

Juliano Gonçalves Oler

Classificação de Problemas de Bifurcação Z_2 -equivariantes
via Formulação por Caminhos

1910001385



Classificação de Problemas de Bifurcação Z_2 -equivariantes via Formulação por Caminhos

Juliano Gonçalves Oler

Orientadora: Profa. Dra. Angela Maria Sitta



T 1395/05

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática - IBILCE - UNESP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

São José do Rio Preto - SP
Fevereiro - 2005

105/05

+513.74

045p

04/04/2005

Doação

R\$ 27,00

AUTOR(A)

076/2005

111/05

Oler, Juliano Gonçalves.

Problemas de bifurcação Z_2 -equivariante via formulação por caminhos / Juliano Gonçalves Oler. – São José do Rio Preto : [s.n.], 2005

138 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Angela Maria Sitta

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Geometria. 2. Teoria de singularidades. 3. Singularidades (Matemática). 4. Formulação por caminhos. 5. Teoria de bifurcação Z_2 -equivariante. I. Sitta, Angela Maria. II. Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 514

“Sê forte e corajoso; não temas,
nem te espantes, porque o Senhor,
teu Deus, é contigo por onde
quer que andares”.

Josué 1:9



Agradecimentos

Às minhas duas famílias, deixo aqui meus sinceros agradecimentos.

A Profa. Dña. Ana de Menezes, por toda orientação, paciência e gentileza durante sua valiosa orientação.

A todos os professores do Departamento de Matemática da UNESP - S.J.R. Preto.

Aos professores Drs. Denis Figueira, Nair de Menezes, Roberto Helder de A. Alves, Cláudio Agostinho Nunes, Luciana de Fátima Martins Bello pelas valiosas sugestões.

À minha família pelo incentivo e paciência que me permitiram durante toda esta jornada.

A Deus, pela confiança e auxílio, mesmo nos momentos difíceis.

Aos amigos de São Gabriel pelo apoio e incentivo.

A todos que durante esta jornada me ajudaram e incentivaram, especialmente os meus pais.

A Fátima pelo amor e carinho.

A Deus por tudo.

À minha família,
Anísio, Nair e Fabiana
dedico.

Agradecimentos

Ao término deste trabalho, deixo aqui meus sinceros agradecimentos:

À Profa. Dra. Angela Maria Sitta, por toda dedicação, paciência e estímulo durante sua valiosa orientação.

A todos os professores do Departamento de Matemática da UNESP- S.J.R. Preto.

Aos professores Elso Drigo Filho, Miriam Garcia Manoel, Roberta Godoi Wik Atique, Cláudio Agnaldo Buzzi, Luciana de Fátima Martins Brito pelas valiosas sugestões.

À minha família, pelo incentivo e segurança que me passaram durante todo esse período.

À Helga, pela confiança e carinho, mesmo nos momentos difíceis.

Aos amigos da Pós-graduação pelo agradável convívio.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

À FAPESP pelo auxílio financeiro.

A Deus por tudo.



Resumo

Abstract

Neste trabalho classificamos os problemas de bifurcação Z_2 -equivariantes de corank 1 até codimensão 3, usando a Formulação por Caminhos. Comparamos a classificação obtida com a apresentada em [1] segundo as técnicas de Golubitsky e Scheaffer. Mostramos como resultados com Z_2 -simetria podem ser obtidos dos casos sem simetria e que os Derlogs são gerados livremente.

Como aplicação da teoria Z_2 -equivariante, estudamos um modelo físico que é uma modificação do problema conhecido por The Elastica que foi proposto por Euler em 1744.

Palavras-chave: Formulação por Caminhos, Problemas de Bifurcação Z_2 -equivariantes de corank 1, Derlogs.



Abstract

Sumário

In this work we classify corank one Z_2 -equivariant bifurcation problems up to codimension 3, using the Path Formulation. We compare the classification obtained to the presented in [1] following Golubitsky and Scheaffer techniques. We also show how the results with Z_2 -symmetry are related to the cases without symmetry and get the freeness of the Derlogs.

As an application of the Z_2 -equivariant theory, we study a physical model that is a modification of the The Elastica problem considered by Euler in 1744 .

Keywords: Path Formulation, Corank 1 Z_2 -equivariant Bifurcation Problems, Derlogs.

1	Teoria de Bifurcação Z_2 -equivariante	13
1.1	Caracterização dos Problemas de Bifurcação	13
1.2	Z_2 -Equivariância	14
1.3	Z_2 -Espaços Derivados	15
1.4	Submódulos Invariantes	27
1.5	Teorema de Ordem Alta	30
1.6	Teoria dos Problemas de Bifurcação Z_2 -equivariante	39
1.7	Classificação dos Problemas de Bifurcação Z_2 -equivariante	51
2	Formulação por Caminhos	61
2.1	Formulação por Caminhos para problemas de Bifurcação de corank 1 sem simetria	61
2.2	Formulação por Caminhos para problemas de Bifurcação de corank 1 com simetria do grupo Z_2	64
2.3	Derlogs Equivariantes	65
2.4	Classificação dos Problemas de Bifurcação Z_2 -equivariante via Formulação por Caminhos	69
3	Aplicação Física	84
3.1	Formulação Matemática do Problema do Sistema	85
3.1.1	Energia Potencial das bobas M_1 e M_2	87
3.1.2	Energia Potencial da bobina M_3	87
3.1.3	Tensões exercidas pela Bobina Externa	88
3.2	Estabilidade das bobinas	90
3.3	Diagramas de Bifurcação	79
3.4	Análise Global de caso $k = 2$	79
3.5	Análise Global de caso $k = 1$	79
A	Mudança de coordenadas usando o MAPLE	80
B	Cálculo dos Colchetes de Lie usando MAPLE	126
	Referências Bibliográficas	136

Sumário

Introdução	8
1 Preliminares	9
1.1 Germes de Aplicações Diferenciáveis	9
1.2 Codimensão de um Ideal	10
1.3 Problemas de Bifurcação	11
2 Teoria de Bifurcação Z_2 -equivariante	12
2.1 Caracterização dos Problemas de Bifurcação Z_2 -Equivariantes	12
2.2 Z_2 -Equivalência	16
2.3 Z_2 -Espaços Tangentes	16
2.4 Submódulos Intrínsecos	27
2.5 Termos de Ordem Alta	29
2.6 Teoria dos Desdobramentos Z_2 -equivariantes	30
2.7 Classificação dos Problemas de Bifurcação Z_2 -equivariantes	31
3 Formulação por Caminhos	41
3.1 Formulação por Caminhos para problemas de bifurcação de corank 1 sem simetria	41
3.2 Formulação por Caminhos para problemas de bifurcação de corank 1 com simetria do grupo Z_2	44
3.3 Derlogs Z_2 -simétricos	45
3.4 Classificação dos Problemas de Bifurcação Z_2 -equivariantes via Formulação por Caminhos	59
4 Aplicação Física	64
4.1 Formulação Matemática da Energia do Sistema	65
4.1.1 Energia Potencial das Molas M_1 e M_2	67
4.1.2 Energia Potencial da Mola M_3	67
4.1.3 Trabalho realizado pela Força Externa	68
4.2 Estabilidade das soluções	69
4.3 Diagramas de Bifurcação	72
4.4 Análise física do caso $k = 2$	77
4.5 Análise física do caso $k < 2$	79
A Mudança de coordenadas usando o MAPLE	80
B Cálculo dos Colchetes de Lie usando MAPLE	126
Referências Bibliográficas	136

Introdução

Os estudos desenvolvidos neste trabalho baseiam-se nas referências [1] e [22]. O principal resultado é a classificação dos problemas de bifurcação Z_2 -equivariantes em uma variável padrão e um parâmetro de bifurcação usando a Formulação por Caminhos. Esta formulação foi sugerida por Golubitsky e Schaeffer em [1], onde eles relacionaram problemas de bifurcação em uma variável padrão e sem simetria com um caminho através do desdobramento miniversal de uma cuspóide, no sentido da Teoria das Catástrofes. As técnicas que utilizamos na análise dos problemas de bifurcação Z_2 -equivariantes baseiam-se fundamentalmente na Teoria de Singularidades aplicada à Teoria de Bifurcação. Problemas desse tipo têm sido motivo de estudo em várias áreas, como é o caso da Física.

No Capítulo 1 apresentamos alguns conceitos preliminares da Teoria de Singularidades e Teoria de Bifurcação como é o caso de germes, codimensão, problemas de bifurcação, entre outros.

O Capítulo 2 é dedicado aos problemas de bifurcação Z_2 -equivariantes. Definimos a Z_2 -equivalência, espaços tangentes e determinamos os termos de ordem alta para a resolução do problema do reconhecimento. Além disso, baseados em [1], finalizamos este capítulo classificando os problemas Z_2 -equivariantes até codimensão três usando técnicas clássicas da Teoria de Singularidades, como descreve o Teorema (2.7.1).

O principal capítulo deste trabalho é o Capítulo 3. Apresentamos a Teoria de Formulação por Caminhos para problemas de bifurcação de corank 1 e propomos a classificação de tais germes via esta formulação, obtendo resultados equivalentes ao descrito no Capítulo 2. Trata de uma forma alternativa de classificação mais prática e organizada. Dentro da Teoria da Formulação por Caminhos, relacionamos como resultados com Z_2 -simetria podem ser obtidos daqueles sem simetria. Mostramos, também, que os geradores do derlog algébrico geram livremente o derlog geométrico.

Finalmente, o Capítulo 4 trata de uma aplicação do estudo da teoria Z_2 -equivariante a um problema de natureza física. O problema físico consiste em estudar a envergadura de hastes compostas por molas compressíveis e conectadas por uma mola torsional sob o efeito de uma força externa horizontal. Este sistema físico é um modelo modificado do problema denominado *The Elastica* que trata da envergadura de uma viga sob a ação de uma força de compressão estudado por Euler em 1744.



Capítulo 1

Preliminares

1.1 Germes de Aplicações Diferenciáveis

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto contendo a origem e consideramos $\mathcal{F} = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^\infty\}$.

Em $\mathcal{F}$ definimos uma relação $\sim$ da seguinte forma:

Sejam $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$, $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^∞ , com U_1 e U_2 abertos contendo a origem.

Dizemos que $f_1 \sim f_2$ se existir um aberto $W \subset \mathbb{R}^n$ contendo a origem, tal que $W \subset U_1 \cap U_2$ e $f_1|_W \equiv f_2|_W$. Podemos então, definir o conjunto quociente

$$\mathcal{E}_n = \frac{\mathcal{F}}{\sim} = \{[f] \mid f \in \mathcal{F}\}.$$

Cada classe de equivalência é chamada germe na origem. Para simplificar, omitimos a classe de equivalência e denotamos

$$\mathcal{E}_n = \{f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Definindo naturalmente em $\mathcal{E}_n$ operações de soma, produto por escalar e produto, segue que $\mathcal{E}_n$ tem estrutura de álgebra real comutativa.

O conjunto $\mathcal{E}_n$ é um anel local e

$$\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{E}_n \mid f(0) = 0\}$$

é o seu ideal maximal.

Quando conveniente, denotamos $\mathcal{E}_n$ por $\mathcal{E}_x$ e $\mathcal{M}_n$ por $\mathcal{M}_x$, $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Lema 1.1.1 (Hadamard) Se $f \in \mathcal{M}_n$, então existem germes $a_1, a_2, \dots, a_n$ em $\mathcal{E}_n$ tais que

$$f(x) = a_1(x)x_1 + a_2(x)x_2 + \dots + a_n(x)x_n,$$

onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Demonstração. Ver [1], pág. 58. ■

Segue do Lema de Hadamard que

$$\mathcal{M}_n = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle,$$

isto é, $\mathcal{M}_n$ é o ideal gerado pelas projeções $p_i : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, $p_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$, $i = 1, \dots, n$.

A k -ésima potência de $\mathcal{M}_n$ é dada por

$$\mathcal{M}_n^k = \langle x^\alpha \mid \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \text{ e } |\alpha| = k \rangle,$$

onde $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Lema 1.1.2 (Nakayama) Sejam $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$ ideais em $\mathcal{E}_n$, com $\mathcal{J}$ finitamente gerado. Então, $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$ se, e somente se, $\mathcal{I} \subset \mathcal{J} + \mathcal{M}_n \mathcal{J}$.

Demonstração. Ver [1], pág. 71. ■

Notações.

(i) Um ideal de $\mathcal{E}_n$ gerado por $a_1, a_2, \dots, a_k$ será denotado por

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle_{\mathcal{E}_n} \text{ ou } \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle.$$

(ii) Um subespaço vetorial real de $\mathcal{E}_n$ gerado por $a_1, a_2, \dots, a_k$ será denotado por

$$\mathbb{R} \cdot \{a_1, a_2, \dots, a_k\}.$$

1.2 Codimensão de um Ideal

Definição 1.2.1 Um subespaço vetorial $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}_n$ tem codimensão finita se existe um subespaço vetorial de dimensão finita $V \subset \mathcal{E}_n$ tal que $\mathcal{J} + V = \mathcal{E}_n$. Caso contrário, $\mathcal{J}$ tem codimensão infinita. Denotamos que $\mathcal{J}$ tem codimensão finita por $\text{cod } \mathcal{J} < \infty$.

Todo ideal $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}_n$ é também um subespaço vetorial em $\mathcal{E}_n$.

Proposição 1.2.1 Um ideal $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}_n$ tem codimensão finita se, e somente se, existir um inteiro k tal que $\mathcal{M}_n^k \subset \mathcal{J}$.

Demonstração. Ver [1], pág. 73. ■

Definição 1.2.2 Seja $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}_n$ um ideal de codimensão finita. O espaço vetorial normal a $\mathcal{J}$ é o subespaço vetorial de dimensão finita, denotado por $\mathcal{J}^\perp$, gerado pelos monômios que não pertencem a $\mathcal{J}$.

Proposição 1.2.2 Se $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}_n$ é um ideal de codimensão finita, então $\mathcal{J} + \mathcal{J}^\perp = \mathcal{E}_n$.

Demonstração. Ver [1], pág. 83. ■

Em geral $\mathcal{J} \cap \mathcal{J}^\perp \neq \{0\}$, pois considerando em $\mathcal{E}_2$ o ideal $\mathcal{J} = \langle x^2 + y^2, xy \rangle$ temos que

$$\mathcal{J}^\perp = \mathbb{R} \cdot \{1, x, y, x^2, y^2\} \text{ e } \mathcal{J} \cap \mathcal{J}^\perp = \mathbb{R} \cdot \{x^2 + y^2\}.$$

1.3 Problemas de Bifurcação

Seja $g : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$. Consideramos a equação diferencial do tipo

$$\dot{x} + g(x, \lambda) = 0. \quad (1.1)$$

Os pontos de equilíbrio são precisamente as soluções de

$$g(x, \lambda) = 0. \quad (1.2)$$

Uma solução de g é um par (x_0, λ_0) tal que $g(x_0, \lambda_0) = 0$.

Para cada λ , seja $\eta(\lambda)$ o número de x 's para o qual o par (x, λ) é uma solução de

$$g(x, \lambda) = 0.$$

Um ponto (x_0, λ_0) é de bifurcação se $\eta(\lambda)$ muda quando λ varia em uma vizinhança pequena de λ_0 . Pelo Teorema da Função Implícita se $g_x(x_0, \lambda_0) \neq 0$, então em uma vizinhança suficientemente pequena de x_0 temos que $g(x, \lambda) = 0$ pode ser resolvida em função de λ de maneira única. Assim sendo, não ocorre bifurcação.

Logo, se (x_0, λ_0) é um ponto de bifurcação devemos ter

$$g(x_0, \lambda_0) = 0 \quad \text{e} \quad g_x(x_0, \lambda_0) = 0. \quad (1.3)$$

Por translação podemos tomar $(x_0, \lambda_0) = (0, 0)$.

O conjunto solução de g dado por

$$S = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid g(x, \lambda) = 0\} \quad (1.4)$$

é chamado diagrama de bifurcação de g .

Exemplo 1.3.1 Consideramos o problema de bifurcação dado por

$$g(x, \lambda) = x^3 - \lambda x.$$

Observe que $(x_0, \lambda_0) = (0, 0)$ é um ponto de bifurcação, pois numa vizinhança da origem passamos de uma solução de $g(x, \lambda) = 0$ para três soluções. O diagrama de bifurcação de g é dado por

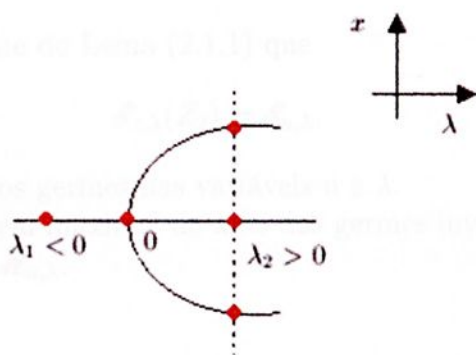


Figura 1.1: Pitchfork

Capítulo 2

Teoria de Bifurcação Z_2 -equivariante

2.1 Caracterização dos Problemas de Bifurcação Z_2 -Equivariantes

A simetria em nossos problemas é dada pelo grupo $Z_2 = \{-1, 1\}$.

A ação do grupo Z_2 sobre $\mathbb{R}$ é dada por

$$\begin{aligned}\varphi: Z_2 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (-1, x) &\longmapsto -x \\ (1, x) &\longmapsto x.\end{aligned}$$

O conjunto dos germes Z_2 -invariantes com uma variável padrão x e um parâmetro de bifurcação λ é definido por

$$\mathcal{E}_{x,\lambda}(Z_2) = \{f : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, 0) \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(-x, \lambda) = f(x, \lambda)\}.$$

Este conjunto é um anel comutativo com unidade.

Lema 2.1.1 Seja $f \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$. Se f é par em x , então f pode ser escrita como um germe nas variáveis x^2 e λ , ou seja,

$$f(x, \lambda) = p(x^2, \lambda).$$

Demonstração. Ver [1], pág. 248. ■

Considerando $u = x^2$, segue do Lema (2.1.1) que

$$\mathcal{E}_{x,\lambda}(Z_2) = \mathcal{E}_{u,\lambda}, \tag{2.1}$$

onde $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ representa o anel dos germes nas variáveis u e λ .

Com a notação (2.1), o ideal maximal do anel dos germes invariantes será representado por $\mathcal{M}_{x,\lambda}(Z_2)$, ou simplesmente, $\mathcal{M}_{u,\lambda}$.

O conjunto dos germes Z_2 -equivariantes com uma variável padrão x e um parâmetro de bifurcação λ é definido por

$$\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2) = \{g : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, 0) \longrightarrow \mathbb{R} \mid g(-x, \lambda) = -g(x, \lambda)\}.$$

Este conjunto é um $\mathcal{E}_{x,\lambda}(Z_2)$ -módulo.

Proposição 2.1.1 Se $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$, então existe um germe suave $p(u, \lambda) \in \mathcal{E}_{u,\lambda}$ tal que

$$g(x, \lambda) = p(u, \lambda)x.$$

Demonstração.

Como $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$, segue que

$$g(-x, \lambda) = -g(x, \lambda).$$

Tomando $x = 0$, temos que

$$g(0, \lambda) = -g(0, \lambda),$$

o que implica que $g(0, \lambda) = 0$.

Pelo Lema de Hadamard, existe um germe $f \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ tal que

$$g(x, \lambda) = f(x, \lambda)x. \quad (2.2)$$

Usando novamente o fato de que $g(-x, \lambda) = -g(x, \lambda)$, segue que

$$-f(-x, \lambda)x = -f(x, \lambda)x,$$

ou seja,

$$f(-x, \lambda)x = f(x, \lambda)x,$$

o que implica que para $x \neq 0$

$$f(-x, \lambda) = f(x, \lambda).$$

Logo, pelo Lema (2.1.1) existe um germe $p(u, \lambda) \in \mathcal{E}_{u,\lambda}$ tal que

$$f(x, \lambda) = p(u, \lambda). \quad (2.3)$$

Portanto, por (2.2) e (2.3) concluímos que $g(x, \lambda) = p(u, \lambda)x$. ■

Adotamos a notação

$$\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2) = \mathcal{E}_{u,\lambda} \cdot \{x\}. \quad (2.4)$$

O conjunto $\vec{\mathcal{M}}_{x,\lambda}(Z_2) = \{g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2) \mid g(0, 0) = 0\}$ é um $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ -submódulo de $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ denotado por $\mathcal{M}_{u,\lambda} \cdot \{x\}$.

Lema 2.1.2 Para todo $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ -submódulo $\vec{\mathcal{J}}$ de $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ existe um ideal $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}_{u,\lambda}$ tal que $\vec{\mathcal{J}} = \mathcal{J} \cdot \{x\}$. Reciprocamente, para todo ideal $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}_{u,\lambda}$, $\mathcal{J} \cdot \{x\}$ define um $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ -submódulo de $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$.

Demonstração.

Se $\vec{\mathcal{J}}$ é $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ -submódulo de $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$, então $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}_{u,\lambda}$ dado por

$$\mathcal{J} = \{p \in \mathcal{E}_{u,\lambda} \mid p(u, \lambda)x \in \vec{\mathcal{J}}\}$$

é um ideal em $\mathcal{E}_{u,\lambda}$, ou seja,

- (i) $0 \in \mathcal{J}$;
- (ii) Se $h_1, h_2 \in \mathcal{J}$, então $h_1 + h_2 \in \mathcal{J}$;
- (iii) Se $f \in \mathcal{E}_{u,\lambda}$ e $p \in \mathcal{J}$, então $(f.p) \in \mathcal{J}$.

De fato.

- (i) $0 \in \mathcal{J}$, pois o germe nulo pertence a $\vec{\mathcal{J}}$.
- (ii) Se $p_1, p_2 \in \mathcal{J}$, então $p_1(u, \lambda)x \in \vec{\mathcal{J}}$ e $p_2(u, \lambda)x \in \vec{\mathcal{J}}$ e, temos

$$((p_1 + p_2)(u, \lambda))x = p_1(u, \lambda)x + p_2(u, \lambda)x = (p_1(u, \lambda) + p_2(u, \lambda))x.$$

Como $\vec{\mathcal{J}}$ é um $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ -submódulo de $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$, segue que $p_1(u, \lambda)x + p_2(u, \lambda)x \in \vec{\mathcal{J}}$. Portanto, $p_1 + p_2 \in \mathcal{J}$.

- (iii) Seja $f \in \mathcal{E}_{u,\lambda}$. Se $p \in \mathcal{J}$, então $p(u, \lambda)x \in \vec{\mathcal{J}}$ e, temos

$$((f.p)(u, \lambda))x = f(u, \lambda)p(u, \lambda)x.$$

Como $\vec{\mathcal{J}}$ é $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ -submódulo de $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$, segue que $f(u, \lambda)p(u, \lambda)x \in \vec{\mathcal{J}}$.

Portanto, $f.p \in \mathcal{J}$.

Como todo germe $g \in \vec{\mathcal{J}}$ é escrito na forma $g(x, \lambda) = p(u, \lambda)x$, onde $p \in \mathcal{E}_{u,\lambda}$, temos que $\vec{\mathcal{J}} = \mathcal{J} \cdot \{x\}$.

Reciprocamente, se $\mathcal{J}$ é um ideal em $\mathcal{E}_{u,\lambda}$, então o conjunto $\mathcal{J} \cdot \{x\}$ é um $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ -submódulo de $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$, ou seja,

- (i) $0 \in \mathcal{J} \cdot \{x\}$;
- (ii) Se $h_1, h_2 \in \mathcal{J} \cdot \{x\}$, então $h_1 + h_2 \in \mathcal{J} \cdot \{x\}$;
- (iii) Se $f \in \mathcal{E}_{u,\lambda}$ e $h \in \mathcal{J} \cdot \{x\}$, então $(f.h) \in \mathcal{J} \cdot \{x\}$.

De fato.

- (i) $0 \in \mathcal{J} \cdot \{x\}$, pois $0 \in \mathcal{J}$;
- (ii) Se $h_1, h_2 \in \mathcal{J} \cdot \{x\}$, então $h_1(x, \lambda) = p_1(u, \lambda)x$ e $h_2(x, \lambda) = p_2(u, \lambda)x$, onde $p_1, p_2 \in \mathcal{J}$. Assim, $(h_1 + h_2)(x, \lambda) = p_1(u, \lambda)x + p_2(u, \lambda)x = (p_1(u, \lambda) + p_2(u, \lambda))x$. Agora, como $\mathcal{J}$ é um ideal, segue que $p_1(u, \lambda) + p_2(u, \lambda) \in \mathcal{J}$. Logo, $(p_1(u, \lambda) + p_2(u, \lambda))x \in \mathcal{J} \cdot \{x\}$ e, portanto, $h_1 + h_2 \in \mathcal{J} \cdot \{x\}$.

(iii) Seja $f \in \mathcal{E}_{u,\lambda}$ e $h \in \mathcal{J} \cdot \{x\}$. Então, $h(x, \lambda) = p(u, \lambda)x$, onde $p \in \mathcal{J}$.

Assim, $(f.h)(x, \lambda) = f(x, \lambda)p(u, \lambda)x$.

Usando novamente o fato de que $\mathcal{J}$ é um ideal em $\mathcal{E}_{u,\lambda}$, segue que $f(x, \lambda)p(u, \lambda) \in \mathcal{J}$.

Logo, $f(x, \lambda)p(u, \lambda)x \in \mathcal{J} \cdot \{x\}$ e, portanto, $f.h \in \mathcal{J} \cdot \{x\}$. ■

Usando o Lema (2.1.2) podemos reescrever os seguintes resultados e definições.

(i) Se $\mathcal{J} = \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$ é um ideal finitamente gerado em $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ e se

$$\vec{\mathcal{J}} = \langle a_1, a_2, \dots, a_k \rangle \cdot \{x\},$$

então dizemos que $\vec{\mathcal{J}}$ é gerado por $a_1(u, \lambda)x, a_2(u, \lambda)x, \dots, a_k(u, \lambda)x$.

(ii) Se $\vec{\mathcal{I}}$ e $\vec{\mathcal{J}}$ são $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ -submódulos de $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$, então o conjunto de todas as somas de $\vec{\mathcal{I}}$ e $\vec{\mathcal{J}}$ é também um $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ -submódulo de $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$, denotado por

$$\vec{\mathcal{I}} + \vec{\mathcal{J}} = (\mathcal{I} + \mathcal{J}) \cdot \{x\}.$$

(iii) Se existir um subespaço vetorial k -dimensional V de $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ tal que

$$\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2) = \vec{\mathcal{J}} + V,$$

então dizemos que $\vec{\mathcal{J}}$ tem codimensão k , ou seja, $\text{cod } \vec{\mathcal{J}} = k$. Usando o Lema (2.1.2), temos que

$$\text{cod } \vec{\mathcal{J}} = \text{cod } \mathcal{J},$$

onde a codimensão de $\text{cod } \mathcal{J}$ é calculada em $\mathcal{E}_{u,\lambda}$.

Proposição 2.1.2

(i) Se $\vec{\mathcal{J}} = \langle p_1, \dots, p_k \rangle \cdot \{x\}$ é $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ -submódulo de $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ e se $p_k = a_1 p_1 + \dots + a_{k-1} p_{k-1}$ com $a_i \in \mathcal{E}_{u,\lambda}$, então $\vec{\mathcal{J}} = \langle p_1, \dots, p_{k-1} \rangle \cdot \{x\}$.

(ii) Se $\vec{\mathcal{J}} = \langle p_1, \dots, p_k \rangle \cdot \{x\}$ é um $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ -submódulo em $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ e se

$$q_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} p_j, \quad i = 1, \dots, k,$$

onde $a_{ij} \in \mathcal{E}_{u,\lambda}$ e a matriz $(a_{ij}(0, 0))_{k \times k}$ é invertível em $\mathcal{E}_{u,\lambda}$, então $\vec{\mathcal{J}} = \langle q_1, \dots, q_k \rangle \cdot \{x\}$.

(iii) Sejam $\vec{\mathcal{I}}$ e $\vec{\mathcal{J}}$ $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ -submódulos de $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$, com $\vec{\mathcal{I}}$ finitamente gerado. Então, $\vec{\mathcal{I}} \subset \vec{\mathcal{J}}$ se, e somente se, $\vec{\mathcal{I}} \subset \vec{\mathcal{J}} + \mathcal{M}_{u,\lambda} \vec{\mathcal{I}}$.

(iv) Um $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ -submódulo $\vec{\mathcal{J}}$ de $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ tem codimensão finita se, e somente se, existir um inteiro k tal que $\mathcal{M}_{u,\lambda}^k \cdot \{x\} \subset \vec{\mathcal{J}}$.

Demonstração. Este resultado segue do Lema (2.1.2) juntamente com os correspondentes resultados para ideais apresentados em [1]. ■

2.2 Z_2 -Equivalência

Dentro do estudo de problemas de bifurcação, queremos analisar quando dois germes g e h Z_2 -equivariantes são Z_2 -equivalentes.

Sejam $g, h \in \mathcal{E}_{x,\lambda}(Z_2)$ dois problemas de bifurcação.

Dizemos que h é Z_2 -equivalente a g , denotado por $h \sim g$, se

$$h(x, \lambda) = S(x, \lambda)g(X(x, \lambda), \Lambda(\lambda)),$$

onde $S \in \mathcal{E}_{x,\lambda}(Z_2)$, $X \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ e $\Lambda \in \mathcal{E}_\lambda$ satisfazendo

$$S : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, 0) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad S(0, 0) > 0,$$

$$X : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, 0) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad X(0, 0) = 0, \quad X_x(0, 0) > 0,$$

$$\Lambda : (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Lambda(0) = 0, \quad \Lambda'(0) > 0.$$

Seja $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\Phi(x, \lambda) = (X(x, \lambda), \Lambda(\lambda))$. O par (S, Φ) é chamado Z_2 -equivalência e é denotado por $\varphi = (S, \Phi)$, ou simplesmente, $\varphi = (S, X, \Lambda)$. A Z_2 -equivalência é uma versão λ -parametrizada com simetria do grupo Z_2 da Equivalência de Contato definida por Mather em 1968 ([26]).

Quando, $\Lambda(\lambda) \equiv \lambda$, dizemos que h e g são Z_2 -fortemente equivalentes e denotamos $h \sim_f g$.

O conjunto das Z_2 -equivalências (S, Φ) tem a estrutura de grupo com a operação

$$(S_1, \Phi_1) * (S_2, \Phi_2) = (S_1 \cdot (S_2 \circ \Phi_1), \Phi_1 \circ \Phi_2). \quad (2.5)$$

Denotamos por $\mathcal{K}_\lambda(Z_2)$ o grupo das Z_2 -equivalências (S, Φ) com a operação de composição definida em (2.5) e o conjunto das Z_2 -equivalências fortes por $\mathcal{K}_\lambda^f(Z_2)$.

Um subgrupo $\mathcal{UK}_\lambda(Z_2)$ de $\mathcal{K}_\lambda(Z_2)$ é unipotente se é formado por Z_2 -equivalências (S, Φ) tais que

$$S(0, 0) = 1, \quad X_x(0, 0) = 1 \text{ e } \Lambda'(0) = 1.$$

Neste caso, a terna (S, X, Λ) é chamada de Z_2 -equivalência unipotente.

2.3 Z_2 -Espaços Tangentes

Nesta seção, primeiramente definimos o espaço tangente restrito a um germe g Z_2 -equivariante, denotado por $RT\mathcal{K}_\lambda^f(g, Z_2)$, através da ação de uma Z_2 -equivalência forte e, posteriormente, determinamos o espaço tangente unipotente restrito, denotado $RT\mathcal{UK}_\lambda^f(g, Z_2)$. Determinamos, também, o espaço tangente estendido, denotado $T_e\mathcal{K}_\lambda(g, Z_2)$, fundamental para o cálculo da Z_2 -codimensão e do Z_2 -desdobramento miniversal de g .

Consideramos $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ e uma família a um parâmetro t , $G : (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, $G = G(x, \lambda, t)$, de germes Z_2 -fortemente equivalentes à g , ou seja,

$$G(x, \lambda, t) = S(x, \lambda, t)g(X(x, \lambda, t), \lambda), \quad (2.6)$$

onde

$$X(x, \lambda, 0) \equiv x, \quad (2.7)$$

$$X(-x, \lambda, t) = -X(x, \lambda, t), \quad (2.8)$$

$$S(x, \lambda, 0) \equiv 1, \quad (2.9)$$

$$S(-x, \lambda, t) = S(x, \lambda, t). \quad (2.10)$$

A família G é Z_2 -equivariante pois

$$\begin{aligned} G(-x, \lambda, t) &= S(-x, \lambda, t)g(X(-x, \lambda, t), \lambda) \\ &= S(x, \lambda, t)g(-X(x, \lambda, t), \lambda) \\ &= -S(x, \lambda, t)g(X(x, \lambda, t), \lambda) \\ &= -G(x, \lambda, t). \end{aligned}$$

Um elemento de $RTK_\lambda^f(g, Z_2)$ é dado por

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x, \lambda, t)|_{t=0}.$$

Para simplificar a notação das derivadas parciais denotamos $\frac{\partial G}{\partial t}(x, \lambda, t)$ por $G_t(x, \lambda, t)$, etc. Dessa forma,

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x, \lambda, t)|_{t=0} = G_t(x, \lambda, 0) = S_t(x, \lambda, 0)g(X(x, \lambda, 0), \lambda) + g_x(X(x, \lambda, 0), \lambda)X_t(x, \lambda, 0).$$

Logo, usando as condições (2.7) e (2.9), temos que

$$G_t(x, \lambda, 0) = S_t(x, \lambda, 0)g(x, \lambda) + g_x(x, \lambda)X_t(x, \lambda, 0). \quad (2.11)$$

Como $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$, segue pelo Corolário (2.1.1) que existe um germe $p \in \mathcal{E}_{u,\lambda}$ tal que

$$g(x, \lambda) = p(u, \lambda)x. \quad (2.12)$$

Analogamente, como as condições (2.7) e (2.9) são válidas temos que existem germes $a, b \in \mathcal{E}_{u,\lambda}$ tais que

$$S_t(x, \lambda, 0) = a(u, \lambda), \quad (2.13)$$

$$X_t(x, \lambda, 0) = b(u, \lambda)x. \quad (2.14)$$

Substituindo (2.12), (2.13) e (2.14) em (2.11) temos que

$$G_t(x, \lambda, 0) = a(u, \lambda)p(u, \lambda)x + b(u, \lambda)x(p(u, \lambda) + 2up_u(u, \lambda)).$$

Dessa forma, o Z_2 -Espaço Tangente Restrito é um $\mathcal{E}_{u, \lambda}$ -submódulo de $\vec{\mathcal{E}}_{x, \lambda}(Z_2)$ gerado pelos elementos

$$p(u, \lambda)x, (p(u, \lambda) + 2up_u(u, \lambda))x,$$

ou equivalentemente, $RT\mathcal{K}_\lambda^f(g, Z_2)$ é gerado por

$$g, \quad xg_x \quad (2.15)$$

ou

$$RT\mathcal{K}_\lambda^f(g, Z_2) = \langle p, up_u \rangle_{\mathcal{E}_{u, \lambda}} \cdot \{x\}. \quad (2.16)$$

O Z_2 -Espaço Tangente Restrito Unipotente associado a $\mathcal{UK}_\lambda^f(Z_2)$ é dado por

$$RT\mathcal{UK}_\lambda^f(g, Z_2) = (\mathcal{M}_{u, \lambda} RT\mathcal{K}_\lambda^f(g, Z_2)) \cdot \{x\}. \quad (2.17)$$

Para finalizarmos, o caso onde há a presença do difeomorfismo Λ , a família H a um parâmetro t de germes Z_2 -equivalentes a g é dada por

$$H(x, \lambda, t) = S(x, \lambda, t)g(X(x, \lambda, t), \Lambda(\lambda, t)), \quad (2.18)$$

onde

$$X(x, \lambda, 0) \equiv x, \quad (2.19)$$

$$X(-x, \lambda, t) = -X(x, \lambda, t), \quad (2.20)$$

$$S(x, \lambda, 0) \equiv 1, \quad (2.21)$$

$$S(-x, \lambda, t) = S(x, \lambda, t), \quad (2.22)$$

$$\Lambda(\lambda, 0) = \lambda. \quad (2.23)$$

A família H é Z_2 -equivariante pois

$$\begin{aligned} H(-x, \lambda, t) &= S(-x, \lambda, t)g(X(-x, \lambda, t), \Lambda(\lambda, t)) \\ &= S(x, \lambda, t)g(-X(x, \lambda, t), \Lambda(\lambda, t)) \\ &= -S(x, \lambda, t)g(X(x, \lambda, t), \Lambda(\lambda, t)) \\ &= -H(x, \lambda, t). \end{aligned}$$

Um elemento de $T_e\mathcal{K}_\lambda(g, Z_2)$ é dado por

$$\frac{\partial H}{\partial t}(x, \lambda, t)|_{t=0}.$$



Dessa forma,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t}(x, \lambda, t)|_{t=0} &= S_t(x, \lambda, 0)g(X(x, \lambda, 0), \Lambda(\lambda, 0)) + g_x(X(x, \lambda, 0), \Lambda(\lambda, 0))X_t(x, \lambda, 0) \\ &+ g_\lambda(X(x, \lambda, 0), \Lambda(\lambda, 0))\Lambda_t(\lambda, 0). \end{aligned}$$

Logo, usando as condições (2.19), (2.21) e (2.23) temos que

$$H_t(x, \lambda, 0) = S_t(x, \lambda, 0)g(x, \lambda) + g_x(x, \lambda)X_t(x, \lambda, 0) + g_\lambda(x, \lambda)\Lambda_t(\lambda, 0). \quad (2.24)$$

Como $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$, segue pelo Corolário (2.1.1) que existe um germe $p \in \mathcal{E}_{u,\lambda}$ tal que

$$g(x, \lambda) = p(u, \lambda)x. \quad (2.25)$$

Analogamente, como as condições (2.19) e (2.21) são válidas, temos que existem germes $a, b \in \mathcal{E}_{u,\lambda}$ e $c \in \mathcal{E}_\lambda$ tais que

$$S_t(x, \lambda, 0) = a(u, \lambda), \quad (2.26)$$

$$X_t(x, \lambda, 0) = b(u, \lambda)x, \quad (2.27)$$

$$\Lambda_t(\lambda, 0) = c(\lambda). \quad (2.28)$$

Substituindo (2.25), (2.26), (2.27) e (2.28) em (2.24) temos que

$$H_t(x, \lambda, 0) = a(u, \lambda)p(u, \lambda)x + b(u, \lambda)x(p(u, \lambda) + 2up_u(u, \lambda)) + c(\lambda)p_\lambda(u, \lambda)x.$$

Dessa forma, o Z_2 -Espaço Tangente Estendido é gerado pelos elementos

$$p(u, \lambda)x, (p(u, \lambda) + 2up_u(u, \lambda))x, p_\lambda(u, \lambda)x,$$

ou equivalentemente, $T_e\mathcal{K}_\lambda(g, Z_2)$ é gerado por

$$g, \quad xg_x, \quad xg_\lambda \quad (2.29)$$

ou

$$T_e\mathcal{K}_\lambda(g, Z_2) = \langle p, up_u \rangle_{\mathcal{E}_{u,\lambda}} \cdot \{x\} + \langle p_\lambda \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \cdot \{x\}. \quad (2.30)$$

Logo, concluímos que

$$T_e\mathcal{K}_\lambda(g, Z_2) = RT\mathcal{K}_\lambda^f(g, Z_2) + \langle p_\lambda \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \cdot \{x\}.$$

O Z_2 -espaço tangente estendido tem estrutura de módulo sobre o sistema de anéis $\{\mathcal{E}_{u,\lambda}, \mathcal{E}_\lambda\}$.

O espaço normal a g é definido por

$$NK_\lambda(g, Z_2) = \frac{\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)}{T_e K_\lambda(g, Z_2)}.$$

A Z_2 -codimensão de g , denotada por $\text{cod}_{Z_2}g$, é a dimensão do espaço normal de g como espaço vetorial real, isto é,

$$\text{cod}_{Z_2}g = \dim_{\mathbb{R}} NK_\lambda(g, Z_2) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)}{T_e K_\lambda(g, Z_2)}.$$

Lema 2.3.1 Se $RTK_\lambda^f(g + tp, Z_2) = RTK_\lambda^f(g, Z_2)$ é válido para todo t próximo de 0, então existem coeficientes a, b tais que

$$p(x, \lambda) = a(x, \lambda, t)H(x, \lambda, t) + b(x, \lambda, t)H_x(x, \lambda, t), \quad (2.31)$$

onde

$$H(x, \lambda, t) = g(x, \lambda) + tp(x, \lambda), \quad (2.32)$$

$$b(0, 0, t) \equiv 0, \quad (2.33)$$

$$a(-x, \lambda, t) = a(x, \lambda, t), \quad (2.34)$$

$$b(-x, \lambda, t) = -b(x, \lambda, t). \quad (2.35)$$

Demonstração.

Suponhamos que $RTK_\lambda^f(g + tp, Z_2) = RTK_\lambda^f(g, Z_2)$ é válido para $t = t_0$ próximo de 0, $t_0 \neq 0$. Então, cada gerador de $RTK_\lambda^f(g + t_0p, Z_2)$ é escrito como uma combinação linear dos geradores de $RTK_\lambda^f(g, Z_2)$. Por (2.15) sabemos que $RTK_\lambda^f(g, Z_2)$ é gerado por g, xg_x .

Logo, os geradores de $RTK_\lambda^f(g + t_0p, Z_2)$ são dados por $g + t_0p, x(g + t_0p)_x$.

Assim sendo, existem germes $A_i, B_i \in \mathcal{E}_{u,\lambda}$ com $i = 1, 2$ tais que

$$\begin{aligned} g + t_0p &= A_1g + B_1xg_x, \\ xg_x + t_0xp_x &= A_2g + B_2xg_x. \end{aligned}$$

Rearranjando os termos no sistema acima, obtemos

$$\begin{cases} g + t_0p &= A_1g + B_1xg_x \\ xg_x + t_0xp_x &= A_2g + B_2xg_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_0p &= (A_1g - g) + B_1xg_x \\ t_0xp_x &= A_2g + (B_2xg_x - xg_x) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t_0p &= (A_1 - 1)g + B_1xg_x \\ t_0xp_x &= A_2g + xg_x(B_2 - 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p &= \frac{(A_1 - 1)}{t_0}g + \frac{B_1}{t_0}xg_x \\ xp_x &= \frac{A_2}{t_0}g + \frac{(B_2 - 1)}{t_0}xg_x. \end{cases}$$

Reescrevendo matricialmente o sistema acima, segue que

$$\begin{pmatrix} p \\ xp_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(A_1 - 1)}{t_0} & \frac{B_1}{t_0} \\ \frac{A_2}{t_0} & \frac{B_2 - 1}{t_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ xg_x \end{pmatrix} \\ = Q \begin{pmatrix} g \\ xg_x \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

onde Q é uma matriz 2×2 cujas entradas são germes suaves em $\mathcal{O}_{u,\lambda}$.

Para todo germe h , introduzimos a notação $v(h)$ para o vetor coluna

$$v(h) = \begin{pmatrix} h \\ xh_x \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Com a notação (2.37), reescrevemos a igualdade (2.36) da seguinte forma

$$v(p) = Qv(g). \quad (2.38)$$

Fazendo $H = g + tp$, temos que

$$\begin{aligned} v(H) &= \begin{pmatrix} H \\ xH_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g + tp \\ x(g + tp)_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g + tp \\ xg_x + txp_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g \\ xg_x \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} p \\ xp_x \end{pmatrix} \\ &= v(g) + tv(p). \end{aligned}$$

Assim,

$$v(g) = v(H) - tv(p). \quad (2.39)$$

Substituindo (2.39) em (2.38), temos

$$\begin{aligned} v(p) &= Q[v(H) - tv(p)] \\ &= Qv(H) - tQv(p), \end{aligned} \quad (2.40)$$

o que implica que

$$v(p) + Qtv(p) = Qv(H).$$



Logo,

$$[I + tQ]v(p) = Qv(H). \quad (2.41)$$

Observe que (2.41) é um sistema de equações C^∞ na variável t .

Como I é uma matriz invertível, segue que $I + tQ$ também é uma matriz invertível para todo t suficientemente pequeno. Além disso, $(I + tQ)^{-1}$ é uma matriz 2×2 cujas entradas são germes em $\mathcal{E}_{u,\lambda,t}$.

Assim sendo, multiplicando ambos os lados da igualdade (2.41) por $(I + tQ)^{-1}$, seque que

$$v(p) = (I + tQ)^{-1}Qv(H). \quad (2.42)$$

Note que a equação (2.42) pode ser reescrita da seguinte forma

$$v(p)_{2 \times 1} = U_{2 \times 2}v(H)_{2 \times 1},$$

onde $U_{2 \times 2} = (I + tQ)^{-1}Q$.

Tomando

$$v(p) = \begin{pmatrix} p \\ xp_x \end{pmatrix}, U_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix} \text{ com } \alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1 \in \mathcal{E}_{u,\lambda,t}, v(H) = \begin{pmatrix} H \\ xH_x \end{pmatrix}, \text{ temos que}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p \\ xp_x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ xH_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha H + \beta xH_x \\ \alpha_1 H + \beta_1 xH_x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, considerando a primeira componente da igualdade acima, obtemos

$$p = \alpha H + \beta xH_x.$$

Agora, tomando $a = \alpha$ e $b = \beta x$, onde $\alpha, \beta \in \mathcal{E}_{u,\lambda,t}$, concluímos que

$$p = aH + bH_x,$$

satisfazendo $b(0, 0, t) = 0$, $a(-x, \lambda, t) = a(x, \lambda, t)$ e $b(-x, \lambda, t) = -b(x, \lambda, t)$. ■

Teorema 2.3.1 Sejam $g, p \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ germes tais que $RT\mathcal{K}_\lambda^f(g + tp, Z_2) = RT\mathcal{K}_\lambda^f(g, Z_2)$ é válido para todo t próximo de 0. Então, $g + tp$ é Z_2 -fortemente equivalente a g para todo t suficientemente próximo de 0.

Demonstração.

Pelo Lema (2.3.1), temos que

$$p(x, \lambda) = a(x, \lambda, t)H(x, \lambda, t) + b(x, \lambda, t)H_x(x, \lambda, t), \quad (2.43)$$

onde



$$H(x, \lambda, t) = g(x, \lambda) + tp(x, \lambda), \quad (2.44)$$

$$b(0, 0, t) \equiv 0, \quad (2.45)$$

$$a(-x, \lambda, t) = a(x, \lambda, t), \quad (2.46)$$

$$b(-x, \lambda, t) = -b(x, \lambda, t). \quad (2.47)$$

Consequentemente esta relação é válida em alguma vizinhança de $(0,0,0)$ no espaço x, λ, t . Assim, escolhemos intervalos K, L, M tais que a igualdade (2.43) é válida em $K \times L \times M$.

Queremos provar que $H(.,., t)$ é Z_2 -fortemente equivalente a g para cada t suficientemente próximo de 0. Especificamente, construímos aplicações $X = X(x, \lambda, t)$ e $S = S(x, \lambda, t)$ de classe C^∞ em t e satisfazendo

$$\begin{aligned} (a) \quad & S(x, \lambda, t)H(x, \lambda, t) = g(x, \lambda); \\ (b) \quad & X(0, 0, t) \equiv 0, \quad X(x, \lambda, 0) \equiv x; \\ (c) \quad & S(x, \lambda, 0) \equiv 1; \\ (d) \quad & S(-x, \lambda, t) = S(x, \lambda, t); \\ (e) \quad & X(-x, \lambda, t) = -X(x, \lambda, t). \end{aligned} \quad (2.48)$$

As funções X e S são encontradas resolvendo as equações diferenciais ordinárias abaixo:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \frac{dX}{dt}(x, \lambda, t) = -b(X(x, \lambda, t), \lambda, t); \\ (ii) \quad & X(x, \lambda, 0) = x; \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} (iii) \quad & \frac{dS}{dt}(x, \lambda, t) = -a(X(x, \lambda, t), \lambda, t)S(x, \lambda, t); \\ (iv) \quad & S(x, \lambda, 0) = 1, \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde a e b são coeficientes enunciados no Lema (2.3.1).

Temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[S(x, \lambda, t)H(X(x, \lambda, t), \lambda, t)] &= S_t(x, \lambda, t)H(X(x, \lambda, t), \lambda, t) \\ &+ S(x, \lambda, t)H_t(X(x, \lambda, t), \lambda, t) \\ &+ S(x, \lambda, t)H_x(X(x, \lambda, t), \lambda, t)X_t(x, \lambda, t). \end{aligned} \quad (2.51)$$



O lado direito de (2.51) simplifica-se consideravelmente tomando $H = g + tp$ e usando o fato de que X e S são soluções de (2.49) e (2.50), ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[S(x, \lambda, t)H(X(x, \lambda, t), \lambda, t)] &= S(x, \lambda, t)(-a(X(x, \lambda, t), \lambda, t)H(X(x, \lambda, t), \lambda, t) \\ &\quad - b(X(x, \lambda, t), \lambda, t)H_x(X(x, \lambda, t), \lambda, t) \\ &\quad + p(X(x, \lambda, t), \lambda)). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Considerando $y = X(x, \lambda, t)$, obtemos

$$\frac{d}{dt}[S(x, \lambda, t)H(y, \lambda, t)] = S(x, \lambda, t)[-a(y, \lambda, t)H(y, \lambda, t) - b(y, \lambda, t)H_x(y, \lambda, t) + p(y, \lambda)].$$

Segue por (2.43) que $p(x, \lambda) = a(x, \lambda, t)H(x, \lambda, t) + b(x, \lambda, t)H_x(x, \lambda, t)$ e, portanto, o lado esquerdo da igualdade acima é identicamente nula.

Consequentemente,

$$\frac{d}{dt}[S(x, \lambda, t)H(X(x, \lambda, t), \lambda, t)] = 0,$$

o que implica que $S(x, \lambda, t)H(X(x, \lambda, t), \lambda, t)$ não depende de t .

Logo, tomando $t=0$, temos que

$$\begin{aligned} S(x, \lambda, t)H(X(x, \lambda, t), \lambda, t) &= S(x, \lambda, 0)H(X(x, \lambda, 0), \lambda, 0) \\ &= 1.H(X(x, \lambda, 0), \lambda, 0) \\ &= H(x, \lambda, 0) \\ &= g(x, \lambda). \end{aligned}$$

Note que na segunda igualdade consideramos $S(x, \lambda, 0) = 1$, na terceira $X(x, \lambda, 0) = x$ e finalmente na quarta igualdade utilizamos $H = g + tp$.

Logo, concluímos que $S(x, \lambda, t)H(X(x, \lambda, t), \lambda, t) = g(x, \lambda)$ ocorre se X e S satisfazem respectivamente (2.49) e (2.50).

Afirmamos que as condições

$$(a) \quad X(0, 0, t) = 0;$$

$$(b) \quad X(x, \lambda, t) = x;$$

$$(c) \quad S(x, \lambda, 0) = 1;$$

também ocorrem se X e S satisfazem (2.49) e (2.50).

De fato.

(a) Pelo Lema (2.3.1), temos que $b(0, 0, t) = 0$. Logo, $X(0, 0, t) = 0$ é uma solução para a equação diferencial ordinária (2.49) pois $X_t(0, 0, t) = 0 = b(0, 0, t) = b(X(0, 0, t), 0, t)$.

Dessa forma, pelo Teorema de Existência e Unicidade $X(0, 0, t) = 0$.

(b) e (c) seguem diretamente das condições iniciais das equações.

(d) Seja $T(x, \lambda, t) = S(-x, \lambda, t)$. Então,

$$\begin{aligned} T_t(x, \lambda, t) &= S_t(-x, \lambda, t) \\ &= -a(X(-x, \lambda, t), \lambda, t)S(-x, \lambda, t) \\ &= -a(X(x, \lambda, t), \lambda, t)S(x, \lambda, t). \end{aligned}$$

Além disso, $T(x, \lambda, 0) = S(-x, \lambda, 0) = 1$.

Assim sendo, temos que T é uma solução de (2.50).

Logo, pelo Teorema de Existência e Unicidade $T(x, \lambda, t) = S(x, \lambda, t)$ e, portanto,

$$S(-x, \lambda, t) = S(x, \lambda, t).$$

(e) Seja $Y(x, \lambda, t) = -X(-x, \lambda, t)$. Então,

$$\begin{aligned} Y_t(x, \lambda, t) &= -X_t(-x, \lambda, t) \\ &= -(-b(X(-x, \lambda, t), \lambda, t)) \\ &= b(-Y(x, \lambda, t), \lambda, t) \\ &= -b(Y(x, \lambda, t), \lambda, t). \end{aligned}$$

Além disso, $Y(x, \lambda, 0) = -X(-x, \lambda, 0) = x$.

Assim sendo, temos que Y é uma solução de (2.49).

Logo, pelo Teorema de Existência e Unicidade $Y(x, \lambda, t) = X(x, \lambda, t)$ e, portanto,

$$X(-x, \lambda, t) = -X(x, \lambda, t).$$

Para terminarmos a prova, falta mostrarmos que as equações diferenciais ordinárias (2.49) e (2.50) têm soluções sobre $K \times L \times M$.

