

147



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.009/2000

OK

**A teoria de Duffin-Kemmer-Petiau: Aspectos Clássicos
e Quânticos**

Juan Segundo Valverde Salvador

Orientador

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar



Julho 2000

Agradecimentos

A Natália, minha esposa, pelo incentivo e apoio durante todo o tempo em que estamos juntos.

A meus pais, pelo apoio dado durante toda minha vida.

Ao Prof. Pimentel, por ter me aceitado como aluno, pela orientação acadêmica e pelos bons conselhos que recebi dele.

Ao Prof. V. Ya. Fainberg, pela colaboração frutífera durante o trabalho.

A Marcos Cardoso pela amizade. A Randall e Tadeu pela ajuda na redação desta dissertação.

Aos colegas peruanos, em especial a Teovar pelas conversas e discussões.

A todos os alunos do IFT.

À FAPESP (processo número 98/00268-1), pelo apoio financeiro que tornou este trabalho possível.

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo principal analizar el impacto de la implementación de la Ley de Transparencia en el acceso a la información pública en el Estado de México. Se revisa la evolución de la legislación en materia de acceso a la información pública, así como el funcionamiento del Sistema de Acceso a la Información Pública (SAIP) en el Estado de México. Se concluye que la Ley de Transparencia ha permitido un mayor acceso a la información pública, pero aún existen desafíos para garantizar la transparencia en todos los niveles de gobierno.

El presente trabajo tiene como objetivo principal analizar el impacto de la implementación de la Ley de Transparencia en el acceso a la información pública en el Estado de México. Se revisa la evolución de la legislación en materia de acceso a la información pública, así como el funcionamiento del Sistema de Acceso a la Información Pública (SAIP) en el Estado de México. Se concluye que la Ley de Transparencia ha permitido un mayor acceso a la información pública, pero aún existen desafíos para garantizar la transparencia en todos los niveles de gobierno.

A mi pequeño hijo, Juan Andrei.

El presente trabajo tiene como objetivo principal analizar el impacto de la implementación de la Ley de Transparencia en el acceso a la información pública en el Estado de México. Se revisa la evolución de la legislación en materia de acceso a la información pública, así como el funcionamiento del Sistema de Acceso a la Información Pública (SAIP) en el Estado de México. Se concluye que la Ley de Transparencia ha permitido un mayor acceso a la información pública, pero aún existen desafíos para garantizar la transparencia en todos los niveles de gobierno.

A mi pequeño hijo, Juan Andrei.

Resumo

Estudamos, tanto no nível clássico e quântico, a teoria de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP). No nível clássico, o problema referente à existência de um termo anômalo na Hamiltoniana de interação de partículas escalares carregadas DKP interagindo com o campo EM é resolvido considerando-se de forma correta a componente física do campo DKP.

Quanticamente, usando a representação de Källen-Lehmann, obtemos as funções de Green exatas para o fóton e a partícula escalar carregada DKP. Mostramos que, na aproximação a um loop, as funções de Green para o fóton coincidem nas teorias de DKP e Klein-Gordon (KG). Da mesma maneira, calculamos a um loop a função de Green para o caso da partícula escalar de DKP.

Palavras Chave: Teoria DKP, representação de Källen-Lehmann, Funções de Green exatas.

Área de conhecimento: Teoria de Campos.

Abstract

The Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) theory is studied both on the classical and quantum levels. In the classical level, we see that the problem related to the presence of an anomalous term in the interaction Hamiltonian of charged scalar DKP particles interacting with the electromagnetic field is solved by correctly using the physical component of DKP field.

In the quantum level, we use the Källen-Lehmann (KL) representation to obtain the exact Green Functions (GF) for the photon and scalar charged DKP particles. We show that the GF for the photon coincide in the DKP and Klein Gordon (KG) theories in one-loop approximation. We calculate the GF for the scalar DKP particles in one-loop approximation, too.

Keywords: DKP Theory, The Källen-Lehmann Representation, Exact Green Functions.

Índice

Introdução	1
1 A equação de onda relativística	5
1.1 O campo livre	5
1.2 Equação de Dirac	12
1.3 As matrizes γ_μ sob as transformações de Lorentz	14
1.4 Equações de onda relativísticas generalizadas	17
2 A Teoria de Duffin-Kemmer-Petiau	21
2.1 A equação de Duffin-Kemmer-Petiau e as propriedades algébricas das matrizes β	21
2.2 As representações de β na teoria de DKP	25
2.3 A invariância relativística	38
2.4 A invariância de gauge e a interação com o campo EM	41
2.5 Formulação hamiltoniana	52
3 Quantização	57
3.1 Quantização do campo DKP	57
3.2 Regras de comutação. Propagador do campo DKP. Função de Green	62

4	Representação de Källen-Lehmann (KL). Funções de Green Ex-	70
	atas	
4.1	Campo escalar	70
4.2	Função de Green exata para o fóton	76
4.3	Função de Green exata para a partícula DKP	79
5	Correções radiativas a um loop	83
5.1	Polarização do vácuo	83
5.2	Correção de massa	87
6	Conclusões	91
	Bibliografia	93

Introdução

A equação de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) [1, 2, 3] é uma equação relativista conveniente para a descrição de partículas de spin 0 e 1, com a vantagem sobre outras equações relativistas do tipo Klein-Gordon (KG) [4, 5, 6] para partículas de spin 0, ou Proca para partículas de spin 1, por ser uma equação diferencial linear de primeira ordem; fato este importante quando o formalismo canônico é adotado na teoria. É importante mencionar que a equação de DKP é muito semelhante à equação de Dirac (spin 1/2), com a diferença de que as matrizes satisfazem uma álgebra diferente.

O primeiro a propor o que agora se conhece como álgebra de DKP foi Petiau [1], que baseou seus trabalhos nas equações lineares de primeira ordem contendo matrizes 16×16 , as quais, por sua vez, foram obtidas a partir de duas representações diferentes para as matrizes de Dirac. Posteriormente, foi mostrado que tal representação é redutível, podendo-se decompor em outras 3 representações irredutíveis: 1 representação 5×5 (para spin 0), 1 representação 10×10 (para spin 1) e uma última representação trivial.

São os trabalhos de Proca [7] que inspiram Kemmer, que consegue obter as equações de Proca como descritas por equações acopladas de primeira ordem, levando-o a escrever equações análogas para o caso de spin 0. No entanto, ele

não consegue clarificar, num primeiro instante, qual é a álgebra que as matrizes β devem satisfazer.

Muito antes, Duffin [2], um matemático, que assistiu a um seminário sobre as equações de Proca dadas por Kemmer, consegue relacionar campos de spin 0 e 1 com as equações de primeira ordem na formulação β , afirmando que elas devem satisfazer as já conhecidas relações de comutação obtidas também por Petiau. É Kemmer quem sintetiza seus trabalhos, junto aos avanços realizados por Duffin e Petiau, escrevendo seu célebre trabalho em 1939 [3].

Embora transcorridos já mais de 60 anos, podemos, no entanto, dividir este período em três fases: a primeira, de 1939 (com a aparição do clássico trabalho de N. Kemmer) até aproximadamente 1970; a segunda, de 1970 até 1980, e a última, de 1980 até os dias atuais.

Durante o primeiro período a maioria dos trabalhos sobre a equação de DKP foi dedicada ao desenvolvimento do formalismo e à investigação sobre a interação das partículas de DKP com o campo EM. Para uma série de processos, os cálculos baseados nos formalismos de DKP e Klein-Gordon (KG) proporcionam resultados idênticos [8, 9], inclusive para as correções a um *loop* [10, 11].

Uma contribuição importante feita para a compreensão de tais problemas foi feita por Wightman no seu trabalho [12] dedicado ao 70º aniversário de P.A.M. Dirac em 1971. Ele mostrou que, para o acoplamento mínimo com o campo EM ($\sim e\bar{\psi}\beta_\mu\psi A_\mu$), há estabilidade da equação DKP para partículas de spin 0 sob perturbações locais do campo externo, ou melhor, que o caráter retardado das soluções da equação DKP é conservado sob tais perturbações. O ponto central da prova dada por Wightman é o fato do caráter retardado da solução estar vinculado à renormalização da teoria no caso de interação com um campo EM

quantizado.

O segundo período pode ser caracterizado por algumas desilusões. Neste período dois grandes descobrimentos foram feitos: a violação da paridade e a criação de uma teoria unificada para as interações eletrofracas (o modelo de Weinberg-Salam). O problema sobre a equivalência entre as duas teorias DKP e KG é levantado novamente ao pretender-se descrever novos processos. Muitos trabalhos [8] foram realizados aplicando o formalismo DKP para a desintegração de mésons K e outros mésons instáveis, levando a resultados diferentes dados pela equação de KG.

O terceiro período é marcado pela incerteza a respeito da equivalência entre as duas teorias DKP e KG. Não são muitos os trabalhos publicados a respeito. Uma prova concludente sobre a equivalência entre os elementos físicos da matriz S , em qualquer ordem da teoria de perturbações, das teorias DKP e KG foi dada recentemente [13, 14] para os casos de partículas escalares carregadas interagindo com um campo EM externo ou quântico com acoplamento mínimo.

Recentemente tem aumentado o interesse pela teoria de DKP. Em particular, esta foi aplicada à QCD (a curtas e longas distâncias) por Gribov [15], à dinâmica covariante hamiltoniana por Kanatchikov [16], e tem sido analisada sua generalização relativística acoplada a campos gravitacionais [17, 14, 18].

Num primeiro instante, no presente trabalho, é dada uma introdução sobre as equações relativísticas lineares de primeira ordem no nível clássico e observa-se de maneira transparente como elas aparecem de forma natural caso a condição de KG seja exigida. No capítulo 2 serão apresentadas as equações de DKP e as propriedades algébricas que as matrizes β devem satisfazer; além disso uma representação particular é obtida para o caso escalar. Introduzindo os projetores

P e P_μ [19], é selecionada a componente física do campo DKP e prova-se ao mesmo tempo a invâriância relativística da teoria.

A interação com o campo EM é introduzida e vê-se que para manter a invariância por transformações de gauge local é necessário selecionar a componente física do campo tal que a regra de acoplamento mínimo seja bem justificada. É importante mencionar que o procedimento não causa problemas vinculados ao termo anômalo inicialmente mencionadas por Kemmer e recentemente analisado no trabalho [20].

Por outro lado, no capítulo 3 é realizada a quantização do campo DKP usando o formalismo canônico, calculando-se o propagador do campo escalar (função de Green) e notando, como consequência dos vínculos existentes na teoria [13], o surgimento de um termo a mais, proporcional a $(1 - \beta_0^2)$, que não contribui para os elementos da matriz S para os estados físicos da partícula.

No capítulo 4 obtemos a representação de Källen-Lehmann (KL) [21, 22, 23, 24] para o caso escalar usando a teoria de KG e a Função de Green exata do fóton e do campo escalar carregado na teoria DKP. São calculados, na aproximação a um *loop*, as Funções de Green para o caso do fóton e da partícula escalar carregada DKP [25].

No capítulo 5 calculamos a polarização do vácuo $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}$ e a correção de masa $\Sigma_{\mu\nu}^{(2)}$ [25] para uma partícula escalar carregada DKP a um *loop*. Em ambos os casos são obtidos resultados que **coincidem** aos fornecidos pela teoria de KG, e pode-se dizer que as duas teorias são idênticas ao nível de um *loop*.

Finalmente, apresentamos nossas conclusões e perspectivas no capítulo 6.

1. A equação de onda relativística

1.1 O campo livre

Em princípio definiremos o espaço-tempo, que está determinado pela métrica

$$\delta_{\mu\nu} = (+, +, +, +). \quad (1.1)$$

Essa métrica define o chamado espaço-tempo de Minkowski. No espaço de Minkowski podemos definir os 4-vetores. O 4-vetor para a coordenada é dado por

$$x_\mu = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\mathbf{x}, x_4) = (\mathbf{x}, ix_0) = (\mathbf{x}, ict). \quad (1.2)$$

Vemos que com esta notação estamos evitando as definições de 4-vetor covariante e de 4-vetor contravariante que usualmente se usa na maioria da literatura. A utilidade desta medida é que deixaremos de nos preocupar com a posição em que devem ser escritos os índices (acima ou abaixo). O produto invariante dos 4-vetores segundo (1.2) é

$$x_\mu x_\mu = \mathbf{x}^2 - (ct)^2 = inv. \quad (1.3)$$

Definimos do mesmo modo o 4-vetor momento

$$p_\mu = (\mathbf{p}, p_4) = \left(\mathbf{p}, i \frac{E}{c} \right). \quad (1.4)$$

A condição de invariância para o 4-momento na camada de massa é

$$p_\mu p_\mu = \mathbf{p}^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m^2 c^2 = inv. \quad (1.5)$$

A equação de onda da mecânica quântica não relativística não tem a forma invariante de Lorentz, por isso é necessário procurar equações que derivam das equações não relativísticas e sua conseqüente extensão à Teoria Quântica de Campos (TQC) que descrevam as partículas livres, pois aqui elas adquirem a forma invariante de Lorentz. Podemos tomar um dos exemplos mais comuns para ilustrar a idéia¹. É sabido que na mecânica não relativística a energia e o momento se relacionam como: $E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$. Na Mecânica Quântica estas quantidades são interpretadas como operadores

$$\begin{aligned} E &= i \frac{\partial}{\partial t} = i \partial_t \\ \mathbf{p} &= -i \nabla. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Essa é uma relação bem conhecida que garante a conexão entre a onda e a partícula. Nota-se que (1.6) pode ser obtida facilmente usando-se a representação 4-vetorial para p_μ como $p_\mu = -i \partial_\mu$. Fazendo uso de (1.5) é fácil obter a equação de onda para os campos $Q_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$

$$(\square - m^2) Q_\alpha(x) = 0, \quad \square = \partial_\mu \partial_\mu, \quad (1.7)$$

¹Daqui em diante usaremos o sistema de unidades para o qual a velocidade da luz $c = 1$ e a constante de Planck $\hbar = 1$.

a qual é conhecida como equação de Klein-Gordon (KG). Desta forma, assumiremos que os campos quânticos de qualquer TQC devem satisfazer a mencionada condição de KG.

Os campos quânticos correspondem às partículas elementares livres que satisfazem a equação (1.7). Uma ilustração familiar é a proporcionada pelas componentes $A_\mu(x)$ do campo Eletromagnético (EM). Se considerarmos que as componentes do campo $Q_\alpha(x)$ correspondem às partículas com diferentes massas $(m_1, m_2, \dots, m_n)$, a equação (1.7) é substituída

$$\prod_{s=1}^n (\square - m_s^2) Q_\alpha(x) = 0. \quad (1.8)$$

A diferença entre a equação (1.8) e a equação não relativística é que na primeira se tem uma derivada segunda no operador temporal. Isto traz como consequência que a "densidade de probabilidades" não é positivamente definida. É bem conhecido que qualquer equação diferencial de ordem superior nas derivadas pode ser convertida a um sistema de equações de primeira ordem com o incremento do número de variáveis.

O fato que a equação de onda não-relativística é de primeira ordem em relação à derivada temporal é crucial para a mecânica quântica no formalismo canônico, no qual a invariância canônica da teoria reflete a conservação das probabilidades. Com o objetivo de preservar a lei mencionada adota-se o formalismo canônico na TQC. Esta formulação canônica dos campos quânticos está baseada na condição que as equações diferenciais devem ser de primeira ordem. A formulação canônica pode aplicar-se à quantização dos campos quânticos sempre e quando a condição de KG seja satisfeita.

Um exemplo bem conhecido de equação de campo de primeira ordem nas derivadas espaço-temporais encontra-se no eletromagnetismo. As equações de

Maxwell são um sistema de equações diferenciais de primeira ordem para 4 componentes do vetor potencial $A_\mu(x)$ e as 6 componentes do tensor de campo EM $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ que satisfazem (1.7).

Podemos converter, para o caso de uma componente, a equação (1.7)

$$(\square - m^2) Q(x) = 0 \quad (1.9)$$

no seguinte sistema de equações diferenciais e de primeira ordem:

$$\begin{aligned} Q_\mu(x) &= \partial_\mu Q(x) \\ \partial_\mu Q_\mu(x) &= m^2 Q(x). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Desta forma adicionamos à componente original $Q(x)$ 4 componentes $Q_\mu(x)$, ou seja, temos agora um campo composto por 5 componentes (Q, Q_μ) . Em geral a equação de onda relativística para as funções de onda $Q_\alpha(x)$ possui a forma

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\partial) Q_\beta(x) = 0. \quad (1.11)$$

A condição de KG (1.9) limita a equação de onda por exigir a existência de um operador diferencial $d_{\alpha\beta}(\partial)$ que satisfaça a relação

$$d_{\alpha\beta}(\partial) \Lambda_{\beta\rho}(\partial) = (\square - m^2) \delta_{\alpha\rho}, \quad (1.12)$$

onde $d_{\alpha\beta}(\partial)$ é definido por

$$d(\partial) \equiv [d_{\alpha\beta}(\partial)] = -\alpha + \alpha_\mu \partial_\mu + \dots + \alpha_{\mu_1 \dots \mu_l} \partial_{\mu_1 \dots \mu_l} + \dots \quad (1.13)$$

e $\alpha, \alpha_\mu, \dots$ são matrizes de dimensão n . Se denotamos a ordem máxima dos operadores diferenciais por b , então

$$\alpha_{\mu_1 \dots \mu_l} = 0 \quad \forall \quad l > b. \quad (1.14)$$

A matriz $\Lambda_{\alpha\beta}(\partial)$ da equação (1.11), (1.12) é de primeira ordem no operador ∂ , tendo a forma geral

$$\Lambda(\partial) \equiv [\Lambda_{\alpha\beta}(\partial)] = \rho_\mu \partial_\mu + m\beta, \quad (1.15)$$

onde ρ_μ e β são matrizes de dimensão n , m é uma constante (em princípio, não assumimos que represente a massa da partícula) e $Q_\alpha(x)$ é uma matriz coluna. Considerando a condição de KG, de (1.12), (1.13) e (1.15) podemos escrever

$$(-\alpha + \alpha_\mu \partial_\mu + \alpha_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \dots) (\rho_\mu \partial_\mu + m\beta) = (\square - m^2) I \quad (1.16)$$

Essa é a forma mais geral onde levamos em conta a condição de KG. Começaremos a analisar $d(\partial)$ para diferentes casos.

Caso I: Vejamos um primeiro caso quando $d(\partial)$ é de ordem zero em relação às derivadas, ou seja uma constante. Temos então

$$d(\partial) = -\alpha. \quad (1.17)$$

Substituindo na equação (1.12) teremos que

$$-\alpha (\rho_\mu \partial_\mu + m\beta) = (\square - m^2) I \Rightarrow -\alpha m\beta = -m^2 I, \quad (1.18)$$

obtendo então a igualdade

$$\alpha = m\beta^{-1}. \quad (1.19)$$

Assim, mostramos que existe a matriz β^{-1} de modo que β é uma matriz não-singular. Nota-se que o aparecimento de $-\alpha$ em (1.13) está justificado pelo valor positivo que α assume em (1.19). Retornando à equação (1.11), analisaremos a expressão

$$\Lambda(\partial)Q(x) = 0 \Rightarrow (\rho_\mu \partial_\mu + m\beta) Q(x) = 0. \quad (1.20)$$

Já que $\exists \beta^{-1}$, então multiplicamos (1.20) por β^{-1} , e obtemos

$$(\beta^{-1} \rho_{\mu} \partial_{\mu} + m) Q(x) = 0. \quad (1.21)$$

Definindo as matrizes

$$\beta_{\mu} = \beta^{-1} \rho_{\mu} \quad (1.22)$$

escrevemos (1.11) como

$$(\beta_{\mu} \partial_{\mu} + m) Q(x) = 0. \quad (1.23)$$

Sendo esta uma teoria equivalente a (1.20), podemos escrever sempre a equação relativística na forma (1.23).

Caso II. Vejamos o que acontece quando $d(\partial)$ é de primeira ordem em relação às derivadas, ou seja,

$$d(\partial) = -\alpha + \alpha_{\mu} \partial_{\mu}. \quad (1.24)$$

Substituindo em (1.12) temos que

$$\begin{aligned} (-\alpha + \alpha_{\mu} \partial_{\mu}) (\beta_{\nu} \partial_{\nu} + m) &= (\square - m^2) I \\ -\alpha m - \alpha \beta_{\nu} \partial_{\nu} + m \alpha_{\mu} \partial_{\mu} + \alpha_{\mu} \partial_{\mu} \beta_{\nu} \partial_{\nu} &= (\square - m^2) I. \end{aligned}$$

Comparando os termos que não contêm derivadas em ambos os membros dessa equação chegamos à conclusão que

$$-\alpha m = m^2 I \quad \Rightarrow \quad \alpha = mI. \quad (1.25)$$

Comparando os termos que contêm a primeira derivada, temos

$$-\alpha \beta_{\mu} \partial_{\mu} + m \alpha_{\mu} \partial_{\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{\mu} = \beta_{\mu}. \quad (1.26)$$

Finalmente, considerando os termos que contêm as derivadas segundas, vemos que chegamos à seguinte relação

$$\begin{aligned}\alpha_\mu \beta_\nu \partial_\mu \partial_\nu &= \partial_\mu \partial_\mu I \Rightarrow \\ \beta_\mu \beta_\nu \partial_\mu \partial_\nu &= \frac{1}{2} (\beta_\mu \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\mu) \partial_\mu \partial_\nu \Rightarrow \frac{1}{2} \{\beta_\mu, \beta_\nu\} = \eta_{\mu\nu},\end{aligned}$$

obtendo

$$\{\beta_\mu, \beta_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}. \quad (1.27)$$

Cabe lembrar que β_μ são matrizes de ordem $n \times n$. Mais adiante se verá que b , que entra na definição (1.14), e que indica o número máximo dos operadores de derivação, é igual a $2f$, onde f é o valor máximo do spin que descreve o campo $Q_\alpha(x)$. Vemos que, segundo o que foi dito anteriormente, o *caso II* tratado acima se refere a um sistema para o qual o campo $Q_\alpha(x)$ possui spin igual a $\frac{1}{2}$, já que $b = 1$. Poderíamos, por outro lado, procurar que matrizes satisfazem a condição desejada (1.27).

