

**IFT**

Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

166

---

---

RESUMO

TESE DE DOUTORADO

IFT-T.007/00

OK

**Estudos na Gravitação de Ordem Superior**

Edgard Casal de Rey Neto

Orientador

Prof. Dr. Antonio José Accioly



Setembro 2000

## RESUMO

Um algoritmo para o cômputo do propagador concernente à teoria de gravitação com derivadas de ordem superior, baseado nos operadores de Barnes-Rivers, é apresentado. Um estudo sistemático da unitariedade a nível de árvore desta teoria é desenvolvido e sua concordância com a lei de Newton é investigada via cálculo do potencial efetivo não relativístico. Estuda-se também o desvio da luz causado por um campo gravitacional estático gerado por uma fonte material localizada. Os cálculos mostram que no caso de raios luminosos que passem próximos ao sol a deflexão  $\phi$  jaz no intervalo  $0 < \phi < 1,75''$ . Enfocando a mesma questão a nível de árvore concluímos que o vácuo é um meio dispersivo. Agora  $\phi$  é dependente da energia e varia de  $0^+$  a  $1,75^-$  segundos de arco. Exploramos também a bela idéia de que a deflexão gravitacional de fótons do espectro visível possa dar origem a um arco-íris de gravidade.

**Palavras-Chaves:** Gravitação de Ordem Superior, Unitariedade a Nível de Árvore, Arco-Íris de Gravidade.

**Áreas de Conhecimento:** 1.05.03.00 - 5

## ABSTRACT

An algorithm for computing the propagator for higher-derivative gravity, based on the Barnes-Rivers operators, is presented. A systematic study of the tree-level unitarity of this theory is developed and its agreement with Newton's law is investigated by computing the corresponding nonrelativistic potential. We also study the bending of light caused by a static gravitational field generated by a localized material source in the context of quadratic gravity. Our calculation shows that for light rays passing close to the Sun the deflection  $\phi$  lies in the interval  $0 < \phi < 1.75''$ . A tree-level approach to the same issue tells us that the vacuum is a dispersive medium. Now  $\phi$  is energy-dependent and ranges from  $0^+$  to  $1.75^-$  arcsec. We also explore the beautiful idea that the gravitational deflection from the visible spectrum can give rise to a gravity's rainbow.

**Key Words:** Higher-Derivative Gravity, Tree-Level, Unitarity, Gravity's Rainbow.

## Agradecimentos

- Primeiramente à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo auxílio financeiro sem o qual seria impossível a realização deste trabalho.
- Ao orientador e amigo Prof. Dr. Antonio José Accioly pelo esforço, paciência e dedicação dispensados durante todo o período que estivemos trabalhando para a realização desta tese.
- Ao Prof. Dr. Silvestre Ragusa pelas discussões sugestivas a cerca de certos pontos da tese.
- À Dra. Hatsumi Mukai pela colaboração nos artigos que publicamos durante o período da tese e também pela ajuda com os detalhes finais de redação e impressão da tese.
- Ao Sr. Abel Dionísio Azeredo pela contribuição nos artigos publicados e pelo auxílio com as figuras em “Latex”.
- Ao pessoal do pólo computacional do Instituto de Física Teórica pela disponibilidade e atenção com que nos ajudaram na resolução dos problemas concernentes à sua área.
- À equipe da secretaria de pós graduação do IFT pela constante disponibilidade em solucionar as questões relativas a seu âmbito de atuação.
- À equipe da biblioteca e aos demais funcionários do Instituto de Física Teórica.

# Índice

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introdução</b>   | <b>7</b>  |
| <b>1 Um Algoritmo para o Cálculo do Propagador do Gráviton em Teorias de Gravitação de Ordem Superior</b>         | <b>12</b> |
| 1.1 <i>Introdução</i>   | 12        |
| 1.2 <i>O Algoritmo</i>  | 14        |
| 1.3 <i>O Propagador Para a Teoria Quadrática de Gravitação</i>  | 18        |
| 1.4 <i>O Propagador no Gauge de “Einstein”</i>  | 22        |
| 1.5 <i>O Propagador para uma Teoria de Gravitação de Ordem Superior Não Invariante de Gauge</i>                   | 23        |
| 1.6 <i>Sumário</i>  | 24        |
| <b>2 O Potencial Efetivo Não Relativístico</b>  | <b>26</b> |
| 2.1 <i>Introdução</i>   | 26        |
| 2.2 <i>Potencial Não Relativístico para a Teoria Quadrática</i>   | 28        |
| 2.3 <i>Potencial Não Relativístico para a Teoria de Gravitação de Fierz-Pauli com Derivadas de Ordem Superior</i> | 29        |
| 2.4 <i>A Constante Efetiva da Teoria de Gravitação de Fierz-Pauli</i>   | 31        |
| 2.5 <i>Sumário</i>  | 31        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>3</b> | <b>Um Estudo Sistemático da Unitariedade a Nivel de Árvore</b>  | <b>32</b> |
| 3.1      | <i>O Método</i> . . . . .   | 32        |
| 3.2      | <i>Estudo da Unitariedade da Gravitação Quadrática a Nivel de Árvore</i> . . . . .  | 34        |
| 3.3      | <i>Unitariedade a Nivel de Árvore da Teoria de Gravitação de Fierz-Pauli com Derivadas de Ordem Superior</i> . . . . .      | 36        |
| 3.4      | <i>Sumário</i> . . . . .  | 39        |
| <b>4</b> | <b>Um Novo Gauge para a Teoria de Gravitação Linearizada de Ordem Superior</b>  | <b>40</b> |
| 4.1      | <i>Introdução</i> . . . . .   | 40        |
| 4.2      | <i>A Aproximação Linear</i> . . . . .   | 41        |
| 4.3      | <i>Equações de Campo da Teoria Quadrática no Gauge de Teyssandier</i>   | 43        |
| 4.4      | <i>Solução Geral das Equações de Campo Linearizadas da Teoria Quadrática no Gauge de Teyssandier</i> . . . . .              | 45        |
| 4.5      | <i>Solução na Presença de uma Fonte Pontual Estática de Massa <math>M</math> Localizada na Origem</i> . . . . .             | 50        |
| 4.6      | <i>Sumário</i> . . . . .  | 51        |
| <b>5</b> | <b>Deflexão da Luz na teoria Gravitacional de Ordem Superior</b>  | <b>53</b> |
| 5.1      | <i>Introdução</i> . . . . .   | 53        |
| 5.2      | <i>Equações de Maxwell na Forma <math>\epsilon - \mu</math></i> . . . . .   | 54        |
| 5.3      | <i>Deflexão da Luz</i> . . . . .  | 56        |
| 5.4      | <i>Sumário</i> . . . . .  | 60        |
| <b>6</b> | <b>Espalhamento de Fótons por um Campo Gravitacional Externo no Contexto da Gravitação com Derivadas de Ordem Mais Alta</b> | <b>61</b> |

|     |   |           |
|-----|---|-----------|
| 6.1 | <i>Introdução</i> . . . . .   | 61        |
| 6.2 | <i>Espalhamento de Fótons</i> . . . . .                                       | 62        |
| 6.3 | <i>Arco-Íris de Gravitação no Contexto da Gravitação Quadrática</i> . . . . . | 65        |
| 6.4 | <i>Sumário</i> . . . . .  | 66        |
|     | <b>Epílogo</b>  | <b>68</b> |
|     | <b>A Transformações de Gauge na Gravitação</b>                                | <b>70</b> |
|     | <b>B Equações de Campo para a Teoria Quadrática</b>                           | <b>72</b> |
|     | <b>C Uma Identidade Tensorial Importante</b>                                  | <b>76</b> |
|     | <b>Referências</b>  | <b>78</b> |

# Introdução

A teoria de campo de Einstein explica muito bem todos os fenômenos gravitacionais macroscópicos. Ela é definida pela ação

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{2R}{\kappa^2} , \quad (0.1)$$

onde  $\kappa^2 = 32\pi G$ , sendo  $G$  a constante de Newton, é a constante de Einstein. Ignoramos a possibilidade de uma constante cosmológica que, fundado na experiência, deve ser necessariamente muito pequena.

No entanto, como uma teoria quântica, ela é menos satisfatória, uma vez que a gravitação pura possui uma matriz  $S$  que, apesar de ser finita a nível de *one-loop* [27], diverge na ordem de *two-loop* [28].

Nada mais natural, pois, que o teórico de campo quântico encare (0.1) como uma aproximação - a grande distância - de alguma ação que exiba melhor comportamento ultra-violeta e defina uma teoria quântica significativa. Na verdade, como é bem conhecido, (0.1) não é a ação mais geral permitida pelas simetrias (covariância geral) da teoria. A ação geral é dada por [26]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{2}{\kappa^2} R + \alpha' R^2 + \beta' R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \gamma' R_{\mu\nu} R^{\nu\rho} R_{\rho}{}^{\mu} + \dots \right] ,$$

onde  $\alpha', \beta', \gamma'$ , etc., são parâmetros apropriados. A assim chamada teoria de gravitação com derivadas de ordem mais alta, por sua vez, é definida pela

ação

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right], \quad (0.2)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros de acoplamento adimensionais. Deser e van Nieuwenhuizen [29] argumentaram que tal teoria seria renormalizável mas conteria fantasmas devido aos propagadores  $k^{-4}$ . Antoniadis e Tomboulis [5] defendem o ponto de vista de que a presença do fantasma massivo de spin 2 no propagador nu da teoria quadrática é inconcludente, já que esta excitação é instável. Stelle [4] demonstrou rigorosamente a renormalizabilidade da ação (0.2). Na realidade, em quatro dimensões a teoria de gravitação de ordem superior é a única teoria de gravitação que sabe-se ser renormalizável assim como seus acoplamentos com a matéria [4]. Este fato, aliado ao resultado acima mencionado encontrado por Antoniadis e Tomboulis [5], nos levam a concluir que a teoria quadrática é ainda uma possibilidade viável, que merece ser investigada. Talvez seja melhor interpretar a ação (0.2) como uma ação que descreve uma teoria de gravitação efetiva a baixa energia, assim como o modelo sigma não linear descreve efetivamente a interação nucleon-pion a baixas energias, enquanto aguardamos o advento da teoria microscópica completa [30].

Neste trabalho vamos estudar de mais de perto esta intrigante e polêmica teoria de gravitação de ordem superior. Nosso enfoque será totalmente à la Feynman, ou seja não geométrico. Sempre que possível procuraremos levar em conta o seu provocativo moto “What I cannot create, I do not understand.”

Sem sombra de dúvida o propagador é um dos objetos mais importantes no contexto da teoria quântica de campos. Assim sendo começamos o nosso estudo calculando o propagador para uma teoria de ordem superior mais sim-

ples - a teoria de gravitação  $R + R^2$ . Esquecendo temporariamente o lema de Feynman acima mencionado, obtivemos o propagador para esta teoria usando a força bruta. Tais cálculos além de envolverem intermináveis passagens de álgebra Lorentziana sobre tensores simétricos de segunda ordem, fornecem um resultado onde as contribuições dos graus de liberdade massivos e não massivos do campo estão ininteligivelmente misturados, não havendo além disso nenhuma referência ao conteúdo de spin da teoria. Este resultado encontra-se na Ref. [15]. Após este frustrante começo resolvemos desenvolver um algoritmo que, por um lado, nos permitisse entender o que estávamos fazendo e, por outro, evitasse as tediosas passagens algébricas anteriormente citadas. Apresentamos este algoritmo no capítulo 1. Na esperança de encontrar uma teoria de ordem superior que fosse unitária a nível de árvore desenvolvemos uma nova teoria de ordem superior - a teoria de Fierz-Pauli com derivadas de ordem superior [7]. Esta teoria é analisada pari passu com a teoria quadrática nos capítulos 1,2 e 3.

No capítulo 2 analisamos o limite não relativístico das teorias quadrática [13] e de Fierz-Pauli com derivadas de ordem superior [7]. Ambas concordam assintoticamente com a teoria de Newton, e são finitas na origem.

Um estudo sistemático da unitariedade a nível de árvore para teorias de gravitação com derivadas de ordem superior é apresentado no capítulo 3 [7]. Lá se mostra que as duas teorias em discussão não são unitárias a nível de árvore. Com base nos argumentos apresentados anteriormente decidimos então nos dedicarmos unicamente ao estudo da teoria quadrática.

O próximo passo seria evidentemente verificar se a teoria quadrática, vista como uma teoria clássica, passaria nos testes sugeridos por Einstein para a relatividade geral. Como estamos trabalhando com a versão linearizada da teoria quadrática, concentramos nossa atenção na questão da deflexão

gravitacional da luz. Novamente esbarramos em grandes dificuldades, já que o gauge de de Donder, que é o gauge usualmente utilizado na relatividade geral, é completamente inadequado para tratar a teoria quadrática. Usamos então a teoria  $R + R^2$  como laboratório teórico e determinamos o desvio gravitacional da luz no gauge de de Donder [15]. Após esta aventura no reino das integrais que só existem como distribuições, resolvemos procurar um gauge que fosse apropriado para a teoria quadrática. Tal gauge foi descoberto por Teyssandier em 1989 [14]. No capítulo 4 apresentamos este gauge e demonstramos que no mesmo a solução geral da teoria linearizada é uma combinação linear de dois campos tensoriais simétricos de segunda ordem e de um campo escalar [13]. Usando este gauge determinamos a solução geral no caso particular de uma partícula pontual estática [13]. Tal solução é de primordial importância para os estudos subsequentes.

No capítulo 5 estudamos o problema do desvio gravitacional da luz. Mostramos, de duas maneiras diferentes, que raios luminosos que passam próximos ao sol sofrem um desvio  $\phi$  que jaz no intervalo  $0 < \phi < 1,75''$  [13]. Os dois enfoques utilizados não fazem parte do arsenal usado pelos profissionais da gravitação.

No capítulo 6 estudamos o espalhamento de fótons por um campo gravitacional estático, tratado como um campo externo, no contexto da gravitação com derivadas de ordem mais alta. Desta análise concluímos que o setor  $R^2$  da teoria em nada contribui para o espalhamento de fótons, enquanto que o setor  $R_{\mu\nu}^2$  produz propagação fotônica dispersiva (dependente da energia) [13]. Este resultado é bastante relevante, uma vez que até então não se conhecia nenhuma teoria de gravitação capaz de produzir de per si fóton-propagação dispersiva. Mostramos também que para fótons passando nas vizinhanças do sol  $\phi$  varia de  $0^+$  a  $1,75^-$  (segundos de arco) [24]. Por fim, dis-

cutimos neste capítulo a bela idéia da existência de um arco-íris de gravitação no contexto da gravitação quadrática [22]. Um sumário dos principais resultados é apresentado no epílogo.

Neste trabalho utilizamos o sistema natural de unidades ( $c = \hbar = 1$ ). Em nossa notação a assinatura é  $(+ - - -)$ . O tensor de curvatura é definido por  $R^\rho{}_{\lambda\mu\nu} = -\partial_\nu\Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} + \dots$ , e o tensor de Ricci por  $R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\nu\lambda}$ .

## Um Algoritmo para o Cálculo do Propagador do Gráviton em Teorias de Gravitação de Ordem Superior

### 1.1. Epílogo

1. Linearizamos a Lagrangiana correspondente à teoria original. Para isto decomponemos a métrica,  $g_{\mu\nu}$ , como se segue

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

onde  $\eta_{\mu\nu}$  é a métrica usual de Minkowski e  $\kappa$  a raiz quadrada da constante de Einstein, e substituímos (1.1) na Lagrangiana da teoria. Designaremos a Lagrangiana resultante por  $\mathcal{L}_g$ .

2. Se estivermos trabalhando com teorias invariantes de gauge, adicionamos um termo apropriado que quebre esta invariância, o qual denominaremos Lagrangiana fixadora de gauge e denotaremos por  $\mathcal{L}_{fg}$ .

3. No passo seguinte, tomamos a Lagrangiana resultante

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_{fg},$$

e a reescrevemos na forma bilinear,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \mathcal{O}_{\mu\nu,\rho\sigma} h^{\rho\sigma}.$$

4. O propagador é dado pelo inverso do operador  $\mathcal{O}$ .

O último passo do procedimento acima, isto é, a inversão do operador  $\mathcal{O}$ , envolve, em geral, bastante álgebra tensorial. Para contornar este problema, vamos apresentar um algoritmo para inverter este operador [1], baseado nos operadores de Barnes-Rivers [2-6]. Para demonstrar a utilidade do mesmo, calcularemos o propagador para a teoria quadrática adicionando um termo fixador de gauge não convencional à Lagrangiana da teoria. Do resultado geral obtido, recobramos o propagador para a teoria quadrática de gravitação, bem como para a teoria de Einstein, numa série de gauges de interesse.

Também iremos calcular o propagador relativo à uma teoria de gravitação com derivadas de ordem superior não invariante de gauge - a teoria de gravitação de Fierz-Pauli com derivadas de ordem superior [7].