Observamos acima que $X(0, 0, t) = 0$ é uma solução de (2.49) para todo $t \in \mathbb{R}$ e, portanto, em particular para todo $t \in M \subset \mathbb{R}$. Pelo Teorema de Existência e Unicidade de sistemas de equações diferenciais ordinárias, temos que existem intervalos K, L contendo a origem e X definido em $K \times L \times M$ resolvendo (2.49).

Uma vez definido X , (2.50) é uma equação diferencial ordinária linear e como tal tem solução para todo t . ■

Teorema 2.3.2 Sejam $g, p \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ germes tais que

$$RTK_{\lambda}^f(g + tp, Z_2) = RTK_{\lambda}^f(g, Z_2),$$

para todo $t \in [0, 1]$.

Então, $g + tp$ é fortemente equivalente a g para todo $t \in [0, 1]$.

Demonstração.

Definimos em $[0, 1]$ a seguinte relação de equivalência $\sim$:

$$t_1 \sim t_2 \Rightarrow g + t_1 p \sim_f g + t_2 p, \quad t_1, t_2 \in [0, 1].$$

Assim, temos que

$$\frac{[0, 1]}{\sim} = \{[t] : t \in [0, 1]\}.$$

Afirmção. As classes de equivalência de t em $[0, 1]$ são abertas.

De fato.

Mostrar que as classes de equivalência dos t 's são abertas significa que dado $t_0 \in [0, 1]$ existe uma vizinhança de t_0 tal que para todo t nesta vizinhança $g + tp \sim_f g + t_0 p$.

Seja $h = g + t_0 p$, $t_0 \in [0, 1]$.

Logo, para todo s suficientemente próximo de 0, segue que

$$\begin{aligned} RTK_{\lambda}^f(h + sp, Z_2) &= RTK_{\lambda}^f((g + t_0 p) + sp, Z_2) \\ &= RTK_{\lambda}^f(g + (t_0 + s)p, Z_2) \\ &= RTK_{\lambda}^f(g, Z_2) \\ &= RTK_{\lambda}^f(g + tp, Z_2) \\ &= RTK_{\lambda}^f(h, Z_2). \end{aligned}$$

Note que na primeira igualdade usamos que $h = g + t_0 p$, e na terceira utilizamos que $RTK_{\lambda}^f(g + tp, Z_2) = RTK_{\lambda}^f(g, Z_2)$.

Assim, $h + sp$ é fortemente equivalente a h para todo s próximo de 0.

Logo, segue que

$$g + (t_0 + s)p \sim_f g + t_0 p,$$

para todo $t_0 \in [0, 1]$ e s suficientemente próximo de 0.

Então, fazendo $t = t_0 + s$ segue que $g + tp \sim_f g + t_0 p$ para t próximo de t_0 .

Logo, as classes de equivalência dos t 's em $[0, 1]$ são abertas e, portanto, a afirmação está demonstrada.

Assim sendo, segue do fato de $[0, 1]$ ser conexo que existe exatamente uma classe de equivalência.

Portanto, supondo $[t_1]$ a única classe aberta existente, temos para todo $t \in [t_1]$, $g + tp \sim_f g + t_1 p$. Em particular, para $t_1 = 0$, que $g + tp \sim_f g$, $\forall t \in [0, 1]$. ■

2.4 Submódulos Intrínsecos

Um $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ -submódulo $\vec{\mathcal{J}} \subset \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ é intrínseco se $\varphi(g) \in \vec{\mathcal{J}}$ para todo $g \in \vec{\mathcal{J}}$ e para toda Z_2 -equivalência forte $\varphi = (S, X, I_\lambda)$, ou equivalentemente, se para todos $g, h \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ tais que $g \in \vec{\mathcal{J}}$ e $h \sim_f g$, então $h \in \vec{\mathcal{J}}$.

Proposição 2.4.1 Sejam $\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{K}} \subset \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ -submódulos intrínsecos. Os seguintes $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ -submódulos de $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$

- (i) $\vec{\mathcal{J}} + \vec{\mathcal{K}}$;
 - (ii) $\vec{\mathcal{J}} \cap \vec{\mathcal{K}}$;
- são intrínsecos.

Demonstração.

(i) Seja φ uma Z_2 -equivalência forte. Se $h \in \vec{\mathcal{J}} + \vec{\mathcal{K}}$, então $h = f + g$, onde $f \in \vec{\mathcal{J}}$ e $g \in \vec{\mathcal{K}}$.

Assim,

$$\begin{aligned} \varphi(h) &= S(x, \lambda)h(X(x, \lambda), \lambda) \\ &= S(x, \lambda)(f + g)(X(x, \lambda), \lambda) \\ &= S(x, \lambda)f(X(x, \lambda), \lambda) + S(x, \lambda)g(X(x, \lambda), \lambda) \\ &= \varphi(f) + \varphi(g). \end{aligned}$$

Agora, como $\vec{\mathcal{J}}$ e $\vec{\mathcal{K}}$ são intrínsecos, temos que $\varphi(f) \in \vec{\mathcal{J}}$ e $\varphi(g) \in \vec{\mathcal{K}}$.

Logo, $\varphi(h) \in \vec{\mathcal{J}} + \vec{\mathcal{K}}$ e, portanto, $\vec{\mathcal{J}} + \vec{\mathcal{K}}$ é intrínseco.

(ii) Seja φ uma Z_2 -equivalência forte. Se $h \in \vec{\mathcal{J}} \cap \vec{\mathcal{K}}$, então $h \in \vec{\mathcal{J}}$, $h \in \vec{\mathcal{K}}$.

Agora, como $\vec{\mathcal{J}}, \vec{\mathcal{K}}$ são intrínsecos, segue que $\varphi(h) \in \vec{\mathcal{J}}$, $\varphi(h) \in \vec{\mathcal{K}}$.

Logo, $\varphi(h) \in \vec{\mathcal{J}} \cap \vec{\mathcal{K}}$ e, portanto, $\vec{\mathcal{J}} \cap \vec{\mathcal{K}}$ é intrínseco. ■

Proposição 2.4.2 Sejam $\vec{\mathcal{J}}$ um submódulo intrínseco de codimensão finita em $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ e

$$p(u, \lambda) = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)} a_\alpha(u, \lambda) u^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_2}.$$

Então, $p(u, \lambda)x \in \vec{\mathcal{J}}$ se, e somente se, para cada α tal que $a_\alpha \neq 0$, o monômio $u^{\alpha_1} \lambda^{\alpha_2} x \in \vec{\mathcal{J}}$.

Demonstração. Ver [1], pág. 254. ■

A proposição seguinte caracteriza os $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ -submódulos intrínsecos de codimensão finita. Esse resultado é semelhante ao resultado feito para o contexto não simétrico.

Proposição 2.4.3 Seja $\vec{\mathcal{J}}$ um $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ -submódulo de $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ de codimensão finita. Então, $\vec{\mathcal{J}}$ é intrínseco se, e somente se,

$$\vec{\mathcal{J}} = \langle u^{k_1}\lambda^{l_1}, \dots, u^{k_s}\lambda^{l_s} \rangle \cdot \{x\}, \quad (2.53)$$

onde

$$0 = l_1 < l_2 < \dots < l_s \quad \text{e} \quad k_1 > k_2 > \dots > k_s = 0. \quad (2.54)$$

Demonstração.

Seja $g(x, \lambda) = r(u, \lambda)x$ pertencente a $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$. Aplicando a Z_2 -equivalência forte φ a g , temos que

$$\varphi(g) = S(x, \lambda)g(X(x, \lambda), \lambda). \quad (2.55)$$

Podemos escrever $S(x, \lambda) = a(u, \lambda)$ e $X(x, \lambda) = b(u, \lambda)x$, onde $a(0, 0) > 0$, $b(0, 0) > 0$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \varphi(g) &= S(x, \lambda)g(X(x, \lambda), \lambda) \\ &= a(u, \lambda)g(b(u, \lambda)x, \lambda) \\ &= a(u, \lambda)r((b(u, \lambda)x)^2, \lambda)b(u, \lambda)x \\ &= a(u, \lambda)r(b^2(u, \lambda)x^2, \lambda)b(u, \lambda)x \\ &= a(u, \lambda)r(b^2(u, \lambda)u, \lambda)b(u, \lambda)x \\ &= a(u, \lambda)r(U, \lambda)b(u, \lambda)x, \end{aligned}$$

onde $U = X^2(x, \lambda) = b^2(u, \lambda)u$.

Em particular, o submódulo $\langle u^k\lambda^l \rangle \cdot \{x\}$ é intrínseco em $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$, pois $u^k\lambda^l x$ é levado pela Z_2 -equivalência forte φ em

$$\begin{aligned} \varphi(u^k\lambda^l x) &= a(u, \lambda)(b^2(u, \lambda)u)^k\lambda^l b(u, \lambda)x \\ &= a(u, \lambda)(b^{2k}(u, \lambda)u^k\lambda^l b(u, \lambda)x) \\ &= a(u, \lambda)b^{2k+1}(u, \lambda)u^k\lambda^l x, \end{aligned}$$

que pertence a $\langle u^k\lambda^l \rangle \cdot \{x\}$.

Como a soma de $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ -submódulos intrínsecos é um submódulo intrínseco, segue que $\vec{\mathcal{J}} = \langle u^{k_1}\lambda^{l_1}, \dots, u^{k_s}\lambda^{l_s} \rangle \cdot \{x\}$ é um submódulo intrínseco de $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$.

A recíproca desse resultado segue da Proposição (2.4.2), que afirma que todo $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ -submódulo intrínseco de codimensão finita é escrito na forma $\vec{\mathcal{J}} = \langle u^{k_1}\lambda^{l_1}, \dots, u^{k_s}\lambda^{l_s} \rangle \cdot \{x\}$.

As desigualdades em (2.54) são para evitar redundância entre os geradores de $\vec{\mathcal{J}}$. Por exemplo, se tivermos dois geradores $u^{k_1}\lambda^{l_1}x$ e $u^{k_2}\lambda^{l_2}x$, onde $k_2 \geq k_1$ e $l_2 \geq l_1$, podemos usar o item (ii) da proposição (2.1.2) para simplificar o gerador $u^{k_2}\lambda^{l_2}x$.

Justificamos a igualdade $k_s = 0$.

Seja $\vec{\mathcal{J}} = \langle u^{k_1} \lambda^{l_1}, \dots, u^{k_s} \lambda^{l_s} \rangle \cdot \{x\}$, onde $k_i > 0$ para todo $1 \leq i \leq s$. Então, para cada inteiro positivo k , $\lambda^k x \notin \vec{\mathcal{J}}$.

Logo, $\mathcal{M}_{u,\lambda}^k \cdot \{x\} \not\subset \vec{\mathcal{J}}$ para todo $k > 0$ e, portanto, segue pelo item (iv) da Proposição (2.1.2) que a codimensão de $\vec{\mathcal{J}}$ é infinita. Isto é uma contradição, já que por hipótese $\vec{\mathcal{J}}$ tem codimensão finita.

Portanto, concluímos que $k_s = 0$.

A igualdade $l_1 = 0$ verifica-se analogamente. ■

Definição 2.4.1 Seja $V \subset \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ um subespaço vetorial. A parte intrínseca de V é dada por

$$\text{Itr}V = \sum \{ \text{submódulos intrínsecos de } \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2) \text{ contidos em } V \}.$$

Podemos também caracterizar $\text{Itr}V$ como sendo o maior $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ -submódulo intrínseco de $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ contido em V .

Em termos da representação de submódulos que estamos utilizando, temos que

$$\text{Itr} \vec{\mathcal{J}} = (\text{Itr} \mathcal{J}) \cdot \{x\},$$

onde $\text{Itr} \mathcal{J}$ é determinado em $\mathcal{E}_{u,\lambda}$.

2.5 Termos de Ordem Alta

Seja $h \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ um problema de bifurcação. O germe $p \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ é de ordem alta com relação a h se $g + p$ é Z_2 -fortemente equivalente a h , para todo g Z_2 -fortemente equivalente a h , isto é,

$$\mathcal{P}(h, Z_2) = \{p \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2) \mid g \pm p \sim_f h, \forall g \sim_f h\}.$$

O Problema do Reconhecimento para g significa caracterizar explicitamente os problemas de bifurcação que são Z_2 -fortemente equivalentes a h . Por definição, os germes p não fazem parte da solução do Problema do Reconhecimento.

Os termos de ordem alta também podem ser definidos pela seguinte condição: $p \in \mathcal{P}(h, Z_2)$ se para cada $g \sim_f h$, e para todo $t \in \mathbb{R}$, então $RT\mathcal{K}_\lambda^f(g + tp, Z_2) = RT\mathcal{K}_\lambda^f(g, Z_2)$.

Segue do Teorema (2.3.1) que se $p \in \mathcal{P}(h, Z_2)$ e se g é Z_2 -fortemente equivalente a h , então $g + p$ é Z_2 -fortemente equivalente a g .

Proposição 2.5.1 $\mathcal{P}(h, Z_2)$ é um $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ -submódulo intrínseco de $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$.

Demonstração. Ver [2], pág. 205. ■

Teorema 2.5.1 Seja $h \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ tal que h tem Z_2 -codimensão finita. Então,

$$\text{Itr}\{RT\mathcal{U}\mathcal{K}_\lambda^f(h, Z_2)\} \subset \mathcal{P}(h, Z_2).$$

Demonstração. Ver [4], pág. 108. ■

2.6 Teoria dos Desdobramentos Z_2 -equivariantes

Seja $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ um problema de bifurcação. A aplicação $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ é um Z_2 -desdobramento com k -parâmetros $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ se

$$G(x, \lambda, 0) = g(x, \lambda), \quad (2.56)$$

$$G(-x, \lambda, \alpha) = -G(x, \lambda, \alpha). \quad (2.57)$$

Definição 2.6.1

(i) Sejam $G(x, \lambda, \alpha)$ um Z_2 -desdobramento com l -parâmetros e $H(x, \lambda, \beta)$ com k -parâmetros de $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$. O desdobramento H fatora-se através de G se

$$H(x, \lambda, \beta) = S(x, \lambda, \beta)G(X(x, \lambda, \beta), \Lambda(\lambda, \beta), A(\beta)), \quad (2.58)$$

onde

$$S(x, \lambda, 0) = 1,$$

$$S(-x, \lambda, \beta) = S(x, \lambda, \beta),$$

$$X(x, \lambda, 0) = x,$$

$$X(-x, \lambda, \beta) = -X(x, \lambda, \beta),$$

$$\Lambda(\lambda, 0) = \lambda,$$

$$A(\beta) = (A_1(\beta), \dots, A_k(\beta)),$$

$$A(0) = 0.$$

(ii) Um Z_2 -desdobramento G de g é um Z_2 -desdobramento versal se todo Z_2 -desdobramento H de g fatora-se através de G .

(iii) Um Z_2 -desdobramento versal G de g é miniversal se G depende de um número mínimo de parâmetros. Este número mínimo de parâmetros é a Z_2 -codimensão estendida de g que definimos anteriormente.

Teorema 2.6.1 Sejam $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ e G um Z_2 -desdobramento com k -parâmetros de g . Então, G é um Z_2 -desdobramento versal de g se, e somente se,

$$\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2) = T_e \mathcal{K}_\lambda(g, Z_2) + \mathbb{R} \cdot \{G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_k}\}. \quad (2.59)$$

Demonstração. Ver [1], pág 259. ■

Corolário 2.6.1 Sejam $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ e $\mathbb{W} \subset \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ um subespaço vetorial tal que

$$\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2) = T_e \mathcal{K}_\lambda(g, Z_2) \oplus \mathbb{W}.$$

Se $\{p_1(x, \lambda), \dots, p_k(x, \lambda)\}$ uma base para $\mathbb{W}$, então

$$G(x, \lambda, \alpha) = g(x, \lambda) + \sum_{i=1}^k \alpha_i p_i(x, \lambda)$$

é um Z_2 -desdobramento miniversal de g .

Demonstração. Segue diretamente do Teorema (2.6.1). ■

2.7 Classificação dos Problemas de Bifurcação Z_2 -equivariantes

O Teorema (2.7.1) a seguir resolve o problema do reconhecimento para os problemas de bifurcação Z_2 -equivariantes em uma variável padrão e um parâmetro de bifurcação de codimensão menor ou igual a três. O Problema do Reconhecimento estabelece quando um germe $g \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ é Z_2 -fortemente equivalente à uma forma normal dada. Resolver este problema significa explicitar um número finito de igualdades e desigualdades polinomiais a serem satisfeitas pelos coeficientes de Taylor dos elementos da classe das Z_2 -equivalências fortes. Esta classificação encontra-se em [1], pág. 263.

No Teorema a seguir, **todas as derivadas são calculadas na origem** e como todo submódulo de $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ é da forma $\mathcal{J} \cdot \{x\}$ realizamos os cálculos apenas com $\mathcal{J}$.

Os coeficientes ϵ_i , δ_i , $i = 1, \dots, 4$ e σ são os sinais das respectivas derivadas listadas na tabela (2.1).

Teorema 2.7.1 (Teorema de Classificação) Seja $g(x, \lambda) = p(u, \lambda)x \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ um problema de bifurcação. Se $\text{cod}_{Z_2} g \leq 3$, então g é Z_2 -fortemente equivalente a uma das formas normais dadas na tabela (2.1) se, e somente se, g satisfaz as respectivas condições de definição.

Tabela 2.1: Formas de Classificação

Formas Normais

$$\begin{aligned} h_1(x, \lambda) &= (\epsilon_1 u + \delta_1 \lambda)x, \\ h_2(x, \lambda) &= (\epsilon_1 u + \delta_2 \lambda^2)x, \\ h_3(x, \lambda) &= (\epsilon_2 u^2 + \delta_1 \lambda)x, \\ h_4(x, \lambda) &= (\epsilon_1 u + \delta_3 \lambda^3)x, \\ h_5(x, \lambda) &= (\epsilon_3 u^3 + \delta_1 \lambda)x, \\ h_6(x, \lambda) &= (\epsilon_1 u + \delta_4 \lambda^4)x, \\ h_7(x, \lambda) &= (\epsilon_4 u^4 + \delta_1 \lambda)x, \\ h_8(x, \lambda) &= (\epsilon_2 u^2 + 2mu\lambda + \delta_2 \lambda^2)x, \\ h_9(x, \lambda) &= (\delta_2 u^2 + 2\sigma u\lambda + \delta_2 \lambda^2 + \delta_3 \lambda^3)x, \\ h_{10}(x, \lambda) &= (\epsilon_2 u^2 + 2\sigma \lambda u + \delta_3 \lambda^3)x, \\ h_{11}(x, \lambda) &= (\epsilon_3 u^3 + 2\sigma \lambda u + \delta_2 \lambda^2)x. \end{aligned}$$

Forma Normal	Condições de Definição	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_4	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	σ	Modal	Termos Desd.
h_1	$p_u, p_\lambda \neq 0$	p_u	p_λ									
h_2	$p_\lambda = 0$ $p_u, p_{\lambda\lambda} \neq 0$	p_u					$p_{\lambda\lambda}$					x
h_3	$p_u = 0$ $p_{uu}, p_\lambda \neq 0$		p_{uu}			p_λ						ux
h_4	$p_\lambda, p_{\lambda\lambda} = 0$ $p_u, p_{\lambda\lambda\lambda} \neq 0$	p_u						$p_{\lambda\lambda\lambda}$				x λx
h_5	$p_u, p_{uuu} \neq 0$ $p_{uu}, p_\lambda \neq 0$			p_{uuu}		p_λ						ux u^2x
h_6	$p_\lambda, p_{\lambda\lambda}, p_{\lambda\lambda\lambda} = 0$ $p_{\lambda\lambda\lambda\lambda}, p_u \neq 0$	p_u						$p_{\lambda\lambda\lambda\lambda}$				x λx λ^2x
h_7	$p_u, p_{uu}, p_{uuu} = 0$ $p_\lambda, p_{uuuu} \neq 0$				p_{uuuu}	p_λ						ux u^2x u^3x
h_8	$p_u, p_\lambda = 0$ $p_{\lambda\lambda}, p_{uu},$ $p_{uu}p_{\lambda\lambda} - p_{u\lambda}^2 \neq 0$		p_{uu}				$p_{\lambda\lambda}$			$m = \frac{p_{u\lambda}}{\sqrt{ p_{uu}p_{\lambda\lambda} }}$		x ux $u\lambda x$
h_9	$p_u, p_\lambda,$ $p_{uu}p_{\lambda\lambda} - p_{u\lambda}^2 = 0$ $p_{u\lambda}, p_{\lambda\lambda}, p_{\lambda\lambda\lambda} \neq 0$		$p_{\lambda\lambda}$					$p_{\lambda\lambda\lambda}$		$p_{u\lambda}$		x λ^2x ux
h_{10}	$p_u, p_\lambda, p_{\lambda\lambda} = 0$ $p_{u\lambda}, p_{uu}, p_{\lambda\lambda\lambda} \neq 0$						$p_{\lambda\lambda}$	$p_{\lambda\lambda\lambda}$		$p_{u\lambda}$		x λx λ^2x
h_{11}	$p_u, p_{uu}, p_\lambda = 0$ $p_{u\lambda}, p_{uuu}, p_{\lambda\lambda} \neq 0$			p_{uuu}		$p_{\lambda\lambda}$				$p_{u\lambda}$		x ux u^2x

Tabela 2.1: Teorema de Classificação



Demonstração.

Seja $g(x, \lambda) = p(u, \lambda)x$ um problema de bifurcação Z_2 -equivariante. Para encontrar um germe f Z_2 -fortemente equivalente a g tomamos uma Z_2 -equivalência forte genérica

$$f = S \cdot g \circ (X, I_\lambda).$$

Podemos fazer isto em duas etapas:

$$f' = g \circ (X, I_\lambda) \quad (2.60)$$

e, em seguida, multiplicar pelo germe S , ou seja,

$$f = S \cdot f'.$$

Assim, de (2.60), segue que

$$f'(x, \lambda) = p'(u, \lambda)x,$$

com

$$p'(u, \lambda) = p(a^2(u, \lambda)u, \lambda)a(u, \lambda).$$

Para facilitar as nossa contas escrevemos

$$p' = \tilde{p}a,$$

onde

$$\tilde{p}(u, \lambda) = p(a^2(u, \lambda)u, \lambda).$$

Fazendo o desenvolvimento de Taylor até a quarta ordem de p' em torno da origem e igualando ao desenvolvimento de Taylor de $\tilde{p}a$, obtemos

- $p'_0 = 0;$
- $p'_u = p_u a_0^3;$
- $p'_\lambda = p_\lambda a_0;$
- $p'_{uu} = 6p_u a_0^2 a_u + a_0^5 p_{uu};$
- $p'_{u\lambda} = p_\lambda a_u + 3p_u a_0^2 a_\lambda + a_0^3 p_{u\lambda};$
- $p'_{\lambda\lambda} = 2p_\lambda a_\lambda + p_{\lambda\lambda} a_0;$
- $p'_{uuu} = 9p_u a_0^2 a_{uu} + 15a_u a_0^4 p_{uu} + 18p_u a_0 a_u^2 + a_0^7 p_{uuu};$
- $p'_{uu\lambda} = p_\lambda a_{uu} + 6p_u a_0^2 a_{u\lambda} + 6a_u a_0^2 p_{u\lambda} + 12a_u p_u a_0 a_\lambda + 5a_\lambda a_0^4 p_{uu} + a_0^5 p_{uu\lambda};$

- $p'_{u\lambda\lambda} = 2p_\lambda a_{u\lambda} + 3p_u a_0^2 a_{\lambda\lambda} + p_{\lambda\lambda} a_u + 6a_\lambda a_0^2 p_{u\lambda} + 6p_u a_0 a_\lambda^2 + a_0^3 p_{u\lambda\lambda};$
- $p'_{\lambda\lambda\lambda} = 3p_\lambda a_{\lambda\lambda} + 3p_{\lambda\lambda} a_\lambda + p_{\lambda\lambda\lambda} a_0;$
- $p'_{uuuu} = 28a_0^6 a_u p_{uuu} + 72a_0 p_u a_u a_{uu} + 12p_u a_0^2 a_{uuu} + 30a_0^4 a_{uu} p_{uu} + 120a_0^3 a_u^2 p_{uu} + a_0^9 p_{uuuu} + 24p_u a_u^3;$
- $p'_{uuu\lambda} = 9a_{uu} a_0^2 p_{u\lambda} + p_\lambda a_{uuu} + 9p_u a_0^2 a_{uu\lambda} + 18a_{uu} p_u a_0 a_\lambda + 60a_u a_0^3 a_\lambda p_{uu} + 7a_\lambda a_0^6 p_{uuu} + a_0^7 p_{uuu\lambda} + 15a_{u\lambda} a_0^4 p_{uu} + 18a_0 a_u^2 p_{u\lambda} + 18p_u a_u^2 a_\lambda + 15a_u a_0^4 p_{uu\lambda} + 36a_{u\lambda} p_u a_0 a_u;$
- $p'_{uu\lambda\lambda} = 6p_u a_0^2 a_{u\lambda\lambda} + p_{\lambda\lambda} a_{uu} + 2p_\lambda a_{uu\lambda} + a_0^5 p_{uu\lambda\lambda} + 6a_u a_0^2 p_{u\lambda\lambda} + 24a_{u\lambda} p_u a_0 a_\lambda + 24a_u a_0 a_\lambda p_{u\lambda} + 12a_{\lambda\lambda} p_u a_0 a_u + 12a_{u\lambda} a_0^2 p_{u\lambda} + 5a_{\lambda\lambda} a_0^4 p_{uu} + 12a_u p_u a_\lambda^2 + 20a_0^3 a_\lambda^2 p_{uu} + 10a_\lambda a_0^4 p_{uu\lambda}$
- $p'_{u\lambda\lambda\lambda} = p_{\lambda\lambda\lambda} a_u + 9a_\lambda a_0^2 p_{u\lambda\lambda} + 6p_u a_\lambda^3 + 18a_0 a_\lambda^2 p_{u\lambda} + 18a_\lambda p_u a_0 a_{\lambda\lambda} + 9a_0^2 p_{u\lambda} a_{\lambda\lambda} + 3p_u a_0^2 a_{\lambda\lambda\lambda} + p_{u\lambda\lambda\lambda} a_0^3 + 3p_{\lambda\lambda} a_{u\lambda} + 3p_\lambda a_{u\lambda\lambda};$
- $p'_{\lambda\lambda\lambda\lambda} = p_{\lambda\lambda\lambda\lambda} a_0 + 4p_\lambda a_{\lambda\lambda\lambda} + 6p_{\lambda\lambda} a_{\lambda\lambda} + 4p_{\lambda\lambda\lambda} a_\lambda.$

Assim, para obtermos o resultado final $f(x, \lambda) = p''(u, \lambda)x$, resta-nos multiplicar a expressão $f'(x, \lambda) = p'(u, \lambda)x$ por $S(x, \lambda) = s(u, \lambda)$, onde $s \in \mathcal{E}_{u,\lambda}$, ou seja,

$$f(x, \lambda) = S(x, \lambda)f'(x, \lambda) = s(u, \lambda)p'(u, \lambda)x.$$

Logo, $f(x, \lambda) = p''(u, \lambda)x$, onde

$$p''(u, \lambda) = s(u, \lambda)p'(u, \lambda). \quad (2.61)$$

Podemos escrever o desenvolvimento de Taylor de s do seguinte modo

$$\begin{aligned} s &= s_0 + s_u u + s_\lambda \lambda + \frac{1}{2}(s_{uu} u^2 + 2s_{u\lambda} u\lambda + s_{\lambda\lambda} \lambda^2) + \frac{1}{6}(s_{uuu} u^3 + 3s_{uu\lambda} u^2 \lambda + 3s_{u\lambda\lambda} u\lambda^2 + \\ &+ s_{\lambda\lambda\lambda} \lambda^3) + \frac{1}{24}(s_{uuuu} u^4 + 4s_{uuu\lambda} u^3 \lambda + 6s_{uu\lambda\lambda} u^2 \lambda^2 + 4s_{u\lambda\lambda\lambda} u\lambda^3 + s_{\lambda\lambda\lambda\lambda} \lambda^4) + \dots \end{aligned}$$

Novamente, fazendo o desenvolvimento de Taylor até a quarta ordem em torno da origem, em ambos os membros da expressão (2.61), obtemos

- $p''_0 = 0$;
- $p''_u = s_0 p'_u$;
- $p''_\lambda = s_0 p'_\lambda$;
- $p''_{uu} = s_0 p'_{uu} + 2s_u p'_u$;
- $p''_{u\lambda} = s_\lambda p'_u + s_u p'_\lambda + s_0 p'_{u\lambda}$;
- $p''_{\lambda\lambda} = 2s_\lambda p'_\lambda + s_0 p'_{\lambda\lambda}$;
- $p''_{uuu} = 3s_u p'_{uu} + 3s_{uu} p'_u + s_0 p'_{uuu}$;
- $p''_{uu\lambda} = s_\lambda p'_{uu} + 2s_u p'_{u\lambda} + 2s_{u\lambda} p'_u + s_{uu} p'_\lambda + s_0 p'_{uu\lambda}$;
- $p''_{u\lambda\lambda} = 2s_\lambda p'_{u\lambda} + s_u p'_{\lambda\lambda} + s_{\lambda\lambda} p'_u + 2s_{u\lambda} p'_\lambda + s_0 p'_{u\lambda\lambda}$;
- $p''_{\lambda\lambda\lambda} = 3s_\lambda p'_{\lambda\lambda} + 3s_{\lambda\lambda} p'_\lambda + s_0 p'_{\lambda\lambda\lambda}$;
- $p''_{uuuu} = s_0 p'_{uuuu} + 4s_u p'_{uuu} + 6s_{uu} p'_{uu} + 4s_{uuu} p'_u$;
- $p''_{uuu\lambda} = s_0 p'_{uuu\lambda} + 3s_{u\lambda} p'_{uu} + 3s_{uu} p'_{u\lambda} + s_\lambda p'_{uuu} + 3s_u p'_{uu\lambda} + 3s_{uu\lambda} p'_u + s_{uuu} p'_\lambda$;
- $p''_{uu\lambda\lambda} = s_{\lambda\lambda} p'_{uu} + 4s_{u\lambda} p'_{u\lambda} + s_{uu} p'_{\lambda\lambda} + 2s_{u\lambda\lambda} p'_u + 2s_{uu\lambda} p'_\lambda + s_0 p'_{uu\lambda\lambda} + 2s_\lambda p'_{uu\lambda} + 2s_u p'_{u\lambda\lambda}$;
- $p''_{u\lambda\lambda\lambda} = s_{\lambda\lambda\lambda} p'_u + 3s_{u\lambda\lambda} p'_\lambda + 3s_{\lambda\lambda} p'_{u\lambda} + 3s_{u\lambda} p'_{\lambda\lambda} + 3s_\lambda p'_{u\lambda\lambda} + s_u p'_{\lambda\lambda\lambda} + s_0 p'_{u\lambda\lambda\lambda}$;
- $p''_{\lambda\lambda\lambda\lambda} = 4s_\lambda p'_{\lambda\lambda\lambda} + 6s_{\lambda\lambda} p'_{\lambda\lambda} + 4s_{\lambda\lambda\lambda} p'_\lambda + s_0 p'_{\lambda\lambda\lambda\lambda}$.

Agora, substituindo os valores dos p' s nas expressões acima ficamos com

- $p''_0 = 0$;
- $p''_u = s_0 p_u a_0^3$;
- $p''_\lambda = s_0 p_\lambda a_0$;
- $p''_{uu} = s_0 (6p_u a_0^2 a_u + a_0^5 p_{uu}) + 2s_u p_u a_0^3$;
- $p''_{u\lambda} = s_\lambda p_u a_0^3 + s_u p_\lambda a_0 + s_0 (p_\lambda a_u + 3p_u a_0^2 a_\lambda + a_0^3 p_{u\lambda})$;
- $p''_{\lambda\lambda} = 2s_\lambda p_\lambda a_0 + s_0 (2p_\lambda a_\lambda + p_{\lambda\lambda} a_0)$;
- $p''_{uuu} = 3s_u (6p_u a_0^2 a_u + a_0^5 p_{uu}) + 3s_{uu} p_u a_0^3 + s_0 (9p_u a_0^2 a_{uu} + 15a_u a_0^4 p_{uu} + 18p_u a_0 a_u^2 + a_0^7 p_{uuu})$;
- $p''_{uu\lambda} = s_\lambda (6p_u a_0^2 a_u + a_0^5 p_{uu}) + 2s_u (p_\lambda a_u + 3p_u a_0^2 a_\lambda + a_0^3 p_{u\lambda}) + 2s_{u\lambda} p_u a_0^3 + s_{uu} p_\lambda a_0 + s_0 (p_\lambda a_{uu} + 6p_u a_0^2 a_{u\lambda} + 6a_u a_0^2 p_{u\lambda} + 12a_u p_u a_0 a_\lambda + 5a_\lambda a_0^4 p_{uu} + a_0^5 p_{uu\lambda})$;
- $p''_{u\lambda\lambda} = 2s_\lambda (p_\lambda a_u + 3p_u a_0^2 a_\lambda + a_0^3 p_{u\lambda}) + s_u (2p_\lambda a_\lambda + p_{\lambda\lambda} a_0) + s_{\lambda\lambda} p_u a_0^3 + 2s_{u\lambda} p_\lambda a_0 + s_0 (2p_\lambda a_{u\lambda} + 3p_u a_0^2 a_{\lambda\lambda} + p_{\lambda\lambda} a_u + 6a_\lambda a_0^2 p_{u\lambda} + 6p_u a_0 a_\lambda^2 + a_0^3 p_{u\lambda\lambda})$;
- $p''_{\lambda\lambda\lambda} = 3s_\lambda (2p_\lambda a_\lambda + p_{\lambda\lambda} a_0) + 3s_{\lambda\lambda} p_\lambda a_0 + s_0 (3p_\lambda a_{\lambda\lambda} + 3p_{\lambda\lambda} a_\lambda + p_{\lambda\lambda\lambda} a_0)$;

- $p''_{uuuu} = s_0(28a_0^6 a_u p_{uuu} + 72a_0 p_u a_u a_{uu} + 12p_u a_0^2 a_{uuu} + 30a_0^4 a_{uu} p_{uu} + 120a_0^3 a_u^2 p_{uu} + a_0^9 p_{uuuu} + 24p_u a_u^3) + 4s_u(9p_u a_0^2 a_{uu} + 15a_u a_0^4 p_{uu} + 18p_u a_0 a_u^2 + a_0^7 p_{uuu}) + 6s_{uu}(6p_u a_0^2 a_u + a_0^5 p_{uu}) + 4s_{uuu} p_u a_0^3$;
- $p''_{uuu\lambda} = s_0(9a_{uu} a_0^2 p_{u\lambda} + p_\lambda a_{uuu} + 9p_u a_0^2 a_{uu\lambda} + 18a_{uu} p_u a_0 a_\lambda + 60a_u a_0^3 a_\lambda p_{uu} + 7a_\lambda a_0^6 p_{uuu} + a_0^7 p_{uuu\lambda} + 15a_{u\lambda} a_0^4 p_{uu} + 18a_0 a_u^2 p_{u\lambda} + 18p_u a_u^2 a_\lambda + 15a_u a_0^4 p_{uu\lambda} + 36a_{u\lambda} p_u a_0 a_u) + 3s_{u\lambda}(6p_u a_0^2 a_u + a_0^5 p_{uu}) + 3s_{uu}(p_\lambda a_u + 3p_u a_0^2 a_\lambda + a_0^3 p_{u\lambda}) + s_\lambda(9p_u a_0^2 a_{uu} + 15a_u a_0^4 p_{uu} + 18p_u a_0 a_u^2 + a_0^7 p_{uuu}) + 3s_u(p_\lambda a_{uu} + 6p_u a_0^2 a_{u\lambda} + 6a_u a_0^2 p_{u\lambda} + 12a_u p_u a_0 a_\lambda + 5a_\lambda a_0^4 p_{uu} + a_0^5 p_{uu\lambda}) + 3s_{uu\lambda} p_u a_0^3 + s_{uuu} p_\lambda a_0$;
- $p''_{uu\lambda\lambda} = s_{\lambda\lambda}(6p_u a_0^2 a_u + a_0^5 p_{uu}) + 4s_{u\lambda}(p_\lambda a_u + 3p_u a_0^2 a_\lambda + a_0^3 p_{u\lambda}) + s_{uu}(2p_\lambda a_\lambda + p_{\lambda\lambda} a_0) + 2s_{\lambda\lambda} p_u a_0^3 + 2s_{uu\lambda} p_\lambda a_0 + s_0(6p_u a_0^2 a_{u\lambda\lambda} + p_{\lambda\lambda} a_{uu} + 2p_\lambda a_{uu\lambda} + a_0^5 p_{uu\lambda\lambda} + 6a_u a_0^2 p_{u\lambda\lambda} + 24a_{u\lambda} p_u a_0 a_\lambda + 24a_u a_0 a_\lambda p_{u\lambda} + 12a_{\lambda\lambda} p_u a_0 a_u + 12a_{u\lambda} a_0^2 p_{u\lambda} + 5a_{\lambda\lambda} a_0^4 p_{uu} + 12a_u p_u a_\lambda^2 + 20a_0^3 a_\lambda^2 p_{uu} + 10a_\lambda a_0^4 p_{uu\lambda}) + 2s_\lambda(p_\lambda a_{uu} + 6p_u a_0^2 a_{u\lambda} + 6a_u a_0^2 p_{u\lambda} + 12a_u p_u a_0 a_\lambda + 5a_\lambda a_0^4 p_{uu} + a_0^5 p_{uu\lambda}) + 2s_u(2p_\lambda a_{u\lambda} + 3p_u a_0^2 a_{\lambda\lambda} + p_{\lambda\lambda} a_u + 6a_\lambda a_0^2 p_{u\lambda} + 6p_u a_0 a_\lambda^2 + a_0^3 p_{u\lambda\lambda})$;
- $p''_{u\lambda\lambda\lambda} = s_{\lambda\lambda\lambda} p_u a_0^3 + 3s_{u\lambda\lambda} p_\lambda a_0 + 3s_{\lambda\lambda}(p_\lambda a_u + 3p_u a_0^2 a_\lambda + a_0^3 p_{u\lambda}) + 3s_{u\lambda}(2p_\lambda p_\lambda a_\lambda + p_{\lambda\lambda} a_0) + 3s_\lambda(2p_\lambda a_{u\lambda} + 3p_u a_0^2 a_{\lambda\lambda} + p_{\lambda\lambda} a_u + 6a_\lambda a_0^2 p_{u\lambda} + 6p_u a_0 a_\lambda^2 + a_0^3 p_{u\lambda\lambda}) + s_u(3p_\lambda a_{\lambda\lambda} + 3p_{\lambda\lambda} a_\lambda + p_{\lambda\lambda\lambda} a_0) + s_0(p_{\lambda\lambda\lambda} a_u + 9a_\lambda a_0^2 p_{u\lambda\lambda} + 6p_u a_\lambda^3 + 18a_0 a_\lambda^2 p_{u\lambda} + 18a_\lambda p_u a_0 a_{\lambda\lambda} + 9a_0^2 p_{u\lambda} a_{\lambda\lambda} + 3p_u a_0^2 a_{\lambda\lambda\lambda} + p_{u\lambda\lambda\lambda} a_0^3 + 3p_{\lambda\lambda} a_{u\lambda} + 3p_\lambda a_{u\lambda\lambda})$;
- $p''_{\lambda\lambda\lambda\lambda} = 4s_\lambda(3p_\lambda a_{\lambda\lambda} + 3p_{\lambda\lambda} a_\lambda + p_{\lambda\lambda\lambda} a_0) + 6s_{\lambda\lambda}(2p_\lambda a_\lambda + p_\lambda a_0) + 4s_{\lambda\lambda\lambda} p_\lambda a_0 + s_0(p_{\lambda\lambda\lambda\lambda} a_0 + 4p_\lambda a_{\lambda\lambda\lambda\lambda} + 6p_{\lambda\lambda} a_{\lambda\lambda} + 4p_{\lambda\lambda\lambda} a_\lambda)$.

As expressões acima, do desenvolvimento de Taylor de p'' , nos dão o germe equivalente a g , de forma genérica. Pela Z_2 -equivalência temos algumas condições sobre os coeficientes que aparecem nas expressões acima, ou seja, temos que $a_0 > 0$ e $s_0 > 0$.

Etapa 1. (Construção da Forma Normal h_1)

Para obter a forma normal h_1 , consideramos

$$(a) p''_u = \pm 1 \Rightarrow p_u a_0^3 s_0 = \pm 1 \Rightarrow |p_u| a_0^3 s_0 = 1;$$

$$(b) p''_\lambda = \pm 1 \Rightarrow p_\lambda a_0 s_0 = \pm 1 \Rightarrow |p_\lambda| a_0 s_0 = 1.$$

Resolvendo estas equações, obtemos

$$(a) s_0 = \frac{1}{|p_u| a_0^3};$$

$$(b) a_0 = \frac{1}{|p_\lambda| s_0}.$$

Substituindo os valores acima nas expressões de p''_u e p''_λ , concluímos que

$$(a) p''_u = \frac{p_u}{|p_u|} = \text{sin}(\alpha) = \epsilon_1;$$

$$(b) p''_\lambda = \frac{p_\lambda}{|p_\lambda|} = \text{sin}(\beta) = \delta_1.$$

Resta-nos agora mostrar a razão pela qual os termos de ordem maior ou igual a dois não aparecem na forma normal h_1 . A justificativa é que estes termos são de ordem alta para o problema de bifurcação h_1 podendo assim, serem desprezados.

O Z_2 -Espaço Tangente Restrito da forma normal h_1 é dado por

$$\begin{aligned} RTK_\lambda^f(h_1, Z_2) &= \langle \epsilon_1 u + \delta_1 \lambda, u(\epsilon_1 u + \delta_1 \lambda)_u \rangle_{\mathcal{E}_{u,\lambda}} \cdot \{x\} \\ &= \langle u, \lambda \rangle_{\mathcal{E}_{u,\lambda}} \cdot \{x\}. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{M}_{u,\lambda} = \langle u, \lambda \rangle_{\mathcal{E}_{u,\lambda}}$, temos que

$$\mathcal{M}_{u,\lambda} RTK_\lambda^f(h_1, Z_2) = \mathcal{M}_{u,\lambda}^2 \cdot \{x\}.$$

Segue pela Proposição (2.4.3), que $\mathcal{M}_{u,\lambda} RTK_\lambda^f(h_1, Z_2)$ é um $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ -submódulo intrínseco de $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$.

Assim sendo,

$$\begin{aligned} \text{Itr}\{\mathcal{M}_{u,\lambda} RTK_\lambda^f(h_1, Z_2)\} &= \mathcal{M}_{u,\lambda} RTK_\lambda^f(h_1, Z_2) \\ &= \mathcal{M}_{u,\lambda}^2 \cdot \{x\}. \end{aligned}$$

Por (2.17), $\mathcal{M}_{u,\lambda} RTK_\lambda^f(h_1, Z_2) = RTUK_\lambda^f(h_1, Z_2)$, o que implica que

$$\text{Itr}\{RTUK_\lambda^f(h_1, Z_2)\} = \mathcal{M}_{u,\lambda}^2 \cdot \{x\}.$$

Logo, pelo Teorema (2.5.1),

$$\mathcal{M}_{u,\lambda}^2 \cdot \{x\} \subset \mathcal{P}(h_1, Z_2).$$

Etapa 2. (Cálculo da $\text{cod}_{Z_2} h_1$)

Por definição, temos que

$$\text{cod}_{Z_2} h_1 = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)}{T_e \mathcal{K}_\lambda(h_1, Z_2)}.$$

Como $T_e \mathcal{K}_\lambda(h_1, Z_2) = RTUK_\lambda^f(h_1, Z_2) + \langle p_\lambda \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \cdot \{x\}$, segue que

$$\begin{aligned} T_e \mathcal{K}_\lambda(h_1, Z_2) &= \langle u, \lambda \rangle_{\mathcal{E}_{u,\lambda}} \cdot \{x\} + \langle \delta_1 \rangle_{\mathcal{E}_\lambda} \cdot \{x\} \\ &= \mathcal{E}_{u,\lambda} \cdot \{x\}. \end{aligned}$$

Assim sendo,

$$NK_\lambda(h_1, Z_2) = \frac{\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)}{T_e \mathcal{K}_\lambda(h_1, Z_2)} = \frac{\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)}{\mathcal{E}_{u,\lambda} \cdot \{x\}} = \emptyset.$$

Dessa forma,

$$\text{cod}_{Z_2} h_1 = \dim_{\mathbb{R}} NK_\lambda(h_1, Z_2) = 0.$$

Logo, pelo Corolário (2.6.1), concluímos que o Z_2 -desdobramento miniversal de h_1 é dado por

$$H_1(x, \lambda) = (\epsilon_1 u + \delta_1 \lambda)x.$$

Portanto, todos os problemas de bifurcação Z_2 -equivariantes, $g(x, \lambda) = p(u, \lambda)x$, satisfazendo as condições $p_u \neq 0$ e $p_\lambda \neq 0$ da tabela 2.1 são Z_2 -fortemente equivalentes à forma normal h_1 .

Para os casos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10 e 11 seguimos o método clássico descrito acima com as respectivas condições de definição e omitiremos os cálculos. Para o caso 8, repetiremos os cálculos para enfatizar a existência do parâmetro modal m . Os detalhes para a construção de cada forma normal foi obtido com o auxílio do MAPLE e o programa usado encontra-se no Apêndice A.

Etapla 1. (Construção de Forma Normal h_8)

Sejam

$$p''_{uu} = a_0^5 p_{uu} s_0,$$

$$p''_{u\lambda} = a_0^3 p_{u\lambda} s_0,$$

$$p''_{\lambda\lambda} = a_0 p_{\lambda\lambda} s_0.$$

Para obter a forma normal h_8 , precisamos

$$(a) p''_{uu} = a_0^5 p_{uu} s_0 = \pm 1 \Rightarrow a_0^5 |p_{uu}| s_0 = 1;$$

$$(b) p''_{\lambda\lambda} = a_0 p_{\lambda\lambda} s_0 = \pm 1 \Rightarrow a_0 |p_{\lambda\lambda}| s_0 = 1.$$

Resolvendo estas equações, obtemos

$$(a) s_0 = \frac{1}{|p_{uu}| a_0^5};$$

$$(b) a_0 = \frac{1}{|p_{\lambda\lambda}| s_0}.$$

Substituindo os valores acima nas expressões de p''_{uu} e $p''_{\lambda\lambda}$, concluímos que

$$(a) p''_{uu} = \frac{p_{uu}}{|p_{uu}|} = \text{sinal}(p_{uu}) = \epsilon_2;$$

$$(b) p''_{\lambda\lambda} = \frac{p_{\lambda\lambda}}{|p_{\lambda\lambda}|} = \text{sinal}(p_{\lambda\lambda}) = \delta_2.$$

Por outro lado, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a_0^5 |p_{uu}| s_0 = 1 \\ a_0 |p_{\lambda\lambda}| s_0 = 1, \end{cases}$$

temos

$$\begin{cases} a_0 &= \frac{|p_{\lambda\lambda}|^{\frac{1}{4}}}{|p_{uu}|^{\frac{1}{4}}} \\ s_0 &= \frac{|p_{uu}|^{\frac{1}{4}}}{|p_{\lambda\lambda}|^{\frac{3}{4}}}. \end{cases}$$

Substituindo os valores acima na expressão de $p''_{u\lambda}$, obtemos

$$p''_{u\lambda} = \frac{p_{u\lambda}}{\sqrt{|p_{uu}p_{\lambda\lambda}|}} = m,$$

que é o parâmetro modal para a forma normal h_8 e obtemos a condição $(m^2 - \epsilon_2\delta_2) \neq 0$.

O Z_2 -Espaço Tangente Restrito da forma normal h_8 é dado por

$$\begin{aligned} RTK^f_\lambda(h_8, Z_2) &= \langle \epsilon_2 u^2 + 2m\lambda u + \delta_2 \lambda^2, u(\epsilon_2 u^2 + 2m\lambda u + \delta_2 \lambda^2)_u \rangle_{\mathcal{E}_{u,\lambda}} \cdot \{x\} \\ &= \langle \epsilon_2 u^2 - \delta_2 \lambda^2, \epsilon_2 u^2 + m\lambda u \rangle_{\mathcal{E}_{u,\lambda}} \cdot \{x\}. \end{aligned}$$

Afirmamos que

$$RTK^f_\lambda(h_8, Z_2) = (\mathcal{M}^3_{u,\lambda} \oplus \mathbb{R} \cdot \{\epsilon_2 u^2 - \delta_2 \lambda^2, \epsilon_2 u^2 + m\lambda u\}) \cdot \{x\}.$$

Mostramos que $\mathcal{M}^3_{u,\lambda} \cdot \{x\} \subset RTK^f_\lambda(h_8, Z_2)$, considerando a seguinte tabela de geradores

geradores	u^3	$u^2\lambda$	$u\lambda^2$	λ^3
$\epsilon_2 u^3 - \delta_2 \lambda^2 u$	ϵ_2	0	$-\delta_2$	0
$\epsilon_2 u^3 + m\lambda u^2$	ϵ_2	m	0	0
$\epsilon_2 u^2 \lambda - \delta_2 \lambda^3$	0	ϵ_2	0	$-\delta_2$
$\epsilon_2 u^2 \lambda + m\lambda^2 u$	0	ϵ_2	m	0

A matriz 4×4 dos coeficientes acima é invertível, pois

$$\det \begin{pmatrix} \epsilon_2 & 0 & -\delta_2 & 0 \\ \epsilon_2 & m & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 & -\delta_2 \\ 0 & \epsilon_2 & m & 0 \end{pmatrix} = \epsilon_2 \delta_2 (m^2 - \epsilon_2 \delta_2) \neq 0.$$

Além disso, como $\mathcal{M}_{u,\lambda} = \langle u, \lambda \rangle_{\mathcal{E}_{u,\lambda}}$, temos que

$$\mathcal{M}_{u,\lambda} RTK^f_\lambda(h_8, Z_2) = \mathcal{M}^3_{u,\lambda} \cdot \{x\}.$$

Segue pela Proposição (2.4.3), que $\mathcal{M}_{u,\lambda}RT\mathcal{K}_\lambda^f(h_8, Z_2)$ é um $\mathcal{E}_{u,\lambda}$ -submódulo intrínseco de $\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)$ e, portanto,

$$\begin{aligned}\text{Itr}\{\mathcal{M}_{u,\lambda}RT\mathcal{K}_\lambda^f(h_8, Z_2)\} &= \mathcal{M}_{u,\lambda}RT\mathcal{K}_\lambda^f(h_8, Z_2) \\ &= \mathcal{M}_{u,\lambda}^3 \cdot \{x\}.\end{aligned}$$

Por (2.17), temos que $\mathcal{M}_{u,\lambda}RT\mathcal{K}_\lambda^f(h_8, Z_2) = RT\mathcal{U}\mathcal{K}_\lambda^f(h_8, Z_2)$, o que implica que

$$\text{Itr}\{RT\mathcal{U}\mathcal{K}_\lambda^f(h_8, Z_2)\} = \mathcal{M}_{u,\lambda}^3 \cdot \{x\}.$$

Portanto,

$$\mathcal{M}_{u,\lambda}^3 \cdot \{x\} \subset \mathcal{P}(h_8, Z_2).$$

Etapa 2. (Cálculo da $\text{cod}_{Z_2}h_8$)

Por definição, temos

$$\text{cod}_{Z_2}h_8 = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)}{T_e\mathcal{K}_\lambda(h_8, Z_2)}.$$

Como $T_e\mathcal{K}_\lambda(h_8, Z_2) = RT\mathcal{K}_\lambda^f(h_8, Z_2) + \mathcal{E}_\lambda\{p_\lambda\} \cdot \{x\}$, segue que

$$\begin{aligned}T_e\mathcal{K}_\lambda(h_8, Z_2) &= (\mathcal{M}_{u,\lambda}^3 \oplus \mathbb{R} \cdot \{\epsilon_2 u^2 - \delta_2 \lambda^2, \epsilon_2 u^2 + m\lambda u\}) \cdot \{x\} + \mathcal{E}_\lambda\{2mu + 2\delta_2 \lambda\} \cdot \{x\} \\ &= (\mathcal{M}_{u,\lambda}^3 \oplus \mathbb{R} \cdot \{\epsilon_2 u^2 - \delta_2 \lambda^2, \epsilon_2 u^2 + m\lambda u, mu + \delta_2 \lambda\}) \cdot \{x\}.\end{aligned}$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}NK_\lambda(h_8, Z_2) &= \frac{\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)}{T_e\mathcal{K}_\lambda(h_8, Z_2)} = \frac{\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)}{(\mathcal{M}_{u,\lambda}^3 \oplus \mathbb{R} \cdot \{\epsilon_2 u^2 - \delta_2 \lambda^2, \epsilon_2 u^2 + m\lambda u, mu + \delta_2 \lambda\}) \cdot \{x\}} \\ &= \mathbb{R} \cdot \{1, u, \lambda u\} \cdot \{x\}.\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\text{cod}_{Z_2}h_8 = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\vec{\mathcal{E}}_{x,\lambda}(Z_2)}{T_e\mathcal{K}_\lambda(h_8, Z_2)} = 3.$$

Logo, pelo Corolário (2.6.1), concluímos que o Z_2 -desdobramento miniversal de h_8 é dado por

$$\begin{aligned}H_8(x, \lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= (\epsilon_2 u^2 + 2m\lambda u + \delta_2 \lambda^2 + \alpha_1 + \alpha_2 u + \alpha_3 \lambda u)x \\ &= (\epsilon_2 u^2 + 2m\lambda u + \delta_2 \lambda^2 + \alpha_1 + \alpha_2 u)x.\end{aligned}$$

■

Capítulo 3

Formulação por Caminhos

3.1 Formulação por Caminhos para problemas de bifurcação de corank 1 sem simetria

O nosso objetivo é obter a classificação dos germes Z_2 -equivariantes em uma variável padrão e um parâmetro de bifurcação do Capítulo 2, usando a Formulação por Caminhos. Trata-se de um método alternativo, prático e organizado para classificar germes de problemas de bifurcação. Além disso, mostramos como obter os resultados Z_2 -simétricos a partir dos correspondentes resultados sem simetria.

