



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Conjuntos Controláveis para Ações de Semigrupos em Variedades *Flag*

Leonardo Kenji Kashimoto

Orientador: Prof. Dr. Ronan Antonio dos Reis

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, agosto de 2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Conjuntos Controláveis para Ações de Semigrupos em Variedades *Flag*

Leonardo Kenji Kashimoto

Orientador: Prof. Dr. Ronan Antonio dos Reis

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, agosto de 2016

FICHA CATALOGRÁFICA

K29c Kashimoto, Leonardo Kenji
Conjuntos controláveis para ações de semigrupos em variedades *flag* /
Leonardo Kenji Kashimoto. - Presidente Prudente : [s.n], 2016
150 f.

Orientador: Ronan Antonio dos Reis
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Ciências e Tecnologia
Inclui bibliografia

1. Conjuntos controláveis. 2. Ações de semigrupos. 3. Grupos de Lie
semi-simples reais. I. Reis, Ronan Antonio dos. II. Universidade Estadual
Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Título.

BANCA EXAMINADORA

Ronan Antonio dos Reis

Prof. Dr. RONAN ANTONIO DOS REIS
ORIENTADOR

Messias Meneguette Junior

Prof. Dr. MESSIAS MENEGUETTE JUNIOR
UNESP/FCT

Luiz Antonio Barrera San Martin

Prof. Dr. LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN
UNICAMP

Leonardo Kenji Kashimoto

LEONARDO KENJI KASHIMOTO

Presidente Prudente (SP), 09 de agosto de 2016.

Resultado: **APROVADO.**

Dedico este trabalho aos meus pais.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço aos meus pais, que com absoluta certeza fizeram o melhor possível por mim, e por isso, eu os aprecio tanto.

Agradeço aos meus familiares por compreender minhas peculiaridades.

Agradeço, principalmente, as pessoas que me aguentaram nesses pouco mais de 2 anos, amigos e colegas (listados de forma randômica): Vinícius e Beatriz (e o cunhado do Vinícius), Débora, Gustavo (Tucano Hulk), Paulo (Pescador Parrudo), Rafaeis (Pão e Goiabinha), Vanterler, Crislaine, Jonas, Bruno, Yugi (Playstation), o sr. Irineu Palhares (Fera), Carol, Adriano, Cíntia, Heloísa e Júnior, Paola, Renata, Eloíza, Naiara, Fred, Neylan (o Matemático), Anderson, Juan Carlos e Elida, Eduardo, Brunão, Dalton e Dilton (Danilo), Alexandre, Thais, Bruna e Rafaela, Clícia, Hugo, Amauri, Ellen, Maria Cecília, Letícia, Jéssica, Rodrigo, Laison, Karla, Tânia, Guilherme, Wesley, Alisson, Mariane e Luana.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática, em especial, ao Professor Ronan pela orientação e pelos conselhos.

Sou grato também aos funcionários da FCT/UNESP, principalmente a seção de Pós-graduação, em especial, Cíntia, André e Ivonete, pela paciência e eficiência.

Agradeço a Star Cópias por não me fazer passar raiva como o xerox daqui.

Agradeço aos escritores, cineastas, músicos e artistas em geral, cujas obras me afetaram em algum nível nesse período.

Agradeço a Capes pelo apoio financeiro através do PICME. E agradeço, também, aos professores e todos os envolvidos com a OBMEP.

E considerando o entrelaçamento caótico dos eventos na linha temporal, agradeço a todas as coisas, seres, ou fenômenos ocorridos até este momento, que, mesmo de forma não intencional ou de influência quase insignificante, culminaram neste derradeiro momento de pequena glória pessoal. Em suma, se você está lendo isso receba minha gratidão.

*“ If people do not believe that mathematics is simple,
it is only because they do not realize
how complicated life is.”*
John von Neumann

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar ações de semigrupos em variedades *flag* com ênfase nos conjuntos controláveis efetivos para tais ações. Inicialmente, apresentamos algumas preliminares sobre a teoria de Lie. Em seguida, estudamos a estrutura dos grupos de Lie semi-simples reais. E, na sequência, estudamos os conjuntos controláveis D_w , bem como, os conjuntos controláveis invariantes para ações de semigrupos agindo em espaços homogêneos de grupos de Lie, em especial, nas variedades *flag*. Estudamos diversos resultados, tais como, a existência e unicidade do conjunto controlável invariante numa variedade *flag*, suas propriedades, entre outros. E, também, estudamos os conjuntos controláveis D_w^Θ para semigrupos agindo nas outras variedades G/P_Θ , em especial, analisamos o número de conjuntos controláveis em G/P_Θ , bem como, alguns exemplos de aplicações.

Palavras-Chave: *Conjuntos Controláveis, Ações de Semigrupos, Grupos de Lie semi-simples, Teoria de Lie.*

Abstract

The objective of this work is to study semigroup actions in *flag* manifolds with emphasis on effective control sets for such actions. Initially, we present some preliminaries about Lie theory. Next, we study the structure of real semi-simple Lie groups. In the sequence, we study the control sets D_w , as well as the invariant control sets for actions of semigroups in homogeneous spaces of Lie groups, specially in the *flag* manifolds. We study several results, such as the existence and uniqueness of the invariant control set in *flag* manifolds, their properties, among other results. Also, we study the control sets D_w^Θ for semigroups acting on the other *flag* manifolds G/P_Θ , specially on the number of control sets in G/P_Θ , as well as some examples of applications.

Keywords: *Control Sets, Semigroup action, Semisimple Lie Groups, Lie Theory.*

Sumário

Resumo	9
Abstract	11
1 Preliminares	17
1.1 Grupos de Lie	17
1.2 Fibrados	32
1.3 Álgebras de Lie	33
1.4 Grupos de Weyl e Câmaras de Weyl	41
2 Decomposições em Grupos de Lie Semi-simples	53
2.1 Decomposição global de Cartan	53
2.2 Decomposição global de Iwasawa	57
2.3 Decomposição de Bruhat	58
2.3.1 Subgrupo parabólico minimal do grupo de Lie semi-simples	60
2.3.2 Decomposição de Bruhat de Um grupo de Lie Semi-simples	63
2.3.3 Decomposição de Langlands	66
2.3.4 Variedade <i>Flag</i> como uma Variedade Homogênea	72
2.3.5 Elementos semi-simples e unipotentes em um grupo de Lie Redutível	75
3 Conjuntos Controláveis para Ações de Semigrupos	77
3.1 Conjuntos Controláveis	77
3.2 Conjuntos Controláveis Invariantes	83
3.3 Fibrações Equivariantes	87
4 Conjuntos Controláveis em Variedades <i>Flag</i> Maximais	91
4.1 Conjuntos Controláveis Invariantes em G/P	91
4.2 Conjuntos Controláveis Efetivos em G/P	101
5 Conjuntos Controláveis nas Variedades <i>Flag</i> G/P_Θ	115
5.1 Conjuntos Controláveis nas Fibras	115
5.2 Um Subgrupo do Grupo de Weyl e Tipo <i>Flag</i> de Semigrupo	122
5.2.1 Tipo <i>Flag</i> De Semigrupo	137
5.3 Conjuntos Controláveis nas outras Variedades <i>Flag</i>	137
5.4 Exemplos de Aplicações	141
Bibliografia	149

Introdução

No presente trabalho, fizemos um estudo sobre a teoria de ações de subsemigrupos de grupos de Lie, em especial, sobre os conjuntos controláveis para ações de semigrupos em variedades *flag*. Isto foi feito com base no artigo de San Martin e Tonelli [26].

O trabalho está organizado do seguinte modo:

No capítulo 1, introduzimos algumas preliminares necessárias para o desenvolvimento deste trabalho, tais como: noções e resultados básicos da teoria de Lie e variedades diferenciáveis, com ênfase em grupos de Lie e suas álgebras de Lie, álgebras de Lie semi-simples reais, e no estudo dos grupos de Weyl. No caso das álgebras de Lie semi-simples reais, estamos interessados na teoria que dá suporte às decomposições de Cartan e Iwasawa da álgebra de Lie. Os grupos de Weyl e câmaras de Weyl, são de fundamental importância na teoria de classificação das álgebras de Lie semi-simples.

No capítulo 2, estudamos aspectos importantes das decomposições globais de Cartan e Iwasawa dos grupos de Lie semi-simples reais, os quais são obtidos a partir das decomposições das álgebras de Lie. Além disso, outros aspectos dos grupos de Lie semi-simples reais foram explorados, com ênfase especial em características da estrutura e da geometria desses grupos, tais como, um estudo dos subgrupos parabólicos, e das decomposições de Bruhat e de Langlands.

No capítulo 3, estudamos os conjuntos controláveis para ações de semigrupos em variedades diferenciáveis. Exibimos alguns resultados e propriedades, como por exemplo, que tais conjuntos contêm um conjunto aberto e denso, em que o semigrupo age transitivamente, e o comportamento dos conjuntos controláveis através de uma fibração equivariante.

E, no capítulo 4, estudamos os conjuntos controláveis invariantes para semigrupos de um grupo de Lie semi-simples G não compacto e conexo agindo em variedades *flag* maximais de G , isto é, em espaços homogêneos G/P em que P é um subgrupo parabólico minimal de G . Sob algumas hipóteses, mostramos alguns resultados, tais como, que existe um único conjunto controlável invariante, e este é caracterizado em termos da câmara de Weyl positiva. E, em seguida, realizamos um estudo sobre os conjuntos controláveis efetivos D_w na variedade *flag* maximal, na qual, mostramos que é possível estabelecer uma relação $w \mapsto D_w$ entre os elementos do grupo de Weyl W e tais conjuntos, o que nos permite classificar os conjuntos controláveis efetivos em termos do grupo de Weyl.

E, no último capítulo, realizamos um estudo sobre os conjuntos controláveis nas outras variedades *flag*, ou seja, nos espaços homogêneos do tipo G/P_Θ , onde P_Θ um subgrupo parabólico de G . Além disso, mostramos alguns resultados, tais como, que a projeção do conjunto controlável invariante de G/P é o conjunto controlável invariante de G/P_Θ , bem como, a imagem inversa do conjunto controlável invariante de G/P_Θ pela aplicação $\pi_\Theta : G/P \longrightarrow G/P_\Theta$ é o conjunto controlável invariante em G/P . E, também, estudamos os conjuntos controláveis na fibra $\pi_\Theta^{-1}(\xi_0)$ da projeção π_Θ , que pode ser vista como uma variedade *flag* maximal, bem como, caracterizamos o conjunto de transitividade do conjunto controlável invariante em tal fibra. Na sequência, dado um semigrupo S com interior não vazio em G , estudamos o subgrupo $W(S) = \{w \in W : D_w = D_1\}$ de W , que

nos permite estabelecer uma bijeção entre $W(S)w \mapsto D_w$ entre as classes laterais à direita de $W(S)$ em W e os conjuntos controláveis efetivos D_w , a qual nos permite determinar o número de conjuntos controláveis em G/P . Em seguida, passamos ao estudo dos conjuntos controláveis efetivos em G/P_Θ . Mostramos que o número de conjuntos controláveis em G/P_Θ é dado pela ordem das classes do espaço quociente duplo $W(S) \backslash W/W_\Theta$. Para isso, exibimos uma bijeção $W(S) \backslash W/W_\Theta$ e os conjuntos controláveis efetivos em G/P_Θ , em que W_Θ é o subgrupo do grupo de Weyl gerado pelas reflexões relacionadas a elementos de Θ , e Θ é um subconjunto do sistema simples de raízes da álgebra de Lie de G . E, como consequência, determinamos um limitante superior para o número de conjuntos controláveis efetivos pela ordem de W/W_Θ . E, também, apresentamos alguns exemplos de aplicações.

Preliminares

No capítulo de preliminares serão apresentados resultados básicos da teoria de Lie e definições sobre variedades diferenciáveis e fibrações, que são fundamentais para o entendimento de alguns tópicos deste estudo, tais como, os grupos e álgebras de Lie semi-simples, e as variedades *flag*. Para os leitores mais familiarizados com a teoria de Lie, este capítulo é dispensável. Caso contrário, mais esclarecimentos podem ser obtidos nas referências [15], [23], [34], e [11].

1.1 Grupos de Lie

O objetivo desta seção é fazer um estudo sobre grupos de Lie no qual são expostas as noções fundamentais de variedades diferenciáveis, grupos topológicos e suas ações, espaços homogêneos, e alguns resultados necessários para o estudo dos próximos capítulos.

Variedades diferenciáveis

As variedades diferenciáveis são estruturas que, em certo sentido, se assemelham a espaços euclidianos. Num primeiro momento vamos estabelecer as bases teóricas em que se assenta a teoria.

Seja $n > 1$ um número inteiro. Então, o espaço euclidiano de dimensão n é $\mathbb{R}^n$. Dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, para cada i entre 1 e n defina $c_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $c_i(x) = x_i$, essa será chamada i -ésima função coordenada canônica de $\mathbb{R}^n$. Cada função coordenada é uma aplicação de classe C^∞ .

Se $U \subset \mathbb{R}^n$, uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^k se todas as derivadas parciais existem e são contínuas em U . Já uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^k quando todas as funções componentes $f_i = f \circ c_i$ são de classe C^k .

Quando M é um espaço topológico de Hausdorff no qual cada ponto possui uma vizinhança homeomorfa a um conjunto aberto de um espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, dizemos que M é um espaço localmente euclidiano de dimensão n .

Definição 1 *Sejam M um espaço localmente euclidiano de dimensão n , e $U \subset M$ um subconjunto aberto e conexo. Se φ é um homeomorfismo de U em um aberto de $\mathbb{R}^n$, então chamamos φ de sistema de coordenadas local, ou carta local em M , e denotamos esse sistema por (U, φ)*

A uma coleção de sistemas de coordenadas locais φ_i , com $i \in I$ (I denota um conjunto de índices abstrato), cuja união dos domínios de φ_i cobrem M chamamos de atlas. Denotamos essa coleção por $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$.

Dados dois sistemas de coordenadas locais $\varphi_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\varphi_2 : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ num espaço topológico M tais que $U \cap V \neq \emptyset$, em cada ponto $x \in U \cap V$ a composição $\Phi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ define um homeomorfismo de $\varphi_i(U \cap V)$ em $\varphi_j(U \cap V)$. Esse homeomorfismo Φ_{ij} é chamado mudança de coordenadas.

Um atlas é dito de classe C^k quando todas as mudanças de coordenada são aplicações diferenciáveis de classe C^k .

Agora, estamos em posição de definir a estrutura de variedade diferenciável.

Definição 2 *Seja M um espaço localmente euclidiano. Uma estrutura diferenciável $\mathcal{F}$ de classe C^k em M é um atlas $\{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ em que $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ é de classe C^k para todo $i, j \in I$, e que é maximal com essa propriedade, isto é, se (U, φ) é tal que $\varphi \circ \varphi_i^{-1}$ e $\varphi_i \circ \varphi^{-1}$ são de classe C^k para todo $i \in I$, então $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$.*

Alternativamente, podemos dizer que a estrutura diferenciável $\mathcal{F}$ em M é um atlas de classe C^k maximal. Observe ainda, que pela condição de maximalidade da definição acima, essa estrutura, quando existe é única. E por isso, faz sentido definir o seguinte.

Definição 3 *Uma variedade diferenciável de dimensão n e de classe C^k é formado de um espaço topológico de Hausdorff M com base enumerável e uma estrutura diferenciável $\mathcal{F}$ de classe C^k e dimensão n .*

Por simplicidade, a partir deste ponto consideraremos somente variedades de classe C^∞ , e uma variedade diferenciável será chamada simplesmente de variedade.

Uma vez bem colocado o que se entende por variedade, é possível discutir as aplicações entre esses objetos.

Definição 4 *Sejam M e N variedades de dimensão m e n respectivamente. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é dita diferenciável no ponto $x \in M$ se existirem sistemas de coordenadas $\varphi_1 : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de M e $\varphi_2 : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ de N com $x \in U$ e $f(x) \in V$ tais que a composta $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U) \rightarrow \varphi_2(V)$ é diferenciável no ponto $\varphi_1(x)$.*

Definição 5 *Sejam M e N variedades de dimensão m e n respectivamente.*

- Uma imersão é uma aplicação diferenciável $\psi : M \rightarrow N$ que, para todo ponto $x \in M$ se a derivada $d\psi_x$ é injetiva para cada $x \in M$.
- O par (M, ψ) é uma subvariedade de N quando ψ é uma imersão injetora.
- Quando ψ for uma imersão e um homeomorfismo de M sobre o subespaço $f(M) \subset N$, a aplicação ψ é dita um mergulho. Caso ψ seja injetiva, e ψ^{-1} é de classe C^∞ , ψ é um difeomorfismo.

Grupos de Lie

Começemos com o conceito de grupos topológicos, ou seja:

Definição 6 *Um grupo topológico é um grupo G cujo conjunto subjacente está munido de uma topologia compatível com o produto do grupo, isto é, que satisfaz:*

1. o produto $p : G \times G \rightarrow G$, dado por $p(g, h) = gh$, é uma aplicação contínua quando se considera, em $G \times G$, a topologia produto.
2. a aplicação $i : G \rightarrow G$ dada por $i(g) = g^{-1}$ é contínua, e portanto, um homeomorfismo, já que $i^{-1} = i$.

Equivalentemente, essas duas condições podem ser tomadas como uma única, considerando a aplicação

$$\begin{aligned} q : G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\mapsto gh^{-1} \end{aligned}$$

e exigindo que esta seja contínua com a topologia produto em $G \times G$.

Pelas propriedades de grupo podemos identificar a cada elemento as seguintes aplicações:

- Translação à esquerda:

$$\begin{aligned} E_g : G &\longrightarrow G \\ h &\mapsto E_g(h) = gh. \end{aligned}$$

- Translação à direita:

$$\begin{aligned} D_g : G &\longrightarrow G \\ h &\mapsto D_g(h) = hg. \end{aligned}$$

- Conjugação:

$$\begin{aligned} C_g : G &\longrightarrow G \\ h &\mapsto C_g(h) = ghg^{-1}. \end{aligned}$$

Segue diretamente das definições que

$$E_g \circ E_{g^{-1}} = E_{g^{-1}} \circ E_g = D_{g^{-1}} \circ D_g = D_g \circ D_{g^{-1}} = 1$$

em que 1 denota a aplicação identidade em G . E ainda,

$$C_g = E_g \circ D_{g^{-1}} = D_{g^{-1}} \circ E_g$$

o que significa que as três aplicações definidas acima são bijeções de G .

Quando olhadas no contexto de grupos topológicos essas bijeções são também contínuas. Mais do que isso, são homeomorfismos.

Visto que, localmente, cada grupo de Lie é homeomorfo a um espaço $\mathbb{R}^n$, então o primeiro princípio da enumerabilidade é satisfeito. Logo, Grupos de Lie são metrizáveis. Apesar disso é importante enfatizar que existe uma métrica invariante à esquerda, e outra à direita, não necessariamente métricas bi-invariantes. Alguns exemplos de métricas invariantes são dados pela métrica usual do espaço $\mathbb{R}^n$ (que aliás é bi-invariante), e suas métricas são equivalentes.

Definição 7 Um grupo de Lie é um grupo topológico G cujo conjunto subjacente tem estrutura de variedade diferenciável de forma que a aplicação produto

$$\begin{aligned} p : G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto g \cdot h \end{aligned}$$

seja diferenciável.

Sem perda de generalidade, assumimos que tanto a variedade G quanto a aplicação p são de classe C^∞ , permitindo que sejam tomadas derivadas de qualquer ordem.

Dado $g \in G$, pelo fato do produto ser diferenciável, as translações à direita D_g e a esquerda E_g , bem como a conjugação C_g são diferenciáveis.

Seja G um grupo topológico e H um subgrupo de G . Pela topologia induzida no subespaço, H também é grupo topológico.

Definição 8 *Um subgrupo $H \subset G$ com a topologia induzida é denominado subgrupo topológico de G .*

Proposição 1 *Denote por G_0 a componente conexa do elemento neutro. Então, G_0 é um subgrupo fechado e normal de G . Qualquer outra componente conexa é uma classe lateral $gG_0 = G_0g$. Reciprocamente, toda classe lateral $gG_0 = G_0g$ é uma componente conexa de G .*

Em geral, a componente conexa da identidade não é um subgrupo aberto. Por exemplo, em $(\mathbb{R}, +)$ o subgrupo $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ com a topologia induzida, a componente conexa da identidade é $\{0\}$, que não é aberto em $\mathbb{Q}$ visto como subespaço topológico de $\mathbb{R}$.

Uma condição suficiente para que a componente conexa da identidade seja um subgrupo aberto é que o grupo seja localmente conexo, isto é, cada ponto possui uma vizinhança aberta e conexa.

Quando tomamos como objeto de estudo os grupos de Lie, estes têm componentes conexas abertas, uma vez que cada grupo de Lie é localmente homeomorfo a um espaço euclidiano, a sua álgebra de Lie.

Ações de Grupos de Lie

Uma ação de grupos em geral é uma relação que associa a cada elemento de um grupo abstrato um endomorfismo sobre um determinado conjunto. No contexto deste trabalho, trataremos somente de ações de grupos de Lie. A definição é dada abaixo.

Definição 9 *Sejam G um grupo de Lie, e M uma variedade diferenciável. Então, uma ação à esquerda de G em M é uma aplicação $\phi : G \times M \longrightarrow M$ de classe C^∞ que satisfaz:*

1. $\phi(1, x) = x, \forall x \in M$.
2. $\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x)), \forall g, h \in G \text{ e } \forall x \in M$.

Equivalentemente, uma ação à esquerda de G em M pode ser definida também pelas aplicações parciais, $\phi_g : M \longrightarrow M, g \in G$, que satisfazem: $\phi_1(x) = x, \forall x \in M$ e $\phi_{gh} = \phi_g \circ \phi_h, \forall g, h \in G$. Analogamente, podemos definir uma ação à direita, simplesmente substituindo a segunda condição na definição anterior por: $\phi_{gh} = \phi_h \circ \phi_g$. Apesar da possibilidade de definir-se uma ação à direita propriamente, por vezes é mais conveniente observar que, considerando as aplicações dadas pelas relações $\phi'_g(x) = \phi_{g^{-1}}x$ e $\phi'_h(x) = \phi_{h^{-1}}(x)$, tem-se $\phi'_{gh}(x) = \phi_{h^{-1}g^{-1}}(x) = \phi_{h^{-1}} \circ \phi_{g^{-1}}(x) = \phi'_h \circ \phi'_g(x)$, e portanto, uma ação à direita pode ser vista como uma ação à esquerda e vice-versa. Se $\phi_g(x) = gx$ é uma ação à esquerda, então $\phi'_g(x) = \phi_{g^{-1}}(x)$ é uma ação à direita.

Quando G é um grupo topológico, observe que essas propriedades, por si, já garantem que ϕ_g é uma bijeção, afinal, $\phi_{g^{-1}} \circ \phi_g = \phi_g \circ \phi_{g^{-1}} = \phi_1 = \text{id}_M$.

Por simplicidade, usaremos a seguinte notação: $\phi(g, x) = g \cdot x$, ou somente $\phi(g, x) = gx, \forall g \in G \text{ e } \forall x \in X$.

Definição 10 *Seja G um grupo, e X um conjunto para o qual está definida uma ação de G em X . Dado $x \in X$ o conjunto*

$$G \cdot x = \{\phi(g, x) = g \cdot x \in X : g \in G\}$$

é chamado órbita de x por G .

Notação: $Gx = G \cdot x$.

Definindo a relação de equivalência

$$x \sim y \iff \exists g \in G : y = gx$$

fica evidente que cada órbita é uma classe de equivalência por essa relação, por isso duas órbitas são disjuntas ou coincidem.

Definição 11 *Seja G um grupo agindo no conjunto X . Seja $B \subset X$, então B é dito G -invariante se $gB \subset B, \forall g \in G$.*

Um exemplo natural de conjunto invariante são as órbitas de x por G . Além disso, visto que as órbitas determinam classes de equivalência, então cada conjunto invariante deve ser a união de órbitas por G .

No caso específico das órbitas, a restrição da ação de G em X para os conjuntos do tipo Gx também define uma ação $a_{Gx} : G \longrightarrow Gx$, e podemos dizer que se um grupo G age em X , este por sua vez age em suas órbitas.

Outro importante objeto de estudo das ações de grupo é o subgrupo de isotropia, definido logo abaixo.

Definição 12 *O conjunto dos elementos $g \in G$ que fixam um dado $x \in X$, isto é, que satisfaçam $gx = x$ é chamado **subgrupo de isotropia**, ou estabilizador de x .*

Denotamos,

$$G_x = \{g \in G : gx = x\}$$

Para o nome "subgrupo de isotropia" vejamos que, de fato, G_x é um subgrupo. Suponha g e h que fixam $x \in X$, tem-se

$$(gh)(x) = g(hx) = gx = x$$

e ainda, se $gx = x$, então $g^{-1}x = g^{-1}g(x) = x$.

E, observando que cada subgrupo de isotropia, a princípio, é determinado pela escolha do elemento $x \in X$, é conveniente buscar uma relação entre esses subgrupos.

Proposição 2 *Dados $x, y \in X$, suponha $y = gx$, com $g \in G$. Então, $G_y = gG_xg^{-1}$, onde G_y e G_x são subgrupos de isotropia.*

As ações de um grupo G são usualmente distinguidas de acordo com as propriedades das suas órbitas e seus grupos de isotropia. A seguinte classificação constitui as bases do estudo das ações de grupos:

Definição 13 *Seja ϕ uma ação de um grupo G em um conjunto X . Então, a ação é dita **efetiva** somente quando $gx = x$ para todo $x \in X$ implica em $g = 1$. E ação é dita **transitiva** quando X é uma órbita de G , ou seja,*

$$\forall x, y \in X ; \exists g \in G : gx = y.$$

Note que a restrição de uma ação a um conjunto para uma órbita é G -invariante, afinal a transitividade segue diretamente da definição de órbita por um ponto.

A ação natural

Um caso particular de ação de grupos se dá nos espaços quocientes.

Definição 14 *Seja $H \subset G$ um subgrupo e G/H o conjunto das classes laterais gH , com $g \in G$. Então, a aplicação*

$$\begin{aligned} a : \quad G &\longrightarrow G/H \\ (g, g_1H) &\longmapsto (gg_1)H \end{aligned}$$

define naturalmente uma ação à esquerda em G/H .

Essa ação é a chamada ação natural de G em G/H .

Denotando por $\pi : G \longrightarrow G/H$ a projeção canônica que faz $g \mapsto gH$, então, podemos escrever a ação como

$$g(\pi(g_1)) = \pi(gg_1).$$

Além disso, para cada par $g_1H, g_2H \in G/H$, $g = g_2g_1^{-1}$ faz

$$g(g_1H) = (g_2g_1^{-1}g_1)H = g_2H,$$

ou seja, a ação de G em G/H é transitiva. Mais do que isso, cada ação transitiva se identifica, ou está em bijeção, com um espaço quociente.

Proposição 3 *Seja G uma ação transitiva em X , e $x \in X$. Então, a aplicação*

$$\begin{aligned} \xi_x : G/G_x &\longrightarrow X \\ gG_x &\longmapsto gx \end{aligned}$$

é uma bijeção entre G/G_x e X . A aplicação ξ_x equivariante, ou seja,

$$g\xi_x(g_1G_x) = \xi_x((gg_1)G_x), \quad \forall g, g_1 \in G.$$

Dito de outra forma, ξ_x comuta com as ações de G em G/G_x e X , respectivamente, e portanto, se $y = gx$, tem-se $\xi_y = \xi_x \circ D_g$.

A aplicação ξ_x está associada com a aplicação parcial ϕ_x da seguinte forma

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\phi_x} & X \\ \pi \downarrow & \nearrow \xi_x & \\ G/H & & \end{array}$$

Variedades Homogêneas

Assim, através da identificação acima podemos ver espaços homogêneos como grupos quocientes.

Definição 15 *Um espaço topológico X no qual existe uma ação contínua e transitiva de um grupo G é denominado espaço homogêneo.*

O ponto $x \in X$ escolhido para estabelecer a identificação entre M e G/G_x é chamado de *origem*, ou *base* do espaço homogêneo X .

Proposição 4 *Numa ação transitiva os subgrupos de isotropia são conjugados entre si.*

Lembrando que as ações à direita podem ser tomadas como ações à esquerda, e vice-versa, a discussão feita anteriormente também pode ser estendida ao conjunto $H \backslash G$, das classes laterais Hg , $g \in G$.

Note ainda que, na presença de uma ação transitiva, as ações livres em G/H são exatamente aquelas em que o subgrupo de isotropia de H é $\{1\}$. Isto é, se

$$G_H = \{g \in G : gH = H\} = \{1\},$$

então $gH = H$, se, e somente se, $g = 1$. E portanto, o espaço homogêneo se identifica a G .

Seja G um grupo topológico. Uma ação de G em um espaço topológico X é contínua caso a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto \phi(g, x) = gx \end{aligned}$$

seja contínua na topologia produto.

É claro que, se $H \subset G$ é um subgrupo, então, a restrição a H da ação de G em X é também uma contínua, considerando a topologia induzida no subespaço.

Proposição 5 *Seja G uma ação contínua de G em X e que X seja um espaço de Hausdorff. Então, qualquer subgrupo de isotropia G_x , $x \in X$, é fechado.*

Proposição 6 *Seja $G \times X \longrightarrow X$ uma ação contínua e transitiva de G em X . Fixando $x \in X$ considere a bijeção $\xi_x : G/G_x \longrightarrow X$ dada por $\xi_x(gG_x) = gx$. Então, ξ_x é contínua em relação à topologia quociente de G/G_x .*

Teorema 1 *Sejam G um grupo de Lie, $H \subset G$ um subgrupo fechado e $\pi : G \longrightarrow G/H$ a projeção canônica. Então, existe uma única estrutura diferenciável em G/H compatível com a topologia quociente tal que $\pi \in C^\infty$, e existem seções de G/H de classe C^∞ em cada ponto, isto é, para todo $gH \in G/H$, existem vizinhanças U de gH , $V \subset G$, e uma aplicação $\tau : U \longrightarrow V$ de classe C^∞ modo que $\pi \circ \tau = \text{id}$.*

Definição 16 *Sejam G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo fechado. O espaço quociente G/H munido da estrutura diferenciável do Teorema 1 é dito uma variedade homogênea.*

Portanto, toda variedade homogênea tem um grupo de difeomorfismos associado que age transitivamente, bem como, toda variedade M que tem um grupo de difeomorfismos que age transitivamente é difeomorfa a uma variedade homogênea.

Em particular, pela Proposição 3, a ação natural de G em G/G_x é transitiva, o que faz de ξ_x uma bijeção. Visto que o subgrupo de isotropia é fechado, G/G_x é uma variedade homogênea, e ξ_x é na realidade um difeomorfismo. Ou seja, o grupo de difeomorfismos que caracteriza G/G_x como espaço homogêneo está completamente determinado.

Mais adiante veremos que as variedades *flag* são um caso particular de espaço homogêneo que ocorre justamente quando consideramos o quociente de G por um subgrupo de isotropia.

Grupos de Lie e suas álgebras de Lie

O objetivo desta seção é introduzir conceitos sobre grupos de Lie e a ligação desses grupos com as suas álgebras de Lie.

Seja G um grupo de Lie. Então, sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ pode ser definida como o espaço dos campos invariantes (tanto à esquerda, quanto à direita) com o colchete de Lie dado pelo colchete usual de campos de vetores.

A ligação entre o grupo e a álgebra de Lie é feita, principalmente, através da aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ e das representações adjuntas, que serão tratadas a seguir em seus aspectos mais essenciais.

De modo mais geral, considerando um número finito de grupos de Lie $G_1, \dots, G_k$, indutivamente, o produto $G_1 \times \dots \times G_k$ define um grupo de Lie com a topologia produto, e a multiplicação dada pelo produto das entradas no cartesiano.

Exemplo 1 *Seja $GL(n, \mathbb{R})$ grupo das transformações lineares invertíveis em $\mathbb{R}^n$, que é isomorfo ao grupo das matrizes quadradas de ordem n invertíveis. Esse grupo é o subconjunto do espaço vetorial das matrizes $M_n(\mathbb{R})$ de determinante não nulo, e portanto é uma variedade diferenciável. O produto no grupo $GL(n, \mathbb{R})$ corresponde ao produto usual de matrizes. Se $x = (x_{ij})$ e $y = (y_{ij})$ então $xy = z = (z_{ij})$ é tal que*

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^n x_{ik} y_{kj}$$

ou seja, cada entrada do produto é um polinômio nas variáveis x_{ij} ou y_{ij} , o que faz com que o produto seja diferenciável. Logo, $GL(n, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie.

De modo geral, se V é um espaço vetorial real de dimensão finita, e $GL(V)$ é o grupo dos operadores lineares invertíveis de V . Então, $GL(V)$ é um grupo de Lie. De fato, fixando uma base β de V é possível definir um isomorfismo entre $GL(V)$ e $GL(n, \mathbb{R})$ dado por

$$\begin{aligned} \psi : GL(V) &\longrightarrow GL(n, \mathbb{R}) \\ h &\longmapsto [h]_{\beta} \end{aligned}$$

onde $[h]_{\beta}$ denota a matriz de h com relação a base fixada, e por isso, $GL(V)$ é um grupo de Lie.

Álgebra de Lie de um grupo de Lie

Seja G um grupo de Lie. Então, sua álgebra de Lie associada é o espaço vetorial tangente T_1G . Baseado no estudo dos campos invariantes é possível estabelecer essa relação entre grupo e álgebra de Lie, como será visto adiante.

Campos invariantes e colchete de Lie

Definição 17 *Sejam G um grupo de Lie e X um campo de vetores em G .*

1. *O campo X é dito invariante à esquerda se, $d(E_g)_h(X(h)) = X(gh), \forall g, h \in G$;*
2. *O campo X é dito invariante à direita se, $d(D_g)_h(X(h)) = X(hg), \forall g, h \in G$.*

Em particular, quando um campo de vetores for invariante à esquerda (ou à direita), em $1 \in G$, temos

$$X(g) = d(E_g)_1(X(1)),$$

o que significa que os campos invariantes à esquerda (ou à direita) são determinados pelos seus valores no elemento neutro do grupo de Lie. Dito de outra forma, temos uma aplicação que associa cada elemento do espaço tangente à um vetor do campo invariante à esquerda (do mesmo modo como existe tal ligação com os campos invariantes à direita). Mais do que isso, podemos definir uma bijeção entre os campos invariante à esquerda e à direita, e o espaço tangente T_1G .

Dada $A \in T_1G$, denote por A^d o campo invariante à direita que satisfaz

$$A^d(1) = A,$$

então,

$$A^d(g) = d(D_g)_1(A).$$

E do mesmo modo, denote A^e um campo invariante à esquerda tal que $A^e(1) = A$, e assim,

$$A^e(g) = d(E_g)_1(A).$$

Seja Inv^d o conjunto dos campos invariantes à direita. Este conjunto define um subespaço vetorial do espaço vetorial real de todos os campos de vetores em G .

Visto que $(D_g)_*((E_g)_*)$ é uma aplicação linear sobre campos de vetores, as aplicações abaixo

$$\begin{array}{ccc} T_1G & \longrightarrow & \text{Inv}^d \\ A & \longmapsto & A^d \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} T_1G & \longrightarrow & \text{Inv}^e \\ A & \longmapsto & A^e \end{array}$$

definem isomorfismos entre Inv^d e Inv^e , e T_1G , com inversas dadas por

$$\begin{array}{ccc} \text{Inv}^{e,d} & \longrightarrow & T_1G \\ X & \longmapsto & X(1). \end{array}$$

Dessa forma, a álgebra de Lie de um grupo de Lie pode ser definida como Inv^d ou Inv^e munido do colchete de Lie dos campos de vetores.

Lema 1 *Sejam X e Y campos invariantes à direita em um grupo de Lie G . Então, o colchete de Lie é invariante à direita. Uma afirmação análoga é verdadeira para campos invariantes à esquerda.*

O Lema 1 mostra que as translações se comportam bem com relação ao colchete nos campos invariantes, e essa é a garantia necessária para afirmar que tanto Inv^d quanto Inv^e são subálgebras de Lie da álgebra de Lie dos campos de vetores em G .

Além disso, cabe observar que Inv^d e Inv^e são isomorfos a T_1G , e por meio desses isomorfismos é possível induzir colchetes $[\cdot, \cdot]_d$ e $[\cdot, \cdot]_e$ em T_1G ,

$$[A, B]_d = [A^d, B^d](1) \quad \text{e} \quad [A, B]_e = [A^e, B^e](1).$$

Ambos fazem de T_1G um grupo de Lie.

Uma vez garantido o isomorfismo entre as álgebras de Lie induzidas por Inv^d e Inv^e , é possível definir a álgebra de Lie de um grupo de Lie da seguinte forma.

Definição 18 *(álgebra de Lie de um grupo de Lie)*

A álgebra de lie de um grupo de Lie G , denotada por $\mathfrak{g}$ ou $\mathcal{L}(G)$, é qualquer uma das álgebras de Lie isomorfas: Inv^d , Inv^e , $((T_1G), [\cdot, \cdot]_d)$, $((T_1G), [\cdot, \cdot]_e)$.

A aplicação exponencial

A aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ é o principal instrumento para transferir as propriedades da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ para o grupo de Lie G que a define.

O isomorfismo entre os campos invariantes de G e o espaço tangente T_1G é o elo de ligação entre a exponencial de matrizes e a exponencial dos campos vetoriais.

Por definição, os elementos de G são equações diferenciais ordinárias em G (campos vetoriais invariantes), que possuem fluxos, que por sua vez são formados por difeomorfismos locais de G . As imagens pelos fluxos podem ser vistas como elementos de G , o que permite determinar o subgrupo a 1-parâmetro a partir de cada ponto $X \in \mathfrak{g}$. Essa é a base para a construção da aplicação $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$.

Seja X um campo invariante (à direita, ou à esquerda) em G , e X_t seu fluxo. A princípio X_t é um fluxo local, isto é, fixado t o domínio $\text{dom} X_t$ é o subconjunto aberto das condições iniciais cujas soluções se prolongam até t .

Definição 19 *Seja $X \in T_1G$, a exponencial de X é definida como*

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ X &\longmapsto \exp(X). \end{aligned}$$

onde

$$\exp(X) = (X^d)_{t=1}(1) = (X^e)_{t=1}(1)$$

Como é usual, $\exp(X)$ também é denotado por e^X .

A aplicação exponencial está bem definida pois os campos invariantes são completos, e assim a solução de $g' = X(g)$ que passa pelo elemento neutro em $t = 0$ se estende a $t = 1$.

Considerando o grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$, a propriedade acima faz da aplicação

$$t \longmapsto \exp(tX), X \in \mathfrak{g}$$

um homomorfismo de grupos, isto é,

$$\exp((t+s)X) = \exp(tX) \exp(sX) = \exp(sX) \exp(tX)$$

onde a imagem $\{\exp(tX) : t \in \mathbb{R}\}$ é um subgrupo de G . Esse é o chamado subgrupo a 1-parâmetro gerado por $X \in \mathfrak{g}$.

Com base na discussão acima, podem ser formalizadas as seguintes propriedades da aplicação exponencial.

Proposição 7 .

1. Se $X \in \text{Inv}^d$, então $X_t = E_{\exp(tX)}$, ou seja, $X_t(g) = \exp(tX)g$.
2. Se $X \in \text{Inv}^e$, então $X_t = D_{\exp(tX)}$, ou seja, $X_t(g) = g \exp(tX)$.
3. $\exp 0 = 1$.
4. Se $n \in \mathbb{Z}$, então $(\exp X)^n = \exp(nX)$, e em particular, $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$.

Exemplo 2 Tomando $G = GL(n, \mathbb{R})$, os campos invariantes à direita são da forma

$$X(g) = Ag, \quad A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}).$$

A equação diferencial associada a X é o sistema linear

$$\frac{dg}{dt} = Ag$$

no espaço das matrizes não singulares. A solução fundamental desta equação é dada pela exponencial de matrizes, isto é,

$$g = \exp(A) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$$

e portanto, a exponencial de matrizes neste caso coincide com a exponencial da álgebra no grupo de Lie, $\exp : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$.

Se $\mathcal{A}$ for uma álgebra associativa, então a exponencial do grupo de Lie $G(\mathcal{A})$ é dada por

$$\exp(A) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$$

da mesma forma como em $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, com o produto para o qual o comutador define um colchete de Lie.

Mais que uma aplicação que preserva as propriedades algébricas do domínio, a exponencial em um grupo de Lie também é diferenciável.

A fim de verificar esse fato, observe que a aplicação exponencial foi definida através da solução da equação diferencial

$$\frac{dg}{dt} = X(g)$$

onde X é um campo invariante, e assim o conjunto das equações definidas pelos campos invariantes à direita pode ser posto em uma única equação dependente do parâmetro $A \in T_1 G$ da seguinte forma

$$\frac{dg}{dt} = f(A, g) \tag{1.1}$$

onde $f : T_1 G \times G \longrightarrow TG$ é dada por

$$f(A, g) = (dD_g)_1(A),$$

e quando G e o produto p são de classe C^2 ao menos, f deve ser de classe C^1 , ao mínimo. Isso significa que as soluções de (1.1) dependem continuamente do parâmetro A , em particular, $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ é diferenciável.

Proposição 8 $(d\exp)_0 = \text{id}$.

Corolário 1 Existem uma vizinhança U de $0 \in \mathfrak{g}$ e uma vizinhança V de $1 \in G$, tais que

$$\exp|_U : U \longrightarrow V$$

é um difeomorfismo.

Corolário 2 *Seja G um grupo de Lie conexo e $g \in G$. Então, existem $X_1, \dots, X_s \in \mathfrak{g}$ tais que*

$$g = \exp(X_1) \cdots \exp(X_s).$$

O Corolário 2 garante que todo grupo de Lie conexo é gerado pela imagem da aplicação exponencial sobre a álgebra de Lie correspondente. Uma outra observação sobre os Corolários 1 e 2, é que nem sempre a exponencial é uma bijeção com relação a um grupo, ainda que o grupo seja conexo, no geral é necessário produtos de exponenciais de diferentes $X_j \in \mathfrak{g}$ para obter um elemento qualquer.

Ainda, de acordo com o Corolário 1, a aplicação

$$\log := \exp^{-1} : V \longrightarrow U$$

é um difeomorfismo entre um aberto de G e um aberto de um espaço vetorial, portanto a aplicação $\log$ pode ser considerada uma carta, ou sistema de coordenadas local de G . Essa carta é chamada sistema de coordenadas de primeira espécie.

Um outro tipo de sistema de coordenadas nas vizinhanças do elemento neutro pode ser obtida por meio de exponenciais. Tome uma base $\beta = \{X_1, \dots, X_N\}$ de $\mathfrak{g}$ e considere a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow G \\ (t_1, \dots, t_n) &\mapsto \exp(t_1 X_1) \exp(t_2 X_2) \cdots \exp(t_n X_n) \end{aligned}$$

Segue que $\psi(0) = 1$, e ainda

$$d\psi_0(e_i) = \frac{\partial \psi}{\partial t_i}(0) = \frac{d}{dt} \psi(0, \dots, t, \dots, 0)|_{t_i=0} = X_i$$

em cada e_i da base canônica de $\mathbb{R}^N$, logo $d\psi_0 = \text{id}$. Sendo $d\psi_0$ um isomorfismo, deve existir uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^N$, para a qual ψ é um difeomorfismo. Essa aplicação é chamada de sistema de coordenadas de segunda espécie.

Homomorfismos de grupos de Lie

Como grupos de Lie são objetos que consideram estruturas diferenciáveis, então o homomorfismo entre grupos de Lie é definido da seguinte forma :

Definição 20 *Sejam G e H grupos de Lie, e $\phi : G \longrightarrow H$ um homomorfismo de grupos. Se ϕ é diferenciável, chamamos ϕ de homomorfismo de grupos de Lie.*

Do mesmo modo, cada automorfismo, ou isomorfismo, de grupos que é diferenciável é chamado automorfismo, ou isomorfismo de grupos de Lie.

Considerando $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie dos grupos de Lie G e H respectivamente, então, uma transformação linear $\theta : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ que satisfaz $\theta[X, Y] = [\theta X, \theta Y]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ é chamado de homomorfismo de álgebras de Lie. Os homomorfismos de álgebras de Lie e os de grupos de Lie estão relacionados pela diferencial do campo de vetores na identidade.

Para verificar se um homomorfismo $\phi : G \longrightarrow H$ é diferenciável basta verificar a diferenciabilidade em um ponto, usualmente na identidade. Esse fato decorre das seguintes igualdades

$$\phi \circ D_g = D_{\phi(g)} \circ \phi \quad \text{e} \quad \phi \circ E_g = E_{\phi(g)} \circ \phi,$$

pois, a partir delas, obtém-se

$$\phi = D_{\phi(g)} \circ \phi \circ D_{g^{-1}} = E_{\phi(g)} \circ \phi \circ E_{g^{-1}}$$

e portanto, se ϕ é diferenciável em $1 \in G$, então ϕ é diferenciável em $g \in G$.

Proposição 9 *Sejam G e H grupos de Lie com respectivas álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$. Seja $\phi : G \rightarrow H$ um homomorfismo diferenciável e $X \in \mathfrak{g}$, então*

$$\phi(\exp(X)) = \exp(d\phi_1(X)).$$

Quando dois campos são ϕ -relacionados, isto é, quando existe um homomorfismo de grupos de Lie entre eles, seus colchetes de Lie também são ϕ -relacionados, e temos também o seguinte resultado.

Proposição 10 *Sejam G e H grupos de Lie com respectivas álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$, e $\phi : G \rightarrow H$ um homomorfismo diferenciável. Então, $d\phi_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é homomorfismo de álgebras de Lie, isto é,*

$$d\phi_1[X, Y] = [d\phi_1(X), d\phi_1(Y)]$$

com colchete de Lie dados pelos campos invariantes à esquerda, ou à direita.

O fato importante sobre a Proposição 10 é que homomorfismos de grupos de Lie induzem homomorfismos de álgebras de Lie. O homomorfismo $d\phi_1$ entre as álgebras de Lie induzido por ϕ é dito homomorfismo infinitesimal associado a ϕ . Quanto a situação inversa, onde um homomorfismo de álgebras de Lie induz um homomorfismo de grupos de Lie, isso nem sempre ocorre.

Representações

As representações de grupos de Lie são um caso particular de homomorfismos de grupos de Lie onde o contra-domínio é o grupo $GL(V)$ das transformações lineares invertíveis sobre o espaço vetorial V . O espaço V é chamado espaço de representação.

Seja ρ uma representação de G em V de dimensão finita e diferenciável, então $\mathfrak{gl}(V)$ denota a álgebra de Lie de $GL(V)$. Este espaço vetorial pode ser visto como o espaço de todas as transformações lineares em V com o colchete de Lie dado pelo comutador. Como visto anteriormente, o homomorfismo de grupos de Lie induz um homomorfismo de álgebras de Lie $d\rho_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$. Esse homomorfismo é dito uma representação de álgebras de Lie, também chamada de representação infinitesimal associada a ρ .

Por praticidade, é comum denotar a diferencial de ρ na identidade simplesmente por $d\rho_1 = \rho$. E a fórmula que relaciona as duas representações é dada pela Proposição 9

$$\rho(\exp(X)) = \exp(d\rho_1(X)) \quad (1.2)$$

onde a exponencial do termo à esquerda é a exponencial em G , e a exponencial à direita é a do grupo linear.

Representações adjuntas

Seja G um grupo de Lie, então a própria estrutura de G permite definir uma representação natural na sua álgebra de Lie, a chamada representação adjunta. Essa representação é construída da seguinte forma: cada elemento $g \in G$ define um automorfismo interno, a conjugação

$$C_g(x) = gxg^{-1}.$$

Uma vez que $C_g(1) = 1$, a diferencial $d(C_g)_1$ é uma aplicação linear de $\mathfrak{g}$, e portanto, dados $g, h \in G$,

$$C_g \circ C_h(x) = g(hxh^{-1})g^{-1} = (gh)x(gh^{-1}) = C_{gh}(x)$$

e assim,

$$d(C_g)_1 \circ d(C_h)_1(x) = d(C_{gh})_1$$

o que faz da aplicação $g \mapsto d(C_g)_1$ uma representação de G em $\mathfrak{g}$.

Definição 21 *A representação adjunta*

$$\text{Ad} : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$$

de G em sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é definida por

$$\text{Ad}(g) = d(C_g)_1$$

Formas equivalentes são dadas por: $\text{Ad}(g) = d(C_g)_1 = d(E_g \circ D_{g^{-1}})_1 = d(D_{g^{-1}} \circ E_g)_1 = d(E_g)_{g^{-1}} \circ d(D_{g^{-1}})_1 = d(D_{g^{-1}})_g \circ d(E_g)_1$.

A representação Ad é diferenciável. Esse fato pode ser notado da seguinte forma. Pela Proposição 10, para cada $g \in G$,

$$\text{Ad}(g)^{-1} = d(C_g)_1$$

é um homomorfismo de $\mathfrak{g}$. Observando que a inversa de $\text{Ad}(g)$ é

$$\text{Ad}(g)^{-1} = \text{Ad}(g^{-1})$$

concluimos que, mais do que um homomorfismo de $\mathfrak{g}$, $\text{Ad}(g)$ é um automorfismo, e assim a imagem $\text{Ad}(G)$ está contida no grupo de Lie dos automorfismos de $\mathfrak{g}$, $\text{Aut}(\mathfrak{g})$.

Uma fórmula bastante útil que será usada adiante para determinar certos resultados é obtida pela aplicação da Proposição 9 a $\phi = C_g$, isto é,

$$C_g(\exp X) = \exp(d(C_g)_1(X))$$

que é o mesmo que

$$g \exp(X) g^{-1} = \exp(\text{Ad}(g)(X)) \quad \forall g \in G, \forall X \in \mathfrak{g}. \quad (1.3)$$

Sendo Ad uma representação diferenciável, ela admite uma representação infinitesimal $\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. Essa representação coincide com a representação adjunta da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ que será definida a seguir.

Definição 22 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Sua representação adjunta é a aplicação*

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

definida por

$$\text{ad}(X)(Y) = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

A identidade de Jacobi garante que ad é de fato um homomorfismo de álgebras de Lie em $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, com o colchete dado pelo comutador.

Ainda pela identidade de Jacobi, as aplicações $\text{ad}(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, são derivações em $\mathfrak{g}$, isto é, aplicações $D : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ tais que

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY].$$

Proposição 11 *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ onde o colchete é dado pelos campos de vetores invariantes à esquerda. Então,*

$$d(\text{Ad})_1(X) = \text{ad}_e(X) \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

e além disso,

$$\text{Ad}(\exp(X)) = \exp(\text{ad}_e(X)) \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Observação 1 *A demonstração da Proposição 11 foi realizada com base nos campos invariantes à esquerda, mas poderia ter sido feita em campos invariantes à direita, a menos do fato de que a igualdade $[X, Y]_e = -[X, Y]_d$, implica em $\text{ad}_e(X) = \text{ad}_d(X)$, $X \in \mathfrak{g}$, o que acrescenta um sinal "-" na fórmula*

$$\text{Ad}(\exp(tX)(Y)) = d(X_{-t})_{X_t(1)}(Y(X_t(1))). \quad (1.4)$$

Conforme dito anteriormente, essas fórmulas constituem meios de transferir certas propriedades a partir do grupo de Lie na álgebra de Lie, e vice-versa. A exemplo disso considere o caso do exemplo abaixo.