## 1.2 O Algoritmo

De acordo com o que vimos acima, para encontrar o propagador da teoria gravitacional, devemos inverter o operador  $\mathcal{O}_{\mu\nu,\rho\sigma}$ . Este operador é simétrico nos índices  $(\mu\nu), (\rho\sigma)$  e na troca de  $\mu\nu$  por  $\rho\sigma$ . Barnes e Rivers mostraram que um conjunto completo de operadores que gera o espaço dos operadores com as simetrias acima, é dado no espaço dos momentos por [2-6]:

$$P_{\mu\nu,\rho\sigma}^1 = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\rho}\omega_{\nu\sigma} + \theta_{\mu\sigma}\omega_{\nu\rho} + \theta_{\nu\rho}\omega_{\mu\sigma} + \theta_{\nu\sigma}\omega_{\mu\rho}) \quad ,$$

$$P_{\mu\nu,\rho\sigma}^2 = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\rho}\theta_{\nu\sigma} + \theta_{\mu\sigma}\theta_{\nu\rho}) - \frac{1}{3}\theta_{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma} \quad ,$$

$$P_{\mu\nu,\rho\sigma}^0 = \frac{1}{3}\theta_{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma} \quad ,$$

$$\bar{P}_{\mu\nu,\rho\sigma}^0 = \omega_{\mu\nu}\omega_{\rho\sigma} \quad ,$$

$$\bar{\bar{P}}_{\mu\nu,\rho\sigma}^0 = \theta_{\mu\nu}\omega_{\rho\sigma} + \omega_{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma} \quad ,$$

onde  $\theta_{\mu\nu}$  e  $\omega_{\rho\sigma}$  são respectivamente os projetores das componentes transversal e longitudinal de um campo vetorial, isto é,

$$\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2 \quad , \quad \omega_{\mu\nu} = k_\mu k_\nu / k^2 \quad ,$$

onde  $k_\mu$  é o momento do gráviton trocado.  $\theta_{\mu\nu}$  e  $\omega_{\mu\nu}$  satisfazem às seguintes relações

$$\theta_{\mu\rho}\theta^\rho{}_\nu = \theta_{\mu\nu} \quad , \quad \omega_{\mu\rho}\omega^\rho{}_\nu = \omega_{\mu\nu} \quad , \quad \theta_{\mu\rho}\omega^\rho{}_\nu = 0.$$

O conjunto de operadores  $\{P^1, P^2, P^0, \bar{P}^0\}$  é um conjunto completo de operadores de projeção para tensores simétricos de segunda ordem. Eles são idempotentes, mutuamente ortogonais e satisfazem à seguinte relação de completudeza:

$$[P^1 + P^2 + P^0 + \bar{P}^0]_{\mu\nu, \rho\sigma} = \frac{1}{2}(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) \equiv I_{\mu\nu, \rho\sigma}.$$

Os operadores  $P^1, P^2, P^0$  e  $\bar{P}^0$  projetam respectivamente as componentes de spin 1, spin 2 e as duas componentes de spin 0 do campo, no referencial de repouso do campo tensorial massivo. O operador  $\bar{P}^0$ , por sua vez, nada mais é que a soma de dois operadores de transferência de spin zero, ou seja,  $\bar{P}^0_{\mu\nu, \rho\sigma} = [P^{\theta\omega} + P^{\omega\theta}]_{\mu\nu, \rho\sigma}$ , onde  $P^{\theta\omega}_{\mu\nu, \rho\sigma} \equiv \theta_{\mu\nu}\omega_{\rho\sigma}$ ,  $P^{\omega\theta}_{\mu\nu, \rho\sigma} \equiv \omega_{\mu\nu}\theta_{\rho\sigma}$ , e obedece a seguinte tabuada

$$\begin{aligned} \bar{P}^0 P^1 &= P^1 \bar{P}^0 = \bar{P}^0 P^2 = P^2 \bar{P}^0 = O \quad , \\ \bar{P}^0 \bar{P}^0 &= 3(P^0 + \bar{P}^0) \quad , \\ P^0 \bar{P}^0 &= \bar{P}^0 P^0 = P^{\theta\omega} \quad , \\ \bar{P}^0 \bar{P}^0 &= \bar{P}^0 P^0 = P^{\omega\theta} \quad , \end{aligned}$$

onde  $O$  é o operador nulo.

A expansão do operador  $\mathcal{O}$  na base  $\{P^1, P^2, P^0, \bar{P}^0, \bar{P}^0\}$  é trivialmente obtida usando-se as seguintes relações que são encontradas a partir das

definições dos operadores  $P^1, P^2, P^0, \bar{P}^0, \bar{\bar{P}}^0$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} (\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) &= [P^1 + P^2 + P^0 + \bar{P}^0]_{\mu\nu,\rho\sigma} , \\ \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} &= [3P^0 + \bar{P}^0 + \bar{\bar{P}}^0]_{\mu\nu,\rho\sigma} , \\ \eta_{\mu\rho}k_\nu k_\sigma + \eta_{\mu\sigma}k_\nu k_\rho + \eta_{\nu\rho}k_\mu k_\sigma + \eta_{\nu\sigma}k_\mu k_\rho &= k^2 [2P^1 + 4\bar{P}^0]_{\mu\nu,\rho\sigma} , \\ \eta_{\mu\nu}k_\rho k_\sigma + \eta_{\rho\sigma}k_\mu k_\nu &= k^2 [\bar{\bar{P}}^0 + 2\bar{P}^0]_{\mu\nu,\rho\sigma} , \\ k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma &= k^4 \bar{\bar{P}}^0_{\mu\nu,\rho\sigma} . \end{aligned} \right\} (1.2)$$

As identidades

$$\left. \begin{aligned} P^2_{\mu\nu,\rho\sigma} &= \frac{1}{2} [\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}] - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - [P^1 + \frac{2}{3}\bar{P}^0 - \frac{1}{3}\bar{\bar{P}}^0]_{\mu\nu,\rho\sigma} , \\ P^0_{\mu\nu,\rho\sigma} &= \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - \frac{1}{3} [\bar{P}^0 + \bar{\bar{P}}^0]_{\mu\nu,\rho\sigma} , \end{aligned} \right\} (1.3)$$

por sua vez, facilitam grandemente a tarefa de escrever o propagador numa forma onde os termos proporcionais ao momento do gráviton estão ausentes, o que na prática simplifica bastante os cálculos que envolvem correntes conservadas.

Agora estamos prontos para encontrar o propagador. Expandindo o operador  $\mathcal{O}$  na base  $\{P^1, P^2, P^0, \bar{P}^0, \bar{\bar{P}}^0\}$  com a ajuda das identidades (1.2), obtemos

$$\mathcal{O} = x_1 P^1 + x_2 P^2 + x_0 P^0 + \bar{x}_0 \bar{P}^0 + \bar{\bar{x}}_0 \bar{\bar{P}}^0 .$$

Suponhamos então que  $\mathcal{O}^{-1} = y_1 P^1 + y_2 P^2 + y_0 P^0 + \bar{y}_0 \bar{P}^0 + \bar{\bar{y}}_0 \bar{\bar{P}}^0$ , onde  $y_1, y_2, y_0, \bar{y}_0$  e  $\bar{\bar{y}}_0$  são parâmetros a serem determinados. Porém,  $\mathcal{O}\mathcal{O}^{-1} = I$ ,

o que nos leva ao seguinte sistema de equações algébricas

$$\left. \begin{aligned} x_1 y_1 &= 1 \\ \bar{x}_0 \bar{y}_0 + 3\bar{x}_0 \bar{y}_0 &= 1 \\ x_2 y_2 &= 1 \\ \bar{x}_0 y_0 + \bar{x}_0 \bar{y}_0 &= 0 \\ x_0 y_0 + 3\bar{x}_0 \bar{y}_0 &= 1 \\ \bar{x}_0 \bar{y}_0 + x_0 \bar{y}_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Antes de prosseguirmos precisamos de um lema.

**Lema.** Se  $x_1 \neq 0$ ,  $x_2 \neq 0$ ,  $x_0 \bar{x}_0 - 3\bar{x}_0^2 \neq 0$ , então (1.4) tem uma e somente uma solução.

*Prova.* Reduzindo por linhas a matriz aumentada do sistema (1.4) à forma escalonada, resulta

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x_0 & 0 & 3\bar{x}_0 & 1 \\ 0 & 0 & \bar{x}_0 & 0 & \bar{x}_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{x}_0 & 3\bar{x}_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{x}_0 & x_0 & 0 \end{bmatrix} \\ & \sim \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x_0 & 0 & 3\bar{x}_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{x}_0 & 3\bar{x}_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (x_0 \bar{x}_0 - 3\bar{x}_0^2) & -\bar{x}_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \diamond \end{aligned}$$

Conseqüentemente o propagador é dado por

$$\mathcal{O}^{-1} = \frac{1}{x_1} P^1 + \frac{1}{x_2} P^2 + \frac{1}{x_0 \bar{x}_0 - 3\bar{x}_0^2} [\bar{x}_0 P^0 + x_0 \bar{P}^0 - \bar{x}_0 \bar{\bar{P}}^0] \quad (1.5)$$

Em resumo, o algoritmo para o cálculo do propagador consiste dos seguintes passos.

1. Linearize a Lagrangiana original usando (1.1).

2. Adicione ao resultado precedente uma Lagrangiana fixadora de gauge apropriada. Evidentemente este procedimento só é utilizado no caso de teorias invariantes de gauge.
3. Escreva a Lagrangiana resultante na forma bilinear  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\mathcal{O}_{\mu\nu,\rho\sigma}h^{\rho\sigma}$ .
4. Encontre os coeficientes  $x_1, x_2, \dots, \bar{x}_0$ , expandindo o operador  $\mathcal{O}$  na base  $\{P^1, P^2, P^0, \bar{P}^0, \bar{P}^0\}$  com a ajuda das identidades (1.2).
5. Insira esses coeficientes em (1.5).

### 1.3 O Propagador Para a Teoria Quadrática de Gravitação

A Lagrangiana para a teoria quadrática de gravitação é dada por

$$\bar{\mathcal{L}} = \sqrt{-g} \left[ \frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2}R^2 + \frac{\beta}{2}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \right], \quad (1.6)$$

onde  $\kappa^2 = 32\pi G$ , sendo  $G$  a constante gravitacional Newtoniana, e  $\alpha$  e  $\beta$  dois parâmetros adimensionais. Linearizando (1.6), obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g &= \frac{b}{4} \left[ \square h_{\mu\nu} \square h^{\mu\nu} - (A^\mu{}_{,\mu})^2 - F_{\mu\nu}^2 + (1 + 4c)(A^\mu{}_{,\mu} - \square\phi)^2 \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ h_{\mu\nu} \square h^{\mu\nu} + A_\nu^2 + (A_\nu - \partial_\nu\phi)^2 \right], \end{aligned} \quad (1.7)$$

onde  $A_\mu \equiv h_{\mu\nu}{}^{,\nu}$ ,  $\phi \equiv h$ ,  $F_{\mu\nu} \equiv A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$ ,  $b \equiv \beta\kappa^2/2$  e  $c \equiv \alpha/\beta$ .

A Lagrangiana (1.7) é invariante em relação à transformação infinitesimal de coordenadas

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \kappa\Lambda^\mu(x),$$

onde  $\Lambda^\mu(x)$  é um campo vetorial infinitesimal. Ele deve ser infinitesimal para evitar que haja inconsistência com (1.1). Como consequência, (1.7) é invariante em relação à seguinte transformação do campo  $h_{\mu\nu}$

$$h_{\mu\nu}(x) \rightarrow h_{\mu\nu}(x) - \Lambda_{\mu,\nu}(x) - \Lambda_{\nu,\mu}(x).$$

A transformação acima é uma transformação de gauge local da Lagrangiana (Apêndice A). Assim sendo, devemos adicionar um termo fixador de gauge a (1.7). Usualmente, escolhe-se uma combinação linear de  $A_\mu$  e  $\partial_\mu\phi$  como função de gauge. Porém, examinando-se (1.7) percebemos a presença não só desta combinação linear mas também de seu rotacional ( $F_{\mu\nu}$ ) e de sua divergência ( $A^\mu{}_{,\mu} - \square\phi$ ), o que sugere que escolhamos a seguinte Lagrangiana fixadora de gauge

$$\mathcal{L}_{fg} = \lambda_1(A_\nu - \lambda\phi_{,\nu})^2 + \frac{b}{4} [\lambda_2(A^\mu{}_{,\mu} - \lambda\square\phi)^2 + \lambda_3 F_{\mu\nu}^2].$$

Colocando a Lagrangiana resultante

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_{fg},$$

na forma bilinear

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \mathcal{O}_{\mu\nu,\rho\sigma} h^{\rho\sigma},$$

e expandindo o operador  $\mathcal{O}$  na base  $\{P^1, P^2, P^0, \bar{P}^0, \bar{\bar{P}}^0\}$  com a ajuda de (1.2), obtemos

$$\mathcal{O} = x_1 P^1 + x_2 P^2 + x_0 P^0 + \bar{x}_0 \bar{P}^0 + \bar{\bar{x}}_0 \bar{\bar{P}}^0,$$

onde

$$\begin{aligned} x_1 &= b/2(\lambda_3 k^4 + 2\lambda_1 k^2/b) \quad , \\ x_2 &= b/2(k^4 + 2k^2/b) \quad , \\ x_0 &= b/2(4k^4 - 4k^2/b + 12k^4 c + 3\lambda_2 \lambda^2 k^4 + 12\lambda_1 \lambda^2 k^2/b) \quad , \\ \bar{x}_0 &= b/2(\lambda_2 k^4 - 2\lambda\lambda_2 k^4 - 8\lambda\lambda_1 k^2/b + \lambda_2 \lambda^2 k^4 + 4\lambda_1 \lambda^2 k^2/b + 4\lambda_1 k^2/b) \quad , \\ \bar{\bar{x}}_0 &= b/2(-\lambda\lambda_2 k^4 - 4\lambda\lambda_1 k^2/b + \lambda_2 \lambda^2 k^4 + 4\lambda_1 \lambda^2 k^2/b) \quad . \end{aligned}$$

O propagador no espaço dos momentos é dado por (1.5). A partir deste resultado, podemos obter o propagador para a teoria quadrática de gravitação bem como para a teoria de gravitação de Einstein, numa série de gauges interessantes e que são amplamente usados na literatura, escolhendo adequadamente os parâmetros  $\lambda$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ . Damos abaixo uma lista dos gauges mais importantes que resultam de tais escolhas:

1. Gauge de *Julve-Tonin* ( $\lambda = 0$ ) [9]

$$\mathcal{L}_{fg} = \lambda_1 A_\nu^2 + \frac{b}{4} [\lambda_2 (A_\mu{}^{,\mu})^2 + \lambda_3 F_{\mu\nu}^2] .$$

Propagador:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{-1} &= \frac{m_1^2}{k^2(m_1^2\lambda_1 - k^2\lambda_3)} P^1 + \frac{m_1^2}{k^2(m_1^2 - k^2)} P^2 \\ &+ \frac{m_0^2}{2k^2(k^2 - m_0^2)} P^0 + \frac{m_1^2}{k^2(2m_1^2\lambda_1 - k^2\lambda_2)} \bar{P}^0 , \end{aligned} \quad (1.8)$$

onde

$$m_0^2 = \frac{2}{\kappa^2(3\alpha + \beta)} , \quad m_1^2 = -\frac{4}{\kappa^2\beta} .$$

Para que a teoria não contenha táquions,  $m_0$  e  $m_1$  devem ser reais, o que implica em  $(3\alpha + \beta) > 0$  e  $\beta < 0$ . Note que a escolha  $\lambda = 0$  resulta em um propagador que contém apenas os projetores de spin, isto é,  $P^1$ ,  $P^2$ ,  $P^0$  e  $\bar{P}^0$ , e neste caso todos os termos exibem um comportamento  $k^{-4}$ .

Na gravitação de Einstein, a função de gauge é dada por

$$\mathcal{L}_{fg} = \lambda_1 A_\nu^2 ,$$

e o propagador por

$$\mathcal{O}^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 k^2} P^1 + \frac{1}{k^2} P^2 - \frac{1}{2k^2} P^0 + \frac{1}{2\lambda_1 k^2} \bar{P}^0 .$$

2. Gauge de *de Donder* ( $\lambda_2 = \lambda_3 = 0, \lambda = \frac{1}{2}$ )

$$\mathcal{L}_{fg} = \lambda_1 \left( A_\nu - \frac{1}{2} \partial_\nu \phi \right)^2 .$$

Propagador:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{-1} &= \frac{1}{\lambda_1 k^2} P^1 + \frac{m_1^2}{k^2(m_1^2 - k^2)} P^2 + \frac{m_0^2}{2k^2(k^2 - m_0^2)} P^0 \\ &+ \left[ \frac{2}{\lambda_1 k^2} + \frac{3m_0^2}{2k^2(k^2 - m_0^2)} \right] \bar{P}^0 + \frac{m_0^2}{2k^2(k^2 - m_0^2)} \bar{\bar{P}}^0 . \end{aligned}$$

Na gravitação de Einstein, o propagador no gauge de *de Donder* se expressa como

$$\mathcal{O}^{-1} = \frac{1}{\lambda_1 k^2} P^1 + \frac{1}{k^2} P^2 - \frac{1}{2k^2} P^0 + \left( \frac{2}{\lambda_1 k^2} - \frac{3}{2k^2} \right) \bar{P}^0 - \frac{1}{2k^2} \bar{\bar{P}}^0 .$$

3. Gauge de *Feynman* ( $\lambda_2 = \lambda_3 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda = \frac{1}{2}$ )

$$\mathcal{L}_{fg} = \left( A_\nu - \frac{1}{2} \partial_\nu \phi \right)^2 .$$

Propagador:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{-1} &= \frac{1}{k^2} P^1 + \frac{m_1^2}{k^2(m_1^2 - k^2)} P^2 + \frac{m_0^2}{2k^2(k^2 - m_0^2)} P^0 \\ &+ \left[ \frac{2}{k^2} + \frac{3m_0^2}{2k^2(k^2 - m_0^2)} \right] \bar{P}^0 + \frac{m_0^2}{2k^2(k^2 - m_0^2)} \bar{\bar{P}}^0 . \end{aligned}$$

Para a gravitação de Einstein, o propagador no gauge de Feynman é dado por

$$\mathcal{O}_{\mu\nu,\rho\sigma}^{-1} = \frac{\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}}{2k^2} .$$

## 1.4 O Propagador no Gauge de “Einstein”

Para se resolver as equações de Einstein na forma linearizada, se utiliza as coordenadas harmônicas ou, equivalentemente, o gauge de de Donder. Este procedimento deu origem à opinião generalizada de que o gauge de de Donder constitui algo mais fundamental do que uma simples escolha entre várias possibilidades matemáticas, sendo inclusive atribuído a este um significado físico [11]. Este ponto de vista tradicional é posto em questão no trabalho de Hitzer e Dehnen [8], no qual é discutido um novo método para integrar as equações de Einstein na forma linearizada. Este método consiste na escolha de um novo gauge, denominado gauge de “Einstein”, em virtude de ter sido utilizado por Albert Einstein em 1916 para dar a sua teoria de gravitação uma forma mais concisa e elegante. Na referência acima citada, Hitzer e Dehnen mostram que no gauge de “Einstein” a integração das equações linearizadas da gravitação é feita de uma maneira natural e direta, contestando assim o caráter fundamental do gauge de de Donder. Além disso, a conexão com o limite Newtoniano fica perfeitamente clara quando se usa este novo gauge, o que nos obriga a rever os argumentos acerca da natureza fundamental do gauge de de Donder. O gauge de de Donder é realizado fazendo-se  $\gamma_{\mu\nu}{}^{,\nu} = 0$ , onde  $\gamma_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$ , na teoria linearizada de gravitação, enquanto que o gauge de “Einstein” é definido por  $h = 0$ . A seguir, vamos obter o propagador da teoria quadrática e da teoria de Einstein neste novo gauge - o gauge de “Einstein”.