Vejamos o que ocorre quando $n = 2$. Aqui teríamos matrizes 2×2 , e poderíamos recorrer às matrizes de Pauli e à matriz identidade, que formam uma base

$$\langle I, \hat{\sigma}_k \rangle, \quad (1.28)$$

de onde teríamos as seguintes regras para os *brackets*

$$\begin{aligned}\{\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_k\}_+ &= 2\delta_{ik}; \\ \{I, \hat{\sigma}_i\}_+ &= 2\hat{\sigma}_i.\end{aligned} \quad (1.29)$$

Claramente se vê que (1.29) não satisfaz a condição (1.27), portanto as matrizes (1.28) não podem ser tomadas como base para este caso, não podendo ser identificadas com as matrizes β_μ .

Agora, se tomamos $n = 4$ teremos as matrizes de Dirac, que satisfazem a condição (1.27), podendo ser identificadas então com as matrizes β_μ . Lembremos que as matrizes de Dirac são obtidas quando $d(\partial)$ é de primeira ordem, ou seja, $f = \frac{1}{2}$ (spin $\frac{1}{2}$). Algumas propriedades das matrizes de Dirac são discutidas nas seções 1.2, 1.3. Recordaremos apenas que temos aqui uma base de 16 matrizes (representações irredutíveis), a partir das quais pode-se construir todas as demais matrizes. Estas são

$$\begin{array}{ccccc} I & \gamma_\mu & \gamma_\mu \gamma_5 & \gamma_5 & \Sigma_{\mu\nu} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 4 & 1 & 6 \end{array} \quad (1.30)$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma_5 &= i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4; \\ \Sigma_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu). \end{aligned} \quad (1.31)$$

1.2 Equação de Dirac

Os campos com spin $\frac{1}{2}$ são descritos pela teoria de Dirac. Partículas fermiônicas massivas, de massa m , são descritas pela equação

$$(\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi = 0. \quad (1.32)$$

As matrizes γ_μ devem satisfazer as seguintes relações:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}. \quad (1.33)$$

De (1.32) e (1.33) chega-se à

$$(\square - m^2) \psi = 0, \quad (1.34)$$

em concordância com a condição de KG já vista anteriormente; porém, agora, baseada na equação de Dirac. Qualquer função X das matrizes γ_μ pode ser escrita como uma combinação linear das 16 matrizes γ^A , onde γ^A ($A = 1, 2, \dots, 16$) são definidas por

$$\gamma^A = \begin{cases} I & \rightarrow 1 \\ \gamma_\mu & \rightarrow 4 \\ \gamma_\mu \gamma_5 & \rightarrow 4 \\ \gamma_5 & \rightarrow 1 \\ \Sigma_{\mu\nu} & \rightarrow 6 \end{cases} \quad (1.35)$$

$\Sigma_{\mu\nu}$ e γ_5 são dados por (1.31). Pode-se mostrar que as matrizes γ^A satisfazem as seguintes condições

$$\begin{aligned} (\gamma^A)^2 &= I; \\ \text{Tr}(\gamma^A) &= 0, \quad \gamma^A \neq I; \\ \text{Tr}(\gamma^A \gamma^B) &= 0, \quad A \neq B. \end{aligned} \quad (1.36)$$

As matrizes γ^A são linearmente independentes e portanto formam uma base (as 16 quantidades). Para mostrar isso basta demonstrar que a condição

$$\sum_A C^A \gamma^A = 0, \quad C^A \in C, \quad (1.37)$$

é satisfeita se todos os coeficientes fossem simultaneamente nulos. É por isso que qualquer matriz X , 4×4 , pode ser descomposta em função de γ^A , isto é,

$$X = \sum_A C^A \gamma^A. \quad (1.38)$$

O complexo conjugado de um c -número será representado por $(*)$, e o hermitiano conjugado de um q -número por $(+)$. Assim, por exemplo, o hermitiano

conjugado de $A = [a_{\alpha\beta}]$ será denotado por $A^+ = [a_{\beta\alpha}^*]$, onde $a_{\beta\alpha}^*$ é o complexo conjugado de $a_{\beta\alpha}$.

Duas diferentes representações de γ_μ , digamos γ'_μ e γ''_μ , são relacionadas entre si através de uma matriz unitária S , da seguinte forma:

$$\gamma'_\mu = S^{-1} \gamma''_\mu S. \quad (1.39)$$

Sempre podemos escolher uma representação para as matrizes γ_μ , onde estas sejam hermitianas, ou seja,

$$\gamma_\mu = \gamma_\mu^\dagger. \quad (1.40)$$

1.3 As matrizes γ_μ sob as transformações de Lorentz

É necessário exigir invariância de Lorentz para a equação de Dirac (1.32). Teremos assim as seguintes transformações:

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu; \quad (1.41)$$

$$\psi' = \Lambda \psi, \quad (1.42)$$

onde as matrizes de transformação satisfazem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} a_{\mu\nu} a_{\lambda\nu} &= \delta_{\mu\lambda}; \\ \Lambda \Lambda^{-1} &= I; \\ |\det \Lambda| &= 1. \end{aligned} \quad (1.43)$$

A expressão $|\det \Lambda| = 1$ em (1.43) nos diz que Λ é pseudo-ortogonal. A invariância da equação de Dirac (1.32) com respeito a (1.41) e (1.42) implica que

$$\Lambda^{-1} \gamma_\mu \Lambda = a_{\mu\nu} \gamma_\nu. \quad (1.44)$$

As transformações de Lorentz infinitesimais são dadas por .

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \delta\omega_{\mu\nu}, \quad (1.45)$$

onde $\delta\omega_{\mu\nu}$ são os parâmetros infinitesimais. Da condição de ortogonalidade (1.43) deriva-se

$$\delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu}. \quad (1.46)$$

Assim, a matriz de transformação que se usa em (1.42) pode-se expandir como

$$\Lambda = I + \frac{1}{2}S_{\mu\nu}\delta\omega_{\mu\nu}, \quad (1.47)$$

onde considerando (1.45) obtém-se

$$S_{\mu\nu} = -S_{\nu\mu}. \quad (1.48)$$

Substituindo (1.47) e (1.45) em (1.44) obtemos que

$$[\gamma_\lambda, S_{\mu\nu}] = \delta_{\lambda\mu}\gamma_\nu - \delta_{\lambda\nu}\gamma_\mu, \quad (1.49)$$

onde uma solução de (1.49) para $S_{\mu\nu}$ seria

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu). \quad (1.50)$$

Definamos agora o campo $\bar{\psi}$, adjunto a ψ , da seguinte maneira:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_4. \quad (1.51)$$

Comprova-se facilmente que $\bar{\psi}$ satisfaz a equação

$$\partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu - m \bar{\psi} = 0. \quad (1.52)$$

Sob transformações de Lorentz (1.41) e (1.42) a quantidade $\bar{\psi}$ transforma-se como

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi} \gamma_4 \Lambda^* \gamma_4. \quad (1.53)$$

Para uma transformação infinitesimal do tipo (1.47) ou uma reflexão espacial tem-se

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi}\Lambda^{-1}, \quad (1.54)$$

ao passo que para uma reflexão temporal tem-se

$$\bar{\psi}' = -\bar{\psi}\Lambda^{-1}. \quad (1.55)$$

Portanto, $\bar{\psi}\psi$ muda de sinal sob uma reflexão temporal.

Vejamos as propriedades do traço para as matrizes γ_μ . Para calcular este traço levaremos em conta que a quantidade $Tr(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_n})$ forma um tensor 4-dimensional de posto n (tensor no sentido da álgebra γ). Isto segue-se do fato que $\bar{\psi}\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_n}\psi$ é um tensor (como também $\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$). Assim

$$Tr(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_n}) = \sum_k \bar{u}_k \gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_n} u_k \quad (1.56)$$

também é um tensor, onde se normalizam as amplitudes $\bar{u}u = 1$.

Já que o traço das matrizes γ_μ não depende da representação usada, a forma do tensor $Tr(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_n})$ também não dependerá da escolha do sistema de coordenadas. O único tensor que tem essas propriedades é o tensor $\delta_{\mu\nu}$. Portanto, o tensor desejado deve ser constituído por combinações de $\delta_{\mu\nu}$. Daqui segue-se que, se n é ímpar, então

$$Tr(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_n}) = 0, \quad n = 2k + 1. \quad (1.57)$$

Agora, se n é par, teremos

$$Tr(\gamma_{\mu_1}\gamma_{\mu_2}\dots\gamma_{\mu_n}) = \sum_P a_P \delta_{i_k} \delta_{l_m} \dots, \quad (1.58)$$

onde P são todas as permutações possíveis dos índices $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ e a_P são certos coeficientes que se podem determinar notando-se que $\text{Tr} I = 4$. Por isso escrevemos

$$\frac{1}{4} \text{Tr} (\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \dots \gamma_{\mu_n}) = \sum_P \pm \delta_{ik} \delta_{lm} \dots \quad (1.59)$$

Vejamos alguns traços:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \text{Tr} (\gamma_i \gamma_k) &= \delta_{ik}; \\ \frac{1}{4} \text{Tr} (\gamma_i \gamma_k \gamma_l \gamma_m) &= \delta_{ik} \delta_{lm} - \delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

1.4 Equações de onda relativísticas generalizadas

Revisar-se-á uma vez mais a equação de onda relativística, já analisada na primeira parte. A equação diferencial linear para o campo $\psi(x)$ é dada por

$$\Lambda(\partial) \psi(x) = 0. \quad (1.61)$$

A condição de KG supõe a existência de um operador $d(\partial)$ de tal forma que se verifica

$$d(\partial) \Lambda(\partial) = (\square - m^2) I, \quad (1.62)$$

onde $d(\partial)$ é dado por (1.13) e $\Lambda(\partial)$ é dada por

$$\Lambda(\partial) = \beta_\mu \partial_\mu + m. \quad (1.63)$$

Nota-se que a única diferença em relação a (1.15) é que se tem já incluídas as matrizes β_μ . Revisando os resultados já obtidos para as diferentes ordens de $d(\partial)$, dados por (1.19) e (1.22) para o caso em que $d(\partial)$ é de ordem zero, e os dados por (1.25) e (1.26) para o caso em que $d(\partial)$ é de primeira ordem, estaria nos faltando

ver um terceiro caso em que $d(\partial)$ é de segunda ordem e assim, de alguma maneira, generalizar os resultados obtidos.

Em geral temos que

$$\begin{aligned}\Lambda(\partial) &= \beta_\mu \partial_\mu + m, \\ d(\partial) &= -\alpha + \alpha_\mu \partial_\mu + \alpha_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \dots + \alpha_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \dots \partial_{\mu_n} + \dots\end{aligned}$$

e com isso podemos analisar os diferentes casos abaixo:

Caso I: Quando $d(\partial)$ é de ordem zero temos $b = 0$ e $f = 0$. Assim,

$$\begin{cases} d(\partial) = -\alpha; \\ \alpha = m. \end{cases} \quad (1.64)$$

Caso II. Quando $d(\partial)$ é de primeira ordem, $b = 1$ e $f = \frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} d(\partial) = -\alpha + \alpha_\mu \partial_\mu; \\ \alpha = m, \quad \alpha_\mu = \beta_\mu; \\ (\beta_\mu \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\mu) = 2\eta_{\mu\nu}; \\ \sum^{(P)} (\eta_{\mu\nu} - \beta_\mu \beta_\nu) = 0. \end{cases} \quad (1.65)$$

Caso III. Quando $d(\partial)$ é de segunda ordem, $b = 2$ e $f = 1$:

$$\begin{cases} d(\partial) = -\alpha + \alpha_\mu \partial_\mu + \alpha_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu; \\ \alpha = m, \quad \alpha_\mu = \beta_\mu; \\ \alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{m} \left[\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\beta_\mu \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\mu) \right] = \frac{1}{2m} \sum^{(P)} (\eta_{\mu\nu} - \beta_\mu \beta_\nu); \end{cases} \quad (1.66)$$

além disso temos a álgebra

$$\begin{cases} \alpha_{\mu\nu} \beta_\lambda \partial_\mu \partial_\nu \partial_\lambda = 0; \\ \alpha_{\mu\nu} \beta_\lambda + \alpha_{\lambda\mu} \beta_\nu + \alpha_{\nu\lambda} \beta_\mu = 0 \Rightarrow \sum^{(P)} \alpha_{\mu\nu} \beta_\lambda = 0. \end{cases} \quad (1.67)$$

Substituindo (1.66) em (1.67) temos a álgebra para as matrizes β :

$$\sum (P) \beta_\lambda (\eta_{\mu\nu} - \beta_\mu \beta_\nu) = 0, \quad (1.68)$$

onde essa expressão pode ser comparada a (1.65).

Caso IV. Quando $d(\partial)$ é de terceira ordem, $b = 3$ e $f = \frac{3}{2}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} d(\partial) = -\alpha + \alpha_\mu \partial_\mu + \alpha_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \alpha_{\mu\nu\lambda} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\lambda; \\ \alpha = m \quad , \quad \alpha_\mu = \beta_\mu; \\ \alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{m} \left[\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\beta_\mu \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\mu) \right], \end{array} \right. \quad (1.69)$$

e a álgebra é

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{\mu\nu} \beta_\lambda \partial_\mu \partial_\nu \partial_\lambda + \alpha_{\mu\nu\lambda} \partial_\mu \partial_\nu \partial_\lambda = 0; \\ \alpha_{\mu\nu\lambda} + \alpha_{\mu\nu} \beta_\lambda + \alpha_{\lambda\mu} \beta_\nu + \alpha_{\nu\lambda} \beta_\mu = 0; \\ \alpha_{\mu\nu\lambda} = \sum (P) \beta_\mu (\eta_{\nu\lambda} - \beta_\nu \beta_\lambda). \end{array} \right. \quad (1.70)$$

Note-se que a álgebra dada em (1.68) coincide com o elemento $\alpha_{\mu\nu\lambda}$ de (1.70), ou seja, o elemento correspondente à ordem n nos dá a álgebra para as matrizes β para a ordem $(n - 1)$. Assim podemos expressar em geral o termo $\alpha_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_l}$ da expressão (1.13) como

$$\alpha_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_l} = \left(\frac{1}{2}\right)^{l-1} \frac{1}{l!} \sum (P) \beta_{\mu_1} \beta_{\mu_2} \ldots \beta_{\mu_{l-2}} [\delta_{\mu_{l-1}\mu_l} - \beta_{\mu_{l-1}} \beta_{\mu_l}]. \quad (1.71)$$

Está claro que sob as condições (1.14) pode-se facilmente obter a álgebra das matrizes β a partir de (1.70). Colocando $l = b + 1$ é satisfeita a condição (1.14), anteriormente mencionada, obtendo-se desta maneira a álgebra das matrizes β , isto é,

$$\sum (P) \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{\mu_{b-1}} [\delta_{\mu_b \mu_{b+1}} - \beta_{\mu_b} \beta_{\mu_{b+1}}] = 0. \quad (1.72)$$

A respeito de (1.72), Harish-Chandra assinala que esta álgebra das matrizes β *não gera* uma álgebra finita para $b = 1, (f \geq 1)$. Uma das condições necessárias para

as matrizes β é que sua álgebra seja finita. Vejamos os resultados das álgebras correspondentes aos diferentes casos:

a.) Para spin $\frac{1}{2}$ ($f = \frac{1}{2}, b = 1$). De (1.65) segue-se que a álgebra das matrizes β é

$$(\beta_\mu \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\mu) = 2\eta_{\mu\nu}. \quad (1.73)$$

Logo, as matrizes β_μ coincidem com as matrizes γ_μ de Dirac.

b.) Para spin 1 ($f = 1, b = 2$). De (1.68) segue-se que

$$\sum^{(P)} \beta_\lambda (\eta_{\mu\nu} - \beta_\mu \beta_\nu) = 0, \quad (1.74)$$

que se pode escrever como

$$\sum^{(P)} (\beta_\lambda \beta_\mu \beta_\nu - \beta_\lambda \eta_{\mu\nu} + \beta_\nu \beta_\mu \beta_\lambda - \beta_\nu \eta_{\mu\lambda}) = 0. \quad (1.75)$$

Para ter uma soma sobre todas as permutações possíveis é necessário quebrar a simetria de $\eta_{\mu\nu}$, ou seja, a simetria do termo $\beta_\lambda \eta_{\mu\nu}$.

2. A Teoria de Duffin-Kemmer-Petiau

2.1 A equação de Duffin-Kemmer-Petiau e as propriedades algébricas das matrizes β

Para a análise das propriedades dos campos vetoriais massivos (de spin 1) e dos campos escalares massivos (de spin 0), é conveniente partir não da equação de onda de segunda ordem, mas de uma equação que seja de primeira ordem. Este tipo de situação se obtém aumentando o número de variáveis, (veja por exemplo (1.10)). Esta equação é proporcionada pela teoria de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP)

$$(\beta_\mu \partial_\mu + m) \psi(x) = 0, \quad (2.1)$$

a qual é de primeira ordem. A álgebra que satisfazem as matrizes β nesta teoria é

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\lambda + \beta_\lambda \beta_\nu \beta_\mu = \beta_\mu \delta_{\lambda\nu} + \beta_\lambda \delta_{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

Portanto a equação (2.1) descreve as propriedades de partículas livres de spin 0 e spin 1, com as matrizes β satisfazendo as propriedades algébricas (2.2) em ambos

casos. A diferença entre os dois valores de spin consiste no fato que no caso de spin 0 a função de onda ψ tem 5 componentes, enquanto que no caso de spin 1 a função ψ tem 10 componentes. Conseqüentemente, as matrizes β serão matrizes 5×5 (para o caso de spin 0) ou matrizes 10×10 (para o caso de spin 1).

As 5 componentes da função de onda ψ que descreve partículas de spin 0 contêm a função de onda escalar φ e suas quatro derivadas espaço-temporais $\partial_\mu \varphi$, transformando-se estas últimas como um 4-vetor. Já que as matrizes β satisfazem as mesmas relações (2.2) no caso de partículas escalares e no caso de partículas de spin 1, as fórmulas gerais para os elementos de matriz que determinam os diferentes processos de interação para partículas de spin 0 e spin 1 terão as mesma formas. As probabilidades destes processos são diferentes para os dois tipos de partículas, devido ao fato que os traços (Tr) para as matrizes, no caso de serem 5×5 ou 10×10 , são diferentes. Sabemos, além disso, que existe um único tensor anti-simétrico de segunda ordem com relação a β , dado por

$$S_{\mu\nu} = \beta_\mu \beta_\nu - \beta_\nu \beta_\mu. \quad (2.3)$$

A prova desta expressão baseia-se na invariância relativística e será vista na seção 2.3. Da álgebra (2.2) para $\mu \neq \nu$ obtemos

$$\beta_\mu \beta_\nu^2 = (1 - \beta_\nu^2) \beta_\mu, \quad \mu \neq \nu. \quad (2.4)$$

Podemos, além disso, obter as seguintes relações

$$\beta_\mu \beta_\nu^2 = \beta_\mu, \quad \mu = \nu; \quad (2.5)$$

$$\beta_\mu^2 \beta_\nu^2 = \beta_\nu^2 \beta_\mu^2; \quad (2.6)$$

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\mu = \beta_\mu \delta_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

onde não estamos tomando a soma sobre o índice que se repete. Definiremos agora as matrizes η_μ , dadas por:

$$\eta_\mu = 2\beta_\mu^2 - 1. \quad (2.8)$$

Resulta dessa definição que η_μ satisfaz as seguintes relações:

$$\eta_\mu^2 = 1; \quad (2.9)$$

$$\eta_\mu \eta_\nu = \eta_\nu \eta_\mu; \quad (2.10)$$

$$\beta_\mu \eta_\nu = -\eta_\nu \beta_\mu, \quad \mu \neq \nu; \quad (2.11)$$

$$\beta_\mu = \beta_\mu \eta_\mu = \eta_\mu \beta_\mu, \quad (2.12)$$

onde novamente não tomamos a soma sobre o índice que se repete. Como já dissemos anteriormente, pode-se encontrar uma representação na qual as matrizes β_μ sejam hermitianas. Desta afirmação, e segundo a definição (2.8) podemos deduzir que η_μ também é hermitiana.

