

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Análise de métodos numéricos de diferenças finitas para solução
da equação de Poisson em domínios irregulares

Pedro Flávio Silva Othechar

Orientador: Prof. Dr. Cássio Machiaveli Oishi

Presidente Prudente, setembro de 2013

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Análise de métodos numéricos de diferenças finitas para solução
da equação de Poisson em domínios irregulares

Pedro Flávio Silva Othechar

Orientador: Prof. Dr. Cássio Machiaveli Oishi

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, setembro de 2013

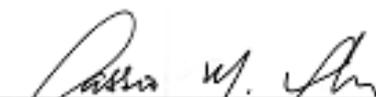
FICHA CATALOGRÁFICA

O96a Othechar, Pedro Flavio Silva
Análise de métodos numéricos de diferenças finitas para solução da equação de Poisson em domínios irregulares / Pedro Flavio Silva Othechar. - Presidente Prudente : [s.n.], 2013
83 f.

Orientador: Cássio Machiaveli Oishi
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia
Inclui bibliografia

1. Método de diferenças finitas. 2. Equação de Poisson. 3. Domínios irregulares. I. Oishi, Cassio Machiaveli. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Análise de métodos numéricos de diferenças finitas para solução da equação de Poisson em domínios irregulares.

BANCA EXAMINADORA



PROF. DR. CASSIO MACHIAVELI OISHI

ORIENTADOR



PROF. DR. MESSIAS MENEGUETTE JUNIOR

UNESP/FCT



PROF. DR. FABRÍCIO SIMEONI DE SOUSA

USP/São Carlos



PEDRO FLAVIO SILVA OTHECHAR

Presidente Prudente (SP), 06 de setembro de 2013.

Resultado: Aprovado

Índice

Índice	i
Lista de Figuras	iii
Lista de Tabelas	v
1 Introdução	4
2 Métodos das interfaces imersas: problemas elípticos	7
2.1 Um modelo unidimensional: problema de interface	7
2.2 Condições de salto	9
2.3 O método das fronteiras imersas (MFI) de Peskin	11
2.4 O método das interfaces imersas (MII): breve introdução	13
2.4.1 Reformulando o problema utilizando as condições de salto	14
2.4.2 O algoritmo do MII	15
2.4.3 A derivação do esquema de diferenças finitas em pontos irregulares	17
2.5 O MII para um problema elíptico de interface unidimensional geral	20
3 Métodos clássicos: construção por interpolação	26
3.1 Método clássico usando interpolações (MC)	26
3.1.1 O algoritmo do MC	30
3.2 Um método do tipo fronteiras imersas modificado (MFIM)	30
3.2.1 O algoritmo do MFIM	32
3.3 Equivalência entre o MCL e o MFIM	33
4 Resultados numéricos: problemas elípticos unidimensionais	35
4.1 Exemplos do MII para problemas de interfaces	35
4.2 Problemas elípticos em domínios irregulares: comparação entre os métodos	40
5 Problemas elípticos de interfaces bidimensionais	48
5.1 O método das interfaces imersas	48

5.1.1	Relação de interface para problemas elípticos de interface bidimensionais	49
5.1.2	O esquema de diferenças finitas do MII em duas dimensões	50
5.2	Método clássico (MC): construção por interpolação	55
5.2.1	O algoritmo do MC	60
5.3	Método das interfaces imersas simplificado (MIIS)	61
5.3.1	O algoritmo do MIIS	62
5.4	Método das fronteiras imersas modificado (MFIM)	63
5.4.1	O algoritmo do MFIM	65
6	Resultados numéricos: problemas elípticos bidimensionais	67
6.1	Problemas elípticos bidimensionais em domínios irregulares: comparação entre os métodos	67
7	Conclusão	70

Lista de Figuras

2.1	Gráfico da solução do problema unidimensional (2.1). A solução não é suave na interface $x = \alpha$ devido à função delta singular. . .	10
2.2	Gráfico da função delta discreto “chapéu” no intervalo $[-1, 1]$ com $\epsilon = 0.1$	12
2.3	Gráfico da função delta discreto cosseno no intervalo $[-1, 1]$ com $\epsilon = 0.1$	12
2.4	Solução do problema (2.14), com $\nu = 1$ e $\alpha = 1/3$, usando a função delta discreto “chapéu”.	13
3.1	Exemplo de uma malha cartesiana unidimensional com um ponto irregular x_Γ	26
3.2	Figura ilustrando a localização da interface x_Γ	27
3.3	Domínio $\Omega = [a, b]$, subdomínios Ω_1 e Ω_2 , e a interface Γ	31
4.1	Comparação entre as solução numéricas obtida pelo MII e pelo MFI, e a solução exata (4.1) para o problema (2.1) com $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = 2$ e 40 pontos na malha.	36
4.2	Comparação entre a solução numérica obtida pelo MII e a solução exata do exemplo 2 com $\alpha = \frac{\pi}{5}$, $[u] = 1$, $[u_x] = 0$, em uma malha com 121 pontos.	37
4.3	Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelo MII e a solução exata do exemplo 3 com $\alpha = \frac{1}{2}$, $[u] = 0$, $[u_x] = 1$, em uma malha com 20 pontos.	38
4.4	Gráfico do problema (4.4) resolvido em uma malha com 100 pontos, com $\beta^- = 1$, $\beta^+ = 2$ e $\alpha = \frac{1}{2}$	39
4.5	Gráfico do problema (4.5) resolvido em uma malha com 141 pontos e interface em $\alpha = 1$	40
4.6	Soluções numéricas do problema (4.8) resolvidas em uma malha com 20 pontos e interface em $\Gamma = 1$	42

4.7	Comparação entre as soluções numéricas do MII, MCQ, MCL, EI e a solução exata do Exemplo 2, em uma malha com 20 pontos.	44
4.8	Comparação entre as soluções numéricas do MCL, MCQ e MMI e a solução exata do problema do Exemplo 3, em uma malha com 20 pontos.	45
4.9	Comparação entre as soluções numéricas do MCL, MCQ, MII e a solução exata do problema do exemplo 4, em uma malha com 20 pontos.	46
5.1	Um diagrama da coordenada local nas direções normal e tangencial, onde θ é o ângulo entre o eixo x e a direção normal.	49
5.2	Os três tipos de pontos da fronteira a serem interpolados.	57
5.3	Os tipos de pontos da fronteira a serem interpolados.	57
5.4	Ponto irregular a ser interpolado nas direções x e y	58
5.5	Ponto irregular a ser interpolado na direção x	59
5.6	Elemento do domínio intersectado pelo contorno, em que (i, j) , $(i + 1, j)$ e $(i + 1, j - 1)$ são os vértices do elemento e x e y são os pontos onde o contorno Γ corta as arestas do elemento.	63

Lista de Tabelas

4.1	Resultados numéricos do problema (4.4) para malhas com 20, 40, 80, 160, 320 e 640 pontos.	38
4.2	Resultados numéricos do problema (4.5) para malhas com 20, 80, 320, 1280 e 5120 pontos.	40
4.3	Comparação dos erros na norma $\ E_n\ _\infty$ de cada método para o problema (4.7) em malhas com 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280 e 2560 pontos.	41
4.4	Comparação dos erros na norma $\ E_n\ _\infty$ de cada método para o problema (4.8) para malhas com 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280 e 2560 pontos.	42
4.5	Comparação dos erros na norma $\ E_n\ _2$ de cada método para o problema (4.8) para malhas com 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280 e 2560 pontos.	43
4.6	Comparação dos resultados numéricos na norma $\ E_n\ _\infty$ de cada método para o problema (4.9) para malhas com 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280 e 2560 pontos.	44
4.7	Comparação dos resultados numéricos na norma $\ E_n\ _2$ de cada método para o problema (4.9) para malhas com 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280 e 2560 pontos.	45
4.8	Comparação dos erros na $\ E_n\ _\infty$ de cada método para o problema (4.10) em malhas com 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280 e 2560 pontos.	46
4.9	Comparação dos erros na $\ E_n\ _2$ de cada método para o problema (4.10) em malhas com 20, 40, 80, 160, 320, 640 e 1280 pontos.	46
4.10	Comparação dos erros na norma $\ E_n\ _\infty$ de cada método para o problema (4.11) em malhas com 20, 40, 80, 160, 320, 640 e 1280 pontos.	47
4.11	Comparação dos erros na norma $\ E_n\ _2$ de cada método para o problema (4.11) em malhas com 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280 e 2560 pontos.	47

6.1	Comparação dos erros na norma $\ E_n\ _\infty$ de cada método para o problema (6.2) em malhas 20×20 , 40×40 , 80×80	68
6.2	Comparação dos erros na norma $\ E_n\ _\infty$ de cada método para o problema (6.3) em malhas 20×20 , 40×40 , 80×80	69

Resumo

Neste trabalho, analisamos métodos de diferenças finitas para solução numérica da equação de Poisson em domínios irregulares com condições do tipo Dirichlet, fazendo um estudo detalhado de cada um desses métodos numéricos. Em particular, analisamos o Método das Interfaces Imersas (MII), Métodos Clássicos usando interpolações linear (MCL) e quadrática (MCQ) e um Método do tipo Fronteiras Imersas modificado (MFIM). Inicialmente, comparamos os resultados obtidos por esses métodos na solução numérica de uma equação elíptica unidimensional, envolvendo uma interface localizada em um ponto que não coincide com a malha. No caso unidimensional provamos que o MCL e o MFIM são equivalentes. Posteriormente, analisamos os resultados obtidos por esses métodos na solução numérica de problemas elípticos bidimensionais, com condições de contorno definida sobre geometrias irregulares. Em geral, os métodos foram consistentes com a solução exata. No caso unidimensional o MII e o MCQ apresentaram resultados semelhantes, com ordem de precisão quadrática, enquanto que o MCL e o MFIM são menos precisos para esses testes. Após isso, realizamos testes preliminares envolvendo geometrias bidimensionais irregulares. Os resultados apontam que o MFIM e o MII são mais acurados e possuem ordem de convergência quadrática.

Palavras-Chave: Método de diferenças finitas; Equação de Poisson; Domínios irregulares.

Abstract

In this work, we study finite difference methods for the numerical solution of Poisson's equation on irregular domains with Dirichlet-type boundary conditions, performing a detailed study of these schemes. In particular, we analyze the Immersed Interfaces method (IIM), the classical method with linear (CML) and quadratic (CMQ) interpolation and the modified immersed boundary method (MIBM). Firstly, we compare the results obtained from these methods for solving a one-dimensional elliptic equation. In this equation, an interface is located at an irregular grid point. In general, all methods have been found consistent to the exact solution. In the one-dimensional case, IIM and CMQ have showed similar results, with second-order accuracy while MIBM and CML have presented less accurate results. Finally, we conduct preliminary results for two-dimensional irregular geometries. The results show that IIM and MIBM are more accurate than the classical method with linear interpolation.

Keywords: Finite difference method; Poisson's equation; Irregular domains.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela sua bondade e misericórdia, e por ter permitido que eu chegasse até aqui, com vida e com capacidade de realizar algo importante. A Ele, a Honra, a Glória e o Louvor.

Agradeço profundamente aos meus pais, Osvaldo Sant'Anna Othechar e Maria Conceição Silva Vieira, por terem me dado uma educação adequada, pelo amor, por me ensinarem o caminho correto a ser seguido, por me mostrarem que o estudo é importante, e por me fazerem acreditar que eu era e sou capaz de realizar grandes feitos.

Agradeço à minha esposa, Katiely Guimarães Oliveira, pelo companheirismo, pelo amor, pela compreensão e por acreditar em minha capacidade.

Agradeço à minha Tia, Maria Aparecida Sant'Anna Othechar (Cidinha), pelo companheirismo, pelo amor, pela paciência, pelas lições de vida e por ter me ajudado, me acolhendo em seu lar.

Agradeço à CAPES, que através do programa PICME, me concedeu auxílio financeiro.

Agradeço a todos os amigos, funcionários e professores do POSMAC. Agradeço em especial ao meu Orientador Cassio Machiaveli Oishi, pela paciência e pelo conhecimento compartilhado, e por ter me aberto a mente para um novo caminho na Matemática.

A todos meu **Muito Obrigado!**

Introdução

Problemas de interfaces fixas ou móveis, problemas de fronteira livre e problemas definidos em domínios irregulares possuem muitas aplicações mas são desafiadores. Estes tipos de problemas têm atraído a atenção de muitos pesquisadores da área de Equações Diferenciais Parciais (EDP), tanto os estudiosos da análise teórica quanto os analistas numéricos. O estudo da regularidade das soluções desses problemas é complicado devido à presença de interfaces, descontinuidades nos coeficientes, e termos fontes singulares. Computacionalmente, existem muitos métodos numéricos designados para funções suaves, que não são eficientes diante dos problemas acima citados.

O assunto é de tal importância, tanto teoricamente quanto pelas aplicações, que recentemente foi publicado um artigo, com um estudo descrevendo algumas técnicas recentes e eficientes para resolver problemas elípticos de interface, conforme pode ser visto em [21].

Um dos métodos numéricos mais conhecidos na Literatura para problemas de interface e/ou domínios irregulares foi introduzido por Peskin [1] e é conhecido como Método das Fronteiras Imersas (MFI). Basicamente, o MFI representa o fluido por uma malha cartesiana fixa enquanto que a fronteira imersa é representada por uma malha lagrangeana. A interação entre as variáveis definidas nessas malhas é feita por uma distribuição delta de Dirac. Originalmente, o MFI obtém apenas ordem um de precisão, e por isso, nos últimos anos, vem crescendo as pesquisas no intuito de aumentar a ordem de convergência desse esquema (ver [2] e [3]).

Uma alternativa ao MFI clássico é o método proposto por Leveque & Li [5] denominado de Método das Interfaces Imersas (MII). O MII foi desenvolvido como um método de maior ordem de convergência, que evita o uso de funções

delta discretos na formulação numérica do mesmo. A distribuição delta de Dirac, ainda continua representando os termos forçantes, mas quando o problema é reescrito em termos de determinadas condições, que são chamadas de “condições de salto”, o delta desaparece ficando apenas o termo que representa a magnitude da força desse termo. No trabalho de Leveque & Li [5], o método foi apresentado para a solução, via diferenças finitas, de uma equação elíptica com coeficientes descontínuos e com termo fonte singular. Após isso, Leveque & Li [6] aplicaram seu esquema na simulação de escoamentos de Stokes, enquanto que Hou et al. [9] e Li et al. [10] estenderam o MII para problemas de interfaces móveis (ou fronteiras livres). Li & Lai [11] apresentaram o MII para a solução das equações de Navier-Stokes com termos fontes singulares, e Lee & Leveque [15] para escoamentos incompressíveis. Como podemos verificar nas citações anteriores, o MII tornou-se bastante conhecido devido sua boa performance e precisão na solução de problemas que envolvam coeficientes descontínuos, como por exemplo, na solução das equações de Navier-Stokes com viscosidade descontínua ao longo da interface, conforme pode ser visto em [14].

Recentemente, Feng & Li [22], apresentaram um estudo propondo uma simplificação para o MII. Neste estudo, os autores realizam as simplificações, nos casos unidimensionais e bidimensionais com interfaces circulares, tendo como base para resolução do problema, um método de diferenças finitas com ordem de convergência 2. Já para problemas bidimensionais com interfaces representadas por retas, os autores propõem inicialmente um método de ordem de convergência linear como base e posteriormente realizam uma extrapolação de Richardson para obter ordem 2 de convergência. Bem mais recentemente, ainda no contexto de métodos de interfaces imersas, Brehm & Fasel [23] apresentaram um novo e robusto, método de interface de alta ordem para equações do tipo advecção-difusão. Além disso o método é aplicado para as equações de Navier-Stokes incompressíveis para conduzir investigações de um escoamento na camada limite ao longo de uma superfície rugosa.

Baseado em uma discretização via diferenças finitas, Jomaa & Macaskill [12] fizeram importantes considerações sobre a imposição de contorno do tipo Dirichlet para a solução da equação de Poisson em um domínio irregular. Apesar desse problema ter sido significativamente estudado no passado, como por exemplo, no trabalho de Shortley & Weller [13], o interesse da análise está na estimativa dos erros envolvidos na aproximação dos contornos quando interpolações são aplicadas. Os autores mostram a influência no número de pontos na malha necessários para alcançar o mesmo erro absoluto quando uma interpolação linear ou quadrática é aplicada no contorno. Basicamente o uso de interpolações altera a equação de diferenças construída pela discretização,

resultando em uma matriz não-simétrica.

No contexto de elementos finitos, Codina & Baiges [19] apresentaram um esquema que busca aumentar a ordem de convergência dos métodos de fronteiras imersas, nos quais as condições de contorno, em especial as de Dirichlet, são impostas de forma a minimizar a distância entre as condições de contorno exata e aproximada por mínimos quadrados. Essa ideia foi originalmente estendida para diferenças finitas por Petri [17] e por Oishi et al. [20], e os resultados preliminares foram motivadores, pois a formulação combina precisão e eficiência.

Um novo método para resolução da equação de Poisson com condições de Dirichlet em domínios não retangulares, foi proposto por Izadian & Karamooz [24]. Os autores desenvolveram o método baseado em duas malhas: irregular e semi-irregular e, além disso, utilizam um método de diferenciação numérica aplicando pontos não equidistantes.

Portanto, como descrevemos anteriormente, apesar do problema de resolver numericamente um EDP em domínios irregulares ser clássico, ainda chama a atenção de muitos pesquisadores. Desta forma, neste trabalho, focamos a análise de métodos de diferenças finitas na solução da equação de Poisson em Domínios irregulares. Particularmente, fizemos uma introdução ao Método das Interfaces Imersas (MII), baseado em malhas cartesianas uniformes para resolver problemas de interface e problemas definidos em domínios irregulares. Posteriormente fizemos a apresentação de dois métodos clássicos para resolver problemas definidos em domínios irregulares. O primeiro é o método clássico de interpolação, que foi investigado por Jomaa & Macaskill em [12], onde são usadas interpolações para captura das condições de fronteira que estão definidas em pontos da malha que não coincidem com a geometria computacional. O outro método proposto foi por Codina & Baiges em [19], no qual investigamos sua eficácia diante de problemas com domínios irregulares.

Métodos das interfaces imersas: problemas elípticos

Neste capítulo, faremos uma breve introdução ao modelo de um problema de interface e ao MFI original proposto por Peskin (1). Faremos também um breve introdução a respeito das condições de salto, e os principais conceitos do MII.

2.1 Um modelo unidimensional: problema de interface

Considere o seguinte problema de valor de contorno:

$$(\beta u_x)_x = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad (2.1)$$

o qual modela o deslocamento de um elástico, onde β , uma constante, é o coeficiente de tensão de superfície do elástico. Se $f(x)$ é uma força pontual em algum ponto α , $0 < \alpha < 1$, então

$$\int_0^1 f(x)\phi(x)dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \delta_\epsilon(x - \alpha)\phi(x)dx = \int_0^1 \delta(x - \alpha)\phi(x)dx = \phi(\alpha), \quad (2.2)$$

para todo $\phi(x) \in C^1[0, 1]$ desaparecendo em $x = 0$ e $x = 1$, onde $\delta_\epsilon(x)$ é uma função contínua não negativa com um suporte compacto tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(x) = 1$. Na equação (2.2) o que queremos mostrar é uma propriedade de uma distribuição. Essa distribuição aparece na equação para representar f que nesse problema é um ponto unitário de força. Esse ponto unitário de força representa física-

mente uma força puntual. Para isso utiliza-se a distribuição delta de Dirac, que é aproximada por uma sequência de funções de suporte compacto δ_ϵ , com $\epsilon \rightarrow 0$, e assim podemos dizer que:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{em } x, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.3)$$

Nota-se que a equação diferencial em (2.1) é simplesmente $u_{xx} = 0$ nos subdomínios $(0, \alpha)$ e $(\alpha, 1)$. Enquanto a solução (o deslocamento do elástico) é contínua, suas derivadas de primeira ordem não são. De fato, se integarmos (2.1) da esquerda para a direita de α , temos

$$\int_{\alpha^-}^{\alpha^+} (\beta u_x)_x dx = \int_{\alpha^-}^{\alpha^+} \delta(x - \alpha) \cdot 1 dx = 1 \quad (2.4)$$

pois, nesse problema $f(x) = \delta(x - \alpha)$ e $\phi(x) = 1$, e a igualdade segue da propriedade mostrada em (2.1). Nesse contexto, α^+ e α^- são os valores de x que se encontram antes e depois da interface respectivamente.

Assim,

$$\int_{\alpha^-}^{\alpha^+} (\beta u_x)_x dx = \beta u_x(\alpha^+) - \beta u_x(\alpha^-) = 1$$

e portanto $\beta u_x(\alpha^+) = \beta u_x(\alpha^-) + 1$.

Então em $x = \alpha$, aparecem condições que são dadas por:

$$\begin{aligned} u(\alpha^+) &= u(\alpha^-), \\ u_x(\alpha^+) &= u_x(\alpha^-) + \frac{1}{\beta}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Usando as condições de salto acima podemos obter a solução exata do problema. Assim, integrando a equação $u_x(\alpha^-) = u_x(\alpha^+) - \frac{1}{\beta}$ com respeito a α^- , de 0 a x , sendo $x \leq \alpha$, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_0^x u_x(\alpha^-) d\alpha^- &= \int_0^x (u_x(\alpha^+) - \frac{1}{\beta}) d\alpha^- \Rightarrow \\ u(x) - u(0) &= u_x(\alpha^+) \cdot x - \frac{x}{\beta} \end{aligned}$$

pois, já que $u(0) = 0$ e $u_x(\alpha^+)$ é uma constante, uma vez que $\alpha^+ \notin (0, \alpha)$.

Finalmente, concluímos que:

$$u(x) = x \cdot \left(u_x(\alpha^+) - \frac{1}{\beta} \right). \quad (2.6)$$

Por outro lado, seja, $u_x(\alpha^+) = u_x(\alpha^-) + \frac{1}{\beta}$. Integrando essa equação com

respeito a α^+ , de x a 1, sendo $x \geq \alpha$, temos que:

$$\int_x^1 u_x(\alpha^+) d\alpha^+ = \int_x^1 \left(u_x(\alpha^-) + \frac{1}{\beta} \right) d\alpha^+ \Rightarrow$$

$$u(1) - u(x) = \left(u_x(\alpha^-) + \frac{1}{\beta} \right) - \left(u_x(\alpha^-) \cdot x + \frac{x}{\beta} \right) \Rightarrow$$

$$-u(x) = (1-x)u_x(\alpha^-) + (1-x)\frac{1}{\beta},$$

pois $u(1) = 0$ e $u_x(\alpha^-)$ é uma constante, porque $\alpha^- \notin (\alpha, 1)$.

Finalmente chegamos a uma expressão para $u(x)$ no intervalo $(x, 1)$:

$$-u(x) = (1-x) \left(u_x(\alpha^-) + \frac{1}{\beta} \right) \quad (2.7)$$

Consideramos então $x = \alpha$, $u_x(\alpha^+) = u_x(\alpha^-) + \frac{1}{\beta}$ e fazendo $u_x(\alpha^-) = c$, obtemos das equações (2.6) e (2.7) as seguintes equações; respectivamente:

$$u(\alpha) = \alpha \left(c + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta} \right) = \alpha \cdot c,$$

e

$$-u(\alpha) = (1-\alpha) \left(c + \frac{1}{\beta} \right).$$

Agora, somando as duas equações acima, obtemos c :

$$\alpha \cdot c + c - \alpha \cdot c + \frac{(1-\alpha)}{\beta} = 0 \Rightarrow c = -\frac{(1-\alpha)}{\beta}$$

Substituindo $u_x(\alpha^-) = c = -\frac{(1-\alpha)}{\beta}$ nas equações (2.6) e (2.7), chegamos à expressão final da solução exata do problema (2.1):

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{(1-\alpha)x}{\beta} & \text{se } 0 \leq x \leq \alpha, \\ -\frac{\alpha(1-x)}{\beta} & \text{se } \alpha \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (2.8)$$

Neste exemplo, devido à função fonte delta singular, a solução é não-suave em $x = \alpha$, conforme podemos notar na figura (2.1). Portanto, a solução é suave por partes em cada subdomínio $(0, \alpha)$ e $(\alpha, 1)$. A solução em um subdomínio é acoplada com a solução do outro lado da interface α pelas relações (2.5).

