apenas a lei de Biot-Savart, para $\Delta t = 0,01$, $\Delta t = 0,025$ e $\Delta t = 0,05$, e as simulações utilizando o método de multipolos rápidos foram feitas para cada um dos três níveis máximos de refinamento, sete vezes, para cada um dos números de termos da série de Taylor analisados. Cada uma das vinte e uma simulações foram feitas três vezes, para cada um dos incrementos de tempo estudados, totalizando 63 testes.

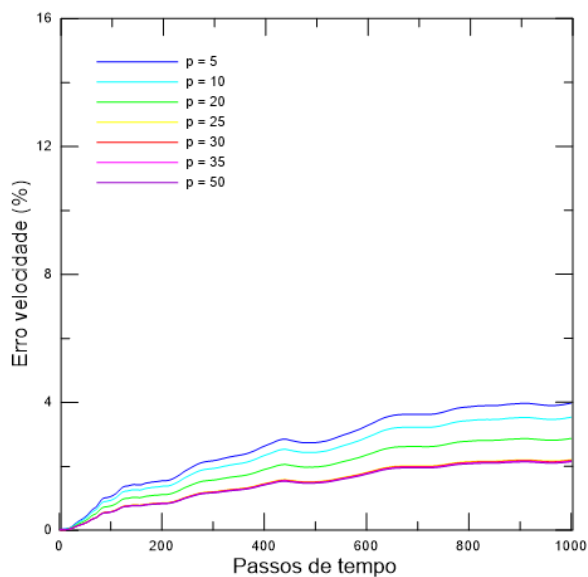
Uma vez que, para cada incremento de tempo e cada nível máximo de refinamento simulados, foram variados os números de termos utilizados na série de Taylor em sete valores (5,10, 20, 25, 30, 35 e 50), deve-se analisar de que maneira essas alterações impactam os resultados.

Para avaliar todos os resultados obtidos com as 63 simulações utilizando-se o algoritmo acelerador, deve-se analisar o erro numérico imposto pelo processo de expansão em série de Taylor no cálculo do campo de velocidades do escoamento. Para isto, utiliza-se a equação (89) (CARRIER; GREENGARD; ROKHLIN,1988), apresentada no corpo do texto da presente dissertação.

É importante salientar que o erro numérico é cumulativo, ou seja, no início das simulações ele é pequeno e vai crescendo à medida que os passos de tempo avançam.

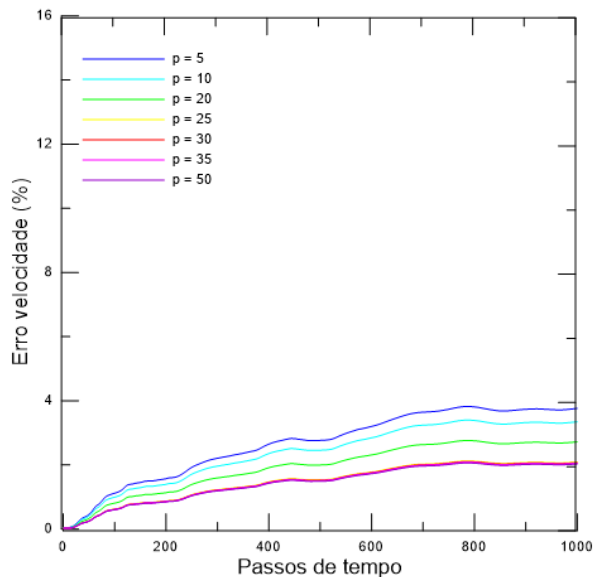
Para analisar como se comporta o erro E , apresentam-se gráficos do erro numérico em função dos passos de tempo da simulação. Nas Figuras B.2, B.3 e B.4, apresentam-se os valores do erro numérico do cálculo do campo de velocidades em função dos passos de tempo para os níveis de refinamento 6, 7 e 8, respectivamente, para as simulações utilizando o incremento de tempo, $\Delta t = 0,01$.

Figura B.2 - Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o nível máximo de refinamento igual a 6 (*Euler*; $\Delta t = 0,01$; $n = 6$; $Re = 1,0 \times 10^5$).