Definamos agora o campo $\bar{\psi}$, adjunto a ψ , da seguinte maneira

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \eta_4. \quad (2.13)$$

Pode-se mostrar que $\bar{\psi}$ deve satisfazer a seguinte equação de onda

$$\partial_\mu \bar{\psi} \beta_\mu - m \bar{\psi} = 0. \quad (2.14)$$

Lembremos que a matriz β_μ é hermitiana, isto é $\beta_\mu^\dagger = \beta_\mu$. Segundo (1.43) e (2.3) vemos que, sob transformações infinitesimais de Lorentz, a quantidade $\bar{\psi}$ transforma-se como

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \psi'^\dagger \eta_4 = \psi^\dagger \Lambda^\dagger \eta_4 = \bar{\psi} \Lambda^{-1}, \quad (2.15)$$

devido ao fato que $\delta\omega_{ik}$ e $\delta\omega_{i4}$ em (1.46) são reais e imaginários, respectivamente. Se temos uma reflexão espacial, isto é, $x'_k = -x_k$ e $x'_4 = x_4$, então a relação análoga a (1.44), isto é,

$$\Lambda^{-1}\beta_\mu\Lambda = a_{\mu\nu}\beta_\nu, \quad (2.16)$$

nós dá

$$\Lambda = \pm\eta_4. \quad (2.17)$$

Os detalhes sobre os sinais serão discutidos na seção 2.2. Multiplicando a expressão (2.1) por $\partial_\rho\beta_\rho\beta_\nu$ pelo lado esquerdo encontraremos a seguinte igualdade

$$\partial_\mu\psi = \partial_\nu\beta_\nu\beta_\mu\psi. \quad (2.18)$$

Fazendo o mesmo na equação (2.14) chegamos a

$$\partial_\mu\bar{\psi} = \partial_\nu\bar{\psi}\beta_\mu\beta_\nu. \quad (2.19)$$

Com base em (2.1) e (2.14) é fácil construir agora a quantidade j_μ definida por

$$j_\mu = i\bar{\psi}\beta_\mu\psi, \quad (2.20)$$

que satisfaz a “equação de continuidade”

$$\partial_\mu j_\mu = 0, \quad (2.21)$$

podendo ser identificada como o 4-vetor densidade de carga e corrente. De (2.1) e (2.18) podemos obter a equação de KG para ψ ,

$$(\square - m^2)\psi = 0. \quad (2.22)$$

Da mesma forma, de (2.14) e (2.19) obtemos a equação de KG para $\bar{\psi}$,

$$(\square - m^2)\bar{\psi} = 0. \quad (2.23)$$

Observamos que a densidade j_0 , definida em (2.20), não é necessariamente positiva, pois toma a forma $j_0 = \psi^\dagger \beta_4 \psi$. No entanto, este não é um requisito necessário na região relativística.

É claro que (2.21), (2.22) e (2.23) são suficientes para mostrar que este formalismo é adequado para descrever a teoria quântica das partículas. Falta ainda demonstrar que esta abordagem é relativisticamente invariante para poder, definitivamente, passar à quantização dos campos.

2.2 As representações de β na teoria de DKP

Vimos anteriormente que a teoria de DKP corresponde aos campos de spin 1 e spin 0. Por conseguinte, faremos a separação das funções de onda de spin 1 e 0 da seguinte maneira. Para selecionar a função de onda de spin 0, é necessário introduzir os operadores P e P_μ definidos por

$$P \equiv \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2 \beta_4^2; \quad (2.24)$$

$$P_\mu = P \beta_\mu. \quad (2.25)$$

Pode ser mostrado que

$$P^2 = P, \quad (2.26)$$

o que torna possível denominar o operador P de operador de projeção. Assim também se deduz a relação

$$P_\mu \beta_\nu = P \delta_{\mu\nu}. \quad (2.27)$$

Considerando (2.25) pode-se escrever esta última relação como

$$P \beta_\mu \beta_\nu = P \delta_{\mu\nu}. \quad (2.28)$$

Isto nos leva à igualdade

$$PS_{\mu\nu} = P(\beta_\mu\beta_\nu - \beta_\nu\beta_\mu) = 0. \quad (2.29)$$

Assim, sob uma transformação infinitesimal de Lorentz arbitrária, temos

$$P\Lambda\psi = P\psi, \quad (2.30)$$

onde $\Lambda = I + \frac{1}{2}S_{\mu\nu}\delta\omega_{\mu\nu}$. Da mesma maneira, veremos se $P\psi$ transforma-se da mesma forma que (2.30) sob reflexões espaciais (2.17). Temos que a ação do projetor P sobre $\Lambda = \pm\eta_4$ será

$$P(\pm\eta_4) = (\pm)\beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2\beta_4^2(2\beta_4^2 - 1) = (\pm)\beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2\beta_4^2 = (\pm)P, \quad (2.31)$$

cujas formas coincidem com (2.30). Por conseguinte, podemos obter o resultado

$$P\Lambda\psi = \begin{cases} -P\psi & , \quad \Lambda = -\eta_4; \\ +P\psi & , \quad \Lambda = +\eta_4. \end{cases} \quad (2.32)$$

Assim a equação (2.32) mostra que $P\psi$ é um escalar ou um pseudoescalar, de acordo com o sinal (+) ou (-) que se tome para Λ em (2.17). De forma análoga, se considerarmos as transformações de Lorentz (1.45)-(1.47) junto a (2.27) tem-se

$$P_\mu\Lambda\psi = P_\mu\psi + \delta\omega_{\mu\nu}P_\nu\psi = a_{\mu\nu}P_\nu\psi. \quad (2.33)$$

Além disso, considerando a reflexão espacial $\Lambda = \pm\eta_4$ e usando (2.9)-(2.12), pode-se concluir que

$$P_\mu\psi = \begin{cases} \text{pseudovetor} & , \quad \Lambda = -\eta_4; \\ \text{vetor} & , \quad \Lambda = +\eta_4. \end{cases} \quad (2.34)$$

Aplicando os projetores P e P_μ a (2.1) e considerando as definições (2.25) e (2.27) obtemos as equações

$$\partial_\mu (P_\mu \psi) = -m (P\psi); \quad (2.35)$$

$$\partial_\mu (P\psi) = -m (P_\mu \psi). \quad (2.36)$$

Introduzindo a notação

$$P\psi = U, \quad P_\mu \psi = U_\mu, \quad (2.37)$$

as equações acima são expressas na forma

$$\partial_\mu U_\mu = -mU; \quad (2.38)$$

$$\partial_\mu U = -mU_\mu,$$

que, combinadas, resultam em

$$(\square - m^2) (P\psi) = 0, \quad (\square - m^2) U = 0. \quad (2.39)$$

Observamos que estas são as equações de onda para spin 0 e que (U, U_μ) descrevem campos escalares ou pseudoescalares segundo o sinal (+) ou (-) tomado em (2.17) para Λ .

De forma similar podemos escolher a função de onda para spin 1 introduzindo o operador

$$R_\mu = \begin{cases} -\beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2 \beta_\mu \beta_4 & , \quad \mu = 1, 2, 3; \\ \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2 (1 - \beta_4^2) & , \quad \mu = 4, \end{cases} \quad (2.40)$$

ou em uma forma compacta

$$R_\mu = \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2 (\delta_{\mu 4} - \beta_\mu \beta_4). \quad (2.41)$$

Além disso, introduzimos também o operador

$$R_{\mu\nu} = R_\mu \beta_\nu. \quad (2.42)$$

Dessas duas últimas equações deduz-se imediatamente que

$$R_{\mu\nu} = -R_{\nu\mu}; \quad (2.43)$$

$$R_{\mu}\beta_{\nu}\beta_{\sigma} = \delta_{\nu\sigma}R_{\mu} - \delta_{\mu\sigma}R_{\nu}. \quad (2.44)$$

Usando essa última relação pode-se mostrar que $S_{\mu\nu}$ satisfaz as relações

$$R_{\mu}S_{\rho\nu} = R_{\mu}(\beta_{\rho}\beta_{\nu} - \beta_{\nu}\beta_{\rho}) = \delta_{\mu\rho}R_{\nu} - \delta_{\mu\nu}R_{\rho}; \quad (2.45)$$

$$R_{\mu\nu}S_{\rho\sigma} = \delta_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} + \delta_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} - \delta_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\sigma}R_{\mu\rho}, \quad (2.46)$$

que nos levam a

$$R_{\mu}\Lambda = a_{\mu\nu}R_{\nu}; \quad (2.47)$$

$$R_{\mu\nu}\Lambda\psi = R_{\mu\nu}\psi + \delta\omega_{\nu\lambda}R_{\mu\lambda}\psi + \delta\omega_{\rho\mu}R_{\nu\rho}\psi, \quad (2.48)$$

onde $a_{\mu\nu}$ e Λ são dados por (1.45) e (1.47) respectivamente para transformações de Lorentz infinitesimais. Por outro lado, usando a definição (2.40) e as propriedades (2.8) e (2.12), podemos escrever

$$R_{\mu}\eta_4 = \begin{cases} +R_{\mu} & , \quad \mu = 1, 2, 3; \\ -R_{\mu} & , \quad \mu = 4. \end{cases} \quad (2.49)$$

Considerando a reflexão espacial, ou seja, (2.17) com $\Lambda = \pm\eta_4$, encontramos uma classificação semelhante a (2.34), ou seja,

$$R_{\mu}\psi = \begin{cases} \text{vetor} & , \quad \Lambda = -\eta_4; \\ \text{pseudovetor} & , \quad \Lambda = +\eta_4. \end{cases} \quad (2.50)$$

Uma vez conhecido o comportamento de $R_{\mu}\psi$ podemos aplicar na equação de primeira ordem (2.1) os projetores R_{μ} e $R_{\mu\nu}$ que junto a (2.43) e (2.44), resultam

nas equações

$$\partial_\mu (R_{\mu\nu}\psi) = m (R_\nu\psi); \quad (2.51)$$

$$R_{\mu\nu}\psi = \frac{1}{m} [\partial_\mu (R_\nu\psi) - \partial_\nu (R_\mu\psi)]. \quad (2.52)$$

Introduzindo a notação

$$R_\mu\psi = mA_\mu, \quad R_{\mu\nu}\psi = F_{\mu\nu} \quad (2.53)$$

as equações (2.51) e (2.52) escrevem-se como

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = m^2 A_\nu; \quad (2.54)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Essas últimas são as equações de primeira ordem para campos de spin 1 e massa m . Assim, provamos que a teoria de DKP, dada por (2.1) e (2.2) é equivalente às teorias de spin 0 e 1. A função de onda geral na teoria de DKP deve dar-se então pela superposição de (2.34) e (2.50) ou seja

$$\textit{partícula pseudoescalar} + \textit{partícula vetorial} , \quad \Lambda = -\eta_4 \quad (2.55)$$

$$\textit{partícula escalar} + \textit{partícula pseudovetorial} , \quad \Lambda = +\eta_4$$

Introduzamos uma representação especial para as β_μ , na qual serão usados dois índices α e α' ($\alpha, \alpha' = 1, 2, 3, 4$). Usando duas representações não equivalentes para $\gamma_\alpha, \gamma'_\alpha$, que separadamente satisfazem as relações de comutação (1.33), e as matrizes identidade I e I' , podemos mostrar que a relação fundamental (ou a álgebra) para as matrizes β_μ na teoria de DKP (2.2) é satisfeita pela matriz

$$\beta_\mu = \frac{1}{2} (\gamma_\mu \otimes I' + I \otimes \gamma'_\mu) \quad (2.56)$$

Devido ao fato que em (2.56) as matrizes $\gamma_\mu, I, \gamma'_\mu$ e I' têm 4 linhas e 4 colunas, por ser um produto direto de duas representações não equivalentes, β_μ é uma matriz 16×16 , o que nos leva a concluir de (2.1) que $\Psi(x)$ tem 16 componentes (nota-se que estamos usando uma função Ψ no lugar de ψ). Devemos ter em conta que a representação dada por (2.56) é uma representação redutível. Assim, a teoria baseada na equação

$$\partial_\mu (\gamma_\mu \otimes I' + I \otimes \gamma'_\mu) \Psi + k\Psi = 0 \quad (2.57)$$

é equivalente à teoria de DKP dada em (2.1) e (2.2), tal que as matrizes γ_μ, γ'_μ comutam isto é $[\gamma_\mu, \gamma'_\mu] = 0$. Podemos também concluir a partir de (2.57) que Ψ transforma-se como o produto direto de duas funções de onda de Dirac.

Como se mostrou anteriormente, (2.38) e (2.54) nos dão as representações irredutíveis para os campos de spin 1 e 0. Como se pode ver, estas duas representações, incluída uma terceira representação trivial, estão contidas na representação particular para β_μ dada em (2.56)

Depreende-se de (2.38) que o campo de spin 0 tem 5 componentes (U, U_μ) e o campo de spin 1, dado por (2.54), tem 10 componentes $(U_\mu, F_{\mu\nu})$. Desta forma, as representações irredutíveis para campos de spin 0 e spin 1 nos dão 15 componentes. Devido a (2.56), as representações redutíveis para as β_μ têm 16 componentes, é necessário encontrar uma última componente, a fim de decompô-la em três representações irredutíveis: $16 = 10 \oplus 5 \oplus 1$.

Esta última componente será então uma representação irredutível, de modo que ela deverá ser uma quantidade escalar satisfazendo uma equação diferencial de primeira ordem. Contudo, é impossível encontrar tal equação para uma componente escalar que satisfaça também a equação de segunda ordem de KG, a

menos que este escalar seja zero. Temos assim que esta última componente é trivial, e não tendo interesse físico.

Devido a irredutibilidade das três representações, das quais uma é de primeira ordem, uma de quinta ordem e a outra de décima ordem, o número de matrizes linearmente independentes será dado por

$$(1)^2 + (5)^2 + (10)^2 = 126. \quad (2.58)$$

Para uma representação redutível, como é o caso de (2.56), que pode ser decomposta em outras representações irredutíveis, como é o caso de (2.38), (2.54) e a componente escalar, o número de componentes linearmente independentes para esta representação redutível se dá pela soma dos quadrados dos graus das respectivas representações irredutíveis.

Pode-se mostrar usando (2.2), que toda matriz e seus produtos entre si (nos referimos a qualquer matriz na álgebra β), pode ser expressa como uma combinação linear das seguintes 126 matrizes.

$$\begin{array}{llll} I & \rightarrow & 1 & \eta_\mu & \rightarrow & 12 & \eta_\mu \eta_\nu \beta_\rho & \rightarrow & 12 \\ \beta_\mu & \rightarrow & 4 & \eta_\mu \beta_\nu & \rightarrow & 6 & \eta_\mu \eta_\nu \beta_\rho \beta_\sigma & \rightarrow & 12 \\ \beta_\mu \beta_\nu & \rightarrow & 12 & \eta_\mu \beta_\nu \beta_\rho & \rightarrow & 12 & \eta_\mu \eta_\nu \eta_\rho & \rightarrow & 4 \\ \beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho & \rightarrow & 12 & \eta_\mu \beta_\nu \beta_\rho \beta_\sigma & \rightarrow & 12 & \eta_\mu \eta_\nu \eta_\rho \beta_\sigma & \rightarrow & 4 \\ \beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho \beta_\sigma & \rightarrow & 6 & \eta_\mu \eta_\nu & \rightarrow & 6 & \eta_\mu \eta_\nu \eta_\rho \eta_\sigma & \rightarrow & 1 \end{array} \quad (2.59)$$

Em qualquer representação que se dá para as 126 matrizes, só 16 possuem traços não nulos, ou seja, os η_μ e todos os produtos entre eles. Lembremos que β_μ já está incluída em η_μ como $\eta_\mu = 2\beta_\mu^2 - 1$. Os traços para a matriz β_μ e para as matrizes que contêm η_μ são os seguintes:

$$Tr(\beta_{\mu_1} \beta_{\mu_2} \dots \beta_{\mu_{2n+1}}) = 0; \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} \text{Tr} (\beta_{\mu_1} \beta_{\mu_2} \beta_{\mu_3} \beta_{\mu_4} \dots \beta_{\mu_{2n-2}} \beta_{\mu_{2n-1}} \beta_{\mu_{2n}}) &= \delta_{\mu_1 \mu_2} \delta_{\mu_3 \mu_4} \dots \delta_{\mu_{2n-1} \mu_{2n}} \\ &+ \delta_{\mu_2 \mu_3} \dots \delta_{\mu_{2n-2} \mu_{2n-1}} \delta_{\mu_1 \mu_{2n}}. \end{aligned}$$

	$s = 1$	$s = 0$	<i>trivial</i>
$\text{Tr} I$	10	5	1
$\text{Tr} (\eta_\mu)$	2	-1	-1
$\text{Tr} (\eta_\mu \eta_\nu)$	-2	1	1
$\text{Tr} (\eta_\mu \eta_\nu \eta_\rho)$	-2	3	-1
$\text{Tr} (\eta_\mu \eta_\nu \eta_\rho \eta_\sigma)$	2	-3	1

(2.61)

O traço de um número ímpar de matrizes β_μ é sempre nulo. Para os cálculos de diferentes magnitudes observáveis é necessário unicamente conhecer as propriedades algébricas das matrizes β_μ , que nos levam às conclusões (2.60) e (2.61) para os 16 traços mencionados. Por isso, a física (medição dos observáveis) não vai depender de forma alguma da representação específica para as matrizes.

Daremos aqui uma dessas representações específicas (que não é a única possível) para as matrizes β_μ nos três casos mencionados. Para o caso trivial, obviamente, todas as matrizes devem ser igualadas a zero

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0. \quad (2.62)$$

No caso de spin 0 as matrizes são 5×5 , isto é

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\beta_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.63}$$

e no caso de spin 1 as matrizes serão 10×10 ,

$$\beta_1 = \left(\begin{array}{c|c|c|c} & & & -1 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline & & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & -1 \\ & & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & -1 \\ & 0 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & \\ \hline & 0 & & \\ & 0 & & \\ & 0 & & \end{array} \right);$$

$$\beta_4 = \left(\begin{array}{c|c|ccc} & & -i & 0 & 0 & \\ & & 1 & -i & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & -i & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array} \right). \quad (2.64)$$

Todas essas matrizes (2.62), (2.63) e (2.64) satisfazem a relação fundamental de DKP (2.2) e, como se vê, são realmente irredutíveis.

Em seguida, fazendo uso da representação (2.63) para β_μ no caso escalar, obteremos uma forma explícita para ψ , $P\psi$ e $P_\mu\psi$. Uma vez que ψ tem 5 componentes, deve-se adotar a forma

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_5 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ i\psi_4 \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

Por outro lado, verifica-se que P , definido em (2.24), na representação (2.63)

resulta ser

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.66)$$

Nota-se que este último resultado depende da representação utilizada. Considerando (2.65), (2.66) obtemos

$$U = P\psi = \begin{pmatrix} \psi_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

$$U_\mu = P_\mu\psi = \begin{pmatrix} \psi_\mu \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.68)$$

e da segunda linha em (2.38) temos

$$U_\mu = -\frac{1}{m}\partial_\mu U, \quad (2.69)$$

ou considerando (2.67) e (2.68),

$$\psi_\mu = -\frac{1}{m}\partial_\mu\psi_5. \quad (2.70)$$

Representando a quinta componente de ψ por

$$\psi_5 = -\sqrt{m}\varphi, \quad (2.71)$$

onde φ é um campo escalar, resulta

$$\psi_\mu = \frac{1}{\sqrt{m}} \partial_\mu \varphi, \quad (2.72)$$

de modo que ψ escreve-se como

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} -m\varphi \\ \partial_k \varphi \\ i\partial_4 \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.73)$$

Por conseguinte, (2.67) e (2.68) passam a ser

$$U = P\psi = -\sqrt{m} \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (2.74)$$

$$U_\mu = P_\mu \psi = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \partial_\mu \varphi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.75)$$

Considerando (2.74) e substituindo-o em (2.39), obtemos

$$(\square - m^2) \varphi = 0, \quad (2.76)$$

que é a equação de KG para a componente escalar. Vemos assim que o projetor P seleciona a **componente física** do campo DKP dado por (2.67). A forma (2.73) é chamada de **forma física** do campo DKP. De maneira análoga, para o caso de

spin 1, pode ser usada a representação (2.64), para selecionar com o auxílio de R_μ , as 4 primeiras componentes do campo ψ de tal forma que sejam dadas por A_μ . As demais componentes, selecionadas por $R_{\mu\nu}$, resultam em $F_{\mu\nu}$.

2.3 A invariância relativística

A prova da invariância relativística para a teoria de DKP é feita em analogia ao caso do campo de Dirac. O comportamento de ∂_μ sob transformações de Lorentz é conhecido, e o que requeremos é uma transformação linear conveniente para ψ , que nos leve das equações (2.1) ou (2.18) para as mesmas equações no novo sistema de coordenadas.

