



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Ciências Cartográficas

EDINÉIA APARECIDA DOS SANTOS

**UTILIZAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
PARCIAIS NO TRATAMENTO DE IMAGENS
ORBITAIS**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Presidente Prudente
2002



EDINÉIA APARECIDA DOS SANTOS

**UTILIZAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
PARCIAIS NO TRATAMENTO DE IMAGENS
ORBITAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Ciências Cartográficas
da Faculdade de Ciências e Tecnologia da
UNESP, para a obtenção do título de
Mestre.

Orientador: Prof. Dr. *Erivaldo Antonio da Silva*

**Presidente Prudente
2002**

S234u

Santos, Edinéia Aparecida dos.

Utilização de Equações Diferenciais Parciais no Tratamento de
Imagens Orbitais / Edinéia Aparecida dos Santos. - Presidente Prudente
: [s.n.], 2002
f.109: il.

Dissertação (mestrado).- Universidade Estadual Paulista, Faculdade
de Ciências e Tecnologia

Orientador: Erivaldo Antonio da Silva

1. Equações diferenciais parciais. 2. Imagens orbitais. I. Santos,
Edinéia Aparecida dos Santos. II. Título.

CDD (18.ed.) 623.72

À Deus.

Ao meu companheiro de todos os momentos, Rober, dedicando amor e incentivo ao longo desta caminhada. Acreditando que o sonho se tornaria realidade.

Aos meus pais, pelo amor, carinho e compreensão.

Aos meus avós, em especial a minha avó, Trindade (em memória), cuja bondade, sei que está bem perto de Deus.

As minhas irmãs e minha sobrinha, razão de muitas alegrias.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador

Prof. Erivaldo

Pelos ensinamentos, e pela confiança em mim depositada que tornou possível a superação de mais uma etapa em minha vida.

Ao Prof. José Roberto Nogueira (UNESP/Departamento de Matemática)

Pela proposição do problema, pelas sugestões, ensinamentos e principalmente por proporcionar a realização deste projeto não só acadêmico, mas de vida.

Ao Prof. e colega Evanivaldo C. da Silva Júnior (Centro Universitário de

Votuporanga(CEUV)),

por colaborar no desenvolvimento do trabalho.

Ao Prof. Dr. Maurílio Boaventura (DCCE/IBILCE/UNESP), por ceder parte de seu tempo em prol de discussões e análises sobre o projeto de pesquisa.

À Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro da bolsa.

Aos Professores do departamento de Matemática que me impulsionaram para esta caminhada.

Aos Professores do departamento de Cartografia, que me acolheram nesta nova jornada.

Aos colegas das salas (12) e (20), que compartilharam momentos de alegria e reflexão. Aos colegas Giovane, Nilcilene, João Bosco, José Aurélio, Rafael, Rodrigo Zanin, Américo, Mário e Zito e a todos os outros a quem cujo nome não foi citado, mas com certeza faz parte de tantas conquistas.

Aos Funcionários do Departamento de Cartografia e do PPGCC,

e a todos aqueles que diretamente ou indiretamente contribuíram para esta realização.

EPÍGRAFE

... cada um de nós compõe a sua história,
cada ser em si carrega o dom de ser capaz....
(Almir Sater)

RESUMO:

Este trabalho apresenta um modelo matemático alternativo aos filtros passa-baixas convencionais no Processamento Digital de Imagens. O modelo de Equação Diferencial Parcial (EDP) foi aplicado em imagens orbitais para extração das feições de interesse e os resultados obtidos foram comparados com os resultados do operador de Sobel e o Gradiente Morfológico. O modelo matemático utilizado no trabalho foi baseado na teoria de EDPs e surge como uma proposta metodológica alternativa para a área de Cartografia. O modelo de EDP consiste em aplicar seletivamente a equação, suavizando adequadamente uma imagem sem perder as bordas e outros detalhes contidos na imagem, principalmente pistas de aeroportos e estradas pavimentadas.

Palavras-chaves: Equações Diferenciais Parciais; Cartografia; Imagens Orbitais; Sensoriamento Remoto; Segmentação.