Para tal escolhemos a seguinte função de gauge:

$$\mathcal{L}_{fg} = \frac{\lambda\phi^2}{\kappa^2} ,$$

onde  $\lambda$  é o parâmetro de gauge. Adicionamos então este termo a (1.7) e

escrevemos a Lagrangiana resultante na forma bilinear  $\mathcal{L} = \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\mathcal{O}_{\mu\nu,\rho\sigma}h^{\rho\sigma}$ .

Expandindo o operador  $\mathcal{O}$  na base  $\{P^1, P^2, P^0, \bar{P}^0, \bar{\bar{P}}^0\}$ , obtemos

$$\mathcal{O} = \frac{b}{2} \left( k^4 + \frac{2k^2}{b} \right) P^2 + \frac{b}{2} \left( 4k^4 - \frac{4k^2}{b} + 12k^4c + \frac{12\lambda}{bk^2} \right) P^0 + \frac{2\lambda}{\kappa^2} \bar{P}^0 + \frac{2\lambda}{\kappa^2} \bar{\bar{P}}^0.$$

Como consequência, o propagador no espaço dos momentos é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^{-1} &= \frac{m_1^2}{k^2(m_1^2 - k^2)} P^2 + \frac{m_0^2}{2k^2(k^2 - m_0^2)} P^0 \\ &+ \left[ \frac{\kappa^2}{2\lambda} + \frac{3m_0^2}{2k^2(k^2 - m_0^2)} \right] \bar{P}^0 - \frac{m_0^2}{2k^2(k^2 - m_0^2)} \bar{\bar{P}}^0. \end{aligned}$$

Vamos supor que  $m_0$  e  $m_1$  sejam reais, o que corresponde à ausência de táquions ( tanto de energia positiva quanto negativa ) no campo dinâmico.

Assim, quando  $m_0^2$  e  $m_1^2 \rightarrow \infty$  o propagador se reduz a

$$\mathcal{O}^{-1} = \frac{1}{k^2} P^2 - \frac{1}{2k^2} P^0 + \left[ \frac{\kappa^2}{2\lambda} - \frac{3}{2k^2} \right] \bar{P}^0 + \frac{1}{2k^2} \bar{\bar{P}}^0,$$

que é o propagador para a gravitação de Einstein no gauge de “Einstein”.

## 1.5 *O Propagador para uma Teoria de Gravitação de Ordem Superior Não Invariante de Gauge*

Consideremos agora, a teoria de gravitação de Fierz-Pauli com derivadas de ordem superior [7]. Para construir a Lagrangiana desta teoria adicionamos a parte linear da Lagrangiana que contém os termos com as derivadas quárticas,  $\sqrt{-g}\frac{\alpha}{2}R^2$  e  $\sqrt{-g}\frac{\beta}{2}R_{\mu\nu}^2$ , isto é,

$$\mathcal{L}_{hd} = \frac{b}{4} \left[ \square h_{\mu\nu} \square h^{\mu\nu} - (A^\mu{}_{,\mu})^2 - F_{\mu\nu}^2 + (1 + 4c)(A^\mu{}_{,\mu} - \square\phi)^2 \right],$$

onde  $b \equiv \beta\bar{\kappa}^2$ ,  $c \equiv \frac{\alpha}{\beta}$ ,  $\bar{\kappa}^2$  sendo a “constante de Einstein” para a teoria de Fierz-Pauli [10], à Lagrangiana de Fierz-Pauli, ou seja,

$$\mathcal{L}_{F.P} = -\frac{1}{2} \left[ h_{\mu\nu} \square h^{\mu\nu} + A_\nu^2 + (A_\nu - \partial_\nu\phi)^2 \right] - \frac{1}{2} m^2 (h_{\mu\nu}^2 - \phi^2).$$

No espaço dos momentos a Lagrangiana resultante pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \left[ \left( \frac{b}{2} k^4 + k^2 - m^2 \right) P^2 - m^2 P^1 + \left( 2bk^4 - 2k^2 + 6bck^4 + 2m^2 \right) P^0 + m^2 \bar{P}^0 \right]_{\mu\nu, \rho\sigma} h^{\rho\sigma} . \quad (1.9)$$

Devido à presença do termo massivo, a teoria obtida não é invariante de gauge. Portanto, não é necessário adicionar uma função de gauge a (1.9) para se obter o propagador. Tudo o que temos a fazer neste caso é inverter o operador

$$\mathcal{O} = \left( \frac{b}{2} k^4 + k^2 - m^2 \right) P^2 - m^2 P^1 + \left( 2bk^4 - 2k^2 + 6bck^4 + 2m^2 \right) P^0 + m^2 \bar{P}^0 .$$

Usando (1.5), obtemos

$$\mathcal{O}^{-1} = \frac{1}{\frac{b}{2} k^4 + k^2 - m^2} P^2 - \frac{1}{m^2} P^1 - \frac{2bk^4 + 6bck^4 - 2k^2 + 2m^2}{3m^4} \bar{P}^0 + \frac{1}{3m^2} \bar{P}^0 . \quad (1.10)$$

Fazendo  $b = c = 0$  em (1.10) recobramos o propagador da teoria gravitacional de Fierz-Pauli [12], isto é,

$$\mathcal{O}^{-1} = \frac{\frac{1}{2}(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}}{k^2 - m^2} ,$$

onde foram omitidos os termos proporcionais ao momento do gráviton.

## 1.6 Sumário

Neste capítulo apresentamos uma prescrição [1] para calcular o propagador concernente às teorias de gravitação com derivadas de ordem superior baseada nos operadores de Barnes-Rivers. Utilizando este algoritmo computamos o

propagador para a teoria quadrática num gauge não convencional, e por uma escolha judiciosa dos parâmetros de gauge, reobtivemos o propagador numa série de gauges interessantes que são amplamente usados na literatura. Calculamos também o propagador tanto para a teoria quadrática quanto para a de Einstein num gauge bastante curioso que Hitzer e Dehnen [8] batizaram de gauge de “Einstein”. Finalmente, utilizamos a prescrição proposta para obter o propagador para a teoria de Fierz-Pauli com derivadas de ordem superior [7]. Esta teoria é um exemplo de teoria de gravitação com derivadas de ordem mais alta que não é invariante de gauge. No próximo capítulo analisaremos o limite não relativístico tanto da gravitação quadrática quanto da teoria de gravitação de Fierz-Pauli com derivadas de ordem superior.

## Capítulo 2

# O Potencial Efetivo Não Relativístico

Neste capítulo apresentamos o cálculo do potencial efetivo não relativístico tanto para a teoria de gravitação de ordem superior [13] quanto para a teoria de gravitação de Fierz-Pauli com derivadas de ordem superior[7].

### 2.1 *Introdução*

Em princípio toda teoria relativística de gravitação deveria concordar com a teoria de Newton no caso limite de movimentos a baixas velocidades em campos gravitacionais fracos. Conseqüentemente é importante verificar se as teorias de gravitação de ordem mais alta levam a lei não relativística correta para a interação gravitacional. Para tal, calculamos o potencial efetivo não relativístico concernente à interação de dois bosons massivos idênticos e de spin zero via a troca de um gráviton. A expressão que fornece o potencial é

$$U(r) = \frac{1}{4m^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \mathcal{M}_{N.R.} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} , \quad (2.1)$$

onde  $\mathcal{M}_{N.R.}$  é o limite não relativístico da amplitude de Feynman para o

processo  $S + S \rightarrow S + S$ , onde  $S$  denota um bóson de spin 0 e massa  $m$ . O diagrama de Feynman correspondente é mostrado na Fig.1.

A Lagrangiana que descreve a interação entre o campo gravitacional e um campo escalar massivo  $\phi$  é dada por

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\kappa h^{\mu\nu}}{2} \left[ \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \left( \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - m^2 \phi^2 \right) \right] .$$

A partir da expressão anterior a regra de Feynman para o vértice elementar pode ser prontamente obtida (vide Fig.2).

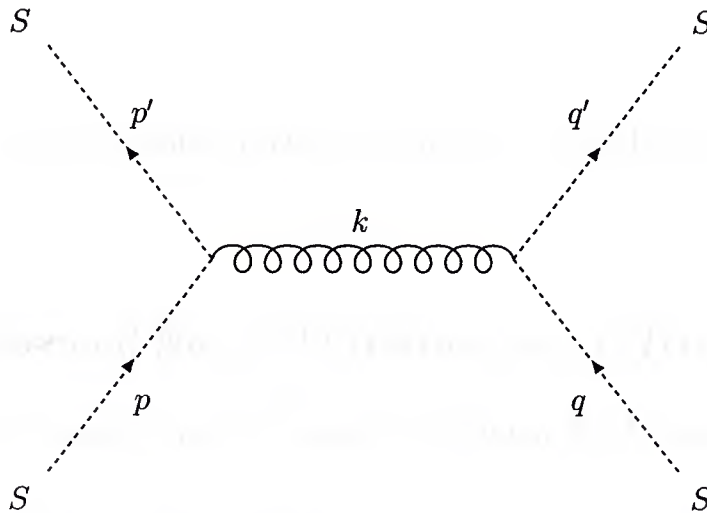


Fig. 1 – Contribuição para o espalhamento de duas partículas massivas idênticas e de spin zero via a troca de um gráviton.  $S$  representa uma partícula escalar de massa  $m$ .

A amplitude de espalhamento para o processo em questão é dada por

$$\mathcal{M} = V_{\mu\nu}(p, -p') \mathcal{O}^{\mu\nu, \rho\sigma}(k) V_{\rho\sigma}(q, -q') ,$$

onde  $\mathcal{O}^{\mu\nu, \rho\sigma}(k)$  é o propagador do gráviton. Levando este resultado em (2.1) e efetuando a integral correspondente, obtemos o potencial não relativístico.

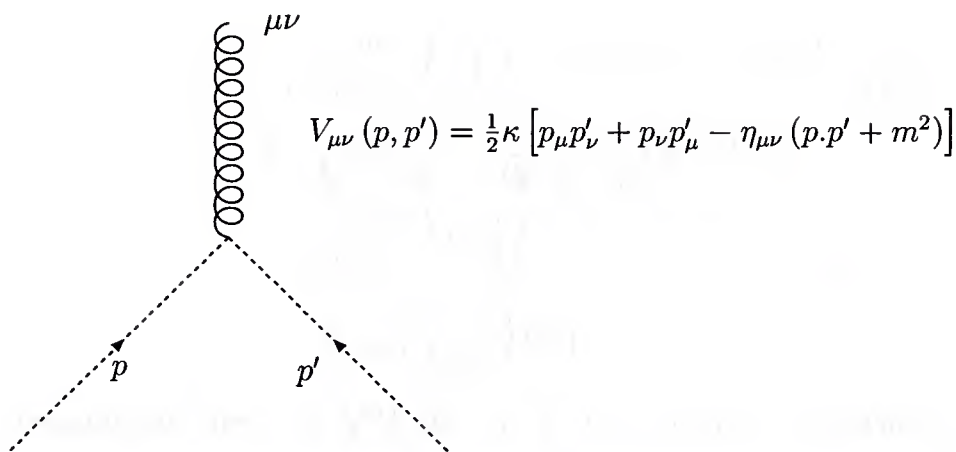


Fig. 2 –A regra de Feynman relevante para a interação bóson-bóson.

## 2.2 Potencial Não Relativístico para a Teoria Quadrática

A amplitude invariante para o processo mostrado na Fig.1 é dada neste caso por

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \frac{m_1^2}{k^2(m_1^2 - k^2)} \frac{\kappa^2}{2} [(p \cdot q)(p' \cdot q') + (p \cdot q')(p' \cdot q) + (p \cdot p')(m^2 - q \cdot q') \\ & + (q \cdot q')(m^2 - p \cdot p') + 2(m^2 - p \cdot p')(m^2 - q \cdot q') - \frac{2}{3}(2m^2 - p \cdot p') \\ & \times (2m^2 - q \cdot q')] + \frac{m_0^2}{k^2(k^2 - m_0^2)} \frac{\kappa^2}{6} (2m^2 - p \cdot p')(2m^2 - q \cdot q') . \end{aligned}$$

No limite não relativístico essa expressão se reduz a

$$\mathcal{M}_{N.R.} = -\frac{2}{3} \frac{\kappa^2 m^4 m_1^2}{k^2 (k^2 + m_1^2)} + \frac{\kappa^2 m^4 m_0^2}{6k^2 (k^2 + m_0^2)} . \quad (2.2)$$

Substituindo (2.2) em (2.1) obtemos

$$\begin{aligned}
U(r) &= \frac{\kappa^2 m^2}{6(2\pi)^2} \int_0^\infty \left( \int_0^\pi e^{-i|\mathbf{k}|r\cos\theta} \sin\theta \, d\theta \right) \left[ -\frac{3}{4} \frac{1}{\mathbf{k}^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_1^2} - \frac{1}{4(\mathbf{k}^2 + m_0^2)} \right] \mathbf{k}^2 \, d|\mathbf{k}| \\
&= \frac{\kappa^2 m^2}{6(2\pi)^2} \frac{1}{r} \text{Im} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} \left( -\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2 + m_1^2 r^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{4} \frac{x}{x^2 + m_0^2 r^2} \right) dx \right]. \tag{2.3}
\end{aligned}$$

Integrais do tipo  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx$  ( $a \neq 0$ ) existem se e somente se  $a > 0$ . Neste caso elas podem ser facilmente calculadas pelo método dos resíduos. Portanto, admitindo que  $3\alpha + \beta > 0$  e  $-\beta < 0$ , o que corresponde à ausência de táquions no campo dinâmico, obtemos prontamente de (2.3)

$$U(r) = Gm^2 \left[ -\frac{1}{r} + \frac{4}{3} \frac{e^{-m_1 r}}{r} - \frac{1}{3} \frac{e^{-m_0 r}}{r} \right].$$

Segue-se que o potencial para a gravitação quadrática é dado pela expressão [13]

$$V(r) = Gm \left[ -\frac{1}{r} + \frac{4}{3} \frac{e^{-m_1 r}}{r} - \frac{1}{3} \frac{e^{-m_0 r}}{r} \right]. \tag{2.4}$$

Este potencial concorda assintoticamente com a lei de Newton. Na origem ele tende ao valor finito  $Gm \left( \frac{m_0 - 4m_1}{3} \right)$ .

### 2.3 *Potencial Não Relativístico para a Teoria de Gravitação de Fierz-Pauli com Derivadas de Ordem Superior*

Neste caso a amplitude invariante é dada por

$$\mathcal{M} = -2m_1^2 \left[ \frac{1}{(k^2 - M_1^2)(k^2 - M_2^2)} \right] \frac{\bar{\kappa}^2}{2} [(p \cdot q)(p' \cdot q') + (p \cdot q')(p' \cdot q)]$$

$$\begin{aligned}
& + (p \cdot p')(M^2 - q \cdot q') + (q \cdot q')(M^2 - p \cdot p') + 2(M^2 - p \cdot p')(M^2 - q \cdot q') \\
& - \frac{2}{3}(2M^2 - p \cdot p')(2M^2 - q \cdot q') \Big] ,
\end{aligned}$$

onde  $M_1^2 = m_1^2 + \sqrt{m_1^4 - 2m_1^2 m^2}$ ,  $M_2^2 = m_1^2 - \sqrt{m_1^4 - 2m_1^2 m^2}$ ,  $m_1^2 \equiv -\frac{1}{b} = -\frac{2}{\beta \bar{\kappa}^2}$ , e  $M$  denota a massa do bóson.