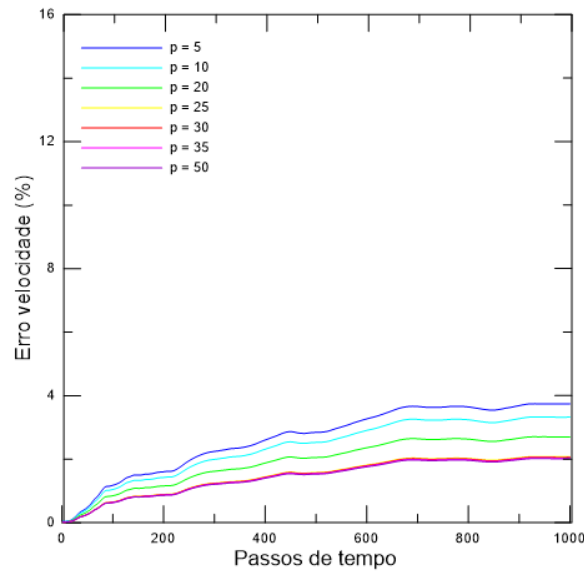
Fonte: Autoria própria.

Figura B.3 - Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o nível máximo de refinamento igual a 7 (*Euler*; $\Delta t = 0,01$; $n = 7$; $Re = 1,0 \times 10^5$).



Fonte: Autoria própria.

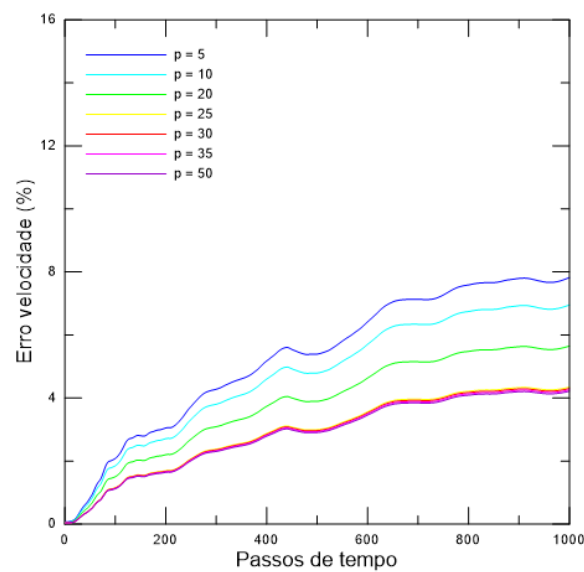
Figura B.4 - Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o nível máximo de refinamento igual a 8 (*Euler*; $\Delta t = 0,01$; $n = 8$; $Re = 1,0 \times 10^5$).



Fonte: Autoria própria.

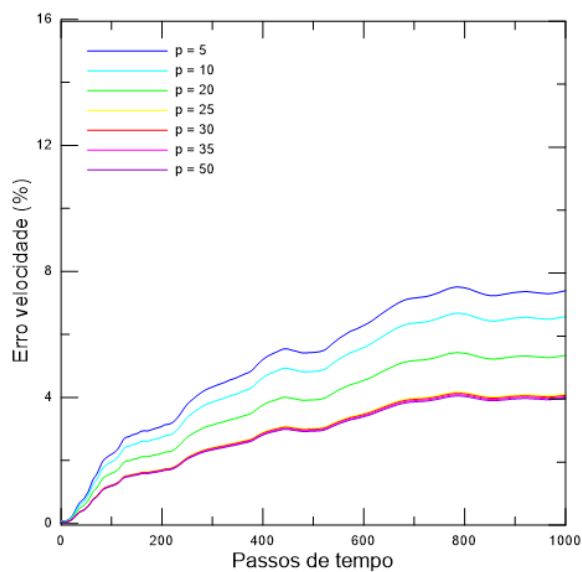
Nas Figuras B.5, B.6 e B.7, apresentam-se os valores do erro numérico do cálculo do campo de velocidades em função dos passos de tempo para os níveis de refinamento 6, 7 e 8, respectivamente, nas simulações utilizando o incremento de tempo, $\Delta t = 0,025$.

