

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA
CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA**

DANTE JAVIER SOLIS ONCOY

**SÍNTESE DE CONTROLE CHAVEADO PARA SISTEMAS
FUZZY TAKAGI-SUGENO USANDO UMA FUNÇÃO DE
LYAPUNOV FUZZY**

Ilha Solteira
2023

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

DANTE JAVIER SOLIS ONCOY

**SÍNTESE DE CONTROLE CHAVEADO PARA SISTEMAS
FUZZY TAKAGI-SUGENO USANDO UMA FUNÇÃO DE
LYAPUNOV FUZZY**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Ilha Solteira-UNESP como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Especialidade: Automação.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Cardim

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

S687s Solis Oncoy, Dante Javier.
Síntesis de controle chaveado para sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno usando uma função de Lyapunov Fuzzy / Dante Javier Solis Oncoy . -- Ilha Solteira: [s.n.], 2023
103 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2023

Orientador: Rodrigo Cardim

Inclui bibliografia

1. Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno. 2. Controle chaveado. 3. Função de Lyapunov Fuzzy.


Amanda Sertori dos Santos

Bibliotecária - CRB/8-9061
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao
Usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: SÍNTESE DE CONTROLE CHAVEADO PARA SISTEMAS FUZZY TAKAGI-SUGENO USANDO UMA FUNÇÃO DE LYAPUNOV FUZZY

AUTOR: DANTE JAVIER SOLIS ONCOY

ORIENTADOR: RODRIGO CARDIM

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em , área: Automação pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. RODRIGO CARDIM (Participação Presencial)
Departamento de Engenharia Eletrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA (Participação Presencial)
Departamento de Engenharia Eletrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. UILIAM NELSON LENDZION TOMAZ ALVES (Participação Virtual)
Departamento de Controle e Processos Industriais / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Paraná - IFPR

Documento assinado digitalmente



UILIAM NELSON LENDZION TOMAZ ALVES

Data: 25/08/2023 12:36:28-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Ilha Solteira, 25 de agosto de 2023

*Dedico este trabalho à Deus,
e com especial carinho para minha mãe e minha namorada.*

Agradecimentos

Agradeço principalmente a Deus por me permitir concluir essa etapa com serenidade, me dando saúde, cuidando dos meus familiares e me iluminando nos momentos de dificuldade. Sem essa ajuda, este trabalho não teria sido possível.

À minha melhor amiga e suporte, minha amada Ines, pelo companheirismo, paciência e carinho que ela teve para comigo durante esse trabalho.

À minha amada mãe Beatriz, por seu apoio e amor incondicional durante toda a vida.

Ao professor Dr. Rodrigo Cardim, pela oportunidade, pela excelente orientação e pela grande amizade que me ofereceu ao longo dessa etapa. Sem dúvida, será um grande prazer continuarmos trabalhando juntos.

Ao professor Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, pelos ensinamentos, pela amizade e pelos conselhos profissionais e pessoais compartilhados durante todo esse período. Sem dúvida, o senhor é um exemplo de professor, pesquisador e pessoa.

Ao meu amado irmão e meu querido pai, pela amizade e pela inspiração para a pesquisa.

Aos professores Dr. Edvaldo Assunção e Dr. Flavio Faria, pelas dicas de pesquisa e amizade.

A todos os meus amigos do laboratório de pesquisa de controle, pelas conversas interessantes sobre pesquisa e a vida, que fazem com que seja um prazer pertencer a este grande laboratório.

A todos os meus amigos e compatriotas que moram na Ilha, por fazerem desta bela cidade um lugar mais confortável para se viver.

À CAPES pelo apoio financeiro.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*"A verdadeira riqueza não consiste em ter grandes posses,
mas em ter poucas necessidades."
(Epicteto)*

Resumo

O uso de uma função Lyapunov fuzzy tem vantagens no estudo da estabilidade dos sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (T-S), assim como no projeto de estratégias de controle mais eficientes. Nesta dissertação, é proposta uma nova abordagem para o projeto de controladores chaveados usando uma função de Lyapunov fuzzy. Utilizando as propriedades da combinação convexa de números, são apresentadas novas condições de projeto expressas na forma de desigualdades matriciais lineares (LMIs) para um controlador chaveado com uma lei de chaveamento baseada nas funções *max* e *min*, as quais são amplamente usadas na literatura com respeito aos sistemas chaveados. A vantagem da abordagem proposta é que ela apresenta um baixo esforço computacional no projeto dos ganhos e um baixo número de controladores a serem chaveados, em comparação com outros métodos apresentados na literatura. Além disso, ela pode ser estendida para o projeto de controladores chaveados usando uma função de Lyapunov fuzzy generalizada, diminuindo o conservadorismo das condições para um grau mais alto de generalização. Portanto, com base nessa proposta, um controlador chaveado será projetado levando em conta um sistema não linear com a presença de incertezas e, no caso de sistemas não lineares sem a presença de incertezas, a estratégia do controlador chaveado será aplicada a um controlador baseado na compensação paralela distribuída (PDC), para logo apresentar o controlador de não compensação paralelo distribuído (non-PDC) chaveado, a fim de reduzir o conservadorismo das condições de projeto. Vários exemplos serão analisados a fim de esclarecer os conceitos fundamentais que serão úteis para o desenvolvimento deste trabalho, assim como para verificar a eficiência dos resultados obtidos em relação a outros métodos propostos na literatura.

Palavras-chave: função de Lyapunov fuzzy; sistemas fuzzy Takagi-Sugeno; controle chaveado; desigualdades matriciais lineares.

Abstract

The use of a fuzzy Lyapunov function has advantages in studying the stability of fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) systems as well as in designing more efficient control strategies. In this work, a new approach to the design of switched controllers using a fuzzy Lyapunov function is proposed. Based on the properties of convex combinations of numbers and a switching law based on the *max* and *min* functions widely used in the literature related to switched systems, new design conditions for the switched controller are presented in the form of linear matrix inequalities (LMIs). The advantage of the proposed approach is that it has a low computational complexity in the design of the gains and a small number of controllers to be switched, compared to other methods presented in the literature. Moreover, it can be extended to the design of switched controllers using a generalised fuzzy Lyapunov function, reducing the conservatism of the conditions for a higher degree of generalisation. Therefore, based on this proposal, a switched controller will be designed considering a nonlinear system with the presence of uncertainties and, in the case of nonlinear systems without the presence of uncertainties, the switched controller strategy will be applied to a controller based on parallel distributed compensation (PDC), and then, is presented a non parallel distributed compensation (non-PDC) switched controller, in order to reduce the conservatism of the design conditions. Several examples will be analysed in order to clarify the basic concepts that will be useful for the development of this work, as well as to verify the efficiency of the results obtained in relation to other methods proposed in the literature.

Keywords: fuzzy Lyapunov function; Takagi-Sugeno fuzzy systems; switched control; linear matrix inequalities.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Circuito equivalente de um conversor buck básico	27
Figura 2 – Funções de pertinência das variáveis premissa	27
Figura 3 – Diferentes superfícies de nível incluídas na região \mathbf{F}	36
Figura 4 – Trajetórias das funções quadráticas locais e a função de Lyapunov fuzzy para uma condição inicial $x_0 = [0.3 \quad -0.3]$	37
Figura 5 – Regiões admissíveis para a trajetória do sistema no Exemplo 3, \mathbf{F} (linhas ponteadas), $\mathbf{F} \cap \mathbf{H}$ (cor amarela) e \mathbf{G}_{c^*} (cor verde) (a) $\rho_i = 9$. (b) $\rho_i = 4$	38
Figura 6 – Visão geral da divisão do espaço \mathbb{R}^n devido à uma função de comutação $\sigma(x(t))$	41
Figura 7 – Sub-regiões obtidas pela função por partes fornecida no Exemplo 4	42
Figura 8 – Diagrama de blocos do controlador chaveado	45
Figura 9 – Diagrama de blocos do controlador chaveado para sistemas incertos	47
Figura 10 – Região de factibilidade para $\rho_i = \pi/4, i \in \mathbb{K}_r$, Mozelli, Palhares e Avellar (2009) (\bullet), método do politopo (\circ, \bullet, \bullet). (a) Faria, Silva e Oliveira (2013) para $k = 1$ (\bullet, \bullet). (b) Faria, Silva e Oliveira (2013) para $k = 4$ (\bullet)	57
Figura 11 – Região de factibilidade para $\rho_i = 10, i \in \mathbb{K}_r$, Mozelli, Palhares e Avellar (2009) (\bullet), método do politopo (\circ, \bullet, \bullet). (a) Faria, Silva e Oliveira (2013) para $k = 1$ (\bullet, \bullet). (b) Faria, Silva e Oliveira (2013) para $k = 4$ (\bullet)	58
Figura 12 – Regiões admissíveis para as trajetórias de estado do sistema para $\rho_i = 10$, $\partial\mathbf{F}$ (linhas ponteadas), $\mathbf{F} \cap \mathbf{H}$ (cor amarela) e as superfícies de nível estimadas com o Teorema 6 (a) $[a, b] = [-6, 35]$. (b) $[a, b] = [-2, 12]$	59
Figura 13 – Valores máximos de λ em relação a ρ no Exemplo 7	60
Figura 14 – Região de factibilidade para $\rho_i = 10, i \in \mathbb{K}_r$ considerando matrizes auxiliares fuzzy em todas as estratégias, Mozelli, Palhares e Avellar (2009) (\bullet), Faria, Silva e Oliveira (2013) para $k = 1$ (\bullet, \bullet) e o método do politopo (\circ, \bullet, \bullet)	63
Figura 15 – Regiões admissíveis da trajetória do sistema para $\rho_i = 10$, $\partial\mathbf{F}$ (linhas ponteadas), $\mathbf{F} \cap \mathbf{H}$ (cor amarela) e as superfícies de nível estimadas com o Teorema 6: linha preta (sem matrizes auxiliares fuzzy) e linha azul (considerando matrizes auxiliares fuzzy)	63
Figura 16 – Forma geral do politopo convexo \mathcal{F}	66
Figura 17 – (a) Região de factibilidade obtida com o Teorema 8 (\bullet), o Corolário 1 (\bullet, \bullet), e o Teorema 12 (\bullet, \bullet, \circ), (b) Região de factibilidade ampliada para o Corolário 1 (\bullet), e o Teorema 12 (\bullet, \circ)	76
Figura 18 – Esquema do sistema de suspensão magnética	77

Figura 19 – Comparação das respostas temporais do sistema, entre o Teorema 7, o Teorema 8, e o Teorema 12. (a) Posição da massa. (b) Velocidade da massa. (c) Sinal de controle. (d) Lei de chaveamento $\sigma(t)$	79
Figura 20 – Comparação das respostas temporais do sistema, entre o Teorema 7, o Teorema 8, e o Teorema 12. (a) Sinal de controle. (b) Posição da massa	80
Figura 21 – (a) Região de factibilidade obtida com o Teorema 4 (\bullet), Mozelli, Palhares e Avellar (2009) (\bullet, \bullet), Lazarini (2021) ($\bullet, \bullet, \bullet$) e o Corolário 2 ($\bullet, \circ, \bullet, \bullet$); (b) Região de factibilidade ampliada para o Corolário 2 (\bullet), e o Teorema 13 (\bullet, \circ)	85
Figura 22 – Região de factibilidade obtida com o Teorema 13 (\bullet) e o Teorema 14 (\bullet, \circ)	88
Figura 23 – Diagrama de blocos do controlador non-PDC chaveado	90
Figura 24 – (a) Região de factibilidade obtida com o Teorema 13 (\bullet) e o Teorema 15 (\bullet, \circ). (b) Região de factibilidade obtida com o Teorema 14 (\bullet) e o Teorema 16 (\bullet, \circ)	95
Figura 25 – Perspectiva para a divisão do politopo. (a) Considerando a superfície de chaveamento. (b) Considerando uma superfície arbitrária	98

Lista de tabelas

Tabela 1	–	Valores máximos de λ para diferentes valores de ρ no Exemplo 7	60
Tabela 2	–	Tabela comparativa do número de LMIs das estratégias analisadas para a análise de estabilidade.	69
Tabela 3	–	Tabela comparativa do número de LMIs (análise de estabilidade) com respeito ao número de variáveis premissa.	69
Tabela 4	–	Tabela comparativa do número de LMIs e ganhos a serem chaveados. .	70
Tabela 5	–	Tabela comparativa do número de ganhos a serem chaveados com respeito ao número de variáveis premissa.	70
Tabela 6	–	Tabela comparativa do número de LMIs e ganhos a serem chaveados (entre parênteses).	75
Tabela 7	–	Parâmetros de simulação.	78
Tabela 8	–	Valores máximos de b com respeito a alguns valores de a e o número de LMIs de cada estratégia.	95

Lista de abreviaturas e siglas

LMI	Linear Matrix inequalities
LPV	Linear Parameter-Varying
LTI	Linear Time-Invariant
PDC	Parallel Distribution Compensation
T-S	Takagi Sugeno
MFs	Membership Functions
FLF	Função de Lyapunov fuzzy
FLG	Função de Lyapunov generalizada

Lista de símbolos

\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
\mathbb{R}_{0+}	Conjunto dos números reais não negativos incluindo o zero.
\mathbb{R}^n	Espaço euclidiano de dimensão n .
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto de matrizes de dimensão n por m .
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais.
\mathbb{K}_r	Representa o conjunto de números $\{1, 2, \dots, r\}, \forall r \in \mathbb{N}$.
\mathbf{D}	Representa um conjunto compacto que inclui a origem.
$\mathbf{D} - \{0\}$	Representa o conjunto compacto \mathbf{D} sem incluir a origem.
X^T	Representa a transposta da matriz X
I	Matriz Identidade de ordem apropriado.
$X \geq (>)0$	Matriz X simétrica positiva semidefinida (definida).
$*$	Bloco simétrico de uma matriz simétrica.
Λ_r	Conjunto convexo de dimensão r , ou seja, $\Lambda_r = \{\alpha \in \mathbb{R}^n / \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1, i \in \mathbb{K}_r\}$.
$X(\alpha)$	Matriz fuzzy $\sum_{i=1}^r \alpha_i(t)X_i$, sendo $\alpha_i(t) \in \Lambda_r$

Sumário

1	INTRODUÇÃO	16
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS E CONCEITUAIS	21
2.1	SISTEMAS NÃO LINEARES	21
2.1.1	Estabilidade de Lyapunov	23
2.2	MODELO FUZZY TAKAGI-SUGENO	24
2.2.1	Incertezas dos parâmetros	28
2.2.2	Controle fuzzy	30
2.2.3	Condições de projeto alternativas	31
2.2.4	Análise da estabilidade assintótica local	34
2.3	FUNÇÃO DE LYAPUNOV FUZZY	36
2.4	TÉCNICAS DE RELAXAMENTO BASEADAS EM SUB-REGIÕES	40
2.4.1	Técnicas de relaxamento usando expressões positivas	40
2.5	CONTROLE CHAVEADO	44
2.5.1	Controle chaveado com parâmetros incertos	46
3	ANÁLISE DA ESTABILIDADE CONSIDERANDO UMA FLF	50
3.1	ANÁLISE DAS DERIVADAS DAS FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA .	50
3.1.1	Estratégias iniciais	51
3.1.2	Estratégias que consideram cenários factíveis	52
3.2	ANÁLISE DA ESTABILIDADE	54
3.2.1	Condições de estabilidade considerando matrizes auxiliares fuzzy	60
4	CONTROLE CHAVEADO PARA SISTEMAS NÃO LINEA- RES INCERTOS	65
4.1	PROJETO DE CONTROLE CHAVEADO BASEADO NO MÉTODO DO POLITÓPO	65
4.1.1	Análise do esforço computacional	68
4.2	ESTRATÉGIA ALTERNATIVA	70
4.3	VALIDAÇÃO	75
5	PROJETO DE CONTROLE CHAVEADO USANDO UMA FLG	81
5.1	PROJETO DE CONTROLE PDC CHAVEADO	81
5.1.1	Projeto de controle chaveado usando uma FLF	82
5.1.2	Projeto de controle chaveado usando uma FLG	84
5.2	PROJETO DE CONTROLE NON-PDC CHAVEADO	88

5.2.1	Projeto de controle chaveado usando uma função de Lyapunov não quadrática	89
5.2.2	Projeto de controle chaveado usando uma função de Lyapunov não quadrática generalizada	93
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	96
6.1	CONCLUSÕES	96
6.2	POSSÍVEIS PERSPECTIVAS PARA TRABALHOS FUTUROS	97
6.2.1	Análise de estabilidade	97
6.2.2	Projeto de controle chaveado	98
6.2.3	Extensão dos resultados	98
	REFERÊNCIAS	99

1 INTRODUÇÃO

Na realidade, a não linearidade é uma propriedade que está presente na grande maioria dos sistemas. Em contraste com os sistemas lineares, o comportamento dos sistemas não lineares abrange vários fenômenos, como ciclos-limite, múltiplos pontos de equilíbrio, bifurcações, caos, entre outros, que surgem devido aos múltiplos termos não lineares presentes no modelo analítico do sistema (SLOTINE; LI, 1991). Portanto, o estudo da estabilidade a partir de uma análise direta do modelo matemático apresenta diversas dificuldades específicas para cada sistema. Focado no objetivo de estudar a estabilidade dos sistemas não lineares, o método direto de Lyapunov (ou apenas só método de Lyapunov) representa a abordagem mais favorável para esse tipo de sistemas. Este método relaciona o comportamento de um sistema a uma função denominada função de Lyapunov. Então, uma análise direta da função de Lyapunov pode apresentar menos dificuldade e gerar resultados sobre o comportamento do sistema.

De modo geral, nos sistemas lineares invariantes no tempo (do inglês, linear time invariant (LTI)), o método direto de Lyapunov se baseia na análise de uma função conhecida como a função de Lyapunov quadrática. Nesse caso, o método de Lyapunov apresenta a vantagem de garantir que existe uma função de Lyapunov quadrática que garante o conhecimento da estabilidade da origem respeito do sistema LTI dado. Contudo, nos sistemas não lineares, a principal desvantagem do método de Lyapunov reside no caráter contingente das respostas obtidas, ou seja, a análise de uma determinada função de Lyapunov não garante o conhecimento das propriedades do sistema. Com base nisso, um dos principais objetivos do estudo de sistemas não lineares é a busca por novas funções de Lyapunov candidatas que possam gerar uma melhor informação sobre o comportamento do sistema.

Por outro lado, a origem da lógica fuzzy data de tempos mais recentes (ZADEH, 1965). Entretanto, foi apenas em 1974 que essa ferramenta foi aplicada no projeto do controlador fuzzy (MAMDANI, 1974) e, depois, na modelagem de sistemas não lineares (TAKAGI; SUGENO, 1985). Essa última aplicação apresentou uma nova perspectiva sobre a análise de sistemas não lineares pelo fato de que esses sistemas poderiam ser aproximados em qualquer nível de precisão por meio de um sistema fuzzy Takagi-Sugeno (T-S). Os sistemas fuzzy T-S aproximam um sistema não linear por meio de uma combinação convexa de um conjunto de subsistemas lineares com seus respectivos pesos. Essa representação gera uma enorme vantagem ao analisar a estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema não linear por meio de uma função de Lyapunov quadrática e obter condições do comportamento do sistema com base na solução de um conjunto de desigualdades matriciais lineares (do inglês, linear matrix inequalities (LMIs)) (TANAKA; WANG, 2001). Da mesma forma, com o avanço da computação, os algoritmos baseados

na busca pela solução das LMIs tiveram um grande avanço na década dos anos 1990 (BOYD et al., 1994), obtendo resultados altamente precisos por meio do desenvolvimento do método de pontos interiores. Portanto, esses progressos em conjunto impulsionaram o estudo da estabilidade de sistemas não lineares com base em seu modelo fuzzy T-S.

Embora o modelo T-S fuzzy gere uma perspectiva favorável para a análise de um sistema não linear por meio de uma função de Lyapunov quadrática, a desvantagem característica do método de Lyapunov em sistemas não lineares ainda permanece, o que implica que as condições obtidas na forma de LMIs por meio de uma função de Lyapunov quadrática são apenas condições suficientes para garantir a estabilidade do sistema. A fim de obter condições que permitam uma solução para um número maior de sistemas, um dos objetivos principais de pesquisa na área de sistemas fuzzy T-S se foca em reduzir o conservadorismo das condições. Na literatura, esse objetivo foi desenvolvido em princípio por meio de duas abordagens principais: por meio de técnicas de relaxamento que abordam diretamente as LMIs e pela proposta de novas funções de Lyapunov candidatas. Com relação à primeira abordagem, várias técnicas foram propostas na literatura, reduzindo o conservadorismo das condições com base em uma função de Lyapunov quadrática (KIM; LEE, 2000; TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003; FANG et al., 2006). Contudo, essas técnicas introduzem matrizes de relaxamento auxiliares, aumentando o número de variáveis de decisão e o número de LMIs a serem resolvidos. O incremento das LMIs, mostram outra desvantagem importante dos sistemas fuzzy T-S, o considerável aumento do esforço computacional na busca de soluções para as LMIs em relação ao aumento do número de variáveis de premissa. Portanto, o baixo esforço computacional na busca de soluções tornou-se outro objetivo a ser levado em conta. Com relação à segunda abordagem, várias funções de Lyapunov candidatas foram propostas, entre elas, a função de Lyapunov por partes (JOHANSSON; RANTZER; ARZEN, 1999), a função de Lyapunov fuzzy (TANAKA; HORI; WANG, 2003), a função de Lyapunov baseadas em integral de linha (RHEE; WON, 2006), entre outras. Essa abordagem encontra a limitação da função quadrática e introduzem informações adicionais na função de Lyapunov candidata. Portanto, elas geram condições menos conservadoras sem a necessidade de aumentar o esforço computacional. No entanto, também introduzem novos desafios para lidar com essas novas informações, a fim de manter as condições na forma de LMIs.

Nos últimos anos, a busca para reduzir o conservadorismo das condições de estabilidade tem se concentrado principalmente na consideração das informações das funções de pertinência (do inglês, membership functions (MFs)) do sistema fuzzy T-S. Essas informações são aproveitadas sendo introduzidas principalmente nas funções de Lyapunov candidatas. Adicionalmente, uma enorme vantagem da consideração das MFs é que algumas funções de Lyapunov, como a função de Lyapunov fuzzy ou a função baseada na integral de linha, podem ser generalizadas (BERNAL; GUERRA, 2010; GONZÁLEZ; SALA; BERNAL, 2019). Essa generalização assegura que o conservadorismo seja progres-

sivamente reduzido à medida que a função de Lyapunov candidata se torna mais genérica. Esta vantagem gerou um impulso principalmente no estudo da função de Lyapunov fuzzy (MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009; GUERRA; BERNAL, 2009; LEE; PARK; JOO, 2011; FARIA; SILVA; OLIVEIRA, 2013; LAZARINI, 2021), contudo, o principal desafio de usar essa função está em obter uma restrição das derivadas das MFs. A busca de uma solução para esse problema pode ser classificada em duas perspectivas: assumindo que as derivadas das MFs pertencem a um intervalo arbitrário e, assim, obtendo uma análise de estabilidade local, ou por meio de termos baseados na integral das MFs que, ao serem derivadas, eliminam a necessidade de lidar com as derivadas das MFs. Embora a última abordagem apresente uma análise de estabilidade global, a primeira abordagem geralmente apresenta menos conservadorismo ao considerar intervalos cada vez menores. Além disso, essa abordagem torna-se mais forte se levarmos em conta que o modelo fuzzy T-S geralmente aproxima um sistema não linear somente em uma região fechada. Portanto, é evidente que existe um intervalo finito no qual as derivadas dos MFs com relação aos estados pertencentes à região modelada estão dentro desse intervalo.

Em conjunto com as condições de estabilidade, o projeto de controladores para sistemas fuzzy T-S, tem sido um tópico de muita pesquisa nos últimos anos. Como ponto de partida, o controlador baseado na compensação paralela distribuída (do inglês, parallel distributed compensation (PDC)) (WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1995) tem sido amplamente abordado na literatura. Isso se deve ao fato de que um sistema fuzzy T-S em malha fechada com um controlador PDC apresenta uma facilidade para estender as condições de estabilidade do sistema na forma de LMIs para as condições de projeto dos ganhos. Essa vantagem tornou possível aproveitar os vários métodos de relaxamento para análise de estabilidade a fim de obter condições de projeto menos conservadoras do controlador PDC (TANAKA; HORI; WANG, 2003; RHEE; WON, 2006; MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009; FARIA; SILVA; OLIVEIRA, 2013; LAZARINI, 2021). Entretanto, a principal desvantagem reside na limitação de reduzir o conservadorismo das condições de projeto na presença de funções de Lyapunov não quadráticas. Com foco nesse problema, foi proposto o controlador de não compensação paralela distribuída (do inglês, nonparallel distributed compensation (non-PDC)) (GUERRA; VERMEIREN, 2004) e, desde então, ele tem sido considerado como um controlador com baixo conservadorismo das condições de projeto. O controlador non-PDC é projetado com base em uma função de Lyapunov não quadrática e apresenta um menor conservadorismo em relação ao controlador PDC. Além disso, ele tem a vantagem de incluir as informações das MFs, aproveitando as abordagens propostas para lidar com as derivadas das MFs (LEE; PARK; JOO, 2012; GUERRA et al., 2012; CHEN et al., 2016; MÁRQUEZ et al., 2016). Contudo, o controlador non-PDC apresenta maior complexidade na implementação em relação ao controlador PDC. Isso se deve ao fato de que ele precisa obter a inversa de uma matriz em cada instante de tempo. Assim, essa desvantagem é mais evidenciada quando se analisam sistemas com um elevado

número de variáveis de estado.

Por outro lado, o controlador chaveado é uma estratégia que aborda uma classe mais geral de sistemas (LIBERZON, 2003). Inicialmente, essa estratégia tinha uma forte ênfase em sistemas sujeitos a diferentes necessidades, nos quais era necessário ativar um controlador específico para atender às necessidades de cada contexto (LIBERZON; MORSE, 1999; HESPANHA; MORSE, 2002). Nesse caso, o objetivo era projetar um conjunto de controladores de forma que o sistema de malha fechada fosse estável em qualquer forma de chaveamento. No entanto, outra abordagem importante para o controlador chaveado é a análise do sistema em malha fechada como um sistema chaveado. Então, se for dado um conjunto de controladores de tal forma que, em malha fechada com o sistema, eles sejam instáveis, uma forma apropriada de chaveamento pode estabilizar o sistema. A última abordagem pode tirar proveito das estratégias de estabilização propostas para os sistemas chaveados (LIBERZON, 2003; GEROMEL; COLANERI, 2006b) e estendê-las aos sistemas T-S fuzzy, a fim de reduzir o conservadorismo das condições de projeto.

Nos sistemas T-S fuzzy, a estratégia de controle chaveado foi abordada principalmente para sistemas não lineares na presença de parâmetros incertos. Dentro desse contexto, a principal desvantagem é que os MFs dependerão de parâmetros incertos, tornando inviável a realimentação. Portanto, os controladores dependentes dos MFs, como os controladores PDC ou non-PDC, não podem ser implementados. Focado nesse problema, inicialmente foi proposto um controlador chaveado que comuta apenas os ganhos constantes projetados para o controlador PDC com base em uma função quadrática de Lyapunov e por meio de uma lei de chaveamento específica que estabiliza o sistema (SOUZA et al., 2013). Em seguida, essa estratégia foi estendida para ser projetada por uma função de Lyapunov por partes, obtendo um conservadorismo menor nas condições de projeto (SOUZA et al., 2014). Seguindo essa abordagem, resultados mais recentes estendem o projeto do controlador a vários índices de desempenho, como limitar a norma de \mathcal{H}_∞ (OLIVEIRA et al., 2018b; ONCOY et al., 2022), na redução do custo garantido dos estados (RAMOS et al., 2019; SILVA et al., 2020), no caso de saturação no atuador (ALVES et al., 2016). Além disso, foi estendido nos sistemas fuzzy T-S discretos (OLIVEIRA et al., 2018a; SANTOS et al., 2020); assim também em aplicações para sistemas importantes (GAINO et al., 2020; COVACIC et al., 2020; TEODORO et al., 2020; ONCOY; CARDIM; TEIXEIRA, 2022). Contudo, o foco da estratégia de controle chaveado empregada nesses trabalhos, ainda não foi abordado usando uma função de Lyapunov fuzzy.

Este trabalho apresenta uma síntese da aplicação do controlador chaveado nos sistemas não lineares, por meio de uma função de Lyapunov fuzzy e com foco na redução do conservadorismo das condições de projeto. Esta dissertação propõe uma nova abordagem para limitar os termos dependentes das derivadas das MFs. Além disso, a abordagem proposta tem a vantagem de ser estendida ao uso de funções de Lyapunov dependentes das

MFs mais gerais sem aumentar o número de controladores a serem chaveados. Portanto, a proposta do controle chaveado será estendida ao projeto de controladores PDC e non-PDC chaveados, comprovando a redução considerável do conservadorismo das condições de projeto. Diversos exemplos de simulação serão apresentados, a fim de explicar os conceitos necessários para o desenvolvimento do trabalho e verificar os aprimoramentos obtidos em relação a outros trabalhos recentes na literatura. Assim, esta dissertação está organizada da seguinte forma:

No Capítulo 2, são apresentados os fundamentos teóricos gerais e uma análise destes, a fim de obter um desenvolvimento adequado do texto.

No Capítulo 3, será apresentada uma análise geral das condições de estabilidade usando uma função de Lyapunov fuzzy e alguns métodos propostos na literatura.

No Capítulo 4, é apresentada uma abordagem para o projeto de um controlador chaveado usando uma função Lyapunov fuzzy. Este capítulo se concentrará nos sistemas não lineares com parâmetros incertos.

No Capítulo 5, a proposta do capítulo anterior será estendida para o uso de uma função Lyapunov fuzzy generalizada. Neste capítulo, o controle PDC e non-PDC chaveados serão apresentados.

Por fim, o Capítulo 6 apresenta as conclusões deste trabalho e algumas proposta para trabalhos futuros.

Além disso, algumas das contribuições que são apresentadas neste trabalho culminaram na publicação dos seguintes artigos:

- ONCOY, D. J. S.; CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M. Switched control based on Takagi- Sugeno fuzzy model for dual active bridge dc-dc converter. In: IEEE Internati- onal Conference on Fuzzy Systems. Padua, 2022. p. 1–7.
- ONCOY, D. J. S.; CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E. Robust switched controller based on Takagi-Sugeno fuzzy model for dc-dc converters against disturbances. In: IEEE. 16th Int. Workshop Variable Struct. Syst. Rio de Janeiro, 2022. p. 1–7.
- ONCOY, D. J. S.; CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; LAZARINI, A. Z. N. New stabilization conditions for fuzzy-based sampled-data control systems using a fuzzy Lyapunov functional. IEEE Access, Piscataway, v. 11, p. 15390– 15403, 2023.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS E CONCEITUAIS

Neste capítulo, serão apresentados conceitos fundamentais e uma breve revisão da literatura necessária para desenvolver de forma adequada os resultados deste trabalho. O conteúdo dos tópicos será baseado do ponto de vista do critério de estabilidade de Lyapunov e com as condições de estabilidade expressas em forma de LMIs.

Inicialmente serão abordados os conceitos de estabilidade de sistemas não lineares. Em seguida, apresentamos a modelagem dos sistemas não lineares por meio do sistema fuzzy T-S e estes sistemas levando em conta incertezas nos parâmetros. Depois, as condições de projeto do controlador PDC serão detalhadas, bem como a análise de estabilidade levando em conta a modelagem local. Em seguida, são analisadas as vantagens e os desafios de considerar uma função de Lyapunov fuzzy e seu impacto na análise de estabilidade. A próxima parte apresenta uma análise geral dos métodos de relaxamento presentes na literatura com relação aos sistemas chaveados. Por fim, serão apresentada a estratégia de controle chaveado e a análise de alguns dos métodos propostos na literatura.

2.1 SISTEMAS NÃO LINEARES

Considere um sistema dinâmico representado por um conjunto de equações diferenciais não-lineares no domínio do tempo contínuo da forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (1)$$

em que t denota o tempo, $x : \mathbb{R}_{0+} \rightarrow \mathbb{R}^n$ o vector de estado de ordem n e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua no tempo e localmente Lipschitziana com respeito a $x(t)$ em uma região \mathbf{D} , o que garante a existência e a unicidade da solução para o problema de valor inicial $x(0) = x_0$ (KHALIL, 2002, p. 88).

A solução $x(t)$ da equação diferencial vetorial (1) é conhecida como a **trajetória do sistema**, e pertence ao espaço vetorial de dimensão finita n com norma euclidiana $\|x\| = \sqrt{(x^T x)}$. O estudo da trajetória do sistema é essencial na teoria de controle. Este trabalho se concentrará no estudo da trajetória com relação aos **pontos de equilíbrio** do sistema. Portanto, é importante mencionar algumas definições fornecidas em Slotine e Li (1991) e Khalil (2002).

Definição 1. *O vector $x^* \in \mathbb{R}^n$ é dito ser um **ponto de equilíbrio** do sistema dinâmico (1) se*

$$f(x^*) = 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (2)$$

Na Definição 1, refere-se a que quando a trajetória do sistema atinge algum ponto de equilíbrio, a trajetória se mantém nesse ponto a menos que dinâmicas imprevistas

estejam em ação. Uma característica interessante dos sistemas não lineares é que eles podem apresentar vários pontos de equilíbrio no espaço \mathbb{R}^n . Como foi comentado em Slotine e Li (1991, p. 45), sem perda de generalidade pode-se analisar a estabilidade de qualquer ponto de equilíbrio considerando a **origem** ($x^* = 0$) como um ponto de equilíbrio do sistema. Com base nisso, seguem as seguintes definições:

Definição 2. O ponto de equilíbrio $x^* = 0$ do sistema (1) é dito ser **estável**, se dado $\varepsilon > 0$, existe um escalar $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que

$$\|x_0\| < \delta \implies \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0. \quad (3)$$

No caso contrário o ponto de equilíbrio é dito ser **instável**.

A estabilidade do ponto de equilíbrio é uma característica muito atraente para um sistema, pois não só garante que a trajetória do sistema não converge para o infinito, mas também que para qualquer ε é sempre possível encontrar um δ que garanta que a trajetória do sistema permaneça em uma esfera de raio ε . No entanto, em muitos problemas não é suficiente saber se a trajetória do sistema se mantém em uma região determinada, sendo necessário conhecer o comportamento estacionário da trajetória do sistema, ou seja, se ele atinge o ponto de equilíbrio.