Observamos que a $\mathcal{K}_\lambda$ -equivalência têm as mesmas características da $\mathcal{K}_\lambda(Z_2)$ -equivalência, sendo que neste caso não há simetrias nos problemas. Quando $\lambda = 0$, o grupo de equivalências $\mathcal{K}_\lambda$ simplifica-se no grupo $\mathcal{K}$, o grupo das equivalências de contato sem parâmetro.

Dado $f \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$, o *centro organizador* de f é $f_0 \in \mathcal{E}_x$ definido por $f_0(x) = f(x, 0)$.

Teorema 3.1.1 A classificação dos centros organizadores em $\mathcal{E}_x$ de codimensão finita consiste de germes polinomiais $\epsilon_n x^{n+1}$, $n \geq 1$, $\epsilon_n^2 = 1$, de codimensão n e $\mathcal{K}$ -desdobramento miniversal dado por

$$F_n(x, \alpha) = \epsilon_n x^{n+1} + \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{n-i}.$$

Demonstração. Ver [17]. ■

Tais germes são denotados por A_n .

Consideramos um problema de bifurcação $f \in \mathcal{E}_{x,\lambda}$ como um desdobramento de f_0 com parâmetro λ . Da Teoria de Desdobramentos, segue que

$$f(x, \lambda) = S(x, \lambda) F_n(X(x, \lambda), \bar{\alpha}(\lambda)), \quad (3.1)$$

onde $\bar{\alpha} : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ é o caminho associado ao problema de bifurcação f .

Observamos que $\bar{\alpha}$ é uma aplicação do espaço de parâmetros de bifurcação no espaço dos parâmetros de desdobramento. O espaço de todos os caminhos é denotado por

$$\tilde{\mathcal{P}}_\lambda = \{\bar{\alpha} : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)\}.$$

Assim, $\bar{\alpha}$ induz um novo problema de bifurcação definido por

$$\bar{\alpha}^* F_n(x, \lambda) = F_n(x, \bar{\alpha}(\lambda)). \quad (3.2)$$

Chamamos $\bar{\alpha}^*$ de aplicação pull-back pelo caminho $\bar{\alpha}$.

Obtemos das expressões (3.1) e (3.2) que

$$\begin{aligned} f(x, \lambda) &= S(x, \lambda) F_n(X(x, \lambda), \bar{\alpha}(\lambda)) \\ &= S(x, \lambda) \bar{\alpha}^* F_n(X(x, \lambda), \lambda) \\ &= S(x, \lambda) \bar{\alpha}^* F_n(X(x, \lambda), I_\lambda(\lambda)), \end{aligned}$$

onde I_λ é a aplicação identidade.

Dessa forma, dizemos que f e $\bar{\alpha}^* F_n$ são $\mathcal{K}_\lambda$ -equivalentes com a equivalência (S, X, I_λ) .

Como F_n é um desdobramento miniversal do centro organizador f_0 , definimos o discriminante Δ_n de F_n como sendo

$$\Delta_n = \{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \text{ tal que } F_n(x, \alpha) = (F_n)_x(x, \alpha) = 0\}.$$

Tomando a aplicação $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e considerando a restrição $\pi_n : F_n^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$, temos que a imagem da projeção π_n dos pontos singulares de F_n , restrita ao conjunto $F_n^{-1}(0)$ é, justamente, o discriminante Δ_n de F_n .

O estudo qualitativo do conjunto de zeros dos problemas de bifurcação com mesmo centro organizador é obtido através do estudo dos caminhos associados e suas posições em relação ao discriminante Δ_n .

Definimos a equivalência entre dois caminhos com mesmo centro organizador da seguinte forma: $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \bar{\mathcal{P}}_\lambda$ são equivalentes se

$$\bar{\alpha}(\lambda) = H(\lambda, \bar{\beta}(\Lambda(\lambda))), \quad (3.3)$$

onde $\Lambda : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ é um difeomorfismo que preserva a orientação e $H : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma família λ -parametrizada de difeomorfismos locais sobre $\mathbb{R}^n$, tal que, $H_\alpha(0, 0)$ pertence ao conjunto das transformações lineares invertíveis de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ que possuem determinante positivo. Além disso, H preserva o discriminante Δ_n de F_n no sentido que $H(\lambda, \Delta_n) \subset \Delta_n$, para todo λ .

O grupo das equivalências de caminhos é denotado por $\mathcal{K}_{\Delta_n}$. Este grupo atua no espaço $\bar{\mathcal{P}}_\lambda$ via (3.3)

É muito difícil descrever os difeomorfismos H ou mesmo impossível, mas os espaços tangentes a um caminho são determinados de maneira explícita: seja $\mathcal{I}(\Delta_n)$ o ideal dos germes que se anulam em Δ_n . O módulo dos campos de vetores tangentes à Δ_n , chamado $\text{Derlog}(\Delta_n)$, é dado por

$$\text{Derlog}(\Delta_n) = \{\xi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \xi \cdot \nabla g \in \mathcal{I}(\Delta_n), \forall g \in \mathcal{I}(\Delta_n)\}. \quad (3.4)$$

Este derlog é, também, chamado derlog geométrico. Para maiores detalhes, ver [11].

Definimos, agora, o conceito de derlog algébrico.

Consideramos germes analíticos quando necessário e, assim, a interpretação geométrica da Teoria de Singularidades pode ser utilizada. Dessa forma, trabalhamos no domínio complexo e tomamos as fatias reais dos nossos resultados.

Um campo de vetores $\xi : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *levantável sobre* π_n se existem campos de vetores $\eta : (\mathbb{R}^{1+n}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\tau : (\mathbb{R}^{1+n}, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que

$$(F_n)_x(x, \alpha)\eta(x, \alpha) + (F_n)_\alpha(x, \alpha)\xi(\alpha) = \tau(x, \alpha)F_n(x, \alpha).$$

Para a construção da teoria algébrica dos derlogs, definimos o grupo $\mathcal{K}_{\Delta_n}^*$ como sendo o subgrupo de $\mathcal{K}_{\Delta_n}$ formado por $\Lambda : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ que é um difeomorfismo que preserva orientação e $H : (\mathbb{R}^{1+n}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ uma família λ -parametrizada de difeomorfismos locais sobre $\mathbb{R}^n$ tal que $H_\alpha(0, 0)$ pertence à componente conexa da identidade e H levanta-se a uma família λ -parametrizada de difeomorfismos Z_2 -equivariantes $\Phi : (\mathbb{R}^{2+n}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{1+n}, 0)$ preservando $F_n^{-1}(0)$, $\Phi(F_n^{-1}(0), \lambda) \subset F_n^{-1}(0)$, para todo λ tal que $H \circ \pi_n = \pi_n \circ \Phi$, ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^{2+n}, 0) & \xrightarrow{\Phi} & (\mathbb{R}^{1+n}, 0) \\ \pi_n \times I_\lambda \downarrow & & \downarrow \pi_n \\ (\mathbb{R}^{1+n}, 0) & \xrightarrow{H} & (\mathbb{R}^n, 0), \end{array}$$

onde $\pi_n \times I_\lambda : (\mathbb{R}^{2+n}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{1+n}, 0)$ é definida por $(x, \lambda, \alpha) \mapsto (\lambda, \alpha)$. Observamos que via a projeção π_n , campos de vetores levantáveis preservam Δ_n , no sentido que $H(\lambda, \Delta_n) \subset \Delta_n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Dois caminhos são $\mathcal{K}_{\Delta_n}^*$ -equivalentes se satisfazem (3.3). O *derlog algébrico*, $\text{Derlog}^*(F_n)$, é o submódulo do $\text{Derlog}(\Delta_n)$ formado pelos *campos de vetores levantáveis sobre π_n* .

Em [14], um processo é dado para obter explicitamente os campos de vetores do $\text{Derlog}^*(F_n)$. Seja $\mathcal{J}(F_n)$ o ideal Jacobiano de $\mathcal{E}_{x,\alpha}$ gerado por $(F_n)_x$. Segue do Teorema de Preparação de Malgrange, (ver [2]), que o $\mathcal{E}_\alpha$ -módulo $\frac{\mathcal{E}_{x,\alpha}}{\mathcal{J}(F_n)}$ é finitamente gerado por $\{x^{n-i}\}_{i=1}^n$. Portanto, podemos encontrar $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n \in \mathcal{E}_\alpha$ tais que

$$x^{j-1}F_n(x, \alpha) = \sum_{i=1}^n a_{ij}(\alpha)x^{n-i} + p_j(x, \alpha)(F_n)_x(x, \alpha). \tag{3.5}$$

Para $j = 1, \dots, n$, os campos de vetores

$$\xi_j(\alpha) = (a_{1j}(\alpha), \dots, a_{nj}(\alpha)), \tag{3.6}$$

formam um conjunto de geradores para o $\mathcal{E}_\alpha$ -módulo $\text{Derlog}^*(F_n)$ e p_j é o seu levantamento. Neste caso, o derlog algébrico é um $\mathcal{E}_\alpha$ -módulo livre e coincide com o derlog geométrico. O espaço tangente que precisamos é o $\mathcal{E}_\lambda$ -módulo de $\vec{\mathcal{P}}_\lambda$ dado por

$$T_e\mathcal{K}_{\Delta_n}^*(\bar{\alpha}) = \mathcal{E}_\lambda < \bar{\alpha}_\lambda > + \bar{\alpha}^*(\text{Derlog}^*(F_n)), \tag{3.7}$$

chamado espaço tangente estendido ao caminho $\bar{\alpha}$, necessário para a Teoria dos Desdobramentos.

A codimensão de um caminho $\bar{\alpha}$ é definida por

$$\text{cod}_{\mathcal{K}_{\Delta_n}^*} \bar{\alpha} = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\vec{\mathcal{P}}_\lambda}{T_e\mathcal{K}_{\Delta_n}^*(\bar{\alpha})}. \tag{3.8}$$

Para a estimativa dos termos de ordem alta de $\vec{\mathcal{P}}_\lambda$, temos o espaço tangente unipotente a um caminho $\bar{\alpha}$ dado por

$$T\mathcal{U}\mathcal{K}_{\Delta_n}^*(\bar{\alpha}) = \mathcal{M}_\lambda^2 < \bar{\alpha}_\lambda > + \bar{\alpha}^*(\mathcal{U}\text{Derlog}^*(F_n)),$$

onde $\mathcal{U}\text{Derlog}^*(F_n) = \{\xi \in (\mathcal{E}_{\lambda,\alpha}\text{Derlog}^*(F_n)) \mid \xi_\alpha(0) \text{ é nilpotente}\}.$

3.2 Formulação por Caminhos para problemas de bifurcação de corank 1 com simetria do grupo Z_2

Considerando a ação do grupo Z_2 em $\mathbb{R}$ definida anteriormente, denotamos o conjunto dos germes Z_2 -invariantes em uma variável padrão por

$$\mathcal{E}_x(Z_2) = \{f \in \mathcal{E}_x \mid f(-x) = f(x)\}$$

e o correspondente conjunto dos germes Z_2 -equivariantes por

$$\vec{\mathcal{E}}_x(Z_2) = \{g \in \mathcal{E}_x \mid g(-x) = -g(x)\}.$$

Note que, $\mathcal{E}_x(Z_2) = \mathcal{E}_u$, onde $u = x^2$ e que $\vec{\mathcal{E}}_x(Z_2)$ é um $\mathcal{E}_x(Z_2)$ -módulo gerado por $g(x) = x$, isto é, $\vec{\mathcal{E}}_x(Z_2) = \mathcal{E}_u \cdot \{x\}$.

O conjunto dos centros organizadores $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ em $\mathcal{E}_x$, divide-se entre $\{A_{2n}\}_{n=1}^\infty$ em $\vec{\mathcal{E}}_x(Z_2)$ e $\{A_{2n-1}\}_{n=1}^\infty$ em $\mathcal{E}_x(Z_2)$.

Observamos que o grupo $\mathcal{K}(Z_2)$ é formado pelas equivalências (S, X) tais que $S \in \mathcal{E}_x(Z_2)$ e $X \in \vec{\mathcal{E}}_x(Z_2)$.

Proposição 3.2.1 Os centros organizadores simétricos de $\mathcal{K}(Z_2)$ -codimensão finita são

(i) $A_{2n} : \epsilon_n x^{2n+1}$, de $\mathcal{K}(Z_2)$ -desdobramento miniversal dado por

$$F_{2n}^{Z_2}(x, \beta) = \epsilon_n x^{2n+1} + \sum_{i=1}^n \beta_i x^{2(n-i)+1};$$

(ii) $A_{2n-1} : \epsilon_n x^{2n}$, de $\mathcal{K}(Z_2)$ -desdobramento miniversal dado por

$$F_{2n-1}^{Z_2}(x, \beta) = \epsilon_n x^{2n} + \sum_{i=1}^n \beta_i x^{2(n-i)}.$$

Ambos os casos tem $\mathcal{K}(Z_2)$ -codimensão n .

Demonstração. Segue do Teorema (2.7.1), fazendo $\lambda = 0$. ■

Os desdobramentos $F_{2n}^{Z_2}$ e $F_{2n-1}^{Z_2}$ estão relacionados com a mesma função invariante P_n , onde

$$P_n(u, \beta) = \epsilon_n u^n + \sum_{i=1}^n \beta_i u^{n-i} \text{ via } F_{2n}^{Z_2}(u, \beta) = P_n(u, \beta)x \text{ e } F_{2n-1}^{Z_2}(u, \beta) = P_n(u, \beta), u = x^2.$$

Seja $m = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. Então, $F_n^{Z_2}$ está relacionado com P_m para todo n .

Podemos observar que as teorias Z_2 -equivariantes e Z_2 -invariantes são equivalentes no seguinte sentido: todo germe $f \in \mathcal{E}_x$ pode ser identificado com algum $p \in \mathcal{E}_u$ via $f(x) = p(x^2)$. Analogamente, todo $g \in \vec{\mathcal{E}}_x(Z_2)$ pode ser identificado com algum $q \in \mathcal{E}_u$ via $g(x) = q(x^2)x$.

3.3 Derlogs Z_2 -simétricos

Separamos o parâmetro α de F_n em índices pares e ímpares:

$$\alpha = (\alpha^o, \alpha^e) = (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \dots, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \dots).$$

Definimos uma ação de Z_2 no espaço dos parâmetros de desdobramento α por

$$(-1)\alpha = (\alpha^o, -\alpha^e) = (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \dots, -\alpha_2, -\alpha_4, -\alpha_6, \dots). \quad (3.9)$$

Verificamos que Z_2 atua sobre F_n por

$$F_n(-x, \alpha^o, -\alpha^e) = (-1)^{n+1} F_n(x, \alpha^o, \alpha^e). \quad (3.10)$$

De fato.

Seja $F_n(x, \alpha) = \epsilon_n x^{n+1} + \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{n-i}$. Então,

$$\begin{aligned} F_n(x, -\alpha) &= F_n(-x, \alpha^o, -\alpha^e) \\ &= \epsilon_n (-x)^{n+1} + \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \alpha_i (-x)^{n-i} \\ &= \epsilon_n (-1)^{n+1} x^{n+1} + \sum_{i=1}^n (-1)^{n+1} \alpha_i x^{n-i} \\ &= (-1)^{n+1} (\epsilon_n x^{n+1} + \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{n-i}) \\ &= (-1)^{n+1} F_n(x, \alpha^o, \alpha^e) \\ &= (-1)^{n+1} F_n(x, \alpha). \end{aligned}$$

Como consequência, $F_n^{Z_2}$ é dado pela restrição de F_n ao $\text{Fix}(Z_2)$, onde

$$\begin{aligned} \text{Fix}(Z_2) &= \{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid (-1)\alpha = \alpha\} \\ &= \{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid (\alpha^o, -\alpha^e) = (\alpha^o, \alpha^e)\} \\ &= \{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid \alpha^e = 0\}. \end{aligned}$$

Mais especificamente, $F_n^{Z_2}(x, \beta) = F_n(x, \beta, 0)$, $\beta = \alpha^o$.

Lema 3.3.1 O discriminante $\Delta_n^{Z_2}$ é uma hipersuperfície redutível constituída de $\beta_m = 0$ e

$$\{\beta \mid \exists u \neq 0 \text{ tal que } P_m(u, \beta) = 0, (P_m)_u(u, \beta) = 0\}.$$

Demonstração.

O discriminante $\Delta_n^{Z_2}$ é o subconjunto dos parâmetros de desdobramento β , onde $F_n^{Z_2}(\cdot, \beta)$ tem um ponto singular. De (3.10) é claro que se $(\alpha^o, \alpha^e) \in \Delta_n$, então $(\alpha^o, -\alpha^e) \in \Delta_n$. Lembramos que as equações para Δ_n são $F_n = (F_n)_x = 0$. Neste caso, elas se escrevem na forma abaixo.

Se n é par, então $F_{2n}^{Z_2}(x, \beta) = P_m(u, \beta)x$ e as equações $F_{2n}^{Z_2}(x, \beta) = 0$ e $(F_{2n}^{Z_2})_x(x, \beta) = 0$ escrevem-se como $P_m(u, \beta)x = 0$ e $P_m(u, \beta) + 2u(P_m)_u(u, \beta) = 0$.

Se n é ímpar, então $F_{2n-1}^{Z_2}(x, \beta) = P_m(u, \beta)$ e obtemos $P_m(u, \beta) = 0$ e $x(P_m)_u(u, \beta) = 0$.

Temos que distinguir em dois casos. Quando $x = 0$ precisamos $P_m(0, \beta) = 0$, isto é, $\beta_m = 0$ e quando $x \neq 0$ temos que resolver as equações $P_m(u, \beta) = 0$ e $(P_m)_u(u, \beta) = 0$. ■

Definição 3.3.1 Um campo de vetores $\bar{\xi} : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ é levantável se existem campos vetoriais $\bar{v} : (\mathbb{R}^{1+m}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ Z_2 -equivariante e $\bar{\tau} : (\mathbb{R}^{1+m}, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ Z_2 -invariante tais que

$$(F_n^{Z_2})_x(x, \beta)\bar{v}(x, \beta) + \sum_{i=1}^m (F_n^{Z_2})_{\beta_i}(x, \beta)\bar{\xi}_i(\beta) = \bar{\tau}(x, \beta)F_n^{Z_2}(x, \beta).$$

Lema 3.3.2 Seja $m = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.

- (i) Se n é par, então os elementos $\{x^{2i+1}\}_{i=0}^{m-1}$ formam uma base livre do $\mathcal{E}_\beta$ -módulo $\frac{\vec{\mathcal{E}}_{x,\beta}(Z_2)}{\mathcal{J}(F_n^{Z_2})}$.
- (ii) Se n é ímpar, então os elementos $\{x^{2i}\}_{i=0}^{m-1}$ formam uma base livre do $\mathcal{E}_\beta$ -módulo $\frac{\mathcal{E}_{x,\beta}(Z_2)}{\mathcal{J}(F_n^{Z_2})}$.

Demonstração.

Usando o Corolário do Teorema de Preparação de Malgrange, (ver [2], pág. 244), é fácil verificar que $\{x^{2i+1}\}_{i=0}^{m-1}$ são geradores de $\frac{\vec{\mathcal{E}}_{x,\beta}(Z_2)}{\mathcal{J}(F_n^{Z_2})}$ e $\{x^{2i}\}_{i=0}^{m-1}$ são geradores de $\frac{\mathcal{E}_{x,\beta}(Z_2)}{\mathcal{J}(F_n^{Z_2})}$ sobre $\mathcal{E}_\beta$, pois eles formam uma $\mathbb{R}$ -base para o espaço quociente quando $\beta = 0$.

Recordamos que

$$F_n^{Z_2}(x, \beta) = P_m(u, \beta)x = (\epsilon_m u^m + \sum_{i=1}^m \beta_i u^{m-i})x.$$

Logo,

$$\mathcal{J}(F_n^{Z_2}) = \langle (2m+1)\epsilon_n u^m + (2m-1)\beta_1 u^{m-1} + (2m-3)\beta_2 u^{m-2} + \dots + 2\beta_{m-1}u \rangle \cdot \{x\}.$$

Os geradores $\{x^{2i+1}\}_{i=0}^{m-1}$ são livres.

De fato.

Seja $\sum_{i=0}^{m-1} \varphi_i(\beta)u^i \in \mathcal{J}(F_n^{Z_2})$, onde $\varphi_i \in \mathcal{E}_\beta$.

Assim,

$$\sum_{i=0}^{m-1} \varphi_i(\beta)u^i = h(u, \beta)((2m+1)\epsilon_n u^m + (2m-1)\beta_1 u^{m-1} + (2m-3)\beta_2 u^{m-2} + \dots + 2\beta_{m-1}u). \quad (3.11)$$

Derivando a igualdade (3.11) com relação a β_1 , obtemos

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \beta_1}(\beta) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta_1}(\beta)u + \dots + \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial \beta_1}(\beta)u^{m-1} =$$

$$\frac{\partial h}{\partial \beta_1}(u, \beta)((2m+1)\epsilon_n u^m + (2m-1)\beta_1 u^{m-1} + (2m-3)\beta_2 u^{m-2} + \dots + 2\beta_{m-1}u) +$$

$$+ h(u, \beta)(2m-1)u^{m-1}.$$

Calculando em $\beta = 0$,

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \beta_1}(0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta_1}(0)u + \dots + \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial \beta_1}(0)u^{m-1} = \frac{\partial h}{\partial \beta_0}(u, 0)(2m+1)\epsilon_m u^m + h(u, 0)(2m-1)u^{m-1}.$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \beta_1}(0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta_1}(0)u + \dots + \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial \beta_1}(0)u^{m-1} - h(u, 0)(2m-1)u^{m-1} = \frac{\partial h}{\partial \beta_1}(u, 0)(2m+1)\epsilon_m u^m.$$

Dessa forma,

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \beta_1}(0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta_1}(0)u + \dots + \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial \beta_1}(0)u^{m-1} = 0.$$

Como $\{x^{2i+1}\}_{i=0}^{m-1}$ é uma $\mathbb{R}$ -base para $\frac{\vec{\mathcal{E}}_{x,\beta}(Z_2)}{\mathcal{J}(F_n^{Z_2})}|_{\beta=0}$, segue que

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \beta_1}(0) = 0, \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta_1}(0) = 0, \dots, \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial \beta_1}(0) = 0.$$

Usando o mesmo raciocínio, calculamos as β -derivadas da igualdade (3.11) e mostramos que $D_\beta \varphi_i(0) = 0$. Como estamos num domínio analítico, segue que $\varphi_i \equiv 0$, para todo $0 \leq i \leq m-1$.

(ii) A demonstração é analogamente ao item (i). ■

Proposição 3.3.1 Sejam $m = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ e $\{\xi_j\}_{j=1}^n$ os geradores do $\text{Derlog}^*(F_n)$ definidos como em (3.5) e (3.6). Um conjunto de geradores para o $\text{Derlog}^*(F_n^{Z_2})$ é dado por $\{\xi_{2k-1}(\beta, 0)\}_{k=1}^m$.

Demonstração.

Primeiro mostramos que ξ'_j s satisfazem as condições de equivariância, isto é,

$$[(\xi_{2k-1})(\alpha^o, -\alpha^e)]_i = (-1)^{i+1} [(\xi_{2k-1})(\alpha^o, \alpha^e)]_i, \quad (3.12)$$

$$[(\xi_{2k})(\alpha^o, -\alpha^e)]_i = (-1)^i [(\xi_{2k})(\alpha^o, \alpha^e)]_i, \quad (3.13)$$

onde $k = 1, \dots, m$ e $i = 1, \dots, n$.

Como $[\xi_j(\alpha)]_i = a_{ij}(\alpha)$, $i, j = 1, \dots, n$, devemos mostrar que

$$a_{i2k-1}(\alpha^o, -\alpha^e) = (-1)^{i+1} a_{i2k-1}(\alpha^o, \alpha^e), \quad (3.14)$$

$$(3.15)$$

$$a_{i2k}(\alpha^o, -\alpha^e) = (-1)^i a_{i2k}(\alpha^o, \alpha^e). \quad (3.16)$$

De fato.

Pelo Teorema de Preparação de Malgrange, $\{x^{n-i}\}_{i=1}^n$ formam um conjunto de geradores livres para o $\mathcal{E}_\alpha$ -módulo $\frac{\mathcal{E}_{x,\alpha}}{\mathcal{J}(F_n)}$.

Assim, podemos encontrar $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n \in \mathcal{E}_\alpha$ tais que

$$x^{j-1} F_n(x, \alpha) \equiv \sum_{i=1}^n a_{ij}(\alpha) x^{n-i} \text{ módulo } \mathcal{J}(F_n). \quad (3.17)$$

Fazendo $j = 2k$ na relação (3.17), obtemos

$$x^{2k-1}F_n(x, \alpha) \equiv \sum_{i=1}^n a_{i2k}(\alpha)x^{n-i} \text{ módulo } \mathcal{J}(F_n),$$

o que implica que

$$x^{2k-1}F_n(x, \alpha) - \sum_{i=1}^n a_{i2k}(\alpha)x^{n-i} \in \mathcal{J}(F_n).$$

Logo,

$$x^{2k-1}F_n(x, \alpha) - \sum_{i=1}^n a_{i2k}(\alpha)x^{n-i} = p_{2k}(x, \alpha)(F_n)_x(x, \alpha),$$

ou seja,

$$x^{2k-1}F_n(x, \alpha) = \sum_{i=1}^n a_{i2k}(\alpha)x^{n-i} + p_{2k}(x, \alpha)(F_n)_x(x, \alpha). \quad (3.18)$$

Trocando (x, α) por $(-x, -\alpha)$ na igualdade (3.18), temos

$$\begin{aligned} (-x)^{2k-1}F_n(-x, -\alpha) &= \sum_{i=1}^n a_{i2k}(-\alpha)(-x)^{n-i} + p_{2k}(-x, -\alpha)(F_n)_x(-x, -\alpha), \\ -x^{2k-1}F_n(-x, -\alpha) &= \sum_{i=1}^n a_{i2k}(-\alpha)(-1)^n(-1)^{-i}x^{n-i} + p_{2k}(-x, -\alpha)(F_n)_x(-x, -\alpha). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Da ação de Z_2 sobre F_n definida por

$$F_n(-x, -\alpha) = (-1)^{n+1}F_n(x, \alpha), \quad (3.20)$$

com $\alpha = (\alpha^o, \alpha^e)$ e $-\alpha = (\alpha^o, -\alpha^e)$, podemos escrever

$$(F_n(-x, -\alpha))_x = ((-1)^{n+1}F_n(x, \alpha))_x,$$

$$(-1)(F_n)_x(-x, -\alpha) = (-1)^{n+1}(F_n)_x(x, \alpha),$$

$$(F_n)_x(-x, -\alpha) = \frac{(-1)^{n+1}(F_n)_x(x, \alpha)}{(-1)},$$

$$(F_n)_x(-x, -\alpha) = (-1)^n(F_n)_x(x, \alpha). \quad (3.21)$$

Substituindo (3.20) e (3.21) em (3.18), obtemos

$$-x^{2k-1}(-1)^{n+1}F_n(x, \alpha) = \sum_{i=1}^n a_{i2k}(-\alpha)(-1)^n(-1)^{-i}x^{n-i} + p_{2k}(-x, -\alpha)(-1)^n(F_n)_x(-x, -\alpha). \quad (3.22)$$

Se n é par, da igualdade (3.22), temos

$$\begin{aligned} -x^{2k-1}(-1)F_n(x, \alpha) &= \sum_{i=1}^n a_{i2k}(-\alpha)(-1)^{-i}x^{n-i} + p_{2k}(-x, -\alpha)(F_n)_x(-x, -\alpha), \\ x^{2k-1}F_n(x, \alpha) &= \sum_{i=1}^n a_{i2k}(-\alpha)(-1)^{-i}x^{n-i} + p_{2k}(-x, -\alpha)(F_n)_x(-x, -\alpha). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Se n é ímpar,

$$\begin{aligned} -x^{2k-1}F_n(x, \alpha) &= \sum_{i=1}^n a_{i2k}(-\alpha)(-1)(-1)^{-i}x^{n-i} + p_{2k}(-x, -\alpha)(-1)(F_n)_x(-x, -\alpha), \\ -x^{2k-1}F_n(x, \alpha) &= (-1)\left(\sum_{i=1}^n a_{i2k}(-\alpha)(-1)^{-i}x^{n-i} + p_{2k}(-x, -\alpha)(F_n)_x(-x, -\alpha)\right), \\ x^{2k-1}F_n(x, \alpha) &= \sum_{i=1}^n a_{i2k}(-\alpha)(-1)^{-i}x^{n-i} + p_{2k}(-x, -\alpha)(F_n)_x(-x, -\alpha). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Portanto, se n é par ou ímpar, obtemos a mesma igualdade.

Assim, de (3.18) e (3.23),

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_{i2k}(\alpha)x^{n-i} + p_{2k}(x, \alpha)(F_n)_x(x, \alpha) &= \sum_{i=1}^n a_{i2k}(-\alpha)(-1)^{-i}x^{n-i} + p_{2k}(-x, -\alpha)(F_n)_x(-x, -\alpha), \\ \sum_{i=1}^n a_{i2k}(\alpha)x^{n-i} - \sum_{i=1}^n a_{i2k}(-\alpha)(-1)^{-i}x^{n-i} &= p_{2k}(-x, -\alpha)(F_n)_x(-x, -\alpha) - p_{2k}(x, \alpha)(F_n)_x(x, \alpha), \\ \left(\sum_{i=1}^n a_{i2k}(\alpha) - \sum_{i=1}^n a_{i2k}(-\alpha)(-1)^{-i}\right)x^{n-i} &= (p_{2k}(-x, -\alpha) - p_{2k}(x, \alpha))(F_n)_x(x, \alpha). \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_{i2k}(\alpha) - \sum_{i=1}^n a_{i2k}(-\alpha)(-1)^{-i}\right)x^{n-i} \equiv 0 \text{ módulo } \mathcal{J}(F_n).$$

Como $\{x^{n-i}\}_{i=1}^n$ formam um conjunto de geradores livres para o $\mathcal{E}_\alpha$ -módulo $\frac{\mathcal{E}_{x,\alpha}}{\mathcal{J}(F_n)}$, segue que

$$\begin{aligned} a_{i2k}(\alpha) - a_{i2k}(-\alpha)(-1)^{-i} &= 0, \\ -a_{i2k}(-\alpha)(-1)^{-i} &= -a_{i2k}(\alpha), \\ a_{i2k}(-\alpha) &= (-1)^i a_{i2k}(\alpha). \end{aligned}$$

Portanto,

$$[(\xi_{2k})(\alpha^o, -\alpha^e)]_i = (-1)^i [(\xi_{2k})(\alpha^o, \alpha^e)]_i.$$

Por outro lado, fazendo $j = 2k - 1$ na relação (3.17),

$$x^{2k-2}F_n(x, \alpha) \equiv \sum_{i=1}^n a_{i2k-1}(\alpha)x^{n-i} \text{ módulo } \mathcal{J}(F_n),$$

obtemos de forma análoga que

$$[(\xi_{2k-1})(\alpha^o, -\alpha^e)]_i = (-1)^{i+1}[(\xi_{2k-1})(\alpha^o, \alpha^e)]_i.$$

Dessa forma, concluímos que os ξ 's satisfazem as condições de equivariância.

Como consequência, das expressões de (3.12) e (3.13), se i é um número par, segue que

$$[(\xi_{2k-1})(\alpha^o, 0)]_i = 0.$$

Para simplificar a notação, definimos $\hat{\xi}_k(\beta) = \xi_{2k-1}(\beta, 0)$ para $k = 1 \dots m$.

Retornando a (3.5),

$$x^{j-1}F_n(x, \alpha) = \sum_{i=1}^n a_{ij}(\alpha)x^{n-i} + p_j(x, \alpha)(F_n)_x(x, \alpha), \quad (3.25)$$

onde $i, j = 1, \dots, n$.

Considerando $j = 2k - 1$, segue que $1 \leq k \leq m$ e

$$\begin{aligned} x^{2(k-1)}F_n(x, \alpha) &= \sum_{i=1}^n a_{i2k-1}(\alpha)x^{n-i} + p_{2k-1}(x, \alpha)(F_n)_x(x, \alpha), \\ u^{k-1}F_n(x, \alpha) &= \sum_{i=1}^n a_{i2k-1}(\alpha)x^{n-i} + p_{2k-1}(x, \alpha)(F_n)_x(x, \alpha). \end{aligned}$$

Tomando $i = 2l - 1$, então $1 \leq l \leq m$ e

$$u^{k-1}F_n(x, \alpha) = \sum_{l=1}^m a_{2l-1, 2k-1}(\alpha)x^{n-(2l-1)} + p_{2k-1}(x, \alpha)(F_n)_x(x, \alpha),$$

com $1 \leq k, l \leq m$.

Reduzindo ao $\text{Fix}(Z_2)$, temos

$$\begin{aligned} u^{k-1}F_n(x, \alpha^o, 0) &= \sum_{l=1}^m a_{2l-1, 2k-1}(\alpha^o, 0)x^{n-(2l-1)} + p_{2k-1}(x, \alpha^o, 0)(F_n)_x(x, \alpha^o, 0), \\ u^{k-1}F_n(x, \alpha^o, 0) &= \sum_{l=1}^m \hat{a}_{2l-1, 2k-1}(\beta, 0)x^{n-(2l-1)} + p_{2k-1}(x, \alpha^o, 0)(F_n)_x(x, \alpha^o, 0), \end{aligned}$$

onde $\hat{a}_{2l-1, 2k-1}(\beta, 0) = a_{2l-1, 2k-1}(\alpha^o, 0)$ e $1 \leq k, l \leq m$.

Sendo $F_n^{Z_2}$ a restrição de F_n ao $\text{Fix}(Z_2)$, isto é, $F_n^{Z_2}(x, \beta) = F_n(x, \alpha^o, 0)$, segue que

$$u^{k-1}F_n^{Z_2}(x, \beta) = \sum_{l=1}^m \hat{a}_{2l-1, 2k-1}(\beta, 0)x^{n-(2l-1)} + p_{2k-1}(x, \beta)(F_n^{Z_2})_x(x, \beta), \quad (3.26)$$

onde $\hat{a}_{2l-1, 2k-1}(\beta, 0) = a_{2l-1, 2k-1}(\alpha^o, 0)$ e $1 \leq k, l \leq m$.

Sendo $m = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ temos que $F_n^{Z_2}$ está relacionado com P_m para todo n . Assim, se n é ímpar, então $n = 2m - 1$ e, portanto, $F_n^{Z_2}(x, \beta) = P_m(u, \beta)$. Logo,

$$\begin{aligned} u^{k-1} P_m(u, \beta) &= \sum_{l=1}^m \hat{a}_{2l-1, 2k-1}(\beta, 0) x^{2m-1-(2l-1)} + p_{2k-1}(x, \beta) (P_m(u, \beta))_x(x, \beta), \\ u^{k-1} P_m(u, \beta) &= \sum_{l=1}^m \hat{a}_{2l-1, 2k-1}(\beta, 0) x^{2(m-l)} + p_{2k-1}(x, \beta) 2x(P_m)_u(u, \beta), \\ \underbrace{u^{k-1} P_m(u, \beta)}_{\text{invariante}} &= \underbrace{\sum_{l=1}^m \hat{a}_{2l-1, 2k-1}(\beta, 0) u^{m-l}}_{\text{invariante}} + p_{2k-1}(x, \beta) \underbrace{2x(P_m)_u(u, \beta)}_{\text{equivariante}}. \end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que $p_{2k-1}(x, \beta) \in \vec{\mathcal{E}}_{x, \beta}(Z_2)$, isto é, $p_{2k-1}(x, \beta) = q_{2k-1}(u, \beta)x$ e

$$\begin{aligned} u^{k-1} P_m(u, \beta) &= \sum_{l=1}^m \hat{a}_{2l-1, 2k-1}(\beta, 0) u^{m-l} + q_{2k-1}(u, \beta) x 2x(P_m)_u(u, \beta), \\ u^{k-1} P_m(u, \beta) &= \sum_{l=1}^m \hat{a}_{2l-1, 2k-1}(\beta, 0) u^{m-l} + q_{2k-1}(u, \beta) 2u(P_m)_u(u, \beta), \\ u^{k-1} P_m(u, \beta) &= \sum_{l=1}^m \hat{a}_{2l-1, 2k-1}(\beta, 0) u^{m-l} + q_{2k-1}(u, \beta) (F_n^{Z_2})_x(x, \beta), \\ u^{k-1} P_m(u, \beta) &= \sum_{l=1}^m [\xi_{2k-1}(\beta, 0)]_{2l-1} u^{m-l} + \mathcal{J}(F_n^{Z_2}), \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Portanto, $\{\xi_{2k-1}(\beta, 0)\}_{k=1}^m$ formam um conjunto de geradores para o $\text{Derlog}^*(F_n^{Z_2})$. ■

Observação 3.3.1 A proposição (3.3.1), fornece um método para calcularmos os geradores do $\text{Derlog}^*(F_n^{Z_2})$ análogo ao descrito em (3.5).

Para simplificar definimos $\hat{\xi}_k(\beta) = \xi_{2k-1}(\beta, 0)$, $k = 1, \dots, m$.

Proposição 3.3.2 Seja $m = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$. Um campo de vetores ξ é levantável sobre $(F_n^{Z_2})^{-1}(0)$ se, e somente, se $\hat{\xi}$ possui uma extensão que é levantável sobre $(F_n)^{-1}(0)$.

Demonstração.

Seja $\hat{\xi}$ um campo de vetores em $\text{Derlog}^*(F_n^{Z_2})$. Pela Proposição, (3.3.1), temos que

$$\{\hat{\xi}_k(\beta)\}_{k=1}^m = \{\xi_{2k-1}(\beta, 0)\}_{k=1}^m$$

formam um conjunto de geradores para o $\text{Derlog}^*(F_n^{Z_2})$.

Seja,

$$\hat{\xi}(\beta, 0) = \sum_{i=1}^m c_i(\beta) \hat{\xi}_i(\beta, 0) = c_1(\beta) \hat{\xi}_1(\beta, 0) + c_2(\beta) \hat{\xi}_2(\beta, 0) + \dots + c_m(\beta) \hat{\xi}_m(\beta, 0).$$



Então, $\xi(\alpha^o, \alpha^e) = \sum_{i=1}^m c_i \xi_{2i-1}(\alpha)$ está no $\text{Derlog}(F_n)$ e, portanto, levanta-se a (v, ξ) sobre $F_n^{-1}(0)$, ou seja, existem campos vetoriais $\tau \in \mathcal{E}_{x,\alpha}(Z_2)$ e $v \in \vec{\mathcal{E}}_{x,\alpha}(Z_2)$ tais que

$$\tau(x, \alpha) F_n(x, \alpha) = (F_n)_\alpha(x, \alpha) \xi(\alpha) + v(x, \alpha) (F_n)_x(x, \alpha),$$

$$\tau(x, \alpha^o, \alpha^e) F_n(x, \alpha^o, \alpha^e) = (F_n)_\alpha(x, \alpha^o, \alpha^e) \xi(\alpha) + v(x, \alpha^o, \alpha^e) (F_n)_x(x, \alpha^o, \alpha^e).$$

Lembrando que a Z_2 -ação sobre o espaço de α é dada por $(-1)\alpha = (\alpha^o, -\alpha^e)$ e trocando x por $-x$, obtemos

$$\begin{aligned} \tau(-x, \alpha^o, -\alpha^e) F_n(-x, \alpha^o, -\alpha^e) &= (F_n)_\alpha(-x, \alpha^o, -\alpha^e) \xi(-\alpha) \\ &+ v(-x, \alpha^o, -\alpha^e) (F_n)_x(-x, \alpha^o, -\alpha^e). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Como a Z_2 -ação sobre F_n é dada por

$$F_n(-x, \alpha^o, -\alpha^e) = (-1)^{n+1} F_n(x, \alpha^o, \alpha^e),$$

segue que

$$\begin{aligned} \tau(-x, \alpha^o, -\alpha^e) (-1)^{n+1} F_n(x, \alpha^o, \alpha^e) &= (-1)^n (F_n)_\alpha(x, \alpha^o, \alpha^e) \xi(\alpha^o, -\alpha^e) \\ &+ v(-x, \alpha^o, -\alpha^e) (-1)^n (F_n)_x(-x, \alpha^o, -\alpha^e). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade (3.29) por $(-1)^{-n-1}$, temos

$$\tau(-x, \alpha^o, -\alpha^e) F_n(x, \alpha^o, \alpha^e) = -(F_n)_\alpha(x, \alpha^o, \alpha^e) \xi(\alpha^o, -\alpha^e) - v(-x, \alpha^o, -\alpha^e) (F_n)_x(x, \alpha^o, \alpha^e). \quad (3.30)$$

Somando (3.30) com (3.28), obtemos

$$\begin{aligned} [\tau(x, \alpha^o, \alpha^e) + \tau(-x, \alpha^o, -\alpha^e)] F_n(x, \alpha^o, \alpha^e) &= [\xi(\alpha^o, \alpha^e) + \xi(\alpha^o, -\alpha^e)] (F_n)_\alpha(x, \alpha^o, \alpha^e) \\ &+ [v(x, \alpha^o, \alpha^e) - v(-x, \alpha^o, -\alpha^e)] (F_n)_x(x, \alpha^o, \alpha^e). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade (3.31) por $\frac{1}{2}$, segue que

$$\begin{aligned} \left[\frac{\tau(x, \alpha^o, \alpha^e) + \tau(-x, \alpha^o, -\alpha^e)}{2} \right] F_n(x, \alpha^o, \alpha^e) &= \\ \left[\frac{\xi(\alpha^o, \alpha^e) + \xi(\alpha^o, -\alpha^e)}{2} \right] (F_n)_\alpha(x, \alpha^o, \alpha^e) &+ \left[\frac{v(x, \alpha^o, \alpha^e) - v(-x, \alpha^o, -\alpha^e)}{2} \right] (F_n)_x(x, \alpha^o, \alpha^e). \end{aligned}$$

Definindo

$$\tau^{Z_2}(x, \alpha^o, \alpha^e) = \left[\frac{\tau(x, \alpha^o, \alpha^e) + \tau(-x, \alpha^o, -\alpha^e)}{2} \right], \quad (3.32)$$

$$\xi^{Z_2}(\alpha^o, \alpha^e) = \left[\frac{\xi(\alpha^o, \alpha^e) + \xi(\alpha^o, -\alpha^e)}{2} \right], \quad (3.33)$$

$$v^{Z_2}(x, \alpha^o, \alpha^e) = \left[\frac{v(x, \alpha^o, \alpha^e) - v(-x, \alpha^o, -\alpha^e)}{2} \right], \quad (3.34)$$

da igualdade (3.31), segue que

$$\tau^{Z_2}(x, \alpha^o, \alpha^e) F_n(x, \alpha^o, \alpha^e) = \xi^{Z_2}(\alpha^o, \alpha^e) (F_n)_\alpha(x, \alpha^o, \alpha^e) + v^{Z_2}(x, \alpha^o, \alpha^e) (F_n)_x(x, \alpha^o, \alpha^e). \quad (3.35)$$

Restringindo a igualdade (3.35) ao $\text{Fix}(Z_2)$, tem-se

$$\tau^{Z_2}(x, \alpha^o, 0) F_n(x, \alpha^o, 0) = \xi^{Z_2}(\alpha^o, 0) (F_n)_\alpha(x, \alpha^o, 0) + v^{Z_2}(x, \alpha^o, 0) (F_n)_x(x, \alpha^o, 0).$$

Recordando que

$$F_n(x, \alpha^o, 0) = F_n(x, \alpha^o, 0) = F_n^{Z_2}(x, \beta),$$

$$(F_n)_x(x, \alpha^o, 0) = (F_n)_x(x, \alpha^o, 0) = (F_n^{Z_2})_x(x, \beta),$$

$$(F_n)_\alpha(x, \alpha^o, 0) = (F_n)_{\alpha^o}(x, \alpha^o, 0) = (F_n^{Z_2})_\beta(x, \beta),$$

obtemos

$$\tau^{Z_2}(x, \alpha^o, 0) F_n^{Z_2}(x, \beta) = \xi^{Z_2}(\alpha^o, 0) (F_n^{Z_2})_\beta(x, \beta) (x, \alpha^o, 0) + v^{Z_2}(x, \alpha^o, 0) (F_n^{Z_2})_x(x, \beta). \quad (3.36)$$

Notemos que,

$$\tau^{Z_2}(x, \alpha^o, 0) = \frac{\tau(x, \alpha^o, 0) + \tau(-x, \alpha^o, 0)}{2}$$

é uma aplicação Z_2 -invariante, pois

$$\begin{aligned} \tau^{Z_2}(-x, \alpha^o, 0) &= \frac{\tau(-x, \alpha^o, 0) + \tau(x, \alpha^o, 0)}{2} \\ &= \tau^{Z_2}(x, \alpha^o, 0) \end{aligned}$$

e que

$$v^{Z_2}(x, \alpha^o, 0) = \frac{v(x, \alpha^o, 0) - v(-x, \alpha^o, 0)}{2}$$

é uma aplicação Z_2 -equivariante, pois

$$\begin{aligned} v^{Z_2}(-x, \alpha^o, 0) &= \frac{v(-x, \alpha^o, 0) - v(x, \alpha^o, 0)}{2} \\ &= (-1) \left(\frac{-v(-x, \alpha^o, 0) + v(x, \alpha^o, 0)}{2} \right) \\ &= (-1) v^{Z_2}(x, \alpha^o, 0). \end{aligned}$$

Logo, segue de (3.36) que $\xi^{Z_2}|_{\text{Fix}(Z_2)} = \xi^{Z_2}(\alpha^o, 0)$ é levantável sobre $(F_n^{Z_2})^{-1}(0)$ cujo o levantamento é dado por $(v^{Z_2}|_{\text{Fix}(Z_2)}, \xi^{Z_2}|_{\text{Fix}(Z_2)})$.

Agora, como

$$\xi^{Z_2}|_{\text{Fix}(Z_2)} = \xi^{Z_2}(\alpha^o, 0) = \frac{\xi(\alpha^o, 0) + \xi(\alpha^o, 0)}{2} = \frac{2\xi(\alpha^o, 0)}{2} = \xi(\alpha^o, 0).$$

Usando a notação $\hat{\xi}(\beta) = \xi(\alpha^o, 0)$, obtemos $\xi^{Z_2}|_{\text{Fix}(Z_2)} = \hat{\xi}$.

Portanto, $\hat{\xi}$ é levantável sobre $(F_n^{Z_2})^{-1}(0)$ com levantamento $(\nu^{Z_2}|_{\text{Fix}(Z_2)}, \hat{\xi})$.

Reciprocamente, se $\hat{\xi}$ é Z_2 -levantável, então ele é uma combinação linear dos $\hat{\xi}'_{i_s}$.

De fato.

Seja $\hat{\xi}$ um campo de vetores levantável sobre $(F_n^{Z_2})^{-1}(0)$. Então, existem campos de vetores $\hat{v} \in \mathcal{O}_{x,\beta}(Z_2)$, $\hat{\tau} \in \mathcal{O}_{x,\beta}(Z_2)$ tais que

$$(F_n^{Z_2})_x \hat{v} + \sum_{i=1}^m (F_n^{Z_2})_{\beta_i}(\hat{\xi})_i = \hat{\tau} F_n^{Z_2}. \quad (3.37)$$

Do Lema (3.3.2), podemos decompor $\hat{\tau}$ em:

$$\hat{\tau} = (F_n^{Z_2})_x x \tilde{v} + \sum_{i=1}^m \tilde{c}_i u^{i-1}, \quad (3.38)$$

pois $\hat{\tau} - \sum_{i=1}^m \tilde{c}_i u^{i-1} = (F_n^{Z_2})_x \in \mathcal{J}(F_n^{Z_2})$.

Substituindo (3.38) em (3.37), temos

$$\begin{aligned} (F_n^{Z_2})_x \hat{v} + \sum_{i=1}^m (F_n^{Z_2})_{\beta_i}(\hat{\xi})_i &= \left[(F_n^{Z_2})_x x \tilde{v} + \sum_{i=1}^m \tilde{c}_i(\beta) u^{i-1} \right] F_n^{Z_2} \\ &= (F_n^{Z_2})_x \tilde{v} F_n^{Z_2} + \sum_{i=1}^m \tilde{c}_i(\beta)(\hat{\xi})_k u^{m-k} + \mathcal{J}(F_n^{Z_2}). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Como os invariantes $\{u^{i-1}\}_{i=1}^m$ formam uma base para $\frac{\mathcal{O}_u}{\mathcal{J}(F_n^{Z_2})}$, temos

$$\hat{\xi} = \sum_{k=1}^m \tilde{c}_k(\hat{\xi})_i.$$

Portanto, $(\hat{\xi})_{k=1}^m$ formam uma base para $\text{Derlog}^*(F_n^{Z_2})$. ■

Definição 3.3.2 Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ com um produto $[\cdot, \cdot]$ bem definido em V e satisfazendo

- (i) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$;
- (ii) $[X, Y] = -[Y, X]$;
- (iii) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$, onde $X, Y, Z \in V$ e $a, b \in \mathbb{K}$.

O produto $[\cdot, \cdot]$ é chamado Colchete de Lie.

O teorema a seguir nos permite mostrar que os geradores do $\text{Derlog}^*(F_n^{Z_2})$ também geram o $\text{Derlog}(\Delta_n^{Z_2})$. Este resultado é devido à Saito e é muito importante.

Teorema 3.3.1

(i) Se os campos de vetores $\{\hat{\xi}_i\}_{i=1}^n$ estão no $\text{Derlog}(\Delta_n^{Z_2})$ e o determinante $|\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_n|$ é uma equação reduzida de $\Delta_n^{Z_2}$, então esses campos de vetores geram o $\text{Derlog}(\Delta_n^{Z_2})$ livremente.

(ii) Se os campos de vetores $\{\hat{\xi}_i\}_{i=1}^n$ formam uma álgebra de Lie e $|\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_n| = 0$ é uma equação reduzida para $\Delta_n^{Z_2}$, então tais geradores geram o $\text{Derlog}(\Delta_n^{Z_2})$ livremente.