Figura B.5 - Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o nível máximo de refinamento igual a 6 (*Euler*; $\Delta t = 0,025$; $n = 6$; $Re = 1,0 \times 10^5$).



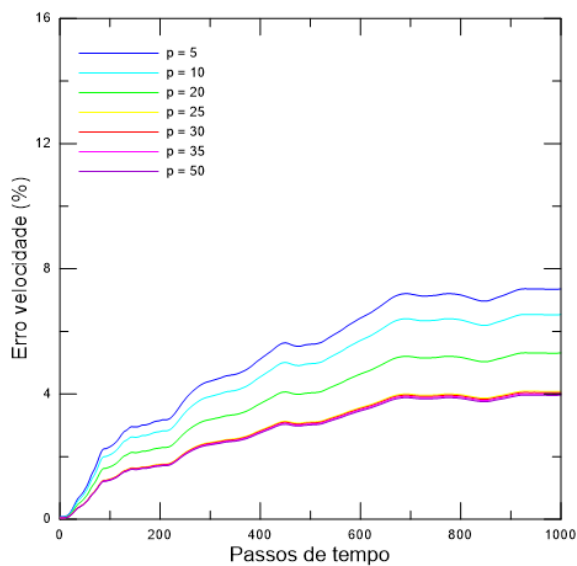
Fonte: Autoria própria.

Figura B.6 - Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o nível máximo de refinamento igual a 7 (*Euler*; $\Delta t = 0,025$; $n = 7$; $Re = 1,0 \times 10^5$).



Fonte: Autoria própria.

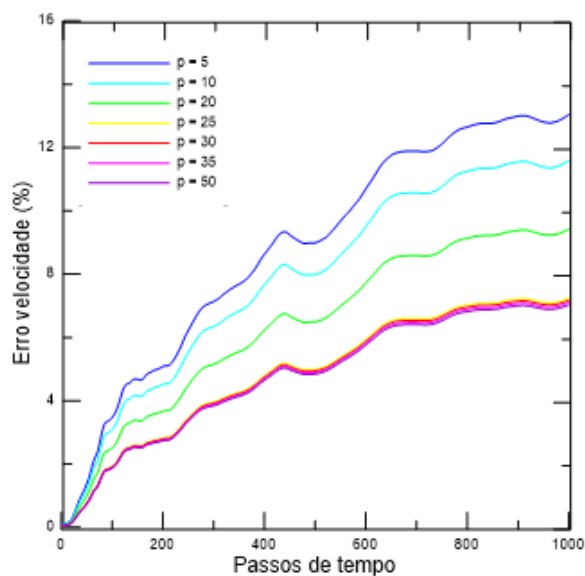
Figura B.7 - Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o nível máximo de refinamento igual a 8 (*Euler*; $\Delta t = 0,025$; $n = 8$; $Re = 1,0 \times 10^5$).



Fonte: Autoria própria.

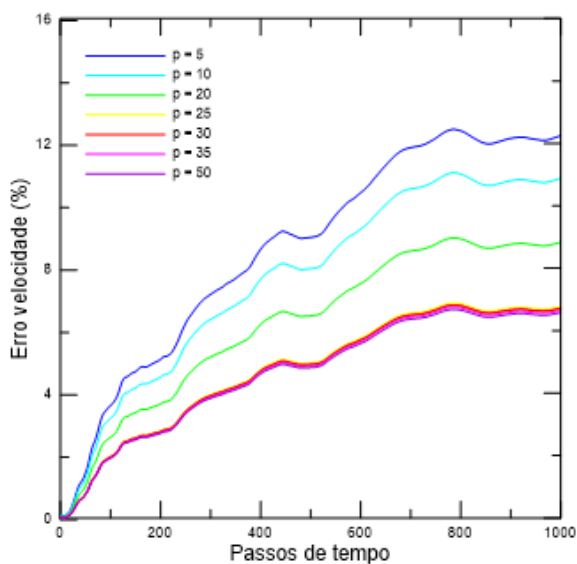
Nas Figuras B.8, B.9 e B.10, apresentam-se os valores do erro numérico do cálculo do campo de velocidades em função dos passos de tempo para os níveis de refinamento 6, 7 e 8, respectivamente, nas simulações que utilizam o incremento de tempo, $\Delta t = 0,05$.