Será suficiente encontrar semelhante transformação para o caso de uma rotação infinitesimal em 4 dimensões. De modo geral, as transformações são da forma:

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu; \quad (2.77)$$

$$\psi' = \Lambda \psi; \quad (2.78)$$

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi} \Lambda^{-1}. \quad (2.79)$$

onde $a_{\mu\nu}$ é a matriz de transformação de Lorentz. Se a rotação é infinitesimal, as matrizes $a_{\mu\nu}$ e Λ , adotam a forma

$$a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \delta\omega_{\mu\nu} \quad (2.80)$$

$$\Lambda = I + \frac{1}{2} S_{\mu\nu} \delta\omega_{\mu\nu} \quad (2.81)$$

onde $\delta\omega_{\mu\nu}$ são os parâmetros infinitesimais da transformação. Além disso, as matrizes $a_{\mu\nu}$ e Λ satisfazem as seguintes condições de normalização:

$$a_{\mu\nu} a_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\lambda};$$

$$\Lambda\Lambda^{-1} = I;$$

$$|\det \Lambda| = I.$$

Obtemos das transformações (2.80) e (2.81) que $\delta\omega_{\mu\nu}$ e $S_{\mu\nu}$ são antissimétricos:

$$\delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu}; \quad (2.82)$$

$$S_{\mu\nu} = -S_{\nu\mu}. \quad (2.83)$$

Para que uma equação linear do tipo (2.1) seja invariante com respeito às transformações de Lorentz é necessário que

$$\Lambda^{-1}\beta_\mu\Lambda = a_{\mu\nu}\beta_\nu. \quad (2.84)$$

Substituindo as formas infinitesimais (2.80) e (2.81) em (2.84), temos

$$[\beta_\lambda, S_{\mu\nu}] = \delta_{\lambda\mu}\beta_\nu - \delta_{\lambda\nu}\beta_\mu. \quad (2.85)$$

Usando as relações (2.84), mostra-se que $S_{\mu\nu}$ transforma como

$$\Lambda^{-1}S_{\mu\nu}\Lambda = a_{\mu\rho}a_{\nu\sigma}S_{\rho\sigma}. \quad (2.86)$$

Assim, $S_{\mu\nu}$ é um tensor de segunda ordem na β -álgebra. *Em geral todo tensor na β -álgebra pode ser escrito como uma combinação linear do produto de β e δ* [26, 27]. Substituindo as expressões (2.84) e (2.85) em (2.86) obteremos a relação

$$[S_{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}] = \delta_{\mu\sigma}S_{\nu\rho} + \delta_{\nu\rho}S_{\mu\sigma} - \delta_{\mu\rho}S_{\nu\sigma} - \delta_{\nu\sigma}S_{\mu\rho}. \quad (2.87)$$

Encontraremos agora uma expressão para $S_{\mu\nu}$. Usaremos para isto a álgebra (2.2), a qual escrevemos na forma

$$\beta_\nu\beta_\mu\beta_\lambda + \beta_\lambda\beta_\mu\beta_\nu = \beta_\nu\delta_{\lambda\mu} + \beta_\lambda\delta_{\mu\nu}. \quad (2.88)$$

Trocando os índices $\mu \leftrightarrow \nu$ podemos também escrever a álgebra (2.2) como

$$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\lambda + \beta_\lambda \beta_\nu \beta_\mu = \beta_\mu \delta_{\nu\lambda} + \beta_\lambda \delta_{\mu\nu}. \quad (2.89)$$

Agora, se subtraímos (2.89) de (2.88), obtemos

$$\beta_\lambda (\beta_\mu \beta_\nu - \beta_\nu \beta_\mu) - (\beta_\mu \beta_\nu - \beta_\nu \beta_\mu) \beta_\lambda = \beta_\nu \delta_{\lambda\mu} - \beta_\mu \delta_{\nu\lambda}, \quad (2.90)$$

que coincide com (2.85) se $S_{\mu\nu}$ é tomado na forma

$$S_{\mu\nu} = \beta_\mu \beta_\nu - \beta_\nu \beta_\mu. \quad (2.91)$$

Pode-se dizer então que a invariância está provada. Pela aplicação de transformações infinitesimais semelhantes, pode-se provar também que j_μ , definido por (2.20), é um vetor; $T_{\mu\nu}$, dado por (2.103), é um tensor, etc. Notemos que a prova da invariância independe da representação que possa ter β_μ .

Introduzindo as matrizes σ_k da maneira

$$\sigma_k = -i\varepsilon_{klm} S_{lm} \quad , \quad k, l, m = 1, 2, 3, \quad (2.92)$$

e levando em conta (2.87), teremos

$$[\sigma_k, \sigma_l] = i\varepsilon_{klm} \sigma_m. \quad (2.93)$$

Essa relação é também satisfeita pelas matrizes de Pauli, $[\frac{\sigma_k}{2}, \frac{\sigma_l}{2}] = i\varepsilon_{klm} \frac{\sigma_m}{2}$, a menos do fator $\frac{1}{2}$, que em (2.93) não aparece, o que é vinculado ao valor do spin $\frac{1}{2}$ que descreve o campo.

Já que (2.93) é a relação de comutação para as matrizes do momento angular, então σ_k terá as propriedades do momento angular e tomará os autovalores $(f, f-1, \dots, -f+1, -f)$, onde f é um inteiro ou seminteiro. A equação característica para σ_k é

$$(\sigma_k - f)(\sigma_k - f + 1) \dots (\sigma_k + f) = 0. \quad (2.94)$$

Em geral, as representações das matrizes do momento angular que satisfazem (2.94) podem ser decompostas em representações irredutíveis $D_{|f|}$, $D_{|f-1|}$, ... do grupo de rotações tridimensionais. Estas representações irredutíveis correspondem a valores $|f|$, $|f-1|$, ... do momento angular. Já que numa representação irredutível D_l a função de onda tem $(2l+1)$ componentes *independentes*, correspondentes às diferentes direções do momento angular, mostra-se que no caso do campo DKP ψ descreve o estado de uma partícula com spin $f = 1$. Assim, vemos que a função de onda em (2.1) descreve os estados da partícula com spin $|f|$, $|f-1|$, Este momento angular é uma propriedade intrínseca das partículas, porque ela não desaparece, inclusive, quando as partículas se encontram no estado de repouso.

Pode-se provar um importante teorema vinculado às propriedades de $d(\partial)$, ou, mais exatamente, com respeito à ordem máxima das derivadas do operador $d(\partial)$, denotado por b . O teorema diz que existe uma relação entre a ordem máxima das derivadas b e a magnitude f (spin), dada por

$$b = 2f \quad \Leftrightarrow \quad m \neq 0, \quad (2.95)$$

onde f é o valor máximo de spin dos diferentes campos descritos por ψ .

2.4 A invariância de gauge e a interação com o campo EM

Até agora foram tratados somente campos livres (sem interação), mas é claro que, em qualquer medida, o registro da partícula só pode ser feito graças à sua interação com outros campos. Por outro lado, o tipo de interação entre os campos

fundamentais está regido pelo princípio de invariância de gauge, que provém da exigência que as magnitudes conservadas devam conservar-se localmente. Assim, para o caso do campo DKP com interação EM, a invariância de gauge local deve ser exigida, o que implica nas transformações

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi' = e^{ie\alpha(x)}\psi, \\ \varphi &\rightarrow \varphi' = e^{ie\alpha(x)}\varphi,\end{aligned}\tag{2.96}$$

para os campos DKP e KG respectivamente. Aplicando estas últimas transformações à forma física (2.73), tem-se

$$\psi' = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} -m\varphi' \\ \partial_k \varphi' \\ i\partial_4 \varphi' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} -e^{ie\alpha(x)}m\varphi \\ e^{ie\alpha(x)}(\partial_k + ie\partial_k\alpha(x))\varphi \\ ie^{ie\alpha(x)}(\partial_4 + ie\partial_4\alpha(x))\varphi \end{pmatrix} \neq e^{ie\alpha(x)}\psi, \tag{2.97}$$

mostrando que a forma física (2.73) é inconsistente com a invariância de gauge. O problema é superado caso a forma física seja trocada por

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} -m\varphi \\ \partial_k^- \varphi \\ i\partial_4^- \varphi \end{pmatrix}, \tag{2.98}$$

onde $\partial_\mu^- = \partial_\mu - ieA_\mu$. A invariância de gauge impõe que A_μ se transforme como

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\alpha(x), \tag{2.99}$$

de modo que (2.98) preserve sua forma com transformações do tipo (2.96).

Antes de começar a análise da interação com o campo EM, introduziremos as definições para os valores médios das diferentes magnitudes físicas na teoria de

DKP. Em geral, na mecânica quântica temos que o valor médio de uma magnitude física f é definida como

$$\bar{f} = \int \psi^\dagger \hat{f} \psi dV, \quad (2.100)$$

onde $\hat{f}$ é o operador da magnitude física f . Na teoria de DKP o valor médio será dado por

$$\bar{f} = \int \bar{\psi} \overline{\beta_4 \hat{f} \psi} dV. \quad (2.101)$$

A expressão (2.101) apresenta uma matriz β_4 dentro da integral que, junto ao operador, de alguma maneira tem que ser simetrizado. Isso é o que se indica com a dupla barra que aparece em (2.101). Levando isso em conta podemos escrever para o vetor de energia-momento

$$\bar{P}_\mu = \int \bar{\psi} \beta_4 \frac{1}{i} \partial_\mu \psi dV, \quad (2.102)$$

onde $p_\mu = \frac{1}{i} \partial_\mu$. Semelhante definição (2.102) é muito diferente daquela usualmente adotada, contudo pode-se demonstrar que as duas definições são equivalentes. Notamos que, como foi visto no capítulo anterior, a teoria de DKP tem uma grande semelhança com a teoria de Dirac para spin $\frac{1}{2}$, com a diferença que aquela satisfaz álgebras diferentes para suas matrizes β_μ .

O tensor de energia-momento deve ser real, ou seja $T_{\mu\nu}^+ = T_{\mu\nu}$, por isso será dado por

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\bar{\psi} \beta_\nu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \beta_\nu \psi]. \quad (2.103)$$

O tensor (2.103) é também chamado de tensor canônico de energia-momento. Pode-se comprovar facilmente que de (2.103) obtém-se

$$\partial_\nu T_{\mu\nu} = 0. \quad (2.104)$$

Note-se, contudo, que o tensor (2.103) não é simétrico e deve ser substituído por um tensor simétrico para satisfazer as exigências do tensor de energia-momento. Na verdade, a relação (2.104) pode ser satisfeita se o tensor $T_{\mu\nu}$ tem a forma

$$T_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu} + \partial_\rho A_{\mu\nu\rho}; \quad (2.105)$$

$$A_{\mu\nu\rho} = -A_{\mu\rho\nu}, \quad (2.106)$$

onde $A_{\mu\nu\rho}$ é um tensor antissimétrico nos índices ν e ρ , de modo que

$$\partial_\nu \partial_\rho A_{\mu\nu\rho} = 0. \quad (2.107)$$

Reescrevemos agora (2.103), de modo que $\Theta_{\mu\nu}$ seja simétrico, da seguinte forma:

$$\bar{\psi} \beta_\nu \partial_\mu \psi = \bar{\psi} \beta_\nu \delta_{\rho\mu} \partial_\rho \psi = \bar{\psi} (\beta_\nu \beta_\mu \beta_\rho + \beta_\rho \beta_\mu \beta_\nu - \delta_{\mu\nu} \beta_\rho) \partial_\rho \psi, \quad (2.108)$$

onde se leva em conta (2.2). Reescrevendo de forma similar o segundo termo de (2.103) chegamos a

$$T_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\rho \{ \bar{\psi} (\beta_\rho \beta_\mu \beta_\nu - \beta_\nu \beta_\mu \beta_\rho) \psi \}, \quad (2.109)$$

onde $\Theta_{\mu\nu}$ é dado por

$$\Theta_{\mu\nu} = -m [\bar{\psi} (\beta_\mu \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\mu) \psi - \delta_{\mu\nu} \bar{\psi} \psi] \quad (2.110)$$

e satisfaz a equação

$$\partial_\nu \Theta_{\mu\nu} = 0, \quad (2.111)$$

só que agora $\Theta_{\mu\nu}$ é simétrico como se requer para o tensor de energia-momento.

Mais que isso, a energia é positivamente definida, ou seja

$$\Theta_{44} = -m \psi^+ \psi, \quad (2.112)$$

onde $\bar{\psi} = \psi^+ \eta_4$; além disso, devido a $\Theta_{44} = -\Theta_{00}$, temos que

$$\Theta_{00} = m\psi^+ \psi. \quad (2.113)$$

Por outro lado, como segue-se de (2.109), pode-se representar os valores esperados de energia-momento definidos por (2.102) através de $\Theta_{\mu 4}$, isto é,

$$\bar{P}_\mu = \frac{1}{i} \int \Theta_{\mu 4} dV, \quad (2.114)$$

tal que Θ_{44} é uma densidade de energia. Um teorema geral indica que a existência de um tensor simétrico de energia-momento encerra a possibilidade de definir um 4 tensor de momento angular. Uma forma de fazer a escolha de $T_{\mu\nu}$ única a fim de satisfazer (2.104) é expressando o 4-tensor do momento angular através de 4-momento (2.114), isto é,

$$P_{\mu\nu} = -P_{\nu\mu} = i \int (x_\mu dP_\nu - x_\nu dP_\mu) = \int (x_\mu \Theta_{\nu\rho} - x_\nu \Theta_{\mu\rho}) dS_\rho. \quad (2.115)$$

Para obter as componentes espaciais, é necessário integrar pela hipersuperfície $dS_4 = dx dy dz = dV$, com $x_0 = \text{const.}$, obtendo assim

$$P_{ik} = -P_{ki} = \int (x_i \Theta_{k4} - x_k \Theta_{i4}) dV, \quad (2.116)$$

onde P_{ik} é necessariamente constante, isto é, conserva-se para um sistema fechado. Como sabemos, as componentes espaciais deste 4-tensor de momento angular coincidem com as componentes do 3-vetor do momento $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Agora, segundo (2.109), teremos que

$$x_i \Theta_{k4} = x_i T_{k4} - \frac{1}{2} x_i \partial_\rho [\bar{\psi} (\beta_\rho \beta_k \beta_4 - \beta_4 \beta_k \beta_\rho) \psi]. \quad (2.117)$$

Fazendo o mesmo com o outro termo, temos:

$$x_k \Theta_{i4} = x_k T_{i4} - \frac{1}{2} x_k \partial_\rho [\bar{\psi} (\beta_\rho \beta_i \beta_4 - \beta_4 \beta_i \beta_\rho) \psi]. \quad (2.118)$$

Daqui, combinando essas duas últimas expressões, obtemos

$$P_{ik} = \int \bar{\psi} \beta_4 (x_i \partial_k - x_k \partial_i) \psi dV + \int \bar{\psi} \beta_4 (\beta_i \beta_k - \beta_k \beta_i) \psi dV. \quad (2.119)$$

O primeiro termo em (2.119) é interpretado como o momento angular orbital e o segundo termo como o momento angular “espinorial” do sistema. Assim, segundo a definição (2.101), o operador de spin será

$$S_{ik} = \beta_i \beta_k - \beta_k \beta_i. \quad (2.120)$$

Note-se a semelhança que há com o campo de spin $\frac{1}{2}$. Para o caso de spin $\frac{1}{2}$ temos $S_{ik} = \frac{1}{4} (\gamma_i \gamma_k - \gamma_k \gamma_i)$. Pode-se provar que S_{ik} de (2.120) comuta com β_4 , ou seja

$$[S_{ik}, \beta_4] = 0, \quad (2.121)$$

além de

$$S_{ik}^3 = S_{ik}. \quad (2.122)$$

Isso demonstra uma vez mais que o spin na teoria DKP pode ser somente $\pm 1, 0$. É satisfatória a possibilidade de se definir o spin como um momento segundo (2.119), independentemente de qualquer consideração sobre o número dos estados de polarização

Levando em conta a invariância de gauge e a forma física (2.98) adotada pelo campo ψ , a interação com o campo EM é introduzida de uma forma muito simples com a regra de acoplamento mínimo, que consiste na substituição

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu^- = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (2.123)$$

quando a diferenciação é aplicada a ψ , e

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu^+ = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (2.124)$$

quando a diferenciação é aplicada a $\bar{\psi}$. Como é sabido, A_μ caracteriza ao campo EM sendo e a carga da partícula. Não é trivial que esse tipo de procedimento possa ser usado para a interação em DKP. De fato em teorias de tipo similar deve-se ter cuidado ao aplicar esta regra, já que a mesma pode resultar inconsistente caso seja aplicada a todas as equações fundamentais; porém, em nosso, caso é correto aplicar estas substituições às equações (2.1) e (2.14), que se transformam em

$$\beta_\mu \partial_\mu^- \psi + m\psi = 0; \quad (2.125)$$

$$\partial_\mu^+ \bar{\psi} \beta_\mu - m\bar{\psi} = 0. \quad (2.126)$$

Aplicando a (2.125) os projetores P e P_μ , obteremos equações semelhantes a (2.35) e (2.36):

$$\partial_\mu^- (P_\mu \psi) = -m (P\psi); \quad (2.127)$$

$$\partial_\mu^- (P\psi) = -m (P_\mu \psi), \quad (2.128)$$

que combinandas resultam

$$(\partial_\mu^- \partial_\mu^- - m^2) (P\psi) = 0. \quad (2.129)$$

Da mesma forma, (2.74) e (2.75) passam a ser

$$U = P\psi = -\sqrt{m} \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (2.130)$$

$$U_\mu = P_\mu \psi = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \partial_\mu^- \varphi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.131)$$

A equação de KG para a componente escalar φ , quando há interação EM, se torna

$$(\partial_\mu^- \partial_\mu^- - m^2) \varphi = 0. \quad (2.132)$$

Observamos novamente que as expressões (2.127)-(2.132) são obtidas selecionando o campo de spin 0 com os projetores P e P_μ . Podemos, no entanto, analisar de forma geral para ambos spins as mudanças que a interação EM produz e que resultados obtêm-se com a regra de acoplamento mínimo. Aquelas equações que não contêm as derivadas ∂_μ permanecem inalteradas. Este é o caso do 4-vetor de corrente j_μ , definido por (2.20).

O tensor simétrico de energia-momento $\Theta_{\mu\nu}$, definido em (2.110), mantém-se também igual, o mesmo não acontecendo com o tensor de energia-momento canônico $T_{\mu\nu}$, que contém derivadas ∂_μ em sua definição, este passa a ser

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\bar{\psi} \beta_\nu \partial_\mu^- \psi - \partial_\mu^+ \bar{\psi} \beta_\nu \psi). \quad (2.133)$$

No lugar de (2.104) e (2.111), teremos que

$$\partial_\nu T_{\mu\nu} = \partial_\nu \Theta_{\mu\nu} = e F_{\mu\nu} j_\nu. \quad (2.134)$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor do campo EM, definido por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (2.135)$$

De forma similar, a equação (2.119) para o momento angular é somente alterada no termo que contém as derivadas ∂_μ , que é a parte orbital, que muda para ∂_μ^- .

A parte espinorial (2.120) se mantém inalterada. Nas relações (2.18) e (2.19) ocorrem algumas mudanças. Para analisá-las faremos uso da seguinte regra de comutação

$$\partial_\mu^\mp \partial_\nu^\mp - \partial_\nu^\mp \partial_\mu^\mp = \mp ie F_{\mu\nu}, \quad (2.136)$$

obtendo para (2.18) a nova relação

$$\partial_\mu^- \psi = \partial_\nu^- \beta_\nu \beta_\mu \psi + \frac{ie}{2m} F_{\nu\rho} (\beta_\rho \beta_\mu \beta_\nu - \delta_{\rho\mu} \beta_\nu) \psi, \quad (2.137)$$

e, de forma correspondente, para (2.19)

$$\partial_\mu^+ \bar{\psi} = \partial_\nu^+ \bar{\psi} \beta_\mu \beta_\nu + \frac{ie}{2m} F_{\nu\rho} \bar{\psi} (\beta_\nu \beta_\mu \beta_\rho - \delta_{\rho\mu} \beta_\nu). \quad (2.138)$$

As equações de KG, que são de segunda ordem na derivada, também são modificadas. Assim, (2.22) transforma-se em

$$\partial_\mu^- \partial_\mu^- \psi = m^2 \psi + \frac{ie}{2} F_{\mu\nu} S_{\mu\nu} \psi + \frac{ie}{2m} \partial_\mu^- \{ F_{\nu\rho} (\beta_\rho \beta_\mu \beta_\nu - \delta_{\rho\mu} \beta_\nu) \psi \} \quad (2.139)$$

e de forma correspondente a (2.23),

$$\partial_\mu^+ \partial_\mu^+ \bar{\psi} = m^2 \bar{\psi} - \frac{ie}{2} F_{\mu\nu} \bar{\psi} S_{\nu\mu} + \frac{ie}{2m} \partial_\mu^+ \{ F_{\nu\rho} \bar{\psi} (\beta_\nu \beta_\mu \beta_\rho - \delta_{\rho\mu} \beta_\nu) \}. \quad (2.140)$$

O segundo termo em (2.139) tem seu semelhante na teoria de Dirac para partículas de spin $\frac{1}{2}$. Fazendo uso da regra de acoplamento mínimo (2.123), podemos escrever a equação de Dirac (1.32), considerando já a interação EM, como

$$(\gamma_\mu \partial_\mu^- + m) \psi = 0. \quad (2.141)$$

A diferença substancial com (2.125) é que as matrizes γ_μ obedecem a uma álgebra diferente, dada por (1.33). Assim, a equação de KG (1.34) transforma-se em

$$\partial_\mu^- \partial_\mu^- \psi = m^2 \psi + \frac{ie}{2} F_{\mu\nu} \gamma_\mu \gamma_\nu \psi, \quad (2.142)$$

onde o fator $\frac{1}{2}$ que aparece no segundo termo em (2.142) está vinculado ao spin da partícula. Por outro lado, o segundo termo em (2.139) descreve a interação do campo EM externo com os momentos magnético e elétrico da partícula. O terceiro termo, contudo, aparece somente na teoria de DKP, devido à álgebra (2.2), e não pode ser interpretado de forma direta. Outro caso, com análise semelhante, pode-se reproduzir para o segundo e terceiro termos de (2.140). O problema que surge pela presença deste termo, dito anômalo, pode ser resolvido com o uso apropriado da **forma física** para o campo DKP.