Exemplo 3 *Seja G um grupo de Lie abeliano. Então, a sua álgebra de lie é também abeliana. Isso pode ser verificado da seguinte forma.*

Pela fórmula (1.2),

$$\exp(t\text{Ad}(g)(X)) = g \exp(tX) g^{-1} = \exp(tX) \quad (1.5)$$

para todo $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$ e $t \in \mathbb{R}$.

Derivando a expressão (1.5) em $t = 0$, obtém-se

$$\text{Ad}(g)(X) = X, \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall g \in G,$$

ou seja, $\text{Ad}(g) = \text{id}$, para todo $g \in G$.

Pela Proposição 11, se $Y \in \mathfrak{g}$, então

$$\text{id} = \text{Ad}(\exp tY) = \exp(t \text{ad}_e Y),$$

e derivando essa última igualdade com relação à t , em $t = 0$ tem-se

$$\text{ad}_e(Y) = 0, \quad \forall Y \in \mathfrak{g},$$

isto é, $[X, Y]_e = 0$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$, e portanto, $\mathfrak{g}$ é abeliana.

Reciprocamente, se G for um grupo conexo, supondo $\mathfrak{g}$ álgebra abeliana é possível mostrar que G é também abeliano.

Segundo a Proposição 11,

$$\text{Ad}(\exp tY) = \exp(t \text{ad}_e(Y))$$

com $Y \in \mathfrak{g}$. Visto que $\mathfrak{g}$ é suposta abeliana, $\text{ad}_e(Y) = 0$, e portanto

$$\text{Ad}(\exp tY) = 1.$$

Por meio da igualdade (1.3), em $t = 1$,

$$\exp(Y) \exp(X) \exp(-Y) = \exp(X) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

ou seja,

$$\exp(Y) \exp(X) = \exp(X) \exp(Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

Uma vez que G é conexo, G é gerado por exponenciais, e portanto, dados

$$g = \exp X_1 \cdots \exp X_n \quad \text{e} \quad h = \exp Y_1 \cdots \exp Y_n$$

em G , eles comutam afinal, dois a dois quaisquer exponenciais comutam.

Para cada $g \in G$, $\text{Ad}(g)$ é um automorfismo de $\mathfrak{g}$, isto é, $\text{Ad}(g) \in \text{Aut}(\mathfrak{g}), \forall g \in G$. Como $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ é um grupo de Lie, então, é possível considerar Ad um homomorfismo de grupo de Lie, de G em $\text{Aut}(\mathfrak{g})$. A imagem de G por Ad é um subgrupo de Lie de $\text{Aut}(\mathfrak{g})$, e o núcleo $\text{Ker}(\text{Ad})$ é um subgrupo fechado de G , pois Ad é diferenciável, em particular, contínua (imagem inversa de conjunto unitário).

A seguir serão formalizadas ideias que ajudam a entender a estrutura dos grupos de Lie.

Definição 23 *Seja G um grupo e H um subgrupo de G . Definimos*

$$Z_G(H) = \{g \in G : \forall h \in H, gh = hg\} \quad e \quad N_G(H) = \{g \in G : \forall h \in H, ghg^{-1} \in H\}.$$

Assim, $Z_G(H)$ é dito centralizador de H em G , $N_G(H)$ é dito normalizador de H em G .

Definição 24 *O conjunto*

$$Z(G) = \{g \in G : \forall h \in G, gh = hg\}$$

é chamado de centro de G .

Proposição 12 *Seja G_0 a componente conexa da identidade do grupo de Lie G , então*

$$\text{Ker}(\text{Ad}) = Z(G_0).$$

Corolário 3 *$Z(G) \subset \text{Ker}(\text{Ad})$, e ambos coincidem se G é conexo.*

O centro $Z(G)$ de um grupo G é um subgrupo abeliano, então, quando G é conexo $\text{Ker}(\text{Ad})$ é grupo abeliano.

Quando consideramos um centralizador de um subconjunto na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e o centro de $\mathfrak{g}$, as definições e resultados sobre $Z(G)$ estão em concordância, isto é, o centro de $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : \forall Y \in \mathfrak{g}, [X, Y] = 0\}$$

é exatamente o núcleo da representação adjunta da álgebra. Além disso, é possível mostrar que a álgebra de Lie de $Z(G)$ é $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

Exemplo 4 *Seja $G = GL(n, \mathbb{R})$. Então, $\text{Ad}(g)$ coincide com a conjugação C_g , isto é, dados $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ e $g \in GL(n, \mathbb{R})$*

$$\text{Ad}(g)A = gAg^{-1}. \tag{1.6}$$

O centro de $GL(n, \mathbb{R})$ é o subgrupo das matrizes escalares (múltiplas da identidade, aI com $a \in \mathbb{R}$). Vale observar que a expressão (1.6) garante que $Z(G) = \text{Ker}(\text{Ad})$, ainda que $GL(n, \mathbb{R})$ seja a união de duas componentes conexas.

1.2 Fibrados

Nesta seção, definiremos o conceito de fibrado principal que será importante para o estudo das fibrações equivariantes entre grupos de Lie que são ferramentas muito importantes para esse estudo.

Definição 25 (*fibrado principal*)

Sejam P e M espaços topológico e G um grupo. Dizemos que $P(M, G)$ é um fibrado principal com espaço total P , de base M e com grupo estrutural G quando satisfeitas as seguintes condições:

1. A ação de G à direita em P , dada por

$$\begin{aligned} D : P \times G &\longrightarrow P \\ (p, g) &\longmapsto pg \end{aligned}$$

é livre, isto é, se $pg = p$ para algum $p \in P$, então $g = 1$

2. Existe uma aplicação sobrejetora.

$$\pi : P \longrightarrow M$$

tal que as órbitas de G são os conjuntos $\pi^{-1}\{x\}$, $x \in M$. Ou seja, $M = \{pG : p \in P\}$.

3. P é localmente trivial, isto é, para todo $x \in M$ existe uma vizinhança U de x e uma aplicação bijetora

$$\begin{aligned} \psi : \pi^{-1}\{U\} &\longrightarrow U \times G \\ p &\longmapsto \psi(p) = (\pi(p), \phi(p)) \end{aligned}$$

onde $\phi : \pi^{-1}\{U\} \longrightarrow G$ é tal que

$$\phi(pg) = \phi(p)g, \quad \forall p \in \pi^{-1}\{U\}, \quad \forall g \in G.$$

O fibrado $P(M, G)$ é dito topológico quando as aplicações envolvidas na definição são contínuas. O fibrado é dito diferenciável de classe $\mathcal{C}^k$ quando os espaços envolvidos são variedades diferenciáveis de classe $\mathcal{C}^k$ e as aplicações são de classe $\mathcal{C}^k$, em particular, G deve ser um grupo de Lie, e $\pi : P \longrightarrow M$ uma submersão.

1.3 Álgebras de Lie

Nesta seção, estudaremos alguns tópicos das álgebras de Lie semi-simples reais necessários para o entendimento deste texto. Uma álgebra de Lie, num sentido abstrato, é definida da seguinte forma:

Definição 26 Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ munido de um produto

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g},$$

chamado colchete, que satisfaz o seguinte:

1. É bilinear.
2. É antissimétrico.
3. Atende à identidade de Jacobi, isto é,

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

Uma subálgebra de Lie é qualquer subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$ que é fechado para o colchete.

Dado um espaço vetorial qualquer munido de um produto bilinear e simétrico, naturalmente uma estrutura de álgebra de Lie é definida pelo comutador desse produto, por isso, também chamamos o colchete de comutador.

Uma vez bem entendido o que é uma subálgebra de Lie, podemos definir, tanto o centralizador, bem como o comutador em um grupo de Lie em termos das álgebras de Lie associadas, como na definição a seguir.

Definição 27 *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, e $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de $\mathfrak{g}$. O centralizador e normalizador de $\mathfrak{h}$ em G são definidos respectivamente, por:*

$$Z_G(\mathfrak{h}) = \{x \in G : \text{Ad}(x)H = H, \forall H \in \mathfrak{h}\} \quad e \quad N_G(\mathfrak{h}) = \{x \in G : \text{Ad}(x)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}\}.$$

Uma classe especial de álgebras de Lie em Teoria de Lie é das álgebras semi-simples. Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é semi-simples se seu radical (ideal solúvel maximal) é a subálgebra trivial nula, isto é, $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \{0\}$, o que equivale a dizer que $\mathfrak{g}$ não tem outro ideal solúvel além de $\{0\}$.

O estudo das álgebras de Lie semi-simples é feito com base no estudo das álgebras complexas. A partir de uma álgebra semi-simples complexa $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ é possível tomar álgebras cuja complexificada é $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, que são únicas a menos de um isomorfismo, o que fornece uma identificação entre álgebras semi-simples reais e complexas, e por meio dessa identificação é possível realizar a classificação das álgebras semi-simples reais de modo análogo ao das álgebras sobre $\mathbb{C}$, por sistemas de raízes e diagramas. Para outros detalhes nos referimos a [22], [10] e [14].

Álgebras semi-simples Reais

Uma álgebra de Lie real cuja complexificada é $\mathfrak{g}$ é uma forma real de $\mathfrak{g}$. As formas reais compactas são uma classe especial de formas reais de álgebras de Lie, isto é, aquelas onde a forma de Cartan-Killing é negativa definida. A importância do seu estudo reside no fato de existir uma bijeção entre as formas reais compactas e as álgebras de Lie semi-simples complexas, que permite que se descreva as demais formas reais como interseção com uma forma real compacta (decomposição de Cartan).

Definição 28 *Uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$ é dita compacta se sua forma de Cartan-Killing (C-K),*

$$\langle X, Y \rangle = \text{Tr}(\text{ad}(X)\text{ad}(Y)),$$

é negativa definida.

Teorema 2 *Toda álgebra semi-simples complexa admite formas reais compactas. Sejam $\mathfrak{u}_1$ e $\mathfrak{u}_2$ são formas reais compactas de $\mathfrak{g}$. Então, existe um automorfismo ϕ de $\mathfrak{g}$ tal que $\phi(\mathfrak{u}_1) = \mathfrak{u}_2$, e assim as formas compactas são isomorfas entre si.*

A demonstração do Teorema 2 depende de vários resultados auxiliares, e portanto será omitida, visto que não é o principal objetivo deste trabalho. Para mais detalhes, ver [22].

Proposição 13 *Sejam $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$ formas reais de $\mathfrak{g}$ com conjugações σ_1 e σ_2 respectivamente e tais que $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1\sigma_2$ então $\mathfrak{g}_2 = (\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{g}_1) \oplus (\mathfrak{g}_2 \cap i\mathfrak{g}_1)$.*

Como consequência dessa última Proposição, duas conjugações comutam unicamente quando as formas reais se mantêm fixas em ambas, e além disso segue um critério para decidir quando duas álgebras compactas coincidem, Se $\mathfrak{u}_1$ e $\mathfrak{u}_2$ formas reais compactas então elas coincidem se, e só se, suas conjugações comutam.

Teorema 3 *Sejam $\mathfrak{g}_2$ uma álgebra semi-simples complexa, $\mathfrak{u}$ uma forma real compacta de $\mathfrak{g}$, e $\mathfrak{g}_0$ uma forma real qualquer de $\mathfrak{g}$ que é obtida pela conjugação σ . Então, existe um automorfismo interno ϕ de $\mathfrak{g}$ tal que σ comuta com a conjugação em relação à forma real compacta $\mathfrak{g}$.*

Como consequência, concluímos que se $\mathfrak{u}_1$ e $\mathfrak{u}_2$ são duas formas reais compactas, então existe um automorfismo de $\mathfrak{g}$ tal que $\phi(\mathfrak{u}_1) = \mathfrak{u}_2$.

Teorema 4 *Uma álgebra complexa $\mathfrak{g}$ é simples se, e só se sua forma real compacta $\mathfrak{u}$ é simples. Se $\mathfrak{g}$ é semi-simples e sua decomposição em ideais simples é dada por $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \cdots + \mathfrak{g}_s$, e sendo $\mathfrak{u}_k$ forma compacta de $\mathfrak{g}_k$, $k = 1, \dots, s$, então $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_1 + \cdots + \mathfrak{u}_s$ é uma forma real compacta de $\mathfrak{g}$.*

O Teorema 4 estabelece que álgebras compactas simples são do tipo I (cujo complexificado é uma álgebra simples), e o conjunto das classes de equivalência das álgebras compactas é identificado com as classes de equivalência das álgebras complexas semi-simples.

Se $\mathfrak{g}_0$ é uma forma real não-compacta de $\mathfrak{g}$ correspondente a σ , e $\mathfrak{u}$ uma forma real compacta correspondente a η , então o Teorema 3 garante a comutatividade entre as conjugações fazendo $\mathfrak{g}_0$ invariante por η e por σ , dessa forma o Teorema 4 garante que

$$\mathfrak{g}_0 = (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}) \oplus (\mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{u}),$$

o que caracteriza a decomposição de Cartan de $\mathfrak{g}_0$.

Decomposição de Cartan

Como principais resultados, veremos que álgebras de Lie semi-simples reais possuem decomposição de Cartan, e bem como, quaisquer duas dessas decomposições são conjugadas por certos automorfismos.

Além disso, segundo o critério de Cartan, uma álgebra de Lie é semi-simples se, e somente se, sua forma C-K for não degenerada. Por isso, quando consideramos $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples real, temos sua forma C-K não degenerada, e como essa forma C-K na álgebra real nada mais é do que a forma C-K do complexificado $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{g}$, ambas são simultaneamente não degeneradas. Em outras palavras, uma álgebra de Lie real é semi-simples se, e somente se, sua álgebra complexificada também o for. Mais do que isso, toda álgebra de Lie semi-simples real é uma forma real da sua álgebra complexificada. Logo, faz sentido definirmos a decomposição de Cartan como segue.

Definição 29 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples real, e $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ sua complexificada, suponha $\mathfrak{u}$ uma forma real compacta de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Então, podemos escrever $\mathfrak{g}$ como uma soma direta da seguinte forma*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$$

onde $\mathfrak{k} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{u}$, e $\mathfrak{s} = \mathfrak{g} \cap i\mathfrak{u}$. Esta é a chamada Decomposição de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Observe que a Decomposição de Cartan não é uma decomposição de subálgebras, mas sim, uma decomposição em uma subálgebra (forma real compacta) e um subespaço.

A seguir, veremos a ligação entre as decomposições de Cartan e certas involuções de álgebras de Lie que são comumente usadas para caracterizá-las, as involuções de Cartan. Como é usual, uma involução sobre U é simplesmente uma aplicação $\theta : U \longrightarrow U$ tal que $\theta^2(X) = X, \forall X \in U$.

Proposição 14 *Seja $\mathfrak{g}$ uma forma real não-compacta e uma decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$. Dado o automorfismo involutivo θ definido como*

$$\theta(X) = \begin{cases} X, & \text{se } X \in \mathfrak{k} \\ -X, & \text{se } X \in \mathfrak{s} \end{cases} \quad (1.7)$$

a forma bilinear

$$B_\theta(X, Y) = -\langle X, \theta Y \rangle$$

define um produto interno em $\mathfrak{g}$ se, e somente se, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ é a decomposição de Cartan segundo θ .

Definição 30 *Seja $\mathfrak{g}_0$ uma álgebra semi-simples real, uma involução θ de $\mathfrak{g}_0$, tal que a forma bilinear B_θ é simétrica positiva definida,*

$$B_\theta(X, Y) = -\langle X, \theta Y \rangle,$$

é chamada de involução de Cartan.

A involução de Cartan pode ser vista tanto como automorfismo de $\mathfrak{g}$ como um automorfismo da forma real compacta $\mathfrak{u}$, na realidade $\mathfrak{u}$ é o conjunto dos pontos fixos do automorfismo, pois $\mathfrak{u} = \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{s}$.

Quando trabalhamos com as formas reais, é interessante observar que tanto a forma bilinear B_θ quanto a forma C-K estão diretamente ligadas à geometria da representação adjunta de $\mathfrak{g}$, como mostra a seguinte proposição.

Proposição 15 *Seja $\mathfrak{g}_0$ uma forma real compacta, e $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ uma decomposição de Cartan, e θ a involução de Cartan associada. Então, $\text{ad}(X)$, com $X \in \mathfrak{k}$, é simétrica com relação à B_θ , e $\text{ad}(X)$ é antissimétrica com relação à B_θ . Além disso, os espaços $\mathfrak{k}$ e $\mathfrak{s}$ são ortogonais tanto em relação a C-K quanto à B_θ .*

E por fim, convém observar que a decomposição de Cartan de uma álgebra de Lie semi-simples é única a menos de um isomorfismo.

Teorema 5 *Seja $\mathfrak{g}_0$ uma álgebra de Lie semi-simples real. Dadas duas decomposições de Cartan*

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{s}_1 \quad \text{e} \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_2 \oplus \mathfrak{s}_2.$$

Existe, um automorfismo ϕ de $\mathfrak{g}_0$ tal que

$$\phi(\mathfrak{k}_1) = \mathfrak{k}_2 \quad \text{e} \quad \phi(\mathfrak{s}_1) = \mathfrak{s}_2.$$

Decomposição de Iwasawa

Álgebras semi-simples complexas podem ser decompostas em soma direta de espaços de pesos da representação adjunta mais a subálgebra de Cartan. Em corpos que não são algebricamente fechados, os pesos da representação adjunta, em geral, podem assumir valores complexos, por isso não é possível aplicar a mesma teoria de sistemas simples de raízes para álgebras semi-simples reais. Entretanto, é possível realizar um estudo similar a partir das subálgebras abelianas maximais contidas na parte simétrica de uma decomposição de Cartan. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples real, com decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$. Então, existem subálgebras abelianas em $\mathfrak{s}$, por exemplo os subespaços de dimensão 1, e sob argumentos de maximalidade é possível afirmar que existe $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ uma subálgebra abeliana maximal.

A seguinte proposição associa as subálgebras abelianas maximais às subálgebras de Cartan.

Proposição 16 *Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ uma decomposição de Cartan da álgebra de Lie semi-simples real $\mathfrak{g}$, e $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ uma subálgebra abeliana maximal em $\mathfrak{s}$. Então, existe uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, onde $\mathfrak{g}$ é forma real de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, tal que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$. Além disso, $\mathfrak{h}$ se decompõe em soma direta como $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}) \oplus \mathfrak{a} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{k}} \oplus \mathfrak{a}$.*

Demonstração: É claro que toda subálgebra abeliana real pode ser estendida a uma subálgebra abeliana complexa, e observando que o normalizador de uma subálgebra abeliana é maior, ou igual à própria, é possível garantir, por argumentos de maximalidade a existência de uma subálgebra abeliana maximal em $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, tal que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{h}$.

Quanto à decomposição de $\mathfrak{h}$ em soma direta, isto é consequência do fato de $\mathfrak{h}$ ser invariante pela involução de Cartan. Seja θ a involução de Cartan associada à decomposição $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, para cada $X \in \mathfrak{h}$, $X - \theta X \in \mathfrak{s}$, pois

$$\theta(X - \theta X) = \theta X - \theta^2 X = \theta X - X = -(X - \theta X).$$

e ainda, para cada $Y \in \mathfrak{a}$, tem-se

$$\begin{aligned} [X - \theta X, Y] &= [X, Y] - [\theta X, Y] \\ &= 0 - \theta[X, \theta Y] \\ &= \theta[X, Y] \\ &= \theta(0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

e sendo $\mathfrak{a}$ maximal, então $X - \theta X \in \mathfrak{a}$, e assim, $\theta X \in \mathfrak{h}$ pois $X \in \mathfrak{h}$.

E portanto, sendo $\mathfrak{h}$ invariante por θ , como $\mathfrak{k}$ é simétrico em relação a θ , e $\mathfrak{s}$ é antissimétrico, segue que

$$\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s})$$

com $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{s} = \mathfrak{a}$.

Sabendo que sobre um corpo algebricamente fechado, uma subálgebra abeliana maximal é de Cartan se, e somente se, as adjuntas dos seus elementos são semi-simples, é possível concluir que $\mathfrak{h}$ é de Cartan. De fato, se $H \in \mathfrak{h}$, então esse elemento pode ser decomposto da forma $H = H_k + H_s$, com $H_k \in \mathfrak{k}$ e $H_s \in \mathfrak{s}$. Segue que $\text{ad}(H_k)$ é antissimétrica pelo produto derivado da forma de Cartan-Killing, B_θ , enquanto $\text{ad}(H_s)$ é simétrica, o que faz desses operadores semi-simples. Visto que sua soma comuta, então $\text{ad}(H)$ também é semi-simples.

■

Definição 31 Considere a representação adjunta de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{g}$. Os funcionais $\alpha(H)$ de $\mathfrak{g}$ tais que

$$\text{ad}(H)X = \alpha(H)X,$$

com $H \in \mathfrak{a}$ são os pesos da representação adjunta. Os pesos não nulos são as chamadas raízes restritas de $\mathfrak{g}$.

Observe que, sendo $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ os elementos de $\mathfrak{a}$ são simétricos em relação ao produto interno B_θ , e portanto, seus autovalores são todos reais, o que faz de α um funcional real.

Dessa forma, definindo o espaço de pesos da representação de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{g}$ como

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : \text{ad}(H)X = \alpha(H)X, \forall H \in \mathfrak{a}\}$$

tem-se que a decomposição em espaços de pesos da representação adjunta do complexificado de $\mathfrak{g}$ é, na realidade, uma decomposição do próprio $\mathfrak{g}$, o que justifica tomar $\mathfrak{a}$ dessa forma.

O funcional nulo também é um peso da representação adjunta de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{g}$, afinal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ é abeliano. O espaço associado ao peso nulo é denotado por $\mathfrak{m}$. E assim, $\mathfrak{g}$ é decomposto da seguinte forma

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \sum_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha}$$

com α percorrendo o conjunto das raízes restritas. Decorre diretamente das definições que $\mathfrak{m}$ é o centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{g}$. Por isso, se $\mathfrak{h}$ é a subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ contendo $\mathfrak{a}$,

$$[X, Y] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{a}, \forall Y \in \mathfrak{h}$$

ou seja, $\mathfrak{h}$ deve estar contido no centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{g}$, e $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{m}$. Desse fato, segue que

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{s},$$

pois $\mathfrak{h}$ é abeliana maximal em $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, e $\mathfrak{a}$ é abeliano maximal em $\mathfrak{s}$.

Para as raízes de uma álgebra via subálgebra de Cartan, o conjunto das raízes restritas possui um número finito de funcionais em $\mathfrak{a}$. Portanto, é pertinente a seguinte definição.

Definição 32 Seja $\bar{\mathfrak{a}} \subset \mathfrak{a}$ definido como

$$\bar{\mathfrak{a}} = \{H \in \mathfrak{a} : \alpha(H) \neq 0, \forall \alpha \text{ raiz restrita}\}$$

este é um conjunto aberto e denso em $\mathfrak{a}$, e por analogia ao caso complexo, cada elemento de $\bar{\mathfrak{a}}$ é dito ser um elemento regular real, e $\bar{\mathfrak{a}}$ é chamado conjunto dos elementos regulares de $\mathfrak{a}$.

Lema 2 Seja $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ uma álgebra de Lie complexa com decomposição de Cartan em espaços de pesos dada por

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus \sum_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Então, $\mathfrak{m} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{k}$, e $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$, e $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ se decompõe da seguinte forma

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Demonstração: Seja $Z \in \mathfrak{g}$, tal que, $Z = X + Y$ onde $X \in \mathfrak{k}$ e $Y \in \mathfrak{s}$.

Para cada $H \in \mathfrak{a}$, como $\mathfrak{g}$ é centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$

$$0 = [H, Z] = [H, X] + [H, Y]$$

com $[H, X] \in \mathfrak{k}$ e $[H, Y] \in \mathfrak{s}$, e portanto, $[H, X] = [H, Y] = 0$, e assim, $X \in \mathfrak{m} = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{k}$, e $Y \in \mathfrak{s}$ centraliza $\mathfrak{a}$. Visto que $\mathfrak{a}$ é abeliana maximal, segue que $Y \in \mathfrak{a}$, e assim,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$$

e,

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

■

Como essa decomposição parte de uma álgebra abeliana maximal $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{g}$, é preciso garantir certa regularidade para que a escolha arbitrária de $\mathfrak{a}$ não altere a estrutura da decomposição. E, de fato, as álgebras abelianas maximais em $\mathfrak{g}$ possuem a mesma dimensão e são conjugadas por certos automorfismos.

Proposição 17 *Seja $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ uma subálgebra abeliana maximal, então, para todo $X \in \mathfrak{s}$, existe $k \in K_{\text{ad}}$, tal que $kX \in \mathfrak{a}$, onde $K_{\text{ad}} = \{g \in \text{Aut}_0 \mathfrak{g} : \theta g \theta^{-1} = g\}$, e $\text{Aut}_0 \mathfrak{g}$ é a componente conexa do grupo dos automorfismos de $\mathfrak{g}$.*

De forma sucinta, o seguinte corolário traz a ideia principal implícita na Proposição 17.

Corolário 4 *Se $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{s}$ são subálgebras abelianas maximais, então existe $k \in K_{\text{ad}}$ tal que $k\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$.*

Demonstração: Seja $X \in \mathfrak{a}_2$ um elemento regular real, e $k \in K_{\text{ad}}$ tal que $kX \in \mathfrak{a}_1$. Para $Y \in \mathfrak{a}_1$,

$$[k^{-1}Y, X] = [Y, kX] = 0$$

e portanto, da maximalidade de $\mathfrak{a}_2$, $k^{-1}Y \in \mathfrak{a}_2$, isto é, $k^{-1}\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2$.

De modo análogo, existe $u \in K_{\text{ad}}$ tal que $u\mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}_1$.

Portanto, $\dim \mathfrak{a}_1 = \dim \mathfrak{a}_2$, então $k^{-1}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$.

■

Com a garantia de que as álgebras abelianas maximais são isomorfas, é possível definir o posto real de uma álgebra de Lie como a dimensão da subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a}$.

A partir daqui já é possível definir a decomposição de Iwasawa, partindo de uma decomposição de Cartan previamente fixada.

Teorema 6 (*Decomposição de Iwasawa*)

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie real com decomposição de Cartan

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s},$$

$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ uma subálgebra abeliana maximal, e $H \in \mathfrak{a}$ um elemento regular real. Então,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

onde $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_H^+ = \sum_{\alpha(H)>0} \mathfrak{g}_{\alpha}$, isto é, $\mathfrak{n}_H^+$ é a soma dos autoespaços $\text{ad}(H)$ associados aos autovalores estritamente positivos.

Demonstração: Tome os espaços $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{n}$ como acima. Então, o procedimento é mostrar que a interseção entre cada dois desses espaços é trivial, e a sua soma é exatamente $\mathfrak{g}$.

Primeiro, $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{a} = \{0\}$, pois $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$. Além disso, $\mathfrak{a}$ intersecta qualquer dos $\mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha(h) > 0$, somente em 0, afinal $\mathfrak{a} \subset \text{Ker}(\text{ad}(H))$, ou seja, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{n}_H^+ = \{0\}$.

Quanto à $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}_H^+$, denote por

$$\mathfrak{n}_H^- = \sum_{\alpha(H) < 0} \mathfrak{g}_\alpha$$

a soma dos autoespaços associados aos autovalores negativos de $\text{ad}(H)$. Seja θ a involução de Cartan. Então, note que, se

$$\text{ad}(H)X = [H, X] = \lambda X$$

deve ocorrer que $\theta[X, Y] = \theta(\lambda X) = \lambda \theta X$. Porém,

$$\theta[H, X] = [\theta H, \theta X] = -[H, \theta X],$$

portanto, $[H, \theta X] = (-\lambda)\theta X$, ou seja, a involução de Cartan leva autoespaços associados a valores positivos em autoespaços associados a autovalores negativos, e vice-versa, Logo, $\theta(\mathfrak{n}_H^-) = \mathfrak{n}_H^+$, e $\theta(\mathfrak{n}_H^+) = \mathfrak{n}_H^-$.

Agora, suponha que $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}_H^+$, então $\theta X = X$, pois $X \in \mathfrak{h}$, e assim

$$\theta X = X \in \mathfrak{n}_H^+ \cap \mathfrak{n}_H^- = \{0\},$$

portanto $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}_H^+ = \{0\}$. Conclui-se que a soma $\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é, de fato, direta.

Por fim, sendo $H \in \mathfrak{a}$ um elemento regular,

$$\text{Ker}(\text{ad}(H)) = \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}.$$

Segue que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \sum_{\alpha} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{n}_H^- \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}_H^+.$$

A partir disto, basta verificar que

$$(\mathfrak{n}_H^- \oplus \mathfrak{m}) \subset (\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}_H^+).$$

De fato, dado $X = Y + Z$, com $Y \in \mathfrak{n}_H^-$, $Z \in (\mathfrak{m})$, então

$$\theta X = \theta Y + \theta Z$$

, e portanto

$$\begin{aligned} X &= X + \theta X - \theta X \\ &= X + \theta Y + Z - \theta X \\ &= Y + Z + \theta Y + Z - \theta Y - Z \\ &= (Y + \theta Y + Z) - \theta Y \end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned} \theta(Y + \theta Y + Z) &= Y + \theta Y + Z \\ &= \theta Y + \theta^2 Y + \theta Z \\ &= \theta Y + Y + Z \end{aligned}$$

$\theta Y + Y + Z \in \mathfrak{k}$, e $-\theta Y \in \mathfrak{n}_H^+$, concluindo o resultado.

■

Proposição 18 *A componente $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_H^+$ da decomposição de Iwasawa é uma subálgebra nilpotente, e $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é uma álgebra solúvel.*

Demonstração: A demonstração é feita mostrando a nilpotência das adjuntas de $\mathfrak{n}$.

Primeiramente, observe que, dados X, Y autovetores de $\text{ad}(H)$ correspondentes aos autovalores λ e μ , então, pela identidade de Jacobi,

$$\begin{aligned} [H, [X, Y]] &= [[H, X], Y] + [X, [H, Y]] \\ &= [\text{ad}(H)X, Y] + [X, \text{ad}(H)Y] \\ &= (\lambda + \mu)[X, Y]. \end{aligned}$$

Uma vez que H é um elemento regular, segue que $[X, Y] = 0$, ou $[X, Y]$ é autovetor associado ao autovalor $\lambda + \mu$.

A partir disso, seja $\mathfrak{g} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_N$ a decomposição de $\mathfrak{g}$ em soma de autoespaços associados respectivamente aos autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, ordenados da seguinte forma $\lambda_1 > \cdots > \lambda_N$. Note também que, cada autoespaço de $\text{ad}(H)$ é uma soma de espaços de pesos.

Tome uma base $B = \{X_{1,1}, \dots, X_{1,k_1}, \dots, X_{N,1}, \dots, X_{N,k_N}\}$ de $\mathfrak{g}$ que é a união de bases dos subespaços V_i , mantendo a mesma ordenação dos autovalores. Se X é um autovetor de $\text{ad}(H)$ associado ao autovalor λ , $[X, X_i]$ é nulo, ou $[X, X_i]$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda + \lambda_i > \lambda_i$, então a matriz de $\text{ad}(X)$ na base B é estritamente triangular superior (triangular superior com zeros na diagonal).

Uma vez que $\mathfrak{n}_H^+$ é uma soma de subespaços contidos nos V_i 's, tomando combinações lineares é possível mostrar que as matrizes de $\text{ad}(X)$ com $X \in \mathfrak{n}$ são simultaneamente triangularizáveis na base B . Então, $\text{ad}(\mathfrak{n})$ é nilpotente, pois está contido em uma álgebra de Lie nilpotente, e portanto, sendo ad injetiva, $\mathfrak{n}$ é nilpotente.

Quanto a $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, observe que, por $\mathfrak{a}$ normalizar $\mathfrak{n}$, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{n}$, garantindo que $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é fechado pelo colchete, e portanto uma subálgebra. Além disso, lembrando que, dada uma álgebra de Lie e um ideal dessa álgebra, se tanto o ideal como o quociente são solúveis, então a álgebra é solúvel, note que $\mathfrak{n}$ é nilpotente, e portanto solúvel, e $(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n})/\mathfrak{n} \approx \mathfrak{a}$ é abeliana, decorre que $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ também é solúvel.

■

A Proposição 18 completa a caracterização dos termos de uma decomposição de Iwasawa, isto é, se

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$$

é uma decomposição de Iwasawa da álgebra real $\mathfrak{g}$, então $\mathfrak{k}$ é a componente compacta, $\mathfrak{a}$ é a componente abeliana, e $\mathfrak{n}$ é nilpotente. Além disso, assim como a decomposição de Cartan, a decomposição de Iwasawa é única a menos de um isomorfismo.

1.4 Grupos de Weyl e Câmaras de Weyl

Nesta seção, estudaremos uma classe particular de grupos de Coxeter, que são os chamados grupos de Weyl. Os grupos de Coxeter são gerados por reflexões ortogonais com relação a uma forma bilinear mais geral que o produto interno, e seu estudo fornece informações importantes sobre a geometria de espaços euclidianos, e portanto, os grupos de Weyl desempenham papel similar na teoria de álgebras de Lie semi-simples. Para mais informações sobre grupos de Coxeter ver [9] e [22].

Além disso, será mostrado que existe uma identificação entre câmaras de Weyl e Grupos de Weyl, que caracteriza a geometria das álgebras de Lie semi-simples tornando possível uma teoria de classificação das mesmas.

Grupos de Weyl

Os grupos de Weyl são objetos fundamentais para a compreensão dos sistemas simples de raízes da subálgebra de Cartan.

No que segue, serão apresentados sistemas de raízes que representam uma abstração das propriedades de um conjunto de raízes obtidos da subálgebra de Cartan, e desta forma, alcançamos um contexto mais geral que independe da suposição de uma álgebra de Lie sobre um corpo algebricamente fechado. Sua maior importância neste momento está fundamentada no entendimento dos sistemas simples de raízes das álgebras de Lie semi-simples reais.

Definição 33 *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Dado um elemento não nulo $\alpha \in E$, uma reflexão em relação a α é uma transformação linear invertível $r_\alpha : E \rightarrow E$ que satisfaz:*

1. $r_\alpha(\alpha) = -\alpha$.
2. o conjunto $F_{r_\alpha} = \{\beta \in E : r_\alpha(\beta) = \beta\}$ é hiperplano de E .

Observe que F_{r_α} , por ser hiperplano, é um subespaço complementar ao gerado de α , denotado por $\text{ger}\{\alpha\}$.

Definição 34 *Seja E um espaço vetorial, um conjunto $\Pi \in E$ é um sistema de raízes se satisfaz:*

1. Π é finito, gera E e não contém o vetor nulo.
2. Para todo $\alpha \in \Pi$ existe uma reflexão r_α em relação a α tal que $r_\alpha(\Pi) = \Pi$.
3. Para todos $\alpha, \beta \in \Pi$, $r_\alpha(\beta) - \beta$ é um múltiplo inteiro de α .

Os elementos de Π serão chamados de raízes.

Convém notar que a segunda condição da definição 34 garante que se α é raiz então $-\alpha$ também o é.

Definição 35 *Um sistema simples de raízes Σ é uma base de E para a qual cada elemento de Π é escrito como uma combinação linear inteira de termos em Σ . Uma raiz em Σ é chamada raiz simples.*

Proposição 19 *Dado $\alpha \in \Pi$, a reflexão r_α é única.*

As propriedades que definem um sistema de raízes praticamente caracterizam um conjunto de raízes de uma subálgebra de Cartan de uma álgebra de Lie semi-simples sobre um corpo algebricamente fechado. Uma diferença essencial é quanto aos possíveis múltiplos de raízes que também são raízes.

Definição 36 *Um sistema de raízes Π é dito reduzido se os únicos múltiplos de $\alpha \in \Pi$ que são raízes são α e $-\alpha$.*

Num sistema não reduzido pode haver raízes $\alpha \in \Pi$ tais que $t\alpha \in \Pi$ com $t \neq 1$ ou $t \neq -1$.

Definição 37 *O grupo de Weyl de um sistema de raízes Π é o grupo gerado pelas reflexões r_α com $\alpha \in \Pi$. Este grupo será denotado por W_Π , ou simplesmente W .*

A seguir, veremos algumas propriedades do grupo de Weyl.

Lema 3 *O grupo de Weyl é finito.*

Demonstração: W é gerado por transformações que deixam Π invariante. Assim, caso exista $w \in W$ tal que $w|_{\Pi}$ é a identidade, então w é a identidade em E , pois $\text{ger}(\Pi) = E$.

Seja φ uma aplicação definida por $\varphi(w) = w|_{\Pi}$, então φ é homomorfismo injetor, pois, dados $w_1, w_2 \in W$ tais que $\varphi(w_1) = \varphi(w_2)$, temos $w_1|_{\Pi} = w_2|_{\Pi}$ que implica em $w_1 = w_2$, pois $\text{ger}(\Pi) = E$.

Visto que Π é finito, então o grupo das bijeções em Π é finito, e além disso existe uma homomorfismo injetivo φ de W nesse conjunto, e portanto W é finito.

■

Da teoria de representação de grupos nos apropriamos de um resultado que se faz importante para a determinação de um produto interno de mesma propriedade que a forma de Cartan-Killing.

Proposição 20 *Seja W um grupo finito de transformações lineares invertíveis de um espaço vetorial real E . Então, existe um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ invariante por W , no sentido em que todo $w \in W$ é uma isometria do produto interno, isto é,*

$$\langle w\alpha, w\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

para todos $\alpha, \beta \in E$ e todo $w \in W$.

Em vista dessa Proposição 20 fixa-se de uma vez por todas um produto interno invariante pelo grupo de Weyl.

Tome as reflexões r_{α} , $\alpha \in \Pi$, então o hiperplano dos pontos fixos de r_{α} é exatamente o hiperplano $\alpha^{\perp}$. Sejam $\alpha \in \Pi$ e $\beta \in E$ tal que $r_{\alpha}(\beta) = \beta$, então

$$\begin{aligned} 0 &= \langle r_{\alpha}(\alpha) + \alpha, \beta \rangle \\ &= \langle r_{\alpha}(\alpha), \beta \rangle + \langle \alpha, \beta \rangle \end{aligned}$$

Portanto,

$$\langle r_{\alpha}(\alpha), r_{\alpha}(\beta) \rangle = \langle r_{\alpha}(\alpha), \beta \rangle = -\langle \alpha, \beta \rangle$$

Mas, r_{α} é ortogonal com relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então

$$\langle \alpha, \beta \rangle = -\langle \alpha, \beta \rangle$$

e assim, $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. Segue que o hiperplano dos pontos fixos de r_{α} está contido no hiperplano dos pontos $\alpha^{\perp}$, e portanto eles coincidem.

Podemos dizer que, em termos de produto interno invariante por W , as reflexões r_{α} são reflexões em relação ao hiperplano $\alpha^{\perp}$. Uma vez que, $r_{\alpha}(\alpha) = -\alpha$, então r_{α} é a própria reflexão ortogonal

$$r_{\alpha}(\beta) = \beta - \frac{2\langle \beta, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \alpha.$$

Proposição 21 *Dada uma decomposição de E em subespaços W -invariantes (W é o grupo de Weyl) e irreduzíveis por W , isto é,*

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$$

com E_i , $i = 1, \dots, k$, subespaços W -invariantes, e tais que não existe subespaço próprio $G \subset E$ tal que G é W -invariante.

Seja $\Pi_i = \Pi \cap E_i$, para $i = 1, \dots, k$. Então, Π_i é um sistema de raízes em E_i e o grupo de Weyl de Π_i coincide com a restrição de W a E_i . Além do mais

$$\Pi = \bigcup_{i=1}^k \Pi_i.$$

Mostrando que um sistema de raízes se divide em uma união de outros sistemas cujas componentes pertencem a autoespaços ortogonais entre si e irredutíveis, temos motivação suficiente para a seguinte definição.

Definição 38 *Um sistema de raízes é dito irredutível se ele não é a união de dois subconjuntos disjuntos e ortogonais.*

Em outras palavras, qualquer sistema de raízes é a união de sistemas irredutíveis, e um sistema é irredutível se, e somente se, o grupo de Weyl é irredutível em E .

Um sistema de raízes reduzido é sempre um conjunto de raízes de alguma subálgebra de Cartan de uma álgebra de Lie semi-simples sobre um corpo algebricamente fechado.

Além disso, um sistema de raízes num espaço vetorial racional é também um sistema de raízes num espaço vetorial real e vice-versa. Dessa forma, podemos definir sistemas de raízes independentemente da escolha do corpo de escalares.

A partir de agora podemos fixar uma ordem lexicográfica e restabelecer resultados comuns no contexto de álgebras de Lie semi-simples num corpo algebricamente fechado.

Assim como no caso das álgebras sobre o corpo complexo, diz-se que uma raiz $\alpha \in \Pi$ é simples se esta não for a soma de outras duas raízes positivas. Denotamos o **conjunto das raízes simples** por Σ .

O estudo que é feito sobre raízes simples obtidas pela subálgebra de Cartan se reproduz no contexto dos sistemas simples de raízes das álgebras de Lie reais, pois esses resultados são usualmente obtidos com base na fórmula de Killing, que segundo a Proposição anterior, também é válida neste caso.

Sistemas de raízes não reduzidos aparecem, por exemplo, em álgebras de Lie semi-simples reais.

Câmaras de Weyl

Definição 39 *Seja $\Pi \subset E$ um sistema de raízes. O conjunto*

$$\overline{E} = \{\beta \in E : \langle \alpha, \beta \rangle \neq 0, \forall \alpha \in \Pi\}$$

é chamado conjunto dos elementos regulares em E .

Esse nome é dado, pois, quando Π é obtido por uma subálgebra de Cartan $\overline{E}$ coincide com o conjunto dos seus elementos regulares dentro da subálgebra.

Proposição 22 *As componentes conexas em $\overline{E}$ são cones convexos em E .*

Definição 40 *Uma câmara de Weyl é uma componente conexa dos elementos regulares.*

Tanto um sistema simples pode ser definido a partir de uma ordem lexicográfica em E através do conjunto das raízes positivas em relação a essa ordem, quanto podemos definir uma ordem lexicográfica a partir de um dado sistema simples de raízes.

Em outras palavras, há uma bijeção entre os sistemas simples Σ e o conjunto das raízes positivas Π^+ (em relação a alguma ordem lexicográfica), e essa bijeção se estende às câmaras de Weyl.

Proposição 23 .

1. Seja C uma câmara de Weyl e defina

$$\Pi^+(C) = \{\alpha \in \Pi : \langle \alpha, \beta \rangle > 0, \forall \alpha \in C\}.$$

Então, existe uma ordem lexicográfica tal que $\Pi^+(C)$ é o conjunto das raízes positivas em relação a essa ordem.

2. Seja $\Sigma(C)$ o conjunto das raízes simples em $\Pi^+(C)$. Então,

$$C = \{\beta \in E : \langle \alpha, \beta \rangle > 0, \forall \alpha \in \Sigma(C)\}$$

3. Sejam C_1 e C_2 câmaras de Weyl. Então,

$$\Sigma(C_1) = \Sigma(C_2) \Leftrightarrow C_1 = C_2$$

A Proposição 23 nos diz que dada uma câmara de Weyl define-se de maneira natural um sistema simples de raízes em Π .

Por outro lado, a partir de um sistema simples de raízes $\Sigma \subset \Pi$, podemos estabelecer uma câmara de Weyl relativa a esse sistema.

Seja

$$C_\Sigma = \{\beta \in E : \langle \beta, \alpha \rangle > 0, \forall \alpha \in \Sigma\},$$

então C_Σ é uma câmara de Weyl.

Observe que C_Σ é um cone convexo (da mesma forma como na Proposição 23), contido no conjunto dos elementos regulares, e por isso deve estar contido em alguma câmara de Weyl C' . Além disso, C_Σ não pode estar contido propriamente em C' . De fato, caso isso ocorresse, ao menos um elemento da fronteira de C_Σ deveria estar em C' , porém, $\beta \in \overline{C_\Sigma}$, implica em $\langle \beta, \alpha \rangle = 0$, para $\alpha \in \Sigma$. Logo, β não seria regular e não poderia pertencer a câmara de Weyl alguma, o que é uma contradição. Portanto, $C_\Sigma = C'$.

Da forma, como foram definidos, é claro que

$$C_{\Sigma(C)} = C, \quad \text{e} \quad \Sigma(C_\Sigma) = \Sigma$$

o que estabelece uma bijeção entre os sistemas simples de raízes e as câmaras de Weyl.

Se Σ é um sistema simples de raízes, e Π^+ é o conjunto das raízes positivas correspondente, então $w(\Sigma)$ é uma base de E , $\forall w \in W$, pois os elementos de W deixam o sistema de raízes invariante, e assim, também temos

$$\Pi = \Pi^+ \cup -\Pi^+ = w(\Pi^+) \cup w(-\Pi^+).$$

Além disso, os elementos de $w(\Pi^+)$ se escrevem como combinação dos elementos de $w(\Sigma)$, isto é, $w(\Sigma)$ também é um sistema de raízes, e portanto as transformações lineares do grupo de Weyl W agem no conjunto dos sistemas simples de raízes.

Quanto às câmaras de Weyl, convém primeiro observar que $\overline{E}$ (conjunto dos elementos regulares) é invariante pelos elementos de W , afinal, dado $\alpha \in \Pi$, $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ se, e só se, $\langle w(\alpha), w(\beta) \rangle = 0$, pois o produto interno é invariante pelos elementos de W , o que significa

que os elementos não regulares são invariantes por W , e consequentemente, $\overline{E}$ também o é.

Dada uma câmara de Weyl C , como w é contínua (isomorfismo), então $w(C)$ também é conexo, logo está contido em alguma câmara de Weyl C' . De modo análogo, C' é conexo e assim $w^{-1}(C')$ está contido numa componente conexa de $\overline{E}$. Mas, como $w(C) \subset C'$, e $C \subset w^{-1}(C')$, a componente conexa da qual $w^{-1}(C')$ faz parte só pode ser C , e portanto $w(C) = C'$. Segue que o grupo de Weyl também age no conjunto das câmaras de Weyl.

Proposição 24 *O grupo de Weyl W age transitivamente no conjunto das câmaras de Weyl, e portanto nos sistemas simples de raízes.*

Proposição 25 *Seja C uma câmara de Weyl.*

1. *Se $w \in W$, então $w(C) = C$ se, e somente se, $w = 1$.*
2. *Se β é o elemento do fecho de C e $w \in W$, então $w(\beta)$ pertence ao fecho de C se, e só se, $w(\beta) = \beta$.*

O primeiro item da Proposição 25 garante que se β é um elemento da câmara de Weyl C , então sua órbita

$$W_\beta = \{w\beta : w \in W\}$$

percorre todas as câmaras de Weyl, e se $w(\beta) = \beta$, então $w = 1$.

O subgrupo de isotropia de um elemento regular se reduz, então, a identidade. Para os demais elementos de E esse subgrupo é dado da seguinte forma.

Proposição 26 *Para $\lambda \in E$, seja $W_\lambda = \{w \in W : w\lambda = \lambda\}$ o seu subgrupo de isotropia. Então, W_λ é gerado pelas reflexões r_α com $\alpha \in \Pi$, tais que $\langle \alpha, \lambda \rangle = 0$.*

Se $w \in W$ é uma reflexão em relação ao hiperplano F . Então, $w = r_\alpha$ para alguma raiz $\alpha \in \Pi$.

Definição 41 *Seja Σ um sistema simples de raízes correspondente à câmara de Weyl C . Chamamos a involução principal de Σ o elemento $w \in W$ tal que*

$$w(\Sigma) = -\Sigma.$$

Observe que, se $w(\Sigma) = -\Sigma$, então

$$w^2(\Sigma) = \Sigma$$

e portanto, $w^2 = 1$.

Além disso, dado um outro sistema simples Σ_1 , existe $w_1 \in W$ tal que

$$\Sigma_1 = w_1(\Sigma)$$

e assim,

$$-\Sigma = -w_1(\Sigma) = w_1(-\Sigma) = w_1w(\Sigma) = w_1w(w^{-1}\Sigma_1) = w_1ww^{-1}(\Sigma_1)$$

E portanto, a involução principal de Σ_1 é dada por $w_1ww_1^{-1}$.

Exemplo 5 (Decomposição de $\mathfrak{sl}(n)$ em espaços de pesos e análise do sistema de raízes)

Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Então, dada uma base β , temos $\mathfrak{h}_\beta$, a subálgebra das matrizes diagonais em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, uma subálgebra de Cartan. Além disso, toda subálgebra de Cartan é conjugada pela mudança de bases.

Seja $\mathfrak{h}$ uma subálgebra de matrizes diagonais de traço nulo. Então, $\mathfrak{h}$ é a subálgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}(n)$.

Dado $H \in \mathfrak{h}$, podemos escrever

$$H = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \quad (1.8)$$

Vamos determinar as raízes de $\mathfrak{h}$. Sejam

$$E_{i,j} = (e_{r,s})_{r,s}$$

Com $e_{i,j} = 1$ e $e_{r,s} = 0$ se $r \neq i$ ou $s \neq j$.

Então, o conjunto dos elementos

$$E_{i,j} \text{ para } i \neq j \text{ e } E_{i,i} - E_{i+1,i+1}, \text{ para } i = 1, \dots, n-1$$

é uma base de $\mathfrak{sl}(n)$.

E , portanto,

$$\begin{aligned} \text{ad}(H)(E_{i,j}) &= [H, E_{i,j}] \\ &= HE_{i,j} - E_{i,j}H \\ &= (a_i - a_j)E_{i,j}. \end{aligned}$$

O que mostra que $(a_i - a_j)$ são autovalores para os autovetores $E_{i,j}$, e assim as raízes de $\mathfrak{h}$ são os funcionais

$$\alpha_{i,j}(H) = (\lambda_i - \lambda_j)(H)$$

onde $\lambda_i \in \mathfrak{h}^*$ é dado pela lei $\text{diag}(a_1, \dots, a_n) \mapsto a_i$, e os espaços correspondentes são os autoespaços associados a $(a_i - a_j)$ gerados por $E_{i,j}$, $i \neq j$.

A partir disto, podemos determinar a forma de Cartan-Killing restrita a $\mathfrak{h}$, e assim, determinar uma expressão para a forma C-K nas raízes.