Figura B.8 - Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o nível máximo de refinamento igual a 6 (*Euler*; $\Delta t = 0,05$; $n = 6$; $Re = 1,0 \times 10^5$).



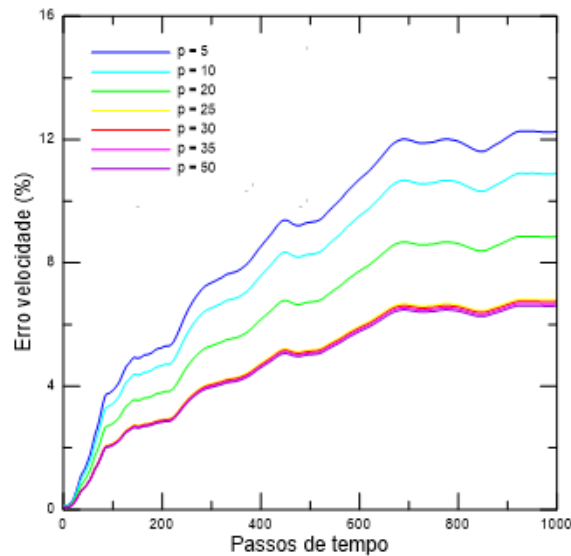
Fonte: Autoria própria.

Figura B.9 - Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o nível máximo de refinamento igual a 7 (*Euler*; $\Delta t = 0,05$; $n = 7$; $Re = 1,0 \times 10^5$).



Fonte: Autoria própria.

Figura B.10 - Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o nível máximo de refinamento igual a 8 (*Euler*; $\Delta t = 0,05$; $n = 8$; $Re = 1,0 \times 10^5$).



Fonte: Autoria própria.

É possível notar, para todos os incrementos de tempo, Δt , bem como para todos os níveis de refinamento, n , que o aumento do número de termos da série de Taylor, p , contribui, significativamente, para a redução do erro numérico do cálculo do campo de velocidades do escoamento. Para exemplificar essa redução, é possível analisar a Figura B.10, em que foram utilizados o nível de refinamento máximo igual a 8 e o incremento de tempo igual a 0,05. Nela, percebe-se que quando $p = 5$, o erro numérico é, aproximadamente, 12,3%, enquanto, quando $p = 50$, o erro numérico é, aproximadamente, 6,61%, ambos para o milésimo passo de tempo. Esse comportamento se repete nos demais incrementos de tempo e níveis máximos de refinamento simulados, apresentados nas Figuras B.2 a B.9.

Tal comportamento é esperado, uma vez que a série de Taylor representa um somatório que, idealmente, deveria ser feito até o infinito. Como, do ponto de vista prático, é inviável, o somatório precisa ser limitado a um número razoável de termos. A análise das Figuras B.2 a B.10 mostra que o erro diminui com o aumento do número de termos, porém, não há variações substanciais com a utilização de 30 ou mais termos.

Nota-se, também com base nas Figuras B.2 a B.10, que a redução do incremento de tempo utilizado nas simulações é benéfica para os resultados. Escolhendo, por exemplo, o nível de refinamento máximo, n , igual a 6, analisa-se as Figuras B.2, B.5 e B.8, para um número de termos na série de Taylor, p , igual a 50 e no milésimo passo de tempo. Na Figura B.2, cujo incremento de tempo, Δt , analisado é de 0,01, o erro é de 2,15%; na Figura B.5, cujo incremento

de tempo, Δt , é de 0,025, este erro é de 4,22% e, na Figura B.8, cujo incremento de tempo, Δt , é de 0,05, o erro é de 7,03%.