ABSTRACT

This work presents an alternative mathematical model for conventional low-pass filters in Digital Image Processing. The model of Partial Differential Equation (PDE) was applied to orbital image to extract features of interest and the obtained results were compared to over obtained for Sobel operator and Morphological Gradient. The mathematical model used in this work was based on PDE theory and was intended to be on alternative methodology for Cartography area. This model consists in selectivels applying the model of PDE, in order adequatels smooth an image without losing edges and other details on the image, mainls airports tracks and paved roads.

Words keys: Partial Differential Equations; Cartography; Orbital Images; Remote Sensing; Segmentation.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	10
LISTA DE TABELAS	13
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	14
CAPÍTULO 1	15
INTRODUÇÃO	15
1.1 Considerações iniciais.....	15
1.2 Trabalhos relacionados	17
1.3 Objetivos	19
1.4 Justificativa	19
1.5 Estrutura do trabalho	20
CAPÍTULO 2	22
FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	22
2.1 Processamento digital de imagens.....	22
2.1.1 Conceito de imagem digital.....	24
2.1.2 Convolução de imagens	25
2.1.3 Segmentação de imagens	26
2.1.4 Processamento no domínio espacial.....	28
2.1.4.1 Filtro Gaussiano	29
2.1.5 Métodos de detecção de bordas	30
2.1.5.1 Operador de Gradiente	33
2.1.5.2 Operador de Sobel	34
2.1.6 Morfologia Matemática	37
2.1.6.1 Gradiente Morfológico	38
2.2 Equações Diferenciais Parciais	46
2.2.1 Classificação das Equações Diferenciais Parciais.....	47
2.2.2 A Equação do Calor	49
2.2.3 Espaço de escala	52
2.3 Implementação Numérica	54
2.3.1 Modelos de Equações Diferenciais Parciais	61
CAPÍTULO 3	68
MATERIAIS E MÉTODOS	68

3.1 <i>Software</i> utilizado na implementação do modelo	68
3.2 Imagens teste utilizadas	72
3.3 Discretização dos termos presentes no modelo de EDP	74
CAPÍTULO 4	82
RESULTADOS E DISCUSSÃO	82
CAPÍTULO 5	99
CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	99
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	103
BIBLIOGRAFIAS	106

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação de uma imagem digital	24
Figura 2 – Operação de convolução bidimensional	26
Figura 3 – Imagem correspondente ao aeroporto Internacional Antônio Carlos Jobim – RJ (Landsat 5 – TM), (a) imagem original, (b) imagem segmentada	27
Figura 4 – Imagem original, gráfico da linha 90 representado em branco na figura 4 (a)	31
Figura 5 – Detecção de bordas por operadores de derivação: (a) faixa clara sobre um fundo escuro; (b) faixa escura sobre um fundo claro	32
Figura 6 – Magnitude dos gradientes e do ângulo	34
Figura 7 – Máscaras utilizadas no operador de Sobel	35
Figura 8 – (a) Imagem original; (b) resultado da aplicação do operador na direção horizontal (G_x); (c) resultado da aplicação do operador na direção vertical (G_y); (d) imagem completa do operador de sobel	36
Figura 9 – Elemento estruturante (a) cruz , (b) quadrado, (c) hexagonal	37
Figura 10 – (a) Elemento estruturante (B) cruz (3x3) com origem no centro do elemento; (b) conjunto original (X), representado pelos <i>pixels</i> cinza; (c) conjunto erodido representado pelos <i>pixels</i> pretos.....	39
Figura 11 – Erosão de uma imagem binária e em tons de cinza pelo elemento estruturante (3x3) com origem no centro do elemento.....	40
Figura 12 – (a) Elemento estruturante (B) cruz (3x3) com origem no centro do elemento, (b) conjunto original, (c) conjunto dilatado	41