Definição 3. O ponto de equilíbrio $x^* = 0$ do sistema (1) é dito ser **assintoticamente estável** se são satisfeitas as seguintes condições:

- (a) ele é estável;
- (b) existe δ tal que

$$\|x(0)\| < \delta \implies \|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty. \quad (4)$$

É importante notar que o conceito de assintoticamente estável garante que a trajetória do sistema atinge um ponto de equilíbrio (que corresponde ao conceito da convergência), mas além disso, que seja estável, o que o torna em um conceito mais restritivo do que a convergência. Adicionalmente, outra definição importante na análise da estabilidade assintótica é a região que contém todas as condições iniciais que satisfazem a condição (4), a qual é conhecida como o **domínio da atração**. Então, o conceito do **globalmente assintoticamente estável** corresponde ao caso quando a Definição 3 for satisfeita para uma região de atração igual a todo o espaço \mathbb{R}^n .

Observação 1. De acordo com a Definição 3, se um sistema tiver um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável, fica implícito que esse é o único ponto de equilíbrio que o sistema possui.

2.1.1 Estabilidade de Lyapunov

O método direto de Lyapunov é uma ferramenta poderosa para o estudo da estabilidade de sistemas não lineares. Este método, está baseado na análise de uma função chamada **função de Lyapunov** relacionada ao sistema, a qual, se atender a determinadas restrições, podem fornecer informações sobre o comportamento da trajetória do sistema. Para uma melhor apresentação dos teoremas, é fornecida a seguinte definição:

Definição 4. *Seja uma região compacta $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e uma função contínua $V : D \rightarrow \mathbb{R}_{0+}$, tal que $V(0) = 0$. Então, a função $V(x)$ é definida como:*

- (a) **definida positiva** se $V(x) > 0$ para todo $D - \{0\}$;
- (b) **semidefinida positiva** se $V(x) \geq 0$ para tudo $x \in \mathbb{R}^n$.

Da mesma forma, a função $V(x)$ é dita ser **semidefinida negativa** ou **definida negativa** se $-V(x)$ fosse semidefinida positiva ou definida positiva respectivamente. Baseado nessas definições, segue o seguinte teorema que define o criterio de estabilidade no sentido de Lyapunov:

Teorema 1. *Seja o ponto de equilíbrio $x^* = 0$ do sistema (1) que fica dentro do $D \subseteq \mathbb{R}^n$, e uma função contínua e diferenciável $V : D \rightarrow \mathbb{R}_{0+}$. O ponto $x^* = 0$ será:*

- (a) *estável se $V(x)$ for definida positiva e $\dot{V}(x)$ for semidefinida negativa;*
- (b) *assintoticamente estável se $V(x)$ for definida positiva e $\dot{V}(x)$ for definida negativa.*

O critério de Lyapunov surge como uma possibilidade de estudar a estabilidade dos sistemas sem exigir a expressão analítica da trajetória do sistema, o que, em muitos casos, é complexo ou até mesmo impossível (SLOTINE; LI, 1991). O conceito se concentra no fato de que uma expressão que representa a energia dos estados do sistema precisa sempre diminuir continuamente até zero para garantir a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio. No entanto, o Teorema 1 não representa uma condição de necessidade, mas apenas uma condição de suficiência, ou seja, se a derivada da função de Lyapunov escolhida não satisfizer as condições do Teorema 1, o ponto de equilíbrio do sistema (1) ainda poderá ser estável ou até mesmo assintoticamente estável. Nesse sentido, a escolha da função de Lyapunov não está limitada apenas à obtenção da expressão da energia dos estados do sistema. De fato, incluso é possível que expressões diferentes da energia dos estados para a função de Lyapunov sejam mais adequadas para a análise (consulte o Exemplo 4.4 em Khalil (2002)). Estes problemas não surgem na análise de sistemas LTI, o que mostra a complexidade da análise de estabilidade em sistemas não lineares.

Observação 2. *O Teorema 1 apresenta condições estritas para a construção de uma função de Lyapunov com relação a um sistema contínuo (1). Entretanto, para sistemas sem continuidade estrita na trajetória do sistema, algumas condições de $V(x)$ poderiam ser relaxadas e substituídas por funções de Lyapunov contínuas por partes ou até mesmo descontínuas. Essa análise será discutida em mais detalhes na Seção 2.4.*

A função $V(x)$ relacionada ao sistema (1), que seja definida positiva e $\dot{V}(x)$ negativa definida na região $\mathbf{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ será chamada daqui por diante uma **função de Lyapunov**. Note que, a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio mostrado no Teorema 1 apresenta uma característica local na região \mathbf{D} . No entanto, para garantir a estabilidade assintótica global, não é suficiente que $V(x)$ satisfaça a condição (4) para $\mathbf{D} = \mathbb{R}^n$. Como condição adicional, é necessário que $V(x) \rightarrow \infty$ quando $\|x(t)\| \rightarrow \infty$. A função candidata de Lyapunov que satisfaz essa condição é chamada **radialmente ilimitada**. Portanto, segue o seguinte teorema:

Teorema 2. *Seja o ponto de equilíbrio $x^* = 0$ do sistema (1) e uma função contínua e diferenciável $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0+$, tal que $V(x)$ é definida positiva, $\dot{V}(x)$ é definida negativa e $V(x)$ é radialmente ilimitada. Então, o ponto $x^* = 0$ será **globalmente assintoticamente estável**.*

Conforme explicado, a construção adequada de uma função de Lyapunov para sistemas não lineares representa um desafio. Este problema foi amplamente abordado na literatura, desenvolvendo métodos para tipos específicos de sistemas não lineares (SLOTINE; LI, 1991; KHALIL, 2002). Entretanto, uma modelagem mais adequada (expressão equivalente) do sistema (1) poderia dar a possibilidade de aproveitar os critérios de análise dos sistemas lineares e abordar os sistemas não lineares de forma geral.

2.2 MODELO FUZZY TAKAGI-SUGENO

Em contraste com os sistemas não lineares, o método direto de Lyapunov representa uma alternativa para obter condições necessárias e suficientes para a estabilidade na origem nos sistemas LTIs. Nessa análise, uma função de Lyapunov quadrática ($V(x) = x^T(t)Px(t)$, em que P é uma matriz constante e positiva definida) é suficiente para gerar as condições baseadas na existência de uma solução de uma equação matricial linear (CHEN, 1998). Essa vantagem abre a porta para estender o estudo de sistemas lineares a fim de abordar vários cenários, como incertezas do sistema, resposta a perturbações, parâmetros variáveis no tempo, entre outros; que têm sido amplamente abordados na literatura de sistemas lineares. Portanto, como o modelo fuzzy T-S pode representar de maneira exata um sistema não linear como uma combinação convexa de subsistemas lineares, ele produz um enorme benefício a fim de obter as condições de estabilidade e do

projeto do controlador expressas em LMIs usando funções de Lyapunov quadráticas ou semelhantes (da forma $V(x) = x^T(t)P(t)x(t)$, em que a matriz $P(t)$ é uma matriz variante no tempo).

Considere o sistema (1) representado na forma de um modelo de espaço de estado

$$\dot{x}(t) = A(x)x(t) + B(x)u(t), \quad (5)$$

sendo $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ a matriz de estados e $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ a matriz de entrada, estas matrizes contêm expressões suaves não lineares dependentes dos estados¹. Então, o modelo fuzzy T-S é expresso como

Regra i : **SE** $z_1(t)$ é M_{i1} , $z_2(t)$ é M_{i2} , ..., e $z_p(t)$ é M_{ip} , **ENTÃO**

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad (6)$$

em que $M_{i1}, M_{i2}, \dots, M_{ip}$ são os conjuntos difusos da regra i , r o número de regras difusas, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são matrizes constantes e conhecidas como os modelos locais e $z(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_p(t)]^T$ é o vetor das variáveis premissa. Usando o método do centróide para a defuzzificação, o sistema não linear (5) modelado por o sistema fuzzy T-S (6) pode ser representado na seguinte forma compacta:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) [A_i x(t) + B_i u(t)], \quad (7)$$

em que $\alpha_i(t)$ são os pesos relativos aos modelos locais e definidos como

$$\alpha_i(t) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}, \quad w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t)), \quad i \in \mathbb{K}_r, \quad (8)$$

e a função $M_{ij}(z_j(t))$ representa o grau de pertinência das variáveis premissas $z_j(t)$ com respeito aos conjuntos difusos M_{ij} . Então, os pesos relativos aos modelos locais satisfazem a seguinte propriedade de soma convexa:

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) = 1, \quad \alpha_i(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0. \quad (9)$$

Na lógica difusa, as funções $M_{ij}(z_j(t))$ são denominadas como as funções de pertinência das variáveis premissa. No entanto, nos sistemas fuzzy T-S, as funções $\alpha_i(t)$ também representam o grau de pertinência dos modelos locais com respeito ao modelo fuzzy T-S (7). Portanto, a terminologia das funções de pertinência (do inglês, *membership functions* (MFs)) geralmente refere-se às funções $\alpha_i(t)$, e neste trabalho essa terminologia será considerada.

¹ O modelo T-S fuzzy também pode ser obtido se o sistema tiver termos que dependam da entrada de controle. Entretanto, isso não será considerado para evitar um loop algébrico na simulação do controlador fuzzy.

Observação 3. Observe que o modelo fuzzy será obtido com base no modelo de espaço de estado (5). Portanto, o modelo fuzzy T-S do sistema (1) não é único. Por exemplo, seja o sistema em \mathbb{R}^2 , $f(x) = x_1(t)^2 x_2(t) + \text{sen}(x_1(t))x_2(t)$, ele pode ser representado das seguintes formas:

$$(a) f(x) = [x_1(t)x_2(t)]x_1(t) + \text{sen}(x_1(t))x_2(t),$$

$$(b) f(x) = [x_1^2(t) + \text{sen}(x_1(t))]x_2(t).$$

Tendo no primeiro caso duas expressões não lineares e no segundo caso só uma.

Uma das vantagens mais importantes do modelo fuzzy T-S é que ele pode modelar exatamente um sistema não-linear. Na literatura, há duas abordagens para obter o modelo fuzzy T-S, estas são: por meio de técnicas de identificação usando dados experimentais e pela aplicação de técnicas de setor não linear ao modelo matemático. No trabalho será utilizada a segunda abordagem, na qual precisa-se de uma adequada escolha das variáveis premissa $z_j(t)$ e as funções $M_{ij}(z_j(t))$ para obter o modelo desejado. Em Tanaka e Wang (2001), foi descrito um procedimento em que as variáveis premissa são definidas com base nas expressões não lineares do sistema e as funções $M_{ij}(z_j(t))$ dependem dos valores máximo e mínimo de $z_j(t)$. No entanto, é pouco comum que os termos não lineares estejam limitados dentro de um intervalo finito para tudo o espaço \mathbb{R}^n . Isso é razoável, pois as variáveis de estado em sistemas físicos são quase sempre limitadas. Portanto, o modelo fuzzy T-S geralmente tem uma característica local. Para uma melhor explicação da obtenção do modelo fuzzy T-S é apresentado o seguinte exemplo:

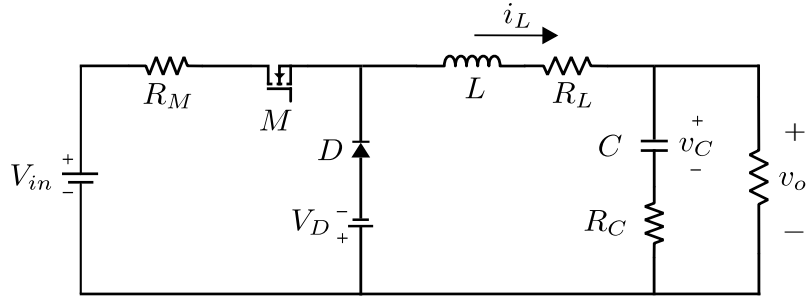
Exemplo 1. Dado o seguinte modelo do espaço de estados de um conversor buck dc-dc mostrado na Figura 1 (LIAN; LIOU; HUANG, 2006):

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \left(R_L + \frac{RR_C}{R+R_C} + R_M u^* \right) & -\frac{R}{L(R+R_C)} & 0 \\ \frac{R}{C(R+R_C)} & -\frac{1}{C(R+R_C)} & 0 \\ -\frac{RR_C}{(R+R_C)} & -\frac{R}{(R+R_C)} & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -\frac{R_M i_L(t) - V_{in} - V_D}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \quad (10)$$

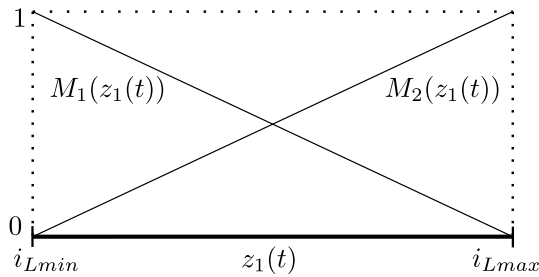
sendo $x(t) = [i_L(t) - i_L^* \quad v_C(t) - v_C^* \quad \int_0^t (v_C(t) - v_C^*)]$ e (i_L^*, v_C^*, u^*) os valores das variáveis de estado para o ponto de equilíbrio desejado. Observe no modelo (10), que o termo não linear está presente na matriz de entrada. Então, definindo a variável premissa como $z_1(t) = i_L(t)$, será necessário definir o intervalo $[i_{Lmin}, i_{Lmax}]$ para obter as funções $M_{11}(z_1(t))$ e $M_{21}(z_1(t))$, tal que

$$z_1(t) = M_{11}(z_1(t))i_{Lmin} + M_{21}(z_1(t))i_{Lmax} \quad \text{e} \quad M_{11}(z_1(t)) + M_{21}(z_1(t)) = 1, \quad \forall t \geq 0.$$

Assim, as funções de pertinência das variáveis premissa são mostradas na Figura 2, e o sistema não linear (10) será representado pelo sistema fuzzy T-S com as seguintes regras:

Figura 1 – Circuito equivalente de um conversor buck básico


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 2 – Funções de pertinência das variáveis premissa


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Regra i : **SE** $i_L(t)$ é M_i , **ENTÃO** $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t)$, $i \in \{1, 2\}$,

sendo as matrizes $A_1 = A_2 = A$, $B_1 = [-(R_M i_{Lmin} - V_{in} - V_D)/L \ 0 \ 0]^T$ e $B_2 = [-(R_M i_{Lmax} - V_{in} - V_D)/L \ 0 \ 0]^T$. Note que, foi necessária apenas uma variável premissa, obtendo-se dois subsistemas locais. Então, de (8), $\alpha_1(t) = M_{11}(z_1(t))$ e $\alpha_2(t) = M_{21}(z_1(t))$.

No modelo fuzzy no Exemplo 1, o modelo local foi obtido no intervalo $[i_{Lmin}, i_{Lmax}]$, isto é, quando a variável premissa atingir o valor de i_{Lmin} ou i_{Lmax} , a função $\alpha_i(t)$ atinge os limites 0 ou 1, respectivamente. Para uma generalização disso, a região em que o modelo fuzzy equivale ao sistema não linear será definida como a seguinte região compacta:

$$\mathbf{F} = \{x(t) \in \mathbb{R}^n / \underline{x}_i \leq x_i(t) \leq \bar{x}_i, i = 1, \dots, n\}, \quad (11)$$

em que \bar{x}_i e \underline{x}_i são parâmetros definidos para o modelagem.

Para uma função de Lyapunov $V : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{R}_{0+}$, as regiões \mathbf{F} e \mathbf{D} são muito importantes para a análise da estabilidade assintótica por meio do método direto de Lyapunov. Mesmo que \mathbf{D} seja todo o espaço \mathbb{R}^n e $V(x)$ seja radialmente ilimitada, a

região compacta \mathbf{F} garante que a estabilidade assintótica do sistema (1) não será global. Assim, outros conceitos relacionados ao domínio da atração serão analisados mais adiante.

2.2.1 Incertezas dos parâmetros

A semelhança dos sistemas fuzzy T-S com respeito aos outros modelos baseados na combinação convexa é evidente. Especificamente, a representação politópica de um sistema com incertezas apresenta semelhança com os sistemas fuzzy T-S, que se estende tanto à análise de estabilidade quanto ao projeto do controlador. Por exemplo, um sistema linear e invariante no tempo (do inglês, *linear time invariant* (LTI)) com incertezas pode ser representado como

$$\dot{x}(t) = A(\lambda)x(t) + B(\lambda)u(t), \quad (12)$$

sendo $\lambda \in \mathbb{R}^N$ um vetor incerto com N elementos e que pertence ao seguinte conjunto unitário simplex:

$$\Lambda_N = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^N / \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, N \right\}.$$

Então, o sistema (12) pode ser representado na seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^N \lambda_i [A_i x(t) + B_i u(t)], \quad (13)$$

em que A_i e B_i são matrizes constantes.

O sistema (12) está contido em um politopo convexo de N vértices dados pelas matrizes A_i e B_i , cujos valores são obtidos de acordo com os valores extremos das incertezas no sistema, ou seja, são definidos com base nas permutações dos valores máximo e mínimo dos termos incertos. Essa definição segue o mesmo procedimento para obter os subsistemas no modelo fuzzy T-S, em que os subsistemas são obtidos com base nos valores extremos admitidos pelas variáveis premissa na região \mathbf{F} . Portanto, a representação convexa dos sistemas (7) e (13) gera a oportunidade de obter um modelo convexo geral para sistemas não lineares que apresentam incertezas nos parâmetros.

A presença de parâmetros incertos em modelos não lineares é uma condição bastante presente em diversos sistemas físicos. Por exemplo, é sabido que, em várias aplicações de eletrônica de potência, precisa-se que o conversor dc-dc apresente um comportamento robusto, principalmente em uma faixa de tensão de entrada (GOYAL; SHUKLA, 2022) e/ou valores de carga (XU et al., 2021). Para esclarecer melhor a obtenção do modelo convexo deste tipo de sistemas, é apresentado o exemplo a seguir:

Exemplo 2. Se no Exemplo 1 consideramos a tensão de entrada V_{in} como um parâmetro incerto, poderíamos obter um modelo definindo um intervalo $V_{in} \in [V_{in_{min}}, V_{in_{max}}]$ e a

variável de premissa como a expressão ampliada $z_1(t) = -(R_M i_L(t) - V_{in} - V_D)/L$. Então, os valores extremos da variável premissa serão

$$-\frac{R_M i_{Lmax} - V_{inmin} - V_D}{L} \leq z_1(t) \leq -\frac{R_M i_{Lmin} - V_{inmax} - V_D}{L},$$

e seguindo o mesmo procedimento do Exemplo 1, pode-se obter o modelo convexo. Neste caso, é importante destacar que o número de subsistemas permanece igual, mas agora a variável premissa depende do parâmetro incerto. Em comparação, se considerássemos a carga R como um parâmetro incerto no intervalo $[R_{min}, R_{max}]$, o sistema (10) apresentará incertezas em vários termos da matriz A . Então, definimos o parâmetro R como uma nova variável premissa $z_2(t)$ e dois novos conjuntos fuzzy M_{12} e M_{22} . A adição de uma variável premissa aumentará o número de subsistemas à quatro, em que as MFs serão obtidas como

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= M_{11}(z_1(t))M_{12}(z_2(t)), \alpha_2(t) = M_{11}(z_1(t))M_{22}(z_2(t)), \\ \alpha_3(t) &= M_{21}(z_1(t))M_{12}(z_2(t)), \alpha_4(t) = M_{21}(z_1(t))M_{22}(z_2(t)), \end{aligned} \quad (14)$$

os quais dependem do parâmetro incerto R . Portanto, para os sistemas não lineares incertos, as MFs serão funções contínuas mas de natureza incerta. Isso complica muito a implementação de controladores que dependem diretamente das MFs, as quais só poderiam ser obtidas por métodos de identificação. Além disso, a presença de termos incertos pode aumentar o número de subsistemas no modelo. No caso de ter conjuntamente V_{in} e R como parâmetros incertos, ainda teremos quatro subsistemas.

Apesar da semelhança na obtenção dos modelos (7) e (12), a principal diferença reside na natureza dos parâmetros λ_i e $\alpha_i(t)$. O vetor λ inclui elementos que, em um cenário específico, são constantes mas desconhecidos. Entretanto, as MFs do sistema fuzzy são funções contínuas que dependem dos estados do sistema e, para sistemas sem presença de incertezas, podem ser realimentados. Tal diferença desempenha um papel importante tanto na redução do conservadorismo das condições de estabilidade quanto no projeto de controladores adequados para o sistema, como será discutido posteriormente.

Observação 4. *A semelhança na análise pode ser estendida a outros sistemas modelados com abordagens convexas. Um exemplo é a semelhança entre os sistemas fuzzy T-S e a representação convexa dos sistemas lineares a parâmetros variantes no tempo (do inglês, linear parameter varying (LPV)). De fato, o sistema fuzzy T-S pode ser considerado um tipo especial de sistema LPV, em que os parâmetros que variam no tempo satisfazem um grau de suavidade (pelo menos \mathcal{C}^1) e dependem somente de sinais endógenas (ROTONDO et al., 2015).*

2.2.2 Controle fuzzy

O controlador mais empregado para estabilizar os sistemas fuzzy T-S é conhecido como **compensação paralela distribuída** (do inglês, *parallel distributed control* (PDC)), sendo definido como se segue:

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) K_i x(t), \quad i \in \mathbb{K}_r, \quad (15)$$

em que $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ são os ganhos a serem determinados. A ideia geral do controlador PDC é que cada ganho compensará seu respectivo modelo local, de modo que o controlador dependerá das funções $\alpha_i(t)$ em cada instante do tempo. Então, o sistema fuzzy T-S em malha fechada será

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) G_{ij} x(t), \quad i, j \in \mathbb{K}_r, \quad (16)$$

em que $G_{ij} = A_i + B_i K_j$.

O objetivo desta parte do texto, será mostrar alguns critérios para obter as condições de projeto do controlador PDC expressas em LMIs, os quais serão úteis posteriormente. A ideia geral desses critérios é indiferente à função de Lyapunov empregada. Portanto, para maior simplicidade, eles serão abordados usando uma função de Lyapunov quadrática.

Dada uma função de Lyapunov quadrática $V(x) = x^T(t) P x(t)$, sendo $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz positiva definida. Então, derivando a função $V(x)$ em relação ao tempo, obtemos a seguinte condição que garante a estabilidade assintótica do sistema (16):

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) (P G_{ij} + G_{ij}^T P) < 0, \quad i, j \in \mathbb{K}_r. \quad (17)$$

Desenvolvendo a expressão obtemos

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i^2(t) (P G_{ii} + G_{ii}^T P) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=i+1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) (P G_{ij} + P G_{ji} + G_{ij}^T P + G_{ji}^T P) < 0. \quad (18)$$

A desigualdade (18) depende das MFs. Porém, devido a (9), as condições podem ser obtidas na forma de LMIs. Com base nisso, segue o teorema:

Teorema 3. *O sistema (7) é estabilizável pelo controlador fuzzy (15) com os ganhos dados por $K_i = M_i^T X^{-1}$, se existirem uma matriz simétrica $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$, que satisfaçam os seguintes conjuntos de LMIs:*

$$X > 0, \quad (19)$$

$$X A_i^T + A_i X + M_i^T B_i^T + B_i M_i < 0, \quad i \in \mathbb{K}_r, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} X A_i^T + A_i X + X A_j^T + A_j X + M_i^T B_j^T + B_j M_i \\ + M_j^T B_i^T + B_i M_j < 0, \quad i, j \in \mathbb{K}_r, \quad i < j. \end{aligned} \quad (21)$$

Demonstração. A prova do teorema pode ser obtida em Tanaka e Wang (2001). \square

O Teorema 3 mostra as condições mais clássicas para o projeto do controlador PDC. No entanto, também mostra a vantagem sobre o controlador linear. Por exemplo, note que no caso de um controlador linear $u(t) = Kx(t)$, as condições de projeto podem ser obtidas substituindo os ganhos $K = K_1 = \dots = K_r$ nas LMIs do Teorema 3, obtendo

$$X > 0, \quad (22)$$

$$XA_i^T + A_iX + M^T B_i^T + B_iM < 0, \quad i \in \mathbb{K}_r. \quad (23)$$

Note que na condição (23), as matrizes de malha fechada $A_i + B_iK$ precisam ser Hurwitz para todo $i \in \mathbb{K}_r$. No entanto, no controlador fuzzy projetado com o Teorema 3, somente as matrizes $(G_{ij} + G_{ji}), i \leq j \in \mathbb{K}_r$ precisam ser Hurwitz, e não todas as matrizes $G_{ij}, \forall i, j \in \mathbb{K}_r$. Portanto, uma vantagem importante do controlador PDC em relação ao controlador linear consiste no menor conservadorismo das condições de projeto.

Observação 5. *Adicionalmente, as desigualdades do Teorema 3 foram obtidas com uma análise independente das funções de pertinência. Naturalmente, se algumas informações das funções de pertinência fossem levadas em conta, como $\alpha_i(t) \leq \alpha_j(t)$ para alguns $i, j \in \mathbb{K}_r$, condições menos conservadoras poderiam ser obtidas (BERNAL; GUERRA; KRUSZEWSKI, 2009). Contudo, essa possível vantagem acaba se perdendo quando se lida com sistemas não lineares incertos.*

Observação 6. *Podem ser obtidas condições menos conservadoras expressas em LMIs, ampliando o número de subíndices no desenvolvimento da expressão (17). Por exemplo, se $H_{ij} = PG_{ij} + G_{ij}^T P$, de (9) tem-se*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) H_{ij} &= \sum_{\ell_1=1}^r \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_{\ell_1}(t) \alpha_i(t) \alpha_j(t) H_{ij} \\ &= \sum_{\ell_s=1}^r \dots \sum_{\ell_1=1}^r \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_{\ell_s}(t) \dots \alpha_{\ell_1}(t) \alpha_i(t) \alpha_j(t) H_{ij} < 0. \end{aligned} \quad (24)$$

A expressão (24) representa um somatório de dimensão $s+2$, o qual pode ser desenvolvido semelhante à (18) para obter LMIs menos conservadoras para valores mais elevados de s . Inclusive, é possível obter um valor de s de forma que as condições obtidas na forma de LMIs sejam equivalentes à desigualdade (17), obtendo condições necessárias e suficientes para a estabilidade assintótica (SALA; ARIÑO, 2007).

2.2.3 Condições de projeto alternativas

No Teorema 3 foram apresentadas as condições de projeto do controlador PDC, obtendo-se termos que incluem o produto das matrizes A_i e P nas LMIs. Entretanto, no

caso em que a matriz paramétrica da função de Lyapunov não seja constante (no caso da função de Lyapunov fuzzy), a desigualdade (17) exigirá procedimentos adicionais para obter as condições expressas em LMIs. Portanto, requer-se condições alternativas para o projeto do controlador.

Teorema 4. *Dado um escalar $\mu \in \mathbb{R}$. O sistema (7) é estabilizável pelo controlador fuzzy (10) com os ganhos dado pelo $K_i = M_i^T X^{-T}$, se existirem uma matriz simétrica $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e quaisquer matrizes $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, que satisfaçam os seguintes conjuntos de LMIs:*

$$X > 0, \quad (25)$$

$$\Xi_{ii} < 0, \quad i \in \mathbb{K}_r, \quad (26)$$

$$\Xi_{ij} + \Xi_{ji} < 0, \quad i, j \in \mathbb{K}_r, i < j, \quad (27)$$

em que

$$\Xi_{ij} = \begin{bmatrix} A_i R^T + R A_i^T + B_i M_j^T + M_j B_i^T & * \\ X + \mu(A_i R^T + B_i M_j^T) - R & -\mu(R + R^T) \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Considerando a função de Lyapunov quadrática

$$V(x) = x^T(t) P x(t). \quad (28)$$

Obtem-se a derivada com respeito ao tempo

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t). \quad (29)$$

A partir de (16), temos

$$\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) [A_i + B_i K_j] x(t) = 0. \quad (30)$$

Portanto, (29) pode ser expressa como

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) \\ &- 2 \left[x^T(t) R_1 + \dot{x}^T(t) R_2 \right] \times \left[\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) [A_i + B_i K_j] x(t) \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

Considerando o vetor ampliado $\hat{x}(t) = [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)]^T$ e lembrando a condição (9), obtém-se

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) \hat{x}^T(t) \hat{\Xi}_{ij} \hat{x}(t), \quad (32)$$

em que

$$\hat{\Xi}_{ij} = \begin{bmatrix} R_1 A_i + R_1 B_i K_j + A_i^T R_1^T + K_j^T B_i^T R_1^T & * \\ P + R_2 A_i + R_2 B_i K_j - R_1^T & -R_2 - R_2^T \end{bmatrix}.$$

Desenvolvendo o somatório como em (32), obtemos as condições que garantem a estabilidade assintótica do origem para o sistema (16)

$$\hat{\Xi}_{ii} < 0, \quad i \in \mathbb{K}_r, \quad (33)$$

$$\hat{\Xi}_{ij} + \hat{\Xi}_{ji} < 0, \quad i, j \in \mathbb{K}_r, \quad i < j, \quad (34)$$

Note que a matriz $\hat{\Xi}_{ij}$ contem um termo não linear dado pela expressão $R_1 B_i K_j$. Então, a fim de obter as condições de projeto expressas em LMIs, define-se a matriz $R = R_1^{-1}$, sendo $R_2 = \mu R^{-1}$, $M_j = R K_j^T$ e $X = R P R^T$. Por fim, multiplicando (33) e (34) por $\text{diag}\{R, R\}$ e $\text{diag}\{R^T, R^T\}$ nos lados esquerdo e direito respectivamente, obtemos as desigualdades (26) e (27). \square

O Teorema 4 mostra as condições para o projeto de um controlador PDC. De forma semelhante, se considerarmos $u(t) = 0$ no sistema (7), a partir de (31) obtemos as condições de estabilidade do sistema em malha aberta expressas em LMIs. Além disso, o Teorema 4 oferece alguns vantagens importantes sobre o Teorema 3

- Acrescenta as matrizes auxiliares R_1 e R_2 , gerando condições mais gerais e menos conservadoras. De fato, se assumirmos $R = P$ e $\mu \rightarrow 0$ no Teorema 4, obteremos as condições dadas no Teorema 3.
- Desacopla a matriz paramétrica P do produto $A_i P$, o qual permite o uso de funções de Lyapunov com múltiplas matrizes $P_i, i \in \mathbb{K}_r$.
- Favorece na obtenção das condições de projeto dos controladores via LMIs, pela definição $R_2 = \mu R_1$, sendo μ um parâmetro escalar de ajuste.

Observação 7. *O procedimento ao expressar a derivada de $V(x)$ como em (31) é conhecido como o **método descritor**, o qual é desenvolvido pela análise do modelo descritor equivalente ao sistema. Para maior esclarecimento sobre o nome do método, note que o sistema (7) pode ser representado como o seguinte modelo descritor (TANIGUCHI et al., 1999):*

$$E \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) [A_i^* \hat{x}(t) + B_i^* u(t)], \quad (35)$$

sendo $\hat{x}(t) = [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)]^T$, $E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_i^* = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_i & -I \end{bmatrix}$ e $B_i^* = \begin{bmatrix} 0 \\ B_i \end{bmatrix}$. A função de Lyapunov para o modelo descritor é dada por (TAKABA; MORIHIRA; KATAYAMA, 1995)

$$V(x) = \hat{x}^T(t) E \hat{P} \hat{x}(t), \quad (36)$$

em que $\hat{P} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}$ e P_1 é uma matriz simétrica positiva definida. Então, tomando a derivada

$$\dot{V}(x) = 2\hat{x}^T(t)\hat{P}^T E\dot{\hat{x}}(t) = 2 \begin{bmatrix} x^T(t) & \dot{x}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2^T \\ 0 & P_3^T \end{bmatrix} E\dot{\hat{x}}(t). \quad (37)$$

Substituindo o sistema (35), obtém-se

$$\dot{V}(x) = 2 \begin{bmatrix} x^T(t) & \dot{x}^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & P_2^T \\ 0 & P_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ -\dot{x}(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(t)\alpha_j(t) [A_i x(t) + B_i u(t)] \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Portanto, desenvolvendo (38), a expressão (31) é justificada.

No Teorema 4, o conservadorismo das LMIs para o projeto do controlador depende da escolha do escalar μ . Nesse sentido, as condições do Teorema 4 podem ser consideradas como um problema de otimização com o objetivo de determinar o valor de μ que gera as condições menos conservadoras. No entanto, neste trabalho, a comparação do grau de conservadorismo será feito considerando o mesmo valor de μ nas condições a serem comparadas.

Observação 8. As definições $R = R_1^{-1}$ e $R_2 = \mu R^{-1}$ são necessárias para o controlador PDC, mas aumentam o conservadorismo das condições ao obter apenas uma matriz de relaxamento R . Essa definição não é necessária no caso do controlador non-PDC (veja o Capítulo 5), o que é uma causa do baixo conservadorismo desse controlador.

2.2.4 Análise da estabilidade assintótica local

Na análise de estabilidade assintótica, um dos aspectos importantes consiste em identificar o domínio de atração de um ponto de equilíbrio. Entretanto, a determinação dessa região na maior parte dos sistemas não lineares é muito complexa ou até mesmo impossível em alguns casos (KHALIL, 2002). Portanto, o principal objetivo consiste em obter uma estimativa mais precisa do domínio de atração. Para isso, a função Lyapunov desempenhará um papel importante.

A Definição 3 estabelece os requisitos para garantir a estabilidade assintótica global de um sistema não linear. No entanto, esses requisitos se tornam insuficientes quando a estabilidade do sistema é analisada pelo modelo fuzzy T-S do sistema. Ou seja, mesmo que encontremos uma função de Lyapunov $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{0+}$ radialmente ilimitada, a modelagem local do sistema fuzzy na região \mathbf{F} restringe que a estabilidade assintótica não seja global. Ademais, não podemos nem mesmo afirmar que a região \mathbf{F} está incluída no

domínio de atração, mas apenas que a estimativa do domínio de atração é uma região incluída em \mathbf{F} .