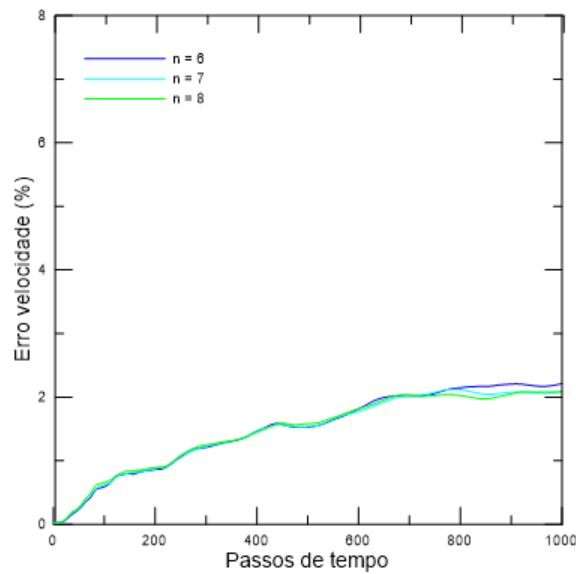
Esperava-se, de fato, que a redução dos valores de incremento de tempo culminasse em uma redução do erro numérico do cálculo do campo de velocidades, pois um incremento de tempo menor faz com que o vórtice discreto tenha um avanço advectivo menor e menos suscetível a erro. Por outro lado, simulações numéricas que utilizam incrementos de tempo menores precisam de mais passos de tempo para representar um determinado tempo físico. Assim, para se representar um tempo físico adimensional de $t = 50,0$, uma simulação numérica que utilize um incremento de tempo $\Delta t = 0,05$ precisará de 1000 passos de tempo. Do mesmo modo, simulações que utilizem $\Delta t = 0,025$ e $\Delta t = 0,01$ precisarão, respectivamente, de 2000 e de 5000 passos de tempo para atingir $t = 50,0$.

Portanto, uma análise que precisa ser realizada consiste em comparar o erro numérico associado ao incremento de tempo quando: $\Delta t = 0,05$ e $step = 1000$ ($step$ é o número de passos da simulação numérica); $\Delta t = 0,025$ e $step = 2000$; $\Delta t = 0,01$ e $step = 5000$. Nas condições mencionadas, os três testes conduziram a um tempo físico final de $t = 50,00$ e seria possível concluir se o erro associado ao passo de tempo 5000 (para $\Delta t = 0,01$) não supera os erros associados aos passos de tempo 2000 (para $\Delta t = 0,025$) e 1000 (para $\Delta t = 0,05$).

Assim como a variação da quantidade de termos utilizados na série de Taylor afeta o erro do cálculo do campo de velocidades, os níveis máximos de refinamento utilizados, também.

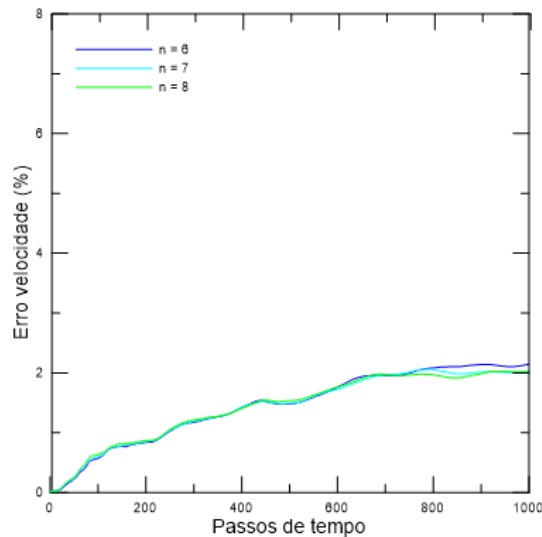
Nas Figuras B.11 e B.12 são apresentados os gráficos de erro numérico no cálculo do campo de velocidades em função dos passos de tempo, para o incremento de tempo igual a 0,01, quando são utilizados 25 e 50 termos na série de Taylor, respectivamente.

Figura B.11 - Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o número de termos da série de Taylor igual a 25 (*Euler*; $\Delta t = 0,01$; $p = 25$; $Re = 1,0 \times 10^5$).



Fonte: Autoria própria.