Se $H = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \in \mathfrak{h}$, com $\text{Tr}(H) = 0$, então

$$\begin{aligned} \langle H, H \rangle &= \sum_{i \neq j} (a_i - a_j)^2 \\ &= 2 \sum_{i < j} (a_i - a_j)^2 \\ &= 2 \sum_{i < j} (a_i^2 - 2a_i a_j + a_j^2) \\ &= 2 \sum_{i < j} (a_i^2 + a_j^2) - 4 \sum_{i < j} a_i a_j. \end{aligned}$$

Observe, agora, que a soma dos termos da esquerda do segundo membro da igualdade são

$$(n-1) \sum_{i=1}^n a_i^2$$

E , portanto,

$$\langle H, H \rangle = 2n \sum_{i=1}^n a_i^2$$

Temos assim a forma quadrática associada a forma bilinear simétrica de Cartan-Killing, pela fórmula de polarização, segue que

$$\begin{aligned} \langle H, H' \rangle &= \frac{\langle H + H', H + H' \rangle - \langle H, H \rangle - \langle H', H' \rangle}{2} \\ &= \frac{2n}{2} \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 - \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \\ &= n \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 - a_i^2 - b_i^2 \right) \\ &= n \left(\sum_{i=1}^n 2(a_i b_i) \right) \\ &= 2n \left(\sum_{i=1}^n (a_i b_i) \right) \end{aligned}$$

onde $H' = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$ e $H = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, $\text{Tr}(H) = \text{Tr}(H') = 0$.

Dessa maneira, podemos determinar um $H_{\alpha_{ij}} \in \mathfrak{h}$ que representa o funcional. Trabalhando em espaços vetoriais com produto interno e de dimensão finita, sabemos que existe $H_{\alpha_{ij}} \in \mathfrak{h}$, tal que

$$\langle H_{\alpha_{ij}}, H \rangle = \alpha_{ij}(H), \quad \forall H \in \mathfrak{h}$$

e portanto, sendo $H_{\alpha_{ij}} = \text{diag}(b_1, \dots, b_n)$, devemos ter

$$\begin{aligned} \langle H_{\alpha_{ij}}, H' \rangle &= (\lambda_i - \lambda_j)(H) \\ &= \lambda_i(H) - \lambda_j(H) \\ &= a_i - a_j. \end{aligned}$$

logo

$$2n(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) = a_i - a_j$$

segue que $b_k = 0$ se $k \neq i$ ou $k \neq j$, e

$$a_i b_i + a_j b_j = \frac{a_i - a_j}{2n}$$

ou seja,

$$b_i = \frac{1}{2n} \quad e \quad b_j = -\frac{1}{2n}.$$

Em suma,

$$\begin{aligned} H_{\alpha_{ij}} &= \text{diag} \left(0, \dots, \frac{1}{2n}, \dots, -\frac{1}{2n}, \dots, 0 \right) \\ &= \frac{1}{2n} (E_{ii} - E_{jj}) \end{aligned}$$

A partir de então, estamos aptos a calcular a forma de Cartan-Killing nas raízes α_{ij} , α_{rs} :

$$\begin{aligned}\langle \alpha_{ij}, \alpha_{rs} \rangle &= \langle H_{\alpha_{ij}}, H_{\alpha_{rs}} \rangle \\ &= 2n \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ &= 2n \frac{1}{(2n)^2} (\delta_{ir} - \delta_{is} - \delta_{jr} + \delta_{js}) \\ &= \frac{1}{2n} (\delta_{ir} - \delta_{is} - \delta_{jr} + \delta_{js}).\end{aligned}$$

em particular,

$$\langle \alpha_{ij}, \alpha_{rs} \rangle = \frac{1}{2n} (1 + 1) = \frac{1}{n}$$

Como os valores dos produtos nos elementos dos espaços de raízes são múltiplos de $\langle E_{ij}, E_{rs} \rangle$, e

$$\langle E_{ij}, E_{rs} \rangle = 0 \quad \text{se} \quad (r, s) \neq (j, i),$$

pelo item (a) do Lema 6.8 em [22] segue que

$$\langle E_{ij}, E_{ji} \rangle = 2n$$

finalmente,

$$\langle E_{ij}, E_{rs} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } (i, j) \neq (s, r) \\ 2n & \text{se } (i, j) = (s, r) \end{cases}$$

Conhecendo a forma geral das raízes de $\mathfrak{sl}(\mathbf{n})$, é possível determinar o sistema simples de raízes da subálgebra de Cartan. Seja

$$\Sigma = \{\alpha_{12}, \dots, \alpha_{n-1\ n}\}$$

então, Σ é um sistema simples de raízes para $\mathfrak{sl}(\mathbf{n})$. De fato,

$$\Pi = \{\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j : \lambda_i, \lambda_j \text{ autovalores distintos de } \text{ad}(X), X \in \mathfrak{h} \text{ regular}\},$$

e assim, supondo $i < j$, sem perda de generalidade, segue que

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} &= \lambda_i - \lambda_j \\ &= \lambda_i - \lambda_{i+1} + \lambda_{i+1} - \lambda_{i+2} + \dots + \lambda_{j-2} - \lambda_{j-1} + \lambda_{j-1} - \lambda_j \\ &= \alpha_{i\ i+1} + \alpha_{i+1\ i+2} + \dots + \alpha_{j-1\ j-2} + \alpha_{j-1\ j},\end{aligned}$$

considerando a ordem lexicográfica tem-se

$$\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j > 0$$

e a quantidade de elementos em Σ é exatamente $\dim \mathfrak{h} = n - 1$, mostrando que Σ é um conjunto L.I. que gera Π e portanto gera $\mathfrak{h}$, logo uma base de elementos positivos. Supondo $\lambda_i < \lambda_j$ se $i < j$, numa dada ordem lexicográfica, devemos ter

$$\Pi^+ = \{\alpha_{ij} : i < j\} \quad \text{e} \quad \Pi^- = \{\alpha_{ji} : i < j\}$$

e, portanto, existe uma base que diagonaliza $\mathfrak{h}$ onde $\mathfrak{n}^+$ é formado pelas matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal, e $\mathfrak{n}^-$ é formado pelas matrizes triangulares inferiores com zeros na diagonal.

Exemplo 6 *Decomposição de Iwasawa de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$.*

Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ a álgebra de Lie semi-simples real das matrizes de quadradas de ordem n com entradas reais e traço nulo. Considere a decomposição de Cartan de $\mathfrak{g}$ dada por

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{s}$$

onde $\mathfrak{so}(n)$ é a subálgebra das matrizes antissimétricas de traço zero (a álgebra compacta), e $\mathfrak{s}$ o subespaço das matrizes simétricas.

Denote o conjunto das matrizes diagonais de traço zero por

$$\mathfrak{a} = \{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0\}.$$

Uma vez que as matrizes diagonais comutam entre si, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ é uma subálgebra abeliana.

Supondo $A \in \mathfrak{a}$ dada por $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, e $B \in \mathfrak{s}$, então A e B comutam unicamente quando $B = (b_{ij})$ também é diagonal, afinal, tomando $b_{rs} \neq 0$, $AB = C = (c_{ij})$, e $BA = D = (d_{ij})$, tem-se $c_{rs} = b_{rs}\lambda_s$ e $d_{rs} = \lambda_r b_{rs}$, o que faz com que $c_{rs} = b_{rs}$ se, e somente se, $\lambda_s = \lambda_r$, algo que não necessariamente acontece. A conclusão é que as matrizes diagonais comutam entre si, mas não existe outra subálgebra contendo o conjunto das matrizes diagonais onde todos os seus elementos comutam. Portanto, $\mathfrak{a}$ é uma álgebra abeliana maximal em $\mathfrak{s}$.

As raízes restritas de $\mathfrak{g}$ em relação a $\mathfrak{a}$ são os funcionais α_{ij} , $i \neq j$, tais que

$$\alpha_{ij}(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \lambda_i - \lambda_j.$$

De fato, sejam $H = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e $X = (x_{ij}) \in \mathfrak{s}$, então

$$\begin{aligned} \text{ad}(H)X &= [H, X] \\ &= HX - XH \\ &= (\lambda_i x_{ij})_{ij} - (x_{ij} \lambda_j)_{ij} \\ &= ((\lambda_i - \lambda_j) x_{ij})_{ij}, \end{aligned}$$

e supondo $\text{ad}(H)X = \alpha(H)X$ para algum funcional α , necessariamente $\alpha(H) = \lambda_i - \lambda_j = \alpha_{ij}(H)$ para algum par (i, j) .

Conhecendo as raízes restritas é possível caracterizar os elementos regulares de $\mathfrak{a}$. Seja $H \in \mathfrak{a}$ tal que $H = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e $\lambda_i = \lambda_j$ para algum par (i, j) , então

$$\alpha_{ij}(H) = 0$$

e assim, os elementos regulares de $\mathfrak{a}$ devem ser todos aqueles que possuem entradas todas distintas.

A partir disso, o objetivo é determinar as câmaras de Weyl (componentes conexas dos elementos regulares). Fixamos uma base ordenada de $\mathfrak{a}$

$$\{\alpha_{12}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{n-1n}\}.$$

Associada a esta base, o sistema positivo de raízes é dado por

$$\Pi^+ = \{\alpha_{ij} : i > j\}$$

que é obtido por somas sucessivas dos elementos da base tomada. A ideia principal é que, dada uma base ordenada é possível definir uma noção de positividade no espaço por

meio da ordem lexicográfica, e assim separar o conjunto das raízes em um sistema positivo (obtido por elementos positivos segundo a ordem lexicográfica), e elementos negativos (obtidos pelas raízes restritas negativas).

Segue que,

$$\mathfrak{a}^+ = \{H \in \mathfrak{a} : \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n\}$$

define uma câmara de Weyl com elementos estritamente positivos, pois é claro que cada elemento de $\mathfrak{a}$ é obtido por combinações lineares com coeficientes positivos de elementos da base fixada, logo, todo $H \in \mathfrak{a}^+$ é estritamente positivo.

Já definidas $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n)$, e $\mathfrak{a} = \{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \sum \lambda_i = 0\}$, é o momento de caracterizar a parte nilpotente, $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^+$. Note que os espaços $\mathfrak{g}_{\alpha(H)}$, onde H é um elemento regular de $\mathfrak{a}$ são somas de espaços de pesos $\mathfrak{g}_{\alpha}$, então é possível tomar

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha > 0} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Se $\alpha_{ij} \in \Pi^+$, então

$$\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}} = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) : \text{ad}(H)X = \alpha_{ij}X, \forall H \in \mathfrak{a}\}.$$

Mas esse conjunto é dado pelas matrizes com entrada (i, j) qualquer e as demais entradas nulas, pois

$$(\text{ad}(H)X)_{ij} = ((\lambda_i - \lambda_j)x_{ij})_{ij}$$

com $H = \text{diag}(\dots, \lambda_k, \dots, \lambda_l, \dots)$, e portanto $\lambda_k - \lambda_l > 0$.

Dessa forma, considerando a variação de α_{ij} em Π^+ , podemos descrever $\mathfrak{n}$ como sendo

$$\mathfrak{n} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

o conjunto das matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal. E portanto, tem-se uma caracterização completa dos termos da decomposição de Iwasawa da álgebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$.

Decomposições em Grupos de Lie Semi-simples

Neste capítulo, estudaremos algumas decomposições globais dos grupos de Lie obtidos a partir das decomposições das álgebras de Lie, mais precisamente, a decomposição de Cartan e a decomposição de Iwasawa. Serão estudados também os subgrupos parabólicos, as variedades *flag* sobre os quais são discutidos alguns resultados, tais como, as variedades *flag* como um espaço homogêneo. Os fatos apresentados seguem a linha da referência [23].

2.1 Decomposição global de Cartan

A princípio, é conveniente recordar certas propriedades da decomposição de Cartan. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ uma decomposição de Cartan da álgebra de Lie semi-simples real $\mathfrak{g}$. Os colchetes entre os espaços da decomposição são tais que

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k} \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}, \quad \text{e} \quad [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}.$$

Os espaços $\mathfrak{k}$ e $\mathfrak{s}$ são ortogonais pela forma C-K de $\mathfrak{g}$, afinal, dados $X \in \mathfrak{k}$ e $Y \in \mathfrak{s}$,

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= \langle \theta X, Y \rangle \\ &= \langle X, \theta Y \rangle \\ &= \langle X, -Y \rangle \\ &= -\langle X, Y \rangle \end{aligned}$$

ou seja, $\langle X, Y \rangle = 0$.

A forma bilinear B_θ , dada por $B_\theta(X, Y) = -\langle X, \theta Y \rangle$, define um produto interno em $\mathfrak{g}$, pois a forma C-K é negativa definida em $\mathfrak{k}$, e positiva definida em $\mathfrak{s}$, e esses dois espaços são ortogonais por C-K.

O conjunto $\mathfrak{k}$ é uma álgebra de Lie compacta maximal em $\mathfrak{g}$. De fato, suponha por absurdo que exista uma subálgebra compacta $\mathfrak{l}$ tal que $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{l}$, $\mathfrak{k} \neq \mathfrak{l}$. Tome $z \in \mathfrak{l} \setminus \mathfrak{k}$, então, existem $X \in \mathfrak{k}$, e $Y \in \mathfrak{s}$, $Y \neq 0$, tais que $Z = X + Y$. Segue que, $Y = Z - X \in \mathfrak{l}$, e assim, $\langle Y, Y \rangle > 0$, pois $Y \in \mathfrak{s}$, o que contraria o fato da forma C-K ser negativa definida em cada subálgebra compacta.

A álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é isomorfa à álgebra $\text{Der}(\mathfrak{g})$ das derivações de $\mathfrak{g}$. De fato, o isomorfismo $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{g})$, juntamente com a involução de Cartan θ , definem um

automorfismo $\bar{\theta}$ de $\text{Der}(\mathfrak{g})$ segundo o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{\theta} & \mathfrak{g} \\ \downarrow \text{ad} & & \downarrow \text{ad} \\ \text{Der}(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\bar{\theta}} & \text{Der}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

Para cada $\text{ad}(X) \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ define-se

$$\bar{\theta}(\text{ad}(X)) = \text{ad}(\theta X).$$

Observe, também, que

$$[\theta X, Y] = [\theta X, \theta \theta^{-1} Y] = \theta[X, \theta^{-1} Y]$$

para cada $Y \in \mathfrak{g}$, e assim

$$\text{ad}(\theta X) = \theta \circ \text{ad}(X) \circ \theta^{-1}$$

ou seja, $\bar{\theta}$ é a conjugação por θ em $\text{Der}(\mathfrak{g})$.

A partir destas propriedades é possível iniciar um estudo sobre o grupo adjunto $\text{Aut}_0 \mathfrak{g}$, dos automorfismos internos de $\mathfrak{g}$, que dá as diretrizes para a decomposição global de Cartan.

Seja G um grupo de Lie conexo e $\text{Aut} \mathfrak{g}$ o grupo dos automorfismos em G . Então, cada $\varphi \in \text{Aut} \mathfrak{g}$ age em $\mathfrak{g}$ via um isomorfismo $\text{Aut}(G) \rightarrow \text{Aut} \mathfrak{g}$. A álgebra de Lie $\text{Aut}_0 \mathfrak{g}$ é a álgebra das derivações $\text{Der} \mathfrak{g}$.

Fixe uma decomposição de Cartan, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, com involução de Cartan θ , e produto interno $B_\theta(X, Y) = -\langle X, \theta Y \rangle$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a forma C-K em $\mathfrak{g}$.

Defina θ_0 como sendo a conjugação por θ em $\text{Aut}_0 \mathfrak{g}$, isto é,

$$\begin{array}{ccc} \theta_0 : \text{Aut}_0 \mathfrak{g} & \longrightarrow & \text{Aut}_0 \mathfrak{g} \\ g & \longmapsto & \theta_0(g) = \theta g \theta^{-1}. \end{array}$$

Desta forma, θ_0 é um automorfismo do grupo adjunto $\text{Aut}_0 \mathfrak{g}$.

Lembrando que

$$\bar{\theta}(\text{ad}(X)) = \text{ad}(\theta X) = \theta \text{ad}(X) \theta^{-1}$$

é a conjugação de $\text{ad}(X) \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ por θ , então, θ_0 pode ser visto como uma extensão de $\bar{\theta}$ a $\text{Aut}_0 \mathfrak{g}$. E, de modo análogo, tem-se a caracterização em termos da transposta em relação a B_θ , dada por

$$\theta_0(g) = (g^{-1})^T.$$

De fato, se $g \in \text{Aut}_0 \mathfrak{g}$ e $X, Y \in \mathfrak{g}$, então

$$\begin{aligned} B_\theta(gX, Y) &= -\langle X, (\theta \theta^{-1}) g^{-1} \theta Y \rangle \\ &= -\langle X, \theta (\theta^{-1} g^{-1} \theta) Y \rangle \\ &= B_\theta(X, (\theta^{-1} g^{-1} \theta) Y) \\ &= B_\theta(X, (\theta g \theta^{-1})^{-1} Y) \end{aligned}$$

ou seja, $g^T = (\theta g \theta^{-1})^{-1}$, e por isso

$$\theta_0(g) = \theta g \theta^{-1} = (g^{-1})^T.$$

Além disso,

$$\theta_0^2(g) = \theta_0(g^{-1})^T = \left(((g^{-1})^T)^{-1} \right)^T = g$$

para todo $g \in \text{Aut}_0 \mathfrak{g}$, isto significa que θ_0 é uma involução, e g^T é um automorfismo de $\mathfrak{g}$.
Seja

$$K_{ad} = \{g \in \text{Aut}_0 \mathfrak{g} : \theta_0(g) = g\}.$$

Então, K_{ad} é um subgrupo fechado cuja álgebra de Lie é $\text{ad}(\mathfrak{k})$, afinal $\text{ad}(\mathfrak{k})$ é a álgebra dos pontos fixos de θ .

Além de fechado, K_{ad} é compacto, pois os elementos em K_{ad} são tais que

$$g = (g^{-1})^T,$$

ou seja,

$$K_{ad} = SO(\mathfrak{g}, B_\theta) \cap \text{Aut}_0 \mathfrak{g}$$

onde $SO(\mathfrak{g}, B_\theta)$ é o grupo das isometrias de $\mathfrak{g}$ com relação a B_θ , que é subgrupo compacto.

E, portanto, o grupo K_{ad} globaliza a parte compacta da decomposição de Cartan.

Quanto à parte simétrica, se $g \in \text{Aut}_0 \mathfrak{g}$ é simétrica positiva definida em relação a B_θ , então, g é diagonalizável com autovalores reais positivos, e que existe uma transformação linear $A \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ simétrica em relação a B_θ tal que $g = \exp(A)$. Dessa forma, definimos uma derivação interna $A = \text{ad}(X)$ com $X \in \mathfrak{s}$, de modo que, $\exp(tA) \in \text{Aut}_0 \mathfrak{g}$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Isso mostra que $S = \exp(\mathfrak{s})$ é uma subvariedade imersa de $\text{Aut}_0 \mathfrak{g}$ que é difeomorfa a $\mathfrak{s}$. Denotando o espaço tangente a S passando por $\exp(X)$ por $T_{\exp(X)}S$, $X \in \mathfrak{s}$, temos $T_{\exp(X)}S = d(\exp(X)) \circ T_X(\mathfrak{s})$. Além disso, $T_X(\mathfrak{s})$ é transversal a $\mathfrak{k}$, ou seja, se $X \in \mathfrak{s}$, então $\mathfrak{k} \cap T_X(\mathfrak{s}) = \emptyset$.

Com base nas observações feitas acima, já é possível descrever a decomposição global de Cartan para o grupo adjunto $\text{Aut}_0 \mathfrak{g}$. Ela é dada através do seguinte difeomorfismo, $\phi : \mathfrak{s} \times K_{ad} \longrightarrow \text{Aut}_0 \mathfrak{g}$ uma aplicação definida por

$$\phi(X, k) = \exp(\text{ad}(X))k.$$

Além disso, $\text{Aut}_0 \mathfrak{g} = SK_{ad}$, onde $S = \exp \mathfrak{s}$, e K_{ad} é conexo.

A partir da decomposição global do grupo adjunto $\text{Aut}_0 \mathfrak{g}$, obtém-se as decomposições globais para grupos arbitrários por meio da representação adjunta.

Teorema 7 *Sejam G um grupo de Lie semi-simples conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Tome uma decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$. Denotando $K = \langle \exp(\mathfrak{k}) \rangle$ (grupo gerado pela imagem dos elementos de $\mathfrak{k}$ através da exponencial), e $S = \exp(\mathfrak{s})$, então*

1. $G = SK = KS$, e todo $g \in G$ é escrito de maneira única como $g = sk$, ou $g = ks$, com $k \in K$ e $s \in S$.
2. S é difeomorfa a $\mathfrak{s}$ pela aplicação $\exp : \mathfrak{s} \longrightarrow S$.
3. As aplicações $K \times S \longrightarrow G$, dadas pelas relações $(k, s) \mapsto ks$, e $(k, s) \mapsto sk$ são difeomorfismos.
4. O centro de G está contido em K , isto é, $Z(G) \subset K$.
5. $K = \exp(\mathfrak{k})$, e K é compacto se, e só se, $Z(G)$ é finito.

Demonstração: Considere a representação adjunta $\text{Ad} : G \longrightarrow \text{Aut}_0 \mathfrak{g}$. Esta aplicação é o recobrimento canônico com núcleo $Z(G)$.

Seja $\hat{K} = \text{Ad}^{-1}(K_{ad})$ a imagem inversa de K_{ad} por Ad , então $\hat{K}$ é subgrupo fechado de G com álgebra de Lie $\mathfrak{k}$, e tal que $Z(G) \subset \hat{K}$. Além disso, a decomposição de Cartan vale para $\hat{K}$.

De fato, seja $\phi : \mathfrak{s} \times \hat{K} \longrightarrow G$, tal que $\phi(X, k) = (\exp(\text{Ad}X))k$, $\exp$ e $\exp_{ad}$, respectivamente, as aplicações exponenciais de G e $\text{Aut}_0 \mathfrak{g}$.

Dado $g \in G$, a decomposição de Cartan em $\text{Aut}_0 \mathfrak{g}$ garante que

$$\text{Ad}(g) = sk$$

com $s = \exp_{ad}(Y) \in \exp_{ad}(\mathfrak{s})$, e $k \in K_{ad}$. Visto que $\text{Ad} \circ \exp = \exp_{ad}$,

$$\text{Ad}(g) = \text{Ad}(\exp Y)k$$

e portanto,

$$\text{Ad}((\exp Y)^{-1}g) = (\text{Ad} \exp Y)^{-1}g = k \in K_{ad}.$$

Mas, isto implica em $(\exp Y^{-1})g \in K$, ou seja, existe $k_1 \in K$, tal que $g = (\exp Y)k_1$, mostrando a sobrejetividade da aplicação ϕ .

Quanto à injetividade de ϕ , essa se verifica da seguinte forma. Seja

$$g = (\exp X_1)k_1 = (\exp X_2)k_2$$

com $\exp X_1, \exp X_2 \in S$ e $k_1, k_2 \in K$. Aplicando Ad em g ,

$$\exp_{ad}(X_1)\text{Ad}(k_1) = \exp_{ad}(X_2)\text{Ad}(k_2),$$

e portanto, $\exp_{ad}(X_1) = \exp_{ad}(X_2)$ e $\text{Ad}(k_1) = \text{Ad}(k_2)$ pela decomposição de Cartan no grupo adjunto. Segue que $X_1 = X_2$ pela unicidade da decomposição, e assim, $\exp X_1 = \exp X_2$. E novamente, pela unicidade da decomposição no grupo adjunto, $k_1 = k_2$. Logo, ϕ é injetiva.

Além disso, a diferencial de ϕ é um isomorfismo em todo ponto. Seja $(X, k) \in \mathfrak{s} \times \hat{K}$, $Y \in \mathfrak{s}$ e $A \in \mathfrak{k}$ um campo invariante à direita em K , então

$$\begin{aligned} d\phi_{(Y, A(k))} &= \exp(X) \cdot (T_X(Y) + A)(k) \\ &= \exp(X) \cdot (T_X(Y) + A) \cdot k \\ &= (dE_{\exp(X)})_1 \circ (dD_k)_1(T_X(Y) + A). \end{aligned}$$

Como as translações são difeomorfismos, essa diferencial se anula somente se $T_X(Y) + A = 0$, isto é, $T_X(Y) = -A$. Porém, $T_X(\mathfrak{s})$ é transversal à $\mathfrak{k}$, e portanto, $T_X(Y) = 0$. Uma vez que $X \in \mathfrak{s}$, $T_X(Y)$ é um isomorfismo, e deve ocorrer que $Y = 0$. Conclui-se que $d\phi_{(X, k)}$ é um isomorfismo pois o núcleo da aplicação é trivial.

Por fim, sendo ϕ uma bijeção e um difeomorfismo local, então ϕ é de fato um difeomorfismo.

Agora, aplicando a inversa de ϕ em G obtém-se a decomposição $G = KS$ e o difeomorfismo $(X, k) \longmapsto k \exp(\text{Ad}X)$. Segue que $G/\hat{K}$ é difeomorfo a S que é simplesmente conexo, portanto $\hat{K}$ é conexo, e $\hat{K} = K = \langle \exp \mathfrak{k} \rangle = \exp \mathfrak{k}$.

Por construção,

$$K_{ad} = \hat{K}/Z(G) = K/Z(G).$$

Visto que K_{ad} é compacto, então K é compacto se, e somente se $Z(G)$ for finito, completando a demonstração do teorema.

■

2.2 Decomposição global de Iwasawa

A decomposição de Iwasawa de um grupo de Lie semi-simples conexo e não compacto G permite escrever G como produto de três subgrupos, $G = KAN$, onde $K = \exp(\mathfrak{k})$, $A = \exp(\mathfrak{a})$ e $N = \exp(\mathfrak{n})$, e $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é a decomposição de Iwasawa da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G . Baseada numa decomposição de Cartan, elas compartilham a mesma subálgebra compacta $\mathfrak{k}$.

Dessa forma, o subgrupo K é compacto, e fechado quando o centro $Z(G)$ é finito. O subgrupo abeliano $A = \exp(\mathfrak{a})$ é fechado, pois, na decomposição de Cartan, $S = \exp(\mathfrak{s})$ é fechado, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$ é também fechado, e a aplicação exponencial $\exp : \mathfrak{a} \rightarrow A$ é um difeomorfismo. Quanto aos grupo N e AN , estes são fechados e simplesmente conexos.

Em particular, quando consideramos o grupo adjunto, $\text{Aut}_0 \mathfrak{g}$, assim como na decomposição de Cartan, chamando $N_{\text{ad}} = \langle \exp(\text{ad } \mathfrak{n}) \rangle$ (grupo gerado pelos elementos em $\exp(\text{ad } \mathfrak{n})$) e $A_{\text{ad}} = \exp(\text{ad } \mathfrak{a})$, tem-se N_{ad} e $A_{\text{ad}}N_{\text{ad}}$ fechados e simplesmente conexos, e a álgebra de Lie de $A_{\text{ad}}N_{\text{ad}}$ é $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. A interseção entre esses grupos é

$$K_{\text{ad}} \cap A_{\text{ad}}N_{\text{ad}} = \{1\}, \quad \text{e} \quad K_{\text{ad}} \cap N_{\text{ad}} = \{1\}.$$

Sendo $A_{\text{ad}}N_{\text{ad}}$ um subgrupo de Lie fechado, o quociente $\text{Aut}_0 \mathfrak{g}$ assume uma estrutura de variedade diferenciável. Esse fato, juntamente com a informação que $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ é o complemento ortogonal de $\mathfrak{k}$, e da compacidade de K_{ad} , permite mostrar que a ação do grupo K_{ad} em $\text{Aut}_0 \mathfrak{g}$ é transitiva. Isso é feito mostrando que a órbita de K_{ad} pelo elemento neutro do quociente $\text{Aut}_0 \mathfrak{g}/(A_{\text{ad}}N_{\text{ad}})$ é exatamente $\text{Aut}_0 \mathfrak{g}/(A_{\text{ad}}N_{\text{ad}})$.

Se a ação de K_{ad} é transitiva, então, para todo $g \in \text{Aut}_0 \mathfrak{g}$, existe $k \in K_{\text{ad}}$ tal que $gA_{\text{ad}}N_{\text{ad}} = kA_{\text{ad}}N_{\text{ad}}$. O que significa que $\text{Aut}_0 \mathfrak{g} = K_{\text{ad}}A_{\text{ad}}N_{\text{ad}}$.

No caso geral, para um grupo de Lie semi-simples conexo de dimensão finita qualquer, é considerada a representação adjunta, que leva as componentes de G em $\text{Aut}_0 \mathfrak{g}$.

Teorema 8 (Decomposição global de Iwasawa)

Seja G um grupo de Lie semi-simples conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, e uma decomposição de Iwasawa $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Então, G pode ser decomposto em produto como $G = KAN$, onde $K = \exp \mathfrak{k}$, $A = \exp \mathfrak{a}$, e $N = \exp \mathfrak{n}$. A aplicação $\phi : K \times A \times N \rightarrow KAN = G$ é um difeomorfismo, e os grupos A , N , e AN são simplesmente conexos e difeomorfos a espaços euclidianos.

Demonstração: Seja a representação adjunta $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}_0 \mathfrak{g}$. Assim como na decomposição de Cartan, a aplicação Ad leva as componentes de G nas componentes de $\text{Aut}_0 \mathfrak{g}$, isto é, $\text{Ad}(K) = K_{\text{ad}}$, $\text{Ad}(A) = A_{\text{ad}}$, e $\text{Ad}(N) = N_{\text{ad}}$. E a restrição de Ad em cada um desses subgrupos é um recobrimento módulo $Z(G)$.

Uma vez que as restrições da representação adjunta $\text{Ad}|_{A_{\text{ad}}}$ e $\text{Ad}|_{N_{\text{ad}}}$ são isomorfismos, A e N são simplesmente conexos por serem imagem de conexos.

Quanto à aplicação ϕ , dado $g \in G$, então, pela sobrejetividade da decomposição de Iwasawa no grupo adjunto,

$$\text{Ad}(g) = \text{Ad}(k)\text{Ad}(a)\text{Ad}(n)$$

com $k \in K$, $a \in A$, e $n \in N$. Como a adjunta é um recobrimento módulo $Z(G)$, existe $z \in Z(G)$ tal que $g = kanz$, e observando que $Z(G) \subset K$, podemos escrever $g = (kz)an$, mostrando a sobrejetividade de ϕ .

A injetividade de ϕ se verifica pela injetividade da adjunta. Suponha $g = kan = k_1a_1n_1$, com $k, k_1 \in K$, $a, a_1 \in A$, e $n, n_1 \in N$, então

$$\text{Ad}(k_1^{-1}k) = \text{Ad}(a_1n_1(an)^{-1}) \in K_{\text{ad}} \cap A_{\text{ad}}N_{\text{ad}} = \{1\}$$

afinal $k_1^{-1}k \in K$ e $a_1n_1(an)^{-1} \in AN$. E assim, $\text{Ad}(a_1n_1(an)^{-1}) = 1$, donde $\text{Ad}(a_1n_1)\text{Ad}((an)^{-1}) = 1$, e portanto, $\text{Ad}(a_1n_1) = \text{Ad}(an)$. E do mesmo modo como feito anteriormente,

$$\text{Ad}(a_1^{-1}a) = \text{Ad}(n_1^{-1}n) \in A_{\text{ad}}N_{\text{ad}} = \{1\}.$$

Logo, $\text{Ad}(a_1) = \text{Ad}(a)$ e $\text{Ad}(n_1) = \text{Ad}(n)$. Pela injetividade de Ad , segue que $a_1 = a$, e $n_1 = n$, e conclui-se que $k_1 = k$.

Quanto à diferenciabilidade de ϕ , tome $X \in \mathfrak{k}$ um campo invariante à esquerda, $Y \in \mathfrak{a}$ um campo bi-invariante, e $Z \in \mathfrak{n}$ um campo invariante à direita. Então,

$$d\phi_{(k,a,n)} = k(X + Y + \text{Ad}(a)Z)an = (dE_k)_1 \circ (dD_{an})_1(X + Y + \text{Ad}(a)Z),$$

e dessa forma a diferencial se anula unicamente quando $X + Y + \text{Ad}(a)Z = 0$. Como $\text{Ad}(a)Z \in \mathfrak{n}$, a decomposição de Iwasawa da álgebra garante que $X = Y = Z = 0$, logo a diferencial em qualquer ponto é injetora. E por fim, visto que $\dim(K \times A \times N) = \dim(G)$, ϕ é difeomorfismo local, o que completa a demonstração.

■

Consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo 7 Considere a decomposição de Iwasawa da álgebra $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, dada por

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$$

onde $\mathfrak{a}$ é a subálgebra abeliana das matrizes diagonais de traço zero, $\mathfrak{n}^+$ é a subálgebra das matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal.

Exponenciando essas álgebras de Lie obtém-se os seguintes subgrupos

$$\begin{aligned} K &= SO(n, \mathbb{R}) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) : \det(M) = 1 \text{ e } \text{Tr}(M) = 0\} \\ A &= \{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_i > 0, 1 \leq i \leq n, \lambda_1 \cdots \lambda_n = 1\} \\ A^+ &= \{\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in A : \lambda_1 > \dots > \lambda_n\} \\ N^+ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Esses subgrupos caracterizam a decomposição de Iwasawa do grupo de Lie conexo $SL(n, \mathbb{R})$ da seguinte forma:

$$SL(n, \mathbb{R}) = KAN^+.$$

2.3 Decomposição de Bruhat

A teoria de Tits é a teoria abstrata que descreve o comportamento e as propriedades dos subgrupos parabólicos de um grupo G qualquer. Em particular, quando consideramos G um grupo de Lie semi-simples, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, com decomposição de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$, e $K = \exp \mathfrak{k}$, temos que a terna (G, MAN^+, M^*) constitui um sistema de Tits para qualquer decomposição de Langlands concordando com uma decomposição de Iwasawa fixada.

Uma vez mostrada essa relação dos grupos de Lie semi-simples com a teoria de Tits, a ligação entre os subgrupos parabólicos e os subgrupos do grupo de Weyl associado a tripla (G, MAN^+, M^*) seguem naturalmente. Essa ligação será de vital importância para a identificação entre os conjuntos controláveis efetivos e elementos do grupo de Weyl, tanto na *flag* maximal, quanto nas fibrações envolvendo as outras *flags*.

A seguir, uma breve exposição da teoria será apresentada. Para maiores explicações, ver [35] seção 1.2 .

Seja G um grupo e P, M subgrupos de G , a tripla (G, P, M) é denominada um sistema de Tits se as seguintes condições são satisfeitas:

1. G é gerado por P e M , $N = P \cap M$ é subgrupo normal de M , e $W = M/N$ admite um sistema finito de geradores constituídos de elementos involutivos $w_i \neq 1$, tais que, $w_i \neq w_j$ se $i \neq j$;
2. Para todos os elementos geradores w_i , $w_i P w_i^{-1} \neq P$;
3. Para todo w_i e para todo $w \in W$,

$$w_i P w \subset (P w P) \cup (P w_i w P).$$

O grupo W é chamado grupo de Weyl do sistema de Tits (G, P, M) .

A partir deste ponto, fixamos um sistema de Tits (G, P, M) com grupo de Weyl W .

Definição 42 *Os grupos conjugados a P em G por algum elemento $w \in W = M/N$ são chamados subgrupos parabólicos minimais.*

Um subgrupo parabólico de G é qualquer subgrupo de G contendo um subgrupo parabólico minimal.

Adiante, serão considerados as classes laterais duplas da forma

$$P x P, \quad \text{com } x \in G.$$

Com $M \subset P$, por abuso de notação, é possível escrever $P w P$ como sendo a classe lateral dupla

$$P w P = P m_w P, \quad \text{com } m_w \in M^*$$

onde m_w é um representante de $w \in W \approx M^*/M$.

Se G é gerado por P e M , e W é o quociente M/N , onde N é a parte de M que intersecta P , então a propriedade 3 do sistema de Tits garante que $G = P W P$. Isso significa que cada classe lateral dupla $P x P$ com $x \in G$ pode ser escrita, como um abuso de notação, da seguinte forma $P w P$ com $w \in W$.

Mais que isso, elementos distintos de W estão associados necessariamente a classes laterais duplas $P w P$ distintas.

Teorema 9 *(Lema de Bruhat)*

Seja (G, P, M) um sistema de Tits com grupo de Weyl W . Então, a aplicação de W no conjunto das classes laterais duplas dos elementos $P x P$, $x \in G$, dada por

$$w \longmapsto P w P, \quad w \in W$$

é injetiva. Além disso, G é escrito como a união disjunta

$$G = \bigcup_{w \in W} P w P.$$

O objetivo deste estudo é expor uma descrição dos subgrupos parabólicos de G segundo a teoria de Tits, o que pode ser interpretado como um estudo de caráter algébrico sobre objetos geométricos envolvendo os subgrupos parabólicos de um grupo de Lie semi-simples real. Esse estudo é baseado na análise de certas propriedades dos geradores de W .

Suponha que os geradores w_i de W são indexados por $\Psi = (1, \dots, l)$. Para qualquer subconjunto $\Theta \subset \Psi$, defina W_Θ como sendo o subgrupo de W gerado por w_i tal que $i \in \Theta$, isto é,

$$W_\Theta = \text{ger} \{w_i : i \in \Theta\}.$$

Seguindo essa notação, $W_\Psi = W$.

Além disso, defina $P_\Theta = PW_\Theta P = \{p_1 w p_2 : p_1, p_2 \in P \text{ e } w \in W\}$. Então, P_Θ é um subgrupo parabólico de G , pois, segue da condição 3 que

$$(PW_\Theta P)(PW_\Theta P) = (P(W_\Theta PW_\Theta)P) \subset (PW_\Theta P).$$

mostrando que os inversos dos elementos em $PW_\Theta P$ também estão em $PW_\Theta P$, isto é, $PW_\Theta P$ é um subgrupo de G contendo P .

A partir disso, é possível dizer que o subgrupo P_Θ é gerado por P e pelos representantes dos geradores w_i , $i \in \Theta$. Observe que, $P_\emptyset = P$ e que se $\Theta = \Theta_1 \cup \Theta_2$, então P_Θ é gerado por P_{Θ_1} e P_{Θ_2} .

Corolário 5 *Com a mesma notação acima,*

$$W_{\Theta_1} \cap W_{\Theta_2} = W_{\Theta_1 \cap \Theta_2}.$$

Sejam P_{Θ_1} e P_{Θ_2} subgrupos parabólicos de G contendo o subgrupo parabólico minimal P . Então, existe uma quantidade finita de classes laterais duplas em G módulo $P_{\Theta_1} \times P_{\Theta_2}$.

Lema 4 *Sejam P_1 e P_2 subgrupos parabólicos de G . Se P_1 e P_2 são conjugados e $P_1 \cap P_2$ é subgrupo parabólico, então $P_1 = P_2$.*

Teorema 10 *Os subgrupos P_Θ são os únicos subgrupos de G contendo P . Cada P_Θ é distinto do outro, e nenhum deles é conjugado a outro.*

2.3.1 Subgrupo parabólico minimal do grupo de Lie semi-simples

Seja G um grupo de Lie semi-simples conexo com centro finito. Nesta seção, pretendemos estudar um certo tipo de subgrupo fechado de G , o subgrupo parabólico minimal.

Fixe uma decomposição de Iwasawa $G = KAN^+$ para G . Uma vez que as definições 27 e 23 concordam, podemos tomar M o centralizador de A em K , isto é,

$$\begin{aligned} M &= \{u \in G : uhu^{-1} = h, \forall h \in A\} \\ &= \{u \in G : \text{Ad}(u)(H) = 0, \forall H \in \mathfrak{a}\} \end{aligned}$$

e o normalizador de A em K dado por

$$\begin{aligned} M^* &= \{u \in G : uAu^{-1} = A\} \\ &= \{u \in G : \text{Ad}(u)(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\}. \end{aligned}$$

Então, veremos que um subgrupo parabólico P minimal pode ser tomado como

$$P = MAN^+.$$

Essa decomposição é uma decomposição de Langlands de P , dependendo de uma decomposição de Iwasawa de G .

Essa decomposição do subgrupo parabólico minimal P guarda certas propriedades que relacionam suas componentes. Duas das principais são apresentadas abaixo.

Proposição 27 *Seja G grupo de Lie semi-simples conexo com decomposição de Iwasawa $G = KAN^+$. Seja M o centralizador de A em K , então*

$$Z_G(A) = Z_G(\mathfrak{a}) = MA.$$

Demonstração: Como M é centralizador de A em K , e $A = \exp \mathfrak{a}$ com $\mathfrak{a}$ abeliano maximal em $\mathfrak{s}$, então A está contido no centralizador de A em G , e portanto, $MA \subset Z_G(\mathfrak{a})$.

Por outro lado, se $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, como $\text{Ad}(g)$ comuta com $\text{ad}(H)$ para qualquer $H \in \mathfrak{a}$, então

$$\begin{aligned} \text{ad}(H)(\text{Ad}(g)X_\alpha) &= \text{Ad}(g)(\text{ad}(H)X_\alpha) \\ &= \text{Ad}(g)(\alpha(H)X_\alpha) \\ &= \alpha(H)\text{Ad}(g)(X_\alpha) \end{aligned}$$

e portanto, $\text{Ad}(g)X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, mostrando que

$$\text{Ad}(g)\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha$$

para toda raiz α , o que implica em

$$\text{Ad}(g)\mathfrak{n}^+ = \mathfrak{n}^+.$$

Além disso, observe que para todo $X \in \mathfrak{g}$ o centralizador de $\text{Ad}(g)\mathfrak{m}$ é $\text{Ad}(\mathfrak{z}(X))$ onde $\mathfrak{z}(X)$ é o centralizador de X em $\mathfrak{g}$, afinal, supondo

$$[\text{Ad}(X), Y] = 0$$

segue que

$$\text{Ad}(g)[X, \text{Ad}(g)^{-1}Y] = 0$$

o que implica em $\text{Ad}(g)^{-1}Y \in \mathfrak{z}(X)$, que leva à $Y \in \text{Ad}(g)\mathfrak{z}(X)$.

Uma vez que $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$ está contido no centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{g}$, então, em particular, $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$ centraliza qualquer elemento regular $H \in \mathfrak{a}$, e assim

$$\text{Ad}(g)(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}) = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$$

e segue que $\text{Ad}(g)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$.

Portanto, o elemento $g \in Z_G(\mathfrak{a})$ normaliza $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$, mostrando que $g \in P = MAN^+$.

Uma vez que, $g \in P = MAN^+$ é possível tomar

$$g = mhn, \quad m \in M \quad h \in A \quad n \in N^+.$$

Como visto anteriormente, $MA \subset Z_G(\mathfrak{a})$, e assim,

$$n = (mh)^{-1}g \in Z_G(\mathfrak{a}).$$

Observando que $h = \exp X$, com $X \in \mathfrak{n}^+$, $\mathfrak{m} + \mathfrak{a}$ centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{g}$, e $(\mathfrak{m} + \mathfrak{a}) \cap \mathfrak{n}^+ = \{0\}$, então $h = \exp 0 = 1$, e portanto,

$$g = hn \in MA$$

e assim, $Z_G(\mathfrak{a}) \subset MA$.

■

Proposição 28 *Seja G grupo de Lie semi-simples conexo com decomposição de Iwasawa $G = KAN^+$. Seja M^* o normalizador de A em K . Então,*

$$N_G(A) = N_G(\mathfrak{a}) = M^*A.$$

Demonstração: Primeiramente, M^* é por definição ao normalizador de A em K e A está claramente contido no normalizador de A em S , então $M^*A \subset N_G(\mathfrak{a})$.

Para a inclusão recíproca, mostramos primeiro a existência de $\bar{w} \in M^*$ tal que $\bar{w}g \in MAN^+$. Tome $u = \text{Ad}(g)|_{\mathfrak{a}}$. Como $\text{Ad}(g)$ comuta com $\text{ad}(H)$, $H \in \mathfrak{a}$, temos

$$\begin{aligned} \text{ad}(H)(\text{Ad}(g)(X)) &= [H, \text{Ad}(g)X] \\ &= [\text{Ad}(g)\bar{H}, \text{Ad}(g)X] \\ &= \text{Ad}(g)[\bar{H}, X] \\ &= \alpha(\bar{H})\text{Ad}(g)X \end{aligned}$$

com $\bar{H} \in \mathfrak{a}$ e X autovetor de $\text{ad}(H)$. Então, $\text{Ad}(g)$ leva autovetores de $\text{ad}(H)$ em autovetores de $\text{ad}(\text{Ad}(g)(H)) = \text{ad}(uH)$, o que faz de $\alpha \cdot u$ raiz para todo $\alpha \in \Pi$.

Agora, seja Σ o sistema simples de raízes, segue que

$$u\Sigma \subset \Pi$$

também é um sistema de raízes, e portanto existe $w \in W$ tal que

$$w(u\Sigma) = n\Sigma$$

Seja $\bar{w} \in M^*$ representante de $w \in W$, então

$$w(u\Pi^+) = \Pi^+$$

e assim,

$$\text{Ad}(\bar{w}g)\mathfrak{n}^+ = \mathfrak{n}^+ \left(= \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_{\alpha} \right)$$

Alem disso, $\bar{w}$ sendo elemento do normalizador de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{k}$ e $g \in N_G(\mathfrak{a})$, então $\bar{w}g \in N_G(\mathfrak{a})$, ou seja,

$$\text{Ad}(\bar{w}g)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}.$$

Lembrando também que o centralizador de $\mathfrak{a}$ em $\mathfrak{g}$ é $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$, segue que

$$\text{Ad}(\bar{w}g)\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$$

e portanto

$$\text{Ad}(\bar{w}g)\mathfrak{p} = \text{Ad}(\bar{w}g)\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+ = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+ = \mathfrak{p}$$

Conclui-se que $\bar{w}g$ está no normalizador de P , isto é, $\bar{w}g \in P = MAN^+$. Agora escreva

$$mh \in MA \subset M^*A \subset N_G(\mathfrak{a}).$$

Observando que $\varphi : N^+ \rightarrow \mathfrak{n}^+$ é um difeomorfismo, então $n \in N_G(\mathfrak{a})$ só é possível quando $n = 1$, logo

$$\bar{w}g = mh \in MA$$

e portanto,

$$g = \bar{w}^{-1}mh \in M^*A$$

mostrando a inclusão recíproca.

■

2.3.2 Decomposição de Bruhat de Um grupo de Lie Semi-simples

Quando olhamos para um grupo de Lie semi-simples conexo, por meio da estrutura desse grupo, podemos estabelecer uma decomposição de Bruhat com relação ao subgrupo parabólico minimal $P = MAN^+$. A ação de $P = MAN^+$ à esquerda nas classes laterais wP pode ser parametrizada somente por elementos de N^+ . Dessa forma é possível obter uma decomposição do mesmo tipo que a do Teorema 9 de modo independente. Tal decomposição é dada a seguir.

Teorema 11 *Sejam G um grupo de Lie semi-simples conexo com centro finito, $G = KAN^+$ uma decomposição de Iwasawa de G , e $P = MAN^+$. Então, a aplicação $w \mapsto PwP$, com $w \in W$, de W no duplo quociente de G por P à direita e à esquerda é injetiva, e portanto*

$$G = \bigcup_{w \in W} PwP = \bigcup_{w \in W} N^+wP$$

ambas como uma união disjunta.

O Teorema 11 é importante para evidenciar as propriedades que fazem de (G, P, M^*) um sistema de Tits, fundamentando o estudo dos subgrupos parabólicos para grupos de Lie semi-simples sob um espectro mais geral.

Proposição 29 *(Moore)*

Sejam G um grupo de Lie conexo semi-simples com centro finito, $G = KAN^+$ uma decomposição de Iwasawa de G , e $P = MAN^+$. Então, P é o normalizador de N^+ em G . Além disso, existe uma única classe lateral dupla PwP cuja dimensão é igual a de P .

Denotando por w' o elemento de W que leva a câmara positiva $\mathcal{C}$ na câmara oposta $-\mathcal{C}$ (a palavra de maior tamanho em W), então a classe lateral dupla $Pw'P$ é exatamente a órbita de dimensão maximal.

O Teorema 11 garante que G é gerado por P e M^* , além disso, pela própria definição de M temos que

$$M = M^* \cap P$$

é um subgrupo normal de M para o qual M^*/M possui um conjunto finito de geradores involutivos

$$w_i = w_{\lambda_i}, \quad \text{com } i = 1, \dots, l.$$

Como pode ser visto em [35], podemos caracterizar a tripla

$$(G, P, M^*)$$

como um sistema de Tits, com P sendo o subgrupo parabólico minimal.

Sobre o grupo de Weyl, uma observação importante a ser feita é que a definição axiomática pela teoria de Tits $W = M^*/M$ concorda com o grupo de Weyl gerado pelas reflexões w_α , com $\alpha \in \Sigma$, ou seja, ambas as definições são equivalentes como estabelece a seguinte proposição.

Proposição 30 *Existe uma bijeção entre o grupo de Weyl W e M^*/M o quociente do normalizador pelo centralizador de A em K .*

Demonstração: Seja $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $E \neq \emptyset$. Dada uma forma real $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}$, denote com a barra o conjugado com relação à $\mathfrak{g}_0$. Assim é possível escrever

$$E_\alpha = X_\alpha + iY_\alpha$$

com $X_\alpha, Y_\alpha \in \mathfrak{g}_0$.

Seja θ a involução de Cartan com relação à $\mathfrak{g}_0$, temos então $\theta E_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$.

Além disso, observe que

$$2X_\alpha = H_\alpha + \theta H_\alpha = X_\alpha + iY_\alpha + X_\alpha - iY_\alpha$$

e

$$2iY_\alpha = H_\alpha - \theta H_\alpha = X_\alpha + iY_\alpha - X_\alpha + iY_\alpha$$

e portanto, tomando $H \in \mathfrak{a}$, temos

$$\begin{aligned} [X_\alpha, H] &= -[H, X_\alpha] \\ &= \left[H, \frac{H_\alpha + \theta H_\alpha}{2} \right] \\ &= -\frac{1}{2} [H, H_\alpha + \theta H_\alpha] \\ &= -\frac{1}{2} [H, H_\alpha] - \frac{1}{2} [H, \theta H_\alpha] \\ &= -\frac{1}{2} \alpha(H) H_\alpha + \frac{1}{2} \alpha(H) \theta H_\alpha \\ &= -\frac{1}{2} \alpha(H) (H_\alpha, \theta H_\alpha) \\ &= -\frac{1}{2} \alpha(H) (2iY_\alpha) \\ &= -i\alpha(H) Y_\alpha. \end{aligned}$$

Fazendo uso da expressão do colchete entre elementos de espaços de raízes opostas como um múltiplo de um elemento cujo dual é α , temos

$$\begin{aligned} [X_\alpha, Y_\alpha] &= \left[\frac{E_\alpha + \theta E_\alpha}{2}, \frac{E_\alpha - \theta E_\alpha}{2i} \right] \\ &= \frac{1}{4i} [E_\alpha + \theta E_\alpha, E_\alpha - \theta E_\alpha] \\ &= \frac{1}{4i} [\theta E_\alpha, E_\alpha] + [\theta E_\alpha, E_\alpha] \\ &= -\frac{1}{2i} [E_\alpha, \theta E_\alpha] \\ &= -\frac{1}{2i} B(E_\alpha, \theta E_\alpha) H_\alpha. \end{aligned}$$

onde H_α é definido como aquele para o qual

$$\alpha(\cdot) = \langle H_\alpha, \cdot \rangle$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle = -B_\theta(\cdot, \cdot) = -B(\cdot, \theta \cdot)$, então

$$[X_\alpha, Y_\alpha] = -\frac{1}{2i} B(E_\alpha, \theta E_\alpha) H_\alpha = \frac{1}{2i} \langle E_\alpha, \theta E_\alpha \rangle H_\alpha.$$

Como $-\langle E_\alpha, \theta E_\alpha \rangle = B(E_\alpha, \theta E_\alpha) < 0$, então podemos tomar um número

$$t_0 = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} \sqrt{-B(E_\alpha, \theta E_\alpha)}}$$

a partir do qual definimos um elemento $g \in G$ para o qual $\text{Ad}(g)$ é uma reflexão do tipo r_α .