Num primeiro instante, aplicamos o projetor P definido em (2.24) na equação (2.139), para o campo de spin 0, obtendo assim

$$\partial_\mu^- \partial_\mu^- (P\psi) = m^2 P\psi + \frac{ie}{2} F_{\mu\nu} P S_{\mu\nu} + \frac{ie}{2m} \partial_\mu^- \{F_{\nu\rho} P (\beta_\nu \beta_\mu \beta_\rho - \delta_{\rho\mu} \beta_\nu)\}, \quad (2.143)$$

de onde, considerando (2.27)-(2.29), tem-se

$$\partial_\mu^- \partial_\mu^- (P\psi) = m^2 P\psi, \quad (2.144)$$

que coincide com (2.129). Vemos então que, selecionando corretamente o setor $P\psi$ para spin 0, tal termo anômalo desaparece. De igual forma, o termo que contém a interação EM, $F_{\mu\nu} S_{\mu\nu}$, também é eliminado, como deve ser para o caso do campo escalar. Do mesmo modo, pode-se ver que, aplicando os projetores P e P_λ a (2.137), obtêm-se igualdades triviais ou novamente a equação de KG (2.144). Uma análise semelhante pode ser feita para (2.138) e (2.140).

No caso de spin 1 podemos atuar da mesma forma que se fez em (2.54), aplicando os projetores R_μ e $R_{\mu\nu}$ na equação (2.125) e obtendo

$$\partial_\mu^- (R_{\mu\nu}\psi) = m (R_\nu\psi); \quad (2.145)$$

$$R_{\mu\nu}\psi = \frac{1}{m} (\partial_\mu^- R_\nu - \partial_\nu^- R_\mu) \psi. \quad (2.146)$$

Introduzindo novamente, como em (2.51)-(2.54), a notação

$$R_\mu \psi = m A_\mu^I, \quad R_{\mu\nu} \psi = F_{\mu\nu}^I, \quad (2.147)$$

podem-se escrever as últimas equações como

$$\begin{aligned} \partial_\mu^- F_{\mu\nu}^I &= m^2 A_\nu^I; \\ F_{\mu\nu}^I &= \partial_\mu^- A_\nu^I - \partial_\nu^- A_\mu^I, \end{aligned} \quad (2.148)$$

que são as equações de Proca para partículas massivas de spin 1. O novo campo $F_{\mu\nu}^I$ pode ser expressado através de $F_{\mu\nu}$, dado em (2.53), como

$$F_{\mu\nu}^I = F_{\mu\nu} - iem (A_\mu A_\nu^I - A_\nu A_\mu^I). \quad (2.149)$$

Aplicando o operador R_λ na equação (2.139), obtém-se

$$\partial_\mu^- \partial_\mu^- (R_\lambda \psi) = m^2 (R_\lambda \psi) + \frac{ie}{2} F_{\mu\nu} R_\lambda S_{\mu\nu} \psi + \frac{ie}{2m} \partial_\mu^- \{ F_{\nu\rho} R_\lambda (\beta_\rho \beta_\mu \beta_\nu - \delta_{\rho\mu} \beta_\nu) \psi \}, \quad (2.150)$$

que se pode mostrar ser redutível à mesma equação de Proca (2.148). Aplicando o operador R_λ na equação (2.137) obtém-se

$$\partial_\mu^- (R_\mu \psi) = \frac{ie}{2m} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}^I. \quad (2.151)$$

A importância do resultado aparece quando, ao selecionarmos as componentes físicas do campo DKP, o termo anômalo é eliminado, de modo que o mesmo **não** tem significado físico. Desejamos ressaltar que essa conclusão independe da representação usada.

2.5 Formulação hamiltoniana

Levando em conta a equação linear de DKP, multiplicamos por β_4 pela esquerda e, realizando a soma para índices repetidos, obtemos

$$\beta_4^2 \partial_4 \psi + \beta_4 \beta_k \partial_k \psi + m \beta_4 \psi = 0. \quad (2.152)$$

Agora consideramos a componente $\mu = 4$ em (2.18), isto é,

$$\partial_4 \psi = \partial_\nu \beta_\nu \beta_4 \psi = \beta_4^2 \partial_4 \psi + \beta_k \beta_4 \partial_k \psi,$$

e obtemos que

$$(1 - \beta_4^2) \partial_4 \psi - \beta_k \beta_4 \partial_k \psi = 0. \quad (2.153)$$

Somando (2.152) a (2.153) chegamos a

$$\partial_4 \psi + (\beta_4 \beta_k - \beta_k \beta_4) \partial_k \psi + m \beta_4 \psi = 0. \quad (2.154)$$

Devido à métrica (1.2), temos que $\partial_4 = -i\partial_0 = -i\partial_t$. Assim, a última expressão transforma-se em

$$-i\partial_t \psi + (\beta_4 \beta_k - \beta_k \beta_4) \partial_k \psi + m \beta_4 \psi = 0.$$

Devido a (1.6) temos que $E = i\partial_t$ e assim pode-se escrever (2.154) como

$$\left(H - i \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi = 0, \quad (2.155)$$

onde

$$H = (\beta_4 \beta_k - \beta_k \beta_4) \partial_k + m \beta_4 \quad (2.156)$$

Se H pudesse ser identificado com o hamiltoniano do sistema, esta seria uma possível forma para o operador de energia. Agora, segundo as definições (2.101)

e (2.102), podemos concluir que o valor esperado (valor médio) da energia seria dado por

$$E = \int \bar{\psi} \beta_4 \hat{H} \psi dV, \quad (2.157)$$

onde a inclusão da matriz β_4 em (2.157) é de vital importância já que as quantidades

$$\int \bar{\psi} \hat{H} \psi dV \quad e \quad \int \psi^\dagger \hat{H} \psi dV$$

não estão vinculadas à energia. Notamos que, se o valor esperado de qualquer quantidade física Q é representado por

$$\bar{Q} = \int \bar{\psi} \hat{Q} \psi dV, \quad (2.158)$$

sua derivada com respeito ao tempo será definida como

$$\frac{d}{dt} \bar{Q} = \bar{R} = \int \bar{\psi} \hat{R} \psi dV, \quad (2.159)$$

onde

$$\hat{R} = \frac{i}{\hbar} (\hat{H} \hat{Q} - \hat{Q} \hat{H}). \quad (2.160)$$

O único fato nessas relações que as tornam menos simples que no caso da teoria de Dirac é que $\hat{Q}$ e $\hat{H}$ não são os operadores correspondentes a $\bar{Q}$ e $\bar{R}$, segundo a definição (2.101), de modo que devemos ter cuidado ao acrescentar o fator β_4 quando usamos estas relações. A equação (2.154), ainda, não reproduz em sua totalidade a equação linear de DKP (2.1), pois a multiplicação por β_4 usada para obter (2.152) elimina de (2.1) a parte que corresponde ao autovalor 0 de β_4 . Esta parte omitida pode ser escolhida com a multiplicação de (2.1) pelo fator $(1 - \beta_4^2)$. Atuando desta maneira podemos chegar a

$$\beta_k \beta_4^2 \partial_k \psi + (1 - \beta_4^2) m \psi = 0, \quad (2.161)$$

que é uma conexão que não contém o tempo e por isso pode ser considerada como uma condição inicial que a função de onda deve satisfazer (vínculo). Se levarmos em conta agora a interação EM vemos que, segundo (2.123), a relação (2.18) é substituída por (2.137), com o que o hamiltoniano (2.156) passa a ser

$$H = (\beta_4\beta_k - \beta_k\beta_4) \partial_k^- + m\beta_4 - ieA_4 - \frac{ie}{2m}F_{\nu\rho}(\beta_\rho\beta_4\beta_\nu - \delta_{\rho 4}\beta_\nu), \quad (2.162)$$

e a condição (2.161) do mesmo modo se modifica e passa a ser

$$\beta_k\beta_4^2\partial_k^-\psi + (1 - \beta_4^2)m\psi = 0. \quad (2.163)$$

Antes de concluirmos com a formulação canônica, faremos também algumas observações sobre a formulação em termos da Lagrangiana L . Definimos a ação como um funcional S , dado por

$$S = \int d^4\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi) = \int dt \left(\int d^3x \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi) \right) = \int dt L(\psi, \partial_\mu\psi), \quad (2.164)$$

onde $\mathcal{L}$ é a densidade Lagrangiana e L é a Lagrangiana. Se levarmos em conta o princípio de ação mínima ($\delta S = 0$) podemos obter, após variar os campos ψ e suas derivadas primeiras $\partial_\mu\psi$, as equações de Euler-Lagrange, ou seja, as equações de movimento.

Com isto pode-se propor um “Lagrangiano” (densidade de Lagrange $\mathcal{L}$), tal que, partindo dele, se obtenha as equações de DKP (2.1) e (2.14). Suponhamos que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, \partial_\mu\psi, \partial_\mu\bar{\psi})$. Então se pode comprovar que a partir do Lagrangiano para o campo livre

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\bar{\psi}\beta_\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\beta_\mu\psi) + m\bar{\psi}\psi \quad (2.165)$$

obtem-se as equações de movimento para ψ e $\bar{\psi}$ dadas por (2.1) e (2.14), respectivamente. Pode-se provar, usando a **forma física** (2.73) para ψ , que $\mathcal{L}_0$ em

termos da componente escalar é dada como

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2} (\varphi \square \varphi^* + \varphi^* \square \varphi) + m^2 \varphi^* \varphi, \quad (2.166)$$

da qual se obtém, a menos de uma divergência, o Lagrangiano usual de KG.

$$\mathcal{L}_0 = \partial_\mu \varphi^* \partial_\mu \varphi + m^2 \varphi^* \varphi. \quad (2.167)$$

Levando em conta o princípio de ação mínima que nos leva às equações de Euler-Lagrange podemos chegar à seguinte expressão para o tensor de energia momento canônico $T_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \bar{\psi} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\nu \psi} + \partial_\mu \psi \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\nu \bar{\psi}} - \delta_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.168)$$

Substituindo (2.165) em (2.168) vemos que se obtém para $T_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\bar{\psi} \beta_\nu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \beta_\nu \psi), \quad (2.169)$$

que coincide com a expressão (2.103). Da mesma forma que em (2.20), o 4-vetor de corrente será dado por $j_\mu = i \bar{\psi} \beta_\mu \psi$. A interação com o campo EM é dada também pela regra de acoplamento mínimo (2.123) e (2.124). Assim, o Lagrangiano (2.165) passa a ser

$$\mathcal{L}'_0 = \frac{1}{2} [\bar{\psi} \beta_\mu (\partial_\mu - ie A_\mu) \psi - (\partial_\mu + ie A_\mu) \bar{\psi} \beta_\mu \psi] + m \bar{\psi} \psi,$$

ou

$$\mathcal{L}'_0 = \frac{1}{2} [\bar{\psi} \beta_\mu \partial_\mu^- \psi - \partial_\mu^+ \bar{\psi} \beta_\mu \psi] + m \bar{\psi} \psi. \quad (2.170)$$

A expressão (2.170) contém tanto o Lagrangiano para o campo livre $\mathcal{L}_0$ como o Lagrangiano de interação $\mathcal{L}_{int}$, dado por

$$\mathcal{L}_{int} = -ie \bar{\psi} \beta_\mu \psi A_\mu = -e j_\mu A_\mu, \quad (2.171)$$

de modo que

$$\mathcal{L}'_0 = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}. \quad (2.172)$$

O Lagrangiano total, $\mathcal{L}_T$, é obtido somando a (2.172) o Lagrangiano do campo EM $\mathcal{L}_{EM}$, que é dado por

$$\mathcal{L}_{EM} = \frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu) (\partial_\nu A_\mu). \quad (2.173)$$

Esse Lagrangiano, ao contrario de $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, não oferece problemas na quantização canônica, já que os momentos conjugados π_μ estão bem definidos. Assim, o Lagrangiano total será

$$\mathcal{L}_T = \frac{1}{2} [\bar{\psi} \beta_\mu \partial_\mu^- \psi - \partial_\mu^+ \bar{\psi} \beta_\mu \psi] + m \bar{\psi} \psi + \frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu) (\partial_\nu A_\mu), \quad (2.174)$$

ou, em forma explícita,

$$\mathcal{L}_T = \frac{1}{2} [\bar{\psi} \beta_\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \beta_\mu \psi] + m \bar{\psi} \psi - ie \bar{\psi} \beta_\mu \psi A_\mu + \frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu) (\partial_\nu A_\mu). \quad (2.175)$$

O Lagrangiano total $\mathcal{L}_T$ pode ser expresso de forma similar a (2.166) e (2.167), isto é, em termos da componente escalar φ ; porém, deve-se ter cuidado ao tomar a **forma física** ψ do campo DKP, que estaria agora dada pela expressão (2.97). Pode-se comprovar também que, usando as equações de Euler-Lagrange, são obtidas as seguintes equações de movimento:

$$\begin{aligned} \beta_\mu \partial_\mu \psi + m \psi &= ie \beta_\mu \psi A_\mu; \\ \partial_\mu \bar{\psi} \beta_\mu - m \bar{\psi} &= -ie \bar{\psi} \beta_\mu A_\mu; \\ \square A_\mu &= -ie \bar{\psi} \beta_\mu \psi, \end{aligned} \quad (2.176)$$

que são as equações de movimento explícitas para ψ e $\bar{\psi}$ (veja-se (2.125) e (2.126)).

3. Quantização

3.1 Quantização do campo DKP

A quantização é realizada em analogia com a mecânica quântica de partículas. O campo será um operador atuando no espaço de Hilbert dos possíveis estados físicos que satisfaçam as mesmas equações do campo clássico correspondente. Isto significa nada menos que quantizar os campos com o formalismo canônico.

Vamos considerar o estado de uma partícula livre de momentum $p = (\mathbf{p}, ip_0)$, dado pela função

$$\psi(x) = \frac{1}{V^{1/2}} \varphi_p e^{ipx} \quad (3.1)$$

onde $\varphi_p = \varphi(p)$ é uma função que depende do 4-momentum. Se levarmos em conta a equação (2.1) pode-se comprovar que $\varphi(p)$ satisfaz a relação

$$(i\hat{p} + m) \varphi_p = 0, \quad (3.2)$$

onde $\hat{p} = p_\mu \beta_\mu$. Pode-se mostrar também que qualquer vetor q satisfaz

$$\hat{q}(\hat{q}^2 - q^2) = 0. \quad (3.3)$$

Devemos notar que para o campo de Dirac de spin $\frac{1}{2}$, e com a álgebra (1.33), tem-se que $\hat{p}^2 = p^2$, onde $\hat{p} = p_\mu \gamma_\mu$. Na equação de DKP as matrizes β_μ satisfazem

um álgebra diferente, dada por (2.2) e por conseguinte $\hat{p}^2 \neq p^2$, onde $\hat{p} = p_\mu \beta_\mu$. Usando (3.2) e (3.3) pode-se obter a condição relativista

$$p_0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = \pm \omega_{\mathbf{p}}. \quad (3.4)$$

Vemos assim que a condição relativista é satisfeita pela solução do tipo (3.1). Assim, para um valor dado do momento da partícula temos duas soluções para φ_p , diferentes no sinal de p_0 , dadas por (3.4). Essas soluções podem ser associadas a soluções de frequência positiva e negativa. Representamos as amplitudes a elas correspondentes por $\varphi_p^{(+)}$ e $\varphi_p^{(-)}$. Por conseguinte, as soluções (3.1) escrevem-se na forma geral como

$$\psi(x) = \frac{1}{V^{1/2}} \varphi_p^{(\pm)} e^{\pm i p x}, \quad (3.5)$$

onde $\varphi_p^{(\pm)}$ satisfaz a equação

$$(\pm i \hat{p} + m) \varphi_p^{(\pm)} = 0, \quad (3.6)$$

e as soluções para o adjunto são dadas por

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{V^{1/2}} \bar{\varphi}_p^{(\pm)} e^{\mp i p x}, \quad (3.7)$$

onde $\bar{\varphi}_p^{(\pm)}$ satisfaz a equação

$$\bar{\varphi}_p^{(\pm)} (\pm i \hat{p} + m) = 0, \quad (3.8)$$

além disso $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger \eta_4$, onde η_4 é determinado por (2.8).

A fim de ter o significado físico destas soluções definimos a energia e a carga do campo usando as fórmulas gerais (2.103) e (2.20). Uma vez que $T_{\mu\nu}$ satisfaz (2.104) podemos expressar também o 4-momentum como

$$P_\mu = \frac{1}{i} \int T_{\mu 4} dV. \quad (3.9)$$

Nota-se que o 4-momentum foi dado inicialmente pela expressão (2.114), onde (3.9) é uma expressão equivalente devido à condição (2.104). Considerando a componente $p_4 = ip_0 = iE$, obtemos

$$E = - \int T_{44} dV, \quad (3.10)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é dado por (2.103). Vemos assim que para soluções do tipo (3.5) e (3.7) obtém-se

$$T_{44} = \pm \frac{ip_4}{V} (\bar{\varphi}_p^{(\pm)} \beta_4 \varphi_p^{(\pm)}). \quad (3.11)$$

Logo, substituindo esta última expressão em (3.10), temos que

$$E = \pm \frac{p_0}{V} \int (\bar{\varphi}_p^{(\pm)} \beta_4 \varphi_p^{(\pm)}) dV. \quad (3.12)$$

Da mesma maneira define-se a carga, levando em conta (2.20), como

$$Q = \frac{e}{i} \int j_4 dV = \frac{e}{V} \int (\bar{\varphi}_p^{(\pm)} \beta_4 \varphi_p^{(\pm)}) dV. \quad (3.13)$$

Integrando sobre o volume, (3.12) e (3.13) escrevem-se como

$$E = \pm p_0 (\bar{\varphi}_p^{(\pm)} \beta_4 \varphi_p^{(\pm)}); \quad (3.14)$$

$$Q = e (\bar{\varphi}_p^{(\pm)} \beta_4 \varphi_p^{(\pm)}). \quad (3.15)$$

Assim, se exigirmos que a energia em (3.14) seja positivamente definida devemos assumir a normalização para φ_p da seguinte maneira:

$$(\bar{\varphi}_p^{(\pm)} \beta_4 \varphi_p^{(\pm)}) = \pm 1. \quad (3.16)$$

Neste caso E coincide com $|p_0| = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, enquanto que a carga (3.15) é igual a $+e$ no estado $\varphi_p^{(+)}$, e igual a $-e$ no estado $\varphi_p^{(-)}$. As soluções de frequência

positiva e negativa, dadas por (3.5), descrevem partículas de ambos os sinais na carga.

Para quantizar o campo DKP, vamos proceder da mesma forma que no caso de Dirac. Para isso os campos ψ e $\bar{\psi}$ são considerados como operadores atuando no espaço de Fock e obedecem a determinadas regras de comutação.