No limite não relativístico esta expressão se reduz a

$$\mathcal{M}_{N.R.} = -\frac{4}{3}\bar{\kappa}^2 M^4 \frac{m_1^2}{(\mathbf{k}^2 + M_1^2)(\mathbf{k}^2 + M_2^2)} .$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
U(r) &= \frac{\bar{\kappa}^2 M^2}{6(2\pi)^2} \frac{1}{\sqrt{1 - 2m^2/m_1^2}} \frac{1}{r} \\
&\times \text{Im} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} \left( \frac{x}{x^2 + M_1^2 r^2} - \frac{x}{x^2 + M_2^2 r^2} \right) dx \right] . \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Supondo que  $\beta < 0$ , e  $m_1^2 > 2m^2$ , o que corresponde à ausência de táquions no campo dinâmico, podemos efetuar as integrais acima. O potencial efetivo é dado então por

$$U(r) = \frac{4}{3} M^2 \bar{G} \frac{1}{\sqrt{1 - 2m^2/m_1^2}} \left[ \frac{e^{-M_1 r}}{r} - \frac{e^{-M_2 r}}{r} \right] , \quad (2.6)$$

e o “potencial generalizado de Fierz-Pauli” por [7]

$$V(r) = \frac{4}{3} M \bar{G} \frac{1}{\sqrt{1 - 2m^2/m_1^2}} \left[ \frac{e^{-M_1 r}}{r} - \frac{e^{-M_2 r}}{r} \right] . \quad (2.7)$$

Este potencial concorda assintoticamente com o potencial Newtoniano e tende ao valor finito  $\frac{4}{3} M \bar{G} (M_2 - M_1) / \sqrt{1 - 2m^2/m_1^2}$  na origem.

## 2.4 A Constante Efetiva da Teoria de Gravitação de Fierz-Pauli

Quando  $m_1^2 \rightarrow \infty$  o “potencial generalizado de Fierz-Pauli” (2.7) se reduz ao potencial de Fierz-Pauli, ou seja,

$$V_{F.P.}(r) = -\frac{4}{3}M\bar{G}\frac{e^{-mr}}{r} .$$

Comparando este resultado, no limite em que a massa  $m$  do gráviton associado à teoria de Fierz-Pauli é extremamente pequena, com o potencial Newtoniano  $V_N(r) = -MG/r$ , concluímos que  $\bar{G} = \frac{3}{4}G$ . Portanto,  $\bar{g}^2/g^2 = \bar{G}/G = 3/4$ , onde  $\bar{g}$  é a constante de acoplamento efetiva da teoria de gravitação de Fierz-Pauli [7].

## 2.5 Sumário

Obtivemos neste capítulo os potenciais efetivos não relativísticos relacionados às teorias de gravitação quadrática e de Fierz-Pauli com derivadas de ordem superior. Uma característica interessante desses resultados, é que eles provêm de integrais cuja existência implica em ausência de táquions (tanto de energia positiva quanto negativa) no campo dinâmico. Mostramos também que a razão entre as constantes de acoplamento efetivas relativas às teorias de Fierz-Pauli ( $\bar{g}$ ) e de Einstein ( $g$ ) é igual a  $\sqrt{3/4}$ . No próximo capítulo vamos analisar a questão da unitariedade a nível de árvore destas duas teorias, que conforme vimos apresentam potenciais que além de finitos na origem tendem a zero no infinito.

æ

## Capítulo 3

# Um Estudo Sistemático da Unitariedade a Nivel de Árvore

Apresentamos neste capítulo um método de análise da unitariedade a nivel de árvore de teorias de gravitação com derivadas de ordem superior [7]. A prescrição é usada para investigar a unitariedade tanto da teoria quadrática de gravitação quanto da teoria de gravitação de Fierz-Pauli com derivadas de ordem superior.

### 3.1 *O Método*

Fantasma e táquions estão ausentes de uma dada teoria de gravitação com derivadas de ordem superior se o propagador correspondente apresenta somente pólos de primeira ordem em  $k^2 - M^2 = 0$  com massas reais  $M$  (ausência de táquions) e resíduos positivos (ausência de fantasmas) [8,31,32]. Conseqüentemente, para testar a unitariedade a nivel de árvore destas teorias acoplamos o propagador à correntes externas conservadas,  $T^{\mu\nu}$ , compatíveis com as simetrias da teoria e examinamos a amplitude corrente-corrente nos pólos. A amplitude de transição no espaço dos momentos, por sua vez, pode

ser escrita como

$$A = g^2 T^{\mu\nu} \mathcal{O}_{\mu\nu,\rho\sigma} T^{\rho\sigma} , \quad (3.1)$$

onde  $g$  é a constante de acoplamento efetiva da teoria. Note que somente os operadores de spin  $P^2$  e  $P^0$  fornecem contribuições não nulas para a amplitude corrente-corrente, uma vez que  $k_\mu T^{\mu\nu} = 0$ .

É necessário agora que expandamos as fontes em uma base conveniente. O conjunto de vetores independentes do espaço dos momentos,

$$k^\mu \equiv (k^0, \mathbf{k}) , \quad \tilde{k}^\mu \equiv (k^0, -\mathbf{k}) , \quad \varepsilon_i^\mu \equiv (0, \vec{\varepsilon}_i) , \quad i = 1, 2 ,$$

onde  $\vec{\varepsilon}_1$  e  $\vec{\varepsilon}_2$  são vetores unitários mutuamente ortogonais e que são também ortogonais a  $\mathbf{k}$ , serve para os nossos propósitos. O tensor de corrente simétrico  $T^{\mu\nu}(k)$  pode então ser colocado sob a forma

$$T^{\mu\nu} = a k^\mu k^\nu + b \tilde{k}^\mu \tilde{k}^\nu + c^{ij} \varepsilon_i^{(\mu} \varepsilon_j^{\nu)} + d k^{(\mu} \tilde{k}^{\nu)} + e^i k^{(\mu} \varepsilon_i^{\nu)} + f^i \tilde{k}^{(\mu} \varepsilon_i^{\nu)} .$$

A conservação de corrente,  $k_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , nos dá as seguintes relações de vínculo entre os coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $e^i$  e  $f^i$

$$a k^2 + (k_0^2 + \mathbf{k}^2) \frac{d}{2} = 0 , \quad (3.2)$$

$$b (k_0^2 + \mathbf{k}^2) + d \frac{k^2}{2} = 0 , \quad (3.3)$$

$$e^i k^2 + f^i (k_0^2 + \mathbf{k}^2) = 0 . \quad (3.4)$$

Se saturarmos os índices de  $T^{\mu\nu}$  com momentos  $k_\mu$ , obtemos a equação  $k_\mu k_\nu T^{\mu\nu} = 0$ , que leva à seguinte relação de consistência para os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $d$

$$a k^4 + b (k_0^2 + \mathbf{k}^2)^2 + d k^2 (k_0^2 + \mathbf{k}^2) = 0 . \quad (3.5)$$

Tudo que temos que fazer agora é calcular o resíduo de  $A$  em cada pólo de primeira ordem do propagador e verificar se seu sinal é positivo.

### 3.2 *Estudo da Unitariedade da Gravitação Quadrática a Nivel de Árvore*

**Proposição 1.** *A teoria de gravitação com derivadas de ordem mais alta é não unitária a nivel de árvore. Se  $m_0^2 > 0$  ( $3\alpha + \beta > 0$ ) e  $m_1^2 > 0$  ( $-\beta > 0$ ), a teoria é não taquiônica e apresenta uma partícula física de massa nula e spin 2, um fantasma massivo de spin 2 e uma partícula normal massiva de spin 0.*

*Prova.* De (3.1) e (1.8), obtemos prontamente

$$\begin{aligned} A &= g^2 T^{\mu\nu} \left[ \frac{m_1^2}{k^2(m_1^2 - k^2)} P^2 + \frac{m_0^2}{2k^2(k^2 - m_0^2)} P^0 \right]_{\mu\nu, \rho\sigma} T^{\rho\sigma} \\ &= g^2 \left[ \frac{T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - T^2/2}{k^2} - \frac{T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - T^2/3}{k^2 - m_1^2} + \frac{T^2}{6(k^2 - m_0^2)} \right], \quad (3.6) \end{aligned}$$

onde  $T \equiv \eta_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = T^\mu{}_\mu$ . Portanto, temos dois pólos no setor de spin 2, ou seja,  $k^2 = 0$  e  $k^2 = m_1^2$ , e um pólo no setor de spin 0:  $k^2 = m_0^2$ . Determinemos pois o sinal do resíduo nesses pólos. Vamos supor que a teoria quadrática seja não taquiônica, o que implica em  $m_0^2 > 0$  e  $m_1^2 > 0$ .

• *Pólo  $k^2 = 0$ .* De (3.2), (3.3), (3.4) e (3.6), concluímos que o resíduo de  $A$  no pólo  $k^2 = 0$  é

$$Res A \Big|_{k^2=0} = g^2 \left[ \frac{1}{2}(c^{11})^2 + \frac{1}{2}(c^{22})^2 + 2(c^{12})^2 \right]_{k^2=0} > 0 .$$

Segue-se que a partícula sem massa é uma partícula normal.

- Pólo  $k^2 = m_0^2$ . Neste caso

$$ResA \Big|_{k^2=m_0^2} = \left[ \frac{g^2 T^2}{6} \right]_{k^2=m_0^2} ,$$

o que nos permite concluir que o resíduo da amplitude corrente-corrente no pólo  $k^2 = m_0^2$  é sempre positivo. Logo, a partícula escalar massiva é uma partícula física.

- Pólo  $k^2 = m_1^2$ . O resíduo da amplitude de transição no pólo  $k^2 = m_1^2$  é dado por

$$\begin{aligned} ResA \Big|_{k^2=m_1^2} &= -g^2 \left\{ ab (k_0^2 + \mathbf{k}^2)^2 + b^2 k^4 + bdk^2 (k_0^2 + \mathbf{k}^2) + (c^{ij})^2 \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} (k_0^2 + \mathbf{k}^2) e^i f^i - \frac{k^2}{2} (f^i)^2 \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} [ak^2 + bk^2 - c^{ii} + d(k_0^2 + \mathbf{k}^2)]^2 \right\}_{k^2=m_1^2} , \\ &= -g^2 \left\{ [(a-b)k^2]^2 + (c^{ij})^2 + \frac{k^2}{2} [(e^i)^2 - (f^i)^2] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} [(b-a)k^2 - c^{ii}]^2 \right\}_{k^2=m_1^2} . \end{aligned} \quad (3.7)$$

Na obtenção deste resultado utilizamos (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5). A expressão (3.7) pode também ser escrita como

$$\begin{aligned} ResA \Big|_{k^2=m_1^2} &= -g^2 \left\{ \frac{2}{3} [(a-b)k^2]^2 + \left[ (c^{ij})^2 - \frac{(c^{ii})^2}{3} \right] + \frac{k^2}{2} [(e^i)^2 - (f^i)^2] \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} (a-b)k^2 c^{ii} \right\}_{k^2=m_1^2} . \end{aligned}$$

Supondo agora, como de hábito, que  $T \geq 0$ , chegamos a conclusão que  $c^{ii} \leq 0$ , o que implica em  $ResA \Big|_{k^2=m_1^2} < 0$ . Portanto, temos um fantasma massivo de spin 2, não taquiônico, no propagador da gravitação quadrática.

Conseqüentemente, a teoria de gravitação com derivadas de ordem mais alta é não unitária a nível de árvore.  $\diamond$

**Corolário 1.** *Se  $\alpha > 0$ , então a teoria de gravitação  $R + R^2$ , que é definida pela ação*

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2} R^2 \right] ,$$

*é não taquiônica e unitária a nível de árvore.*

*Prova.* Trivial.  $\diamond$

Este resultado vem de encontro à opinião em voga que teorias de ordem superior são sempre taquiônicas e não unitárias.

**Corolário 2.** *A relatividade geral é unitária a nível de árvore.*

*Prova.* Trivial.  $\diamond$

### 3.3 Unitariedade a Nível de Árvore da Teoria de Gravitação de Fierz-Pauli com Derivadas de Ordem Superior

**Proposição 2.** *Se  $\beta < 0$  e  $m_1^2 > 2m^2$ , onde  $m_1^2 \equiv -\frac{1}{b} = -\frac{2}{\beta\kappa^2}$ , então a teoria de gravitação de Fierz-Pauli com derivadas de ordem superior é não taquiônica e apresenta uma partícula normal massiva de spin 2 e um fantasma massivo de spin 2.*

*Prova.* (1.10) nos diz que o propagador associado à teoria de gravitação de

Fierz-Pauli com derivadas de ordem superior pode ser escrito como

$$\mathcal{O}^{-1} = \frac{1}{\frac{b}{2}k^4 + k^2 - m^2} P^2 - \frac{1}{m^2} P^1 - \frac{2bk^4 + 6bck^4 - 2k^2 + 2m^2}{3m^4} \bar{P}^0 + \frac{1}{3m^2} \bar{\bar{P}}^0 .$$

Por outro lado,

$$\frac{b}{2}k^4 + k^2 - m^2 = -\frac{1}{2m_1^2} (k^2 - M_1^2) (k^2 - M_2^2) ,$$

onde

$$\begin{aligned} M_1^2 &= m_1^2 + \sqrt{m_1^4 - 2m^2 m_1^2} , \\ M_2^2 &= m_1^2 - \sqrt{m_1^4 - 2m^2 m_1^2} , \\ m_1^2 &\equiv -\frac{1}{b} = -\frac{2}{\beta \bar{\kappa}^2} . \end{aligned}$$

A amplitude de espalhamento no espaço dos momentos [veja (3.1)] assume então a forma

$$\begin{aligned} A &= \bar{g}^2 T^{\mu\nu} \left[ \frac{-2m_1^2}{(k^2 - M_1^2)(k^2 - M_2^2)} P^2 \right]_{\mu\nu, \rho\sigma} T^{\rho\sigma} \\ &= \bar{g}^2 \left[ \frac{-1}{k^2 - M_1^2} + \frac{1}{k^2 - M_2^2} \right] \frac{T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - T^2/3}{\sqrt{1 - 2m^2/m_1^2}} , \end{aligned}$$

onde  $\bar{g}$  é a constante de acoplamento efetiva da teoria de gravitação de Fierz-Pauli. Logo, se  $\beta < 0$  e  $m_1^2 > 2m^2$ , a teoria de gravitação de Fierz-Pauli com derivadas de ordem superior é não taquiônica e apresenta dois modos massivos de spin 2: a partícula de massa  $M_1$  é um fantasma, enquanto que a de massa  $M_2$  é uma partícula física.  $\diamond$

**Corolário 3.** *A teoria de gravitação de Fierz-Pauli com derivadas de ordem superior não é unitária a nível de árvore*

*Prova.* Trivial.  $\diamond$

**Corolário 4.** *A teoria de gravitação de “Fierz-Pauli +  $R^2$ ”, que é definida pela Lagrangiana [7]*

$$\mathcal{L} = \frac{\alpha\bar{\kappa}^2}{2} (A^\mu{}_{,\mu} - \square\phi)^2 - \frac{1}{2} [h^{\mu\nu}\square h_{\mu\nu} + A_\nu^2 + (A_\nu - \partial_\nu\phi)^2] - \frac{1}{2}m^2 (h_{\mu\nu}^2 - \phi^2) ,$$

*é não taquiônica e unitária a nível de árvore.*

*Prova.* O propagador da teoria em questão é

$$\mathcal{O}^{-1} = \frac{1}{k^2 - m^2} P^2 - \frac{1}{m^2} P^1 - \frac{3\alpha\bar{\kappa}^2 k^4 - 2k^2 + 2m^2}{3m^4} \bar{P}^0 + \frac{1}{3m^2} \bar{P}^0 .$$

A amplitude de espalhamento [veja (3.1)], por sua vez, pode ser escrita como

$$A = \bar{g}^2 \left[ \frac{T_{\mu\nu} T^{\mu\nu} - \frac{1}{3} T^2}{k^2 - m^2} \right] .$$

Segue-se que a teoria de gravitação de “Fierz-Pauli +  $R^2$ ” é não taquiônica e unitária a nível de árvore.  $\diamond$

Note que a adição da parte linear do termo quadrático  $\int R^2 \sqrt{-g} d^4x$  à ação da teoria de gravitação de Fierz-Pauli não melhora o comportamento ultravioleta desta última.

**Corolário 5.** *A teoria de gravitação de Fierz-Pauli é unitária a nível de árvore*

*Prova.* Trivial.  $\diamond$

### 3.4 *Sumário*

Mostramos neste capítulo que as teorias de gravitação quadrática e de Fierz-Pauli com derivadas de ordem superior não são unitárias a nível de árvore. Por outro lado, apresentamos duas teorias de ordem superior: a gravitação  $R + R^2$  e a gravitação de “Fierz-Pauli +  $R^2$ ”, que são não taquiônicas e unitárias a nível de árvore. Estes dois exemplos vão diretamente de encontro à crença generalizada de que teorias de ordem superior estão irremediavelmente vinculadas à presença de fantasmas e táquions. Os exemplos mencionados deixam bastante claro que o calcanhar de Aquiles tanto da teoria quadrática quanto da teoria de Fierz-Pauli com derivadas de ordem superior é o termo proporcional a  $R^2_{\mu\nu}$ . Tal termo, pelo menos no caso da teoria quadrática, é necessário para que a teoria seja renormalizável [4]. A questão da unitariedade da gravitação quadrática, no entanto, é uma questão ainda em aberto. Senão vejamos. Nossos cálculos mostraram que o propagador nu do gráviton contém, além do usual gráviton de massa nula, uma partícula massiva de spin-2 de resíduo negativo, ou seja, um fantasma. Tal excitação, entretanto, é instável, afirmam Antoniadis e Tomboulis [5]. Como até o presente ninguém apresentou uma demonstração que invalidasse a tese dos autores em questão, acreditamos que não possamos rejeitar ainda a teoria quadrática como uma possibilidade viável. Assim sendo dedicaremos os próximos capítulos ao estudo de algumas propriedades clássicas e semiclássicas desta intrigante e controversa teoria de ordem superior. No próximo capítulo vamos discutir um novo gauge para a teoria quadrática linearizada.