De fato, tome

$$g = \exp t_0 X_\alpha,$$

como $X_\alpha \in \mathfrak{g}_0$, então $g \in G$. Além disso, dado um elemento $H \in \mathfrak{a}$, há duas possibilidades:

1. caso $\alpha(H)\langle H_\alpha, H \rangle = 0$, então

$$\begin{aligned} \text{Ad}(g)H &= \text{Ad}(\exp t_0 X_\alpha)H \\ &= \exp(t_0 \text{ad} X_\alpha)H \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{t_0^k \text{ad}^k X_\alpha}{k!} H \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{t_0^k (-i\alpha(H))^k X_\alpha \cdot 0}{k!} = H. \end{aligned}$$

2. Caso contrário, temos $\langle H_\alpha, H \rangle = \alpha(H) \neq 0$. É possível considerar $H = H_\alpha$, e observar que

$$t_0^2 (\text{ad} X_\alpha)^2 H_\alpha = \frac{2\pi^2}{-\langle \alpha, \alpha \rangle B(E_\alpha, \theta E_\alpha)} \frac{\alpha(H_\alpha) B(E_\alpha, \theta E_\alpha)}{2} H_\alpha = -\pi^2 H_\alpha$$

pois,

$$[X_\alpha, H_\alpha] = -i\alpha(H_\alpha)Y_\alpha$$

e

$$\begin{aligned} [X_\alpha, -i\alpha(H_\alpha)Y_\alpha] &= -i\alpha(H_\alpha)[X_\alpha, Y_\alpha] \\ &= -i\alpha(H_\alpha) \frac{-1}{2i} B(E_\alpha, \theta E_\alpha) H_\alpha \\ &= \frac{\alpha(H_\alpha)}{2} B(E_\alpha, \theta E_\alpha) H_\alpha. \end{aligned}$$

E portanto,

$$\begin{aligned} \text{Ad}(g)H_\alpha &= \text{Ad}(\exp t_0 X_\alpha)H_\alpha \\ &= \exp(t_0 \text{ad} X_\alpha)H_\alpha \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{t_0^k \text{ad}^k X_\alpha}{k!} H_\alpha \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{t_0^{2k} \text{ad}^{2k} X_\alpha}{(2k)!} H_\alpha + r \sum_{k \geq 1} \frac{t_0^{2k} \text{ad}^{2k} X_\alpha}{(2k+1)!} H_\alpha \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k)!} H_\alpha + t_0 \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k+1)!} [X_\alpha, H_\alpha] \\ &= (\cos \pi) H_\alpha + t_0 \sin(\pi) [X_\alpha, H_\alpha] = -H_\alpha. \end{aligned}$$

Afinal,

$$\cos x = \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} \quad \text{e} \quad \sin x = \sum_{m \geq 0} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!}$$

na expansão em série de Taylor.

Conclui-se então que $\text{Ad}(g)$ fixa um hiperplano e leva α no seu oposto, caracterizando uma reflexão com relação a α . Uma vez que, para cada raiz existe um elemento em M^*/M associado, e que o grupo de Weyl é gerado pelas reflexões se torna explícita a associação de cada elemento do grupo de Weyl a um elemento no quociente.

■

2.3.3 Decomposição de Langlands

A Decomposição de Langlands de um grupo de Lie semi-simples atua nos subgrupos parabólicos P_Θ de modo análogo a Decomposição de Bruhat sobre o subgrupo parabólico minimal. Para esse estudo, faremos uso constante de propriedades envolvendo as raízes do sistema simples do grupo de Lie.

Seja G um grupo de Lie semi-simples conexo com centro finito, e seja P um subgrupo parabólico minimal de G . Fixe uma decomposição de Iwasawa

$$G = KAN^+$$

que faz com que P se decomponha como

$$P = MAN^+$$

onde $M = Z_K(A)$.

Seja $\Sigma = \{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$ o sistema simples de raízes associado a decomposição de Iwasawa fixada ($l = \dim \mathfrak{a}$).

Para qualquer subconjunto $\Theta \subset \Sigma$, seja $\langle \Theta \rangle$ o conjunto dos $\lambda \in \Pi$ que são combinações lineares (inteiras) de elementos de Θ , vamos denotar também $\langle \Theta \rangle^\pm = \Pi^\pm \cap \langle \Theta \rangle$.

Definimos os seguintes conjuntos:

$$\mathfrak{n}^+(\Theta) = \sum_{\lambda \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_\lambda \quad \text{e} \quad \mathfrak{n}^-(\Theta) = \theta(\mathfrak{n}^+(\Theta)) = \sum_{\lambda \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\lambda},$$

e $\mathfrak{g}(\Theta)$ a subálgebra de $\mathfrak{g}$ gerada por $\mathfrak{n}^+(\Theta) + \mathfrak{n}^-(\Theta)$. Então, $\mathfrak{g}(\Theta)$ é uma subálgebra θ -estável.

Lema 5 *A álgebra de Lie $\mathfrak{g}(\Theta)$ é semi-simples.*

Como cada $\mathfrak{g}_\lambda$ com $\lambda \in \langle \Theta \rangle^+$ está em $\mathfrak{g}(\Theta)$

$$\mathfrak{a}(\Theta) \subset \mathfrak{g}(\Theta)$$

Denote por $\mathfrak{a}_\Theta$ o complemento ortogonal de $\mathfrak{a}(\Theta)$ em $\mathfrak{a}$ relativo a $\langle \cdot, \cdot \rangle_\theta$

Lema 6 *Com a mesma notação acima, temos*

$$\mathfrak{a}(\Theta) = \mathfrak{g}(\Theta) \cap \mathfrak{a}$$

com $\mathfrak{a}(\Theta)$ abeliano maximal em $\mathfrak{g}(\Theta)$.

Por abuso de notação, nos referiremos a Σ_Θ como o conjunto das raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\Theta)$, afinal, não necessariamente o conjunto Σ_Θ constitui um sistema de raízes para $\mathfrak{a}_\Theta^\vee$. Isso ocorre somente quando existem l_Θ raízes linearmente independentes

$$\sigma_1, \dots, \sigma_{l_\Theta}, \quad l_\Theta = \dim \mathfrak{a}_\Theta$$

tais que, qualquer raiz $\sigma \in \Sigma_\Theta$ possa ser expressa como uma combinação linear inteira de σ_i , $i = 1, \dots, l_\Theta$, e com inteiros de mesma paridade. Segundo o Lema 1.2.4.1 em [35], as raízes não nulas de Σ_Θ do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\Theta)$ são exatamente a restrição a $\mathfrak{a}_\Theta$ dos elementos em $\Sigma - \langle \Theta \rangle^+$.

Defina

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta)$$

onde $\mathfrak{p}$ é a álgebra de Lie de $P = MAN^+$. Como $\mathfrak{a}(\Theta)$ é ortogonal a $\mathfrak{a}_\Theta$, e $\mathfrak{n}^\pm(\Theta)$ é ortogonal a $\mathfrak{n}_\Theta^\pm$ com relação ao produto B_θ , temos

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_\Theta &= (\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+) \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta) \\ &= \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}_\Theta \oplus \mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{n}_\Theta^+ \oplus \mathfrak{n}^+(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta) \\ &= \mathfrak{m} \oplus (\mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^+(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta)) \oplus \mathfrak{a}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta^+ \\ &= (\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{g}(\Theta)) \oplus \mathfrak{a}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta^+. \end{aligned}$$

Lema 7 *O espaço vetorial $\mathfrak{p}_\Theta$ é o normalizador de $\mathfrak{n}_\Theta^+$ em $\mathfrak{g}$, e portanto, $\mathfrak{p}_\Theta$ é, de fato, uma álgebra de Lie.*

Corolário 6 *O normalizador da subálgebra $\mathfrak{p}_\Theta$ é a própria $\mathfrak{p}_\Theta$. Então, $\mathfrak{p}_\Theta$ é álgebra de Lie.*

Lema 8 *O centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em $\mathfrak{g}$ é*

$$\mathfrak{z}_\mathfrak{g}(\mathfrak{a}_\Theta) = (\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}^+(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta) \oplus \mathfrak{a}(\Theta)) \oplus \mathfrak{a}_\Theta.$$

Demonstração: Por um lado, $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$ centraliza $\mathfrak{a}$, e assim $\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}(\Theta) \oplus \mathfrak{a}_\Theta$ centraliza $\mathfrak{a}_\Theta$. Quanto a $\mathfrak{n}^+(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta)$, uma vez que tal soma de espaços envolve os ortogonais a $\mathfrak{n}_\Theta^+$ e $\mathfrak{n}_\Theta^-$, o colchete com os elementos de $\mathfrak{a}_\Theta$ é nulo, e portanto, $(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}^+(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta) \oplus \mathfrak{a}(\Theta)) \oplus \mathfrak{a}_\Theta$ centraliza $\mathfrak{a}_\Theta$, ou equivalentemente

$$(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}^+(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta) \oplus \mathfrak{a}(\Theta)) \oplus \mathfrak{a}_\Theta \subset \mathfrak{l}_\Theta.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathfrak{l}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta^+ \oplus \mathfrak{n}_\Theta^- &= \mathfrak{g} \\ &= \mathfrak{p}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta^- \\ &= (\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}^+(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta) \oplus \mathfrak{a}(\Theta)) \oplus \mathfrak{a}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta^+ \oplus \mathfrak{n}_\Theta^-, \end{aligned}$$

e portanto,

$$\dim \mathfrak{l}_\Theta = \dim \mathfrak{g} - \dim(\mathfrak{n}_\Theta^+ \oplus \mathfrak{n}_\Theta^-) = \dim(\mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}^+(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta) \oplus \mathfrak{a}(\Theta))$$

de onde segue o resultado.

■

Definição 43 Com as mesmas notações anteriores, definimos

$$\mathfrak{m}_\Theta = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}^+(\Theta) \oplus \mathfrak{n}^-(\Theta) \oplus \mathfrak{a}(\Theta).$$

Lema 9 O espaço $\mathfrak{m}_\Theta$ é uma álgebra de Lie redutível em $\mathfrak{g}$, e

$$\mathfrak{z}_{\mathfrak{m}_\Theta}(\mathfrak{m}_\Theta) \subset \mathfrak{m}_\Theta \cap \mathfrak{k},$$

ou seja, o centro de $\mathfrak{m}_\Theta$ está contido na sua interseção com $\mathfrak{k}$.

Deduz-se, então, a seguinte decomposição de $\mathfrak{p}_\Theta$,

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{m}_\Theta \oplus \mathfrak{a}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta^+$$

que é chamada decomposição de Langlands de $\mathfrak{p}_\Theta$. E, segundo a Proposição 8, o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em $\mathfrak{g}$ é

$$\mathfrak{m}_\Theta \oplus \mathfrak{a}_\Theta.$$

Com o Lema 9, temos as ferramentas necessárias para estudar a situação dos subgrupos de Lie associados a essas álgebras de Lie.

Sejam

$$A(\Theta), A_\Theta, N^+(\Theta), N^-(\Theta), N_\Theta^+, \text{ e } N_\Theta^-$$

os subgrupos analíticos correspondendo respectivamente à

$$\mathfrak{a}(\Theta), \mathfrak{a}_\Theta, \mathfrak{n}^+(\Theta), \mathfrak{n}^-(\Theta), \mathfrak{n}_\Theta^+, \text{ e } \mathfrak{n}_\Theta^-$$

temos as seguintes decomposições

$$A = A(\Theta)A_\Theta$$

em produto direto, e

$$N^+ = N^+(\Theta)N_\Theta^+ \quad \text{e} \quad N^- = N^-(\Theta)N_\Theta^-$$

em produto semidireto, pois $\mathfrak{n}^+(\Theta)$ e $\mathfrak{n}^-(\Theta)$ são ideais em $\mathfrak{n}^+$, respectivamente, $\mathfrak{n}^-$.

Uma vez que $[\mathfrak{a}_\Theta, \mathfrak{n}_\Theta^+] \subset \mathfrak{n}_\Theta^+$, $A_\Theta N_\Theta^+$ é um subgrupo de G .

Seja M_Θ o subgrupo de G com álgebra de Lie $\mathfrak{m}_\Theta$, então $M_\Theta A_\Theta$, e $M_\Theta A_\Theta N_\Theta^+$ são subgrupos analíticos fechados de G , afinal, o primeiro é centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$, e o segundo é normalizador de $\mathfrak{n}_\Theta^+$. Por conseguinte, M_Θ é também subgrupo fechado de G .

Quanto às componentes conexas de M_Θ , segue uma breve discussão. Seja L_Θ o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em G , então o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em K é a restrição de L_Θ a K , dada por

$$\widetilde{M}_\Theta(K) = \widetilde{L}_\Theta \cap K.$$

Tome uma decomposição de $\widetilde{M}_\Theta$ da seguinte forma:

$$\widetilde{M}_\Theta = \widetilde{M}_\Theta(K)M_\Theta,$$

visto que M_Θ é subgrupo conexo, temos que a componente conexa da identidade em $\widetilde{M}_\Theta$ é exatamente M_Θ . Segue que

$$\widetilde{L}_\Theta = \widetilde{M}_\Theta A_\Theta.$$

A componente conexa da identidade L_Θ de $\widetilde{L}_\Theta$ é o subgrupo analítico de G com álgebra de Lie $\mathfrak{l}_\Theta$. Denotando por $M_\Theta(K)$ a componente conexa da identidade de $\widetilde{M}_\Theta(K)$, então

$$M_\Theta(K) = L_\Theta \cap K = M_\Theta \cap K$$

A conclusão, é dada no seguinte lema.

Lema 10 *Os grupos M_Θ e $M_\Theta A_\Theta N_\Theta^+$ são subgrupos fechados de G . E, segundo Cartan, obtemos as seguintes decomposições*

$$\widetilde{M}_\Theta = \widetilde{M}_\Theta(K) \exp(\mathfrak{m}_\Theta \cap \mathfrak{s}) \quad e \quad M_\Theta = M_\Theta(K) \exp(\mathfrak{m}_\Theta \cap \mathfrak{s})$$

e portanto, $\widetilde{M}_\Theta(K) = Z(A) M_\Theta(K)$.

Definimos

$$P_\Theta = M_\Theta A_\Theta N_\Theta^+.$$

Então, P_Θ é subgrupo parabólico de G contendo $P = MAN^+$, e a álgebra de Lie de P_Θ é $\mathfrak{p}_\Theta$.

Teorema 12 *Sejam G um grupo de Lie semi-simples conexo com centro finito, e $G = KAN^+$ uma decomposição de Iwasawa de G . Fixados $P = MAN^+$ e $\Theta \subset \Sigma$, então a aplicação $\phi : K \times \mathfrak{m}_\Theta \cap \mathfrak{s} \times A_\Theta \times N_\Theta \rightarrow G$ definida por:*

$$(k, X, h, n) \mapsto k \exp(X) h n$$

é um difeomorfismo.

E como consequência, temos o seguinte resultado que dá estrutura básica dos subgrupos parabólicos de G .

Teorema 13 *(Bruhat-Moore)*

Sejam G um grupo de Lie semi-simples conexo com centro finito, $G = KAN^+$ uma decomposição de Iwasawa de G , e seja

$$P = MAN^+$$

Então, para cada subconjunto $\Theta \subset \Sigma$, $P_\Theta = M_\Theta(K)AN^+ = M_\Theta A_\Theta N_\Theta^+$ é um subgrupo parabólico de G , e além disso, o normalizador de $\mathfrak{n}_\Theta^+$ (ou N_Θ^+) em G é P_Θ .

Observe que $P_\Theta = M_\Theta(K)AN^+$ é uma decomposição de Iwasawa de P_Θ .

Uma vez bem entendida a estrutura de M_Θ , podemos discorrer sobre o subgrupo W_Θ de W gerado elementos relacionados às raízes determinadas por Θ .

Lema 11 *Sejam W o grupo de Weyl do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, W_Θ o subgrupo de W gerado por w_λ , $\lambda \in \Theta$. Então, o subgrupo $W_\Theta \subset W$ centraliza $\mathfrak{a}_\Theta$.*

Corolário 7 *Com as mesmas notações anteriores, $(M_\Theta(K) \cap M^*)/M = W_\Theta$*

Seja P o subgrupo parabólico minimal de G . Os 2^l subgrupos P_Θ contendo P são chamados subgrupos parabólicos canônicos com relação a P e A . É fácil ver que

$$P_\emptyset = P \quad e \quad P_\Sigma = G$$

e cada subgrupo parabólico é conjugado a somente um subgrupo parabólico canônico. Cada subconjunto $\Theta \subset \Sigma$ está associado a um subgrupo parabólico P_Θ de G contendo P .

A decomposição de Bruhat de G relativa à P , esta pode ser interpretada como uma decomposição de G/P em N^+ -órbitas (ou, P -órbitas). A generalização mencionada anteriormente poderá ser interpretada como uma decomposição de G/P_Θ em N^+ -órbitas também.

A seguir, apresentamos um resultado já conhecido na literatura, que é expresso exatamente na forma como em [35], e que será ferramenta importante para o estudo da dinâmica nas variedades *flag*.

Proposição 31 *Sejam G um grupo de Lie semi-simples conexo com centro finito, uma decomposição de Iwasawa $G = KAN^+$, e $P = MAN^+$. Fixe um subconjunto $\Theta \subset \Sigma$, então $N_{\bar{\Theta}}P_{\Theta}$ é uma subvariedade aberta e densa em G .*

Consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo 8 *Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(5, \mathbb{R})$ com decomposição canônica de Iwasawa, como nos exemplos 6 e 7.*

As raízes restritas constituem o conjunto

$$\Pi = \{\alpha_{ij} : i \neq j; i, j = 1, \dots, 5\},$$

as raízes restritas positivas são dadas por

$$\Pi^+ = \{\alpha_{ij} \in \Sigma : i < j\},$$

o sistema simples de raízes é

$$\Sigma = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{34}, \alpha_{45}\}.$$

Fixando $\Theta = \{\alpha_{23}, \alpha_{34}\}$, segue que

$$\langle \Theta \rangle^+ = \{\alpha_{23}, \alpha_{34}, \alpha_{24}\}$$

afinal, se $H = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$,

$$(\alpha_{23} + \alpha_{34})(H) = \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_3 - \lambda_4 = \lambda_2 - \lambda_4 = \alpha_{24}(H).$$

As demais somas não são raízes restritas positivas.

Defina os espaços

$$\mathfrak{n}^+(\Theta) = \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{\alpha} \quad \text{e} \quad \mathfrak{n}^-(\Theta) = \sum_{\alpha \in \langle \Theta \rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Diretamente da definição, temos $\mathfrak{n}^+(\Theta) \subset \mathfrak{n}^+$, e $\mathfrak{n}^-(\Theta) \subset \mathfrak{n}^-$.

Seja $\langle \Theta \rangle^- = -\langle \Theta \rangle^+$, então, visto que

$$-\alpha_{ij}(H) = -(\lambda_i - \lambda_j) = \lambda_j - \lambda_i = \alpha_{ji}(H),$$

tem-se que $\langle \Theta \rangle^- = \{\alpha_{21}, \alpha_{32}, \alpha_{31}\}$.

Como cada $\mathfrak{g}_{\alpha_{ij}}$ é o subespaço onde a entrada (i, j) não se anula, podemos caracterizar $\mathfrak{n}^+(\Theta)$, e $\mathfrak{n}^-(\Theta)$ da seguinte forma

$$\mathfrak{n}^+(\Theta) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \square & \square & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \square & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathfrak{n}^-(\Theta) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

e a subálgebra parabólica é

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{n}^-(\Theta) \oplus \mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}.$$

Seguindo em direção à decomposição de Langlands,

$$H_{\alpha_{23}} = \frac{1}{2n}(E_{22} - E_{33}) = \frac{1}{10}(E_{22} - E_{33}) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_{\alpha_{34}} = \frac{1}{2n}(E_{33} - E_{44}) = \frac{1}{10}(E_{33} - E_{44}) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma, o gerado de $\{H_{\alpha_{23}}, H_{\alpha_{34}}\}$ é

$$\mathfrak{a}(\Theta) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : a + b + c = 0 \right\}$$

e $\mathfrak{a}_\Theta = [H_{\alpha_{34}}, H_{\alpha_{34}}]$, é dado como

$$\mathfrak{a}_\Theta = \left\{ \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \end{pmatrix} : d_1 + d_2 = e_1 + e_2 = 0 \right\}$$

e assim, a decomposição de Langlands de $\mathfrak{p}_\Theta$ é caracterizada como

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_\Theta &= (\mathfrak{m} + \mathfrak{a}(\Theta) + \mathfrak{n}^+(\Theta) + \mathfrak{n}^-(\Theta)) \oplus (\mathfrak{a}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta^+) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & \square & \square & 0 \\ 0 & \Delta & * & \square & 0 \\ 0 & \Delta & \Delta & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \end{pmatrix} : d_1 + d_2 = e_1 + e_2 = 0 \right\} \\ &\quad \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Exponenciando as subálgebras obtidas da decomposição, segue

$$M_{\Theta} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$A_{\Theta} = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\},$$

e

$$N_{\Theta}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

E portanto, a componente conexa da identidade de P_{Θ} é dada por

$$(P_{\Theta})_0 = M_{\Theta} A_{\Theta} N_{\Theta}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}.$$

2.3.4 Variedade *Flag* como uma Variedade Homogênea

Dada uma sequência de números naturais $s = (k_1, \dots, k_r)$, com $1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_r \leq n$, a variedade *flag* real $\mathbb{F}^n(s)$ é o conjunto de todos os *flags* (sequências de subespaços encaixados)

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_r$$

de subespaços de $\mathbb{R}^n$, tais que $\dim V_j = k_j$, para $j = 1, \dots, r$.

Naturalmente, definimos uma ação

$$\varphi : SL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{F}^n(s) \longrightarrow \mathbb{F}^n(s)$$

do grupo $SL(n, \mathbb{R})$ em $\mathbb{F}^n(s)$ dada pela seguinte lei

$$\varphi(V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_r) = (gV_1 \subset gV_2 \subset \dots \subset gV_r)$$

com $g \in SL(n, \mathbb{R})$, e $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_r \in \mathbb{F}^n(s)$.

Observe que a aplicação que faz $V_i \mapsto gV_i$ leva cada subespaço de dimensão k_i de $\mathbb{R}^n$ num subespaço também de dimensão k_i . Além disso, caso $V_i \subset V_j$, então $gV_i \subset gV_j$, e a partir disso é possível mostrar que a ação é transitiva. De fato, seja $\beta_0 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$, definimos o *flag* canônico como sendo

$$f_{\beta_0} = (V_1 \subset \dots \subset V_r)$$

onde $V_j = \text{ger}\{e_1, \dots, e_{k_j}\}$, para $1 \leq j \leq r$. Denote um flag arbitrário como

$$f_\beta = (W_1 \subset W_2 \subset \dots \subset W_r).$$

Fixados os W_i 's, escolha uma base $\beta = \{u_1, \dots, u_n\}$ com a mesma orientação da base canônica adaptada a f_β no sentido em que

$$\{u_1, \dots, u_{k_1}\} \subset W_1, \dots, \{u_{k_{r-1}+1}, \dots, u_{k_{r-1}+p} = u_r\} \subset W_r$$

e o determinante da mudança de base seja positivo. Em outras palavras, estamos tomando uma base em que os vetores $u_1, \dots, u_{k_j}$ geram W_j e que possuem mesma orientação que a base canônica. Definimos a aplicação linear $g' : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ dada por $g'(e_i) = u_i$, então, claramente

$$g'(f_{\beta_0}) = f_\beta.$$

Visto que, g' é na realidade a mudança de base de β_0 para β , e ambas as bases possuem mesma orientação no espaço, segue que

$$\det g' > 0.$$

Tomando a transformação linear

$$g = \frac{1}{(\det g')^n} g'$$

é verdadeiro que $\det g = 1$, e $gf_{\beta_0} = f_\beta$. Isto significa que é possível ligar qualquer *flag* ao *flag* canônico por uma ação de $g \in SL(n, \mathbb{R})$, o que implica na transitividade da ação.

Agora, vamos calcular o subgrupo de isotropia no elemento f_{β_0} . Seja $g \in SL(n, \mathbb{R})$, tal que $gf_{\beta_0} = f_{\beta_0}$, então, em V_1 , percorrendo a base $\{e_1, \dots, e_{k_1}\}$, devemos ter

$$\begin{aligned} ge_1 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k_1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k_1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k_1 1} & a_{k_1 2} & \cdots & a_{k_1 k_1} & \cdots & a_{k_1 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk_1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k_1 1} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \in V_1 \\ &\vdots \\ ge_{k_1} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k_1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k_1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k_1 1} & a_{k_1 2} & \cdots & a_{k_1 k_1} & \cdots & a_{k_1 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk_1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k_1 1} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \in V_1 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} ge_1 &= \sum_{j=1}^n a_{j1} e_j \in V_1 \\ &\vdots \\ ge_{k_1} &= \sum_{j=1}^n a_{jk_1} e_j \in V_1 \end{aligned}$$

o que acontece somente quando

$$\begin{aligned} a_{k_1+1 \ 1}, a_{k_1+2 \ 1}, \dots, a_{n \ 1} &= 0 \\ &\vdots \\ a_{k_1+1 \ k_1}, a_{k_1+2 \ k_1}, \dots, a_{n \ k_1} &= 0 \end{aligned}$$

o que faz com que o bloco

$$\begin{pmatrix} a_{k_1+1 \ 1} & \cdots & a_{k_1+1 \ k_1} \\ a_{k_1+2 \ 1} & \cdots & a_{k_1+2 \ k_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n \ 1} & \cdots & a_{n \ k_1} \end{pmatrix} = 0$$

seja uma matriz nula de ordem $(n - k_1) \times k_1$.

Então, é possível dizer que a matriz de g na base canônica é da forma

$$\begin{pmatrix} A_1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Supondo que em certo V_k , com $1 \leq l \leq r$, tenhamos a matriz de g dada em blocos sob a seguinte forma

$$\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{l-1} & \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

então, para A_l , percorrendo os elementos $e_{k_{l-1}}, \dots, e_{k_l}$, de modo análogo ao caso V_1 devemos ter

$$\begin{aligned} ge_{k_{l-1}} &= \sum_{j=1}^n a_{jk_{l-1}} e_j \in V_l \\ &\vdots \\ ge_{k_l} &= \sum_{j=1}^n a_{jk_l} e_j \in V_l \end{aligned}$$

o que acontece unicamente quando

$$\begin{aligned} a_{k_{l-1}+1 \ k_{l-1}}, a_{k_{l-1}+2 \ k_{l-1}}, \dots, a_{n \ k_{l-1}} &= 0 \\ &\vdots \\ a_{k_{l-1}+1 \ k_l}, a_{k_{l-1}+2 \ k_l}, \dots, a_{n \ k_l} &= 0 \end{aligned}$$

o que também faz com que o bloco

$$\begin{pmatrix} a_{k_{l-1}+1 \ k_{l-1}} & \cdots & a_{k_{l-1}+1 \ k_l} \\ a_{k_{l-1}+2 \ k_{l-1}} & \cdots & a_{k_{l-1}+2 \ k_l} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n \ k_{l-1}} & \cdots & a_{n \ k_l} \end{pmatrix} = 0$$

seja uma matriz nula de ordem $(n - k_{l-1}) \times (k_l - k_{l-1})$. Isso mostra que, de fato, a matriz de g é dada em blocos da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & * & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_{r-1} & \\ 0 & \cdots & & A_r \end{pmatrix}$$

onde A_j é uma matriz quadrada de ordem $(k_j - k_{j-1}) \times (k_j - k_{j-1})$, para $1 \leq j \leq r$.

Denotando por P_s o subgrupo fechado de $SL(n, \mathbb{R})$ das matrizes da forma como descrita acima, surge naturalmente uma bijeção σ entre a variedade homogênea $SL(n, \mathbb{R})/P_s$ e $\mathbb{F}^n(s)$ definida por $\sigma(gP_s) = \varphi(g, f_\beta)$, e assim, dotamos $\mathbb{F}^n(s)$ de uma estrutura de variedade diferenciável exigindo que σ seja um difeomorfismo local.

Quando a sequência s é dada por $(1, 2, \dots, n)$ dizemos que $\mathbb{F}^n(s)$ é um *flag* maximal. Outros casos de variedades *flag* são as *Grassmannianas* $Gr_k(n) = \mathbb{F}^n(k)$, que são constituídas somente pelos espaços k -dimensionais de $\mathbb{R}^n$, e o espaço projetivo real $\mathbb{RP}^{n-1} = Gr_1(n)$, que é o espaço das direções em $\mathbb{R}^n$.

Como uma particularização do que foi discutido anteriormente, o subgrupo de isotropia da ação natural de $SL(n, \mathbb{R})$ sobre a variedade *flag* maximal $\mathbb{F}^n(1, \dots, n)$ é o subgrupo P com elementos triangulares superiores

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & * \end{pmatrix} \right\}.$$

Uma vez que as matrizes diagonais de traço zero não comutam com as matrizes anti-simétricas, o centralizador M tem álgebra de Lie trivial $\{0\}$, e assim, é possível ver que os subgrupos de isotropia dessa ação são os subgrupos parabólicos minimais, AN^+ e seus conjugados por uma g -ação.

Uma das propriedades importantes dos subgrupos parabólicos minimais é o fato que estes são seus próprios normalizadores, e também são o normalizador das respectivas álgebras. Além disso, todas as subálgebras parabólicas minimais são conjugadas entre si. Se P é uma subálgebra parabólica minimal, gPg^{-1} também é, e isso significa que, pela ação adjunta de G , é possível identificar cada subálgebra parabólica minimal com uma órbita da ação de adjunta de G na Grassmanniana dos subespaços de $\mathfrak{g}$ com mesma dimensão que $\mathfrak{p}$.

2.3.5 Elementos semi-simples e unipotentes em um grupo de Lie Redutível

Nesta seção vamos estudar a decomposição multiplicativa de Jordan para grupos de Lie redutíveis, que é dada como o produto de uma parte redutível com uma outra semi-simples.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie redutível sobre $\mathbb{R}$, então $\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, onde $\mathfrak{c}$ é o centro de $\mathfrak{g}$ e $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é a subálgebra derivada. Seja θ uma involução de Cartan, e $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$ uma decomposição de Cartan relativa à θ , a forma quadrática

$$\langle X, X \rangle = B(X, \theta X) = -\text{tr}(\text{ad}(X) \text{ad}(\theta X))$$

é positiva definida em $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, e K um subgrupo analítico de G com álgebra de Lie $\mathfrak{k}$. Tome K compacto e um difeomorfismo entre $K \times \mathfrak{s}$ e G dado por

$$(k, X) \mapsto k \exp(X), \quad X \in \mathfrak{s}, \quad k \in K.$$

Dado $x \in G$, denote por $G \cdot x$ a órbita $\{yxy^{-1} : y \in G\}$.

Definição 44 Um elemento $x \in G$ é dito *semi-simples* se o automorfismo $\text{Ad}(x)$ for *semi-simples*.

Teorema 14 Sejam $J_1, \dots, J_r$ a maior coleção de subgrupos de Cartan de G mutuamente não conjugados entre si, então o conjunto G' dos elementos regulares de G é dado por

$$G' = \bigcup_{i=1}^r \bigcup_{x \in G} x(J_i)'x^{-1}$$

onde $(J_i)' = J_i \cap G'$.

Como cada elemento em um subgrupo de Cartan é semi-simples, e o conjunto dos elementos regulares é dado pela união das conjugações dos subgrupos de Cartan, segue que cada elemento regular de G é semi-simples.

Seja γ um elemento semi-simples em G , defina $\mathfrak{g}_\gamma$ como sendo o centralizador de γ em $\mathfrak{g}$, e G_γ o subgrupo analítico associado a $\mathfrak{g}_\gamma$. Então, $\bar{G}_\gamma$ é a componente conexa de G_γ o centralizador de γ em G .

Proposição 32 Fixado um elemento semi-simples $\gamma \in G$, então centralizador $\mathfrak{g}_\gamma$ de γ em $\mathfrak{g}$ é redutível, em $\mathfrak{g}$ e $\text{posto}(\mathfrak{g}_\gamma) = \text{posto}(\mathfrak{g})$.

Se o posto de $\mathfrak{g}_\gamma$ coincide com o posto de $\mathfrak{g}$, existe uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{g}_\gamma$, e portanto γ centraliza $\mathfrak{j}$, e dessa forma está em um subgrupo de Cartan de G .

Por conseguinte, obtemos uma caracterização dos elementos semi-simples de G como um elemento em algum subgrupo de Cartan, afinal cada elemento semi-simples de G está em um subgrupo de Cartan, bem como cada elemento em um subgrupo de Cartan é semi-simples.

Definição 45 Seja N o conjunto dos elementos nilpotentes em $\mathfrak{g}$, e

$$U = \exp(N) \subset G$$

então, os elementos em U são chamados *elementos unipotentes* de G .

Note que quando $u \in U$, o endomorfismo $\text{Ad}(u)$ é unipotente, isto é, possui apenas 1 como autovalor, ou equivalentemente $\text{Ad}(u) - 1$ (1 como aplicação identidade) é um endomorfismo nilpotente de $\mathfrak{g}$.

Proposição 33 Todo $x \in G$ pode ser escrito de forma única como

$$x = x_s x_u$$

com x_s semi-simples, e x_u unipotente, e de modo que $x_s x_u = x_u x_s$. Se G_x é o centralizador de x em G , então x_s e x_u estão no centralizador de G_x .

Essa é a versão da decomposição multiplicativa de Jordan para grupos de Lie redutíveis.

Conjuntos Controláveis para Ações de Semigrupos

Neste capítulo, realizamos uma breve introdução aos conjuntos controláveis para ações de semigrupos, bem como, conjuntos controláveis invariantes agindo numa variedade diferenciável. Tais conjuntos são uma generalização dos conjuntos controláveis para semigrupos de controle da teoria de controle, bem como são os conjuntos controláveis invariantes para semigrupos. Estudaremos uma ordem parcial entre os conjuntos controláveis. Estudaremos também o comportamento dos conjuntos controláveis para fibrações equivariantes. Para o direcionamento deste trabalho são assumidas certas hipóteses pertinentes à questão dos conjuntos controláveis em variedades *flag*. Para outros detalhes, ver [28] e [18].

3.1 Conjuntos Controláveis

Conjuntos controláveis para ações de semigrupos podem ser estudados em contextos mais gerais que estes, como por exemplo, no caso das ações de semigrupos em espaços topológicos. No entanto, visto que o foco deste trabalho está nas ações de semigrupos em um certo tipo de variedade diferenciável (as variedades *flag*), por simplicidade, podemos considerar apenas as ações de semigrupos em variedades. Além disso, tomamos como hipótese que S é um subsemigrupo de um grupo de Lie com interior não vazio. As motivações desse fato se encontram na teoria de controle, e no estudo das equações diferenciais estocásticas.

Sejam G é um grupo de Lie que age numa variedade diferenciável M e S é um subsemigrupo de G tal que $\text{int}S \neq \emptyset$. A ação de G em M será denotada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} G \times M &\longrightarrow M \\ (g, x) &\longmapsto gx \end{aligned}$$

Dado um subsemigrupo $S \subset G$, a ação de S em M é dada pela restrição da ação de G ,

$$\begin{aligned} S \times M &\longrightarrow M \\ (g, x) &\longmapsto gx. \end{aligned}$$

Denotamos a órbita de S por um elemento $x \in M$ por:

$$Sx = \{gx \in M : g \in S\}.$$

Alguns fatos conhecidos sobre a teoria de subsemigrupos em grupos topológicos serão dados a seguir. Para mais informações ver [8].

Proposição 34 *Seja S um subsemigrupo de um grupo topológico G . Suponha que $\text{int } S \neq \emptyset$. Então, $\text{int } S$ é um ideal de S , isto é,*

$$(\text{int } S)S \cap S(\text{int } S) \subset \text{int } S.$$

Demonstração: Sejam $g \in \text{int } S$, $s \in S$, e $U \subset S$ uma vizinhança aberta de g em S . Como G é grupo topológico, Us é uma vizinhança aberta de gs . Então, pela propriedade de semigrupo $Us \subset S$. Logo, $gs \in \text{int } S$. De modo análogo, mostra-se que $sg \in \text{int } S$.

■

A propriedade de ideal para $\text{int } S$ é uma das principais ferramentas para o estudo dos resultados contidos neste trabalho. Como será visto adiante, vamos trabalhar com subsemigrupos em grupos de Lie não compactos. Essa hipótese faz sentido tendo em vista a seguinte proposição.

Proposição 35 *Seja S um subsemigrupo compacto não vazio de um grupo topológico conexo G . Então, S é um subgrupo compacto. Além disso, se $\text{int } S \neq \emptyset$, então S é um subgrupo compacto e aberto de G , e portanto $S = G$.*

Esta última proposição justifica o estudo dos subsemigrupos em grupos de Lie compactos não conexos, pois, sendo o grupo compacto conexo, o único subsemigrupo não nulo será o próprio G .

Definição 46 *Um conjunto controlável para S em M é um subconjunto $D \subset M$ que satisfaz:*

1. $\text{int } D \neq \emptyset$.
2. $\forall x \in D, D \subset \text{fe}(Sx)$.
3. D é conjunto maximal com as propriedades 1 e 2.

Observe que, caso D_1 e D_2 sejam conjuntos controláveis cuja interseção é não vazia, então a união destes também é um conjunto controlável, e assim, a maximalidade garante que $D_1 = D_2 = D_1 \cup D_2$. E, portanto, dois conjuntos controláveis, ou são disjuntos, ou são idênticos.

A princípio, consideramos que S é um semigrupo acessível, isto é, tal que $\text{int}(Sx) \neq \emptyset, \forall x \in M$, e também admita $\text{int}(S^{-1}x) \neq \emptyset$.

Na definição de conjunto controlável a principal característica é dada através da condição 2, que expressa uma espécie de "quase transitividade". Esse conceito pode ser melhorado pelo estudo de um subconjunto denso em D onde a transitividade é válida.

Definição 47 *Seja D um conjunto controlável para S em M . Então,*

$$D_0 = \{x \in D : x \in \text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x)\}$$

é o chamado conjunto de transitividade em D .

Proposição 36 *Suponha que $D_0 \neq \emptyset$. Então, valem as seguintes afirmações:*

1. $D \subset \text{int}(Sx), \forall x \in D_0$.

2. $D_0 = \text{int}(S^{-1}x) \cap \text{int}(Sx)$, $\forall x \in D_0$.
3. $\forall x, y \in D_0$, $\exists g \in S$ tal que $gx = y$.
4. D_0 é denso em D .
5. D_0 é S -invariante, isto é, se $h \in S$, $x \in D_0$, e $hx \in D$, então $hx \in D_0$.

Demonstração: Para provar o item 1, se $x \in D_0$ e $y \in D$. Como $x \in D$ e $x \in \text{int}(S^{-1}x)$, então, $\text{int}(S^{-1}x) \cap D \neq \emptyset$. Como $\text{int}(S^{-1}x) \neq \emptyset$, este conjunto é uma vizinhança de x , e além disso, $y \in \text{fe}(Sx)$. Decorre que existe $g \in S$ tal que $gy \in \text{int}(S^{-1}x)$, e portanto

$$y \in g^{-1}\text{int}(S^{-1}x) \subset \text{int}(S^{-1}x).$$

Para provar o item 2, sejam $x \in D_0$, e $y \in \text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x)$.

Tem-se que $y \in \text{int}(Sx)$ implica em $y \in S^{-1}x$, e $y \in \text{int}(S^{-1}x)$ implica em $x \in S^{-1}y$, e portanto $Sx \subset Sy$ e $S^{-1}x \subset S^{-1}y$. Então, segue que

$$y \in \text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x) \subset \text{int}(Sy) \cap \text{int}(S^{-1}y)$$

ou seja, $y \in D_0$.

Reciprocamente, tome $x, y \in D_0$, então, pelo item 1, $x \in \text{int}(S^{-1}y)$ e $x \in \text{int}(S^{-1}x)$, isto é, existe $g \in S$ tal que $x = g^{-1}y$, equivalentemente $gx = y$. Mas, $x \in \text{int}(Sx)$, e portanto,

$$y = gx \in g(\text{int}(Sx)) \subset \text{int}(Sx).$$

Então, segue que $y \in \text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x)$, e assim $D_0 \subset \text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x)$.

Para provar o item 3, sejam $x, y \in D_0$. Pela Propriedade 2 na definição de conjunto controlável

$$D_0 = \text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x) = \text{int}(Sy) \cap \text{int}(S^{-1}y).$$

Logo, $x \in \text{int}(S^{-1}x)$, e portanto, existe $g \in S$ tal que $g^{-1}y = x$, ou seja, $gx = y$.

Para provar o item 4, fixe $x \in D_0$. Segundo o item 2 desta proposição

$$D_0 = \text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x),$$

ou seja, D_0 é a interseção de dois abertos, e portanto, um conjunto aberto, logo

$$\text{fe}(D_0) = \text{fe}(\text{int}(Sx)) \cap \text{int}(S^{-1}x).$$

Então, do item 1 desta proposição, segue que $D \subset \text{int}(S^{-1}x)$, e além disso, $D \subset \text{fe}(Sx)$, por definição. Mas,

$$\text{fe}(Sx) \subset \text{fe}(S(\text{int}(Sx))) \subset \text{fe}(\text{int}(Sx))$$

e assim, $D \subset \text{fe}(D_0)$, e portanto, D_0 é denso em D .

Para provar o item 5, sejam $h \in S$, $x \in D_0$, e suponha $hx \in D$. Pelo item 1 desta proposição, $h \in D \subset \text{int}(S^{-1}x)$. Além disso, $x \in D_0$ implica em $x \in \text{int}(Sx)$, e portanto, $hx \in h(\text{int}(Sx)) \subset \text{int}(Sx)$, o que significa que, de fato,

$$hx \in \text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x) = D_0$$

■

Quando consideramos $S \subset G$ um subsemigrupo de um grupo de Lie tal que $\text{int}(S) \neq \emptyset$, a Proposição 37 nos permite substituir a definição 47 por uma condição equivalente: Definição 48.

Proposição 37 *Sejam M uma variedade homogênea e $S \subset G$ um subsemigrupo do grupo de Lie G com interior não vazio. Então, $D_0 = \{x \in D : x \in (\text{int}S)x\}$.*

Demonstração: Seja $x \in (\text{int}S)x$, então

$$x \in (\text{int}S)x \cap (\text{int}S)^{-1}x.$$

Mas,

$$(\text{int}S)x \cap (\text{int}S)^{-1}x \subset \text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x),$$

e portanto $x \in D_0$.

Por outro lado, se $x \in D_0$, então $x \in \text{int}(Sx) \cap \text{int}(S^{-1}x)$ com $x \in D$. Como $D \subset \text{fe}(Sx)$, $\{x \in D : x \in (\text{int}S)x\}$ é denso em D . Então, existe $y \in \{x \in D : x \in (\text{int}S)x\}$, tal que $y \in \text{int}(S^{-1}x)$, que é vizinhança de x , e assim, segue que existe $g \in S$ tal que $gy = x$. Além disso, existe $h \in \text{int}S$ tal que $hx = y$, e portanto,

$$(gh)x = g(hx) = gy = x,$$

onde $gh \in \text{int}S$, isto é, $x \in (\text{int}S)x$.

■

Assim, a definição de conjunto de transitividade a que nos referiremos a partir de agora é a seguinte:

Definição 48 *Sejam $S \subset G$ um subsemigrupo tal que $\text{int} S \neq \emptyset$, e D um conjunto controlável para S em M . O conjunto*

$$\begin{aligned} D_0 &= \{x \in D : \exists g \in \text{int} S \text{ tal que } gx = x\} \\ &= \{x \in D : x \in (\text{int}S)x\}. \end{aligned}$$

é o chamado conjunto de transitividade em D .

Quando um conjunto controlável tem um conjunto de transitividade não vazio, temos boas propriedades topológicas, isto é, propriedades que favorecem o estudo das órbitas e dos conjuntos controláveis.

Definição 49 *Um conjunto controlável D para S em M é dito efetivo quando seu conjunto de transitividade D_0 é não vazio.*

Proposição 38 *Seja D conjunto controlável efetivo para S em M . Então,*

$$D_0 = (\text{int} S)D \cap D$$

.

Demonstração: Seja $x \in (\text{int}S)D \cap D$, então existe $g \in \text{int}S$ tal que $x = gy$, $y \in D$, o que significa que $g^{-1}x = y \in D$, segue que $(\text{int}S)^{-1}x \cap D \neq \emptyset$. Como $\text{int}D \neq \emptyset$, decorre que $Sx \cap D \neq \emptyset$.

Tome $z \in Sx \cap D$, assim Sz intersecta o interior de D , e portanto, $D \subset \text{fe}(Sz)$ faz com que

$$Sz \cap (\text{int}S)^{-1}x \neq \emptyset.$$

Conclui-se que $g_1^{-1}x = g_2z$ para certos $g_1 \in \text{int}S$ e $g_2 \in S$, logo $x = (g_1g_2)z$, com $g_1g_2 \in \text{int}S$, mostrando que

$$x \in (\text{int}S)z \subset \text{int}D \cap D.$$

■

Proposição 39 *São válidas as seguintes afirmações:*

1. $D \in (\text{int}S)^{-1}x, \forall x \in D_0$, desde que $D_0 \neq \emptyset$.
2. $D_0 = (\text{int}S)x \cap (\text{int}S)^{-1}x, \forall x \in D_0$, se $D_0 \neq \emptyset$.
3. $D_0 \neq \emptyset$ caso $SD \subset D$, ou $S^{-1}D \subset D$. No último caso, também é verdadeiro que $D_0 = D$.

Demonstração: Para mostrarmos o item 1, sejam $x \in D_0$ e $y \in D$, então, existe $g \in \text{int}S$ tal que $x = g^{-1}x$, isto é, $(\text{int}S)^{-1}x \cap D \neq \emptyset$. Visto que $D \subset \text{fe}(Sx)$, e $(\text{int}S)^{-1}x \cap D$ é vizinhança de x em D , segue que $Sy \cap (\text{int}S)^{-1}x \neq \emptyset$, logo $y \in S^{-1}(\text{int}S)^{-1}x \cap (\text{int}S)^{-1}x$, e portanto, $D \subset (\text{int}S)^{-1}x$.

Para mostrarmos o item 2, sejam $x \in D_0$ e $y \in (\text{int}S)x \cap (\text{int}S)^{-1}x$. Então, existem $h, g \in \text{int}S$ tais que $y = hx = g^{-1}x$, em particular, se $y = hx$, pela maximalidade de D , temos $y \in D$. Além disso,

$$y = hx = (hg)y$$

com $hg \in \text{int}S$, e assim, segue que $y \in D_0$.

Reciprocamente, tome $x, y \in D_0$. Então, pelo item anterior desta proposição, $D_0 \subset (\text{int}S)^{-1}x$, e $D_0 \subset (\text{int}S)^{-1}y$. Segue que,

$$y \in (\text{int}S)^{-1}x \cap (\text{int}S)x.$$

Para mostrarmos o item 3, suponha que $SD \subset D$. Então,

$$D_0 \supset (\text{int}S)D \cap SD = (\text{int}S)D$$

e como $\text{int}D \neq \emptyset$, isto implica em $D_0 \neq \emptyset$.

Caso $S^{-1}D \subset D$, para cada $x \in D$, $(\text{int}S)^{-1}x$ é uma vizinhança de x em D , e dessa forma, segue que $S_x \cap (\text{int}S)^{-1}x \neq \emptyset$, ou seja, existem $g \in S$ e $h \in \text{int}S$ tais que $gx = h^{-1}x$, ou $(hg)x = x$ com $hg \in \text{int}S$. E, portanto, $x \in (\text{int}S)^{-1}x$, e assim $x \in D_0$. Donde conclui-se que $D_0 = D$.

■

Além de evitar patologias, a condição de maximalidade para conjuntos controláveis torna possível a existência de uma ordem natural entre conjuntos controláveis, onde o conjunto S -invariante é maximal, e o conjunto S^{-1} -invariante é minimal. Sejam D_1 e D_2 conjuntos controláveis, a relação dada por

$$D_1 \leq D_2 \iff \exists x \in D_1 : \text{fe}(Sx) \cap D_2 \neq \emptyset. \quad (3.1)$$

define uma relação de ordem parcial entre os conjuntos controláveis. A proposição seguinte nos fornece uma forma alternativa de caracterizar a relação expressa em 3.1 que facilita a verificação de tal fato.

Proposição 40 *Sejam D_1 e D_2 conjuntos controláveis tais que $D_1 \leq D_2$ segundo a relação 3.1. Então,*

$$\text{fe}(Sx) \cap D_2 \neq \emptyset, \quad \forall x \in D_1.$$

Demonstração: Suponha que $D_1 \leq D_2$, então existe $x \in D_1$ tal que

$$\text{fe}(Sx) \cap D_2 \neq \emptyset.$$

Uma vez que $D_1 \subset \text{fe}(Sx)$, $\forall x \in D_1$, temos que, para todo $z \in D_1$, $x \in \text{fe}(Sz)$.

Agora, dado $y \in \text{fe}(Sx) \cap D_2$ temos

$$y \in \text{fe}(Sx) \quad \text{e} \quad x \in \text{fe}(Sz)$$

implicando em $y \in \text{fe}(Sz)$. De fato, existem sequências (g_n) e (h_m) de elementos de S tais que

$$g_n x \longrightarrow y \quad \text{e} \quad h_m z \longrightarrow x$$

quando $m, n \longrightarrow \infty$. Se V é uma vizinhança de y , então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g_{n_0} x \in V$. Visto que a ação à esquerda define uma aplicação contínua, e $h_m z \longrightarrow x$, temos

$$g_{n_0} h_m z \longrightarrow g_{n_0} x \in V$$

quando $m \longrightarrow \infty$, e assim $x \in \text{fe}(Sz)$

E, portanto, $D_2 \cap \text{fe}(Sz) \neq \emptyset$, $\forall z \in D_1$.