Vamos então expandir os campos $\psi(x)$ e $\bar{\psi}(x)$ em termos de ondas planas usando as soluções (3.5) e (3.7). Assim tem-se

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{1}{V^{1/2}} \sum_{\mathbf{p}} [a_{\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{p}}^{(+)} e^{ipx} + b_{\mathbf{p}}^+ \varphi_{\mathbf{p}}^{(-)} e^{-ipx}] ; \\ \bar{\psi}(x) &= \frac{1}{V^{1/2}} \sum_{\mathbf{p}} [a_{\mathbf{p}}^+ \bar{\varphi}_{\mathbf{p}}^{(+)} e^{-ipx} + b_{\mathbf{p}} \bar{\varphi}_{\mathbf{p}}^{(-)} e^{ipx}] ,\end{aligned}\quad (3.17)$$

onde $\varphi_{\mathbf{p}}^{(\pm)}$ satisfaz a condição de normalização (3.16). Os operadores $a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^+, b_{\mathbf{p}}$ e $b_{\mathbf{p}}^+$ atuam no espaço de Fock. Definimos também o estado fundamental (vácuo) $|0\rangle$ tal que

$$\begin{aligned}b_{\mathbf{p}} |0\rangle &= a_{\mathbf{p}} |0\rangle = 0; \\ \langle 0| b_{\mathbf{p}}^+ &= \langle 0| a_{\mathbf{p}}^+ = 0,\end{aligned}\quad (3.18)$$

para todo $\mathbf{p}$. Da mesma maneira deve-se entender o produto de dois operadores distintos como atuando em dois espaços diferentes, ou seja,

$$a_{\mathbf{p}_1}^+ b_{\mathbf{p}_2}^+ |0\rangle = a_{\mathbf{p}_1}^+ |0\rangle \otimes b_{\mathbf{p}_2}^+ |0\rangle = |\mathbf{p}_1\rangle \otimes |\mathbf{p}_2\rangle = |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle . \quad (3.19)$$

Se substituirmos a expansão (3.17) em (2.20) e (2.103), obtemos as expressões para a energia E , o momento $\mathbf{P}$ e a carga Q do campo como

$$E = \sum_{\mathbf{p}} p_0 (a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^+) ;$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} (a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^+); \\ Q &= \sum_{\mathbf{p}} e (a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}} b_{\mathbf{p}}^+). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Assumindo que os operadores $a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^+, b_{\mathbf{p}}$ e $b_{\mathbf{p}}^+$ satisfazem as seguintes regras de comutação:

$$\begin{aligned} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^+] &= [b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}'}^+] = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}; \\ [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}] &= [b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}'}] = [a_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}'}] = 0; \\ [a_{\mathbf{p}}^+, a_{\mathbf{p}'}^+] &= [b_{\mathbf{p}}^+, b_{\mathbf{p}'}^+] = [a_{\mathbf{p}}^+, b_{\mathbf{p}'}^+] = 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde os autovalores de $a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}}$ e $b_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}}$ são inteiros. Podemos introduzir a seguinte notação

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{p}}^{(+)} &= a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}}; \\ N_{\mathbf{p}}^{(-)} &= b_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Vemos então que as magnitudes $E, \mathbf{P}$ e Q , adotam a forma

$$\begin{aligned} E &= \sum_{\mathbf{p}} p_0 (N_{\mathbf{p}}^{(+)} + N_{\mathbf{p}}^{(-)} + 1); \\ \mathbf{P} &= \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} (N_{\mathbf{p}}^{(+)} + N_{\mathbf{p}}^{(-)} + 1); \\ Q &= \sum_{\mathbf{p}} e (N_{\mathbf{p}}^{(+)} - N_{\mathbf{p}}^{(-)} - 1), \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde, além da normalização (3.16), assume-se que

$$\bar{\varphi}_{\mathbf{p}}^{(\pm)} \beta_4 \bar{\varphi}_{-\mathbf{p}}^{(\mp)} = 0. \quad (3.24)$$

Os operadores $N_{\mathbf{p}}^{(+)}$ e $N_{\mathbf{p}}^{(-)}$ são os operadores do número de partículas de carga positiva e negativa com momento $\mathbf{p}$.

3.2 Regras de comutação. Propagador do campo DKP. Função de Green

Para a quantização, $\psi(x)$ e $\bar{\psi}(x)$ são considerados como operadores (em geral distribuições). Vamos calcular então as relações de comutação levando em conta a expansão (3.17). Assim obtemos

$$[\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')] = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} F_{\alpha\beta}^+(p) e^{ip(x-x')} - \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} F_{\alpha\beta}^-(p) e^{-ip(x-x')}, \quad (3.25)$$

onde

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}^+(p) &= \varphi_\alpha^{(+)}(p) \bar{\varphi}_\beta^{(+)}(p); \\ F_{\alpha\beta}^-(p) &= \varphi_\alpha^{(-)}(p) \bar{\varphi}_\beta^{(-)}(p). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Pode-se mostrar que $F_{\alpha\beta}^+(p)$ e $F_{\alpha\beta}^-(p)$ devem satisfazer as equações

$$\begin{aligned} (i\hat{p} + m) F_{\alpha\beta}^+(p) &= 0; \\ (-i\hat{p} + m) F_{\alpha\beta}^-(p) &= 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Devido à relação (3.3) e à condição $p^2 + m^2 = 0$, obtém-se

$$\hat{p}(p^2 + m^2) = 0, \quad (3.28)$$

por isso podemos concluir que as soluções para (3.27) são dadas por

$$\begin{aligned} F^+(p) &= a\hat{p}(i\hat{p} - m); \\ F^-(p) &= b\hat{p}(i\hat{p} + m), \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde a e b são coeficientes (não matrizes) que podem ser calculados a partir da condição de normalização (3.16), isto é,

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_p^{(+)} \beta_4 \varphi_p^{(+)} &= \text{Tr}(\beta_4 F^+(p)) = 1; \\ \bar{\varphi}_p^{(-)} \beta_4 \varphi_p^{(-)} &= \text{Tr}(\beta_4 F^-(p)) = -1. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Substituindo as soluções (3.29) nesta última expressão, obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} &= Tr(\beta_4 \hat{p}(i\hat{p} - m)); \\ \frac{1}{b} &= Tr(\beta_4 \hat{p}(i\hat{p} + m)).\end{aligned}\quad (3.31)$$

Fazendo uso das propriedades do traço para as matrizes β_μ , dadas em (2.61), obtemos

$$a = b = \frac{i}{2mp_0}.\quad (3.32)$$

Logo, (3.29) é dado como

$$\begin{aligned}F^+(p) &= \frac{i\hat{p}(i\hat{p} - m)}{2mp_0}; \\ F^-(p) &= \frac{i\hat{p}(i\hat{p} + m)}{2mp_0}.\end{aligned}\quad (3.33)$$

Finalmente, substituindo estas últimas expressões em (3.25), obtemos a regra de comutação para os campos:

$$[\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')] = \frac{1}{m} (\beta_\mu \partial_\mu (\beta_\nu \partial_\nu - m))_{\alpha\beta} \Delta(x - x'),\quad (3.34)$$

onde $\Delta(x - x')$ é a função de Pauli-Jordan, definida como

$$\Delta(x - x') = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2p_0} \left(e^{ip(x-x')} - e^{-ip(x-x')} \right).\quad (3.35)$$

Podemos escrever esta última expressão como integral fazendo $V \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{p}\quad (3.36)$$

assim a função de Pauli-Jordan é escrita como

$$\begin{aligned}\Delta(x - x') &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0} \left(e^{ip(x-x')} - e^{-ip(x-x')} \right) \\ &= \Delta_+(x - x') + \Delta_-(x - x'),\end{aligned}\quad (3.37)$$

onde

$$\begin{aligned}\Delta_{\pm}(x-x') &= \pm \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0} e^{\pm ip(x-x')}; \\ \Delta_+(x-x') &= -\Delta_-(x'-x),\end{aligned}\tag{3.38}$$

ou também na forma invariante

$$\Delta_{\pm}(x-x') = \pm \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4p e^{\pm ip(x-x')} \theta(p_0) \delta(p^2 + m^2); \tag{3.39}$$

$$\Delta_{\pm}(x-x') = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C^{\pm}} d^4p \frac{e^{ip(x-x')}}{p^2 + m^2}, \tag{3.40}$$

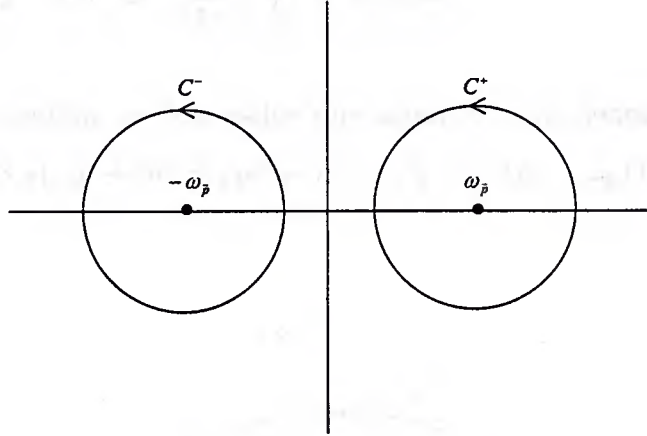


Figura 3.1:

onde

$$\theta(p_0) = \begin{cases} 1 & , \quad p_0 > 0; \\ 0 & , \quad p_0 < 0. \end{cases} \tag{3.41}$$

Fazendo uso destas novas definições, escrevemos, em analogia a (3.34):

$$\langle 0 | \psi_{\alpha}(x) \bar{\psi}_{\beta}(x') | 0 \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} F_{\alpha\beta}^+(p) e^{ip(x-x')} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{m} (\beta_\mu \partial_\mu (\beta_\nu \partial_\nu - m))_{\alpha\beta} \Delta_+(x - x'); \\
 \langle 0 | \bar{\psi}_\beta(x') \psi_\alpha(x) | 0 \rangle &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} F_{\alpha\beta}^-(p) e^{-ip(x-x')} \\
 &= -\frac{1}{m} (\beta_\mu \partial_\mu (\beta_\nu \partial_\nu - m))_{\alpha\beta} \Delta_-(x - x').
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

A função de Pauli-Jordan pode também ser expressa em forma invariante. Usando (3.39) e (3.40) tem-se

$$\Delta(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p e^{ip(x-x')} \epsilon(p_0) \delta(p^2 + m^2); \tag{3.44}$$

$$\Delta(x - x') = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C_0} d^4 p \frac{e^{ip(x-x')}}{p^2 + m^2}. \tag{3.45}$$

O contorno C_0 contém os dois pólos que aparecem no denominador, em concordância com (3.4), $p^2 + m^2 = (\mathbf{p}^2 + m^2) - p_0^2 = -(p_0 - \omega_{\mathbf{p}})(p_0 + \omega_{\mathbf{p}})$,

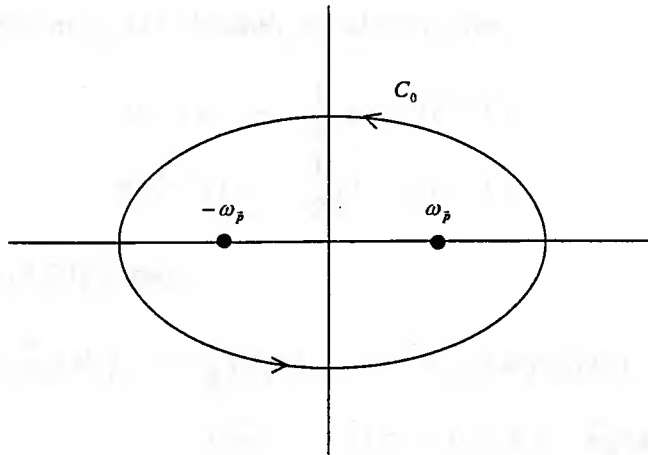


Figura 3.2:

onde foi definida a função

$$\epsilon(p_0) = \begin{cases} 1 & , \quad p_0 > 0 \\ -1 & , \quad p_0 < 0 \end{cases} . \quad (3.46)$$

A condição de causalidade implica que

$$\Delta(x - x') = 0 \quad , \quad \forall \quad (x - x')^2 > 0 \quad (3.47)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_0} \Delta(x - x') \right|_{x_0=x'_0} = -i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (3.48)$$

Pode-se provar também que, junto a (3.34), têm-se as relações:

$$[\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x')] = 0; \quad (3.49)$$

$$[\bar{\psi}_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')] = 0.$$

Definimos agora o ordenamento temporal para os operadores do campo como

$$T(\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')) = \theta(t - t') \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x') + \theta(t' - t) \bar{\psi}_\beta(x') \psi_\alpha(x), \quad (3.50)$$

onde $\theta(t)$ foi dado em (3.41). Usando as identidades

$$\theta(t - t') = \frac{1}{2} (1 + \epsilon(t - t')); \quad (3.51)$$

$$\theta(t' - t) = \frac{1}{2} (1 - \epsilon(t - t')),$$

pode-se escrever (3.50) como

$$\begin{aligned} T(\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')) &= \frac{1}{2} (\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x') + \bar{\psi}_\beta(x') \psi_\alpha(x)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \epsilon(t - t') (\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x') - \bar{\psi}_\beta(x') \psi_\alpha(x)), \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde o comutador dos campos nessa expressão é dado por (3.34), ou seja, a função de Pauli-Jordan $\Delta(x - x')$. Note-se também que na última expressão aparece o

anticomutador. O valor esperado deste no vácuo, usando (3.42) e (3.43), resulta ser

$$\langle 0 | \{ \psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x') \} | 0 \rangle = \frac{1}{m} (\beta_\mu \partial_\mu (\beta_\nu \partial_\nu - m))_{\alpha\beta} \Delta^{(1)}(x - x'), \quad (3.53)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)}(x - x') &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{2p_0} \left(e^{ip(x-x')} + e^{-ip(x-x')} \right) \\ &= \Delta_+(x - x') - \Delta_-(x - x'). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Na forma invariante, temos que

$$\Delta^{(1)}(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4 p e^{ip(x-x')} \delta(p^2 + m^2); \quad (3.55)$$

$$\Delta^{(1)}(x - x') = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C_1} d^4 p \frac{e^{ip(x-x')}}{p^2 + m^2}. \quad (3.56)$$

A diferença entre $\Delta(x - x')$ e $\Delta^{(1)}(x - x')$ reside na forma do contorno. C_1 é o contorno mostrado na figura 3.3

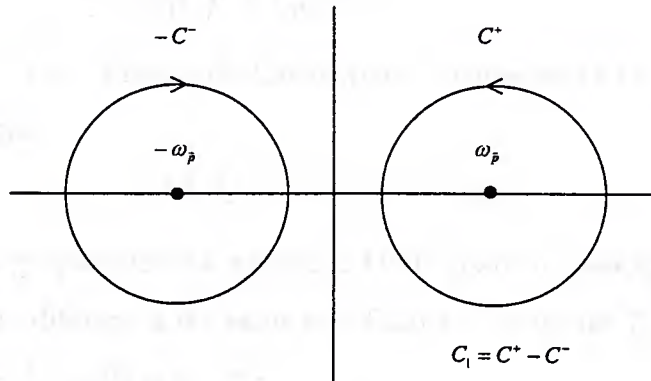


Figura 3.3:

Levando isto em conta, obtemos o valor esperado no vácuo

$$\begin{aligned} \langle 0 | T (\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')) | 0 \rangle &= \frac{1}{2m} (\beta_\mu \partial_\mu (\beta_\nu \partial_\nu - m))_{\alpha\beta} \Delta^{(1)}(x - x') \\ &+ \frac{\varepsilon(t - t')}{2m} (\beta_\mu \partial_\mu (\beta_\nu \partial_\nu - m))_{\alpha\beta} \Delta(x - x'), \end{aligned}$$

o qual pode ser escrito na forma

$$\langle 0 | T (\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(x')) | 0 \rangle = T_{\alpha\beta}^c(x - x') + \frac{1}{m} (1 - \beta_0^2)_{\alpha\beta} \delta(x - x'), \quad (3.57)$$

onde $\beta_0 = -i\beta_4$. O termo proporcional a $(1 - \beta_0^2)$, que não é relativisticamente invariante, aparece quando consideramos as componentes não físicas do campo. Pode-se mostrar que este termo não contribui para os elementos físicos da matriz S . Assim, para os cálculos pode-se usar

$$T^c(x - x') = -\frac{i}{m} [\beta_\mu \partial_\mu (\beta_\nu \partial_\nu - m) - \partial_\mu^2 + m^2] \Delta^c(x - x'), \quad (3.58)$$

com $\Delta^c(x)$ definido como

$$\Delta^c(x - x') = \theta(x_0 - x'_0) \Delta_+(x - x') + \theta(x'_0 - x_0) \Delta_+(x' - x); \quad (3.59)$$

$$\Delta^c(x - x') = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_C d^4p \frac{e^{ip(x-x')}}{p^2 + m^2}, \quad (3.60)$$

tal que $T^c(x - x')$ é a função de Green para a equação (2.1) e, portanto, deve satisfazer a relação

$$(\beta_\mu \partial_\mu + m) T^c(x) = \delta(x). \quad (3.61)$$

Esta função é o propagador da partícula DKP (para o caso de uma partícula). Vemos que ela se diferencia do valor esperado no vácuo de $T(\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x'))$ na quantidade $(-\frac{1}{m})(1 - \beta_0^2) \delta(x - x')$.

Nota-se que no caso do campo elétron-pósitron, o propagador não difere do correspondente valor esperado no vácuo. Isto vem associado ao fato de que na

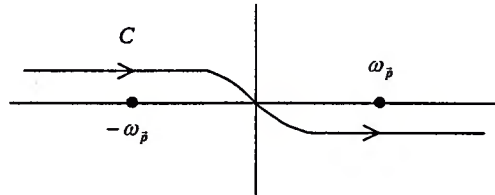


Figura 3.4:

teoria de DKP nem todas as componentes do campo $\psi(x)$ são linearmente independentes.

Daremos também a expressão para a transformada de Fourier da função $T^c(x)$, a ser usada em cálculos posteriores

$$T^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int T^c(p) e^{ipx} d^4p \quad (3.62)$$

$$T^c(p) = (i\hat{p} + m)^{-1} = \frac{i\hat{p}(i\hat{p} - m) + p^2 + m^2}{m(p^2 + m^2)}.$$

4. Representação de Källen-Lehmann (KL). Funções de Green Exatas

A presença de estados intermediários de uma partícula leva a obter pólos nos elementos de matriz do ordenamento temporal do produto dos campos. Estados intermediários de muitas partículas levam a singularidades muito mais complicadas e, em geral, são difíceis de descrever. Não obstante, para o caso especial do valor esperado no vácuo envolvendo dois operadores, tem-se uma representação conveniente, que é uma forma explícita de conhecer a estrutura analítica da transformada de Fourier. Em particular, esta representação pode ser usada para propagadores, quando os dois operadores são os campos das partículas elementares.

4.1 Campo escalar

Consideremos um operador escalar complexo $\Phi(x)$ na representação de Heisenberg, que pode ou não ser o campo de uma partícula elementar (inicialmente será usada a teoria de KG para obter uma relação espectral. Não obstante, o

procedimento pode ser estendido à teoria de DKP).

O valor esperado no vácuo do produto $\Phi(x) \Phi^+(y)$ pode ser expresso como

$$\langle 0 | \Phi(x) \Phi^+(y) | 0 \rangle = \sum_n \langle 0 | \Phi(x) | n \rangle \langle n | \Phi^+(y) | 0 \rangle, \quad (4.1)$$

onde usamos a relação de completeza $\sum_n |n\rangle \langle n| = 1$ (em geral a soma sobre n inclui ambos espectros: contínuo e discreto). Fazendo a escolha dos estados como autoestados do 4-momento p_μ , vemos que a invariância de translação,

$$\Phi(x) = e^{-ip(x-x_0)} \Phi(x_0) e^{ip(x-x_0)} \quad (4.2)$$

leva-nos a

$$\begin{aligned} \langle 0 | \Phi(x) | n \rangle &= e^{ip_n x} \langle 0 | \Phi(0) | n \rangle; \\ \langle n | \Phi^+(y) | 0 \rangle &= e^{-ip_n y} \langle n | \Phi^+(0) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Então (4.1) pode ser escrita como

$$\langle 0 | \Phi(x) \Phi^+(y) | 0 \rangle = \sum_n e^{ip_n(x-y)} |\langle 0 | \Phi(0) | n \rangle|^2. \quad (4.4)$$

É conveniente escrever esta última expressão em termos de uma função espectral.