A fim de estimar o domínio de atração usando a função Lyapunov, seja o seguinte conjunto:

$$\mathbf{G}_c = \{x(t) \in \mathbb{R}^n / V(x(t)) \leq c\}. \quad (39)$$

A superfície $\partial\mathbf{G}_c = \{x(t) \in \mathbb{R}^n / V(x(t)) = c\}$ é conhecida como uma **superfície de nível** da função de Lyapunov $V(x(t))$. Então, se dado $c_1 > c_2$ é evidente que, se a trajetória do sistema ficar na superfície $\partial\mathbf{G}_{c_1}$, ele seguirá para $\partial\mathbf{G}_{c_2}$, e assim até atingir o ponto de equilíbrio. Então, toda superfície $\mathbf{G}_c \subseteq \mathbf{F}$ estará incluída no domínio de atração. Portanto, a região \mathbf{G}_{c^*} , em que $c^* = \max\{c \in \mathbb{R}^+ / \mathbf{G}_c \subseteq \mathbf{F}\}$ será a estimativa mais precisa do domínio de atração usando a superfície de nível (KHALIL, 2002).

A Figura 3 ilustra a região \mathbf{G}_{c^*} , sendo a estimativa mais precisa do domínio de atração para uma função de Lyapunov $V(x(t))$ escolhida. Então, a questão principal consiste em como obter o valor de c^* . Como primeira tentativa, podem ser realizados vários testes de avaliação e erro, tentando obter o valor mais próximo de c^* . No entanto, uma maneira mais eficaz é converter essa questão na forma de um conjunto de LMIs.

Para o seguinte teorema, considere uma função de Lyapunov quadrática $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$, um conjunto \mathbf{F} com $\underline{x}_i = \bar{x}_i, \forall i \in \mathbb{K}_r$ e a notação $e_i = [0 \dots \underbrace{1}_{i\text{-th}} \dots 0]^T \in \mathbb{R}^n$.

Teorema 5. *Suponha que existam uma matriz simétrica $P > 0$ e um escalar $\gamma > 0$, tal que o seguinte problema de otimização tenha uma solução*

$$\min_P \gamma$$

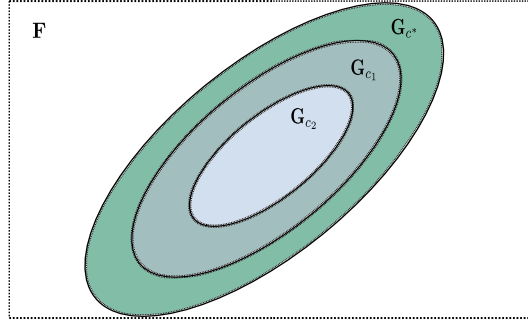
$$\frac{1}{\bar{x}_i^2} e_i e_i^T < P, \quad i \in \mathbb{K}_r. \quad (40)$$

$$P - \gamma I < 0. \quad (41)$$

Então, o conjunto $\mathbf{G}_1 = \{x(t) \in \mathbb{R}^n / V(x(t)) \leq 1\}$ é a estimativa interna mais próxima possível de \mathbf{G}_{c^*} , em que $c^* = \max\{c \in \mathbb{R}^+ / \mathbf{G}_c \subseteq \mathbf{F}\}$.

Demonstração. A prova formal do Teorema 5 pode ser obtida em Lee, Park e Joo (2012). \square

Observe que as restrições são dadas na forma de LMIs. Portanto, elas podem ser adicionadas nas outras restrições de estabilidade, a fim de obter a estimativa do domínio de atração. Entretanto, como a matriz P está envolvida com as condições de estabilidade, a abrangência da região \mathbf{G}_1 dependerá do conservadorismo da função de Lyapunov escolhida, ou seja, para funções de Lyapunov que geram condições de estabilidade menos conservadoras, será obtida uma estimativa mais precisa. Além disso, o Teorema 5 pode ser estendido facilmente para outras funções de Lyapunov, como será discutido adiante.

Figura 3 – Diferentes superfícies de nível incluídas na região **F**


Fonte: Elaboração do próprio autor.

2.3 FUNÇÃO DE LYAPUNOV FUZZY

Conforme mencionado, a escolha de uma função de Lyapunov adequada é o ponto de partida para a obtenção de condições de estabilidade favoráveis. A proposta deste trabalho é baseado em uma função de Lyapunov fuzzy. Portanto, é importante mencionar as vantagens e os desafios do desenvolvimento desta função.

Para uma melhor interpretação dos conceitos, nesta seção será usado o seguinte exemplo (RHEE; WON, 2006):

Exemplo 3. Considere o seguinte sistema fuzzy T-S

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{3b-2}{5} & \frac{3a-4}{5} \end{bmatrix}, \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{2b-3}{5} & \frac{2a-6}{5} \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{42}$$

com as seguintes funções de pertinência para $i = 1, 2$:

$$M_{1i}(x_i(t)) = \begin{cases} \frac{1 - \text{sen}x_i(t)}{2} & , |x_i(t)| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & , x_i(t) > -\frac{\pi}{2} \\ 1 & , x_i(t) < -\frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{43}$$

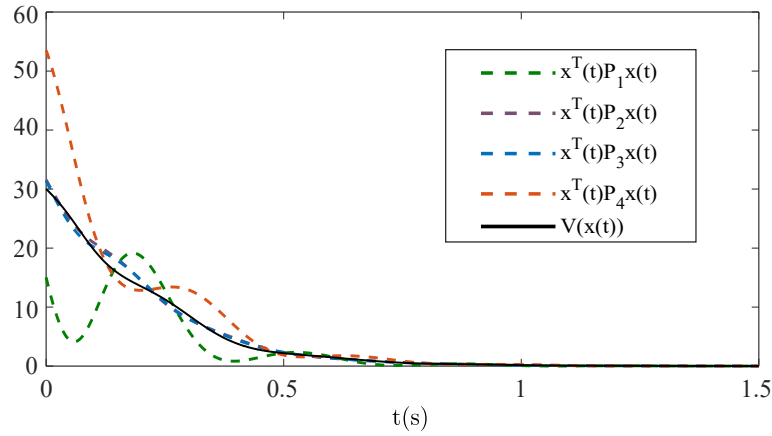
sendo $M_{2i}(x_i(t)) = 1 - M_{1i}(x_i(t))$ e os pesos dos modelos locais

$$\begin{aligned}
 \alpha_1(t) &= M_{11}(x_1(t))M_{12}(x_2(t)), \alpha_2(t) = M_{11}(x_1(t))M_{22}(x_2(t)), \\
 \alpha_3(t) &= M_{21}(x_1(t))M_{12}(x_2(t)), \alpha_4(t) = M_{21}(x_1(t))M_{22}(x_2(t)).
 \end{aligned} \tag{44}$$

Dado o sistema fuzzy (7), a função de Lyapunov fuzzy será definida como

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t)x^T(t)P_i x(t), \tag{45}$$

Figura 4 – Trajetórias das funções quadráticas locais e a função de Lyapunov fuzzy para uma condição inicial $x_0 = [0.3 \quad -0.3]$



Fonte: Elaboração do próprio autor.

sendo $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i \in \mathbb{K}_r$ matrizes positivas definidas. A principal vantagem da função (45) é que ela inclui a informação dos MFs, isto é, introduz informações adicionais sobre o sistema fuzzy na função candidata de Lyapunov. Essa é uma vantagem considerável em relação a função de Lyapunov quadrática, pois esta inclui apenas as informações dos estados do sistema, sendo indiferente ao sistema em estudo, ou seja, podem ser usadas até mesmo para sistemas não fuzzy. Nesse sentido, o aprimoramento da função de Lyapunov fuzzy em relação à função quadrática é percebido quando, para que a função de Lyapunov fuzzy (45) seja estritamente decrescente não seja necessário que as funções $x^T(t)P_i x(t)$, $\forall i \in \mathbb{K}_r$ sejam decrescentes. Por exemplo, para $a = -2$ e $b = 45$ no Exemplo 3, a simulação mostra que o sistema é assintoticamente estável no origem na condição inicial $x_0 = [0.3 \quad -0.3]$. Então, considerando os seguintes valores arbitrários para as matrizes positivas P_i , $i \in \mathbb{K}_r$:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 61,1065 & -17,8611 \\ -17,8611 & 70,3286 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 318,7045 & 11,6993 \\ 11,6993 & 55,8397 \end{bmatrix},$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 309,7869 & 8,6699 \\ 8,6699 & 56,1583 \end{bmatrix}, \quad P_4 = \begin{bmatrix} 506,3421 & -20,4269 \\ -20,4269 & 47,6441 \end{bmatrix}.$$

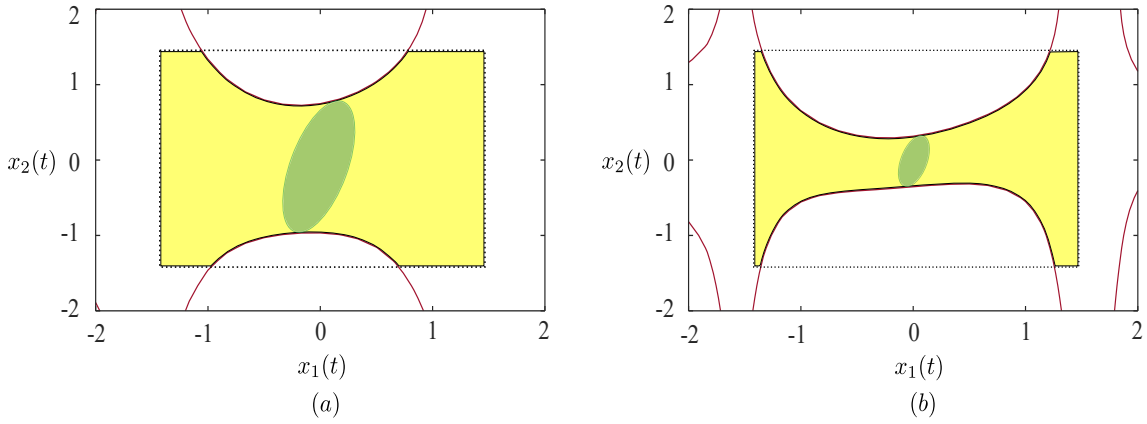
A Figura 4 mostra o comportamento da função de Lyapunov fuzzy para a condição inicial $x_0 = [0.3 \quad -0.3]$. Observa-se, que as funções $x^T(t)P_i x(t)$, $\forall i \in \mathbb{K}_r$ não precisam ser estritamente decrescentes para que a função de Lyapunov fuzzy seja estritamente decrescente.

No entanto, o principal desafio surge quando se toma a derivada com respeito ao tempo do (45), obtendo

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T(t) \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) P_i x(t) + x^T(t) \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) P_i \dot{x}(t) + x^T(t) \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) P_i x(t). \quad (46)$$

Note que os dois primeiros termos do lado direito representam uma combinação convexa das MFs. No entanto, (46) apresenta um termo adicional que depende das derivadas dos

Figura 5 – Regiões admissíveis para a trajectória do sistema no Exemplo 3, \mathbf{F} (linhas ponteadas), $\mathbf{F} \cap \mathbf{H}$ (cor amarela) e \mathbf{G}_{c^*} (cor verde) (a) $\rho_i = 9$. (b) $\rho_i = 4$



Fonte: Elaboração do próprio autor.

MFs, as quais não satisfazem as propriedades de um conjunto convexo. De fato, a partir da premissa $\alpha_i(t) \in \mathcal{C}^1$ e de (9), obtemos

$$\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) = 0, \quad (47)$$

sendo $\dot{\alpha}_i(t)$ uma função contínua e limitada.

O desenvolvimento adequado do termo $x^T(t) \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) P_i x(t)$ tem sido um assunto amplamente abordado nas pesquisas dos últimos anos, em que vários métodos foram propostos. Assim como mencionado no Capítulo 1, esses métodos podem ser classificados como, métodos que exigem conhecimento do limite ρ_i , tal que $|\dot{\alpha}_i(t)| \leq \rho_i, i \in \mathbb{K}_r$ e métodos que abordam o termo sem precisar do valor dos ρ_i . A principal vantagem do primeiro grupo de métodos é que, para valores mais baixos dos ρ_i , o conservadorismo das condições é consideravelmente reduzido. Entretanto, esses métodos também geram uma limitação na região do domínio de atração dado pelo seguinte conjunto:

$$\mathbf{H} = \{x(t) \in \mathbb{R}^n / |\dot{\alpha}_i(t)| \leq \rho_i, i \in \mathbb{K}_r\}. \quad (48)$$

Considere $a = -2$, $b = -15$ e o conjunto \mathbf{F} definido para $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \frac{\pi}{2}$ no Exemplo 3. As Figuras 5(a) e 5(b) ilustram a região (cor amarela) $\mathbf{F} \cap \mathbf{H}$ para $\rho_1 = \rho_2 = 9$ e $\rho_1 = \rho_2 = 4$, respectivamente. Note que, no primeiro caso é obtida uma região mais extensa. Assim, para uma função de Lyapunov arbitrária, observe-se que o possível domínio de atração estimado \mathbf{G}_{c^*} , em que $c^* = \max\{c \in \mathbb{R}^+ / \mathbf{G}_c \subseteq \mathbf{F} \cap \mathbf{H}\}$, será muito maior na Figura 5(a) do que na Figura 5(b).

A fim de obter a estimativa do domínio de atração usando uma função de Lyapunov fuzzy, requer-se adicionar no Teorema 3 uma restrição adicional que garanta que o domínio

de atração esteja incluído em $\mathbf{H} \cap \mathbf{F}$. Para isso, $\alpha_i(t)$ é representado como (TANAKA; HORI; WANG, 2001)

$$\dot{\alpha}_\ell(t) = \frac{\partial \alpha_\ell(t)}{\partial x(t)} \dot{x}(t) = \sum_{\epsilon=1}^s \varsigma_{\ell\epsilon}(x(t)) \xi_{\ell\epsilon} \dot{x}(t), \quad \ell \in \mathbb{K}_r, \quad (49)$$

em que $\xi_{\ell\epsilon}^T \in \mathbb{R}^n$ é um vetor constante, e $\varsigma_{\ell\epsilon}(x(t))$ é uma função não linear que satisfaz $\varsigma_{\ell\epsilon}(x(t)) \in [0, 1]$ e $\sum_{\epsilon=1}^s \varsigma_{\ell\epsilon}(x(t)) = 1$. A expressão (49) indica que $\frac{\partial \alpha_\ell(t)}{\partial x(t)}$ pode ser representada como uma combinação convexa de funções não lineares na região \mathbf{F} . Essa representação é possível porque as funções $\frac{\partial \alpha_\ell(t)}{\partial x(t)}$ dependerão das variáveis premissa do modelo fuzzy T-S, as quais foram definidas para obter o modelo fuzzy T-S na região \mathbf{F} . O teorema a seguir amplia os resultados do Teorema 5.

Teorema 6. *Seja o sistema fuzzy (7) com $u(t) = 0$ e os escalares dados ρ_i , tais que $|\dot{\alpha}_i(t)| \leq \rho_i, i \in \mathbb{K}_r$. Suponha a existência de matrizes simétricas $P_i > 0$ e escalares $g_i, i \in \mathbb{K}_r$, tais que o seguinte problema de otimização tenha uma solução*

$$\begin{aligned} & \min_{P_i, g_i} \gamma \\ & \frac{1}{\bar{x}_i^2} e_i e_i^T < P_i, \quad i \in \mathbb{K}_r, \end{aligned} \quad (50)$$

$$P_i - \gamma I < 0, \quad i \in \mathbb{K}_r, \quad (51)$$

$$\Upsilon_{ij}^{\ell\epsilon} + \Upsilon_{ji}^{\ell\epsilon} \leq 0, \quad i \leq j, \quad i, j, \ell \in \mathbb{K}_r, \quad \epsilon \in \{1, \dots, s\}, \quad (52)$$

sendo

$$\Upsilon_{ij}^{\ell\epsilon} = \begin{bmatrix} -P_i & * \\ g_j \xi_{\ell\epsilon} A_i & -2g_i + \frac{1}{\rho_i^2} \end{bmatrix}.$$

Então, o conjunto $\mathbf{G}_1 = \{x(t) \in \mathbb{R}^n / V(x(t)) \leq 1\}$ é a estimativa interna mais próxima possível de $\mathbf{G}_{c^*} = \{x(t) \in \mathbb{R}^n / V(x(t)) \leq c^*\}$, em que $c^* = \max\{c \in \mathbb{R}^+ / \mathbf{G}_c \subseteq \mathbf{F} \cap \mathbf{H}\}$ e $V(x(t)) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) x^T(t) P_i x(t)$.

Demonstração. A prova formal do Teorema 6 pode ser obtida em Lee, Park e Joo (2012). \square

O Teorema 6 apresenta as condições para estimar o domínio de atração usando uma função de Lyapunov fuzzy. Observe que, em contraste com o Teorema 5, as condições agora dependem do sistema fuzzy empregado. Isso prova, mais uma vez, que o uso de uma função de Lyapunov fuzzy introduz as informações do sistema fuzzy T-S nas condições expressas em LMIs. Além disso, do mesmo modo que o Teorema 5, o Teorema 6 pode ser estendido a outras funções de Lyapunov.

2.4 TÉCNICAS DE RELAXAMENTO BASEADAS EM SUB-REGIÕES

O conceito de sub-regiões é característico dos sistemas chaveados com uma função de chaveamento dependente do estado do sistema, devido a que estes sistemas geram sub-regiões limitadas pelas **superfícies de chaveamento**. Por exemplo, dado o seguinte sistema chaveado:

$$\dot{x}(t) = f_\sigma(x(t)), \quad (53)$$

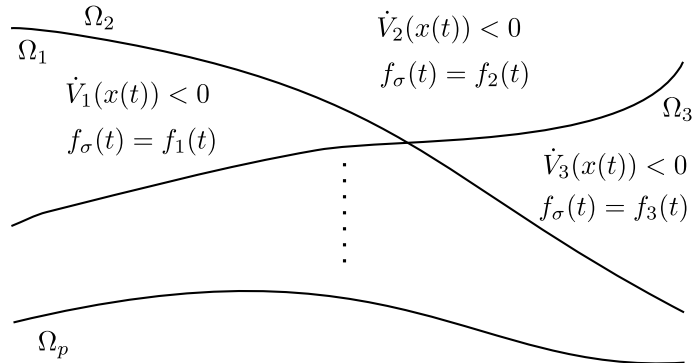
em que $f_\sigma(x(t)) \in \{f_1(x(t)), \dots, f_p(x(t))\}$ é uma função definida como em (1) e $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{K}_p$. Então, dado uma respectiva função de chaveamento, o espaço \mathbb{R}^n será dividido em sub-regiões $\Omega_\ell, \ell \in \mathbb{K}_p$ pelas superfícies de chaveamento (em que o conjunto $\{i \in \mathbb{K}_p / \dot{x}(t) = f_i(t)\}$ tem mais de um elemento), conforme mostrado na Figura 6. Na literatura, as sub-regiões obtidas pela função de chaveamento são adequadas para o uso das funções de Lyapunov por partes, as quais precisam garantir a estabilidade do ponto de equilíbrio apenas em sua sub-região designada.

De maneira geral, a função de Lyapunov por partes pode ser definida como $V_\sigma(x(t))$, a qual pertence a família de funções contínuas de Lyapunov $\{V_1(x(t)), \dots, V_p(x(t))\}$ radialmente ilimitadas (neste caso apenas funções definidas positivas), e $\sigma(t) \in \{1, \dots, p\}$ é uma função constante por partes, a qual define o valor de $V_\sigma(x(t))$ em cada instante de tempo. A função Lyapunov por partes é de natureza descontínua, tendo um número finito de instantes de discontinuidade; e sendo mais geral do que a função de Lyapunov apresentada na Definição 4, o que é uma evidência de seu potencial para reduzir o conservadorismo das condições de estabilidade. No entanto, a ideia principal do uso da função de Lyapunov por partes nos sistemas chaveados é mostrada na Figura 6, em que função de chaveamento garante que cada subsistema $f_\ell(x(t))$ seja atribuído em cada região Ω_ℓ . Então, cada função $V_\ell(x(t)), \ell \in \mathbb{K}_p$ é designada para cada sub-região Ω_ℓ , exigindo que essa função satisfaça as condições do Teorema 1 apenas em cada região específica em vez de em todo o espaço \mathbb{R}^n (LIBERZON, 2003; GEROMEL; COLANERI, 2006b).

2.4.1 Técnicas de relaxamento usando expressões positivas

Baseado no uso das sub-regiões obtidas pela função de chaveamento, uma abordagem interessante é a adição de termos não negativos em todo espaço de estado nas condições de estabilidade, a fim de reduzir o conservadorismo. Essa abordagem é muito útil para relaxar as condições expressas em LMIs, pois, embora o termo adicionado seja positivo, ele não exige a positividade estrita das matrizes envolvidas. Para melhor compreensão, seja o exemplo a seguir:

Figura 6 – Visão geral da divisão do espaço \mathbb{R}^n devido à uma função de comutação $\sigma(x(t))$



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Exemplo 4. Considere que a seguinte desigualdade tenha que ser satisfeita:

$$x^T(t)P(t)x(t) \geq 0, \quad (54)$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado do sistema e $P(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica dependente do tempo. Se a matriz $P(t)$ fosse uma matriz constante, a condição (54) restringiria que a matriz $P(t)$ seja necessariamente semi-definida positiva, garantindo assim a desigualdade para todo $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Porém, se $x^T(t)P(t)x(t)$ fosse uma função por partes ativado por uma função dependente do tempo, ou seja, $P(t) \in \{P_1, P_2, \dots, P_p\}$ em cada intervalo de tempo. Então, não é necessário que as matrizes $P_i, \forall i \in \mathbb{K}_p$, sejam semi-definidas positivas. Por exemplo, se para $n = 2$ temos

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ e } P_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se for definida

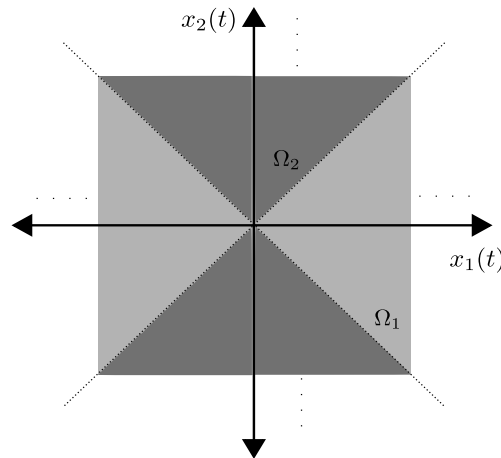
$$P(t) = \begin{cases} P_1, & |x_1(t)| \geq |x_2(t)| \\ P_2, & |x_2(t)| > |x_1(t)| \end{cases} \quad (55)$$

A função $x^T(t)P(t)x(t)$ será

$$x^T(t)P_1x(t) = x_1^2(t) - x_2^2(t), \quad \text{ou} \quad x^T(t)P_2x(t) = x_2^2(t) - x_1^2(t). \quad (56)$$

Então, a desigualdade (54) será garantida para todo $x(t) \in \mathbb{R}^2$, mesmo quando as matrizes P_1 e P_2 não sejam semi-definidas positivas.

A Figura 7 ilustra as sub-regiões obtidas pela função por partes (56), em que as matrizes P_1 e P_2 precisam apenas satisfazer a condição (54) apenas em suas respectivas sub-regiões Ω_1 e Ω_2 . Assim, o Exemplo 4 mostra que a positividade (ou negatividade)

Figura 7 – Sub-regiões obtidas pela função por partes fornecida no Exemplo 4

Fonte: Elaboração do próprio autor.

de uma função de Lyapunov por partes para tudo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ não precisa que as matrizes paramétricas sejam ser positivas ou negativas definidas, mas pode depender apenas de matrizes simétricas. Portanto, a expressão poderia ser adicionada na desigualdade $\dot{V}(x(t)) < 0$, introduzindo assim variáveis (matrizes e escalares) de relaxamento.

Embora a função de Lyapunov por partes é muito útil no relaxamento das condições, a principal desvantagem é lidar com os pontos de descontinuidade, isto é porque nesses pontos, a função de Lyapunov pode-se tornar maior, precisando-se condições mais gerais do que o Teorema 1. Portanto, uma das funções de Lyapunov por partes mais comumente usadas é a chamada **função de Lyapunov por partes do tipo mínimo**, definida como segue:

$$V_\sigma(x(t)) = \min_{i \in \mathbb{K}_p} \{V_i(x(t))\}. \quad (57)$$

Então, para o caso de ter funções de Lyapunov quadráticas, a função de ativação dependente do estado será

$$\sigma(t) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_p} \{x^T(t)P_i x(t)\}, \quad (58)$$

e serão geradas as sub-regiões $\Omega_i, i \in \mathbb{K}_p$.

A função de Lyapunov (57) tem a importante vantagem de não ter pontos de descontinuidade (mas nem é estritamente contínuo (\mathcal{C}^1)), sendo apenas necessário satisfazer que $\dot{V}_i(x(t)) < 0$ para cada intervalo em que a função $V_i(x(t))$ esteja ativa (LIBERZON, 2003). Além disso, a função $\min\{\dots\}$ gera vantagens para a obtenção de expressões positivas. Por exemplo, seja o caso particular em que temos um conjunto de funções de Lyapunov quadráticas, ou seja, $V_i(x(t)) = x^T(t)P_i x(t), \forall i \in \mathbb{K}_p$. Então, baseado na função

de chaveamento (58), a seguinte expressão será satisfeita:

$$x^T(t)P_i x(t) - x^T(t)P_\sigma x(t) = x^T(t)(P_i - P_\sigma)x(t) \geq 0, \quad \forall i \in \mathbb{K}_p, \quad x(t) \in \Omega_\sigma. \quad (59)$$

Note que a desigualdade (59) não exige que a matriz $(P_i - P_\sigma)$ seja positiva semidefinida. Adicionalmente, se multiplicarmos a desigualdade por os escalares $\lambda_{ij} \geq 0, \forall i, j \in \mathbb{K}_p$ em que o índice j representa o valor da função $\sigma(t)$, somando os termos obtemos

$$\sum_{i=1}^p \lambda_{ij} x^T(t)(P_i - P_j)x(t) \geq 0, \quad \forall i, j \in \mathbb{K}_p, \quad x(t) \in \Omega_j. \quad (60)$$

Portanto a condição de estabilidade poderia ser expressa como

$$\dot{V}(x(t)) + \sum_{i=1}^p \lambda_{ij} x^T(t)(P_i - P_j)x(t) < 0, \quad \forall i, j \in \mathbb{K}_p, \quad x(t) \in \Omega_j. \quad (61)$$

A condição (61) pode reduzir o conservadorismo das condições de estabilidade. Entretanto, a principal desvantagem reside na não linearidade da expressão (60), gerando-se um problema de grande dificuldade de solução (CHEN et al., 2012; SOUZA et al., 2014). A fim de tornar mais acessível a solução do problema, um caso especial pode ser obtido, embora mais conservador, que permite expressar as condições de estabilidade para os sistemas fuzzy T-S na forma de LMIs. Então, se consideramos $p = r$ (r é o número de regras fuzzy) e $\lambda_{ij} = \alpha_i(t), \forall j \in \mathbb{K}_r$, obtemos

$$\dot{V}(x(t)) + \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) x^T(t)(P_i - P_j)x(t) < 0, \quad \forall i, j \in \mathbb{K}_r, \quad x(t) \in \Omega_j. \quad (62)$$

Portanto, embora a expressão (62) seja mais conservadora que (61), ela facilita a obtenção de condições na forma de LMIs.

Observação 9. *A expressão (62) é comumente empregada na estabilização de sistemas chaveados lineares. Em Liberzon (2003), a expressão foi obtida usando o \mathcal{S} -procedure a partir de (59). Além disso, a abordagem apresentada em Geromel e Colaneri (2006b), baseada nas matrizes de Lyapunov-Metzler, também pode ser obtida substituindo os escalares $\lambda_{i\sigma}$ pelos elementos da matriz do tipo Metzler.*

Este trabalho será abordado usando uma função de Lyapunov fuzzy suave $V(x(t))$. Portanto, embora a função $\sigma(x(t))$ gere as sub-regiões no espaço \mathbb{R}^n , se fosse considerado um sistema sem chaveamento, como em (1), essa abordagem não seria favorável, pois $\dot{V}(x(t)) < 0$ teria de ser satisfeita para um único sistema em todo o espaço de estado. Além disso, o relaxamento usando expressões positivas também não poderia ser aproveitado se cada sub-região estiver relacionada a um único sistema. Contudo, esse problema pode ser resolvido com a aplicação de um controlador chaveado no sistema (1).

2.5 CONTROLE CHAVEADO

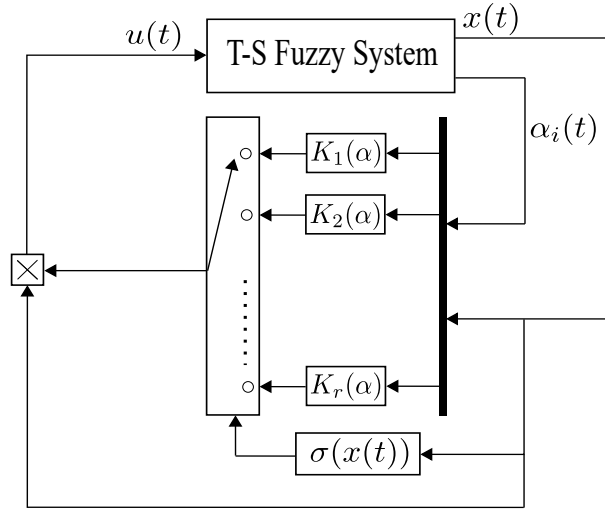
A fim de encontrar novas estratégias de controle com melhor desempenho, o controlador chaveado tem sido estudado há muitos anos e para diversos tipos de sistemas. De modo geral, o controlador chaveado é um tipo de controlador de estrutura variável que dado um conjunto de ganhos, apenas um ganho é ativado para cada intervalo de tempo. Esta ativação é regida por uma função de comutação, a qual pode ser uma função arbitrária ou uma função projetada com um objetivo específico (LIBERZON; MORSE, 1999). Este trabalho é focado no segundo caso, em que a função de comutação será projetada com o objetivo de melhorar a eficiência em comparação com o uso de um único ganho. Isto é, dado um ganho dependente das funções de pertinência $K(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, a qual deve ser projetada para tornar estável um ponto de equilíbrio de um sistema fuzzy T-S. Então, o principal objetivo do controlador chaveado será melhorar a eficiência do controlador reduzindo o conservadorismo das condições de projeto. Nesse sentido, será projetado um conjunto de ganhos dependentes de $\alpha_i(t): \{K_1(\alpha), K_2(\alpha), \dots, K_r(\alpha)\}$, em que $K_i(\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $i \in \mathbb{K}_r$ e com uma lei de controle chaveada definida como

$$u(t) = K_{\sigma}(\alpha)x(t), \quad (63)$$

em que a função $\sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{K}_r$ define o ganho que estará ativo a cada instante de tempo e será chamada como a **lei de chaveamento**. Esta função será projetada com o objetivo de garantir a estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema.

A Figura 8, ilustra o diagrama de blocos do controlador chaveado geral definido em (63). Neste trabalho será considerado que todas as variáveis de estado do sistema estão disponíveis para sua realimentação. Então, a função $\sigma(x(t))$ dependente do vetor de estado poderá ser implementada e gerar várias regiões no espaço divididas por superfícies de chaveamento.

Como foi mencionado na seção anterior, as várias regiões geradas por uma lei de chaveamento dependente do estado podem ser aproveitadas por uma função de Lyapunov por partes, se a cada região for atribuída uma função de Lyapunov específica. Entretanto, para uma função de Lyapunov estritamente contínua, essa estratégia não pode ser aproveitada. Outra maneira de fazer uso das regiões geradas seria atribuir um sistema específico a cada região, ou seja, cada sistema teria que atender às condições de estabilidade apenas na região que foi atribuída a ele. Em princípio, essa estratégia não tem êxito em sistemas sem comutação. No entanto, uma solução interessante é considerar um controlador chaveado, já que, em malha fechada, obteremos um sistema chaveado. Portanto, para aproveitar as vantagens das sub-regiões obtidas, uma lei de controle do tipo $\min\{\dots\}$ ou $\max\{\dots\}$ apresenta grande potencial para desenvolver essa estratégia por meio de condições expressas na forma de LMIs.

Figura 8 – Diagrama de blocos do controlador chaveado


Fonte: Elaboração do próprio autor.

De maneira geral, a lei de chaveamento do tipo $\min\{\dots\}$ ou $\max\{\dots\}$ empregado neste trabalho terá a seguinte forma:

$$\sigma(x(t)) = \arg \min_{j \in \mathbb{K}_r} \{x^T(t)Q_j(\alpha)x(t)\}, \quad \text{ou} \quad (64)$$

$$\sigma(x(t)) = \arg \max_{j \in \mathbb{K}_r} \{x^T(t)Q_j(\alpha)x(t)\} \quad (65)$$

em que a matriz $Q_j(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $j \in \mathbb{K}_r$ é uma matriz dependente das MFs e vai ser obtida da solução das condições na forma de LMIs. A expressão $\arg \min_{j \in \mathbb{K}_r} \{x^T(t)Q_j(\alpha)x(t)\}$ é a lei de chaveamento e refere-se ao índice j , em que a função $x^T(t)Q_j(\alpha)x(t)$ assume seu valor mínimo em cada instante de tempo.

Observação 10. A lei de chaveamento baseados nas funções $\min\{\dots\}$ ou $\max\{\dots\}$ terão uma importante diferença se forem abordadas usando uma função Lyapunov por partes do tipo $\min\{\dots\}$ ou $\max\{\dots\}$. Por exemplo, se a função de Lyapunov fosse

$$V(x) = \max_{i \in \mathbb{K}_r} \{x^T(t)P_i x(t)\}. \quad (66)$$

Como a função (66) não é diferenciável, a derivada é abordada por meio da derivada direcional. Chegando à concluir que, para uma função Lyapunov (66), a estabilidade do sistema não pode ser garantida se a trajetória do sistema for mantida em uma superfície deslizante. Mais informações podem ser encontradas em Geromel e Colaneri (2006b). No entanto, este trabalho será abordado por meio de funções de Lyapunov estritamente contínuas e diferenciáveis. Então, o uso de uma lei de chaveamento baseado na função $\max\{\dots\}$ não influirá no desenvolvimento das condições do projeto do controlador.