Demonstração. Ver [14]. ■

Proposição 3.3.3 Os campos de vetores que geram $\text{Derlog}^*(F_n^{Z_2})$ e seus respectivos levantamentos para os centros organizadores $A_2, \dots, A_8$, que são correspondentes às formas normais $h_1, \dots, h_{11}$ obtidos no capítulo 2 são

$$A_2 : \epsilon_1 u x; \hat{\xi}_1 = \beta_1; (x, \beta_1).$$

$$A_4 : \epsilon_2 u^2 x; \hat{\xi}_1 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ 2\beta_2 \end{bmatrix}, \hat{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 4\beta_2 - \epsilon_4 \beta_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}; (\frac{1}{5}x, \beta_1, 2\beta_2), ((\frac{1}{5}u + \frac{2}{25}\epsilon_2 \beta_1)x, 4\beta_2 - \epsilon_4 \beta_1^2, 0).$$

$$A_6 : \epsilon_3 u^3 x; \hat{\xi}_1 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ 2\beta_2 \\ 3\beta_3 \end{bmatrix}, \hat{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 6\beta_2 - 2\epsilon_3 \beta_1^2 \\ 9\beta_3 - \epsilon_3 \beta_1 \beta_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{\xi}_3 = \begin{bmatrix} \beta_1 \beta_2 - 9\epsilon_3 \beta_3 \\ 2\beta_2^2 - 6\beta_1 \beta_3 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$(\frac{1}{7}x, \beta_1, 2\beta_2, 3\beta_3), ((\frac{1}{7}u + \frac{1}{49}\epsilon_3 \beta_1)x, 6\beta_2 - 2\epsilon_3 \beta_1^2, 9\beta_3 - \epsilon_3 \beta_1 \beta_2, 0),$$

$$((\frac{1}{7}u^2 + \frac{2}{49}\epsilon_3 \beta_1 u - \frac{-10}{343}\beta_1^2 + \frac{4}{49}\beta_2 \epsilon_3)x, \beta_1 \beta_2 - 9\epsilon_3 \beta_3, 2\beta_2^2 - 6\beta_1 \beta_3, 0).$$

$$A_8 : \epsilon_4 u^4 x; \hat{\xi}_1 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ 2\beta_2 \\ 3\beta_3 \\ 4\beta_4 \end{bmatrix}, \hat{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 8\beta_2 - 3\epsilon_4 \beta_1 \\ 12\beta_3 - 2\epsilon_4 \beta_1 \beta_2 \\ 16\beta_4 - \epsilon_4 \beta_1 \beta_3 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{\xi}_3 = \begin{bmatrix} 6\epsilon_4 \beta_3 - \beta_1 \beta_2 \\ 8\epsilon_4 \beta_4 + 4\beta_1 \beta_3 - 2\beta_2^2 \\ 6\beta_1 \beta_4 - \beta_2 \beta_3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\xi}_4 = \begin{bmatrix} 16\epsilon_4 \beta_4 - \beta_1 \beta_3 \\ 12\beta_1 \beta_4 - 2\beta_2 \beta_3 \\ 8\beta_2 \beta_4 - 3\beta_3^2 \\ 0 \end{bmatrix}; (\frac{1}{9}x, \beta_1, 2\beta_2, 3\beta_3, 4\beta_4),$$

$$((\frac{1}{9}u + \frac{1}{81}\epsilon_4 \beta_1)x, 6\beta_2 - 2\epsilon_4 \beta_1^2, 9\beta_3 - \epsilon_3 \beta_1 \beta_2, 0),$$

$$((\frac{1}{9}u^2 + \frac{2}{81}\epsilon_4 \beta_1 u - \frac{14}{729}\beta_1^2 + \frac{4}{81}\beta_2 \epsilon_4)x, \beta_1 \beta_2 - 9\epsilon_3 \beta_3, 2\beta_2^2 - 6\beta_1 \beta_3, 0),$$

$$((\frac{1}{9}u^3 + \frac{2}{81}\epsilon_4 \beta_1 u^2 - \frac{14}{729}\beta_1^2 + \frac{4}{81}\beta_2 \epsilon_4 - \frac{14}{729}\beta_1^2 u)x, 16\epsilon_4 \beta_4 - \beta_1 \beta_3, 12\beta_1 \beta_4 - 2\beta_2 \beta_3, 8\beta_2 \beta_4 - 3\beta_3^2, 0).$$

Demonstração.

Analizamos o centro organizador A_4 , e o mesmo processo é feito para os demais casos.

Assim sendo, para determinarmos os geradores do $\text{Derlog}^*(F_4^{Z_2})$ resolvemos o sistema de equações

$$\begin{aligned} u^{j-1}F_4^{Z_2}(x, \beta) &= \sum_{i=1}^2 \hat{a}_{ij}(\beta)u^{2-i}x + p_j(x, \beta)x(F_4^{Z_2})_x, \\ &= \hat{a}_{1j}(\beta)ux + \hat{a}_{2j}(\beta)x + p_j(x, \beta)x(F_4^{Z_2})_x, \quad j = 1, 2 \text{ e } \beta = (\beta_1, \beta_2). \end{aligned}$$

Os vetores $\hat{\xi}_j = (\hat{a}_{1j}, \hat{a}_{2j})$, $j = 1, 2$, são os geradores do $\text{Derlog}^*(F_4^{Z_2})$.

Para $j = 1$ temos que resolver a seguinte equação

$$F_4^{Z_2}(x, \beta) = \hat{a}_{11}(\beta)ux + \hat{a}_{21}(\beta)x + p_1(x, \beta)x(F_4^{Z_2})_x. \quad (3.40)$$

Como

$$F_4^{Z_2}(x, \beta) = \epsilon_2 u^2 x + \beta_1 ux + \beta_2 x,$$

segue que

$$x(F_4^{Z_2})_x(x, \beta) = 5\epsilon_2 u^2 x + 3\beta_1 ux + \beta_2 x.$$

Assim,

$$\epsilon_2 u^2 x = \frac{1}{5}x(F_4^{Z_2})_x(x, \beta) - \frac{3}{5}\beta_1 ux - \frac{1}{5}\beta_2 x \quad (3.41)$$

$$u^2 x = \frac{1}{5}\epsilon_2 x(F_4^{Z_2})_x(x, \beta) - \frac{3}{5}\beta_1 \epsilon_2 ux - \frac{1}{5}\epsilon_2 \beta_2 x \quad (3.42)$$

Logo, de (3.42) tem-se

$$\epsilon_2 u^2 x + \beta_1 ux + \beta_2 x = \frac{1}{5}x(F_4^{Z_2})_x(x, \beta) + \frac{2}{5}\beta_1 ux + \frac{4}{5}\beta_2 x. \quad (3.43)$$

Comparando as igualdades (3.43) e (3.40) obtemos

$$\hat{\xi}_1(\beta) = (\hat{a}_{11}(\beta), \hat{a}_{21}(\beta)) = \left(\frac{2}{5}\beta_1, \frac{4}{5}\beta_2\right)$$

e

$$p_1(x, \lambda) = \frac{1}{5}x.$$

Agora, para $j = 2$ temos que resolver a seguinte equação

$$u(\epsilon_2 u^2 x + \beta_1 ux + \beta_2 x) = \hat{a}_{12}(\beta)ux + \hat{a}_{22}(\beta)x + p_2(x, \beta)x(F_4^{Z_2})_x(x, \beta), \quad \beta = (\beta_1, \beta_2). \quad (3.44)$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned} u(\epsilon_2 u^2 x + \beta_1 ux + \beta_2 x) &= u\left(\frac{1}{5}x(F_4^{Z_2})_x(x, \beta) + \frac{2}{5}\beta_1 ux + \frac{4}{5}\beta_2 x + \beta_1 ux + \beta_2 x\right) \\ &= \left(\frac{1}{5}u + \epsilon_2 \frac{2}{25}\right)x(F_4^{Z_2})_x(x, \beta) + \left(\frac{4}{5}\beta_2 - \frac{6}{25}\epsilon_2 \beta_1^2\right)ux - \epsilon_2 \frac{2}{25}\beta_1 \beta_2 x. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Comparando as igualdades (3.44) e (3.45) segue que

$$\hat{\xi}_2(\beta) = (\hat{a}_{12}(\beta), \hat{a}_{22}(\beta)) = \left(\frac{4}{5}\beta_2 - \frac{6}{25}\epsilon_2\beta_1^2, \epsilon_2\frac{2}{25}\beta_1\beta_2\right).$$

e

$$p_2(x, \lambda) = \left(\frac{1}{5}u + \epsilon_2\frac{2}{25}\right)x.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \text{Derlog}^*(F_4^{Z_2}) &= \langle \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2 \rangle = \left\langle \left(\frac{2}{5}\beta_1, \frac{4}{5}\beta_2\right), \left(\frac{20}{25}\beta_2 - \frac{6}{25}\epsilon_2\beta_1^2, \epsilon_2\frac{2}{25}\beta_1\beta_2\right) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{2}{5}(\beta_1, 2\beta_2), -\frac{2}{25}(10\beta_2 + 3\epsilon_2\beta_1^2, \epsilon_2\beta_1\beta_2) \right\rangle \\ &= \langle (\beta_1, 2\beta_2), (10\beta_2 + 3\epsilon_2\beta_1^2, \epsilon_2\beta_1\beta_2) \rangle. \end{aligned}$$

Como

$$\epsilon_2\beta_1(\beta_1, 2\beta_2) - 2(10\beta_2 + 3\epsilon_2\beta_1^2, \epsilon_2\beta_1\beta_2) = (4\beta_2 - \epsilon_2\beta_1^2, 0),$$

concluimos que

$$\text{Derlog}^*(F_4^{Z_2}) = \langle (\beta_1, 2\beta_2), (4\beta_2 - \epsilon_2\beta_1^2, 0) \rangle$$

e os levantamentos são dados por

$$\frac{1}{5}x \text{ e } \left(\frac{1}{5}u + \frac{2}{25}\epsilon_2\beta_1\right)x.$$

■

Definição 3.3.3 Sejam $v, w : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ tais que $v = (v_1, \dots, v_n)$ e $w = (w_1, \dots, w_n)$. Um colchete de Lie de v e w é definido por

$$[v, w] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} v_j - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_j \right) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Teorema 3.3.2 Os campos de vetores $\hat{\xi}'_i$ s do Teorema anterior geram livremente o $\text{Derlog}(\Delta_n^{Z_2})$.

Demonstração.

Primeiro, verificamos a estrutura de álgebra de Lie formada por esses campos, em cada caso.

$A_4 : \epsilon_2 u^2 x;$

$$[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2] = \begin{bmatrix} 4\beta_2 - \epsilon_2\beta_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{\xi}_2.$$

$A_6 : \epsilon_3 u^3 x;$

$$[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2] = \begin{bmatrix} 6\beta_2 - 2\epsilon_3\beta_1^2 \\ 9\beta_3 - \epsilon_3\beta_1\beta_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{\xi}_2,$$

$$[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_3] = \begin{bmatrix} -18\epsilon_3\beta_3 + 2\beta_1\beta_2 \\ 4\beta_2^2 - 12\beta_1\beta_3 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\hat{\xi}_3,$$

$$[\hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3] = \begin{bmatrix} -6\beta_2^2 + \epsilon_3\beta_2\beta_1^2 + 9\beta_1\beta_3 \\ 6\epsilon_3\beta_3\beta_1^2 - \epsilon_3\beta_1\beta_2^2 - 9\beta_2\beta_3 \\ 0 \end{bmatrix} = -\beta_2\hat{\xi}_2 - \beta_1\epsilon_3\hat{\xi}_3.$$

$\mathbf{A}_8 : \epsilon_4 \mathbf{u}^4 \mathbf{x};$

$$[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2] = \begin{bmatrix} 8\beta_2 - 3\epsilon_4\beta_1^2 \\ 12\beta_3 - 2\epsilon_4\beta_1\beta_2 \\ 16\beta_4 - \epsilon_4\beta_1\beta_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{\xi}_1,$$

$$[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_3] = \begin{bmatrix} 12\epsilon_4\beta_3 - 2\beta_1\beta_2 \\ 16\epsilon_4\beta_4 + 8\beta_1\beta_3 - 4\beta_2^2 \\ 12\beta_1\beta_4 - 2\beta_2\beta_3 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\hat{\xi}_3,$$

$$[\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_4] = \begin{bmatrix} 48\epsilon_4\beta_4 - 3\beta_1\beta_3 \\ 36\beta_1\beta_4 - 6\beta_2\beta_3 \\ 24\beta_2\beta_4 - 9\beta_3^2 \\ 0 \end{bmatrix} = 3\hat{\xi}_4,$$

$$[\hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3] = \begin{bmatrix} 8\beta_2^2 - \epsilon_4\beta_2\beta_1^2 - 14\beta_1\beta_3 + 32\epsilon_4\beta_4 \\ 8\beta_2\beta_3 - 8\beta_3\epsilon_4\beta_1^2 + 2\epsilon_4\beta_2^2\beta_1 + 8\beta_1\beta_4 \\ 32\beta_2\beta_4 - 12\beta_4\epsilon_4\beta_1^2 - 6\beta_3^2 + \epsilon_4\beta_3\beta_1\beta_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \beta_2\hat{\xi}_2 - 2\hat{\xi}_4 - 2\epsilon_4\beta_1\hat{\xi}_3,$$

$$[\hat{\xi}_2, \hat{\xi}_4] = \begin{bmatrix} 8\beta_2\beta_3 - 2\beta_3\epsilon_4\beta_1^2 - 16\beta_1\beta_4 \\ -12\beta_4\epsilon_4\beta_1^2 + 12\beta_3^2 \\ 16\beta_3\beta_4 - 8\beta_4\epsilon_4\beta_1\beta_2 + 2\epsilon_4\beta_1\beta_3^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \beta_3\hat{\xi}_2 - \epsilon_4\beta_1\hat{\xi}_4,$$

$$[\hat{\xi}_3, \hat{\xi}_4] = \begin{bmatrix} 12\epsilon_4\beta_3^2 - \beta_3\beta_1\beta_2 - 32\beta_2\epsilon_4\beta_4 + 6\beta_1^2\beta_4 \\ -8\beta_4\epsilon_4\beta_3 - 8\beta_4\beta_1\beta_2 + 8\beta_1\beta_3^2 - 2\beta_3\beta_2^2 \\ -32\epsilon_4\beta_4^2 + 14\beta_4\beta_1\beta_3 - 8\beta_4\beta_2^2 + \beta_2\beta_3^2 \\ 0 \end{bmatrix} = -2\epsilon_4\beta_4\hat{\xi}_2 + 2\beta_3\hat{\xi}_3 - \beta_2\hat{\xi}_4.$$

Os cálculos acima, foram feitos através do Maple e o programa encontra-se no Apêndice B.

Os determinantes das matrizes formadas pelos vetores do $\text{Derlog}^*(F_n^{Z_2})$ são exatamente o discriminante $\Delta_n^{Z_2}$

$$\mathbf{A}_4 : \epsilon_2 \mathbf{u}^2 \mathbf{x}; |\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2| = 0 \Rightarrow 2\beta_2(4\beta_2 - \epsilon_2\beta_1^2) = 0,$$

$$\mathbf{A}_6 : \epsilon_3 \mathbf{u}^3 \mathbf{x}; |\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3| = 0 \Rightarrow 3\beta_3(-54\beta_1\beta_2\beta_3 + 12\beta_2^3 + 12\epsilon_3\beta_1^3\beta_3 - 3\epsilon_3\beta_1^2\beta_2^2 + 81\epsilon_3\beta_3^2) = 0,$$

$$\mathbf{A}_8 : \epsilon_4 \mathbf{u}^4 \mathbf{x}; |\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3, \hat{\xi}_4| = 0 \Rightarrow$$

$$-4\beta_4(-120\beta_2\beta_3^3\beta_1 + 216\epsilon_4\beta_1^4\beta_2^2 + 32\epsilon_4\beta_1^3\beta_3^3 - 8\beta_3^2\beta_4\beta_1^2 - 768\beta_1^2\beta_4^2\beta_2 + 1024\epsilon_4\beta_4^2\beta_2^2$$

$$-2048\beta_4^3 + 1408\beta_1\beta_3\beta_4^2 - 1152\epsilon_2\beta_2\beta_4\beta_3^3 - 24\beta_1\beta_2\beta_3^3 + 96\beta_1\beta_2^2\beta_3\beta_4 - 144\epsilon_4\beta_1^3\beta_3\beta_4\beta_2$$

$$-8\epsilon_4\beta_1^2\beta_3^2\beta_2^2 + 32\epsilon_4\beta_1^2\beta_2^3\beta_4 + 56\beta_1^2\beta_3^2\beta_4 - 384)\beta_1^2\beta_4^2\beta_2 - 348\beta_1^2\beta_4^2\beta_2 + 544\beta_3\beta_4\beta_2^2$$

$$+ 544\beta_3\beta_4\beta_2\beta_1 + 128\epsilon_4\beta_3\beta_1\beta_4 - 128\beta_2^4\beta_4 + 32\beta_3^2\beta_2^3 + 216\beta_3^4\epsilon_4) = 0.$$

Logo, segue pelo item (ii) do Teorema (3.3.1), que $\hat{\xi}_i$ s geram livremente o $\text{Derlog}(\Delta_n^{Z_2})$. ■

3.4 Classificação dos Problemas de Bifurcação Z_2 -equivariantes via Formulação por Caminhos

Nesta seção, mostramos como obter a classificação dos problemas de bifurcação Z_2 -equivariantes via formulação por caminhos. Com isso, apresentamos uma forma alternativa de classificação àquela usando técnicas clássicas da Teoria de Singularidades, proposta por Golubitsky e Schaeffer em [1] e apresentada no capítulo 2.

Lembramos que todas as derivadas são calculadas na origem.

Teorema 3.4.1 (Teorema de Classificação via Formulação por Caminhos) Seja

$g(x, \lambda) = p(u, \lambda)x \in \mathcal{E}_{x, \lambda}(Z_2)$ um problema de bifurcação de centro organizador finito g_0 . Se $\text{cod}_{Z_2} g \leq 3$, então g é Z_2 -fortemente equivalente à forma normal dada em cada caso da tabela (3.1) se, e somente se, satisfizer as correspondentes condições de definição. Os casos são numerados de acordo com a tabela (2.1) da pág. 26 do capítulo 2 e $\delta_i^2 = 1$, $i = 1, \dots, 4$, $\sigma^2 = 1$ e m é um parâmetro modal.

Forma Normal	Centro Org.	Condições de Definição	Caminho	Codimensão do Caminho
$\hat{h}_1$	$\epsilon_1 ux$	$p_0 = 0,$ $p_u \neq 0$	$\delta_1 \lambda$	0
$\hat{h}_2$	$\epsilon_1 ux$	$p_0 = 0,$ $p_u \neq 0$	$\delta_2 \lambda^2$	1
$\hat{h}_3$	$\epsilon_2 u^2 x$	$p_0, p_u = 0,$ $p_{uu} \neq 0$	$(0, \delta_1 \lambda)$	1
$\hat{h}_4$	$\epsilon_1 ux$	$p_0 = 0,$ $p_u \neq 0$	$\delta_3 \lambda^3$	2
$\hat{h}_5$	$\epsilon_3 u^3 x$	$p_0, p_u, p_{uu} = 0$ $p_{uuu} \neq 0$	$(0, 0, \delta_3 \lambda)$	3
$\hat{h}_6$	$\epsilon_1 ux$	$p_0 = 0$ $p_u \neq 0$	$\delta_4 \lambda^4$	3
$\hat{h}_7$	$\epsilon_4 u^4 x$	$p_0, p_u, p_{uu},$ $p_{uuu} = 0$ $p_{uuuu} \neq 0$	$(0, 0, 0, \delta_4 \lambda)$	3
$\hat{h}_8$	$\epsilon_2 u^2 x$	$p_0, p_u = 0$ $p_{uu} \neq 0$	$(2m\lambda, \delta_2 \lambda^2)$	3
$\hat{h}_9$	$\epsilon_2 u^2 x$	$p_0, p_u = 0$ $p_{uu} \neq 0$	$(2\sigma\lambda, \delta_2 \lambda^2 + \delta_3 \lambda^3)$	3
$\hat{h}_{10}$	$\epsilon_2 u^2 x$	$p_0, p_u = 0$ $p_{uu} \neq 0$	$(2\sigma\lambda, \delta_3 \lambda^3)$	3
$\hat{h}_{11}$	$\epsilon_3 u^3 x$	$p_0, p_u, p_{uu} = 0$ $p_{uuu} \neq 0$	$(0, 2\sigma\lambda, \delta_2 \lambda^2)$	3

Tabela 3.1: Teorema de Classificação via Formulação por Caminhos



Formas Normais

$$\begin{aligned}\hat{h}_1(x, \lambda) &= (\bar{\beta}^* F_4^{Z_2})(x, \lambda) = (\epsilon_1 u + \delta_1 \lambda)x, \epsilon_1^2 = \delta_1^2 = 1, \\ \hat{h}_2(x, \lambda) &= (\bar{\beta}^* F_4^{Z_2})(x, \lambda) = (\epsilon_1 u + \delta_2 \lambda^2)x, \epsilon_1^2 = \delta_2^2 = 1, \\ \hat{h}_3(x, \lambda) &= (\bar{\beta}^* F_4^{Z_2})(x, \lambda) = (\epsilon_2 u^2 + \delta_1 \lambda)x, \epsilon_2^2 = \delta_1^2 = 1, \\ \hat{h}_4(x, \lambda) &= (\bar{\beta}^* F_4^{Z_2})(x, \lambda) = (\epsilon_1 u + \delta_3 \lambda^3)x, \epsilon_1^2 = \delta_3^2 = 1, \\ \hat{h}_5(x, \lambda) &= (\bar{\beta}^* F_6^{Z_2})(x, \lambda) = (\epsilon_3 u^3 + \delta_1 \lambda)x, \epsilon_3^2 = \delta_1^2 = 1, \\ \hat{h}_6(x, \lambda) &= (\bar{\beta}^* F_4^{Z_2})(x, \lambda) = (\epsilon_1 u + \delta_4 \lambda^4)x, \epsilon_1^2 = \delta_4^2 = 1, \\ \hat{h}_7(x, \lambda) &= (\bar{\beta}^* F_8^{Z_2})(x, \lambda) = (\epsilon_4 u^4 + \delta_1 \lambda)x, \epsilon_4^2 = \delta_1^2 = 1, \\ \hat{h}_8(x, \lambda) &= (\bar{\beta}^* F_4^{Z_2})(x, \lambda) = (\epsilon_2 u^2 + 2mu\lambda + \delta_2 \lambda^2)x, \epsilon_2^2 = \delta_2^2 = 1 \text{ e } m^2 \neq \epsilon_2 \delta_2, \\ \hat{h}_9(x, \lambda) &= (\bar{\beta}^* F_4^{Z_2})(x, \lambda) = (\delta_2 u^2 + 2\sigma u\lambda + \delta_2 \lambda^2 + \delta_3 \lambda^3)x, \delta_2^2 = \delta_3^2 = \sigma^2 = 1, \\ \hat{h}_{10}(x, \lambda) &= (\bar{\beta}^* F_4^{Z_2})(x, \lambda) = (\epsilon_2 u^2 + 2\sigma \lambda u + \delta_3 \lambda^3)x, \epsilon_2^2 = \delta_3^2 = \sigma^2 = 1, \\ \hat{h}_{11}(x, \lambda) &= (\bar{\beta}^* F_4^{Z_2})(x, \lambda) = (\epsilon_3 u^3 + 2\sigma \lambda u + \delta_2 \lambda^2)x, \epsilon_3^2 = \delta_2^2 = \sigma^2 = 1.\end{aligned}$$

Desdobramentos dos Centros Organizadores

Centro Organizador	Desdobramento
$A_2 : \epsilon_1 u x$	$F_2^{Z_2}(x, \lambda) = (\epsilon_1 u + \beta_1)x$
$A_4 : \epsilon_2 u^2 x$	$F_4^{Z_2}(x, \lambda) = (\epsilon_2 u^2 + \beta_2 u + \beta_1)x$
$A_6 : \epsilon_3 u^3 x$	$F_6^{Z_2}(x, \lambda) = (\epsilon_3 u^3 + \beta_1 u^2 + \beta_2 u^2 + \beta_3)x$
$A_8 : \epsilon_4 u^4 x$	$F_8^{Z_2}(x, \lambda) = (\epsilon_4 u^4 + \beta_1 u^3 + \beta_2 u^2 + \beta_3 u + \beta_4)x.$

Demonstração.

Para todos os casos, os centros organizadores utilizados estão na Proposição (3.2.1).

Demonstraremos o Teorema para a forma normal h_8 e usamos a mesma técnica para os demais casos.

Seja

$$\begin{aligned}\bar{\beta} : (\mathbb{R}, 0) &\longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0) \\ \lambda &\longmapsto \bar{\beta}(\lambda) = (\bar{\beta}_1(\lambda), \bar{\beta}_2(\lambda)) = ((\bar{\beta}_1)_\lambda \lambda, (\bar{\beta}_2)_{\lambda\lambda} \lambda^2),\end{aligned}$$

um caminho.

Vamos determinar os termos de ordem alta desse caminho.

O $\mathcal{UDerlog}^*(F_2^{Z_2})$ é gerado por

$$\begin{bmatrix} \beta_1^2 \\ 2\beta_1\beta_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_1\beta_2 \\ 2\beta_2^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4\beta_2 - \epsilon_2\beta_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O espaço tangente unipotente é

$$\begin{aligned}TUK_{\Delta_4^{Z_2}}(\bar{\beta}) &= \mathcal{M}_\lambda^2 \langle \bar{\beta}_\lambda \rangle + \bar{\beta}^*(\mathcal{UDerlog}^*(F_2^{Z_2})) \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} (\bar{\beta}_1)_\lambda \lambda^2 \\ 2(\bar{\beta}_2)_{\lambda\lambda} \lambda^3 \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} (\bar{\beta}_1)_\lambda^2 \lambda^2 \\ 2(\bar{\beta}_1)_\lambda (\bar{\beta}_2)_{\lambda\lambda} \lambda^3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (\bar{\beta}_1)_\lambda (\bar{\beta}_2)_{\lambda\lambda} \lambda^3 \\ 2(\bar{\beta}_2)_{\lambda\lambda}^2 \lambda^4 \end{bmatrix}, \right. \\ &\quad \left. \begin{bmatrix} (4(\bar{\beta}_2)_\lambda - \epsilon_2(\bar{\beta}_1)_\lambda^2) \lambda^2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle_{\mathcal{E}_\lambda}.\end{aligned}$$

Se $4(\bar{\beta}_2)_{\lambda\lambda} - \epsilon_2(\bar{\beta}_1)_\lambda^2 \neq 0$ e $(\bar{\beta}_2)_{\lambda\lambda} \neq 0$, então

$$TUK_{\Delta_4^{Z_2}}(\bar{\beta}) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_\lambda^2 \\ \mathcal{M}_\lambda^3 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\text{Itr}\{TUK_{\Delta_4^{Z_2}}(\bar{\beta})\} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_\lambda^2 \\ \mathcal{M}_\lambda^3 \end{pmatrix}.$$

Como $\text{Itr}\{TUK_{\Delta_4^{Z_2}}(\bar{\beta})\} \subset \vec{\mathcal{P}}_\lambda(\bar{\beta})$, segue que

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_\lambda^2 \\ \mathcal{M}_\lambda^3 \end{pmatrix} \subset \vec{\mathcal{P}}_\lambda(\bar{\beta})$$

e, portanto, concluímos que os termos de ordem maior ou igual a dois na primeira coordenada e os termos de ordem maior ou igual a três na segunda coordenada do desenvolvimento do caminho $\bar{\beta}$, podem ser desprezados porque são de ordem alta.

Dessa forma, o caminho associado será dado por

$$\bar{\beta}(\lambda) = ((\bar{\beta}_1)_\lambda \lambda, (\bar{\beta}_2)_{\lambda\lambda} \lambda^2),$$

com $(\bar{\beta}_1)_\lambda \neq 0$, $4(\bar{\beta}_2)_{\lambda\lambda} - \epsilon_2(\bar{\beta}_1)_\lambda^2 \neq 0$ e $(\bar{\beta}_2)_{\lambda\lambda} \neq 0$.

Assim sendo, o pull-back entre o caminho e o desdobramento do centro organizador é dado pela seguinte forma normal

$$(\bar{\beta}^* F_4^{Z_2})(x, \lambda) = F_4^{Z_2}(x, \bar{\beta}(\lambda)) = F_4^{Z_2}(x, (\bar{\beta}_1)_\lambda \lambda, (\bar{\beta}_2)_{\lambda\lambda} \lambda^2) = (\epsilon_2 u^2 + (\bar{\beta}_1)_\lambda u \lambda + (\bar{\beta}_2)_{\lambda\lambda} \lambda^2) x.$$

O espaço tangente ao caminho é dado por

$$\begin{aligned} T_e \mathcal{K}_{\Delta_4^{Z_2}}(\bar{\beta}) &= \mathcal{E}_\lambda < \bar{\beta}_\lambda > + \bar{\beta}^*(\text{Derlog}^*(F_2^{Z_2})) \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{E}_\lambda \\ \mathcal{M}_\lambda^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dessa forma, o espaço normal ao caminho é dado por

$$N\mathcal{K}_{\Delta_4^{Z_2}}(\bar{\beta}) = \frac{\vec{\mathcal{P}}_\lambda}{T_e \mathcal{K}_{\Delta_4^{Z_2}}(\bar{\beta})} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{E}_\lambda}.$$

Assim, a codimensão do caminho $\bar{\beta}$ é

$$\text{cod}_{\mathcal{K}_{\Delta_4^{Z_2}}} \bar{\beta} = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\vec{\mathcal{P}}_\lambda}{T_e \mathcal{K}_{\Delta_4^{Z_2}}(\bar{\beta})} = 3.$$

Usando a Formulação por Caminhos, mostramos que a forma normal

$$\hat{h}_8(x, \lambda) = (\epsilon_2 u^2 + (\bar{\beta}_1)_\lambda u \lambda + (\bar{\beta}_2)_{\lambda\lambda} \lambda^2) x,$$

é equivalente a forma normal h_8 obtida pelo Teorema (2.7.1).

Consideramos a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned} \hat{h}_8 &\mapsto s \hat{h}_8 \\ x &\mapsto tx \\ \lambda &\mapsto l\lambda, \end{aligned}$$

onde $s, t, l > 0$.

Assim,

$$s \hat{h}_8(tx, l\lambda) = s \epsilon_2 t^5 x^5 + s (\bar{\beta}_1)_\lambda t^3 x^3 l \lambda + s (\bar{\beta}_2)_{\lambda\lambda} l^2 \lambda^2 tx. \quad (3.46)$$

Fazendo

$$s \epsilon_2 t^5 = \epsilon_2, \quad \epsilon^2 = 1, \quad (3.47)$$

$$s (\bar{\beta}_1)_\lambda t^3 l = 2m, \quad (3.48)$$

$$s (\bar{\beta}_2)_{\lambda\lambda} l^2 t = \delta_2, \quad \delta^2 = 1, \quad (3.49)$$

e resolvendo o sistema de equações acima, obtemos

$$s = \frac{1}{t^5}, \quad l = \frac{t^2}{|(\bar{\beta}_2)_{\lambda\lambda}|} \quad \text{e} \quad 2m = \frac{(\bar{\beta}_1)_\lambda}{|(\bar{\beta}_2)_{\lambda\lambda}|}.$$

Substituindo em (3.46), segue que

$$\begin{aligned} \hat{h}_8(x, \lambda) &= \epsilon_2 x^5 + 2m x^3 \lambda + \delta_2 \lambda^2 x \\ &= (\epsilon_2 u^2 + 2mu \lambda + \delta_2 \lambda^2) x. \end{aligned}$$

Agora, como $(\bar{\beta}_2)_{\lambda\lambda} \neq 0$ e $4(\bar{\beta}_2)_{\lambda\lambda} - \epsilon_2 (\bar{\beta}_1)_\lambda^2 \neq 0$, segue que m está bem definido e $\delta_2 \epsilon_2 \neq m^2$. ■

Capítulo 4

Aplicação Física

Neste capítulo discutimos um sistema mecânico com Z_2 -simetria proposto inicialmente por Poston e Stewart em [1979].

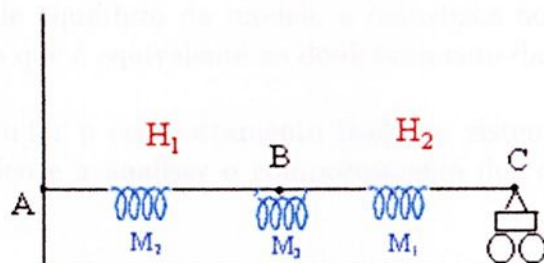


Figura 4.1: Modelo físico sem ação da força externa λ

Consideramos o sistema composto de duas hastes H_1 e H_2 ambas de comprimento L . A haste H_1 possui uma de suas extremidades fixa na lateral da armação de sustentação e a outra extremidade conectada a haste H_2 por meio de uma mola torsional. A outra extremidade da haste H_2 está conectada a um carrinho como mostra a figura (4.1). As conexões do sistema representadas pelos pontos A, B e C são feitas por pinos que permitem rotação no plano.

As hastes H_1 e H_2 possuem a propriedade de compressão (ou extensão) devido à presença de molas harmônicas M_1 e M_2 com mesma constante elástica $k_1 = k_2$, ou seja, as molas M_1 e M_2 possuem a mesma resistência ao sofrerem a ação de uma determinada força externa. Além disso, no ponto central de conexão das hastes (ponto B) está conectada a mola M_3 que difere das demais molas por ser não-linear e permitir torção.

Por simplicidade, assumimos que no diagrama mecânico há a presença de uma armação sustentadora, cuja função é garantir que as duas molas tenham igual compressão e impedir que o sistema todo sofra translação. Isso não muda nossa conclusão básica, mas simplifica as análises porque elimina um grau de liberdade desnecessário.

Estamos interessados em estudar o sistema descrito quando aplicamos uma força de compressão λ na extremidade do carrinho que compõe o sistema.

Quando λ é suficientemente grande, o sistema físico pode começar a deformar-se apresentando uma envergadura das hastes conforme a figura (4.2).

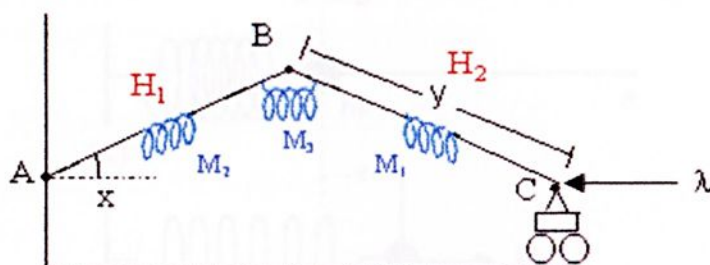


Figura 4.2: Modelo físico sobre ação da força externa λ

Nesta figura a coordenada x representa o ângulo que mede o desvio das hastes com relação a horizontal e a coordenada y mede a compressão do comprimento das hastes. Podemos observar que a variação de y nos mostra o quanto as molas M_1 e M_2 foram comprimidas.

Nosso objetivo neste capítulo é apresentar a equação que modela matematicamente o comportamento do sistema físico esquematizado na figura (4.2) em termos da energia do sistema. Analisamos as condições de equilíbrio do modelo e reduzimos nosso problema original para uma equação de bifurcação que é equivalente ao desdobramento da forma normal h_8 dada pelo Teorema (2.7.1).

Consequentemente, estudar o comportamento físico do sistema sobre a ação da força λ é qualitativamente equivalente a analisar o comportamento dos diagramas de bifurcação do desdobramento de h_8 .

4.1 Formulação Matemática da Energia do Sistema

A variação da energia potencial, ΔU , de um sistema físico é definida em termos do trabalho realizado W , pela relação

$$\Delta U = -W.$$

Como o trabalho por sua vez é dado por

$$W = \int_{s_i}^{s_f} F ds,$$

segue que

$$\Delta U = - \int_{s_i}^{s_f} F ds.$$

Para compreendermos o comportamento da força elástica que atua em nosso modelo físico consideramos uma mola ligada a uma partícula de massa m como mostra a figura (4.3).

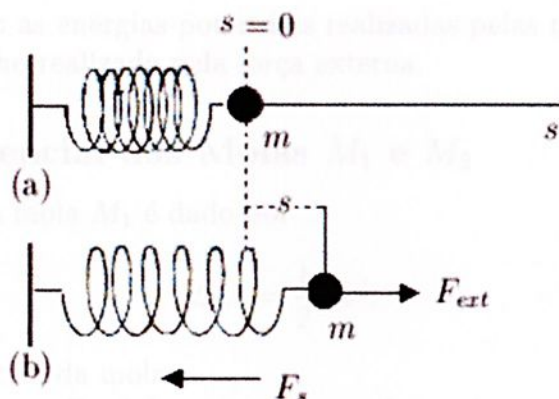


Figura 4.3: Representação da Força Elástica em uma Mola

Observa-se que a partícula se move horizontalmente, na direção do eixo Os , com origem $s = 0$ coincidindo com a posição da partícula quando a mola está relaxada, figura (4.3 (a)). Uma força externa F_{ext} age sobre a partícula em sentido oposto ao da força elástica. Supomos que a força externa seja sempre aproximadamente igual à força elástica, de modo que a partícula fique bem próxima do equilíbrio em todos os instantes.

A partícula é então deslocada de uma distância s em relação à sua posição original em $s = 0$ como mostra a figura (4.3 (b)). À medida que o agente exerce a força externa F_{ext} na partícula, a mola exerce a força F_s que é dada fisicamente com boa aproximação por

$$F_s = -ks, \quad (4.1)$$

onde k é uma constante positiva chamada *constante elástica* da mola. A constante k é uma medida da força necessária para produzir uma determinada compressão (ou extensão) na mola. Molas mais duras têm valores maiores para k . A equação (4.1) é conhecida como a *lei de Hooke*. O sinal negativo na equação (4.1) nos lembra que o sentido da força exercida pela mola é sempre oposto ao sentido do deslocamento do sistema estudado. Quando a mola está comprimida, F_s é positiva e quando a mola está estendida, F_s é negativa. A força exercida pela mola é uma força restauradora, pois sempre tenta restaurar o sistema em sua situação inicial $s = 0$.

O trabalho realizado sobre a partícula pela mola quando a partícula se move desde sua posição inicial $s_i = 0$ até a posição final $s_f = s$ é dado por

$$\begin{aligned} W &= \int_{s_i}^{s_f} F_s dx = \int_0^s (-ks) ds \\ &= -\frac{1}{2}ks^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

O trabalho realizado pela mola quando esta é comprimida de uma distância s é o mesmo que é realizado para distendê-la de igual distância s , pois o deslocamento s é elevado ao quadrado na equação (4.2).

Dessa forma, a energia potencial elástica é dada por

$$\Delta U = -(W) = -(-\frac{1}{2}ks^2) = \frac{1}{2}ks^2 \quad (4.3)$$

Recordamos que o sistema físico estudado neste capítulo é composto pela ação de uma força externa e por um conjunto de molas. Sendo assim, podemos considerar a energia total do sistema estudado como sendo dada por

$$\Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3 + W_4,$$

onde ΔU_1 , ΔU_2 e ΔU_3 são as energias potenciais realizadas pelas molas M_1 , M_2 e M_3 respectivamente e W_4 é o trabalho realizado pela força externa.

4.1.1 Energia Potencial das Molas M_1 e M_2

A energia potencial da mola M_1 é dado por

$$\Delta U_1 = \frac{1}{2} k_1 s^2,$$

onde k_1 é a constante elástica da mola.

Como inicialmente a haste H_1 tinha comprimento L e após a ação da força o comprimento passou para y concluímos que $s = y - L$.

Considerando $k_1 = k$, seque que

$$\Delta U_1 = k \frac{(y - L)^2}{2}.$$

Agora, sendo a mola M_2 idêntica a mola M_1 , seque que

$$\Delta U_2 = k \frac{(y - L)^2}{2}.$$

4.1.2 Energia Potencial da Mola M_3

Sabemos inicialmente que a mola central é não-linear. Assim, para calcular o trabalho realizado pela mola M_3 supomos que esta atue no sistema com uma força $F(x)$.

Fazendo o desenvolvimento de Taylor até terceira ordem de $F(x)$ em torno da origem, obtemos

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2}F''(0)x^2 + \frac{1}{3!}F'''(0)x^3 + \dots$$

O termo $F(0)$ pode ser desconsiderado, pois ele apenas desloca o ponto de equilíbrio da mola, não introduzindo assim, nenhum efeito adicional em nossas análises. Considerando que o sistema esteja sujeito a forças restauradoras, o termo proporcional x^2 é desprezado uma vez que ele provoca força apenas em uma direção. Com estas considerações, obtemos

$$\begin{aligned} F(x) &= F'(0)x + \frac{1}{3!}F'''(0)x^3 + \dots \\ &= -c_1x - \frac{1}{6}c_2x^3 + \dots, \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, neste caso a força sempre atua no sentido da posição de equilíbrio.

Assim sendo,

$$\begin{aligned} \Delta U_3 &= - \left(\int_0^x F(x) dx \right) = - \left(\int_0^x -(c_1x + \frac{1}{6}c_2x^3) dx \right) \\ &= \frac{1}{2}c_1x^2 + \frac{1}{24}c_2x^4. \end{aligned} \quad (4.5)$$



4.1.3 Trabalho realizado pela Força Externa

O trabalho realizado pela força externa é dado por

$$W_4 = F\Delta S = \lambda\Delta S,$$

onde ΔS é o deslocamento na direção da força aplicada.

Sabemos que após a aplicação da força as hastes passam a ter comprimento y . Como as hastes estão no plano inclinado e a força externa é aplicada horizontalmente ao carrinho, temos que calcular a componente horizontal do deslocamento y , ou seja,

$$\cos(x) = \frac{\Delta S}{y} \Rightarrow \Delta S = \cos(x)y.$$

Dessa forma, como o fenômeno físico ocorre simultaneamente nas duas hastes, o trabalho realizado pela força externa é dado por

$$W_4 = 2\lambda \cos(x)y.$$

Portanto, concluímos que a energia do sistema é dada por

$$k \frac{(y-L)^2}{2} + k \frac{(y-L)^2}{2} + \frac{1}{2}c_1x^2 + \frac{1}{24}c_2x^4 + 2\lambda \cos(x)y =$$

$$k(y-L)^2 + 2y\lambda \cos(x) + \frac{1}{2}c_1x^2 + \frac{1}{24}c_2x^4.$$

Fazendo a mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned} x &\mapsto ax, \\ y &\mapsto by, \\ \lambda &\mapsto c\lambda, \\ L &\mapsto dL, \\ V &\mapsto AV, \end{aligned}$$

obtemos

$$V(x, y, \lambda, k, \xi) = k(y-1)^2 + \frac{1}{2}x^2 + \xi \frac{1}{24}x^4 + 2\lambda y \cos(x),$$

onde

$$A = \frac{1}{c_1}, a = 1, b = \sqrt{c_1}, c = \sqrt{c_1}, d = \frac{L}{\sqrt{c_1}}, \xi = \frac{c_2}{c_1} \text{ e } c_1 > 0.$$

A força λ é o parâmetro de bifurcação principal.

4.2 Estabilidade das soluções

Temos um potencial $V = V(x, y, \Lambda)$, onde Λ é o conjunto de todos os parâmetros (λ, k, ξ) , sendo λ o parâmetro principal de bifurcação e os demais parâmetros de desdobramento.

O potencial V é Z_2 -invariante em x , isto é, $V(-x, y, \Lambda) = V(x, y, \Lambda)$.

Estamos procurando soluções de equilíbrio do problema que são soluções do sistema

$$V_x(x, y, \Lambda) = 0, \quad (4.6)$$

$$V_y(x, y, \Lambda) = 0. \quad (4.7)$$

Suponhamos que possamos resolver (4.7) em função de y usando o Teorema da Função Implícita, isto é, $V_y(0, y_0, \Lambda_0) = 0$ e $V_{yy}(0, y_0, \Lambda_0) \neq 0$. Então, existe um único $y = \bar{y}(x, \Lambda)$ que é solução de (4.7) com $\bar{y}(0, \Lambda_0) = y_0$.

Além disso, da igualdade $V(-x, \bar{y}(-x, \Lambda), \Lambda) = V(x, \bar{y}(x, \Lambda), \Lambda)$, segue pela unicidade que $\bar{y}(-x, \Lambda) = \bar{y}(x, \Lambda)$.

Este processo corresponde ao chamado Processo de Redução de Liapunov-Schmidt. No nosso modelo, y é obtido diretamente de $V_y = 0$.

Substituindo y por $\bar{y}(x, \Lambda)$ na equação (4.6), obtemos a equação de bifurcação.

Definimos a equação de bifurcação reduzida por

$$g(x, \Lambda) = -V_x(x, \bar{y}(x, \Lambda), \Lambda). \quad (4.8)$$

Como está equação tem uma variável padrão, o problema de bifurcação é de corank 1.

O próximo lema relaciona resultados do potencial V com problema de bifurcação g . Um zero de g corresponde a um ponto estacionário do potencial V . O Lema (4.2.1) estabelece relação entre a estabilidade dos pontos estacionários de V com o sinal da derivada de g . Dizemos que um ponto estacionário é estável se é um mínimo local de V . A estabilidade das soluções de $g = 0$ corresponde à estabilidade da equação diferencial ordinária $\dot{x} = g(x, \Lambda)$, isto é, uma solução de equilíbrio é estável se $g_x < 0$.

Lema 4.2.1 Se $V_{yy}(0, y_0, \Lambda_0) < 0$, então V não tem mínimo local numa vizinhança de $(0, y_0, \Lambda_0)$. Se $V_{yy}(0, y_0, \Lambda_0) > 0$, então x é uma solução de equilíbrio estável para $\dot{x} = g(x, \Lambda)$ se, e somente se, $(x, \bar{y}(x, \Lambda))$ é um mínimo de V (ou $g_x(x, \Lambda) < 0$ se, e somente se, $(x, \bar{y}(x, \Lambda))$ é um mínimo de V).

Demonstração.

Para um ponto ser um mínimo de V precisamos que o determinante e o traço da matriz Hessiana de V sejam positivos, isto é, $V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2 > 0$ e $V_{xx} + V_{yy} > 0$.

O ponto $(0, y_0, \Lambda_0)$ é de bifurcação, então $g_x(0, y_0, \Lambda_0) = 0$, o que implica que $V_{xx}(0, y_0, \Lambda_0) = 0$.

Assim, $V_{xx}(0, y_0, \Lambda_0) + V_{yy}(0, y_0, \Lambda_0)$ tem o sinal de $V_{yy}(0, y_0, \Lambda_0)$. Se for negativo, o traço da matriz Hessiana de V é negativo numa vizinhança de $(0, y_0, \Lambda_0)$ e não podemos ter um mínimo.

Logo, $V_{yy} > 0$ numa vizinhança do ponto $(0, y_0, \Lambda_0)$.

Além disso, $g_x(x, \Lambda) = -V_{xx}(x, \bar{y}, \Lambda) - V_{xy}(x, \bar{y}, \Lambda)\bar{y}_x$, $y = \bar{y}(x, \Lambda)$. A solução $\bar{y}_x$ é dada por

$$V_{xy}(x, \bar{y}, \Lambda) + V_{yy}(x, \bar{y}, \Lambda)\bar{y}_x(x, \Lambda) = 0,$$

$$\bar{y}_x(x, \Lambda) = -\frac{V_{xy}(x, \bar{y}, \Lambda)}{V_{yy}(x, \bar{y}, \Lambda)}. \quad (4.9)$$

Consequentemente,

$$g(x, \Lambda) = -\frac{\det \text{Hess}(V(x, \bar{y}, \Lambda))}{V_{yy}(x, \bar{y}, \Lambda)}. \quad (4.10)$$

Portanto, $g_x(x, \Lambda) < 0$ se, e somente se, $\det \text{Hess}(V) > 0$. ■

Estamos interessados nas soluções de equilíbrio do sistema ou pontos estacionários da energia do modelo, isto é,

$$\begin{cases} V_x(x, y, \lambda, k, \xi) = 0 \\ V_y(x, y, \lambda, k, \xi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{6}\xi x^3 - 2\lambda y \sin(x) = 0 \\ k(y - 1) + \lambda \cos(x) = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

Da segunda equação de (4.11), segue que

$$y = \bar{y}(x, \Lambda) = 1 - \frac{\lambda \cos(x)}{k}. \quad (4.12)$$

Observamos que y é, também, Z_2 -invariante.

Assim, definimos a equação de bifurcação por

$$\begin{aligned} g(x, \lambda, k, \xi) &= -V_x(x, \bar{y}(x, \Lambda), \lambda, k, \xi) \\ &= -x - \frac{1}{6}\xi x^3 + 2\lambda \sin(x) - \frac{1}{k}\lambda^2 \sin(2x). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Uma solução $(\bar{x}, \bar{\Lambda})$ de (4.13) corresponde a uma solução $(\bar{x}, \bar{y}(\bar{x}, \bar{\Lambda}), \bar{\Lambda})$ do sistema (4.11) com a estabilidade dada pelo Lema (4.2.1).

O germe g é Z_2 -equivariante, pois

$$\begin{aligned} g(-x, \lambda, k, \xi) &= -(-x) - \frac{1}{6}\xi(-x)^3 + 2\lambda \sin(-x) - \frac{1}{k}\lambda^2 \sin(-2x) \\ &= x + \frac{1}{6}\xi x^3 - 2\lambda \sin(x) + \frac{1}{k}\lambda^2 \sin(2x) \\ &= -g(x, \lambda, k, \xi). \end{aligned}$$

Resolvendo a equação $g(x, \lambda, k, \xi) = 0$, obtemos

(1) $x = 0$ é solução para todo λ e corresponde à posição de equilíbrio do modelo. Neste caso, $y = \bar{y}(0) = 1 - \frac{\lambda}{k}$.

(2) Para $x \neq 0$, obtemos

$$\lambda_{\pm}(x) = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - k \cotg(x)(2x + \frac{1}{6}\xi x^3)}}{2 \cos(x)} \quad (4.14)$$

e o comprimento dos suportes é

$$\bar{y}_{\pm}(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{\cotg(x)}{k}(2x + \frac{1}{6}\xi x^3)}}{2}. \quad (4.15)$$

Da análise feita em [1], observamos que resolvendo as equações de definição

$$\begin{cases} g_x(0, \lambda, k, \xi) = 0 \\ g_{x\lambda}(0, \lambda, k, \xi) = 0 \\ g_{xxx}(0, \lambda, k, \xi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-2\lambda^2}{k} + 2\lambda - 1 = 0 \\ \frac{-4\lambda}{k} + 2 = 0 \\ \frac{8\lambda^2}{k} - 2\lambda - \xi = 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

obtemos $(\bar{\lambda}, \bar{k}, \bar{\xi}) = (1, 2, 2)$.

Numa vizinhança do ponto $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{k}, \bar{\xi}) = (0, 1, 2, 2)$, obtemos a forma normal

$$h(x, \lambda) = (Au^2 + Bu\lambda + C\lambda^2)x, \quad (4.17)$$

onde

$$A = \frac{1}{5!} g_{xxxxx}(0, 1, 2, 2),$$

$$B = \frac{1}{3!} g_{xxx\lambda}(0, 1, 2, 2),$$

$$C = \frac{1}{2!} g_{x\lambda\lambda}(0, 1, 2, 2).$$

Agora, como

$$g_{xxxxx}(0, \lambda, k, \xi) = 2\lambda - \frac{32\lambda^2}{k},$$

$$g_{xxx\lambda}(0, \lambda, k, \xi) = -2 + \frac{16\lambda}{k},$$

$$g_{x\lambda\lambda}(0, \lambda, k, \xi) = \frac{-4}{k},$$

segue que a forma normal (4.17) é descrita por

$$h(x, \lambda) = \left(-\frac{7}{60}u^2 + u\lambda - \lambda^2\right)x. \quad (4.18)$$

Fazendo a mudança de coordenadas

$$x \mapsto ax,$$

$$\lambda \mapsto b\lambda,$$

$$h \mapsto ch$$

para resolver (4.18), obtemos

$$h(x, \lambda) = -x^5 + \sqrt{\frac{60}{7}}x^3\lambda - \lambda^2x.$$

O Z_2 -desdobramento miniversal de h é dado por

$$\begin{aligned} H(x, \lambda, k, \xi) &= -x^5 + \sqrt{\frac{60}{7}}x^3\lambda - \lambda^2x + kx + \xi x^3 \\ &= (-u^2 + \sqrt{\frac{60}{7}}u\lambda - \lambda^2 + k + \xi u)x. \end{aligned} \quad (4.19)$$

A equação (4.19) é o desdobramento da forma normal h_8 pág. 26, com $m = \sqrt{\frac{15}{7}}$.

4.3 Diagramas de Bifurcação

Seja $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x, \lambda, \alpha) = R(u, \lambda, \alpha)x$, um Z_2 -desdobramento miniversal com k -parâmetros de um germe $g \in \tilde{\mathcal{O}}_{x,\lambda}(Z_2)$.

Definição 4.3.1

$$\mathcal{B}_1(Z_2) = \{\alpha \in \mathbb{R}^k \mid \exists (u, \lambda), u > 0 : R = R_u = R_\lambda = 0 \text{ no ponto } (u, \lambda, \alpha)\}.$$

$$\mathcal{B}_0(Z_2) = \{\alpha \in \mathbb{R}^k \mid \exists \lambda : R = R_\lambda = 0 \text{ no ponto } (0, \lambda, \alpha)\}.$$

$$\mathcal{H}_1(Z_2) = \{\alpha \in \mathbb{R}^k \mid \exists (u, \lambda), u > 0 : R = R_u = R_{uu} = 0 \text{ no ponto } (u, \lambda, \alpha)\}.$$

$$\mathcal{H}_0(Z_2) = \{\alpha \in \mathbb{R}^k \mid \exists \lambda : R = R_u = 0 \text{ no ponto } (0, \lambda, \alpha)\}.$$

$$\mathcal{D}(Z_2) = \{\alpha \in \mathbb{R}^k \mid \exists \lambda, u_1, u_2 (u_1 \neq u_2 : u_1, u_2 \geq 0) : R = uR_u = 0 \text{ nos pontos } (u_1, \lambda, \alpha) \text{ e } (u_2, \lambda, \alpha)\}.$$

$$\Sigma(Z_2) = \mathcal{B}_1(Z_2) \cup \mathcal{B}_0(Z_2) \cup \mathcal{H}_1(Z_2) \cup \mathcal{H}_0(Z_2) \cup \mathcal{D}(Z_2) \text{ é chamado conjunto de transição.}$$

Aplicando a definição (4.18) à equação (4.13), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0(Z_2) &= \{(k, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda : g_x = g_{x\lambda} = 0 \text{ no ponto } (0, \lambda, k, \xi)\} \\ &= \{(k, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mid k = 2 \text{ e } \lambda = 1\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0(Z_2) &= \{(k, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda : g_x = g_{xxx} = 0 \text{ no ponto } (0, \lambda, k, \xi)\} \\ &= \left\{ (k, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mid k = \frac{1}{6} \frac{(4 + \xi)^2}{(1 + \xi)} \text{ e } \lambda = 1 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1(Z_2) &= \{(k, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (x, \lambda), x \neq 0 : g = g_x = g_\lambda = 0 \text{ no ponto } (x, \lambda, k, \xi)\} \\ &= \left\{ (k, \xi) \in \mathbb{R}^2 \mid k = \frac{12}{49}(\xi - 2)^2 + 2 + O((\xi - 2)^4) \right\}. \end{aligned}$$

Observamos que ao resolvermos as equações que definem $\mathcal{B}_1(Z_2)$, obtemos

$$k = \bar{k}(x) = \frac{4x \cos^2(x)}{3\sin(x) \cos(x) - x} \quad (4.20)$$

e

$$\xi = \bar{\xi}(x) = \frac{6(x - \sin(x) \cos(x))}{x^2(3\sin(x) \cos(x) - x)}. \quad (4.21)$$

Então,

$$\bar{k}(x) = \frac{1}{12}x^4 + 2 + \dots \quad (4.22)$$

$$\bar{\xi}(x) = -\frac{7}{12}x^2 + 2 + \dots \quad (4.23)$$

Como função de ξ , $\xi - 2 = -\frac{12}{7}x^2 + \dots$ e

$$\bar{k}(\xi) = 2 + \frac{12}{49}(\xi - 2)^2 + \dots \quad (4.24)$$

com $\xi \geq 2$.