2.2 Condições de salto

As duas relações em (2.5) são chamadas de “condições de salto” sobre a interface α ou condições internas de contorno. As condições de salto são

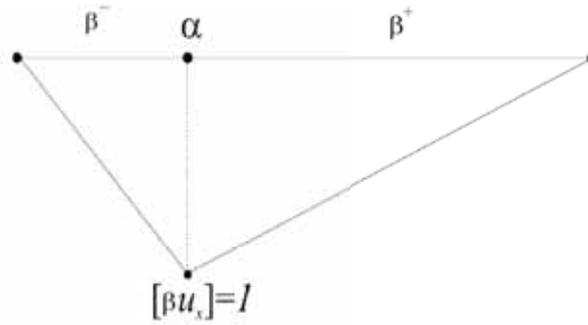


Figura 2.1: Gráfico da solução do problema unidimensional (2.1). A solução não é suave na interface $x = \alpha$ devido à função delta singular.

definidas por

$$[u]_{x=\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} u(\alpha^+) - u(\alpha^-) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow \alpha^+} u(x) - \lim_{x \rightarrow \alpha^-} u(x), \quad (2.9)$$

$$[u_x]_{x=\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} u_x(\alpha^+) - u_x(\alpha^-) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow \alpha^+} u_x(x) - \lim_{x \rightarrow \alpha^-} u_x(x).$$

Geralmente o domínio para um problema de interface com soluções limitadas pode ser dividido em várias regiões. As soluções em diferentes regiões são continuamente diferenciáveis para um certo grau e são acopladas por algumas relações de interface, que são chamadas as condições de salto através da interface. É crucial para o MII ter um conhecimento prévio das condições de salto, ou das razões físicas ou das equações diferenciais governantes. Por exemplo, considere a equação diferencial,

$$(\beta u_x)_x = \nu \delta(x - \alpha), \quad (2.10)$$

onde $\beta(x)$ é uma função contínua por partes e ν é uma constante. As relações de salto podem ser facilmente derivadas da própria equação. Podemos provar que as condições de salto para a equação diferencial anterior são

$$\begin{aligned} [u] &= 0, \\ [\beta u_x] &= \nu, \end{aligned} \quad (2.11)$$

em $x = \alpha$, onde δ é a distribuição delta de Dirac e α representa a localização de uma interface arbitrária. De fato, integrando o lado esquerdo, com relação a x , da eq. (2.10) de α^- até α^+ temos:

$$\int_{\alpha^-}^{\alpha^+} (\beta u_x)_x dx = \beta(\alpha^+)u_x(\alpha^+) - \beta(\alpha^-)u_x(\alpha^-) = [\beta u_x],$$

mas por outro lado,

$$\int_{\alpha^-}^{\alpha^+} \nu \delta(x - \alpha) dx = \nu,$$

e portanto temos a segunda condição de salto. A primeira condição de salto segue diretamente da teoria da regularidade [24] e [25], pois a mesma garante que a equação (2.10) possui solução contínua e portanto, $[u] = 0$. Contudo, não é sempre fácil derivar as condições de salto envolvendo uma interface.

Por outro ponto de vista, as condições de salto podem ser consideradas como condições de contorno internas que fazem um problema bem-posto. Considere a equação diferencial parcial (2.10) com uma condição de fronteira Dirichlet fora nas extremidades do domínio. No interior do domínio excluindo a interface α , a EDP é simplesmente $u_{xx} = 0$. Contudo (2.10) não é bem-posta a menos que seja especificado duas condições em α . Diferentes condições de salto geralmente correspondem a diferentes aplicações. Para muitas aplicações, a solução é contínua e o fluxo é a intensidade da força, que dá $[u] = 0$ e $[\beta u_x] = \nu$. O problema é então bem posto e tem uma única solução.

Para muitas aplicações tem-se informações suficientes para determinar as condições de salto.

2.3 O método das fronteiras imersas (MFI) de Peskin

Peskin [1] propôs um método de imposição de contorno, desenvolvido para um modelo de fluxo de sangue no coração humano. Este método tem sido aplicado em muitos outros problemas, especialmente em biofísica e outras aplicações. Uma das ideias importantes no método das fronteiras imersas é o uso de uma função delta discreta para distribuir um termo fonte singular próximo dos pontos da malha. As funções delta discreta mais utilizadas são, a função delta “chapéu”

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{(\epsilon - |x|)}{\epsilon^2} & \text{se } |x| < \epsilon, \\ 0 & \text{se } |x| \geq \epsilon, \end{cases} \quad (2.12)$$

e a função delta discreto cosseno, proposta por Peskin [1]

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\epsilon} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi x}{2\epsilon}\right)\right) & \text{se } |x| < 2\epsilon, \\ 0 & \text{se } |x| \geq 2\epsilon. \end{cases} \quad (2.13)$$

Nas figuras (2.2) e (2.3) podemos observar os gráficos dessas duas funções delta discretos, respectivamente; ambas as funções são contínuas.

É fácil analisar a resolução de um problema de interface em uma dimensão, usando a função delta discreto. Para tanto, vamos considerar o seguinte modelo de um problema de interface:

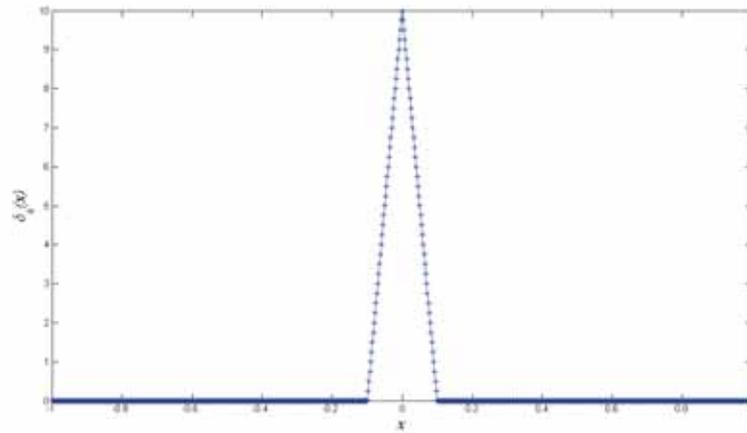


Figura 2.2: Gráfico da função delta discreto “chapéu” no intervalo $[-1, 1]$ com $\epsilon = 0.1$.

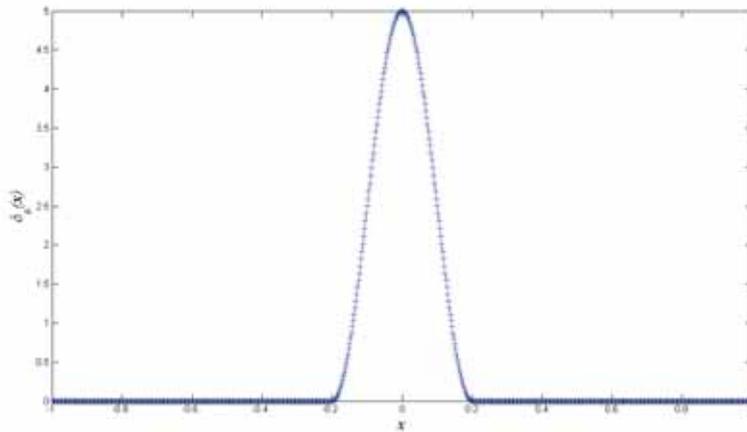


Figura 2.3: Gráfico da função delta discreto cosseno no intervalo $[-1, 1]$ com $\epsilon = 0.1$.

$$u_{xx} = \nu\delta(x - \alpha), \quad \alpha \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (2.14)$$

Nesse caso a interface se reduz a um ponto singular. Utilizando o método de diferenças finitas, ao discretizarmos o domínio, obtemos a equação de diferenças:

$$\frac{(U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}))}{\Delta x^2} = \nu\delta_{\Delta x}(x_j - \alpha),$$

no qual o termo u_{xx} da equação (2.14) foi aproximado por diferenças central de segunda ordem com $u(x_i) \simeq U_i$, e $\delta_{\Delta x}$ é uma das funções delta discreto. Esse método pode ser facilmente implementado, e na figura (2.4) apresentamos o resultado obtido pelo método de Peskin desse simples problema, com $\nu = 1$ e $\alpha = 1/3$ e utilizando a função (2.12), comparado com sua solução exata

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ -\frac{1}{3}(1-x) & \text{se } \frac{1}{3} < x \leq 1. \end{cases} \quad (2.15)$$

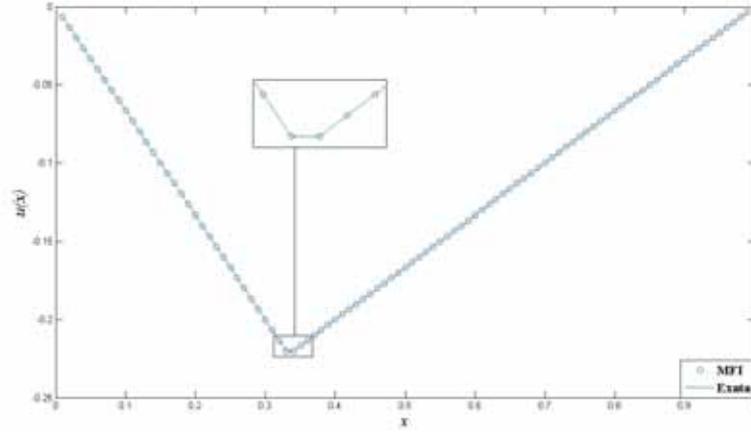


Figura 2.4: Solução do problema (2.14), com $\nu = 1$ e $\alpha = 1/3$, usando a função delta discreto “chapéu”.

Podemos perceber que o MFI é simples e robusto, e para esse simples exemplo, a solução numérica aproxima bem a solução exata. Contudo, o MFI apresenta apenas ordem linear de convergência e recorre ao uso de uma função delta discreto na formulação numérica, e por isso, Leveque & Li (5), propuseram o MII que apresentaremos a seguir.

2.4 O método das interfaces imersas (MII): breve introdução

Iniciamos com o seguinte problema unidimensional como modelo

$$(\beta(x)u_x)_x - \sigma(x)u = f(x) + \nu\delta(x - \alpha), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (2.16)$$

com condições de fronteira especificadas por $u(x)$ em $x = 0$ e $x = 1$. A função $\beta(x)$ é assumida ser descontínua em $x = \alpha$, $\sigma(x)$ é uma função contínua e ν é uma constante. Uma vez que o método e a análise são simples para o problema unidimensional, utilizaremos a equação (2.16) para apresentar a ideia principal do MII.

Tanto no contexto do MFI, como no contexto do MII, a distribuição delta de Dirac $\delta(x - \alpha)$ tem o papel de representar a interface. A diferença entre esses métodos é que o MII elimina a necessidade de se usar uma aproximação para essa distribuição nas equações de diferenças, uma vez que ao reformular o problema utilizando as condições de salto, a mesma desaparece. A constante

ν dá a magnitude do fluxo na interface.

2.4.1 Reformulando o problema utilizando as condições de salto

Sejam $f(x) \in L^2(0,1)$, $\sigma(x) \in C(0,1)$, e $\beta(x) \in C^1(0,\alpha) \cup C^1(\alpha,1)$, onde $L^2(0,1)$ é o espaço das funções quadrado integráveis no intervalo $(0,1)$ e $C(0,1)$ é o espaço das funções contínuas em $(0,1)$. Então $u(x) \in C(0,1)$, ou seja, $u(x)$ é contínua. Ao integrarmos a equação (2.16) de $x = \alpha^-$ para $x = \alpha^+$, estamos fazendo um salto na equação, assim temos

$$\int_{\alpha^-}^{\alpha^+} (\beta(x)u_x)_x - \sigma(x)u(x)dx = \int_{\alpha^-}^{\alpha^+} f(x) + \nu\delta(x - \alpha)dx,$$

mas como $\sigma(x)$, $f(x)$ e $u(x)$ são contínuas e $\alpha^-, \alpha^+ \rightarrow \alpha$ obtemos:

$$\beta(\alpha^+)u_x(\alpha^+) - \beta(\alpha^-)u_x(\alpha^-) = \nu,$$

e assim obtemos a expressão:

$$[\beta u_x]_{x=\alpha} = \beta^+ u_x^+ - \beta^- u_x^- = \nu. \quad (2.17)$$

Além disso, temos

$$[u]_{x=\alpha} = u^+ - u^- = 0, \quad (2.18)$$

uma vez que f é contínua e possui salto zero na interface.

Uma forma alternativa de indicar o problema acima é requerer que $u(x)$ satisfaça a equação

$$(\beta u_x)_x - \sigma(x)u = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (0, \alpha) \cup (\alpha, 1), \quad (2.19)$$

onde $(0, \alpha) \cup (\alpha, 1)$ representa o interior do domínio sem a interface α . Consideramos também as duas condições internas de contorno em $x = \alpha$. Assim temos

$$[\beta_x u_x + \beta u_{xx} - \sigma u] = [f],$$

mas quando f é contínua $[f] = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x) = 0$, portanto

$$\beta_x^+ u_x^+ + \beta^+ u_{xx}^+ - \sigma^+ u^+ = \beta_x^- u_x^- + \beta^- u_{xx}^- - \sigma^- u^-. \quad (2.20)$$

Na passagem acima, usamos a propriedade do salto $[f+g] = [f] + [g]$. Como, por definição, os saltos são limites laterais, usamos a propriedade que garante que o limite da soma é a soma dos limites, e concluimos que o salto apresenta a mesma propriedade.

Por simplicidade começamos assumindo que $\sigma(x)$ e $f(x)$ são funções suaves e β é constante por partes com um salto finito em α . Assim temos $\sigma^+ = \sigma^-$,

$\beta_x^+ = \beta_x^- = 0$. Da equação (2.18) obtemos que $u^+ = u^-$. Podemos expressar os limitantes do lado “+”, onde $x > \alpha$, em termos daqueles do lado “-”, onde $x < \alpha$. Logo, a equação (2.20) reduz-se a:

$$\beta^+ u_{xx}^+ = \beta^- u_{xx}^- \Rightarrow u_{xx}^+ = \frac{\beta^-}{\beta^+} u_{xx}^- \quad (2.21)$$

Agora usando a equação (2.17), podemos expressar u_x^+ em função de u_x^- , como:

$$u_x^+ = \frac{\beta^-}{\beta^+} u_x^- + \frac{\nu}{\beta^+} \quad (2.22)$$

Assim segue das equações (2.18), (2.21) e (2.22) as seguintes condições de salto, para esse simples problema:

$$u^+ = u^-, \quad u_x^+ = \frac{\beta^-}{\beta^+} u_x^- + \frac{\nu}{\beta^+}, \quad u_{xx}^+ = \frac{\beta^-}{\beta^+} u_{xx}^- \quad (2.23)$$

Após a construção do problema (2.16) reformulado no contexto de condições de salto, estamos preparados para descrever a construção das equações de diferenças utilizadas no MII.

2.4.2 O algoritmo do MII

Um método de diferenças finitas para uma equação diferencial linear do tipo (2.19) usualmente envolve os seguintes procedimentos: (1) geração de uma malha; (2) substituir as derivadas com aproximações de diferenças finitas em todos os pontos da malha, onde a solução é conhecida, para obter um sistema linear de equações; (3) resolver o sistema linear de equações para obter uma aproximação para a equação diferencial original; (4) realizar análise de erro. O MII segue os mesmos procedimentos, ou seja, o algoritmo do MII para resolver numericamente (2.16) é descrito abaixo:

Passo 1: Gerar uma malha cartesiana, $x_i = i\Delta x$, $i = 0, 1, \dots, N$, onde $\Delta x = 1/N$. O ponto α recairá tipicamente entre os pontos da malha, digamos $x_j \leq \alpha < x_{j+1}$. Os pontos da malha x_j e x_{j+1} são chamados pontos irregulares da malha se uma aproximação de diferença central padrão de 3 pontos for usada em pontos da malha longe da interface α . Os outros pontos são chamados de pontos regulares da malha.

Passo 2: Determinar o esquema de diferenças finitas nos pontos regulares da malha. Em um ponto x_i da malha, $i \neq j, j+1$, a aproximação central padrão de 3 pontos aplicada a equação (2.19) é

$$\frac{1}{\Delta x^2} (\beta_{i+\frac{1}{2}} (U_{i+1} - U_i) - \beta_{i-\frac{1}{2}} (U_i - U_{i-1})) - \sigma_i U_i = f_i, \quad (2.24)$$

onde $\beta_{i+\frac{1}{2}} = \beta(x_{i+\frac{1}{2}})$, $\beta_{i-\frac{1}{2}} = \beta(x_{i-\frac{1}{2}})$, $\sigma_i = \sigma(x_i)$ e $f_i = f(x_i)$. Neste caso U_i

representa a aproximação numérica de $u(x_i)$.

Passo 3: Determinar as equações de diferenças nos pontos irregulares x_j e x_{j+1} . As equações de diferenças são determinadas através do método de coeficientes indeterminados. Num esquema de diferenças finitas onde os pontos são todos regulares, com um espaçamento Δx entre eles, a derivada βu_{xx} , com β constante, fica aproximada em x_i como

$$\beta u_{xx}(x_i) \cong \frac{\beta}{\Delta x^2} U_{i+1} + \frac{-2\beta}{\Delta x^2} U_i + \frac{\beta}{\Delta x^2} U_{i-1},$$

e assim a equação (2.19) fica escrita como

$$\frac{\beta}{\Delta x^2} U_{i+1} + \frac{-2\beta}{\Delta x^2} U_i + \frac{\beta}{\Delta x^2} U_{i-1} - \sigma_i u_i = f_i$$

Mas nos pontos irregulares x_j e x_{j+1} do problema de interface, a equação de diferenças não terá os mesmos coeficientes, os quais devem ser encontrados em função das condições de salto. Portanto, podemos escrever:

$$\gamma_{j,1} U_{j-1} + \gamma_{j,2} U_j + \gamma_{j,3} U_{j+1} - \sigma_j U_j = f_j + C_j, \tag{2.25}$$

$$\gamma_{j+1,1} U_j + \gamma_{j+1,2} U_{j+1} + \gamma_{j+1,3} U_{j+2} - \sigma_{j+1} U_{j+1} = f_{j+1} + C_{j+1}.$$

Notemos que C_j e C_{j+1} são os termos de correção envolvidos nos cálculos para x_j e x_{j+1} . Esses termos de correção aparecem nos pontos irregulares, pois, em tais pontos precisamos incorporar a informação da forma $u(\alpha)$ que é o salto na interface, mas essa informação não faz parte do esquema de diferenças finitas que aproxima a derivada. Desse modo, esse termo aparece como um valor extra na equação de diferenças, o qual pode ser entendido como um termo de correção.

Nas equações (2.25) a primeira equação é a equação de diferenças para o ponto $x = x_j$ e a segunda é para o ponto $x = x_{j+1}$.

Para o simples modelo em que $\sigma \equiv 0$, $[f] = 0$, e β é seccionalmente constante, o coeficiente das equações de diferenças finitas em x_j e x_{j+1} tem a seguinte forma fechada:

$$\begin{cases} \gamma_{j,1} = (\beta^- - [\beta](x_j - \alpha)/\Delta x)/D_j, \\ \gamma_{j,2} = (-2\beta^- + [\beta](x_{j-1} - \alpha)/\Delta x)/D_j, \\ \gamma_{j,3} = \beta^+/D_j, \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\begin{cases} \gamma_{j+1,1} = \beta^-/D_{j+1}, \\ \gamma_{j+1,2} = (-2\beta^+ + [\beta](x_{j+2} - \alpha)/\Delta x)/D_{j+1}, \\ \gamma_{j+1,3} = (\beta^+ - [\beta](x_{j+1} - \alpha)/\Delta x)/D_{j+1}, \end{cases}$$

onde

$$D_j = \Delta x^2 + [\beta](x_{j-1} - \alpha)(x_j - \alpha)/2\beta^-, \quad (2.27)$$

$$D_{j+1} = \Delta x^2 + [\beta](x_{j-2} - \alpha)(x_{j-1} - \alpha)/2\beta^+.$$

A derivação de todos esses coeficientes e os termos de correção serão apresentados na próxima seção. Mostraremos mais tarde que $D_j \neq 0$ e $D_{j+1} \neq 0$ se $\beta^- \beta^+ > 0$. Os termos de correção são

$$C_j = \gamma_{j,3}(x_{j+1} - \alpha) \frac{\nu}{\beta^+} \quad \text{e} \quad C_{j+1} = \gamma_{j+1,1}(\alpha - x_j) \frac{\nu}{\beta^-} \quad (2.28)$$

Para problemas unidimensionais de interfaces mais gerais, os coeficientes $\gamma_{j,k}$ e $\gamma_{j+1,k}$ são determinados de um sistema de equações uma vez que as formas fechadas de coeficientes de diferenças finitas são complicadas e não-necessárias. O k nos termos $\gamma_{j,k}$, representa a quantidade de coeficientes indeterminados da equação de diferenças.

Passo 4: Resolveremos os sistemas de equações em (2.26), cuja matriz de coeficientes é tridiagonal e combinaremos o **passo 2**, para obter uma aproximação da solução de $u(x)$ em todo ponto da malha.

2.4.3 A derivação do esquema de diferenças finitas em pontos irregulares

Nesta seção determinaremos os coeficientes de diferenças finitas $\gamma_{j,1}$, $\gamma_{j,2}$ e $\gamma_{j,3}$ em (2.25) para o simples caso onde na equação (2.19) assumimos $\sigma = 0$, β seccionalmente constante, e $f(x)$ contínua. O critério para determinar os coeficientes das equações de diferenças em (2.25) é minimizar a magnitude do erro de truncamento local

$$T_j = \gamma_{j,1}u(x_{j-1}) + \gamma_{j,2}u(x_j) + \gamma_{j,3}u(x_{j+1}) - f(x_j) - C_j. \quad (2.29)$$

A principal ideia é expandir as soluções $u(x_{j-1})$, $u(x_j)$, $u(x_{j+1})$ e $f(x_j)$ em série de Taylor em α de cada lado da interface e então usar as relações (2.23) para expressar $u^\pm(\alpha)$, $u_x^\pm(\alpha)$, e $u_{xx}^\pm(\alpha)$ em termos das quantidades de um lado em particular. Finalmente, combinamos a expansão em comparação com a equação diferencial com os termos que conduzem a um sistema de equações para os coeficientes de diferenças finitas.

Notemos que $x_i = \alpha + x_i - \alpha$, assim escrevemos $x_i = \alpha + (x_i - \alpha)$ e usamos o termo $x_i - \alpha$ como um Δx . Por exemplo, usando uma expansão em série de Taylor para $u(x_{j+1})$ em α para obter uma aproximação de ordem 2, temos

$$u(x_{j+1}) = u^+(\alpha) + (x_{j+1} - \alpha)u_x^+(\alpha) + \frac{1}{2}(x_{j+1} - \alpha)^2u_{xx}^+(\alpha) + O(\Delta x^3). \quad (2.30)$$

Na expansão de Taylor aparecem os termos u^+ , u_x^+ e u_{xx}^+ , uma vez que o ponto x_{j+1} está após a interface α . Assim usando as relações de salto (2.23), a expressão anterior pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} u(x_{j+1}) &= u^-(\alpha) + (x_{j+1} - \alpha)\left(\frac{\beta^-}{\beta^+}u_x^-(\alpha) + \frac{\nu}{\beta^+}\right) \\ &+ (x_{j+1} - \alpha)^2\frac{\beta^-}{\beta^+}u_{xx}^-(\alpha) + O(\Delta x^3). \end{aligned} \quad (2.31)$$

A expansão em série de Taylor de $u(x_{j-1})$ e $u(x_j)$ em α tem a seguinte expressão:

$$u(x_l) = u^-(\alpha) + (x_l - \alpha)u_x^-(\alpha) + \frac{1}{2}(x_l - \alpha)^2u_{xx}^-(\alpha) + O(\Delta x^3), \quad l = j-1 \text{ ou } l = j. \quad (2.32)$$

Assim, substituindo as equações (2.31) e (2.32), e considerando a expansão em série de Taylor de $f(x)$ em torno de α , o erro de truncamento local do esquema de diferença finita (2.29) em $x = x_j$ tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} T_j &= \gamma_{j,1}u(x_{j-1}) + \gamma_{j,2}u(x_j) + \gamma_{j,3}u(x_{j+1}) - f(x_j) - C_j \\ &= (\gamma_{j,1} + \gamma_{j,2} + \gamma_{j,3})u^-(\alpha) + \gamma_{j,3}(x_{j+1} - \alpha)\frac{\nu}{\beta^+} \\ &+ ((x_{j-1} - \alpha)\gamma_{j,1} + (x_j - \alpha)\gamma_{j,2} + \frac{\beta^-}{\beta^+}(x_{j+1} - \alpha)\gamma_{j,3})u_x^-(\alpha) \\ &+ \frac{1}{2}((x_{j-1} - \alpha)^2\gamma_{j,1} + (x_j - \alpha)^2\gamma_{j,2} + \frac{\beta^-}{\beta^+}(x_{j+1} - \alpha)\gamma_{j,3})u_{xx}^-(\alpha) \\ &- f(\alpha) - O(\Delta x) - C_j + O(\max_{1 \leq l \leq 3} |\gamma_{j,l}| \Delta x^3), \end{aligned} \quad (2.33)$$

após a escolha de termos para $u^-(\alpha)$, $u_x^-(\alpha)$ e $u_{xx}^-(\alpha)$.