Para o desenvolvimento das condições de estabilidade na forma de LMIs e utilizando a lei de chaveamento do tipo $\min\{\dots\}$ ou $\max\{\dots\}$ é importante apresentar a seguinte propriedade:

$$\min_{i \in \mathbb{K}_r} \{\zeta^T(t) X_i \zeta(t)\} \leq \sum_{i=1}^r \beta_i(t) \zeta^T(t) X_i \zeta(t) \leq \max_{i \in \mathbb{K}_r} \{\zeta^T(t) X_i \zeta(t)\}, \quad (67)$$

em que $X_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i \in \mathbb{K}_r$ são matrizes simétricas, $\zeta(t) \in \mathbb{R}^n$ é um vetor dependente do tempo, e $\sum_{i=1}^r \beta_i(t) \zeta^T(t) X_i \zeta(t)$, $\beta_i(t) \in \mathbb{R}$ é alguma combinação convexa dos elementos $\zeta^T(t) X_i \zeta(t) \in \mathbb{R}$, ou seja

$$\beta_i(t) \geq 0, \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^r \beta_i(t) = 1. \quad (68)$$

É importante notar que as funções $\min_{i \in \mathbb{K}_r} \{\zeta^T(t) X_i \zeta(t)\}$ e $\max_{i \in \mathbb{K}_r} \{\zeta^T(t) X_i \zeta(t)\}$ dependem do vetor $\zeta(t)$ e podem sofrer mudanças em cada instante do tempo.

2.5.1 Controle chaveado com parâmetros incertos

Para os sistemas fuzzy T-S, a estratégia do controlador chaveado foi abordada principalmente nos sistemas não lineares incertos. Nesses casos, como os MFs não podem ser realimentadas, os ganhos a serem alternados serão geralmente constantes. Dado este cenário, o controlador chaveado é baseado em uma lei de controle independente do $\alpha_i(t)$, como segue:

$$u(t) = K_\sigma x(t), \quad (69)$$

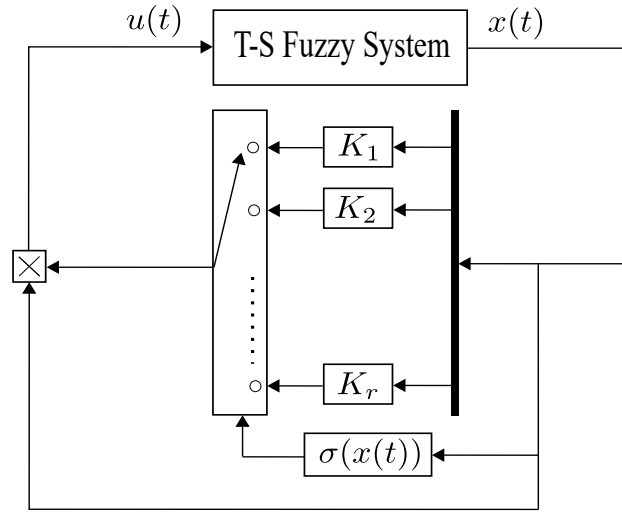
em que o ganho $K_\sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ pertence a um conjunto de ganhos constantes a serem projetados $\{K_1, \dots, K_r\}$. A Figura 9 mostra o diagrama de blocos considerando a lei de controle chaveado para sistemas incertos. Então, com a lei de controle (69), o sistema (7) em malha fechada será

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) [A_i + B_i K_\sigma] x(t). \quad (70)$$

A proposta deste trabalho será comparada com duas estratégias propostas na literatura. A primeira foi apresentado em Souza et al. (2013), onde foi abordado um caso especial do sistema fuzzy T-S, em que $B = B_1 = B_2 = \dots = B_r$, ou seja, o sistema em malha fechada fica

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) [A_i x(t) + B u(t)]. \quad (71)$$

Assim foi proposto a seguinte teorema:

Figura 9 – Diagrama de blocos do controlador chaveado para sistemas incertos


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Teorema 7. Considere as condições do Teorema 3 relacionadas ao sistema (71) e com a lei de controle (15). Então, os ganhos obtidos do controlador PDC pelo Teorema 3, a lei de chaveamento

$$\sigma(t) = \arg \min_{j \in \mathbb{K}_r} \{x^T(t) P B K_j x(t)\}, \quad (72)$$

e o controlador (69), tornam o ponto de equilíbrio $x(t) = 0$, do sistema (71), assintoticamente estável.

Demonstração. A prova do teorema pode ser encontrada em Souza et al. (2013). \square

O Teorema 7 apresenta uma lei de chaveamento que garante a estabilidade do sistema, em base aos ganhos obtidos com o Teorema 3. Então, o conservadorismo das condições de projeto do controlador chaveado não mudará em relação ao controlador (15). Mas, uma desvantagem da lei de chaveamento (72) é que ela foi proposta para o caso em que a matriz B_i seja constante para todo $i \in \mathbb{K}_r$, ou seja, a matriz $B(x)$ não contém termos não lineares. Isto porque se a matriz $B(x)$ depende das MFs, a lei de chaveamento (72) dependerá do termo

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r B_i K_j, \quad (73)$$

ou seja, a matriz $Q_{ij} = P B_i K_j$ dependerá de dois índices $i, j \in \mathbb{K}_r$ e a desigualdade (67) não poderá ser usada para gerar a lei de chaveamento (72). Este problema também foi resolvido em Souza et al. (2013), ampliando a ordem do sistema. Contudo, a limitação de exigir que a matriz P seja constante ainda permanece.

Com o objetivo de obter uma lei de chaveamento em que a matriz Q_j seja independente de qualquer matriz própria do sistema, a estratégia de adicionar termo positivos na derivada da função de Lyapunov foi amplamente utilizada. Isto é, da desigualdade (67) obtemos

$$\dot{V}(x) \leq \dot{V}(x) + x^T(t) \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) Q_i x(t) - \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{x^T(t) Q_i x(t)\}. \quad (74)$$

Então, a desigualdade poderá ser desenvolvida, ficando

$$\dot{V}(x) \leq \dot{V}(x) + \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) x^T(t) (Q_i - Q_j) x(t), \quad \forall i, j \in \mathbb{K}_r, \quad x(t) \in \Omega_i. \quad (75)$$

Note que a desigualdade (75) é semelhante à desigualdade (62), em que a sub-região $\Omega_i = \{x(t) \in \mathbb{R}^n / x^T(t) Q_i x(t) = \min_{j \in \mathbb{K}_r} \{x^T(t) Q_j x(t)\}\}$, mas com a diferença de que a matriz Q_i é uma matriz independente da função de Lyapunov. Esta estratégia pode ser formalizada pelo seguinte teorema:

Teorema 8. (SOUZA et al., 2014) *Assuma a existência de uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $Z_i, \bar{Q}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes $M_j \in \mathbb{R}^{m \times n}$, para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$, tais que as seguintes LMIs sejam satisfeitas:*

$$B_i M_j + M_j^T B_i^T - Z_i - \bar{Q}_j < 0, \quad (76)$$

$$X A_i^T + A_i X + Z_i + \bar{Q}_i < 0, \quad (77)$$

em que $P = X^{-1}$, $Q_j = X^{-1} \bar{Q}_j X^{-1}$ e com os ganhos $K_j = M_j X^{-1}$. Então, o controlador (69) com a lei de chaveamento $\sigma(x(t)) = \arg \min_{j \in \mathbb{K}_r} \{x^T(t) Q_j x(t)\}$, torna o ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ do sistema (7), assintoticamente estável.

Demonstração. Suponha-se que (76) e (77) sejam factíveis. Multiplicando (76) e (77) por $X^{-1} = P$ no lado direito e esquerdo

$$X^{-1} B_i K_j + K_j^T B_i^T X^{-1} - X^{-1} Z_i X^{-1} - X^{-1} \bar{Q}_j X^{-1} < 0, \quad (78)$$

$$A_i^T P + P A_i + X^{-1} Z_i X^{-1} + X^{-1} \bar{Q}_i X^{-1} < 0, \quad (79)$$

Somando (78) e (79)

$$A_i^T P + P A_i + P B_i K_j + K_j^T B_i^T P + Q_i - Q_j < 0, \quad (80)$$

multiplicando por $\alpha_i(t)$ e somando para todo $i \in \mathbb{K}_r$, obtemos

$$A^T(\alpha) P + P A(\alpha) + P B(\alpha) K_j + K_j^T B^T(\alpha) P + Q(\alpha) - Q_j < 0. \quad (81)$$

Logo, multiplicando por $x^T(t)$ e $x(t)$ no lado esquerdo e direito respectivamente. Depois, como a desigualdade (81) é satisfeita para todo $j \in \mathbb{K}_r$, substituímos j pelo σ

$$x^T(t) \left(A^T(\alpha) P + P A(\alpha) + P B(\alpha) K_\sigma + K_\sigma^T B^T(\alpha) \right) P x(t)$$

$$\begin{aligned}
& +x^T(t)Q(\alpha)x(t) - x^T(t)Q_\sigma x(t) < 0 \\
\dot{V}(x) + x^T(t) \sum_{i=1}^r \alpha_i(t)Q_i x(t) - x^T(t)Q_\sigma x(t) < 0.
\end{aligned} \tag{82}$$

Finalmente da desigualdade (75), as condições (78) e (79) garantem que $\dot{V}(x) < 0$. \square

O Teorema 8 mostra a vantagem da aplicação de um controlador chaveado em um sistema fuzzy T-S usando o termo positivo da forma dada em (59). De fato, se não fosse incluído o termo positivo, teríamos a seguinte condição de projeto:

$$A_i^T P + P A_i + P B_i K_j + K_j^T B_i^T P < 0, \quad \forall i, j \in \mathbb{K}_r. \tag{83}$$

Então, significa que cada ganho K_j terá que estabilizar todos os sistemas locais i , ou seja, o mesmo conservadorismo seria mantido se considerássemos $K_1 = K_2 = \dots = K_r$, e teremos as mesmas condições de projeto de um controlador de ganho único. Isso pode ser comprovado com o seguinte exemplo:

Exemplo 5. *Sejam os seguintes modelos locais de um sistema numérico T-S fuzzy (MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009):*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3.6 & -1.6 \\ 6.2 & -4.3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a & -1.6 \\ 6.2 & -4.3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -0.45 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -b \\ -3 \end{bmatrix}. \tag{84}$$

Assim, para o caso $a = 2$ e $b = 1.2$, obtemos as matrizes $Q_i, i \in \mathbb{K}_r$ usando o Teorema 8,

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 6.1405 & -2.1954 \\ -2.1954 & 0.7849 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 3.0295 & -1.0831 \\ -1.0831 & 0.3872 \end{bmatrix}. \tag{85}$$

Então pode ser verificado que nenhuma das matrizes $Q_i - Q_j, \forall i, j \in \mathbb{K}_r$ é definida positiva ou definida negativa. Isto comprova a redução do conservadorismo das condições, com o uso de um controlador chaveado.

3 ANÁLISE DA ESTABILIDADE CONSIDERANDO UMA FLF

No capítulo anterior, foram discutidas as vantagens do uso de uma função de Lyapunov fuzzy. Foi também exposto o desafio de lidar com esse tipo de função. Este capítulo se centra no uso de uma função de Lyapunov fuzzy (45), levando em conta o conservadorismo e o esforço computacional.

Como conteúdo do capítulo, primeiro serão analisados alguns métodos propostos na literatura para lidar com as derivadas das MFs. Em seguida, estes métodos serão aplicados na análise de estabilidade, a fim de levar em conta suas vantagens tanto no conservadorismo como o esforço computacional. Por fim, baseado nos resultados obtidos serão apresentadas condições de projeto para o controle chaveado, focadas nos sistemas não lineares incertos. Alguns exemplos serão mostrados, a fim de examinar os métodos e demonstrar o aprimoramento do controle chaveado proposto.

3.1 ANÁLISE DAS DERIVADAS DAS FUNÇÕES DE PERTINÊNCIA

O desafio de lidar com derivadas das MFs, foi descrito na Subseção 2.3. Para este objetivo, a seguinte suposição será considerada neste trabalho:

Suposição 1. *Supõe-se que a derivada contínua com respeito ao tempo de $\alpha_i(t)$ seja limitada, e os escalares $\rho_i \in \mathbb{R}$ que satisfazem $|\dot{\alpha}_i(t)| \leq \rho_i, \forall i \in \mathbb{K}_r$ são conhecidos.*

A Suposição 1 baseia-se na premissa de que $\alpha_i(t) \in \mathcal{C}^1$. Além disso, ela introduz a consideração da região \mathbf{H} (definida em (48)) na análise de estabilidade. Portanto, pode surgir a questão de obter os valores viáveis de ρ_i . Embora seja verdade que em alguns sistemas pode ser difícil obter os valores de ρ_i de forma analítica (JADBABAIE, 1999). Neste trabalho, o valor inicial de ρ_i será obtido pelo método descrito em Guerra e Bernal (2009), para depois aumentar seu valor mantendo sua viabilidade por meio do Teorema 6.

Observação 11. *Certamente, alguns trabalhos não consideram a Suposição 1 para abordar o problema (RHEE; WON, 2006; MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009), ou seja, eles não requerem um conhecimento prévio dos valores de ρ_i para lidar com as derivadas das MFs. Então, estes métodos têm a vantagem de obter condições globais ($\mathbf{H} = \mathbf{F}$). Entretanto, como será visto mais adiante, os métodos que consideram a Suposição 1 reduzem consideravelmente o conservadorismo das condições quando o valor de ρ_i decresce.*

3.1.1 Estratégias iniciais

Para este capítulo, temos apenas como informação a condição (47) e o valor de ρ_i . Então, como as matrizes P_i são definidas positivas para todo $i \in \mathbb{K}_r$, poderia ser obtida inicialmente a restrição $\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t)P_i \leq \sum_{i=1}^r \rho_i P_i$. Entretanto, isto supõe que o valor de $\dot{\alpha}_i(t), \forall i \in \mathbb{K}_r$, fica em ρ_i em todo instante do tempo, o que conduz a um conservadorismo forte. Uma melhor maneira de lidar com o problema é apresentado em Tanaka, Hori e Wang (2003), onde devido a (47), segue-se que:

$$\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t)P_i = \sum_{i=1}^{r-1} \dot{\alpha}_i(t)P_i + \dot{\alpha}_r(t)P_r = \sum_{i=1}^{r-1} \dot{\alpha}_i(t)(P_i - P_r). \quad (86)$$

Então, se a condição $P_i - P_r \geq 0$ é satisfeita para todo $i \in \{1, 2, \dots, r-1\}$, a seguinte restrição pode ser obtida:

$$\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t)P_i \leq \sum_{i=1}^{r-1} \rho_i(P_i - P_r), \quad (87)$$

em que a função $\dot{\alpha}_r(t)$ foi excluída da somatoria. Note que no lado direito de (87), temos

$$\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t)P_i \leq \sum_{i=1}^{r-1} \rho_i(P_i - P_r) = \sum_{i=1}^{r-1} \rho_i P_i - \sum_{i=1}^{r-1} \rho_i P_r = \sum_{i=1}^r \rho_i P_i - \sum_{i=1}^r \rho_i P_r. \quad (88)$$

Então, o termo $\sum_{i=1}^r \rho_i P_r$ reduz o conservadorismo da desigualdade com respeito à restrição inicial $\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t)P_i \leq \sum_{i=1}^r \rho_i P_i$. Além disso, este procedimento pode ser aplicado para excluir qualquer elemento $\dot{\alpha}_k(t)$, $k \in \mathbb{K}_r$, e devido a que $P_i \neq P_j$ para alguns $i, j \in \mathbb{K}_r$, diferentes níveis de conservadorismo podem ser obtidos para cada $k \in \mathbb{K}_r$.

Por outro lado, em Mozelli, Palhares e Avellar (2009), uma matriz simétrica constante $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é adicionada para relaxar as condições. Considerando uma matriz simétrica $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que $P_i + M \geq 0, \forall i \in \mathbb{K}_r$. De (47) obtém-se

$$\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t)P_i = \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t)(P_i + M) \leq \sum_{i=1}^r \rho_i(P_i + M). \quad (89)$$

Observe que o relaxamento se deve ao fato que a matriz M não precisa ser definida positiva, e pode reduzir o valor de $x^T(t) \sum_{i=1}^r \rho_i(P_i + M)x(t)$.

Combinando os métodos anteriores, em Faria, Silva e Oliveira (2013) foi apresentada a seguinte igualdade:

$$\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t)P_i = \dot{\alpha}_k(t)M + \sum_{i=1, i \neq k}^r \dot{\alpha}_i(t)(P_i + M - P_k), \quad k \in \mathbb{K}_r. \quad (90)$$

Então, considerando $P_i + M - P_k > 0$, a seguinte restrição foi obtida:

$$\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t)P_i \leq \pm \rho_k M + \sum_{i=1, i \neq k}^r \rho_i(P_i + M - P_k), \quad (91)$$

em que o sinal \pm significa que tem que ser igual a $+$ ou $-$. Neste caso, a função $\dot{\alpha}_k(t)$ foi excluída, da somatoria e a matriz de relaxamento M foi introduzida, o que gera condições mais relaxadas do que as mencionadas anteriormente. Além disso, observe que conservadorismo da expressão muda para diferentes valores de $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ escolhidos. Portanto, para garantir a condição mais relaxada requer-se testar as condições de estabilidade r vezes. A expressão (91) também foi utilizada em Wang et al. (2020), aplicado em observadores fuzzy.

Observação 12. *Pode-se estender a matriz auxiliar M como uma matriz dependente dos MFs, ou seja, $\sum_{i=1}^r \alpha_i(t)M_i$, o que permite obter resultados mais gerais e, portanto, menos conservadores (LEE; PARK; JOO, 2012). Porém, essa consideração também aumentará o número de restrições (LMIs). Assim, a fim de fazer uma comparação adequada dos métodos, será considerada uma matriz M constante.*

3.1.2 Estratégias que consideram cenários factíveis

As estratégias descritas apresentam uma abordagem baseada apenas na equação (47), o que gera uma metodologia mais simplificada. Contudo, possuem um conservadorismo considerável devido que o vetor $\dot{\alpha}(t)$ ser substituído pelo vetor $[\rho_1 \ \rho_2 \ \dots]$, o que não é um cenário real devido a não atender à condição (47). Portanto, uma abordagem mais apropriada é considerar que o termo $\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t)P_i$ fique dentro de um poliédrico. Este abordagem, fornecido em Geromel e Colaneri (2006a) para sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo (LPV), define o seguinte hiperretângulo que contém todos os valores do vetor $\dot{\alpha}(t)$:

$$\mathcal{P} := \{\dot{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^r / -\rho_i \leq \dot{\alpha}_i(t) \leq \rho_i, i \in \mathbb{K}_r\}. \quad (92)$$

Observe que os vértices do hiperretângulo serão os vetores em que os elementos são todas as combinações possíveis de $\dot{\alpha}_i(t) = \pm\rho_i$, gerando um número de vértices igual a 2^r . No entanto, o conjunto \mathcal{P} inclui vetores que não satisfazem a equação (47), o que gera um número muito grande de vértices e uma análise conservadora. Então, para definir os vértices do politopo adequado definiu-se o seguinte hiperplano:

$$\mathcal{E} := \{\dot{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^r / c^T \dot{\alpha}(t) = 0\}, \quad (93)$$

em que $c = [1, 1, \dots, 1] \in \mathbb{R}^r$. Portanto, as derivadas de tempo das MFs ficaram contidas em um espaço de dimensão $r - 1$, dado pela interseção do hiperretângulo (92) e o hiperplano (93)

$$\mathcal{G} := \mathcal{E} \cap \mathcal{P} = \{\dot{\alpha}(t) \in \mathbb{R}^r / -\rho_i \leq \dot{\alpha}_i(t) \leq \rho_i, c^T \dot{\alpha}(t) = 0, i \in \mathbb{K}_r\}. \quad (94)$$

Então os vértices do politopo gerado \mathcal{G} serão definidos como $\nu^j = [\nu_1^j, \nu_2^j, \dots, \nu_r^j] \in \mathbb{R}^r$. Estes vértices podem ser reunidas na seguinte matriz:

$$H = [\nu^1 \ \nu^2 \ \dots \ \nu^n] \in \mathbb{R}^{r \times \eta}. \quad (95)$$

em que cada vértice ν^j satisfaz $\sum_{i=1}^r \nu_i^j = 0, \forall j \in \{1, 2, \dots, \eta\}$. Assim, a principal vantagem do análise dos vértices do politopo \mathcal{G} é que qualquer elemento $\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t)P_i$ pode ser representado como uma combinação convexa

$$\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t)P_i = \sum_{j=1}^{\eta} \beta_j(t) \sum_{i=1}^r H_{(i,j)}P_i, \quad (96)$$

em que $H_{(i,j)}$ é o elemento da linha i e a coluna j da matriz H , e a função $\beta_j(t)$ satisfaz

$$\beta_j(t) \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{\eta} \beta_j(t) = 1. \quad (97)$$

Um caso particular, em que $\rho = \rho_i, \forall i \in \mathbb{K}_r$. O vetor ν^j deve conter todas as combinações possíveis de $\pm\rho$ que satisfazem $\sum_{i=1}^r \nu_i^j = 0$. Nesse caso, o número de vértices serão as combinações possíveis que podem ser calculadas por

$$\eta = \frac{r!}{\left(\frac{r}{2}\right)! \left(\frac{r}{2}\right)!}, \quad (98)$$

o qual é menor que o número de vértices do hiperretângulo. Para perceber melhor a vantagem dessa abordagem, para $r = 2$, teremos

$$H = \begin{bmatrix} \rho & -\rho \\ -\rho & \rho \end{bmatrix}, \quad \text{vértices do hiperretângulo } \mathcal{P} = \left\{ \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \rho \\ -\rho \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\rho \\ \rho \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\rho \\ -\rho \end{bmatrix} \right\}, \quad (99)$$

em que $\rho = \min_{i \in \{1,2\}} \rho_i$. Note que, o número de vértices do politopo \mathcal{G} é consideravelmente menor do que o número de vértices do hiperretângulo \mathcal{P} , reduzindo o número de restrições possíveis.

Apesar do potencial notável do enfoque baseado em um politopo, uma desvantagem encontra-se na dificuldade de obter os vértices no caso de ter intervalos não homogêneos $\underline{\rho}_i \leq \dot{\alpha}_i(t) \leq \bar{\rho}_i$, em que $\underline{\rho}_i \neq \bar{\rho}_i$. Nesses casos, uma ideia trivial seria estender o polítopo \mathcal{G} de forma que os vértices sejam dados pelas combinações de $\pm\rho$, em que $\rho = \max_{i \in \mathbb{K}_r} \{\rho_i\}$. No entanto, isso aumenta o conservadorismo, pois são consideradas regiões fora do hiperretângulo \mathcal{P} .

Por outro lado, em Lazarini (2021), não é mais considerado um método que aborda apenas a matriz $\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t)P_i$, mas foi abordado o termo dependente dos estados do sistema $\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t)x^T(t)P_i x(t)$. Então, o assunto foi apresentado como um problema de otimização com o objetivo de encontrar os limites ótimos constantes ρ_i^* que satisfazem

$$\max_{\dot{\alpha}(t) \in \mathcal{G}} x^T(t) \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t)P_i x(t) = x^T(t) \sum_{i=1}^r \rho_i^* P_i x(t), \quad i \in \mathbb{K}_r. \quad (100)$$

No entanto, como a função objetiva é dependente do tempo (do vetor de estados), a busca pelos valores de ρ_i^* não é viável. Então, foi proposto um algoritmo que obtém conjuntos

de limites ótimos $\rho_j^* = \{\rho_{1j}^*, \rho_{2j}^*, \dots, \rho_{rj}^*\} \in \mathcal{G}$, $j \in \mathbb{K}_p$, os quais satisfazem condição (47) e a seguinte desigualdade:

$$\max_{\dot{\alpha}(t) \in \mathcal{G}} x^T(t) \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) P_i x(t) \geq x^T(t) \sum_{i=1}^r \rho_{ij}^* P_i x(t), \quad \forall j \in \mathbb{K}_p, \quad (101)$$

em que $p = r!$ é o número de conjuntos de limites ótimos obtido para cada combinação de:

$$\left. \begin{array}{l} T_1 \geq T_2 \geq \dots \geq T_r \\ T_1 \geq T_3 \geq \dots \geq T_r \\ T_1 \geq T_4 \geq \dots \geq T_r \\ \vdots \end{array} \right\} r! \text{ combinações}, \quad (102)$$

sendo $T_i = x^T(t) P_i x(t)$. A ideia principal consiste em que cada instante do tempo será cumprida a seguinte igualdade:

$$\max_{\dot{\alpha}(t) \in \mathcal{G}} x^T(t) \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) P_i x(t) = \max_{j \in \mathbb{K}_p} x^T(t) \sum_{i=1}^r \rho_{ij}^* P_i x(t). \quad (103)$$

Então, se todos os conjuntos ρ_j^* fossem considerados nas restrições, ou seja, $\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) P_i x(t)$ fosse considerado como $\sum_{i=1}^r \rho_{ij}^* P_i x(t)$, $\forall j \in \mathbb{K}_p$, a igualdade (103) seria garantida para cada instante de tempo.

Cabe observar que, a análise dos conjuntos $\rho_j^* \in \mathcal{G}$ não pode gerar um conservadorismo menor do que a análise usando os vértices do politopo \mathcal{G} . Isso é, porque o politopo \mathcal{G} é a menor região que abrange todos os vetores possíveis $\dot{\alpha}(t)$ no sistema fuzzy T-S. Nesse sentido, devido à convexidade do politopo \mathcal{P} , os conjuntos ρ_j^* que satisfazem a condição (103) ficaram nos vértices do \mathcal{P} . Assim, o conjunto dos vértices $\{\nu^1, \nu^2, \dots, \nu^n\} \subseteq \rho^* = \{\rho_1^*, \rho_2^*, \dots, \rho_p^*\}$. Portanto, a grande contribuição do algoritmo proposto em Lazarini (2021) é que ela encontra os conjuntos $\rho_j^* \in \mathcal{G}$, mesmo no caso de ter valores diferentes de ρ_i para cada $i \in \mathbb{K}_r$ ou ter intervalos não homogêneos.

Observação 13. *Observe que os métodos analisados são adequados para a análise de sistemas não lineares com incertezas, pois eles usam apenas a equação (47) para seu desenvolvimento e não consideram nenhuma informação adicional sobre os MFs. Embora seja verdade que existem resultados na literatura que utilizam mais informações das MFs (LAM, 2018), esses resultados podem ser adicionados nas estratégias propostas para o uso da função de Lyapunov fuzzy.*

3.2 ANÁLISE DA ESTABILIDADE

Considerando os procedimentos alternativos para lidar com as derivadas dos MFs, é possível obter condições de estabilidade para um sistema fuzzy T-S usando a função de

Lyapunov fuzzy definida em (45). Então, será considerado o seguinte sistema fuzzy T-S em malha aberta:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) A_i x(t), \quad i \in \mathbb{K}_r. \quad (104)$$

Da expressão (46), observe que os métodos discutidos na seção anterior analisam independentemente o termo $\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) P_i x(t)$. Portanto, estes resultados podem ser incorporados nas condições de estabilidade sem comprometer as condições obtidas para os termos restantes em (46). Para uma melhor compreensão, o seguinte teorema apresentado em (MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009) será analisado:

Teorema 9. (MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009) *Considere a Suposição 1. O ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ do sistema fuzzy T-S descrito em (104) será assintoticamente estável, se existirem matrizes simétricas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e quaisquer matrizes $R_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que satisfaçam o seguintes conjuntos de LMIs:*

$$P_i > 0, \quad (105)$$

$$P_i + M > 0, \quad (106)$$

$$\Xi_i < 0, \quad \forall i \in \mathbb{K}_r, \quad (107)$$

em que

$$\Xi_i = \begin{bmatrix} P_\phi + R_1 A_i + A_i^T R_1^T & * \\ P_i + R_2 A_i - R_1^T & -R_2 - R_2^T \end{bmatrix},$$

$$P_\phi = \sum_{\ell=1}^r \rho_\ell (P_\ell + M).$$

Demonstração. Dada a função de Lyapunov fuzzy (45), tomando a derivada com respeito ao tempo, temos

$$\dot{V}(x) = \dot{V}_1(x) + x^T(t) \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) P_i x(t). \quad (108)$$

em que

$$\dot{V}_1(x) = \dot{x}^T(t) \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) P_i x(t) + x^T(t) \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) P_i \dot{x}(t). \quad (109)$$

Então, considerando o sistema (104) e aplicando o método do descritor para $\dot{V}_1(x)$, obtemos

$$\dot{V}_1(x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) \hat{x}^T(t) \hat{\Xi}_i \hat{x}(t), \quad (110)$$

em que

$$\hat{x}(t) = [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)]^T \quad \text{e} \quad \hat{\Xi}_i = \begin{bmatrix} R_1 A_i + A_i^T R_1^T & * \\ P_i + R_2 A_i - R_1^T & -R_2 - R_2^T \end{bmatrix}.$$

A partir da definição das MFs dada em (47) e da condição (106), o termo dependente das derivadas das MFs pode ser expresso como

$$\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) P_i \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) \left[\sum_{\ell=1}^r \rho_\ell (P_\ell + M) \right]. \quad (111)$$

Portanto, substituindo (110) e (111) na expressão (108), obtemos

$$\dot{V}(x) \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) \hat{x}^T(t) \Xi_i \hat{x}(t). \quad (112)$$

Por fim, a condição (107) garantirá que $\dot{V}(x) < 0$, e assim, o ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ será assintoticamente estável. \square

O Teorema 9 apresenta as condições para garantir a estabilidade assintótica do sistema (104). Além disso, observa-se em (108), que a derivada da função de Lyapunov fuzzy foi separado em duas expressões, obtendo-se restrições de cada uma delas independentemente. Isso mostra, que quaisquer restrições obtidas pelos métodos analisados na subseção anterior, podem ser adicionadas à mesma expressão de $\dot{V}_1(x)$ dado em (110). Nesse sentido, para uma justa comparação do conservadorismo, será analisado considerando a expressão (110) para todos os métodos.

Exemplo 6. Considere um sistema numérico fuzzy T-S com os seguintes modelos locais:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{3b-2}{5} & \frac{3a-4}{5} \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{2b-3}{5} & \frac{2a-6}{5} \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b & -2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (113)$$

e com as seguintes funções de pertinência para $i = 1, 2$:

$$M_{1i}(x_i(t)) = \frac{1 - \sin x_i(t)}{2}, \quad \|x_i\| \leq \frac{\pi}{2}, \quad (114)$$

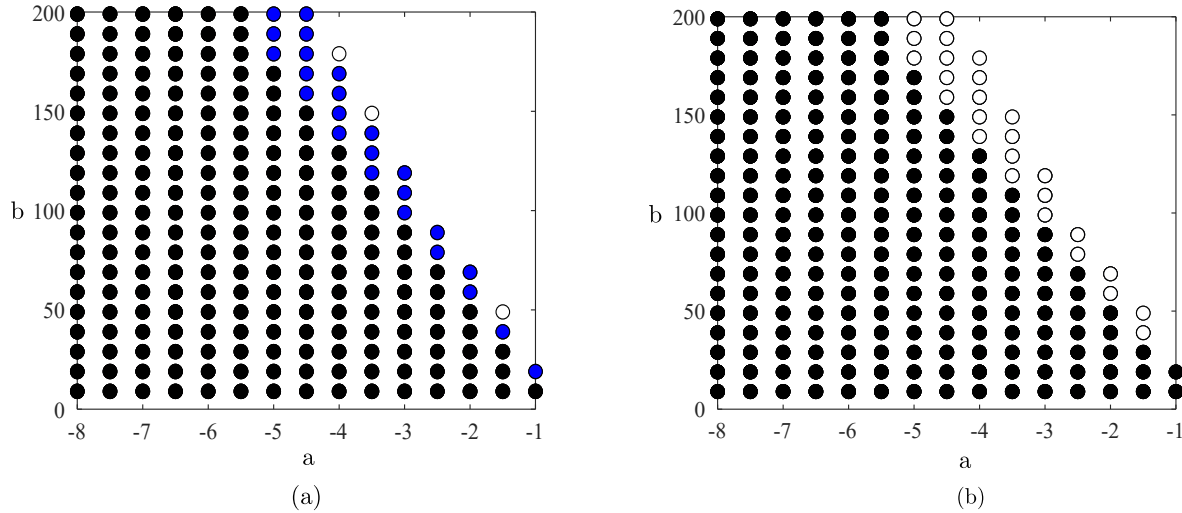
sendo $M_{2i}(x_i(t)) = 1 - M_{1i}(x_i(t))$ e os pesos dos modelos locais

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= M_{11}(x_1(t))M_{12}(x_2(t)), \alpha_2(t) = M_{11}(x_1(t))M_{22}(x_2(t)), \\ \alpha_3(t) &= M_{21}(x_1(t))M_{12}(x_2(t)), \alpha_4(t) = M_{21}(x_1(t))M_{22}(x_2(t)). \end{aligned} \quad (115)$$

Note que a região de modelagem é definido como $\mathbf{F} = \{x(t) \in \mathbb{R}^n / \|x_i(t)\| \leq \pi/2, i = 1, 2\}$. Além disso, seguindo a análise apresentada em (GUERRA; BERNAL, 2009) tem-se

$$\lambda_{ju} = \left| \frac{\partial M_{1j}(z_j(t))}{\partial z_j(t)} x_u(t) \right|, \quad u \in \mathbb{K}_n, j \in \mathbb{K}_p, \quad (116)$$

Figura 10 – Região de factibilidade para $\rho_i = \pi/4, i \in \mathbb{K}_r$, Mozelli, Palhares e Avellar (2009) (\bullet), método do politopo (\circ, \bullet, \bullet). (a) Faria, Silva e Oliveira (2013) para $k = 1$ (\bullet, \bullet). (b) Faria, Silva e Oliveira (2013) para $k = 4$ (\bullet)



Fonte: Elaboração do próprio autor.