O conjunto de transição para o problema estudado é dado pela figura (4.4)

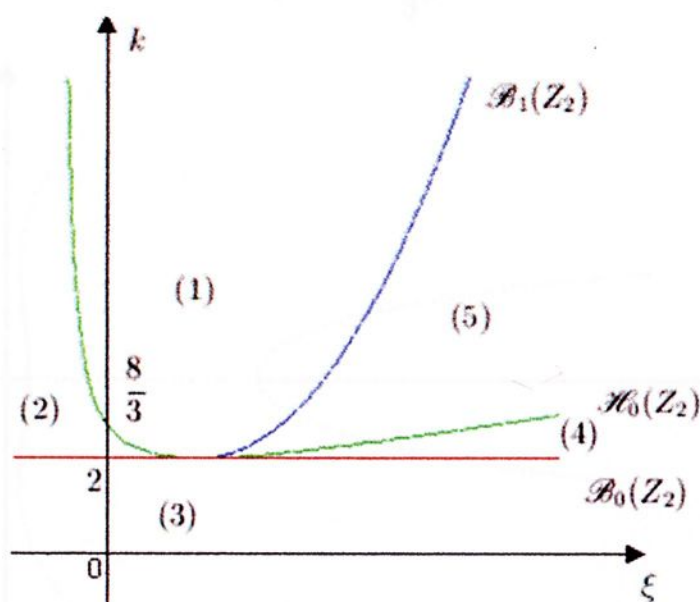


Figura 4.4: Conjunto de Transição

Quando $\xi = 0$, temos as regiões (1) quando $k > \frac{8}{3}$; (2) quando $k \in (2, \frac{8}{3})$ e (3) quando $k < 2$. As regiões (4) ou (5) ocorrem quando $\xi > 2$ e $k > 2$.

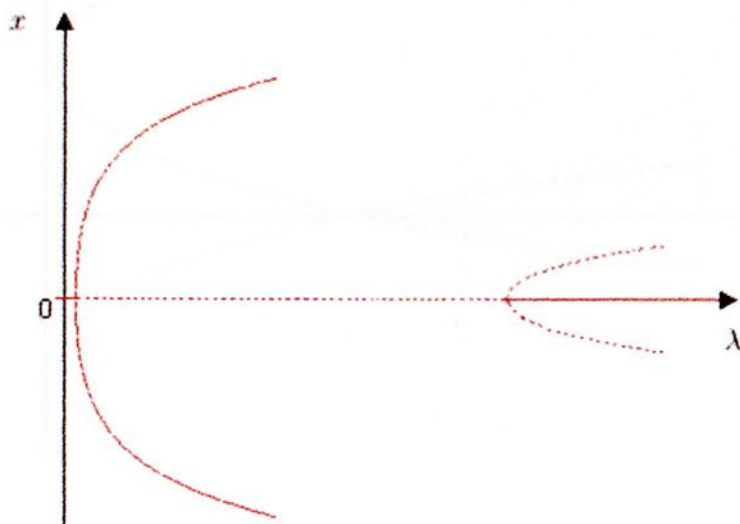
À cada região do conjunto de transição temos um diagrama de bifurcação.

Vamos mostrar um esboço dos diagramas de bifurcação em cada região, usando o Maple.

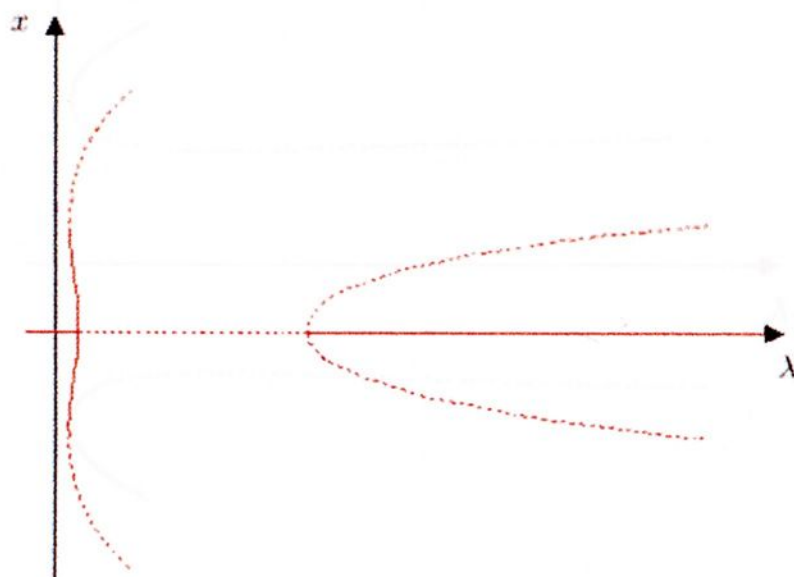
As soluções tracejadas são instáveis e as contínuas são as estáveis, ou seja, são aquelas que não se alteram por pequenas perturbações.

Nos diagramas abaixo, consideramos $\xi = 0$.

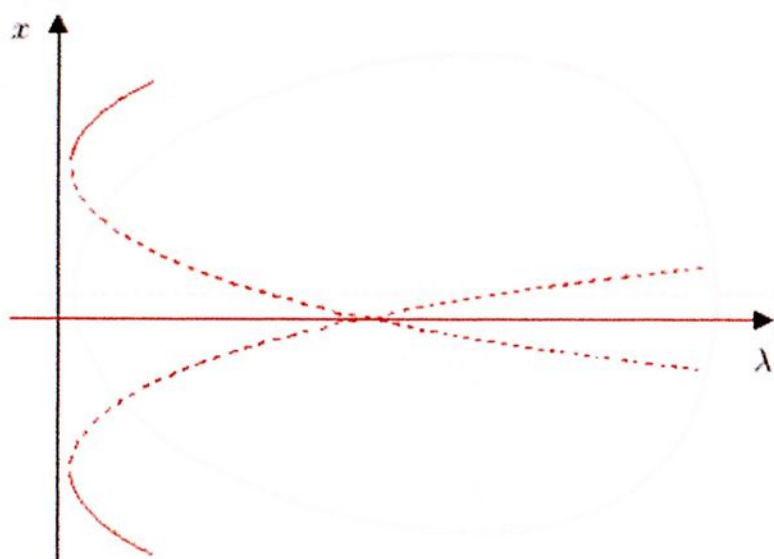
$$(k > \frac{8}{3})$$



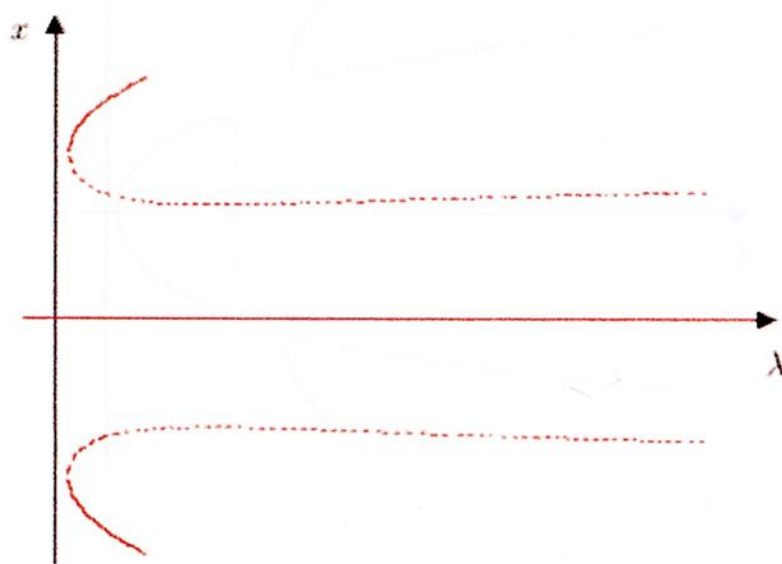
$$(2 < k < \frac{8}{3})$$



Para ξ e η dados os diagramas correspondentes ($k = 2$) respectivamente, de acordo com (43) e (44)



($k < 2$)



Para $\xi \neq 0$ temos os diagramas correspondentes, respectivamente, às regiões (4) e (5)

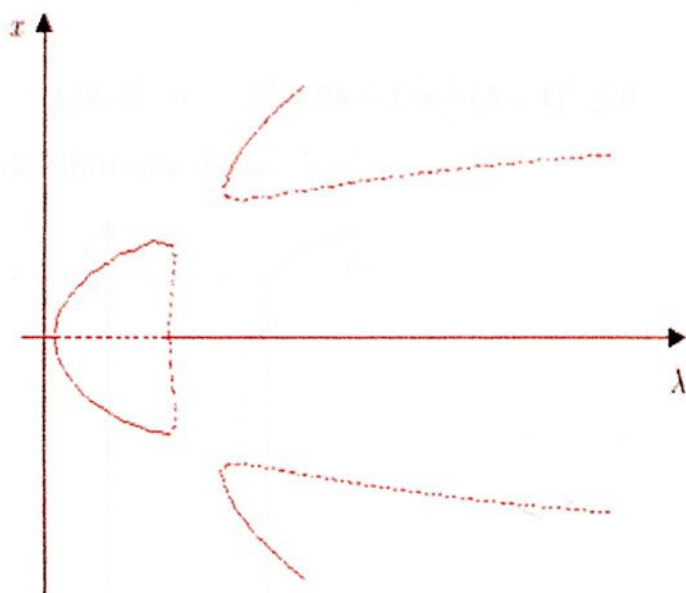
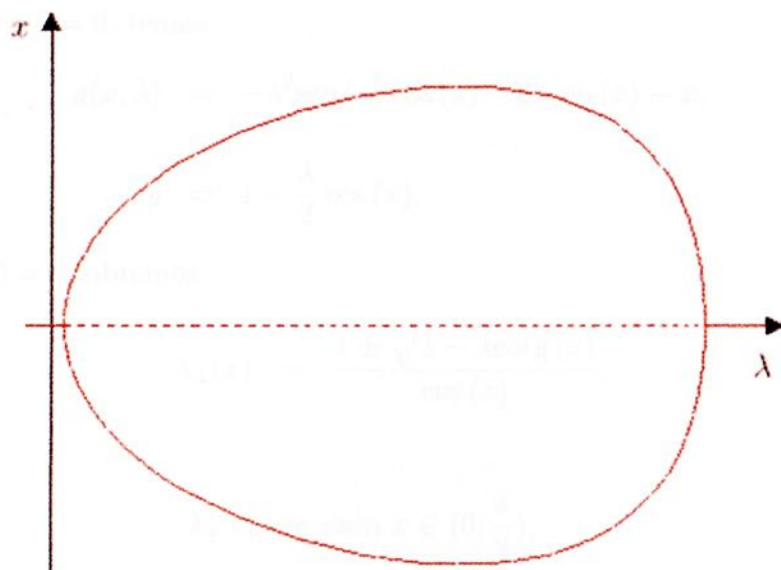


Figura 1.5: Diagramas de bifurcação para $k = 2$ e $\xi \neq 0$

4.4 Análise física do caso $k = 2$

Quando $k = 2$ e $\xi = 0$, temos

$$g(x, \lambda) = -\lambda^2 \sin(x) \cos(x) + 2\lambda \sin(x) - x, \quad (4.25)$$

$$y = 1 - \frac{\lambda}{2} \cos(x). \quad (4.26)$$

Fazendo $g(x, \lambda) = 0$, obtemos

$$\lambda_{\pm}(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \lambda \cotg(x)}}{\cos(x)}, \quad (4.27)$$

onde

$$\lambda_+ \text{ existe para } x \in (0, \frac{\pi}{2}),$$

$$\lambda_- \text{ existe para } x \in (0, \pi).$$

Estabilidade de $x = 0$:

$$g_x(0, \lambda) = -\lambda^2 + 2\lambda - 1 = -(\lambda - 1)^2 \leq 0. \quad (4.28)$$

$\lambda = 1$ é um ponto de bifurcação duplo.

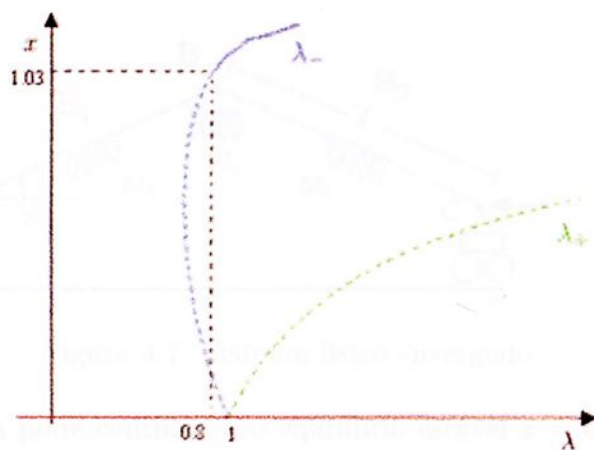


Figura 4.5: Diagrama de bifurcação para $k = 2$ e $\xi = 0$

Do ponto de vista físico, a existência de um ponto de bifurcação duplo ($\lambda = 1$), estabelece uma maior variação do comportamento dinâmico do modelo estudado.

Para valores iniciais de λ , temos um comportamento estável do sistema com relação a força externa aplicada, ou seja, não há variação angular do sistema ($x = 0$) e, conseqüentemente, não ocorre envergadura do diagrama físico (figura 4.6). Assim, o deslocamento do sistema acontece apenas horizontalmente devido a capacidade de compressão das molas que compõem as hastes. Em outras palavras, a força externa não é suficientemente grande para superar a força torsional produzida pela mola central.

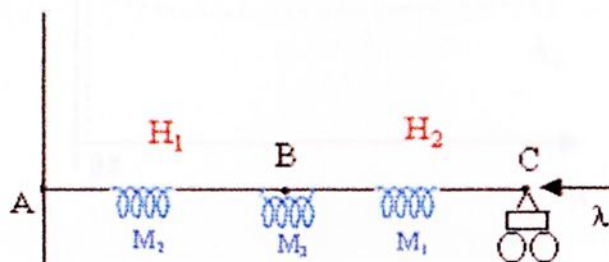


Figura 4.6: Movimento horizontal do sistema

Quando a força externa está próxima a atingir a intensidade $\lambda = 1$, ocorre o estágio de maior instabilidade do sistema. Para $\lambda = 1$ o diagrama físico permanece em equilíbrio com a horizontal (não há envergadura), mas pequenas perturbações podem ocasionar o fenômeno de envergadura esperado (figura (4.7)).

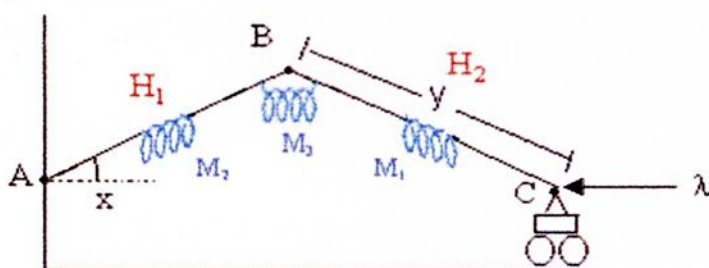


Figura 4.7: Sistema físico envergado

Neste ponto, o sistema pode continuar no equilíbrio estável $x = 0$ ou entrar em equilíbrio instável correspondente as soluções λ_+ e λ_- . A solução λ_+ corresponde a solução sempre instável, por outro lado, a solução λ_- permite uma região de estabilidade após passar por um trecho instável.

Desta forma, para $\lambda > 1$ três soluções são possíveis, duas estáveis e uma instável.

4.5 Análise física do caso $k < 2$

O diagrama de bifurcação do caso $k < 2$ é

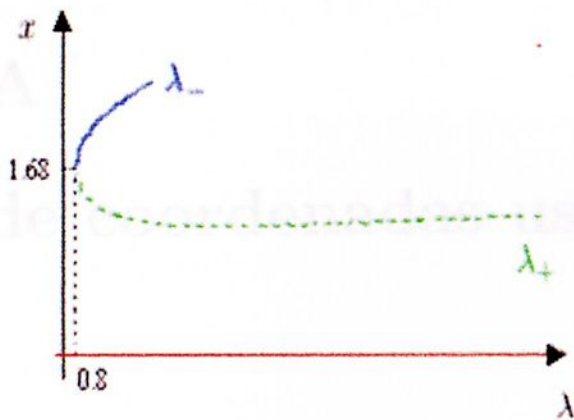


Figura 4.8: Diagrama de bifurcação para $k = 2$ e $\xi = 0$

A interpretação física é que para $\lambda < 0.8$ as hastes não envergam. Dessa forma, o modelo físico movimenta-se apenas horizontalmente (figura 4.6), permanecendo estável nesta posição.

Quando $\lambda > 0.8$, três soluções são possíveis, duas estáveis e uma instável. Uma solução estável corresponde a $x=0$, ou seja, o sistema não enverga. A solução λ_- indica outra região de estabilidade, neste caso o ângulo x aumenta com o aumento da força λ . Por fim, a solução correspondente a λ_+ é estável, ou seja, perturbações nesta solução leva o sistema para uma solução estável e ali permanece.

Apêndice A

Mudança de coordenadas usando o MAPLE

Mostramos, detalhadamente, os cálculos necessários para a obtenção do método clássico descrito na prova do Teorema (2.7.1).

Notações.

- $p_2 = p'$;
- $p_0 = p(0, 0)$, $a_0 = a(0, 0)$, etc.;
- $p_u = p_u(0, 0)$, $p_{uu} = p_{uu}(0, 0)$, etc.;
- $p_l = p_\lambda(0, 0)$, $p_{ul} = p_{u\lambda}(0, 0)$, etc.;
- T: desenvolvimento de Taylor de um germe dado;
- c_{20}, c_{2u} , etc. : coeficientes da expansão de Taylor de p' ;
- $P = \tilde{p}a$;
- P_{00}, P_{10} , etc. : coeficientes da expansão de Taylor de P não simplificados;
- P_0, P_u , etc. : coeficientes da expansão de Taylor de P simplificados;
- $Q = sp'$;
- Q_{00}, Q_{10}, Q_{01} , etc. : coeficientes da expansão de Taylor de Q ;

• $p_4 = p''$.

> restart:

Desenvolvimento de Taylor até ordem 4 de $p_2(u,l)$ em torno da origem.

> mTaylor(p2(u,l), [u,l], 5):

```
> T(u,l):=p2(0,0)+D[1](p2)(0,0)*u+D[2](p2)(0,0)*1+1/2*D[1,1](p2)(0,0)*u
> ^2+u*D[1,2](p2)(0,0)*1+1/2*D[2,2](p2)(0,0)*1^2+1/6*u^3*D[1,1,1](p2)(0,
> 0)+1/2*u^2*D[1,1,2](p2)(0,0)*1+1/2*u*1^2*D[1,2,2](p2)(0,0)+1/6*1^3*D[2
> ,2,2](p2)(0,0)+1/24*u^4*D[1,1,1,1](p2)(0,0)+1/6*u^3*D[1,1,1,2](p2)(0,0
> )*1+1/4*u^2*1^2*D[1,1,2,2](p2)(0,0)+1/6*u*1^3*D[1,2,2,2](p2)(0,0)+1/24
> *1^4*D[2,2,2,2](p2)(0,0):
```

Assim, os coeficientes do desenvolvimento de Taylor de $p_2(u,l)$ são dados por

> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [0,0]):

> c20:=p20:

> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [1,0]):

> c2u:=p2u:

> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [0,1]):

> c2l:=p2l:

> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [2,0]):

> c2uu:=1/2*p2uu:

> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [1,1]):

> c2ul:=p2ul:

> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [0,2]):

> c2ll:=1/2*p2ll:

> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [0,3]):

> c2lll:=1/6*p2lll:

> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [4,0]):

> c2uuuu:=1/24*p2uuuu:

> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [3,1]):

> c2uuul:=1/6*p2uuul:

> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [2,2]):


```

> c2uull:=1/4*p2uull:

> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [1,3]):
> c2ulll:=1/6*p2ulll:

> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [0,4]):
> c2llll:=1/24*p2llll:

```

```

> restart:

```

Coeficientes de p2.

```

> c20:=p20:
                                c20 := p20

> c2u:=p2u:
                                c2u := p2u

> c2l:=p2l:
                                c2l := p2l

> c2uu:=1/2*p2uu:
                                c2uu := 1/2 p2uu

> c2ul:=p2ul:
                                c2ul := p2ul

> c2ll:=1/2*p2ll:
                                c2ll := 1/2 p2ll

> c2uuu:=1/6*p2uuu:
                                c2uuu := 1/6 p2uuu

> c2uul:=1/2*p2uul:
                                c2uul := 1/2 p2uul

> c2ull:=1/2*p2ull:
                                c2ull := 1/2 p2ull

> c2lll:=1/6*p2lll:
                                c2lll := 1/6 p2lll

> c2uuuu:=1/24*p2uuuu:
                                c2uuuu := 1/24 p2uuuu

> c2uuul:=1/6*p2uuul:
                                c2uuul := 1/6 p2uuul

> c2uull:=1/4*p2uull:

```



$$c2uull := \frac{1}{4} p2uull$$

> c2ulll:=1/6*p2ulll:

$$c2ulll := \frac{1}{6} p2ulll$$

> c2llll:=1/24*p2llll:

$$c2llll := \frac{1}{24} p2llll$$

> restart:

> p0:=0:

Desenvolvimento de Taylor até ordem 4 de $P(u,l)$ em torno da origem.

> P(u,l):=p(a(u,l)*a(u,l)*u,l)*a(u,l):

> T(u,l):=mTaylor(P(u,l),[u,l],5):

> coeftayl(T(u,l),[u,l]=[0,0],[0,0]):

> P00:=p0*a0:

> coeftayl(T(u,l),[u,l]=[0,0],[1,0]):

> P10:=p0*au+pu*a0^3:

> coeftayl(T(u,l),[u,l]=[0,0],[0,1]):

> P01:=p0*al+pl*a0:

> coeftayl(T(u,l),[u,l]=[0,0],[2,0]):

> P20:=1/2*p0*auu+pu*a0^2*au+(1/2*a0^4*puu+2*pu*a0*au)*a0:

> coeftayl(T(u,l),[u,l]=[0,0],[1,1]):

> P11:=pl*au+pu*a0^2*al+p0*aul+(a0^2*pul+2*pu*a0*al)*a0:

> coeftayl(T(u,l),[u,l]=[0,0],[0,2]):

> P02:=pl*al+1/2*p11*a0+1/2*p0*all:

> coeftayl(T(u,l),[u,l]=[0,0],[3,0]):

> P30:=1/2*pu*a0^2*auu+(1/2*a0^4*puu+2*pu*a0*au)*au+1/6*p0*auuu+

> (2*a0^3*au*puu+pu*a0*auu+1/6*a0^6*puuu+pu*au^2)*a0:

> P30 :=

> 1/2*pu*a0^2*auu+(1/2*a0^4*puu+2*pu*a0*au)*au+(2*a0^3*au*puu+pu*a0*auu+

> 1/6*a0^6*puuu+pu*au^2)*a0:

> coeftayl(T(u,l),[u,l]=[0,0],[2,1]):

```
> P21:=1/2*p1*auu+pu*a0^2*aul+(a0^2*pul+ 2*pu*a0*al)*au+ (1/2*a0^4*puu+
> 2*pu*a0*au)*al+ 1/2*p0*auul+(2*a0^3*al*puu+2*a0*au*pul+ 2*pu*a0*aul+
> 2*pu*au*al+ 1/2*a0^4*puul)*a0:
```

```
> coeftayl(T(u,1), [u,1]=[0,0], [1,2]):
> P12:=p1*aul+1/2*pu*a0^2*all+1/2*p11*au+(a0^2*pul+2*pu*a0*al)*al
> +1/2*p0*auul+(1/2*a0^2*puul+pu*al^2+2*a0*al*pul+pu*a0*all)*a0:
```

```
> coeftayl(T(u,1), [u,1]=[0,0], [0,3]):
> P03:=1/2*p1*all+1/2*p11*al+1/6*p0*alll+1/6*p111*a0:
```

```
> coeftayl(T(u,1), [u,1]=[0,0], [4,0]):
> P40:=1/24*p0*auuuu+(a0^5*au*puuu+pu*au*auu+1/3*pu*a0*auuu+
> a0^3*auu*puu+3*a0^2*au^2*puu+1/24*a0^8*puuuu)*a0+
> 1/6*pu*a0^2*auuu+1/2*(1/2*a0^4*puu+2*pu*a0*au)*auu+
> (pu*a0*auu+1/6*a0^6*puuu+2*a0^3*au*puu+pu*au^2)*au:
```

```
> coeftayl(T(u,1), [u,1]=[0,0], [3,1]):
> P31:=1/6*p0*auuul+1/2*(a0^2*pul+2*pu*a0*al)*auu+
> (1/2*a0^4*puu+2*pu*a0*au)*aul+1/6*p1*auuu+1/2*pu*a0^2*auul+
> (2*a0^3*al*puu+2*a0*au*pul+2*pu*a0*aul+2*pu*au*al+
> 1/2*a0^4*puul)*au+(pu*a0*auu+1/6*a0^6*puuu+2*a0^3*au*puu+pu*au^2)*al+
> (6*a0^2*au*puu*al+1/6*a0^6*puuul+2*a0^3*puul*au+
> pu*a0*auul+au^2*pul+pu*al*auu+a0*auu*pul+a0^5*al*puuu+2*pu*au*aul+
> 2*a0^3*aul*puu)*a0:
```

```
> coeftayl(T(u,1), [u,1]=[0,0], [2,2]):
> P22:=1/4*p11*auu+(a0^2*pul+2*pu*a0*al)*aul+
> 1/2*(1/2*a0^4*puu+2*pu*a0*au)*all+(1/2*a0^2*puul+
> pu*al^2+2*a0*al*pul+pu*a0*all)*au+
> (2*a0^3*al*puu+2*a0*au*pul+2*pu*a0*aul+2*pu*au*al+
> 1/2*a0^4*puul)*al+1/4*p0*auull+(1/4*a0^4*puull+2*a0^3*puul*al+
> 2*al*pul*au+3*a0^2*al^2*puu+2*a0*aul*pul+a0*au*puul+
> a0^3*puu*all+pu*a0*auul+pu*au*all+2*pu*al*aul)*a0+
> 1/2*p1*auul+1/2*pu*a0^2*auul:
```

```
> coeftayl(T(u,1), [u,1]=[0,0], [1,3]):
> P13:=1/6*p1111*au+(1/2*a0^2*puul+pu*al^2+2*a0*al*pul+
> pu*a0*all)*al+(a0*pul*all+1/3*pu*a0*alll+pu*al*all+al^2*pul+
> a0*al*puul+1/6*puulll*a0^2)*a0+1/2*p11*aul+
> 1/2*(a0^2*pul+2*pu*a0*al)*all+1/2*p1*auul+1/6*pu*a0^2*alll+
> 1/6*p0*auull:
```

```
> coeftayl(T(u,1), [u,1]=[0,0], [0,4]):
> P04:=1/24*p11111*a0+1/6*p1*alll+1/4*p11*all+1/6*p111*al+
> 1/24*p0*allll:
```

Colocando em evidência os coeficientes reais:

```
> P0:=expand(P00):
```




```
> Pu:=expand(P10):

> P1:=expand(P01):

> expand(P20):
> Puu:=2*expand(P20):

> Pul:=expand(P11):

> expand(P02):
> P11:=2*expand(P02):

> expand(P30):
> Puuu:=6*expand(P30):

> expand(P21):
> Puul:=2*expand(P21):

> expand(P12):
> Pull:=2*expand(P12):

> expand(P03):
> P111:=6*expand(P03):

> expand(P40):
> Puuuu:=24*expand(P40):

> expand(P31):
> Puuul:=6*expand(P31):

> expand(P22):
> Puull:=4*expand(P22):

> expand(P13):
> Pulll:=6*expand(P13):

> expand(P04):
> P1111:=24*expand(P04):

> restart:
```



Lembrando que $p_0=0$ e igualando os termos do desenvolvimento de Taylor de p_2 na origem com os termos do desenvolvimento de Taylor na origem de P obtemos

```

> p20:=0:

> p2u:=pu*a0^3:

> p2l:=pl*a0:

> p2uu:=6*pu*a0^2*au+a0^5*puu:

> p2ul:=pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul:

> p2ll:=2*pl*al+p1l*a0:

> p2uuu:=9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^4*puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu:

> p2uul:=pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*au*pu*a0*al+5*al*a0^4*pu
> u+a0^5*puul:

> p2ull:=2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+p1l*au+6*al*a0^2*pul+6*pu*a0*al^2+a0^3*
> pull:

> p2lll:=3*pl*all+3*p1l*al+p1ll*a0:

> p2uuuu:=28*a0^6*au*puuu+72*a0*pu*au*auu+12*pu*a0^2*auuu+30*a0^4*au*p
> uu+120*a0^3*au^2*puu+a0^9*puuuu+24*pu*au^3:

> p2uuul:=9*auu*a0^2*pul+pl*auuu+9*pu*a0^2*auul+18*auu*pu*a0*al+60*au*a
> 0^3*al*puu+7*al*a0^6*puuu+a0^7*puuul+15*aul*a0^4*puu+18*a0*au^2*pul+18
> *pu*au^2*al+15*au*a0^4*puul+36*aul*pu*a0*au:

> p2uull:=6*pu*a0^2*auul+p1l*auu+2*pl*auul+a0^5*puull+6*au*a0^2*pull+24
> *aul*pu*a0*al+24*au*a0*al*pul+12*all*pu*a0*au+12*aul*a0^2*pul+5*all*a0
> ^4*puu+12*au*pu*al^2+20*a0^3*al^2*puu+10*al*a0^4*puul:

> p2ulll:=p1ll*au+9*al*a0^2*pull+6*pu*al^3+18*a0*al^2*pul+18*al*pu*a0*a
> ll+9*a0^2*pul*all+2*pu*a0^2*alll+pulll*a0^3+3*p1l*aul+3*pl*auul+pu*a0^
> 2*alll:

> p2llll:=p1lll*a0+4*pl*alll+6*p1l*all+4*p1ll*al:

> restart:
Desenvolvimento de Taylor de  $p_4(u,l)$  na origem até ordem 4.
> T(u,l):=mTaylor(p4(u,l),[u,l],5):

```



Assim, os coeficientes do desenvolvimento de Taylor de $p_2(u, l)$ são dados por

```
> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [0,0]):
```

```
> c00:=p40:
```

```
> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [1,0]):
```

```
> c10:=p4u:
```

```
> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [0,1]):
```

```
> c01:=p4l:
```

```
> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [2,0]):
```

```
> c20:=1/2*p4uu:
```

```
> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [1,1]):
```

```
> c11:=p4ul:
```

```
> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [0,2]):
```

```
> c02:=1/2*p4ll:
```

```
> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [3,0]):
```

```
> c30:=1/6*p4uuu:
```

```
> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [2,1]):
```

```
> c21:=1/2*p4uul:
```

```
> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [1,2]):
```

```
> c12:=1/2*p4ull:
```

```
> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [3,0]):
```

```
> c03:=1/6*p4lll:
```

```
> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [4,0]):
```

```
> c40:=1/24*p4uuuu:
```

```
> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [3,1]):
```

```
> c41:=1/6*p4uuul:
```

```
> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [2,2]):
```

```
> c22:=1/4*p4uull:
```




```
> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [1,3]):
```

```
> c13:=1/6*p4ul11:
```

```
> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [0,4]):
```

```
> c04:=1/24*p4l111:
```

```
> restart:
```

Desenvolvimento de Taylor na origem até ordem 4 de $Q(u,l) = s(u,l)p_2(u,l)$.

```
> Q(u,l):=s(u,l)*p2(u,l):
```

```
> T(u,l):=mTaylor(Q(u,l), [u,l], 5):
```

```
> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [0,0]):
```

```
> Q00:=s0*p20:
```

```
> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [1,0]):
```

```
> Q10:=s0*p2u+su*p20:
```

```
> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [0,1]):
```

```
> Q01:=s0*p2l+s1*p20:
```

```
> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [2,0]):
```

```
> Q20:=1/2*s0*p2uu+su*p2u+1/2*suu*p20:
```

```
> 2*Q20:
```

```
> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [1,1]):
```

```
> Q11:=s1*p2u+su*p2l+s0*p2ul+sul*p20:
```

```
> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [0,2]):
```

```
> Q02:=s1*p2l+1/2*s11*p20+1/2*s0*p211:
```

```
> 2*Q02:
```

```
> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [3,0]):
```

```
> Q30:=1/2*su*p2uu+1/2*suu*p2u+1/6*s0*p2uuu+1/6*suuu*p20:
```

```
> 6*Q30:
```

```
> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [2,1]):
```

```
> Q21:=1/2*s1*p2uu+su*p2ul+sul*p2u+1/2*suu*p2l+1/2*s0*p2uul+1/2*suul*p2
```

```
> 0:
```

```
> 2*Q21:
```

```

> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [1,2]):
> Q12:=s1*p2ul+1/2*su*p2ll+1/2*s1l*p2u+sul*p2l+1/2*s0*p2ull+
> 1/2*sull*p20:
> 2*Q12:

> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [0,3]):
> Q03:=1/2*s1*p2ll+1/2*s1l*p2l+1/6*s0*p2lll+1/6*s1ll*p20:
> 6*Q03:

> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [4,0]):
> Q40:=1/24*s0*p2uuuu+1/24*suuu*p20+1/6*su*p2uuu+1/4*suu*p2uu+
> 1/6*suuu*p2u:
> 24*Q40:

> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [3,1]):
> Q31:=1/6*s0*p2uuul+1/2*sul*p2uu+1/2*suu*p2ul+1/6*s1*p2uuu+
> 1/2*su*p2uul+1/2*suul*p2u+1/6*suuu*p2l+1/6*suuul*p20:
> 6*Q31:

> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [2,2]):
> Q22:=1/4*s1l*p2uu+sul*p2ul+1/4*suu*p2ll+1/2*sull*p2u+
> 1/2*suul*p2l+1/4*s0*p2uull+1/4*suull*p20+1/2*s1*p2uul+
> 1/2*su*p2ull:
> 4*Q22:

> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [1,3]):
> Q13:=1/6*s1lll*p2u+1/2*sull*p2l+1/6*sulll*p20+1/2*s1l*p2ul+
> 1/2*sul*p2ll+1/2*s1*p2ull+1/6*su*p2lll+1/6*s0*p2ulll:
> 6*Q13:

> coeftayl(T(u,l), [u,l]=[0,0], [0,4]):
> Q04:=1/24*s1llll*p20+1/6*s1*p2lll+1/4*s1l*p2ll+1/6*s1ll*p2l+
> 1/24*s0*p2llll:
> 24*Q04:

> restart:
Os valores dos p4's em função dos p2's são
> p20:=0:

> p40:=s0*p20:

> p4u:=s0*p2u+su*p20:

> p4l:=s0*p2l+s1*p20:

```



```

> p4uu:=s0*p2uu+2*su*p2u+suu*p20:

> p4ul:=s1*p2u+su*p2l+s0*p2ul+sul*p20:

> p4ll:=2*s1*p2l+s1l*p20+s0*p2ll:

> p4uuu:=3*su*p2uu+3*suu*p2u+s0*p2uuu+suuu*p20:

> p4uul:=s1*p2uu+2*su*p2ul+2*sul*p2u+suu*p2l+s0*p2uul+suul*p20:

> p4ull:=2*s1*p2ul+su*p2ll+s1l*p2u+2*sul*p2l+s0*p2ull+sull*p20:

> p4lll:=3*s1*p2ll+3*s1l*p2l+s0*p2lll+s1ll*p20:

> p4uuuu:=s0*p2uuuu+suuuu*p20+4*su*p2uuu+6*suu*p2uu+4*suuu*p2u:

> p4uuul:=s0*p2uuul+3*sul*p2uu+3*suu*p2ul+s1*p2uuu+3*su*p2uul+3*suul*p2
> u+suuu*p2l+suuul*p20:

> p4uull:=s1l*p2uu+4*sul*p2ul+suu*p2ll+2*sull*p2u+2*suul*p2l+s0*p2uull+
> suull*p20+2*s1*p2uul+2*su*p2ull:

> p4ulll:=s1ll*p2u+3*sull*p2l+3*s1l*p2ul+3*sul*p2ll+3*s1*p2ull+su*p2lll
> +s0*p2ulll:

> p4llll:=s1lll*p20+4*s1*p2lll+6*s1l*p2ll+4*s1ll*p2l+s0*p2llll:

> restart:
Os valores dos p2's em função dos p's são
> p0:=0:

> p20:=p0*a0:

> p2u:=p0*au+pu*a0^3:

> p2l:=p0*al+pl*a0:

> p2uu:=6*pu*a0^2*au+a0^5*puu:

> p2ul:=pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul:

> p2ll:=2*pl*al+p1l*a0:

```




```

> p2uuu:=9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^4*puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu:

> p2uul:=p1*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*au*pu*a0*al+5*al*a0^4*pu
> u+a0^5*puul:

> p2ull:=2*p1*aul+3*pu*a0^2*all+p1l*au+6*al*a0^2*pul+6*pu*a0*al^2+a0^3*
> pull:

> p2lll:=3*p1*all+3*p1l*al+p1ll*a0:

> p2uuuu:=28*a0^6*au*puuu+72*pu*a0*au*auu+12*pu*a0^2*auuu+30*a0^4*auu*p
> uu+120*a0^3*au^2*puu+a0^9*puuuu+24*pu*au^3:

> p2uuul:=9*auu*a0^2*pul+p1*auuu+9*pu*a0^2*auul+18*auu*pu*a0*al+60*au*a
> 0^3*al*puu+7*al*a0^6*puuu+a0^7*puuul+15*aul*a0^4*puu+18*a0*au^2*pul+18
> *pu*au^2*al+15*au*a0^4*puul+36*aul*pu*a0*au:

> p2uull:=6*pu*a0^2*auul+p1l*auu+2*p1*auul+a0^5*puull+6*au*a0^2*pull+24
> *aul*pu*a0*al+24*au*a0*al*pul+12*all*pu*a0*au+12*aul*a0^2*pul+5*all*a0
> ^4*puu+12*au*pu*al^2+20*a0^3*al^2*puu+10*al*a0^4*puul:

> p2ulll:=p1ll*au+9*al*a0^2*pull+6*pu*al^3+18*a0*al^2*pul+18*al*pu*a0*a
> ll+9*a0^2*pul*all+2*pu*a0^2*alll+pulll*a0^3+3*p1l*aul+3*p1*auul+pu*a0^
> 2*alll:

> p2llll:=p1lll*a0+4*p1*alll+6*p1l*all+4*p1ll*al:

```

Os valores de p_4 's em função dos p 's são

```

> p40:=0:

> p4u:=s0*p2u:

> p4l:=s0*p2l:

> p4uu:=s0*p2uu+2*su*p2u:

> p4ul:=s1*p2u+su*p2l+s0*p2ul+sul*p20:

> p4ll:=2*s1*p2l+s0*p2ll:

> p4uuu:=3*su*p2uu+3*suu*p2u+s0*p2uuu:

> p4uul:=s1*p2uu+2*su*p2ul+2*sul*p2u+suu*p2l+s0*p2uul:

> p4ull:=2*s1*p2ul+su*p2ll+s1l*p2u+2*sul*p2l+s0*p2ull:

```

```

> p4l1l1:=3*s1*p2l1+3*s1l*p2l+s0*p2l1l1:

> p4uuuu:=s0*p2uuuu+4*su*p2uuu+6*suu*p2uu+4*suuu*p2u:

> p4uuul:=s0*p2uuul+3*sul*p2uu+3*suu*p2ul+s1*p2uuu+3*su*p2uul+3*sul*p2
> u+suuu*p2l:

> p4uull:=s1l*p2uu+4*sul*p2ul+suu*p2l1+2*sull*p2u+2*sul*p2l+1/2*s0*p2u
> ull+s1*p2uul+su*p2ull:

> p4ulll:=s1l1*p2u+3*sull*p2l+3*s1l*p2ul+3*sul*p2l1+3*s1*p2ull+su*p2l1l
> +s0*p2ulll:

> p4l1l1:=4*s1*p2l1l1+6*s1l*p2l1+4*s1l1*p2l+s0*p2l1l1:

```

```

> restart:

```

Primeira Forma Normal

```

> p40 := 0:
> p4u := s0*pu*a0^3;

```

$$p4u := s0 \, pu \, a0^3$$

```

> p4l := s0*pl*a0;

```

$$p4l := s0 \, pl \, a0$$

Simplificação de p4uu por au.

```

> p4uu := s0*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+2*su*pu*a0^3:
> solve(p4uu, au):
> au:=-1/6*a0*(s0*a0^2*puu+2*su*pu)/s0/pu:
> expand(p4uu):

```

Simplificação de p4ul por su.

```

> p4ul := s1*pu*a0^3+su*pl*a0+s0*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul):
> solve(p4ul, su):
> su:=-1/4*a0*(6*s1*pu^2*a0-s0*pl*a0*puu+18*s0*pu^2*al+6*s0*a0*pul*pu)/
> pu/pl:
> expand(p4ul):

```

Simplificação de p4ll por sl.

```

> p4ll := 2*s1*pl*a0+s0*(2*pl*al+p1l*a0):
> solve(p4ll, sl):
> sl:=-1/2*s0*(2*pl*al+p1l*a0)/pl/a0:
> expand(p4ll):

```

Simplificação de p4uuu por suu.

```

> p4uuu :=
> 3*su*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+3*suu*pu*a0^3+s0*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^
> 4*puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu):
> expand(p4uuu):

```



```
> solve(p4uuu,suu):
> suu:=1/12/a0*s0*(144*a0^3*pu^4*al^2*pl^2-72*a0^4*pu^4*al*pl*p11-60*a0
> ^4*puu*pl^3*pu^2*al+144*a0^4*pu^3*al*pl^2*pul+9*a0^5*pu^4*p11^2+15*a0^
> 5*puu*pl^2*pu^2*p11-36*a0^5*pu^3*p11*pul*pl+12*a0^5*puu^2*pl^4-30*a0^5
> *puu*pl^3*pul*pu+36*a0^5*pul^2*pu^2*pl^2-36*pu^2*auu*pl^4-4*a0^5*puuu*
> pu*pl^4)/pu^2/pl^4:
> expand(suu):
```

```
> simplify(p4uuu):
```

Simplificação de p4uul por auu.

```
> p4uul :=
> s1*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+2*su*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+2*sul*pu
> *a0^3+suu*pl*a0+s0*(pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*au*pu*a0*al+
> 5*al*a0^4*puu+a0^5*puul):
> expand(p4uul):
> solve(p4uul,auu):
> auu:=1/48*a0^2/pl^4*(27*s0*a0^3*pu^4*p11^2+21*s0*a0^3*pl^4*puu^2+48*s
> ul*pu^3*a0*pl^3-144*s0*a0*pu^4*pl^2*al^2-72*s0*a0^2*pu^4*pl*al*p11+24*
> s0*a0^2*pu^2*pl^3*al*puu+24*s0*a0^3*pu^2*p11*pl^2*puu-72*s0*a0^3*pu^3*
> p11*pul*pl-60*s0*a0^3*pl^3*puu*pul*pu+36*s0*a0^3*pul^2*pu^2*pl^2+144*s
> 0*pl^3*pu^3*aul-8*s0*a0^3*puuu*pu*pl^4+24*s0*pl^3*pu^2*a0^3*puul)/pu^2
> /s0:
> simplify(p4uul):
```

Simplificação de p4ull por aul.

```
> p4ull :=
> 2*s1*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+su*(2*pl*al+p11*a0)+s11*pu*a0^3+2*s
> ul*pl*a0+s0*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+p11*au+6*al*a0^2*pul+6*pu*a0*al^2+
> a0^3*pull):
> expand(p4ull):
> solve(p4ull,aul):
> aul:=-1/8/pl^3*a0*(4*s0*pl^3*al*a0*puu-32*s0*pl^2*al^2*pu^2-16*s0*pl*
> al*pu^2*p11*a0+s0*p11*a0^2*pl^2*puu+3*s0*p11^2*a0^2*pu^2-10*s0*p11*a0^
> 2*pul*pu*pl+4*s11*pu^2*a0^2*pl^2+8*sul*pl^3*pu+12*s0*pu^2*a0*all*pl^2+
> 4*s0*a0^2*pull*pl^2*pu)/pu/s0:
> simplify(p4ull):
```

Simplificação de p4lll por sll.

```
> p4lll :=
> 3*s1*(2*pl*al+p11*a0)+3*s11*pl*a0+s0*(3*pl*all+3*p11*al+p111*a0):
> expand(p4lll):
> solve(p4lll,sll):
> sll:=-1/6*s0*(-12*al^2*pl^2-6*a0*al*pl*p11-3*a0^2*p11^2+6*pl^2*a0*all
> +2*pl*a0^2*p111)/pl^2/a0^2:
> simplify(p4lll):
```

Simplificação de p4uuuu por auuu.

```
> p4uuuu :=
> s0*(28*a0^6*au*puuu+72*pu*a0*au*auu+12*pu*a0^2*auuu+30*a0^4*auu*puu+12
> 0*a0^3*au^2*puu+a0^9*puuuu+24*pu*au^3)+4*su*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^4*
> puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu)+6*suu*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+4*suuu*pu*a
> 0^3:
> expand(p4uuuu):
> solve(p4uuuu,auuu):
```



```
> auuu:=1/96*a0*(-32*suuu*pu^3*pl^6+576*a0^4*pu^5*pll*sul*pl^3+432*a0^6
> *pu^5*pll*s0*puul*pl^2+56*a0^6*pu^3*pll*s0*puuu*pl^4+1440*a0^6*pu^4*pl
> l*s0*puul^2*pl^2-144*a0^6*pu^4*pll*s0*pl^3*puul+576*a0^4*pu*pu^5*pl^3*
> s0*al^2-1728*a0^5*pu*pu^5*pl^3*s0*all+288*a0^6*pu*pu^5*pl^2*s0*plll-
> 1152*a0^4*pu*pu^4*pl^4*sul-864*a0^6*pu*pu^4*pl^3*s0*puul-112*a0^6*pu
> l*pu^2*pl^5*s0*puuu+192*a0^6*pu*pu^3*pl^3*s0+288*a0^6*pu*pu^3*pl^4
> *s0*puul+363*a0^6*pl^2*puu*s0*pu^4*pl^2+480*a0^5*pl^5*puu^2*s0*pu^2*a
> l-1248*a0^4*pl^4*puu*s0*pu^4*al^2-960*a0^5*pl^3*puu*s0*pu^4*al*pll-90*
> a0^6*pl^4*puu^2*s0*pu^2*pll-444*a0^6*pl^3*puu*s0*pu^3*pll*pu+720*a0^5
> *pl^4*puu*pu^4*s0*all-120*a0^6*pl^3*puu*pu^4*s0*plll+480*a0^4*pl^5*puu
> *sul*pu^3+360*a0^6*pl^4*puu*pu^3*s0*puul+80*a0^6*pl^6*puu*s0*puuu*pu+4
> 20*a0^6*pl^5*puu^2*s0*pu*pu-564*a0^6*pl^4*puu*s0*pu^2*pu^2-120*a0^6*
> pl^5*puu*s0*pu^2*puul-2736*a0^5*pu^6*al*pl*s0*pll^2+3168*a0^4*pu^6*al^
> 2*pl^2*s0*pll+5760*a0^5*pu^5*al*pl^2*s0*pll*pu-3456*a0^4*pu^6*al*pl^3
> *s0*all+576*a0^5*pu^6*al*pl^2*s0*plll-1728*a0^5*pu^5*al*pl^3*s0*puul-2
> 24*a0^5*pu^3*al*pl^5*s0*puuu-672*a0^5*pu^3*al*pl^4*s0*puu*pu-576*a0^5
> *pu^4*al*pl^3*s0*pu^2+576*a0^5*pu^4*al*pl^4*s0*puul-1584*a0^6*pu^5*pl
> l^2*s0*pu*pl+864*a0^5*pu^6*pll*s0*all*pl^2+4992*a0^3*pu^6*al^3*pl^3*s
> 0-2304*a0^3*pu^5*al*pl^4*sul-144*a0^6*pu^6*pll*s0*pl*plll-8*a0^6*puuuu
> *pu^2*pl^6*s0-117*a0^6*pl^6*puu^3*s0+408*a0^6*pu^6*pll^3*s0)/pu^3/pl^6
> /s0:
```

```
> simplify(p4uuuu):
```

Simplificação de p4uuul por suuu.

```
> p4uuul :=
> s0*(9*auu*a0^2*pu+pl*auuu+9*pu*a0^2*auul+18*auu*pu*a0*al+60*au*a0^3*a
> l*puu+7*al*a0^6*puuu+a0^7*puuul+15*aul*a0^4*puu+18*a0*au^2*pu+18*pu*a
> u^2*al+15*au*a0^4*puul+36*aul*pu*a0*au)+3*sul*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+
> 3*suu*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pu)+sl*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^4*puu+1
> 8*pu*a0*au^2+a0^7*puuu)+3*su*(pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pu+12*au
> *pu*a0*al+5*al*a0^4*puu+a0^5*puul)+3*suul*pu*a0^3+suuu*pl*a0:
```

```
> expand(p4uuul):
```

```
> solve(p4uuul, suuu):
```

```
> suuu:=-1/64*a0/pl^6*(-63*a0^5*pl^6*puu^3*s0+30*a0^5*pu^6*pll^3*s0+544
> *al*a0^4*puuu*s0*pu^3*pl^5+864*pu^4*auul*s0*pl^5+96*a0^5*puuul*s0*pu^3
> *pl^5+1170*a0^5*pu*pu^5*pl*s0*pll^2+1632*a0^4*pu*pu^3*pl^4*s0*al*puu
> -2016*a0^3*pu*pu^5*pl^3*s0*al^2-11520*a0^4*pu*pu^5*pl^2*s0*al*pll+20
> 40*a0^5*pu*pu^3*pl^3*s0*pll*puu-2448*a0^5*pu^2*pu^4*pl^2*s0*pll+1728
> *a0^4*pu*pu^5*pl^3*s0*all-288*a0^5*pu*pu^5*pl^2*s0*plll+2304*a0^3*pu
> l*pu^4*pl^4*sul+864*a0^5*pu*pu^4*pl^3*s0*puul-112*a0^5*pu*pu^2*pl^5*
> s0*puuu-132*a0^5*pu^2*pu^2*pl^4*s0*puu-24*a0^5*pu^3*pl^3*s0+294
> *a0^5*pu*pu*pl^5*s0*puu^2+144*a0^5*pu*pu^3*pl^4*s0*puul-288*a0^3*pu^
> 5*pll*sul*pl^3+216*a0^5*pu^5*pll*s0*puul*pl^2+32*a0^5*pu^3*pll*s0*puuu
> *pl^4-288*a0^5*pu^4*pll*s0*pl^3*puul-771*a0^5*pl^2*puu*s0*pu^4*pll^2-1
> 248*a0^4*pl^5*puu^2*s0*pu^2*al+4656*a0^3*pl^4*puu*s0*pu^4*al^2+2064*a0
> ^4*pl^3*puu*s0*pu^4*al*pll-216*a0^5*pl^4*puu^2*s0*pu^2*pll-1152*a0^4*p
> l^4*puu*pu^4*s0*all+192*a0^5*pl^3*puu*pu^4*s0*plll-1248*a0^3*pl^5*puu*
> sul*pu^3-576*a0^5*pl^4*puu*pu^3*s0*puul+56*a0^5*pl^6*puu*s0*puuu*pu-26
> 4*a0^5*pl^5*puu*s0*pu^2*puul+4608*a0^4*pu^6*al*pl*s0*pll^2-11952*a0^3*
> pu^6*al^2*pl^2*s0*pll+8640*a0^3*pu^6*al*pl^3*s0*all-1440*a0^4*pu^6*al*
> pl^2*s0*plll+4320*a0^4*pu^5*al*pl^3*s0*puul-576*a0^4*pu^4*al*pl^3*s0*p
> ul^2-576*a0^4*pu^4*al*pl^4*s0*puul+432*a0^4*pu^6*pll*s0*all*pl^2-17472
> *a0^2*pu^6*al^3*pl^3*s0+8064*a0^2*pu^5*al*pl^4*sul-72*a0^5*pu^6*pll*s0
> *pl*plll-8*a0^5*puuuu*pu^2*pl^6*s0+288*suul*pu^4*a0*pl^5)/pu^3:
```

```
> simplify(p4uuul):
```