Minimizando a magnitude de T_j e usando a equação diferencial (2.19) em α do lado “-”, obtemos o seguinte sistema de equações para os coeficientes $\{\gamma_{j,k}\}$:

$$\begin{cases} \gamma_{j,1} + \gamma_{j,2} + \gamma_{j,3} = 0, \\ (x_{j-1} - \alpha)\gamma_{j,1} + (x_j - \alpha)\gamma_{j,2} + \frac{\beta^-}{\beta^+}(x_{j+1} - \alpha)\gamma_{j,3} = 0, \\ \frac{1}{2}(x_{j-1} - \alpha)^2\gamma_{j,1} + \frac{1}{2}(x_j - \alpha)^2\gamma_{j,2} + \frac{\beta^-}{2\beta^+}(x_{j+1} - \alpha)\gamma_{j,3} = \beta^-. \end{cases} \quad (2.34)$$

Podemos verificar que os $\{\gamma_{j,k}\}$'s nas 3 primeiras equações em (2.26) satisfazem o sistema acima quando $\sigma = 0$ e β é seccionalmente constante na equação (2.19). A seguir, constamos a veracidade da afirmação anterior, para as duas primeiras equações do sistema. Assim para a primeira equação de (2.34), temos:

$$\begin{aligned} \gamma_{j,1} + \gamma_{j,2} + \gamma_{j,3} &= \\ (\beta^- - [\beta](x_j - \alpha)/\Delta x)/D_j + (-2\beta^- + [\beta](x_{j-1} - \alpha)/\Delta x)/D_j + \beta^+/D_j &= \\ \left(\beta^- - 2\beta^- - \frac{[\beta]}{\Delta x}(x_j - \alpha - x_{j-1} + \alpha) + \beta^+ \right) / D_j &= \\ \left((\beta^+ - \beta^-) - \frac{[\beta]}{\Delta x}(x_j - x_{j-1}) \right) / D_j = \left([\beta] - \frac{[\beta]}{\Delta x}\Delta x \right) / D_j &= 0. \end{aligned}$$

De forma semelhante, obtemos:

$$\begin{aligned} (x_{j-1} - \alpha)\gamma_{j,1} + (x_j - \alpha)\gamma_{j,2} + \frac{\beta^-}{\beta^+}(x_{j+1} - \alpha)\gamma_{j,3} &= \\ (x_{j-1} - \alpha) \left((\beta^- - [\beta](x_j - \alpha/\Delta x))/D_j \right) + (x_j - \alpha) \left((-2\beta^- - [\beta](x_{j-1} - \alpha/\Delta x))/D_j \right) &+ \\ + \frac{\beta^- \beta^+}{\beta^+ D_j}(x_{j+1} - \alpha) &= \frac{1}{D_j} \left((x_{j-1} - \alpha)\beta^- - 2(x_j - \alpha)\beta^- - (x_{j-1} - \alpha)[\beta] \frac{(x_j - \alpha)}{\Delta x} \right. \\ + (x_j - \alpha)[\beta] \frac{(x_{j-1} - \alpha)}{\Delta x} &+ \left. (x_{j+1} - \alpha)\beta^- \right) = \frac{1}{D_j} (\beta^-(x_{j-1} + 2x_j + x_{j+1})) \\ &= \frac{1}{D_j} (\beta^-(2\Delta x - 2\Delta x)) = 0. \end{aligned}$$

Uma vez que os $\{\gamma_{j,k}\}$'s foram calculados, é fácil ajustar o termo de correção

da equação (2.33):

$$C_j = \gamma_{j,3}(x_{j+1} - \alpha) \frac{\nu}{\beta_+}, \quad (2.35)$$

que coincide com os termos restantes no erro de truncamento local T_j acima.

É importante ressaltar as seguintes propriedades e casos especiais dos coeficientes de diferenças finitas $\{\gamma_{j,k}\}$ derivados do MII.

- Se β é continuamente constante, então pela resolução do sistema (2.34), recuperamos o esquema padrão de diferenças finitas de 3 pontos com $\gamma_{j,1} = \gamma_{j,3} = \beta/\Delta x^2$ e $\gamma = -2\beta/\Delta x^2$.
- No caso em que β é seccionalmente constante, o cálculo dos coeficientes da média harmônica satisfaz a primeira e a segunda equações de (2.34), mas não a terceira, indicando que o erro de truncamento desse método em x_j e x_{j+1} é $O(\Delta x)$. Mas o método tem erro global de segunda ordem de precisão na norma infinito, devido ao cancelamento dos erros.
- Se $\nu = 0$ na equação (2.28), então $C_j = C_{j+1} = 0$. Nesse caso uma descontinuidade em β afeta somente os coeficientes, mas não o lado direito.
- Se β é constante e $\sigma = 0$ na equação (2.28), então

$$C_j = \frac{\nu}{\Delta x^2}(x_{j+1} - \alpha) = \delta_{\Delta x}(x_j - \alpha); \quad C_{j+1} = \frac{\nu}{\Delta x^2}(\alpha - x_j) = \delta_{\Delta x}(x_{j+1} - \alpha), \quad (2.36)$$

onde $\delta_{\Delta x}$ é a função delta discreto. Nesse caso podemos ver o esquema de diferença finita como uma discretização direta da equação

$$\beta u_{xx}(x) = f(x) + \nu \delta(x - \alpha).$$

- Os coeficientes $\{\gamma_{j,k}\}$ dependem apenas da função $\beta(x)$ e da posição de α relativo a malha, mas não de ν .

2.5 O MII para um problema elíptico de interface unidimensional geral

Nesta seção ainda consideraremos o seguinte problema unidimensional como modelo

$$(\beta(x)u_x)_x - \sigma(x)u = f(x) + \nu \delta(x - \alpha), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (2.37)$$

com condições de fronteira especificadas por $u(x)$ em $x = 0$ e $x = 1$. O diferencial é que estaremos considerando o problema num contexto mais geral. Assim todos os coeficientes, $\beta(x)$, $\sigma(x)$ e $f(x)$, podem ter um salto finito em $x = \alpha$, e a solução também pode ter um salto $[u] = \omega$. Além disso, a condição de salto

para a primeira derivada será assumida como sendo $[\beta u_x] = \nu$. Os coeficientes da equação de diferenças em $x = x_j$ são as soluções do sistema linear que obteremos a seguir. Vale ressaltar que para pontos regulares, usaremos a aproximação clássica de segunda ordem por diferenças finitas.

Vamos determinar as equações de diferenças finitas pelo método dos coeficientes indeterminados. Para isso, considere as equações de diferenças aplicadas a equação (2.37) e aos pontos irregulares $x = x_j$ e $x = x_{j+1}$, respectivamente:

$$\gamma_{j,1}U_{j-1} + \gamma_{j,2}U_j + \gamma_{j,3}U_{j+1} - \sigma_j U_j = f_j + C_j, \quad (2.38)$$

$$\gamma_{j+1,1}U_j + \gamma_{j+1,2}U_{j+1} + \gamma_{j+1,3}U_{j+2} - \sigma_{j+1}U_{j+1} = f_{j+1} + C_{j+1}.$$

Considere as seguintes condições de salto:

$$\begin{aligned} u^+ &= u^- + \omega, \\ u_x^+ &= \frac{\beta^-}{\beta^+} u_x^- + \frac{\nu}{\beta^+}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Mas, vejamos, que agora é necessário impor uma condição de salto para u_{xx}^+ ; assim, temos:

$$[\beta_x u_x + \beta u_{xx} - \sigma u] = [f]$$

Portanto, a equação acima pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \beta_x^+ u_x^+ - \beta_x^- u_x^- + \beta^+ u_{xx}^+ - \beta^- u_{xx}^- - (\sigma^+ u^+ - \sigma^- u^-) &= [f] \Rightarrow \\ \beta^+ u_{xx}^+ &= \beta^- u_{xx}^- + \beta_x^- u_x^- - \beta_x^+ u_x^+ - (\sigma^- u^- - \sigma^+ u^+) + [f] \Rightarrow \\ u_{xx}^+ &= \frac{\beta^-}{\beta^+} u_{xx}^- + \frac{\beta_x^-}{\beta^+} u_x^- - \frac{\beta_x^+}{\beta^+} \left(\frac{\beta^-}{\beta^+} u_x^- + \frac{\nu}{\beta^+} \right) + \left(\frac{[\sigma] u^- + \omega \sigma^+}{\beta^+} \right) + \frac{[f]}{\beta^+}, \end{aligned}$$

uma vez que podemos escrever $\sigma^- u^- - \sigma^+ u^+ = -[\sigma] u^- - [u] \sigma^+$, que ao combinarmos com as equações em (2.39), temos o termo $[\sigma] u^- + \omega \sigma^+ = \sigma^+ u^+ - \sigma^- u^-$.

Finalmente temos que

$$u_{xx}^+ = \frac{\beta^-}{\beta^+} u_{xx}^- + \frac{\beta_x^-}{\beta^+} u_x^- - \frac{\beta_x^+ \beta^-}{(\beta^+)^2} u_x^- - \frac{\beta_x^+ \nu}{(\beta^+)^2} + \frac{[\sigma] u^-}{\beta^+} + \frac{\omega \sigma^+}{\beta^+} + \frac{[f]}{\beta^+}. \quad (2.40)$$

Nesse momento, dadas as condições de salto, nossa estratégia para determinar os coeficientes das equações de diferenças é minimizar a magnitude do erro de truncamento local

$$T_j = \gamma_{j,1}u(x_{j-1}) + \gamma_{j,2}u(x_j) + \gamma_{j,3}u(x_{j+1}) - \sigma(x_j)u(x_j) - f(x_j) - C_j.$$

Primeiramente, vamos expandir $u(x_{j-1})$, $u(x_j)$, $u(x_{j+1})$, $\sigma(x_j)$ e $f(x_j)$ na interface α de cada lado, e usar as relações de interface para expressar $u^\pm(\alpha)$, $u_x^\pm(\alpha)$, e $u_{xx}^\pm(\alpha)$ em termos das quantidades de um lado em particular. Depois repetiremos o processo feito na seção anterior para obtermos um sistema de equações para os coeficientes envolvidos na equação de diferenças. Os detalhes dessas manipulações algébricas serão discutidos a seguir.

Usando a expansão em série de Taylor para $u(x_{j+1})$ em α , como foi feito em (2.30), e usando as relações de salto (2.39) e (2.40) temos:

$$\begin{aligned} u(x_{j+1}) &= u^-(\alpha) + \omega + \frac{\beta^-}{\beta^+}(x_{j+1} - \alpha)u_x^-(\alpha) + (x_{j+1} - \alpha)\frac{\nu}{\beta^+} \\ &+ \frac{(x_{j+1} - \alpha)^2\beta^-u_{xx}^-(\alpha)}{2\beta^+} + \frac{(x_{j+1} - \alpha)^2}{2\beta^+} \left(\beta_x^- - \frac{\beta_x^+\beta^-}{\beta^+} \right) u_x^-(\alpha) \\ &- \frac{(x_{j+1} - \alpha)^2\beta_x^+\nu}{2(\beta^+)^2} + \frac{(x_{j+1} - \alpha)^2[\sigma]u^-(\alpha)}{2\beta^+} + \frac{(x_{j+1} - \alpha)^2\sigma^+\omega}{2\beta^+} \\ &+ \frac{(x_{j+1} - \alpha)^2[f]}{2\beta^+} + O(\Delta x^3) \end{aligned} \tag{2.41}$$

Para $u(x_{j-1})$ e $u(x_j)$, utilizamos a equação dada por (2.32), considerando as condições de salto do problema geral.

Além disso, note que, usando uma expansão em série de Taylor para $\sigma(x_j)u(x_j)$ e f_j em α , fornece:

$$\sigma(x_j)u(x_j) = \sigma(\alpha)u(\alpha) + O(\Delta x) \quad \text{e} \quad f_j = f(\alpha) + O(\Delta x).$$

Ou seja, substituindo (2.41) e (2.32), com condições de salto do problema geral e utilizando a expressão acima, na expressão do termo de erro, obtemos:

$$\begin{aligned}
 T_j &= \gamma_{j,1} \left\{ u^-(\alpha) + (x_{j-1} - \alpha)u_x^-(\alpha) + \frac{1}{2}(x_{j-1} - \alpha)^2 u_{xx}^-(\alpha) + O(\Delta x^3) \right\} \\
 &+ \gamma_{j,2} \left\{ u^-(\alpha) + (x_j - \alpha)u_x^-(\alpha) + \frac{1}{2}(x_j - \alpha)^2 u_{xx}^-(\alpha) + O(\Delta x^3) \right\} \\
 &+ \gamma_{j,3} \left\{ u^-(\alpha) + \omega + \frac{\beta^-}{\beta^+}(x_{j+1} - \alpha)u_x^-(\alpha) + (x_{j+1} - \alpha)\frac{\nu}{\beta^+} + \frac{(x_{j+1} - \alpha)^2 \beta^- u_{xx}^-}{2\beta^+} \right. \\
 &+ \frac{(x_{j+1} - \alpha)^2}{2\beta^+} \left(\beta_x^- - \frac{\beta_x^+ \beta^-}{\beta^+} \right) u_x^-(\alpha) - \frac{(x_{j+1} - \alpha)^2 \beta_x^+ \nu}{2(\beta^+)^2} - \frac{(x_{j+1} - \alpha)^2 [\sigma]}{2\beta^+} u^-(\alpha) \\
 &\left. + \frac{(x_{j+1} - \alpha)^2 \sigma^+ \omega}{2\beta^+} + \frac{(x_{j+1} - \alpha)^2 [f]}{2\beta^+} + O(\Delta x^3) \right\} - \sigma(\alpha)u(\alpha) - f(\alpha) - O(\Delta x) - C_j \\
 &+ O(\max_{1 \leq l \leq 3} |\gamma_{j,l}| \Delta x^3).
 \end{aligned}$$

Agrupando os termos em relação a $u^-(\alpha)$, $u_x^-(\alpha)$ e $u_{xx}^-(\alpha)$ obtemos que:

$$\begin{aligned}
 T_j &= \left\{ (\gamma_{j,1} + \gamma_{j,2} + \left(1 + \frac{(x_{j+1} - \alpha)^2}{2\beta^+} [\sigma] \right) \gamma_{j,3}) \right\} u^-(\alpha) \\
 &+ \left\{ (x_{j-1} - \alpha)\gamma_{j,1} + (x_j - \alpha)\gamma_{j,2} + \left\{ \frac{\beta^-}{\beta^+}(x_{j+1} - \alpha) + \left(\frac{\beta_x^-}{\beta^+} - \frac{\beta^- \beta_x^+}{(\beta^+)^2} \right) \frac{(x_{j+1} - \alpha)^2}{2} \right\} \gamma_{j,3} \right\} u_x^-(\alpha) \\
 &+ \left\{ \frac{(x_{j-1} - \alpha)^2}{2} \gamma_{j,1} + \frac{(x_j - \alpha)^2}{2} \gamma_{j,2} + \frac{(x_{j+1} - \alpha)^2 \beta^-}{2\beta^+} \gamma_{j,3} \right\} u_{xx}^-(\alpha) + \sigma(\alpha)u(\alpha) - f(\alpha) - O(\Delta x) \\
 &- C_j + \gamma_{j,3} \left\{ \omega + (x_{j+1} - \alpha)\frac{\nu}{\beta^+} - \frac{(x_{j+1} - \alpha)^2}{2} \left(\frac{\beta^+ \nu}{(\beta^+)^2} - \sigma^+ \frac{\omega}{\beta^+} - \frac{[f]}{\beta^+} \right) \right\} + O(\max_{1 \leq l \leq 3} |\gamma_{j,l}| \Delta x^3).
 \end{aligned}$$

A fim de minimizar a magnitude de T_j , vamos usar a equação diferencial (2.37) em α do lado“-”. Desse modo queremos que os coeficientes que acompanham os termos $u^-(\alpha)$, $u_x^-(\alpha)$ e $u_{xx}^-(\alpha)$ em T_j , sejam exatamente iguais aos coeficientes que acompanham esses mesmos termos na expressão:

$$\beta^- u_{xx}^-(\alpha) + \beta_x^- u_x^-(\alpha).$$

Portanto, obtemos o seguinte sistema de equações para os coeficientes $\{\gamma_{j,k}\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{j,1} + \gamma_{j,2} + \left(1 + \frac{(x_{j+1} - \alpha)^2}{2\beta^+}[\sigma]\right) \gamma_{j,3} = 0, \\ (x_{j-1} - \alpha)\gamma_{j,1} + (x_j - \alpha)\gamma_{j,2} \\ + \left\{ \frac{\beta^-}{\beta^+}(x_{j-1} - \alpha) + \left(\frac{\beta_x^-}{\beta^+} - \frac{\beta^- \beta_x^+}{(\beta^+)^2}\right) \frac{(x_{j+1} - \alpha)^2}{2} \right\} \gamma_{j,3} = \beta_x^-, \\ \frac{(x_{j-1} - \alpha)^2}{2} \gamma_{j,1} + \frac{(x_j - \alpha)^2}{2} \gamma_{j,2} + \frac{(x_{j+1} - \alpha)^2 \beta^-}{2\beta^+} \gamma_{j,3} = \beta^-. \end{array} \right. \quad (2.42)$$

Ainda afim de minimizar o erro de truncamento T_j , temos que:

$$-C_j + \gamma_{j,3} \left\{ \omega + (x_{j+1} - \alpha) \frac{\nu}{\beta^+} - \frac{(x_{j+1} - \alpha)^2}{2} \left(\frac{\beta^+ \nu}{(\beta^+)^2} - \sigma^+ \frac{\omega}{\beta^+} - \frac{[f]}{\beta^+} \right) \right\} = 0.$$

E assim como os $\{\gamma_{j,k}\}$'s foram calculados, podemos determinar o termo de correção em $x = x_j$ como

$$C_j = \gamma_{j,3} \left\{ \omega + (x_{j+1} - \alpha) \frac{\nu}{\beta^+} - \frac{(x_{j+1} - \alpha)^2}{2} \left(\frac{\beta^+ \nu}{(\beta^+)^2} - \sigma^+ \frac{\omega}{\beta^+} - \frac{[f]}{\beta^+} \right) \right\}. \quad (2.43)$$

Procedendo os cálculos de modo análogo ao que fizemos para $x = x_j$, obtemos o seguinte sistema linear para os coeficientes das equações de diferenças finitas em $x = x_{j+1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{(x_j - \alpha)^2}{2\beta^-}[\sigma]\right) \gamma_{j+1,1} + \gamma_{j+1,2} + \gamma_{j+1,3} = 0 \\ \left\{ \frac{\beta^+}{\beta^-}(x_j - \alpha) + \left(\frac{\beta_x^+}{\beta^-} - \frac{\beta^+ \beta_x^-}{(\beta^-)^2}\right) \frac{(x_j - \alpha)^2}{2} \right\} \gamma_{j+1,1} \\ + (x_{j+1} - \alpha)\gamma_{j+1,2} + (x_{j+2} - \alpha)\gamma_{j+1,3} = \beta_x^+ \\ \frac{(x_j - \alpha)^2 \beta^+}{2 \beta^-} \gamma_{j+1,1} + \frac{(x_{j+1} - \alpha)^2}{2} \gamma_{j+1,2} + \frac{(x_{j+2} - \alpha)^2}{2} \gamma_{j+1,3} = \beta^+ \end{array} \right. \quad (2.44)$$

e o termo de correção C_{j+1} é

$$C_{j+1} = \gamma_{j+1,1} \left\{ -\omega - (x_j - \alpha) \frac{\nu}{\beta^-} - \frac{(x_j - \alpha)^2}{2} \left(-\frac{\beta_x^- \nu}{(\beta^-)^2} + \sigma^- \frac{\omega}{\beta^-} + \frac{[f]}{\beta^-} \right) \right\} \quad (2.45)$$

Note que o sistema de equações para as equações de diferenças e os termos de correção são os mesmos em x_j e x_{j+1} se trocarmos os símbolos “+” e “-”.

Portanto, para solução de um problema geral como em (2.37), o MII utiliza as equações (2.38) com os coeficientes calculados pelos sistemas (2.42) e

(2.44), no **passo 3** do algoritmo descrito na seção (2.4.2). Os demais passos são construídos de forma análoga ao problema simplificado.

Métodos clássicos: construção por interpolação

Quando estudamos métodos numéricos para resolver EDPs, deparamos com algumas dificuldades quando, o domínio onde estão definidas as condições de contorno do nosso problema, é uma região que não coincide com a malha computacional. No método de diferenças finitas, em particular, quando estamos trabalhando com malhas cartesianas num plano bidimensional, por exemplo, qualquer domínio que não seja retangular nos trará dificuldades para resolução do problema.

Para um problema unidimensional, um domínio irregular pode ser entendido como um ponto x_Γ , que não coincide com nenhum ponto da malha, conforme descrito na figura (3.1).

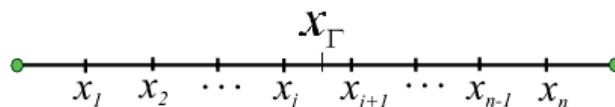


Figura 3.1: Exemplo de uma malha cartesiana unidimensional com um ponto irregular x_Γ .

Os métodos que aqui chamaremos de clássicos, são métodos que utilizam uma interpolação numérica para construir as equações de diferenças nos pontos irregulares, de modo que seja possível incorporar o contorno irregular ao método, obtendo assim uma solução numérica mais acurada para o problema.

3.1 Método clássico usando interpolações (MC)

A primeira formulação que estudaremos, é baseada no trabalho de Jo-maa & Macaskill em [12]. A seguir descreveremos essa formulação conside-

rando os estudos de Jomaa & Macaskill em [12].

Para isso, considere a equação de Poisson unidimensional

$$u_{xx} = f(x), \quad x \in [a, b], \quad (3.1)$$

e condições de contorno do tipo Dirichlet. Uma malha unidimensional uniforme é tomada sobre $[a, b]$. São assumidas condições de fronteira de Dirichlet dadas em dois pontos da fronteira x_{Γ_1} e x_{Γ_2} que em geral não são pontos da malha. Fora do interior do intervalo $[x_{\Gamma_1}, x_{\Gamma_2}]$ vamos assumir que $u = 0$, de modo que em geral exista uma descontinuidade em cada x_{Γ_1} e x_{Γ_2} . Assim, condições de contorno homogêneas reduzirão para um salto na borda. Então rotulamos os pontos entre os saltos, para que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_j < x_{\Gamma_1} < x_{j+1} < \dots < x_l < x_{\Gamma_2} < x_{l+1} < \dots < x_{N-2} < x_{N-1} < b = x_N$, com $x_{\Gamma_1} - x_j = \lambda_1 \Delta x$ e $x_{l+1} - x_{\Gamma_2} = \lambda_2 \Delta x$, onde λ_1 e λ_2 são constantes que colocam cada ponto x_{Γ_1} e x_{Γ_2} , nas suas devidas posições entre dois pontos quaisquer da malha. Por simplicidade de notação, a partir desse momento faremos $x_{\Gamma_1} = x_{\Gamma}$ e $\lambda_1 = \lambda$.

A discretização da equação (3.1) dá origem a uma matriz tridiagonal para a variável u no interior da malha de pontos; para a malha de pontos exteriores vamos definir $u = 0$. Em cada ponto do interior da malha $x = x_k$, $k = j + 2, j + 3, \dots, l - 2, l - 1$, a equação (3.1) é discretizada utilizando aproximação de diferenças finitas centradas:

$$\left[\left(\frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta x} \right) - \left(\frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta x} \right) \right] / h = f_i, \quad (3.2)$$

onde U_i é uma aproximação para $u(x_i)$ e $f_i = f(x_i)$.

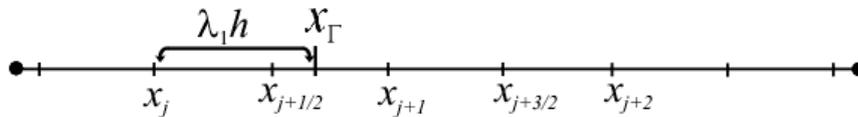


Figura 3.2: Figura ilustrando a localização da interface x_{Γ} .

Para completar a formulação exigimos, a discretização da equação (3.1) em $x = x_{j+1}$ e $x = x_l$, onde a aproximação para a segunda derivada deve ser modificada para incorporar a condição de contorno dada em x_{Γ} . Considere por outro lado, $x = x_{j+1}$ (no lado direito o tratamento é análogo). Podemos usar ou o tratamento linear ou o tratamento quadrático para aproximar u_x em $x = x_{j+\frac{1}{2}}$, pois, precisamos obter uma expressão interpolatória que contenha informações dos pontos, x_{Γ} e x_{j+1} . Construímos um polinômio linear através

dos valores $u_{x_\Gamma} = u(x_\Gamma)$ e $u_{j+1} = u(x_{j+1})$ e avaliamos a inclinação correspondente em $x = x_{j+\frac{1}{2}}$. Dessa forma vamos obter a equação de diferenças de (3.1) em $x = x_{j+1}$, através de uma interpolação linear. Por exemplo, se a interpolação de Lagrange for aplicada temos que os coeficientes do interpolante serão:

$$L_\Gamma(x) = \frac{(x - x_{j+1})}{x_\Gamma - x_{j+1}} \quad e \quad L_{j+1}(x) = \frac{(x - x_\Gamma)}{x_{j+1} - x_\Gamma}$$

Note que

$$L_\Gamma(x_j) = \frac{(x_j - x_{j+1})}{(x_\Gamma - x_{j+1})} = \frac{1}{1 - \lambda}, \quad L_{j+1}(x_j) = \frac{(x_j - x_\Gamma)}{(x_{j+1} - x_\Gamma)} = \frac{\lambda}{1 - \lambda},$$

$$L_\Gamma(x_{j+1}) = \frac{(x_{j+1} - x_{j+1})}{(x_\Gamma - x_{j+1})} = 0 \quad e \quad L_{j+1}(x_{j+1}) = \frac{(x_{j+1} - x_\Gamma)}{(x_{j+1} - x_\Gamma)} = 1.$$

Pela construção do polinômio interpolador de Lagrange de primeira ordem, temos que:

$$U(x_{j+1}) = L_\Gamma(x_{j+1})U(x_\Gamma) + L_{j+1}(x_{j+1})U(x_{j+1}),$$

e

$$U(x_j) = L_\Gamma(x_j)U(x_\Gamma) + L_{j+1}(x_j)U(x_{j+1}).$$

Substituindo os valores dos L 's, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{U_{j+1} - U_j}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} [L_\Gamma(x_{j+1})U_\Gamma + L_{j+1}(x_{j+1})U_{j+1} - (L_\Gamma(x_j)U_\Gamma \\ &+ L_{j+1}(x_j)U_{j+1})] = \frac{1}{\Delta x} \left[0 \cdot U_\Gamma + 1 \cdot U_{j+1} + \frac{\lambda}{1 - \lambda} U_\Gamma - \frac{1}{1 - \lambda} U_{j+1} \right] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{U_{j+1} - U_j}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{U_{j+1} - U_\Gamma}{1 - \lambda} \right],$$

onde $U_{j+1} = U(x_{j+1})$, $U_j = U(x_j)$ e $U_\Gamma = U(x_\Gamma)$.