■

Proposição 41 *Sejam D_1 e D_2 conjuntos controláveis, então a relação*

$$D_1 \leq D_2 \iff \exists x \in D_1 : \text{fe}(Sx) \cap D_2 \neq \emptyset.$$

define uma ordem parcial na coleção dos conjuntos controláveis para a ação de S em M .

Demonstração: Uma relação de ordem no conjunto dos conjuntos controláveis de S em M deve ser uma relação reflexiva, antissimétrica, e transitiva. E de fato, " $\leq$ " atende à essas características.

- Reflexividade: Seja D conjunto controlável, dado qualquer $x \in D$, pela própria definição, temos $D \subset \text{fe}(Sx)$, isto é, $D \leq D$.
- Transitividade: Sejam D_1, D_2 , e D_3 conjuntos controláveis tais que

$$D_1 \leq D_2 \quad \text{e} \quad D_2 \leq D_3$$

então, existem $x \in D_1$ e $y \in D_2$ tais que

$$\text{fe}(Sx) \cap D_2 \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \text{fe}(Sy) \cap D_1 \neq \emptyset.$$

Dado $z \in \text{fe}(Sx) \cap D_2 \neq \emptyset$, como $z \in D_2$ e $D_2 \leq D_1$, a proposição 40 garante que

$$\text{fe}(Sz) \cap D_3 \neq \emptyset.$$

Observando que

$$z \in \text{fe}(Sx) \implies \text{fe}(Sz) \subset \text{fe}(Sx),$$

segue que $\text{fe}(Sx) \cap D_3 \supset \text{fe}(Sz) \cap D_3 \neq \emptyset$, e portanto $D_1 \leq D_3$.

- Anti-simetria: Sejam D_1 e D_2 conjuntos controláveis tais que

$$D_1 \leq D_2 \quad \text{e} \quad D_2 \leq D_1.$$

Pela Proposição 40, segue que

$$\text{fe}(Sx) \cap D_2 \neq \emptyset, \forall x \in D_1 \quad \text{e} \quad \text{fe}(Sy) \cap D_1 \neq \emptyset, \forall y \in D_2.$$

Mostremos que $D_1 = D_2 = D_1 \cup D_2$. Isso ocorre justamente porque $D_1 \cup D_2$ também é conjunto controlável. Primeiramente, convém observar que $D_1 \cup D_2 \neq \emptyset$.

Para cada $x \in D_1$ temos

$$D_1 \subset \text{fe}(Sx),$$

e como $D_1 \leq D_2$, $\text{fe}(Sx) \cap D_2 \neq \emptyset$. Seja $y \in \text{fe}(Sx) \cap D_2$, segue que

$$D_2 \subset \text{fe}(Sy) \subset \text{fe}(Sx)$$

afinal, y está no fecho da órbita de x . Logo,

$$D_1 \cup D_2 \subset \text{fe}(Sx).$$

Analogamente, para todo $z \in D_2$, existe $w \in \text{fe}(Sz) \cap D_1$, e assim

$$D_1 \subset \text{fe}(Sw) \subset \text{fe}(Sz).$$

Logo, $D_1 \cup D_2 \subset \text{fe}(Sz)$ para todo $z \in D_2$.

Dessa forma, $D_1 \cup D_2$ satisfaz as condições suficientes para ser declarado conjunto controlável, e assim, pela propriedade da maximalidade, temos $D_1 = D_2 = D_1 \cup D_2$.

■

Sobre a existência de conjuntos controláveis, é claro que nem todo semigrupo admite conjuntos controláveis. Por exemplo, um caso simples ocorre quando considera-se o semigrupo $\{\varphi_t(x) = x + t : t \geq 0\}$ agindo na reta $\mathbb{R}$. Neste caso, não há conjunto no fecho de Sx com interior não vazio, principalmente porque as órbitas fogem do ponto inicial. No caso geral pode-se considerar um exemplo análogo. Entretanto, é conhecido que, quando M é compacto, os conjuntos controláveis sempre existem.

3.2 Conjuntos Controláveis Invariantes

Os conjuntos controláveis invariantes são importantes, pois, estes são maximais pela ordem dada na Proposição 41. Além disso, sob certas hipóteses, obtemos a unicidade do conjunto controlável invariante.

Definição 50 *Um conjunto controlável invariante para S em M é um conjunto controlável para S em M tal que*

$$\text{fe } Sx = \text{fe } C, \quad \forall x \in C.$$

Um subsemigrupo $S \subset G$ é dito acessível a partir de $x \in M$ quando a órbita $Sx = \{gx \in M : g \in S\}$ satisfaz $\text{int } Sx \neq \emptyset, \forall x \in M$. Considerando a ação de um semigrupo S acessível, todo conjunto controlável invariante é um conjunto fechado (ver [13] e [18]). Além disso, seja C um conjunto controlável invariante para S , então, $\text{int } C \neq \emptyset$,

$\text{fe}(\text{int } C) = C$, e cada conjunto fechado que satisfaça $\text{fe}(Sx) \subset \text{fe}(C) = C, \forall x \in M$ é um conjunto controlável invariante para S .

Por essas propriedades apresentadas, quando olhamos para a interseção dos fechos das órbitas em cada ponto de M , uma vez garantido que esse conjunto não vazio, é claro que obtemos um conjunto controlável invariante. E, por esse motivo, não é estranho que ocorra o que é descrito na seguinte proposição.

Proposição 42 *Seja C um conjunto controlável invariante tal que*

$$C = \bigcap_{x \in M} \text{fe}(Sx) \neq \emptyset.$$

Então, C é o único controlável invariante para S em M .

Para mais detalhes ver [13] e [18].

Uma observação importante é que conjuntos controláveis invariantes, em geral, não são conjuntos S -invariantes, isto é, conjuntos C que satisfazem $SC \subset C$. Porém, o fecho desses conjuntos é, de fato, S -invariante. Em particular, quando o semigrupo é acessível, cada conjunto controlável invariante é fechado, e por isso são também conjuntos S -invariantes.

A proposição 42 acarreta ainda resultados sobre a transitividade de S em M , como será visto no próximo corolário.

Definição 51 *Seja S um subsemigrupo do grupo G agindo em M . Então, S é dito transitivo se $Sx = M, \forall x \in M$.*

Corolário 8 *Seja $C = \bigcap_{x \in M} \text{fe}(Sx) \neq \emptyset$ o único conjunto controlável invariante para S em M . Suponha que exista um conjunto C^- que é S^{-1} -invariante e tal que $(\text{int}C) \cap (\text{int}C^-) \neq \emptyset$. Então, S é transitivo em M .*

Demonstração: Se C é um conjunto invariante, então $\forall g \in S$ e $\forall x \in C, gx \in C$. Em particular, $gx \in C, \forall g \in (\text{int}S)$ e $\forall x \in C$, ou seja, o conjunto de transitividade C_0 em C é dado por, $C_0 = (\text{int}S)C \cap C = C$. Logo, C é conjunto controlável efetivo.

Segue que, dado $x \in C_0, x \in (\text{int}S)^{-1}x$ e $x \in \text{fe}(S_y), \forall y \in M$, ou seja, $x \in S_y, \forall y \in M$, o que significa que $\forall y \in M, \exists g \in S$ tal que $gy = x$, ou ainda, $x = g^{-1}y$, portanto $S^{-1}x = M$.

Uma vez que C_0 é denso em C , é possível tomar

$$x \in (\text{int}C^-) \cap C_0$$

afinal $(\text{int}C^-)$ é vizinhança de algum ponto de C_0 .

Como, por hipótese, C^- é S^{-1} -invariante e $S^{-1}x = M$, então $M \subset C^-$, isto é, $C^- = M$.

Pela Propriedade 3 da Proposição 39, $S^{-1}C^- \subset C^-$ implica em $C_0 = C^- = M$, e assim,

$$S^{-1}x = M, \quad \forall x \in C_0 = M$$

o que equivale a dizer que S^{-1} é transitiva em M . Além disso, a transitividade de S^{-1} em M , significa que $y \in M$, existe $g \in S$ tal que $g^{-1}x = y, \forall x \in M$, mas se $g^{-1}x = y$, então $x = gy$ que se reverte em transitividade para S em M .

■

Definição 52 *Seja G um grupo de Lie agindo em uma variedade M . Dado $g \in G$, um subconjunto $A \subset M$ é dito g -invariante quando $gA \subset A$.*

Outro importante resultado sobre a existência de conjuntos controláveis efetivos, que deve ser notado é dado na seguinte proposição, originalmente em [28].

Proposição 43 *Seja $g \in \text{int}S$ e Ω um conjunto minimal para a g -ação em M . Então, existe um conjunto controlável D para S tal que $\Omega \subset \text{int}D$. Em particular, os pontos fixos da g -ação estão no interior de um conjunto controlável.*

Demonstração: Seja Ω um conjunto minimal para $g \in G$, em particular, Ω é g -invariante, logo, $(\text{int}S)\Omega$ e $(\text{int}S^{-1})\Omega$ são vizinhanças abertas contendo Ω . De fato, por Ω ser g -invariante, temos

$$g\Omega \subset (\text{int}S)\Omega \quad \text{e} \quad g\Omega \subset \Omega \subset g^{-1}\Omega \subset (\text{int}S^{-1})\Omega,$$

e como Ω é minimal, $g\Omega = \Omega$.

Agora, definindo

$$Y = (\text{int}S)\Omega \cap (\text{int}S^{-1})\Omega$$

temos Y um aberto em M contendo Ω .

Dados $x, y \in Y$ e uma vizinhança U de y em Y , então existem $h \in \text{int}S$ e $z \in \Omega$ tais que

$$y = hz \in (\text{int}S)\Omega.$$

Como h define uma aplicação contínua, é possível tomar uma vizinhança V de z em Ω tal que $hV \subset U$.

Por outro lado, $x \in Y$ implica na existência de $h' \in \text{int}S$ tal que $h'x \in \Omega$.

Pela minimalidade de Ω , não pode existir subconjunto de Ω que é fixado por g , logo existe $n > 0$ tal que $g^n h'x \in V$, e portanto, $hg^n h'x \in hV \subset U$, isto é, $y \in \text{fe}(Sx)$.

■

Exemplo 9 *Neste exemplo, vamos determinar o conjunto de transitividade de um conjunto controlável invariante para a ação de um semigrupo de $G = SL(2, \mathbb{R})$ no espaço projetivo $\mathbb{RP}^1$.*

Seja $G = SL(2, \mathbb{R})$. O subconjunto S dos elementos de com entradas estritamente positivas, dado por,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) : a, b, c, d > 0 \right\}$$

é um subsemigrupo de interior não vazio do grupo de Lie G .

Considere a variedade $M = \mathbb{RP}^1$, e defina a seguinte ação de S em M , dada por

$$\begin{aligned} \phi: S \times M &\longrightarrow M \\ (g, [v]) &\longmapsto [gv] \end{aligned}$$

onde $[v] = \text{ger}\{v\}$ é o espaço gerado por v .

Defina, também,

$$C = \{[(x_1, x_2)] \in \mathbb{RP}^1 : x_1, x_2 \geq 0\}.$$

Então, C é conjunto controlável invariante para S em $\mathbb{RP}^1$. De fato, se

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) \quad e \quad [x] = [(x_1, x_2)] \in \mathbb{RP}^1$$

segue que

$$g[(x_1, x_2)] = [(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)]$$

com $ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2 > 0$, e portanto $g[x] \in \text{int}(C)$, e $\text{fe}(S[x]) \subset \text{fe}(C)$. Por outro lado, dados $x, y \in \text{int}(C)$, é possível encontrar

$$g = \sqrt{\frac{x_1 x_2}{y_1 y_2}} \begin{pmatrix} \frac{y_1}{x_1} & 0 \\ 0 & \frac{y_2}{x_2} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

tal que

$$g[x] = [gx] = \left[\sqrt{\frac{x_1 x_2}{y_1 y_2}} (y_1, y_2) \right] = [(y_1, y_2)],$$

e portanto, $\text{fe}(C) = \text{fe}(\text{int } C) \subset \text{fe}(S[x])$.

Como C é fechado, supondo que exista um subconjunto D de M tal que $C \subset D$ e $\text{fe}(S[x]) = \text{fe}(D)$ para todo $[x] \in D$, em particular, ocorre que, para $[x] \in C$

$$C \subset D \subset \text{fe}(S[x]) = \text{fe}(C) = C \quad \forall [x] \in C.$$

Isto é, $D = C$, e o conjunto C é maximal, e portanto, o único conjunto controlável invariante em $\mathbb{RP}^1$.

Observe que, pela ação de S^- , o conjunto controlável invariante passa a ser

$$C^- = \{[(x_1, x_2)] \in \mathbb{RP}^1 : x_1, x_2 \leq 0\}.$$

No caso geral, para $G = SL(n, \mathbb{R})$ vale o resultado análogo, ou seja,

$$C = \{[(x_1, \dots, x_n)] \in \mathbb{RP}^{n-1} : x_1, \dots, x_n \geq 0\}.$$

é conjunto controlável maximal para a ação de

$$S = \{g \in SL(n, \mathbb{R}) : \text{com entradas estritamente positivas}\}$$

em $\mathbb{RP}^{n-1}$.

Quanto ao conjunto de transitividade C_0 , segundo a Proposição 38, temos $C_0 = (\text{int } S)C \cap C$, e por isso, vamos observar apenas que $(\text{int } S)C \subset \text{int } C$.

Sejam

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S$$

e $x = (x_1, x_2) \in C$. Supondo $gx \in C - \text{int } C$, temos

$$ax_1 + bx_2 = 0 \quad \text{ou} \quad cx_1 + dx_2 = 0,$$

o que não é possível, visto que isso acontece somente quando $x_1 = x_2 = 0$. Logo, $gx \in \text{int } C$.

E, portanto, $C_0 = \text{int } C$.

3.3 Fibrações Equivariantes

Na presença de uma ação transitiva do grupo de Lie G em uma variedade diferenciável M , podemos identificar M a um espaço homogêneo dado pelo grupo de Lie quociente entre G e um subgrupo parabólico, por isso, é importante entender o comportamento dos conjuntos controláveis por certas aplicações entre tais espaços. Através do estudo das fibrações entre espaços homogêneos podemos utilizar resultados já conhecidos sobre conjuntos controláveis em outras variedades mergulhadas.

Sejam $L_1 \subset L_2$ subgrupos fechados de G , considere os espaços homogêneos

$$G/L_1 \quad \text{e} \quad G/L_2.$$

Suponha uma aplicação

$$\begin{aligned} \pi : G/L_1 &\longrightarrow G/L_2 \\ gL_1 &\longmapsto \pi(gL_1) = gL_2. \end{aligned}$$

Então, π define uma fibração natural de G/L_1 em G/L_2 .

Uma vez que, $L_1 \subset L_2$, a fibração definida é equivariante, ou seja,

$$\pi \circ g(hL_1) = \pi((gh)L_1) = (gh)L_2 = g(hL_2) = g \circ \pi(hL_1)$$

para quaisquer $g, h \in G$.

Considerando esta fibração é válido o seguinte resultado sobre conjuntos controláveis.

Proposição 44 *Sejam $S \subset G$ subsemigrupo de G , $L_1 \subset L_2$ subgrupos fechados de G , e a aplicação $\pi : G/L_1 \longrightarrow G/L_2$ como definido acima. Suponha a existência de um conjunto controlável efetivo $D \subset G/L_1$ para a ação de S . Denote o conjunto de transitividade de D por D_0 . Então, existe um conjunto controlável efetivo E para a S -ação em G/L_2 tal que $\pi(D_0) \subset E_0$, onde E_0 é o conjunto de transitividade em E .*

Demonstração: Tome $x \in D_0$ e $g \in \text{int}(S)$ tais que $gx = x$. Da equivariância da aplicação π , segue que

$$g(\pi x) = \pi(gx) = \pi(x)$$

dessa forma, a Proposição 43 garante a existência de um conjunto controlável efetivo E tal que $\pi(x) \in \text{int } E$.

Resta mostrar que $\pi(D_0) \subset E_0$. Para isso tome $y \in D_0$, da transitividade de $\text{int } S$ em D_0 existem $g_1, g_2 \in \text{int } S$, tais que

$$g_1 y = x \quad \text{e} \quad g_2 x = y$$

Segue que $g_1 \pi(y) = \pi(g_1 y) = \pi(x)$. Como $\pi(x) \in E$, a maximalidade de E enquanto conjunto controlável garante que $\pi(y) \in E$. Mais que isso, visto que $y \in D_0$, existe $g \in \text{int } S$ tal que $gy = y$, e portanto,

$$g\pi(y) = \pi(gy) = \pi(y)$$

que faz de $\pi(y)$ ponto fixo da g -ação, e assim $\pi(y) \in E_0$. Conclui-se que $\pi(D_0) \subset E_0$.

■

Considerando apenas os conjuntos controláveis invariantes é possível estabelecer um refinamento da proposição acima.

Proposição 45 *Sejam $\pi : G/L_1 \longrightarrow G/L_2$ uma fibração equivariante, e G/L_1 um espaço compacto. Então, são verdadeiras as seguintes afirmações:*

1. *Se $C_1 \subset G/L_1$ é um conjunto controlável S -invariante, então $C_2 = \pi(C_1)$ é um conjunto controlável S -invariante para G/L_2 . Além disso, se, para algum $y \in C_2$, temos $\pi^{-1}\{y\} \subset C_1$, então, $C_1 = \pi^{-1}(C_2)$.*
2. *Se $C_2 \subset G/L_2$ é um conjunto controlável S -invariante, então existe um conjunto controlável S -invariante $C_1 \subset G/L_1$, tal que $\pi(C_1) = C_2$.*

Demonstração: .

Para verificar o item 1, seja C_1 conjunto controlável S -invariante em G/L_1 . A Proposição 45 garante a existência de um conjunto controlável contendo C_2 . Ainda, a equivariância de π garante a S -invariância de $C_2 = \pi(C_1)$. De fato, se $x \in G/L_1$ e $h \in S$, $h\pi(x) = \pi(hx)$ com $hx \in C_1$, e dessa forma C_2 é exatamente esse conjunto controlável.

Suponha $y \in C_2$ tal que $\pi^{-1}\{y\} \subset C_1$, e tome $z \in (C_2)_0$, então, $C_2 = \pi(C_1) \subset (\text{int}S)^{-1}z$, ou seja, existe $g \in \text{int}S$ tal que $gy = z$.

Segue que $g\pi^{-1}\{y\} = \pi^{-1}\{z\}$ de onde se conclui que $\pi^{-1}\{z\} \subset C_1$, pois C_1 é S -invariante.

Da transitividade de $(\text{int}S)$ em $(C_2)_0$, existe $h \in \text{int}S$ tal que $hz = w$, para qualquer $w \in (C_2)_0$, e portanto, $h\pi^{-1}\{z\} = \pi^{-1}\{w\}$, o que faz com que $\pi^{-1}\{w\} \subset C_1$, $\forall w \in (C_2)_0$, logo $\pi^{-1}(C_2)_0 \subset C_1$.

Uma vez que $(C_2)_0$ é denso em C_2 e π é contínua, $\pi^{-1}(C_2)_0$ é denso em C_1 e C_1 é fechado então $C_1 = \pi^{-1}C_2$.

Para ver o item 2, como G/L_1 é compacto, então $\pi^{-1}(C_2) \subset G/L_1$ é compacto, e também S -invariante, pois, da S -invariância de C_2 , para todo $x \in C_2$, $g\pi^{-1}(x) = \pi^{-1}(gx)$, com $gx \in C_2$.

Dessa forma, $\pi^{-1}(C_2)$ contém um conjunto controlável invariante efetivo C_1 . Fixe $x \in C_1$, e portanto,

$$\pi(C_1) = \pi(\text{fe}(Sx)) = \text{fe}(S\pi(x)) = C_2.$$

■

Exemplo 10 *Na proposição 45, vimos que a imagem de um conjunto controlável invariante através de uma fibração equivariante é ainda um conjunto controlável invariante, mas neste exemplo, veremos que a imagem inversa de um conjunto controlável invariante não necessariamente o é.*

Sejam $G = SL(2, \mathbb{R})$ e $S \subset G$ o subsemigrupo das matrizes com entradas estritamente positivas, assim como no Exemplo 9.

Considere a variedade M como sendo a esfera unitária $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$.

Definimos a seguinte ação transitiva de S em S^1 :

$$\begin{aligned} \psi : S \times S^1 &\longrightarrow M \\ (g, x) &\longmapsto \frac{gx}{\|gx\|} \end{aligned}$$

dada pelo produto de $g \in S$ por x , com x visto como vetor coluna.

Podemos entender M como o conjunto dos vetores $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$, com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

De modo análogo ao exemplo 9, mostra-se que

$$C_1 = \{(x_1, x_2) \in S^1 : x_1, x_2 \geq 0\}$$

é um conjunto controlável invariante para S .

Além de C_1 , temos um outro conjunto controlável invariante para esta ação de S . Seja

$$C_2 = \{(x_1, x_2) \in S^1 : x_1, x_2 \leq 0\}.$$

Então, C_2 também é conjunto controlável invariante para S . Observe que, dado $g \in S$,

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

e (x_1, x_2) tal que $x_1, x_2 \leq 0$, temos $g(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)$, em que $ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2 \leq 0$, e assim $fe Sx \subset fe C$. E, por outro lado, dados $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \text{int } C_2$, consideramos o mesmo $g \in S$ do caso de C_1 ,

$$g = \sqrt{\frac{x_1 x_2}{y_1 y_2}} \begin{pmatrix} \frac{y_1}{x_1} & 0 \\ 0 & \frac{y_2}{x_2} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}).$$

e obtemos

$$g(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{\frac{x_1 x_2}{y_1 y_2}}(y_1, y_2)}{\left\| \sqrt{\frac{x_1 x_2}{y_1 y_2}}(y_1, y_2) \right\|} = (y_1, y_2).$$

donde constatamos que $fe(\text{int } C_2) = fe C_2 \subset fe Sx$. E, como C_2 é fechado, a maximalidade segue da mesma forma como no exemplo 9.

Agora, consideremos o conjunto $L = \{x, -x\}$, com um $x \in S^1$ qualquer fixado. É possível ver o espaço projetivo $\mathbb{R}P^1$ como um espaço homogêneo. O quociente S^1/L é isomorfo ao espaço projetivo $\mathbb{R}P^1$, e as suas classes de equivalência são os pontos antípodas em S^1 . Com isso, podemos estudar os conjuntos controláveis em $\mathbb{R}P^1$ por meio do que sabemos sobre os conjuntos controláveis em S^1 .

Definimos a seguinte projeção:

$$\begin{aligned} \pi : S^1 &\longrightarrow \mathbb{R}P^1 \\ x &\longmapsto [x]. \end{aligned}$$

Então, para $x, y \in S^1$, temos $[x] = [y]$ se, e somente se, $y = \pm x$.

Essa projeção é uma fibração equivariante. Denotando por C o conjunto controlável invariante em $\mathbb{R}P^1$, por essa fibração temos

$$\pi(C_1) = \pi(C_2) = C$$

mas,

$$\pi^{-1}(C) = C_1 \cup C_2,$$

em que $C_1 \cup C_2$ não é um conjunto controlável para S em S^1 .

Exemplo 11 De modo geral, seja $G = SL(n, \mathbb{R})$ e S o subconjunto de G das matrizes com entradas positivas. Então, S é subsemigrupo de interior não vazio em G .

Considere a variedade $M = S^{n-1}$ (a esfera em $\mathbb{R}^n$). Identifique cada ponto de M a um vetor unitário $x \in \mathbb{R}^n$. A ação de S em M é dada por:

$$\begin{aligned} S \times M &\longrightarrow M \\ (g, x) &\longmapsto \frac{gx}{\|gx\|}. \end{aligned}$$

Para essa ação, os conjuntos

$$\begin{aligned} C^+ &= \{x \in M : \text{com entradas não negativas}\}, \\ C^- &= \{x \in M : \text{com entradas não positivas}\} \end{aligned}$$

são conjuntos controláveis invariantes em M . De fato, sejam $x = (x_1, \dots, x_n) \in \text{int } C^+$ e $g = (g_{ij}) \in S$, então,

$$gx = \frac{1}{\|gx\|} (\sum_{j=1}^n g_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n g_{nj}x_j)$$

onde $\sum_{j=1}^n g_{ij}x_j \geq 0$ para cada $i = 1, \dots, n$. Claramente, temos que $\text{fe } Sx \subset \text{fe } C^+$. E por outro lado, dados $x, y \in \text{int } C^+$, temos $g \in \text{int } S$ dado por

$$g = \sqrt[n]{\frac{x_1 \cdots x_n}{y_1 \cdots y_n}} \begin{pmatrix} \frac{y_1}{x_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{y_2}{x_2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{y_n}{x_n} \end{pmatrix}$$

que satisfaz $gx = y$, e portanto, $\text{int } C^+ \subset \text{int } Sx$, e $C^+ = \text{fe}(\text{int } C^+) \subset \text{fe}(Sx)$.

De modo análogo, mostra-se que C^- também é conjunto controlável invariante, com a diferença que tomamos $-g$ no lugar de g .

Observe ainda que esses conjuntos controláveis satisfazem $C^- = -C^+$.

Agora, de modo análogo ao exemplo anterior, podemos estudar os conjuntos controláveis em $\mathbb{R}P^{n-1}$ por meio dos conjuntos controláveis em S^{n-1} .

Considerando os elementos de $\mathbb{R}P^{n-1}$ as retas em $\mathbb{R}^n$, definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \pi : S^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R}P^{n-1} \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

onde $[x]$ é o subespaço gerado pelo vetor unitário $x \in S^{n-1}$. A aplicação π é uma fibração equivariante quando consideramos a ação

$$\begin{aligned} S \times \mathbb{R}P^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R}P^{n-1} \\ (g, [x]) &\longmapsto [gx] \end{aligned}$$

Com relação a essa fibração, se definirmos

$$C = \{[x] \in \mathbb{R}P^{n-1} : x_1, \dots, x_n \geq 0\}$$

segue que

$$\pi(C^+) = \pi(C^-) = C$$

é o único conjunto controlável invariante em $\mathbb{R}P^{n-1}$. Embora,

$$\pi^{-1}(C) = C^+ \cup C^-$$

não seja um conjunto controlável.

Com isso, observamos também que nem sempre a imagem inversa de um conjunto controlável por uma fibração equivariante é um conjunto controlável, embora a imagem pela projeção o seja.

Conjuntos Controláveis em Variedades *Flag* Maximais

Neste capítulo, faremos um estudo dos conjuntos controláveis invariantes em variedades *flag* maximais, isto é, em espaços homogêneos do tipo G/P , em que G é um grupo de Lie não compacto conexo semi-simples e P é um subgrupo parabólico minimal de G . No que segue, trataremos da existência e unicidade do conjunto controlável invariante, e da associação dos demais conjuntos controláveis efetivos em G/P a elementos do grupo de Weyl (cada conjunto controlável está associado a um elemento do grupo de Weyl), o que nos permite denotar cada um desses conjuntos como D_w com $w \in W$.

4.1 Conjuntos Controláveis Invariantes em G/P

A seguir, veremos os resultados que levam à conclusão que numa variedade G/P a ação de um semigrupo S de interior não vazio admite exatamente um único conjunto controlável invariante.

Denote por $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G . Então, a ação de G depende unicamente da representação adjunta de G em $\mathfrak{g}$. A imagem de G por essa representação é um grupo de Lie com centro trivial (nulo), e assim não há perda de generalidade em supor que G tem centro finito, e portanto, por todo o texto será considerada essa hipótese sobre o centro de G .

Lema 12 *Existe uma decomposição de Iwasawa $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$, e $H \in \mathfrak{a}$, tais que $h = \exp H \in \text{int}S$. E além disso, $H \in \mathfrak{a}$ pode ser tomado como um elemento $\mathfrak{a}$ -regular (tal que $\lambda(H) \neq 0$ para toda raiz do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$).*

Demonstração: Na Seção 1.3.4 de [35] é possível ver que o conjunto dos elementos regulares $\mathfrak{g}'$ em $\mathfrak{g}$ é a união disjunta de $\mathfrak{g}(\mathfrak{i}_j)$, onde

$$\mathfrak{g}(\mathfrak{i}) = \bigcup_{x \in G} x(\mathfrak{i}') \quad (4.1)$$

com $\mathfrak{i}' = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{i}$ é uma subálgebra de Cartan fixada. Ou seja, cada elemento regular de G é a imagem de um elemento regular na subálgebra de Cartan pela ação de um elemento do grupo.

Uma vez que $\text{int}S \neq \emptyset$, $\text{int}S$ contém algum elemento regular de G , e portanto, S intersecta um subgrupo de Cartan. De fato, pela a Proposição 1.4.1.7 [35] temos que, se

G' é o conjunto dos elementos regulares em G , então

$$G' = \bigcup_{k=1}^s \bigcup_{x \in G} x(J_k)'x^{-1}$$

com $(J_k)' = J_k \cap G'$.

Denote este subgrupo de Cartan por J e seja $\mathfrak{j}$ a sua álgebra de Lie. Então, J é o centralizador de $\mathfrak{j}$ em G , e $\mathfrak{j}$ é uma subálgebra abeliana de $\mathfrak{g}$.

A Proposição 1.3.1.1 em [35] garante que sempre é possível tomar uma decomposição de Cartan

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$$

de modo que $\mathfrak{j}$ se decompõe como

$$\mathfrak{j} = \mathfrak{j} \cap \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{j} \cap \mathfrak{s} = \mathfrak{j}_k \oplus \mathfrak{j}_s.$$

Denotando $K = \exp \mathfrak{k}$ e $J_k = K \cap J$, segue que J_k é um subgrupo compacto de G , pois G é suposta com centro finito. Além disso, J pode ser decomposto como

$$J = J_k \exp \mathfrak{j}_s = J_k J_s$$

segundo 1.4.1.2 em [35].

Seja σ o conjunto dos elementos $u \in J_k$ para os quais existe $g \in \text{int} S \cap J$ com $g = uh$ para algum $h \in \exp \mathfrak{j}_s$

$$\sigma = \{u \in J_k : \exists g \in \text{int} S \cap J \text{ tal que } g = uh, h \in \exp \mathfrak{j}_s\}$$

e, uma vez que na decomposição $g = uh$ os termos u e h comutam, então σ é um semigrupo de interior não vazio em J_k . Sendo J_k compacto σ deve conter a componente conexa da identidade em J_k , e assim

$$S \cap \exp \mathfrak{j}_s = S \cap J_s \neq \emptyset.$$

Agora, tome $\mathfrak{a}$ como sendo a subálgebra abeliana maximal em $\mathfrak{s}$ contendo $\mathfrak{j}_s$. Então,

$$\text{int} S \cap \exp \mathfrak{a} \supset \text{int} S \cap \exp \mathfrak{j}_s \neq \emptyset,$$

e como o conjunto dos elementos regulares em $\mathfrak{a}$ é aberto e denso, existe $H \in \mathfrak{a}$ tal que $\exp H = h \in \text{int} S$, com H em uma das câmaras em $\mathfrak{a}$.

■

Quanto ao Lema 12, observe que alterando a escolha de $\mathfrak{n}^+$ é possível tomar H na câmara positiva definida na decomposição de Iwasawa, ou seja, $\lambda(H) > 0$ se H é uma raiz no sistema positivo que define $\mathfrak{n}^+$.

Lema 13 *Com as mesmas notações anteriores, sejam h em uma câmara de Weyl positiva A^+ e $n \in N^-$. Então, $h^k n h^{-k} \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração: Sejam $H \in \mathfrak{a}^+$ e $X \in \mathfrak{n}^-$ tais que

$$h = \exp H \quad \text{e} \quad n = \exp X.$$

Então,

$$\begin{aligned}
 h^k n h^{-k} &= (\exp kH)(\exp X)(\exp kH)^{-1} \\
 &= (\exp kH) \left(\sum_{t \geq 0} \frac{X^t}{t!} \right) (\exp kH)^{-1} \\
 &= \sum_{t \geq 0} \frac{(\exp kH) X^t (\exp kH)^{-1}}{t!} \\
 &= \sum_{t \geq 0} \frac{\text{Ad}(\exp kH) X^t}{t!} \\
 &= \sum_{t \geq 0} \frac{\exp(k \text{ad} H) X^t}{t!}
 \end{aligned}$$

para cada t , $X^t \in \mathfrak{n}^-$ e podemos tomar

$$X^t = \sum_{i=1}^r (X^t)_i \quad \text{com } (X^t)_i \in \mathfrak{g}_{-\alpha_i}, \quad i = 1, \dots, r$$

e portanto

$$\begin{aligned}
 h^k n h^{-k} &= \sum_{t \geq 0} \frac{\exp(k \text{ad} H) X^t}{t!} \\
 &= \sum_{t \geq 0} \frac{\exp(k \alpha_1(H))(X^t)_1 \cdots \exp(k \alpha_r(H))(X^t)_r}{t!}.
 \end{aligned}$$

Temos $\alpha_i(H) < 0$, e segue que

$$(k \alpha_i(H))(X^t)_i \longrightarrow 0$$

quando $t \longrightarrow \infty$, e assim $\lim_{k \rightarrow \infty} h^k n h^{-k} = 1$.

■

Teorema 15 *Seja G um grupo de Lie não compacto conexo, e $P_\Theta \subset G$ um subgrupo parabólico de G . Dado um subgrupo S tal que $\text{int} S \neq \emptyset$. Então, S tem um único conjunto controlável invariante em G/P_Θ .*

Demonstração: Seja $G = KAN^+$, com $K = \exp \mathfrak{k}$, $A = \exp \mathfrak{a}$ e $N^+ = \exp \mathfrak{n}^+$, uma decomposição de Iwasawa da forma como o Lema 12 nos permite tomar.

Primeiramente, vamos restringir o estudo aos conjuntos controláveis na variedade *flag* maximal G/P . Isso pode ser feito por meio da fibração equivariante entre G/P e G/P_Θ . Seja P_Θ um subgrupo parabólico de G . Então, P_Θ contém algum subgrupo parabólico minimal P . Considerando a fibração equivariante dada pela projeção

$$\pi : G/P \longrightarrow G/P_\Theta$$

a Proposição 2.2 (ii) em [18] garante que a unicidade do conjunto controlável invariante em G/P implica na unicidade do conjunto controlável invariante em G/P_Θ .

Seja $B = G/P$, é necessário apenas garantir a existência de um $b_0 \in B$, tal que $b_0 \in \text{fe} S b$ para todo $b \in B$. De fato, se tal elemento existe, então a Propriedade (iv) [18] garante que S tem um único conjunto controlável invariante em B .

Seja M o centralizador de A em K . Então, $P_0 = MAN^+$ é o subgrupo parabólico minimal de G . Como todos os subgrupos parabólicos minimais são conjugados entre si (unicidade da decomposição de Iwasawa a menos de um automorfismo), sem perda de generalidade, podemos tomar B como G/P_0 , e $b_0 = P_0$ a identidade nesse quociente.

Seja $\mathfrak{n}^-$ a subálgebra oposta a $\mathfrak{n}^+$ no sentido em que $\mathfrak{n}^-$ é a soma dos espaços de pesos associados a raízes negativas. Tomando H como no Lema 12, um elemento *split* regular, e portanto, podemos ver $\mathfrak{n}^-$ como a soma dos autoespaços associados aos autovalores negativos de $\text{ad}(H)$, onde ad indica a representação adjunta de $\mathfrak{g}$.

Pela decomposição de Bruhat, o subconjunto

$$N^- MAN^+ \subset G MAN^+ = B$$

é aberto e denso em B , e portanto, dado qualquer $b' \in B$ existe $g \in \text{int}S$ tal que

$$gb' \in N^- MAN^+,$$

pois, $\text{int}Sb_0 \cap N^-b_0 \neq \emptyset$.

No entanto, se $b \in N^- MAN^+$, então b é escrito como

$$b = nMAN^+, \quad n \in N^-$$

e a ação adjunta de h em $b \in G/P$ como

$$h^k(b) = h^k n h^{-k} MAN^+.$$

Como $\lim_{k \rightarrow \infty} h^k n h^{-k} = 1$, para qualquer $n \in N^-$, $N^- = \exp \mathfrak{n}^-$, segue que

$$h^k(b) \longrightarrow b_0 \quad \text{quando} \quad k \longrightarrow \infty,$$

e como $h^k \in \text{int}S$, $\forall k \in \mathbb{N}$, então $b_0 \in \text{fe}(Sb)$, $\forall b \in S$.

■

A seguir, sejam G um grupo de Lie semi-simples não compacto de centro trivial nulo, e S um semigrupo em G tal que $\text{int}S \neq \emptyset$, denote por C o único conjunto controlável invariante em G/P_0 .

Seja $C_0 \subset \text{int}C$ o conjunto de transitividade em C . Então, é possível caracterizar C_0 em termos de elementos semi-simples em $\text{int}S$. Essa relação é feita da mesma forma como a associação entre b_0 e h na demonstração do Teorema 15, como segue.

Fixe $b_0 \in B$, e uma decomposição de Langlands

$$P_0 = MAN^+$$

do subgrupo parabólico minimal correspondente, ou seja, o subgrupo de isotropia em b_0 . Associada a esta decomposição, tome uma decomposição de Iwasawa

$$G = KAN^+$$

com grupo de Weyl $W = W(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ relativo ao sistema de raízes do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$.

O grupo de Weyl pode ser visto como um subgrupo de $GL(\mathfrak{a})$. Se M^* é o normalizador de A em K , e M o centralizador de A em K , então, a ação de W em $\mathfrak{a}$ é dada pela ação adjunta de M^* em $\mathfrak{a}$, e W é isomorfo à M^*/M , como estabelece a Proposição 30.

Uma vez que, para cada $w \in W$, existe um representante de w em $M^* \subset K$, é possível supor fixado esse representante de cada classe e tomar a ação de K em G/P como uma ação de M^* em G/P .

Por causa desse fato, a ação de W em $\mathfrak{a}$ é denotada por $w(H)$, com $H \in \mathfrak{a}$, bem como denotamos a adjunta $\text{Ad}(w)(H)$. Além disso, ao olhar para W como um subconjunto de K temos um elemento bem definido

$$w(b_0) \in B = G/P$$

dado pelo subgrupo parabólico

$$wb_0w^{-1} = wP_0w^{-1} = wMAN^+w^{-1} = MAwN^+w^{-1}.$$

que no quociente G/P_0 pode ser visto como wP_0 , ou wM em K/M .

A fim de explicitar essa relação será necessário uma nova terminologia e a definição de certos conjuntos.

Suponha $\text{int } S \cap A \neq \emptyset$, e defina

$$\Lambda_0 = \{H \in \mathfrak{a} : \exp(tH) \in \text{int } S, \text{ para algum } t > 0\}.$$

O conjunto Λ_0 é um cone, pois $c\Lambda_0 = \Lambda_0$, $\forall c \in \mathbb{K}$, e também é conexo. De fato, se $\text{int } S \cap A \neq \emptyset$, existe $H \in \mathfrak{a}$ tal que $\exp H \in \text{int } S$, e portanto existe um intervalo (a, b) , $b > a > 0$, tal que

$$\exp(tH) \in \text{int } S, \quad \forall t \in (a, b).$$

Para $k \in \mathbb{N}^*$

$$\exp(tH) \in \text{int } S, \quad \forall t \in (ka, kb).$$

E, tomando k suficientemente grande

$$\frac{k}{k-1} < \frac{b}{a} \iff ka < (k-1)b$$

e portanto, existe $t_0 > 0$ tal que, se $t > T$. Então,

$$\exp(tH) \in \text{int } S.$$

Como $A = \exp \mathfrak{a}$ é grupo abeliano, tomando

$$\begin{aligned} \exp \left((t_1 + t_2) \left(\frac{t_1}{t_1 + t_2} H_1 + \frac{t_2}{t_1 + t_2} H_2 \right) \right) &= \exp(t_1 H_1 + t_2 H_2) \\ &= \exp(t_1 H_1) \exp(t_2 H_2) \in \text{int } S \end{aligned}$$

e portanto,

$$\frac{t_1}{t_1 + t_2} H_1 + \frac{t_2}{t_1 + t_2} H_2 \in \Lambda_0.$$

Fixando t_2 e tomando $t_1 \rightarrow \infty$ percorremos o segmento de H_1 a H_2 , e vice-versa. De ambas as formas, todos os pontos no segmento que liga H_1 a H_2 estão inteiramente contidos em Λ_0 , logo Λ_0 é convexo.

Agora, defina

$$\begin{aligned} \Lambda &= \{h \in A : \exists n \in N^+ \text{ tal que } hn \in \text{int } S\} \\ &= \{h \in A : \exists n \in N^+ \text{ tal que } nh \in \text{int } S\}. \end{aligned}$$

Note que, não há ambiguidade na definição, pois

$$hn = (hnh^{-1})h, \quad \text{com } hnh^{-1} \in A.$$

E ainda, uma vez que A normaliza N^+ , então

$$(h_1n_1)(h_2n_2) = h_1h_2\bar{n}$$

para algum $\bar{n} \in N^+$, e assim segue que Λ é um subgrupo aberto em A .

Defina também

$$\tilde{\Lambda} = \{H \in \mathfrak{a} : \exp(tA) \in \Lambda \text{ para algum } t > 0\}.$$

Tomando $n = 1 \in N^+$ é fácil ver que $\Lambda_0 \subset \tilde{\Lambda}$. E, portanto, é possível mostrar, do mesmo modo como em Λ_0 , que $\tilde{\Lambda}$ é um cone convexo em $\mathfrak{a}$.

Seja $\mathfrak{a}^+$ a câmara de Weyl positiva determinada pela decomposição de Iwasawa fixada

$$G = KAN^+.$$

Então, a demonstração do Teorema 15 garante que $b_0 \in \text{fe } Sb, \forall b \in B$, e pela Proposição 42, o único conjunto controlável invariante é

$$C = \bigcap_{x \in B} \text{fe } Sx,$$

e, temos que $b_0 \in C_0$, desde que $\Lambda_0 \cap \mathfrak{a}^+ \neq \emptyset$.

Ainda assim, para fins práticos, será necessário mais um refinamento sobre a discussão realizada até o presente momento.

Lema 14 *Com a mesma notação descrita acima, seja C o único conjunto controlável invariante para S . Suponha que $b_0 \in C_0$ e $\text{int } S \cap A \neq \emptyset$. Se $w \in W$ é tal que $w(b_0) \in C_0$, então, $w^{-1}(\Lambda_0) \subset \tilde{\Lambda}$.*

Demonstração: Sejam

$$b^* = w(b_0) \quad \text{e} \quad N^* = wN^+w^{-1} = w(N^+).$$

Então, $P^* = wP_0w^{-1} = MAN^*$ é subgrupo de isotropia da ação de G no elemento $b^* \in B = G/P$.

Como $b_0, b^* \in C_0$, existem $g_1, g_2 \in \text{int } S$ tais que

$$g_1b^* = b_0 \quad \text{e} \quad g_2b_0 = b^*.$$

Seja $g_1 = uh_1n_1$ uma decomposição de g_1 com $u \in K$, $h_1 \in A$ e $n_1 \in N^*$. Temos que

$$b_0 = g_1b^* = (uh_1n_1)b^* = ub^*.$$

Como $b_0 = w^{-1}b^*$, então segue que

$$u \in w^{-1}M \in K/M = B.$$

Logo, existe $m_1 \in M$ tal que $u = w^{-1}m_1$.

De modo análogo, temos $g_2 = vh'_2n'_2$, e

$$b^* = g_2b_0 = (vh'_2n'_2)b_0 = vb_0.$$

Como $wb = b^*$, e portanto, existe $m'_2 \in M$ tal que $v = wm'_2$, e assim

$$g_2 = wm'_2 h'_2 n'_2$$

com $m'_2 \in M$, $h'_2 \in A$, $n'_2 \in N^+$. Observe que é possível escrever também

$$\begin{aligned} g_2 &= wm'_2(w^{-1}w)h'_2(w^{-1}w)n'_2(w^{-1}w) \\ &= (wm'_2w^{-1})(wh'_2w^{-1})(wn'_2w^{-1})w \\ &= m_2h_2n_2w \end{aligned}$$

com $m_2 = wm'_2w^{-1} \in M$, $h_2 = wh'_2w^{-1} \in A$, e $n_2 = wn'_2w^{-1} \in N^*$.

Sejam $H \in \Lambda_0$ e $T > 0$ tais que se $t > T$, então $h_t = \exp(tH) \in \text{int } S$. Considerando $t > T$,

$$g_2 h_t g_2 \in \text{int } S,$$

pois, $\text{int } S$ é um ideal. Temos, portanto,

$$\begin{aligned} g_1 b g_2 &= (w^{-1}m_1 h_1 n_1) h_t (m_2 h_2 n_2 w) \\ &= w^{-1}m_1 \bar{n}_2 (h_1 h_2 h_t) m_2 n_2 n_2 w \\ &= w^{-1}m_1 \bar{n}_2 (h_1 h_2 h_t) m_2 n_2 w \\ &= w^{-1} \bar{m} (h_1 h_2 h_t) \bar{n} w \end{aligned}$$

pois M normaliza A , $\bar{n} \in N^*$, A normaliza N^* , e $n_1, n_2 \in N^*$.

Defina $\bar{h}_t = w^{-1}(h_1 h_2 h_t)w$. Então, temos que

$$\begin{aligned} g_1 h_t g_2 &= w^{-1} \bar{m} (h_1 h_2 h_t) \bar{n} w \\ &= (w^{-1} \bar{m} w) (w^{-1} h_1 h_2 h_t w) (w^{-1} \bar{n} w). \end{aligned}$$

Nomeando $w^{-1} \bar{n} w = n_0$, $w^{-1} \bar{m} w = m_0$, temos

$$g_1 h_t g_2 = m_0 \bar{h}_t n_0 \in \text{int } S$$

com $n_0 \in N^+$.

Agora, fixe t e defina o subconjunto σ de M como

$$\sigma = \{m \in M : \exists k \in \mathbb{N}, \exists n \in N^+ : m \bar{h}_t^k n \in \text{int } S\}.$$

Assim, como na demonstração do Lema 12, mostra-se que σ é um semigrupo com interior não vazio em M . De fato, $\sigma \neq \emptyset$, afinal, $g_1 \bar{h}_t g_2 = m_0 \bar{h}_t^k n_0 \in \text{int } S$, então $m_0 \in \sigma$. Além disso, sejam $m_1, m_2 \in \sigma$. Então, existem $n_1, n_2 \in N^+$ tais que,

$$m_1 \bar{h}_t^{k_1} n_1, m_2 \bar{h}_t^{k_2} n_2 \in \text{int } S.$$

Logo, temos que,

$$\begin{aligned} m_1 \bar{h}_t^{k_1} n_1 m_2 \bar{h}_t^{k_2} n_2 &= \bar{n}_1 m_1 \bar{h}_t^{k_1} m_2 \bar{h}_t^{k_2} n_2 \\ &= \bar{n}_1 m_1 m_2 \bar{h}_t^{k_1+k_2} n_2 \\ &= m_1 m_2 \bar{h}_t^{k_1+k_2} \bar{n}'_1 n_2 \in \text{int } S. \end{aligned}$$

E ainda, σ é aberto. De fato, fixado $k \in \mathbb{N}$ e $n \in N^+$, defina

$$\begin{aligned} \gamma_{n,k} : M &\longrightarrow MAN^+ \\ m &\longmapsto m \bar{h}_t^k n \end{aligned}$$

Então, podemos reescrever σ da seguinte forma

$$\sigma = \bigcup_{k \in \mathbb{N}, n \in N^+} \gamma_{n,k}^{-1}(MAN^+ \cap \text{int } S),$$

e assim, observando que $\gamma_{n,k}^{-1}$ é diferenciável e $MAN^+ \cap \text{int } S$ é aberto em P , temos que σ é um conjunto aberto, e portanto, um subsemigrupo de interior não vazio em M .

Uma vez que M é subgrupo compacto e $\sigma \subset M$ é um semigrupo aberto, σ deve conter a componente conexa da identidade de M , e por isso, fixado t , existem $k \in \mathbb{N}$ e $n \in N^+$ tais que

$$\bar{h}_t^k n \in \text{int } S,$$

ou seja, denotando $\bar{H}_t = \exp^{-1} \bar{h}_t$, temos

$$\bar{H}_t \in \tilde{\Lambda}.$$

Seja $\hat{H}_t = \exp^{-1}(h_t h_1 h_2)$. Então, para cada $r \in \mathbb{R}$,

$$\exp(r \hat{H}_t) = \exp(r \exp^{-1}((\exp(tH)) h_1 h_2)),$$

e quando $t \rightarrow \infty$ os termos multiplicados com h_t tornam-se insignificantes, isto é, $\exp(r \hat{H}_t)$ se aproxima de $\exp(tH)$ quando $t \rightarrow \infty$. E, portanto, os semigrupos de raio definidos por $\hat{H}_t$ se aproximam do semigrupo definido por H quando t cresce.

Da mesma forma, o semigrupos de raio definidos por

$$\bar{H}_t = w^{-1} \hat{H}_t w = w^{-1}(\hat{H}_t)$$

se aproximam do semigrupo definido por

$$w^{-1} H w = w^{-1}(H).$$

Com esse argumento, mostramos que existe uma forma de aproximar $w^{-1}(H)$ por elementos $\bar{H}_t \in \tilde{\Lambda}$, ou seja,

$$w^{-1}(H) \in \text{fe}(\tilde{\Lambda}).$$

Visto que a escolha inicial de $H \in \Gamma$ fora arbitrária, concluímos que

$$w^{-1}(\Gamma) \subset \text{fe}(\tilde{\Lambda}).$$

E, observando que Γ e $\tilde{\Lambda}$ são abertos, segue que,

$$w^{-1}(\Gamma) \in \tilde{\Lambda}.$$

■

Lema 15 *Sejam $g \in \text{int } S$, e $P = MAN^+$ uma decomposição de Langlands do subgrupo de isotropia em b , tais que*

$$g = hn$$

com $n \in N^+$ e $h \in \exp(\mathfrak{a}^+) = A^+$, A^+ é a câmara de Weyl positiva em A . Então, é possível encontrar uma decomposição de Langlands

$$P = M_0 A_0 N_0^+$$

tal que $g \in A_0^+$.

Demonstração: O Teorema 1.1.4.4 em [35] garante que a aplicação $\xi : N^+ \longrightarrow N^+$ dada por

$$\xi(n) = h^{-1}nhn^{-1}$$

é um difeomorfismo analítico para qualquer $h = \exp H$, onde H é um elemento $\mathfrak{a}$ -regular.

Logo, se $n \in N^+$ e $h \in A^+$, existem $n_0 \in N^+$ tal que

$$n = h^{-1}n_0^{-1}hn_0$$

ou seja,

$$hn = n_0^{-1}hn_0 \iff n_0hnn_0^{-1} = h.$$

Logo,

$$M_0 = n_0^{-1}Mn_0, A_0 = n_0^{-1}An_0 \text{ e } N_0^+ = n_0^{-1}N^+n_0$$

nos dá a decomposição de Langlands requerida, com $h \in n_0^{-1}A^+n_0 = A_0^+$.