Se considerarmos a seguinte soma

$$\sum_n \delta^4(p - p_n) |\langle 0 | \Phi(0) | n \rangle|^2,$$

podemos notar que é uma função escalar do 4-vetor p_μ e, por conseguinte, pode depender somente de p^2 (para todo $p^2 \leq 0$) e da função $\theta(p_0)$. Assim, a soma considerada adota a forma

$$\sum_n \delta^4(p - p_n) |\langle 0 | \Phi(0) | n \rangle|^2 = (2\pi)^{-3} \theta(p_0) \rho(-p^2), \quad (4.5)$$

com $\rho(-p^2) = 0$ para $p^2 > 0$. O fator $(2\pi)^{-3}$ é considerado por conveniência futura. Já da expressão (4.5) pode-se ver que $\rho(-p^2)$ é real e positiva. Logo, ao multiplicar por $\exp ip(x-y)$ ambos os lados de (4.5) e integrar em d^4p , (4.4) resulta em

$$\begin{aligned} \langle 0 | \Phi(x) \Phi^+(y) | 0 \rangle &= (2\pi)^{-3} \int d^4p e^{ip(x-y)} \theta(p_0) \rho(-p^2) \\ &= (2\pi)^{-3} \int d^4p e^{ip(x-y)} \theta(p_0) \int_0^\infty d\kappa^2 \rho(\kappa^2) \delta(p^2 + \kappa^2). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Trocando a ordem da integração sobre p e κ^2 , a última relação pode ser expressa como

$$\langle 0 | \Phi(x) \Phi^+(y) | 0 \rangle = \int_0^\infty d\kappa^2 \rho(\kappa^2) \Delta_+(x-y; \kappa^2), \quad (4.7)$$

onde Δ_+ é a função já antes obtida em (3.39),

$$\Delta_+(x-y; \kappa^2) = (2\pi)^{-3} \int d^4p e^{ip(x-y)} \theta(p_0) \delta(p^2 + \kappa^2). \quad (4.8)$$

Da mesma maneira, em analogia a (4.7), obtém-se

$$\langle 0 | \Phi^+(y) \Phi(x) | 0 \rangle = \int_0^\infty d\kappa^2 \bar{\rho}(\kappa^2) \Delta_+(y-x; \kappa^2), \quad (4.9)$$

com uma segunda função $\bar{\rho}(\kappa^2)$ espectral definida como

$$\sum_n \delta^4(p - p_n) |\langle n | \Phi^+(0) | 0 \rangle|^2 = (2\pi)^{-3} \theta(p_0) \bar{\rho}(-p^2). \quad (4.10)$$

Podemos então expressar o valor esperado do comutador usando os resultados agora obtidos

$$\langle 0 | [\Phi(x), \Phi^+(y)] | 0 \rangle = \int_0^\infty d\kappa^2 \{ \rho(\kappa^2) \Delta_+(x-y; \kappa^2) - \bar{\rho}(\kappa^2) \Delta_+(y-x; \kappa^2) \}. \quad (4.11)$$

A condição de causalidade (3.47) implica que

$$\rho(\kappa^2) = \bar{\rho}(\kappa^2). \quad (4.12)$$

Assim, usando a equação (4.11), o valor esperado no vácuo do ordenamento temporal é

$$\langle 0 | T \{ \Phi(x) \Phi^+(y) \} | 0 \rangle = \int_0^\infty d\kappa^2 \rho(\kappa^2) \Delta_F(x-y; \kappa^2), \quad (4.13)$$

onde Δ_F é o propagador de Feymann para partículas de spin 0 e massa κ :

$$\Delta_F(x-y; \kappa^2) = \theta(x_0 - y_0) \Delta_+(x-y; \kappa^2) + \theta(y_0 - x_0) \Delta_+(y-x; \kappa^2). \quad (4.14)$$

Usando a transformada de Fourier para passar ao espaço dos momentos, pode-se obter a função de Green total como

$$\begin{aligned} \Delta_F(-p^2) &= \int d^4x e^{-ip(x-y)} \langle 0 | T \{ \Phi(x) \Phi^+(y) \} | 0 \rangle \\ &= \int_0^\infty d\kappa^2 \rho(\kappa^2) \int d^4x e^{-ip(x-y)} \Delta_F(x-y; \kappa^2). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Finalmente, levando em conta que

$$\int d^4x e^{-ip(x-y)} \Delta_F(x-y; \kappa^2) = \frac{1}{p^2 + \kappa^2 - i\epsilon}, \quad (4.16)$$

tem-se

$$\Delta_F(-p^2) = \int_0^\infty \frac{\rho(\kappa^2) d\kappa^2}{p^2 + \kappa^2 - i\epsilon}, \quad (4.17)$$

sendo esta a representação de **Källen-Lehmann** para a função de Green exata no caso de uma partícula escalar de massa κ (lembramos que se está usando a teoria de KG).

Agora, da igualdade:

$$\frac{1}{x \mp i\epsilon} = \mathcal{P} \left(\frac{1}{x} \right) \pm i\pi \delta(x), \quad (4.18)$$

$\forall \epsilon \rightarrow 0$ e $\mathcal{P}$ denota o valor principal de Cauchy. Podemos obter de (4.17) uma relação para a parte imaginária de $\Delta_F(-p^2)$, qual seja,

$$\text{Im } \Delta_F(-p^2) = \pi \rho(-p^2), \quad (4.19)$$

e assim escrever a relação de dispersão na forma

$$\Delta_F(-p^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Im } \Delta_F(\kappa^2) d\kappa^2}{p^2 + \kappa^2 - i\epsilon}. \quad (4.20)$$

Isto significa que a função de Green total pode ser recuperada se é conhecida a sua parte imaginária.

A função $\rho(\kappa^2)$ é chamada função espectral e, em princípio, é sempre positiva:

$$\rho(\kappa^2) \geq 0. \quad (4.21)$$

A igualdade é satisfeita para 4-vectores tipo espaço.

Podemos usar a representação espectral (4.20) junto às relações de comutação (calculadas num mesmo tempo) para obter uma condição que a função espectral deve satisfazer.

Se $\Phi(x)$ é um operador do campo convencional, normalizado, então, usando (3.48), tem-se que

$$\left[\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \Phi^+(\mathbf{y}, t) \right] = -i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.22)$$

Fazendo uso de (4.11) e (4.12), vemos que deve-se cumprir

$$\int_0^\infty \rho(\kappa^2) d\kappa^2 = 1. \quad (4.23)$$

Para o caso especial de um campo livre de massa m , a função espectral $\rho^{(0)}(\kappa^2)$ é dada por

$$\rho^{(0)}(\kappa^2) = \delta(\kappa^2 - m^2). \quad (4.24)$$

Em geral, estados intermediários de uma partícula de massa m contribuem com $c\delta(\kappa^2 - m^2)$, de modo que em geral tem-se

$$\rho(\kappa^2) = c\delta(\kappa^2 - m^2) + \sigma(\kappa^2), \quad (4.25)$$

onde $\sigma(\kappa^2)$ representa a contribuição dos estados intermediários com espectro de massa contínuo, como estados de duas ou mais partículas. Assim, quando é tratado um só tipo de partícula escalar de massa m , o termo $\sigma(\kappa^2)$ desaparece para $\kappa^2 \leq 4m^2$. A constante c pode ser determinada pela condição de renormalização.

Introduzamos o valor esperado no vácuo do comutador dos operadores renormalizados $\Phi_r(x)$ como

$$\langle 0 | [\Phi_r(x), \Phi_r^\dagger(y)] | 0 \rangle = \Delta_r(x - y), \quad (4.26)$$

com

$$\Phi(x) = Z_3^{1/2} \Phi_r(x), \quad (4.27)$$

de modo que os operadores do campo renormalizado estão vinculados com os não-renormalizados por uma transformação de escala dada pela constante $Z_3^{1/2}$. A condição de normalização é dada por

$$\langle 0 | \Phi_r(x) | p \rangle = (2p_0 V)^{-1/2} e^{ipx}, \quad (4.28)$$

significando que a parte discreta é normalizada da mesma forma que é realizada para o campo livre, isto é

$$\rho_r(\kappa^2) = \delta(\kappa^2 - m^2) + \sigma_r(\kappa^2). \quad (4.29)$$

Por outro lado, temos que

$$\rho(\kappa^2) = Z_3 \rho_r(\kappa^2), \quad (4.30)$$

onde $\rho(\kappa^2)$ foi dada em (4.25). Daí podemos obter, após integração em κ^2 e considerando (4.30),

$$\sigma(\kappa^2) = Z_3 \sigma_r(\kappa^2); \quad (4.31)$$

$$c = Z_3,$$

de onde deduz-se que

$$Z_3^{-1} = 1 + \int \sigma_r(\kappa^2) d\kappa^2 \geq 1, \quad (4.32)$$

com $\sigma_r(\kappa^2)$ positivamente definida. Por conseguinte

$$1 \geq Z_3 \geq 0. \quad (4.33)$$

4.2 Função de Green exata para o fóton

Usando-se os campos na representação de Heisenberg, a função de Green exata $D_{\mu\nu}$ é dada por

$$D_{\mu\nu}(x-y) = \langle 0 | T(A_\mu(x) A_\nu(y)) | 0 \rangle, \quad (4.34)$$

onde a dependência $(x-y)$ deve-se à invariância por translações no espaço-tempo. Vemos, segundo (4.34), que será necessário calcular termos como

$$\langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle. \quad (4.35)$$

Realizando translações espaço-temporais semelhantes a (4.2), escrevemos

$$A_\mu(x) = e^{ikx} A_\mu(0) e^{-ikx}. \quad (4.36)$$

Introduzindo a relação de completeza

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = I \quad (4.37)$$

podemos expressar (4.35) como

$$\langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle = \sum_n \langle 0 | A_\mu(0) | n \rangle \langle n | A_\nu(0) | 0 \rangle e^{-ik_n(x-y)}, \quad (4.38)$$

onde pode-se ver a dependência explícita de $(x - y)$, explicando o argumento que se segue a (4.34). De forma semelhante a (4.5), é possível definir uma função espectral $\rho_{\mu\nu}(-k^2)$ na forma

$$\theta(k_0) (2\pi)^{-3} \rho_{\mu\nu}(-k^2) = \sum_n \delta^4(k - k_n) \langle 0 | A_\mu(0) | n \rangle \langle n | A_\nu(0) | 0 \rangle, \quad (4.39)$$

onde a soma é dada sobre todos os estados intermediários possíveis. Assim, o cálculo de (4.34) reduz-se ao cálculo de (4.39). A representação de Källen-Lehmann (4.17) fornece a relação entre estas expressões

$$D_{\mu\nu}(-k^2) = \int_0^\infty \frac{\rho_{\mu\nu}(\kappa^2) d\kappa^2}{\kappa^2 + k^2 - i\epsilon}, \quad (4.40)$$

sendo esta a forma mais geral que $D_{\mu\nu}(-k^2)$ pode ter. Além disso,

$$\text{Im } D_{\mu\nu}(-k^2) = \pi \rho_{\mu\nu}(-k^2) \quad (4.41)$$

e, devido à invariância relativista, $\rho_{\mu\nu}$ deve assumir a forma

$$\rho_{\mu\nu}(-k^2) = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \rho(-k^2), \quad (4.42)$$

onde $\rho(-k^2)$ é uma função espectral escalar. Tomando o traço de (4.42) obtém-se a relação

$$\rho_{\mu\mu}(-k^2) = 3\rho(-k^2). \quad (4.43)$$

As expressões (4.39)-(4.42) definem então a função de Green exata para o caso do fóton. Diferentes aproximações podem ser obtidas a partir de (4.39). Por

exemplo, para o caso de uma partícula (caso livre), podemos usar a expansão de $A_\mu(x)$ como

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \sum_{i=1}^4 [\epsilon_\mu^i(\mathbf{k}) \alpha_{\mathbf{k}}^i e^{ikx} + \epsilon_\mu^i(\mathbf{k}) \alpha_{\mathbf{k}}^{i+} e^{-ikx}], \quad (4.44)$$

onde campos são considerados sem polarização, $\epsilon_\mu^{i*}(\mathbf{k}) = \epsilon_\mu^i(\mathbf{k})$. De (4.44) tem-se

$$A_\mu(0) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \sum_{i=1}^4 [\epsilon_\mu^i(\mathbf{k}) \alpha_{\mathbf{k}}^i + \epsilon_\mu^i(\mathbf{k}) \alpha_{\mathbf{k}}^{i+}] \quad (4.45)$$

e, substituindo em (4.39), para o caso de uma partícula,

$$\rho_{\mu\nu}^{(0)}(-k^2) = \delta^+(k^2) \delta_{\mu\nu}, \quad (4.46)$$

onde definimos

$$\delta^+(k^2) = \delta(k^2) \theta(k_0). \quad (4.47)$$

De (4.46) tem-se que $\rho_{\mu\mu}^{(0)}(-k^2) = 4\delta^+(k^2)$; comparando com (4.43) obtemos

$$\rho^{(0)}(-k^2) = \frac{4}{3} \delta^+(k^2) \quad (4.48)$$

e, substituindo em (4.42) e depois em (4.40), tem-se finalmente

$$D_{\mu\nu}^{(0)}(-k^2) = \frac{4}{3} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{1}{k^2}. \quad (4.49)$$

Vejamos agora o caso de duas partículas (caso com interação). Levando-se em conta (2.176) podemos dar as soluções assintóticas para $A_\mu(x)$ na forma

$$A_\mu(x) = A_\mu^{in}(x) - ie \int \Delta_{\mu\nu}^{ret}(x-y) \bar{\psi}(y) \beta_\nu \psi(y) d^4y, \quad (4.50)$$

onde $A_\mu^{in}(x)$ é um campo livre e sua expansão é dada por (4.44). $\Delta_{\mu\nu}^{ret}(x-y)$ é a função de Green retardada que, para o caso livre, é definida como

$$\Delta_{\mu\nu}^{ret}(x-y) = \frac{\delta_{\mu\nu}}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k e^{ik(x-y)}}{k^2 - i\epsilon k_0}. \quad (4.51)$$

As soluções para $\psi(y)$, $\bar{\psi}(y)$ são dadas por

$$\begin{aligned}\psi(y) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{p} \left[a_{\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{p}}^{(+)} e^{ipy} + b_{\mathbf{p}}^+ \varphi_{\mathbf{p}}^{(-)} e^{-ipy} \right]; \\ \bar{\psi}(y) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{p} \left[a_{\mathbf{p}}^+ \bar{\varphi}_{\mathbf{p}}^{(+)} e^{-ipy} + b_{\mathbf{p}} \bar{\varphi}_{\mathbf{p}}^{(-)} e^{ipy} \right].\end{aligned}\quad (4.52)$$

Substituindo (4.50)-(4.52) em (4.39) obteremos, para duas partículas,

$$\begin{aligned}\rho_{\mu\nu}^{(2)}(-k^2) &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{e^2}{m^2} \int \frac{d^4p}{k^2 k^2} \delta^+(q^2 + m^2) \delta^-(p^2 + m^2) \times \\ &\quad \text{Tri}\hat{p}(i\hat{p} - m) \beta_{\nu} i\hat{q}(i\hat{q} - m) \beta_{\mu},\end{aligned}\quad (4.53)$$

onde $q = k + p$. Se considerarmos (4.41) teremos

$$\begin{aligned}\text{Im } D_{\mu\nu}^{(2)}(-k^2) &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{e^2}{m^2} \pi \int \frac{d^4p}{k^2 k^2} \delta^+(q^2 + m^2) \delta^-(p^2 + m^2) \times \\ &\quad \text{Tri}\hat{p}(i\hat{p} - m) \beta_{\nu} i\hat{q}(i\hat{q} - m) \beta_{\mu},\end{aligned}\quad (4.54)$$

expressão esta a ser obtida na seção 5.1.

4.3 Função de Green exata para a partícula DKP

Usando-se os campos na representação de Heisenberg, a função de Green Exata $G_{\alpha\beta}$ é dada por

$$G_{\alpha\beta}(x - y) = \langle 0 | T(\psi_{\alpha}(x) \bar{\psi}_{\beta}(y)) | 0 \rangle. \quad (4.55)$$

Aqui também a dependência $(x - y)$ está vinculada à invariância por translações espaço-temporais. Vemos, segundo (4.55), que será necessário calcular termos como

$$\langle 0 | \psi_{\alpha}(x) \bar{\psi}_{\beta}(y) | 0 \rangle. \quad (4.56)$$

Realizando translações espaço-temporais nos campos $\psi_\alpha(x)$ e $\bar{\psi}_\beta(x)$, escrevemos

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(x) &= e^{ipx} \psi_\alpha(0) e^{-ipx}; \\ \bar{\psi}_\alpha(x) &= e^{ipx} \bar{\psi}_\alpha(0) e^{-ipx}\end{aligned}\quad (4.57)$$

e, introduzindo a relação de completeza

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = I, \quad (4.58)$$

podemos expressar (4.56) como

$$\langle 0 | \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) | 0 \rangle = \sum_n \langle 0 | \psi_\alpha(0) | n \rangle \langle n | \bar{\psi}_\beta(0) | 0 \rangle e^{-ip_n(x-y)}. \quad (4.59)$$

É possível também definir uma função espectral $\rho_{\alpha\beta}(i\hat{p}, -p^2)$ da forma

$$\theta(p_0) (2\pi)^{-3} \rho_{\alpha\beta}(i\hat{p}, -p^2) = \sum_n \delta^4(p - p_n) \langle 0 | \psi_\alpha(0) | n \rangle \langle n | \bar{\psi}_\beta(0) | 0 \rangle, \quad (4.60)$$

onde a soma é tomada sobre todos os estados intermediários possíveis. Separando de forma conveniente a contribuição de partícula livre das contribuições de ordem superior, escrevemos a representação de Källen-Lehmann para a função de Green exata na forma

$$G_{\alpha\beta}(i\hat{p}, -p^2) = (i\hat{p} + m)_{\alpha\beta}^{-1} + \int_{m^2}^{\infty} \frac{\rho_{\alpha\beta}(i\hat{p}, \kappa^2) d\kappa^2}{\kappa^2 + p^2 - i\epsilon}, \quad (4.61)$$

sendo esta a forma mais geral que $G_{\alpha\beta}(i\hat{p}, -p^2)$ pode ter. Além disso, temos que

$$\text{Im } G_{\alpha\beta}(i\hat{p}, -p^2) = \pi \rho_{\alpha\beta}(i\hat{p}, -p^2), \quad (4.62)$$

e, devido à invariância relativista, $\rho_{\alpha\beta}$ deve ter a forma

$$\rho(i\hat{p}, -p^2) = \rho_1(-p^2) + (i\hat{p}) \rho_2(-p^2) + (i\hat{p})^2 \rho_3(-p^2). \quad (4.63)$$

As relações (4.60)-(4.63) definem a função de Green exata para o caso DKP. Podem também ser obtidas diferentes aproximações a partir de (4.60). Por exemplo, para o caso livre será necessário usar as soluções (4.52)

$$\begin{aligned}\psi(0) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{p} [a_{\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{p}}^{(+)} + b_{\mathbf{p}}^+ \varphi_{\mathbf{p}}^{(-)}]; \\ \bar{\psi}(0) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\mathbf{p} [a_{\mathbf{p}}^+ \bar{\varphi}_{\mathbf{p}}^{(+)} + b_{\mathbf{p}} \bar{\varphi}_{\mathbf{p}}^{(-)}].\end{aligned}\quad (4.64)$$

Usando a definição (3.18), além das soluções (3.33), obtém-se para uma partícula,

$$\rho^{(0)}(i\hat{p}, -p^2) = \frac{1}{m} i\hat{p}(i\hat{p} - m) \delta^+(p^2 + m^2), \quad (4.65)$$

a qual está em concordância com (4.61). Para o caso de duas partículas levaremos em conta (2.176), dando as soluções assintóticas para $\psi(x)$ e $\bar{\psi}(x)$ na forma

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \psi^{in}(x) + ie \int \mathcal{G}^{ret}(x-y) \hat{A}(y) \psi(y) d^4y; \\ \bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}^{in}(x) + ie \int \bar{\psi}(y) \hat{A}(y) \mathcal{G}^{adv}(y-x) d^4y,\end{aligned}\quad (4.66)$$

onde $\psi^{in}(x)$ e $\bar{\psi}^{in}(x)$ são campos livres com expansões dadas por (4.52). $\mathcal{G}^{ret}(x-y)$ é a função de Green retardada para o caso livre, definida como

$$\mathcal{G}^{ret}_{adv}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{ip(x-y)} d^4p}{i\hat{p} + m \mp i\epsilon p_0}. \quad (4.67)$$

Usando-se novamente as expansões (4.52), além de

$$A_{\mu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}} \sum_{i=1}^4 [\epsilon_{\mu}^i(\mathbf{k}) \alpha_{\mathbf{k}}^i e^{ikx} + \epsilon_{\mu}^i(\mathbf{k}) \alpha_{\mathbf{k}}^{i+} e^{-ikx}], \quad (4.68)$$

obtemos, para o caso de duas partículas,

$$\begin{aligned}\rho^{(2)}(i\hat{p}, -p^2) &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{e^2}{m} \int \frac{d^4k}{(i\hat{p} + m)^2} \delta^-(k^2) \delta^+(q^2 + m^2) \times \\ &\quad \beta_{\mu} i\hat{q}(i\hat{q} - m) \beta_{\mu},\end{aligned}\quad (4.69)$$

onde $q = p + k$. Se consideramos (4.41) teremos

$$\begin{aligned} \text{Im } G_{\alpha\beta}(\widehat{ip}, -p^2) &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{e^2}{m} \pi \int \frac{d^4k}{(\widehat{ip} + m)^2} \delta^-(k^2) \delta^+(q^2 + m^2) \times \\ &\qquad \beta_\mu i\widehat{q} (i\widehat{q} - m) \beta_\mu. \end{aligned} \tag{4.70}$$

5. Correções radiativas a um loop

5.1 Polarização do vácuo

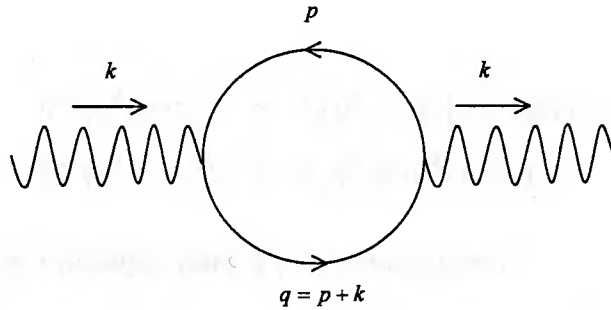


Figura 5.1:

Veremos as correções radiativas de segunda ordem em e para o fóton usando a teoria de DKP. A polarização $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(k)$ é dada por

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(-k^2) = -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4p \text{Tr} (\beta_\mu (i\hat{p} + m)^{-1} \beta_\nu (i\hat{q} + m)^{-1}), \quad (5.1)$$

onde $q = p + k$. Com o uso do propagador $T^c(p)$ (Função de Green) definido em

(3.62), tem-se

$$\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(-k^2) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \frac{e^2}{m^2} \int d^4p \text{Tr} \left[\beta_\mu \left(\frac{i\hat{p}(i\hat{p}-m)}{(p^2+m^2)} + 1 \right) \beta_\nu \left(\frac{i\hat{q}(i\hat{q}-m)}{(q^2+m^2)} + 1 \right) \right]. \quad (5.2)$$