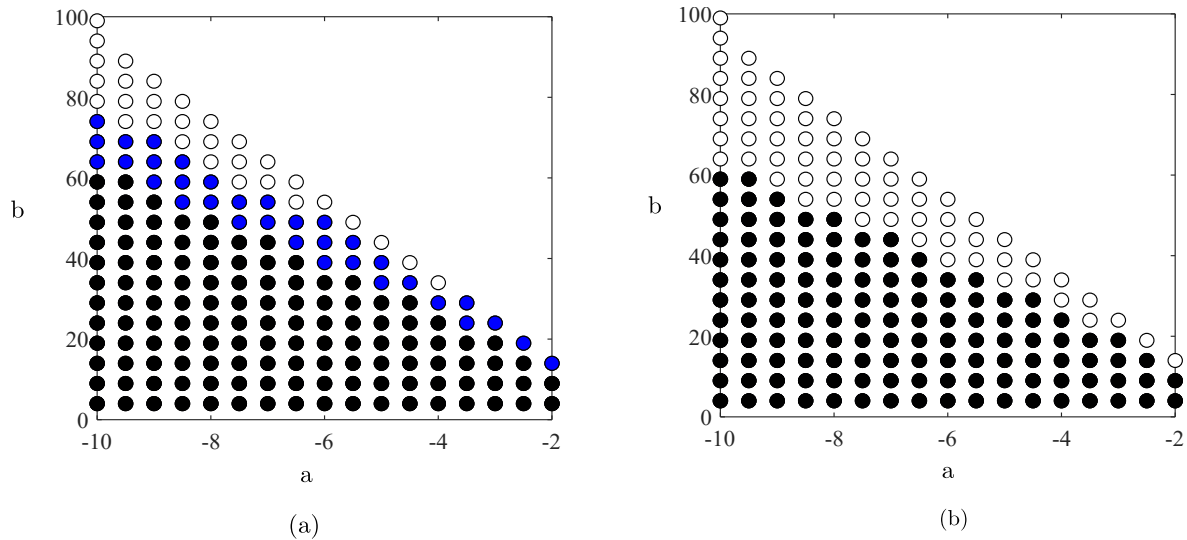
Então, para no Exemplo 6, como $z(t) = x(t)$ e das funções dadas em (114), obtemos como valor inicial $\rho_i = \lambda_{\forall j, u \in \{1,2\}} = \pi/4, \forall i \in \mathbb{K}_r$.

Neste trabalho, as soluções das LMIs foram obtidas usando os tooboxes YALMIP (LOFBERG, 2004) e SeDuMi (STURM, 1999) na interface do MATLAB.

As regiões de factibilidade são apresentadas na Figuras 10, em que o método apresentado em Mozelli, Palhares e Avellar (2009) gera as condições de estabilidade mais conservadoras. Em contraste, o método do politopo apresenta a maior região, provando ser o método menos conservador. Adicionalmente, observe na Figura 10(a), que o método apresentado em Faria, Silva e Oliveira (2013) para $k = 4$ apresenta a mesma região de factibilidade que o método proposto em Mozelli, Palhares e Avellar (2009), mas, para $k = 1$ na Figura 10(b) mostra que a região de factibilidade é consideravelmente ampliada. Isso prova, que o método proposto em Faria, Silva e Oliveira (2013) requer o teste das LMIs r vezes, a fim de obter o caso menos conservador.

O método do politopo apresenta uma região de factibilidade um pouco mais ampla do que os métodos analisados. Contudo, o domínio de atração do sistema ainda não foi levado em consideração. Isso é importante porque, como visto na Figura 5, para valores menores de ρ , a região $\mathbf{H} \cap \mathbf{F}$ diminuirá, reduzindo a possível estimativa do domínio de atração. Portanto, é importante analisar a região de factibilidade levando em conta um valor de ρ mais rigoroso. A Figura 11 mostra a região de factibilidade considerando $\rho_i = 10, i \in \mathbb{K}_r$. Note que, o método do politopo ainda continua mantendo a maior região de factibilidade do que os outros métodos.

Figura 11 – Região de factibilidade para $\rho_i = 10, i \in \mathbb{K}_r$, Mozelli, Palhares e Avellar (2009) (\bullet), método do politopo (\circ, \bullet, \bullet). (a) Faria, Silva e Oliveira (2013) para $k = 1$ (\bullet, \bullet). (b) Faria, Silva e Oliveira (2013) para $k = 4$ (\bullet)



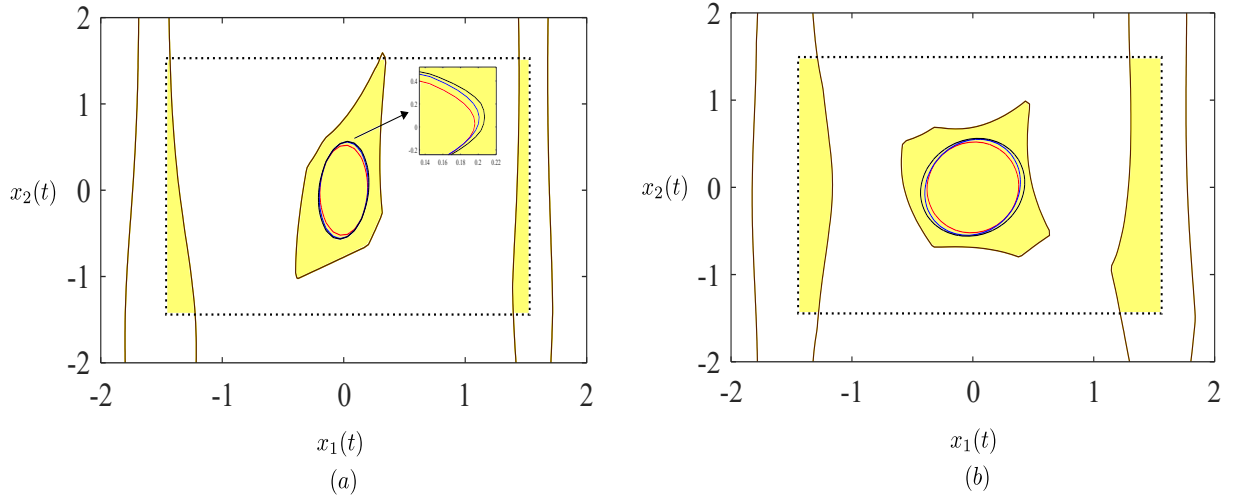
Fonte: Elaboração do próprio autor.

A fim de obter uma estimaco do domínio de atrao, ser empregado o Teorema 6 considerando $\rho_i = 10, i \in \mathbb{K}_r$. Como foi mencionado, as restries do Teorema 6 podem ser includos nas condies de estabilidade dos métodos abordados. As Figuras 12(a) e 12(b) ilustram a estimaco do domínio de atrao usando os métodos abordados para $(a, b) = (-6, 35)$ e $(a, b) = (-2, 12)$, respectivamente. Note que, a estimativa do domínio de atrao \mathbf{G}_{c^*} empregando o Teorema 6  vlido e fica dentro da regio $\mathbf{F} \cap \mathbf{H}$. Adicionalmente, a estimaco do domínio de atrao usando o método do polítopo (cor preta) engloba as estimativas geradas pelo método apresentado em Mozelli, Palhares e Avellar (2009) (cor vermelho) e pelo método apresentado em Faria, Silva e Oliveira (2013) (cor azul). Isso devido ao menor conservadorismo.

Adicionalmente, observa-se na Figura 12, que como foi comentado no capítulo anterior, o Teorema 6 apresenta s uma estimativa do domínio de atrao. Isto é, que a regio estimada é s uma regio incluída no domínio de atrao real. De fato, é evidente que neste exemplo, o domínio de atrao no poder ser estimado exatamente usando a superfície de nível de uma funo Lyapunov do tipo elipsoidal.

Por outro lado, note que a Figura 11 mostra uma regio de factibilidade menor em cada método do que a Figura 10. Isso deve-se ao fato que o conservadorismo das condies analisadas esto relacionadas ao valor de ρ_i . A fim de esclarecer melhor a relao do conservadorismo com respeito aos valores de ρ_i , é apresentado o seguinte exemplo:

Figura 12 – Regiões admissíveis para as trajetórias de estado do sistema para $\rho_i = 10$, $\partial\mathbf{F}$ (linhas ponteadas), $\mathbf{F} \cap \mathbf{H}$ (cor amarela) e as superfícies de nível estimadas com o Teorema 6 (a) $[a, b] = [-6, 35]$. (b) $[a, b] = [-2, 12]$



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Exemplo 7. Considere o seguinte sistema fuzzy T-S (TANAKA et al., 2009):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -2x_1(t) - x_2(t) - f(t)x_1(t), \end{aligned} \quad (117)$$

sendo $f(t) \in [0, \lambda]$. Então, as matrizes locais serão

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 - \lambda & -1 \end{bmatrix}, \quad (118)$$

com os pesos

$$\alpha_1(t) = \frac{\lambda - f(t)}{\lambda}, \quad \alpha_2(t) = \frac{f(t)}{\lambda}. \quad (119)$$

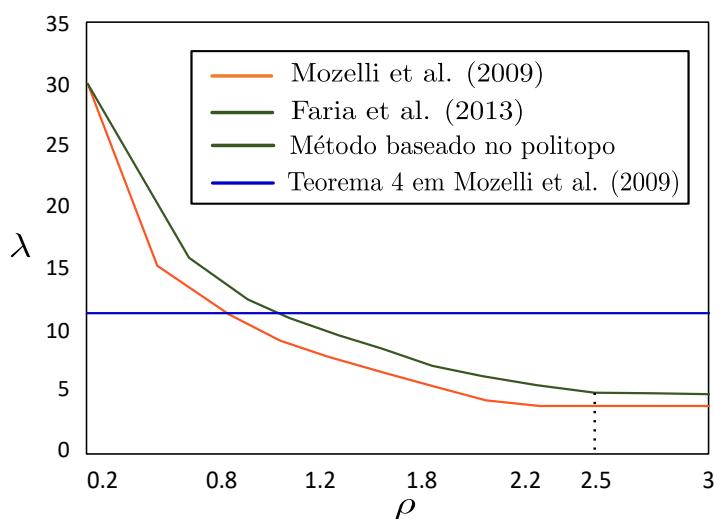
A Tabela 1, mostra os valores máximos de λ para diferentes valores de $\rho = \rho_i, i \in \mathbb{K}_r$, tais que $|\hat{\alpha}_i(t)| \leq \rho$. Observa-se que, o método baseado no politopo e o apresentado em Faria, Silva e Oliveira (2013) obtiveram o mesmo valor de λ de acordo com as variações de ρ . Além disso, o sistema foi simulado usando o Teorema 4 em Mozelli, Palhares e Avellar (2009), o qual não precisa considerar a Suposição 1. Observa-se que nos métodos que consideram a Suposição 1, o valor máximo de λ vai diminuindo à medida que o valor de ρ aumenta.

A Figura 13 mostra a relação entre ρ e λ para cada método, onde aproximadamente para $\rho > 1$, o Teorema 4 em Mozelli, Palhares e Avellar (2009) permite um valor mais alto de λ do que os métodos que consideram a Suposição 1. Contudo, para valores $\rho < 1$, o

Tabela 1 – Valores máximos de λ para diferentes valores de ρ no Exemplo 7

Método	$\rho = 0,2$	$\rho = 0,5$	$\rho = 1$	$\rho = 2$	$\rho = 3$
Mozelli, Palhares e Avellar (2009)	29,72	13,41	6,89	3,82	3,82
Faria, Silva e Oliveira (2013)	30	14,2	8,41	5,49	4,65
Método baseado no politopo	30	14,2	8,41	5,49	4,65
Teorema 4 em Mozelli, Palhares e Avellar (2009)	11,42	11,42	11,42	11,42	11,42

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 13 – Valores máximos de λ em relação a ρ no Exemplo 7

Fonte: Elaboração do próprio autor.

valor máximo do λ obtido pelos métodos que consideram a Suposição 1 é superior. Além disso, note que aproximadamente para $\rho > 2,5$ os métodos que consideram a Suposição 1 apresentam factibilidade para qualquer valor de $\lambda < \lambda^*$. Portanto, existe um valor de λ^* , em que os métodos que consideram a Suposição 1 apresentam factibilidade para qualquer valor de $\rho > 0$. Nesse sentido, o valor de λ^* poderia ser incrementado por meio de algumas técnicas de relaxamento.

3.2.1 Condições de estabilidade considerando matrizes auxiliares fuzzy

Conforme mencionado no Capítulo 1, para reduzir o conservadorismo das condições, foram propostas várias abordagens. Entre elas, as técnicas de relaxamento normalmente introduzem matrizes auxiliares com o objetivo de relaxar algumas condições altamente restritivas. Por exemplo, no termo (110) obtido com o método descritor, as matrizes de relaxamento R_1 e R_2 foram consideradas como constantes. Porém, condições

mais relaxadas poderiam ser obtidas se estas matrizes dependessem das pesos dos modelos locais (GUERRA; BERNAL, 2009; LEE; PARK; JOO, 2011; LEE; PARK; JOO, 2012).

A fim de trabalhar com matrizes auxiliares dependentes das MFs no relaxamento das condições de estabilidade, será usado o seguinte lema:

Lema 1. (GUERRA; BERNAL, 2009) *Seja uma matriz $\mathcal{M}_{ij}, i, j \in \mathbb{K}_r$ com dimensões apropriadas, e a seguinte desigualdade:*

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) \mathcal{M}_{ij} \leq 0, \quad i, j \in \mathbb{K}_r. \quad (120)$$

Uma condição suficiente para que (120) seja satisfeita, é dada pelas seguintes desigualdades:

$$\mathcal{M}_{ii} \leq 0, \quad \forall i \in \mathbb{K}_r, \quad (121)$$

$$\frac{2}{r-1} \mathcal{M}_{ii} + \mathcal{M}_{ij} + \mathcal{M}_{ji} \leq 0, \quad \forall i \neq j, \quad i, j \in \mathbb{K}_r \quad (122)$$

Observação 14. *Como foi comentado na Observação 6. A expressão (120) poderia ser relaxada expandindo e incrementando a dimensão do somatório. Entretanto, esse procedimento aumenta consideravelmente a complexidade computacional à medida que o somatório é expandido. Nesse contexto, o Lema 1 representa uma condição suficiente e de baixa complexidade computacional, o qual é amplamente usada na literatura. Recentemente, em Kim (2022), foram obtidas condições menos conservadoras e de comparável complexidade computacional. Essa variedade de procedimentos mostra que o objetivo de obter condições que garantam a desigualdade (120) continua sendo um problema em andamento.*

Usando o Lema 1, pode-se considerar as matrizes R_1 e R_2 como dependentes das MFs, ou seja, $R_{1\alpha} = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) R_{1i}$ e $R_{2\alpha} = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) R_{2i}$. Tendo isto em vista e tomando como base o Teorema 9, pode ser apresentado o seguinte teorema:

Teorema 10. *Considere a Suposição 1. O ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ do sistema (104) será assintoticamente estável, se existirem matrizes simétricas $P_i, M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e quaisquer matrizes $R_{1i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $R_{2i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i \in \mathbb{K}_r$, que satisfaçam os seguintes conjuntos de LMIs:*

$$P_i > 0, \quad (123)$$

$$P_i + M > 0, \quad (124)$$

$$\Xi_{ii} < 0, \quad \forall i \in \mathbb{K}_r, \quad (125)$$

$$\frac{2}{r-1} \Xi_{ii} + \Xi_{ij} + \Xi_{ji} < 0, \quad \forall i \neq j, \quad i, j \in \mathbb{K}_r, \quad (126)$$

sendo

$$\Xi_{ij} = \begin{bmatrix} P_\phi + R_{1i} A_j + A_j^T R_{1i}^T & * \\ P_i + R_{2i} A_j - R_{1i}^T & -R_{2i} - R_{2i}^T \end{bmatrix},$$

$$P_\phi = \sum_{\ell=1}^r \rho_\ell (P_\ell + M).$$

Demonstração. Considerando a candidata a função de Lyapunov fuzzy (45) e tomando sua derivada, obtém-se a expressão (108). Então, para o sistema (104), o termo $\dot{V}_1(x)$ da expressão (108) pode ser desenvolvido considerando as matrizes auxiliares fuzzy $R_{1\alpha}$ e $R_{2\alpha}$ como

$$\dot{V}_1(x) = -2[x^T(t) \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) R_{1i} + \dot{x}^T(t) \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) R_{2i}] \times \left[\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) A_i x(t) \right]. \quad (127)$$

Desenvolvendo a expressão, obtém-se

$$\dot{V}_1(x) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) \hat{x}^T(t) \hat{\Xi}_{ij} \hat{x}(t), \quad (128)$$

em que

$$\hat{x}(t) = [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)]^T \quad \text{e} \quad \hat{\Xi}_{ij} = \begin{bmatrix} R_{1i} A_j + A_j^T R_{1i}^T & * \\ P_i + R_{2i} A_j - R_{1i}^T & -R_{2i} - R_{2i}^T \end{bmatrix}.$$

A partir da definição das MFs dada em (47) e da condição (124), o termo dependente das derivadas das MFs pode ser expresso como

$$\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) P_i \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) \left[\sum_{\ell=1}^r \rho_\ell (P_\ell + M) \right]. \quad (129)$$

Portanto, substituindo (128) e (129) na expressão (108), obtemos

$$\dot{V}(x) \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) \hat{x}^T(t) \Xi_{ij} \hat{x}(t). \quad (130)$$

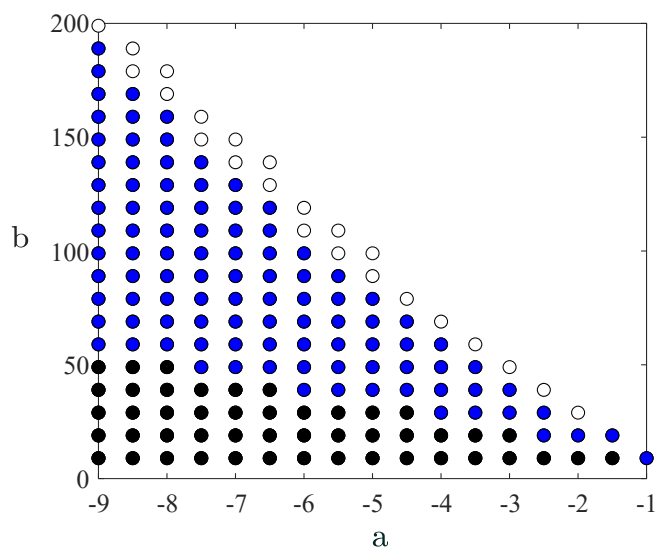
Por fim, aplicando o Lema 1, as condições (125) e (126) garantirão que $\dot{V}(x) < 0$, e assim, o ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ será assintoticamente estável. \square

Observa-se que, como no Teorema 9, a prova do Teorema 10 obtém uma restrição independente para o termo $\dot{V}_1(x)$ e $x^T(t) \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) P_i x(t)$. Então, os outros métodos para abordar as derivadas das MFs podem ser substituídos na expressão (108).

A fim de validar o relaxamento da consideração das matrizes auxiliares fuzzy, será simulado o Exemplo 6 considerando $\rho_i = 10, i \in \mathbb{K}_r$. A Figura 14 ilustra a região de factibilidade do método do politopo $(\bullet, \bullet, \circ)$, o apresentado em Faria, Silva e Oliveira (2013) para $k = 1$ (\bullet, \bullet) e em Mozelli, Palhares e Avellar (2009) (\bullet) , considerando as matrizes de relaxamento fuzzy em todos os métodos. Observa-se que, em contraste com a Figura 11 a região de factibilidade atingida é muito maior para todos os métodos, o que mostra o relaxamento das matrizes auxiliares fuzzy. Além disso, o método do politopo ainda apresenta maior região de factibilidade do que os outros métodos.

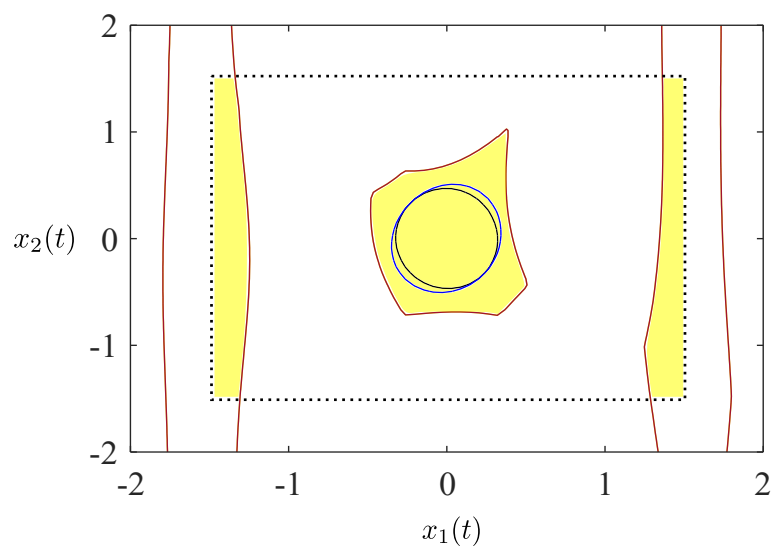
A Figura 15 ilustra o domínio de atração do sistema no Exemplo 6, para $[a, b] = [-2, 16]$ e $\rho_i = 10, i \in \mathbb{K}_r$. Adicionalmente, essa figura mostra uma comparação da estimativa do domínio de atração usando o método do politopo sem matrizes auxiliares fuzzy

Figura 14 – Região de factibilidade para $\rho_i = 10, i \in \mathbb{K}_r$ considerando matrizes auxiliares fuzzy em todas as estratégias, Mozelli, Palhares e Avellar (2009) (\bullet), Faria, Silva e Oliveira (2013) para $k = 1$ (\bullet, \bullet) e o método do politopo (\circ, \bullet, \bullet)



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 15 – Regiões admissíveis da trajetória do sistema para $\rho_i = 10, \partial \mathbf{F}$ (linhas ponteadas), $\mathbf{F} \cap \mathbf{H}$ (cor amarela) e as superfícies de nível estimadas com o Teorema 6: linha preta (sem matrizes auxiliares fuzzy) e linha azul (considerando matrizes auxiliares fuzzy)



Fonte: Elaboração do próprio autor.

(cor azul) e usando matrizes auxiliares fuzzy (cor preto). Note que, o uso de matrizes de relaxamento fuzzy permite uma estimativa de um domínio de atração maior.

Neste capítulo, foram analisados alguns métodos que abordam as derivadas das funções de pertinência. Entre eles, o método do polítopo foi verificado como tendo um conservadorismo menor do que os outros métodos da literatura. Nesse sentido, este método apresenta um potencial para o projeto de controladores. No entanto, o uso do método de polítopo no projeto de controladores para sistemas fuzzy é um tópico que tem sido pouco abordado. O capítulo a seguir apresentará alguns resultados que estendem o método de polítopo para o projeto de controladores chaveados.

4 CONTROLE CHAVEADO PARA SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS

No capítulo anterior, foi detalhado como os sistemas não lineares incertos podem ser modelados de forma exata por um modelo fuzzy T-S considerando as variáveis de incerteza como variáveis premissas. Essa modelagem permite estender os métodos e as abordagens dos sistemas fuzzy T-S para os sistemas não lineares incertos. Contudo, a principal dificuldade reside na natureza incerta das MFs, tornando-se não viável sua realimentação para o projeto dos controladores. Nesse contexto, o controle chaveado tem sido amplamente discutido na literatura. No entanto, como foi mencionado, o projeto do controlador chaveado ainda não foi abordado usando uma função de Lyapunov dependente das MFs.

4.1 PROJETO DE CONTROLE CHAVEADO BASEADO NO MÉTODO DO POLITÓPO

Considere o politopo apresentado em (94)

$$\mathcal{G} := \{\dot{\alpha}_i(t) \in \mathbb{R} / |\dot{\alpha}_i(t)| \leq \rho_i, c^T \dot{\alpha}(t) = 0, i \in \mathbb{K}_r\}, \quad (131)$$

em que $c = [1 \ 1 \ \dots \ 1] \in \mathbb{R}^r$. Os vértices do politopo serão representados como o vetor $\nu^j = [\nu_1^j \ \nu_2^j \ \dots \ \nu_r^j] \in \mathbb{R}^r$, $j \in \mathbb{K}_\eta$, sendo η o número de vértices. Note que os elementos de ν^j satisfazem $\sum_{i=1}^r \nu_i^j = 0$. Portanto, dado o seguinte vetor dependente do tempo:

$$\mathcal{P}(x(t)) = [x^T(t)P_1x(t) \ x^T(t)P_2x(t) \ \dots \ x^T(t)P_rx(t)]^T \in \mathbb{R}^r, \quad (132)$$

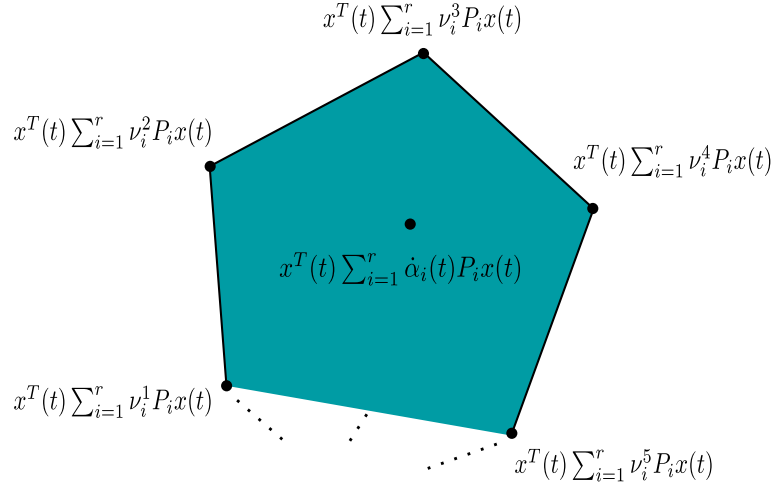
em que $P_i, i \in \mathbb{K}_r$ são as matrizes paramétricas da função de Lyapunov fuzzy. Multiplicando o vetor $\mathcal{P}(x(t))$ pelo vetor $\dot{\alpha}(t)$ que pertence ao politopo \mathcal{G} , o novo politopo será gerado

$$\mathcal{F} := \{x^T(t) \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t)P_ix(t) \in \mathbb{R} / c^T \dot{\alpha}(t) = 0, i \in \mathbb{K}_r\}. \quad (133)$$

Nota-se que como o mesmo vetor $\mathcal{P}(x(t))$ foi multiplicado para todos os elementos do \mathcal{G} , a transformação manterá como vértices do politopo \mathcal{F} os elementos $x^T(t) \sum_{i=1}^r \nu_i^j P_i x(t)$, $j \in \mathbb{K}_\eta$. Além disso, diferentemente do conjunto vetorial \mathcal{G} , o conjunto \mathcal{F} possui elementos escalares.

A Figura 16 ilustra a forma geral do politopo convexo \mathcal{F} , em que a somatória das derivadas das MFs com as matrizes paramétricas ficam dentro deste. Então, para cada instante do tempo existirá um vetor $\beta(t) \in \mathbb{R}^\eta$, tal que

$$x^T(t) \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t)P_ix(t) = \sum_{j=1}^{\eta} \beta_j(t)x^T(t) \sum_{i=1}^r \nu_i^j P_i x(t), \quad (134)$$

Figura 16 – Forma geral do polítopo convexo \mathcal{F}


Fonte: Elaboração do próprio autor.

e a função $\beta_j(t)$ satisfaz

$$\beta_j(t) \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{\eta} \beta_j(t) = 1. \quad (135)$$

Portanto, devido à convexidade do polítopo \mathcal{F} , a seguinte desigualdade será garantida:

$$\min_{j \in \mathbb{K}_\eta} \{x^T(t) \sum_{i=1}^r \nu_i^j P_i x(t)\} \leq x^T(t) \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) P_i x(t) \leq \max_{j \in \mathbb{K}_\eta} \{x^T(t) \sum_{i=1}^r \nu_i^j P_i x(t)\}. \quad (136)$$

A desigualdade (136) estabelece uma restrição para o termo obtido na derivada da função de Lyapunov fuzzy. A principal diferença com respeito a igualdade (96) usada para a análise da estabilidade é que desigualdade (136) está vinculada aos estados $x(t)$, ou seja, não apresenta uma restrição direta à matriz $\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) P_i$. Como foi detalhado no capítulo anterior, essa diferença leva em conta as informações do estado do sistema, permitindo obter uma lei de chaveamento de tipo $\max\{\dots\}$ ou $\min\{\dots\}$ dependente do estado. Assim, a lei de chaveamento permitirá obter sub-regiões no espaço separadas por superfícies de chaveamento, aproveitando as vantagens do controlador chaveado com respeito ao controlador de ganho único.

Baseado na desigualdade (136) é proposto o seguinte teorema:

Teorema 11. *Considere a Suposição 1 e dado um escalar $\mu > 0$. Se existirem as seguintes matrizes simétricas $\bar{P}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e matrizes $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, que satisfaçam o seguintes conjuntos de LMIs:*

$$\bar{P}_i > 0, \quad i \in \mathbb{K}_r \quad (137)$$

$$\bar{\Xi}_{ij} < 0 \quad i \in \mathbb{K}_r, \quad j \in \mathbb{K}_\eta \quad (138)$$

sendo

$$\bar{\Xi}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{P}^j + A_i X + X^T A_i^T + B_i M_j + M_j^T B_i^T & * \\ \bar{P}_i + \mu(A_i X + B_i M_j) - X^T & -\mu(X + X^T) \end{bmatrix},$$

$$\bar{P}^j = \sum_{\ell=1}^r \nu_\ell^j \bar{P}_\ell,$$

e $\nu^j = [\nu_1^j \ \nu_2^j \ \dots \ \nu_r^j]$, $j \in \mathbb{K}_\eta$ os vértices do politopo definido em (131). Então, o controlador chaveado (69) com os ganhos dado pelo $K_j = M_j X^{-1}$ e com a seguinte lei de chaveamento:

$$\sigma(t) = \arg \max_{j \in \mathbb{K}_\eta} \{x^T(t) \sum_{\ell=1}^r \nu_\ell^j P_\ell x(t)\}, \quad (139)$$

sendo $P_\ell = X^{-1} \bar{P}_\ell X^{-T}$, torna o ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ do sistema fuzzy T-S (7), assintoticamente estável.

Demonstração. Considerando a função de Lyapunov fuzzy (45), sua derivada com respeito ao tempo será

$$\dot{V}(x) = \dot{V}_1(x) + x^T(t) \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) P_i x(t), \quad (140)$$

sendo

$$\dot{V}_1(x) = \dot{x}^T(t) \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) P_i x(t) + x^T(t) \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) P_i \dot{x}(t). \quad (141)$$

Tendo em conta o sistema (7) com a lei de controle chaveado (69), e aplicando o método do descritor, tem-se

$$\dot{V}_1(x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) \hat{x}^T(t) \hat{\Xi}_i \hat{x}(t), \quad (142)$$

em que

$$\hat{x}(t) = [x^T(t) \ \dot{x}^T(t)]^T \quad \text{e} \quad \hat{\Xi}_i = \begin{bmatrix} R_1(A_i + B_i K_\sigma) + (A_i^T + K_\sigma^T B_i^T) R_1^T & * \\ P_i - R_1^T + R_2(A_i + B_i K_\sigma) & -R_2 - R_2^T \end{bmatrix}.$$

Da desigualdade (136) e a lei de chaveamento (139), temos

$$x^T(t) \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) P_i x(t) \leq \max_{j \in \mathbb{K}_\eta} \{x^T(t) \sum_{i=\ell}^r \nu_\ell^j P_\ell x(t)\} = x^T(t) \sum_{i=1}^r \nu_\ell^\sigma P_\ell x(t). \quad (143)$$

Multiplicando no lado direito de (143) por $\alpha_i(t)$ e fazendo a somatoria

$$x^T(t) \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) P_i x(t) \leq x^T(t) \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) \left[\sum_{\ell=1}^r \nu_\ell^\sigma P_\ell \right] x(t). \quad (144)$$

Sejam definidas as matrizes $R_1 = X^{-T}$, $R_2 = \mu R_1$, $\bar{P}_i = X^T P_i X$, $M_j = K_j X$. Então, substituindo (142) e (144) em (140), mudando o índice $\sigma \in \mathbb{K}_\eta$ pelo $j \in \mathbb{K}_\eta$ e multiplicando o resultado por $\text{diag}\{X^T, X^T\}$ e $\text{diag}\{X, X\}$ no lado esquerdo e direito, respectivamente, obtemos

$$\dot{V}(x) \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) [x(t)^T \quad \dot{x}^T(t)] \bar{\Xi}_{ij} [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)]^T. \quad (145)$$

Por fim, a condição (138) garantirá que $\dot{V}(x) < 0$, e assim, torna o ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ assintoticamente estável. \square

O Teorema 11 apresenta as condições de projeto de um controlador chaveado com uma lei de controle descrita em (69), a qual não depende das MFs e é adequada para sua aplicação em sistemas não lineares com incertezas. As condições de projeto foram obtidas considerando-se uma função de Lyapunov fuzzy e a desigualdade (136) foi empregada para gerar a lei de chaveamento dependente dos estados do sistema.

Embora o Teorema 11 aproveite o método baseado no politopo para lidar com as derivadas das MFs, é importante mencionar uma diferença importante entre a análise da estabilidade de um sistema e o projeto e implementação de um controlador. A solução viável das condições de estabilidade expressas em LMIs garante a estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema, que é o objetivo pretendido. Em contraste, para a implementação do controlador, é importante levar em conta dois fatores, a complexidade computacional no projeto dos ganhos e a complexidade na implementação do controlador.

4.1.1 Análise do esforço computacional

No projeto dos ganhos do controlador chaveado, o esforço computacional das condições apresentadas no Teorema 11 está relacionada ao número de LMIs a serem resolvidas. Note que nas provas dos teoremas deste capítulo, a derivada da função de Lyapunov fuzzy foi separado nos termos que dependem das derivadas das MFs e naqueles que dependem apenas das MFs, sendo que os últimos podem ser abordados pelo método do descritor. Assim, o número de LMIs dependerá principalmente do método empregado para lidar com as derivadas das MFs.

A Tabela 2 mostra o número de LMIs a serem resolvidos com respeito ao número de modelos locais para cada método analisados na Seção 3.1. Note que, a restrição do termo $V_1(x)$ obtido com o método do descritor é o mesmo nos quatro métodos. No caso das restrições adicionais, elas incluem a positividade das matrizes P_i , $i \in \mathbb{K}_r$, e outras restrições próprias do cada método, por exemplo, a restrição (106) para o método apresentado em Mozelli, Palhares e Avellar (2009). Percebe-se que o número de LMIs aumenta muito nos dois últimos métodos. Entretanto, como foi comprovado, eles também geram um menor conservadorismo nas condições.

Tabela 2 – Tabela comparativa do número de LMIs das estratégias analisadas para a análise de estabilidade.

Métodos	Restrições do termo $\dot{V}_1(x)$	Restrições adicionais	Número de LMIs
Mozelli, Palhares e Avellar (2009)	r	$2r$	$3r$
Faria, Silva e Oliveira (2013)	r	$2r - 1$	$3r - 1$
Representação politópica	r	r	$r + \frac{r!}{(\frac{r}{2})!(\frac{r}{2})!}r$
Lazarini (2021)	r	r	$r + r!r$

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 3 – Tabela comparativa do número de LMIs (análise de estabilidade) com respeito ao número de variáveis premissa.