■

Teorema 16 *Sejam G e S como anteriormente, $\text{int } S \neq \emptyset$. Denote por C o único conjunto controlável invariante para S na variedade flag $B = G/P$. E, seja C_0 o conjunto de transitividade em C . Então, para que $b \in C_0 \subset B$ é necessário e suficiente que exista $g \in \text{int } S$ tal que:*

- $gb = b$;
- Se $P = MAN^+$ é uma decomposição de Langlands do subgrupo de isotropia em b , então

$$g = hn$$

com $n \in N^+$ e $\exp(\mathfrak{a}^+) = h \in A^+$, A^+ é a câmara de Weyl positiva em A .

Demonstração: Seja $b \in C$, e suponha que exista $g \in \text{int } S$ tal que $gb = b$, e se $P = MAN^+$ é uma decomposição de Langlands, segue que

$$g = hn$$

com $n \in N^+$ e $h \in A^+ = \exp \mathfrak{a}^+$. Então, escolha uma decomposição de Iwasawa tal que $H \in \mathfrak{a}$, $h = \exp H \in \text{int } S$, e H é $\mathfrak{a}$ -regular. Dessa forma, assim como no Teorema 15, $b_0 \in \text{fe } Sb$, $h = \exp H \in \text{int } S$, e H , e portanto, $b_0 \in C$. E, visto que $h \in \text{int } S$, da Proposição 36, segue que $b_0 \in C_0$.

Por outro lado, supondo $b_0 \in C_0$, existe uma decomposição de Langlands $P = MAN^+$ tal que $A \cap \text{int } S \neq \emptyset$.

Fixe essa decomposição de Langlands e chame $\mathfrak{a}$ a câmara de Weyl positiva. A união dessas câmaras de Weyl forma um conjunto aberto e denso em $\mathfrak{a}$, e por isso, existe uma câmara $\mathfrak{a}^*$ para a qual $\mathfrak{a}^* \cap \Lambda_0 \neq \emptyset$.

Seja $w \in W$ o único elemento do grupo de Weyl que satisfaz $w(\mathfrak{a}^+) = w\mathfrak{a}^+w^{-1} = \mathfrak{a}^*$, e defina

$$N^* = wN^+w^{-1}$$

e também

$$P = MAN^*.$$

Então, $wPw^{-1} = P^*$ e $w(b) = b^*$, sendo b^* o elemento em B correspondente à P^* .

A câmara $\mathfrak{a}^*$ é positiva para a decomposição $P = MAN^*$, e como $\mathfrak{a}^* \cap \Lambda_0 \neq \emptyset$, $b \in \text{int } C$, e segundo o Lema 14, $w^{-1}(\Lambda_0) \subset \tilde{\Lambda}$.

Além disso,

$$w(\mathfrak{a}^+) = \mathfrak{a}^* \iff w^{-1}(\mathfrak{a}^*) = \mathfrak{a}^+$$

e portanto,

$$\mathfrak{a}^+ \cap \tilde{\Lambda} \neq \emptyset.$$

Como $\Lambda = \{h \in A : \exists n \in N^+ \text{ tal que } hn \in \text{int } S\}$ e $\tilde{\Lambda} = \{H \in \mathfrak{a} : \exp(tH) \in \Lambda \text{ para algum } t > 0\}$, então segue o resultado.

■

Seja

$$\Delta = \{\alpha^+ \in G/MA : \alpha^+ \cap \text{int } S \neq \emptyset\}.$$

Este é o conjunto associado aos elementos em $\text{int } S$ que são atratores para uma variedade aberta e densa (célula de Bruhat). Como visto no Teorema 3.5 em [18], Δ é não vazio, e isso nos permite caracterizar os conjuntos controláveis invariantes da seguinte forma:

Teorema 17 *Sejam C o único conjunto controlável invariante para S em $B = G/P$, e C_0 o conjunto de transitividade em C . Se $\pi : G/MA \rightarrow G/MAN^+$ é a projeção canônica, então*

$$C_0 = \pi(\Delta).$$

Demonstração: Seja C_0 o conjunto de transitividade em C . Pelo Teorema 16, segue que todo elemento $b \in C_0$ é tal que existe $g \in \text{int } S$ com $gb = b$, e $g = hn$, com $h \in A^+$ e $n \in N^+$, para uma decomposição de Langlands de P .

Seja $b \in C_0$ caracterizado como no Teorema 16. Então, existe $g \in \text{int } S$ com $gb = b$, e $g = hn$, com $h \in A^+$, $n \in N^+$, e $P = MAN^+$ é o subgrupo de isotropia em b . Então, tomando

$$\alpha^+ = MA \in \Delta$$

com $g \in A^+$ como no Lema 15, segue que, $C_0 \subset \pi(\Delta)$.

Por outro lado, se $gMA = \alpha^+ \in \Delta$, então existe $s \in gMA \cap \text{int } S$, e portanto

$$sgMA = gMA.$$

Dado $b = gMAN^+$, temos

$$\pi(\alpha^+) = \pi(gMA) = gMAN^+ = b$$

e assim,

$$sb = s\pi(\alpha^+) = \pi(sgMA) = \pi(gMA) = gMAN^+ = b$$

com $s \in \text{int } S$.

Pelo Lema 15, é possível tomar uma decomposição de Iwasawa com $s \in A^+$, e assim segue que $b \in C_0$.

■

4.2 Conjuntos Controláveis Efetivos em G/P

Considerando a decomposição de Iwasawa $G = KAN^+$, e a decomposição de Langlands $P = MAN^+$, é possível olhar $B = G/P$ como um K -espaço homogêneo K/M por meio da restrição da ação de G para um ação de K .

A escolha das subálgebras e subgrupos fixados não é única, porém, não há perda de generalidade em fixar a priori uma certa decomposição, pois é possível obter diferentes decomposições a partir das conjugações em relação a um elemento $g \in G$, isto é,

$$\begin{aligned} gPg^{-1} &= gMAN^+g^{-1} \\ &= (gMg^{-1})(gAg^{-1})(gN^+g^{-1}). \end{aligned}$$

onde gN^+g^{-1} é obtido a partir de gAg^{-1} da mesma forma que N^+ é obtido por A^+ .

Uma vez fixado o subgrupo parabólico minimal P , e uma decomposição de Langlands $P = MAN^+$, o estudo dos conjuntos controláveis em B necessita do uso dessas conjugações por um elemento $g \in G$. Por isso, uma discussão prévia sobre duas fibrações equivariantes é importante para o entendimento do trabalho, e faremos isto a seguir.

A Fibração entre G/MA e G/M^*A

Seja $C_g = \{\text{Ad}(g)(\mathfrak{a}) : g \in G\}$ o conjunto das subálgebras *split* conjugadas à subálgebra abeliana maximal $\mathfrak{a}$. Seja $\text{Ad}(g)(\mathfrak{a}) \in C_g$. Então, definimos $C(g)$ como o conjunto das câmaras de Weyl em $\text{Ad}(g)(\mathfrak{a})$.

Fixada uma subálgebra abeliana $\text{Ad}(g)(\mathfrak{a})$, como o grupo de Weyl age transitivamente sobre as câmaras (ver [22]) e $W \approx M^*/M$, cada câmara em $\text{Ad}(g)(\mathfrak{a})$ é dada por $\text{Ad}(\tilde{w})(\mathfrak{a}^+)$ para uma câmara $\mathfrak{a}^+ \subset \text{Ad}(g)(\mathfrak{a})$ fixada, com $\tilde{w} \in M^*$ representante de $w \in W$, tal como na demonstração da Proposição 30.

Portanto, se

$$\mathcal{C} = \bigcup_{g \in G} C(g)$$

então, $\mathcal{C}$ é conjunto de todas as câmaras de Weyl conjugadas a $\mathfrak{a}^+$.

Definindo uma ação à esquerda de G no conjunto $\mathcal{C}$ das câmaras de Weyl, por

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ (g, \alpha^+) &\longmapsto \text{Ad}(g)\alpha^+ \end{aligned}$$

temos que o subgrupo de isotropia desta ação em $\mathfrak{a}^+$ é o subgrupo MA .

De fato,

$$\text{Ad}(g)\mathfrak{a}^+ = \mathfrak{a}^+ \iff ghg^{-1} = h, \quad \forall h \in A^+ \iff gh = hg, \quad \forall h \in A^+,$$

e visto que o centralizador de A em G é o subgrupo MA (ver 27), então $\text{Ad}(g)\mathfrak{a}^+$ se, e só se, $g \in MA$.

Dessa forma, temos uma bijeção entre o quociente G/MA e $\mathcal{C}$ dada por

$$gMA \longmapsto \text{Ad}(g)\mathfrak{a}^+$$

e por isso, podemos realizar G/MA como o conjunto das câmaras de Weyl em $\mathfrak{g}$ conjugadas à $\mathfrak{a}^+$.

Uma vez estabelecida tal bijeção, podemos interpretar de modo geométrico a fibração canônica

$$\begin{aligned}\pi : G/MA &\longrightarrow G/MAN^+ \\ gMA &\longmapsto gMAN^+.\end{aligned}$$

Dada uma câmara $\alpha \in G/MA$, esta pode ser tomada como

$$\alpha = \text{Ad}(\mathfrak{a}^+)$$

para algum $g \in G$.

Para $\alpha \in \text{Ad}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}$ temos um sistema simples de raízes positivo do par $(\mathfrak{g}, \text{Ad}(\mathfrak{a}))$ que faz de α sua câmara positiva. Com relação a esse sistema, temos uma decomposição de Iwasawa $G = KAN^+$, com subgrupo parabólico minimal

$$P_\alpha = MAN_\alpha.$$

Como $\alpha \in G/MA$, ela é conjugada a uma câmara de Weyl β do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, isto é,

$$\alpha = \text{Ad}(\mathfrak{g})\beta, \quad \beta \in C(1)$$

e portanto, a fibração associa cada câmara α ao subgrupo parabólico minimal

$$P_\alpha = g(P) = gPg^{-1} \in G/MAN^+.$$

Dessa forma é possível dizer que, dado $b \in G/MAN^+$, α é uma câmara positiva para b se, e somente se, $\pi(\alpha) = b$.

Proposição 46 *Sejam $b_0 = MAN^+$ e $\pi : G/MA \longrightarrow G/MAN^+$ a projeção canônica. Então, N^+ age transitivamente sobre a fibra $\pi^{-1}\{b_0\}$.*

Demonstração: Observe que $\pi^{-1}\{b_0\}$ é o conjunto das câmaras de Weyl positivas em $\mathcal{C}$, e portanto, podemos caracterizar $\pi^{-1}\{b_0\}$ como

$$\begin{aligned}\pi^{-1}\{b_0\} &= \{\alpha \in G/MA : \pi(\alpha) = b_0\} \\ &= \{gMA \in G/MA : gMAN^+ = MAN^+\} \\ &= \{gMA \in G/MA : g \in MAN^+\} \\ &= MAN^+/MA \\ &\approx N^+, \end{aligned}$$

ou seja, a fibra $\pi^{-1}\{b_0\}$ é isomorfa a N^+ . Como um grupo sempre age transitivamente sobre si, fica claro que N^+ age transitivamente em $\pi^{-1}\{b_0\}$.

■

Seja $\alpha = A^+$ a câmara positiva para $b_0 = MAN^+$.

Pertencer à fibra $\pi^{-1}\{b_0\}$ significa ser uma câmara positiva para MAN^+ . Segundo a Proposição 46, cada câmara positiva para b_0 é dada pela ação de um elemento $n \in N^+$ sobre α , isto é, esse elemento é da forma

$$n(A^+) = nA^+n^{-1}, \quad n \in N^+.$$

De modo geral, cada elemento $g(P) \in B$ é identificado com o subgrupo parabólico gPg^{-1} , que pode ser escrito da seguinte forma

$$gPg^{-1} = gMAN^+g^{-1} = (gMg^{-1})(gAg^{-1})(gN^+g^{-1})$$

e portanto, qualquer câmara positiva para $g(P) = (gPg^{-1})$ é dada através da conjugação de uma câmara positiva para b_0 , pois a fibração é equivariante. Então, essas câmaras podem ser tomadas da seguinte forma

$$(gng^{-1})(gA^+g^{-1})(gng^{-1})^{-1} = gnA^+n^{-1}g^{-1} = gn(A^+).$$

Além disso, podemos interpretar o subgrupo *split* como um espaço homogêneo, e isso é feito da seguinte forma.

Sejam $b_0 = MAN^+$, e M^* o normalizador de A em K . Tanto, M^* como A são subgrupos fechados de G , e portanto M^*A é também um subgrupo fechado. Mais do que isso, M^*A é o normalizador de A em G (ou $\mathfrak{a}$ em G).

Sendo M^* o normalizador de A em K , e M o centralizador de A em K , temos $M \subset M^*$, e portanto, $MA \subset M^*A$, é claro que MA é normal em M^*A , e assim, podemos definir a seguinte fibração equivariante

$$\begin{aligned} G/MA &\longrightarrow G/M^*A \\ gMA &\longmapsto gM^*A \end{aligned}$$

que leva cada câmara de Weyl numa classe gM^*A identificada com o subgrupo *split* que a contém como câmara positiva.

De fato, seja $\text{split}(G)$ o conjunto dos subgrupos *split* de G . Se $A \in \text{split}(G)$, $A = \exp(\mathfrak{a})$, onde $\mathfrak{a}$ é uma subálgebra *split* de $\mathfrak{g}$. Logo, definindo uma ação de G em $\text{split}(G)$ por

$$(g, \mathfrak{a}) \longmapsto \text{Ad}(g)\mathfrak{a}$$

temos M^*A como subgrupo de isotropia da ação, pois M^*A é o normalizador de $\mathfrak{a}$ em G . Assim, segue que a aplicação

$$\begin{aligned} G/(M^*A) &\longrightarrow \text{split}(G) \\ gM^*A &\longmapsto \text{Ad}(g)\mathfrak{a} \end{aligned}$$

define uma bijeção entre G/MA e o conjunto dos subgrupos *split* de G , evidenciando a interpretação dada no início.

Por meio da bijeção definida acima, é possível estudar uma ação do grupo de Weyl W em nos subgrupos *split*.

A seguir vamos esclarecer a fibração $G/MA \longrightarrow G/M^*A$ que define G/MA como um fibrado principal sobre o espaço base G/M^*A com grupo estrutural W (o grupo de Weyl).

Por causa da Propriedade 2 na definição 25, podemos denotar as fibras do fibrado principal por $P_x = \pi^{-1}\{x\}$, $x \in M$, ou $P_p = \pi^{-1}(\pi(p))$, $p \in P$.

No caso estudado neste trabalho, tratamos somente de fibrados diferenciáveis.

Proposição 47 *A terna $G/MA(G/M^*A, W)$ é um fibrado principal.*

Demonstração: De fato, são verificados os seguintes fatos:

1. Lembrando que $W \approx M^*/M \approx M^*A/MA$, definimos a seguinte ação à direita

$$\begin{aligned} (G/MA \times G/M^*A) &\longrightarrow G/MA \\ (gMA, \tilde{w}aMA) &\longmapsto g\tilde{w}aMA \end{aligned}$$

.

Temos que $g\tilde{w}aMA = gMA$ se, e somente se,

$$g\tilde{w}aMAa^{-1}\tilde{w}^{-1}g^{-1} = gMAg^{-1}$$

que equivale a $\tilde{w}aMA(\tilde{w}a)^{-1} = \tilde{w}aMA = 1MA$, isto é, se $\tilde{w}aMA$ é a identidade em M^*A/MA ;

2. Tome a fibração canônica $\pi : G/MA \longrightarrow G/M^*A$. Para $gM^*A \in G/M^*A$ temos

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(gM^*A) &= \{hMA \in G/MA : hM^*A = gM^*A\} \\ &= \{hMA \in G/MA : h \in gM^*A\} \\ &= \{g\tilde{w}aMA \in G/MA : \tilde{w}a \in M^*A\}.\end{aligned}$$

Por outro lado, se $gMA \in G/MA$, temos

$$\begin{aligned}gMAM^*A/MA &= \{(gMA)(\tilde{w}aMA) : \tilde{w}a \in M^*A\} \\ &= \{(g\tilde{w}aMA) : \tilde{w}a \in M^*A\}.\end{aligned}$$

Ou seja, as órbitas de gM^*A pelo grupo estrutural W coincidem com $\pi^{-1}\{gM^*A\}$;

3. Quanto a trivialização local, seja $gM^*A \in G/M^*A$ e $U \subset G/M^*A$ uma vizinhança contendo gM^*A . Defina $\phi : \pi^{-1}\{U\} \longrightarrow M^*A/MA$ por

$$\phi(g\tilde{w}aMA) = \tilde{w}aMA$$

e assim, $\psi : \pi^{-1}\{U\} \longrightarrow U \times M^*A/MA$ é dada por

$$\psi(p) = (\pi(p), \phi(p)), \quad p \in G/MA$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\phi((g\tilde{w}aMA)(\tilde{w}_1a_1MA)) &= \phi(g(\tilde{w}a\tilde{w}_1a_1)MA) \\ &= \tilde{w}a\tilde{w}_1a_1MA \\ &= (\tilde{w}aMA)(\tilde{w}_1a_1MA) \\ &= \phi(g\tilde{w}aMA)(\tilde{w}_1a_1MA)\end{aligned}$$

e ψ é difeomorfismo, pois os conjuntos são todos grupos de Lie, com aplicações definidas através do produto nesses grupos.

■

Definição 53 A ação à direita do grupo de Weyl W sobre G/MA é dada por

$$(gMA)w = g\tilde{w}MA$$

onde $\tilde{w} \in M^*$ é um representante de $w \in W$.

Considerando a interpretação geométrica das fibrações entre G/MA e G/M^*A , e G/MA e G/MAN^+ , podemos também compreender a ação à direita de W em G/MA de acordo com tal realização.

Seja A^+ a câmara de Weyl positiva para $b_0 = P = MAN^+$, e $\alpha^+ = gMA$ uma câmara de Weyl qualquer em G/MA e $\alpha = gM^*A$ o subgrupo *split* de G contendo α^+ . Então, temos que

$$\alpha^+ = gA^+g^{-1} \quad \text{e} \quad \alpha = gAg^{-1}$$

Por esse fato, o normalizador de $\alpha = gAg^{-1}$ em gKg^{-1} é gM^*g^{-1} . Logo, dado $w \in W$ e $\tilde{w} \in W^*$ um de seus representantes, temos

$$\alpha^+w = (gMA)w = g\tilde{w}MA,$$

considerando a ação à direita de W em G/MA .

Observando, novamente, que o grupo de Weyl W é isomorfo ao quociente M^*/M , a conjugação por $g \in G$ define um isomorfismo entre os grupos de Weyl do par $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ e o grupo de Weyl do par $(\mathfrak{g}, \alpha)$ que associa $\tilde{w}$ a $g\tilde{w}g^{-1}$. Isto é,

$$W \approx M^*/M \longrightarrow (gM^*g^{-1})/(gMg^{-1}) \approx W_\alpha$$

e

$$\begin{array}{ccc} M^*A/MA & \rightarrow & (gM^*Ag^{-1})/(gMAg^{-1}) \\ \tilde{w}aMA & \mapsto & g\tilde{w}MA. \end{array}$$

De forma mais explícita, $\alpha^+w \in G/MA$ é identificado com a câmara

$$\begin{aligned} g\tilde{w}A^+ &= g\tilde{w}A^+(g\tilde{w})^{-1} \\ &= (g\tilde{w}g^{-1})(gA^+g^{-1})(g\tilde{w}^{-1}g^{-1}) \\ &= (g\tilde{w}g^{-1})(gA^+g^{-1}). \end{aligned}$$

Primeiramente, $MA = Z_G(\mathfrak{a})$ (centralizador de $\mathfrak{a}$ em G) é um subgrupo fechado de $P = MAN^+$, e assim, a partir do quociente G/MA definimos a fibração equivariante

$$G/MA \longrightarrow G/MAN^+$$

dada pela inclusão

$$gMA \longmapsto gMAN^+, \quad \forall g \in G.$$

Observando que MA é o centralizador de A (ou $\mathfrak{a}$) em G , então MA é o subgrupo que fixa a câmara positiva $\mathfrak{a}^+$ (e A^+). Isso posto, considerando a identificação

$$g(P) \longleftrightarrow gPg^{-1} \longleftrightarrow \text{Ad}(g)\mathfrak{p}$$

o quociente G/MA pode ser interpretado como o conjunto das câmaras positivas, e a fibração é a aplicação que associa cada uma dessas câmaras ao subgrupo parabólico minimal (ou subálgebra parabólica minimal) que a contém como a câmara positiva.

Uma outra importante observação reside no fato que MA é o normalizador de N^+ em G . Isto implica que a ação de N^+ sobre a fibra em $b_0 = MAN^+$ é transitiva, e portanto cada câmara positiva em MAN^+ é da forma

$$nA^+n^{-1}, \quad n \in N^+.$$

Considerando $N^* = gN^+g^{-1}$ e $P^* = gP^+g^{-1}$, então é verdadeiro também que N^* age transitivamente sobre $b^* = MAN^*$, e portanto, as câmaras positivas em MAN^* são da forma

$$nA^*n^{-1}, \quad n \in N^*.$$

com $A^* = gA^+g^{-1}$.

O produto M^*A também define um subgrupo fechado e que contém MA . Tomando a aplicação

$$G/MA \longrightarrow G/M^*A$$

temos uma fibração equivariante de G/MA em G/M^*A .

Como MA é o normalizador de A em G é possível identificar o quociente G/M^*A ao conjunto dos subgrupos *split*, isto é, os conjuntos gAg^{-1} com $g \in G$, e assim, é possível entender essa fibração como uma aplicação que associa cada câmara de Weyl ao subgrupo (ou subálgebra) *split* que tem essa câmara como a câmara positiva.

Observando que o centralizador é um subgrupo normal do normalizador, a aplicação

$$G/MA \longrightarrow G/M^*A$$

define G/MA como o fibrado principal sobre G/M^*A . O grupo associado a esse fibrado é

$$M^*A/MA \approx M^*/M = W. \quad (\text{grupo de Weyl})$$

Portanto, essa fibração é um recobrimento, e existe uma ação natural à direita de W em G/MA dada da seguinte forma

$$(gMA)w = g\bar{w}MA, \quad g \in G, w \in W$$

onde $\bar{w}$ pode ser tomado com qualquer representante de w em M^* .

De modo mais preciso, a fibração descrita acima pode ser realizada da seguinte maneira: sejam $\alpha^+ = gMA \in G/MA$ e $\alpha = gMAN^+ \in G/M^*A$, então

$$\alpha^+ = gA^+g^{-1} \quad \text{e} \quad \alpha = gAg^{-1}.$$

O normalizador de α em gKg^{-1} é gM^*g^{-1} , e dado $w \in W$, com $\bar{w} \in M^*$ seu representante, segue que

$$\begin{aligned} \alpha^+w &= (gMA)w \\ &= g\bar{w}MA \\ &= (g\bar{w})MA(g\bar{w})^{-1} \\ &= g\bar{w}g^{-1}gMg^{-1}gAg^{-1}g\bar{w}^{-1}g^{-1} \\ &= (g\bar{w}g^{-1})(gMg^{-1})(gAg^{-1})(g\bar{w}^{-1}g^{-1}) \\ &= (g\bar{w}g^{-1})(gMg^{-1})(gAg^{-1})(g\bar{w}g^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

A seguir, definimos o conjunto do tipo $\nu(b, w)$, através do qual caracterizamos os conjuntos controláveis do tipo D_w , que, por sua vez serão usados para caracterizar os conjuntos controláveis efetivos na variedade *flag* maximal.

Esses conjuntos, na prática, são aqueles que contém as câmaras positivas para o subgrupo de isotropia em b e que intersectam o interior de S . As câmaras que intersectam o interior de S são importantes, pois, é através de um elemento que está no interior de uma câmara e também no interior de S que definimos uma aplicação que atrai certas variedades aos pontos do tipo $\tilde{w}b \in G/P$, com $w \in W$.

Lema 16 Dado $w \in W$, para $b \in C_0$ definimos

$$\nu(b, w) = \pi \{ \alpha w \in G/MA : \alpha \in \pi^{-1}\{b\} \cap \Delta \}.$$

e então, $\nu(b, w) \subset D(b, w)$, para algum conjunto controlável $D(b, w)$ com respeito a S .

Demonstração: Seja $b \in C_0$. Como os subgrupos parabólicos minimais são todos conjugados entre si, sem perda de generalidade, é possível tomar

$$b = b_0 = MAN^+.$$

Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in \pi^{-1}\{b_0\} \cap \Delta$. Defina os seguintes termos

$$b_1 = \pi(\alpha_1 w) \quad \text{e} \quad b_2 = \pi(\alpha_2 w).$$

Como a Proposição 43 garante a existência de conjunto controláveis para g -pontos fixos, resta mostrar somente que α_1 e α_2 estão num mesmo conjunto controlável para S .

Observe que a ação de N^+ é transitiva em $\pi^{-1}\{b_0\}$. De fato, tomando gMA, hMA tais que $\pi(gMA) = \pi(hMA)$, então

$$gMAN^+ = hMAN^+ = MAN^+$$

implica em $g, h \in N^+$, pois MA é o normalizador de N^+ .

Visto que α_1 e α_2 são câmaras positivas em MAN^+ , e que a ação de N^+ é transitiva na fibra sobre $b_0 = MAN^+$, sabemos que as câmaras são conjugadas por um elemento de N^+ , ou seja, existe $n_0 \in N^+$ tal que

$$\alpha_2 = n_0 \alpha_1$$

Segue que

$$b_2 = \pi(\alpha_2 w) = \pi(n_0 \alpha_1 w) = n_0 \pi(\alpha_1 w) = n_0 b_1$$

pela equivariância da ação de G com relação à π . Ou seja, b_1 e b_2 estão numa mesma N^+ -órbita.

Como $\alpha_1, \alpha_2 \in \Delta$, é possível tomar $h \in \alpha_1 \cap \text{int } S$, e para cada inteiro k temos

$$h^{-k} b_2 = h^{-k} (n_0 b_1) = (h^{-k} n_0 h^k) b_1.$$

Como b_1 pertence ao interior de um conjunto controlável e

$$\lim_k h^{-k} n_0 h^k = 1$$

e, portanto, concluímos que

$$b_1 \in \text{fe}(Sb_2)$$

o que mostra que b_1 está no conjunto controlável para b_2 .

De modo análogo, tomamos $h \in \alpha_2 \cap \text{int } S$, e revertemos a igualdade para

$$\lim_k h^{-k} b_1 = \lim_k h^{-k} n_1 h^k b_1 = b_2$$

e, portanto, os conjuntos controláveis contendo b_1 e contendo b_2 coincidem.

■

Lema 17 *Sejam $b_1, b_2 \in C_0$. Então, existem $\alpha \in \pi^{-1}\{b_1\} \cap \Delta$ e $g \in \text{int } S$ tais que*

$$gb_1 = b_2 \quad \text{e} \quad g\alpha \in \Delta.$$

Demonstração: Sejam P_1 e P_2 subgrupos de isotropia respectivos à b_1 e b_2 . Defina

$$S_1 = P_1 \cap \text{int } S \quad \text{e} \quad S_2 = P_2 \cap \text{int } S.$$

Então, S_1 e S_2 são semigrupos com interior não vazio em P_1 e P_1 respectivamente, pois, $P_1 \cap \text{int } S$ e $P_2 \cap \text{int } S$ são conjuntos abertos e

$$C_0 = (\text{int } S)b_1 = (\text{int } S)b_2.$$

ou seja, existem $s_1, s_2 \in \text{int } S$ tais que $s_1 b_1 = b_1$ e $s_2 b_2 = b_2$.

Agora, devemos garantir a existência de $g \in \text{int } S$ tal que $g b_1 = b_2$ e os semigrupos em P_2 ,

$$\text{int}(g S_1 g^{-1}) \quad \text{e} \quad \text{int } S_2,$$

intersectam uma mesma câmara positiva de P_2 , que será denominada β . Isso deve ser feito, pois dessa forma, se α é uma câmara positiva em P_1 , então

$$\beta = g(\alpha)$$

é a única câmara positiva em P_2 tal que

$$\text{int } S_1 \cap \alpha \neq \emptyset$$

afinal, $\text{int}(g S_1 g^{-1}) \cap \beta \neq \emptyset$ implica que $g \text{int}(S_1) g^{-1} \cap \beta \neq \emptyset$, e por isso, segue que $\alpha = \text{int}(S_1) \cap g^{-1}(\beta) = \text{int}(S_1) \cap g^{-1} \beta g \neq \emptyset$ e, portanto, $\alpha \in \Delta$. Além disso, $\beta \cap \text{int } S_2 \neq \emptyset$, e assim

$$\beta = g(\alpha) \in \Delta.$$

Observe que se $b_1, b_2 \in C_0$, e $C_0 = (\text{int } S)C$, então existe $\tilde{g} \in \text{int } S$ tal que

$$\tilde{g} b_1 = b_2.$$

Defina o seguinte conjunto:

$$\tilde{S}_1 = \tilde{g} S_1 \tilde{g}^{-1}.$$

Este é um semigrupo de interior não vazio em P_2 , pois como foi visto anteriormente S_1 é semigrupo de interior não vazio em P_1 .

Agora, note também que, para $u \in S_1$ temos $\tilde{g} u \in \text{int } S$ ($\text{int } S$ é um ideal em S),

$$\tilde{g} u(b_1) = \tilde{g}(u b_1) = \tilde{g}(b_1) = b_2$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{g} u S_1 (\tilde{g} u)^{-1} &= (\tilde{g} u \tilde{g}^{-1})(\tilde{g} S_1 \tilde{g}^{-1})(\tilde{g} u^{-1} \tilde{g}^{-1}) \\ &= (\tilde{g} u \tilde{g}^{-1})(\tilde{g} S_1 \tilde{g}^{-1})(\tilde{g} u^{-1} \tilde{g})^{-1} \\ &= h S_1 h^{-1} \in \tilde{S}_1 \end{aligned}$$

com $h = \tilde{g} u \tilde{g}^{-1} \in \tilde{S}_1$.

Então, para obtermos o resultado desejado é preciso encontrar $h \in \tilde{S}_1$ e uma câmara positiva $\beta = \pi^{-1}\{b_2\}$ tais que β intersecta

$$\text{int}(h \tilde{S}_1) \quad \text{e} \quad \text{int } S_2$$

simultaneamente.

Note que, pelo Teorema 17, $C_0 = \pi(\Delta)$. Então, $b_1 = \pi(\alpha)$ com $\alpha \in \Delta$, e assim S_2 intersecta a câmara positiva $\alpha \in P_1$. Segue que $\tilde{S}_1 = \tilde{g} S_1 \tilde{g}^{-1}$ intersecta a câmara

$$\beta_1 = g(\alpha)$$

que é positiva em P_2 .

Sem perda de generalidade, o fato das decomposições de Langlands serem conjugadas entre si permite que tomemos

$$\beta_1 = A^+ \quad \text{e} \quad P_2 = MAN^+.$$

Sejam,

$$h_1 \in \beta \cap \text{int } \tilde{S}_1 \quad \text{e} \quad h_2 \in \beta \cap \text{int } \tilde{S}_2.$$

Então, como a ação de N^+ é transitiva na fibra sobre b_2 , devem existir $h' \in \beta_1$ e $n \in N^+$ tais que

$$h_2 = h'n$$

Assim, dado um inteiro k

$$h_1^{-k} h_2 h_1^k = h_1^{-k} (h'n) h_1^k = h' (h_1^{-k} n h_1^k) \in h_1^{-k} S_2 h_1^k.$$

Como $\text{int } S_1$ intersecta a câmara β_1 , que contém h' , então podemos considerar uma vizinhança aberta nessa interseção de modo que seja possível tomar o seguinte limite,

$$\lim_k h_1^{-k} n h_1^k = 1,$$

e ver que $\text{int } \tilde{S}_1$ e $\text{int}(h_1^{-k} \tilde{S}_2 h_1^k)$ intersectam a mesma câmara positiva β_2 de P_2 para um $h = h_1^k$ com k suficientemente grande.

■

Uma vez definidos os conjuntos do tipo $\nu(b, w)$, convém observar que a imagem de Δw por π é a união dos conjuntos $\nu(b, w)$ com w fixo e b percorrendo o conjunto C_0 . E, portanto, faz sentido olharmos para o conjunto $\pi(\Delta w)$ como um indicador de conjunto controlável. Como $\nu(b, w)$ está contido em um conjunto controlável, então a projeção de Δw deve estar contida em algum conjunto controlável em G/P .

Teorema 18 *Com as notações acima, dado $w \in W$, e $\pi : G/MA \rightarrow G/MAN^+$ a projeção canônica. Então, $\pi(\Delta w)$ está inteiramente contido em um conjunto controlável para S .*

Demonstração: Para cada $b \in C_0$ defina

$$\nu(b, w) = \pi \{ \alpha w \in G/MA : \alpha \in \pi^{-1} \{ b \} \cap \Delta \}.$$

Então, podemos descrever o conjunto $\pi(\Delta w)$ da seguinte forma

$$\pi(\Delta w) = \bigcup_{b \in C_0} \nu(b, w).$$

Assim, o problema pode ser traduzido em mostrar que $\nu(b, w)$ está contido em um conjunto controlável, que será nomeado $D(b, w)$, e que dados dois elementos b_1 e b_2 em C_0 com conjuntos controláveis coincidentes

$$D(b_1, w) = D(b_2, w)$$

então $\nu(b_1, w), \nu(b_2, w) \in D(b_1, w) = D(b_2, w)$.

Pelo Lema 16, cada $\nu(b, w)$ está contido num conjunto controlável, que nomeamos $D(b, w)$.

Quanto a unicidade de tal conjunto, tome $b_1, b_2 \in C_0$. Pelo Lema 17 existem

$$\alpha \in \pi^{-1}\{b_1\} \cap \Delta$$

e $g \in \text{int } S$ tais que

$$g\alpha \in \pi^{-1}\{b_2\} \cap \Delta$$

e portanto,

$$g\pi(\alpha w) = \pi(g\alpha w) \in \nu(b_2, w).$$

Uma vez que $\pi(\alpha w) \in \nu(b_1, w)$, então o conjunto controlável invariante contendo $\nu(b_2, w)$ é acessível a partir do conjunto controlável que contém $\nu(b_1, w)$. Considerando a ordem parcial sobre os conjuntos controláveis, podemos dizer que

$$D(b_1, w) \leq D(b_2, w).$$

Aplicando o Lema 16, trocando b_1 por b_2 , de modo análogo, obtemos o resultado simétrico, ou seja, $D(b_2, w) \leq D(b_1, w)$, e portanto, segue a igualdade.

■

A partir deste ponto, estabeleceremos uma nova notação. Uma vez garantido que, para cada $w \in W$, $\pi(\Delta w)$ está contido em um conjunto controlável para S , estabelecemos uma dependência entre w e tal conjunto controlável, o que nos permite definir o seguinte

$$D_w : \text{conjunto controlável que contém } \pi(\Delta w).$$

Convém ressaltar que a definição de D_w depende também da projeção π que é tomada sobre a escolha de uma câmara A^+ pré-fixada, e uma notação mais precisa seria

$$D_w = D_w(A^+).$$

Entretanto, por motivos de simplicidade, uma vez fixado uma decomposição canônica MAN^+ e uma câmara A^+ , omitimos a dependência em A^+ .

Note que definindo D_w como acima, definimos também uma aplicação $w \mapsto D_w$ que associa a um elemento $w \in W$ um conjunto controlável D_w . No entanto, mais do que uma simples aplicação, a relação definida é também uma sobrejeção, isto é, cada conjunto controlável na variedade *flag* é um conjunto do tipo D_w , como veremos a seguir.

Proposição 48 *Todo conjunto controlável D em $B = G/P$ é da forma D_w .*

Demonstração: Pela Proposição 37, se P é o subgrupo de isotropia em b , então $P \cap \text{int } S \neq \emptyset$ quando $b \in D_0$. Fixando uma decomposição de Langlands $P = MAN^+$, o conjunto

$$\sigma = \{m \in M : \exists hn \in AN^+ : mhn \in \text{int } S\}$$

é um semigrupo de interior não vazio (ver demonstração do Teorema 16).

Como G é suposto suposto de centro finito, então M é compacto e contém a componente conexa de M , e pelo Lema 15, existe uma decomposição de Langlands $P = MAN^+$ tal que $A \cap \text{int } S \neq \emptyset$, ou seja, existe $g \in \text{int } S$ tal que

$$gb = b$$

e $g \in A$, onde A é um subgrupo *split*.

Logo, $b \in \nu(b, w)$ para algum $w \in W$, e portanto o conjunto controlável contendo b só pode ser D_w .

■

Agora, quanto aos conjuntos controláveis efetivos, é possível obter um resultado análogo, como a seguir:

Proposição 49 *Para $w \in W$, sejam $(D_w)_0$ o conjunto de transitividade no conjunto controlável D_w , e $b \in (D_w)_0$. Então, existe $b_0 \in C_0$ tal que $b \in \nu(b, w)$.*

Demonstração: Seja $b \in (D_w)_0$. Então, existe $b_0 \in \text{int } S$ tal que

$$hb = b.$$

Pelo Lema 17, podemos tomar h em um subgrupo *split*. Como esse último resultado independe da escolha da câmara positiva, podemos arbitrariamente assumir que $h \in A^+$, e que

$$b = \tilde{w}_1 b_0$$

para algum $\tilde{w} \in M$ representante de $w_1 \in W$, com

$$b_0 = MAN^+$$

Como $C_0 = \pi(\Delta)$ e $h \in \text{int } S \cap A^+$, a câmara positiva A^+ está em Δ , e assim $b_0 \in C_0$. Logo, existe $\tilde{h} \in \text{int } S$ tal que

$$\tilde{h}b_0 = b_0$$

e assim, $b' = \tilde{w}b_0$ é tal que

$$\begin{aligned} \tilde{h}b' &= \tilde{h}\tilde{w}b_0 \\ &= \tilde{w}b_0 \\ &= b' \end{aligned}$$

e, portanto, $b' \in (D_w)_0$.

Com $b, b' \in (D_w)_0$, podemos dizer que existem $g, g' \in \text{int } S$ tais que

$$gb' = b \quad \text{e} \quad g'b = b'.$$

Além disso, observe que $b' = \tilde{w}b_0$ e $b = \tilde{w}_1 b_0$ implicam em

$$\begin{aligned} (\tilde{w}_1 \tilde{w}^{-1})b' &= \tilde{w}_1 \tilde{w}^{-1}(\tilde{w}b_0) \\ &= \tilde{w}_1 b_0 \\ &= b \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\tilde{w} \tilde{w}_1^{-1})b &= \tilde{w} \tilde{w}_1^{-1}(\tilde{w}_1 b_0) \\ &= \tilde{w} b_0 \\ &= b'. \end{aligned}$$

Como

$$gb' = b = (\tilde{w}_1 \tilde{w}_1^{-1})b' \quad \text{e} \quad g'b = b' = (\tilde{w} \tilde{w}_1^{-1})b$$

é possível considerar uma decomposição de Iwasawa de g com respeito à KAN_w , e uma de g' com respeito à KAN_{w_1} , de modo que

$$g = \tilde{w}_1 \tilde{w}_1^{-1} h_1 (\tilde{w} n_1 \tilde{w}_1^{-1}) \quad \text{e} \quad g' = \tilde{w} \tilde{w}_1^{-1} h_2 (\tilde{w}_1 n_2 \tilde{w}_1^{-1})$$

com $h_1, h_2 \in A$, $n_1, n_2 \in N^+$. E portanto, para cada inteiro positivo k temos

$$gh^k g' \in \text{int } S$$

e, além disso,

$$\begin{aligned} gh^k g' &= \tilde{w}_1 \tilde{w}_1^{-1} h_1 (\tilde{w} n_1 \tilde{w}_1^{-1}) h^k \tilde{w} \tilde{w}_1^{-1} h_2 (\tilde{w}_1 n_2 \tilde{w}_1^{-1}) \\ &= \tilde{w}_1 (\tilde{w}_1^{-1} h_1 \tilde{w}) n_1 (\tilde{w}_1^{-1} h^k \tilde{w}) (\tilde{w}_1^{-1} h_2 \tilde{w}_1) n_2 \tilde{w}_1^{-1} \\ &= \tilde{w}_1 (h_3) n_1 (h_4) (\tilde{w}_1^{-1} h_2 \tilde{w}_1) n_2 \tilde{w}_1^{-1} \\ &= \tilde{w}_1 (h_3 h_4) n_2 (\tilde{w}_1^{-1} \tilde{w}_1) n_3 \tilde{w}_1^{-1} \\ &= \tilde{w}_1 h' n \tilde{w}_1^{-1} \end{aligned}$$

com $h_1, h_2, h' \in A$, e $h' \in A, n_3, n \in N^+$, onde

$$h' = h_3 h_4 = (\tilde{w}_1^{-1} h_1 \tilde{w}) (\tilde{w}_1^{-1} h^k \tilde{w}) (\tilde{w}_1^{-1} h_2 \tilde{w}_1).$$

Como $h \in A^+$, a medida em que k aumenta $\tilde{w}_1^{-1} h^k \tilde{w}$ cresce e faz com que os termos à direita e à esquerda fiquem insignificantes, isto é, para k suficientemente grande temos

$$h' \in \tilde{w}_1^{-1} A^+ \tilde{w}_1.$$

Além disso,, observe que M é o centralizador de A em K , e portanto,

$$\begin{aligned} h_k b' &= h^k \tilde{w} \tilde{w}_1^{-1} b \\ &= \tilde{w} \tilde{w}_1^{-1} h^k b \\ &= \tilde{w} \tilde{w}_1^{-1} b \\ &= b' \end{aligned}$$

e assim,

$$gh^k g' b = gh^k b' = gb' = b,$$

o que significa que $gh^k g'$ está no subgrupo de isotropia de b , isto é,

$$gh^k g' \in MAN_{w_1}.$$

Com respeito a essa decomposição podemos escrever $gh^k g'$ como

$$gh^k g' = \tilde{w}_1 h' n \tilde{w}_1^{-1} = (\tilde{w}_1 h' \tilde{w}_1^{-1}) (\tilde{w}_1 n \tilde{w}_1^{-1}) = h'' n'$$

com $n' = \tilde{w}_1 n \tilde{w}_1^{-1} \in N_{w_1}$ e $h'' = \tilde{w}_1 h' \tilde{w}_1^{-1}$.

Agora, suponha que $n' = 1$. Então, $gh^k g' = h''$. Da forma como h'' foi definido, temos h'' na câmara $\alpha w_1 w^{-1} A^+$, logo $\alpha \in \Delta$, pois $h \in \text{int } S$.

Considerando a ação à direita de w em α temos

$$\begin{aligned}\alpha w &= (w_1 w^{-1}) w (w_1 w^{-1})^{-1} \alpha \\ &= (w_1 w^{-1}) w (w_1 w^{-1})^{-1} (w_1 w^{-1}) A^+ \\ &= w_1 A^+ \\ &= \tilde{w}_1 A^+ \tilde{w}_1^{-1}.\end{aligned}$$

Note que w_1 é tal que $b = \tilde{w}_1 b_0$. Então,

$$\pi(\alpha w) = \pi(\tilde{w}_1 A^+ \tilde{w}_1^{-1}) = w_1 b_0 = b.$$

e portanto, $b = \pi(\alpha w) \in \nu(b_0, w)$, como gostaríamos.

Quanto ao caso geral, temos

$$gh^k g' = h'' n'.$$

E, como no Lema 15, podemos tomar $n_0 \in N_{w_1}$ tal que

$$n_0 h'' n' n_0^{-1} = h''$$

e assim,

$$n_0 gh^k g' n_0^{-1} = h''$$

e, observando que

$$n_0 gh^k g' n_0^{-1} \in MAN_{w_1},$$

que é o subgrupo de isotropia em b , e voltamos ao caso em que $n' = 1$.

■

Conjuntos Controláveis nas Variedades

Flag G/P_Θ

De forma análoga ao caso da variedade *flag* maximal, nas variedades do tipo G/P_Θ temos um único conjunto controlável maximal, que é exatamente a projeção do conjunto controlável invariante em G/P . A seguir, faremos um estudo sobre os conjuntos controláveis nas fibras da projeção canônica de G/P em G/P_Θ que serve como preparação para a estudar a ligação entre conjuntos controláveis efetivos em G/P_Θ e certos elementos do grupo de Weyl W .

Além disso, fixado um subgrupo parabólico minimal P , como mostrado em [26], é possível exibir uma bijeção entre certas classes de semigrupos que agem em G/P_Θ e um subgrupo do grupo de Weyl, o subgrupo $W(S)$. Essa relação nos permite classificar os semigrupos que agem em G/P_Θ através dos seus conjuntos controláveis efetivos. Para mais detalhes, ver [20] e [21].

E por fim, a partir da caracterização do conjunto de transitividade dos conjuntos controláveis efetivos da variedade *flag* G/P_Θ e a relação entre os subgrupos W_Θ de W e os subgrupos P_Θ de G , veremos que é possível contar o número de conjuntos controláveis efetivos em G/P_Θ . Estes estão em bijeção com o duplo quociente $W(S) \backslash W/W_\Theta$, que é um dos principais resultados de [26].

5.1 Conjuntos Controláveis nas Fibras

Os conjuntos controláveis nas outras variedades *flag* do tipo G/P_Θ também admitem uma descrição similar aos da *flag* maximal G/P . Porém, essa descrição envolve certos resultados sobre os subgrupos parabólicos de G .

Primeiro, vamos situar as bases teóricas dessa discussão, e a seguir, veremos como os conjuntos controláveis invariantes em G/P induzem, por meio de fibrações equivariantes, conjuntos controláveis nas demais variedades *flag*.

Proposição 50 *Sejam Σ um sistema simples de raízes, e $\Theta \subset \Sigma$ um subconjunto. Considerando a mesma notação da subseção 2.3.3, defina $G(\Theta) = M_\Theta/Z(\mathfrak{g}(\Theta))$. A terna $G/P(G/P_\Theta, G(\Theta))$ é um fibrado principal.*

Demonstração: Considere os seguintes fatos:

1. Seja D uma ação à direita de $G(\Theta) = M_\Theta/Z(\mathfrak{g}(\Theta))$ em G/P dada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} D : \quad G/P \times G(\Theta) &\longrightarrow G/P \\ (gP, mZ(\mathfrak{g}(\Theta))) &\longrightarrow gmP \end{aligned}$$

com $m \in M_\Theta$.

Supondo $gmP = gP$, então $mP = P$ implica que $m \in Z(\mathfrak{g}(\Theta))$ isto é, $mZ(\mathfrak{g}(\Theta)) = 1Z(\mathfrak{g}(\Theta))$, que é a identidade em $G(\Theta)$. Logo, a ação é livre.

2. A projeção $\pi_\Theta : G/P \longrightarrow G/P_\Theta$ claramente é uma sobrejeção. Além disso, $\pi_\Theta^{-1}(gP_\Theta) = \{hP : hP_\Theta = gP_\Theta\}$ são as órbitas da ação à direita. De fato, tome $g'P \in G/P$, e considere sua órbita pela ação à direita de $G(\Theta)$,

$$\begin{aligned} (g'P)M_\Theta/Z(\mathfrak{g}(\Theta)) &= \{(g'P)(mZ(\mathfrak{g}(\Theta))) : m \in M_\Theta\} \\ &= \{g'mP : m \in M_\Theta\}. \end{aligned}$$

Para o elemento $gmP \in (g'P)M_\Theta/Z(\mathfrak{g}(\Theta))$, temos

$$\pi_\Theta(gmP) = gmP_\Theta = gP_\Theta,$$

logo,

$$(gP)M_\Theta/Z(\mathfrak{g}(\Theta)) \subset \pi_\Theta^{-1}(gP_\Theta)$$

Por outro lado, considere a decomposição generalizada de Bruhat

$$G = \bigcup_{w \in W/W_\Theta} N^+ w P_\Theta$$

Então, podemos tomar a imagem inversa de um elemento $gP_\Theta \in G/P_\Theta$ por

$$\pi_\Theta^{-1}(gP_\Theta) = \{nmb_0 \in G/P : b_0 = P, n \in N^+, \tilde{w} \in M^*\}.$$

isto é,

$$\pi_\Theta^{-1}(gP_\Theta) \subset \{G/P, m \in M^*\}$$

que é a órbita de gP pela ação de $M^*/Z(\mathfrak{g}(\Theta))$ à direita.

3. Quanto à trivialização local. Sejam $gP_\Theta = n_0\tilde{w}P_\Theta \in G/P_\Theta$, e U uma vizinhança de $n\tilde{w}P_\Theta$. Considere a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \phi : \quad \pi_\Theta^{-1}\{U\} &\longrightarrow G(\Theta) \\ n\tilde{w}P &\longmapsto \tilde{w}Z(\mathfrak{g}(\Theta)) \end{aligned}$$

com $n \in N^+$ e $\tilde{w} \in M^*$ um representante de $w \in W$.

Então, $\psi : \pi_\Theta^{-1}\{U\} \longrightarrow U \times G(\Theta)$ é dada por

$$\psi(x) = (\pi_\Theta(x), \phi(x)), \quad x \in \pi_\Theta^{-1}\{U\} \subset G/P$$

com ϕ satisfazendo

$$\begin{aligned} \phi((n\tilde{w}P)(mZ(\mathfrak{g}(\Theta)))) &= \phi(n\tilde{w}mP) \\ &= \tilde{w}mZ(\mathfrak{g}(\Theta)) \\ &= (\tilde{w}Z(\mathfrak{g}(\Theta)))(mZ(\mathfrak{g}(\Theta))) \\ &= \phi(n\tilde{w}P)mZ(\mathfrak{g}(\Theta)) \end{aligned}$$

definindo, portanto uma trivialização local.

E assim, por 1, 2, e 3, segue o resultado.

■

Um resultado fundamental para esse estudo diz respeito à geometria da variedade *flag* maximal. Quando consideramos a ação de um elemento *split* regular em G/P podemos indexar os pontos fixos dessa ação por um elemento do grupo de Weyl. Além disso, cada um desses pontos fixos está associado a uma região de atração, o que possibilita também a ordenação dos conjuntos controláveis na variedade *flag* maximal, como será visto adiante.

Lema 18 *Considere a ação canônica de G em G/P . Então, os pontos fixos de um elemento split regular estão em bijeção com o grupo de Weyl.*

Demonstração: Por um lado, se M^* é o normalizador de A em K , dado um $u \in M^*$ existe $h' \in A$ tal que

$$hub_0 = uh'b_0$$

com $b_0 = MAN$, e M o centralizador de A em K . Segue que $h'b_0 = b_0$, assim

$$hub_0 = uh'b_0 = ub_0,$$

ou seja, cada elemento em Mb_0 é um ponto fixo da ação de um elemento split regular.

Reciprocamente, tome $x \in G/P$ e suponha que x é um ponto fixo para a ação de h em G/P , isto é, $hx = x$.