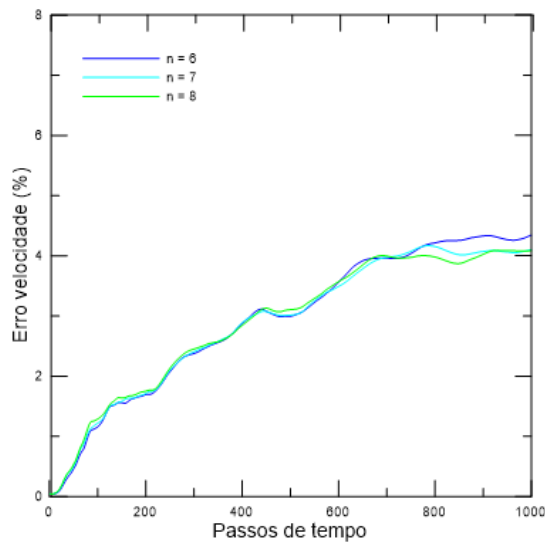
Figura B.12 - Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o número de termos da série de Taylor igual a 50 (*Euler*; $\Delta t = 0,01$; $p = 50$; $Re = 1,0 \times 10^5$).



Fonte: Autoria própria.

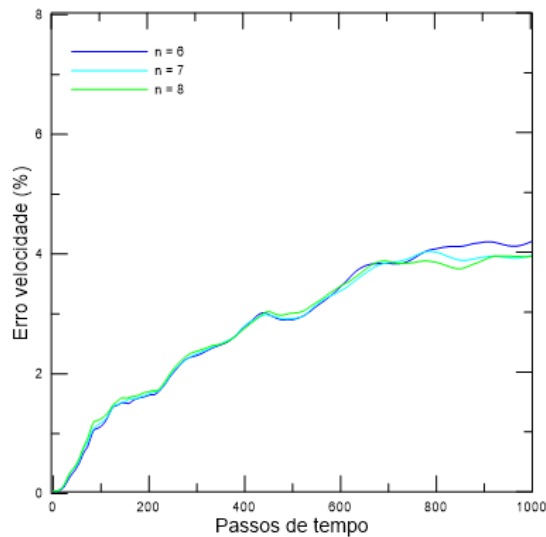
Nas Figuras B.13 e B.14 são apresentados os gráficos de erro numérico no cálculo do campo de velocidades em função dos passos de tempo, para o incremento de tempo igual a 0,025, quando são utilizados 25 e 50 termos na série de Taylor, respectivamente.

Figura B.13 - Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o número de termos da série de Taylor igual a 25 (*Euler*; $\Delta t = 0,025$; $p = 25$; $Re = 1,0 \times 10^5$).



Fonte: Autoria própria.

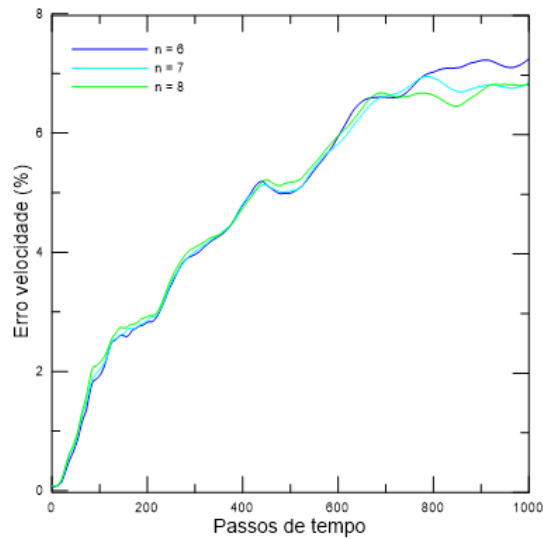
Figura B.14 - Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o número de termos da série de Taylor igual a 50 (*Euler*; $\Delta t = 0,025$; $p = 50$; $Re = 1,0 \times 10^5$).



Fonte: Autoria própria.