Figura 13 – Dilatação de uma imagem binária e em tons de cinza pelo elemento estruturante (3x3) com origem no centro do elemento.....	42
Figura 14 - Imagem original, gradiente por erosão	43
Figura 15 – Imagem original, gradiente por dilatação	44
Figura 16 – Imagem original, gradiente por dilatação-erosão	45
Figura 17 – Exemplo de aplicação da equação do calor em uma imagem para diferentes níveis de suavização	51
Figura 18 – Suavização através da equação do calor.....	53
Figura 19 – Malha de m x n pontos e h = 1	56
Figura 20 – Malha da derivadas parciais de primeira ordem na região de contorno	59
Figura 21 – Esquema computacional para o método explícito	59
Figura 22 – Esquema computacional para o método implícito	60
Figura 23 – Tela do ambiente MATLAB	69
Figura 24 – Tela do editor do ambiente MATLAB	70
Figura 25 – Tela da <i>Toolbox</i> da Morfologia Matemática	71
Figura 26 – Sub-imagem do aeroporto internacional Antônio Carlos Jobim (RJ)	73
Figura 27 – Sub-imagem da região de Presidente Prudente (SP)	73
Figura 28 – Núcleo de convolução com a máscara centrada no ponto em destaque	76
Figura 29 – Histograma da sub-imagem do Rio de Janeiro	84
Figura 30 – (a) Imagem original e (b) sua segmentação, (c) e (d) imagem com $\sigma_r = 15$ e sua segmentação, (e) e (f) imagem com $\sigma_r = 30$ e sua segmentação, (g) e (h) imagem com $\sigma_r = 35$ e sua segmentação.....	85
Figura 31 – Histograma da sub-imagem de Presidente Prudente (após realização de contraste na imagem).....	86
Figura 32 – Histograma da imagem de Presidente Prudente (sem contraste).....	87

Figura 33 – (a) Imagem original e (b) sua segmentação, (c) e (d) imagem com $\sigma_r = 15$ e sua segmentação, (e) e (f) imagem com $\sigma_r = 17.9$ e sua segmentação, (g) e (h) imagem com $\sigma_r = 19$ e sua segmentação.....	88
Figura 34 – (a) Imagem original, (b) resultado da aplicação do operador de Sobel	89
Figura 35 – (a) Imagem original, (b) resultado da aplicação do operador de Sobel.....	90
Figura 36 – (a) Imagem original, (b) aplicação do Gradiente morfológico a partir do elemento estruturante cruz (3x3), (c) aplicação do Gradiente Morfológico a partir do elemento estruturante <i>box</i> (3x3)	91
Figura 37 – (a) Imagem original, (b) aplicação do Gradiente morfológico a partir do elemento estruturante cruz (3x3), (c) aplicação do Gradiente Morfológico a partir do elemento estruturante <i>box</i> (3x3)	92
Figura 38 - Teste comparativo para o modelo de EDP com parâmetros dados na tabela 1, (a) imagem original e (b) sua segmentação, (c) aplicação do parâmetro $\sigma_r = 15$ (d) sua segmentação, (e) aplicação do parâmetro $\sigma_r = 30$, (f) sua segmentação, (g) aplicação do parâmetro $\sigma_r = 35$, (h) sua segmentação, (i) gradiente morfológico a partir do elemento estruturante <i>box</i> 3x3, (j) operador de Sobel.....	94
Figura 39 - Teste comparativo para o modelo de EDP com os parâmetros dados na tabela 2 (a) imagem original e (b) sua segmentação, (c) aplicação do parâmetro $\sigma_r = 15$ (d) sua segmentação, (e) aplicação do parâmetro $\sigma_r = 17.9$, (f) sua segmentação, (g) aplicação do parâmetro $\sigma_r = 19$, (h) sua segmentação, (i) gradiente morfológico a partir do elemento estruturante <i>box</i> 3x3, (j) operador de Sobel.	97

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros utilizados no modelo de EDP para a sub-imagem do RJ	84
Tabela 2– Parâmetros utilizados no modelo de EDP para a sub-imagem de Presidente Prudente SP	87

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PDI	–	Processamento Digital de Imagens
div	–	Operador divergente
EDP	–	Equação Diferencial Parcial
EDPs	–	Equações Diferenciais Parciais
ETM	-	<i>Enhancement Thematic Mapper</i>
FCT	–	Faculdade de Ciências e Tecnologia
<i>Help morph</i>	–	Comando de ajuda morfológica
MATLAB	–	<i>Matrix Laboratory</i>
MM	-	Morfologia Matemática
<i>Morphology Toolbox</i>	–	Pacotes de funções para Morfologia
<i>Pixels</i>	–	<i>Picture elements</i>
RJ	–	Rio de Janeiro
SC _{per}	–	Seccionalmente periódicas
SP	–	São Paulo
TM	–	<i>Thematic Mapper</i>
<i>Toolboxes</i>	–	Pacotes de funções para áreas variadas do cálculo científico
UNESP	–	Universidade Estadual Paulista

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Considerações iniciais

Com o avanço tecnológico, a área de processamento digital de imagens tem se tornando cada vez mais abrangente. Técnicas de Processamento Digital de Imagens (PDI), são utilizadas em imagens de diversas fontes. Nas imagens de Sensoriamento Remoto essas técnicas são utilizadas para resolver problemas relacionados à extração de feições dos alvos presentes na cena.