Considerando a decomposição de Bruhat

$$G/P = \bigcup_{w \in W} N^- \tilde{w}b_0.$$

Então, existe $n \in N^-$ para o qual

$$x = n\tilde{w}b_0.$$

Como $h \in A$, $h^{-k}\tilde{w}b_0 = \tilde{w}b_0$ para todo inteiro $k \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} h^k n h^{-k} \tilde{w}b_0 &= h^k n \tilde{w}b_0 \\ &= h^k x \\ &= h^{k-1}(hx) \\ &= h^{k-1}x \\ &= x \\ &= n\tilde{w}b_0. \end{aligned}$$

Pelo Lema 13, $h^k n h^{-k} \rightarrow 1$, quando $k \rightarrow \infty$, e assim

$$h^k n h^{-k} \tilde{w}b_0 \rightarrow \tilde{w}b_0$$

quando $k \rightarrow \infty$, e portanto,

$$n\tilde{w}b_0 = \tilde{w}b_0$$

mostrando que o ponto fixo não depende da escolha do $n \in N^-$ tomado, pois pode ser considerado $n = 1 \in N^-$, e assim x depende unicamente da escolha de $\tilde{w} \in W$.

■

Nas outras variedades *flag*, já temos a caracterização do conjunto de transitividade do conjunto controlável invariante no espaço da projeção como a projeção do conjunto de transitividade do conjunto controlável invariante do espaço base, mas, podemos ainda descrever o conjunto de transitividade dos conjuntos controláveis invariantes nas fibras dessa projeção. Além disso, podemos descrever a decomposição de Bruhat para um subgrupo parabolico do tipo P_Θ sob argumentos dinâmicos por meio das projeções $\pi : G/P \rightarrow G/P_\Theta$.

Proposição 51 *Sejam G um grupo de Lie semi-simples conexo de centro finito, $G = KAN^+$ uma decomposição de Iwasawa de G e $P = MAN^+$. Fixe um subconjunto $\Theta \subset \Sigma$ e tome P_Θ o subgrupo parabólico correspondente em G . Então,*

$$G = \bigcup_{w \in W/W_\Theta} N^+wP_\Theta = \bigcup_{w \in W/W_\Theta} PwP_\Theta$$

como uma união disjunta.

Demonstração: A decomposição de Bruhat de um subgrupo parabólico P_Θ pode ser entendida da seguinte forma. Partindo da decomposição de Bruhat do subgrupo parabólico minimal P , através da fibração canônica $\pi : G/P \rightarrow G/P_\Theta$, projetamos as células PwP (ou N^+wP) em PwP_Θ (ou N^+wP_Θ) e obtemos

$$G = \bigcup_{w \in W} N^+wP_\Theta = \bigcup_{w \in W} PwP_\Theta.$$

Contudo, essa não é uma união disjunta. Para ver isto, devemos tomar $w \in W/W_\Theta$. Seja $\xi_0 = P_\Theta \in G/P_\Theta$ e suponha que $w_1, w_2 \in W$ são tais que $N^+w_1\xi_0$ e $N^+w_2\xi_0$ se intersectam. Então, existe $n \in N^+$ tal que

$$w_1\xi_0 = nw_1\xi_0.$$

Seja $h \in A^+$ um elemento regular. Então, $w_1\xi_0$ é ponto fixo para a ação de h ,

$$w_1\xi_0 = h^{-k}(w_1\xi_0) = h^{-k}(nw_1\xi_0) \rightarrow w_2\xi_0$$

quando $k \rightarrow \infty$, $k \in \mathbb{N}$. E, portanto, $w_2^{-1}w_1\xi_0 = \xi_0$, e assim, os representantes de $w_2^{-1}w_1$ estão em $M_\Theta \cap M^*$, e observando o Corolário 7, concluímos que $w_2^{-1}w_1W_\Theta$, ou seja, $w_1 \in w_2W_\Theta$.

■

Observação 2 *Dada uma decomposição de Bruhat de G*

$$G = \bigcup_{w \in W} N^+wP,$$

se $w_0 \in W$ denota o elemento do grupo de Weyl que leva a câmara positiva $\mathfrak{a}^+$ em $\mathfrak{a}^-$, pela ação de w_0 , podemos reescrever tal decomposição como

$$\begin{aligned} G &= w_0G = \bigcup_{w \in W} (\tilde{w}_0N^+\tilde{w}_0^{-1})w_0wP \\ &= \bigcup_{w' \in W} N^-w'P \end{aligned}$$

com $w' = w_0w \in W$, isto é,

$$G = \bigcup_{w \in W} N^-wP.$$

De forma análoga, a decomposição

$$G = \bigcup_{w \in W/W_\Theta} N^+wP_\Theta$$

também pode ser reescrita como

$$G = \bigcup_{w \in W/W_\Theta} N^-wP_\Theta$$

Isso nos fornece uma importante ferramenta para entender os conjuntos controláveis numa variedade *flag* incompleta (não maximal).

A seguir, faremos uma pequena discussão a respeito dos semigrupos que agem nas fibras das projeções entre a variedade *flag* maximal e as outras variedades *flag*. A finalidade desse estudo é analisar a imagem inversa do conjunto controlável C_Θ pela projeção canônica π_Θ por meio do estudo dos conjuntos controláveis nas fibras $\pi_\Theta^{-1}(\xi)$ com $\xi \in (C_\Theta)_0$. Um fato interessante a ser notado ao final dessa seção, é que essas fibras são também variedades *flag*, o que nos permite aplicar o que já sabemos sobre conjuntos controláveis.

Fixe $\Theta \subset \Sigma$, e os respectivos conjuntos definidos como acima. Seja $S \subset G$ um semigrupo de interior não vazio, e suponha $b_0 \in C_0$. Então, a fibração equivariante canônica é

$$\pi_\Theta : G/P \longrightarrow G/P_\Theta,$$

e portanto, o único conjunto controlável invariante em G/P_Θ para S é

$$C_\Theta = \pi_\Theta(C).$$

Definimos $\xi_0 = P_\Theta \in G/P_\Theta$, e dessa forma, seja $\xi_0 = \pi_\Theta(b_0)$. E, portanto, $\xi_0 \in (C_\Theta)_0$. Seja F o subconjunto da fibra de π_Θ sobre ξ_0 , dado por

$$F = \pi_\Theta^{-1}\{\xi_0\} \cap C_0$$

e defina

$$\widetilde{S}_\Theta = S \cap P_\Theta$$

o qual é um semigrupo com interior não vazio em P_Θ . De fato, $\widetilde{S}_\Theta$ é a interseção de um semigrupo de interior não vazio com um grupo e P_Θ é a isotropia em ξ_0 , com

$$\xi_0 \in (C_\Theta)_0 = (\text{int } S)C_\Theta \cap C_\Theta.$$

e ainda, como $\xi_0 \in (C_\Theta)_0$, $\widetilde{S}_\Theta F = F$.

Seja

$$S_\Theta = \widetilde{S}_\Theta \cap (P_\Theta)_0$$

onde $(P_\Theta)_0$ é a componente conexa da identidade em P_Θ . Uma vez que P_Θ tem uma quantidade finita de componentes conexas, então, o interior de $\widetilde{S}_\Theta$ intersecta alguma delas, e portanto, é possível atingir a componente conexa por meio de translações, e assim S_Θ também é um semigrupo de interior não vazio.

Proposição 52 *Com as mesmas notações acima. Sejam $\widetilde{S}_\Theta = S \cap P_\Theta$ e $F = \pi_\Theta^{-1}\{\xi_0\} \cap C_0$. Então, $\widetilde{S}_\Theta F = F$.*

Demonstração: Sejam $g \in \widetilde{S}_\Theta$ e $x \in F$. Temos que $x \in C_0$ com $\pi_\Theta(x) = \xi_0$, e portanto,

$$\pi_\Theta(gx) = g\pi_\Theta(x) = g\xi_0 = \xi_0$$

uma vez que, $g \in P_\Theta = \xi_0$.

Como C é conjunto controlável invariante, e $x \in C$, temos

$$Sx \subset \text{fe}(Sx) \subset \text{fe}(C) = C$$

e por isso, $gx \in C_0$. Logo, $gx \in F$, isto é, $\widetilde{S}_\Theta F \subset F$.

Por outro lado, seja $x \in F$. Então, $x \in C_0$ e $\pi_\Theta(x) = \xi_0$.

Visto que $x \in C_0$, existe $g \in \text{int } S$ tal que $gx = x$, e assim, segue que

$$g\xi_0 = g\pi_\Theta(x) = \pi_\Theta(gx) = \pi_\Theta(x) = \xi_0,$$

ou seja, g está no subgrupo de isotropia de ξ_0 , e em $\text{int } S$. Logo, $g \in \widetilde{S}_\Theta$, e portanto,

$$x = gx \in \widetilde{S}_\Theta F$$

mostrando que $\widetilde{S}_\Theta F = F$.

■

Além disso, como $S_\Theta \subset \widetilde{S}_\Theta$, temos $S_\Theta F \subset F$, como será visto a seguir.

Lema 19 *Com as mesmas notações acima. Seja $S_\Theta = \widetilde{S}_\Theta \cap (P_\Theta)_0$, onde $(P_\Theta)_0$ é a componente conexa da identidade em P_Θ . Então, $S_\Theta \neq \emptyset$ e $S_\Theta F \subset F$.*

Demonstração: Como P_Θ tem uma quantidade finita de componentes conexas, e cada componente é dada pela ação de certo $g \in G$ sobre $(P_\Theta)_0$, isto é, são da forma $g(P_\Theta)_0$, podemos tomar $g \in \text{int } S \cap P_\Theta$. Assim,

$$\{g^k(P_\Theta)_0 : k \in \mathbb{N}\}$$

é um conjunto finito de classes laterais. Sendo tal conjunto finito, devem existir $r, s \in \mathbb{N}$ tais que

$$g^r(P_\Theta)_0 = g^s(P_\Theta)_0.$$

Supondo, sem perda de generalidade, que $r > s$, temos

$$g^{r-s}(P_\Theta)_0 = (P_\Theta)_0,$$

isto é, $g^{r-s} \in \text{int } S \cap (P_\Theta)_0$.

Além disso, visto que $\widetilde{S}_\Theta F = F$ e $S_\Theta \subset \widetilde{S}_\Theta$, temos que $S_\Theta F \subset \widetilde{S}_\Theta F = F$.

■

Proposição 53 *Com as notações acima, sejam S e S_Θ . O fecho de $F = \pi_\Theta^{-1}\{\xi_0\} \cap C_0$ é o único conjunto controlável invariante para o semigrupo S_Θ em $\pi_\Theta^{-1}\{\xi_0\}$.*

Demonstração: Com a mesma notação utilizada acima,

$$b \in S_\Theta b', \quad \forall b, b' \in F.$$

De fato, como S é um semigrupo de interior não vazio, podemos tomar $h \in \text{int } S$ tal que

$$hb = b$$

com h em algum subgrupo *split* de G .

Da equivariância da fibração π_Θ , segue que

$$h(\xi_0) = h\pi_\Theta(b) = \pi_\Theta(hb) = \pi_\Theta(b) = \xi_0$$

e portanto, $h \in \text{int } \widetilde{S}_\Theta$.

Considerando uma mudança de h para h^m , para algum inteiro m , podemos considerar $h \in (P_\Theta)_0$, e assim,

$$h \in \text{int } S_\Theta.$$

Agora, para b' em um subconjunto aberto e denso em $\pi_\Theta^{-1}(\xi_0)$, temos

$$h^n b' \longrightarrow b, \quad \text{quando } n \longrightarrow \infty$$

e portanto, $b \in \text{fe}(S_\Theta b')$, e como

$$hb = b, \quad h \in \text{int } S_\Theta$$

temos $b \in S_\Theta b'$.

Agora, como $(P_\Theta)_0 = M_\Theta A_\Theta N_\Theta^+$ e $A_\Theta N_\Theta$ é subgrupo normal de $(P_\Theta)_0$, pois $A_\Theta N_\Theta^+$ normaliza $\widetilde{M}_\Theta$, a ação de $A_\Theta N_\Theta^+$ em $\pi_\Theta^{-1}(\xi_0)$ depende unicamente da ação de

$$\Gamma_\Theta = S_\Theta / (A_\Theta N_\Theta^+)$$

que é semigrupo de interior não vazio em

$$(P_\Theta)_0 / (A_\Theta N_\Theta^+) \approx M_\Theta.$$

Sejam $Z(\mathfrak{g}(\Theta))$ o centralizador de $\mathfrak{g}(\Theta)$ em M_Θ , e $\mathfrak{m}_\Theta$ a álgebra de Lie de M_Θ . Como cada subgrupo normal de um grupo de Lie semi-simples é fechado, e o centralizador $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}(\Theta))$ é normal, segue que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}(\Theta))$ é um subgrupo de Lie fechado.

Mais que isso, uma vez que o centralizador do grupo e da álgebra coincidem, temos que a álgebra de Lie de $Z(\mathfrak{g}(\Theta))$ é exatamente $\mathfrak{g}(\Theta)^\perp$, complemento ortogonal de $\mathfrak{g}(\Theta)$ com relação ao produto interno referente à forma de Cartan-Killing.

Seja

$$G(\Theta) = M_\Theta / Z(\mathfrak{g}(\Theta)).$$

Temos que a álgebra de Lie de $G(\Theta)$ é isomorfa à $\mathfrak{g}(\Theta)$, pois

$$\mathfrak{g}(\Theta) \approx \mathfrak{m}_\Theta / \mathfrak{g}(\Theta)^\perp.$$

Visto que $\mathfrak{g}(\Theta)$ é semi-simples, $G(\Theta)$ também é semi-simples.

Agora, observe que $Z(\mathfrak{g}(\Theta)) \subset M_\Theta \subset M$, e portanto,

$$Z(\mathfrak{g}(\Theta))b_0 = b_0,$$

e como $Z(\mathfrak{g}(\Theta))$ é subgrupo normal, a ação em $\pi_\Theta^{-1}(\xi_0)$ é trivial.

Dessa forma, a ação de S_Θ em $\pi_\Theta^{-1}(\xi_0)$ depende somente da ação do subgrupo

$$S(\Theta) = S_\Theta / Z(\mathfrak{g}(\Theta))$$

de interior não vazio, e portanto,

$$F = \pi_\Theta^{-1}(\xi_0) \cap C_0$$

é conjunto controlável invariante para $S(\Theta)$.

Além disso, a Proposição 20 (cap. 6, parte II) em [30] garante que a intersecção

$$\widetilde{M}_\Theta \cap P$$

é subgrupo parabólico minimal do grupo $\widetilde{M}_\Theta$, e visto que $Z(\mathfrak{g}(\Theta)) \subset P \cap \widetilde{M}_\Theta$, segue que $\pi_\Theta^{-1}(\xi_0)$ é também uma variedade *flag* maximal, e portanto, F é o único conjunto controlável invariante em $\pi_\Theta^{-1}(\xi_0)$.

■

5.2 Um Subgrupo do Grupo de Weyl e Tipo *Flag* de Semigrupo

Uma vez caracterizados os conjuntos controláveis na variedade *flag* maximal como sendo conjuntos do tipo D_w , é possível estabelecer uma bijeção entre um subgrupo do grupo de Weyl e tais conjuntos controláveis.

A princípio, estudaremos quais $w \in W$ são correspondentes ao conjunto controlável invariante na variedade *flag* maximal.

Com as mesmas notações da seção 4.2, isto é, com $\Delta = \{\alpha^+ \in G/MA : \alpha^+ \cap \text{int } S \neq \emptyset\}$, a projeção canônica $\pi : G \rightarrow G/P$, com subgrupo parabólico minimal $P = MAN^+$. Seja

$$C_0 = \pi(\Delta).$$

Queremos destacar os elementos de W que fazem com que Δw seja projetado no mesmo conjunto controlável que Δ em B . Para isso, defina

$$\begin{aligned} W(S) &= \{w \in W : D_w \text{ é conjunto controlável invariante para } S\} \\ &= \{w \in W : D_w = D_1 = C\}. \end{aligned}$$

De imediato não é possível dizer que $W(S)$ é um subgrupo de W , mas de fato, o é, e isso será visto mais adiante. O que sabemos sobre $W(S)$ é que, para alguma câmara positiva, os elementos deste conjunto são tais que $\pi(\Delta w) \in \Delta$. Além disso, a dependência em Δ na definição de $W(S)$ indica uma necessidade de fixarmos a priori uma câmara de Weyl positiva A^+ , por isso, quando necessário, também indicaremos $W(S)$ por $W(S, A^+)$.

Fixado A^+ , o conjunto $W(S)$ pode ser descrito como o subconjunto dos $w \in W$, tais que

$$\alpha \in \Delta \quad \text{e} \quad \pi(\alpha w) = \pi(g\tilde{w}g^{-1}A^+) \in C_0$$

onde $\alpha = gA^+$, $g \in G$, e $\tilde{w} \in M^*$ é representante de $w \in W$. Observe que, se $A_1^+ = gA^+$, então $W(S, A_1^+) = gW(S, A^+)g^{-1}$.

Proposição 54 *Fixe uma decomposição de Langlands e uma câmara positiva A^+ . Suponha que $b_0 = MAN^+ \in C_0$. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

- $w \in W(S)$.
- $N^+\tilde{w}b_0 \subset C_0$, se $A^+ \in \Delta$.
- se $A^+ \in \Delta$, $\tilde{w}b_0 \in C_0$, onde $\tilde{w} \in M^*$ representa $w \in W$.

Demonstração: Suponha que $w \in W(S)$. Como $b_0 \in C_0$, existem $h \in A^+$ e $n \in N^+$ tais que

$$hn \in \text{int } S.$$

Primeiro, supondo que $n = 1$, temos $h \in \text{int } S$, e portanto $A^+ \in \Delta$. Visto que a ação à direita de w em A^+ coincide com a ação à esquerda de qualquer representante de w , temos

$$\tilde{w}b_0 = \tilde{w}\pi(A^+) = \pi(\tilde{w}A^+) = \pi(A^+w),$$

logo, $\tilde{w}b_0 \in \pi(\Delta w) \subset C_0$.

Agora, observando que C_0 é um conjunto aberto, podemos tomar uma vizinhança da identidade U tal que

$$U\tilde{w}b_0 \subset C_0.$$

Essa vizinhança nos ajuda a reescrever N^+ de modo a ver cada termo de $N^+\tilde{w}b_0$ como um elemento de $\text{int } S$ agindo em um elemento de C_0 .

Dado $n \in N^+$, temos

$$h^{-k}nh^k \longrightarrow 1 \quad \text{quando } k \longrightarrow \infty,$$

e assim, dado U , existe k suficientemente grande para o qual

$$h^{-k}nh^k \in U,$$

logo, $n \in h^kUh^{-k}$. Então, obtemos a seguinte caracterização para N^+ ,

$$N^+ = \bigcup_{n \geq 0} h^kUh^{-k}.$$

Por outro lado, como M^* centraliza A ,

$$(h^kUh^{-k})\tilde{w}b_0 = h^kU\tilde{w}h^{-k}b_0 = h^kU\tilde{w}b_0.$$

Com isso, $h^k \in \text{int } S$, $U\tilde{w}b_0 \subset C_0$, e $C_0 = (\text{int } S)C_0$ implicam em

$$(h^kUh^{-k})\tilde{w}b_0 \in C_0.$$

e portanto, $N^+\tilde{w}b_0 \subset C_0$.

Para o caso geral, tome $n_0 \in N^+$ tal que $hn = n_0hn_0^{-1}$. Deste modo, $n_0A^+n_0^{-1} \cap \text{int } S \neq \emptyset$.

Lembrando que $\tilde{w}$ é um representante de w no normalizador de A^+ , então $n_0\tilde{w}n_0^{-1}$ é um representante de w no normalizador de $n_0A^+n_0^{-1}$, segue que

$$N^+n_0\tilde{w}n_0^{-1}b_0 = (n_0N^+n_0^{-1})(n_0\tilde{w}n_0^{-1})b_0 = N^+\tilde{w}b_0 \in C_0$$

mostrando que, de fato, a primeira condição implica na segunda.

Perceba também que a recíproca é verdadeira. Suponha que $A^+ \in \Delta$, e $N^+\tilde{w}b_0 \subset C_0$. Então,

$$\begin{aligned} \pi(n_0\tilde{w}n_0^{-1}A^+) &= n_0\tilde{w}n_0^{-1}\pi(A^+) \\ &= n_0\tilde{w}n_0^{-1}b_0 \\ &= n_0\tilde{w}b_0 \in C_0 \end{aligned}$$

com $n_0A^+n_0^{-1} \cap \text{int } S \neq \emptyset$, e portanto, $w \in W(S)$.

Temos ainda que, a segunda condição implica na terceira, trivialmente. E que a terceira condição implica na segunda tomando $g = 1$.

■

Proposição 55 *Com as notações acima, $W(S)$ é subgrupo de W .*

Demonstração: Seja C o único conjunto controlável invariante em G/P .

Inicialmente, $W(S) \neq \emptyset$, pois $1 \in W(S)$, uma vez que $D_1 = C$.

Agora, fixe uma decomposição de Langlands $P = MAN^+$ associada a uma decomposição de Iwasawa $G = KAN^+$, e uma câmara de Weyl positiva A^+ . Tome $b_0 = P \in C_0$. Sejam $w_1, w_2 \in W(S)$, e tome $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \in M^*$ representantes de w_1 e w_2 , respectivamente.

Temos que $b_0 = \pi(A^+)$, onde $\pi : G/MA \rightarrow G/MAN^+$ é a fibração canônica, com $A^+ \cap \text{int } S \neq \emptyset$. Então, pela Proposição 54, $\tilde{w}_1 b_0, \tilde{w}_2 b_0 \in C_0 = \pi(\Delta)$. Tomando

$$\alpha = w_1 A^+$$

pela equivariância da fibração canônica, segue que

$$\pi(\alpha) = \pi(w_1 A^+) = \tilde{w}_1 b_0 \in C_0$$

e assim, $\alpha \in \Delta$.

Além disso,

$$\begin{aligned} \alpha w_2 &= w_1 w_2 w_1^{-1} \alpha \\ &= w_1 w_2 w_1^{-1} (w_1 A^+) \\ &= w_1 w_2 A^+, \end{aligned}$$

isto é,

$$\tilde{w}_1 \tilde{w}_2 b_0 = \pi(w_1 w_2 A^+) = \pi(\alpha w_2) \in \pi(\Delta w_2) \subset D_{w_2} = C_0,$$

e novamente pela Proposição 54, temos $w_1 w_2 \in W(S)$. Logo, $W(S)$ é subsemigrupo em um grupo, portanto, um subgrupo de W .

■

Fixado um conjunto canônico de decomposições de Cartan e Iwasawa, e supondo $\text{int } S \cap A \neq \emptyset$, retomamos a notação do capítulo 4.1:

- $\Lambda_0 = \{H \in \mathfrak{a} : \exp(tH) \in \text{int } S, \text{ para algum } t > 0\}$;
- $\Lambda = \{h \in A : \exists n \in N^+ \text{ tal que } hn \in \text{int } S\}$;
- e $\tilde{\Lambda} = \{H \in \mathfrak{a} : \exp(tA) \in \Lambda \text{ para algum } t > 0\}$.

Temos Λ_0 e $\tilde{\Lambda}$ cones convexos com interior não vazio em $\mathfrak{a}$, e $\Lambda_0 \subset \tilde{\Lambda}$.

Uma vez garantido que $W(S)$ é subgrupo, pelo Lema 14, se $w \in W(S)$, então, $w^{-1} \Lambda_0 \subset \tilde{\Lambda}$, e por isso $w \Lambda_0 \subset \tilde{\Lambda}$.

Desta forma, é possível definir um cone convexo $W(S)$ -invariante contido em $\tilde{\Lambda}$

$$\Gamma = \Gamma(S)$$

como sendo o cone convexo gerado por

$$\bigcup_{w \in W(S)} w \Lambda_0.$$

Neste ponto, temos duas possibilidades: $\tilde{\Lambda}$ é próprio em $\mathfrak{a}$, ou $\tilde{\Lambda} = \mathfrak{a}$.

Teorema 19 *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples sobre um corpo $\mathbb{K}$ de característica zero. Se $X \neq 0$ é um elemento nilpotente em $\mathfrak{g}$, então existem $H, Y \in \mathfrak{g}$ tais que*

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

Lema 20 *Sejam G um grupo de Lie conexo semi-simples de centro finito, e S um semi-grupo em G . Suponha que exista $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\text{ad}(X)$ é nilpotente, e $\exp X \in \text{int } S$, então $S = G$.*

Demonstração: Uma vez que G é suposto conexo, podemos considerar G o grupo dos automorfismos internos $\text{Int}(\mathfrak{g})$. Isso ocorre porque $\text{Int}(\mathfrak{g})$ é isomorfo ao quociente de G pelo seu centro $Z(G)$, o que faz da projeção

$$G \longrightarrow G/Z(G)$$

um fibrado principal com grupo compacto, e como consequência do Teorema 3 em [24], temos $S = G$, sempre que $S/Z(G) = G/Z(G)$.

De fato, uma vez que $\text{Ad}(X)$ é nilpotente, então o Teorema de Engel garante que X é nilpotente, e portanto, segue do Teorema 19 que X pertence a uma álgebra isomorfa a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, isto é existem $H, Y \in \mathfrak{g}$ tais que

$$[H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y, \quad [X, Y] = H.$$

Seja $\mathfrak{g}_0$ a álgebra de Lie gerada por X, H e Y , e denote por G_0 o subgrupo conexo de $\text{Int} \mathfrak{g}$ com álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$.

Como G_0 é subgrupo de Lie de um grupo linear, G_0 tem centro finito e portanto, dado $Z \in \mathfrak{g}_0$, o subgrupo de 1-parâmetro

$$L = \{\exp tZ : t \in \mathbb{R}\} \subset G_0$$

é compacto se, e só se,

$$\{\exp(t \text{ad}_{\mathfrak{g}_0}(Z)) : t \in \mathbb{R}\} \subset \text{Int}(\mathfrak{g})$$

é compacto.

Seja $\varepsilon > 0$, defina

$$Z_\varepsilon = X - \varepsilon^2 Y \in \mathfrak{g}_0.$$

Então,

$$\begin{aligned} \text{ad}(Z_\varepsilon)X &= [X - \varepsilon^2 Y, X] \\ &= -\varepsilon^2 [Y, X] \\ &= \varepsilon^2 H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ad}(Z_\varepsilon)H &= [X - \varepsilon^2 Y, H] \\ &= [X, Y] - \varepsilon^2 [Y, H] \\ &= -2X - 2\varepsilon^2 Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ad}(Z_\varepsilon)Y &= [X - \varepsilon^2 Y, Y] \\ &= [X, Y] \\ &= H \end{aligned}$$

Logo, a matriz de $\text{ad}_{\mathfrak{g}_0}(Z)$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ \varepsilon^2 & 0 & 1 \\ 0 & -2\varepsilon^2 & 0 \end{pmatrix}$$

que tem autovalores 0 e $\pm 2\varepsilon i$, e portanto,

$$\{\exp(t \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}_0}(Z)) : t \in \mathbb{R}\}$$

é compacto, e segue que

$$\{\exp(t Z_\varepsilon) : t \in \mathbb{R}\} \subset G_0$$

também é compacto, e $\{\exp(t \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}_0}(Z)) : t \in \mathbb{R}\} \subset \operatorname{Int}(\mathfrak{g})$.

Como a exponencial é um difeomorfismo local, é possível tomar $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que $\exp(t Z_\varepsilon) \in \operatorname{int} S$.

Logo, existe um subgrupo compacto $L \subset G$ tal que $L \cap \operatorname{int} S \neq \emptyset$. Agora, observe que $L \cap \operatorname{int} S$ é um subsemigrupo de interior não vazio em L .

Seja $\operatorname{comp}(G)$ conjunto dos elementos compactos de G . Se S é um subsemigrupo de um grupo topológico conexo G , então, S é próprio em G se, e somente se, $\operatorname{comp}(G) \cap \operatorname{int} S \neq \emptyset$. Esse fato pode ser verificado da seguinte forma, suponha que exista $a \in \operatorname{comp}(G) \cap \operatorname{int} S$, então tome uma vizinhança simétrica da identidade U tal que $gU \subset S$. Como $g \in \operatorname{comp}(G)$ é possível tomar $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$g^n \in U$$

e então, $1 \in g^n U^{-1}$, e segue que

$$g^{n-1} g U \subset S \cap \operatorname{int} S \subset \operatorname{int} S.$$

E, portanto, S contém a componente conexa da identidade de G , e como G é conexo, segue que $G = S$.

Reciprocamente, $1 \in \operatorname{comp}(G)$, e assim, supondo que $S \subsetneq G$, então $1 \notin \operatorname{int} S$, logo $S \neq G$.

Como L é subgrupo compacto e $L \cap \operatorname{int} S$ é subsemigrupo de interior não vazio, segue o resultado.

■

Teorema 20 *Sejam G um grupo de Lie semi-simples conexo com centro finito e S um subsemigrupo de G tal que $\operatorname{int} S \neq \emptyset$. Suponha que o conjunto controlável invariante para S na variedade flag maximal $B = G/P$ é o próprio B . Então, $S = G$.*

Demonstração: Sejam $b \in B$ e P o subgrupo parabólico minimal correspondente. Então, pelo Lema 15 existe uma decomposição

$$P = MAN^+$$

com $A \cap \operatorname{int} S \neq \emptyset$. Seja $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}^+$ a álgebra de Lie de P , segundo o Lema 16

$$w^{-1}(\Gamma) \subset \tilde{\Lambda}, \quad \forall w \in W.$$

e, portanto, $\tilde{\Lambda}$ intercepta qualquer câmara em $\mathfrak{a}$. Sendo $\tilde{\Lambda}$ um cone convexo, então $\tilde{\Lambda} = \mathfrak{a}$. Segue que existem $h \in A$ e $n_1, n_2 \in N^+$ tais que

$$h^{-1}, n_2 h \in \operatorname{int} S$$

e, portanto,

$$n = n_2 n_1 = n_2 h h^{-1} n_1 \in \operatorname{int} S,$$

ou seja, $N^+ \cap \text{int } S \neq \emptyset$, e assim, segue o resultado.

■

Seja $G = KAN^+$ uma decomposição de Iwasawa de um grupo de Lie semi-simples G . Fixe A^+ uma câmara positiva no subgrupo *split*. A ação à esquerda de um elemento *split* regular $h \in A^+$ em G/MAN^+ define um difeomorfismo cujos pontos fixos são variedades da forma

$$\tilde{w}P = \tilde{w}b_0, \quad \tilde{w} \in M^*.$$

De fato, seja $h \in A^+$, defina o seguinte difeomorfismo

$$\begin{aligned} \gamma_h : G/MAN^+ &\longrightarrow G/MAN^+ \\ gMAN^+ &\longmapsto \gamma_h(gMAN^+) = hgMAN^+. \end{aligned}$$

Suponha que $gMAN^+$ é um ponto fixo desse difeomorfismo. Então,

$$gMAN^+ = hgMAN^+$$

o que equivale a dizer que

$$ghg^{-1} \in MAN^+.$$

Note que qualquer conjugação de um elemento *split* regular é ainda um elemento *split* regular, em particular, $ghg^{-1} \in A$. Logo, existe $h' \in A$ tal que $ghg^{-1} = h' \in A$. Mas, por definição, isso ocorre quando g pertence ao normalizador de A em G , isto é, $g \in M^*$. E, portanto, $g = \tilde{w}$ é um representante de algum $w \in W$, e assim o ponto fixo para γ_h é da forma

$$gMAN^+ = \tilde{w}P = \tilde{w}b_0, \quad \tilde{w} \in M^*.$$

Em resumo, para cada $h \in A^+$, tem-se um difeomorfismo γ_h cujos pontos fixos são da forma $\tilde{w}b_0$, $\tilde{w} \in M^*$. Por isso a seguinte definição

Definição 54 *Sejam $h \in A^+$ e $b_0 = P = MAN^+$. Os elementos*

$$\tilde{w}b_0 \in G/P, \quad \tilde{w} \in M^*$$

são chamados h -pontos-fixos do tipo w .

Cada h -ponto-fixo do tipo w é, na verdade, um atrator para a variedade $N^-\tilde{w}b_0$, isto é, a ação à esquerda por um elemento *split* regular iteradamente converge para o h -ponto-fixo.

De fato, seja $\tilde{w}b_0$ h -ponto-fixo do tipo w , tome $n\tilde{w}b_0 \in N^-\tilde{w}b_0$, segue que

$$h(n\tilde{w}b_0) = hn\tilde{w}b_0 = (hn\tilde{w}h^{-1})h\tilde{w}b_0 = (hnh^{-1})\tilde{w}b_0$$

e indutivamente, temos

$$h^k(n\tilde{w}b_0) = (h^knh^{-k})\tilde{w}b_0.$$

Pela Proposição 13, segue que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} h^knh^{-k} = 1,$$

e, portanto,

$$h^k(n\tilde{w}b_0) = (h^knh^{-k})\tilde{w}b_0 \longrightarrow \tilde{w}b_0. \quad (5.1)$$

quando $k \longrightarrow \infty$.

Dessa forma, cada ponto fixo é um atrator para a órbita de γ_h numa variedade $N^-\tilde{w}b_0$, que é dita uma variedade estável para h , ou uma variedade h -estável.

Quando $\tilde{\Lambda} = \mathfrak{a}$, $\text{Ad}(S) = \text{Ad}(G)$, então, pelo Teorema 20, S é um semigrupo próprio de G somente se G não tiver centro finito. Este caso não será considerado, pois, desde o princípio tomamos G com centro finito.

Então, seja $\tilde{\Lambda}$ um cone convexo próprio em $\mathfrak{a}$. Como $\Gamma \subset \tilde{\Lambda}$, temos que $W(S)$ é um grupo que deixa um cone convexo próprio invariante. Visto que $W(S)$ é finito, isso equivale a dizer que existe $H \in \mathfrak{a}$ não nulo, tal que

$$wH = H, \quad \forall w \in W(S)$$

Pelo fato de Γ ser um conjunto invariante por $W(S)$ em $\mathfrak{a}$, cada ponto fixo pode ser escrito da forma

$$H = \sum_{w \in W(S)} wH'$$

com H' podendo ser qualquer vetor não nulo em Γ . De fato, para ver isso, basta aplicar qualquer $w \in W(S)$ em H escrito como o somatório acima, para ver que apenas mudamos a ordem da soma dos seus termos.

Logo, podemos tomar H no fecho de uma câmara $\mathfrak{a}^+$, tal que

$$\mathfrak{a}^+ \cap \tilde{\Lambda} \neq \emptyset$$

(note que H está na fronteira de $\mathfrak{a}$ a menos que $W(S) = \{1\}$).

O seguinte resultado, já conhecido na literatura, será usado no teorema subsequente.

Teorema 21 (Chevalley) *Sejam E espaço vetorial e $F \subset E$ subespaço de E . Dado W_F o subgrupo de W que deixa F invariante em cada ponto. Então, $W(F)$ é gerado pelas reflexões w_{α_i} , com $\alpha_i \in \Sigma$, tais que F é invariante em cada ponto.*

Teorema 22 *Fixe o conjunto canônico de decomposições, isto é, $G = KAN^+$ e $P = MAN^+$. Tome $b_0 \in C_0$, e $A^+ \in \Delta$. Então, $W(S, A^+) = W_\Theta$, para algum $\Theta \subset \Sigma$, onde Σ é o sistema simples de raízes restritas associado a decomposição de Iwasawa determinada por b_0 .*

Demonstração: Seja H um ponto fixo de $W(S)$ no fecho de uma câmara positiva $\mathfrak{a}^+$ que intercepta $\tilde{\Lambda}$.

Associado a $\mathfrak{a}^+$ existe um sistema de raízes Σ .

Pelo Teorema de Chevalley, o subgrupo de W que deixa H invariante é da forma W_Θ com $\Theta \subset \Sigma$ e W_Θ o subgrupo gerado pelas raízes em Θ . O referido conjunto Θ é dado exatamente pelas raízes que se anulam em H , isto é,

$$\Theta = \{\alpha \in \Sigma : \alpha(H) = 0\}$$

Então, segue que $W(S) \subset W_\Theta$, para um certo $\Theta \subset \Sigma$.

Agora, escolha H com as mesmas características anteriores, e que seja de regularidade maximal, isto é, tal que Θ tenha a menor quantidade possível de elementos. Então, é possível mostrar que $W(S) = W_\Theta$.

De fato, seja P_Θ o subgrupo parabólico associado a Θ , e considere a seguinte fibração equivariante

$$\pi_\Theta : G/P \longrightarrow G/P_\Theta.$$

Denote por C e C_Θ os respectivos conjuntos controláveis invariantes para S em G/P e G/P_Θ . Sejam

$$b_0 \in C_0 \quad \text{e} \quad \xi_0 = \pi_\Theta(b_0) \in (C_\Theta)_0,$$

e defina

$$C_{\xi_0} = C \cap \pi_\Theta^{-1}(\xi_0).$$

Pela Proposição 53, C_{ξ_0} é o conjunto controlável invariante para $S(\Theta)$, que é subsemigrupo de grupo $G(\Theta)$, que por sua vez tem álgebra de Lie

$$\mathfrak{g}(\Theta) = \mathfrak{n}^+(\Theta) + \mathfrak{a}(\Theta) + \mathfrak{n}^-(\Theta).$$

Como visto na demonstração da Proposição 53, a fibra $\pi_\Theta^{-1}(\xi_0)$ coincide com a *flag* maximal de $G(\Theta)$, e $W(\Theta)$ é o grupo de Weyl de $G(\Theta)$.

Observando que $b_0 \in C_0 \cap \pi_\Theta^{-1}(\xi_0) \subset C_{\xi_0}$, então

$$\tilde{w}b_0 \in C_{\xi_0}$$

se $w \in W(S)$. Logo, $W(S)$ é subgrupo de $W(S(\Theta))$.

Por outro lado, a minimalidade de Θ garante que não há vetores não nulos invariantes por $W(S)$ em uma subálgebra *split* $\mathfrak{a}(\Theta)$ de $\mathfrak{g}(\Theta)$. Como $W(S) \subset W(S(\Theta))$, concluímos que $W(S(\Theta))$ não deixa qualquer cone em $\mathfrak{a}(\Theta)$ invariante. Então, utilizando o Teorema 20, temos que $S(\Theta) = G(\Theta)$, com $C_{\xi_0} = \pi_\Theta^{-1}(\xi_0)$.

Assim, segue que $\tilde{w}b_0 \in C_{\xi_0} \subset C$, $\forall w \in W_\Theta$. E, do Lema 20, temos que $w \in W(S)$, e, portanto, $W(S) = W_\Theta$.

■

Corolário 9 *Com as notações acima, seja C_Θ o conjunto controlável invariante para $S(\Theta)$ em G/P_Θ . Então,*

$$C = \pi_\Theta^{-1}(C_\Theta)$$

onde $\pi_\Theta : G/P \longrightarrow G/P_\Theta$ é a fibração canônica.

Demonstração: Uma vez que G/P é compacto, C_Θ é um conjunto controlável invariante para S em G/P_Θ , e $C_{\xi_0} = C \cap \pi_\Theta^{-1}(\xi_0)$ com $\xi_0 \in (C_\Theta)_0$. Então, pela Proposição 45 item 2, temos que $C = \pi_\Theta^{-1}(C_\Theta)$.

■

A seguir veremos um resultado que estabelece certas equivalências que caracterizam o fato de um elemento w pertencer a $W(S)$. Para isso, faremos uso da decomposição multiplicativa de Jordan, que é explicada abaixo.

Um elemento $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ é chamado semi-simples se, visto como um elemento de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, X for conjugado a uma matriz diagonal. Quando todos os autovalores de X são reais, X é dito ser um elemento semi-simples real. Uma matriz $u \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ é chamada unipotente se $u - 1$ (1 denota a identidade) for uma matriz nilpotente. Uma matriz $g \in GL(n, \mathbb{R})$ é chamada elíptica quando todos os seus autovalores em $\mathbb{C}$ tem norma 1, e hiperbólica se todos os seus autovalores em $\mathbb{C}$ tem módulo maior que 0.

Lema 21 Cada $g \in GL(n, \mathbb{R})$ pode ser escrito de forma única como

$$g = ehu$$

com $e, h, u \in GL(n, \mathbb{R})$, e uma matriz elíptica, h hiperbólica, e u unipotente, e ainda, os três termos comutam.

Demonstração: Partindo da decomposição de Jordan aditiva, temos

$$g = s + n_1$$

com s semi-simples e n nilpotente, tais que

$$n = n_1 s = s n_1.$$

Tome $n = s^{-1} n_1$ e $u = 1 - s^{-1} n_1$. Então, n é nilpotente e u é unipotente. Isso define uma decomposição de Jordan multiplicativa para g ,

$$g = su = us,$$

e da unicidade da decomposição aditiva, segue a unicidade desta decomposição, também.

Visto que s é semi-simples ela é conjugada a uma matriz diagonal. Como, cada matriz diagonal pode ser decomposta como produto de uma matriz diagonal com elementos de norma 1 e uma matriz diagonal com elementos não todos nulos como um produto de matrizes elementares, temos que s se decompõe de forma única como

$$s = eh = he$$

com e elíptica, e h hiperbólica.

Como g é fixo pela conjugação complexa então o mesmo acontece com e, h , e u . Logo, $e, h, u \in GL(n, \mathbb{R})$.

■

A decomposição acima é chamada de decomposição multiplicativa de Jordan completa.

Agora, podemos caracterizar os elementos dessa decomposição nos termos de uma decomposição de Iwasawa, tal como no teorema abaixo.

Teorema 23 Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semi-simples sobre $\mathbb{R}$, e G o grupo adjunto $\text{Int}(\mathfrak{g})$. Seja $G = KAN^+$ uma decomposição de Iwasawa de G . Então, tem-se:

- $g \in G$ é elíptica se, e somente se, é conjugada a um elemento em K .
- $g \in G$ é hiperbólica se, e somente se, é conjugada a um elemento em A .
- $g \in G$ é unipotente se, e somente se, é conjugada a um elemento em N^+ .

A partir dessa caracterização, podemos extrair formas equivalentes ao fato de w pertencer a $W(S, A_0^+)$ que serão úteis em resultados posteriores.

Corolário 10 Suponha A_0 o subgrupo split com uma câmara A_0^+ fixada. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:

1. $w \in W(S, A_0^+)$.

2. Existe um subgrupo parabólico minimal $P = MAN^+$ e $g \in P \cap \text{int } S$ tal que $g = hn$, $h \in A$, $n \in N^+$ e $w'h = h$, onde w' é um elemento do grupo de Weyl de A que corresponde a w sob um isomorfismo obtido pela conjugação que leva A_0^+ na câmara positiva contendo h .
3. Existe um subgrupo split A_1 e $a \in A_1 \cap \text{int } S$, tal que $w''a = a$, com w'' um elemento do grupo de Weyl de A_1 que corresponde a w por um isomorfismo obtido por uma conjugação que leva A_0^+ em uma câmara contendo o elemento a .

Demonstração:

- ((1) $\implies$ (2))

Seja $w \in W(S, A_0^+)$. Então, existe um elemento $H \in \mathfrak{a}_0^+$ tal que $H \in \tilde{\Lambda} \cap \mathfrak{a}_0^+$, e portanto, $h = \exp(H) \in A_0^+$ é um elemento fixado por w de modo que $hn \in P \cap \text{int } S$, com $n \in N^+$ para uma decomposição $P = MAN^+$, com A_0^+ uma câmara positiva para A .

- ((2) $\implies$ (3))

Seja $g = hn \in P \cap \text{int } S$, com $h \in A$ e $n \in N^+$, e tal que $w'h = h$.

Considere a decomposição multiplicativa de Jordan, isto é,

$$g = g_s g_u = g_u g_s$$

com g_u unipotente e g_s semi-simples. Como G é um grupo de Lie real, e $h \in A$ onde A é um subgrupo de elementos diagonalizáveis, então seus autovalores são todos reais, o que faz de h um elemento hiperbólico. Considerando a decomposição de um elemento semi-simples em produto de um hiperbólico por um elíptico, segue que g_s deve ser também hiperbólico, e assim, pelo Teorema 1.4.3.3 em [35], h e g_s são conjugados, e $g_s \in A_1$ para algum subgrupo *split* A_1 de G .

Agora, seja $\widetilde{M}_\Theta$ o centralizador de A_1 em G . Então, Θ é um subconjunto do sistema simples de raízes associado a uma câmara de A_1 que tem g_s em seu fecho. Uma vez que g_s e g_u comutam, temos $g_u \in \widetilde{M}_\Theta$.

Visto que g_u é unipotente, pelo Teorema 23, g_u é conjugado a algum N^+ de uma decomposição de Iwasawa $G = KAN^+$. Logo, g_u pode ser tomado da seguinte forma

$$g_u = \exp x$$

onde X pertence a uma álgebra de Lie nilpotente, isto é, $\text{ad}(X)$ é nilpotente, e assim como no Lema 20, é possível aproximar g_u por elementos compactos.

Seja $b \in \widetilde{M}_\Theta$ um elemento compacto tal que $b^k = 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$, e próximo o suficiente de g_u de modo que

$$g_s b \in \text{int } S.$$

Tome $a = g_s^k$, então $a = g_s^k b^k = (g_s b)^k \in \text{int } S$. Além disso, observe que um elemento do grupo de Weyl de A_1 fixa a se, e somente se, este elemento fixa g_s .

Uma vez que g_s é conjugado a h , existe $u_0 \in G$ tal que $u_0 A u_0^{-1} = A_1$, com $u_0 h u_0^{-1} = g_s$, e assim, tomando $u = u_0^k$, temos

$$u h u^{-1} = a.$$

Sendo h e a conjugados por u , a ação deste elemento sobre as câmaras de Weyl deve levar uma câmara que tem h no seu bordo, em uma câmara que contém a , e consequentemente, g_s no seu fecho.

Note ainda que $h \in A^+ \cap wA^+$ se, e só se, $wh = h$, pois a W -órbita de h intersecta cada câmara uma única vez. Dessa forma, se w_1 é um elemento do grupo de Weyl de A que fixa h , a conjugação por u leva as câmaras w_1A^+ na câmara contendo a , enquanto um w_2 no grupo de Weyl de A_1 que fixa $a \in A_0^+$ leva a câmara A_0^+ na câmara w_2A^+ .

• ((3) $\implies$ (1))

Seja A_1 um subgrupo *split* e $a \in A_1 \cap \text{int } S$ tal que $w''a = a$ para algum w'' no grupo de Weyl de A_1 correspondendo a $w \in W(S, A_0^+)$.

Quando $w'' = 1$, o elemento fixado por w'' não é necessariamente de fronteira, nada mais precisa ser demonstrado. Caso contrário, seja A_1^+ a câmara que tem a em seu bordo. Então,

$$w''a = a \in \text{int } S,$$

e assim, $w''A_1^+$ intercepta $\text{int } S$, e portanto,

$$w''A_1^+ \in \Delta_1$$

onde Δ_1 corresponde a A_1 de modo análogo a Δ para A . Assim, temos que $w'' \in W(S, A_1^+)$, e então, segue que $w \in W(S, A_0^+)$.

■

Teorema 24 *Os conjuntos controláveis efetivos D_{w_1} e D_{w_2} coincidem se, e somente se, $W(S)w_1 = W(S)w_2$.*

Demonstração: Fixada uma escolha canônica com $b_0 \in C_0$ e $A^+ \in \Delta$. Suponha que

$$W(S)w_1 = W(S)w_2.$$

Sejam $\tilde{w}_1, \tilde{w}_2 \in M^*$ representantes de w_1 e w_2 de $W(S)$.

Inicialmente, como $w_1, w_2 \in W(S)$, temos

$$\tilde{w}_1b_0 \in D_{w_1} \quad \text{e} \quad \tilde{w}_2b_0 \in D_{w_2}.$$

Pelo Lema 20, $\tilde{w}_1b_0, \tilde{w}_2b_0 \in C_0$, logo $\tilde{w}_2\tilde{w}_1^{-1}b_0 \in C_0$.

Sejam $P' = M'A'N^{+'}$ e $A^{+'}$ escolhas canônicas com relação a $\tilde{w}_2\tilde{w}_1^{-1}$. Observe que

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1b_0 &= \tilde{w}_1(\tilde{w}_2^{-1}\tilde{w}_2b_0) \\ &= (\tilde{w}_1\tilde{w}_2^{-1})\tilde{w}_2(\tilde{w}_1\tilde{w}_2^{-1}b_0) \end{aligned}$$

Como $\tilde{w}_1b_0$ é um h' -ponto fixo e $n\tilde{w}_2b_0 \in D_{w_2}$, podemos tomar um elemento regular $h' \in A^{+'}$ tal que $h' \in \text{int } S$, e assim

$$(h^knh^{-k})\tilde{w}_1b_0 = h^k(n\tilde{w}_1b_0) \longrightarrow \tilde{w}_1b_0$$

com $k \longrightarrow \infty$, isto é, $\tilde{w}_1b_0 \in \text{fe}(Sx) \cap D_{w_1}$ para $x = n\tilde{w}_1b_0$. Considerando a ordem entre conjuntos controláveis, temos que $D_{w_1} < D_{w_2}$.

Por outro lado, $w_2 w_1^{-1} b_0 \in C_0$, e assim, tomando uma escolha canônica de decomposição de Iwasawa $P'' = M'' A'' N''^+$ e câmara positiva A'' adaptada a $\tilde{w}_2 \tilde{w}_1^{-1} b_0$ de modo análogo ao realizado em $\tilde{w}_2 \tilde{w}_1^{-1}$, obtemos as mesmas conclusões. E, portanto, $D_{w_1} < D_{w_2}$. Conclui-se que $D_{w_1} = D_{w_2}$.