Portanto para $i = j + 1$ em (4.2), obtemos a seguinte equação de diferenças

$$\frac{1}{\Delta^2} \left[U_{j+2} + \frac{\lambda - 2}{1 - \lambda} U_{j+1} + \frac{1}{(1 - \lambda)} U_\Gamma \right] = f_{j+1}, \quad (3.3)$$

onde $f_{j+1} = f(x_{j+1})$.

Alternativamente podemos montar um polinômio quadrático para fazer a interpolação nesses pontos irregulares, usando os valores u_Γ , u_{j+1} e u_{j+2} para

estimar u_x em $x = x_{j+\frac{1}{2}}$. Agora aplicando a interpolação de Lagrange temos:

$$L_{\Gamma}(x_j) = \frac{(x_j - x_{j+1})(x_j - x_{j+2})}{(x_{\Gamma} - x_{j+1})(x_{\Gamma} - x_{j+2})} = \frac{2\Delta x^2}{(1 - \lambda)(2 - \lambda)\Delta x^2} = \frac{2}{(1 - \lambda)(2 - \lambda)},$$

$$L_{j+1}(x_j) = \frac{(x_j - x_{\Gamma})(x_j - x_{j+2})}{(x_{j+1} - x_{\Gamma})(x_{j+1} - x_{j+2})} = \frac{(-\lambda\Delta x)(-2\Delta x)}{-(1 - \lambda)\Delta x^2} = \frac{-2\lambda}{(1 - \lambda)},$$

$$L_{j+2}(x_j) = \frac{(x_j - x_{\Gamma})(x_j - x_{j+1})}{(x_{j+2} - x_{\Gamma})(x_{j+2} - x_{j+1})} = \frac{(-\lambda\Delta x)(-\Delta x)}{(2 - \lambda)\Delta x^2} = \frac{\lambda}{(2 - \lambda)},$$

$$L_{\Gamma}(x_{j+1}) = \frac{(x_{j+1} - x_{j+1})(x_{j+1} - x_{j+2})}{(x_{\Gamma} - x_{j+1})(x_{\Gamma} - x_{j+2})} = 0,$$

$$L_{j+1}(x_{j+1}) = \frac{(x_{j+1} - x_{\Gamma})(x_{j+1} - x_{j+2})}{(x_{j+1} - x_{\Gamma})(x_{j+1} - x_{j+2})} = \frac{(1 - \lambda)(-\Delta x)\Delta x}{-(1 - \lambda)\Delta x^2} = \frac{1 - \lambda}{(1 - \lambda)} = 1,$$

$$L_{j+2}(x_{j+1}) = \frac{(x_{j+1} - x_{\Gamma})(x_{j+1} - x_{j+1})}{(x_{j+2} - x_{\Gamma})(x_{j+2} - x_{j+1})} = 0.$$

Novamente, pela construção do polinômio interpolador de Lagrange, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{U_{j+1} - U_j}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} [L_{\Gamma}(x_{j+1})U_{\Gamma} + L_{j+1}(x_{j+1})U_{j+1} + L_{j+2}(x_{j+1})U_{j+2} - \\ &(L_{\Gamma}(x_j)U_{\Gamma} + L_{j+1}(x_j)U_{j+1} + L_{j+2}(x_j)U_{j+2})] = \frac{1}{\Delta x} \left[0 \cdot U_{\Gamma} + 1 \cdot U_{j+1} + 0 \cdot U_{j+2} \right. \\ &\left. - \left(\frac{2}{(1 - \lambda)(2 - \lambda)} U_{\Gamma} + \frac{-2\lambda}{1 - \lambda} U_{j+1} + \frac{\lambda}{(2 - \lambda)} U_{j+2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Logo temos que

$$\frac{U_{j+1} - U_j}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \left[-\frac{2}{(1 - \lambda)(2 - \lambda)} U_{\Gamma} + \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} U_{j+1} - \frac{\lambda}{2 - \lambda} U_{j+2} \right].$$

Portanto para o uso de um polinômio quadrático, a equação (4.2) em $k = j + 1$ torná-se:

$$\frac{1}{\Delta x^2} \left[\frac{2}{2 - \lambda} U_{j+2} + \frac{-2}{1 - \lambda} U_{j+1} + \frac{2}{(1 - \lambda)(2 - \lambda)} U_{\Gamma} \right] = f_{j+1}. \quad (3.4)$$

Podemos verificar que a modificação feita nas equações de diferenças utiliza-se da interpolação dos pontos próximos do ponto irregular. A ideia de modificação das equações de diferenças é a mesma que no MII mas com o diferencial que no MII utiliza-se de condições de salto na interface e as equações de dife-

renças resultantes são baseadas em uma minimização do termo de erro.

3.1.1 O algoritmo do MC

O algoritmo do MC, envolve em grande parte os mesmos procedimentos descritos para o MII. O **passo 1** é exatamente igual ao algoritmo do MII. No **passo 2** há um diferencial, pois, a equação analisada é mais simples, e assim na equação (2.24), temos que $\beta_{i-\frac{1}{2}} = \beta(x_{i-\frac{1}{2}}) = 1$, $\beta_{i+\frac{1}{2}} = \beta(x_{i+\frac{1}{2}}) = 1$ e $\sigma_i = \sigma(x_i) = 0$ e assim, as equações de diferenças para os pontos regulares no MC, são dadas por:

$$\frac{1}{\Delta x^2}((U_{i+1} - U_i) - (U_i - U_{i-1})) = f_i,$$

onde $f_i = f(x_j)$. O **passo 3** é descrito a seguir:

Passo 3: Determinar os coeficientes indeterminados da equação:

$$\gamma_{j+1,1}U_j + \gamma_{j+1,2}U_{j+1} + \gamma_{j+1,3}U_{j+2} = f_{j+1} + C_{j+1}. \quad (3.5)$$

Notemos que C_{j+1} é o termo de correção envolvido nos cálculos para x_{j+1} . Esse termo de correção aparece nos pontos irregulares, pois, em tais pontos precisamos incorporar a informação da forma $u(\alpha)$ que é a condição de contorno, mas essa informação não faz parte do esquema de diferenças finitas que aproxima a derivada. Desse modo, esse termo aparece como um valor extra na equação de diferenças, o qual pode ser entendido como um termo de correção.

Conforme podemos ver na equação (3.3) os coeficientes da equação de diferenças finitas em x_{j+1} tem a seguinte forma:

$$\gamma_{j+1,1} = 0, \quad \gamma_{j+1,2} = \frac{\lambda - 2}{(1 - \lambda)\Delta x^2}, \quad \gamma_{j+1,3} = \frac{1}{\Delta x^2}, \quad (3.6)$$

e o termo de correção é

$$C_{j+1} = -\frac{1}{(1 - \lambda)\Delta x^2}U_\Gamma. \quad (3.7)$$

Para o outro lado, ou seja, para $k = l - 1$ a ideia do algoritmo é análoga. Caso queiramos aplicar uma interpolação quadrática usamos a equação (3.4), para obter os coeficientes da equação de diferenças finitas em x_{j+1} .

Passo 4: Usando os coeficientes do **passo 3** e combinando o **passo 2**, obtemos uma aproximação da solução de $u(x)$ em todo ponto da malha.

3.2 Um método do tipo fronteiras imersas modificado (MFIM)

Agora vamos introduzir um método de fronteiras adaptado para diferenças finitas. Codina & Baiges em [19] apresentaram uma ideia na qual

decompõe-se os espaços de elementos finitos para aproximação do campo de velocidades em uma soma direta de dois espaços: um de funções que são diferentes de zero somente no interior do domínio de interesse, e um de funções que são diferentes de zero somente nos nós exteriores a esse domínio. Os graus de liberdade localizados na parte externa ao domínio são utilizados como auxiliares para imposição da condição de contorno sobre a fronteira imersa, utilizando uma estratégia de imposição aproximada através do método de mínimos quadrados.

A ideia agora é adaptar esse método para diferenças finitas e usá-lo para imposição aproximada de contornos em EDPs, construindo um método que possa ser simples, preciso e eficiente.

Considere Γ como sendo o nível zero de uma função implícita ϕ , definida no domínio Ω , o qual divide este domínio em uma parte interna Ω_1 , onde $\phi > 0$, e uma parte externa Ω_2 , onde $\phi < 0$. Será considerado inicialmente o seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= f(x) \text{ em } \Omega_1, \\ u &= u_\Gamma \text{ em } \Gamma, \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde u_Γ é a solução exata no contorno e $f(x)$ é uma função contínua. Para aproximar o valor de u no contorno Γ , podemos definir um funcional dado por

$$F(u) = \|u - u_\Gamma\|_2^2 = (u - u_\Gamma)^2, \tag{3.9}$$

onde $\|\cdot\|_2$. Esse funcional será utilizado no contexto de mínimos quadrados para fazer com que a distância entre a solução aproximada U e a solução exata u_Γ seja mínima. Como não há graus de liberdade de u no contorno Γ , pode-se utilizar uma interpolação envolvendo os graus de liberdade nos pontos internos.

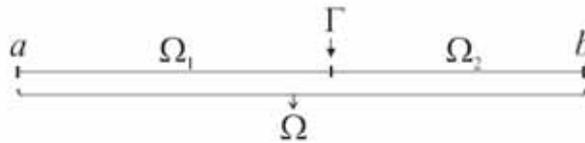


Figura 3.3: Domínio $\Omega = [a, b]$, subdomínios Ω_1 e Ω_2 , e a interface Γ .

Como exemplo, consideramos um elemento do domínio, que é interceptado pelo contorno, como na figura (3.3). Sejam x_j e x_{j+1} pontos irregulares, nos quais os valores da velocidade e da função implícita ϕ são conhecidos, e x_Γ é o ponto onde Γ intercepta o domínio, ou seja, onde $\phi = 0$. Considere o segmento entre os pontos x_j e x_{j+1} , aqui denotado por $[j, j+1]$, onde x_j é um ponto interno

($\phi_j > 0$) e x_{j+1} é um ponto externo ($\phi_{j+1} < 0$). Dados os valores da solução e da função implícita nos pontos x_j e x_{j+1} , podemos definir uma interpolação linear da seguinte forma:

$$\frac{u(x) - U_j}{\phi(x) - \phi_j} = \frac{U_{j+1} - U_j}{\phi_{j+1} - \phi_j}. \quad (3.10)$$

Como estamos considerando x como um ponto da fronteira Γ , temos que $\phi(x) = 0$. Logo, após algumas manipulações algébricas, simplificamos (3.10) como:

$$u(x) = \frac{U_{j+1}\phi_j - U_j\phi_{j+1}}{\phi_j - \phi_{j+1}}, \quad (3.11)$$

em que U_j e U_{j+1} são os valores da função u nos pontos x_j e x_{j+1} , respectivamente, ϕ_j e ϕ_{j+1} são os valores da função implícita ϕ nos pontos x_j e x_{j+1} , respectivamente. Desta forma, substituindo a expressão acima em (3.9) obtemos

$$F(u) = (u - u_\Gamma)^2 = \left(\frac{U_{j+1}\phi_j - U_j\phi_{j+1}}{\phi_j - \phi_{j+1}} - u_\Gamma \right)^2.$$

Note que para o valor U_j , há uma equação que vem da discretização do problema quando uma aproximação clássica de segunda ordem é aplicada a eq. (3.8). O objetivo então é encontrar uma equação adicional para U_{j+1} de forma a garantir que $F(u)$ seja mínimo, ou seja,

$$\frac{\partial F(u)}{\partial U_{j+1}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F(u)}{\partial U_{j+1}} = 2 \left(\frac{U_{j+1}\phi_j - U_j\phi_{j+1}}{\phi_j - \phi_{j+1}} - u_\Gamma \right) \left(\frac{\phi_j}{\phi_j - \phi_{j+1}} \right) = 0. \quad (3.12)$$

Finalmente obtemos a seguinte relação:

$$\frac{U_{j+1}\phi_j}{\phi_j - \phi_{j+1}} - \frac{U_j\phi_{j+1}}{\phi_j - \phi_{j+1}} - u_\Gamma = 0 \Rightarrow U_{j+1} = \left(\frac{U_j\phi_{j+1}}{\phi_j - \phi_{j+1}} + u_\Gamma \right) \left(\frac{\phi_j - \phi_{j+1}}{\phi_j} \right) \quad (3.13)$$

3.2.1 O algoritmo do MFIM

Para esse método, temos novamente, uma equação diferencial linear do tipo (3.8). Assim o **passo 1** e o **passo 2** são os mesmos que para o algoritmo do MC. O **passo 3**, é semelhante ao **passo 3** do MC, o qual descrevemos abaixo:

Passo 3: Determinar os coeficientes indeterminados da equação:

$$\gamma_{j,1}U_{j-1} + \gamma_{j,2}U_j + \gamma_{j,3}U_{j+1} = f_j + C_j. \quad (3.14)$$

Notemos que C_j é o termo de correção envolvido nos cálculos para x_j .

Esse termo de correção aparece nos pontos irregulares, pois, em tais pontos precisamos incorporar a informação da forma u_Γ que é a condição de contorno, mas essa informação não faz parte do esquema de diferenças finitas que aproxima a derivada. Desse modo, esse termo aparece como um valor

extra na equação de diferenças, o qual pode ser entendido como um termo de correção.

Agora usando a expressão encontrada para U_{j+1} , substituímos o termo U_{j+1} que aparece na j -ésima equação de diferenças. Como U_{j+1} já foi aproximado em função de U_j , podemos juntar esses termos e obtermos os coeficientes da equação de diferenças:

$$\gamma_{j,1} = \frac{1}{\Delta x^2}, \quad \gamma_{j,2} = \frac{\phi_j}{\phi_j \Delta x^2} - \frac{2}{\Delta x^2}, \quad \gamma_{j,3} = 0, \quad (3.15)$$

e o termo de correção é

$$C_j = -\frac{\phi_j - \phi_{j+1}}{\phi_j \Delta x^2} u_\Gamma. \quad (3.16)$$

Passo 4: Usando as equações do **passo 3** e combinando com as equações do **passo 2**, obtemos um sistema pentadiagonal, o qual resolvemos para obter uma aproximação da solução de $u(x)$ em todo ponto da malha.

3.3 Equivalência entre o MCL e o MFIM

Agora que estamos de posse dos esquemas de diferenças finitas para o MCL e para o MFIM vamos mostrar que esses métodos são equivalentes. Sabemos que para todo ponto regular do domínio, tanto o MCL quanto o MFIM, utiliza o esquema padrão de diferenças finitas. Ambos os esquemas, sofrem uma modificação apenas na equação de diferenças correspondente ao ponto irregular x_j . Desse modo, para mostrar a equivalência entre os métodos, basta mostra que a j -ésima equação de diferenças em cada método são iguais.

A j -ésima equação de diferenças do MCL é

$$U_{j-1} + \left(\frac{\lambda - 2}{1 - \lambda} \right) U_j = \Delta x^2 f_j - u_\Gamma \left(\frac{1}{1 - \lambda} \right).$$

Onde u_Γ é o valor de u na interface. Assim, multiplicando a equação por $1 - \lambda$, temos

$$(1 - \lambda)U_{j-1} + (\lambda - 2)U_j = (1 - \lambda)\Delta x^2 f_j - u_\Gamma.$$

Mas como, $\lambda = \frac{x_{j+1} - x_\Gamma}{\Delta x}$ e $h = x_{j+1} - x_j$, substituindo estes valores na equação anterior, e após algumas manipulações algébricas, encontramos

$$(x_\Gamma - x_j)U_{j-1} + (x_j - x_\Gamma - \Delta x)U_j = (x_\Gamma - x_j)\Delta x^2 f_j - u_\Gamma \Delta x. \quad (3.17)$$

Nesse momento, consideremos a j -ésima equação de diferenças para o

MFIM, isto é,

$$U_{j-1} + \left(\frac{\phi_{j+1}}{\phi_j} - 2 \right) U_j = \Delta x^2 f_j - u_\Gamma \left(\frac{\phi_j - \phi_{j+1}}{\phi_j} \right).$$

Multiplicando a equação por ϕ_j , e utilizando $\phi_j = x_\Gamma - x_j$ e $\phi_{j+1} = x_\Gamma - x_{j+1}$, obtemos a equação (3.17). Portanto concluímos que o MCL e o MFIM são equivalentes.

Resultados numéricos: problemas elípticos unidimensionais

Neste capítulo apresentaremos os resultados numéricos dos métodos investigados nos capítulos anteriores. Utilizaremos as seguintes notações:

- MII: Método das interfaces imersas discutido no capítulo 2.
- MCL: Método clássico com interpolação linear discutido no capítulo 3.
- MCQ: Método clássico com interpolação quadrática analisado no capítulo 3.
- MC: Método clássico.

O que aqui estamos chamando de método clássico, nada mais é do que impor o valor de fronteira $u(x_\Gamma)$ no ponto x_j , proceder a discretização da equação como em um problema com valor de contorno coincidindo com a malha.

Em todos os exemplos numéricos, adotaremos o cálculo do erro como:

$$\|E_n\|_\infty = \|u_{\text{exato}} - u_{\text{numérico}}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i - U_i|,$$

ou

$$\|E_n\|_2 = \|u_{\text{exato}} - u_{\text{numérico}}\|_2 = \left(h \sum_{i=1}^n (u_i - U_i)^2 \right)^{1/2}.$$

4.1 Exemplos do MII para problemas de interfaces

Nesta seção faremos testes numéricos voltando a atenção exclusivamente ao MII, uma vez que o mesmo está muito além de apenas resolver problemas definidos em geometrias irregulares. Assim, faremos testes numéricos

envolvendo problemas de interfaces, mostrando dessa forma a eficiência e precisão do MII ao trabalhar com tais problemas.

Exemplo 1

Nesse primeiro teste, resolvemos o problema (2.1) usando $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = 2$, comparando com sua solução exata

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{6}x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ -\frac{1}{3}(1-x) & \text{se } \frac{2}{3} < x \leq 1, \end{cases} \quad (4.1)$$

e com o MFI de Peskin.

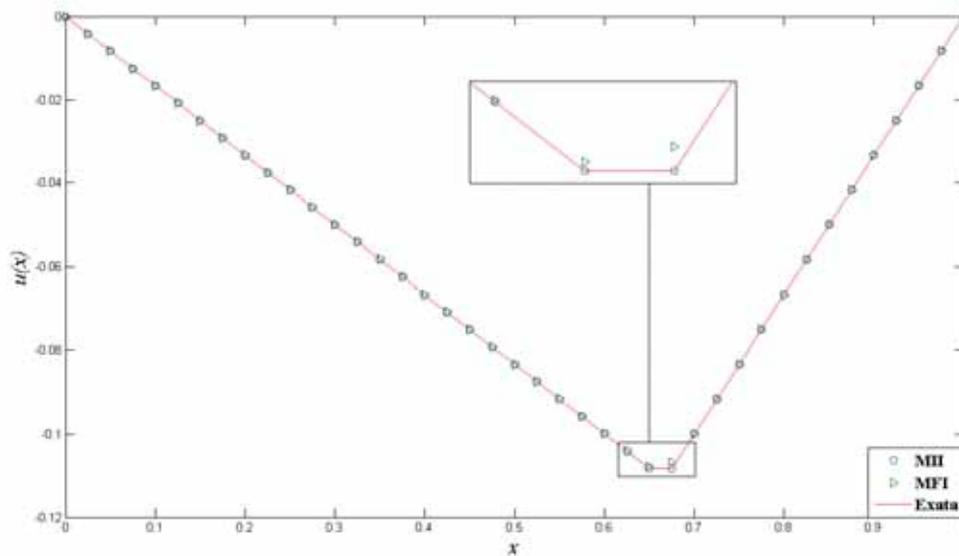


Figura 4.1: Comparação entre as solução numéricas obtida pelo MII e pelo MFI, e a solução exata (4.1) para o problema (2.1) com $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = 2$ e 40 pontos na malha.

De acordo com a figura 4.1, podemos observar que o MII aproxima muito bem a solução exata do problema (2.1), que é dada pela equação (4.1). Além disso, com a mesma quantidade de pontos o MFI apresenta resultados com precisão inferior ao MII, conforme podemos ver no zoom da figura 5.1, que mostra as soluções próximas a localização de α .

Exemplo 2

Consideremos $u_{xx} = 0$ em $[0, 1]$ com $u(0) = 0$ e $u(1) = 2$. A interface está localizada em $x = \frac{\pi}{5}$ com $[u] = 1$ e $[u_x] = 0$. Na figura 4.2 mostramos a solução calculada com 121 pontos na malha, comparada com a respectiva solução exata do problema, dada por

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{5}, \\ x + 1 & \text{se } \frac{\pi}{5} < x \leq 1. \end{cases} \quad (4.2)$$

Novamente, podemos observar na figura (4.2) que os resultados obtidos

pelo MII estão em concordância com a solução analítica.

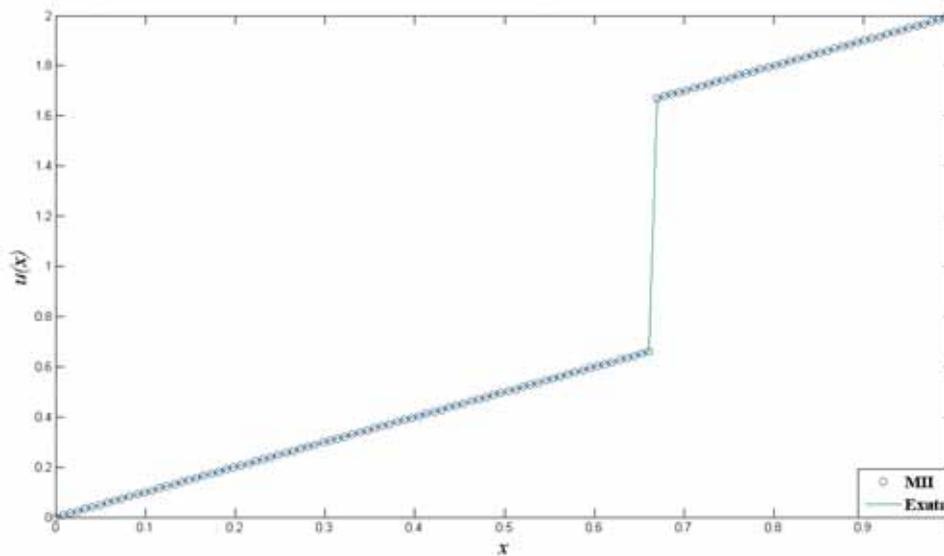


Figura 4.2: Comparação entre a solução numérica obtida pelo MII e a solução exata do exemplo 2 com $\alpha = \frac{\pi}{5}$, $[u] = 1$, $[u_x] = 0$, em uma malha com 121 pontos.

Exemplo 3

Consideremos novamente a equação de Laplace unidimensional $u_{xx} = 0$ com domínio no intervalo $[0, 1]$ e condições de contorno dadas por $u(0) = 0$ e $u(1) = \frac{3}{2}$. Os saltos são dados por $[u] = 0$ e $[u_x] = 1$ e a interface está localizada no ponto $\alpha = \frac{1}{2}$. A solução exata desse problema é dada por

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2x - \frac{1}{2} & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases} \quad (4.3)$$

Na figura 4.3 podemos visualizar a comparação dos gráficos das soluções numéricas com a solução exata numa malha com 20 pontos. Observamos nessa figura que a solução numérica do MII aproxima bem a solução exata.

Exemplo 4

Consideremos o seguinte problema:

$$(\beta u_x)_x = 12x^2, \quad 0 < x < 1, \quad \beta = \begin{cases} \beta^+ & \text{se } x < \alpha, \\ \beta^- & \text{se } x > \alpha, \end{cases} \quad (4.4)$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = \frac{1}{\beta^+} + \left(\frac{1}{\beta^-} - \frac{1}{\beta^+} \right) \alpha^4.$$

Nesse problema, $f(x) = 12x^2$ é contínua e assim as condições de salto são

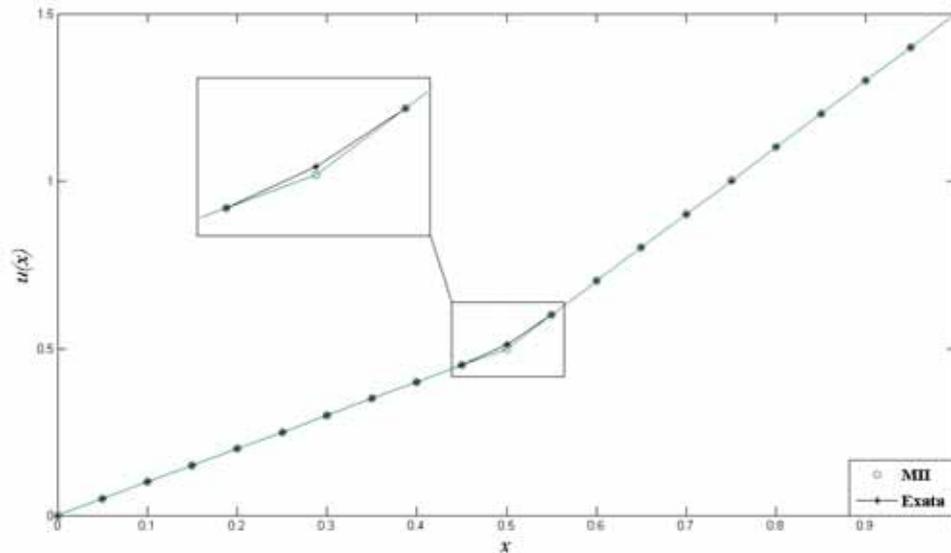


Figura 4.3: Comparação entre as soluções numéricas obtidas pelo MII e a solução exata do exemplo 3 com $\alpha = \frac{1}{2}$, $[u] = 0$, $[u_x] = 1$, em uma malha com 20 pontos.