No caso de imagens orbitais, as mesmas contêm muita informação, o que dificulta a sua interpretação se o método escolhido para extrair as feições de interesse não for o mais adequado possível. Essa grande quantidade de informação presente nas imagens orbitais da superfície terrestre, diz respeito à diversidade de alvos contidos na cena.

Um problema freqüente na aquisição de imagens de Sensoriamento Remoto é a presença de ruídos, os quais constituem uma tarefa difícil para a segmentação de imagens. Considerando que os ruídos são caracterizados pelas altas freqüências, os denominados filtros passa-baixas atenuam ou eliminam os componentes de alta-freqüência deixando as baixas freqüências inalteradas, produzindo assim um efeito de “borramento” na imagem. São considerados ruídos nas imagens de Sensoriamento Remoto, no caso da área de Cartografia, todas as feições que não são de interesse para extração.

Várias são as ferramentas e/ou técnicas utilizadas, por pesquisadores da área de Cartografia, com vistas à extração de feições. Este trabalho tem como objetivo apresentar um modelo matemático alternativo aos filtros passa-baixas convencionais no tratamento digital de imagens. Os modelos fundamentados pela teoria de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) se inserem no âmbito do PDI e têm como função primordial à eliminação de ruídos e segmentação de imagens. Consequentemente, pretende-se aplicar um modelo via EDPs no processo de segmentação das feições de interesse e comparar os resultados obtidos com o operador de Sobel e o Gradiente Morfológico.

1.2 Trabalhos relacionados

Quando se trata da utilização de EDPs em PDI, inicialmente devem ser consideradas algumas contribuições importantes para o desenvolvimento de modelos matemáticos para o tratamento digital de imagens.

Um trabalho considerado pioneiro nesta área foi desenvolvido por Marr e Hildreth (1980), onde a teoria descrita por esses autores leva em consideração a detecção de bordas em imagens, utilizando a convolução da imagem original com o Laplaciano da função Gaussiana.

Koenderink (1984), relacionou as estruturas das imagens à equação do calor, através de princípios de causalidade¹ e homogeneidade², definindo um processo para suavização de imagens que utiliza a evolução temporal, onde uma família de imagens é obtida a partir do cálculo da solução de uma Equação Diferencial Parcial (EDP) para diferentes níveis de suavização.

Perona e Malik (1990), desenvolveram um modelo cuja idéia central consistia em realizar uma suavização seletiva na imagem. A partir dessa idéia a equação passou a representar um modelo de difusão não linear, fornecendo um algoritmo potencial para segmentação de imagens, remoção de ruídos, detecção de bordas e realce de imagem, tornando-se imprescindível para posteriores linhas de pesquisa.

O modelo de difusão não linear serviu como ponto de referência para o surgimento de novos trabalhos nesta linha de pesquisa. Nordström (1990), desenvolveu um modelo resultante da unificação do modelo de difusão não linear com um termo de regularização, onde o termo regularizador tem como função manter as imagens geradas na evolução temporal próximas à imagem original.

¹ causalidade: o sinal é simplificado com a escala.

² homogeneidade: a suavização é espacialmente invariante.

Esses modelos ainda apresentavam inconsistências na sua formulação, o que impulsionou trabalhos de pesquisas voltados ao aperfeiçoamento de novos modelos. Uma grande contribuição foi dada por Alvarez, Lions e Morel (1992), que substituíram o Gradiente da função pelo produto de convolução em uma vizinhança dos pontos discretizados.

Outros trabalhos surgiram e com o intuito de melhorar o desempenho dos modelos, alguns termos foram acrescentados ou alterados. Cabe ressaltar que os modelos desenvolvidos por Barcelos e Chen (2000) e o modelo de Barcelos, Boaventura e Silva Jr. (2001), estão inseridos em uma linha teórica que explora o uso de Equações Diferenciais Parciais que vem produzindo bons resultados.