Simplificação de p4uull por suul.


```

> p4uull :=
> sll*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+4*sul*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+suu*(2
> *pl*al+p11*a0)+2*sull*pu*a0^3+2*suul*pl*a0+1/2*s0*(6*pu*a0^2*au1+p11*
> auu+2*pl*au1+a0^5*puu1+6*au*a0^2*pul1+24*aul*pu*a0*al+24*au*a0*al*pu
> l+12*all*pu*a0*au+12*aul*a0^2*pul+5*all*a0^4*puu+12*au*pu*al^2+20*a0^3
> *al^2*puu+10*al*a0^4*puul)+sl*(pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*a
> u*pu*a0*al+5*al*a0^4*puu+a0^5*puul)+su*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+p11*au+
> 6*al*a0^2*pul+6*pu*a0*al^2+a0^3*pul1):
> expand(p4uull):
> solve(p4uull,su1):
> suul:=-1/96*(-24*a0^5*pul*pl^2*pu^3*s0*pl11+144*a0^3*pul*pl^4*pu^2*su
> l-36*a0^5*s0*pu1*pl^4*pu*puu+504*a0^4*s0*pu1*pl^3*pu^3*al-72*a0^5*s0
> *pu1*pl^3*pu^2*pul-1440*a0^2*al^3*pl^3*pu^4*s0-396*a0^4*al*pl^2*pu^3*
> s0*pl1*pul+576*a0^3*al*pl^3*pu^4*s0*all-264*a0^4*al*pl^2*pu^4*s0*pl11+
> 1440*a0^2*al*pl^4*pu^3*sul+108*a0^4*s0*al*pul*pl^4*pu*puu+720*a0^3*s0*
> al^2*pul*pl^3*pu^3-252*a0^4*s0*al*pul^2*pl^3*pu^2-360*all*a0^4*s0*pl^3
> *pu^3*pu1+144*pu^3*a0^2*au1*pl^4*s0+24*a0^5*puu1*pl^4*pu^2*s0+84*all
> *a0^4*puu*pl^4*pu^2*s0+264*a0^3*al^2*puu*pl^4*pu^2*s0+24*al*a0^4*puul*
> pl^4*pu^2*s0+30*pl1*a0^4*s0*pu^2*pl^3*al*puu-2088*pl1*a0^3*s0*pu^4*pl^
> 2*al^2-99*pl1^2*a0^4*s0*pu^4*pl*al+12*pl1^2*a0^5*s0*pu^2*pl^2*puu-504*
> pl1^2*a0^5*s0*pu^3*pul*pl+612*pl1*a0^4*pu^4*s0*all*pl^2-60*pl1*a0^5*pu
> ^4*s0*pl*pl11+312*pl1*a0^3*sul*pu^3*pl^3+252*pl1*a0^5*pu^3*s0*pu1*pl^
> 2+8*pl1*a0^5*s0*puu*pu*pl^4+132*pl1*a0^5*s0*puu*pl^3*pul*pu+108*pl1*a
> 0^5*s0*pul^2*pu^2*pl^2-21*pl1*a0^5*s0*puu^2*pl^4-96*pl1*a0^5*s0*pl^3*p
> u^2*puul+48*pl^5*au1*pu^2*s0+225*pl1^3*a0^5*s0*pu^4+24*a0^4*pl^5*al*s
> 0*puu*pu-63*a0^4*s0*pl^5*al*puu^2+96*sull*pu^3*a0^3*pl^4-72*a0^3*sul*
> pl^5*pu*puu+12*a0^5*s0*pu^2*pl^3*pl11*puu)/pl^5/pu^2/a0:
> simplify(p4uull):

```

Simplificação de p4uull por slll.

```

> p4ulll :=
> slll*pu*a0^3+3*sull*pl*a0+3*sll*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+3*sul*(2
> *pl*al+p11*a0)+3*sl*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+p11*au+6*al*a0^2*pul+6*pu*
> a0*al^2+a0^3*pul1)+su*(3*pl*all+3*pl1*al+p111*a0)+s0*(p111*au+9*al*a0^
> 2*pu1+6*pu*al^3+18*a0*al^2*pul+18*al*pu*a0*all+9*a0^2*pul*all+3*pu*a0
> ^2*all1+pul11*a0^3+3*pl1*aul+3*pl*au11):
> expand(p4ulll):
> solve(p4ulll,sll1):
> sll1:=-1/4/pl^2*(36*al*a0^2*pu1*pl^2*pu*s0-78*pl1*a0*s0*pl*al^2*pu^2
> +42*pl1^2*a0^2*s0*al*pu^2+6*pl1^2*a0^3*s0*pul*pu-6*pl1*a0^2*s0*pu^2*al
> l*pl+12*pl1*a0*sul*pl^2*pu-6*pl1*a0^3*s0*pu1*pl*pu+12*sull*pl^3*a0*pu
> +6*pl^3*al^2*s0*a0*puu-72*pl*al*s0*pl1*a0^2*pul*pu-24*pu^2*al^3*pl^2*s
> 0+12*pl^3*au1*pu*s0+48*pl^3*al*sul*pu+6*s0*pl^3*a0^2*all*puu+36*a0*al
> ^2*pul*pl^2*pu*s0-24*al*pu^2*a0*all*pl^2*s0+12*pu^2*a0^2*all1*pl^2*s0+
> 4*pu11*a0^3*pl^2*pu*s0+p111*a0^3*s0*pl^2*puu-28*pl11*a0^2*s0*pl*pu^2*
> al+3*pl11*a0^3*s0*pu^2*pl1-10*pl11*a0^3*s0*pl*pul*pu+6*pl1*a0^2*s0*pl^
> 2*al*puu)/pu^2/a0^3:
> simplify(p4ulll):

```

Simplificação de p4llll por alll.

```

> p4llll :=
> 4*sl*(3*pl*all+3*pl1*al+p111*a0)+6*sll*(2*pl*al+p11*a0)+4*slll*pl*a0+s
> 0*(p1111*a0+4*pl*all1+6*pl1*all+4*p111*al):
> expand(p4llll):
> solve(p4llll,all1):

```

```

> all1:=-1/8*(-48*pu^2*al^3*pl^3*s0+6*s0*pl^4*a0^2*all*puu-72*s0*a0^2*a
> l*pl^2*pll*pu*pu+6*s0*al^2*pl^4*a0*puu+48*sul*pl^4*pu*al+12*sull*pl^4
> *a0*pu-6*pll*a0^3*s0*pull*pl^2*pu+12*pll*a0*sul*pl^3*pu+36*pll^2*a0^2*
> s0*pl*al*pu^2+6*pll^2*a0^3*s0*pu*pu*pl+6*pll*a0^2*s0*pl^3*al*puu-90*p
> ll*a0*s0*pl^2*al^2*pu^2+pll*a0^3*s0*pl^3*puu-24*pll*a0^2*s0*pl^2*pu^
> 2*al-3*pll^3*a0^3*s0*pu^2+36*a0*al^2*pu*pl^3*pu*s0+4*pull*a0^3*pl^3*
> pu*s0+12*pl^4*au*pu*s0+36*al*a0^2*pull*pl^3*pu*s0+7*pll*a0^3*s0*pl*
> pu^2*pll-10*pll*a0^3*s0*pl^2*pu*pu-pu^2*a0^3*pl^2*s0*pll)/pl^3/a0^
> 2/pu^2/s0:
> simplify(p4lllll):

```

```

> restart:

```

Segunda forma normal

```

> pl:=0:
> p40 := 0:
> p4u := s0*pu*a0^3;

```

$$p4u := s0 \text{ pu } a0^3$$

```

> p4l := s0*pl*a0:

```

Simplificação de p4uu por au.

```

> p4uu := s0*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+2*su*pu*a0^3:
> solve(p4uu, au):
> au:=-1/6*a0*(s0*a0^2*puu+2*su*pu)/s0/pu:
> expand(p4uu):

```

Simplificação de p4ul por al.

```

> p4ul := s1*pu*a0^3+su*pl*a0+s0*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pu):
> solve(p4ul, al):
> al:=-1/3*a0*(s1*pu+s0*pu)/s0/pu:
> expand(p4ul):
> p4ll := 2*s1*pl*a0+s0*(2*pl*al+pll*a0):

```

```

> p4ll := 2*s1*pl*a0+s0*(2*pl*al+pll*a0);

```

$$p4ll := s0 \text{ pll } a0$$

Simplificação de p4uuu por suu.

```

> p4uuu :=
> 3*su*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+3*suu*pu*a0^3+s0*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^
> 4*puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu):
> expand(p4uuu):
> solve(p4uuu, suu):
> suu:=-1/3/a0/s0*(-4*a0*su^2*pu^2+9*pu^2*auu*s0^2-2*a0^5*puu^2*s0^2-3*
> a0^3*puu*s0*su*pu+a0^5*puuu*pu*s0^2)/pu^2:
> expand(suu):
> simplify(p4uuu):

```


Simplificação de p4uul por aul.

```

> p4uul :=
> s1*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+2*su*(p1*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pu1)+2*sul*pu
> *a0^3+suu*p1*a0+s0*(p1*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pu1+12*au*pu*a0*al+
> 5*al*a0^4*puu+a0^5*puul):
> expand(p4uul):
> solve(p4uul, aul):
> aul:=-1/18*a0/s0^2*(-8*su*pu^2*s1+6*sul*pu^2*s0+3*a0^2*puul*pu*s0^2-6
> *s0^2*a0^2*puu*pu1-2*su*pu*s0*pu1-3*s0*a0^2*puu*s1*pu)/pu^2:
> simplify(p4uul):

```

Simplificação de p4ull por all.

```

> p4ull :=
> 2*s1*(p1*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pu1)+su*(2*p1*al+p11*a0)+s11*pu*a0^3+2*s
> ul*p1*a0+s0*(2*p1*aul+3*pu*a0^2*all+p11*au+6*al*a0^2*pu1+6*pu*a0*al^2+
> a0^3*pu11):
> expand(p4ull):
> solve(p4ull, all):
> all:=-1/18/a0/s0^2*(-8*a0^2*s1^2*pu^2+4*p11*s0*su*pu+6*s11*pu^2*a0^2*
> s0+6*a0^2*pu11*pu*s0^2-p11*s0^2*a0^2*puu-4*a0^2*pu1*s0*s1*pu-8*a0^2*pu
> l^2*s0^2)/pu^2:
> simplify(p4ull):

```

Simplificação de p4lll por sl.

```

> p4lll :=
> 3*s1*(2*p1*al+p11*a0)+3*s11*p1*a0+s0*(3*p1*all+3*p11*al+p111*a0):
> expand(p4lll):
> solve(p4lll, sl):
> sl:=-1/2*s0*(-p11*pu1+p111*pu)/pu/p11:
> simplify(p4lll):

```

Simplificação de p4uuuu por auuu.

```

> p4uuuu :=
> s0*(28*a0^6*au*puuu+72*pu*a0*au*auu+12*pu*a0^2*auuu+30*a0^4*auu*puu+12
> 0*a0^3*au^2*puu+a0^9*puuuu+24*pu*au^3)+4*su*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^4*
> puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu)+6*suu*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+4*suuu*pu*a
> 0^3:
> expand(p4uuuu):
> solve(p4uuuu, auuu):
> auuu:=-1/108/s0^3*(-42*a0^7*puuu*pu*s0^3*puu-12*a0^5*puuu*pu^2*s0^2*s
> u+162*a0^2*auu*puu*pu^2*s0^3+432*pu^3*auu*s0^2*su+29*s0^3*a0^7*puu^3-3
> 0*s0^2*a0^5*puu^2*su*pu-108*s0*a0^3*puu*su^2*pu^2-80*a0*su^3*pu^3+9*a0
> ^7*puuuu*pu^2*s0^3+36*suuu*pu^3*a0*s0^2)/pu^3:
> simplify(p4uuuu):

```


Simplificação de p4uuul por auu.

```

> p4uuul :=
> s0*(9*auu*a0^2*pul+pl*auuu+9*pu*a0^2*auul+18*auu*pu*a0*al+60*au*a0^3*
> l*puu+7*al*a0^6*puuu+a0^7*puuul+15*aul*a0^4*puu+18*a0*au^2*pul+18*pu*a
> u^2*al+15*au*a0^4*puul+36*aul*pu*a0*au)+3*sul*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+
> 3*suu*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+sl*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^4*puu+1
> 8*pu*a0*au^2+a0^7*puuu)+3*su*(pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*au
> *pu*a0*al+5*al*a0^4*puu+a0^5*puul)+3*suul*pu*a0^3+suu*pl*a0:
> expand(p4uuul):
> solve(p4uuul, auu):
> auu:=-1/18/s0^2*(12*a0*su^2*pu^3*plll-18*suul*pu^3*a0*s0*pll-54*pu^3*
> auul*s0^2*pll-6*a0^5*puuul*pu^2*s0^2*pll+15*a0^5*puuu*pu*s0^2*pll*pul-
> a0^5*puuu*pu^2*s0^2*plll-36*a0^3*puu*s0*su*pu*pul*pll+6*a0^3*puu*s0*su
> *pu^2*plll+18*a0^3*puu*s0*sul*pu^2*pll+24*a0^5*puu*s0^2*puul*pu*pll-42
> *a0^5*puu^2*s0^2*pul*pll+2*a0^5*puu^2*s0^2*plll*pu-12*a0*su^2*pu^2*pll
> *pul+18*a0^3*puul*pu^2*s0*pll*su+48*a0*sul*pu^3*pll*su)/pu^2/(2*plll*p
> u-3*pll*pul):
> simplify(p4uuul):

```

Simplificação de p4uull por suul.

```

> p4uull :=
> sll*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+4*sul*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+suu*(2
> *pl*al+pll*a0)+2*suul*pu*a0^3+2*suul*pl*a0+1/2*s0*(6*pu*a0^2*auul+pll*
> auu+2*pl*auul+a0^5*puull+6*au*a0^2*puul+24*aul*pu*a0*al+24*au*a0*al*pu
> l+12*all*pu*a0*au+12*aul*a0^2*pul+5*all*a0^4*puu+12*au*pu*al^2+20*a0^3
> *al^2*puu+10*al*a0^4*puul)+sl*(pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*a
> u*pu*a0*al+5*al*a0^4*puu+a0^5*puul)+su*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+pll*au+
> 6*al*a0^2*pul+6*pu*a0*al^2+a0^3*puul):
> expand(p4uull):
> solve(p4uull, suul):
> suul:=-1/90/s0*(-90*pll^4*a0^3*puul*pu^2*s0*su-468*a0^5*pul^2*pll^2*s
> 0^2*puu*plll*pu+459*a0^5*pul^3*pll^3*s0^2*puu+135*a0^5*pul*pll*s0^2*pu
> u*plll^2*pu^2-336*a0^3*pul^2*pll^2*s0*su*pu^2*plll+180*a0^3*pul^3*pll^
> 3*s0*su*pu+228*a0^3*pul*pll*s0*su*pu^3*plll^2-36*a0^5*puull*s0^2*pu^3*
> pll^2*plll+54*a0^5*puull*s0^2*pu^2*pll^3*pul+36*sll*pu^3*a0^5*pll^2*s0
> *puu*plll-54*sll*pu^2*a0^5*pll^3*s0*puu*pul+168*sll*pu^4*a0^3*pll^2*su
> *plll-252*sll*pu^3*a0^3*pll^3*su*pul+468*a0^3*s0*sul*pu^3*pll^2*pul*pl
> ll-324*a0^3*s0*sul*pu^2*pll^3*pul^2-168*a0^3*s0*sul*pu^4*pll*plll^2+23
> 4*a0^5*s0^2*puul*pu^2*pll^2*pul*plll-270*a0^5*s0^2*puul*pu*pll^3*pul^2
> -36*a0^5*s0^2*puul*pu^3*pll*plll^2-18*a0^5*s0^2*puu*plll^3*pu^3-56*a0^
> 3*s0*su*pu^4*plll^3-108*a0^5*puull*s0^2*pu*pll^3*puu*pul+24*a0^3*puull*s
> 0*pu^3*pll^2*su*plll-36*a0^3*puull*s0*pu^2*pll^3*su*pul+72*a0^5*puull*s0
> ^2*pu^2*pll^2*puu*plll-240*pll^4*a0*sul*pu^3*su+30*pll^4*a0^5*puuul*pu
> ^2*s0^2-111*pll^4*a0^5*puuu*pu*s0^2*pul+29*pll^3*a0^5*puuu*pu^2*s0^2*p
> lll+240*pll^4*a0^3*puu*s0*su*pu*pul-70*pll^3*a0^3*puu*s0*su*pu^2*plll-
> 90*pll^4*a0^3*puu*s0*sul*pu^2-120*pll^4*a0^5*puu*s0^2*puul*pu+291*pll^
> 4*a0^5*puu^2*s0^2*pul-64*pll^3*a0^5*puu^2*s0^2*plll*pu+144*pll^4*a0*su
> ^2*pu^2*pul-216*pu^4*a0^2*auul*s0^2*pll^2*plll+324*pu^3*a0^2*auul*s0^2
> *pll^3*pul-116*pll^3*a0*su^2*pu^3*plll+270*pll^4*pu^3*auul*s0^2-144*su
> ll*pu^4*a0^3*s0*pll^2*plll+216*sull*pu^3*a0^3*s0*pll^3*pul)/pu^3/pll^4
> /a0:
> simplify(p4uull):

```


Simplificação de p4ulll por slll.

```

> p4ulll :=
> slll*pu*a0^3+3*sull*pl*a0+3*sl*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+3*sul*(2
> *pl*al+p1l*a0)+3*sl*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+p1l*au+6*al*a0^2*pul+6*pu*
> a0*al^2+a0^3*pull)+su*(3*pl*all+3*p1l*al+p1l1*a0)+s0*(p1l1*au+9*al*a0^
> 2*pull+6*pu*al^3+18*a0*al^2*pul+18*al*pu*a0*all+9*a0^2*pul*all+3*pu*a0
> ^2*all+p1l1*a0^3+3*p1l*aul+3*pl*aul):
> expand(p4ulll):
> solve(p4ulll,sl11):
> sl11:=-1/36/a0^2*(72*p1l^4*sul*pu^2+162*a0^2*pul^3*s0*p1l^3-14*a0^2*s
> 0*p1l1^3*pu^3+48*p1l^3*su*pu^2*p1l1-72*p1l^4*su*pu*pul-90*a0^2*pul^2*s
> 0*p1l^2*p1l1*pu+54*a0^2*s0*p1l*pul*p1l1^2*pu^2+72*sl1*pu^3*a0^2*p1l^2*
> p1l1-108*sl1*pu^2*a0^2*p1l^3*pul+18*a0^2*pull*pu^2*s0*p1l^2*p1l1-162*a
> 0^2*pull*pu*s0*p1l^3*pul-9*p1l^3*s0*a0^2*puu*p1l1*pu+45*p1l^4*s0*a0^2*
> puu*pul+108*pu^3*a0*all1*p1l^3*s0+36*pull1*a0^2*pu^2*p1l^3*s0-18*p1l^4
> *a0^2*puul*pu*s0)/pu^3/p1l^3:
> simplify(p4ulll):

```

Simplificação de p4llll por alll.

```

> p4llll :=
> 4*sl*(3*pl*all+3*p1l*al+p1l1*a0)+6*sl1*(2*pl*al+p1l*a0)+4*sl11*pl*a0+s
> 0*(p1l11*a0+4*pl*all1+6*p1l*all+4*p1l1*al):
> expand(p4llll):
> solve(p4llll,sl1):
> sl1:=1/12/p1l^2*(-3*a0^2*pul^2*s0*p1l^2-6*a0^2*s0*p1l*pul*p1l1*pu+5*a
> 0^2*s0*p1l1^2*pu^2-3*p1l11*a0^2*s0*p1l*pu^2+4*p1l^3*su*pu+6*a0^2*pull*
> pu*s0*p1l^2-p1l^3*s0*a0^2*puu)/a0^2/pu^2:
> simplify(p4llll):

```

```

> restart:

```

Terceira Forma Normal

```

> pu:=0:
> p40 := 0:
> p4u := s0*pu*a0^3:
> p4l := s0*pl*a0;

```

$$p4l := s0 \, pl \, a0$$

```

> p4uu := s0*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+2*su*pu*a0^3;

```

$$p4uu := s0 \, a0^5 \, puu$$
Simplificação de p4ul por su.

```

> p4ul := sl*pu*a0^3+su*pl*a0+s0*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul):
> solve(p4ul,su):
> su:=-s0*(pl*au+a0^3*pul)/pl/a0:
> expand(p4ul):

```

Simplificação de p4ll por sl.

```

> p4ll := 2*sl*pl*a0+s0*(2*pl*al+p1l*a0):
> solve(p4ll,sl):

```



```
> s1:=-1/2*s0*(2*p1*a1+p11*a0)/p1/a0:
```

```
> expand(p411):
```

Simplificação de p4uuu por au.

```
> p4uuu :=
```

```
> 3*su*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+3*suu*pu*a0^3+s0*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^
```

```
> 4*puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu):
```

```
> expand(p4uuu):
```

```
> solve(p4uuu, au):
```

```
> au:=-1/12*a0^3*(-3*puu*pul+puuu*p1)/p1/puu:
```

```
> simplify(p4uuu):
```

Simplificação de p4uul por auu.

```
> p4uul :=
```

```
> s1*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+2*su*(p1*au+3*pu*a0^2*a1+a0^3*pul)+2*sul*pu
```

```
> *a0^3+suu*p1*a0+s0*(p1*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*au*pu*a0*a1+
```

```
> 5*a1*a0^4*puu+a0^5*puul):
```

```
> expand(p4uul):
```

```
> solve(p4uul, auu):
```

```
> auu:=1/72*a0*(-288*s0*a0^3*puu^3*p1*a1+36*s0*a0^4*puu^3*p11+117*s0*a0
```

```
> ^4*puu^2*pul^2+6*s0*a0^4*puu*pul*puuu*p1+s0*a0^4*puuu^2*p1^2-72*suu*p1
```

```
> ^2*puu^2-72*s0*a0^4*puu^2*puul*p1)/puu^2/p1^2/s0:
```

```
> simplify(p4uul):
```

Simplificação de p4ull por aul.

```
> p4ull :=
```

```
> 2*s1*(p1*au+3*pu*a0^2*a1+a0^3*pul)+su*(2*p1*a1+p11*a0)+s11*pu*a0^3+2*s
```

```
> ul*p1*a0+s0*(2*p1*aul+3*pu*a0^2*a11+p11*au+6*a1*a0^2*pul+6*pu*a0*a1^2+
```

```
> a0^3*pull):
```

```
> expand(p4ull):
```

```
> solve(p4ull, sul):
```

```
> sul:=-1/24*s0*(12*a1*a0^2*pul*p1*puu+4*a0^2*p1^2*a1*puuu-27*p11*a0^3*
```

```
> puu*pul+p11*a0^3*puuu*p1+24*p1^2*aul*puu+12*a0^3*pull*p1*puu)/p1^2/puu
```

```
> /a0:
```

```
> simplify(p4ull):
```

Simplificação de p4lll por sll.

```
> p4lll :=
```

```
> 3*s1*(2*p1*a1+p11*a0)+3*s11*p1*a0+s0*(3*p1*a11+3*p11*a1+p111*a0):
```

```
> expand(p4lll):
```

```
> solve(p4lll, sll):
```

```
> sll:=-1/6*s0*(-12*p1^2*a1^2-6*p1*a1*p11*a0-3*p11^2*a0^2+6*p1^2*a0*a11
```

```
> +2*p1*a0^2*p111)/p1^2/a0^2:
```

```
> simplify(p4lll):
```

Simplificação de p4uuuu por suu.

```
> p4uuuu :=
```

```
> s0*(28*a0^6*au*puuu+72*pu*a0*au*auu+12*pu*a0^2*auuu+30*a0^4*auu*puu+12
```

```
> 0*a0^3*au^2*puu+a0^9*puuuu+24*pu*au^3)+4*su*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^4*
```

```
> puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu)+6*suu*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+4*suuu*pu*a
```

```
> 0^3:
```

```
> expand(p4uuuu):
```

```
> solve(p4uuuu, suu):
```



T. 1325/05




```
> suu:=1/144*s0*a0^3*(42*a0*puu*pul*puuu*pl-7*a0*puuu^2*pl^2-720*puu^3*
> pl*al+90*a0*puu^3*pll+225*a0*puu^2*pul^2-180*a0*puu^2*puul*pl+6*a0*puu
> uu*puu*pl^2)/puu^2/pl^2:
> simplify(p4uuu):
```

Simplificação de p4uuul por suuu.

```
> p4uuul :=
> s0*(9*auu*a0^2*pul+pl*auuu+9*pu*a0^2*auul+18*auu*pu*a0*al+60*au*a0^3*a
> l*puu+7*al*a0^6*puuu+a0^7*puuul+15*aul*a0^4*puu+18*a0*au^2*pul+18*pu*a
> u^2*al+15*au*a0^4*puul+36*aul*pu*a0*au)+3*sul*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+
> 3*suu*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+sl*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^4*puu+1
> 8*pu*a0*au^2+a0^7*puuu)+3*su*(pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*au
> *pu*a0*al+5*al*a0^4*puu+a0^5*puul)+3*suul*pu*a0^3+suuu*pl*a0:
> expand(p4uuul):
> solve(p4uuul,suu):
> suu:=1/144*s0*(-459*a0^7*pul*puu^4*pll-144*a0^7*puuul*puu^3*pl^2-172
> 8*aul*a0^4*puu^4*pl^2+216*a0^7*puu^4*puul*pl-243*a0^7*pul^3*puu^3-144*
> pl^3*auuu*puu^3-4*a0^7*puuu^3*pl^3+3240*a0^6*pul*puu^4*pl*al-162*a0^7*
> pul^2*puu^2*puuu*pl+486*a0^7*pul*puu^3*puul*pl+9*a0^7*pul*puuu*puu^2*
> pl^2-648*al*a0^6*puuu*puu^3*pl^2+90*a0^7*puul*puu^2*pl^2*puuu-3*puu*a0
> ^7*pul*puuu^2*pl^2+27*a0^7*puu^3*pll*puuu*pl+3*a0^7*puuu*puu*pl^3*puu
> u)/puu^3/pl^3/a0:
> simplify(p4uuul):
```

Simplificação de p4uull por suul.

```
> p4uull :=
> sll*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+4*sul*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+suu*(2
> *pl*al+pll*a0)+2*sull*pu*a0^3+2*suul*pl*a0+1/2*s0*(6*pu*a0^2*auul+pll*
> auu+2*pl*auul+a0^5*puull+6*au*a0^2*puul+24*aul*pu*a0*al+24*au*a0*al*pu
> l+12*all*pu*a0*au+12*aul*a0^2*pul+5*all*a0^4*puu+12*au*pu*al^2+20*a0^3
> *al^2*puu+10*al*a0^4*puul)+sl*(pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*a
> u*pu*a0*al+5*al*a0^4*puu+a0^5*puul)+su*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+pll*au+
> 6*al*a0^2*pul+6*pu*a0*al^2+a0^3*puul):
> expand(p4uull):
> solve(p4uull,suul):
> suul:=-1/96*s0*(6*a0^4*puuu*puu*pl^3*al+24*a0^2*pl^3*aul*puu*puuu-72
> *aul*a0^2*pul*puu^2*pl^2+72*all*a0^4*puu^3*pl^2-192*a0^3*al^2*puu^3*pl
> ^2+60*al*a0^4*puul*puu^2*pl^2-246*pll*a0^4*puu^3*pl*al+4*pll*a0^5*puu*
> pul*puuu*pl-84*pll*a0^5*puu^2*puul*pl+2*pll*a0^5*puuu*puu*pl^2-144*a0
> ^5*puul*puu^2*pl*pul-261*a0^4*al*pul^2*puu^2*pl+6*a0^4*al*pul*puu*pl^2
> *puuu+48*pl^3*auul*puu^2+294*pll*a0^5*puu^2*pul^2-2*pll*a0^5*puuu^2*pl
> ^2-16*a0^5*puu^3*pl*pll-5*a0^4*pl^3*al*puuu^2+54*pll^2*a0^5*puu^3+24*
> a0^5*puull*puu^2*pl^2)/pl^3/puu^2/a0:
> simplify(p4uull):
```

Simplificação de p4ulll por sull.

```
> p4ulll :=
> slll*pu*a0^3+3*sull*pl*a0+3*sll*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+3*sul*(2
> *pl*al+pll*a0)+3*sl*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+pll*au+6*al*a0^2*pul+6*pu*
> a0*al^2+a0^3*puul)+su*(3*pl*all+3*pll*al+pll*al)+s0*(pll*au+9*al*a0^
> 2*puul+6*pu*al^3+18*a0*al^2*pul+18*al*pu*a0*all+9*a0^2*pul*all+3*pu*a0
> ^2*all+puull*a0^3+3*pll*aul+3*pl*auul):
> expand(p4ulll):
> solve(p4ulll,sull):
```

```
> sull:=-1/72*s0/a0^2*(24*pl^2*a0^4*pulll*puu+72*pl^3*a0*aul1*puu+72*a0
> ^3*pull*pl^2*puu*al-72*pl^2*aul*puu*pll*a0+108*al^2*a0^2*pul*pl^2*puu-
> 12*a0^3*pl^2*al*puu*pll-72*a0^4*pull*pl*puu*pll-108*al*a0^3*pul*pl*pu
> u*pll+2*a0^4*pl^2*puu*pull+12*a0^3*pl^3*puu*all+36*a0^3*pl^2*puu*pul
> *all-54*a0^4*pl*puu*pul*pull-288*pl^3*aul*puu*al-3*pll^2*a0^4*puu*pl+
> 117*pll^2*a0^4*puu*pul-36*a0^2*pl^3*al^2*puu)/pl^3/puu:
> simplify(p4ulll):
```

Simplificação de p4llll por alll.

```
> p4llll :=
> 4*s1*(3*pl*all+3*pll*al+pll1*a0)+6*s11*(2*pl*al+pll*a0)+4*s111*pl*a0+s
> 0*(pll11*a0+4*pl*all1+6*pll*all+4*pll1*al):
> expand(p4llll):
> solve(p4llll,alll):
> alll:=-1/4*(-24*s0*pl^3*a0*al*all+12*s0*pl^2*a0*al^2*pll-4*s0*pl^2*a0
> ^2*al*pll1-6*s0*pl^2*a0^2*pll*all+6*s0*pl*a0^2*pll^2*al-4*s0*pl*a0^3*p
> ll*pll1+24*s0*pl^3*al^3+3*s0*pll^3*a0^3+4*s111*pl^3*a0^3+s0*pl^2*a0^3*
> pll11)/pl^3/a0^2/s0:
> simplify(p4llll):
```

```
> restart:
```

Quarta Forma Normal

```
> pl:=0:
> pll:=0:
> p40 := 0:
> p4u := s0*pu*a0^3;
```

$$p4u := s0 \, pu \, a0^3$$

```
> p4l := s0*pl*a0:
```

Simplificação de p4uu por au.

```
> p4uu := s0*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+2*su*pu*a0^3:
> solve(p4uu,au):
> au:=-1/6*a0*(s0*a0^2*puu+2*su*pu)/s0/pu:
> expand(p4uu):
```

Simplificação de p4ul por al.

```
> p4ul := s1*pu*a0^3+su*pl*a0+s0*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul):
> solve(p4ul,al):
> al:=-1/3*a0*(s1*pu+s0*pul)/s0/pu:
> expand(p4ul):
> p4ll := 2*s1*pl*a0+s0*(2*pl*al+pll*a0):
```

Simplificação de p4uuu por suu.

```
> p4uuu :=
> 3*su*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+3*suu*pu*a0^3+s0*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^
> 4*puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu):
> expand(p4uuu):
> solve(p4uuu,suu):
```



```
> suu:=-1/3/a0/s0*(-4*a0*su^2*pu^2+9*pu^2*auu*s0^2-2*a0^5*puu^2*s0^2-3*
> a0^3*puu*s0*su*pu+a0^5*puuu*pu*s0^2)/pu^2:
> expand(suu):
> simplify(p4uuu):
```

Simplificação de p4uul por aul.

```
> p4uul :=
> s1*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+2*su*(p1*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pu1)+2*sul*pu
> *a0^3+suu*p1*a0+s0*(p1*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pu1+12*au*pu*a0*al+
> 5*al*a0^4*puu+a0^5*puul):
> expand(p4uul):
> solve(p4uul,aul):
> aul:=-1/18*a0/s0^2*(-8*su*pu^2*s1+6*sul*pu^2*s0+3*a0^2*puul*pu*s0^2-6
> *s0^2*a0^2*puu*pu1-2*su*pu*s0*pu1-3*s0*a0^2*puu*s1*pu)/pu^2:
> simplify(p4uul):
```

Simplificação de p4ull por all.

```
> p4ull :=
> 2*s1*(p1*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pu1)+su*(2*p1*al+p11*a0)+s11*pu*a0^3+2*s
> ul*p1*a0+s0*(2*p1*aul+3*pu*a0^2*all+p11*au+6*al*a0^2*pu1+6*pu*a0*al^2+
> a0^3*pu11):
> expand(p4ull):
> solve(p4ull,all):
> all:=-1/9*a0/s0^2*(-4*s1^2*pu^2+3*s11*pu^2*s0-2*s1*pu*s0*pu1-4*s0^2*p
> ul^2+3*pu11*pu*s0^2)/pu^2:
> simplify(p4ull):
```

```
> p4lll :=
> 3*s1*(2*p1*al+p11*a0)+3*s11*p1*a0+s0*(3*p1*all+3*p11*al+p111*a0);
p4lll := s0 p111 a0
```

Simplificação de p4uuuu por auuu.

```
> p4uuuu :=
> s0*(28*a0^6*au*puuu+72*pu*a0*au*auu+12*pu*a0^2*auuu+30*a0^4*auu*puu+12
> 0*a0^3*au^2*puu+a0^9*puuuu+24*pu*au^3)+4*su*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^4*
> puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu)+6*suu*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+4*suuu*pu*a
> 0^3:
> expand(p4uuuu):
> solve(p4uuuu,auuu):
> auuu:=-1/108/s0^3*(-42*a0^7*puuu*pu*s0^3*puu-12*a0^5*puuu*pu^2*s0^2*s
> u+162*a0^2*auu*puu*pu^2*s0^3+432*pu^3*auu*s0^2*su+29*s0^3*a0^7*puu^3-3
> 0*s0^2*a0^5*puu^2*su*pu-108*s0*a0^3*puu*su^2*pu^2-80*a0*su^3*pu^3+9*a0
> ^7*puuuu*pu^2*s0^3+36*suuu*pu^3*a0*s0^2)/pu^3:
> simplify(p4uuuu):
```

Simplificação de p4uuul por auu.

```
> p4uuul :=
> s0*(9*auu*a0^2*pu1+p1*auuu+9*pu*a0^2*auul+18*auu*pu*a0*al+60*au*a0^3*a
> l*puu+7*al*a0^6*puuu+a0^7*puuul+15*aul*a0^4*puu+18*a0*au^2*pu1+18*pu*a
> u^2*al+15*au*a0^4*puul+36*aul*pu*a0*au)+3*sul*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+
> 3*suu*(p1*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pu1)+s1*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^4*puu+1
> 8*pu*a0*au^2+a0^7*puuu)+3*su*(p1*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pu1+12*au
> *pu*a0*al+5*al*a0^4*puu+a0^5*puul)+3*sul*pu*a0^3+suuu*p1*a0:
> expand(p4uuul):
```

```

> solve(p4uuul, auu):
> auu:=-1/9/s0^2*(27*pu^3*auul*s0^3+3*a0^5*puuul*pu^2*s0^3+20*a0^5*puu^
> 2*s0^3*puul+12*a0*su^2*pu^3*sl-9*a0^3*puul*pu^2*s0^2*su-24*a0*su*pu^3*
> s0*su-a0^5*puu*pu^2*s0^2*sl-7*a0^5*puu*pu*s0^3*puul+6*a0^3*puu*s0*su*
> pu^2*sl-9*a0^3*puu*s0^2*su*pu^2-12*a0^5*puu*s0^3*puul*pu+15*a0^3*puu*
> s0^2*su*pu*puul+2*a0^5*puu^2*s0^2*sl*pu+9*suul*pu^3*a0*s0^2)/pu^2/(s0*p
> ul+4*sl*pu):
> simplify(p4uuul):

```

Simplificação de p4uull por sull.

```

> p4uull :=
> sll*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+4*su*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*puul)+suu*(2
> *pl*al+p11*a0)+2*sull*pu*a0^3+2*suul*pl*a0+1/2*s0*(6*pu*a0^2*auul+p11*
> auu+2*pl*auul+a0^5*puuul+6*au*a0^2*puul+24*aul*pu*a0*al+24*au*a0*al*pu
> l+12*all*pu*a0*au+12*aul*a0^2*puul+5*all*a0^4*puu+12*au*pu*al^2+20*a0^3
> *al^2*puu+10*al*a0^4*puul)+sl*(pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*puul+12*a
> u*pu*a0*al+5*al*a0^4*puu+a0^5*puul)+su*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+p11*au+
> 6*al*a0^2*puul+6*pu*a0*al^2+a0^3*puul):
> expand(p4uull):
> solve(p4uull, sull):
> sull:=-1/36/a0/s0^2*(-42*a0*sll*pu^3*s0*su-84*a0*su*pu^3*s0*sl+16*a0
> *su*pu^2*sl*s0*puul-12*a0*su*pu^2*s0^2*puul+8*a0*su*pu*s0^2*puul^2-9*sll
> *pu^2*s0^2*a0^3*puu-18*a0^3*puul*pu*s0^3*puu-6*a0*puul*pu^2*s0^2*su-18
> *a0^3*puul*pu^2*s0^2*sl-36*a0^3*puul*pu*s0^3*puul+36*s0^2*a0^3*puu*sl*p
> u*puul+54*s0^3*a0^3*puu*puul^2+56*a0*su*pu^3*sl^2+18*s0*a0^3*puu*sl^2*pu
> ^2+54*pu^3*auul*s0^3+9*a0^3*puuul*pu^2*s0^3)/pu^3:
> simplify(p4uull):

```

Simplificação de p4ulll por slll.

```

> p4ulll :=
> slll*pu*a0^3+3*sull*pl*a0+3*sll*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*puul)+3*su*(2
> *pl*al+p11*a0)+3*sl*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+p11*au+6*al*a0^2*puul+6*pu*
> a0*al^2+a0^3*puul)+su*(3*pl*all+3*p11*al+p111*a0)+s0*(p111*au+9*al*a0^
> 2*puul+6*pu*al^3+18*a0*al^2*puul+18*al*pu*a0*all+9*a0^2*puul*all+3*pu*a0
> ^2*all+puul1*a0^3+3*p11*aul+3*pl*auul):
> expand(p4ulll):
> solve(p4ulll, slll):
> slll:=-1/18/a0^2/s0^2*(54*pu^3*a0*all1*s0^3+18*puul1*a0^2*pu^2*s0^3+1
> 2*p111*pu^2*s0^2*su-18*a0^2*s0^2*puul*sll*pu^2-3*p111*pu*s0^3*a0^2*puu-
> 18*a0^2*puul*pu^2*s0^2*sl-72*a0^2*puul*pu*s0^3*puul+24*a0^2*sl^2*pu^2*s
> 0*puul+24*a0^2*sl*pu*s0^2*puul^2-72*a0^2*sl*pu^3*sll*s0+56*a0^2*sl^3*pu^
> 3+56*a0^2*s0^3*puul^3)/pu^3:
> simplify(p4ulll):

```

Simplificação de p4llll por sl.

```

> p4llll :=
> 4*sl*(3*pl*all+3*p11*al+p111*a0)+6*sll*(2*pl*al+p11*a0)+4*slll*pl*a0+s
> 0*(p1111*a0+4*pl*all1+6*p11*all+4*p111*al):
> expand(p4llll):
> solve(p4llll, sl):
> sl:=-1/8*s0*(3*p1111*pu-4*p111*puul)/pu/p111:
> simplify(p4llll):

```



```
> restart:
```

Quinta Forma Normal

```
> pu:=0:
```

```
> puu:=0:
```

```
> p40 := 0:
```

```
> p4u := s0*pu*a0^3:
```

```
> p4l := s0*pl*a0;
```

$$p4l := s0 \, pl \, a0$$

```
> p4uu := s0*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+2*su*pu*a0^3:
```

Simplificação de p4ul por su.

```
> p4ul := sl*pu*a0^3+su*pl*a0+s0*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul):
```

```
> solve(p4ul,su):
```

```
> su:=-s0*(pl*au+a0^3*pul)/pl/a0:
```

```
> expand(p4ul):
```

Simplificação de p4ll por sl.

```
> p4ll := 2*sl*pl*a0+s0*(2*pl*al+p1l*a0):
```

```
> solve(p4ll,sl):
```

```
> sl:=-1/2*s0*(2*pl*al+p1l*a0)/pl/a0:
```

```
> expand(p4ll):
```

```
> p4uuu :=
```

```
> 3*su*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+3*suu*pu*a0^3+s0*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^
```

```
> 4*puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu);
```

$$p4uuu := s0 \, a0^7 \, puuu$$

Simplificação de p4uul por auu.

```
> p4uul :=
```

```
> sl*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+2*su*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+2*sul*pu
```

```
> *a0^3+suu*pl*a0+s0*(pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*au*pu*a0*al+
```

```
> 5*al*a0^4*puu+a0^5*puul):
```

```
> expand(p4uul):
```

```
> solve(p4uul,auu):
```

```
> auu:=(-2*s0*pl^2*au^2+2*s0*pl*au*a0^3*pul-2*s0*a0^6*pul^2+suu*pl^2*a
```

```
> 0^2+s0*a0^6*pl*puul)/pl^2/a0/s0:
```

```
> simplify(p4uul):
```

Simplificação de p4ull por sul.

```
> p4ull :=
```

```
> 2*sl*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+su*(2*pl*al+p1l*a0)+s1l*pu*a0^3+2*s
```

```
> ul*pl*a0+s0*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+p1l*au+6*al*a0^2*pul+6*pu*a0*al^2+
```

```
> a0^3*pull):
```

```
> expand(p4ull):
```

```
> solve(p4ull,sul):
```

```
> sul:=(-1/2*s0*(-4*pl^2*al*au+2*pl*al*a0^3*pul-p1l*a0*pl*au-2*p1l*a0^4*
```

```
> pul+2*pl^2*a0*aul+pl*a0^4*pull)/pl^2/a0^2:
```




```
> simplify(p4ull):
```

Simplificação de p4lll por sll.

```
> p4lll :=
```

```
> 3*s1*(2*p1*a1+p11*a0)+3*s11*p1*a0+s0*(3*p1*a11+3*p11*a1+p111*a0):
```

```
> expand(p4lll):
```

```
> solve(p4lll,s11):
```

```
> s11:=-1/6*s0*(-12*p1^2*a1^2-6*p1*a1*p11*a0-3*p11^2*a0^2+6*p1^2*a0*a11  
> +2*p1*a0^2*p111)/p1^2/a0^2:
```

```
> simplify(p4lll):
```

Simplificação de p4uuuu por au.

```
> p4uuuu :=
```

```
> s0*(28*a0^6*au*puuu+72*pu*a0*au*auu+12*pu*a0^2*auuu+30*a0^4*auu*puu+12  
> 0*a0^3*au^2*puu+a0^9*puuuu+24*pu*au^3)+4*su*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^4*  
> puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu)+6*suu*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+4*suuu*pu*a  
> 0^3:
```

```
> expand(p4uuuu):
```

```
> solve(p4uuuu,au):
```

```
> au:=-1/24*a0^3*(puuuu*p1-4*puuu*pul)/p1/puuu:
```

```
> simplify(p4uuuu):
```

Simplificação de p4uuul por suuu.

```
> p4uuul :=
```

```
> s0*(9*auu*a0^2*pul+p1*auuu+9*pu*a0^2*auul+18*auu*pu*a0*a1+60*au*a0^3*a  
> 1*puu+7*a1*a0^6*puuu+a0^7*puuul+15*aul*a0^4*puu+18*a0*au^2*pul+18*pu*a  
> u^2*a1+15*au*a0^4*puul+36*aul*pu*a0*au)+3*sul*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+  
> 3*suu*(p1*au+3*pu*a0^2*a1+a0^3*pul)+s1*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^4*puu+1  
> 8*pu*a0*au^2+a0^7*puuu)+3*su*(p1*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*au  
> *pu*a0*a1+5*a1*a0^4*puu+a0^5*puul)+3*suul*pu*a0^3+suuu*p1*a0:
```

```
> expand(p4uuul):
```

```
> solve(p4uuul,suu):
```

```
> suu:=-1/2304*(60*puuu*a0^7*pul*s0*puuuu^2*p1^2+2928*a0^7*pul^2*s0*pu  
> uuu*p1*puuu^2+14912*a0^7*pul^3*s0*puuu^3-4608*a0^3*pul*suu*p1^2*puuu^3  
> -14976*a0^7*pul*s0*p1*puul*puuu^3+2304*p1^3*auuu*puuu^3*s0+13824*a1*a0  
> ^6*puuu^4*p1^2*s0+2304*a0^7*puuul*puuu^3*p1^2*s0-1440*a0^7*puul*puuu^2  
> *p1^2*s0*puuuu-576*suu*a0^3*puuu^2*p1^3*puuuu-1152*s0*a0^7*puuu^4*p1*p  
> 11+a0^7*puuuu^3*p1^3*s0)/puuu^3/p1^3/a0:
```

```
> simplify(p4uuul):
```

Simplificação de p4uull por suul.

```
> p4uull :=
```

```
> s11*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+4*sul*(p1*au+3*pu*a0^2*a1+a0^3*pul)+suu*(2  
> *p1*a1+p11*a0)+2*sull*pu*a0^3+2*suul*p1*a0+1/2*s0*(6*pu*a0^2*au11+p11*  
> auu+2*p1*auul+a0^5*puu11+6*au*a0^2*pu11+24*aul*pu*a0*a1+24*au*a0*a1*pu  
> 1+12*a11*pu*a0*au+12*aul*a0^2*pul+5*a11*a0^4*puu+12*au*pu*a1^2+20*a0^3  
> *a1^2*puu+10*a1*a0^4*puul)+s1*(p1*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*a  
> u*pu*a0*a1+5*a1*a0^4*puu+a0^5*puul)+su*(2*p1*aul+3*pu*a0^2*a11+p11*au+  
> 6*a1*a0^2*pul+6*pu*a0*a1^2+a0^3*pu11):
```

```
> expand(p4uull):
```

```
> solve(p4uull,suul):
```

```
> suul:=-1/1152*(576*pl^3*auul*puuu^2*s0+288*a0^5*puull*puuu^2*pl^2*s0-
> 576*aul*a0^2*pul*puuu^2*pl^2*s0+2880*al*a0^4*puul*puuu^2*pl^2*s0+p11*a
> 0^5*s0*puuuu^2*pl^2-56*p11*a0^5*s0*puuuu*pl*puuu*pul+2512*p11*a0^5*s0*
> pul^2*puuu^2+576*p11*a0*suu*pl^2*puuu^2-288*p11*a0^5*s0*pl*puul*puuu^2
> +1728*suu*pl^3*puuu^2*al+6*s0*a0^4*pl^3*al*puuuu^2+144*s0*a0^2*pl^3*au
> l*puuu*puuuu-1728*a0^5*pu11*puuu^2*pl*s0*pul-192*a0^4*al*pul*puuu*pl^2
> *s0*puuuu-6240*a0^4*al*pul^2*puuu^2*pl*s0)/pl^3/puuu^2/a0:
```

```
> simplify(p4uull):
```

Simplificação de p4uull por sull.

```
> p4ulll :=
> s111*pu*a0^3+3*sull*pl*a0+3*s11*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+3*sul*(2
> *pl*al+p11*a0)+3*s1*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+p11*au+6*al*a0^2*pul+6*pu*
> a0*al^2+a0^3*pull)+su*(3*pl*all+3*p11*al+p111*a0)+s0*(p111*au+9*al*a0^
> 2*pull+6*pu*al^3+18*a0*al^2*pul+18*al*pu*a0*all+9*a0^2*pul*all+3*pu*a0
> ^2*all1+pull1*a0^3+3*p11*aul+3*pl*aul1):
```

```
> expand(p4ulll):
```

```
> solve(p4ulll,sull):
```

```
> sull:=-1/144*s0/a0^2*(-12*pl^2*a0^3*puuuu*p11*al+96*pl^2*a0^3*puuu*pu
> l*all-240*pl*a0^3*puuu*pul*p11*al-104*pl*a0^4*puuu*pul*p111+144*a0^2*p
> l^2*al^2*puuu*pul-144*pl^2*aul*puuu*p11*a0+144*pl^2*a0^3*pull*puuu*al-
> 144*pl*a0^4*pull*puuu*p11+12*pl^3*a0^3*puuuu*all+2*pl^2*a0^4*puuuu*p11
> l-36*a0^2*pl^3*al^2*puuuu-3*a0^4*p11^2*puuuu*pl+228*a0^4*p11^2*puuu*pu
> l-576*pl^3*aul*puuu*al+48*pl^2*a0^4*pull1*puuu+144*pl^3*a0*aul1*puuu)/
> pl^3/puuu:
```

```
> simplify(p4ulll):
```

Simplificação de p4llll por alll.

```
> p4llll :=
> 4*s1*(3*pl*all+3*p11*al+p111*a0)+6*s11*(2*pl*al+p11*a0)+4*s111*pl*a0+s
> 0*(p1111*a0+4*pl*all1+6*p11*all+4*p111*al):
```

```
> expand(p4llll):
```

```
> solve(p4llll,alll):
```

```
> alll:=-1/4*(-24*s0*pl^3*a0*al*all+12*s0*pl^2*a0*al^2*p11-4*s0*pl^2*a0
> ^2*al*p111-6*s0*pl^2*a0^2*p11*all+6*s0*pl*a0^2*p11^2*al-4*s0*pl*a0^3*p
> 11*p111+24*s0*pl^3*al^3+3*s0*pl1^3*a0^3+4*s111*pl^3*a0^3+s0*pl^2*a0^3*
> p1111)/pl^3/a0^2/s0:
```

```
> simplify(p4llll):
```

```
> restart:
```

Sexta Forma Normal

```
> pl:=0:
```

```
> p11:=0:
```

```
> p111:=0:
```

```
> p40 := 0:
```

```
> p4u := s0*pu*a0^3;
```

$$p4u := s0 \, pu \, a0^3$$

```
> p4l := s0*pl*a0:
```

Simplificação de p4uu por au.

```
> p4uu := s0*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+2*su*pu*a0^3:
```



```
> solve(p4uu, au):
> au:=-1/6*a0*(s0*a0^2*puu+2*su*pu)/s0/pu:
> expand(p4uu):
```

Simplificação de p4ul por al.

```
> p4ul := s1*pu*a0^3+su*pl*a0+s0*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul):
> solve(p4ul, al):
> al:=-1/3*a0*(s1*pu+s0*pul)/s0/pu:
> expand(p4ul):
> p4ll := 2*s1*pl*a0+s0*(2*pl*al+p1l*a0):
```

Simplificação de p4uuu por suu.

```
> p4uuu :=
> 3*su*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+3*suu*pu*a0^3+s0*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^
> 4*puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu):
> expand(p4uuu):
> solve(p4uuu, suu):
> suu:=-1/3/a0/s0*(-4*a0*su^2*pu^2+9*pu^2*auu*s0^2-2*a0^5*puu^2*s0^2-3*
> a0^3*puu*s0*su*pu+a0^5*puuu*pu*s0^2)/pu^2:
> expand(suu):
> simplify(p4uuu):
```

Simplificação de p4uul por aul.

```
> p4uul :=
> s1*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+2*su*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+2*sul*pu
> *a0^3+suu*pl*a0+s0*(pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*au*pu*a0*al+
> 5*al*a0^4*puu+a0^5*puul):
> expand(p4uul):
> solve(p4uul, aul):
> aul:=-1/18*a0/s0^2*(-8*su*pu^2*s1+6*sul*pu^2*s0+3*a0^2*puul*pu*s0^2-6
> *s0^2*a0^2*puu*pul-2*su*pu*s0*pul-3*s0*a0^2*puu*s1*pu)/pu^2:
> simplify(p4uul):
```

Simplificação de p4ull por all.

```
> p4ull :=
> 2*s1*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+su*(2*pl*al+p1l*a0)+s1l*pu*a0^3+2*s
> ul*pl*a0+s0*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+p1l*au+6*al*a0^2*pul+6*pu*a0*al^2+
> a0^3*pull):
> expand(p4ull):
> solve(p4ull, all):
> all:=1/9*a0/s0^2*(4*s1^2*pu^2-3*s1l*pu^2*s0+2*s1*pu*s0*pul+4*s0^2*pul
> ^2-3*pull*pu*s0^2)/pu^2:
> simplify(p4ull):
```

```
> p4lll :=
> 3*s1*(2*pl*al+p1l*a0)+3*s1l*pl*a0+s0*(3*pl*all+3*p1l*al+p1ll*a0):
```