Tabela 4.1: Resultados numéricos do problema (4.4) para malhas com 20, 40, 80, 160, 320 e 640 pontos.

N	$\ E_n\ _\infty$	O
20	4.3333×10^{-4}	-
40	1.0846×10^{-4}	1.9983
80	2.7124×10^{-5}	1.9995
160	6.7815×10^{-6}	1.9998
320	1.6954×10^{-6}	1.9999
640	4.2385×10^{-7}	2.0000

naturalmente $[u] = 0$ e $[\beta u_x] = 0$. A solução exata é

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{\beta^-} & \text{se } x < \alpha, \\ \frac{x^4}{\beta^+} + \left(\frac{1}{\beta^-} - \frac{1}{\beta^+} \right) \alpha^4 & \text{se } x > \alpha. \end{cases}$$

Neste exemplo, estamos assumindo que $\beta^+ = 1$ e $\beta^- = 2$ e $\alpha = \frac{1}{2}$.

Na figura 4.4 podemos visualizar uma comparação da solução numérica com a solução exata, onde novamente observamos a concordância entre elas. Na tabela (4.1) observamos os resultados numéricos para esse problema, e a comprovação numérica de uma convergência quadrática.

Exemplo 5

No último exemplo dessa seção, usamos o MII para resolver um problema

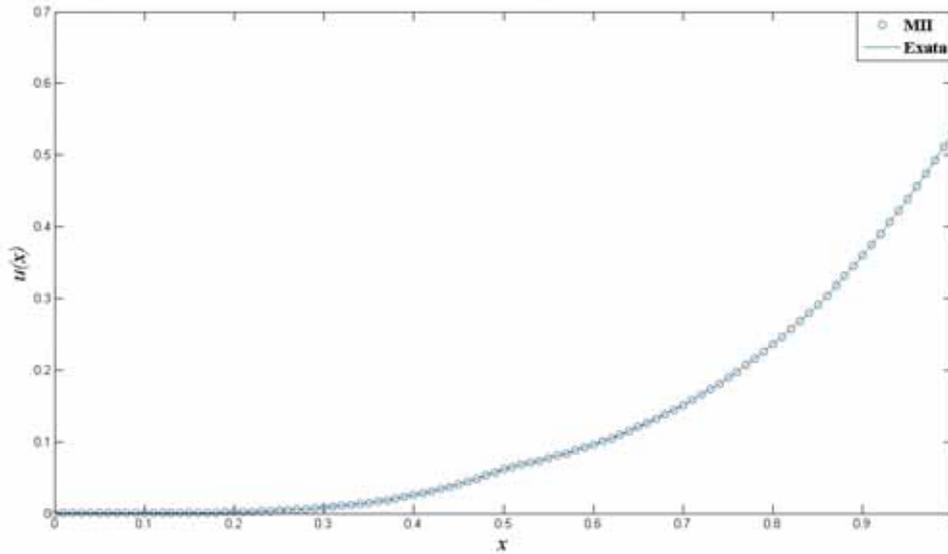


Figura 4.4: Gráfico do problema (4.4) resolvido em uma malha com 100 pontos, com $\beta^- = 1$, $\beta^+ = 2$ e $\alpha = \frac{1}{2}$.

elíptico geral da forma:

$$(\beta u_x)_x - \sigma u(x) = f(x) + \nu \delta(x - \alpha), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad (4.5)$$

e condições de contorno dadas em $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$. Nesse exemplo as funções terão todas uma descontinuidade em $\alpha = 1$. Assim temos $\beta(x)$ definida por:

$$\beta(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{se } x < 1, \\ x^2 & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

e $\sigma(x)$ é dada por:

$$\sigma(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{se } x < 1, \\ \sen(x) & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Finalmente temos $f(x)$ dada pela expressão:

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos(2x) - 4(1+x)\sen(2x) - \cos(x)\sen(2x) & \text{se } x < 1, \\ 1 - \sen(x)\log(x) & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Na figura 4.5 vemos a solução numérica do problema, calculada em uma malha com 141 pontos e com $\alpha = 1$, comparada com a solução exata, cuja expressão é dada por:

$$u(x) = \begin{cases} \sen(2x) & \text{se } x < 1, \\ \log(x) & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Podemos observar da figura 4.5 e da tabela 4.2, que mesmo para um pro-

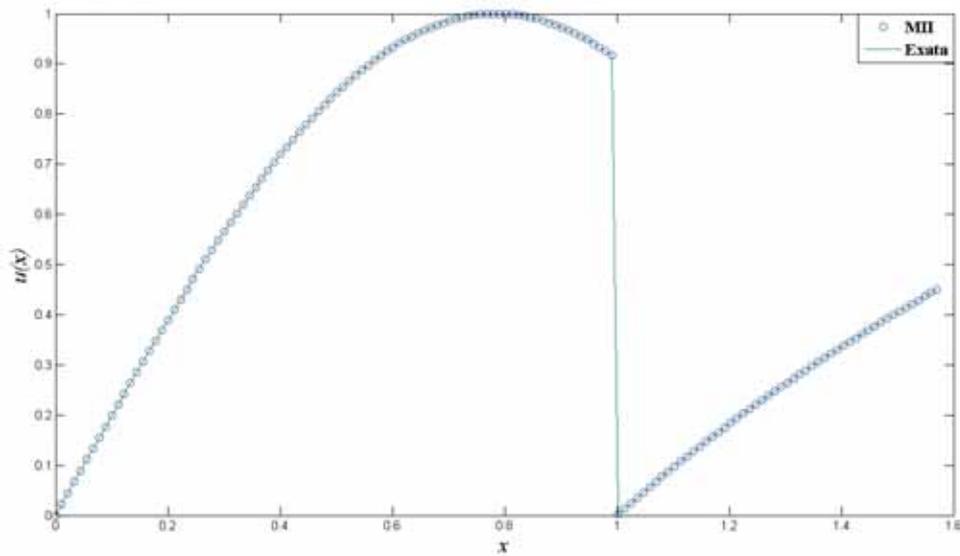


Figura 4.5: Gráfico do problema (4.5) resolvido em uma malha com 141 pontos e interface em $\alpha = 1$.

Tabela 4.2: Resultados numéricos do problema (4.5) para malhas com 20, 80, 320, 1280 e 5120 pontos.

N	$\ E_n\ _\infty$	O
20	5.0409×10^{-3}	-
80	4.7684×10^{-4}	1.70
320	1.8589×10^{-5}	2.34
1280	1.6616×10^{-6}	1.74
5120	3.1040×10^{-8}	2.87

blema com características mais gerais, o MII consegue produzir bons resultados numéricos, quando comparado com a solução exata. Também verificamos numericamente, nesse caso mais geral, que o MII apresenta aproximadamente ordem 2 de convergência.

4.2 Problemas elípticos em domínios irregulares: comparação entre os métodos

Nessa seção voltaremos nossa atenção em problemas que estejam definidos em domínios irregulares. Nesse estudo, implementamos os três métodos estudados para resolução de problemas em que a fronteira Γ não coincide com a malha computacional e cuja equação esteja definida em um intervalo $[a, b]$ qualquer. Para tanto, consideremos a equação de Poisson unidimensional:

$$u_{xx} = f(x), \quad \text{em } (a, x_\Gamma), \quad u(a) = u_0 \quad \text{e} \quad u(x_\Gamma) = u_\Gamma, \quad (4.6)$$

e um ponto x_Γ irregular, localizado entre os pontos x_j e x_{j+1} da malha cartesi-ana feita sobre $[a, b]$. Com o intuito de estudar problemas que estejam defini-dos em geometrias irregulares, fixaremos que $u = 0$ em todo ponto x_i da malha, tal que $x_i > x_\Gamma$. Então resolveremos o problema antes do ponto irregular x_Γ . Para isso, nos métodos numéricos estudados faremos nossas aproximações no ponto x_j , pois, $U_{j+1} = 0$. Como já provamos a equivalência numérica entre o MCL e o MMFI, vamos apresentar apenas os resultados obtidos pelo MCL.

Exemplo 1

Neste exemplo, comparamos os métodos estudados, para o seguinte pro-blema:

$$\begin{cases} u_{xx} = -\cos(x), & \text{em } \Omega = (0, 1) \\ u = 1 & \text{em } x = 0 \text{ e } u = 0 & \text{em } x = x_\Gamma = 1, \end{cases} \quad (4.7)$$

onde $\mathcal{B} = (0, 2)$ é o domínio que contém o domínio de definição da equação dada. A ideia desse exemplo, é mostrar que para problemas onde a fronteira coincide com um ponto da malha, os métodos têm todos ordem de conver-gência 2. Na tabela 4.3 mostramos os resultados numéricos das soluções numéricas, comparadas com a solução exata, dada por

$$u(x) = \cos(x) - \cos(1)x.$$

Tabela 4.3: Comparação dos erros na norma $\|E_n\|_\infty$ de cada método para o problema (4.7) em malhas com 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280 e 2560 pontos.

N	MC	O	MCL	O	MCQ	O	MII	O
20	8.957×10^{-5}	–						
40	2.238×10^{-5}	2.00						
80	5.606×10^{-6}	1.99						
160	1.401×10^{-6}	2.00						
320	3.504×10^{-7}	2.00						
640	8.760×10^{-8}	2.00						
1280	2.190×10^{-8}	2						
2560	5.475×10^{-9}	1.99						

Vemos claramente nesse exemplo, que os métodos têm todos ordem 2 de convergência, e assim podemos concluir que os métodos equivalem ao método padrão de segunda ordem de diferenças finitas, quando o ponto onde está definido o contorno, coincide com a malha computacional.

Exemplo 2 Neste exemplo, resolveremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_{xx} = -\cos(x), & \text{em } \Omega = (0, 1), \\ u = 1 & \text{em } x = 0 \text{ e } u = 0 & \text{em } x = x_\Gamma, \end{cases} \quad (4.8)$$

Note que esse problema é igual ao anterior, a diferença é que o domínio Ω

está embutido no domínio $\mathcal{B} = (0, \frac{\pi}{2})$, e assim o contorno não coincide com um ponto da malha. Na figura 4.6 apresentamos os gráficos das soluções fornecidas por cada um dos métodos estudados, além da solução exata. Na tabela 4.4, os erros dos métodos numéricos estudados comparados com a solução exata, dada por

$$u(x) = \cos(x) - \cos(1)x, \quad \text{em } \Omega = (0, 1).$$

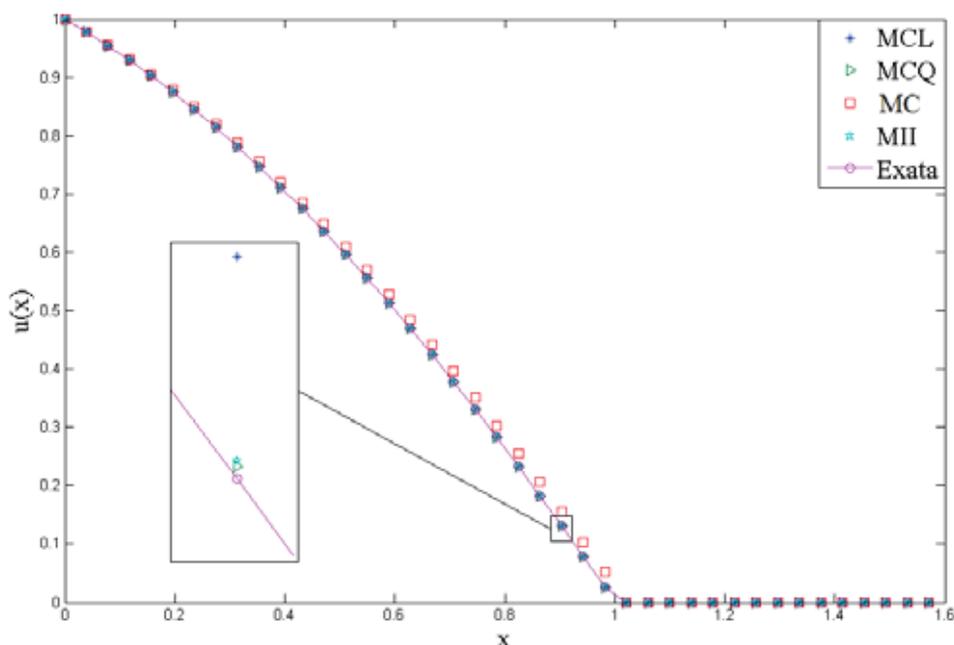


Figura 4.6: Soluções numéricas do problema (4.8) resolvidas em uma malha com 20 pontos e interface em $\Gamma = 1$.

Tabela 4.4: Comparação dos erros na norma $\|E_n\|_\infty$ de cada método para o problema (4.8) para malhas com 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280 e 2560 pontos.

N	MC	O	MCL	O	MCQ	O	MII	O
20	2.693×10^{-2}	—	3.245×10^{-4}	—	4.488×10^{-5}	—	5.667×10^{-5}	—
40	2.803×10^{-2}	-0.0582	1.024×10^{-4}	1.66	1.239×10^{-5}	1.85	1.371×10^{-5}	2.00
80	1.870×10^{-3}	3.9034	7.615×10^{-6}	3.75	3.395×10^{-6}	1.86	3.465×10^{-6}	2.04
160	1.890×10^{-3}	-0.0141	3.161×10^{-6}	1.26	8.505×10^{-7}	1.99	8.664×10^{-7}	1.99
320	1.900×10^{-3}	-0.0071	1.316×10^{-6}	1.26	2.134×10^{-7}	1.99	2.164×10^{-7}	2.00
640	1.900×10^{-3}	-0.0035	4.000×10^{-7}	1.71	5.3692×10^{-8}	1.99	5.399×10^{-8}	2.00
1280	2.145×10^{-4}	3.1512	4.509×10^{-8}	3.14	1.3484×10^{-8}	1.99	1.351×10^{-8}	2.00
2560	2.147×10^{-4}	-0.0008	1.924×10^{-8}	1.22	3.372×10^{-9}	1.99	3.378×10^{-9}	2

Através dos resultados numéricos apresentados na tabela 4.4 e na tabela 4.5, podemos notar que todos os métodos apresentam soluções numéricas consistentes com a solução exata. Além disso, notamos que os resultados da MC são muito inferiores, o que mostra que o uso de alguma estratégia para

Tabela 4.5: Comparação dos erros na norma $\|E_n\|_2$ de cada método para o problema (4.8) para malhas com 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280 e 2560 pontos.

N	MC	O	MCL	O	MCQ	O	MII	O
20	1.606×10^{-2}	–	2.202×10^{-4}	–	3.115×10^{-5}	–	4.152×10^{-5}	–
40	1.652×10^{-2}	-0.0413	6.794×10^{-5}	1.69	8.758×10^{-6}	1.83	9.945×10^{-6}	2.06
80	1.080×10^{-3}	3.9227	6.095×10^{-6}	3.47	2.455×10^{-6}	1.83	2.522×10^{-6}	1.97
160	1.090×10^{-3}	-0.0087	2.339×10^{-6}	1.38	6.154×10^{-7}	1.99	6.303×10^{-7}	2.00
320	1.100×10^{-3}	-0.0048	8.875×10^{-7}	1.39	1.546×10^{-7}	1.99	1.574×10^{-7}	2.00
640	1.100×10^{-3}	-0.0025	2.627×10^{-7}	1.75	3.896×10^{-8}	1.98	3.924×10^{-8}	2.00
1280	1.239×10^{-4}	3.1525	3.416×10^{-8}	2.94	9.798×10^{-9}	1.99	9.825×10^{-9}	1.99
2560	1.240×10^{-4}	-0.0005	1.310×10^{-8}	1.38	2.450×10^{-9}	1.99	2.456×10^{-9}	2.00

a imposição de contorno é necessária. O MCL apresenta uma oscilação na ordem de convergência, cuja média é 2. Já o MCQ e o MII, apresentam resultados numéricos consistentes e ordem de convergência aproximadamente 2. Nesse exemplo, em particular, os métodos de imposição apresentam resultados muito próximos.

Exemplo 3

Neste exemplo, comparamos os métodos estudados, para o seguinte problema de interface:

$$\begin{cases} u_{xx} = \cos(x) + 6x, & \text{em } \Omega = (0, \sqrt{2}), \\ u = -1 & \text{em } x = 0 \text{ e } u = -\cos(\sqrt{2}) + \sqrt{2}^3 & \text{em } x = x_\Gamma \end{cases} \quad (4.9)$$

embutido no domínio $\mathcal{B} = (0, 2)$, juntamente com sua solução exata, dada por:

$$u(x) = -\cos(x) + x^3 \text{ em } \Omega = (0, \sqrt{2}).$$

Neste exemplo, podemos notar na figura (4.7) que todos os métodos apresentam resultados consistentes com a solução exata. Contudo, de acordo com a tabela 4.6 e 4.7 o MII apresenta um erro menor que os demais, bem como ordem de convergência 2. O MCQ também apresenta uma ordem de convergência um pouco maior que 2 nas primeiras malhas, o que faz com que seu erro se aproxime do erro do MII e depois ambos seguem com erros próximos e ordem de convergência 2. Novamente, os resultados do MCL é inferior aos demais, com valores cuja média fica próxima de 2.

Exemplo 4

Neste exemplo, comparamos os métodos apresentados anteriormente, para o seguinte problema:

$$u_{xx} = e^x, \text{ em } \Omega = (0, \frac{\pi}{2}), \quad (4.10)$$

inserido em $\mathcal{B} = (0, 2)$ com $u(0) = 1$ e $u(x_\Gamma) = e^{\frac{\pi}{2}}$, juntamente com sua solução

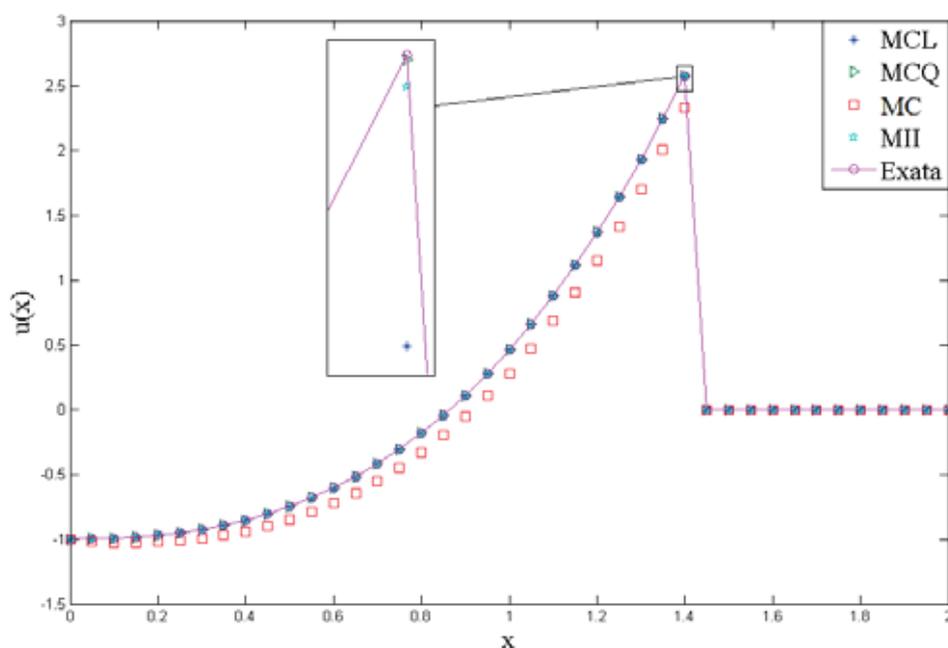


Figura 4.7: Comparação entre as soluções numéricas do MII, MCQ, MCL, EI e a solução exata do Exemplo 2, em uma malha com 20 pontos.

Tabela 4.6: Comparação dos resultados numéricos na norma $\|E_n\|_\infty$ de cada método para o problema (4.9) para malhas com 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280 e 2560 pontos.

N	MC	O	MCL	O	MCQ	O	II	O
20	5.896×10^{-1}	—	5.300×10^{-3}	—	2.110×10^{-4}	—	5.230×10^{-4}	—
40	2.468×10^{-1}	1.256	2.200×10^{-3}	1.26	5.183×10^{-5}	2.02	5.902×10^{-5}	3.14
80	7.450×10^{-2}	1.727	6.556×10^{-4}	1.74	1.201×10^{-5}	2.10	1.016×10^{-5}	2.53
160	7.520×10^{-2}	-0.012	7.991×10^{-5}	3.03	2.497×10^{-6}	2.26	2.921×10^{-6}	1.79
320	3.160×10^{-2}	1.248	3.356×10^{-5}	1.25	6.228×10^{-7}	2.00	6.376×10^{-7}	2.19
640	9.800×10^{-3}	1.683	1.043×10^{-5}	1.68	1.542×10^{-7}	2.01	1.510×10^{-7}	2.07
1280	9.800×10^{-3}	-0.001	9.213×10^{-7}	3.50	3.758×10^{-8}	2.03	3.857×10^{-8}	1.96
2560	4.400×10^{-3}	1.163	4.113×10^{-7}	1.16	9.395×10^{-9}	2.00	9.462×10^{-9}	2.02

exata, dada por:

$$u(x) = e^x \quad \text{em} \quad \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Conforme pode ser visto na figura 4.8, todos os métodos continuam apresentando resultados consistentes com a solução exata. Conforme a tabela 4.8 e 4.9, o MCL apresenta resultados inferiores. O MCQ e o MII apresentam erros e ordem de convergência muito próximos, e cada vez mais próximos para os refinamentos de malha.

Exemplo 5

No último exemplo dessa seção, comparamos os métodos, para o seguinte problema:

Tabela 4.7: Comparação dos resultados numéricos na norma $\|E_n\|_2$ de cada método para o problema (4.9) para malhas com 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280 e 2560 pontos.

N	MC	O	MCL	O	MCQ	O	MII	O
20	4.244×10^{-1}	–	3.900×10^{-3}	–	2.000×10^{-4}	–	4.772×10^{-4}	–
40	1.731×10^{-1}	1.2935	1.500×10^{-3}	1.32	4.868×10^{-5}	2.03	5.682×10^{-5}	3.07
80	5.161×10^{-2}	1.7462	4.599×10^{-4}	1.75	1.105×10^{-5}	2.13	8.889×10^{-6}	2.67
160	5.195×10^{-2}	-0.0094	5.674×10^{-5}	3.01	2.170×10^{-6}	2.34	2.668×10^{-6}	1.73
320	2.178×10^{-2}	1.2535	2.349×10^{-5}	1.27	5.409×10^{-7}	2.00	5.582×10^{-7}	2.25
640	6.760×10^{-3}	1.6863	7.270×10^{-6}	1.69	1.335×10^{-7}	2.01	1.298×10^{-7}	2.10
1280	6.770×10^{-3}	-0.0011	6.576×10^{-7}	3.46	3.226×10^{-8}	2.04	3.339×10^{-8}	1.95
2560	3.020×10^{-3}	1.1638	2.886×10^{-7}	1.18	8.064×10^{-9}	2.00	8.141×10^{-9}	2.03

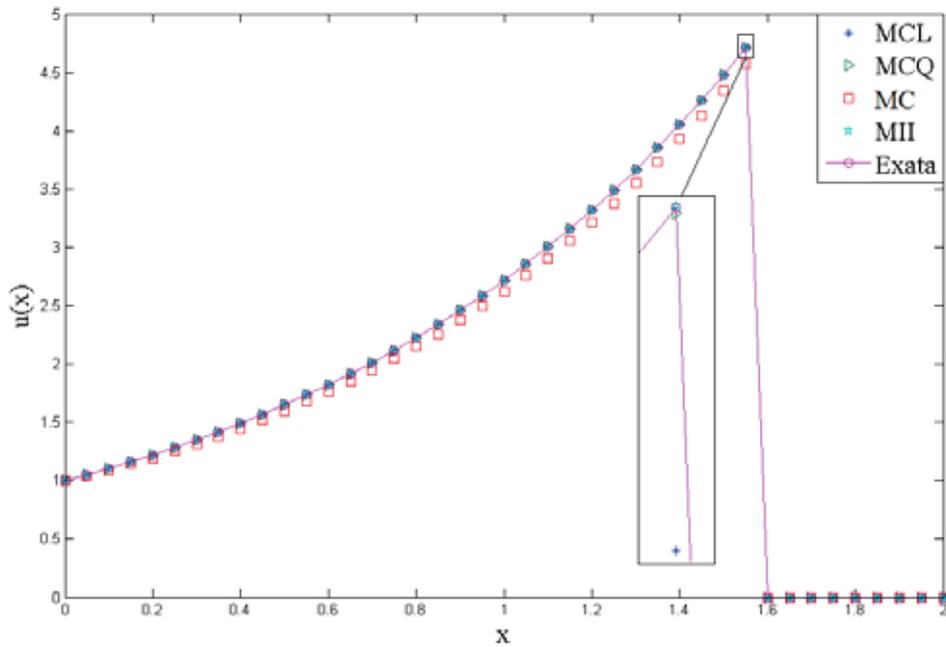


Figura 4.8: Comparação entre as soluções numéricas do MCL, MCQ e MII e a solução exata do problema do Exemplo 3, em uma malha com 20 pontos.

$$u_{xx} = \text{sen}(x), \quad \text{em } \Omega = (0, \pi), \quad (4.11)$$

embutido no domínio $\mathcal{B} = (0, 4)$ com $u(0) = 0$ e $u(x_\Gamma) = 0$, juntamente com a solução exata do mesmo, dada por:

$$u(x) = -\text{sen}(x) \quad \text{em } (0, \pi).$$

Através da figura 4.9 e da tabela 4.10 e 4.11, podemos notar que nesse exemplo, todos os métodos além de apresentarem resultados consistentes com a solução exata, todos eles apresentam ordem de convergência aproximadamente 2 e todos os resultados dos erros são próximos. Nesse exemplo, em particular, não é possível notar as oscilações nos valores da ordem do MCL.