Diante dos resultados obtidos a partir dos modelos anteriormente descritos, o presente trabalho visa à utilização de EDPs na eliminação de ruídos e segmentação de imagens. O modelo matemático utilizado nessa dissertação foi baseado na teoria de EDPs como uma proposta metodológica alternativa para a área de Cartografia. Logo, esse trabalho tem como proposta utilizar o modelo de equação de difusão não linear proposto por Barcelos, Boaventura e Silva Jr. (2001). Esse modelo consiste em aplicar seletivamente a equação, permitindo suavizar adequadamente uma imagem sem perder as bordas e outros detalhes contidos na imagem.

A utilização dessa técnica vem produzindo resultados satisfatórios em imagens digitais convencionais. Assim torna-se viável implementar o modelo e testá-lo em imagens orbitais.

1.3 Objetivos

O objetivo central desta dissertação é a implementação de um modelo matemático não linear para a remoção de ruídos e segmentação de imagens orbitais. Onde a partir dos resultados obtidos será realizada uma análise comparativa do modelo com o operador de Sobel e o Gradiente Morfológico.

Os objetivos específicos consistem em:

- implementar numericamente o modelo proposto no ambiente MATLAB;
- testar e avaliar o desempenho do modelo nas Imagens teste;
- comparar e analisar os resultados em relação à utilização do operador de Sobel e o Gradiente Morfológico.

1.4 Justificativa

A utilização de um modelo fundamentado pela teoria de EDPs justifica-se pela simplificação do formalismo do modelo e pela forma de atuação diferenciada em pontos de bordas e em pontos interiores dos objetos presentes na imagem, onde a utilização do modelo proposto permitirá extrair informações contidas em imagens orbitais de feições de interesse, principalmente pistas de aeroportos e estradas pavimentadas.

É importante destacar que a utilização de EDPs vem se tornando uma ferramenta alternativa e eficiente, em substituição aos filtros passa-baixa no tratamento digital de imagens, pois as imagens digitais contendo os alvos da superfície terrestre possuem grande variação de brilho e isso dificulta, em muito, o processo de extração dessas feições.

Ao final, os resultados obtidos com o modelo matemático em questão serão comparados com filtros que tenham como característica principal a suavização e a detecção de bordas. Neste sentido, será possível analisar de forma comparativa os resultados e destacar a viabilidade da utilização de EDPs na área de Cartografia, salientando que o modelo atuará no processo de eliminação de ruídos e segmentação de imagens que serão utilizados em processos futuros de atualização de feições.

1.5 Estrutura do trabalho

O capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica, conceituando os filtros (Sobel e Gradiente Morfológico) utilizados para a análise comparativa com o modelo baseado em EDPs, bem como conceitos e fundamentações teóricas sobre as EDPs que representam os aspectos primordiais ao desenvolvimento do trabalho. É feito neste capítulo uma revisão dos modelos fundamentados pela teoria de EDPs e a conceituação teórica sobre o modelo implementado no projeto.

No capítulo 3 estão descritos os materiais utilizados no desenvolvimento da dissertação, bem como a metodologia utilizada para a discretização do modelo de EDP.

O capítulo 4 apresenta os resultados obtidos com o modelo e a análise comparativa com o operador de Sobel e o Gradiente Morfológico.

No capítulo 5 estão apresentadas as conclusões a respeito dos resultados obtidos e as recomendações futuras do trabalho, bem como as referências bibliográficas e bibliografias consultadas.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Processamento Digital de Imagens

A área de Processamento Digital de Imagens (PDI) vem apresentando ao longo dos anos um aumento significativo no desenvolvimento tecnológico, envolvendo aplicações em diversas áreas do conhecimento humano.

O Processamento Digital tem auxiliado na tarefa de análise de imagens em diversas áreas de aplicação, dentre elas destacam-se a Arqueologia, onde métodos de processamento de imagens são utilizados para restaurar figuras fotografadas borradas de artefatos raros que ao longo dos séculos foram perdidos ou tiveram sua estrutura danificada;

Medicina, na qual procedimentos com técnicas adequadas melhoram imagens de raios X facilitando a informação visual e principalmente a interpretação de especialistas da área; na Geografia, técnicas são utilizadas em imagens de satélites para o monitoramento de recursos naturais dentre outros.