Número de variáveis premissa	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
Número de regras	$r = 2$	$r = 4$	$r = 8$	$r = 16$	$r = 32$
Mozelli, Palhares e Avellar (2009)	6	12	24	48	96
Faria, Silva e Oliveira (2013)	5	11	23	47	95
Representação politópica	6	28	568	205936	1.9234×10^{10}
Lazarini (2021)	6	100	322568	3.3476×10^{14}	8.4202×10^{36}

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Embora os métodos da Tabela 2 foram simulados em alguns exemplos, esses sistemas tinham um número reduzido de regras. Na prática, muitos sistemas podem apresentar um grande número de incertezas e expressões não lineares (MOZELLI; ADRIANO, 2019), e considerando o modelagem fuzzy T-S baseado em um setor não linear, o número de regras aumentará exponencialmente com relação ao número de variáveis premissa.

A Tabela 3 ilustra uma comparação numérica entre o número de LMIs e o número de variáveis premissa para a análise da estabilidade (sistema (104)). Note que os métodos apresentados em Mozelli, Palhares e Avellar (2009) e Faria, Silva e Oliveira (2013) possuem um número reduzido de LMIs em comparação com os outros dois métodos. Isso representa uma grande vantagem em termos de esforço computacional. Entretanto, conforme demonstrado na seção anterior, o método apresentado em Mozelli, Palhares e Avellar (2009) apresenta um elevado conservadorismo em comparação com os outros métodos. No caso do método apresentado em Faria, Silva e Oliveira (2013), a solução das LMIs precisa ser testada r vezes para garantir a condição menos conservadora. Além disso, esses dois métodos consideram uma restrição direta no termo $\sum_{i=1}^r \hat{\alpha}_i(t)P_i$ e, portanto, não apresentam uma vantagem direta para o projeto de um controlador chaveado.

Para o caso do controlador chaveado, a Tabela 4 mostra uma comparação do número de LMIs a serem resolvidos, assim como o número de ganhos a serem chaveados para o método do politópo (Teorema 11) e o método apresentado em Lazarini (2021).

Tabela 4 – Tabela comparativa do número de LMIs e ganhos a serem chaveados.

Métodos	Número total de LMIs	Número de ganhos
Teorema 11	$r + \frac{r!}{(\frac{r}{2})!(\frac{r}{2})!}r$	$\frac{r!}{(\frac{r}{2})!(\frac{r}{2})!}$
Lazarini (2021)	$r + r!r$	$r!$

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 5 – Tabela comparativa do número de ganhos a serem chaveados com respeito ao número de variáveis premissa.

Número de variáveis premissa	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$	$p = 5$
Número de regras	$r = 2$	$r = 4$	$r = 8$	$r = 16$	$r = 32$
Teorema 11	2	6	70	12870	$6,01 \times 10^8$
Lazarini (2021)	2	24	40320	$2,09 \times 10^{13}$	$2,63 \times 10^{35}$

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Além disso, a Tabela 5 mostra uma comparação numérica das duas estratégias com relação ao número de variáveis de premissa. No caso do método baseado em Lazarini (2021), a alta complexidade computacional em comparação com os outros métodos é notória. Mesmo para sistemas com um pequeno número de variáveis de premissa, o número de LMIs se torna muito grande. No caso do método de politopo, o número de LMIs cresce em uma proporção consideravelmente menor do que o método apresentado em Lazarini (2021). Contudo, o principal obstáculo é que o número de vértices do polítopo será igual ao número de controladores a serem chaveados. Isso não só gera uma grande complexidade computacional para o projeto dos ganhos, mas também representa um desafio de implementação devido ao grande número de ganhos a serem chaveados. Assim, embora o método de politopo tenha vantagens para o projeto de um controlador chaveado, as desvantagens mencionadas acima sugerem estratégias alternativas que aproveitam o método de politopo, mas reduzem seu esforço computacional.

4.2 ESTRATÉGIA ALTERNATIVA

Com o objetivo de reduzir a complexidade do projeto do controlador chaveado baseado no método do politopo, será necessário reduzir o número de vértices do polítopo. Embora seja claro que uma região com um número menor de vértices circunscreve o polítopo, aumentando o conservadorismo, essa estratégia reduzirá o número de ganhos a serem alternados mantendo as vantagens da abordagem baseada em politopo.

Uma solução para o problema mencionado, foi proposta em Oncoy et al. (2023), no qual um controlador chaveado é desenvolvido para o controle de sistemas fuzzy T-S com realimentação de estados amostrados. Essa estratégia foi proposta com foco nas funcionais

de Lyapunov relativas aos sistemas de dados amostrados. Contudo, a estratégia pode ser explorada para sistemas fuzzy T-S puramente contínuos.

Observação 15. *Devido à dificuldade de obter os vértices do polítopo no caso de ter intervalos não homogêneos de ρ_i no conjunto \mathbf{H} , a estratégia proposta em Oncoy et al. (2023) trabalha com o intervalo homogêneo $|\dot{\alpha}_i(t)| \leq \rho$, em que $\rho = \max_{i \in \mathbb{K}_r} \{\rho_i\}$.*

Da Suposição 1, segue-se que $-\rho_i \leq \dot{\alpha}_i(t) \leq \rho_i$. A fim de obter um conjunto convexo em que cada elemento depende de $\dot{\alpha}_i(t)$, é definido o seguinte conjunto:

$$\Upsilon_r := \left\{ \left(\frac{\dot{\alpha}_i(t)}{r\rho} + \frac{1}{r} \right) \in \mathbb{R}^r / \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) = 0, i \in \mathbb{K}_r \right\}, \quad (146)$$

em que $\rho = \max_{i \in \mathbb{K}_r} \{\rho_i\}$. Então, levando em conta a condição (47), pode ser verificado que

$$\sum_{i=1}^r \left(\frac{\dot{\alpha}_i(t)}{r\rho} + \frac{1}{r} \right) = 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq \left(\frac{\dot{\alpha}_i(t)}{r\rho} + \frac{1}{r} \right), \quad \forall i \in \mathbb{K}_r. \quad (147)$$

Note que os elementos do conjunto Υ_r satisfazem as condições de um conjunto convexo, ou seja, qualquer termo de um polítopo convexo de r vértices poderá ser representado pelas combinações de seus vértices e os elementos de Υ_r .

Observação 16. *O conjunto Υ_r também pode ser representado pela seguinte forma:*

$$\Upsilon_r := \left\{ \left(-\frac{\dot{\alpha}_i(t)}{r\rho} + \frac{1}{r} \right) \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) = 0, i \in \mathbb{K}_r \right\}. \quad (148)$$

Note que devido a $-\dot{\alpha}_i(t) \leq \rho$, o conjunto (148) também satisfaz a condição (147).

Portanto, baseado no conjunto Υ_r é apresentado o seguinte lema:

Lema 2. *Dado um escalar ρ que satisfaz $|\dot{\alpha}_i(t)| \leq \rho$ e uma função vetorial dependente do tempo $\varsigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^r$. Portanto, para qualquer conjunto de matrizes simétricas $X_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i \in \mathbb{K}_r$, as seguintes desigualdades serão satisfeitas:*

$$\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) \varsigma^T(t) X_i \varsigma(t) \leq \varsigma^T(t) \left(r\rho X_{\sigma_1} - \rho \sum_{\ell=1}^r X_{\ell} \right) \varsigma(t), \quad (149)$$

$$\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) \varsigma^T(t) X_i \varsigma(t) \leq \varsigma^T(t) \left(\rho \sum_{\ell=1}^r X_{\ell} - r\rho X_{\sigma_2} \right) \varsigma(t), \quad (150)$$

sendo $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{K}_r$ as seguintes funções:

$$\sigma_1(t) = \arg \max_{i \in \mathbb{K}_r} \{ \varsigma^T(t) X_i \varsigma(t) \}, \quad (151)$$

$$\sigma_2(t) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{ \varsigma^T(t) X_i \varsigma(t) \}. \quad (152)$$

Demonstração. Como os elementos conjunto Υ_r satisfazem a condição (147), a seguinte desigualdade é satisfeita

$$\begin{aligned} \max_{i \in \mathbb{K}_r} \{\zeta^T(t) X_i \zeta(t)\} &\geq \zeta^T(t) \left[\sum_{i=1}^r \left(\frac{\dot{\alpha}_i(t)}{r\rho} + \frac{1}{r} \right) X_i \right] \zeta(t) \\ &\geq \zeta^T(t) \left[\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) \frac{X_i}{r\rho} + \sum_{i=1}^r \frac{X_i}{r} \right] \zeta(t). \end{aligned} \quad (153)$$

De (151), a função $\arg \max\{\dots\}$ refere-se ao índice i que gera o maior valor de $\zeta^T(t) X_i \zeta(t)$ em cada instante no tempo, ou seja

$$\max_{i \in \mathbb{K}_r} \{\zeta^T(t) X_i \zeta(t)\} = \zeta^T(t) X_{\sigma_1} \zeta(t). \quad (154)$$

Então, substituindo em (153)

$$r\rho \zeta^T(t) X_{\sigma_1} \zeta(t) \geq \zeta^T(t) \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) X_i \zeta(t) + \zeta^T(t) \rho \sum_{i=1}^r X_i \zeta(t). \quad (155)$$

Separando os termos a desigualdade (149) será obtida.

Por outro lado, considere o conjunto Υ_r da seguinte forma:

$$\Upsilon_r := \left\{ \left(-\frac{\dot{\alpha}(t)}{r\rho} + \frac{1}{r} \right) \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) = 0, i \in \mathbb{K}_r \right\}. \quad (156)$$

Então, como $-\dot{\alpha}_i(t) \leq \rho$, a propriedade convexa do conjunto é garantido. Da mesma forma, a seguinte desigualdade será satisfeita

$$\min_{i \in \mathbb{K}_r} \{\zeta^T(t) X_j \zeta(t)\} \leq \zeta^T(t) \left[-\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) \frac{X_i}{r\rho} + \sum_{i=1}^r \frac{X_i}{r} \right] \zeta(t). \quad (157)$$

De (151), a função $\arg \min\{\dots\}$ refere-se ao índice i que gera o menor valor de $\zeta^T(t) X_i \zeta(t)$ em cada instante no tempo. Portanto, seguindo o mesmo procedimento para obter a desigualdade (149), a desigualdade (150) será obtida. \square

Observação 17. *O Lema 2 foi proposto considerando qualquer função vetorial $\zeta(t) \in \mathbb{R}^r$. No caso que $\zeta(t)$ seja substituído pelo vetor de estados, obteremos uma função $\sigma(t)$ dependente dos estados do sistema. No entanto, como foi abordado em Oncoy et al. (2023), o vetor $\zeta(t)$ pode ser estendido para abordar outro tipo de sistemas aumentados, como os sistemas descritores, com retardo no tempo, entre outros. Nos quais o vetor $\zeta(t)$ contém diversos termos dependentes dos estados do sistema.*

Baseado no Lema 2 é proposto o seguinte teorema:

Teorema 12. *Considere a Suposição 1, com $\rho = \max_{i \in \mathbb{K}_r} \{\rho_i\}$. Se dado um escalar $\mu > 0$; as seguintes matrizes simétricas $\bar{P}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e quaisquer matrizes $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, que satisfazem o seguintes conjuntos de LMIs:*

$$\bar{P}_i > 0, \quad \forall i \in \mathbb{K}_r \quad (158)$$

$$\bar{\Xi}_{ij} < 0, \quad \forall i, j \in \mathbb{K}_r, \quad (159)$$

sendo

$$\bar{\Xi}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{P}_\phi^j + A_i X + X^T A_i^T + B_i M_j + M_j^T B_i^T & * \\ \bar{P}_i + \mu(A_i X + B_i M_j) - X^T & -\mu(X + X^T) \end{bmatrix},$$

$$\bar{P}_\phi^j = r\rho\bar{P}_j - \rho \sum_{\ell=1}^r \bar{P}_\ell.$$

Então o controlador chaveado (69), com a seguinte lei de chaveamento:

$$\sigma(t) = \arg \max_{j \in \mathbb{K}_r} \{x^T(t) P_j x(t)\}, \quad (160)$$

em que $P_i = X^{-1} \bar{P}_i X^{-T}$ e com os ganhos dado pelo $K_i = M_i X^{-1}$, torna o ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ do sistema (7) assintoticamente estável.

Demonstração. Considerando a função de Lyapunov fuzzy (45), sua derivada com respeito ao tempo será

$$\dot{V}(x) = \dot{V}_1(x) + x^T(t) \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) P_i x(t), \quad (161)$$

sendo

$$\dot{V}_1(x) = \dot{x}^T(t) \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) P_i x(t) + x^T(t) \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) P_i \dot{x}(t). \quad (162)$$

Tendo em conta o sistema (7) com a lei de controle chaveado (69), e aplicando o método do descritor, tem-se

$$\dot{V}_1(x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) \hat{x}^T(t) \hat{\Xi}_i \hat{x}(t), \quad (163)$$

em que

$$\hat{x}(t) = [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)]^T \quad \text{e} \quad \hat{\Xi}_i = \begin{bmatrix} R_1(A_i + B_i K_\sigma) + (A_i^T + K_\sigma^T B_i^T) R_1^T & * \\ P_i - R_1^T + R_2(A_i + B_i K_\sigma) & -R_2 - R_2^T \end{bmatrix}.$$

Da desigualdade (149) do Lema 2, como o índice σ é independente do i , multiplicando (149) por $\alpha_i(t)$ e somando para todo i obtemos

$$\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) x^T(t) P_i x(t) \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) x^T(t) \left(r\rho P_\sigma - \rho \sum_{\ell=1}^r P_\ell \right) x(t). \quad (164)$$

Define-se as matrizes $R_1 = X^{-T}$, $R_2 = \mu R_1$, $\bar{P}_i = X^T P_i X$, $M_j = K_j X$. Então, substituindo (163) e (164) em (161), mudando o índice $\sigma \in \mathbb{K}_r$ pelo $j \in \mathbb{K}_r$ e multiplicando

o resultado por $\text{diag}\{X^T, X^T\}$ e $\text{diag}\{X, X\}$ no lado esquerdo e direito, respectivamente, obtemos

$$\dot{V}(x) \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) [x(t)^T \dot{x}^T(t)] \bar{\Xi}_{ij} [x^T(t) \dot{x}^T(t)]^T. \quad (165)$$

Por fim, a condição (159) garantirá que $\dot{V}(x) < 0$, e assim, tornando o ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ assintoticamente estável. \square

Observação 18. Note que a lei de chaveamento (160), foi obtida considerando a desigualdade (149), do Lema 2. Entretanto, uma lei de chaveamento $\sigma(t) = \arg \min_{j \in \mathbb{K}_r} \{x^T(t) P_j x(t)\}$, poderia ser obtida utilizando a desigualdade (150). Essas condições não foram apresentadas devido ao procedimento ser muito semelhante.

Observação 19. Note que o Teorema 12 também usa termos positivos para relaxar as condições, isto é, que o termo $x^T(t) (r\rho P_\sigma - \rho \sum_{\ell=1}^r P_\ell) x(t)$ será positivo para todo $x(t) \in \mathbb{R}^n$. No entanto, a matriz $(r\rho P_\sigma - \rho \sum_{\ell=1}^r P_\ell)$ não precisa ser estritamente definida positiva. Portanto, a lei de chaveamento dependente dos estados gerará as sub-regiões $\Omega_j \in \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{K}_r$ e a seguinte desigualdade:

$$\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) x^T(t) P_i x(t) \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) x^T(t) \left(r\rho P_j - \rho \sum_{\ell=1}^r P_\ell \right) x(t), \quad (166)$$

será satisfeita na sub-região $x(t) \in \Omega_j$.

O Teorema 12, apresenta condições de projeto para um controlador chaveado com uma lei de controle dada em (69) e com uma lei de chaveamento dependente dos estados. Adicionalmente, foi obtida considerando uma função de Lyapunov fuzzy, do mesmo modo que o Teorema 11. Note que o número de controladores a serem chaveados será r , reduzindo consideravelmente o número de ganhos do controlador chaveado proposto no Teorema 11.

A Tabela 6 ilustra a comparação do número de LMIs a serem resolvidas, assim como o número de ganhos a serem chaveados para cada estratégia. Observa-se que, para sistemas com um número de variáveis premissas menor ou igual a 2, o número de LMIs permanece com uma pequena diferença entre os dois teoremas. Entretanto, para números de variáveis premissas maiores que 2, o número de LMIs aumenta consideravelmente para o caso do Teorema 11. Da mesma forma, o número de ganhos a serem chaveados usando o Teorema 12 é reduzido até r , sendo um número muito pequeno em comparação com o número de ganhos do Teorema 11. Assim, fica provado que o Teorema 12 apresenta menos conservadorismo no projeto e na implementação do controlador chaveado.

Do mesmo modo que outras estratégias de projeto de controladores chaveados, o Teorema 12 também pode ser adotado para trabalhar com um ganho constante. Nesse sentido, a fim de mostrar as vantagens de considerar um controlador chaveado em relação a um controlador de ganho constante, segue o seguinte corolário:

Tabela 6 – Tabela comparativa do número de LMIs e ganhos a serem chaveados (entre parênteses).

Número de variáveis premissa	$p = 1$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 4$
Número de regras	$r = 2$	$r = 4$	$r = 8$	$r = 16$
Teorema 11	6(2)	28(6)	568(70)	205936(12870)
Teorema 12	6(2)	20(4)	72(8)	272(16)

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Corolário 1. *Considere a Suposição 1, com $\rho = \max_{i \in \mathbb{K}_r} \{\rho_i\}$. Se dado um escalar $\mu > 0$; as seguintes matrizes simétricas $\bar{P}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e quaisquer matrizes $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$, satisfazem o seguintes conjuntos de LMIs:*

$$\bar{P}_i > 0, \quad \forall i \in \mathbb{K}_r, \quad (167)$$

$$\bar{\Xi}_{ij} < 0, \quad \forall i, j \in \mathbb{K}_r, \quad (168)$$

sendo

$$\bar{\Xi}_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{P}_\phi^j + A_i X + X^T A_i^T + B_i M + M^T B_i^T & * \\ \bar{P}_i + \mu(A_i X + B_i M) - X^T & -\mu(X + X^T) \end{bmatrix},$$

$$\bar{P}_\phi^j = r\rho\bar{P}_j - \rho \sum_{\ell=1}^r \bar{P}_\ell.$$

em que $P_i = X^{-1}\bar{P}_i X^{-T}$. Então a lei de controle $u(t) = Kx(t)$, com ganho dado por $K = MX^{-1}$, torna o ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ do sistema (7), assintoticamente estável.

Demonstração. Este resultado decorre diretamente da prova do Teorema 12. \square

Observa-se que o Corolário 1 apresenta as condições de projeto para um controlador de ganho único. Essas condições foram obtidas também com o uso do Lema 2 e, assim, obtiveram a vantagem de serem abordadas com o uso de uma função de Lyapunov fuzzy. No entanto, é importante verificar se a estratégia de controle chaveado apresenta um relaxamento nas condições.

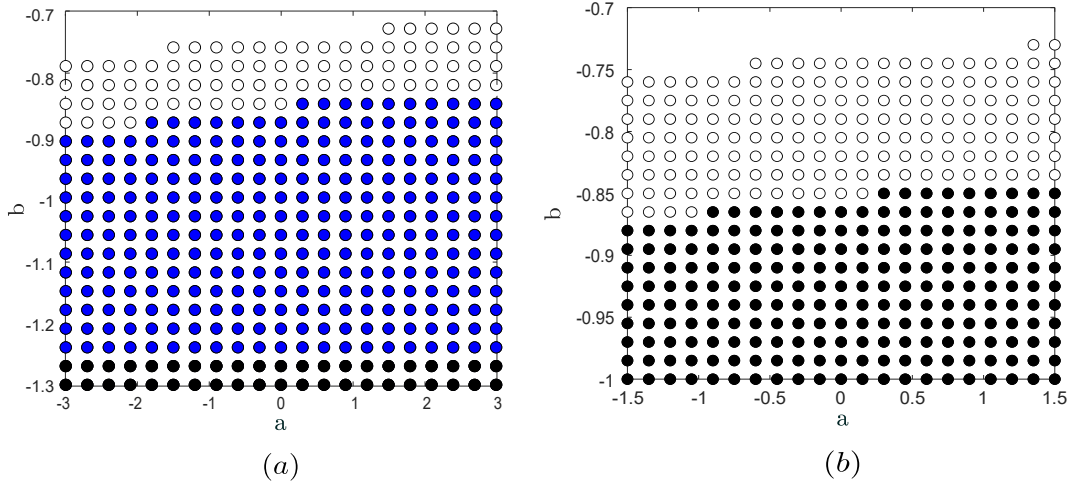
4.3 VALIDAÇÃO

A fim de verificar as vantagens em relação ao conservadorismo, o exemplo a seguir é apresentado:

Exemplo 8. Sejam os seguintes modelos locais de um sistema numérico T-S fuzzy (LAZARINI, 2021):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3.6 & -1.6 \\ 6.2 & -4.3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a & -1.6 \\ 6.2 & -4.3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -3.6 & -1.6 \\ a & -4.3 \end{bmatrix}$$

Figura 17 – (a) Região de factibilidade obtida com o Teorema 8 (●), o Corolário 1 (●,●), e o Teorema 12 (●,●,○), (b) Região de factibilidade ampliada para o Corolario 1 (●), e o Teorema 12 (●,○)



Fonte: Elaboração do próprio autor.

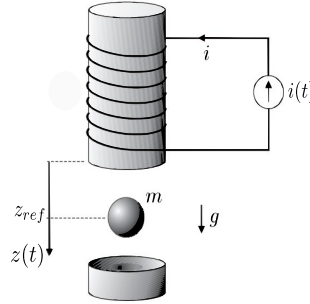
$$B_1 = \begin{bmatrix} -0.45 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -b \\ -3 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} -0.45 \\ b \end{bmatrix}. \quad (169)$$

Para a comparação do Teorema 12 e o Corolário 1, $\mu = 0,04$ e $\rho_1 = \rho_2 = \rho = 1$ serão considerados como em Lazarini (2021). A Figura 17(a), mostra as regiões de factibilidade do Teorema 8, o Corolário 1, e o Teorema 12. Observa-se que a estratégia proposta apresenta uma região de factibilidade maior do que o Corolário 1 e do que a outra estratégia apresentada na literatura. Além disso, a comparação entre o controlador chaveado do Teorema 12 e o controlador de ganho único do Corolário 1 é mostrada com mais detalhes na Figura 18(b). Note a redução do conservadorismo do controlador chaveado em comparação com o controlador de ganho único. Isso prova que as condições propostas para o projeto de um controlador chaveado introduzem um relaxamento nas condições em relação a um controlador de ganho único.

Adicionalmente, para uma comparação e análise com relação à resposta de tempo do sistema, será considerado um levitador magnético como é mostrado na Figura 18.

Exemplo 9. Considere o projeto do sistema de controle do levitador magnético mostrado na Figura 18. Procedendo como em Souza et al. (2014), o seguinte modelo não-linear do sistema pode ser obtido:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ f_1(t) & -\frac{k}{m} & f_2(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t), \quad (170)$$

Figura 18 – Esquema do sistema de suspensão magnética

Fonte: Elaboração do próprio autor.

sendo $x_1(t) = z(t) - z_{ref}$, $x_2(t) = \dot{z}(t)$, $x_3(t) = i(t)^2 - i_{ref}^2$ e z é a posição medida, z_{ref} é o ponto da posição de equilíbrio desejada, $i(t)$ é a corrente medida operacionalmente, e

$$i_{ref}^2 = \frac{2mg}{\lambda\omega}(1 + \omega z_{ref})^2 \quad (171)$$

é a corrente no ponto de equilíbrio, dependente dos parâmetros do sistema eletromagnético e mecânico especificados na Tabela 7, $v(t)$ é a sinal de entrada, $f_1(t)$ e $f_2(t)$ são as não linearidades do sistema dadas por

$$f_1 = \frac{g\omega(x_1(t) + 2\omega z_{ref} + 2)}{(1 + \omega(x_1(t) + z_{ref}))^2}, \quad f_2 = \frac{-\lambda\omega}{2m(1 + \omega(x_1(t) + z_{ref}))^2}. \quad (172)$$

Usando os valores dos parâmetros da Tabela 7, é definindo o conjunto

$$\mathbf{F} = \{x(t) \in \mathbb{R}^3 / |x_i(t)| \leq 0.15, i \in \mathbb{K}_r\}, \quad (173)$$

onde o sistema será modelado, então os modelos locais podem ser descritos com os seguintes sistemas locais:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \bar{f}_1 & -0.02 & \bar{f}_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \bar{f}_1 & -0.02 & \underline{f}_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \underline{f}_1 & -0.02 & \bar{f}_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \underline{f}_1 & -0.02 & \underline{f}_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (174)$$

sendo

$$\bar{f}_1 = \max_{x(t) \in \mathbf{F}} \{f_1\}, \quad \underline{f}_1 = \min_{x(t) \in \mathbf{F}} \{f_1\}, \\ \bar{f}_2 = \max_{x(t) \in \mathbf{F}} \{f_2\}, \quad \underline{f}_2 = \min_{x(t) \in \mathbf{F}} \{f_2\}, \quad (175)$$

Tabela 7 – Parâmetros de simulação.

Parâmetros	valor
m	0.05 kg
g	9.81 m/s ²
λ	0.460 H
k	0.001 Ns/m
ω	2 m ⁻¹
z_{ref}	0.08 m
i_{ref}^2	1.4334 A ²

Fonte: Souza et al. (2014).

e com as seguintes funções de pertinência:

$$\begin{aligned}
 M_1^1(f_1(t)) &= \frac{f_1 - f_1(t)}{f_1 - \bar{f}_1}, & M_1^2(f_1(t)) &= \frac{f_1(t) - \bar{f}_1}{f_1 - \bar{f}_1} \\
 M_2^1(f_2(t)) &= \frac{f_2 - f_2(t)}{f_2 - \bar{f}_2}, & M_2^2(f_2(t)) &= \frac{f_2(t) - \bar{f}_2}{f_2 - \bar{f}_2}.
 \end{aligned} \tag{176}$$

Considerando os valores $\mu = 0,01$ e $\rho = 10$ e usando o Teorema 12, obtêm-se os seguintes ganhos:

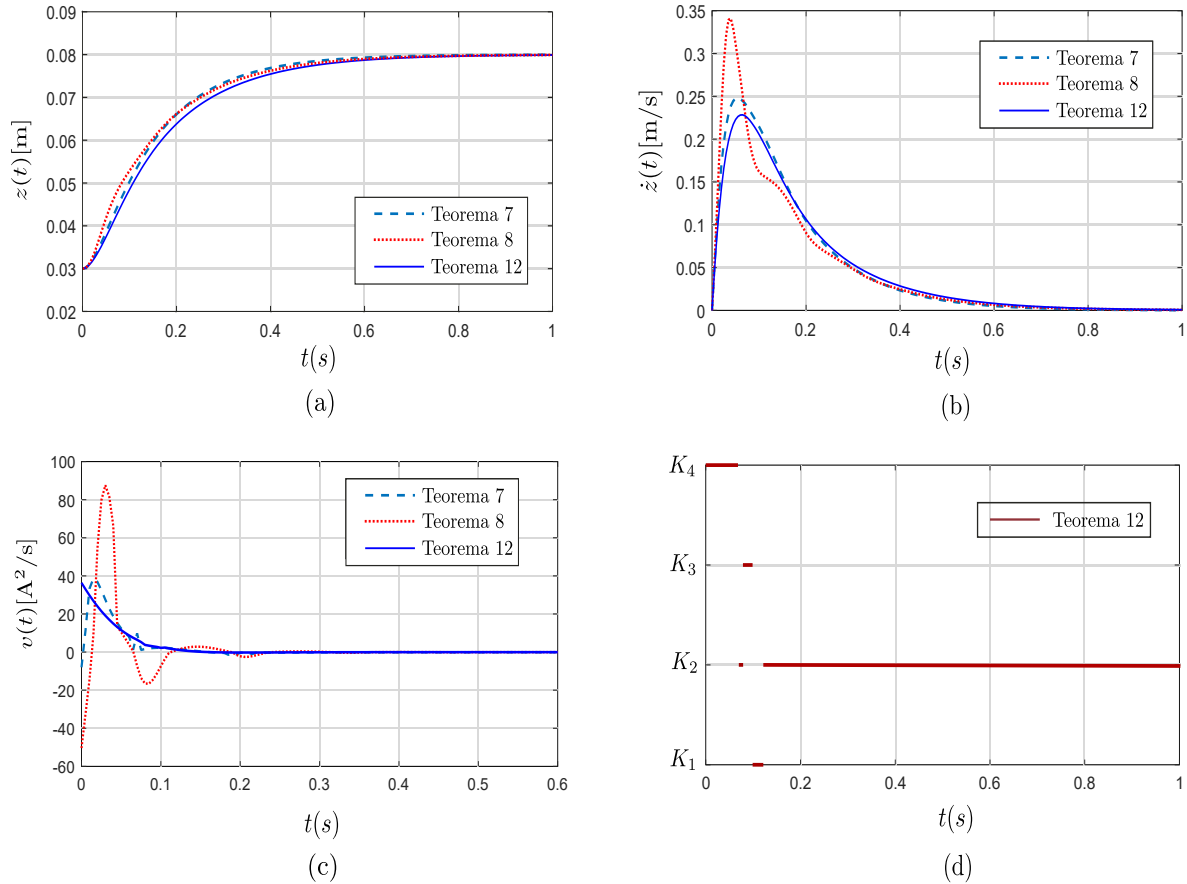
$$\begin{aligned}
 K_1 &= \begin{bmatrix} 371,8735 & 63,9940 & -30,7523 \end{bmatrix}, & K_2 &= \begin{bmatrix} 595,3974 & 99,0588 & -44,8867 \end{bmatrix}, \\
 K_3 &= \begin{bmatrix} 390,6362 & 67,5205 & -32,0634 \end{bmatrix}, & K_4 &= \begin{bmatrix} 660,9477 & 109,1757 & -48,4118 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{177}$$

Então, será feita uma comparação da estratégia apresentada no Teorema 5. Além disso, como a matriz B_i é constante para tudo $i \in \mathbb{K}_r$, também poderá ser comparada com o Teorema 7.

Considerando as condições iniciais $x^T(t) = [-0,05 \quad 0 \quad -1,4334]$. A Figura 19 mostra a resposta dos estados do sistema junto com o sinal de entrada, na Figura 19(a) pode-se ver que a posição atinge o ponto de equilíbrio, com um estado transitório semelhante nas três estratégias. A Figura 19(b) mostra a velocidade da massa, da qual o Teorema 7 apresenta um ligeiro aumento em $t = 0,05$ s, em relação às outras estratégias. Na Figura 19(c) tem-se o sinal de controle, nota-se que o Teorema 7, apresenta um pico maior em $t = 0,04$ s, o que pode provocar falhas ou demandas excessivas no atuador. A Figura 19(d) mostra a comutação dos ganhos, guiada pela lei de comutação proposta no Teorema 12.

Observa-se que, na Figura 19(a), a resposta temporal da posição da bola é semelhante usando as três estratégias. Isso ocorre porque as condições do projeto apenas garantem a estabilidade assintótica e nenhum índice de desempenho foi considerado. No entanto, as vantagens de cada controlador podem ser verificadas por meio da análise do

Figura 19 – Comparação das respostas temporais do sistema, entre o Teorema 7, o Teorema 8, e o Teorema 12. (a) Posição da massa. (b) Velocidade da massa. (c) Sinal de controle. (d) Lei de chaveamento $\sigma(t)$

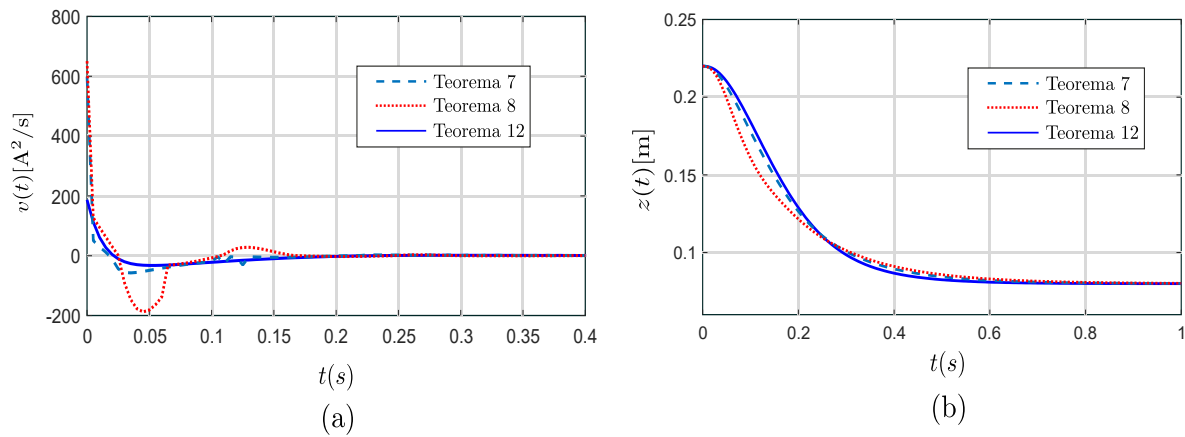


Fonte: Elaboração do próprio autor.

sinal de controle obtido para cada estratégia. Para uma melhor observação da demanda no sinal de entrada para cada estratégia, outra simulação é realizada para condições iniciais mais críticas, próximas ao limite do conjunto \mathbf{F} , $x^T(t) = [1, 4 \quad 0 \quad 1, 4334]$. A Figura 19(b), mostra o sinal de controle para cada estratégia de controle chaveada, em que a exigência da sinal de entrada é menor usando o Teorema 12 em relação aos outros Teoremas. A Figura 20(b) mostra a posição da massa, onde o ponto de equilíbrio é alcançado com um estado transitório semelhante nos três casos, provando a superioridade do Teorema 12.

Neste capítulo, focado no método do politopo para lidar com as derivadas das MFs, foi estendido este método para o projeto de um controlador chaveado. No entanto, observa-se que a complexidade computacional no projeto e a complexidade na implementação devido ao alto número de ganhos é uma desvantagem importante. Então, uma nova abordagem foi proposta para o projeto do controlador chaveado. Verificou-se que essa nova abordagem tem um número reduzido de ganhos a serem chaveados. Portanto,

Figura 20 – Comparação das respostas temporais do sistema, entre o Teorema 7, o Teorema 8, e o Teorema 12. (a) Sinal de controle. (b) Posição da massa



Fonte: Elaboração do próprio autor.

o esforço computacional no projeto e na implementação é consideravelmente reduzido. Além disso, este enfoque utiliza as funções $\min\{\dots\}$ e $\max\{\dots\}$, a fim de obter a lei de chaveamento que torna o ponto de equilíbrio do sistema assintoticamente estável. Neste capítulo foram abordados os sistemas não lineares e foi demonstrado que a estratégia de controle chaveado proposta reduz o conservadorismo das condições em comparação com o que seria considerado apenas um ganho constante. No próximo capítulo, será estendido o enfoque proposto para o uso de uma função Lyapunov fuzzy generalizada e para o projeto de controladores PDC chaveados.