Tabela 4.8: Comparação dos erros na $\|E_n\|_\infty$ de cada método para o problema (4.10) em malhas com 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280 e 2560 pontos.

N	MC	O	MCL	O	MCQ	O	MII	O
20	1.335×10^{-1}	—	4.500×10^{-3}	—	4.589×10^{-4}	—	6.250×10^{-4}	—
40	1.381×10^{-1}	-0.0491	1.400×10^{-3}	1.68	1.321×10^{-4}	1.79	1.478×10^{-4}	2.07
80	1.990×10^{-2}	2.7918	2.038×10^{-4}	2.78	3.593×10^{-5}	1.87	3.795×10^{-5}	1.96
160	2.010×10^{-2}	-0.0118	9.307×10^{-5}	1.29	9.101×10^{-6}	1.98	9.465×10^{-6}	2.00
320	2.020×10^{-2}	-0.0058	2.066×10^{-5}	2.00	2.324×10^{-6}	1.96	2.341×10^{-6}	2.01
640	5.200×10^{-3}	1.9618	5.296×10^{-6}	1.96	5.839×10^{-7}	1.99	5.897×10^{-7}	1.98
1280	1.400×10^{-3}	-0.0014	1.254×10^{-6}	2.07	1.467×10^{-7}	1.99	1.470×10^{-7}	2.00
2560	1.400×10^{-3}	1.8585	3.459×10^{-7}	1.85	3.673×10^{-8}	1.99	3.682×10^{-8}	1.99

Tabela 4.9: Comparação dos erros na $\|E_n\|_2$ de cada método para o problema (4.10) em malhas com 20, 40, 80, 160, 320, 640 e 1280 pontos.

N	MC	O	MCL	O	MCQ	O	MII	O
20	9.870×10^{-2}	—	3.000×10^{-3}	—	4.009×10^{-4}	—	5.728×10^{-4}	—
40	1.015×10^{-1}	-0.0408	9.534×10^{-4}	1.66	1.177×10^{-4}	1.76	1.343×10^{-4}	2.09
80	1.450×10^{-2}	2.8100	1.228×10^{-4}	2.95	3.247×10^{-5}	1.85	3.462×10^{-5}	1.95
160	1.460×10^{-2}	-0.0109	5.357×10^{-5}	1.19	8.248×10^{-6}	1.97	8.629×10^{-6}	2.00
320	1.460×10^{-2}	-0.0049	1.327×10^{-5}	2.01	2.112×10^{-6}	1.96	2.130×10^{-6}	2.01
640	3.800×10^{-3}	1.9679	3.406×10^{-6}	1.96	5.311×10^{-7}	1.99	5.373×10^{-7}	1.98
1280	1.000×10^{-3}	1.8590	8.009×10^{-7}	2.08	1.336×10^{-7}	1.99	1.338×10^{-7}	2.00
2560	1.000×10^{-3}	-0.0012	2.233×10^{-7}	1.84	3.345×10^{-8}	1.99	3.335×10^{-8}	1.99

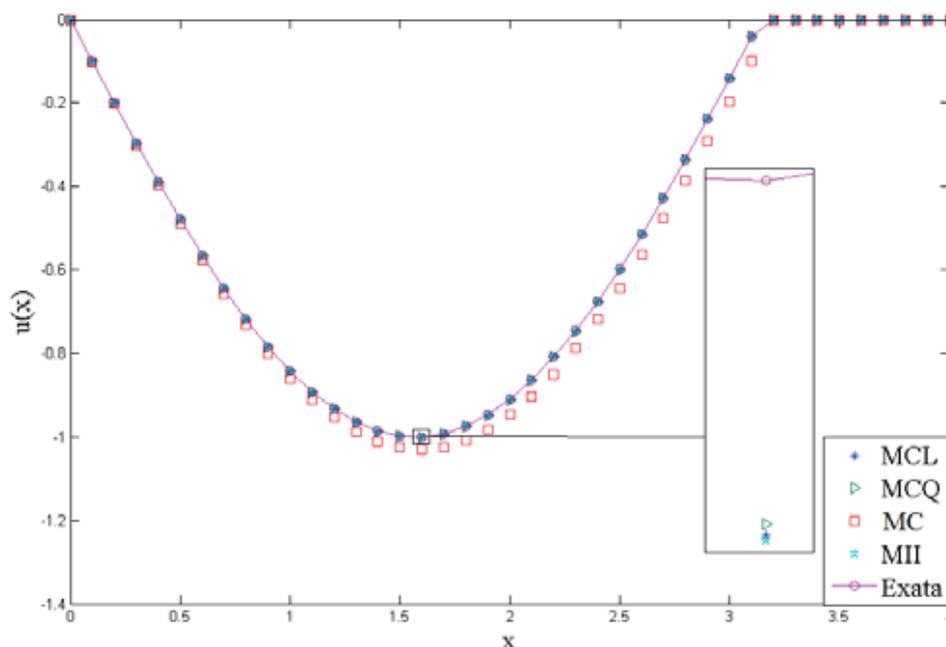


Figura 4.9: Comparação entre as soluções numéricas do MCL, MCQ, MII e a solução exata do problema do exemplo 4, em uma malha com 20 pontos.

Conforme o refinamento de malha, notamos que os resultados tornam-se cada vez mais próximos.

Tabela 4.10: Comparação dos erros na norma $\|E_n\|_\infty$ de cada método para o problema (4.11) em malhas com 20, 40, 80, 160, 320, 640 e 1280 pontos.

N	MC	O	MCL	O	MCQ	O	MII	O
20	5.540×10^{-2}	–	3.400×10^{-3}	–	3.100×10^{-3}	–	3.400×10^{-3}	–
40	5.660×10^{-2}	-0.0322	8.299×10^{-4}	2.03	8.042×10^{-4}	1.94	8.411×10^{-4}	2.02
80	8.300×10^{-3}	2.7732	2.092×10^{-4}	1.98	2.056×10^{-4}	1.96	2.091×10^{-4}	2.00
160	8.300×10^{-3}	-0.0100	5.218×10^{-5}	2.00	5.160×10^{-5}	1.99	5.225×10^{-5}	2.00
320	8.400×10^{-3}	-0.0056	1.300×10^{-5}	2.00	1.297×10^{-5}	1.99	1.302×10^{-5}	2.00
640	2.200×10^{-3}	1.9595	3.256×10^{-6}	1.99	3.247×10^{-6}	1.99	3.257×10^{-6}	1.99
1280	2.200×10^{-3}	-0.0014	8.135×10^{-7}	2.00	8.130×10^{-7}	1.99	8.138×10^{-7}	2.00
2560	6.000×10^{-4}	1.8580	2.034×10^{-7}	1.99	2.033×10^{-7}	1.99	2.034×10^{-7}	1.99

Tabela 4.11: Comparação dos erros na norma $\|E_n\|_2$ de cada método para o problema (4.11) em malhas com 20, 40, 80, 160, 320, 640, 1280 e 2560 pontos.

N	MC	O	MCL	O	MCQ	O	MII	O
20	6.100×10^{-2}	–	4.200×10^{-3}	–	3.800×10^{-3}	–	4.300×10^{-3}	–
40	5.970×10^{-2}	0.0309	0.0010	2.04	9.998×10^{-4}	1.93	0.0010	2.02
80	8.700×10^{-3}	2.7761	2.626×10^{-4}	2.00	2.569×10^{-4}	1.96	2.624×10^{-4}	2.00
160	8.600×10^{-3}	0.0176	6.543×10^{-5}	2.00	6.451×10^{-5}	1.99	6.554×10^{-5}	1.99
320	8.600×10^{-3}	0.0022	1.629×10^{-5}	2.00	1.624×10^{-5}	1.98	1.623×10^{-5}	1.99
640	2.200×10^{-3}	1.9617	4.082×10^{-6}	1.99	4.067×10^{-6}	1.99	4.084×10^{-6}	2.00
1280	2.200×10^{-3}	0.0005	1.019×10^{-6}	2.00	1.018×10^{-6}	1.99	1.020×10^{-6}	1.99
2560	6.000×10^{-4}	1.8585	2.550×10^{-7}	1.99	2.547×10^{-7}	1.99	2.550×10^{-7}	2.00

Em todos os exemplos de problemas com contorno em pontos não coincidentes com a malha, observamos que a ordem de convergência do MCL em geral é oscilante em torno de 2 ou próxima de 2 em alguns casos. Já o MCQ e o MII, sempre apresentam ordem de convergência próxima de 2, com um erro menor que os demais na maioria dos testes. Outro detalhe é que o MCQ e o MII apresentam resultados muito próximos para o caso unidimensional.

Problemas elípticos de interfaces bidimensionais

5.1 O método das interfaces imersas

Aqui discutiremos o MII para resolver problemas de interfaces bidimensionais, definido como:

$$(\beta u_x)_x + (\beta u_y)_y - \sigma(x, y)u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-, \quad (5.1)$$

com uma condição de contorno prescrita em $\partial\Omega$, onde $\beta \geq \beta_{min} > 0$ e σ e f são seccionalmente contínuas mas podem ter um salto finito descontínuo ao longo da interface (uma curva em duas dimensões) $\Gamma \in C^2$ dentro do domínio Ω . Duas condições de interface, ou condições de limitação interna, são necessárias para tornar o problema bem-posto. Assumimos que localmente elas são definidas por

$$[u] = u^+ - u^- = \omega, \quad (5.2)$$

$$[\beta u_n] = \beta^+ \frac{\partial u^+}{\partial n} - \beta^- \frac{\partial u^-}{\partial n} = \nu, \quad (5.3)$$

onde ω e ν são duas funções definidas somente ao longo da interface Γ . Quando $\omega \equiv 0$ e $\nu \equiv 0$, tais condições de salto são chamadas condições de interface naturais e muitas vezes são implícitas, em vez de serem especificadas explicitamente em (5.2) e (5.3). Note que se $\omega = 0$ e σ é contínua, então a solução do problema de interface é equivalente à solução da única equação em um

domínio inteiro,

$$\nabla \cdot (\beta \nabla u(\mathbf{x})) - \sigma u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \nu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)) ds \quad (5.4)$$

onde δ é a função delta de Dirac em duas dimensões espaciais. O segundo termo no lado direito é uma distribuição que satisfaz

$$\int \int_{\Omega} \nu \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s)) \Psi(\mathbf{x}) ds d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \nu \Psi(\mathbf{X}(s)) ds \quad (5.5)$$

para alguma função suave $\Psi(\mathbf{x})$.

Em geral, se β , σ , e f são seccionalmente suaves em Ω , $\omega = 0$, e ν é diferenciável ao longo de Γ então a solução para o problema de interface existe e está em $H^1(\Omega)$, onde $H^1(\Omega)$ é um espaço de Sobolev.

5.1.1 Relação de interface para problemas elípticos de interface bidimensionais

Das condições de salto (5.2) e (5.3) e da equação (5.1), podemos derivar as seguintes relações de interface que representa os valores limitados de um lado pelos valores do outro lado usando coordenadas locais:

$$\begin{cases} \xi = (x - X) \cos \theta + (y - Y) \sin \theta, \\ \eta = -(x - X) \sin \theta + (y - Y) \cos \theta, \end{cases} \quad (5.6)$$

onde θ é o ângulo entre o eixo x e a direção normal, apontando para a direção de um lado específico, digamos o lado “+”. Nos pontos (X, Y) , a interface pode ser escrita como:

$$\xi = \chi(\eta) \text{ com } \chi(0) = 0, \chi'(0) = 0. \quad (5.7)$$

A curvatura da interface em (X, Y) é χ'' .

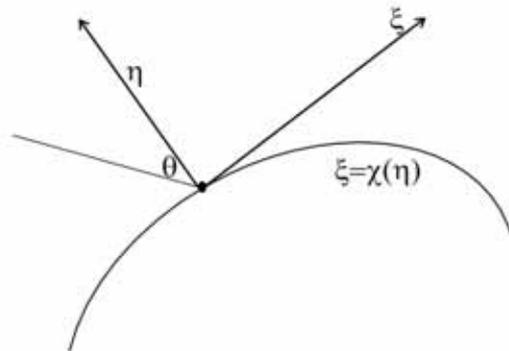


Figura 5.1: Um diagrama da coordenada local nas direções normal e tangencial, onde θ é o ângulo entre o eixo x e a direção normal.

Teorema 1 (Relações de Interface). *Seja (X, Y) um ponto na interface Γ . Assuma que $\Gamma \in C^2$ na vizinhança de (X, Y) correspondente na coordenada local (5.6) em $(0, 0)$. Então das condições de salto (5.2) e (5.3) e da eq. (5.1), temos as seguinte relações de interface:*

$$\begin{aligned}
 u^+ &= u^- + \omega, \\
 u_\xi^+ &= \rho u_\xi^- + \frac{\nu}{\beta^+}, \\
 u_\eta^+ &= u_\eta^- + \omega', \\
 u_{\xi\xi}^+ &= \left(\frac{\beta_\xi^-}{\beta^+} - \chi''\right)u_\xi^- + \left(\chi'' - \frac{\beta_\xi^+}{\beta^+}\right)u_\xi^+ + \frac{\beta_\eta^-}{\beta^+}u_\eta^- - \frac{\beta_\eta^+}{\beta^+}u_\eta^+ \\
 &+ (\rho - 1)u_{\eta\eta}^- + \rho u_{\xi\xi}^- - \omega'' + \frac{[f]}{\beta^+} + \frac{[\sigma]u^- + \sigma^+[u]}{\beta^+}, \\
 u_{\eta\eta}^+ &= u_{\eta\eta}^- + (u_\xi^- - u_\xi^+)\chi'' + \omega'', \\
 u_{\xi\eta}^+ &= \frac{\beta_\eta^-}{\beta^+}u_\xi^- - \frac{\beta_\eta^+}{\beta^+}u_\xi^+ + (u_\eta^+ - \rho u_\eta^-)\chi'' + \rho u_{\xi\eta}^- + \frac{\nu'}{\beta^+},
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

onde $\rho = \frac{\beta^-}{\beta^+}$ e ω' , ν' e ω'' , ν'' são as derivadas de superfície de primeira e segunda ordem de ω e ν em (X, Y) na interface.

Demonstração: Conforme [7].

Essas relações de interface são usadas na derivação do método de diferenças finitas a seguir.

5.1.2 O esquema de diferenças finitas do MII em duas dimensões

Dada uma malha cartesiana (x_i, y_j) , $i = 0, 1, \dots, M$, $j = 0, 1, \dots, N$, o esquema de diferenças finitas para (5.1) tem a seguinte forma genérica:

$$\sum_k^{n_s} \gamma_k U_{i+i_k, j+j_k} - \sigma_{ij} U_{ij} = f_{ij} + C_{ij} \tag{5.9}$$

em algum ponto da malha (x_i, y_j) , onde $u(x_i, y_j)$ é conhecido. No esquema de diferenças finitas acima n_s é o número de pontos envolvidos na discretização e U_{ij} é uma aproximação para a solução $u(x, y)$ de (5.1) em (x_i, y_j) . A soma sobre k envolve um número finito de pontos vizinhos (x_i, y_j) . Então cada i_k e j_k terão valores no conjunto $0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Os coeficientes γ_k e os índices i_k e j_k dependem de (i, j) .

O erro de truncamento local em um ponto da malha (x_i, y_j) é definido como

$$T_{ij} = \sum_k^{n_s} \gamma_k u(x_{i+i_k}, y_{j+j_k}) - \sigma(x_i, y_j)u(x_i, y_j) - f(x_i, y_j) - C_{ij} \tag{5.10}$$

Um ponto (x_i, y_j) da malha é chamado um ponto regular da malha em referência ao operador padrão de diferenças finitas de cinco pontos centrado em

(i, j) se todos os cinco pontos da malha estão do mesmo lado da interface. Num ponto regular da malha, os erros de truncamento local são $O(h^2)$ se a fórmula padrão de diferenças finitas centrada de cinco pontos, for usada, isto é:

$$\frac{1}{\Delta x} \left\{ \left(\beta_{i+\frac{1}{2},j} \frac{(U_{i+1,j} - U_{ij})}{\Delta x} - \beta_{i-\frac{1}{2},j} \frac{(U_{i,j} - U_{i-1,j})}{\Delta x} \right) + \left(\beta_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{(U_{i,j+1} - U_{ij})}{\Delta x} - \beta_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{(U_{i,j} - U_{i,j-1})}{\Delta x} \right) \right\} - \sigma_{ij} U_{ij} = f_{ij}, \quad (5.11)$$

Se (x_i, y_j) é um ponto irregular da malha, isto é, os pontos da malha na molécula centrada de cinco pontos que são de ambos os lados da interface, então é usado um método de coeficientes indeterminados para determinar um sistema de equações para os coeficientes de diferenças finitas γ_k em (5.9). O termo de correção C_{ij} pode ser obtido depois que os $\{\gamma_k\}$'s são obtidos. Com a suposição que a solução é suave por partes, um ponto (x_i^*, y_i^*) na interface Γ perto do ponto da malha (x_i, y_j) é escolhido de modo que a expansão de Taylor possa ser realizada a partir de cada lado da interface. Usualmente, (x_i^*, y_i^*) é escolhido, ou como a projeção ortogonal de (x_i, y_j) na interface ou como a intersecção da interface e um dos eixos.

Sejam as coordenadas locais de (x_{i+i_k}, y_{j+j_k}) como (ξ_k, η_k) . A ideia é minimizar a magnitude do erro de truncamento local T_{ij} em (5.10) combinando a equação de diferença finita para a equação diferencial até todas as derivadas parciais de segunda ordem. Assim, o erro de truncamento local pode ser zero se a solução exata é uma função quadrática por partes, que implica segunda ordem de convergência se a condição de estabilidade também é satisfeita.

A expansão de Taylor de $u(x_{i+i_k}, y_{j+j_k})$ sobre (x_i^*, y_i^*) nas coordenadas locais é

$$u(x_{i+i_k}, y_{j+j_k}) = u(\xi_k, \eta_k) = u^\pm + \xi_k u_\xi^\pm + \eta_k u_\eta^\pm + \frac{1}{2} \xi_k^2 u_{\xi\xi}^\pm + \xi_k \eta_k u_{\xi\eta}^\pm + \frac{1}{2} \eta_k^2 u_{\eta\eta}^\pm + O(h^3)$$

onde o sinal “+” ou “-” é escolhido dependendo de onde (ξ_k, η_k) se encontra, no lado “+” ou “-” de Γ . Depois da expansão de todos os termos, $u(x_{i+i_k}, y_{j+j_k})$, usando na equação de diferenças finitas (5.9), o erro de truncamento local T_{ij} pode ser expresso como uma combinação linear dos valores $u^\pm, u_\xi^\pm, u_\eta^\pm, u_{\xi\xi}^\pm, u_{\xi\eta}^\pm, u_{\eta\eta}^\pm$ como segue:

$$T_{ij} = a_1 u^- + a_2 u^+ + a_3 u_\xi^- + a_4 u_\xi^+ + a_5 u_\eta^- + a_6 u_\eta^+ + a_7 u_{\xi\xi}^- + a_8 u_{\xi\xi}^+ + a_9 u_{\eta\eta}^- + a_{10} u_{\eta\eta}^+ + a_{11} u_{\xi\eta}^- + a_{12} u_{\xi\eta}^+ - \sigma^- u^- - f^- - C_{ij} + \max\{|\gamma_k|\} O(h^3).$$

As quantidades f^\pm, σ^\pm e β^\pm são valores limitados dessas funções em (x_i^*, y_j^*)

dos lados “+” ou “-” da interface. Os coeficientes $\{a_j\}$'s dependem somente da posição dos pontos próximos à interface. Eles são independentes da EDP, β , u , σ , f , e das condições de salto ω e ν . Se definimos o conjunto de índices k^+ e k^- por

$$k^\pm = \{ k : (\xi_k, \eta_k) \text{ está no lado “}\pm\text{” de } \Gamma \}$$

então os $\{a_j\}$'s são dados por

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k \in k^-} \gamma_k, \quad a_2 = \sum_{k \in k^+} \gamma_k, \quad a_3 = \sum_{k \in k^-} \xi_k \gamma_k, \quad a_4 = \sum_{k \in k^+} \xi_k \gamma_k, \\ a_5 &= \sum_{k \in k^-} \eta_k \gamma_k, \quad a_6 = \sum_{k \in k^+} \eta_k \gamma_k, \quad a_7 = \frac{1}{2} \sum_{k \in k^-} \xi_k^2 \gamma_k, \quad a_8 = \frac{1}{2} \sum_{k \in k^+} \xi_k^2 \gamma_k, \\ a_9 &= \frac{1}{2} \sum_{k \in k^-} \eta_k^2 \gamma_k, \quad a_{10} = \frac{1}{2} \sum_{k \in k^+} \eta_k^2 \gamma_k, \quad a_{11} = \sum_{k \in k^-} \xi_k \eta_k \gamma_k, \quad a_{12} = \sum_{k \in k^+} \xi_k \eta_k \gamma_k. \end{aligned}$$

Usando as relações de interface (5.8), substituímos as mesmas, na expressão do erro de truncamento, obtendo a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= a_1 u^- + a_2 (u^- + \omega) + a_3 u_\xi^- + a_4 \left(\rho u_\xi^- + \frac{\nu}{\beta^+} \right) + a_5 u_\eta^- + a_6 (u_\eta^- + \omega') + a_7 u_{\xi\xi}^- \\ &+ a_8 \left[\left(\frac{\beta_\xi^-}{\beta^+} - \chi'' \right) u_\xi^- + \left(\chi'' - \frac{\beta_\xi^+}{\beta^+} \right) \left(\rho u_\xi^- + \frac{\nu}{\beta^+} \right) + \frac{\beta_\eta^-}{\beta^+} u_\eta^- - \frac{\beta_\eta^+}{\beta^+} (u_\eta^- + \omega') + (\rho - 1) u_{\eta\eta}^- \right] \\ &+ \rho u_{\xi\xi}^- - \omega'' + \frac{[f]}{\beta^+} + \frac{[\sigma]u^- + \sigma^+[u]}{\beta^+} \Big] + a_9 u_{\eta\eta}^- + a_{10} \left[u_{\eta\eta}^- + \left(u_\xi^- - \left(\rho u_\xi^- + \frac{\nu}{\beta^+} \right) \right) \chi'' + \omega'' \right] \\ &a_{11} u_{\xi\eta}^- + a_{12} \left[\frac{\beta_\eta^-}{\beta^+} u_\xi^- - \frac{\beta_\eta^+}{\beta^+} u_\xi^+ + (u_\eta^- + \omega' - \rho u_\eta^-) \chi'' + \rho u_{\xi\eta}^- + \frac{\nu'}{\beta^+} \right] \\ &+ \sigma^- u^- - f^- + (\hat{T}_{ij} - C_{ij}) + \max \{ |\gamma_{j,l}| \} O(h^3) \end{aligned}$$

Agora efetuando algumas manipulações algébricas na equação anterior, encontramos a seguinte forma

$$\begin{aligned}
T_{ij} = & a_1 u^- + a_2 u^- + a_2 \omega + a_3 u_\xi^- + a_4 \rho u_\xi^- + a_4 \frac{\nu}{\beta^+} + a_5 u_\eta^- + a_6 u_\eta^- + a_6 \omega' + a_7 u_{\xi\xi}^- \\
& + a_8 \left(\frac{\beta_\xi^-}{\beta^+} - \chi'' \right) u_\xi^- + a_8 \left[\chi'' \rho u_\xi^- + \chi'' \frac{\nu}{\beta^+} - \rho \frac{\beta_\xi^+}{\beta^+} u_\xi^- - \frac{\beta_\xi^+ \nu}{(\beta^+)^2} \right] + a_8 \frac{\beta_\eta^-}{\beta^+} u_\eta^- - a_8 \frac{\beta_\eta^+}{\beta^+} u_\eta^- \\
& - a_8 \frac{\beta_\eta^+}{\beta^+} \omega' + a_8 (\rho - 1) u_{\eta\eta}^- + \rho u_{\xi\xi}^- + a_8 \frac{[\sigma] u^-}{\beta^+} + \left[\frac{[f]}{\beta^+} + \frac{\sigma^+[u]}{\beta^+} - \omega'' \right] + a_9 u_{\eta\eta}^- + a_{10} u_{\eta\eta}^- \\
& + a_{10} \left((1 - \rho) u_\xi^- + \frac{\nu}{\beta^+} \right) \chi'' + a_{10} \omega'' + a_{11} u_{\xi\eta}^- + a_{12} \left[\frac{\beta_\eta^-}{\beta^+} u_\xi^- - \frac{\beta_\eta^+}{\beta^+} u_\xi^+ + (u_\eta^- + \omega' - \rho u_\eta^-) \chi'' \right. \\
& \left. + \rho u_{\xi\eta}^- + \frac{\nu'}{\beta^+} \right] + \sigma^- u^- - f^- - C_{ij} + \max \{ |\gamma_{j,l}| \} O(h^3)
\end{aligned}$$