O Processamento Digital de imagens obtidas por Sensoriamento Remoto tem contribuído para o desenvolvimento científico e tecnológico, pois através dessas imagens torna-se possível à extração de feições que podem ser utilizadas para auxiliar na resolução de diversos problemas práticos. No âmbito da Cartografia pode-se destacar a detecção de feições de interesse para a atualização cartográfica, visto que essa atualização pode ser realizada de forma dinâmica, considerando a periodicidade em que as informações são obtidas.

No processamento de dados de cenas para percepção através de máquinas, o objetivo é extrair de uma imagem, informação de maneira adequada para o processamento computacional. Exemplos de percepção por máquina que utilizam técnicas de processamento digital podem ser citados, tais como: reconhecimento militar, processamento de imagens aéreas e de satélites para previsão do tempo e monitoramento de culturas.

Assim, o processamento digital tem como função primordial fornecer ferramentas para facilitar a identificação e a extração de informações contidas nas imagens. Logo, as técnicas de PDI processam um volume considerável de informações presentes em uma imagem com o intuito de melhorar a informação visual para a análise e interpretação humana.

Diante do aumento da capacidade de cálculo e da velocidade de processamento dos modernos computadores. Segundo Gomes e Velho (1994), torna-se evidente a consolidação das técnicas de Processamento Digital de Imagens, Visão Computacional e Computação Gráfica, logo, a fusão dessas técnicas oferece suporte ao desenvolvimento de métodos de extração de informações de imagens digitais.

De acordo com Gomes e Velho (1994) no Processamento Digital de Imagens, o sistema admite como entrada uma imagem que, depois de processada, produz outra imagem na saída. Essa imagem pode ser observada num dispositivo gráfico. Um exemplo dessa área é o processamento de imagens obtidas por satélites de Sensoriamento Remoto, a técnica utilizada nesse caso realça feições de objetos presentes na imagem de saída.

Dessa forma, entende-se por PDI a manipulação e a interpretação de uma imagem por computador, de tal maneira que a entrada e saída do processo sejam imagens digitais.

2.1.1 Conceito de imagem digital

Uma imagem digital é uma imagem $f(x, y)$ discretizada em coordenadas espaciais e em valores de brilho. Uma imagem digital pode ser considerada como sendo uma matriz cujos índices de linha e de coluna identificam um ponto na imagem e o correspondente valor do elemento da matriz identifica o nível de cinza naquele ponto. A figura 1 representa um exemplo de imagem digital (GONZALEZ E WOODS, 2000).

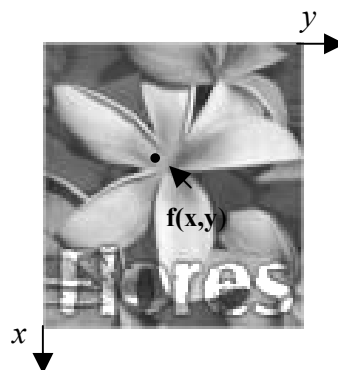


Figura 1 – Representação de uma imagem digital

A representação da matriz digital é dada através dos elementos dessa matriz, os quais são denominados elementos da matriz ou *pixels* (*picture elements*). Cada *pixel* é definido pelas coordenadas espaciais (x, y) que indicam sua localização na cena, sendo que a cada posição (x, y) é atribuído um valor digital (nível de cinza) correspondente ao valor radiométrico registrado pelo sensor.