## Capítulo 4

# Um Novo Gauge para a Teoria de Gravitação Linearizada de Ordem Superior

Neste capítulo, vamos escrever as equações de campo da teoria de ordem superior em um novo gauge - o gauge de Teyssandier [14]. Neste gauge, a solução geral para as equações de campo linearizadas da teoria de quarta ordem pode ser facilmente deduzida de um sistema de equações de segunda ordem. Após demonstrar a consistência destes resultados, vamos obter a solução para o caso particular de uma fonte pontual e estática de massa  $M$  localizada na origem do sistema de coordenadas [13]. Esta solução será de importância fundamental para o estudo do desvio da luz no campo gravitacional de ordem superior.

### 4.1 *Introdução*

Na aproximação linear da teoria de gravitação de Einstein, é comum a utilização das chamadas coordenadas harmônicas, ou gauge de de Donder, onde as equações de campo assumem uma forma bastante simples. No entanto, quando se trata da teoria de quarta ordem, o gauge de de Donder se torna in-

adequado, fazendo com que o trabalho de encontrar soluções para as equações de campo fique bastante difícil e sobrecarregado de integrais que só existem como distribuições. Na referência [15] encontramos um exemplo onde o gauge de de Donder é utilizado na obtenção da solução das equações linearizadas da teoria  $R + R^2$ . A partir daí, podemos ter uma idéia de como ficaria este cálculo para a teoria quadrática completa.

Teyssandier [14] encontrou um gauge, que envolve derivadas de terceira ordem do campo, no qual as soluções das equações de campo na aproximação linear da teoria de quarta ordem podem ser facilmente obtidas.

Na seção 4.2, obtemos a aproximação linear das equações de campo da teoria quadrática da gravitação, partindo das equações gerais da teoria (Apêndices B e C). A partir das equações de campo linearizadas da teoria completa, mostramos que o tensor momento-energia se conserva.

Na seção 4.3, escrevemos as equações de campo linearizadas no gauge de Teyssandier.

Na seção 4.4, obtemos a solução geral do sistema no gauge em questão [13], e na seção 4.5, encontramos a solução das equações de campo linearizadas no gauge de Teyssandier para uma fonte pontual estática de massa  $M$  localizada na origem do sistema de coordenadas [13].

## 4.2 A Aproximação Linear

As equações de campo para a teoria da gravitação de ordem superior se escrevem como ( ver Apêndices B e C ):

$$\frac{2}{\kappa^2} G_{\mu\nu} + \frac{\alpha}{2} \left[ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^2 + 2R R_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu \nabla_\nu R - 2g_{\mu\nu} \square R \right] + \frac{\beta}{2} \left[ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\rho\sigma}^2 \right]$$

$$+ \nabla_\mu \nabla_\nu R + 2R_{\mu\rho\lambda\nu} R^{\rho\lambda} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\square R - \square R_{\mu\nu} \Big] + \frac{1}{2}T_{\mu\nu} = 0. \quad (4.1)$$

Para se obter a aproximação linear, antes de mais nada, omitiremos os termos quadráticos em  $R_{\mu\nu}$  e  $R$ , bem como os termos  $2RR_{\mu\nu}$  e  $2R_{\mu\rho\lambda\nu}R^{\rho\lambda}$  na expressão acima. Fazendo isto, (4.1) se reduz a

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\kappa^2} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) + \frac{\alpha}{2} (2\nabla_\mu \nabla_\nu R - 2g_{\mu\nu}\square R) \\ & + \frac{\beta}{2} \left( \nabla_\mu \nabla_\nu R - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\square R - \square R_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2}T_{\mu\nu} = 0. \end{aligned}$$

A partir daí, a aproximação linear é obtida quando substituímos

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} \quad (4.2)$$

na equação acima. Assim, o tensor  $R_{\mu\nu}$  se torna

$$R_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2}\square h_{\mu\nu} - \frac{\kappa}{2} \left( \gamma_{\mu\rho, \nu} + \gamma_{\nu\rho, \mu} \right),$$

onde  $\gamma_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$ . Conseqüentemente,

$$R = \frac{\kappa}{2}\square h - \kappa\gamma^{\mu\nu},_{\mu\nu}.$$

Para simplificar a notação das equações de campo, vamos redefinir o tensor de Ricci e o escalar de curvatura fazendo

$$R \rightarrow R \equiv \frac{R}{\kappa} \quad \text{e} \quad R_{\mu\nu} \rightarrow R_{\mu\nu} \equiv \frac{R_{\mu\nu}}{\kappa}.$$

Com isso, obtemos

$$\left( \frac{2}{\kappa^2} - \frac{\beta}{2}\square \right) \left( R_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \frac{R}{2} \right) - \left( \alpha + \frac{\beta}{2} \right) (\eta_{\mu\nu}\square R - R_{,\mu\nu}) = -\frac{1}{2\kappa}T_{\mu\nu}, \quad (4.3)$$

onde

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\gamma_{\mu\rho, \nu}{}^\rho + \gamma_{\nu\rho, \mu}{}^\rho) \quad , \quad (4.4)$$

$$R = \frac{1}{2}\square h - \gamma^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} \quad \text{e} \quad (4.5)$$

$$\square = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu \quad . \quad (4.6)$$

Notando que  $R_{\mu\nu}{}^{,\nu} = \frac{1}{2}R_{,\mu}$ , concluímos que

$$\left[ \left( \frac{2}{\kappa^2} - \frac{\beta}{2}\square \right) \left( R_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\frac{R}{2} \right) - \left( \alpha + \frac{\beta}{2} \right) (\eta_{\mu\nu}\square R - R_{,\mu\nu}) \right]{}^{,\nu} \equiv 0 \quad .$$

Portanto, (4.3) implica em

$$T_{\mu\nu}{}^{,\nu} = 0 \quad . \quad (4.7)$$

Estas são as leis de conservação de momento e energia na relatividade especial que implicam nas equações de movimento válidas na ausência de campos gravitacionais.

### 4.3 *Equações de Campo da Teoria Quadrática no Gauge de Teyssandier*

Como sabemos, quando utilizamos as chamadas coordenadas harmônicas, conseguimos simplificar consideravelmente as equações linearizadas da teoria de Einstein. No entanto, isto não ocorre quando estamos lidando com as equações linearizadas da teoria quadrática. Provavelmente, a falta de um gauge apropriado para a teoria da gravitação de quarta ordem seja, até certo ponto, responsável pelo atraso na investigação de suas previsões teóricas e também da sua confrontação com os resultados experimentais conhecidos.

Veremos como o gauge de Teyssandier nos permite escrever as equações linearizadas da teoria em uma forma bastante conveniente para o estudo de suas soluções.

Tomando o traço de (4.3), ficamos com

$$-\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \square R = -\frac{T}{6\kappa} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\kappa^2} - \frac{\beta}{2} \square\right) R \quad . \quad (4.8)$$

Substituindo (4.8) em (4.3), obtemos

$$\left(\frac{2}{\kappa^2} - \frac{\beta}{2} \square\right) R_{\mu\nu} - \frac{1}{6} \left(\frac{2}{\kappa^2} - \frac{\beta}{2} \square\right) \eta_{\mu\nu} R + \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) R_{,\mu\nu} = \frac{T\eta_{\mu\nu}}{6\kappa} - \frac{T_{\mu\nu}}{2\kappa} \quad .$$

Agora, fazendo uso de (4.4), ficamos com a seguinte expressão para as equações de campo linearizadas

$$\left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4} \square\right) \left[-\frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} + \frac{1}{6} R \eta_{\mu\nu}\right] + \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu,\nu} + \Gamma_{\nu,\mu}) = \frac{\kappa}{4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} T \eta_{\mu\nu}\right), \quad (4.9)$$

onde

$$\Gamma_{\mu} \equiv \left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4} \square\right) \gamma_{\mu\lambda}{}^{,\lambda} - \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \frac{\kappa^2}{2} R_{,\mu} \quad . \quad (4.10)$$

É interessante notar que quando  $\alpha = \beta = 0$ , (4.9) e (4.8) se tornam respectivamente

$$\square \gamma_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\lambda}{}^{,\lambda}{}_{\nu} - \gamma_{\nu\lambda}{}^{,\lambda}{}_{\mu} + \gamma^{\lambda\rho}{}_{,\lambda\rho} \eta_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2} T_{\mu\nu} - \frac{2}{3} R \eta_{\mu\nu} + \frac{\kappa}{6} T \eta_{\mu\nu}, \quad (4.11)$$

$$\frac{\kappa T}{6} = \frac{2}{3} R \quad . \quad (4.12)$$

Portanto, descartando-se os termos que contém as derivadas de ordem superior, as equações de campo (4.9) se reduzem às equações linearizadas da teoria de Einstein, ou seja,

$$\square \gamma_{\mu\nu} - \gamma_{\mu\lambda}{}^{,\lambda}{}_{\nu} - \gamma_{\nu\lambda}{}^{,\lambda}{}_{\mu} + \gamma^{\lambda\rho}{}_{,\lambda\rho} \eta_{\mu\nu} = -\frac{\kappa}{2} T_{\mu\nu} \quad . \quad (4.13)$$

Agora, veremos como o gauge de Teyssandier pode ser realizado. A transformação de gauge do campo gravitacional linearizado é (ver Apêndice A)

$$h_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \Lambda_{\mu,\nu} - \Lambda_{\nu,\mu}. \quad (4.14)$$

É fácil verificar que (4.9) é invariante sob a transformação (4.14), enquanto que  $\Gamma_\mu$  se transforma de acordo com

$$\Gamma_\mu(x) \longrightarrow \bar{\Gamma}_\mu(x) = \Gamma_\mu(x) - \left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4}\square\right)\square\Lambda_\mu(x). \quad (4.15)$$

Portanto, podemos obter uma simplificação significativa das equações de campo impondo a condição  $\bar{\Gamma}_\mu = 0$ , ou equivalentemente,  $\Gamma_\mu = \left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4}\square\right)\square\Lambda_\mu$ . Esta condição define o gauge de Teyssandier. Assim, o problema de encontrar a solução para as equações de campo linearizadas da teoria de quarta ordem se reduz à resolução do seguinte sistema de equações:

$$\left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4}\square\right)\left(-\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{6}\eta_{\mu\nu}R\right) = \frac{\kappa}{4}\left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}T\eta_{\mu\nu}\right], \quad (4.16)$$

$$0 = \Gamma_\mu \equiv \left(1 - \frac{\beta\kappa^2}{4}\square\right)\gamma_{\mu\lambda}{}^{,\lambda} - \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\frac{\kappa^2}{2}R_{,\mu}. \quad (4.17)$$

#### 4.4 Solução Geral das Equações de Campo Linearizadas da Teoria Quadrática no Gauge de Teyssandier

Nesta seção, vamos encontrar a solução geral para o sistema definido por (4.16) e (4.17). Para tanto, notemos que (4.16) pode ser reescrita na forma

$$(m_1^2 + \square)\frac{[-\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}R]}{m_1^2} = \frac{\kappa}{2}\left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}T\eta_{\mu\nu}\right],$$

onde

$$m_1^2 \equiv \frac{-4}{\kappa^2\beta}.$$

Vamos definir as grandezas  $\Psi_{\mu\nu}$  por

$$\Psi_{\mu\nu} \equiv \frac{[-\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}R]}{m_1^2}, \quad (4.18)$$

onde  $h_{\mu\nu}$  é solução do sistema (4.16) e (4.17). Sendo assim,  $\Psi_{\mu\nu}$  deve satisfazer à equação

$$(\square + m_1^2) \Psi_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} \left[ T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}T\eta_{\mu\nu} \right], \quad (4.19)$$

o que implica em

$$-\square h_{\mu\nu} + \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}R + \square\Psi_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} \left[ T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}T\eta_{\mu\nu} \right]. \quad (4.20)$$

Por outro lado, lembrando que  $m_0^2 = \frac{2}{\kappa^2(3\alpha+\beta)}$ , podemos reescrever (4.8) na forma

$$\left( \frac{m_1^2 - m_0^2}{m_0^2 m_1^2} \right) \square R = \frac{\kappa T}{4} - \left( \frac{m_1^2 + \square}{m_1^2} \right) R.$$

Rearranjando os termos, obtemos

$$R = \frac{\kappa T}{4} - \frac{\square R}{m_0^2}. \quad (4.21)$$

Usando (4.21), podemos escrever (4.20) na forma

$$\square \left( h_{\mu\nu} + \frac{R\eta_{\mu\nu}}{3m_0^2} - \Psi_{\mu\nu} \right) = \frac{\kappa}{2} \left[ \frac{T\eta_{\mu\nu}}{2} - T_{\mu\nu} \right].$$

Agora, lembremos que as equações linearizadas da teoria de Einstein no gauge de de Donder, isto é  $[\gamma_{\mu\nu}^{(E),\nu} = 0, \text{ com } \gamma_{\mu\nu}^{(E)} \equiv h_{\mu\nu}^{(E)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{(E)}]$ , se escrevem como

$$\square\gamma_{\mu\nu}^{(E)} = -\frac{\kappa}{2}T_{\mu\nu}.$$

Portanto,

$$\square h_{\mu\nu}^{(E)} = \frac{\kappa}{2} \left[ \frac{T\eta_{\mu\nu}}{2} - T_{\mu\nu} \right].$$

Conseqüentemente,

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(E)} + \Psi_{\mu\nu} - \frac{R\eta_{\mu\nu}}{3m_0^2}, \quad (4.22)$$

onde  $h_{\mu\nu}^{(E)}$  é solução das equações de Einstein linearizadas no gauge de de Donder. Notemos que (4.22) implica em

$$\gamma^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} = \Psi^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} - \frac{1}{2}\square\Psi + \frac{\square R}{3m_0^2}.$$

Usando (4.21) para eliminar  $\square R$  da equação acima, ficamos com

$$\gamma^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} = \Psi^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} - \frac{1}{2}\square\Psi + \frac{\kappa T}{12} - \frac{R}{3}. \quad (4.23)$$

Por outro lado, tomando o traço de (4.18) e lembrando que  $R = \frac{1}{2}\square h - \gamma^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu}$ , obtemos

$$\frac{m_1^2\Psi}{2} = -\gamma^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} - \frac{R}{3}.$$

Agora, calculando o traço de (4.19), obtemos

$$\frac{m_1^2\Psi}{2} = -\frac{1}{2}\square\Psi - \frac{\kappa T}{12}.$$

Portanto,

$$-\frac{1}{2}\square\Psi - \frac{\kappa T}{12} = -\gamma^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} - \frac{R}{3}. \quad (4.24)$$

Eliminando  $\gamma^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu}$  com o uso de (4.23), obtemos  $\Psi^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} - \square\Psi = 0$ . Deste modo, vemos que  $\Psi_{\mu\nu}$  satisfaz às equações:

$$\left(m_1^2 + \square\right)\Psi_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} \left[ T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}T\eta_{\mu\nu} \right], \quad \Psi^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} - \square\Psi = 0.$$

Finalmente, definindo  $\Phi$  pela relação  $\Phi \equiv \frac{R}{3m_0^2}$ , vemos que de acordo com (4.21),  $\Phi$  deve satisfazer à equação

$$(\square + m_0^2) \Phi = \frac{\kappa T}{12} . \quad (4.25)$$

Resumindo, podemos dizer que para  $m_0^2 \neq 0$  e  $m_1^2 \neq 0$ , a solução geral das equações de campo linearizadas da teoria quadrática no gauge de Teysandier, é dada por [13]

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(E)} + \Psi_{\mu\nu} - \Phi \eta_{\mu\nu} ,$$

onde  $h_{\mu\nu}^{(E)}$ ,  $\Psi_{\mu\nu}$  e  $\Phi$  devem satisfazer às seguintes equações:

$$\square h_{\mu\nu}^{(E)} = \frac{\kappa}{2} \left[ \frac{T \eta_{\mu\nu}}{2} - T_{\mu\nu} \right] , \quad (4.26)$$

$$(\square + m_1^2) \Psi_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} \left[ T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} T \eta_{\mu\nu} \right] , \quad (4.27)$$

$$\Psi^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu} - \square \Psi = 0, \quad (4.28)$$

$$(\square + m_0^2) \Phi = \frac{\kappa T}{12} , \quad (4.29)$$

com

$$\gamma_{\mu\nu}^{(E),\nu} \equiv 0 \text{ e } \gamma_{\mu\nu}^{(E)} = h_{\mu\nu}^{(E)} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h^{(E)} .$$

É interessante notar que a solução geral encontrada é uma combinação linear dos campos  $h_{\mu\nu}^{(E)}$ ,  $\Psi_{\mu\nu}$  e  $\Phi$ .