Efetando mais algumas operações algébricas e colocando os termos da expressão da direita na ordem dos coeficientes u^- , u_ξ^- , u_η^- , ..., $u_{\xi\eta}^-$ obtemos

$$\begin{aligned}
T_{ij} = & a_1 u^- + a_2 u^- + a_8 \frac{[\sigma] u^-}{\beta^+} + a_3 u_\xi^- + a_4 \rho u_\xi^- + a_8 \frac{\beta_\xi^-}{\beta^+} u_\xi^- a_8 - \rho \frac{\beta_\xi^+}{\beta^+} u_\xi^- - a_8 \rho \frac{\beta_\xi^+}{\beta^+} u_\xi^- \\
& a_{10} (1 - \rho) \chi'' u_\xi^- + a_{12} \frac{\beta_\eta^-}{\beta^+} u_\xi^- - a_{12} \rho \frac{\beta_\eta^+}{\beta^+} u_\xi^- + a_5 u_\eta^- + a_6 u_\eta^- + a_8 \frac{\beta_\eta^-}{\beta^+} u_\eta^- - a_8 \frac{\beta_\eta^+}{\beta^+} u_\eta^+ \\
& + a_{12} (1 - \rho) \chi'' u_\eta^- + a_7 u_{\xi\xi}^- + a_8 \rho u_{\xi\xi}^- - a_9 u_{\eta\eta}^- + a_{10} u_{\eta\eta}^- + a_8 (\rho - 1) u_{\eta\eta}^- + a_{11} u_{\xi\eta}^- + a_{12} \rho u_{\xi\eta}^- \\
& + a_2 \omega + a_{12} \frac{\nu'}{\beta^+} + a_6 \omega' - a_8 \frac{\beta_\xi^+ \omega'}{\beta^+} + a_{12} \chi'' \omega' + a_{10} \omega'' + a_4 \frac{\nu}{\beta^+} + a_8 \left(\chi'' - \frac{\beta_\xi^-}{\beta^+} \right) \frac{\nu}{\beta^+} \\
& - a_{10} \chi'' \frac{\nu}{\beta^+} - a_{12} \frac{\beta^+ \nu}{(\beta^+)^2} + a_8 \left[\frac{[f]}{\beta^+} + \frac{\sigma^+ \omega}{\beta^+} - \omega'' \right] - \sigma^- - f^- - C_{ij} + \max \{ |\gamma_{j,l}| \} O(h^3).
\end{aligned}$$

Agora, juntando os termos de coeficientes u^- , u_ξ^- , u_η^- , ..., $u_{\xi\eta}^-$ na expressão do lado direito da igualdade, encontramos a seguinte expressão para o erro de truncamento:

$$\begin{aligned}
 T_{ij} = & \left(a_1 + \frac{a_8[\sigma]}{\beta^+} + a_2 \right) u^- + \left\{ a_3 + a_8 \left(\frac{\beta_\xi^-}{\beta^+} - \chi'' \right) + a_{10}\chi'' \right. \\
 & + a_{12} \frac{\beta_\eta^-}{\beta^+} + \rho \left(a_4 + a_8 \left(\chi'' - \frac{\beta_\xi^+}{\beta^+} \right) - a_{10}\chi'' - a_{12} \frac{\beta_\eta^+}{\beta^+} \right) \left. \right\} u_\xi^- \\
 & + \left\{ a_5 + a_6 + a_8 \left(\frac{\beta_\eta^-}{\beta^+} - \frac{\beta_\eta^+}{\beta^+} \right) + a_{12}(1 - \rho)\chi'' \right\} u_\eta^- \\
 & + \{a_7 + a_8\rho\} u_{\xi\xi}^- + \{a_9 + a_{10} + a_8(\rho - 1)\} u_{\eta\eta}^- \\
 & + \{a_{11} + a_{12}\rho\} u_{\xi\eta}^- - \sigma^- u^- - f^- + (\hat{T}_{ij} - C_{ij}) + \max\{|\gamma_{j,l}|\} O(h^3)
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \hat{T}_{ij} = & a_2\omega + a_{12} \frac{\nu'}{\beta^+} + \left(a_6 - \frac{a_8\beta_\xi^+}{\beta^+} + a_{12}\chi'' \right) \omega' + a_{10}\omega'' \\
 & + \frac{1}{\beta^+} \left(a_4 + a_8 \left(\chi'' - \frac{\beta_\xi^+}{\beta^+} \right) - a_{10}\chi'' - a_{12} \frac{\beta_\eta^+}{\beta^+} \right) \nu \\
 & + a_8 \left\{ \frac{[f]}{\beta^+} + \frac{\sigma^+\omega}{\beta^+} - \omega'' \right\}
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Assumindo que o esquema de diferenças finitas é estável, podemos garantir segunda ordem de precisão na solução aproximada exigindo que os coeficientes de u^- , u_ξ^- , u_η^- , ..., $u_{\xi\eta}^-$ desapareçam, chegamos ao seguinte sistema de equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2 + a_8 \frac{[\sigma]}{\beta^+} = 0, \\ a_3 + \rho a_4 + a_8 \frac{\beta_\xi^- - \rho \beta_\xi^+ - [\beta] \chi''}{\beta^+} + a_{10} \frac{[\beta] \chi''}{\beta^+} + a_{12} \frac{\beta_\eta^- - \rho \beta_\eta^+}{\beta^+} = \beta_\xi^-, \\ a_5 + a_6 - a_8 \frac{[\beta_\eta]}{\beta^+} + a_{12} (1 - \rho) \chi'' = \beta_\eta^-, \\ a_7 + a_8 \rho = \beta^-, \\ a_9 + a_{10} + a_8 (\rho - 1) = \beta^-, \\ a_{11} + a_{12} \rho = 0, \end{array} \right. \quad (5.14)$$

onde $\rho = \frac{\beta^-}{\beta^+}$. Uma vez que os $\{\gamma_k\}$'s foram calculados, podemos facilmente obter C_{ij} como

$$C_{ij} = \hat{T}_{ij} \quad (5.15)$$

onde \hat{T}_{ij} é dado por (5.13) desde que

$$\beta^- (u_{\xi\xi}^- + u_{\eta\eta}^-) + \beta_\xi^- u_\xi^- + \beta_\eta^- u_\eta^- - \sigma^- u^- - f^- = 0 \quad (5.16)$$

no ponto (x_i^*, y_j^*) . O erro de truncamento local derivado da equação de diferença finita é geralmente $O(h)$ em um ponto irregular da malha.

5.2 Método clássico (MC): construção por interpolação

Considere a equação de Poisson bidimensional

$$\nabla^2 u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (5.17)$$

com Ω alguma forma $2D$ irregular inscrita dentro de um retângulo com fronteira $[a, b] \times [c, d]$ onde as condições de Dirichlet $u(x, y) = g(x, y)$ são especificadas. Como $u = 0$ fora do domínio físico, então podemos definir um salto em $\partial\Omega$. Denota-se por $x_{i+\frac{1}{2},j}$ o ponto médio do intervalo $[(i, j); (i+1, j)]$ (ou seja, na direção x) e por $y_{i,j+\frac{1}{2}}$ o ponto médio do intervalo $[(i, j); (i, j+1)]$. A generalização de uma aproximação numérica para o caso $2D$ é simples de aplicar; para cada ponto da fronteira aplicaremos uma interpolação 1D nas direções x e/ou y . Em cada ponto no interior de Ω a equação (5.17) é discretizada utilizando

aproximação de diferenças finitas centradas de cinco pontos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta x} \right) - \left(\frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta x} \right) \right] + \\ & \frac{1}{\Delta y} \left[\left(\frac{U_{i,j-1} - U_{i,j}}{\Delta y} \right) - \left(\frac{U_{i,j} - U_{i,j+1}}{\Delta y} \right) \right] = f_{ij}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde, Δx e Δy são os espaçamentos na malha, nas direções x e y , respectivamente.

Para completar a formulação, discretizamos a equação (5.17) nos pontos próximos da fronteira, e usando uma interpolação para incorporar a condição de contorno no esquema de diferenças finitas. Considere por sua vez, um ponto $\mathbf{x} = (x_i^*, y_j^*)$ próximo da fronteira. Podemos usar o tratamento linear ou o quadrático para aproximar u_x em $U_{i^* + \frac{1}{2}, j^*}$, que é o ponto médio do segmento $[(i^*, j^*); (i^* + 1, j^*)]$, pois, queremos obter uma expressão interpolatória que contenha informações dos pontos próximos a fronteira. Desse modo, construímos um polinômio através dos valores u_Γ , que são os valores no contorno e $u_{x_i^*} = u(x_i^*)$ e avaliamos a inclinação correspondente do ponto médio desse segmento.

Desse modo, no esquema bidimensional do MC utilizaremos as interpolações 1D, em cada uma das direções x e y . Para tanto, vamos identificar alguns tipos de pontos que aparecem no esquema.

Na figura 5.2 o ponto marcado com um \square é um ponto que precisa ser interpolado nas direções x e y , já o ponto marcado com \bullet é um ponto que precisa ser interpolado apenas na direção x e o ponto marcado com \circ necessita ser interpolado apenas na direção y .

Além disso, cada um desses pontos podem apresentar-se de maneiras diferentes, conforme vemos na descrição abaixo e na figura 5.3. Se (i, j) é um ponto com interpolação nas direções x e y , temos as seguintes possibilidades:

- (1) i é um extremo à direita e j é um extremo superior (quadrado verde).
- (2) i é um extremo à esquerda e j é um extremo superior (quadrado azul claro).
- (3) i é um extremo à esquerda e j é um extremo inferior (quadrado azul).
- (4) i é um extremo à direita e j é um extremo inferior (quadrado roxo).

Se (i, j) é um ponto com interpolação apenas nas direções x ou y , temos apenas duas configurações para esses pontos:

- (1) i é um extremo à direita ou j é um extremo superior (círculo laranja (x) e círculo amarelo amarelo (y)).

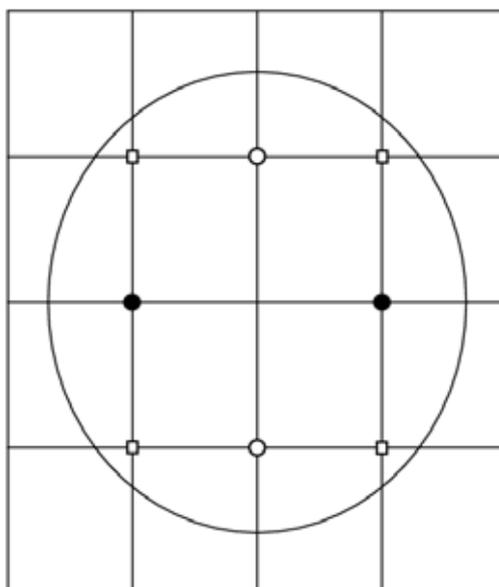


Figura 5.2: Os três tipos de pontos da fronteira a serem interpolados.

- (2) i é um extremo à esquerda ou j é um extremo inferior (círculo vermelho (x) e círculo rosa (y)).

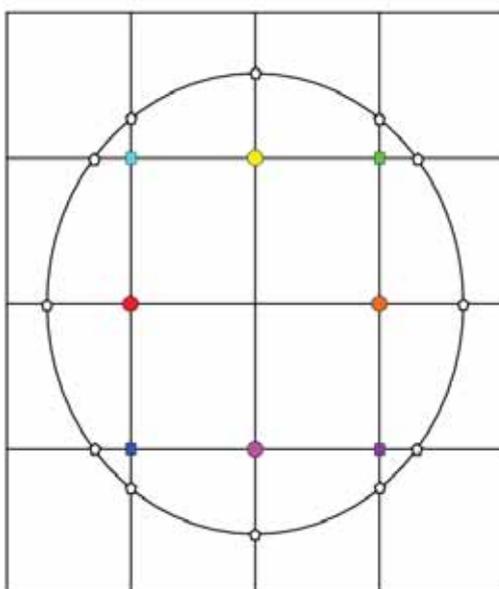


Figura 5.3: Os tipos de pontos da fronteira a serem interpolados.

Utilizando esta estratégia na identificação dos pontos irregulares e combinando com a aplicação de um tratamento linear em uma equação do tipo Poisson nos pontos interiores, obtemos uma matriz pentadiagonal esparsa representando o operador discreto.

Uma aproximação semelhante pode ser usada para o tratamento quadrático, novamente tratando separadamente as derivadas em x e y . Contudo para

alguns pontos onde as condições de contorno estão definidas em x , aproximamos u_x no ponto médio do intervalo $[(i, j); (i + 1, j)]$, e então avaliamos as inclinações nesse ponto, de modo que seja possível incorporar as condições de contorno à discretização. Um tratamento semelhante é usado na direção y . Novamente, isto dá uma matriz pentadiagonal esparsa representando o operador discreto.

Assim para cada tipo dos pontos anteriores teremos uma equação de diferenças finitas, mas, aqui vamos desenvolver as equações de apenas dois casos: o primeiro caso, para um ponto com interpolação em ambas as direções e o segundo caso, para um ponto com interpolação em uma única direção, a direção x .

Interpolação em ambas as direções: 1º caso:

A figura 5.4 ilustra bem a posição desse ponto na malha, mostrando que nossa análise será num ponto do tipo (1) entre os pontos que necessitam ser interpolados em ambas as direções cartesianas. Usando a interpolação linear, a expressão $\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{U_{i-1,j} - U_{i,j}}{\Delta x} \right) - \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{U_{i,j} - U_{i+1,j}}{\Delta x} \right)$, que é a discretização de u_{xx} , pode ser escrita como

$$\frac{1}{\Delta x^2} \left[U_{i-1,j} + \frac{\lambda_x - 2}{1 - \lambda_x} U_{i,j} + \frac{1}{1 - \lambda_x} u_\Gamma \right] \quad (5.19)$$

onde u_Γ , representa a solução exata calculada na fronteira.

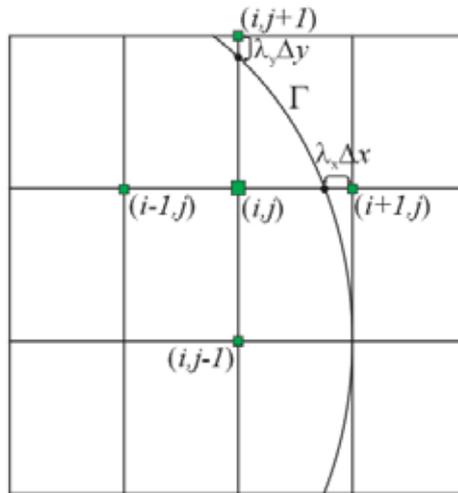


Figura 5.4: Ponto irregular a ser interpolado nas direções x e y .

Usando novamente a interpolação linear, a expressão $\frac{1}{\Delta y} \left(\frac{U_{i,j-1} - U_{i,j}}{\Delta y} \right) - \frac{1}{\Delta y} \left(\frac{U_{i,j} - U_{i,j+1}}{\Delta y} \right)$, que é a discretização de u_{yy} , pode ser escrita como:

$$\frac{1}{\Delta y^2} \left[U_{i,j-1} + \frac{\lambda_y - 2}{1 - \lambda_y} U_{i,j} + \frac{1}{1 - \lambda_y} u_\Gamma \right].$$

Assim a discretização da equação de Poisson (5.17), num ponto da fronteira que precisa ser interpolado em ambas as direções, é dada por

$$\frac{1}{\Delta x^2} \left[U_{i-1,j} + \frac{\lambda_x - 2}{1 - \lambda_x} U_{i,j} + \frac{1}{1 - \lambda_x} u_\Gamma \right] + \frac{1}{\Delta y^2} \left[U_{i,j-1} + \frac{\lambda_y - 2}{1 - \lambda_y} U_{i,j} + \frac{1}{1 - \lambda_y} u_\Gamma \right] = f_{i,j}$$

Agora fazendo $A_x = \left(\frac{\lambda_x - 2}{1 - \lambda_x} \right) \Delta y^2$, $A_y = \left(\frac{\lambda_y - 2}{1 - \lambda_y} \right) \Delta x^2$, $B_x = \frac{1}{1 - \lambda_x}$ e $B_y = \frac{1}{1 - \lambda_y}$, finalmente obteremos a equação de diferenças finitas para esse ponto irregular, que é dada por

$$\Delta x^2 U_{i,j-1} + \Delta y^2 U_{i-1,j} + (A_x + A_y) U_{i,j} + B_x u_\Gamma + B_y u_\Gamma = \Delta x^2 \Delta y^2 f_{i,j}. \quad (5.20)$$

Interpolação em uma única direção: 2º caso:

A figura 5.5 ilustra bem a posição desse ponto na malha, mostrando que nossa análise será num ponto do tipo (1) entre os interpolados em uma única direção cartesiana. Usando a interpolação linear, a expressão $\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{U_{i-1,j} - U_{i,j}}{\Delta x} \right) - \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{U_{i,j} - U_{i+1,j}}{\Delta x} \right)$, que é a discretização de u_{xx} , pode ser escrita como a equação (5.19).

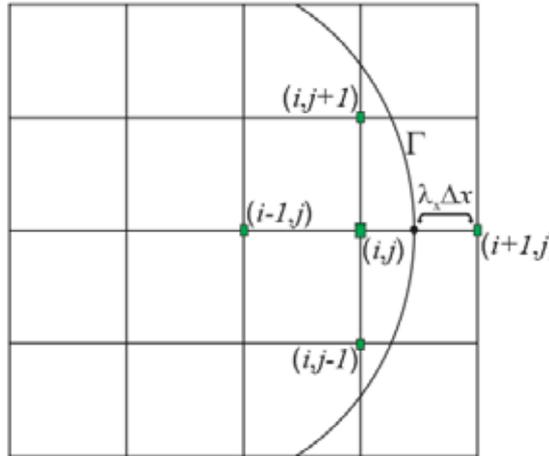


Figura 5.5: Ponto irregular a ser interpolado na direção x .

Assim a discretização da equação de Poisson, num ponto da fronteira que precisa ser interpolado numa direção x , é dada por

$$\frac{1}{\Delta x^2} \left[U_{i-1,j} + \frac{\lambda_x - 2}{1 - \lambda_x} U_{i,j} + \frac{1}{1 - \lambda_x} u_\Gamma \right] + \frac{1}{\Delta y^2} [U_{i,j-1} - 2U_{i,j} + U_{i,j+1}] = f_{i,j}$$

Agora fazendo $A_x = \left(\frac{\lambda_x - 2}{1 - \lambda_x} \right) \Delta y^2$ e $B_x = \frac{1}{1 - \lambda_x}$, finalmente obteremos a

equação de diferenças finitas para esse ponto irregular, que é dada por

$$\Delta x^2 U_{i,j-1} + \Delta y^2 U_{i-1,j} + (A_x - 2\Delta x^2) U_{i,j} + B_x u_\Gamma + \Delta x^2 U_{i,j+1} = \Delta x^2 \Delta y^2 f_{i,j}.$$

Veja que para os demais pontos irregulares, necessitem eles ser interpolados em ambas as direções ou em uma única direção, o tratamento é análogo ao que fizemos para esses dois casos.

5.2.1 O algoritmo do MC

Passo 1: Gerar uma malha cartesiana, $(x_i, y_j) = (i\Delta x, j\Delta y)$, $i = 0, 1, \dots, N$, $j = 0, 1, \dots, M$, onde $\Delta x = 1/N$ e $\Delta y = 1/M$. Um ponto da interface Γ recairá tipicamente entre os pontos da malha, ou seja, nos segmentos $[(i-1, j); ((i, j))]$, ou $[(i, j); ((i+1, j))]$, ou $[(i, j-1); ((i, j))]$ ou $[(i, j); ((i, j+1))]$, conforme a localização do ponto (i, j) . Os pontos da malha extremos dos segmentos que contém um ponto da interface, são chamados pontos irregulares da malha. Os outros pontos são chamados de pontos regulares da malha.

Passo 2: Determinar o esquema de diferenças finitas nos pontos regulares da malha. Em um ponto (x_i, y_j) da malha, $(i^*, j^*) \neq (i, j), (i+1, j)$, a aproximação central padrão de 5 pontos aplicada a equação (5.17) é

$$\frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta x} \right) - \left(\frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{\Delta x} \right) \right] + \frac{1}{\Delta y} \left[\left(\frac{U_{i,j-1} - U_{i,j}}{\Delta y} \right) - \left(\frac{U_{i,j} - U_{i,j+1}}{\Delta y} \right) \right] = f_{i,j}, \quad (5.21)$$

onde $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$. Neste caso $U_{i,j}$ representa a aproximação numérica de $u(x_i, y_j)$.

Passo 3: Determinar os coeficientes indeterminados da equação:

$$\gamma_{ij,1} U_{i-1,j} + \gamma_{ij,2} U_{i,j} + \gamma_{ij,3} U_{i+1,j} + \kappa_{ij,1} U_{i,j-1} + \kappa_{ij,2} U_{i,j} + \kappa_{ij,3} U_{i,j+1} = f_{i,j} + C_{ij}. \quad (5.22)$$

Notemos que C_{ij} é o termo de correção envolvido nos cálculos para o ponto irregular. Esse termo de correção aparece nos pontos irregulares, pois, em tais pontos precisamos incorporar a informação da forma u_Γ que é o valor na fronteira, mas essa informação não faz parte do esquema de diferenças finitas que aproxima a derivada. Desse modo, esse termo aparece como um valor extra na equação de diferenças, o qual pode ser entendido como um termo de correção.

Conforme podemos ver na equação (5.20) os coeficientes da equação de

diferenças finitas no ponto irregular do 1º caso, tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\gamma_{ij,1} &= \Delta y^2, & \gamma_{ij,2} &= \frac{\lambda_x - 2}{(1 - \lambda_x)} \Delta y^2, & \gamma_{ij,3} &= 0, \\ \kappa_{ij,1} &= \Delta x^2, & \kappa_{ij,2} &= \frac{\lambda_y - 2}{(1 - \lambda_y)} \Delta x^2, & \kappa_{ij,3} &= 0,\end{aligned}\tag{5.23}$$

e o termo de correção é

$$C_{ij} = - \left(\frac{1}{(1 - \lambda_x)} \Delta y^2 u_{\Gamma} + \frac{1}{(1 - \lambda_y)} \Delta x^2 u_{\Gamma} \right).\tag{5.24}$$

Para todos os demais pontos irregulares, a ideia do algoritmo é análoga.

Passo 4: Usando os coeficientes do **passo 3** e combinando o **passo 2**, obtemos um sistema linear como resultado da discretização. Resolvendo este sistema encontramos uma aproximação da solução de $u(x, y)$ em todo ponto da malha.

5.3 Método das interfaces imersas simplificado (MIIS)

Nessa seção apresentaremos a ideia de uma simplificação do método das interfaces imersas. Uma vez que o método das interfaces imersas para casos bidimensionais apresenta a necessidade de uma mudança de coordenada local na fronteira, faremos uma modificação do mesmo para eliminar a necessidade da mudança de coordenadas, simplificando assim a compreensão e a implementação.

Para isso usaremos a mesma ideia apresentada pelo método da seção anterior. Como fizemos um extenso estudo sobre o MII para o caso unidimensional, e o mesmo apresenta resultados mais expressivos que os métodos clássicos (que são baseados em interpolações), então vamos combinar a ideia do caso bidimensional do método clássico por interpolação para o caso bidimensional do MII.

Sendo assim, utilizaremos o estudo da seção anterior e aplicaremos as ideias ali expostas no contexto do MII. Desse modo, para cada ponto da fronteira aplicaremos o MII 1D nas direção x e/ou y , conforme fizemos para o MC.

Considere um ponto tal que, i é um extremo a direita e j é um extremos superior. Desse modo com a intenção de aplicar o Método das Interfaces Imersas conforme propomos, vamos considerar a seguinte equação de diferenças:

$$\gamma_{ij,1} U_{i-1,j} + \gamma_{ij,2} U_{i,j} + \gamma_{ij,3} U_{i+1,j} + \kappa_{ij,1} U_{i,j-1} + \kappa_{ij,2} U_{i,j} + \kappa_{ij,3} U_{i,j+1} = f_{ij} + C_{ij}.\tag{5.25}$$

Desse modo, conforme foi visto no capítulo 2, uma vez que estamos aplicando o esquema 1D do MII em cada uma das direções x e y , para encontrar os

coeficientes indeterminados, resolvemos os seguintes sistemas lineares para cada trinca de coeficientes:

$$\begin{cases} \gamma_{ij,1} + \gamma_{ij,2} + \gamma_{ij,3} = 0, \\ (x_{i-1,j} - x_\Gamma)\gamma_{ij,1} + (x_{i,j} - x_\Gamma)\gamma_{ij,2} + (x_{i+1,j} - x_\Gamma)\gamma_{ij,3} = 0, \\ \frac{1}{2}(x_{i-1,j} - x_\Gamma)^2\gamma_{ij,1} + \frac{1}{2}(x_{i,j} - x_\Gamma)^2\gamma_{ij,2} + \frac{1}{2}(x_{i+1,j} - x_\Gamma)^2\gamma_{ij,3} = 1. \end{cases} \quad (5.26)$$

e

$$\begin{cases} \kappa_{ij,1} + \kappa_{ij,2} + \kappa_{ij,3} = 0, \\ (x_{i,j-1} - x_\Gamma)\kappa_{ij,1} + (x_{i,j} - x_\Gamma)\kappa_{ij,2} + (x_{i,j+1} - x_\Gamma)\kappa_{ij,3} = 0, \\ \frac{1}{2}(x_{i,j-1} - x_\Gamma)^2\kappa_{ij,1} + \frac{1}{2}(x_{i,j} - x_\Gamma)^2\kappa_{ij,2} + \frac{1}{2}(x_{i,j+1} - x_\Gamma)^2\kappa_{ij,3} = 1. \end{cases} \quad (5.27)$$

onde x_Γ é o valor de u no ponto de intersecção do contorno Γ com o segmento $[(i, j); (i + 1, j)]$, para o sistema (5.26), ou com o segmento $[(i, j); (i, j + 1)]$ para o sistema (5.27).