2.1.2 – Convolução de imagens

A convolução é uma forma importante de processar uma imagem. Na figura 2 é ilustrado o processo de convolução entre uma imagem $f(a, b)$ com o núcleo $h(a, b)$, representada por $f * h$ definida no pixel de coordenadas (x, y) dada por:

$$(f * h)(x, y) = \sum_{a=0}^{m-1} \sum_{b=0}^{n-1} f(a, b) h(x - a, y - b) \quad (1)$$

onde: (x, y) é a dimensão da imagem f ;

(m, n) são as dimensões do filtro h ;

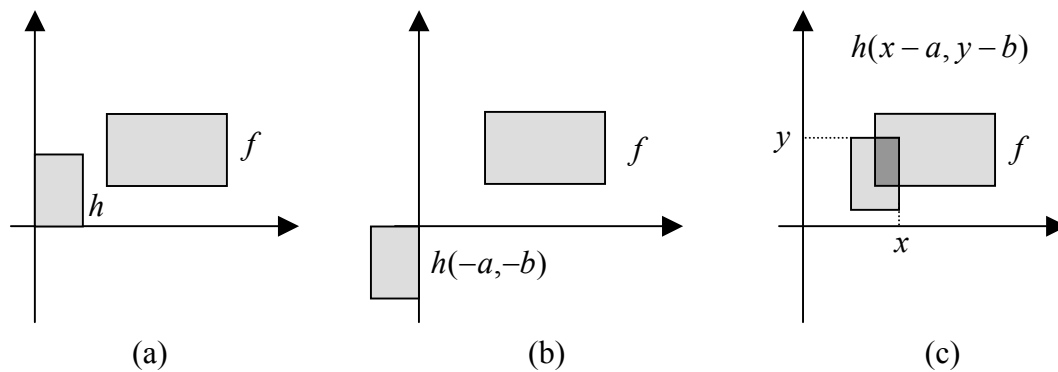


Figura 2 – Operação de convolução bidimensional (Fonte: GOMES E VELHO, 1994).

O processo de convolução bidimensional definido na equação (1), é ilustrado geometricamente na figura 2, onde a sequência $h(-a, -b)$ é obtida de $h(a, b)$ fazendo uma reflexão em torno do eixo x , seguida de uma reflexão em torno do eixo y (figura 2 (b)). A sequência $h(x-a, y-b)$ na figura 2 (c) é obtida transladando a sequência $h(-a, -b)$ pelo vetor (x, y) . A área escura na figura 2 (c) representa os pixels comuns às imagens $h(x-a, y-b)$ e $f(a, b)$, esses pixels são multiplicados dois a dois, e o resultado é somado de modo a obter o valor da convolução $f * h$ no pixel de coordenadas (x, y) (GOMES e VELHO, 1994).

2.1.3 Segmentação de imagens

Com o intuito de analisar uma imagem e gerar uma descrição de seu conteúdo, torna-se necessário dividi-la em partes que correspondam às feições de interesse. Uma imagem deve ser separada em regiões significativas, sendo que cada uma dessas regiões deve definir os objetos que compõem a imagem. Essa é uma das maiores dificuldades em processamento de imagens.

A segmentação é uma das primeiras etapas no processo de extração de informação em imagens digitais. Esse processo consiste em particionar uma imagem em seus objetos constituintes, ou seja, o nível de subdivisão é realizado de acordo com o problema a ser resolvido e o critério de término segue o princípio do isolamento dos objetos de interesse.

A figura 3 (a) ilustra a imagem original e 3 (b) sua segmentação, dessa forma pode-se verificar visualmente o princípio do isolamento dos objetos, obtendo como produto final às bordas da imagem.