5 PROJETO DE CONTROLE CHAVEADO USANDO UMA FLG

No capítulo anterior, uma abordagem para o projeto de um controlador chaveado foi apresentada. Esta abordagem foi baseada em uma função de Lyapunov fuzzy. Contudo, na literatura, a função de Lyapunov fuzzy apresentada no Capítulo 2 é apenas um caso especial de uma função de Lyapunov generalizada. Ou seja, essa função de Lyapunov generaliza as funções de Lyapunov dependentes das MFs ao considerar como variável polinomial as funções de pertinência e, assim, obtendo funções polinomiais de um grau desejado.

$$V(x) = x^T(t) \sum_{i_1=1}^r \sum_{i_2=1}^r \cdots \sum_{i_N=1}^r \prod_{j=1}^N \alpha_{i_j}(t) P_{i_1 \dots i_N} x(t). \quad (178)$$

A expressão (178) mostra a forma geral de uma função de Lyapunov fuzzy com grau de generalização N para um sistema fuzzy T-S. Observe que a função de Lyapunov fuzzy (45) pode ser obtida considerando $N = 1$. Portanto, pelo fato de ser uma generalização, a função de Lyapunov polinomial apresenta a vantagem de reduzir o conservadorismo das condições à medida que N aumenta.

Alguns métodos para lidar com as derivadas das funções de pertinência discutidas no capítulo anterior foram estendidos para fazer uso das funções de Lyapunov generalizadas (LEE; PARK; JOO, 2012; GUERRA et al., 2012). Entretanto, é importante manter um equilíbrio eficiente entre o conservadorismo das condições e o esforço computacional. Nesse sentido, no capítulo anterior, foi verificado que o método baseado em politopo apresenta vantagens significativas para a obtenção das condições de estabilidade do sistema. Entretanto, também foi verificado que para o projeto de controle chaveado é gerado um grande número de ganhos a serem chaveados. Portanto, o foco principal deste capítulo serão estender a abordagem proposta no capítulo anterior para fazer uso das funções de Lyapunov generalizadas.

A presença de incertezas no sistema não será considerada neste capítulo. Portanto, como primeira parte, serão obtidas as condições de projeto para um controlador PDC chaveado e, depois, as condições de um controlador non-PDC chaveado. Além disso, serão apresentados alguns exemplos para verificar a eficiência da estratégia proposta.

5.1 PROJETO DE CONTROLE PDC CHAVEADO

O controlador PDC chaveado é um caso especial do controlador definido em (63), no qual a lei de controle é dada por:

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) K_{i\sigma} x(t), \quad i \in \mathbb{K}_r, \quad (179)$$

em que a função $\sigma(t) \in \mathbb{K}_r$ é a lei de chaveamento que define o ganho ativo em cada instante de tempo (Figura 8). Note que como as MFs estão disponíveis para sua realimentação, a lei de controle poderá ser implementado.

5.1.1 Projeto de controle chaveado usando uma FLF

Como um ponto inicial para os resultados mais adiante, podemos obter as condições de projeto do controlador chaveado usando uma função de Lyapunov fuzzy.

Teorema 13. *Considere a Suposição 1, com $\rho = \max_{i \in \mathbb{K}_r} \{\rho_i\}$ e dado um escalar $\mu > 0$. Se existirem matrizes simétricas $\bar{P}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, que satisfazem os seguintes conjuntos de LMIs:*

$$\bar{P}_i > 0, \quad \forall i \in \mathbb{K}_r \quad (180)$$

$$\bar{\Xi}_{iik} < 0, \quad \forall i, k \in \mathbb{K}_r, \quad (181)$$

$$\frac{2}{r-1} \bar{\Xi}_{iik} + \bar{\Xi}_{ijk} + \bar{\Xi}_{jik} < 0, \quad \forall i \neq j, \quad \forall k \in \mathbb{K}_r, \quad (182)$$

sendo

$$\bar{\Xi}_{ijk} = \begin{bmatrix} \bar{P}_\phi^k + A_i X + X^T A_i^T + B_i M_{jk} + M_{jk}^T B_i^T & * \\ \bar{P}_i + \mu(A_i X + B_i M_{jk}) - X^T & -\mu(X + X^T) \end{bmatrix},$$

$$\bar{P}_\phi^k = r\rho\bar{P}_k - \rho \sum_{\ell=1}^r \bar{P}_\ell.$$

Então o controlador chaveado (179), com a seguinte lei de chaveamento:

$$\sigma(t) = \arg \max_{k \in \mathbb{K}_r} \{x^T(t) P_k x(t)\}, \quad (183)$$

em que $P_k = X^{-1} \bar{P}_k X^{-T}$, $k \in \mathbb{K}_r$, e com os ganhos dados por $K_{ik} = M_{ik} X^{-1}$, torna o ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ do sistema (7) assintoticamente estável.

Demonstração. Considerando a função de Lyapunov fuzzy (45), sua derivada com respeito ao tempo será

$$\dot{V}(x) = \dot{V}_1(x) + x^T(t) \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) P_i x(t), \quad (184)$$

sendo

$$\dot{V}_1(x) = \dot{x}^T(t) \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) P_i x(t) + x^T(t) \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) P_i \dot{x}(t). \quad (185)$$

Tendo em conta o sistema (7) com a lei de controle chaveada (179), e aplicando o método do descritor, tem-se

$$\dot{V}_1(x) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) \hat{x}^T(t) \hat{\Xi}_{ij} \hat{x}(t), \quad (186)$$

em que

$$\hat{x}(t) = [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)]^T \quad \text{e} \quad \hat{\Xi}_{ij} = \begin{bmatrix} R_1(A_i + B_i K_{j\sigma}) + (A_i^T + K_{j\sigma}^T B_i^T) R_1^T & * \\ P_i - R_1^T + R_2(A_i + B_i K_{j\sigma}) & -R_2 - R_2^T \end{bmatrix}.$$

Da desigualdade (??) do Lema 2, temos

$$\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) x^T(t) P_i x(t) \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) x^T(t) \left(r \rho P_\sigma - \rho \sum_{\ell=1}^r P_\ell \right) x(t). \quad (187)$$

Define-se as matrizes $R_1 = X^{-T}$, $R_2 = \mu R_1$, $\bar{P}_i = X^T P_i X$, $M_{j\sigma} = K_{j\sigma} X$. Então, substituindo (186) e (187) em (184), mudando o índice $\sigma \in \mathbb{K}_r$ pelo $k \in \mathbb{K}_r$ e multiplicando o resultado por $\text{diag}\{X^T, X^T\}$ e $\text{diag}\{X, X\}$ no lado esquerdo e direito, respectivamente, obtemos

$$\dot{V}(x) \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) [x(t)^T \quad \dot{x}^T(t)] \bar{\Xi}_{ijk} [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)]^T. \quad (188)$$

Por fim, aplicando o Lema 1 na desigualdade (188), as condições (181) e (182) garantiram que $\dot{V}(x) < 0$, e assim, tornando o ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ assintoticamente estável. \square

O Teorema 13 apresenta as condições de projeto para o controlador PDC chaveado dado em (179), considerando uma função de Lyapunov fuzzy. Note que o Lema 2 foi expresso como (187), isto devido a que a função $\sigma(t)$ é independente do índice i e j . Portanto, a desigualdade (??) do Lema 2 pode ser generalizado como segue:

$$\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) x^T(t) P_i x(t) \leq \sum_{i_1=1}^r \sum_{i_2=1}^r \cdots \sum_{i_N=1}^r \prod_{j=1}^N \alpha_{i_j}(t) x^T(t) \left(r \rho P_\sigma - \rho \sum_{\ell=1}^r P_\ell \right) x(t), \quad \sigma \in \mathbb{K}_r. \quad (189)$$

Para uma melhor comparação da estratégia de chaveamento proposta, segue o seguinte corolário considerando apenas um controlador PDC (15):

Corolário 2. *Considere a Suposição 1, com $\rho = \max_{i \in \mathbb{K}_r} \{\rho_i\}$ e dado um escalar $\mu > 0$. Se existirem matrizes simétricas $\bar{P}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, que satisfazem os seguintes conjuntos de LMIs:*

$$\bar{P}_i > 0, \quad \forall i \in \mathbb{K}_r \quad (190)$$

$$\bar{\Xi}_{iik} < 0, \quad \forall i, k \in \mathbb{K}_r, \quad (191)$$

$$\frac{2}{r-1} \bar{\Xi}_{iik} + \bar{\Xi}_{ijk} + \bar{\Xi}_{jik} < 0, \quad \forall i \neq j, \quad \forall k \in \mathbb{K}_r, \quad (192)$$

sendo

$$\bar{\Xi}_{ijk} = \begin{bmatrix} \bar{P}_\phi^k + A_i X + X^T A_i^T + B_i M_j + M_j^T B_i^T & * \\ \bar{P}_i + \mu(A_i X + B_i M_j) - X^T & -\mu(X + X^T) \end{bmatrix},$$

$$\bar{P}_\phi^k = r\rho\bar{P}_k - \rho \sum_{\ell=1}^r \bar{P}_\ell.$$

Então o controlador PDC (15), em que $K_i = M_i X^{-1}$, $i \in \mathbb{K}_r$, torna o ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ do sistema (7) assintoticamente estável.

Demonstração. Este resultado decorre diretamente da prova do Teorema 13. \square

Para a comparação do conservadorismo das condições, será considerado novamente o Exemplo 8 obtendo a região de factibilidade novamente para $\rho = 1$ e $\mu = 0,04$. A Figura 21(a) ilustra a uma comparação da região de factibilidade para o Teorema 4, as condições do projeto apresentadas em Mozelli, Palhares e Avellar (2009), as condições de projeto apresentadas em Lazarini (2021) e o Corolário 2. Note que o Teorema 4 apresentado no Capítulo 2 apresenta a região de factibilidade menor que as outras estratégias, isto é devido a que o Teorema 4 foi obtida usando uma função de Lyapunov quadrática. O Corolário 2 apresenta uma região de factibilidade maior que as condições apresentadas em Mozelli, Palhares e Avellar (2009), isso devido a que o método para abordar as derivadas das MFs do Corolário 2 é mais relaxada que o método apresentado em Mozelli, Palhares e Avellar (2009). Além disso, note que o método apresentado em Lazarini (2021) apresenta uma região de factibilidade ligeiramente menor do que a do Corolário 2. Adicionalmente, conforme analisado no capítulo anterior, o método apresentado em Lazarini (2021) apresenta um grande número de LMIs a serem resolvidos.

Na Figura 21(b) mostra-se a comparação da região de factibilidade das condições de projeto apresentadas em Lazarini (2021), as condições do Corolário 2 e a região de factibilidade do controlador PDC chaveado do Teorema 13. Note que o Teorema 13 apresenta a maior região de factibilidade, isso prova que a estratégia do controlador PDC chaveado reduz o conservadorismo das condições com respeito ao Corolário 2, o qual considera apenas um controlador PDC.

5.1.2 Projeto de controle chaveado usando uma FLG

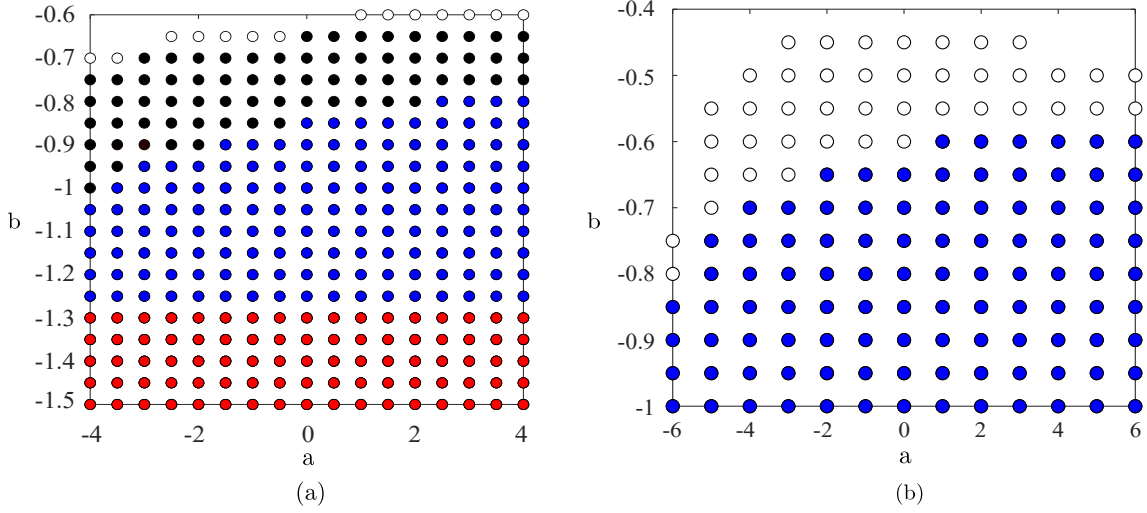
Foram apresentadas as condições de projeto para um controlador PDC chaveado. Como foi mencionado, estes resultados poderiam melhorar se for considerada uma função polinomial de maior grau. Nesse sentido, seja a seguinte função de Lyapunov generalizadas de grau 2:

$$V(x) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) x^T(t) P_{ij} x(t). \quad (193)$$

Então, tomando a derivada com respeito ao tempo, obtemos

$$\dot{V}(x) = \dot{V}_1(x) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \dot{\alpha}_i(t) \alpha_j(t) x^T(t) P_{ij} x(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \dot{\alpha}_j(t) \dot{x}^T(t) P_{ij} x(t)$$

Figura 21 – (a) Região de factibilidade obtida com o Teorema 4 (●), Mozelli, Palhares e Avellar (2009) (●,●), Lazarini (2021) (●,●,●) e o Corolário 2 (●,○,●,●); (b) Região de factibilidade ampliada para o Corolário 2 (●), e o Teorema 13 (●,○)



Fonte: Elaboração do próprio autor.

$$= \dot{V}_1(x) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \dot{\alpha}_i(t) \alpha_j(t) x^T(t) (P_{ij} + P_{ji}) x(t), \quad (194)$$

em que

$$\dot{V}_1(x) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) \dot{x}^T(t) P_{ij} x(t) + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) x^T(t) P_{ij} \dot{x}(t). \quad (195)$$

Note que no lado direito da expressão (194), obtemos um termo dependente da derivada das MFs. Portanto, precisa-se estender o Lema 2 para abordar essa expressão.

Lema 3. *Dado um escalar ρ que satisfaz $|\dot{\alpha}_i(t)| \leq \rho$ e uma função vetorial dependente do tempo $\varsigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^r$. Portanto, para qualquer conjunto de matrizes simétricas $X_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i \in \mathbb{K}_r$, as seguintes desigualdades serão satisfeitas:*

$$\varsigma^T(t) \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \dot{\alpha}_i(t) \alpha_j(t) \mathcal{X}_{ij} \varsigma(t) \leq \varsigma^T(t) \sum_{j=1}^r \alpha_j(t) \left(r \rho \mathcal{X}_{\sigma_1 j} - \rho \sum_{i=1}^r \mathcal{X}_{ij} \right) \varsigma(t), \quad (196)$$

$$\varsigma^T(t) \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \dot{\alpha}_i(t) \alpha_j(t) \mathcal{X}_{ij} \varsigma(t) \leq \varsigma^T(t) \sum_{j=1}^r \alpha_j(t) \left(\rho \sum_{i=1}^r \mathcal{X}_{ij} - r \rho \mathcal{X}_{\sigma_2 j} \right) \varsigma(t), \quad (197)$$

sendo $\mathcal{X}_{ij} = X_{ij} + X_{ji}$, $i, j \in \mathbb{K}_r$ e $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{K}_r$ as seguintes funções:

$$\sigma_1(t) = \arg \max_{i \in \mathbb{K}_r} \left\{ \varsigma^T(t) \sum_{j=1}^r \alpha_j(t) \mathcal{X}_{ij} \varsigma(t) \right\}, \quad (198)$$

$$\sigma_2(t) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_r} \left\{ \varsigma^T(t) \sum_{j=1}^r \alpha_j(t) \mathcal{X}_{ij} \varsigma(t) \right\}. \quad (199)$$

Demonstração. Como os elementos conjunto Υ_r satisfazem a condição (147), a seguinte desigualdade também será satisfeita

$$\begin{aligned} \max_{i \in \mathbb{K}_r} \left\{ \varsigma^T(t) \sum_{j=1}^r \alpha_j(X_{ij} + X_{ji}) \varsigma(t) \right\} &\geq \varsigma^T(t) \left[\sum_{i=1}^r \left(\frac{\dot{\alpha}_i(t)}{r\rho} + \frac{1}{r} \right) \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j(t)(X_{ij} + X_{ji}) \right) \right] \varsigma(t) \\ &\geq \frac{1}{r\rho} \varsigma^T(t) \left[\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j(t)(X_{ij} + X_{ji}) \right) \right. \\ &\quad \left. + \rho \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_j(t)(X_{ij} + X_{ji}) \right] \varsigma(t). \end{aligned} \quad (200)$$

Então, considerando a lei de chaveamento (198) em (200)

$$\begin{aligned} r\rho \varsigma^T(t) \sum_{j=1}^r \alpha_j(t)(X_{\sigma_{1j}} + X_{j\sigma_1}) \varsigma(t) &\geq \varsigma^T(t) \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \dot{\alpha}_i(t) \alpha_j(t)(X_{ij} + X_{ji}) \varsigma(t) \\ &\quad \rho \varsigma^T(t) \sum_{j=1}^r \alpha_j(t) \sum_{i=1}^r (X_{ij} + X_{ji}) \varsigma(t). \end{aligned} \quad (201)$$

Separando os termos, a desigualdade (196) será obtida.

Por outro lado, se o conjunto Υ_r for considerando da seguinte forma:

$$\Upsilon_r := \left\{ \left(-\frac{\dot{\alpha}(t)}{r\rho} + \frac{1}{r} \right) \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t) = 0, i \in \mathbb{K}_r \right\}. \quad (202)$$

Então, como $-\dot{\alpha}_i(t) \leq \rho$, a propriedade convexa do conjunto também seria garantido. Da mesma forma, a seguinte desigualdade será satisfeita

$$\min_{i \in \mathbb{K}_r} \left\{ \varsigma^T(t) \sum_{j=1}^r \alpha_j(X_{ij} + X_{ji}) \varsigma(t) \right\} \leq \varsigma^T(t) \left[\sum_{i=1}^r \left(-\frac{\dot{\alpha}_i(t)}{r\rho} + \frac{1}{r} \right) \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j(t)(X_{ij} + X_{ji}) \right) \right] \varsigma(t). \quad (203)$$

Portanto, seguindo o mesmo procedimento, a desigualdade (197) será obtida. \square

O Lema 3 estende os resultados do Lema 2, a fim de abordar o termo dependente das derivadas das MFs quando é usado a função de Lyapunov generalizada com $N = 2$ (193). Note que agora as funções $\sigma_1(t)$ e $\sigma_2(t)$ serão dependentes também das funções de pertinência. Além disso, estas funções ainda pertencem ao conjunto \mathbb{K}_r , ou seja, não incrementa o número de ganhos a serem chaveados. Para evidenciar melhor essa vantagem, com base no Lema 3, segue o seguinte teorema:

Teorema 14. *Considere a Suposição 1, com $\rho = \max_{i \in \mathbb{K}_r} \{\rho_i\}$ e dado um escalar $\mu > 0$. Se existirem matrizes simétricas $\bar{P}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $M_{jk} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, que satisfazem o seguintes conjuntos de LMIs:*

$$\bar{P}_{ij} + \bar{P}_{ji} > 0, \quad \forall i \in \mathbb{K}_r \quad (204)$$

$$\bar{\Xi}_{iik} < 0 \quad \forall i, k \in \mathbb{K}_r, \quad (205)$$

$$\frac{2}{r-1} \bar{\Xi}_{iik} + \bar{\Xi}_{ijk} + \bar{\Xi}_{jik} < 0, \quad \forall i \neq j, \quad \forall k \in \mathbb{K}_r, \quad (206)$$

sendo

$$\bar{\Xi}_{ijk} = \begin{bmatrix} \bar{P}_\phi^{ik} + A_i X + X^T A_i^T + B_i M_{jk} + M_{jk}^T B_i^T & * \\ \bar{P}_{ij} + \mu(A_i X + B_i M_{jk}) - X^T & -\mu(X + X^T) \end{bmatrix},$$

$$\bar{P}_\phi^{ik} = r\rho(P_{ki} + P_{ik}) - \rho \sum_{\ell=1}^r (P_{\ell i} + P_{i\ell}).$$

Então o controlador chaveado (179), com a seguinte lei de chaveamento:

$$\sigma(t) = \arg \max_{k \in \mathbb{K}_r} \{x^T(t) \sum_{j=1}^r \alpha_j(t) (P_{kj} + P_{jk}) x(t)\}, \quad (207)$$

em que $P_{ij} = X^{-1} \bar{P}_{ij} X^{-T}$ e com os ganhos dados por $K_{ik} = M_{ik} X^{-1}$, torna o ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ do sistema (7) assintoticamente estável.

Demonstração. Considere a função de Lyapunov fuzzy dada em (193) e sua derivada dada em (194). Então, para o termo $V_1(x)$, tendo em conta o sistema (7) com a lei de controle chaveada (179), e aplicando o método do descritor, tem-se

$$V_1(x) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) \hat{x}^T(t) \hat{\Xi}_{ij} \hat{x}(t), \quad (208)$$

em que

$$\hat{x}(t) = [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)]^T \quad \text{e} \quad \hat{\Xi}_{ij} = \begin{bmatrix} R_1(A_i + B_i K_{j\sigma}) + (A_i^T + K_{j\sigma}^T B_i^T) R_1^T & * \\ P_{ij} - R_1^T + R_2(A_i + B_i K_{j\sigma}) & -R_2 - R_2^T \end{bmatrix}.$$

Da desigualdade (196) do Lema 3, temos

$$x^T(t) \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \dot{\alpha}_i(t) \alpha_j(t) (P_{ij} + P_{ji}) x(t) \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) x^T(t) \left(r\rho(P_{\sigma i} + P_{i\sigma}) - \rho \sum_{\ell=1}^r (P_{\ell i} + P_{i\ell}) \right) x(t). \quad (209)$$

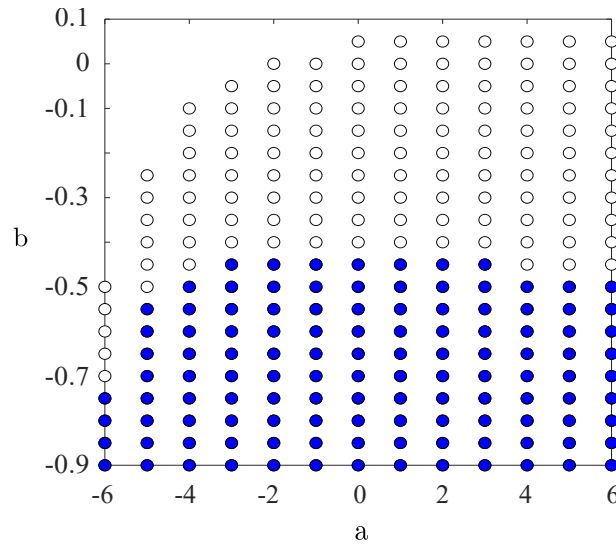
Define-se as matrizes $R_1 = X^{-T}$, $R_2 = \mu R_1$, $\bar{P}_{ij} = X^T P_{ij} X$, $M_{j\sigma} = K_{j\sigma} X$. Então, substituindo (208) e (209) em (194), mudando o índice $\sigma \in \mathbb{K}_r$ pelo $k \in \mathbb{K}_r$ e multiplicando o resultado por $\text{diag}\{X^T, X^T\}$ e $\text{diag}\{X, X\}$ no lado esquerdo e direito, respectivamente, obtemos

$$\dot{V}(x) \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) [x(t)^T \quad \dot{x}^T(t)] \bar{\Xi}_{ijk} [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)]^T. \quad (210)$$

Por fim, aplicando o Lema 1 na desigualdade (210), as condições (205) e (206) garantem que $\dot{V}(x) < 0$, e assim, tornando o ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ assintoticamente estável. \square

O Teorema 14 apresenta as condições de projeto para o controlador PDC chaveado usando a função de Lyapunov generalizada (178). Note que, o Lema 3 foi empregado para lidar com o termo que depende das derivadas das MFs. Além disso, a lei de chaveamento pertence no conjunto \mathbb{K}_r , ou seja não aumenta o número de ganhos a serem chaveados. A fim de comprovar a redução conservadorismo do controlador, será considerado novamente o Exemplo 8. A Figura 22 ilustra uma comparação das regiões de factibilidade do Teorema 13 e o Teorema 14. Note que o Teorema 14 apresenta incremento considerável na região de factibilidade, isto é devido ao fato que este considera uma função de Lyapunov generalizada para $N = 2$. Conseqüentemente, é evidente que o conservadorismo das condições pode ser reduzida à medida que o grau de generalização da função de Lyapunov aumenta. Isso mostra a vantagem do enfoque proposto.

Figura 22 – Região de factibilidade obtida com o Teorema 13 (●) e o Teorema 14 (○,o)



Fonte: Elaboração do próprio autor.

5.2 PROJETO DE CONTROLE NON-PDC CHAVEADO

Na Seção 2.2 foi mostrado o controlador PDC (15), em contraste nesse controlador, o controlador non-PDC é definido na seguinte forma (GUERRA; VERMEIREN, 2004):

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) K_i \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) P_i \right)^{-1}. \quad (211)$$

Note que a lei de controle (211) depende da inversa da matriz dependente das MFs. Embora essa dependência gere complexidade na implementação do controlador, ela também é o motivo da redução do conservadorismo das condições em comparação ao controlador PDC.

Para o desenvolvimento do controlador non-PDC, será considerada a seguinte função de Lyapunov não quadrática:

$$V(x) = x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) P_i \right)^{-1} x(t). \quad (212)$$

Note que a função de Lyapunov não quadrática (212) contém a inversa da matriz dependente das MFs, isto é, a função (212) considera as informações dos MFs.

Para o desenvolvimento desta seção, considere as seguintes notações:

$$P_\alpha = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) P_i, \quad P_\alpha^{-1} = \left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) P_i \right)^{-1}, \quad \dot{P}_\alpha^{-1} = \frac{\partial \left(\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i(t) P_i \right)^{-1} \right)}{\partial t}. \quad (213)$$

Portanto, a fim de lidar com a inversa da matriz dependente das MFs, teremos

$$P_\alpha^{-1} = P_\alpha^{-1} P_\alpha P_\alpha^{-1}. \quad (214)$$

Tomando a derivada em relação ao tempo:

$$\begin{aligned} \dot{P}_\alpha^{-1} &= \dot{P}_\alpha^{-1} P_\alpha P_\alpha^{-1} + P_\alpha^{-1} P_\alpha \dot{P}_\alpha^{-1} + P_\alpha^{-1} \dot{P}_\alpha P_\alpha^{-1} \\ &= 2\dot{P}_\alpha^{-1} + P_\alpha^{-1} \dot{P}_\alpha P_\alpha^{-1}. \end{aligned} \quad (215)$$

Então, a partir de (215) obtemos a relação

$$\dot{P}_\alpha^{-1} = -P_\alpha^{-1} \dot{P}_\alpha P_\alpha^{-1}. \quad (216)$$

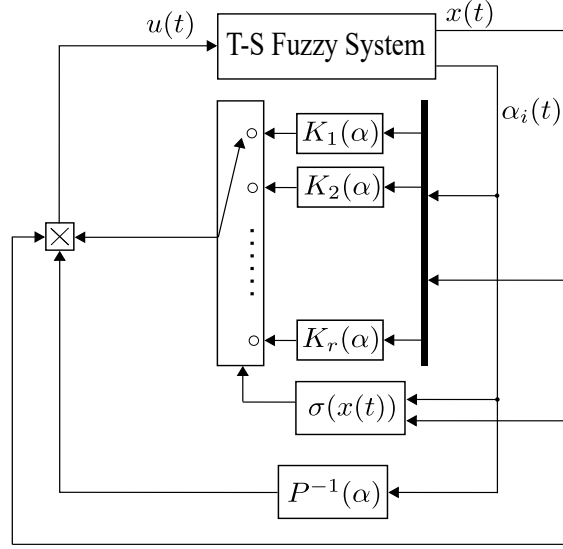
Observação 20. Note que a relação (216) exige que as matrizes $P_i, i \in \mathbb{K}_r$ sejam simétricas.

5.2.1 Projeto de controle chaveado usando uma função de Lyapunov não quadrática

Como o enfoque proposto foi estendido ao projeto do controlador PDC chaveado, também pode ser estendido para obter um controlador chaveado non-PDC, a fim de aproveitar as vantagens do controlador non-PDC e obter condições de projeto com um menor conservadorismo. Nesse sentido, o controlador non-PDC chaveado será definido da seguinte forma:

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) K_{i\sigma} P_\alpha^{-1}, \quad (217)$$

em que $\sigma(x(t))$ é a lei de chaveamento. Note que o controlador (217) precisa de um conjunto de ganhos $\{K_1(\alpha), K_2(\alpha), \dots, K_r(\alpha)\}$ e apenas de uma matriz dependente das

Figura 23 – Diagrama de blocos do controlador non-PDC chaveado


Fonte: Elaboração do próprio autor.

MFs. A Figura 23 mostra o diagrama de blocos do controlador non-PDC chaveado. Então, o sistema em malha fechada será

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(t) \alpha_j(t) [A_i + B_i K_{j\sigma} P_\alpha^{-1}] x(t). \quad (218)$$

Baseado na lei de controle chaveada (217) e na função de Lyapunov (213), segue o seguinte teorema:

Teorema 15. *Considere a Suposição 1, com $\rho = \max_{i \in \mathbb{K}_r} \{\rho_i\}$. Se existieram matrizes simétricas $P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $R_{1i}, R_{2i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para $i \in \mathbb{K}_r$, que satisfazem o seguinte conjunto de LMIs:*

$$P_i > 0, \quad \forall i \in \mathbb{K}_r \quad (219)$$

$$\Xi_{iik} < 0, \quad \forall i, k \in \mathbb{K}_r, \quad (220)$$

$$\frac{2}{r-1} \Xi_{iik} + \Xi_{ijk} + \Xi_{jik} < 0, \quad \forall i \neq j, \quad \forall k \in \mathbb{K}_r, \quad (221)$$

sendo

$$\Xi_{ijk} = \begin{bmatrix} P_\phi^k + A_i R_{1j} + R_{1j}^T A_i^T + B_i K_{jk} + K_{jk}^T B_i^T & * \\ P_i + R_{2j} A_i - R_{1i}^T & -R_{2i} - R_{2i}^T \end{bmatrix},$$

$$P_\phi^k = r\rho P_k - \rho \sum_{\ell=1}^r P_\ell.$$

Então o controlador chaveado (217), com a seguinte lei de chaveamento:

$$\sigma(t) = \arg \max_{k \in \mathbb{K}_r} \{x^T(t) P_k x(t)\}, \quad (222)$$

e com os ganhos dados por K_{ik} , torna o ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ do sistema (218) assintoticamente estável.

Demonstração. Considere uma função de Lyapunov não quadrática

$$V(x) = x^T(t)P_\alpha^{-1}x(t). \quad (223)$$

Então, tomando a derivada com respeito ao tempo

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T(t)P_\alpha^{-1}x(t) + x^T(t)P_\alpha^{-1}\dot{x}(t) + x^T(t)\dot{P}_\alpha^{-1}x(t). \quad (224)$$

Do sistema (218), podemos fazer a mudança de variável

$$\epsilon(t) = A_\alpha x(t), \quad (225)$$

em que $\epsilon(t) = \dot{x}(t) - B_\alpha K_{\alpha\sigma} P_\alpha^{-1} x(t)$. Então, substituindo $\dot{x}(t)$ em (224) e desenvolvendo a expressão $\dot{V}(x)$ temos

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & x^T(t)P_\alpha^{-1}K_{\alpha\sigma}^T B_\alpha^T P_\alpha^{-1}x(t) + x^T(t)P_\alpha^{-1}B_\alpha K_{\alpha\sigma} P_\alpha^{-1}x(t) + \epsilon^T(t)P_\alpha^{-1}x(t) \\ & + x^T(t)P_\alpha^{-1}\epsilon(t) + x^T(t)\dot{P}_\alpha^{-1}x(t). \end{aligned} \quad (226)$$

Levando em conta a relação (216)

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & V_1(x) + x^T(t)P_\alpha^{-1}K_{\alpha\sigma}^T B_\alpha^T P_\alpha^{-1}x(t) + x^T(t)P_\alpha^{-1}B_\alpha K_{\alpha\sigma} P_\alpha^{-1}x(t) \\ & - x^T(t)P_\alpha^{-1}\dot{P}_\alpha P_\alpha^{-1}x(t). \end{aligned} \quad (227)$$

em que

$$V_1(x) = \epsilon^T(t)P_\alpha^{-1}x(t) + x^T(t)P_\alpha^{-1}\epsilon(t) \quad (228)$$

Note que, do sistema (228), pode ser aplicado o método do descritor com matrizes auxiliares fuzzy na expressão $V_1(x)$, da seguinte forma:

$$V_1(x) = x^T(t)P_\alpha^{-1}\epsilon(t) + \epsilon^T(t)P_\alpha^{-1}x(t) - 2 \left[x^T(t)\bar{R}_{1\alpha} + \epsilon^T(t)\bar{R}_{2\alpha} \right] \times [\epsilon(t) - A_\alpha x(t)]. \quad (229)$$

Então, obtém-se

$$V_1(x) = [x^T(t) \quad \epsilon^T(t)]^T \begin{bmatrix} \bar{R}_{1\alpha}A_\alpha + A_\alpha^T\bar{R}_{1\alpha}^T & * \\ P_\alpha^{-1} - \bar{R}_{1\alpha}^T + \bar{R}_{2\alpha}A_\alpha & -\bar{R}_{2\alpha} - \bar{R}_{2\alpha}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \epsilon(t) \end{bmatrix}. \quad (230)$$

Por outro lado, baseado na Suposição 1 e na desigualdade (150) do Lema 2, tem-se

$$-\sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(t)x^T(t)P_i x(t) \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i(t)x^T(t) \left(r\rho P_\sigma - \rho \sum_{\ell=1}^r P_\ell \right) x(t). \quad (231)$$

Multiplicando por P_α^{-1} no lado esquerdo e direito

$$-x^T(t)P_\alpha^{-1}\dot{P}_\alpha P_\alpha^{-1}x(t) \leq x^T(t)P_\alpha^{-1}\left(r\rho P_\sigma - \rho\sum_{\ell=1}^r P_\ell\right)P_\alpha^{-1}x(t). \quad (232)$$

Então, substituindo (230) e (232) em (227)

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) = & V_1(x) + x^T(t)P_\alpha^{-1}K_{\alpha\sigma}^T B_\alpha^T P_\alpha^{-1}x(t) + x^T(t)P_\alpha^{-1}B_\alpha K_{\alpha\sigma} P_\alpha^{-1}x(t) \\ & + x^T(t)P_\alpha^{-1}\left(r\rho P_\sigma - \rho\sum_{\ell=1}^r P_\ell\right)P_\alpha^{-1}x(t). \end{aligned} \quad (233)$$

De (233), a fim de garantir $\dot{V}(x) < 0$ é necessário que

$$\begin{aligned} & V_1(x) + x^T(t)P_\alpha^{-1}K_{\alpha\sigma}^T B_\alpha^T P_\alpha^{-1}x(t) + x^T(t)P_\alpha^{-1}B_\alpha K_{\alpha\sigma} P_\alpha^{-1}x(t) \\ & + x^T(t)P_\alpha^{-1}\left(r\rho P_\sigma - \rho\sum_{\ell=1}^r P_\ell\right)P_\alpha^{-1}x(t) < 0. \end{aligned} \quad (234)$$

Multiplicando a desigualdade (234) por P_α no lado direito e esquerdo e substituindo σ por $k \in \mathbb{K}_r$ e considerando $R_{1\alpha}^T = P_\alpha \bar{R}_{1\alpha}^T P_\alpha$, $R_{2\alpha}^T = P_\alpha \bar{R}_{2\alpha}^T P_\alpha$, obtem-se

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \alpha_i(t)\alpha_j(t)\hat{x}^T(t)\Xi_{ijk}\hat{x}(t) < 0, \quad k \in \mathbb{K}_r, \quad (235)$$

em que $\hat{x}^T(t) = [x^T(t) \quad \epsilon^T(t)]$.