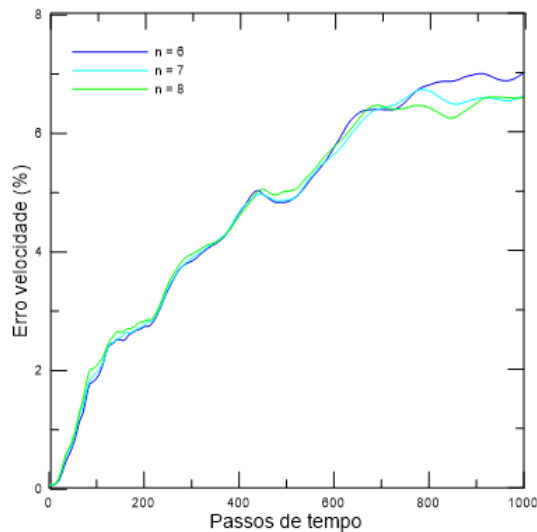
Nas Figuras B.15 e B.16 são apresentados os gráficos de erro numérico no cálculo do campo de velocidades em função dos passos de tempo, para o incremento de tempo igual a 0,05, quando são utilizados 25 e 50 termos na série de Taylor, respectivamente.

Figura B.15 - Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o número de termos da série de Taylor igual a 25 (*Euler*; $\Delta t = 0,05$; $p = 25$; $Re = 1,0 \times 10^5$).



Fonte: Autoria própria.

Figura B.16 - Erro numérico no cálculo do campo de velocidades para o número de termos da série de Taylor igual a 50 (*Euler*; $\Delta t = 0,05$; $p = 50$; $Re = 1,0 \times 10^5$).



Fonte: Autoria própria.

Nas Figuras B.11 a B.16, é possível notar que o erro numérico no cálculo do campo de velocidades do escoamento, para o nível máximo de refinamento, n , igual a 6, é superior do que os erros numéricos encontrados para os níveis máximos de refinamento 7 e 8.

Mesmo sendo erros numéricos de valores próximos, este é um resultado diferente daquele esperado, uma vez que se espera erros numéricos menores para níveis de refinamento menores (VIDILLE et al., 2021; VIDILLE et al., 2022).

Novamente, nota-se que o erro numérico é acumulativo, ou seja, ele se inicia com valores baixos e vai aumentando no decorrer das simulações numéricas, de acordo com o esperado. Novamente, reitera-se o fato de que a utilização de um maior número de termos na série de Taylor possibilita a redução no erro numérico. Por exemplo, nas Figuras B.15 ($p = 25$) e B.16 ($p = 50$), para um nível de refinamento 7, observa-se que o erro numérico no milésimo passo de tempo é de 6,84% e de 6,63%, respectivamente.

A utilização do método de multipolos rápidos viabiliza a redução no tempo gasto nas simulações, sendo este o benefício de se utilizar tal algoritmo acelerador. Como mencionado anteriormente, para cada um dos valores de incremento de tempo simulados, fez-se uma simulação utilizando a lei de Biot-Savart para computar a contribuição da nuvem de vórtices discretos no cálculo do campo de velocidades, e uma série de outras simulações utilizando o método de multipolos rápidos para este cálculo, variando-se os parâmetros intrínsecos ao método (nível máximo de refinamento, n , e número de termos da série de Taylor, p). Para analisar como cada conjunto de nível de refinamento e número de termos da série de Taylor analisados impactou no tempo computacional, apresentam-se as Tabelas B.3, B.4 e B.5, para os incrementos de tempo $\Delta t = 0,01$, $\Delta t = 0,025$ e $\Delta t = 0,05$, respectivamente. O tempo computacional da simulação utilizando apenas a lei de Biot-Savart é de 53h para essas três possibilidades de Δt .

Tabela B.3 - Redução do tempo computacional viabilizada pela utilização do algoritmo acelerador do método de multipolos rápidos ($\Delta t = 0,01$).

	Números de termos da série de Taylor (p)	Erro velocidade (%)	Tempo de CPU (h)	Redução do tempo de CPU (%)
<i>BS</i>	-	-	53,0	-
<i>n = 6</i>	p = 5	4,000	3,04	94,26
	p = 10	3,541	3,17	94,02
	p = 20	2,877	3,30	93,78
	p = 25	2,213	3,42	93,54
	p = 30	2,191	3,68	93,06
	p = 35	2,169	3,80	92,82
	p = 50	2,147	3,93	92,58
	<i>n = 7</i>	p = 5	3,761	1,85
p = 10		3,343	1,98	96,27
p = 20		2,717	2,10	96,03
p = 25		2,090	2,23	95,79
p = 30		2,069	2,36	95,55
p = 35		2,048	2,48	95,31
p = 50		2,027	2,61	95,07
<i>n = 8</i>		p = 5	3,747	1,38
	p = 10	3,330	1,51	97,16
	p = 20	2,706	1,63	96,92
	p = 25	2,081	1,76	96,68
	p = 30	2,061	1,89	96,44
	p = 35	2,040	2,01	96,20
	p = 50	2,019	2,14	95,96

Fonte: Autoria própria.