Uma vez que os $\{\gamma_{ij,k}\}$'s e os $\{\kappa_{ij,k}\}$'s foram calculados, é fácil ajustar o termo de correção da equação (5.25):

$$\begin{aligned} C_{ij} = & \gamma_{ij,3} \left\{ -u_\Gamma - (x_{i+1,j} - x_\Gamma) \frac{\nu}{\beta^-} - \frac{(x_{i+1,j} - \alpha)^2 [f]}{2 \beta^-} \right\} \\ & + \gamma_{ij,3} \left\{ -u_\Gamma - (x_{i,j+1} - x_\Gamma) \frac{\nu}{\beta^-} - \frac{(x_{i,j+1} - \alpha)^2 [f]}{2 \beta^-} \right\}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

5.3.1 O algoritmo do MIIS

Para esse método, temos novamente, a equação diferencial linear do tipo Poisson dada pela equação (5.17). Assim o **passo 1** e o **passo 2** são os mesmo que para o algoritmo do MC. O **passo 3**, é semelhante ao **passo 3** do MC, o qual descrevemos abaixo:

Passo 3: Determinar os coeficientes indeterminados da equação (5.25) através da resolução dos sistemas (5.26) e (5.27).

Notemos que C_{ij} é o termo de correção envolvido nos cálculos para (i, j) . Esse termo de correção aparece nos pontos irregulares, pois necessitamos incorporar o valor de contorno, na equação de diferenças desses pontos.

Passo 4: Usando os coeficientes do **passo 3** e combinando o **passo 2**, obtemos um sistema linear como resultado da discretização. Resolvendo este sistema encontramos uma aproximação da solução de $u(x, y)$ em todo ponto

da malha.

5.4 Método das fronteiras imersas modificado (MFIM)

Conforme foi visto no capítulo 3 a adaptação do método de Codina & Baiges para o contexto de diferenças finitas resume em encontrar uma aproximação em um ponto u_{j+1} externo ao domínio, minimizando o erro através do método dos mínimos quadrados. O problema $2D$ segue as mesmas linhas de raciocínio que o caso $1D$, mas aqui com o diferencial que teremos uma célula de discretização e na qual a interface Γ corta mais de uma aresta que têm o mesmo ponto irregular como vértice.

Para exemplificar, consideremos um elemento do domínio, que é interceptado pelo contorno, como mostrado na figura 5.6. Neste caso (i, j) , $(i + 1, j)$ e $(i + 1, j - 1)$ são vértices da célula, nos quais os valores da velocidade e da função implícita são conhecidos, e x e y são pontos onde Γ intercepta as faces da célula, ou seja, onde $\phi = 0$.

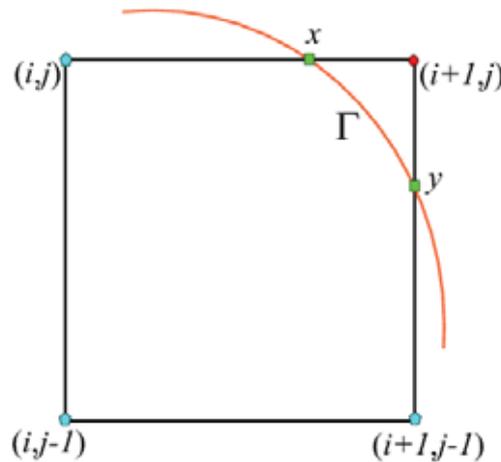


Figura 5.6: Elemento do domínio intersectado pelo contorno, em que (i, j) , $(i + 1, j)$ e $(i + 1, j - 1)$ são os vértices do elemento e x e y são os pontos onde o contorno Γ corta as arestas do elemento.

Agora, para a aresta $[(i, j); (i + 1, j)]$, o ponto (i, j) é um ponto interno ($\phi_{i,j} > 0$) e $(i + 1, j)$ é um ponto externo ($\phi_{i+1,j} < 0$). Dados os valores da velocidade e da função implícita nos pontos (i, j) e $(i + 1, j)$, pode-se definir a seguinte interpolação, conforme visto no capítulo 3

$$u = \frac{U_{i+1,j}\phi_{i,j} - U_{i,j}\phi_{i+1,j}}{\phi_{i,j} - \phi_{i+1,j}},$$

em que $U_{i,j}$ e $U_{i+1,j}$ são os valores nos pontos (i, j) e $(i + 1, j)$, respectivamente, $\phi_{i,j}$ e $\phi_{i+1,j}$ são os valores da função implícita ϕ nos pontos (i, j) e $(i + 1, j)$

respectivamente. Dessa forma, podemos definir o seguinte funcional

$$J(u) = (u - u_\Gamma)^2 = \left(\frac{U_{i+1,j}\phi_{i,j} - U_{i,j}\phi_{i+1,j}}{\phi_{i,j} - \phi_{i+1,j}} - u_\Gamma \right)^2$$

Notamos que para o valor $U_{i,j}$, há uma equação que vem da discretização do problema. O objetivo então é encontrar uma equação adicional para $U_{i+1,j}$ de forma a garantir que $J(u)$ seja mínimo, ou seja,

$$\frac{\partial J(u)}{\partial U_{i+1,j}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial J(u)}{\partial U_{i+1,j}} = 2 \left(\frac{U_{i+1,j}\phi_{i,j} - U_{i,j}\phi_{i+1,j}}{\phi_{i,j} - \phi_{i+1,j}} - u_\Gamma \right) \left(\frac{\phi_{i,j}}{\phi_{i,j} - \phi_{i+1,j}} \right) = 0.$$

Finalmente chegamos a

$$\frac{U_{i+1,j}\phi_{i,j}}{\phi_{i,j} - \phi_{i+1,j}} - \frac{U_{i,j}\phi_{i+1,j}}{\phi_{i,j} - \phi_{i+1,j}} - u_\Gamma = 0 \Rightarrow U_{i+1,j} = \left(\frac{U_{i,j}\phi_{i+1,j}}{\phi_{i,j} - \phi_{i+1,j}} + u_\Gamma \right) \left(\frac{\phi_{i,j} - \phi_{i+1,j}}{\phi_{i,j}} \right)$$

De um modo geral, definimos um funcional para o caso em que mais de uma aresta é interceptada por Γ , como sendo a soma das parcelas equivalentes à contribuição de cada aresta. Sendo assim, toma-se as arestas do elemento mostrado na figura 5.6. Supõe-se que $(i+1, j)$ seja um ponto interno, assim como (i, j) , teremos também uma interpolação para definir u no ponto y , onde o contorno intercepta a aresta $[(i+1, j-1); (i+1, j)]$, tal que $\phi(y) = 0$, da forma

$$u = \frac{U_{i+1,j}\phi_{i+1,j-1} - U_{i+1,j-1}\phi_{i+1,j}}{\phi_{i+1,j-1} - \phi_{i+1,j}}.$$

Agora, redefinindo o funcional J como

$$F(u) = \left(\frac{U_{i+1,j}\phi_{i,j} - U_{i,j}\phi_{i+1,j}}{\phi_{i,j} - \phi_{i+1,j}} - u_\Gamma \right)^2 + \left(\frac{U_{i+1,j}\phi_{i+1,j-1} - U_{i+1,j-1}\phi_{i+1,j}}{\phi_{i+1,j-1} - \phi_{i+1,j}} - u_\Gamma \right)^2$$

e desse modo, afim de determinar o mínimo desse funcional, procuramos calcular $U_{i+1,j}$, tal que $\frac{\partial J(u)}{\partial U_{i+1,j}} = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(u)}{\partial U_{i+1,j}} &= 2 \left(\frac{U_{i+1,j}\phi_{i,j} - U_{i,j}\phi_{i+1,j}}{\phi_{i,j} - \phi_{i+1,j}} - u_\Gamma \right) \left(\frac{\phi_{i,j}}{\phi_{i,j} - \phi_{i+1,j}} \right) \\ &+ 2 \left(\frac{U_{i+1,j}\phi_{i+1,j-1} - U_{i+1,j-1}\phi_{i+1,j}}{\phi_{i+1,j-1} - \phi_{i+1,j}} - u_\Gamma \right) \left(\frac{\phi_{i+1,j-1}}{\phi_{i+1,j-1} - \phi_{i+1,j}} \right) = 0, \end{aligned}$$

e finalmente podemos escrever $U_{i+1,j}$ na seguinte forma

$$U_{i+1,j} = \left(\frac{U_{i,j}\phi_{i,j}\phi_{i+1,j}}{(\phi_{i,j} - \phi_{i+1,j})^2} + \frac{u_{\Gamma}\phi_{i,j}}{\phi_{i,j} - \phi_{i+1,j}} + \frac{U_{i+1,j-1}\phi_{i+1,j}\phi_{i+1,j-1}}{(\phi_{i+1,j-1} - \phi_{i+1,j})^2} + \frac{u_{\Gamma}\phi_{i+1,j-1}}{\phi_{i+1,j-1} - \phi_{i+1,j}} \right) \left(\frac{1}{\frac{\phi_{i,j}^2}{(\phi_{i,j} - \phi_{i+1,j})^2} + \frac{\phi_{i+1,j-1}^2}{(\phi_{i+1,j-1} - \phi_{i+1,j})^2}} \right).$$

5.4.1 O algoritmo do MFIM

Para esse método, temos novamente, a equação diferencial linear do tipo Poisson dada pela equação (5.17). Assim o **passo 1** e o **passo 2** são os mesmos que para o algoritmo do MC. O **passo 3**, é semelhante ao **passo 3** do MC, o qual descrevemos abaixo:

Passo 3: Determinar os coeficientes indeterminados da equação (5.25). Por isso, usando a expressão encontrada para U_{ij} , substituímos o termo U_{ij} que aparece nas equações de diferenças dos pontos $(i-1, j)$ e $(i, j-1)$. Como U_{ij} já foi aproximado em função de $U_{i-1,j}$ e $U_{i,j-1}$, podemos juntar esses termos e obtermos os coeficientes da equação de diferenças de cada um desses pontos.

Para a equação de diferenças do ponto $(i, j-1)$ os coeficientes indeterminados são dados por

$$\gamma_{ij,1} = \Delta y, \quad \gamma_{ij,2} = \frac{\phi_{i+1,j-1}\Delta y}{\phi_{i,j-1}} - 2\Delta y \quad \text{e} \quad \gamma_{ij,3} = 0,$$

$$\kappa_{ij,1} = \Delta x, \quad \kappa_{ij,2} = \frac{\phi_{i,j-1}\phi_{i,j}\Delta x}{\frac{(\phi_{i,j-1} - \phi_{i,j})^2\phi_{i-1,j}^2}{(\phi_{i-1,j} - \phi_{i,j-1})^2} + \frac{(\phi_{i,j-1} - \phi_{i,j})^2\phi_{i,j-1}^2}{(\phi_{i-1,j} - \phi_{i,j-1})^2}} - 2\Delta x \quad \text{e}$$

$$\kappa_{ij,3} = \frac{\phi_{i-1,j}\phi_{i,j}\Delta x}{\frac{(\phi_{i-1,j} - \phi_{i,j})^2\phi_{i-1,j}^2}{(\phi_{i-1,j} - \phi_{i,j+1})^2} + \frac{(\phi_{i,j-1} - \phi_{i,j})^2\phi_{i,j-1}^2}{(\phi_{i-1,j} - \phi_{i,j-1})^2}},$$

e o termo de correção é

$$C_{i,j} = \frac{(\phi_{i,j-1} - \phi_{i+1,j-1})u_{\Gamma 1}}{\phi_{i,j-1}} + \frac{\phi_{i-1,j}u_{\Gamma 2}}{\frac{(\phi_{i-1,j} - \phi_{i,j})^2\phi_{i-1,j}^2}{(\phi_{i-1,j} - \phi_{i,j-1})^2} + \frac{(\phi_{i-1,j} - \phi_{i,j})^2\phi_{i,j-1}^2}{(\phi_{i-1,j} - \phi_{i,j-1})^2}} + \frac{\phi_{i,j-1}u_{\Gamma 3}}{\frac{(\phi_{i,j-1} - \phi_{i,j})^2\phi_{i-1,j}^2}{(\phi_{i-1,j} - \phi_{i,j-1})^2} + \frac{(\phi_{i,j-1} - \phi_{i,j})^2\phi_{i,j-1}^2}{(\phi_{i-1,j} - \phi_{i,j-1})^2}},$$

onde, $u_{\Gamma 1}$ é o valor de u no segmento $[(i, j-1); (i+1, j-1)]$, $u_{\Gamma 2}$ é o valor de u no

segmento $[(i-1, j); (i, j)]$ e u_{Γ_3} é o valor de u no segmento $[(i, j-1); (i, j)]$.

Notemos que C_{ij} é o termo de correção envolvido nos cálculos para (i, j) . Esse termo de correção aparece nos pontos irregulares, pois, em tais pontos precisamos incorporar o valor no contorno.

Passo 4: Usando os coeficientes do **passo 3** e combinando o **passo 2**, obtemos um sistema linear pentadiagonal como resultado da discretização. Resolvendo este sistema encontramos uma aproximação da solução de $u(x, y)$ em todo ponto da malha.

Resultados numéricos: problemas elípticos bidimensionais

Neste capítulo apresentaremos os resultados numéricos de problemas bidimensionais, utilizando os métodos investigados no capítulo 5. Utilizaremos as seguintes notações:

- MIIS: Método das interfaces imersas simplificado.
- MCL: Método clássico com interpolação linear.
- MFIM: Método do tipo Fronteira Imersa modificado.

Em todos os exemplos numéricos, adotaremos o cálculo do erro como:

$$\|E_n\|_\infty = \|u_{\text{exato}} - u_{\text{numérico}}\|_\infty,$$

ou

$$\|E_n\|_2 = \|u_{\text{exato}} - u_{\text{numérico}}\|_2,$$

onde $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_2$ são as normas L_∞ e L_2 , respectivamente.

6.1 Problemas elípticos bidimensionais em domínios irregulares: comparação entre os métodos

Nessa seção, simularemos problemas que estejam definidos em domínios irregulares. Nesse estudo, implementamos os três métodos estudados para resolução de problemas em que a fronteira Γ apresenta uma geometria que não coincide com a malha computacional e cuja equação esteja definida em um retângulo $[a, b] \times [c, d]$ qualquer. Para tanto, consideremos a equação de

Tabela 6.1: Comparação dos erros na norma $\|E_n\|_\infty$ de cada método para o problema (6.2) em malhas 20×20 , 40×40 , 80×80 .

N	MCL	O	MFIM	O	MIIS	O
20×20	4.250×10^{-4}	—	2.250×10^{-4}	—	2.693×10^{-4}	—
40×40	1.069×10^{-4}	1.99	5.547×10^{-5}	2.02	6.733×10^{-5}	2.00
80×80	2.637×10^{-5}	2.02	1.386×10^{-5}	2.00	$1.6717e - 005$	2.01

Poisson bidimensional:

$$\nabla^2(x, y) = f(x, y), \quad \text{em } \Omega, \quad (6.1)$$

e uma condição de contorno definida sobre uma curva do \mathbb{R}^2 com uma geometria que não coincide com a malha. Com o intuito de estudar estes problemas que estejam definidos em geometrias irregulares, fixaremos que $u = 0$ em todo ponto (x_i, y_j) da malha em $[a, b] \times [c, d] - (\Omega \cup \Gamma)$.

Exemplo 1 Neste exemplo, resolveremos o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= -2\cos(x + y), \quad \text{em } \Omega = [-1, 1] \times [-1, 1], \\ u &= \cos(x + y), \quad \text{em } \Omega. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Esse problema está inserido no quadrado $\mathcal{B} = [-2, 2] \times [-2, 2]$, o qual será discretizado. Esse problema tem como solução exata

$$u(x, y) = \cos(x + y) \quad \text{em } \Omega.$$

A intenção desse exemplo, é mostrar que os métodos apresentam ordem de convergência 2 em um problema com geometria regular, mostrando assim a consistência dos métodos. Na tabela 6.1, podemos observar as soluções em diferentes malhas, bem como suas respectivas ordens, que são 2 como era esperado.

Exemplo 2 Neste exemplo, resolveremos o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= -2\cos(x + y), \quad \text{em } \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}, \\ u &= \cos(x + y), \quad \text{em } x^2 + y^2 = 1. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Esse problema está inserido no quadrado $\mathcal{B} = [-2.5, 2.5] \times [-2.5, 2.5]$, o qual será discretizado. Esse problema tem como solução exata

$$u(x, y) = \cos(x + y) \quad \text{em } \Omega.$$

Nas figuras (??) podemos ver a solução exata. Na tabela 6.2 podemos observar os resultados dos métodos estudados, observando que o MCL é o

Tabela 6.2: Comparação dos erros na norma $\|E_n\|_\infty$ de cada método para o problema (6.3) em malhas 20×20 , 40×40 , 80×80 .

N	MCL	O	MFIM	O	MIIS	O
20×20	0.0044	–	0.0053	–	0.0061	–
40×40	0.0012	1.87	0.0013	1.99	0.0015	2.02
80×80	3.353×10^{-4}	1.83	3.272×10^{-4}	1.99	3.764×10^{-4}	1.99

que apresenta uma ordem maior que 1.5 mas um pouco menor que 2. O MIIS apresenta resultados com ordem 2 de convergência, mas com uma ligeira melhoria na precisão, em comparação com os erro para o MFIM.

Conclusão

Neste trabalho, analisamos e implementamos métodos de diferenças finitas para solução de uma equação de Poisson definida em um domínio irregular que não coincide com a malha cartesiana. Em particular, analisamos o Método das interfaces imersas (MII), métodos clássicos usando interpolações linear (MCL) e quadrático (MCQ) e um método do tipo fronteiras imersas modificado (MFIM). O método das interfaces imersas (MII) foi originalmente proposto para resolver problemas envolvendo EDP's com coeficientes e soluções descontínuos. O método clássico, seja usando interpolação linear ou quadrática, foi uma das primeiras ideias usadas na tentativa de resolver problemas definidos em domínios com geometrias irregulares, conforme pode ser visto em [13]. O método de Fronteiras imersas analisado nesse trabalho é uma adaptação do trabalho de Codina & Baiges [19], o qual foi originalmente proposto no contexto de elementos finitos.

No caso unidimensional os resultados ficaram bem claros, e conforme já comentado, pudemos concluir que o MCL e o MFIM são equivalentes, e apresentaram uma ordem de convergência em torno de 2. A oscilação da ordem de convergência é provavelmente, um resultado da maneira escolhida para os estudos numéricos. Baseados no que foi comentado por Jomaa & Macaskill [12], acreditamos que a variação de um parâmetro da fórmula de interpolação, produziram uma perturbação do MCL gerando assim uma oscilação na ordem de convergência, o mesmo valendo para o MFIM, que apesar de não usar esse mesmo parâmetro em sua formulação, utiliza a função implícita ϕ , cuja expressão é igual ao numerador do parâmetro do MCL, o que também gera uma variação da mesma, conforme a variação da malha.

Ainda no caso unidimensional, o MCQ e o MII apresentaram resultados próximos para a maioria dos exemplos testados. Provamos a equivalência

entre o MCL e o MFIM, comparando o sistema linear obtido da discretização de cada um dos métodos, mostrando a igualdade entre eles.

Finalmente, foi realizado um estudo teórico desses métodos para o caso bidimensional, onde foi mostrado a formulação e as principais ideias de cada método. Diante de algumas dificuldades e complexidade de implementação do MII no caso bidimensional, como a mudança de coordenada local para obtenção das condições de salto, propomos uma simplificação do mesmo, adaptando a ideia desenvolvida para o uso das interpolações no método clássico. Os resultados numéricos comprovaram que a simplificação é eficiente e apresentando ordem 2 de convergência para a solução de uma equação de Poisson definida em um círculo.

Verificamos os resultados numéricos para um problema em um domínio regular, mostrando a consistência dos métodos. Posteriormente, realizamos uma comparação para um problema definido em uma geometria circular, onde notamos que o MCL apresenta resultados inferiores aos demais métodos, enquanto o MFIM e MIIS ficaram próximos, apresentando ordem de convergência em torno de 2.

Uma das principais conclusões, é que estudos comparativos entre métodos são difíceis de serem realizados, uma vez que os resultados são variáveis e apresentam comportamentos diferentes conforme muda-se a geometria do problema, o termo fonte da equação, etc. Mas, apesar disso, estes estudos são válidos, conforme pode ser visto em [21], pois, reúnem métodos diferentes em um mesmo contexto.

Como trabalhos futuros, pretendemos realizar uma melhor análise dos métodos no caso bidimensional, inclusive implementando o MII (conforme proposto em [7]), e comparando-o com a simplificação aqui proposta, analisando se existe vantagem em utilizar o MII sem a simplificação, em problemas bidimensionais irregulares. Outra possibilidade é analisar esses métodos para problemas tridimensionais e, além disso, aprimorar as ideias para aplicá-las na solução da equação de Navier-Stokes definida em domínios irregulares.

Referências Bibliográficas

- [1] C. Peskin. *Flow patterns around heart valves: A numerical method*. Journal of Computational Physics, 10, 252-271, 1972.
- [2] A. Pinelli, I.Z. Naqavi, U. Piomelli, J. Favier. *Immersed-boundary methods for general finite-difference and finite-volume Navier-Stokes solvers*. Journal of Computational Physics, 229, 9073-9091, 2010.
- [3] P. Lee, B.E. Griffith, C.S. Peskin. *Immersed boundary method for advection-electrodifusion with implicit timestepping and local mesh refinement*. Journal of Computational Physics, 229, 5208-5227, 2010.
- [4] C.S. Peskin. *The immersed boundary method*. Acta Numerics, 11, 1-39, 2002.
- [5] R.J. Leveque, Z. Li. *The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources*. SIAM Journal on Numerical Analysis, 31, 1019-1044, 1994.
- [6] R.J. Leveque, Z. Li. *The immersed interface method for Stokes flow with elastic boundaries or surface tension*. SIAM Journal on Scientific Computing, 18, 709-738, 1997.
- [7] Z. Li, K. Ito. *The immersed interface method: numerical solutions of PDEs involving interface and irregular domains*. SIAM, Philadelphia, 2007.
- [8] X.D. Liu, R.P. Fedkiw, M. Kang. *A boundary conditions capturing method for Poisson's equations on irregular domain*. Journal of Computational Physics, 147, 60-85, 1998.
- [9] T. Hou, Z. Li, S. Osher, H. Zhao. *A hibrid method for moving interface problems with aplications to the Hele-Shaw flow*. Journal of Computational Physics, 134, 236-252, 1997.

-
- [10] Z. Li, H. Zhao, H. Gao. *A numerical study of electro-migration voiding by evolving level set functions on a fixed cartesian grid*. Journal of Computational Physics, 152, 281-304, 1999.
- [11] Z. Li, M.C. Lai. *The immersed interface method for the Navier-Stokes Equations with singular sources*. Journal of Computational Physics, 171, 822-842, 2001.
- [12] Z. Jomaa, C. Macaskill. *The embedded finite difference method for the Poisson equations in a domain with an irregular boundary and Dirichlet boundary conditions*. Journal of Computational Physics, 202, 488-506, 2005.
- [13] G.H. Shortley, R. Weller. *The numerical solution of Laplaces equation*. Journal of Applied Physics., 9, 334-348, 1938.
- [14] Z. Tan, D.V. Le, K.M. lim, B.C.Khoo. *Immersed interface method for incompressible Navier-Stokes equations with discontinuous viscosity across the interface*. SIAM Journal on Scientific Computing, 31, 1798-1819, 2009.
- [15] L. Lee, R.J. Leveque. *An immersed interface method for incompressible Navier-Stokes Equations*. SIAM Journal on Scientific Computing., 25, 832-856, 2003.
- [16] Z. Jomaa, C. Macaskill. *Numerical solution of the 2D Poisson equation on an irregular domain with Robin boundary conditions*. Proc. CTAC 2008, ANZIAN Journal, 50, 413-428, 2008.
- [17] L.A. Petri. *Métodos de fronteira imersa em mecânica das fluidos*. Dissertação de Mestrado em Ciências da Computação e Matemática Computacional, Universidade de São Paulo, 2010, <http://www.teses.usp.br/>.
- [18] D. Calhoun, R. LeVeque. *A cartesian grid finite-volume method for advection-diffusion equation in irregular geometries*. Journal of Computational Physics, 157, 143-180, 1999.
- [19] R. Codina, J. Baiges. *Approximate imposition of boundary conditions in immersed boundary methods*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 80, 1379-1405, 2009.
- [20] C.M. Oishi, F.S. Souza, L.A. Petri, G.C. Buscaglia. *Fronteiras imersas em diferenças finitas: imposição aproximada de contornos*. Congresso Nacional de Matemática Aplicada e computacional, Águas de Lindóia, SP, 2010.

-
- [21] K. Manoj, P. Joshi. *Some Numerical Techniques for Solving Elliptic Interface Problems*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 28, 94-114, 2010.
- [22] X. Feng, Z. Li. *Simplified Immersed Interface Methods for Elliptic Interface Problems with Straight Interfaces*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 28, 188-203, 2010.
- [23] C. Brehm, H.F. Fasel. *A novel concept for the design of immersed interface methods*. Journal of Computational Physics, Vol. 242, 234-267, 2013.
- [24] L. C., Evans. *Partial differential equations*. Graduate Studies in Mathematics, 19, AMS, 1998.
- [25] J. C., Strikwerda. *Finite difference schemes and partial differential equations*. SIAM, Philadelphia, 2004.