Por fim, note aplicando o Lema 1 as desigualdades (220) e (221) garantem que $\dot{V}(x) < 0$, e assim, tornando o ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ assintoticamente estável. \square

O Teorema 15 apresenta as condições para o projeto do controlador non-PDC chaveado usando a função de Lyapunov não quadrática. Note que diferente do Teorema 13, o Teorema 15 não precisa fazer a definição do escalar μ , isso permite aproveitar as matrizes auxiliares R_1 e R_2 , que podem depender das MFs. Essa vantagem é devido à função não quadrática, que permite desenvolver o termo $x^T(t)P_\alpha^{-1}K_{\alpha\sigma}^T B_\alpha^T P_\alpha^{-1}x(t) + x^T(t)P_\alpha^{-1}B_\alpha K_{\alpha\sigma} P_\alpha^{-1}x(t)$ na forma de LMIs, multiplicando no lado direito e esquerdo pela matriz simétrica P_α . Portanto, o método do descritor foi aplicado considerando a expressão (225).

Outra vantagem importante do controlador non-PDC é que ele pode aproveitar o Lema 2 para lidar com as derivadas das MFs. Portanto, essa vantagem pode ser estendida para o uso da função de Lyapunov não quadrática generalizada, do mesmo modo que para a função de Lyapunov fuzzy generalizada.

5.2.2 Projeto de controle chaveado usando uma função de Lyapunov não quadrática generalizada

A função de Lyapunov não quadrática generalizada terá a seguinte forma:

$$V(x) = x^T(t) \left[\sum_{i_1=1}^r \sum_{i_2=1}^r \cdots \sum_{i_N=1}^r \prod_{j=1}^N \alpha_{i_j}(t) P_{i_1 \dots i_N} \right]^{-1} x(t). \quad (236)$$

Isto é, que o grau de generalização pode ser estendido até qualquer valor de N . Contudo, a diferença do controlador PDC chaveado, a lei de controle non-PDC chaveada precisa também ser estendida, ou seja, teremos

$$u(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) K_{i\sigma} \left[\sum_{i_1=1}^r \sum_{i_2=1}^r \cdots \sum_{i_N=1}^r \prod_{j=1}^N \alpha_{i_j}(t) P_{i_1 \dots i_N} \right]^{-1}. \quad (237)$$

Note que o número de controladores a serem chaveados permanece r , ou seja, a complexidade da implementação do controlador depende apenas da inversa da matriz dependente das MFs ao igual que o controlador non-PDC sem chaveamento (Figura 23).

A fim de comprovar o aprioriamento do controlador non-PDC generalizado, segue o teorema para o caso $N = 2$:

Teorema 16. *Considere a Suposição 1, com $\rho = \max_{i \in \mathbb{K}_r} \{\rho_i\}$. Se existieram as matrizes simétricas $P_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e matrizes $R_{1i}, R_{2i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ para $i \in \mathbb{K}_r$, que satisfazem o seguinte conjunto de LMIs:*

$$P_{ij} + P_{ji} > 0, \quad \forall i \leq j \in \mathbb{K}_r \quad (238)$$

$$\Xi_{iik} < 0, \quad \forall i, k \in \mathbb{K}_r, \quad (239)$$

$$\frac{2}{r-1} \Xi_{iik} + \Xi_{ijk} + \Xi_{jik} < 0, \quad \forall i \neq j, \quad \forall k \in \mathbb{K}_r, \quad (240)$$

sendo

$$\Xi_{ijk} = \begin{bmatrix} P_{\phi}^{ik} + A_i R_{1i} + R_{1i}^T A_i^T + K_{jk}^T B_i + B_i^T K_{jk} & * \\ P_{ij} + R_{2j} A_i - R_{1i}^T & -R_{2i} - R_{2i}^T \end{bmatrix},$$

$$P_{\phi}^{ik} = r\rho(P_{ki} + P_{ik}) - \rho \sum_{\ell=1}^r (P_{\ell i} + P_{i\ell}).$$

Então o controlador chaveado (237) para $N = 2$, com a seguinte lei de chaveamento:

$$\sigma(t) = \arg \max_{k \in \mathbb{K}_r} \left\{ \zeta^T(t) \sum_{j=1}^r \alpha_j(t) (P_{kj} + P_{jk}) \zeta(t) \right\}, \quad (241)$$

e com os ganhos K_{ik} , torna o ponto de equilíbrio $x(t) = 0$ do sistema (7) assintoticamente estável.

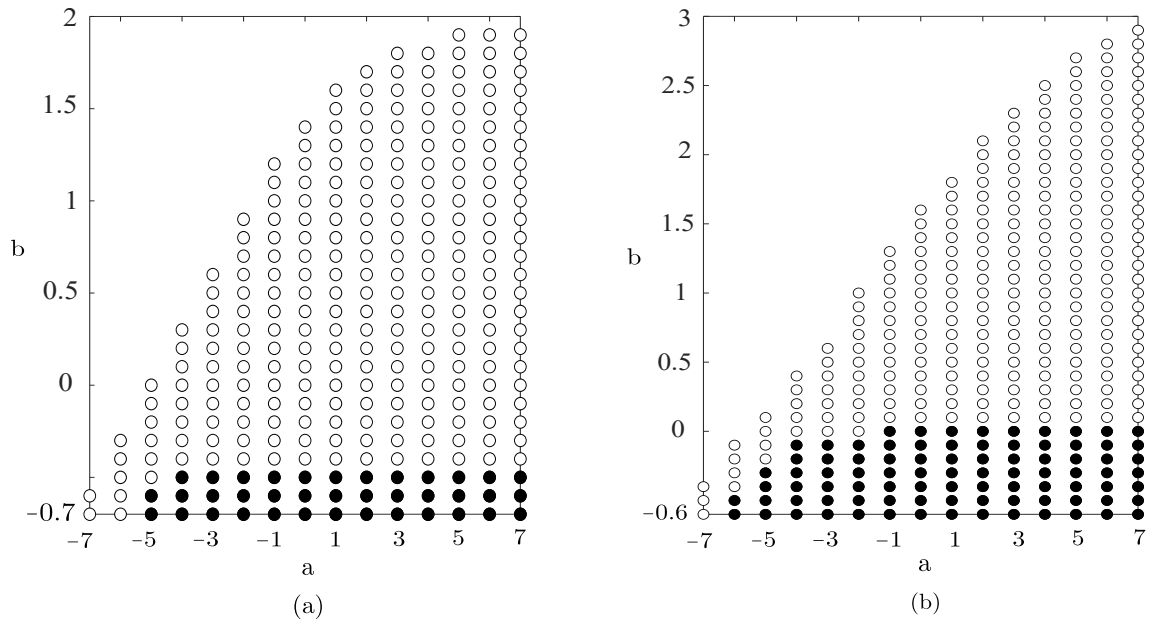
Demonstração. A prova do Teorema segue o mesmo procedimento que os Teoremas 14 e 15. \square

O Teorema 16 apresenta as condições de projeto para o controlador non-PDC chaveado (237) para o caso $N = 2$. Note que, assim como no Teorema 15, não é necessário definir o escalar μ é possível utilizar as matrizes auxiliares fuzzy. Além disso, a lei de chaveamento é a mesma que no Teorema 14, isto é consequência destes dois teoremas abordarem as derivadas das MFs usando o Lema 3. Portanto, a fim de verificara redução do conservadorismo das condições, será considerando novamente o Exemplo 8 para $\rho = 1$.

A Figura 24(a) apresenta uma comparação da região de factibilidade do Teorema 13 e o Teorema 15. Note que o controlador non-PDC chaveado apresenta uma maior região de factibilidade do que o controlador PDC chaveado. Além disso, a Figura 24(b) ilustra a comparação da região de fatibilidade do Teorema 14 e o Teorema 16. Note que o controlador non-PDC chaveado generalizado para $N = 2$ apresenta maior região de factibilidade em relação ao controlador PDC chaveado generalizado para $N = 2$. Portanto, o aprimoramento do controlador non-PDC chaveado é muito perceptível, o que comprova a vantagem considerável do Lema 3, que pode ser aplicado ao projeto de controladores non-PDC chaveados.

A fim de mostrar a efetividade do enfoque proposto com respeito a alguns trabalhos recentes na literatura, será considerado o Exemplo 5 para $\rho = 1$. A Tabela 7 mostra os valores máximos que b pode assumir em relação a alguns valores de a para o método proposto em Mozelli, Palhares e Avellar (2009), o Teorema 6 proposto em Lee, Park e Joo (2012), a estratégia proposta em Tognetti, Oliveira e Peres (2011) e o Teorema 16. É importante mencionar que o Teorema 6 proposto em Lee, Park e Joo (2012) também considera um controlador non-PDC com uma função de Lyapunov não quadrática generalizada para $N = 2$. Além disso, a estratégia proposta em Tognetti, Oliveira e Peres (2011) usa o método do politopo para abordar as derivadas das MFs. Note que o Teorema 16 apresenta um valor máximo de b consideravelmente maior que os outros métodos. Adicionalmente, L representa o número de linhas totais nas LMIs, isto é, o Teorema 16 apresenta um valor consideravelmente baixo de L com respeito ao melhor resultado apresenta na literatura (Teorema 2_(4,4) em Tognetti, Oliveira e Peres (2011)).

Figura 24 – (a) Região de factibilidade obtida com o Teorema 13 (●) e o Teorema 15 (●,○). (b) Região de factibilidade obtida com o Teorema 14 (●) e o Teorema 16 (●,○)



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 8 – Valores máximos de b com respeito a alguns valores de a e o número de LMIs de cada estratégia.

Método	a					L
	0	5	10	15	20	
Mozelli, Palhares e Avellar (2009)	1.20	1.44	1.55	1.61	1.67	20
Teorema 2 _(1,1) Tognetti, Oliveira e Peres (2011)	1.55	2.06	2.27	2.38	2.45	28
Teorema 2 _(4,1) Tognetti, Oliveira e Peres (2011)	1.61	2.25	2.59	2.84	3.03	50
Teorema 2 _(2,2) Tognetti, Oliveira e Peres (2011)	1.61	2.28	2.75	3.14	3.50	38
Teorema 2 _(4,4) Tognetti, Oliveira e Peres (2011)	1.67	2.47	3.05	3.52	3.92	58
Teorema 6 em Lee, Park e Joo (2012)	1.66	2.25	2.73	3.14	3.56	20
Teorema 16	2.00	3.48	4.48	6.18	7.47	36

Fonte: Elaboração do próprio autor.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho tratou de um tópico muito importante na literatura dos sistemas fuzzy T-S, sendo proposto uma abordagem que melhora os resultados com respeito a métodos propostos anteriormente. Além disso, procurou-se não apenas fornecer os resultados obtidos, mas também fornecer uma análise do processo que levou à obtenção desses resultados.

6.1 CONCLUSÕES

Este trabalho começa apresentando alguns conceitos fundamentais dos sistemas não lineares e, na sequência, apresenta os fundamentos importantes que estão presentes na extensa literatura sobre a análise de estabilidade e o projeto de controle dos sistemas fuzzy T-S mediante uma função de Lyapunov fuzzy. Embora algumas conclusões parciais foram mencionadas no final de cada capítulo, é importante destacar que a estratégia de controle chaveado permite aproveitar a teoria presente nos sistemas chaveados. Dessa forma, as técnicas de relaxamento baseadas no conceito de sub-regiões obtidas pela função de chaveamento podem ser exploradas nos sistemas fuzzy T-S, reduzindo o conservadorismo das condições em relação à consideração de um único ganho para o controlador.

No Capítulo 3, foi realizada uma análise de alguns métodos propostos na literatura para obter as condições de estabilidade dos sistemas fuzzy T-S por meio de uma função de Lyapunov fuzzy. Foi demonstrado que os métodos que consideram uma análise de estabilidade local apresentam um conservadorismo menor em relação aos métodos que consideram uma análise de caráter global. Além disso, um subconjunto do domínio de atração pode ser estimado por meio da otimização da superfície de nível da função de Lyapunov. Entretanto, a conclusão mais importante deste capítulo é que, entre os métodos analisados, o método baseado no politopo tem mais vantagens do que os outros métodos, pois inclui todos os cenários possíveis do vetor $\dot{\alpha}(t) \in \mathcal{P}$. Portanto, conclui-se que não existe outro conjunto que inclua todos os cenários possíveis do vetor $\dot{\alpha}(t)$ e proporcione menos conservadorismo do que o método do politopo.

O Capítulo 4 iniciou mostrando uma estratégia de controle chaveado com base no método de politopo. No entanto, foi mostrado que essa estratégia pode apresentar um número muito grande de ganhos a serem comutados, aumentando ainda mais o esforço computacional das condições de projeto. Portanto, um conjunto convexo é definido a fim de apresentar uma nova abordagem que limita as derivadas das MFs pela propriedade da combinação convexa de números. Essa abordagem permitiu o desenvolvimento de novas condições de projeto para um controlador chaveado com base em uma função de Lyapunov fuzzy. É importante ressaltar que o controlador chaveado proposto também adiciona um

termo positivo, aunque diferente aos métodos propostos na literatura, mas que é a base para o relaxamento das condições (veja a Observação 19). Por fim, esses resultados foram aplicados a sistemas não lineares na presença de incertezas e foram comparados com outros métodos da literatura, demonstrando um menor conservadorismo e uma maior eficiência do controlador.

Na parte final deste trabalho, no Capítulo 5, ampliamos os resultados obtidos para fazer uso de uma função de Lyapunov fuzzy generalizada. Para esse caso, foi obtida uma função de chaveamento dependente das MFs. Além disso, uma vantagem importante do método proposto no capítulo anterior é que os resultados estendidos não incrementam o número de controladores a serem chaveados. Então, esses resultados são aplicados a um controlador PDC chaveado. Os resultados deste capítulo mostram que o controlador PDC chaveado apresenta um conservadorismo menor das condições em relação a um controlador PDC. Além disso, o uso de uma função de Lyapunov fuzzy generalizada pode reduzir significativamente as condições para uma generalização superior. Na segunda parte, o enfoque proposto é usado para obter condições de projeto de um controlador non-PDC chaveado. Este controlador também pode ser generalizado para qualquer valor de N . Os resultados deste capítulo mostra que a estratégia proposta oferece um baixo conservadorismo nas condições de projeto, bem como baixo esforço computacional na busca de soluções.

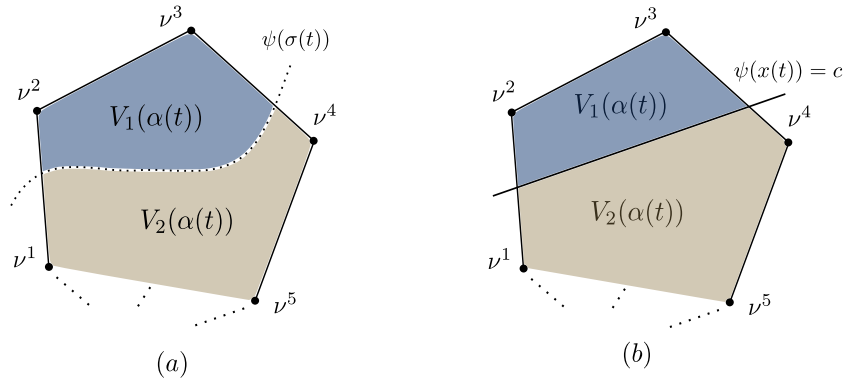
6.2 POSSÍVEIS PERSPECTIVAS PARA TRABALHOS FUTUROS

Embora a contribuição deste trabalho esteja concentrada no projeto de um controlador chaveado. Este trabalho, também apresenta uma perspectiva para a exploração de novas possibilidades para melhorar os resultados do sistema de controle.

6.2.1 Análise de estabilidade

Dado que o método do politopo apresenta um ótimo resultado para a análise da estabilidade de sistemas fuzzy. Esta abordagem pode ser aproveitada com o uso de uma função de Lyapunov fuzzy por partes. O possível enfoque para aproveitar a função de Lyapunov por partes seria dividir o politopo em regiões a fim de designar uma respectiva função de Lyapunov para cada uma delas. A Figura 25 ilustra algumas alternativas nas quais o polítopo pode ser dividido para o caso $V_i(\alpha)$, $i \in \{1, 2\}$. Para o primeiro caso, o politopo pode ser dividido baseado em uma superfície de chaveamento baseada nas funções $\min \dots$ ou $\max \dots$. Neste caso, a superfície estaria dada por $\psi_{\sigma(t)} = \{x(t) \in \mathbb{R}^n / V_1(\alpha) = V_2(\alpha)\}$ e a função de Lyapunov por partes teria a forma dada em (57), tendo a vantagem de não ter pontos descontínuos nos instantes de chaveamento. Para o segundo caso, o politopo poderia ser dividido em base a uma superfície escolhida arbitrariamente. Neste

Figura 25 – Perspectiva para a divisão do politopo. (a) Considerando a superfície de chaveamento. (b) Considerando uma superfície arbitrária



Fonte: Elaboração do próprio autor.

caso, a superfície $\psi_{x(t)}$ poderia ser dada por exemplo, $x(t) = c$, $\dot{x}(t) = c$, entre outros, em que c é um escalar dado. Este enfoque já foi abordado na literatura (JOHANSSON; RANTZER; ARZEN, 1999; BERNAL; GUERRA; KRUSZEWSKI, 2009), no entanto, ainda não foi aproveitado nas funções de Lyapunov fuzzy.

6.2.2 Projeto de controle chaveado

Como foi mencionado no texto, o enfoque proposto tem a vantagem de ser extensível para qualquer valor de N . Portanto, seria interessante obter as condições gerais de projeto para qualquer valor de N e analisar o aumento do esforço computacional juntamente com a redução do conservadorismo.

Por outro lado, levando em conta que os termos positivos dados em (60) não foram usados neste trabalho, é possível adicionar esse termo positivo a fim de reduzir ainda mais as condições de projeto do controlador. Nesse caso, uma questão interessante seria o desenvolvimento de métodos para introduzir o termo positivo não linear dado em (60), que tem um grande potencial para reduzir o conservadorismo das condições.

6.2.3 Extensão dos resultados

Adicionalmente, a proposta de controle chaveado deste trabalho pode ser estendida ao estudo de algumas condições de desempenho, tais como a consideração de uma taxa de decaimento, o estudo da presença de perturbações a fim de reduzir a norma \mathcal{H}_∞ , ou a redução do custo garantido. Assim como na extensão para sistemas discretos ou sistema mais gerais como os sistemas híbridos.

REFERÊNCIAS

- ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R. de; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A. de. Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. **Int. J. Adapt. Control Signal Process**, Wiley Online Library, Oxford, v. 30, n. 8-10, p. 1408–1433, 2016.
- BERNAL, M.; GUERRA, T. M. Generalized nonquadratic stability of continuous-time Takagi–Sugeno models. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 18, n. 4, p. 815–822, 2010.
- BERNAL, M.; GUERRA, T. M.; KRUSZEWSKI, A. A membership-function-dependent approach for stability analysis and controller synthesis of Takagi–Sugeno models. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 160, n. 19, p. 2776–2795, 2009. Theme: Control.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- CHEN, C.-T. **Linear system theory and design**. 3. ed. New York: Oxford University Press, 1998. ISBN 0-19-511777-8.
- CHEN, J.; XU, S.; ZHANG, B.; CHU, Y.; ZOU, Y. New relaxed stability and stabilization conditions for continuous-time T–S fuzzy models. **Information Sciences**, Philadelphia, v. 329, p. 447–460, 2016. ISSN 0020-0255. Special issue on Discovery Science.
- CHEN, Y.-J.; OHTAKE, H.; TANAKA, K.; WANG, W.-J.; WANG, H. O. Relaxed stabilization criterion for T–S fuzzy systems by minimum-type piecewise-Lyapunov-function-based switching fuzzy controller. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 20, n. 6, p. 1166–1173, 2012.
- COVACIC, M. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARVALHO, A. A. D.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; SANCHES, M. A. A.; FUJIMOTO, H. S.; MINEO, M. S.; BIAZETO, A. R.; GAINO, R. Robust T-S fuzzy control of electrostimulation for paraplegic patients considering norm-bounded uncertainties. **Math. Probl. Eng.**, London, v. 2020, 2020.
- FANG, C.-H.; LIU, Y.-S.; KAU, S.-W.; HONG, L.; LEE, C.-H. A new LMI-based approach to relaxed quadratic stabilization of T-S fuzzy control systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 14, n. 3, p. 386–397, 2006.
- FARIA, F. A.; SILVA, G. N.; OLIVEIRA, V. A. Reducing the conservatism of LMI-based stabilisation conditions for T-S fuzzy systems using fuzzy Lyapunov functions. **International Journal of Systems Science**, Taylor & Francis, Oxfordshire, v. 44, n. 10, p. 1956–1969, 2013.
- GAINO, R.; COVACIC, M. R.; CARDIM, R.; SANCHES, M. A. A.; CARVALHO, A. A. D.; BIAZETO, A. R.; TEIXEIRA, M. C. M. Discrete Takagi-Sugeno fuzzy models applied to control the knee joint movement of paraplegic patients. **IEEE Access**, Piscataway, v. 8, p. 32714–32726, 2020.
- GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Robust stability of time varying polytopic systems. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v. 55, n. 1, p. 81–85, 2006.

- GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. **SIAM Journal on Control and Optimization**, Philadelphia, v. 45, n. 5, p. 1915–1930, 2006.
- GONZÁLEZ, T.; SALA, A.; BERNAL, M. A generalised integral polynomial Lyapunov function for nonlinear systems. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 356, p. 77–91, 2019. ISSN 0165-0114. Theme: Control Engineering.
- GOYAL, V. K.; SHUKLA, A. Two-stage hybrid isolated dc–dc boost converter for high power and wide input voltage range applications. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, Piscataway, v. 69, n. 7, p. 6751–6763, 2022.
- GUERRA, T. M.; BERNAL, M. A way to escape from the quadratic framework. In: **IEEE International Conference on Fuzzy Systems**. Jeju: IEEE, 2009. p. 784–789.
- GUERRA, T. M.; BERNAL, M.; GUELTON, K.; LABIOD, S. Non-quadratic local stabilization for continuous-time Takagi–Sugeno models. **Fuzzy Sets and Systems**, Elsevier, Amsterdam, v. 201, p. 40–54, 2012.
- GUERRA, T. M.; VERMEIREN, L. LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi–Sugeno’s form. **Automatica**, Oxford, v. 40, n. 5, p. 823–829, 2004.
- HESPANHA, J. P.; MORSE, A. Switching between stabilizing controllers. **Automatica**, Oxford, v. 38, n. 11, p. 1905–1917, 2002.
- JADBABAIE, A. A reduction in conservatism in stability and L_2 gain analysis of Takagi–Sugeno fuzzy systems via linear matrix inequalities. In: **IFAC Proceedings Volumes**. Beijing: Elsevier, 1999. v. 32, n. 2, p. 5451–5455.
- JOHANSSON, M.; RANTZER, A.; ARZEN, K.-E. Piecewise quadratic stability of fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 7, n. 6, p. 713–722, 1999.
- KHALIL, H. K. **Nonlinear systems**. 3. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2002. ISBN 0-13-067389-7.
- KIM, E.; LEE, H. New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems. **IEEE Transactions on Fuzzy systems**, Piscataway, v. 8, n. 5, p. 523–534, 2000.
- KIM, S. H. Improvement of slack variable-free relaxation method and its application to control design of T-S fuzzy systems. **IEEE Access**, Piscataway, v. 10, p. 71830–71836, 2022.
- LAM, H. A review on stability analysis of continuous-time fuzzy-model-based control systems: From membership-function-independent to membership-function-dependent analysis. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, Oxford, v. 67, p. 390–408, 2018.
- LAZARINI, A. Z. N. **Condições relaxadas para estabilidade e estabilização de sistemas não lineares T-S utilizando majorantes ótimos da derivada de funções de Lyapunov fuzzy e controladores chaveados**. 2021. 103 p. Tese (Doutorado em

Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade Estadual Paulista - UNESP, Ilha Solteira, 2021.

LEE, D. H.; PARK, J. B.; JOO, Y. H. A new fuzzy Lyapunov function for relaxed stability condition of continuous-time Takagi–Sugeno fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 19, n. 4, p. 785–791, 2011.

LEE, D. H.; PARK, J. B.; JOO, Y. H. A fuzzy Lyapunov function approach to estimating the domain of attraction for continuous-time Takagi–Sugeno fuzzy systems. **Information Sciences**, Philadelphia, v. 185, n. 1, p. 230–248, 2012.

LIAN, K.-Y.; LIOU, J.-J.; HUANG, C.-Y. LMI-based integral fuzzy control of dc-dc converters. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 14, n. 1, p. 71–80, 2006.

LIBERZON, D. **Switching in systems and control**. 1. ed. Cham: Birkhäuser Science, 2003. v. 190.

LIBERZON, D.; MORSE, A. S. Basic problems in stability and design of switched systems. **IEEE control systems magazine**, Piscataway, v. 19, n. 5, p. 59–70, 1999.

LOFBERG, J. YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: **IEEE International Conference on Robotics and Automation**. New Orleans: IEEE, 2004. p. 284–289.

MAMDANI, E. Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant. **Proceedings of the Institution of Electrical Engineers**, Hertfordshire, v. 121, n. 12, p. 1585–1588, 1974.

MOZELLI, L. A.; ADRIANO, R. L. S. On computational issues for stability analysis of LPV systems using parameter-dependent Lyapunov functions and LMIs. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, Oxford, v. 29, n. 10, p. 3267–3277, 2019.

MOZELLI, L. A.; PALHARES, R. M.; AVELLAR, G. S. A systematic approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems. **Information Sciences**, Philadelphia, v. 179, n. 8, p. 1149–1162, 2009.

MÁRQUEZ, R.; GUERRA, T. M.; BERNAL, M.; KRUSZEWSKI, A. A non-quadratic Lyapunov functional for \mathcal{H}_∞ control of nonlinear systems via Takagi–Sugeno models. **Journal of the Franklin Institute**, Oxford, v. 353, n. 4, p. 781–796, 2016.

OLIVEIRA, D. R. D.; SANTOS, G. R. D.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; ALVES, U. N. L. T. On switched control of discrete-time Takagi–Sugeno fuzzy systems with unknown membership functions. In: IEEE. **IEEE International Conference on Fuzzy Systems**. Rio de Janeiro, 2018. p. 1–8.

OLIVEIRA, D. R. de; TEIXEIRA, M. C. M.; ALVES, U. N. L. T.; SOUZA, W. A. de; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. On local \mathcal{H}_∞ switched controller design for uncertain T–S fuzzy systems subject to actuator saturation with unknown membership functions. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 344, p. 1–26, 2018.

ONCOY, D. J. S.; CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M. Switched control based on Takagi–Sugeno fuzzy model for dual active bridge dc-dc converter. In: IEEE. **IEEE International Conference on Fuzzy Systems**. Padua, 2022. p. 1–7.

ONCOY, D. J. S.; CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E. Robust switched controller based on Takagi-Sugeno fuzzy model for dc-dc converters against disturbances. In: IEEE. **16th Int. Workshop Variable Struct. Syst.** Rio de Janeiro, 2022. p. 1–7.

ONCOY, D. J. S.; CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; LAZARINI, A. Z. N. New stabilization conditions for fuzzy-based sampled-data control systems using a fuzzy Lyapunov functional. **IEEE Access**, Piscataway, v. 11, p. 15390–15403, 2023.

RAMOS, I. T. M.; ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; LAZARINI, A. Z. N. On robust switched controller design to minimize the guaranteed cost of polynomial fuzzy systems. In: IEEE. **IEEE International Conference on Fuzzy Systems**. New Orleans, 2019. p. 1–6.

RHEE, B.-J.; WON, S. A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi-Sugeno fuzzy control system design. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 157, n. 9, p. 1211–1228, 2006.

ROTONDO, D.; PUIG, V.; NEJJARI, F.; WITCZAK, M. Automated generation and comparison of Takagi-Sugeno and polytopic quasi-LPV models. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 277, p. 44–64, 2015.

SALA, A.; ARIÑO, C. Asymptotically necessary and sufficient conditions for stability and performance in fuzzy control: Applications of Polya's theorem. **Fuzzy Sets and Systems**, Amsterdam, v. 158, n. 24, p. 2671–2686, 2007.

SANTOS, G. R. D.; OLIVEIRA, D. R. de; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; LAZARINI, A. Z. N. Switched control for local stabilization of discrete-time uncertain Takagi-Sugeno fuzzy systems with relaxed estimate of the domain of attraction. In: IEEE. **IEEE International Conference on Fuzzy Systems**. Glasgow, 2020. p. 1–8.

SILVA, H. R. M.; RAMOS, I. T.; ALVES, U. N. L. T.; CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E. Switched control design with guaranteed cost for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. In: **IFAC-PapersOnLine**. Berlin: Elsevier, 2020. v. 53, n. 2, p. 8025–8030.

SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. **Applied nonlinear control**. 1. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1991. ISBN 0-13-040890-5.

SOUZA, W. A. de; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi-Sugeno fuzzy models. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 22, n. 6, p. 1720–1727, 2014.

SOUZA, W. A. de; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties. **Math. Probl. Eng.**, London, v. 2013, 2013.

STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a Matlab toolbox for optimization over symmetric cones. **Optimization Methods and Software**, Oxfordshire, v. 11, n. 1-4, p. 625–653, 1999.

TAKABA, K.; MORIHIRA, N.; KATAYAMA, T. A generalized Lyapunov theorem for descriptor system. **Systems & Control Letters**, Amsterdam, v. 24, n. 1, p. 49–51, 1995.

- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, Piscataway, SMC-15, n. 1, p. 116–132, 1985.
- TANAKA, K.; HORI, T.; WANG, H. A fuzzy Lyapunov approach to fuzzy control system design. In: IEEE. **Proceedings of the 2001 American Control Conference**. Arlington, 2001. v. 6, p. 4790–4795 vol.6.
- TANAKA, K.; HORI, T.; WANG, H. O. A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 11, n. 4, p. 582–589, 2003.
- TANAKA, K.; WANG, H. O. **Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach**. 1. ed. New York: John Wiley & Sons, 2001. ISBN 0-471-32324-1.
- TANAKA, K.; YOSHIDA, H.; OHTAKE, H.; WANG, H. O. A sum-of-squares approach to modeling and control of nonlinear dynamical systems with polynomial fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, IEEE, Piscataway, v. 17, n. 4, p. 911–922, 2009.
- TANIGUCHI, T.; TANAKA, K.; YAMAFUJI, K.; WANG, H. O. Fuzzy descriptor systems: stability analysis and design via LMIs. In: IEEE. **Proceedings of the 1999 American Control Conference**. San Diego, 1999. v. 3, p. 1827–1831 vol.3.
- TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. G. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 11, n. 5, p. 613–623, 2003.
- TEODORO, R. G.; NUNES, W. R. B. M.; ARAUJO, R. A. de; SANCHES, M. A. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARVALHO, A. A. de. Robust switched control design for electrically stimulated lower limbs: A linear model analysis in healthy and spinal cord injured subjects. **Control Engineering Practice**, Oxford, v. 102, p. 104530, 2020.
- TOGNETTI, E. S.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Selective \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ stabilization of Takagi–Sugeno fuzzy systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 19, n. 5, p. 890–900, 2011.
- WANG, H.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi–Sugeno fuzzy model. In: IEEE. **Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Fuzzy Systems**. Yokohama, 1995. v. 2, p. 531–538 vol.2.
- WANG, Y.; ZHENG, L.; ZHANG, H.; ZHENG, W. X. Fuzzy observer-based repetitive tracking control for nonlinear systems. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, Piscataway, v. 28, n. 10, p. 2401–2415, 2020.
- XU, Q.; VAFAMAND, N.; CHEN, L.; DRAGICEVIC, T.; XIE, L.; BLAABJERG, F. Review on advanced control technologies for bidirectional dc/dc converters in dc microgrids. **IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics**, Piscataway, v. 9, n. 2, p. 1205–1221, 2021.
- ZADEH, L. Fuzzy sets. **Information and Control**, Maryland Heights, v. 8, n. 3, p. 338–353, 1965.