Vamos mostrar agora a consistência do gauge de Teysandier. Em outras palavras, vamos provar que a solução geral das equações de campo linearizadas concernentes à gravitação quadrática satisfaz realmente a condição subsidiária  $\Gamma_\mu = 0$  [13]. Substituindo (4.26) em (4.10), obtemos

$$\Gamma_\mu = \left\{ \frac{(m_1^2 + \square)}{m_1^2} \left[ h_{\mu\nu}^{(E)} + \Psi_{\mu\nu} - \frac{R \eta_{\mu\nu}}{3m_0^2} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \left( h^{(E)} + \Psi - \frac{4R}{3m_0^2} \right) \right] - \left( \alpha + \frac{\beta}{2} \right) \frac{\kappa^2}{2} R \eta_{\mu\nu} \right\}{}^{,\nu} .$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 B_{\mu\nu} &\equiv \frac{(m_1^2 + \square)}{m_1^2} \left[ h_{\mu\nu}^{(E)} + \Psi_{\mu\nu} - \frac{R\eta_{\mu\nu}}{3m_0^2} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \left( h^{(E)} + \Psi - \frac{4R}{3m_0^2} \right) \right] \\
 &\quad - \left( \alpha + \frac{\beta}{2} \right) \frac{\kappa^2}{2} R\eta_{\mu\nu} \\
 &= \frac{(m_1^2 + \square)}{m_1^2} \left[ \gamma_{\mu\nu}^{(E)} + \Psi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\Psi + \frac{R\eta_{\mu\nu}}{3m_0^2} \right] - \frac{\kappa^2}{2} \left( \alpha + \frac{\beta}{2} \right) R\eta_{\mu\nu} \\
 &= \frac{1}{m_1^2} \left[ \square\gamma_{\mu\nu}^{(E)} + m_1^2\gamma_{\mu\nu}^{(E)} + (m_1^2 + \square)\Psi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(m_1^2 + \square)\Psi \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{3}(\square + m_1^2)\frac{R\eta_{\mu\nu}}{m_0^2} \right] - \frac{\kappa^2}{2} \left( \alpha + \frac{\beta}{2} \right) R\eta_{\mu\nu} .
 \end{aligned}$$

Levando em conta que

$$\square\gamma_{\mu\nu}^{(E)} = -\frac{\kappa T_{\mu\nu}}{2} , \quad (m_1^2 + \square)\Psi_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} \left[ T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}T\eta_{\mu\nu} \right] , \quad (m_1^2 + \square)\Psi = -\frac{\kappa T}{6} ,$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
 B_{\mu\nu} &= \frac{1}{m_1^2} \left[ m_1^2\gamma_{\mu\nu}^{(E)} - \frac{\eta_{\mu\nu}\kappa T}{12} + \frac{1}{3}(\square + m_1^2)\frac{R\eta_{\mu\nu}}{m_0^2} \right] - \frac{\kappa^2}{2} \left( \alpha + \frac{\beta}{2} \right) R\eta_{\mu\nu} \\
 &= \frac{1}{m_1^2} \left[ m_1^2\gamma_{\mu\nu}^{(E)} + \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu} \left( -\frac{\kappa T}{4} + \frac{\square R}{m_0^2} \right) + \frac{1}{3}\frac{m_1^2}{m_0^2}R\eta_{\mu\nu} \right] - \frac{\kappa^2}{2} \left( \alpha + \frac{\beta}{2} \right) R\eta_{\mu\nu} .
 \end{aligned}$$

Porém, de acordo com (4.21),  $-\frac{\kappa T}{4} + \frac{\square R}{m_0^2} = -R$ . Portanto,

$$\begin{aligned}
 B_{\mu\nu} &= \frac{1}{m_1^2} \left[ m_1^2\gamma_{\mu\nu}^{(E)} - \frac{R\eta_{\mu\nu}}{3} + \frac{R}{3}\frac{m_1^2}{m_0^2}\eta_{\mu\nu} \right] - \frac{\kappa^2}{2} \left( \alpha + \frac{\beta}{2} \right) R\eta_{\mu\nu} \\
 &= \gamma_{\mu\nu}^{(E)} + \frac{R\eta_{\mu\nu}}{3} \left[ -\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_0^2} - \frac{3\kappa^2\alpha}{2} - \frac{3\kappa^2\beta}{4} \right] \\
 &= \gamma_{\mu\nu}^{(E)} + \frac{R\eta_{\mu\nu}}{3} \left[ -\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_0^2} - (3\alpha + \beta)\frac{\kappa^2}{2} - \beta\frac{\kappa^2}{4} \right] \\
 &= \gamma_{\mu\nu}^{(E)} + \frac{R\eta_{\mu\nu}}{3} \left[ -\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_0^2} - \frac{1}{m_0^2} + \frac{1}{m_1^2} \right] = \gamma_{\mu\nu}^{(E)} .
 \end{aligned}$$

Assim, somos levados a concluir que

$$\Gamma_\mu = B_{\mu\nu}{}^{,\nu} = \gamma_{\mu\nu}^{(E) ,\nu} = 0 \quad .$$

Desta forma, vemos que o gauge de Teyssandier leva ao gauge de de Donder.

## 4.5 Solução na Presença de uma Fonte Pontual Estática de Massa $M$ Localizada na Origem

Vamos agora encontrar a solução das equações de campo linearizadas da teoria quadrática no gauge de Teyssandier para o caso de uma partícula de massa  $M$  localizada em  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ . Neste caso, o tensor momento-energia assume a seguinte forma:

$$T_{\mu\nu} = M\delta_\mu^0\delta_\nu^0\delta^3(\mathbf{r}) \quad . \quad (4.30)$$

Para obter  $h_{\mu\nu}$ , devemos conhecer  $h_{\mu\nu}^{(E)}$ ,  $\Psi_{\mu\nu}$  e  $\Phi$ .

- cálculo de  $h_{\mu\nu}^{(E)}$ .

Como sabemos, a solução de

$$\square h_{\mu\nu}^{(E)} = \frac{\kappa}{2} \left[ \frac{T_{\mu\nu}}{2} - T_{\mu\nu} \right] \quad , \quad \gamma_{\mu\nu}^{(E) ,\nu} = 0 \quad , \quad \gamma_{\mu\nu}^{(E)} \equiv h_{\mu\nu}^{(E)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad ,$$

para  $T_{\mu\nu}$  dado por (4.30), é [16]

$$h_{00}^{(E)} = h_{11}^{(E)} = h_{22}^{(E)} = h_{33}^{(E)} = \frac{M\kappa}{16\pi} \left( \frac{-1}{r} \right) \quad .$$

- cálculo de  $\Psi_{\mu\nu}$ .

As componentes não nulas de  $\Psi_{\mu\nu}$  são  $\Psi_{00}$  e  $\Psi_{11} = \Psi_{22} = \Psi_{33}$ , e devem

satisfazer às seguintes equações:

$$(m_1^2 - \nabla^2) \Psi_{00} = \frac{\kappa M}{3} \delta^3(\mathbf{r}) \quad , \quad (m_1^2 - \nabla^2) \Psi_{ii} = \frac{\kappa M}{6} \delta^3(\mathbf{r}) \quad , \quad i = 1, 2, 3.$$

Estas equações estão resolvidas em [17]. As soluções são

$$\Psi_{00}(k) = \frac{\kappa M e^{-m_1 r}}{12\pi r} \quad , \quad \Psi_{11} = \Psi_{22} = \Psi_{33} = \frac{\kappa M e^{-m_1 r}}{24\pi r} \quad ,$$

onde  $m_1$  é real e diferente de zero.

• *cálculo de  $\Phi$*  . A equação para  $\Phi$  é

$$(m_0^2 - \nabla^2) \Phi = \frac{\kappa M \delta^3(\mathbf{r})}{12} \quad ,$$

Sendo sua solução dada por [17]

$$\Phi = \frac{\kappa M e^{-m_0 r}}{48\pi r} \quad ,$$

onde  $m_0$  é real e diferente de zero.

Reunindo os resultados acima, concluímos que a solução geral para o caso estudado, é [13]

$$h_{00}(r) = \frac{M\kappa}{16\pi} \left[ -\frac{1}{r} - \frac{1}{3} \frac{e^{-m_0 r}}{r} + \frac{4}{3} \frac{e^{-m_1 r}}{r} \right] \quad , \quad (4.31)$$

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = \frac{M\kappa}{16\pi} \left[ -\frac{1}{r} + \frac{2}{3} \frac{e^{-m_1 r}}{r} + \frac{1}{3} \frac{e^{-m_0 r}}{r} \right] \quad . \quad (4.32)$$

Notemos que  $\kappa h_{00} = 2V$  [veja (2.4)], como era esperado.

## 4.6 *Sumário*

Neste capítulo, reduzimos as equações não lineares que governam a teoria quadrática da gravitação à forma linearizada. Reescrevemos então estas

equações em um novo gauge, o gauge de Teyssandier, o qual é bastante conveniente quando estamos trabalhando com as equações de campo linearizadas da teoria quadrática. Utilizando este novo gauge encontramos a solução geral para a teoria linearizada na forma de uma combinação linear de dois campos tensoriais simétricos,  $h_{\mu\nu}^{(E)}$  e  $\Psi_{\mu\nu}$ , e mais um campo escalar  $\Phi$ . O primeiro,  $h_{\mu\nu}^{(E)}$ , é solução das equações de Einstein linearizadas no gauge de de Donder, evidenciando que o gauge de Teyssandier contém o gauge de de Donder. Os outros dois,  $\Phi$  e  $\Psi_{\mu\nu}$ , resultam respectivamente da presença dos termos  $R^2$  e  $R_{\mu\nu}^2$  na ação da teoria. Terminamos este capítulo calculando a solução para teoria linearizada no caso em que o campo gravitacional é originado por uma fonte pontual e estática de massa  $M$  localizada em  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ . Esta solução, obtida para o setor não taquiônico da teoria, é fundamental para o estudo da deflexão gravitacional da luz que será realizado no capítulo seguinte.

## Capítulo 5

# Deflexão da Luz na teoria Gravitacional de Ordem Superior

Estudamos neste capítulo a deflexão da luz causada por um campo gravitacional estático gerado por uma fonte material localizada, no contexto da gravitação quadrática. Nossos cálculos mostram que para raios luminosos passando próximos ao sol a deflexão  $\phi$  jaz no intervalo  $0 < \phi < 1,75''$  [13].

### 5.1 *Introdução*

Na teoria Newtoniana de gravitação uma partícula suficientemente rápida movendo-se no campo gravitacional de um corpo massivo possui uma órbita hiperbólica. A deflexão da partícula em relação à trajetória em linha reta, ou seja, o ângulo  $\phi$  entre as assintotas, é dado pela fórmula bem conhecida  $\phi = 2GM/bv^2$ , onde  $M$  é a massa do corpo,  $v$  a velocidade e  $b$  o parâmetro de impacto. Evidentemente este resultado só é válido se a deflexão for pequena. Einstein, por sua vez, obteve um resultado diferente para a deflexão gravitacional da luz, ou seja,  $\phi = 4GM/b$ , exatamente o dobro do resultado

Newtoniano. Esta fórmula nos diz que  $\phi = 1,75''$  no caso da luz que passa próxima ao sol, resultado este que está em boa concordância com os valores medidos utilizando-se luz visível e ondas de rádio, para os quais a incerteza é de cerca de 10 a 20%. Seria interessante, portanto, saber o que a teoria quadrática teria a nos dizer sobre a deflexão da luz. Vamos analisar esta questão neste capítulo. Para tal utilizaremos duas abordagens inteiramente diferentes:

(i) via equações de Maxwell na forma  $\epsilon - \mu$  [18,19];

(ii) à la Feynman [20,7].

## 5.2 Equações de Maxwell na Forma $\epsilon - \mu$

Na ausência de campos gravitacionais, as equações de Maxwell se escrevem como

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = j^\mu, \quad (5.1)$$

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\lambda\mu;\nu} + F_{\nu\lambda;\mu} = 0, \quad (5.2)$$

onde

$$F_{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix},$$

e  $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$  é o quadrivetor corrente. O acoplamento mínimo de  $F_{\mu\nu}$  com a gravitação se obtém pela conversão da derivada comum em derivada covariante ( $\rightarrow ;$ ). As equações (5.1) e (5.2) se tornam então

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = j^\mu, \quad (5.3)$$

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\lambda\mu;\nu} + F_{\nu\lambda;\mu} = 0 \quad (5.4)$$

Como  $F$  é antisimétrico, as derivadas covariantes em (5.4) podem ser substituídas por derivadas ordinárias, resultando assim na forma usual das equações de Maxwell homogêneas

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0 \quad , \quad (5.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad . \quad (5.6)$$

Para um sistema de partículas carregadas,  $j^\mu = \sum e_k \frac{v_k^\mu}{\sqrt{-g}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)$ , onde  $e_k \equiv \text{constante}$  é a carga da partícula  $k$ ,  $v_k^\mu \equiv dx_k^\mu/dt$ ,  $x_k^\mu(t)$  é a linha do universo da partícula  $k$  e  $x^0 \equiv t$ . Neste caso, (5.1) pode ser reescrita como

$$\partial_\nu \left( \sqrt{-g} g^{\mu\alpha} d^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \right) = \sum_k e_k \left[ \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \right] v_k^\mu \quad . \quad (5.7)$$

Porém, em qualquer variedade localmente Lorentziana, estática e esfericamente simétrica, pode-se introduzir “coordenadas espacialmente isotrópicas”, o que permite escrever a métrica como se segue

$$ds^2 = g_{00}(r) dt^2 - f(r) d\mathbf{x}^2 \quad . \quad (5.8)$$

Neste caso, (5.7) pode ser posta na forma

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 0 \quad , \quad (5.9)$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \mathbf{j} + \partial_t (\epsilon \mathbf{E}) \quad , \quad (5.10)$$

onde

$$\rho \equiv \sum_k e_k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k(t)) \quad , \quad \mathbf{j} \equiv \sum_k e_k \left[ \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k(t)) \right] \mathbf{v}_k \quad , \quad \epsilon = \mu = (f/g_{00})^{1/2} \quad .$$

Logo, o efeito do campo gravitacional estático esfericamente simétrico sobre as equações de Maxwell é conferir ao espaço uma constante dielétrica efetiva  $\epsilon$  e uma permeabilidade  $\mu$  que além de serem idênticas, são funções

específicas das componentes do tensor métrico. As equações (5.9) e (5.10) encontram-se na assim chamada forma  $\epsilon - \mu$  [18]. Como para a luz  $ds^2 = 0$ , podemos dividir (5.8) por  $f(r)$  o que implica em  $0 = \left(\frac{g_{00}}{f}\right) dt^2 - dx^2$ . Segue-se que o campo gravitacional pode ser visto como o agente responsável por dotar uma região do espaço-tempo Minkowskiano com um índice de refração  $n(r) = \sqrt{\epsilon\mu} = \sqrt{f/g_{00}}$ , o que implica em que um raio de luz propagando-se nas vizinhanças de uma massa gravitante seria evidentemente defletido de sua trajetória original. Portanto, podemos concluir que dado  $n(r)$ , o cálculo da deflexão gravitacional da luz se reduz a um problema usual de ótica. Pode-se mostrar que o ângulo de deflexão  $\phi$  associado a um raio luminoso em  $\mathcal{O}(G)$  obedece à equação diferencial [19]  $\frac{d\phi(x)}{dx} = -\frac{b}{r n(r)} \frac{dn(r)}{dr}$ , onde  $r = \sqrt{x^2 + b^2}$ . A deflexão total corresponde a  $\phi(\infty)$ .

### 5.3 Deflexão da Luz

Vamos agora analisar a questão da deflexão da luz no contexto da gravitação quadrática.

**Proposição.** *Raios luminosos que passam nas vizinhanças do sol sofrem, no contexto da gravitação quadrática, uma deflexão  $\phi$  que jaz no intervalo  $0 < \phi < 1,75''$  [13]*

*Prova 1* (via equações de Maxwell na forma  $\epsilon - \mu$ ).

Suponhamos que o sol seja uma partícula pontual de massa  $M$  localizada em

$r = 0$ . Nestas condições, (4.31) e (4.32) nos dizem que

$$\begin{aligned} g_{00}(r) &= 1 + \frac{2MG}{r} \left[ -1 - \frac{1}{3}e^{-m_0 r} + \frac{4}{3}e^{-m_1 r} \right] , \\ f(r) &= 1 - \frac{2MG}{r} \left[ -1 + \frac{1}{3}e^{-m_0 r} + \frac{2}{3}e^{-m_1 r} \right] . \end{aligned}$$

Conseqüentemente, o índice de refração,

$$n(r) = 1 + \frac{2MG}{r} - \frac{2MG}{r} e^{-m_1 r} + \mathcal{O}(G^2) ,$$

em  $\mathcal{O}(G)$  pode ser reescrito na forma  $n(r) = n_E(r) - \bar{n}(r)$ , onde  $n_E \equiv 1 + \frac{2MG}{r}$  é o índice de refração relacionado à teoria de Einstein e  $\bar{n}(r) \equiv (2MG/r)e^{m_1 r}$  é o índice de refração concernente à gravitação  $R_{\mu\nu}^2$ , o qual é sempre positivo (como esperado). A análise precedente nos permite concluir que a deflexão na periferia do sol prevista pela gravitação com derivadas de ordem mais alta é menor que a prevista pela teoria de Einstein. Examinando a equação diferencial obedecida por  $\phi$ , ou seja,

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = \frac{2bMG}{r^3} - 2bMG \left[ \frac{1}{r^3} + \frac{m_1}{r^2} \right] e^{-m_1 r} ,$$

podemos constatar facilmente que nossa conclusão é correta. Mostramos na Fig. 3 a variação qualitativa da deflexão com  $m_1$ .