Para tomar a parte imaginária usaremos uma fórmula semelhante a (4.18),

$$\text{Im} \left(\frac{1}{x-i\varepsilon} \right) \left(\frac{1}{y-i\varepsilon} \right) = 2\pi^2 \delta(x) \delta(y) \quad (5.3)$$

e, aplicando-a a (5.2), teremos para a parte imaginária de $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}(-k^2)$

$$\begin{aligned} \text{Im} \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(-k^2) &= -\frac{1}{(2\pi)^4} \frac{e^2}{m^2} 2\pi^2 \int d^4p \text{Tr} [\beta_\mu i\hat{p}(i\hat{p}-m) \beta_\nu i\hat{q}(i\hat{q}-m)] \times \\ &\quad \delta^-(p^2+m^2) \delta^+(q^2+m^2), \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde definimos

$$\begin{aligned} \delta^-(p^2+m^2) &= \delta(p^2+m^2) \theta(-p_0); \\ \delta^+(q^2+m^2) &= \delta(q^2+m^2) \theta(q_0). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Introduzimos agora a notação para a parte imaginária

$$M_{\mu\nu} = \text{Im} \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(-k^2) = \langle \text{Tr} \beta_\mu i\hat{p}(i\hat{p}-m) \beta_\nu i\hat{q}(i\hat{q}-m) \rangle, \quad (5.6)$$

sendo esta equivalente a (5.4). O cálculo do traço em (5.6) dá

$$M_{\mu\nu} = \langle p_\mu p_\nu q^2 + q_\mu q_\nu p^2 - m^2 (p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu) \rangle \quad (5.7)$$

e, devido à presença das funções δ em (5.4), os cálculos são realizados na camada de massa, de modo que $p^2 + m^2 = 0$ e $q^2 + m^2 = 0$. Considerando isto, (5.7) pode-se escrever como

$$M_{\mu\nu} = -m^2 \langle p_\mu p_\nu + q_\mu q_\nu + p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu \rangle, \quad (5.8)$$

ou considerando $q = p + k$,

$$M_{\mu\nu} = -m^2 \langle (2p_\mu + k_\mu) (2p_\nu + k_\nu) \rangle. \quad (5.9)$$

Já que a identidade de Ward deve ser satisfeita também para a parte imaginária, tem-se que

$$k_\mu M_{\mu\nu} = 0, \quad (5.10)$$

que é satisfeita devido à forma adotada por $M_{\mu\nu}$ em (5.9). Levando em conta a invariância de Lorentz, a parte imaginária $M_{\mu\nu}$ deve ter a forma

$$M_{\mu\nu} = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \pi(-k^2). \quad (5.11)$$

Para o cálculo de $\pi(-k^2)$, levaremos em conta que (5.9) e (5.11) são equivalentes; assim, multiplicando estas expressões por $\delta_{\mu\nu}$ e igualando-as, teremos

$$\pi(-k^2) = \frac{1}{3} m^2 k^2 \left(1 + \frac{4m^2}{k^2} \right) I, \quad (5.12)$$

onde I é dado por

$$I = -\frac{1}{(2\pi)^4} \frac{e^2}{m^2} 2\pi^2 \int d^4 p \delta(p^2 + m^2) \delta(q^2 + m^2) \theta(-p_0) \theta(q_0). \quad (5.13)$$

Nota-se que $\theta(-p_0)$ implica que $p_0 < 0$, de modo que de $\theta(q_0) = \theta(p_0 + k_0)$ segue-se que $k_0 > -p_0 > 0$, ou seja, k_0 é positivamente definido. Tomando o referencial $\mathbf{k} = 0$ tem-se para (5.13)

$$I = -\frac{1}{(2\pi)^4} \frac{e^2}{m^2} \pi^2 \pi \sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}}. \quad (5.14)$$

Substituindo este resultado em (5.12), temos

$$\pi(-k^2) = -\frac{e^2}{3(2\pi)^4} \pi^2 \pi k^2 \left(1 + \frac{4m^2}{k^2} \right)^{3/2} \theta(-k^2 - 4m^2). \quad (5.15)$$

A parte imaginária é dada por

$$\text{Im } \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(-k^2) = -\frac{e^2}{3(2\pi)^4} \pi^2 \pi \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) k^2 \left(1 + \frac{4m^2}{k^2} \right)^{3/2} \theta(-k^2 - 4m^2). \quad (5.16)$$

A função $\theta(-k^2 - 4m^2)$ foi introduzida a fim de garantir que $-k^2 \geq 4m^2$, valor crítico para a criação de pares. Pode-se provar também que a integral (5.13) é uma função analítica em $-k^2$ e cresce logaritmicamente, $\ln|-k^2| \xrightarrow{-k^2 \rightarrow \infty} \infty$. Isto é importante uma vez que implica na necessidade de se fazer uma subtração quando escrevermos as relações de dispersão para $\Pi_{\mu\nu R}^{(2)}(-k^2)$ renormalizado. Assim teremos

$$\Pi_{\mu\nu R}^{(2)}(-k^2) = \frac{k^2}{\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\text{Im } \Pi_{\mu\nu}^{(2)}(\kappa^2) d\kappa^2}{\kappa^2 (\kappa^2 + k^2 - i\epsilon)}. \quad (5.17)$$

Substituindo (5.16) nesta última expressão, obtemos

$$\Pi_{\mu\nu R}^{(2)}(-k^2) = -\frac{e^2}{3(2\pi)^4} \pi^2 k^2 (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \int_{4m^2}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{4m^2}{\kappa^2}\right)^{3/2} d\kappa^2}{\kappa^2 (\kappa^2 + k^2 - i\epsilon)}, \quad (5.18)$$

onde $\kappa^2 = -k^2$. Fazendo uma mudança de variável $v^2 = 1 - \frac{4m^2}{\kappa^2}$ na integral, vemos que

$$\int_{4m^2}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{4m^2}{\kappa^2}\right)^{3/2} d\kappa^2}{\kappa^2 (\kappa^2 + k^2 - i\epsilon)} = \frac{1}{2m^2} \int_0^1 \frac{v^4 dv}{1 + \frac{k^2}{4m^2} (1 - v^2)} \quad (5.19)$$

e, substituindo em (5.18),

$$\Pi_{\mu\nu R}^{(2)}(-k^2) = -\frac{e^2 \pi^2}{6(2\pi)^4} (k^2 \delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \frac{k^2}{m^2} \int_0^1 \frac{v^4 dv}{1 + \frac{k^2}{4m^2} (1 - v^2)}, \quad (5.20)$$

expressão esta coincidente com a calculada em [11].

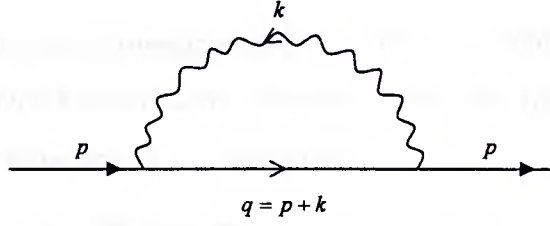


Figura 5.2:

5.2 Correção de massa

Da figura 5.2 tem-se

$$\Sigma^{(2)}(i\hat{p}, -p^2) = -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \beta_\mu (i\hat{q} + m)^{-1} \beta_\nu \frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2}. \quad (5.21)$$

Com o uso da função de Green (3.62), escrevemos $\Sigma^{(2)}(i\hat{p}, -p^2)$ como

$$\Sigma^{(2)}(i\hat{p}, -p^2) = -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{m} \int d^4k \beta_\mu \left(\frac{i\hat{q}(i\hat{q} - m)}{q^2 + m^2} + 1 \right) \beta_\nu \frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2}, \quad (5.22)$$

sendo a parte imaginária desta expressão dada por

$$\text{Im } \Sigma^{(2)}(i\hat{p}, -p^2) = -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{2\pi^2}{m} \int d^4k \beta_\mu i\hat{q}(i\hat{q} - m) \beta_\mu \delta^-(k^2) \delta^+(q^2 + m^2). \quad (5.23)$$

Em geral, $\Sigma^{(2)}(i\hat{p}, -p^2)$ deve ter a forma

$$\Sigma^{(2)}(i\hat{p}, -p^2) = A + (i\hat{p}) B + (i\hat{p})^2 C. \quad (5.24)$$

Tomando a parte imaginária tem-se

$$\text{Im } \Sigma^{(2)}(i\hat{p}, -p^2) = a + (i\hat{p}) b + (i\hat{p})^2 c, \quad (5.25)$$

onde a , b e c são funções que dependem de $-p^2$, dadas por

$$a = \text{Im } A, \quad b = \text{Im } B, \quad c = \text{Im } C. \quad (5.26)$$

Portanto, o cálculo da parte imaginária de $\Sigma^{(2)}(i\hat{p}, -p^2)$ reduz-se a encontrar os coeficientes a, b e c definidos em (5.26). Multiplicando por $(i\hat{p})$, $(i\hat{p})^2$ e calculando os traços correspondentes em (5.24) obtém-se

$$\begin{aligned} Tr\Sigma^{(2)}(i\hat{p}, -p^2) &= 5A - 2p^2C; \\ Tr\hat{p}\Sigma^{(2)}(i\hat{p}, -p^2) &= 2ip^2B; \\ Tr\hat{p}^2\Sigma^{(2)}(i\hat{p}, -p^2) &= 2p^2(A - p^2C). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Levando em conta a relação (5.26) pode-se obter as partes imaginárias como

$$\begin{aligned} \text{Im } Tr\Sigma^{(2)}(i\hat{p}, -p^2) &= 5a - 2p^2c; \\ \text{Im } Tr\hat{p}\Sigma^{(2)}(i\hat{p}, -p^2) &= 2ip^2b; \\ \text{Im } Tr\hat{p}^2\Sigma^{(2)}(i\hat{p}, -p^2) &= 2p^2(a - p^2c). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Vemos então que é necessário calcular o lado esquerdo destas últimas relações. Usando para isso a expressão explícita (5.22), tem-se para a primeira linha em (5.28):

$$\text{Im } Tr\Sigma^{(2)}(i\hat{p}, -p^2) = -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{2\pi^2}{m} \int d^4k Tr\beta_\mu i\hat{q}(i\hat{q} - m)\beta_\mu \delta^+(q^2 + m^2) \delta^-(k^2). \quad (5.29)$$

Fazendo os cálculos correspondentes, teremos

$$\text{Im } Tr\Sigma^{(2)}(i\hat{p}, -p^2) = -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{2\pi^2}{m} 5m^2 I, \quad (5.30)$$

onde I é definido como

$$I = \int d^4k \delta^+(q^2 + m^2) \delta^-(k^2). \quad (5.31)$$

De forma similar para a segunda linha em (5.28), teremos

$$\begin{aligned} \text{Im } Tr\hat{p}\Sigma^{(2)}(i\hat{p}, -p^2) &= -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{2\pi^2}{m} \int d^4k Tr\hat{p}\beta_\mu i\hat{q}(i\hat{q} - m)\beta_\mu \times \\ &\quad \delta^+(q^2 + m^2) \delta^-(k^2). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Usando as propriedades do traço encontramos

$$\text{Im } Tr \hat{p} \Sigma^{(2)}(\hat{p}, -p^2) = -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{2\pi^2}{m} (-im) (p^2 - m^2) I. \quad (5.33)$$

Finalmente, calcularemos a última linha em (5.28) como

$$\begin{aligned} \text{Im } Tr \hat{p}^2 \Sigma^{(2)}(\hat{p}, -p^2) &= -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{2\pi^2}{m} \int d^4 k Tr \hat{p}^2 \beta_\mu i \hat{q} (i \hat{q} - m) \beta_\mu \times \\ &\quad \delta^+(q^2 + m^2) \delta^-(k^2). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Levando novamente em conta as propriedades do traço,

$$\text{Im } Tr \hat{p}^2 \Sigma^{(2)}(\hat{p}, -p^2) = -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{2\pi^2}{m} 2m^2 p^2 I. \quad (5.35)$$

Reunindo os resultados (5.30), (5.33) e (5.35) obtém-se o sistema de equações

$$\begin{aligned} -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{2\pi^2}{m} 5m^2 I &= 5a - 2p^2 c; \\ -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{2\pi^2}{m} (-im) (p^2 - m^2) I &= 2ip^2 b; \\ -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{2\pi^2}{m} 2m^2 p^2 I &= 2p^2 (a - p^2 c), \end{aligned} \quad (5.36)$$

cuja solução para os coeficientes é dada por

$$\begin{aligned} a &= -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{2\pi^2}{m} m^2 I; \\ ib &= -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{2\pi^2}{m} (-im) \frac{(p^2 - m^2)}{2p^2} I; \\ c &= 0. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Substituindo estes valores em (5.25), tem-se

$$\text{Im } \Sigma^{(2)}(\hat{p}, -p^2) = -\frac{e^2}{(2\pi)^4} 2\pi^2 \left[m - \frac{i\hat{p}}{2} \left(1 - \frac{m^2}{p^2} \right) \right] I, \quad (5.38)$$

onde o cálculo da integral definida por (5.31) resulta ser

$$I = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{m^2}{p^2} \right) \theta(-p^2 - m^2). \quad (5.39)$$

Notemos que a parte imaginária $\text{Im } \Sigma^{(2)}(i\hat{p}, -p^2)$ tem a forma $\text{Im } \Sigma^{(2)}(i\hat{p}, -p^2) = a(-p^2) + (i\hat{p}) b(-p^2)$, com $c = 0$. Finalmente, fazendo uso da representação de Källen-Lehmann obtemos $\Sigma_R^{(2)}(i\hat{p}, -p^2)$ renormalizado como

$$\Sigma_R^{(2)}(i\hat{p}, -p^2) = \frac{p^2 + m^2}{\pi} \int_{m^2}^{\infty} \frac{\text{Im } \Sigma^{(2)}(i\hat{p}, \kappa^2) d\kappa^2}{(\kappa^2 + m^2)(\kappa^2 + p^2 - i\epsilon)}, \quad (5.40)$$

onde

$$\text{Im } \Sigma^{(2)}(i\hat{p}, \kappa^2) = -\frac{e^2}{(2\pi)^4} 2\pi^2 \left[m - \frac{i\hat{p}}{2} \left(1 + \frac{m^2}{\kappa^2} \right) \right] \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{m^2}{\kappa^2} \right), \quad (5.41)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \Sigma_R^{(2)}(i\hat{p}, -p^2) = & -\frac{e^2}{(2\pi)^4} \pi^2 (p^2 + m^2) \left\{ m \int_{m^2}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{m^2}{\kappa^2} \right) d\kappa^2}{(\kappa^2 + m^2)(\kappa^2 + p^2 - i\epsilon)} \right. \\ & \left. - \frac{i\hat{p}}{2} \int_{m^2}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{m^2}{\kappa^2} \right) \left(1 - \frac{m^2}{\kappa^2} \right) d\kappa^2}{(\kappa^2 + m^2)(\kappa^2 + p^2 - i\epsilon)} \right\}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

6. Conclusões

A análise realizada inicialmente por Kemmer para a interação do campo DKP com o campo EM depara-se com alguns de problemas já mencionados; um desses problemas é a existência de um termo anômalo que aparece na teoria (eq. 2.139) como consequência da álgebra das matrizes β . Na seção 2.4 concluímos que o princípio de acoplamento mínimo é justificado quando a invariância de gauge local é exigida na teoria DKP. Concomitantemente, concluímos que o problema referente ao termo anômalo, antes mencionado, desaparece quando é selecionada de maneira correta a **componente física** do campo DKP com os projetores P e P_μ .

Ao utilizarmos o formalismo canônico para quantizar o campo DKP obtemos o ordenamento temporal dos campos $\psi(x)$ e $\bar{\psi}(x')$ que não é coincidente com a função de Green T^C ; isto se deve ao fato de não serem todas as componentes do campo DKP linearmente independentes; no entanto, pode-se mostrar que o termo adicional que aparece na teoria não contribui para os elementos físicos da matriz S , sendo possível para efeitos de cálculo usarmos somente a função de Green T^C dada pela eq. (3.62).

Por outro lado, como foi citada no capítulo introdutório deste trabalho, a equivalência entre as teorias DKP e KG foi no início questionada devido a possíveis

divergências nos resultados obtidos quando foram utilizadas as duas teorias [8]. Recentemente provou-se a equivalência de ambas as teorias nos trabalhos [13, 14].

Fazendo uso da representação de Källen-Lehmann obtivemos as funções de Green exatas para o caso do fóton e a partícula DKP escalar carregada e, calculamos na aproximação a um loop a polarização do vácuo $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}$ e a correção de massa $\Sigma_{\mu\nu}^{(2)}$. Nos dois casos, os resultados são idênticos aos proporcionados pela teoria de KG, podendo-se dizer que as teorias são equivalentes nessa aproximação. É importante ressaltar que a representação de KL usada para as funções de Green está fundamentada na propriedade de analiticidade da matriz S , assim as amplitudes $\Pi_{\mu\nu}^{(2)}$ e $\Sigma_{\mu\nu}^{(2)}$ são expressas através de sua parte imaginária que não são modificadas pelo processo de renormalização, levando-nos a concluir que a representação de KL é uma ferramenta poderosa para obter resultados finitos.

O seguinte ponto importante a ser abordado é o cálculo do vértice, explorando a simetria de gauge via identidades de Ward. Ponto este que vem sendo estudado e com resultados parciais bastante promissores.

A teoria de DKP na sua formulação inicial refere-se à partículas massivas, no entanto foi generalizada para partículas não massivas [28]; dessa forma, as perspectivas para sua aplicação posterior são as das mais diversas: o uso da teoria de DKP para o campo EM no espaço-tempo de Riemann, sua generalização ao espaço-tempo de Riemann-Cartan [29], a descrição teleparalela da gravidade como passo para comparar o acoplamento de campos DKP nas duas teorias, etc.

Bibliografia

- [1] G. Petiau, Acad. Roy. de Belg., A. Sci. Mem. Collect **16** (1936).
- [2] R. Y. Duffin, Phys. Rev. **54** (1938) 1114.
- [3] N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. **A173** (1939) 91.
- [4] O. Klein, Z. Phys. **37** (1926) 895.
- [5] W. Gordon, Z. Phys. **40** (1926) 117.
- [6] V. Fock, Z. Phys. **38** (1926) 242.
- [7] A. Proca, Compt. Rend. **202**, 1366 (1936); **202**, 1490 (1936); **203**, 709 (1936).
- [8] R. A. Krajcik and M. M. Nieto, Am. J. Phys., **45** (1974) 818.
- [9] B. M. Pimentel and J. L. Tomazelli, Prog. Theor. Phys. **45** (1995) 1105.
- [10] T. Kinoshita, Prog. Theor. Phys. **5** (1950) 473; T. Kinoshita and Y. Nambu, *ibid.* **5** (1950) 749.
- [11] I. Akhiezer and V. B. Berestetski, *Quantum Electrodynamics*, 2nd ed. Inter., New York, 1965.

-
- [12] A. Wightman, *Aspects of Quantum Theory*, p.95, Edited by A. Salam and E.P. Wigner, Cambridge, University Press, 1972.
- [13] V. Ya. Fainberg and B. M. Pimentel, to appear in *Theor. Math. Phys.* Disponível como hep-th/9911219.
- [14] V. Ya. Fainberg and B. M. Pimentel, to appear in *Phys. Lett. A*. Disponível como hep-th/0003283.
- [15] V. Gribov, *Eur Phys. J. C***10**: (1999), 71. Também disponível como hep-ph/9807224.
- [16] I. V. Kanatchikov, hep-th/9911175.
- [17] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel and R. G. Teixeira, a ser publicado nos *Proceedings of Conference on Geometrical Aspects of Quantum Fields*, Londrina, Brazil, 17-20 Apr 2000. Disponível como gr-gc/9909033.
- [18] V. M. Red'kov, quant-ph/9812007.
- [19] H. Umezawa, *Quantum Field Theory*, North-Holland, 1956.
- [20] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, R. G. Teixeira and J. S. Valverde, *Phys. Lett.* **268A** (2000) 165-173.
- [21] G. Källen, *Helv. Phys. Acta* **25**, 417 (1952).
- [22] H. Lehmann, *Nuovo Cimento*, **11**, 342 (1954).
- [23] K. Nishijima, *Fields and Particles*, W. A. Benjamin, Inc., 1969.

-
- [24] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields I*, Cambridge University Press, 1995.
- [25] V. Ya. Fainberg, B. M. Pimentel and J. S. Valverde, a ser publicado nos Proceedings of XX Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos.
- [26] Harish-Chandra. Phys. Rev., **71**, 793, (1947).
- [27] E. M. Corson. *Introduction to Tensors, Spinors, and Relativistic Wave Equation*, Blackie & Son Limited, London and Glasgow, 1953.
- [28] Branko Dragović and Branislav Sazdović, FZKAAA, **16** (4) 419 (1984).
- [29] V. de Sabbata and M. Gasperini, *Introduction to Gravitation*, Word Scientific, 1985.