Tabela B.4 - Redução do tempo computacional viabilizada pela utilização do algoritmo acelerador do método de multipolos rápidos ($\Delta t = 0,025$).

	Números de termos da série de Taylor (p)	Erro velocidade (%)	Tempo de CPU (h)	Redução do tempo de CPU (%)
<i>BS</i>	-	-	53,0	-
<i>n = 6</i>	p = 5	8,000	2,85	94,62
	p = 10	6,954	2,98	94,38
	p = 20	5,650	3,10	94,15
	p = 25	4,346	3,23	93,91
	p = 30	4,303	3,36	93,67
	p = 35	4,259	3,48	93,43
	p = 50	4,215	3,61	93,19
	<i>n = 7</i>	p = 5	7,387	1,60
p = 10		6,566	1,73	96,74
p = 20		5,335	1,85	96,50
p = 25		4,104	1,98	96,26
p = 30		4,063	2,11	96,02
p = 35		4,022	2,24	95,78
p = 50		3,981	2,36	95,54
<i>n = 8</i>		p = 5	7,358	1,28
	p = 10	6,541	1,41	97,35
	p = 20	5,314	1,53	97,11
	p = 25	4,088	1,66	96,87
	p = 30	4,047	1,88	96,46
	p = 35	4,006	1,91	96,39
	p = 50	3,965	2,04	96,15

Fonte: Autoria própria.

Tabela B.5 - Redução do tempo computacional viabilizada pela utilização do algoritmo acelerador do método de multipolos rápidos ($\Delta t = 0,05$).

	Números de termos da série de Taylor (p)	Erro velocidade (%)	Tempo de CPU (h)	Redução do tempo de CPU (%)
<i>BS</i>	-	-	53,0	-
<i>n = 6</i>	p = 5	13,00	2,45	95,28
	p = 10	11,59	2,63	95,05
	p = 20	9,417	2,75	94,81
	p = 25	7,244	2,88	94,57
	p = 30	7,171	3,01	94,33
	p = 35	7,099	3,13	94,09
	p = 50	7,026	3,26	93,85
<i>n = 7</i>	p = 5	12,31	1,34	97,48
	p = 10	10,94	1,46	97,24
	p = 20	8,892	1,59	97,00
	p = 25	6,840	1,72	96,76
	p = 30	6,772	1,84	96,52
	p = 35	6,703	1,97	96,28
	p = 50	6,635	2,01	96,04
<i>n = 8</i>	p = 5	12,26	1,07	97,98
	p = 10	10,90	1,20	97,74
	p = 20	8,857	1,32	97,50
	p = 25	6,813	1,45	97,26
	p = 30	6,745	1,58	97,02
	p = 35	6,677	1,70	96,78
	p = 50	6,609	1,83	96,55

Fonte: Autoria própria.

Novamente, as Tabelas B.3, B.4 e B.5 reiteram, numericamente, o fato de que utilizar maiores números de termos na série de Taylor garantem melhores resultados no algoritmo acelerador. Além disso, a utilização do método de multipolos rápidos permite, em qualquer uma das configurações testadas, redução no tempo de CPU das simulações superior a 92,5%. É possível notar, também, que uma maior quantidade de termos na série de Taylor aumenta ligeiramente o tempo computacional, o que é esperado, pois, quanto mais termos considerados, mais operações o processador realiza.

Em todos os incrementos de tempo testados, o tempo computacional das simulações numéricas é reduzido à medida que o nível máximo de refinamento testado aumenta, o que

também está de acordo com o esperado.