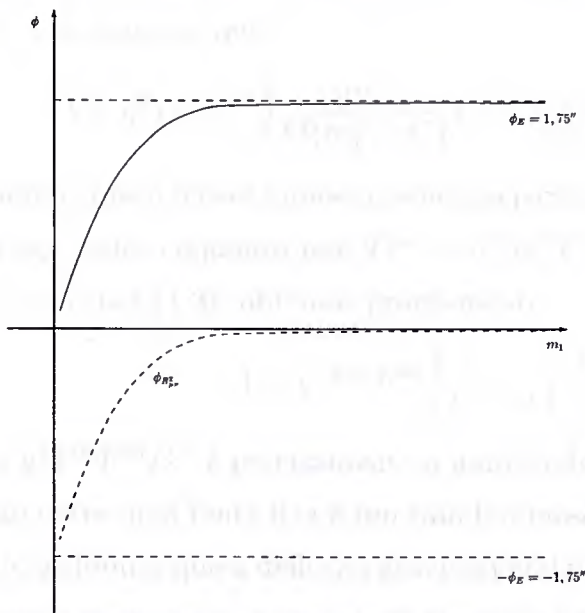


Fig. 3 - Deflexão versus  $m_1$ .  $\phi_E = 1,75''$  é a deflexão prevista pela relatividade geral e  $\phi_{R^2_{\mu\nu}}$  é aquela prevista pela teoria de gravitação  $R^2_{\mu\nu}$ .

*Prova 2 (à la Feynman).*

Considere a interação entre uma fonte fixa como o sol, e um raio luminoso. Os tensores momento-energia associados serão designados respectivamente

por  $T^{\mu\nu}$  e  $F^{\mu\nu}$ . A amplitude corrente-corrente para este processo é dada por

$$A = g^2 T^{\mu\nu} O_{\mu\nu,\rho\sigma} F^{\rho\sigma} .$$

No gauge de Julve-Tonin o propagador é dado por (1.8). Como  $k_\mu T^{\mu\nu}$  e  $k_\mu F^{\mu\nu} = 0$ , segue-se que

$$A = g^2 T^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} \left[ \frac{m_1^2}{k^2(m_1^2 - k^2)} P^2 + \frac{m_0^2}{2k^2(k^2 - m_0^2)} P^0 \right]_{\mu\nu,\rho\sigma} .$$

Lembrando que o tensor momento-energia para a luz (radiação eletromagnética) tem traço nulo, enquanto que  $T^{\mu\nu} = \eta^{\mu 0} \eta^{\nu 0} T^{00}$  para uma fonte estática, e tendo em conta (1.3), obtemos prontamente

$$A = g^2 T^{00} F^{00} \left[ \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - m_1^2} \right] .$$

Como  $g^2 T^{00} F^{00} / k^2$  é precisamente a amplitude corrente-corrente para a interação entre uma fonte fixa e um raio luminoso no contexto da relatividade geral, concluímos que a deflexão gravitacional prevista pela teoria quadrática é sempre menor que a prevista pela teoria de Einstein. Segue-se que  $0 < \phi < 1,75''$  .  $\diamond$

Note que o inofensivo modo escalar massivo não contribui em nada para a deflexão gravitacional. Como consequência, na fórmula para a deflexão solar só irá aparecer o parâmetro  $\beta$ .

**Corolário .** *Raios luminosos que passam nas vizinhanças do sol sofrem, no contexto da teoria de gravitação  $R + R^2$ , a mesma deflexão que a prevista pela teoria de Einstein, ou seja,  $1,75''$  [15,21].*

*Prova.* Trivial.  $\diamond$

Nas referências [15] e [21] mostra-se que as teorias  $R + R^2$  e a de Einstein são conformemente relacionadas, o que explica o fato delas fornecerem o mesmo resultado para a deflexão solar.

## 5.4 *Sumário*

Mostramos neste capítulo que a teoria quadrática prevê um desvio  $\phi$ , no caso de um raio luminoso que passa nas vizinhanças do sol, que jaz no intervalo  $0 < \phi < 1,75''$ . No próximo capítulo vamos estudar a deflexão de fótons pelo sol, a nível de árvore, no contexto da teoria quadrática.

## Capítulo 6

# Espalhamento de Fótons por um Campo Gravitacional Externo no Contexto da Gravitação com Derivadas de Ordem Mais Alta

Estudamos neste capítulo o espalhamento de fótons por um campo gravitacional estático, tratado como um campo externo, no contexto da gravitação quadrática. Mostramos que o setor  $R^2$  da teoria não contribui em nada para o espalhamento do fóton, enquanto que o setor  $R_{\mu\nu}^2$  produz propagação fotônica dispersiva (dependente da energia) [13]. Exploramos também a bela idéia que a deflexão gravitacional de fótons do espectro visível poderia dar origem a um arco-íris de gravitação [22].

### 6.1 *Introdução*

De acordo com o princípio de equivalência, fótons seguem geodésicas nulas do espaço-tempo curvo. Além disso experimentam a mesma deflexão grav-

itacional, a qual é independente da energia e da polarização. Tanto a teoria de Einstein [23] quanto a teoria de gravitação  $R + R^2$  [15,21] são exemplos de teorias gravitacionais que obedecem este princípio, o que implica em que propagação fotônica dispersiva não pode se dar no contexto das mesmas. Isto não é verdade, no entanto, no que concerne à teoria de gravitação com derivadas de ordem superior. Nosso objetivo neste capítulo é exatamente mostrar que a gravitação quadrática produz espalhamento fotônico dependente da energia [13]. Vamos calcular esta deflexão no caso de fótons que passam próximos ao sol, e obter o ângulo segundo o qual o espectro visível seria espalhado [22].

## 6.2 *Espalhamento de Fótons*

Vamos analisar aqui a questão do espalhamento de fótons por um campo gravitacional externo no contexto da gravitação com derivadas de ordem mais alta

**Proposição 1.** *A deflexão fotônica é dependente da energia no contexto da gravitação quadrática.*

*Prova.* A Lagrangiana para a interação de um fóton com um campo gravitacional externo é

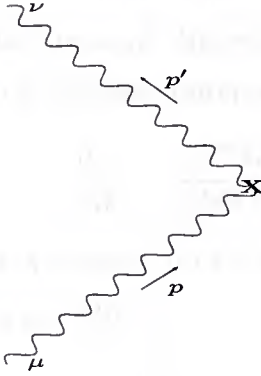
$$\mathcal{L} = -\frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{4} - \frac{\kappa}{8} \left[ h^{\rho\theta} \eta_{\rho\theta} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} - 4h^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \right] F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} .$$

O vértice concernente à interação de um fóton com um campo gravitacional externo está mostrado na Fig. 4. O campo gravitacional no espaço dos

momentos, ou seja,  $h_{\mu\nu}(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} h_{\mu\nu}(\mathbf{r})$ , pode ser escrito como

$$h_{\mu\nu}(\mathbf{k}) = h_{\mu\nu}^{(E)}(\mathbf{k}) + h_{\mu\nu}^{(R^2)}(\mathbf{k}) + h_{\mu\nu}^{(R^2_{\mu\nu})}(\mathbf{k}) ,$$

onde  $h_{\mu\nu}^{(E)}(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{r} h_{\mu\nu}^{(E)}(\mathbf{r}) = \frac{\kappa M}{4k^2} \eta_{\mu\nu} - \frac{\kappa M \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0}}{2k^2}$ ,  $h_{\mu\nu}^{(R^2)} = -\frac{\kappa M}{12} \frac{\eta_{\mu\nu}}{m_0^2 + k^2}$  e  $h_{\mu\nu}^{(R^2_{\mu\nu})} = -\frac{\kappa M}{6} \frac{\eta_{\mu\nu}}{m_1^2 + k^2} + \frac{\kappa M \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0}}{2(m_1^2 + k^2)}$ .



$$\mathcal{M}_{\mu\nu}(p, p') = \frac{1}{2} \kappa h^{\lambda\rho}(\mathbf{k}) [-\eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\rho} p \cdot p' + \eta_{\lambda\rho} p_\nu p'_\mu + 2(\eta_{\mu\nu} p_\lambda p'_\rho - \eta_{\nu\rho} p_\lambda p'_\mu - \eta_{\mu\lambda} p_\nu p'_\rho + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\rho} p \cdot p')]$$

Fig.4 - O vértice para a interação fóton-campo gravitacional externo. Aqui  $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$ .

A seção de choque não polarizada para o processo exibido na Fig. 4 é

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{32\pi^2} \sum_{r=1}^2 \sum_{r'=1}^2 \mathcal{M}_{rr'}^2 ,$$

onde  $\mathcal{M}_{rr'} = \epsilon_r^\mu(\mathbf{p}) \epsilon_{r'}^\nu(\mathbf{p}') \mathcal{M}_{\mu\nu}$ , onde  $\epsilon_r^\mu(\mathbf{p})$  e  $\epsilon_{r'}^\nu(\mathbf{p}')$  são vetores de polarização associados aos fótons incidentes e espalhados, nesta ordem. Antes de prosseguirmos notemos que a amplitude de Feynman pode ser reescrita como  $\mathcal{M}_{\mu\nu} = \mathcal{M}_{\mu\nu}^{(E)} + \mathcal{M}_{\mu\nu}^{(R^2)} + \mathcal{M}_{\mu\nu}^{(R^2_{\mu\nu})}$ , onde

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}^{(R^2)} = \frac{\kappa}{2} \left[ -\frac{\kappa M}{12} \frac{\eta^{\lambda\rho}}{m_0^2 + \mathbf{k}^2} \right] \left[ -\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\rho} p \cdot p' + \eta_{\lambda\rho} p_\nu p'_\mu \right. \\ \left. + 2 \left( \eta_{\mu\nu} p_\lambda p'_\rho - \eta_{\nu\rho} p_\lambda p'_\mu - \eta_{\mu\lambda} p_\nu p'_\rho + \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\rho} p \cdot p' \right) \right] .$$

Evidentemente  $\mathcal{M}_{\mu\nu}^{(R^2)} \equiv 0$  o que implica em que o setor  $R^2$  da teoria quadrática não contribui em nada para o espalhamento fotônico. Na realidade ele também não contribui no contexto da teoria de gravitação  $R + R^2$  [15,21]. Após esta pequena digressão retornemos ao cálculo da seção de choque. Fazendo os cálculos, obtemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\kappa^4 E^4 M^2}{256\pi^2} (1 + \cos\phi)^2 \left[ -\frac{1}{\mathbf{k}^2} + \frac{1}{m_1^2 + \mathbf{k}^2} \right]^2 ,$$

onde  $E$  é a energia do fóton incidente. No caso de ângulos pequenos esta expressão se reduz a

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 16G^2 M^2 \left[ -\frac{1}{\phi^2} + \frac{E^2}{m_1^2 + \phi^2 E^2} \right]^2 . \quad (6.1)$$

Porém, para ângulos pequenos,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{r}{\phi} \frac{dr}{d\phi} \right| . \quad (6.2)$$

De (6.1) e (6.2) segue-se imediatamente que

$$r^2 = 16G^2 M^2 \left[ \frac{1}{\phi^2} + \frac{E^2}{m_1^2 + E^2 \phi^2} + \frac{2E^2}{m_1^2} \ln \frac{\phi^2 E^2}{m_1^2 + E^2 \phi^2} \right] . \quad (6.3)$$

Portanto a deflexão fotônica é dependente da energia no contexto da gravitação quadrática.  $\diamond$

Note que a parte dependente da energia em (6.3) provém unicamente do setor  $R_{\mu\nu}^2$  da teoria quadrática.

**Proposição 2.** *Fótons que passam nas vizinhanças do sol sofrem, no contexto da gravitação quadrática, uma deflexão  $\phi$  que varia de  $0^+$  a  $1,75^-$  (segundos de arco)[24].*

*Prova.* No caso de um fóton que passa nas proximidades do sol (6.3) nos diz que

$$\left(\frac{\phi}{\phi_E}\right)^2 - 1 = \frac{1}{1+a^2} + \frac{2}{a^2} \ln \frac{1}{1+a^2}, \quad (6.4)$$

onde  $\phi_E \equiv \frac{4GM}{R}$ , e  $a^2 \equiv \frac{m_1^2}{E^2\phi^2}$ . Note que o lado direito de (6.4) tende a zero quando  $m_1 \rightarrow \infty$ , o que implica em  $\phi \rightarrow \phi_E$  (como esperado). Para completar nossa demonstração precisamos de um lema.

**Lema.** *Se  $b < c$ , onde  $b$  e  $c$  são números reais, e  $b > 0$ , então  $\ln b/c < (b-c)/c$  [24].*

*Prova.* Pelo teorema do valor médio,  $\frac{\ln c/b}{c-b} = \frac{1}{d}$ , onde  $b < d < c$ . Levando em conta que  $\frac{1}{d} > \frac{1}{c}$ , concluímos que  $\ln b/c < \frac{b-c}{c}$ .  $\diamond$

Utilizando o lema acima, chegamos à conclusão que  $\frac{1}{1+a^2} + \frac{2}{a^2} \ln \frac{1}{1+a^2} < -\frac{1}{1+a^2} < 0$ , o que implica em  $\phi < \phi_E$ . Portanto, para um fóton passando próximo ao sol  $\phi$  varia de  $0^+$  a  $1,75^-$  (segundos de arco).  $\diamond$

### 6.3 Arco-Íris de Gravitação no Contexto da Gravitação Quadrática

A propagação dispersiva de fótons que encontramos na seção anterior constitui em princípio uma violação, a nível de árvore, do princípio de equivalência.

Isto nos leva a uma questão bastante interessante: seria a dispersão em questão observável? Para responder a esta indagação vamos avaliar, usando (6.4), a grandeza do ângulo segundo o qual o espectro visível seria espalhado. Para tal precisamos determinar a ordem de grandeza de  $m_1^2$ . Se  $|\beta| \sim 10^{74}$  [25,26],  $m_1^2 \sim 1,5 \times 10^{-6} m^{-2}$ . Por outro lado,  $E_{\text{violeta}} \sim 1,6 \times 10^2 m^{-1}$  e  $E_{\text{vermelho}} \sim 9,0 \times 10^6 m^{-1}$ . Usando estes resultados, obtemos a partir de (6.2)

$$\begin{aligned}\phi_{\text{violeta}} &\sim 3,0 \times 10^{-4} \text{ segundos de arco} , \\ \phi_{\text{vermelho}} &\sim 9,3 \times 10^{-4} \text{ segundos de arco} .\end{aligned}$$

Como consequência, o espectro visível, cujo comprimento de onda varia de 4000 a 7000( $\text{\AA}$ ), seria espalhado segundo um ângulo  $\Delta\phi$  da ordem de  $6 \times 10^{-4}$  segundos de arco. Em princípio tal arco-íris de gravidade seria observável. Não podemos, no entanto, confiar plenamente neste resultado, uma vez que ele depende do valor estimado para  $m_1$ . No presente, tudo o que sabemos sobre este parâmetro é que ele pode tomar aparentemente qualquer valor entre 0 e  $\infty$ . Evidentemente, tais flutuações de  $m_1$  irão se refletir no valor estimado para  $\Delta\phi$ . Concluindo podemos dizer que arco-íris de gravidade e gravitação quadrática podem coexistir sem conflito, porém se tal arco-íris seria observável é uma questão ainda em aberto.

## 6.4 *Sumário*

Mostramos neste capítulo que a teoria de gravitação quadrática produz propagação dispersiva de fótons. O setor  $R^2$  da teoria não contribui para o espalhamento destes num campo gravitacional estático, tratado como campo externo, sendo a contribuição dependente da energia inteiramente devida ao setor  $R_{\mu\nu}^2$ . Mostramos também que a teoria de gravitação quadrática prevê a existência



# Epílogo

Listamos em sequência a nossa contribuição para o estudo da gravitação com derivadas de ordem superior, bem como para a teoria de gravitação  $R + R^2$ .

- *Construção de um algoritmo para o cálculo do propagador do gráviton em teorias de gravitação de ordem superior [1].*
- *Apresentação de um método que permite calcular o potencial gravitacional de teorias quadráticas via teoria de campos [7,13].*
- *Apresentação de um método sistemático para o estudo da unitariedade a nível de árvore de teorias gravitacionais [7].*
- *Apresentação de uma teoria de gravitação de ordem superior - a “teoria de Fierz-Pauli+ $R^2$ ”, que é não taquiônica e unitária a nível de árvore [7].*
- *Demonstração de que no gauge de Teyssandier [14] a solução geral das equações de campo linearizadas concernentes à teoria quadrática é uma combinação linear de dois campos tensoriais simétricos de segunda ordem e de um campo escalar, assim como um estudo da consistência deste gauge [13].*
- *Estudo do desvio da luz, bem como da deflexão gravitacional de fótons, no*

contexto da teoria  $R+R^2$  e nos gauges de de Donder [15] e Teysandier [21].

- Prova de que a deflexão gravitacional  $\phi$  para raios luminosos que passam próximos ao sol jaz no intervalo  $0 < \phi < 1,75''$ , no caso da teoria quadrática [13].
- Demonstração de que a propagação fotônica é dispersiva no caso da teoria quadrática [13].
- Prova de que a deflexão gravitacional  $\phi$  para fótons que passam nas vizinhanças do sol varia de  $0^+$  a  $1,75^-$  (segundos de arco) no contexto da teoria quadrática [24].
- Demonstração de que a teoria quadrática prevê a existência de um arco-íris de gravidade [22].
- Estudo sobre a possibilidade deste arco-íris de gravidade ser ou não observável [22].
- Demonstração de que a teoria quadrática viola o princípio de equivalência a nível de árvore [22].