Reciprocamente, suponha que $D_{w_1} = D_{w_2}$, com $b_0 = P = MAN^+$ e $A^+ \in \Delta$ fixados. Tome $W(S) = W(S, A^+)$, e considere uma decomposição de P relativa a $\tilde{w}_2 b_0$, isto é,

$$P = w_2 M A N^+ w_2^{-1} = M A N_{w_2}$$

com $N_{w_2} = w_2 N^+ w_2^{-1}$. Com relação a essa decomposição, defina os seguintes conjuntos

$$\Lambda_2 = \{h \in A : \exists n \in N_{w_2} \text{ tal que } hn \in \text{int } S\}$$

e

$$\tilde{\Lambda}_2 = \{H \in \mathfrak{a} : \exp(tH) \in \Lambda_2, t > 0\}$$

análogos a Λ e $\tilde{\Lambda}_0$ definidos anteriormente. Temos que $\tilde{\Lambda}_0$ e $\tilde{\Lambda}_2$ são cones convexos em $\mathfrak{a}$. Além disso, como $A^+ \in \Delta$ algum elemento de $\mathfrak{a}^+$ é levado pela exponencial em um elemento de A que intercepta o interior de S , e portanto,

$$\tilde{\Lambda}_2 \cap \mathfrak{a}^+ \neq \emptyset.$$

Além disso, $\tilde{\Lambda}_2 \cap \tilde{w}_2 \tilde{w}_1^{-1} \mathfrak{a}^+ \neq \emptyset$. De fato, $\tilde{w}_2 b_0 \in D_{w_1} = D_{w_2}$, e portanto, dado $h \in A^+ \cap \text{int } S$

$$h \tilde{w}_2 b_0 = \tilde{w}_2 b_0 \in D_{w_2}.$$

De fato, para verificar isso, note que M^* normaliza A , e assim $\tilde{w}_2 b_0$ está no conjunto de transitividade de D_{w_1} ,

$$\tilde{w}_2 b_0 \in (D_{w_1})_0$$

E ainda, lembrando que os pontos fixos de um elemento regular $h' \in \tilde{w}_2 \tilde{w}_1^{-1} A^+ = A^{+'}$ são dados por

$$\tilde{w}' P' = \tilde{w}' (\tilde{w}_2 \tilde{w}_1^{-1} b_0)$$

para $\tilde{w}' \in M^{*'}$. Então, podemos dizer que

$$\tilde{w}_1 b_0 (\tilde{w}_2 \tilde{w}_1^{-1}) \tilde{w}_2 (\tilde{w}_2 \tilde{w}_1^{-1})^{-1} (\tilde{w}_2 \tilde{w}_1^{-1} b_0)$$

é um h' -ponto fixo.

Agora, do mesmo modo que foi feito no Teorema 49, dados um elemento regular $h' \in A^{+'}$, e $n \in N^{+'}$, existe $n_0 \in N^{+'}$ tal que

$$n_0 h' n_0^{-1} = h' n \in n_0 A^{+'} n_0^{-1},$$

e, portanto, os pontos fixos nas outras variedades do tipo $N^- w b_0$, da decomposição de Bruhat, são da forma

$$n \tilde{w}_1 b_0.$$

Uma vez que D_{w_2} contém pontos que são fixados por um elemento de $\text{int } S$ para ao menos um $n \in N^{+'}$, temos

$$n\tilde{w}_1b_0 \in D_{w_2}.$$

Então, pelo Teorema 49, existe $b \in C_0$ tal que

$$\tilde{w}_2b_0 \in \nu(b, w_1),$$

onde $\nu(b, w_1) = \pi\{\alpha w_1 \in G/MA : \alpha \in \pi^{-1}\{b\} \cap \Delta\}$, isto é, existe $g \in \text{int } S$ tal que $gb = b_0 \in C_0$, e assim, $g\alpha$ é uma câmara positiva para b_0 contendo g de modo que

$$\pi((g\alpha)w_1) = \tilde{w}_1g\pi(\alpha) = \tilde{w}_1(gb_0) = \tilde{w}_1b.$$

ou seja, a imagem de $g\alpha$ pela ação de $\tilde{w}_1$ é uma câmara positiva para $\tilde{w}_1b_0$.

Se g está em uma câmara positiva para $\tilde{w}_2b_0$, temos também

$$g(\tilde{w}_2b_0) = \tilde{w}_2b_0.$$

Pelo Teorema 16, essa condição é equivalente a dizer que g pode ser escrito como

$$g = h'n$$

com $h' \in \tilde{w}_2\tilde{w}_1^{-1}A^+$, e $n \in N_{w_2}$, pois,

$$\tilde{w}_1\tilde{w}_2\tilde{w}_1^{-1}A^+ = \tilde{w}_1(A^+w_2.)$$

Com isso, podemos afirmar que

$$\tilde{\Lambda}_2 \cap \tilde{w}_2\tilde{w}_1^{-1}\mathfrak{a}^+ \neq \emptyset$$

pois h' está nessa interseção.

Agora, o objetivo é mostrar que $\tilde{w}_2\tilde{w}_1^{-1}W(S) = W(S)$. Para isso, vamos verificar que existe uma sequência finita de termos em $W(S)$ que levam $\tilde{w}_2\tilde{w}_1^{-1}\mathfrak{a}^+$ em $\mathfrak{a}^+$, e de modo que, em determinado instante, essa sequência retorna para a identidade do grupo.

Pela convexidade de $\tilde{\Lambda}_2$, podemos tomar $H_1, \dots, H_k \in \mathfrak{a}$ elementos regulares que satisfazem às seguintes condições:

1. $H_1 \in \tilde{w}_2\tilde{w}_1^{-1}\mathfrak{a}^+$ e $H_k \in \mathfrak{a}^+$;
2. Denotando por $\{H_i, H_{i+1}\}$ o segmento que liga H_i a H_{i+1} , temos $\{H_i, H_{i+1}\}$ inteiramente contido em $\tilde{\Lambda}_2$, para todo $i = 1, \dots, k-1$;
3. Se o segmento $\{H_i, H_{i+1}\}$ cruza a fronteira de uma câmara, isso ocorre com $\{H_i, H_{i+1}\}$ atravessando um hiperplano que anula uma única raiz;
4. Qualquer segmento $\{H_i, H_{i+1}\}$ está contido na união de no máximo duas câmaras.

Sejam $H_i' \in \{H_i, H_{i+1}\}$ o elemento que intersecta o hiperplano como descrito no item 3, e $s_i \in W$ tal que $s_i(H_i') = H_i'$, para $i = 1, \dots, k-1$. Como os elementos do grupo de Weyl são isometrias e agem permutando as câmaras, pelo fato de fixar H_i' , s_i é uma aplicação que troca as câmaras que contém H_i e H_{i+1} . Com isso, podemos dizer que, para cada $i = 1, \dots, k-1$,

$$s_i s_{i-1} \cdots s_1 \tilde{w}_2 \tilde{w}_1^{-1}$$

é um isomorfismo que leva um elemento *split* regular $h \in \text{int } S \cap A^+$ na câmara associada a que contém H_i' no seu fecho em $\mathfrak{a}$, isto é. Dado $W(S, A_i^+)$ o grupo de Weyl com relação à

$$s_i s_{i-1} \cdots s_1 \tilde{w}_2 \tilde{w}_1^{-1} A^+.$$

Então, pelo Lema 20, temos $s_i \in W(S, A_i^+)$, o que significa que por meio de uma conjugação por $s_i s_{i-1} \cdots s_1 \tilde{w}_2 \tilde{w}_1^{-1}$ de s_i temos

$$(s_i s_{i-1} \cdots s_1 \tilde{w}_2 \tilde{w}_1^{-1})^{-1} s_i (s_i s_{i-1} \cdots s_1 \tilde{w}_2 \tilde{w}_1^{-1}) \in W(S, A^+) = W(S)$$

para cada $i = 1, \dots, k-1$.

Uma vez que, por construção,

$$s_k s_{k-1} \cdots s_1 \tilde{w}_2 \tilde{w}_1^{-1} \mathfrak{a}^+ = \mathfrak{a}^+$$

segue que $s_i s_{i-1} \cdots s_1 \tilde{w}_2 \tilde{w}_1^{-1} = 1$, e portanto,

$$(s_{i-1} \cdots s_1 \tilde{w}_2 \tilde{w}_1^{-1})^{-1} s_i (s_i s_{i-1} \cdots s_1 \tilde{w}_2 \tilde{w}_1^{-1}) = (s_{i-1} \cdots s_1 \tilde{w}_2 \tilde{w}_1^{-1})^{-1} \in W(S),$$

e então,

$$s_i s_{i-1} \cdots s_1 \tilde{w}_2 \tilde{w}_1^{-1} \in W(S)$$

para cada $i = 1, \dots, k-1$.

Agora, supondo que para dado $j-1, s_{k-(j-1)}, s_{k-(j-2)}, \dots, s_k \in W(S)$, defina

$$w_j = s_{k-j+1} s_{k-j} \cdots s_1 \tilde{w}_2 \tilde{w}_1^{-1} \in W(S).$$

para $2 \leq j \leq k+1$.

Dessa forma,

$$s_k s_{k-1} \cdots s_{k-j} (s_{k-j+1} s_{k-j} \cdots s_1 \tilde{w}_2 \tilde{w}_1^{-1}) = 1$$

logo,

$$s_{k-j} = (s_k s_{k-1} \cdots s_{k-j+1})^{-1} w_j^{-1} \in W(S)$$

Aplicando o segundo princípio de indução, temos em particular que,

$$w_2 w_1^{-1} \in W(S)$$

isto é, $W(S)w_1 = W(S)w_2$.

■

Corolário 11 *Com as notações acima, fixada uma câmara A^+ , temos $W(S^{-1}, A^+) = W(S, A^+)$.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos supor que $A^+ \in \Delta$, afinal, isso pode ser conseguido a menos de uma escolha para a câmara positiva, o que implica numa conjugação dos subgrupos de W do tipo $W(S)$.

Fixe $w_0 \in W$ de modo que

$$w_0 \mathfrak{a}^+ = -\mathfrak{a}^+.$$

Então, D_{w_0} é o conjunto controlável minimal para S , e, portanto, o conjunto de transitividade do conjunto controlável invariante para S^{-1} . Seja $\alpha = A^+ \in \Delta$. Então, sua projeção $\pi(\alpha) = b_0$ está em $C_0 = \pi(\Delta)$.

Como $W(S^{-1}, A^+)$ é subgrupo de W , $s \in W(S^{-1}, A^+)$ se, e somente se, $sw_0b_0 \in D_{w_0}$.

Visto que $b_0 \in C_0$, supondo $s, w_0 \in W(S^{-1}, A^+)$, então $D_{w_0} = D_{sw_0}$ e, portanto, pelo Teorema 24, segue que

$$W(S, A^+)sw_0 = W(S, A^+)w_0$$

o que equivale a

$$W(S, A^+)sw_0w_0^{-1} = W(S, A^+)$$

algo que ocorre somente quando

$$sw_0w_0^{-1} = s \in W(S, A^+),$$

e portanto, $W(S^{-1}, A^+) = W(S, A^+)$.

■

Corolário 12 *Suponha que $D_{w_1} = D_{w_2}$ e $w_2w_1^{-1}$ não tem pontos fixos não nulos em $\mathfrak{a}$. Então, $\text{Ad}(S) = \text{Ad}(G)$.*

Proposição 56 *Seja Θ um subconjunto do sistema simples de raízes tal que $W(S, A^+) = W_\Theta$. Denote por C_Θ o conjunto controlável invariante para S em G/P_Θ . Seja $\xi_0 = P_\Theta$, e suponha $\xi \in (C_\Theta)_0$, então $C_\Theta \subset N^-\xi_0$.*

Demonstração: Suponha que C_Θ não está inteiramente contido em $N^-\xi_0$, isto é, C_Θ intersecta o complementar de $N^-\xi_0$. Seja $h \in A^+ \cap \text{int } S$. Considerando a decomposição de Bruhat generalizada para subgrupos parabólicos,

$$G = \bigcup_{w \in W/W_\Theta} N^+wP_\Theta$$

onde W_Θ é o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em W , cada célula é uma variedade h -estável, e dessa forma, é possível dizer que o complementar de uma variedade aberta e densa dada por $N^-\xi_0$ é um conjunto fechado (uma união de variedades estáveis para h). Cada variedade estável está associada a um h -ponto fixo, se um elemento em alguma dessas células pertence a C_Θ . Então, uma sequencia de termos em $\text{int } S$ leva tal elemento no h -ponto fixo correspondente à célula o que faz com que esse ponto fixo esteja ainda em C_Θ , isto é, existe $\xi_1 \in C_\Theta$ tal que $h\xi_1 = \xi_1$.

Uma vez que os h -pontos fixos são da forma $\tilde{w}\xi_0$, temos

$$\xi_1 = \tilde{w}\xi_0$$

para algum $w \in W - W_\Theta$, uma vez que, para qualquer $w \in W_\Theta$ temos $\tilde{w}\xi_0 = \xi_0$.

Seja $b_0 = P$. Então, por hipótese, $\pi_\Theta(b_0) = \xi_0$, e então, $b_0 \in \pi_\Theta^{-1}\{\xi_0\}$. Então, temos que,

$$\tilde{w}b_0 \in \tilde{w}\pi_\Theta^{-1}\{\xi_0\} = \pi_\Theta^{-1}\{\tilde{w}\xi_0\} = \pi_\Theta^{-1}\{\xi_1\},$$

e portanto, como $\xi_1 \in C_\Theta = \pi_\Theta(C)$, temos $\tilde{w}b_0 \in C$. Ainda, visto que ξ_1 é fixo por $h \in \text{int } S$, temos $\tilde{w}b_0 \in C_0$, e pelo Lema 20, conclui-se que $w \in W(S, A^+)$, o que contraria a hipótese de $W(S, A^+) = W_\Theta$.

■

5.2.1 Tipo *Flag* De Semigrupo

Fixado um subgrupo parabólico minimal $P(= P_\emptyset)$ e uma câmara de Weyl positiva, temos uma família de subgrupos parabólicos P_Θ , com $\Theta \subset \Sigma$, onde Σ é um sistema simples de raízes associado a câmara fixada.

Como visto anteriormente, no Teorema 22, o conjunto controlável invariante para S em G/P_Θ é a projeção do conjunto controlável invariante C de G/P . Dessa forma, os semigrupos em G podem ser distinguidos de acordo com a geometria dos seus conjuntos controláveis invariantes. Ainda, pelo o Teorema 22, vimos que o subgrupo

$$W(S) = \{w \in W : D_w = D_1\}$$

é um subgrupo de W gerado pelas raízes em Θ , para algum $\Theta \subset \Sigma$. Assim sendo, definimos uma aplicação que associa a cada semigrupo de interior não vazio S um subconjunto do sistema simples de raízes,

$$S \longmapsto \Theta(S).$$

Essa aplicação é uma bijeção como mostra a Proposição abaixo:

Proposição 57 *Existe $\Theta \subset \Sigma$ tal que $\pi_\Theta^{-1}(C_\Theta) \subset G/P$ é um conjunto controlável invariante para S com C_Θ contido em uma variedade estável para algum elemento regular real se, e somente se, esse Θ é maximal satisfazendo a condição de $\pi_\Theta^{-1}(C_\Theta) \subset G/P$ ser conjunto controlável invariante para S .*

Com essa proposição são estabelecidas as bases para a formalização da ideia de tipo *flag* (ou parabólico) de semigrupo, que surgira de diferentes formas em [20], [21] e [25].

Essa formalização pode ser dada como a seguir.

Definição 55 *Denotamos o subconjunto de Σ que é maximal com a propriedade de $\pi_\Theta^{-1}(C_\Theta) \subset G/P$ ser conjunto controlável invariante para S por $\Theta(S)$, e dizemos que $\Theta(S)$ é o tipo flag de S . Ainda, qualquer semigrupo próprio de interior não vazio é do tipo flag Θ para algum $\Theta \subset \Sigma$.*

5.3 Conjuntos Controláveis nas outras Variedades *Flag*

Quanto ao comportamento dos conjuntos controláveis efetivos sob fibrações equivariantes, já é conhecido que conjuntos controláveis efetivos são projetados dentro de conjuntos controláveis efetivos. Para variedades *flag*, é possível explicitar uma relação ainda mais precisa, a de que os conjuntos controláveis efetivos em G/P_Θ são projeções dos conjuntos controláveis efetivos em G/P .

Proposição 58 *Sejam $B = G/P$ a variedade flag maximal e $b_\Theta = G/P_\Theta$ uma variedade flag, com P_Θ um subgrupo parabólico associado a um subconjunto Θ do sistema simples de raízes. Considere a fibração canônica $\pi_\Theta : B \rightarrow B_\Theta$. Se E é um conjunto controlável efetivo para S em B_Θ , então existe $w' \in W$ tal que*

$$\pi_\Theta((D_w)_0) = E_0$$

para todo $w \in w'W_\Theta$.

Demonstração: Seja $\xi \in E_0$ e Q_Θ o subgrupo de isotropia de ξ . Tome $b \in \pi_\Theta^{-1}\{\xi\}$ e P_b o subgrupo de isotropia em b . Para alguma decomposição de Langlands de P_b temos um elemento *split* regular $h \in P_b$ tal que $hb = b$.

Da equivariância da fibração π_Θ , temos

$$h\xi = h\pi_\Theta(b) = \pi_\Theta(hb) = \pi_\Theta(b) = \xi.$$

Fixe um conjunto canônico definido por h , isto é, tome Δ referente à decomposição de P_b que tem h em sua câmara positiva. Temos, pelo Teorema 17, que

$$b \in C_0 = \pi(\Delta)$$

onde $\pi : G/MA \rightarrow G/MAN^+$ é a fibração equivariante que projeta o conjunto das câmaras de Weyl na variedade *flag* maximal. Além disso, $hb = b$ com $h \in \text{int } S$, implica em $b \in C_0$, com C_0 denotando o conjunto de transitividade do conjunto controlável invariante C de G/P_b .

Seja $F = \pi_\Theta\{\xi\}$ a fibra sobre ξ em C_0 . Então, os h -ponto-fixos na fibra são da forma $\tilde{w}b_0$ com $\tilde{w}$ representante de $w \in W$ tal que $\pi(wb_0) = \xi$. Isto é, seja $w' \in W$ tal que

$$w'\xi_0 = \xi,$$

então,

$$w\xi_0 = w'\xi_0$$

o que implica em

$$w'^{-1}w\xi_0 = \xi_0$$

que ocorre somente quando $w'^{-1}w \in W_\Theta$, isto é

$$w \in w'W_\Theta.$$

Assim sendo, é possível tomar um elemento w_ξ de $w'W_\Theta$ de tal forma que a variedade h -estável para $w_\xi b_0$ em $\pi_\Theta^{-1}\{\xi\}$ é aberta e densa. Seja $w = w'w_1 \in w'W_\Theta$, então

$$\begin{aligned} \pi_\Theta^{-1}(\tilde{w}b_0) &= \pi_\Theta^{-1}(\tilde{w}'\tilde{w}_1b_0) \\ &= \tilde{w}'\tilde{w}_1\pi_\Theta^{-1}(b_0) \\ &= \tilde{w}'\tilde{w}_1\xi_0 \\ &= \tilde{w}'\xi_0 \\ &= \xi_0 \end{aligned}$$

Como $\tilde{w}b_0 \in D_w$, temos $\xi \in \pi_\Theta(D_w)$, e pelo fato de existir $h \in \text{int } S$ tal que $h\xi = \xi$, temos

$$\xi \in \pi_\Theta((D_w)_0).$$

Segue da Proposição 44 que

$$\xi \in \pi_\Theta(D_w)_0 \subset E_0.$$

Agora, tome $\eta \in E_0$, uma vez que E é o conjunto controlável efetivo, e $\eta, \xi \in E_0$, existe $g \in \text{int } S$ tal que

$$g\eta = \xi.$$

Com isso, é possível mostrar que $D_{w_\eta} < D_{w_\xi}$. De fato, se $g\eta = \xi$, temos

$$g\pi_\Theta^{-1}\{\eta\} = \pi_\Theta^{-1}\{\xi\}.$$

E além disso, tome w_η como elemento do grupo de Weyl tal que $w_\eta b_0$ é o atrator de uma variedade aberta e densa em $\pi_\Theta^{-1}\{\xi\}$. Então,

$$\tilde{w}_\eta b_0 \in D_{w_\eta}$$

e assim,

$$\tilde{w}_\eta b_0 \in D_{w_\eta} \cap \pi_\Theta^{-1}\{\eta\} \neq \emptyset.$$

Logo,

$$gD_{w_\eta} \cap g\pi_\Theta^{-1}\{\eta\} = gD_{w_\eta} \cap \pi_\Theta^{-1}\{\xi\} \neq \emptyset.$$

Sendo D_{w_η} conjunto controlável efetivo $g(D_{w_\eta})_0 \cap \pi_\Theta^{-1}\{\xi\}$ é denso em $gD_{w_\eta} \cap \pi_\Theta^{-1}\{\xi\}$ e portanto, intersecta a variedade aberta e densa em $\pi_\Theta^{-1}\{\xi\}$ que é atraída por $\tilde{w}_\xi b_0$, ou seja, existe $z \in D_{w_\eta}$ tal que

$$h^k(gz) \longrightarrow \tilde{w}_\xi b_0 \in D_{w_\xi}$$

quando $k \longrightarrow \infty$, isto é, $\text{fe}(Sz) \cap D_{w_\xi} \neq \emptyset$. E assim, $D_{w_\eta} < D_{w_\xi}$.

Da mesma forma, existe $g_1 \in \text{int } S$ tal que $g_1\xi = \eta$, e com o mesmo argumento é possível mostrar que $D_{w_\xi} < D_{w_\eta}$, e assim, conclui-se que $D_{w_\eta} = D_{w_\xi}$.

Pelo Teorema 24, segue que

$$W(S)w_\eta = W(S)w_\xi$$

e assim, para $w \in w_\xi W_\Theta$, temos

$$w \in W(S)w_\eta W_\Theta.$$

Agora, seja $w = w_1 w_\eta s$, com $w_1 \in W(S)$ e $s \in W_\Theta$, então $D_w = D_{w_1 w_\eta s}$. Mais que isso, novamente pelo Teorema 24, vale a seguinte igualdade

$$W(S)w = W(S)w_1 w_\eta s = W(S)w_\eta s$$

ou seja,

$$D_w = D_{w_\eta s}.$$

Uma vez que w_η é tomado como sendo o elemento do grupo de Weyl para o qual $w_\eta b_0$ é atrator de uma variedade aberta e densa em $\pi_\Theta^{-1}\{\eta\}$, temos

$$\pi_\Theta(\tilde{w}b_0) = \eta$$

e assim,

$$\eta \in \pi_\Theta(D_{w_\eta s})$$

E, visto que $g\eta = \xi \in \pi_\Theta(C_0)$, temos também,

$$\eta \in \pi_\Theta((D_{w_\eta s})_0).$$

Logo, $\eta \in \pi_\Theta(D_w)_0$, mostrando que $E_0 \subset \pi_\Theta(D_w)_0$. Sendo a inclusão contrária garantida pela Proposição 44, temos

$$\pi_\Theta(D_w)_0 = E_0, \quad \forall w \in w_\xi W_\Theta.$$

■

Corolário 13 *Com as notações acima, seja D um conjunto controlável efetivo na variedade flag maximal G/P , tal que $D_0 \cap \pi_\Theta^{-1}(E_0) \neq \emptyset$, então $\pi_\Theta(D_0) = E_0$.*

Demonstração: Como cada conjunto controlável efetivo em G/P é da forma D_w , com $w \in W$, segue diretamente da Proposição 58, que $D_0 = (D_w)_0$, para algum $w \in W$, e assim, $\pi_\Theta(D_0) = \pi_\Theta(D_w)_0 = E_0$.

■

Corolário 14 *O número de conjuntos controláveis efetivos em G/P_Θ é igual ao número de elementos no duplo quociente $W(S) \backslash W/W_\Theta$, isto é, o número de $W(S)$ -órbitas de W/W_Θ .*

Demonstração: Seja $B_\Theta = G/P_\Theta$ uma variedade flag e $\pi_\Theta : G/P \rightarrow G/P_\Theta$ a fibração canônica. Denote por D_w^Θ o conjunto controlável em G/P_Θ cujo conjunto de transitividade é a projeção do conjunto de transitividade de D_w em $B = G/P$. Assim, como na Proposição 58.

Tem-se que, $D_{w_1}^\Theta = D_{w_2}^\Theta$ se, e somente se,

$$W(S)w_1W_\Theta = W(S)w_2W_\Theta.$$

De fato, por um lado, supondo $D_{w_1}^\Theta = D_{w_2}^\Theta$, temos

$$\pi_\Theta(D_{w_1})_0 = \pi_\Theta(D_{w_2})_0.$$

Então, existe $\xi \in (D_{w_1}^\Theta)_0 = (D_{w_2}^\Theta)_0$ projeção de w_1b_0 , tal que $w''b_0$ está na mesma fibra que w_1b_0 , e $w''b_0 \in D_{w_2}$. Agora, visto que a ação de w_1 leva fibras em fibras, e pontos fixos de uma fibra em pontos fixos da outra, podemos dizer que w'' é dado da seguinte forma

$$w'' = w_1w'$$

de modo que $w'b_0$ está na mesma fibra que b_0 . E, portanto, $w' \in W_\Theta$. Como $w''b_0 \in D_{w_2}$, segue que

$$D_{w_2} = D_{w''} = D_{w_1w'},$$

e pelo Teorema 24, temos

$$W(S)w_2 = W(S)w_1w',$$

e, portanto,

$$W(S)w_2W_\Theta = W(S)w_1w'W_\Theta = W(S)w_1W_\Theta.$$

Reciprocamente, supondo $W(S)w_1W_\Theta = W(S)w_2W_\Theta$, temos

$$w_2 = w_s w_1 w'$$

com $w_s \in W(S)$, e $w' \in W_\Theta$, então,

$$D_{w_2} = D_{w_s w_1 w'}$$

isto é,

$$W(S)w_2 = W(S)w_s w_1 w' = W(S)w_1 w'$$

e assim, $D_{w_2} = D_{w_1 w'}$. Observe ainda que

$$\pi_\Theta(D_{w_1 w'}) = D_{w_1 w'}^\Theta = D_{w_1}^\Theta$$

uma vez que $w' \in W_\Theta$, e portanto,

$$D_{w_2}^\Theta = \pi_\Theta(D_{w_2}) = \pi_\Theta(D_{w_1 w'}) = D_{w_1}^\Theta.$$

■

5.4 Exemplos de Aplicações

Exemplo 12 Seja $G = SL(3, \mathbb{R})$. Sua álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{R})$ se decompõe segundo Iwasawa como

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$$

onde $\mathfrak{so}(n)$ é a parte compacta, $\mathfrak{a}$ é a subálgebra das matrizes diagonais, e $\mathfrak{n}^+$ é a subálgebra das matrizes triangulares superiores com zeros na diagonal. Fixamos a seguinte câmara de Weyl positiva

$$\mathfrak{a}^+ = \{\text{diag}(a_1, a_2, a_3) \in \mathfrak{g} : a_1 > a_2 > a_3 > 0, \text{ com } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Sejam α_{ij} os funcionais que satisfazem

$$\alpha_{ij}(H) = \lambda_i(H) - \lambda_j(H)$$

com $\lambda_i(H) = a_i$ para $H \in \mathfrak{a}$.

Como visto anteriormente, um sistema positivo de raízes com respeito a escolha de $\mathfrak{a}^+$ é dado por

$$\Pi^+ = \{\alpha_{ij} : i < j\},$$

que tem sistema simples de raízes dado por

$$\Sigma = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}\}.$$

Seja w_α a reflexão no grupo de Weyl em relação a α . Como sabemos que $w_\alpha(\alpha) = -\alpha$, e como $-\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, então, ação do grupo de Weyl sobre um elemento split pode ser interpretada como a aplicação que realiza a transposição das entradas i e j das matrizes diagonais.

Visto que o grupo gerado pelas transposições de termos sucessivos é exatamente o grupo de permutações, existe uma identificação entre o grupo de Weyl de $SL(3, \mathbb{R})$ e o grupo $\mathcal{P}_3$ de permutações de 3 elementos.

Por simplicidade, adotaremos

$$W = \mathcal{P}_3 = \{1, (12), (23), (123), (132), (13)\},$$

isto é, tomamos o grupo de Weyl como o grupo das permutações entre três elementos, escrito segundo a notação cíclica.

Agora, os subgrupos parabólicos de $\mathfrak{g}$ são todos conjugados a família de subgrupos parabólicos obtidos a partir de Σ . Uma vez que os únicos possíveis subconjuntos de Σ se resumem a: $\Theta_1 = \emptyset$, $\Theta_2 = \{\alpha_{12}\}$, $\Theta_3 = \{\alpha_{23}\}$, e $\Theta_4 = \Sigma$, os subgrupos não triviais são

$$P_{\Theta_2} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\} \quad e \quad P_{\Theta_3} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \right\}$$

que correspondem às seguintes variedades flag:

$$G/P_{\Theta_2} = \mathbb{F}^3(2) = Gr_2(3) \quad e \quad G/P_{\Theta_3} = \mathbb{F}^3(1) = \mathbb{R}P^2.$$

No espaço projetivo real $\mathbb{R}P^2$, note que

$$W_{\Theta_2} = \{1, (12)\},$$

e temos o seguinte número máximo de possíveis conjuntos controláveis efetivos:

$$|W/W_{\Theta_2}| = \frac{|W|}{|W_{\Theta_2}|} = \frac{3!}{2!} = 3.$$

Sobre os conjuntos controláveis efetivos na variedade flag maximal G/P , com

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\},$$

sabendo que o número de conjuntos controláveis efetivos para a ação de um semigrupo S de interior não vazio é a dada pela quantidade de elementos de $W(S) \setminus W$, existe um número limitado de possibilidades para o número de conjuntos controláveis para ação de S nessa variedade flag.

Como visto na Seção 5.2.1, é possível condicionar a escolha de um semigrupo pela escolha do subconjunto $\Theta \subset \Sigma$. Fora os semigrupos triviais, G e $\{1\}$, temos os semigrupos do tipo Θ_2 e Θ_3 .

Sejam S_2 e S_3 semigrupos tais que

$$W(S_2) = W_{\Theta_1} \quad e \quad W(S_3) = W_{\Theta_3}$$

respectivamente. Então, dizemos que S_2 é semigrupo do tipo Θ_2 , bem como S_3 é semigrupo do tipo Θ_3 .

Para a ação de S_2 em G/P , temos exatamente

$$|W(S_2) \setminus W| = \frac{3!}{2!} = 3$$

conjuntos controláveis efetivos. Esses conjuntos são indexados pelas classes laterais $W(S_2)w$, com $w \in W$, que são as seguintes:

$$\begin{aligned} W(S_2) &= \{1, (12)\} \\ W(S_2)(23) &= \{(23), (132)\} \\ W(S_2)(123) &= \{(123), (13)\}. \end{aligned}$$

Visto que (13) é a permutação que leva a câmara positiva $\mathfrak{a}^+$ em

$$\mathfrak{a}^- = \{\text{diag}(a_1, a_2, a_3) \in \mathfrak{g} : 0 < a_1 < a_2 < a_3, \text{ com } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

o conjunto controlável representado por essa classe $D_{(13)}$ é o conjunto minimal, enquanto D_1 é o maximal. E, portanto, temos a seguinte ordenação para os conjuntos controláveis efetivos de uma ação de S_2 em G/P :

$$D_{(13)} \leq D_{(23)} \leq D_1.$$

Exemplo 13 Seja $G = SL(4, \mathbb{R})$. Então, como visto no Exemplo 12, podemos tomar $\Sigma = \{\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{34}\}$, onde a ação do elemento do grupo de Weyl correspondendo a uma raiz α_{ij} sobre os elementos de uma matriz $A \in G$ é dada pela permutação das entradas i e j da diagonal.

Quanto aos subconjuntos de Σ , seja

$$\Sigma(i, j) = \{\alpha_{r, r+1} : i \leq r \leq j\}.$$

Assim, chamamos $\Sigma(i, j)$ um intervalo em Σ . Cada intervalo denota um subconjunto de Σ que possui raízes consecutivas. Qualquer subconjunto de Σ pode ser decomposto como união disjunta desses intervalos. Para tal Σ , temos as seguintes possibilidades para um subconjunto $\Theta \subset \Sigma$:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Theta_1 & = & \emptyset \\ \Theta_2 & = & \{\alpha_{12}\} = \Sigma(1, 1) \\ \Theta_3 & = & \{\alpha_{23}\} = \Sigma(2, 2) \\ \Theta_4 & = & \{\alpha_{34}\} = \Sigma(3, 3) \\ \Theta_5 & = & \{\alpha_{12}, \alpha_{23}\} = \Sigma(1, 2) \\ \Theta_6 & = & \{\alpha_{23}, \alpha_{34}\} = \Sigma(2, 3) \\ \Theta_7 & = & \{\alpha_{12}, \alpha_{34}\} = \Sigma(1, 1) \cup \Sigma(3, 3) \\ \Theta_8 & = & \Pi = \Sigma(1, 3) \end{array} \right. \quad (5.2)$$

E, com a mesma notação de intervalo, temos também a decomposição de cada possível Θ em intervalos tipo $\Sigma(i, j)$.

Por questão de praticidade, visto que o grupo de Weyl de $SL(4, \mathbb{R})$ age como $\mathcal{P}_4$, o subgrupo das permutações entre quatro termos, vamos adotar a notação cíclica para os elementos do grupo de Weyl. Por exemplo, o termo (1243) representa uma permutação que leva o primeiro termo no segundo, o segundo no quarto, e o quarto no terceiro, a ação de (1243) na sequência $\{1, 2, 3, 4\}$ a transforma em $\{2, 4, 3, 1\}$. O termo que permanece estático é omitido, como em (124), permutação que leva o terceiro termo no terceiro termo.

Identificando o grupo de Weyl ao grupo $\mathcal{P}_4$, podemos descrever os possíveis subgrupos do tipo W_Θ da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{ll} W_{\Theta_1} & = \{1\} \\ W_{\Theta_2} & = \{1, (12)\} \\ W_{\Theta_3} & = \{1, (23)\} \\ W_{\Theta_4} & = \{1, (34)\} \\ W_{\Theta_5} & = \{1, (12), (23), (13), (123), (132)\} \\ W_{\Theta_6} & = \{1, (23), (34), (24), (234), (243)\} \\ W_{\Theta_7} & = \{1, (12), (34), (12)(34)\} \\ W_{\Theta_8} & = W \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Os subgrupos P_Θ associados podem ser realizados da seguinte forma. Tome $\beta_0 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Então, temos os seguintes flags canônicos:

$$\begin{aligned} f_{\beta_0}^1 &= (\text{ger}\{e_1\}, \text{ger}\{e_1, e_2\}, \text{ger}\{e_1, e_2, e_3\}) \\ f_{\beta_0}^2 &= (\text{ger}\{e_1, e_2\}, \text{ger}\{e_1, e_2, e_3\}) \\ f_{\beta_0}^3 &= (\text{ger}\{e_1\}, \text{ger}\{e_1, e_2, e_3\}) \\ f_{\beta_0}^4 &= (\text{ger}\{e_1\}, \text{ger}\{e_1, e_2\}) \\ f_{\beta_0}^5 &= (\text{ger}\{e_1, e_2, e_3\}) \\ f_{\beta_0}^6 &= (\text{ger}\{e_1\}) \\ f_{\beta_0}^7 &= (\text{ger}\{e_1, e_2\}) \\ f_{\beta_0}^8 &= (\{0\}) \end{aligned}$$

e os subgrupos P_{Θ_i} , podem ser tomados como a isotropia em f_{β_i} , para $1 \leq i \leq 8$, o que nos leva à seguinte representação dos subgrupos parabólicos:

$$P_{\Theta_1} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}, \quad P_{\Theta_2} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}, \quad P_{\Theta_3} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\},$$

$$P_{\Theta_4} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \right\}, \quad P_{\Theta_5} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}, \quad P_{\Theta_6} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix} \right\},$$

$$P_{\Theta_7} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \right\}, \quad e \quad P_{\Theta_8} = G.$$

Para cada Θ , temos as seguintes variedades flag:

$$\begin{cases} G/P_{\Theta_1} = \mathbb{F}^4(1, 2, 3) \\ G/P_{\Theta_2} = \mathbb{F}^4(2, 3) \\ G/P_{\Theta_3} = \mathbb{F}^4(1, 3) \\ G/P_{\Theta_4} = \mathbb{F}^4(1, 2) \\ G/P_{\Theta_5} = \mathbb{F}^4(3) = Gr_3(4) \\ G/P_{\Theta_6} = \mathbb{F}^4(1) = \mathbb{R}P^3 \\ G/P_{\Theta_7} = \mathbb{F}^4(2) = Gr_2(4) \\ G/P_{\Theta_8} = \{1\} \end{cases}$$

O número máximo de conjuntos controláveis nessas variedades flag ocorre quando $W(S) = \{1\}$, e portanto, em G/P_{Θ_2} , G/P_{Θ_3} , e em G/P_{Θ_4} temos, no máximo,

$$|W/W_{\Theta_2}| = |W/W_{\Theta_3}| = |W/W_{\Theta_4}| = \frac{4!}{2!} = 12$$

conjuntos controláveis efetivos. Em G/P_{Θ_5} e G/P_{Θ_6} temos até

$$|W/W_{\Theta_5}| = |W/W_{\Theta_6}| = \frac{4!}{3!} = 4$$

conjuntos controláveis. E, em G/P_{Θ_5} há um número máximo de

$$|W/W_{\Theta_6}| = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

conjuntos controláveis.

Quanto ao estudo dos conjuntos controláveis na variedade flag maximal, partindo da identificação que nos permite descrever o tipo parabólico de semigrupo, segue que os possíveis candidatos a $W(S)$ são exatamente os W_Θ dados acima. Tomando como exemplo $W(S) = W_{\Theta_2}, W_{\Theta_6}, W_{\Theta_7}$ é possível avaliar os possíveis números de conjuntos controláveis na variedade G/P .

Fixemos a seguinte notação:

$$W(S_i) = W_{\Theta_i}, \quad i = 1, \dots, 8$$

Para um semigrupo do tipo S_2 , temos no máximo

$$|W(S_2) \setminus W| = \frac{4!}{2!} = 12$$

conjuntos controláveis na variedade flag maximal. Como visto no Teorema 24, os termos que estão numa mesma classe lateral $W(S)s$, para $s \in \mathcal{P}_4$, são aqueles associados ao mesmo conjunto controlável D_s . Quando consideramos $W(S_2)$ temos o seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{ll} W(S_2)1 &= \{1, (12)\} \\ W(S_2)(23) &= \{(23), (132)\} \\ W(S_2)(34) &= \{(34), (12)(34)\} \\ W(S_2)(123) &= \{(123), (13)\} \\ W(S_2)(14) &= \{(14), (124)\} \\ W(S_2)(24) &= \{(24), (142)\} \\ W(S_2)(234) &= \{(234), (1342)\} \\ W(S_2)(243) &= \{(243), (1432)\} \\ W(S_2)(13)(24) &= \{(13)(24), (1423)\} \\ W(S_2)(143) &= \{(143), (1243)\} \\ W(S_2)(134) &= \{(134), (1234)\} \\ W(S_2)(14)(23) &= \{(14)(23), (1324)\} \end{array} \right.$$

Observe que $D_1 = D_{(12)}$ é o conjunto controlável maximal, e $D_{(14)(23)} = D_{(1324)}$ é o conjunto controlável minimal para ação de S_2 , já que $(14)(23)$ é o elemento de $\mathcal{P}_4$ que leva $\{1, 2, 3, 4\}$ em $\{4, 3, 2, 1\}$, ou seja, está associado ao elemento do grupo de Weyl que leva a câmara positiva na negativa.

Da mesma forma, como feita acima, para S_6 associado a Θ_6 , o número máximo de conjunto controláveis é

$$|W(S_6) \setminus W| = \frac{4!}{3!} = 4,$$

dados pelos representantes das seguintes classes laterais:

$$\left\{ \begin{array}{ll} W(S_6)1 &= \{1, (23), (34), (234), (243), (24)\} \\ W(S_6)(12) &= \{(12), (123), (12)(34), (1234), (1243), (124)\} \\ W(S_6)(13) &= \{(13), (132), (134), (1342), (1324), (13)(24)\} \\ W(S_6)(14) &= \{(14), (14)(23), (143), (1423), (1432), (142)\} \end{array} \right.$$

Neste caso, $D_1 = D_{(23)} = D_{(34)} = D_{(234)} = D_{(243)} = D_{(24)}$ é o conjunto controlável maximal, e $D_{(14)} = D_{(14)(23)} = D_{(143)} = D_{(1423)} = D_{(1432)} = D_{(142)}$ é o conjunto controlável minimal para S_6 .

E, quanto a S_7 , temos no máximo

$$|W(S_7) \setminus W| = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

conjuntos controláveis, e são estes classificados por

$$\left\{ \begin{array}{ll} W(S_7)1 &= \{1, (12), (34), (12)(34)\} \\ W(S_7)(23) &= \{(23), (132), (234), (1342)\} \\ W(S_7)(123) &= \{(123), (13), (1234), (134)\} \\ W(S_7)(24) &= \{(24), (142), (243), (1432)\} \\ W(S_7)(14) &= \{(14), (124), (143), (1243)\} \\ W(S_7)(13)(24) &= \{(13)(24), (1423), (1324), (14)(23)\} \end{array} \right.$$

Cujos conjuntos controláveis maximal e minimal são dados, respectivamente por: $D_1 = D_{(12)} = D_{(34)} = D_{(12)(34)}$, e $D_{(13)(24)} = D_{(1423)} = D_{(1324)} = D_{(14)(23)}$.

O estudo dos demais subconjuntos Θ é análogo a um desses três casos acima.

Exemplo 14 No caso geral, seja $G = SL(n, \mathbb{R})$. Como visto na Seção 1.4, o grupo de Weyl pode ser tomado como grupo gerado pelas reflexões correspondentes a um sistema simples de raízes.

Em $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, fixamos

$$\mathfrak{a}^+ = \{\text{diag}(a_1, \dots, a_n) : a_1 > a_2 > \dots > a_n > 0\}$$

a câmara de Weyl positiva. Considerando os funcionais

$$\alpha_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$$

com $\lambda_i(H) = a_i$, para $H = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$, um sistema de raízes positivas é dado por

$$\Pi^+ = \{\alpha_{ij} : i < j\},$$

e um sistema simples que gera Π^+ é dado por

$$\Sigma = \{\alpha_{i,i+1} : i = 1 \dots, n-1\}.$$

Uma vez que os elementos do grupo de Weyl agem pela permutação das entradas da diagonal das matrizes em $\mathfrak{a}$, o grupo de Weyl pode ser representado pelo grupo das permutações de n termos, o grupo $\mathcal{P}_n$. Isto é, a seguinte associação

$$\begin{array}{ccc} w : & \mathfrak{a} & \longrightarrow \mathfrak{a} \\ & \text{diag}(a_1, \dots, a_n) & \mapsto \text{diag}(a_{\omega(1)}, \dots, a_{\omega(n)}) \end{array}$$

onde ω denota uma permutação de $\{1, \dots, n\}$ associada a $w \in W$, define um isomorfismo de grupos que identifica W a $\mathcal{P}_n$.

Quanto às variedades flag relativas a $SL(n, \mathbb{R})$ uma realização dessas estruturas pode ser feita da seguinte forma. Seja $\beta_0 = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$, então definimos os seguintes subespaços:

$$E^r = \text{ger}\{e_1, \dots, e_r\}$$

para $1 \leq r \leq n$, e

$$E_{(i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k)}^r = \text{ger} \left(\{e_1, \dots, e_r\} - \bigcup_{l=1}^k \{e_{i_l}, \dots, e_{j_l}\} \right)$$

para $1 \leq i_l \leq j_l \leq n$, e $1 \leq k \leq n$. E, portanto, escrevemos o flag canônico como

$$f_{\beta_0} = \left(E^1, E^2, \dots, E^{i_1-1}, E_{(i_1, j_1)}^{j_1+1}, E_{(i_1, j_1)}^{j_1+2}, \dots, \dots, E_{(i_1, j_1), \dots, (i_{k-1}, j_{k-1})}^{j_k+1}, E_{(i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k)}^{j_k+2}, \dots, E_{(i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k)}^n \right)$$

Tomando P_Θ como o subgrupo de isotropia em f_{β_0} , é possível ver que, na representação matricial de um elemento nesse subgrupo, cada intervalo de raízes $i_l, \dots, j_l$ é representado

por um bloco diagonal quadrado de tamanho $j_l - i_l + 2$ iniciado na posição i_l da diagonal,

$$P_\Theta = \left\{ \begin{pmatrix} * & & \cdots & & \cdots & & * \\ 0 & (*)_{i_1, j_1} & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & * & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (*)_{i_k, j_k} & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$$

Uma realização de G/P_Θ como variedade flag é feita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} G/P_\Theta &= \mathbb{F}^n(1, 2, \dots, i_1 - 1, \widehat{i_1, \dots, j_1}, j_1 + 1, \dots, i_k - 1, \widehat{i_k, \dots, j_k}, j_k + 1, \dots, n) \\ &= \mathbb{F}^n(1, 2, \dots, i_1 - 1, j_1 + 1, \dots, i_l - 1, j_l + 1, \dots, i_k - 1, j_k + 1, \dots, n), \end{aligned}$$

onde $(a, \widehat{b, c}, d) = (a, d)$ denota a retirada dos termos b e c da sequência (a, b, c, d) .

Por isso, faz sentido o estudo dos subconjuntos $\Theta \subset \Sigma$ como união de intervalos

$$\Sigma(i, j) = \{\alpha_{r, r+1} : i \leq r \leq j\}$$

onde cada intervalo denota um subconjunto de Σ que possui raízes consecutivas. Qualquer subconjunto de Σ pode ser decomposto como união disjunta desses intervalos.

Seja

$$\Theta = \bigcup_{l=1}^k \Sigma(i_l, j_l)$$

com $j_l + 1 < i_{l+1}$ e $k \leq n$. Então, o subgrupo W_Θ é aquele gerado pelos elementos de Θ , e da forma como tomamos Θ como união de intervalos, fica evidente que W_Θ é o produto direto dos subgrupos de permutação gerados por cada intervalo, que são identificados com os grupos permutação de

$$\{i_l, \dots, j_l, j_l + 1\}$$

para $l = 1, \dots, k$.

Cada subgrupo de permutação tem ordem

$$((j_l + 1) - i_l + 1)!$$

e portanto, a ordem de W_Θ é

$$|W_\Theta| = \prod_{l=1}^k (j_l - i_l + 2)!.$$

Pelo Corolário 14, temos que o número de conjuntos controláveis para S em $B_\Theta = G/P_\Theta$ é dado pela ordem de $W(S) \setminus W/W_\Theta$, ou seja, quanto menor for $W(S)$ mais conjuntos controláveis há. Então, o número máximo de conjuntos controláveis em B_Θ para a ação de um semigrupo S de interior não vazio é dado exatamente pela ordem de W/W_Θ , isto é,

$$|W/W_\Theta| = \frac{n!}{\prod_{l=1}^k (j_l - i_l + 2)!}.$$

Corolário 15 *O número máximo de conjuntos controláveis nas variedades flag G/P_Θ com $G = SL(n, \mathbb{R})$ é*

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^k (j_i - i_i + 2)!}.$$

Em particular, o número máximo de conjuntos controláveis nos espaços projetivos $\mathbb{R}P^{n-1}$ é

$$\frac{n!}{((n-1) - 2 + 2)!} = n.$$

Bibliografia

- [1] Barros, C. J. B., e Reis, R. A. On the number of control sets on compact homogeneous spaces. *Portugaliae Mathematica* 60, 3 (2003), 359–372.
- [2] Barros, C. J. B., e San Martin, L. A. B. On the action of semigroups in fiber bundles. *Matemática Contemporânea* 13 (1997), 1–19.
- [3] Colonius, F., e Kliemann, W. Linear control semigroups acting on projective space. *Journal of Dynamics and Differential Equations* 5, 3 (1993), 495–528.
- [4] Colonius, F., e Kliemann, W. Some aspects of control systems as dynamical systems. *Journal of Dynamics and Differential Equations* 5, 3 (1993), 469–494.
- [5] Colonius, F., e Kliemann, W. *The dynamics of control*. 2012.
- [6] Helgason, S. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, vol. 80. Academic press, 1979.
- [7] Hilgert, J., e Neeb, K. *Lie Semigroups and their Applications*, 1 ed. Lecture Notes in Mathematics 1552. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993.
- [8] Hilgert, J.; Hofmann, K. H., e Lawson, J. D. *Lie groups, convex cones, and semi-groups*. Oxford University Press, USA, 1989.
- [9] Humphreys, J. *Reflection Groups and Coxeter Groups*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1992.
- [10] Humphreys, J. E. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, vol. 9. Springer Science & Business Media, 1972.
- [11] Husemoller, D. *Fibre bundles*. Springer, 1966.
- [12] Jurdjevic, V., e Sussmann, H. J. Control systems on Lie groups. *Journal of Differential Equations* 12, 2 (1972), 313–329.
- [13] Kliemann, W. Recurrence and invariant measures for degenerate diffusions. *The annals of probability* (1987), 690–707.
- [14] Knapp, A. W. *Lie groups beyond an introduction*, vol. 140. Springer Science & Business Media, 2013.
- [15] Kobayashi, S., e Nomizu, K. *Foundations of differential geometry*, vol. 1. New York, 1963.
- [16] Lima, E. L. *Variedades diferenciáveis*. No. 15. Instituto Matemática Pura e Aplicada, Conselho Nacional de Pesquisas, 1973.

- [17] Munkres, J. R. *Topology: a first course*. Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [18] San Martin, L. A. B. Invariant control sets on flag manifolds. *Mathematics of Control, Signals and Systems*.
- [19] San Martin, L. A. B. Control sets and semigroups in semisimple Lie groups. *Semigroups in Algebra, Geometry, and Analysis* 20 (1995), 275.
- [20] San Martin, L. A. B. Maximal semigroups in semi-simple lie groups. *Transactions of the American Mathematical Society* 353, 12 (2001), 5165–5184.
- [21] San Martin, L. A. B. Nonexistence of invariant semigroups in affine symmetric spaces. *Mathematische Annalen* 321, 3 (2001), 587–600.
- [22] San Martin, L. A. B. *Algebras de Lie*. Editoria da UNICAMP, Campinas, 2010.
- [23] San Martin, L. A. B. *Grupos de Lie*. Editora da UNICAMP, 2013.
- [24] San Martin, L. A. B., e Crouch, P. E. Controllability on principal fibre bundles with compact structure group. *Systems & Control Letters* 5, 1 (1984), 35–40.
- [25] San Martin, L. A. B., e Santana, A. J. The homotopy type of lie semigroups in semi-simple lie groups. *Monatshefte für Mathematik* 136, 2 (2002), 151–173.
- [26] San Martin, L. A. B., e Tonelli, P. A. Semigroup actions on homogeneous spaces. In *Semigroup Forum* (1995), vol. 50, Springer, pp. 59–88.
- [27] Singer, I. M., e Thorpe, J. A. *Lecture notes on elementary topology and geometry*, vol. 3. Springer Science & Business Media, 1976.
- [28] Tonelli, P. A. *Control sets on homogeneous spaces*. Tese de Doutorado, 1991.
- [29] Troncoso, R. M. M. *Aspectos da Teoria de Semigrupos em Grupos de Lie Simples e Aplicações*. Tese de Doutorado, 1999.
- [30] Varadarajan, V. S. *Harmonic analysis on real reductive groups*. Lecture notes in mathematics. Springer, 1977.
- [31] Varadarajan, V. S. *An Introduction to Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1989.
- [32] Varadarajan, V. S. *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, vol. 102. Springer Science & Business Media, 2013.
- [33] Vinberg, È. B. Invariant convex cones and orderings in Lie groups. *Functional Analysis and its Applications* 14, 1 (1980), 1–10.
- [34] Warner, F. W. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, vol. 94. Springer Science & Business Media, 2013.
- [35] Warner, G. *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups I*, vol. 188. Springer Science & Business Media, 1972.