Simplificação de p4uuuu por auuu.

```
> p4uuuu :=
> s0*(28*a0^6*au*puuu+72*pu*a0*au*auu+12*pu*a0^2*auuu+30*a0^4*auu*puu+12
> 0*a0^3*au^2*puu+a0^9*puuuu+24*pu*au^3)+4*su*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^4*
> puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu)+6*suu*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+4*suuu*pu*a
> 0^3:
```



```

> expand(p4uuuu):
> solve(p4uuuu, auu):
> auu:=-1/108/s0^3*(-42*a0^7*puuu*pu*s0^3*puu-12*a0^5*puuu*pu^2*s0^2*s
> u+162*a0^2*auu*puu*pu^2*s0^3+432*pu^3*auu*s0^2*su+29*s0^3*a0^7*puu^3-3
> 0*s0^2*a0^5*puu^2*su*pu-108*s0*a0^3*puu*su^2*pu^2-80*a0*su^3*pu^3+9*a0
> ^7*puuuu*pu^2*s0^3+36*suuu*pu^3*a0*s0^2)/pu^3:
> simplify(p4uuuu):

```

Simplificação de p4uuul por auu.

```

> p4uuul :=
> s0*(9*auu*a0^2*pul+pl*auuu+9*pu*a0^2*auul+18*auu*pu*a0*al+60*au*a0^3*a
> l*puu+7*al*a0^6*puuu+a0^7*puuul+15*aul*a0^4*puu+18*a0*au^2*pul+18*pu*a
> u^2*al+15*au*a0^4*puul+36*aul*pu*a0*au)+3*sul*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+
> 3*suu*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+sl*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^4*puu+1
> 8*pu*a0*au^2+a0^7*puuu)+3*su*(pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*au
> *pu*a0*al+5*al*a0^4*puu+a0^5*puul)+3*sul*pu*a0^3+suuu*pl*a0:
> expand(p4uuul):
> solve(p4uuul, auu):
> auu:=1/9/s0^2*(9*a0^3*puul*pu^2*s0^2*su-27*pu^3*auul*s0^3-3*a0^5*puuu
> l*pu^2*s0^3-20*a0^5*puu^2*s0^3*pul-12*a0*su^2*pu^3*sl+24*a0*sul*pu^3*s
> 0*su-6*a0^3*puu*s0*su*pu^2*sl+9*a0^3*puu*s0^2*sul*pu^2+12*a0^5*puu*s0^
> 3*puul*pu-15*a0^3*puu*s0^2*su*pu*pul-2*a0^5*puu^2*s0^2*sl*pu+a0^5*puuu
> *pu^2*s0^2*sl+7*a0^5*puuu*pu*s0^3*pul-9*sul*pu^3*a0*s0^2)/pu^2/(s0*pu
> l+4*sl*pu):
> simplify(p4uuul):

```

Simplificação de p4uull por sull.

```

> p4uull :=
> sl*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+4*sul*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+suu*(2
> *pl*al+p1l*a0)+2*sull*pu*a0^3+2*sul*pl*a0+1/2*s0*(6*pu*a0^2*auul+p1l*
> auu+2*pl*auul+a0^5*puull+6*au*a0^2*puul+24*aul*pu*a0*al+24*au*a0*al*pu
> l+12*all*pu*a0*au+12*aul*a0^2*pul+5*all*a0^4*puu+12*au*pu*al^2+20*a0^3
> *al^2*puu+10*al*a0^4*puul)+sl*(pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*a
> u*pu*a0*al+5*al*a0^4*puu+a0^5*puul)+su*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+p1l*au+
> 6*al*a0^2*pul+6*pu*a0*al^2+a0^3*pull):
> expand(p4uull):
> solve(p4uull, sull):
> sull:=1/36/a0/s0^2*(42*a0*s1l*pu^3*s0*su+84*a0*sul*pu^3*s0*sl-54*pu^3
> *auul*s0^3-9*a0^3*puull*pu^2*s0^3-54*s0^3*a0^3*puu*pu^2-56*a0*su*pu^3
> *sl^2+18*a0^3*pull*pu*s0^3*puu+6*a0*pull*pu^2*s0^2*su+18*a0^3*puul*pu^
> 2*s0^2*sl+36*a0^3*puul*pu*s0^3*pul-36*s0^2*a0^3*puu*sl*pu*pul-18*s0*a0
> ^3*puu*sl^2*pu^2-16*a0*su*pu^2*sl*s0*pul+12*a0*sul*pu^2*s0^2*pul-8*a0*
> su*pu*s0^2*pul^2+9*s1l*pu^2*s0^2*a0^3*puu)/pu^3:
> simplify(p4uull):

```

Simplificação de p4ulll por slll.

```

> p4ulll :=
> sl1l*pu*a0^3+3*sull*pl*a0+3*sl1l*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+3*sul*(2
> *pl*al+p1l*a0)+3*sl*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+p1l*au+6*al*a0^2*pul+6*pu*
> a0*al^2+a0^3*pull)+su*(3*pl*all+3*p1l*al+p11l*a0)+s0*(p11l*au+9*al*a0^
> 2*pull+6*pu*al^3+18*a0*al^2*pul+18*al*pu*a0*all+9*a0^2*pul*all+3*pu*a0
> ^2*alll+pulll*a0^3+3*p1l*aul+3*pl*au1l):
> expand(p4ulll):
> solve(p4ulll, sl1l):

```

```
> sl11:=-1/9/a0/s0^2*(-36*a0*sl*pu^3*sl1*s0+28*a0*sl^3*pu^3-9*a0*pull*s
> 0^2*pu^2*sl-36*a0*pull*s0^3*pu*pul+12*a0*sl^2*pu^2*s0*pul+12*a0*sl*pu*
> s0^2*pul^2+28*a0*s0^3*pul^3-9*a0*s0^2*pul*sl1*pu^2+27*pu^3*all1*s0^3+9
> *pull1*a0*s0^3*pu^2)/pu^3:
> simplify(p4ull1):
```

Simplificação de p4llll por sl.

```
> p4llll :=
> 4*sl*(3*pl*all+3*p11*al+p111*a0)+6*sl1*(2*pl*al+p11*a0)+4*sl11*pl*a0+s
> 0*(p1111*a0+4*pl*all+6*p11*all+4*p111*al);
p4llll := s0 plll a0
```

```
> restart:
```

Sétima Forma Normal

```
> pu:=0:
> puu:=0:
> puuu:=0:
> p40 := 0:
> p4u := s0*pu*a0^3:
> p4l := s0*pl*a0;
```

$$p4l := s0 pl a0$$

```
> p4uu := s0*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+2*su*pu*a0^3:
```

Simplificação de p4ul por su.

```
> p4ul := sl*pu*a0^3+su*pl*a0+s0*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul):
> solve(p4ul,su):
> su:=-s0*(pl*au+a0^3*pul)/pl/a0:
> expand(p4ul):
```

Simplificação de p4ll por sl.

```
> p4ll := 2*sl*pl*a0+s0*(2*pl*al+p11*a0):
> solve(p4ll,sl):
> sl:=-1/2*s0*(2*pl*al+p11*a0)/pl/a0:
> expand(p4ll):
```

```
> p4uuu :=
> 3*su*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+3*suu*pu*a0^3+s0*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^
> 4*puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu):
```

Simplificação de p4uul por auu.

```
> p4uul :=
> sl*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+2*su*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+2*su1*pu
> *a0^3+suu*pl*a0+s0*(pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*au*pu*a0*al+
> 5*al*a0^4*puu+a0^5*puul):
> expand(p4uul):
> solve(p4uul,auu):
```



```
> auu:=(-2*s0*pl^2*au^2+2*s0*pl*au*a0^3*pul-2*s0*a0^6*pul^2+suu*pl^2*a
> 0^2+s0*a0^6*pl*puul)/pl^2/a0/s0:
> simplify(p4uul):
```

Simplificação de p4uul por sul.

```
> p4uul :=
> 2*s1*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+su*(2*pl*al+p11*a0)+s11*pu*a0^3+2*s
> ul*pl*a0+s0*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+p11*au+6*al*a0^2*pul+6*pu*a0*al^2+
> a0^3*pull):
> expand(p4uul):
> solve(p4uul,sul):
> sul:=-1/2*s0*(-4*pl^2*al*au+2*pl*al*a0^3*pul-p11*a0*pl*au-2*p11*a0^4*
> pul+2*pl^2*a0*aul+pl*a0^4*pull)/pl^2/a0^2:
> simplify(p4uul):
```

Simplificação de p4lll por sll.

```
> p4lll :=
> 3*s1*(2*pl*al+p11*a0)+3*s11*pl*a0+s0*(3*pl*all+3*p11*al+p111*a0):
> expand(p4lll):
> solve(p4lll,sll):
> sll:=-1/6*s0*(-12*pl^2*al^2-6*pl*al*p11*a0-3*p11^2*a0^2+6*pl^2*a0*all
> +2*pl*a0^2*p111)/pl^2/a0^2:
> simplify(p4lll):
> p4uuuu :=
> s0*(28*a0^6*au*puuu+72*pu*a0*au*auu+12*pu*a0^2*auuu+30*a0^4*auu*puu+12
> 0*a0^3*au^2*puu+a0^9*puuuu+24*pu*au^3)+4*su*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^4*
> puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu)+6*suu*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+4*suuu*pu*a
> 0^3;
```

$$p4uuuu := s0 a0^9 puuuu$$

Simplificação de p4uuul por suuu.

```
> p4uuul :=
> s0*(9*auu*a0^2*pul+pl*auuu+9*pu*a0^2*auul+18*auu*pu*a0*al+60*au*a0^3*a
> l*puu+7*al*a0^6*puuu+a0^7*puuul+15*aul*a0^4*puu+18*a0*au^2*pul+18*pu*a
> u^2*al+15*au*a0^4*puul+36*aul*pu*a0*au)+3*sul*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+
> 3*suu*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+s1*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^4*puu+1
> 8*pu*a0*au^2+a0^7*puuu)+3*su*(pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*au
> *pu*a0*al+5*al*a0^4*puu+a0^5*puul)+3*suul*pu*a0^3+suuu*pl*a0:
> expand(p4uuul):
> solve(p4uuul,suuu):
> suuu:=(-18*a0^3*au^2*pul*pl^2*s0+36*a0^6*pul^2*s0*pl*au-12*a0^9*pul^3
> *s0+3*a0^5*pul*suu*pl^2+9*a0^9*pul*s0*pl*puul-a0^2*pl^3*auuu*s0-a0^9*p
> uuul*pl^2*s0-15*a0^6*au*puul*pl^2*s0-6*suu*pl^3*a0^2*au+6*pl^3*au^3*s0
> )/pl^3/a0^3:
> simplify(p4uuul):
```


Simplificação de p4uull por suul.

```

> p4uull :=
> s11*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+4*sul*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+suu*(2
> *pl*al+p11*a0)+2*sull*pu*a0^3+2*suul*pl*a0+1/2*s0*(6*pu*a0^2*aull+p11*
> auu+2*pl*auul+a0^5*puull+6*au*a0^2*pull+24*aul*pu*a0*al+24*au*a0*al*pu
> l+12*all*pu*a0*au+12*aul*a0^2*pul+5*all*a0^4*puu+12*au*pu*al^2+20*a0^3
> *al^2*puu+10*al*a0^4*puul)+s1*(pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*a
> u*pu*a0*al+5*al*a0^4*puu+a0^5*puul)+su*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+p11*au+
> 6*al*a0^2*pul+6*pu*a0*al^2+a0^3*pull):
> expand(p4uull):
> solve(p4uull,suul):
> suul:=1/4*(-12*s0*pl^3*al*au^2-8*s0*p11*a0^7*pul^2-6*suu*pl^3*a0^2*al
> -2*suu*pl^2*a0^3*p11-2*pl^3*auul*a0^2*s0-a0^7*puull*pl^2*s0-12*s0*pl^2
> *al*au*a0^3*pul+24*s0*pl*al*a0^6*pul^2-2*s0*p11*a0*pl^2*au^2-4*s0*p11*
> a0^4*pl*au*pul+12*s0*pl^3*a0*aul*au+6*s0*pl*a0^7*pull*pul+p11*s0*a0^7*
> pl*puul-10*al*a0^6*puul*pl^2*s0)/pl^3/a0^3:
> simplify(p4uull):

```

Simplificação de p4ulll por sull.

```

> p4ulll :=
> s111*pu*a0^3+3*sull*pl*a0+3*s11*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+3*sul*(2
> *pl*al+p11*a0)+3*s1*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+p11*au+6*al*a0^2*pul+6*pu*
> a0*al^2+a0^3*pull)+su*(3*pl*all+3*p11*al+p111*a0)+s0*(p111*au+9*al*a0^
> 2*pull+6*pu*al^3+18*a0*al^2*pul+18*al*pu*a0*all+9*a0^2*pul*all+3*pu*a0
> ^2*all1+pull1*a0^3+3*p11*aul+3*pl*aul1):
> expand(p4ulll):
> solve(p4ulll,sull):
> sull:=-1/6*s0*(36*pl^3*al^2*au+9*p11^2*a0^5*pul+3*p11^2*a0^2*pl*au-12
> *pl^3*a0*all*au+6*pl^2*a0^4*all*pul-2*pl^2*a0^2*p111*au-4*pl*a0^5*p111
> *pul-24*pl^3*a0*aul*al-6*pl^2*a0^2*aul*p11+6*pl^2*a0^4*pull*al-6*pl*a0
> ^5*pull*p11+2*pl^2*a0^5*pu111+6*pl^3*a0^2*au11+12*pl^2*al*p11*a0*au-12
> *pl*al*p11*a0^4*pul)/pl^3/a0^3:
> simplify(p4ulll):

```

Simplificação de p4llll por alll.

```

> p4llll :=
> 4*s1*(3*pl*all+3*p11*al+p111*a0)+6*s11*(2*pl*al+p11*a0)+4*s111*pl*a0+s
> 0*(p1111*a0+4*pl*all1+6*p11*all+4*p111*al):
> expand(p4llll):
> solve(p4llll,alll):
> alll:=-1/4*(-24*s0*pl^3*a0*al*all+12*s0*pl^2*a0*al^2*p11-4*s0*pl^2*a0
> ^2*al*p111-6*s0*pl^2*a0^2*p11*all+6*s0*pl*a0^2*p11^2*al-4*s0*pl*a0^3*p
> 11*p111+24*s0*pl^3*al^3+3*s0*p11^3*a0^3+4*s111*pl^3*a0^3+s0*pl^2*a0^3*
> p1111)/pl^3/a0^2/s0:
> simplify(p4llll):

```

> restart:

Oitava Forma Normal

> pu:=0:

> pl:=0:

> p40:=0:

> p4u:=s0*pu*a0^3:

> p4l:=s0*pl*a0:

> p4uu:=s0*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+2*su*pu*a0^3;

$$p4uu := s0 a0^5 puu$$

> p4ul:=sl*pu*a0^3+su*pl*a0+s0*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul);

$$p4ul := s0 a0^3 pul$$

> p4ll:=2*sl*pl*a0+s0*(2*pl*al+p11*a0);

$$p4ll := s0 pll a0$$

Simplificação de p4uuu por su.

> p4uuu:=3*su*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+3*suu*pu*a0^3+s0*(9*pu*a0^2*auu+1
> 5*au*a0^4*puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu):

> solve(p4uuu,su):

> su:=-1/3*s0/a0*(15*au*puu+a0^3*puuu)/puu:

> expand(p4uuu):

Simplificação de p4uul por sl.

> p4uul:=sl*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+2*su*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+
> 2*sul*pu*a0^3+suu*pl*a0+s0*(pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*au*p
> u*a0*al+5*al*a0^4*puu+a0^5*puul):

> solve(p4uul,sl):

> sl:=-1/3*s0/a0^3*(-12*pul*au*puu-2*pul*a0^3*puuu+15*al*a0^2*puu^2+3*p
> uu*a0^3*puul)/puu^2:

> expand(p4uul):

Simplificação de p4ull por au.

> p4ull:=2*sl*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+su*(2*pl*al+p11*a0)+s11*pu*
> a0^3+2*sul*pl*a0+s0*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+p11*au+6*al*a0^2*pul+6*pu*
> a0*al^2+a0^3*pull):

> solve(p4ull,au):

> au:=-1/12*a0^2*(-4*pul^2*a0*puuu+12*pul*al*puu^2+6*pul*puu*a0*puul+a0
> *puuu*p11*puu-3*puu^2*a0*pull)/puu/(-2*pul^2+p11*puu):

> A1:=expand(au):

> A2:=expand(p4ull):

> simplify(A2):

Simplificação de p4lll por al.

> p4lll:=3*sl*(2*pl*al+p11*a0)+3*s11*pl*a0+s0*(3*pl*all+3*p11*al+p111*a
> 0):

> solve(p4lll,al):

> al:=-1/12*a0/puu*(pul*puuu*p11^2+3*p11*pul*puu*pull-3*puu*puul*p11^2-
> 2*p111*puu*pul^2+p111*puu^2*p11)/p11/(pul^2-p11*puu):

> B1:=expand(al):

> B2:=expand(p4lll):


```
> simplify(B2):
```

Simplificação de p4uuuu por suu.

```
> p4uuuu:=s0*(28*a0^6*au*puuu+72*pu*a0*au*auu+12*pu*a0^2*auuu+30*a0^4*a
> uu*puu+120*a0^3*au^2*puu+a0^9*puuuu+24*pu*au^3)+4*su*(9*pu*a0^2*auu+15
> *au*a0^4*puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu)+6*suu*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+4*
> suuu*pu*a0^3:
```

```
> solve(p4uuuu,suu):
```

```
> suu:=-1/6/a0^2*(-7/3*s0*a0^5*(-4*pul^2*a0*puuu-pul*a0*puu*(pul*puuu*p
> ll^2+3*p11*pul*puu*pull-3*puu*puul*p11^2-2*p111*puu*pul^2+p111*puu^2*p
> ll)/p11/(pul^2-p11*puu)+6*pul*puu*a0*puul+a0*puuu*p11*puu-3*puu^2*a0*p
> ull)/puu/(-2*pul^2+p11*puu)*puuu+30*s0*a0*auu*puu+5/6*s0*a0^4*(-4*pul^
> 2*a0*puuu-pul*a0*puu*(pul*puuu*p11^2+3*p11*pul*puu*pull-3*puu*puul*p11
> ^2-2*p111*puu*pul^2+p111*puu^2*p11)/p11/(pul^2-p11*puu)+6*pul*puu*a0*p
> uul+a0*puuu*p11*puu-3*puu^2*a0*pull)^2/puu/(-2*pul^2+p11*puu)^2+s0*a0^
> 6*puuuu+5/3*s0*a0^2*(-5/4*a0^2*(-4*pul^2*a0*puuu-pul*a0*puu*(pul*puuu*
> p11^2+3*p11*pul*puu*pull-3*puu*puul*p11^2-2*p111*puu*pul^2+p111*puu^2*
> p11)/p11/(pul^2-p11*puu)+6*pul*puu*a0*puul+a0*puuu*p11*puu-3*puu^2*a0*
> pull)/(-2*pul^2+p11*puu)+a0^3*puuu)/puu*(-4*pul^2*a0*puuu-pul*a0*puu*(
> pul*puuu*p11^2+3*p11*pul*puu*pull-3*puu*puul*p11^2-2*p111*puu*pul^2+p1
> ll*puu^2*p11)/p11/(pul^2-p11*puu)+6*pul*puu*a0*puul+a0*puuu*p11*puu-3*
> puu^2*a0*pull)/(-2*pul^2+p11*puu)-4/3*s0*a0^3*(-5/4*a0^2*(-4*pul^2*a0*
> puuu-pul*a0*puu*(pul*puuu*p11^2+3*p11*pul*puu*pull-3*puu*puul*p11^2-2*
> p111*puu*pul^2+p111*puu^2*p11)/p11/(pul^2-p11*puu)+6*pul*puu*a0*puul+a
> 0*puuu*p11*puu-3*puu^2*a0*pull)/(-2*pul^2+p11*puu)+a0^3*puuu)/puu*puuu
> )/puu:
```

```
> C1:=expand(suu):
```

```
> expand(p4uuuu):
```

Simplificação de p4uuul por aul.

```
> p4uuul:=s0*(9*auu*a0^2*pul+p1*auuu+9*pu*a0^2*auul+18*auu*pu*a0*al+60*
> au*a0^3*al*puu+7*al*a0^6*puuu+a0^7*puuul+15*aul*a0^4*puu+18*a0*au^2*pu
> l+18*pu*au^2*al+15*au*a0^4*puul+36*aul*pu*a0*au)+3*sul*(6*pu*a0^2*au+a
> 0^5*puu)+3*suu*(p1*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+sl*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a
> 0^4*puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu)+3*su*(p1*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*
> pul+12*au*pu*a0*al+5*al*a0^4*puu+a0^5*puul)+3*suul*pu*a0^3+suuu*p1*a0:
```

```
> solve(p4uuul,aul):
```

```
> aul:=1/360*(-72*puu^5*sul*a0^3*p11^4+45*puu^5*s0*a0^5*pull*p111*p11^2
> -15*puu^5*s0*a0^5*pul*p111^2*p11-24*puu^4*p11^4*s0*a0^5*puuul+144*puu^
> 4*p11^4*s0*auu*pul-45*puu^4*p11^3*s0*a0^5*pull*puul-9*puu^4*p11^3*s0*a
> 0^5*puuu*p111+144*puu^4*p11^3*sul*a0^3*pul^2+18*puu^4*p11^2*s0*a0^5*pu
> ll^2*pul-30*puu^4*p11^2*s0*a0^5*puul*pul*p111-57*puu^4*s0*a0^5*pul^2*p
> ull*p111*p11+17*puu^4*s0*a0^5*pul^3*p111^2+45*puu^3*p11^4*s0*a0^5*puuu
> *puul+12*puu^3*p11^4*s0*pul*a0^5*puuuu+12*puu^3*p11^3*s0*a0^5*puuu*pul
> *pull-288*puu^3*p11^3*s0*auu*pul^3+45*puu^3*p11^3*s0*a0^5*pul*puul^2+4
> 8*puu^3*p11^3*s0*a0^5*puuul*pul^2+9*puu^3*p11^2*s0*a0^5*pull*puul*pul^
> 2-72*puu^3*p11^2*sul*a0^3*pul^4+29*puu^3*p11^2*s0*a0^5*puuu*p111*pul^2
> +42*puu^3*s0*a0^5*pul^3*puul*p111*p11-26*puu^2*s0*a0^5*puuu^2*pul*p11^
> 4-117*puu^2*p11^3*s0*a0^5*puuu*puul*pul^2-24*puu^2*p11^3*s0*pul^3*a0^5
> *puuuu+144*puu^2*p11^2*s0*auu*pul^5-24*puu^2*p11^2*s0*a0^5*puuul*pul^4
> -27*puu^2*p11^2*s0*a0^5*pul^3*puul^2-24*puu^2*s0*a0^5*pul^4*puuu*p111*
> p11+56*puu*s0*a0^5*puuu^2*pul^3*p11^3+12*puu*p11^2*s0*pul^5*a0^5*puuuu
> +60*puu*p11^2*s0*a0^5*pul^4*puuu*puul-28*s0*a0^5*pul^5*puuu^2*p11^2)/a
> 0^2/puu^3/(-pul^2+p11*puu)^2/p11^2/s0:
```

```
> D1:=expand(aul):
```

```
> simplify(p4uuul):
```


Simplificação de p4uull por sll.

```

> p4uull:=sll*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+4*sul*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pu
> l)+suu*(2*pl*al+p11*a0)+2*sull*pu*a0^3+2*suul*pl*a0+1/2*s0*(6*pu*a0^2*
> aull+p11*auu+2*pl*auul+a0^5*puull+6*au*a0^2*pull+24*aul*pu*a0*al+24*au
> *a0*al*pu*12*all*pu*a0*au+12*aul*a0^2*pu*5*all*a0^4*puu+12*au*pu*al^
> 2+20*a0^3*al^2*puu+10*al*a0^4*puul)+sl*(pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2
> *pul+12*au*pu*a0*al+5*al*a0^4*puu+a0^5*puul)+su*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*al
> l+p11*au+6*al*a0^2*pu*6*pu*a0*al^2+a0^3*pull):
> solve(p4uull,sll):
> sll:=1/720*(-720*puu*p11^2*s0*a0^5*pu*5*puu*puul-144*puu*p11^2*s0*a
> 0^5*puuu*pu*6+360*puu^2*p11^2*s0*a0^5*pu*4*puu*puul+324*puu^2*p11^
> 2*s0*a0^5*puul^2*pu*4+288*puu^2*p11^2*s0*a0^5*puul*pu*5-192*puu^2*s
> 0*a0^5*pu*5*puu*p11*p11-1012*puu*s0*a0^5*pu*4*puu^2*p11^3+807*puu
> ^2*s0*a0^5*pu*2*puu^2*p11^4+2124*puu^2*p11^3*s0*a0^5*pu*3*puu*puul
> +408*puu^2*p11^3*s0*a0^5*puuu*pu*4-360*puu^3*p11^2*a0^5*puul*s0*pu
> ^4-2016*puu^3*p11^2*sul*a0^3*pu*5+336*puu^3*s0*a0^5*puul*pu*4*p11*p
> 11-1728*puu^2*p11^2*s0*auu*pu*6-1254*puu^3*p11^3*s0*a0^5*pu*2*puu*p
> ull+6696*puu^3*p11^3*s0*auu*pu*4-576*puu^3*p11^3*s0*a0^5*puul*pu*3-
> 384*puu^3*p11^4*s0*a0^5*puuu*pu*2-1305*puu^3*p11^3*s0*a0^5*puul^2*pu
> l^2-108*puu^3*p11^2*s0*a0^5*pu*3*puul*puul+412*puu^3*p11^2*s0*a0^5*pu
> l^3*puu*p111-636*puu^4*s0*a0^5*pu*3*puul*p111*p11+256*puu^4*s0*a0^5*
> p111^2*pu*4+279*puu^4*p11^2*s0*a0^5*pu*2*puul^2-185*puu^3*s0*a0^5*pu
> uu^2*p11^5-1080*puu^3*p11^4*s0*a0^5*puu*pu*puul-112*puu^4*p11^3*s0*a
> 0^5*puu*pu*puul+720*puu^4*p11^3*a0^5*puul*s0*pu*2-510*puu^4*p11^2*
> s0*a0^5*puul*pu*2*p111-1800*puu^4*p11^2*all*a0^4*s0*pu*4+570*puu^4*p
> 11^4*s0*a0^5*puu*puul+288*puu^4*p11^4*pu*s0*a0^5*puul+495*puu^4*p11
> ^4*s0*a0^5*puul^2+120*puu^4*s0*a0^5*puuu*p11^5-8208*puu^4*p11^4*s0*au
> u*pu*2+1080*puu^4*p11^3*s0*a0^5*pu*puul*puul+4032*puu^4*p11^3*sul*a0
> ^3*pu*3+960*puu^5*s0*a0^5*pu*puul*p111*p11^2-385*puu^5*s0*a0^5*p111^
> 2*pu*2*p11-150*puu^5*p11^3*s0*a0^5*puul*p111-2016*puu^5*p11^4*sul*a0^
> 3*pu*3-360*puu^5*p11^4*a0^5*puul*s0-765*puu^5*p11^3*s0*a0^5*puul^2-180
> 0*puu^6*all*a0^4*s0*p11^4+75*puu^6*s0*a0^5*p111^2*p11^2+336*s0*a0^5*pu
> l^6*puu^2*p11^2+3600*puu^5*p11^3*all*a0^4*s0*pu*2+3240*puu^5*s0*auu*
> p11^5)/puu^4/(-pu*2+p11*puu)^2/p11^2/a0^5:
> E1:=expand(sll):
> simplify(p4uull):

```

Simplificação de p4ulll por sul.

```

> p4ulll:=slll*pu*a0^3+3*sull*pl*a0+3*sll*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pu)
> +3*sul*(2*pl*al+p11*a0)+3*sl*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+p11*au+6*al*a0^2*
> pul+6*pu*a0*al^2+a0^3*pull)+su*(3*pl*all+3*p11*al+p111*a0)+s0*(p111*au
> +9*al*a0^2*pull+6*pu*al^3+18*a0*al^2*pu*18*al*pu*a0*all+9*a0^2*pu*al
> l+2*pu*a0^2*all+p111*a0^3+3*p11*aul+3*pl*aul+pu*a0^2*auu):
> solve(p4ulll,sul):

```



```

> sul:=-1/288*(336*puu^3*a0^5*pul^5*puul*plll*pll-1266*puu^4*a0^5*pul^3
> *puul*plll*pll^2+879*puu^2*a0^5*puuu^2*pul^3*pll^4-1068*a0^5*pul^5*puu
> u^2*pll^3*puu-420*puu^6*a0^5*pull*plll*pll^3+55*puu^6*a0^5*pul*plll^2*
> pll^2-180*puu^5*pll^4*a0^5*pull*puul+12*puu^5*pll^4*a0^5*puuu*plll-144
> *puu*pll^2*pul^7*a0^5*puuu-720*puu*pll^2*a0^5*pul^6*puuu*puul-48*puu^
> 5*pll^5*a0^5*puuul+3528*puu^5*pll^5*auu*pul-192*puu^2*a0^5*pul^6*puuu*
> plll*pll+684*puu^3*pll^2*a0^5*puuu*plll*pul^4-344*puu^4*pll^3*a0^5*puu
> u*plll*pul^2+324*puu^2*pll^2*a0^5*pul^5*puul^2-81*puu^4*pll^2*a0^5*pul
> l^2*pul^3-639*puu^5*pll^3*a0^5*pull^2*pul+60*puu^4*pll^5*a0^5*puuu*puu
> l+1176*puu^5*a0^5*pul^2*pull*plll*pll^2-151*puu^5*a0^5*pul^3*plll^2*pl
> l+450*puu^5*pll^3*a0^5*puul*pul*plll-276*puu^4*a0^5*pul^4*pull*plll*pl
> l+384*puu^4*pll^4*a0^5*puuul*pul^2-108*puu^3*pll^2*a0^5*pull*puul*pul^
> 4+1728*puu^4*pll^3*a0^5*pull*puul*pul^2-1359*puu^3*pll^3*a0^5*pul^3*pu
> ul^2+315*puu^4*pll^4*a0^5*pul*puul^2+144*puu^4*pll^5*pul*a0^5*puuu-14
> 94*puu^3*pll^3*a0^5*puuu*pul^3*pull+654*puu^4*pll^4*a0^5*puuu*pul*pull
> -432*puu^3*pll^4*pul^3*a0^5*puuu+288*puu^2*pll^2*a0^5*puuul*pul^6-624
> *puu^3*pll^3*a0^5*puuul*pul^4+2244*puu^2*pll^3*a0^5*puuu*puul*pul^4-11
> 04*puu^3*pll^4*a0^5*puuu*puul*pul^2-227*puu^3*a0^5*puuu^2*pul*pll^5+43
> 2*puu^2*pll^3*pul^5*a0^5*puuu+6984*puu^3*pll^3*auu*pul^5-8784*puu^4*p
> ll^4*auu*pul^3+16*puu^4*a0^5*pul^5*plll^2-1728*puu^2*pll^2*auu*pul^7+3
> 36*a0^5*pul^7*puuu^2*pll^2+360*puu^4*pll^2*a0^5*puuul*pul^5+360*puu^2*pll^2*
> a0^5*puuu*pull*pul^5+720*puu^4*pll^3*a0^5*puuul*pul^3-480*puu^5*pll^3*
> pull*a0^5*pul^2-720*puu^5*pll^3*a0^5*puuul*pul^3-360*puu^5*pll^4*pul*a0
> ^5*puuul+360*puu^6*pll^4*pul*a0^4+240*puu^6*pll^4*pull*a0^5)*s0/a
> 0^3/pll^2/(-pul^2+pll*puu)^2/puu^3/(2*pll*puu-7*pul^2):
> F1:=expand(sul):

```

Simplificação de p4llll por all.

```

> p4llll:=4*s1*(3*pl*all+3*pll*al+plll*a0)+6*s11*(2*pl*al+pll*a0)+4*s11
> l*pl*a0+s0*(plll*a0+4*pl*all+6*pll*all+4*plll*al):
> solve(p4llll,all):
> all:=1/72/puu^3*(-27*puu^6*a0^5*plll^2*pll^3+648*puu^5*auu*pll^6+24*p
> uu^6*a0^5*plll*pll^4+168*puu^5*pll^4*pul*pull*a0^5+28*a0^5*pul^6*puu
> u^2*pll^3+114*puu^4*pll^5*a0^5*puuu*pull+24*puu^4*a0^5*puuu*pll^6+6*p
> uu^5*pll^4*a0^5*puul*plll-132*puu^5*pll^3*a0^5*plll*pul^2-138*puu^5*p
> ll^3*a0^5*pul*pull*plll-153*puu^5*pll^4*a0^5*pull^2-72*puu^5*a0^5*puul
> l*pll^5-12*puu*pll^3*a0^5*puuu*pul^6-145*puu*a0^5*pul^4*puuu^2*pll^4+
> 24*puu^2*pll^3*pul^5*a0^5*puuul+27*puu^2*pll^3*a0^5*puul^2*pul^4+48*pu
> u^2*pll^4*a0^5*puuu*pul^4+130*puu^2*a0^5*pul^2*puuu^2*pll^5-84*puu^3*
> pll*a0^5*plll*pul^6-189*puu^3*pll^2*a0^5*pul^4*pull^2+168*puu^3*pll^2
> *pul^5*pull*a0^5-72*puu^3*pll^3*a0^5*puuul*pul^4-48*puu^3*pll^4*pul^3
> *a0^5*puuul-324*puu^3*pll^4*a0^5*puul^2*pul^2-60*puu^3*pll^5*pul^2*a0^
> 5*puuu-177*puu^4*a0^5*plll^2*pul^4*pll+192*puu^4*pll^2*a0^5*plll*pul
> ^4-336*puu^4*pll^3*pul^3*pull*a0^5+144*puu^4*pll^4*a0^5*puuul*pul^2+1
> 44*puu^4*pll^3*a0^5*puul*plll*pul^2+126*puu^4*pll^3*a0^5*pul^2*pull^2+
> 126*puu^4*pll^4*a0^5*pul*pull*puul+152*puu^5*a0^5*plll^2*pul^2*pll^2-2
> 6*puu^4*pll^4*a0^5*pul*puu*plll-1440*puu^4*pll^5*pul^2*auu+81*puu^4*p
> ll^5*a0^5*puul^2+24*puu^4*pll^5*pul*a0^5*puuul-144*puu^2*pll^3*pul^6*a
> uu+366*puu^2*pll^4*a0^5*pul^3*puuu*puul+28*puu^3*a0^5*plll^2*pul^6+84*
> puu^3*pll*a0^5*pul^5*pull*plll-294*puu^3*pll^2*a0^5*puul*plll*pul^4-22
> *puu^3*pll^3*a0^5*pul^3*puuu*plll+306*puu^3*pll^3*a0^5*pul^3*pull*puul
> -204*puu^3*pll^4*a0^5*pul^2*puuu*pull+936*puu^3*pll^4*pul^4*auu-162*pu
> u^3*pll^5*a0^5*pul*puuu*puul-37*puu^3*a0^5*puuu^2*pll^6+198*puu^4*pll^
> 2*a0^5*pul^3*pull*plll-60*puu*pll^3*a0^5*pul^5*puuu*puul+96*puu^2*a0^5
> *pul^5*puuu*plll*pll^2-54*puu^2*pll^3*a0^5*pul^4*puuu*pull)/(-pul^2+pl
> l*puu)^2/pll^2/a0^4/(3*pll*puu-14*pul^2):

```



```

> G1:=expand(all):
> simplify(p4llll):

> restart:
Nona Forma Normal
> pu:=0:
> pl:=0:
> puu:=(pul^2)/pll:
> p40:=0:
> p4u:=s0*pu*a0^3:
> p4l:=s0*pl*a0:
> p4uu:=s0*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+2*su*pu*a0^3;

```

$$p4uu := \frac{s0 a0^5 pul^2}{pll}$$

```

> p4ul:=s1*pu*a0^3+su*pl*a0+s0*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul);
p4ul := s0 a0^3 pul
> p4ll:=2*s1*pl*a0+s0*(2*pl*al+pll*a0);
p4ll := s0 pll a0

```

Simplificação de p4uuu por su.

```

> p4uuu:=3*su*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+3*suu*pu*a0^3+s0*(9*pu*a0^2*auu+1
> 5*au*a0^4*puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu):
> solve(p4uuu,su):
> su:=-1/3*s0/a0*(15*au*pul^2+a0^3*puuu*pll)/pul^2:
> expand(p4uuu):

```

Simplificação de p4uul por sl.

```

> p4uul:=s1*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+2*su*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+
> 2*sul*pu*a0^3+suu*pl*a0+s0*(pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*au*p
> u*a0*al+5*al*a0^4*puu+a0^5*puul):
> solve(p4uul,s1):
> s1:=1/3*s0/a0^3*(12*pll*au*pul^2+2*a0^3*puuu*pll^2-15*al*a0^2*pul^3-3
> *pul*a0^3*puul*pll)/pul^3:
> expand(p4uul):

```

Simplificação de p4ull por au.

```

> p4ull:=2*s1*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+su*(2*pl*al+pll*a0)+s11*pu*
> a0^3+2*sul*pl*a0+s0*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+pll*au+6*al*a0^2*pul+6*pu*
> a0*al^2+a0^3*pu11):
> solve(p4ull,au):
> au:=-1/4*a0^2*(a0*puuu*pll^2-4*al*pul^3-2*pul*a0*puul*pll+pul^2*a0*pu
> 11)/pul^2/pl1:
> simplify(p4ull):

```

p4lll não é simplificado.

```

> p4lll:=3*s1*(2*pl*al+pll*a0)+3*s11*pl*a0+s0*(3*pl*all+3*pll*al+pll1*a
> 0);

```


$$\begin{aligned}
 p4lll &:= s0(-3 a0^2 (a0 puuu pll^2 - 4 al pul^3 - 2 pul a0 puul pll + pul^2 a0 pull) \\
 &+ 2 a0^3 puuu pll^2 - 15 al a0^2 pul^3 - 3 pul a0^3 puul pll)pll/(a0^2 pul^3) \\
 &+ s0 (3 pll al + plll a0)
 \end{aligned}$$

> expand(p4lll);

$$-\frac{s0 a0 pll^3 puuu}{pul^3} + \frac{3 s0 a0 pll^2 puul}{pul^2} - \frac{3 s0 a0 pll pull}{pul} + s0 plll a0$$

Simplificação de p4uuuu por auu.

> p4uuuu:=s0*(28*a0^6*au*puuu+72*pu*a0*au*auu+12*pu*a0^2*auuu+30*a0^4*au*puu+120*a0^3*au^2*puu+a0^9*puuuu+24*pu*au^3)+4*su*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^4*puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu)+6*suu*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+4*suuu*pu*a0^3;

> simplify(p4uuuu):

> solve(p4uuuu, auu):

> auu:=-1/360*a0*(-115*s0*a0^4*puuu^2*pll^4+936*s0*a0^3*puuu*pll^2*al*puul^3+468*s0*a0^4*puuu*pll^3*pul*puul-234*s0*a0^4*puuu*pll^2*pul^2*pull-2160*s0*a0^2*al^2*pul^6-2160*s0*a0^3*al*pul^4*puul*pll+1080*s0*a0^3*al*pul^5*pull-540*s0*a0^4*pul^2*puul^2*pll^2+540*s0*a0^4*pul^3*puul*pll*pull-135*s0*a0^4*pul^4*pull^2+12*s0*a0^4*puuuu*pul^2*pll^3+72*suu*pul^4*pll^2)/pll^2/pul^4/s0;

> expand(p4uuuu):

Simplificação de p4uuul por aul.

> p4uuul:=s0*(9*auu*a0^2*pul+pl*auuu+9*pu*a0^2*auul+18*auu*pu*a0*al+60*au*a0^3*al*puu+7*al*a0^6*puuu+a0^7*puuul+15*aul*a0^4*puu+18*a0*au^2*puul+18*pu*au^2*al+15*au*a0^4*puul+36*aul*pu*a0*au)+3*sul*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+3*suu*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+sl*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^4*puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu)+3*su*(pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*au*pu*a0*al+5*al*a0^4*puu+a0^5*puul)+3*suul*pu*a0^3+suuu*pl*a0;

> simplify(p4uuul):

> solve(p4uuul, aul):

> aul:=1/1800/a0*(-144*suu*pul^4*pll^2-95*s0*a0^4*puuu^2*pll^4+5760*s0*a0^2*al^2*pul^6-315*s0*a0^4*pul^4*pull^2-1212*s0*a0^3*puuu*pll^2*al*puul^3+354*s0*a0^4*puuu*pll^3*pul*puul-282*s0*a0^4*puuu*pll^2*pul^2*pull+2160*s0*a0^3*al*pul^4*puul*pll-180*s0*a0^3*al*pul^5*pull-360*s0*a0^4*pul^2*puul^2*pll^2+810*s0*a0^4*pul^3*puul*pll*pull+36*s0*a0^4*puuuu*pul^2*pll^3-120*a0^4*puuul*pll^2*pul^3*s0-360*sul*a0^2*pul^5*pll)/pll/pul^5/s0;

> simplify(p4uuul):

Simplificação de p4uull por sll.

> p4uull:=sll*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+4*sul*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*puul)+suu*(2*pl*al+pll*a0)+2*sull*pu*a0^3+2*suul*pl*a0+1/2*s0*(6*pu*a0^2*auul+pll*auu+2*pl*auul+a0^5*puull+6*au*a0^2*pull+24*aul*pu*a0*al+24*au*a0*al*pul+12*all*pu*a0*au+12*aul*a0^2*pul+5*all*a0^4*puu+12*au*pu*al^2+20*a0^3*al^2*puu+10*al*a0^4*puul)+sl*(pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*au*pu*a0*al+5*al*a0^4*puu+a0^5*puul)+su*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*al+pl*au+6*al*a0^2*pul+6*pu*a0*al^2+a0^3*pull);

> simplify(p4uull):


```
> solve(p4uull,s11):
> s11:=-1/1800/a0^4*(756*suu*pul^4*p11^2+205*s0*a0^4*puuu^2*p11^4-3240*
> s0*a0^2*al^2*pul^6+1485*s0*a0^4*pul^4*pull^2-5112*s0*a0^3*puuu*p11^2*a
> l*pul^3-2196*s0*a0^4*puuu*p11^3*pul*puul+1818*s0*a0^4*puuu*p11^2*pul^2
> *pull+14760*s0*a0^3*al*pul^4*puul*p11-11880*s0*a0^3*al*pul^5*pull+4140
> *s0*a0^4*pul^2*puul^2*p11^2-5940*s0*a0^4*pul^3*puul*p11*pull+186*s0*a0
> ^4*puuuu*pul^2*p11^3-720*a0^4*puuul*p11^2*pul^3*s0+5040*sul*a0^2*pul^5
> *p11+4500*a11*a0^3*pul^6*s0+900*a0^4*puull*p11*pul^4*s0)/pul^6:
> simplify(p4uull):
```

Simplificação de p4uull por sul.

```
> p4ulll:=s111*pu*a0^3+3*sull*p1*a0+3*s11*(p1*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)
> +3*sul*(2*p1*al+p11*a0)+3*s1*(2*p1*aul+3*pu*a0^2*a11+p11*au+6*al*a0^2*
> pul+6*pu*a0*al^2+a0^3*pull)+su*(3*p1*a11+3*p11*al+p111*a0)+s0*(p111*au
> +9*al*a0^2*pull+6*pu*al^3+18*a0*al^2*pul+18*al*pu*a0*a11+9*a0^2*pul*al
> l+2*pu*a0^2*a11+pull1*a0^3+3*p11*aul+3*p1*aul+pu*a0^2*auuu):
> simplify(p4ulll):
> solve(p4ulll,suu):
> suu:=-1/18*a0^2*(72*sul*pul^5*p11^2+3*s0*a0^2*puuu^2*p11^5-108*al*a0*
> pull*p11*pul^5*s0+36*al^2*pul^6*p11*s0-18*a0*pul^6*a11*p11*s0-12*pull1
> *a0^2*p11*pul^5*s0-8*p111*a0^2*pul^3*s0*puuu*p11^2+48*p111*a0*pul^6*s0
> *al+24*p111*a0^2*pul^4*s0*puul*p11-12*p111*a0^2*pul^5*s0*pull-36*s0*a0
> *puuu*p11^3*al*pul^3-36*s0*a0^2*puuu*p11^4*pul*puul+42*s0*a0^2*puuu*p1
> l^3*pul^2*pull+108*s0*a0*al*pul^4*puul*p11^2+72*s0*a0^2*pul^2*puul^2*p
> l1^3-144*s0*a0^2*pul^3*puul*p11^2*pull+3*s0*a0^2*puuuu*pul^2*p11^4-12*
> a0^2*puuul*p11^3*pul^3*s0+63*p11*s0*a0^2*pul^4*pull^2+18*a0^2*puull*p1
> l^2*pul^4*s0)/pul^4/p11^3:
> simplify(p4ulll):
```

Simplificação de p4llll por all.

```
> p4llll:=4*s1*(3*p1*a11+3*p11*al+p111*a0)+6*s11*(2*p1*al+p11*a0)+4*s11
> l*p1*a0+s0*(p1111*a0+4*p1*a111+6*p11*a11+4*p111*al):
> solve(p4llll,a11):
> a11:=-1/3456/a0*(2016*sul*pul^5*p11^2+79*s0*a0^2*puuu^2*p11^5-3744*al
> *a0*pull*p11*pul^5*s0-1152*al^2*pul^6*p11*s0+504*pull11*a0^2*p11*pul^5*
> s0+736*p111*a0^2*pul^3*s0*puuu*p11^2-2016*p111*a0*pul^6*s0*al-2208*p11
> l*a0^2*pul^4*s0*puul*p11+1704*p111*a0^2*pul^5*s0*pull-2400*s0*a0*puuu*
> p11^3*al*pul^3-684*s0*a0^2*puuu*p11^4*pul*puul+54*s0*a0^2*puuu*p11^3*p
> ul^2*pull+6624*s0*a0*al*pul^4*puul*p11^2+1116*s0*a0^2*pul^2*puul^2*p11
> ^3+108*s0*a0^2*pul^3*puul*p11^2*pull+60*s0*a0^2*puuuu*pul^2*p11^4-216*
> a0^2*puuul*p11^3*pul^3*s0-1161*p11*s0*a0^2*pul^4*pull^2+144*a0^2*puull
> *p11^2*pul^4*s0-300*s0*a0^2*pul^6*p1111)/pul^6/s0/p11:
> simplify(p4llll):
```

```
> restart:
```

Décima Forma Normal

```
> pu:=0:
> pl:=0:
> p11:=0:
> p40 := 0:
> p4u := s0*pu*a0^3:
```



```

> p4l := s0*pl*a0:
> p4uu := s0*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+2*su*pu*a0^3;
      p4uu := s0 a0^5 puu
> p4ul := sl*pu*a0^3+su*pl*a0+s0*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul);
      p4ul := s0 a0^3 pul
> p4ll := 2*sl*pl*a0+s0*(2*pl*al+p1l*a0):

```

Simplificação de p4uuu por su.

```

> p4uuu :=
> 3*su*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+3*suu*pu*a0^3+s0*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^
> 4*puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu):
> expand(p4uuu):
> solve(p4uuu,su):
> su:=-1/3*s0/a0*(15*au*puu+a0^3*puuu)/puu:
> simplify(p4uuu):

```

Simplificação de p4uul por sl.

```

> p4uul :=
> sl*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+2*su*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+2*sul*pu
> *a0^3+suu*pl*a0+s0*(pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*au*pu*a0*al+
> 5*al*a0^4*puu+a0^5*puul):
> solve(p4uul,sl):
> sl:=-1/3*s0/a0^3*(-12*pul*au*puu-2*pul*a0^3*puuu+15*al*a0^2*puu^2+3*p
> uu*a0^3*puul)/puu^2:
> simplify(p4uul):

```

Simplificação de p4ull por al.

```

> p4ull :=
> 2*sl*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+su*(2*pl*al+p1l*a0)+s1l*pu*a0^3+2*s
> ul*pl*a0+s0*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+p1l*au+6*al*a0^2*pul+6*pu*a0*al^2+
> a0^3*pull):
> solve(p4ull,al):
> al:=1/12*(24*pul^2*au*puu+4*pul^2*a0^3*puuu-6*pul*puu*a0^3*puul+3*a0^
> 3*pull*puu^2)/puu^2/a0^2/pul:
> simplify(p4ull):
> p4lll :=
> 3*sl*(2*pl*al+p1l*a0)+3*s1l*pl*a0+s0*(3*pl*all+3*p1l*al+p1ll*a0):

```

```

> p4lll :=
> 3*sl*(2*pl*al+p1l*a0)+3*s1l*pl*a0+s0*(3*pl*all+3*p1l*al+p1ll*a0);
      p4lll := s0 p1ll a0

```

Simplificação de p4uuuu por auu.

```

> p4uuuu :=
> s0*(28*a0^6*au*puuu+72*pu*a0*au*auu+12*pu*a0^2*auuu+30*a0^4*auu*puu+12
> 0*a0^3*au^2*puu+a0^9*puuuu+24*pu*au^3)+4*su*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^4*
> puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu)+6*suu*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+4*suuu*pu*a
> 0^3:
> expand(p4uuuu):
> solve(p4uuuu,auu):

```



```
> auu:=1/90/a0*(36*s0*puu*a0^3*au*puuu+540*s0*puu^2*au^2-3*s0*puu*a0^6*
> puuu+4*s0*a0^6*puu^2-18*suu*a0^2*puu^2)/puu^2/s0:
> simplify(p4uuuu):
```

Simplificação de p4uuul por auu.

```
> p4uuul :=
> s0*(9*auu*a0^2*pul+pl*auuu+9*pu*a0^2*auul+18*auu*pu*a0*al+60*au*a0^3*a
> l*puu+7*al*a0^6*puuu+a0^7*puuul+15*aul*a0^4*puu+18*a0*au^2*pul+18*pu*a
> u^2*al+15*au*a0^4*puul+36*aul*pu*a0*au)+3*sul*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+
> 3*suu*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+sl*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^4*puu+1
> 8*pu*a0*au^2+a0^7*puuu)+3*sul*(pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*au
> *pu*a0*al+5*al*a0^4*puu+a0^5*puul)+3*sul*pu*a0^3+suu*pl*a0:
> expand(p4uuul):
> solve(p4uuul,aul):
> aul:=-1/900/a0^3*(4*pul^2*s0*a0^6*puuu^2+72*pul^2*suu*a0^2*puu^2+180*
> sul*a0^4*puu^3*pul-1350*au*puu^3*s0*a0^3*pul-30*a0^6*puuu*s0*pul*puu*
> puul-45*a0^6*puuu*s0*pul*puu^2+60*a0^6*puuul*puu^2*s0*pul-8280*au^2*p
> ul^2*puu^2*s0+1800*au*a0^3*puul*puu^2*s0*pul-1464*pul^2*s0*puu*a0^3*au
> *puu-18*pul^2*s0*puu*a0^6*puuu)/puu^3/pul/s0:
> simplify(p4uuul):
```

Simplificação de p4uull por sull.

```
> p4uull :=
> sll*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+4*sul*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+suu*(2
> *pl*al+p1l*a0)+2*sull*pu*a0^3+2*sul*pl*a0+1/2*s0*(6*pu*a0^2*auul+p1l*
> auu+2*pl*auul+a0^5*puull+6*au*a0^2*pul+24*aul*pu*a0*al+24*au*a0*al*pu
> l+12*all*pu*a0*au+12*aul*a0^2*pul+5*all*a0^4*puu+12*au*pu*al^2+20*a0^3
> *al^2*puu+10*al*a0^4*puul)+sl*(pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*a
> u*pu*a0*al+5*al*a0^4*puu+a0^5*puul)+su*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+p1l*au+
> 6*al*a0^2*pul+6*pu*a0*al^2+a0^3*pul):
> expand(p4uull):
> solve(p4uull,sll):
> sll:=1/3600/a0^6*(8100*s0*pul^2*puu^2*a0^6*puul^2-9000*s0*pul*puu^3*a
> 0^6*puul*pul-12720*pul^3*a0^6*puuu*s0*puu*puul+7920*pul^2*a0^6*puuu*s
> 0*pul*puu^2+1440*pul^3*a0^6*puuul*puu^2*s0-432*pul^4*s0*puu*a0^6*puuu
> u-1800*a0^6*puull*puu^3*s0*pul^2+54000*au*a0^3*pul*puu^3*s0*pul^2-900
> 0*all*a0^5*puu^4*s0*pul^2+46464*au*puu*s0*pul^4*a0^3*puuu-72000*au*puu
> ^2*s0*pul^3*a0^3*puul+4496*pul^4*s0*a0^6*puuu^2+132480*au^2*puu^2*s0*p
> ul^4+1728*pul^4*suu*a0^2*puu^2-10080*pul^3*sul*a0^4*puu^3+3375*s0*a0^6
> *pul^2*puu^4)/puu^4/pul^2:
> simplify(p4uull):
```