# Apêndice A

## Transformações de Gauge na Gravitação

A simetria de gauge na gravitação decorre diretamente da invariância da teoria sob transformações gerais de coordenadas. Seja então a seguinte transformação de coordenadas infinitesimal

$$\bar{x}^\mu = x^\mu + \kappa \Lambda^\mu \quad , \quad (\text{A.1})$$

ou seja,

$$\delta x^\mu = \bar{x}^\mu - x^\mu = \kappa \Lambda^\mu \quad ,$$

onde  $\Lambda^\mu$  é um campo vetorial infinitesimal. Quando submetemos o tensor métrico  $g_{\mu\nu}(x)$  à transformação infinitesimal (A.1), este se transforma como se segue

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} g_{\alpha\beta}(x) \\ &= \left( \delta_\mu^\alpha - \kappa \Lambda_{,\mu}^\alpha \right) \left( \delta_\nu^\beta - \kappa \Lambda_{,\nu}^\beta \right) g_{\alpha\beta}(x) \\ &= g_{\mu\nu}(x) - \kappa \Lambda_{,\mu}^\alpha g_{\alpha\nu}(x) - \kappa \Lambda_{,\nu}^\beta g_{\mu\beta}(x) \quad . \end{aligned}$$

Porém,

$$\begin{aligned}
 \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) &= \bar{g}_{\mu\nu}(x + \kappa\Lambda) \\
 &= \bar{g}_{\mu\nu}(x) + (\bar{x}^\lambda - x^\lambda) \partial_\lambda \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) \\
 &= \bar{g}_{\mu\nu}(x) + \kappa\Lambda^\lambda \partial_\lambda \bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) .
 \end{aligned}$$

Como  $\delta g_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x)$ , podemos substituir  $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$  por  $g_{\mu\nu}(x)$  em todos os termos que contenham  $\Lambda^\mu$ . Segue-se, então, que  $\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) + \kappa\Lambda^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu}(x)$ . Portanto,

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = -\kappa\Lambda^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu}(x) - \kappa\Lambda^\alpha{}_{;\mu} g_{\alpha\nu}(x) - \kappa\Lambda^\beta{}_{;\nu} g_{\mu\beta}(x) . \quad (\text{A.2})$$

Num sistema geodésico, (A.2) toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \delta g_{\mu\nu}(x) &= -\kappa\Lambda^\alpha{}_{;\mu} g_{\alpha\nu}(x) - \kappa\Lambda^\beta{}_{;\nu} g_{\mu\beta}(x) \\
 &= -\kappa\Lambda_{\nu;\mu} - \kappa\Lambda_{\mu;\nu} .
 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Como (A.3) é uma equação tensorial, ela é válida em qualquer sistema de coordenadas. Logo,

$$\bar{g}_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) - \kappa\Lambda_{\mu;\nu} - \kappa\Lambda_{\nu;\mu} . \quad (\text{A.4})$$

No caso da teoria linearizada,

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(x) . \quad (\text{A.5})$$

Levando (A.5) em (A.4), obtemos a transformação de gauge local para o campo gravitacional linearizado, ou seja,

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = h_{\mu\nu}(x) - \Lambda_{\mu,\nu}(x) - \Lambda_{\nu,\mu}(x) . \quad (\text{A.6})$$

## Apêndice B

# Equações de Campo para a Teoria Quadrática

As equações de campo para a teoria quadrática podem ser deduzidas a partir da ação  $I = I_G - I_M$ , sendo

$$I_G \equiv \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{2R}{\kappa^2} + \frac{\alpha}{2} R^2 + \frac{\beta}{2} R_{\mu\nu}^2 \right]$$

e

$$I_M \equiv \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M \quad .$$

onde,  $\mathcal{L}_M$  é a densidade Lagrangiana de matéria.

A variação da ação acima com relação à métrica  $g_{\mu\nu}$  fornece as equações de campo. Para calcular  $\delta I$  vamos determinar separadamente as variações das integrais  $\int d^4x \sqrt{-g} R$ ,  $\int d^4x \sqrt{-g} R^2$  e  $\int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu}^2$ .

(i) *Variação de  $R^{\rho}_{\mu\nu\lambda}$ .*

Num sistema geodésico,  $R^{\rho}_{\mu\nu\lambda} = -\Gamma^{\rho}_{\mu\nu,\lambda} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda,\nu}$ , onde o símbolo de Christoffel  $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$  é definido por

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} [g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}] .$$

Assim,

$$\delta R^{\rho}_{\mu\nu\lambda} = -\nabla_{\lambda}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \quad , \quad \delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma} [\nabla_{\nu}\delta g_{\mu\sigma} + \nabla_{\mu}\delta g_{\nu\sigma} - \nabla_{\sigma}\delta g_{\mu\nu}] \quad .$$

Como conseqüência obtemos

$$\begin{aligned} \delta R^{\rho}_{\mu\nu\lambda} &= \frac{1}{2} [g^{\rho\sigma} (\nabla_{\nu}\nabla_{\lambda} - \nabla_{\lambda}\nabla_{\nu})\delta g_{\mu\sigma} + g^{\rho\sigma} (\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}\delta g_{\lambda\sigma} - \nabla_{\lambda}\nabla_{\mu}\delta g_{\nu\sigma}) \\ &+ \nabla_{\lambda}\nabla^{\rho}\delta g_{\mu\nu} - \nabla_{\nu}\nabla^{\rho}\delta g_{\mu\lambda}] \quad . \end{aligned}$$

(ii) *Variação de  $R_{\mu\nu}$ .*

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= \delta R^{\rho}_{\mu\nu\rho} \\ &= \frac{1}{2} [-\nabla^{\lambda}\nabla_{\nu}\delta g_{\mu\lambda} - \nabla^{\lambda}\nabla_{\mu}\delta g_{\nu\lambda} + g^{\rho\sigma}\nabla_{(\mu}\nabla_{\nu)}\delta g_{\rho\sigma} + \square\delta g_{\mu\nu}] \quad , \end{aligned}$$

onde  $\nabla_{(\mu}\nabla_{\nu)} \equiv \frac{1}{2}(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} + \nabla_{\nu}\nabla_{\mu})$ .

(iii) *Variação de  $R$ .*

Como  $\delta R = \delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu})$ , podemos escrever

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \nabla^{\mu}\nabla^{\nu}\delta g_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\square\delta g_{\mu\nu} \quad .$$

Lembrando que  $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\delta g_{\rho\sigma}$ , obtemos

$$\delta R = [-R^{\mu\nu} - \nabla^{\mu}\nabla^{\nu} + g^{\mu\nu}\square]\delta g_{\mu\nu} \quad . \quad (B.1)$$

(iv) *Variação de  $\int d^4x\sqrt{-g}R$ .*

Observando que

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \quad , \quad (B.2)$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \delta \int d^4x \sqrt{-g} R &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{Rg^{\mu\nu}}{2} - R^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \square \delta g_{\mu\nu} \\ &- \int d^4x \sqrt{-g} \nabla^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \square \delta g_{\mu\nu} = \int d\tau_\rho \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \nabla^\rho \delta g_{\mu\nu} \quad ,$$

e

$$\int d^4x \sqrt{-g} \nabla^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} = \int d\tau_\rho \sqrt{-g} g^{\rho\mu} \nabla^\mu \delta g_{\mu\nu}.$$

Supondo que  $\delta g_{\mu\nu}$  e  $\nabla^\rho \delta g_{\mu\nu}$  se anulem na superfície que limita a região de integração, resulta

$$\delta \int d^4x \sqrt{-g} R = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{Rg^{\mu\nu}}{2} - R^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} \quad .$$

(v) *Variação de  $\int d^4x \sqrt{-g} R^2$ .*

Usando (B.1) e (B.2), obtemos

$$\begin{aligned} \delta \int d^4x \sqrt{-g} R^2 &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{g^{\mu\nu} R^2}{2} - 2RR^{\mu\nu} - 2\nabla^\mu \nabla^\nu R \right. \\ &\left. + 2g^{\mu\nu} \square R \right] \delta g_{\mu\nu} \quad . \end{aligned}$$

(vi) *Variação de  $\int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu}^2$ .*

$$\begin{aligned} \delta \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} &= \int d^4x \sqrt{-g} R_{\rho\sigma}^2 \frac{g^{\mu\nu}}{2} \delta g_{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} 2R^{\mu\nu} \delta R^{\mu\nu} \\ &- \int d^4x \sqrt{-g} 2R^{\mu\rho} R_{\rho}{}^\nu \delta g_{\mu\nu} \quad . \end{aligned}$$

Porém,

$$\int d^4x \sqrt{-g} 2R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -2\nabla_\lambda \nabla^\nu R^{\mu\lambda} + g^{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla_\sigma R^{\rho\sigma} + \square R^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} \quad .$$

No apêndice C mostramos que

$$\nabla_\lambda \nabla^\nu R^{\mu\lambda} = \frac{1}{2} \nabla^\mu \nabla^\nu R + R^{\mu\rho\lambda\nu} R_{\rho\lambda} - R^{\mu\rho} R_{\rho}{}^\nu \quad .$$

e

$$\nabla_\lambda R^{\mu\lambda} = \frac{1}{2} \nabla^\mu R.$$

Como conseqüência:

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} 2R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\nabla^\mu \nabla^\nu R - 2R^{\mu\rho\lambda\nu} R_{\rho\lambda} \right. \\ &\quad \left. + 2R^{\mu\rho} R_{\rho}{}^\nu + \frac{g^{\mu\nu}}{2} \square R + \square R^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} \quad . \end{aligned}$$

Desta forma, a variação de  $\int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu}^2$  é dada por

$$\begin{aligned} \delta \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu}^2 &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R_{\rho\sigma}^2 \frac{g^{\mu\nu}}{2} - \nabla^\mu \nabla^\nu R - 2R^{\mu\rho\lambda\nu} R_{\rho\lambda} \right. \\ &\quad \left. + \frac{g^{\mu\nu}}{2} \square R + \square R^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} \quad . \end{aligned}$$

(vii) *As equações de campo.*

Reunindo os resultados acima, e levando em conta que

$$\delta I_M \equiv \int \sqrt{-g} d^4x \frac{T^{\mu\nu}}{2} \delta g_{\mu\nu} \quad ,$$

obtemos as equações de campo para a teoria quadrática de gravitação, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{2}{\kappa^2} G_{\mu\nu} + \frac{\alpha}{2} \left[ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R^2 + 2R R_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu \nabla_\nu R - 2g_{\mu\nu} \square R \right] + \frac{\beta}{2} \left[ -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\rho\sigma}^2 \right. \\ \left. + \nabla_\mu \nabla_\nu R + 2R_{\mu\rho\lambda\nu} R^{\rho\lambda} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \square R - \square R_{\mu\nu} \right] + \frac{1}{2} T_{\mu\nu} = 0 \quad . \end{aligned}$$

## Apêndice C

# Uma Identidade Tensorial Importante

Uma identidade tensorial importante envolvendo as derivadas de um tensor contravariante de segunda ordem é

$$A^{\alpha\beta}{}_{;\nu\mu} - A^{\alpha\beta}{}_{;\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\rho\mu\nu}A^{\rho\beta} + R^{\beta}{}_{\rho\mu\nu}A^{\alpha\rho} .$$

Para provar este resultado notemos que num sistema geodésico são válidas as seguintes relações:

- (1)  $R^{\rho}{}_{\lambda\mu\nu} = -\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^{\rho}{}_{\lambda\nu,\mu} ,$
- (2)  $A^{\alpha\beta}{}_{;\mu\nu} = (A^{\alpha\beta}{}_{;\mu})_{,\nu} = A^{\alpha\beta}{}_{,\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\rho\mu,\nu}A^{\rho\beta} + \Gamma^{\beta}{}_{\rho\mu,\nu}A^{\alpha\rho} ,$
- (3)  $A^{\alpha\beta}{}_{;\nu\mu} = A^{\alpha\beta}{}_{,\nu\mu} + \Gamma^{\alpha}{}_{\rho\nu,\mu}A^{\rho\beta} + \Gamma^{\beta}{}_{\rho\nu,\mu}A^{\alpha\rho} .$

Logo,

$$A^{\alpha\beta}{}_{;\nu\mu} - A^{\alpha\beta}{}_{;\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\rho\mu\nu}A^{\rho\beta} + R^{\beta}{}_{\rho\mu\nu}A^{\alpha\rho} .$$

A equação acima é covariante e portanto possui a mesma forma em todos os sistemas de coordenadas. Usando esta identidade podemos escrever  $R^{\mu\lambda;\nu}{}_{\lambda}$

na forma

$$R^{\mu\lambda;\nu}{}_{\lambda} = R^{\mu\lambda}{}_{;\lambda}{}^{\nu} + R^{\mu\rho\lambda\nu}R_{\rho\lambda} - R^{\mu\rho}R_{\rho}{}^{\nu} .$$

Mas, como sabemos,  $(R^{\mu\lambda} - \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}R)_{;\lambda} = 0$ , o que implica em  $R^{\mu\lambda}{}_{;\lambda} = \frac{1}{2}R^{;\mu}$ .  
Segue-se que

$$R^{\mu\lambda;\nu}{}_{\lambda} = \frac{1}{2}R^{;\mu\nu} + R^{\mu\rho\lambda\nu}R_{\rho\lambda} - R^{\mu\rho}R_{\rho}{}^{\nu} ,$$

que é justamente a identidade tensorial que procurávamos. Este resultado mostra que  $R^{\mu\lambda;\nu}{}_{\lambda}$  é simétrico na troca de  $\mu$  por  $\nu$ , como esperado.

# Referências

- [1] A. Accioly, S. Ragusa, H. Mukai and E. de Rey Neto, Algorithm for Computing the Propagator for Higher Derivative Gravity Theories, *Int. J. Theor. Phys.* **39** (2000), 1601.
- [2] R. J. Rivers, *Nuovo Cimento* **34** (1964), 387.
- [3] P. van Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys. B* **60** (1973), 478.
- [4] K. S. Stelle, *Phys. Rev. D* **16** (1977), 953.
- [5] I. Antoniadis and E. T. Tomboulis, *Phys. Rev. D* **33** (1986), 2756.
- [6] J. C. Alonso, F. Barbero, J. Julve and A. Tiemblo, *Class. Quantum Grav.* **11** (1994), 865.
- [7] A. Accioly, S. Ragusa, H. Mukai and E. de Rey Neto, Fierz-Pauli Higher Derivative Gravity, *Braz. J. Phys.* **30**, N. 3, September, (2000).
- [8] E. Hitzer and H. Dehnen, *Int. J. Theor. Phys.* **36** (1997), 559.
- [9] J. Julve and M. Tonin, *Nuovo Cimento B* **46** (1978), 137.
- [10] P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Rev. D* **7** (1973), 2300.

- [11] V. Fock, *The Theory of Space, Time and Gravitation*, Pergamon Press, Oxford (1964).
- [12] H. van Dam and M. Veltman, *Nucl. Phys. B* **22** (1970), 397.
- [13] Antonio Accioly, Abel Azeredo, Hatsumi Mukai and Edgard de Rey Neto, Scattering of Photons by an External Gravitational Field in the Framework of Higher-Derivative Gravity, *Prog. Theor. Phys.*, **104** N. 1, July (2000).
- [14] P. Teyssandier, *Class. Quantum Grav.* **6** (1989), 2756.
- [15] A. Accioly, A. D. Azeredo, E. C. de Rey Neto and H. Mukai, Bending of Light in the Framework of  $R + R^2$  Gravity, *Braz. J. Phys.* **28** (1998), 496.
- [16] A. Papapetrou, *Lectures on General Relativity*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holand, (1974).
- [17] Antonio Accioly and Hatsumi Mukai, *Braz. J. Phys.* **28** (1998), 35.
- [18] A. P. Lightman and D. Lee, *Phys. Rev. D* **8** (1973), 364.
- [19] E. Fischbach and B. S. Freeman, *Phys. Rev. D* **22** (1980), 2950.
- [20] R. P. Feynman, F. B. Moringo and W. G. Wagner, *Feynman Lectures on Gravitation*, Penguin Books, Great Britain (1999).
- [21] A. Accioly, S. Ragusa, E. C. de Rey Neto and H. Mukai, Prediction of  $R + R^2$  gravity for the deflection of a photon passing close to the Sun, *Nuovo Cimento B (NOTE BREVI)* **114** (1999), 595.

- [22] Antonio Accioly, Abel Azeredo and Harold Blas, Gravity's rainbow in the framework of gravity with higher derivatives (received by *Phys. Lett. A* on 25/05/2000, HO 3449). **Status:** *em julgamento*.
- [23] D. Boccaletti, V. de Sabbata, C. Gualdi and P. Fortini, *Nuovo Cimento A* **48** (1967), 8.
- [24] A. Accioly, H. Mukai and H. Blas, Light deflection and quadratic gravity (received by *Nuovo Cimento B* (NOTE BREVI) on 02/06/2000, NCLB 8625). **Status:** *em julgamento*.
- [25] K. S. Stelle, *Gen. Rel. Grav.* **9** (1978), 353.
- [26] J. F. Donoghue, *Phys. Rev. Lett.* **72** (1994), 2996.
- [27] G. 't Hooft and M. Veltman, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **20** (1974), 69.
- [28] Marc H. Goroff and Augusto Sagnotti, *Phys. Lett. B* **160** (1985), 81.
- [29] S. Deser and P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Rev. D* **33** (1974), 401.
- [30] S. A. Brunini and M. Gomes, *Mod. Phys. Lett. A* **8** (1993), 1977.
- [31] F. C. P. Nunes and G. O. Pires, *Phys. Lett. B* **301** (1993), 478.
- [32] C. Pinheiro, G. O. Pires and F. A. B. Rabelo de Carvalho, *Braz. J. Phys.* **27** (1997) 14.