Simplificação de p4ulll por slll.

```
> p4ulll :=
> slll*pu*a0^3+3*sull*pl*a0+3*sll*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+3*sul*(2
> *pl*al+p1l*a0)+3*sl*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+p1l*au+6*al*a0^2*pul+6*pu*
> a0*al^2+a0^3*pul)+su*(3*pl*all+3*p1l*al+p1l1*a0)+s0*(p1l1*au+9*al*a0^
> 2*pul+6*pu*al^3+18*a0*al^2*pul+18*al*pu*a0*all+9*a0^2*pul*all+3*pu*a0
> ^2*all+p1l1*a0^3+3*p1l*aul+3*pl*au):
> expand(p4ulll):
> solve(p4ulll,sul):
```

```
> sul:=1/10080*(-2700*s0*pul^2*puu^2*a0^6*puul^2+7200*s0*pul*puu^3*a0^6
> *puul*pull+1680*pul^3*a0^6*puuu*s0*puu*puul-2880*pul^2*a0^6*puuu*s0*pu
> ll*puu^2+1440*pul^3*a0^6*puuul*puu^2*s0-432*pul^4*s0*puu*a0^6*puuuu-18
> 00*a0^6*puuul*puu^3*s0*pul^2-10800*au*a0^3*pull*puu^3*s0*pul^2+1800*al
> l*a0^5*puu^4*s0*pul^2-11136*au*puu*s0*pul^4*a0^3*puuu+14400*au*puu^2*s
> 0*pul^3*a0^3*puul-304*pul^4*s0*a0^6*puuu^2-40320*au^2*puu^2*s0*pul^4+1
> 728*pul^4*suu*a0^2*puu^2-3825*s0*a0^6*pull^2*puu^4-4800*s0*plll*a0^3*p
> uu^4*pul*au-400*s0*plll*a0^6*puu^3*pul*puuu+1200*s0*pulll*a0^6*puu^4*p
> ul)/a0^4/puu^3/pul^3:
```

```
> simplify(p4ulll):
```

Simplificação de p4llll por sl.

```
> p4llll :=
> 4*sl*(3*pl*all+3*pll*al+plll*a0)+6*sll*(2*pl*al+pll*a0)+4*slll*pl*a0+s
> 0*(pllll*a0+4*pl*alll+6*pll*all+4*plll*al):
> expand(p4llll):
> solve(p4llll, au):
> au:=-1/48*a0^3*(-12*plll*pul*puu*puul+8*plll*pul^2*puuu+12*plll*pull*
> puu^2-3*pllll*puu^2*pul)/puu/pul^2/plll:
> simplify(p4llll):
```

```
> restart:
```

Décima Primeira Forma Normal

```
> pl:=0:
> pu:=0:
> puu:=0:
> p40 := 0:
> p4u := s0*pu*a0^3:
> p4l := s0*pl*a0:
> p4uu := s0*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+2*su*pu*a0^3:
> p4ul := sl*pu*a0^3+su*pl*a0+s0*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul);
```

$$p4ul := s0 a0^3 pul$$

```
> p4ll := 2*sl*pl*a0+s0*(2*pl*al+pll*a0);
```

$$p4ll := s0 pll a0$$

```
> p4uuu :=
> 3*su*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+3*suu*pu*a0^3+s0*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^
> 4*puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu);
```

$$p4uuu := s0 a0^7 puuu$$

Simplificação de p4uul por auu.

```
> p4uul :=
> sl*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+2*su*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+2*sul*pu
> *a0^3+suu*pl*a0+s0*(pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*au*pu*a0*al+
> 5*al*a0^4*puu+a0^5*puul):
> solve(p4uul, au):
> au:=-1/6*a0*(2*su*pul+s0*a0^2*puul)/s0/pul:
> simplify(p4uul):
```


Simplificação de p4ull por sul.

```

> p4ull :=
> 2*s1*(p1*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+su*(2*p1*al+p11*a0)+s11*pu*a0^3+2*s
> ul*p1*a0+s0*(2*p1*aul+3*pu*a0^2*all+p11*au+6*al*a0^2*pul+6*pu*a0*al^2+
> a0^3*pull):
> expand(p4ull):
> solve(p4ull,s1):
> s1:=-1/12/a0^2*(4*p11*su*pul-p11*s0*a0^2*puul+36*al*a0*pul^2*s0+6*a0^
> 2*pull*s0*pul)/pul^2:
> simplify(p4ull):

```

Simplificação de p4lll por sll.

```

> p4lll :=
> 3*s1*(2*p1*al+p11*a0)+3*s11*p1*a0+s0*(3*p1*all+3*p11*al+p111*a0):
> expand(p4lll):
> solve(p4lll,su):
> su:=1/4*s0*(p11^2*a0*puul-24*p11*al*pul^2-6*p11*a0*pull*pul+4*pul^2*p
> ll1*a0)/pul*a0/p11^2:
> simplify(p4lll):

```

Simplificação de p4uuuu por au.

```

> p4uuuu :=
> s0*(28*a0^6*au*puuu+72*pu*a0*au*auu+12*pu*a0^2*auuu+30*a0^4*auu*puu+12
> 0*a0^3*au^2*puu+a0^9*puuuu+24*pu*au^3)+4*su*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^4*
> puu+18*pu*a0*au^2+a0^7*puuu)+6*suu*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+4*suuu*pu*a
> 0^3:
> expand(p4uuuu):
> solve(p4uuuu,al):
> al:=1/96*a0*(18*puuu*p11^2*puul-24*puuu*p11*pull*pul+16*puuu*pul^2*p1
> ll-3*puuuu*p11^2*pul)/p11/pul^2/puu:
> simplify(p4uuuu):

```

Simplificação de p4uuul por suuu.

```

> p4uuul :=
> s0*(9*auu*a0^2*pul+p1*auuu+9*pu*a0^2*auul+18*auu*pu*a0*al+60*au*a0^3*a
> l*puu+7*al*a0^6*puuu+a0^7*puuul+15*aul*a0^4*puu+18*a0*au^2*pul+18*pu*a
> u^2*al+15*au*a0^4*puul+36*aul*pu*a0*au)+3*sul*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+
> 3*suu*(p1*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+s1*(9*pu*a0^2*auu+15*au*a0^4*puu+1
> 8*pu*a0*au^2+a0^7*puuu)+3*su*(p1*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*au
> *pu*a0*al+5*al*a0^4*puu+a0^5*puul)+3*suul*pu*a0^3+suuu*p1*a0:
> expand(p4uuul):
> solve(p4uuul,auu):
> auu:=-1/1728*a0/p11*(-468*s0*a0^4*p11*puul^2*puuu^2*pul+144*s0*a0^4*p
> ll*puul*puuu*pul^2*puuuu+216*s0*a0^4*puuu^3*p11^2*puul-288*s0*a0^4*puu
> u^3*p11*pull*pul+128*s0*a0^4*puuu^3*pul^2*p111-36*s0*a0^4*puuu^2*puuuu
> *p11^2*pul+192*s0*a0^4*puuul*puuu^2*p11*pul^2-27*s0*a0^4*p11*pul^3*puu
> uu^2+576*suu*pul^3*puuu^2*p11)/puuu^2/pul^3/s0:
> simplify(p4uuul):

```


Simplificação de p4uull por suul.

```

> p4uull :=
> s11*(6*pu*a0^2*au+a0^5*puu)+4*sul*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+suu*(2
> *pl*al+p11*a0)+2*sull*pu*a0^3+2*suul*pl*a0+1/2*s0*(6*pu*a0^2*aull+p11*
> auu+2*pl*auul+a0^5*puull+6*au*a0^2*pull+24*aul*pu*a0*al+24*au*a0*al*pu
> l+12*all*pu*a0*au+12*aul*a0^2*pul+5*all*a0^4*puu+12*au*pu*al^2+20*a0^3
> *al^2*puu+10*al*a0^4*puul)+sl*(pl*auu+6*pu*a0^2*aul+6*au*a0^2*pul+12*a
> u*pu*a0*al+5*al*a0^4*puu+a0^5*puul)+su*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+p11*au+
> 6*al*a0^2*pul+6*pu*a0*al^2+a0^3*pull):
> expand(p4uull):
> solve(p4uull,aul):
> aul:=1/41472/a0/p11*(4608*a0^4*s0*pul^3*puuu^2*puul*p111-1728*a0^4*s0
> *pul^4*puuuu*puuu*p111+2592*a0^4*s0*p11*pull*puuu^2*pul^2*puul+1296*a0
> ^4*s0*p11*pull*puuu*pul^3*puuuu+256*p11*s0*a0^4*puuu^3*pul^2*p111-5760
> *suu*pul^3*puuu^2*p11^2-1332*s0*a0^4*p11^2*puul*puuu*pul^2*puuuu+432*s
> 0*a0^4*puuu^3*p11^3*puul+468*s0*a0^4*p11^2*puul^2*puuu^2*pul-3456*a0^4
> *puull*puuu^2*pul^3*s0*p11-576*s0*a0^4*puuu^3*p11^2*pull*pul-72*s0*a0^
> 4*puuu^2*puuuu*p11^3*pul+384*s0*a0^4*puul*puuu^2*p11^2*pul^2+189*s0*a
> 0^4*p11^2*pul^3*puuuu^2-27648*sul*a0^2*pul^4*puuu^2*p11)/puuu^2/pul^4/
> s0:
> simplify(p4uull):

```

Simplificação de p4ulll por sull.

```

> p4ulll :=
> s111*pu*a0^3+3*sull*pl*a0+3*s11*(pl*au+3*pu*a0^2*al+a0^3*pul)+3*sul*(2
> *pl*al+p11*a0)+3*sl*(2*pl*aul+3*pu*a0^2*all+p11*au+6*al*a0^2*pul+6*pu*
> a0*al^2+a0^3*pull)+su*(3*pl*all+3*p11*al+p111*a0)+s0*(p111*au+9*al*a0^
> 2*pull+6*pu*al^3+18*a0*al^2*pul+18*al*pu*a0*all+9*a0^2*pul*all+3*pu*a0
> ^2*all1+pull1*a0^3+3*p11*aul+3*pl*aull):
> expand(p4ulll):
> solve(p4ulll,suu):
> suu:=1/5760/p11^4*a0^2*(-135*s0*a0^2*pul^3*puuuu^2*p11^4+256*p11^3*s0
> *a0^2*puuu^3*pul^2*p111-3456*p11^3*a0^2*puull*puuu^2*pul^3*s0+432*p11^
> 5*s0*a0^2*puuu^3*puul-576*p11^4*s0*a0^2*puuu^3*pull*pul-72*p11^5*s0*a0
> ^2*puuu^2*puuuu*pul+384*p11^4*s0*a0^2*puul*puuu^2*pul^2+41472*s11*a0^
> 2*pul^5*p11^2*puuu^2+124416*a0*pul^5*all*puuu^2*p11^2*s0+13824*pull1*a
> 0^2*puuu^2*p11^2*s0*pul^4-29952*p111*a0^2*s0*p11^2*puuu^2*pul^3*puul+5
> 184*p111*a0^2*s0*p11^2*puuu*pul^4*puuuu+28512*a0^2*pull*puuu^2*p11^3*s
> 0*pul^2*puul-20736*a0^2*pull^2*puuu^2*p11^2*s0*pul^3+20736*a0^2*pull*p
> uuu^2*p11*s0*pul^4*p111-3888*a0^2*pull*puuu*p11^3*s0*pul^3*puuuu-13824
> *s0*a0^2*pul^5*puuu^2*p111^2-7308*s0*a0^2*pul*puuu^2*p11^4*puul^2+1908
> *s0*a0^2*pul^2*puuu*p11^4*puul*puuuu+13824*p11^3*sul*pul^4*puuu^2)/puu
> u^2/pul^3:
> simplify(p4ulll):

```

Simplificação de p4llll por alll.

```

> p4llll :=
> 4*sl*(3*pl*all+3*p11*al+p111*a0)+6*s11*(2*pl*al+p11*a0)+4*s111*pl*a0+s
> 0*(p1111*a0+4*pl*all1+6*p11*all+4*p111*al):
> expand(p4llll):
> solve(p4llll,s11):

```

```

> s11:=-1/4608*s0*(-324*a0*puuu^2*p11^4*puul^2+108*a0*puuu*p11^4*puul*p
> uuuu*pul+864*a0*puuu^2*p11^3*puul*pull*pul-1152*a0*puuu^2*p11^2*puul*p
> ul^2*p111-9*a0*puuuu^2*p11^4*pul^2-144*a0*puuu*p11^3*pull*pul^2*puuuu+
> 192*a0*puuu*pul^3*p111*puuuu*p11^2-576*a0*puuu^2*p11^2*pull^2*pul^2+15
> 36*a0*puuu^2*p11*pull*pul^3*p111-1792*a0*puuu^2*pul^4*p111^2+768*pul^4
> *puuu^2*p1111*a0*p11+4608*pul^4*puuu^2*p11^2*a11)/p11^2/puuu^2/pul^4/a
> 0:
> simplify(p411111):

```

Cálculo dos Colchetes de Lie usando MAPLE

Mostramos os cálculos para a obtenção dos Colchetes de Lie descritos na prova do Teorema (3.1.2). Para obtermos este programa.

Notações.

* x_1, x_2, x_3 as coordenadas dos $\mathbb{R}^3$

* g : representação L

* K_g : expressão para o cálculo dos Colchetes de Lie.

* C_{g_1, g_2} : representação $[X, Y]$

Apêndice B

Cálculo dos Colchetes de Lie usando MAPLE

Mostramos os cálculos para a obtenção dos Colchetes de Lie descritos na prova do Teorema (3.3.2). Nós elaboramos este programa.

Notações.

- v_i, w_i, z_i e t_i : coordenadas dos $\hat{\xi}'_i$.
- q_i : representam $\hat{\xi}_i$.
- C_i : expressão para o cálculo dos Colchetes de Lie.
- $C_{q_i q_j}$: representam $[\hat{\xi}_i, \hat{\xi}_j]$.




```
> restart;
> with(linalg):
```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

Colchete de Lie para o caso A4.

```
> v[1]:=b[1];
                                 $v_1 := b_1$ 
> v[2]:=2*b[2];
                                 $v_2 := 2 b_2$ 
> q1:=matrix([[v[1]], [v[2]]]);
                                 $q1 := \begin{bmatrix} b_1 \\ 2 b_2 \end{bmatrix}$ 
> w[1]:=4*b[2]-e2*b[1]^2;
                                 $w_1 := 4 b_2 - e2 b_1^2$ 
> w[2]:=0;
                                 $w_2 := 0$ 
> q2:=matrix([[w[1]], [w[2]]]);
                                 $q2 := \begin{bmatrix} 4 b_2 - e2 b_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 
> C0:=sum('(diff(w[1],b[i])*v[i]-diff(v[1],b[i])*w[i])*e[1]+(diff(w[2],
> b[i])*v[i]-diff(v[2],b[i])*w[i])*e[2]', 'i'=1..2);
                                 $C0 := (-e2 b_1^2 - 4 b_2) e_1 + 8 b_2 e_1$ 
> C01:=coeff(C0,e[1]);
                                 $C01 := 4 b_2 - e2 b_1^2$ 
> C02:=coeff(C0,e[2]);
                                 $C02 := 0$ 
> Cq1q2:=matrix([[C01], [C02]]);
                                 $Cq1q2 := \begin{bmatrix} 4 b_2 - e2 b_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 
```

Portanto, concluímos que $Cvw=q2$.

```
> restart;
> with(linalg):
```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

Colchete de Lie para o caso A6.

```
> v[1]:=b[1];
                                 $v_1 := b_1$ 
> v[2]:=2*b[2];
                                 $v_2 := 2 b_2$ 
> v[3]:=3*b[3];
                                 $v_3 := 3 b_3$ 
```

```

> q1:=array([[v[1]], [v[2]], [v[3]]]);
               
$$q1 := \begin{bmatrix} b_1 \\ 2 b_2 \\ 3 b_3 \end{bmatrix}$$

> w[1]:=6*b[2]-2*e3*b[1]^2;
               
$$w_1 := 6 b_2 - 2 e_3 b_1^2$$

> w[2]:=9*b[3]-e3*b[1]*b[2];
               
$$w_2 := 9 b_3 - e_3 b_1 b_2$$

> w[3]:=0;
               
$$w_3 := 0$$

> q2:=array([[w[1]], [w[2]], [w[3]]]);
               
$$q2 := \begin{bmatrix} 6 b_2 - 2 e_3 b_1^2 \\ 9 b_3 - e_3 b_1 b_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

> z[1]:=b[1]*b[2]-9*e3*b[3];
               
$$z_1 := b_1 b_2 - 9 e_3 b_3$$

> z[2]:=2*b[2]^2-6*b[1]*b[3];
               
$$z_2 := 2 b_2^2 - 6 b_1 b_3$$

> z[3]:=0;
               
$$z_3 := 0$$

> q3:=array([[z[1]], [z[2]], [z[3]]]);
               
$$q3 := \begin{bmatrix} b_1 b_2 - 9 e_3 b_3 \\ 2 b_2^2 - 6 b_1 b_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

> C1:=sum(' (diff(w[1],b[i])*v[i]-diff(v[1],b[i])*w[i])*e[1]+(diff(w[2],
> b[i])*v[i]-diff(v[2],b[i])*w[i])*e[2]+(diff(w[3],b[i])*v[i]-diff(v[3],
> b[i])*w[i])*e[3]', 'i'=1..3);
               
$$C1 := (-2 e_3 b_1^2 - 6 b_2) e_1 - e_3 b_1 b_2 e_2 + 12 b_2 e_1 + 9 b_3 e_2$$

> C11:=coeff(C1,e[1]);
               
$$C11 := 6 b_2 - 2 e_3 b_1^2$$

> C12:=coeff(C1,e[2]);
               
$$C12 := 9 b_3 - e_3 b_1 b_2$$

> C13:=coeff(C1,e[3]);
               
$$C13 := 0$$

> Cq1q2:=matrix([[C11], [C12], [C13]]);
               
$$Cq1q2 := \begin{bmatrix} 6 b_2 - 2 e_3 b_1^2 \\ 9 b_3 - e_3 b_1 b_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$


```

Portanto, concluímos que $Cq1q2=q1$.

```

> C2:=sum(' (diff(z[1],b[i])*v[i]-diff(v[1],b[i])*z[i])*e[1]+(diff(z[2],
> b[i])*v[i]-diff(v[2],b[i])*z[i])*e[2]+(diff(z[3],b[i])*v[i]-diff(v[3],
> b[i])*z[i])*e[3]', 'i'=1..3);
               
$$C2 := -18 e_3 b_3 e_1 - 24 b_1 b_3 e_2 + 2 b_1 b_2 e_1 + (4 b_2^2 + 12 b_1 b_3) e_2$$

> C21:=coeff(C2,e[1]);

```

```

C21 := -18 e3 b3 + 2 b1 b2
> C21 := -18*e3*b[3]+2*b[1]*b[2];
C21 := -18 e3 b3 + 2 b1 b2
> C22:=coeff(C2,e[2]);
C22 := 4 b2^2 - 12 b1 b3
> C23:=coeff(C2,e[3]);
C23 := 0
> Cq1q3:=array([[C21],[C22],[C23]]);
Cq1q3 := 
$$\begin{bmatrix} -18 e3 b3 + 2 b1 b2 \\ 4 b2^2 - 12 b1 b3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

> evalm(2*q3);

```

$$\begin{bmatrix} -18 e3 b3 + 2 b1 b2 \\ 4 b2^2 - 12 b1 b3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, concluímos que $Cq1q3=2q3$.

```

> C3:=sum(' (diff(z[1],b[i])*w[i]-diff(w[1],b[i])*z[i])*e[1]+(diff(z[2],
> b[i])*w[i]-diff(w[2],b[i])*z[i])*e[2]+(diff(z[3],b[i])*w[i]-diff(w[3],
> b[i])*z[i])*e[3]', 'i'=1..3);

```

$$\begin{aligned}
C3 := & (b_2 (6 b_2 - 2 e3 b_1^2) + 4 e3 b_1 (b_1 b_2 - 9 e3 b_3)) e_1 \\
& + (-6 b_3 (6 b_2 - 2 e3 b_1^2) + e3 b_2 (b_1 b_2 - 9 e3 b_3)) e_2 \\
& + (b_1 (9 b_3 - e3 b_1 b_2) - 12 b_2^2 + 36 b_1 b_3) e_1 \\
& + (4 b_2 (9 b_3 - e3 b_1 b_2) + e3 b_1 (2 b_2^2 - 6 b_1 b_3)) e_2
\end{aligned}$$

```

> C31:=coeff(C3,e[1]);

```

$$C31 := b_2 (6 b_2 - 2 e3 b_1^2) + 4 e3 b_1 (b_1 b_2 - 9 e3 b_3) + b_1 (9 b_3 - e3 b_1 b_2) - 12 b_2^2 + 36 b_1 b_3$$

```

> C31e:=expand(C31);

```

$$C31e := -6 b_2^2 + b_2 e3 b_1^2 - 36 e3^2 b_1 b_3 + 45 b_1 b_3$$

```

> C32:=coeff(C3,e[2]);

```

$$\begin{aligned}
C32 := & -6 b_3 (6 b_2 - 2 e3 b_1^2) + e3 b_2 (b_1 b_2 - 9 e3 b_3) + 4 b_2 (9 b_3 - e3 b_1 b_2) \\
& + e3 b_1 (2 b_2^2 - 6 b_1 b_3)
\end{aligned}$$

```

> C32e:=expand(C32);

```

$$C32e := 6 b_3 e3 b_1^2 - e3 b_2^2 b_1 - 9 e3^2 b_2 b_3$$

```

> C33:=coeff(C3,e[3]);

```

$$C33 := 0$$

```

> Cq2q3:=array([[C31e],[C32e],[C33]]);

```

$$Cq2q3 := \begin{bmatrix} -6 b_2^2 + b_2 e3 b_1^2 - 36 e3^2 b_1 b_3 + 45 b_1 b_3 \\ 6 b_3 e3 b_1^2 - e3 b_2^2 b_1 - 9 e3^2 b_2 b_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

```

> evalm(-b[2]*q2-e3*q3*b[1]);

```


$$\begin{bmatrix} -b_2(6b_2 - 2e_3b_1^2) - e_3b_1(b_1b_2 - 9e_3b_3) \\ -b_2(9b_3 - e_3b_1b_2) - e_3b_1(2b_2^2 - 6b_1b_3) \\ 0 \end{bmatrix}$$

```

> -b[2]*(6*b[2]-2*e3*b[1]^2)-e3*b[1]*(b[1]*b[2]-9*e3*b[3]);
      -b2(6b2 - 2e3b1^2) - e3b1(b1b2 - 9e3b3)
> expand(-b[2]*(6*b[2]-2*e3*b[1]^2)-e3*b[1]*(b[1]*b[2]-9*e3*b[3]));
      -6b2^2 + b2e3b1^2 + 9e3^2b1b3
> -b[2]*(9*b[3]-e3*b[1]*b[2])-e3*b[1]*(2*b[2]^2-6*b[1]*b[3]);
      -b2(9b3 - e3b1b2) - e3b1(2b2^2 - 6b1b3)
> expand(-b[2]*(9*b[3]-e3*b[1]*b[2])-e3*b[1]*(2*b[2]^2-6*b[1]*b[3]));
      -9b3b2 - e3b2^2b1 + 6b3e3b1^2

```

Portanto, concluímos que $C_{q2q3} = -b_2q_2 - e_3b_1q_3$.

```
> restart;
```

Colchete de Lie para caso A8.

```

> v[1]:=b[1];
      v1 := b1
> v[2]:=2*b[2];
      v2 := 2b2
> v[3]:=3*b[3];
      v3 := 3b3
> v[4]:=4*b[4];
      v4 := 4b4
> q1:=array([[v[1]], [v[2]], [v[3]], [v[4]]]);
      q1 :=
      [
      b1
      2b2
      3b3
      4b4
      ]
> w[1]:=8*b[2]-3*e4*b[1]^2;
      w1 := 8b2 - 3e4b1^2
> w[2]:=12*b[3]-2*e4*b[1]*b[2];
      w2 := 12b3 - 2e4b1b2
> w[3]:=16*b[4]-e4*b[1]*b[3];
      w3 := 16b4 - e4b1b3
> w[4]:=0;
      w4 := 0
> q2:=array([[w[1]], [w[2]], [w[3]], [w[4]]]);
      q2 :=
      [
      8b2 - 3e4b1^2
      12b3 - 2e4b1b2
      16b4 - e4b1b3
      0
      ]
> z[1]:=6*e4*b[3]-b[1]*b[2];
      z1 := 6e4b3 - b1b2
> z[2]:=8*e4*b[4]+4*b[1]*b[3]-2*b[2]^2;

```

```

      
$$z_2 := 8 e_4 b_4 + 4 b_1 b_3 - 2 b_2^2$$

> z[3]:=6*b[1]*b[4]-b[2]*b[3];
      
$$z_3 := 6 b_1 b_4 - b_2 b_3$$

> z[4]:=0;
      
$$z_4 := 0$$

> q3:=array([[z[1]], [z[2]], [z[3]], [z[4]]]);
      
$$q_3 := \begin{bmatrix} 6 e_4 b_3 - b_1 b_2 \\ 8 e_4 b_4 + 4 b_1 b_3 - 2 b_2^2 \\ 6 b_1 b_4 - b_2 b_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

> t[1]:=16*e4*b[4]-b[1]*b[3];
      
$$t_1 := 16 e_4 b_4 - b_1 b_3$$

> t[2]:=12*b[1]*b[4]-2*b[2]*b[3];
      
$$t_2 := 12 b_1 b_4 - 2 b_2 b_3$$

> t[3]:=8*b[2]*b[4]-3*b[3]^2;
      
$$t_3 := 8 b_2 b_4 - 3 b_3^2$$

> t[4]:=0;
      
$$t_4 := 0$$

> q4:=array([[t[1]], [t[2]], [t[3]], [t[4]]]);
      
$$q_4 := \begin{bmatrix} 16 e_4 b_4 - b_1 b_3 \\ 12 b_1 b_4 - 2 b_2 b_3 \\ 8 b_2 b_4 - 3 b_3^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

> C1:=sum('(diff(w[1],b[i])*v[i]-diff(v[1],b[i])*w[i])*e[1]+(diff(w[2],
> b[i])*v[i]-diff(v[2],b[i])*w[i])*e[2]+(diff(w[3],b[i])*v[i]-diff(v[3],
> b[i])*w[i])*e[3]+(diff(w[4],b[i])*v[i]-diff(v[4],b[i])*w[i])*e[4]', 'i'
> =1..4);
      
$$C1 := (-3 e_4 b_1^2 - 8 b_2) e_1 - 2 e_4 b_1 b_2 e_2 - e_4 b_1 b_3 e_3 + 16 b_2 e_1 + 12 b_3 e_2 + 16 b_4 e_3$$

> C11:=coeff(C1,e[1]);
      
$$C11 := 8 b_2 - 3 e_4 b_1^2$$

> C12:=coeff(C1,e[2]);
      
$$C12 := 12 b_3 - 2 e_4 b_1 b_2$$

> C13:=coeff(C1,e[3]);
      
$$C13 := 16 b_4 - e_4 b_1 b_3$$

> C14:=coeff(C1,e[4]);
      
$$C14 := 0$$

> Cq1q2:=matrix([[C11], [C12], [C13], [C14]]);
      
$$Cq1q2 := \begin{bmatrix} 8 b_2 - 3 e_4 b_1^2 \\ 12 b_3 - 2 e_4 b_1 b_2 \\ 16 b_4 - e_4 b_1 b_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$


```

Portanto, concluímos que $Cq1q2=q1$.

```
> C2:=sum('(diff(z[1],b[i])*v[i]-diff(v[1],b[i])*z[i])*e[1]+(diff(z[2],
> b[i])*v[i]-diff(v[2],b[i])*z[i])*e[2]+(diff(z[3],b[i])*v[i]-diff(v[3],
> b[i])*z[i])*e[3]+(diff(z[4],b[i])*v[i]-diff(v[4],b[i])*z[i])*e[4]','i'
> =1..4);
```

$$C2 := 12 e_4 b_3 e_1 + 16 b_1 b_3 e_2 + 12 b_1 b_4 e_3 - 2 b_1 b_2 e_1 + (-4 b_2^2 - 16 e_4 b_4 - 8 b_1 b_3) e_2 - 2 b_2 b_3 e_3 + 32 e_4 b_4 e_2$$

```
> C21:=coeff(C2,e[1]);
```

$$C21 := 12 e_4 b_3 - 2 b_1 b_2$$

```
> C22:=coeff(C2,e[2]);
```

$$C22 := 16 e_4 b_4 + 8 b_1 b_3 - 4 b_2^2$$

```
> C23:=coeff(C2,e[3]);
```

$$C23 := 12 b_1 b_4 - 2 b_2 b_3$$

```
> C24:=coeff(C2,e[4]);
```

$$C24 := 0$$

```
> Cq1q3:=matrix([[C21],[C22],[C23],[C24]]);
```

$$Cq1q3 := \begin{bmatrix} 12 e_4 b_3 - 2 b_1 b_2 \\ 16 e_4 b_4 + 8 b_1 b_3 - 4 b_2^2 \\ 12 b_1 b_4 - 2 b_2 b_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, concluímos que $Cq1q3=2q3$.

```
> C3:=sum('(diff(t[1],b[i])*v[i]-diff(v[1],b[i])*t[i])*e[1]+(diff(t[2],
> b[i])*v[i]-diff(v[2],b[i])*t[i])*e[2]+(diff(t[3],b[i])*v[i]-diff(v[3],
> b[i])*t[i])*e[3]+(diff(t[4],b[i])*v[i]-diff(v[4],b[i])*t[i])*e[4]','i'
> =1..4);
```

$$C3 := 48 e_4 b_4 e_1 + 36 b_1 b_4 e_2 + 48 b_2 b_4 e_3 - 3 b_1 b_3 e_1 - 6 b_2 b_3 e_2 + (-9 b_3^2 - 24 b_2 b_4) e_3$$

```
> C31:=coeff(C3,e[1]);
```

$$C31 := 48 e_4 b_4 - 3 b_1 b_3$$

```
> C32:=coeff(C3,e[2]);
```

$$C32 := 36 b_1 b_4 - 6 b_2 b_3$$

```
> C33:=coeff(C3,e[3]);
```

$$C33 := 24 b_2 b_4 - 9 b_3^2$$

```
> C34:=coeff(C3,e[4]);
```

$$C34 := 0$$

```
> Cq1q4:=matrix([[C31],[C32],[C33],[C34]]);
```

$$Cq1q4 := \begin{bmatrix} 48 e_4 b_4 - 3 b_1 b_3 \\ 36 b_1 b_4 - 6 b_2 b_3 \\ 24 b_2 b_4 - 9 b_3^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, concluímos que $Cq1q4=q4$.

```
> C4:=sum('(diff(z[1],b[i])*w[i]-diff(w[1],b[i])*z[i])*e[1]+(diff(z[2],
> b[i])*w[i]-diff(w[2],b[i])*z[i])*e[2]+(diff(z[3],b[i])*w[i]-diff(w[3],
> b[i])*z[i])*e[3]+(diff(z[4],b[i])*w[i]-diff(w[4],b[i])*z[i])*e[4]','i'
> =1..4);
```



```

C4 := (-b2 (8 b2 - 3 e4 b1^2) + 6 e4 b1 (6 e4 b3 - b1 b2)) e1
+ (4 b3 (8 b2 - 3 e4 b1^2) + 2 e4 b2 (6 e4 b3 - b1 b2)) e2
+ (6 b4 (8 b2 - 3 e4 b1^2) + e4 b3 (6 e4 b3 - b1 b2)) e3
+ (-b1 (12 b3 - 2 e4 b1 b2) - 64 e4 b4 - 32 b1 b3 + 16 b2^2) e1
+ (-4 b2 (12 b3 - 2 e4 b1 b2) + 2 e4 b1 (8 e4 b4 + 4 b1 b3 - 2 b2^2)) e2
- b3 (12 b3 - 2 e4 b1 b2) e3 + 6 e4 (16 b4 - e4 b1 b3) e1
+ (4 b1 (16 b4 - e4 b1 b3) - 72 b1 b4 + 12 b2 b3) e2
+ (-b2 (16 b4 - e4 b1 b3) + e4 b1 (6 b1 b4 - b2 b3)) e3
> C41:=coeff(C4,e[1]);

C41 := -b2 (8 b2 - 3 e4 b1^2) + 6 e4 b1 (6 e4 b3 - b1 b2) - b1 (12 b3 - 2 e4 b1 b2) - 64 e4 b4
- 32 b1 b3 + 16 b2^2 + 6 e4 (16 b4 - e4 b1 b3)
> C41e:=expand(C41);

C41e := 8 b2^2 - b2 e4 b1^2 + 30 e4^2 b1 b3 - 44 b1 b3 + 32 e4 b4
> C42:=coeff(C4,e[2]);

C42 := 4 b3 (8 b2 - 3 e4 b1^2) + 2 e4 b2 (6 e4 b3 - b1 b2) - 4 b2 (12 b3 - 2 e4 b1 b2)
+ 2 e4 b1 (8 e4 b4 + 4 b1 b3 - 2 b2^2) + 4 b1 (16 b4 - e4 b1 b3) - 72 b1 b4 + 12 b2 b3
> C42e:=expand(C42);

C42e := -4 b2 b3 - 8 b3 e4 b1^2 + 12 e4^2 b2 b3 + 2 e4 b2^2 b1 + 16 e4^2 b1 b4 - 8 b1 b4
> C43:=coeff(C4,e[3]);

C43 := 6 b4 (8 b2 - 3 e4 b1^2) + e4 b3 (6 e4 b3 - b1 b2) - b3 (12 b3 - 2 e4 b1 b2)
- b2 (16 b4 - e4 b1 b3) + e4 b1 (6 b1 b4 - b2 b3)
> C43e:=expand(C43);

C43e := 32 b2 b4 - 12 b4 e4 b1^2 + 6 e4^2 b3^2 + e4 b3 b1 b2 - 12 b3^2
> C44:=coeff(C4,e[4]);

C44 := 0
> C44 := 0;

C44 := 0
> Cq2q3:=matrix([C41e],[C42e],[C43e],[C44]);

Cq2q3 := 
$$\begin{bmatrix} 8 b_2^2 - b_2 e_4 b_1^2 + 30 e_4^2 b_1 b_3 - 44 b_1 b_3 + 32 e_4 b_4 \\ -4 b_2 b_3 - 8 b_3 e_4 b_1^2 + 12 e_4^2 b_2 b_3 + 2 e_4 b_2^2 b_1 + 16 e_4^2 b_1 b_4 - 8 b_1 b_4 \\ 32 b_2 b_4 - 12 b_4 e_4 b_1^2 + 6 e_4^2 b_3^2 + e_4 b_3 b_1 b_2 - 12 b_3^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

> evalm(b[2]*q2-2*q4-2*e4*b[1]*q3);

A := 
$$\begin{bmatrix} b_2 (8 b_2 - 3 e_4 b_1^2) - 32 e_4 b_4 + 2 b_1 b_3 - 2 e_4 b_1 (6 e_4 b_3 - b_1 b_2) \\ b_2 (12 b_3 - 2 e_4 b_1 b_2) - 24 b_1 b_4 + 4 b_2 b_3 - 2 e_4 b_1 (8 e_4 b_4 + 4 b_1 b_3 - 2 b_2^2) \\ b_2 (16 b_4 - e_4 b_1 b_3) - 16 b_2 b_4 + 6 b_3^2 - 2 e_4 b_1 (6 b_1 b_4 - b_2 b_3) \\ 0 \end{bmatrix}$$

> b[2]*(8*b[2]-3*e4*b[1]^2)-32*e4*b[4]+2*b[1]*b[3]-2*e4*b[1]*(6*e4*b[3]
> -b[1]*b[2]);

b2 (8 b2 - 3 e4 b1^2) - 32 e4 b4 + 2 b1 b3 - 2 e4 b1 (6 e4 b3 - b1 b2)

```

```

> expand(b[2]*(8*b[2]-3*e4*b[1]^2)-32*e4*b[4]+2*b[1]*b[3]-2*e4*b[1]*(6*
> e4*b[3]-b[1]*b[2]));
      8 b2^2 - b2 e4 b1^2 - 32 e4 b4 + 2 b1 b3 - 12 e4^2 b1 b3
> b[2]*(12*b[3]-2*e4*b[1]*b[2])-24*b[1]*b[4]+4*b[2]*b[3]-2*e4*b[1]*(8*e
> 4*b[4]+4*b[1]*b[3]-2*b[2]^2);
      b2 (12 b3 - 2 e4 b1 b2) - 24 b1 b4 + 4 b2 b3 - 2 e4 b1 (8 e4 b4 + 4 b1 b3 - 2 b2^2)
> expand(b[2]*(12*b[3]-2*e4*b[1]*b[2])-24*b[1]*b[4]+4*b[2]*b[3]-2*e4*b[
> 1]*(8*e4*b[4]+4*b[1]*b[3]-2*b[2]^2));
      16 b2 b3 + 2 e4 b2^2 b1 - 24 b1 b4 - 16 e4^2 b1 b4 - 8 b3 e4 b1^2
> b[2]*(16*b[4]-e4*b[1]*b[3])-16*b[2]*b[4]+6*b[3]^2-2*e4*b[1]*(6*b[1]*b
> [4]-b[2]*b[3]);
      b2 (16 b4 - e4 b1 b3) - 16 b2 b4 + 6 b3^2 - 2 e4 b1 (6 b1 b4 - b2 b3)
> expand(b[2]*(16*b[4]-e4*b[1]*b[3])-16*b[2]*b[4]+6*b[3]^2-2*e4*b[1]*(6
> *b[1]*b[4]-b[2]*b[3]));
      e4 b3 b1 b2 + 6 b3^2 - 12 b4 e4 b1^2

```

Portanto, concluímos que $C_{q2q3} = b_{2q2} - 2q_{4-2e4b1q3}$.

```

> C5:=sum(' (diff(t[1],b[i])*w[i]-diff(w[1],b[i])*t[i])*e[1]+(diff(t[2],
> b[i])*w[i]-diff(w[2],b[i])*t[i])*e[2]+(diff(t[3],b[i])*w[i]-diff(w[3],
> b[i])*t[i])*e[3]+(diff(t[4],b[i])*w[i]-diff(w[4],b[i])*t[i])*e[4] ', 'i'
> =1..4);

```

$$\begin{aligned}
 C5 := & (-b_3 (8 b_2 - 3 e_4 b_1^2) + 6 e_4 b_1 (16 e_4 b_4 - b_1 b_3)) e_1 \\
 & + (12 b_4 (8 b_2 - 3 e_4 b_1^2) + 2 e_4 b_2 (16 e_4 b_4 - b_1 b_3)) e_2 \\
 & + e_4 b_3 (16 e_4 b_4 - b_1 b_3) e_3 + (-96 b_1 b_4 + 16 b_2 b_3) e_1 \\
 & + (-2 b_3 (12 b_3 - 2 e_4 b_1 b_2) + 2 e_4 b_1 (12 b_1 b_4 - 2 b_2 b_3)) e_2 \\
 & + 8 b_4 (12 b_3 - 2 e_4 b_1 b_2) e_3 - b_1 (16 b_4 - e_4 b_1 b_3) e_1 \\
 & + (-2 b_2 (16 b_4 - e_4 b_1 b_3) - 96 b_2 b_4 + 36 b_3^2) e_2 \\
 & + (-6 b_3 (16 b_4 - e_4 b_1 b_3) + e_4 b_1 (8 b_2 b_4 - 3 b_3^2)) e_3
 \end{aligned}$$

```

> C51:=coeff(C5,e[1]);

```

$$\begin{aligned}
 C51 := & -b_3 (8 b_2 - 3 e_4 b_1^2) + 6 e_4 b_1 (16 e_4 b_4 - b_1 b_3) - 96 b_1 b_4 + 16 b_2 b_3 \\
 & - b_1 (16 b_4 - e_4 b_1 b_3)
 \end{aligned}$$

```

> C51e:=expand(C51);

```

$$C51e := 8 b_2 b_3 - 2 b_3 e_4 b_1^2 + 96 e_4^2 b_1 b_4 - 112 b_1 b_4$$

```

> C52:=coeff(C5,e[2]);

```

$$\begin{aligned}
 C52 := & 12 b_4 (8 b_2 - 3 e_4 b_1^2) + 2 e_4 b_2 (16 e_4 b_4 - b_1 b_3) - 2 b_3 (12 b_3 - 2 e_4 b_1 b_2) \\
 & + 2 e_4 b_1 (12 b_1 b_4 - 2 b_2 b_3) - 2 b_2 (16 b_4 - e_4 b_1 b_3) - 96 b_2 b_4 + 36 b_3^2
 \end{aligned}$$

```

> C52e:=expand(C52);

```

$$C52e := -32 b_2 b_4 - 12 b_4 e_4 b_1^2 + 32 e_4^2 b_2 b_4 + 12 b_3^2$$

```

> C53:=coeff(C5,e[3]);

```

$$\begin{aligned}
 C53 := & e_4 b_3 (16 e_4 b_4 - b_1 b_3) + 8 b_4 (12 b_3 - 2 e_4 b_1 b_2) - 6 b_3 (16 b_4 - e_4 b_1 b_3) \\
 & + e_4 b_1 (8 b_2 b_4 - 3 b_3^2)
 \end{aligned}$$

```

> C53e:=expand(C53);

```

$$C53e := 16 e_4^2 b_3 b_4 + 2 e_4 b_3^2 b_1 - 8 b_4 e_4 b_1 b_2$$

> C54:=coeff(C5,e[4]);

$$C54 := 0$$

> Cq2q4:=matrix([[C51e],[C52e],[C53e],[C54]]);

$$Cq2q4 := \begin{bmatrix} 8b_2b_3 - 2b_3e_4b_1^2 + 96e_4^2b_1b_4 - 112b_1b_4 \\ -32b_2b_4 - 12b_4e_4b_1^2 + 32e_4^2b_2b_4 + 12b_3^2 \\ 16e_4^2b_3b_4 + 2e_4b_3^2b_1 - 8b_4e_4b_1b_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

> evalm(b[3]*q2-e4*b[1]*q4);

$$\begin{bmatrix} b_3(8b_2 - 3e_4b_1^2) - e_4b_1(16e_4b_4 - b_1b_3) \\ b_3(12b_3 - 2e_4b_1b_2) - e_4b_1(12b_1b_4 - 2b_2b_3) \\ b_3(16b_4 - e_4b_1b_3) - e_4b_1(8b_2b_4 - 3b_3^2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

> expand(b[3]*(8*b[2]-3*e4*b[1]^2)-e4*b[1]*(16*e4*b[4]-b[1]*b[3]));

$$8b_2b_3 - 2b_3e_4b_1^2 - 16e_4^2b_1b_4$$

> expand(b[3]*(12*b[3]-2*e4*b[1]*b[2])-e4*b[1]*(12*b[1]*b[4]-2*b[2]*b[3]));

$$12b_3^2 - 12b_4e_4b_1^2$$

> expand(b[3]*(16*b[4]-e4*b[1]*b[3])-e4*b[1]*(8*b[2]*b[4]-3*b[3]^2));

$$16b_4b_3 + 2e_4b_3^2b_1 - 8b_4e_4b_1b_2$$

Portanto, concluímos que $Cq2q4=b3q2-e4b1q4$.

> C6:=sum(' (diff(t[1],b[i])*z[i]-diff(z[1],b[i])*t[i])*e[1]+(diff(t[2],b[i])*z[i]-diff(z[2],b[i])*t[i])*e[2]+(diff(t[3],b[i])*z[i]-diff(z[3],b[i])*t[i])*e[3]+(diff(t[4],b[i])*z[i]-diff(z[4],b[i])*t[i])*e[4]', 'i', 1..4);

$$\begin{aligned} C6 := & (-b_3(6e_4b_3 - b_1b_2) + b_2(16e_4b_4 - b_1b_3))e_1 \\ & + (12b_4(6e_4b_3 - b_1b_2) - 4b_3(16e_4b_4 - b_1b_3))e_2 - 6b_4(16e_4b_4 - b_1b_3)e_3 \\ & + b_1\%1e_1 + (-2b_3(8e_4b_4 + 4b_1b_3 - 2b_2^2) + 4b_2\%1)e_2 \\ & + (8b_4(8e_4b_4 + 4b_1b_3 - 2b_2^2) + b_3\%1)e_3 \\ & + (-b_1(6b_1b_4 - b_2b_3) - 6e_4(8b_2b_4 - 3b_3^2))e_1 \\ & + (-2b_2(6b_1b_4 - b_2b_3) - 4b_1(8b_2b_4 - 3b_3^2))e_2 \\ & + (-6b_3(6b_1b_4 - b_2b_3) + b_2(8b_2b_4 - 3b_3^2))e_3 \\ & \%1 := 12b_1b_4 - 2b_2b_3 \end{aligned}$$

> C61:=coeff(C6,e[1]);

$$\begin{aligned} C61 := & -b_3(6e_4b_3 - b_1b_2) + b_2(16e_4b_4 - b_1b_3) + b_1(12b_1b_4 - 2b_2b_3) \\ & - b_1(6b_1b_4 - b_2b_3) - 6e_4(8b_2b_4 - 3b_3^2) \end{aligned}$$

> C61e:=expand(C61);

$$C61e := 12e_4b_3^2 - b_3b_1b_2 - 32b_2e_4b_4 + 6b_1^2b_4$$

> C62:=coeff(C6,e[2]);

$$\begin{aligned} C62 := & 12b_4(6e_4b_3 - b_1b_2) - 4b_3(16e_4b_4 - b_1b_3) - 2b_3(8e_4b_4 + 4b_1b_3 - 2b_2^2) \\ & + 4b_2(12b_1b_4 - 2b_2b_3) - 2b_2(6b_1b_4 - b_2b_3) - 4b_1(8b_2b_4 - 3b_3^2) \end{aligned}$$

> C62e:=expand(C62);

$$C62e := -8b_4e_4b_3 - 8b_4b_1b_2 + 8b_1b_3^2 - 2b_3b_2^2$$

> C63:=coeff(C6,e[3]);

$$C63 := -6b_4(16e_4b_4 - b_1b_3) + 8b_4(8e_4b_4 + 4b_1b_3 - 2b_2^2) + b_3(12b_1b_4 - 2b_2b_3) - 6b_3(6b_1b_4 - b_2b_3) + b_2(8b_2b_4 - 3b_3^2)$$

> C63e:=expand(C63);

$$C63e := -32e_4b_4^2 + 14b_4b_1b_3 - 8b_4b_2^2 + b_2b_3^2$$

> C64:=coeff(C6,e[4]);

$$C64 := 0$$

> Cq3q4:=matrix([[C61e],[C62e],[C63e],[C64]]);

$$Cq3q4 = \begin{bmatrix} 12e_4b_3^2 - b_3b_1b_2 - 32b_2e_4b_4 + 6b_1^2b_4 \\ -8b_4e_4b_3 - 8b_4b_1b_2 + 8b_1b_3^2 - 2b_3b_2^2 \\ -32e_4b_4^2 + 14b_4b_1b_3 - 8b_4b_2^2 + b_2b_3^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

> evalm(-2*e4*b[4]*q2+2*b[3]*q3-b[2]*q4);

$$\begin{bmatrix} -2e_4b_4(8b_2 - 3e_4b_1^2) + 2b_3(6e_4b_3 - b_1b_2) - b_2(16e_4b_4 - b_1b_3) \\ -2e_4b_4(12b_3 - 2e_4b_1b_2) + 2b_3(8e_4b_4 + 4b_1b_3 - 2b_2^2) - b_2(12b_1b_4 - 2b_2b_3) \\ -2e_4b_4(16b_4 - e_4b_1b_3) + 2b_3(6b_1b_4 - b_2b_3) - b_2(8b_2b_4 - 3b_3^2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

> expand(-2*e4*b[4]*(8*b[2]-3*e4*b[1]^2)+2*b[3]*(6*e4*b[3]-b[1]*b[2])-b[2]*(16*e4*b[4]-b[1]*b[3]));

$$-32b_2e_4b_4 + 6e_4^2b_4b_1^2 + 12e_4b_3^2 - b_3b_1b_2$$

> expand(-2*e4*b[4]*(12*b[3]-2*e4*b[1]*b[2])+2*b[3]*(8*e4*b[4]+4*b[1]*b[3]-2*b[2]^2)-b[2]*(12*b[1]*b[4]-2*b[2]*b[3]));

$$-8b_4e_4b_3 + 4e_4^2b_4b_1b_2 + 8b_1b_3^2 - 2b_3b_2^2 - 12b_4b_1b_2$$

> expand(-2*e4*b[4]*(16*b[4]-e4*b[1]*b[3])+2*b[3]*(6*b[1]*b[4]-b[2]*b[3])-b[2]*(8*b[2]*b[4]-3*b[3]^2));

$$-32e_4b_4^2 + 2e_4^2b_4b_1b_3 + 12b_4b_1b_3 + b_2b_3^2 - 8b_4b_2^2$$

Portanto, concluímos que $Cq3q4 = -2*e4*b4*q2 + 2*b3*q3 - b2*q4$;

Referências Bibliográficas

- [1] Golubitsky, M. & Schaeffer, D. G., *Singularities and groups in bifurcation theory*, Vol. I, Applied Mathematics and Sciences, 51, Springer-Verlang, New York, 1985.
- [2] Golubitsky, M. & Stewart, I. & Schaeffer, D. G., *Singularities and groups in bifurcation theory*, Vol. II, Applied Mathematics and Sciences, 69, Springer-Verlang, New York, 1988.
- [3] Golubitsky, M. & Guillemim, V., *Stable mappings and their singularities*, Springer-Verlang, New York, 1973.
- [4] Gaffney, T., *Some new results in the classification theory of bifurcation problems*, in *Multiparameter bifurcation theory* (eds. Golubitsky, M. and Guckenheimer, J.), Contemporary Mathematics 56, Amer. Math. Soc., Providence RI, pp. 97-116, 1986.
- [5] Eisenbud, D., *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics 150, Springer-Verlang, New York, 1994.
- [6] Tadini, W. M., *Funções pares e funções ímpares*, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Departamento de Matemática, Campo Grande, 1988.
- [7] Locci, V., *O problema do reconhecimento em teoria de bifurcação*, Dissertação de Mestrado, USP-São Carlos, 1990.
- [8] Cox, D. & Little, J. & O'Shea, D., *Ideals, varieties and algorithms*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1991.
- [9] Heirstein, I. N., *Topics in algebra*, Blaisdell Publishing Company, University of Chicago, 1964.
- [10] Abel, M. L. & Braselton I. , *The Maple V handbook* , AP profissional, 1962.
- [11] Damon, J., *Deformations of sections of singularities and Gorenstein surface singularities*, Am. Jour. of Maths. 109, pp. 695-722, 1987.
- [12] Bridges, T. J & Furter, J. E., *Singularity theory and equivariant symplectic maps*, Spriger Lectures Notes 1558, Heidelberg, 1993.
- [13] Bruns, W. & Herzog, J., *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge University Press 39, 1993.
- [14] Bruce, J. W., *Functions on discriminants*, J. London Math. Soc. 30, pp. 551-567, 1984.



- [15] Looijenga, E., J., N., *Isolated singular points of complete intersections*, LMS Lecture Notes, 17, Cambridge University Press, 1984.
- [16] Damon, J., *The unfolding and determinacy theorems for subgroups of A and K* , *Memoirs of the American Mathematical Society* 306 (AMS, Providence RI), 1984.
- [17] Arnold's, V. I. & Varchenko, A. N. G. & Guseim-Zadé, S. M., *Singularities of differentiable maps*, *Monographs in mathematics*, 82, New York: Birkhäuser, 1985.
- [18] Mond, D. & Montaldi J., *Deformations fo maps on complete intersections, Damon's K_v -equivalence and bifurcations*, Preprint, University of Warick, 1991.
- [19] Montaldi, J., *The path formulation of bifurcation theory, in dynamics, bifurcation and simmetry: new trends and new tools* (ed. P. Chossat), *Nato ASI Series* 437, Kluwer, Dordrecht, pp. 259-278, 1994.
- [20] Bruce J.W. & du Plessis, A. & Wilson, L. C., *Discriminats and liftable vector field*, *Jour. Alg. Geom.* 3, pp. 725-753, 1994.
- [21] Bruce, J. W. & Fidel, D. L., *Generic functions on bifurcation varieties I*.
- [22] Furter, J. E., *Geometric path formulation for bifurcation problems*, *Journal of Natural Geometry*, Vol. 12, Londres 1997.
- [23] Poston, T. & Stewart, I., *Catastrophe theory and Its applications*, Pitman, San Francisco, 1978.
- [24] Halliday, D. & Resnick, R. & Krane, K. S., *Física 1*, LTC-Livros Técnicos e Científicos S. A, Vol. 1, 4º edição, 1996.
- [25] Tipler, P. A., *Mecênica oscilações e ondas termodinâmicas*, LTC-Livros Técnicos e Científicos S. A, Vol. 1, 4º edição, 2000.
- [26] Mather, J.N., *Stability of C^∞ mappings, III. Finitely determined germes*, *Publ. Math. I.H.S.* 35, 127-156, 1968.