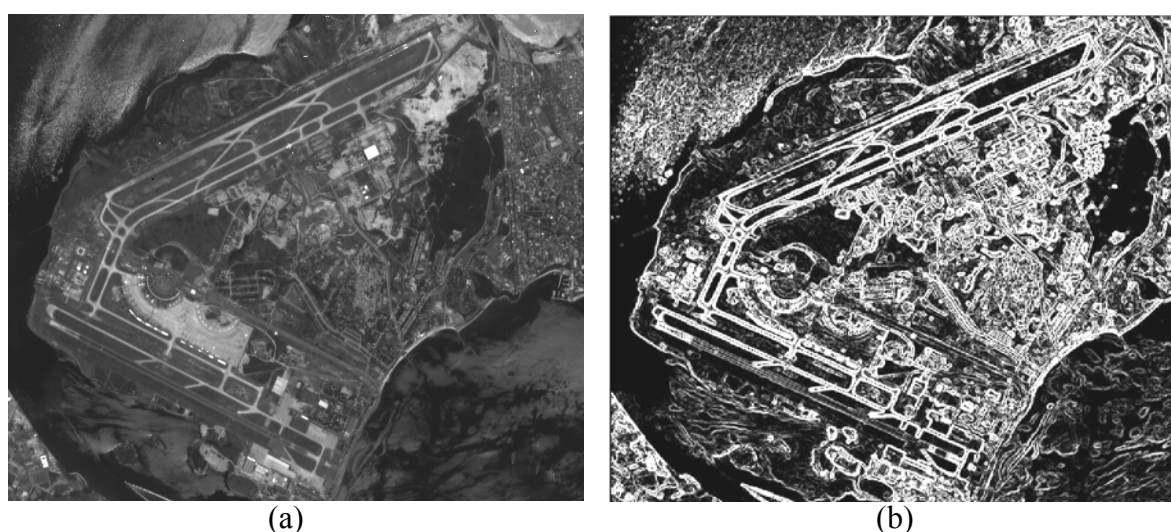


Figura 3 – Imagem correspondente ao aeroporto Internacional Antônio Carlos Jobim - RJ (Landsat 5 - TM), (a) imagem original, (b) imagem segmentada.

Os algoritmos de segmentação para imagens monocromáticas são geralmente baseados nas propriedades básicas de valores de níveis de cinza: descontinuidades e similaridades (GONZALEZ e WOODS, 2000). Para a área de interesse dessa dissertação, levou-se em consideração a abordagem de descontinuidades, onde uma imagem é particionada baseada em mudanças bruscas de níveis de cinza, ou seja, detecção de bordas presentes na imagem (figura 3). As similaridades baseiam-se em limiarização, crescimento de regiões, divisão e fusão de regiões.

2.1.4 Processamento no domínio espacial

As abordagens que envolvem métodos no domínio espacial referem-se ao próprio plano da imagem, e as abordagens nesta categoria são baseadas na manipulação direta sobre os pixels da imagem. O uso de máscaras espaciais para o processamento de imagens é usualmente chamado de filtragem espacial e as máscaras são denominadas filtros espaciais.

Os filtros espaciais mais utilizados são classificados em passa-baixa, passa-alta e passa-banda.

Os filtros passa-baixa ou de suavização eliminam os componentes de alta frequência, deixando “passar” as baixas frequências. Esse tipo de filtro causa um “borramento” acentuado na imagem, devido fundamentalmente a caracterização dos componentes de alta frequência, onde os mesmos evidenciam as bordas e outros detalhes finos da imagem. Dessa forma, a imagem perde detalhes, ou seja, a informação de alta frequência.

O filtro Gaussiano é um exemplo de filtro linear passa-baixa, ele é utilizado para eliminação de ruídos. A imagem é suavizada pela convolução da imagem com o núcleo Gaussiano. No entanto, o operador Gaussiano é isotrópico, suavizando a imagem em todas as direções, fazendo com que as bordas tornem-se “borradas”.

2.1.4.1 Filtro Gaussiano

O filtro Gaussiano é um importante filtro de suavização, onde para o caso unidimensional seu núcleo $G_\sigma(x)$ no domínio contínuo é dado por:

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}, \quad (2)$$

onde: σ é o desvio padrão;

σ^2 representa a variância.

Para o caso bidimensional, o núcleo Gaussiano é definido por:

$$G_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\sigma^2\pi} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{2\sigma^2}}, \quad (3)$$

O filtro Gaussiano é caracterizado por ser:

- ✓ linear, espacialmente invariante;
- ✓ a transformada Fourier de uma distribuição Gaussiana é uma outra Gaussiana;
- ✓ é separável e rotacionalmente simétrico, ou seja $G_\sigma(x, y) = G_\sigma(x)G_\sigma(y)$;
- ✓ a função Gaussiana é também conhecida como distribuição normal de variância σ^2 , onde σ é o desvio padrão de $G_\sigma(x, y)$. É imediato verificar

que sua média é 0, pelo fato de $G_\sigma(x)$ ser uma função par, onde

$$G_\sigma(x) = G_\sigma(-x).$$

Cabe ressaltar que o filtro Gaussiano é um filtro passa-baixa, onde as altas frequências do sinal filtrado sofrem uma suavização de ordem exponencial. Em EDPs o núcleo G_σ é conhecido como núcleo de Poisson ou núcleo do calor.

Em se tratando de filtros passa-alta, os mesmos eliminam as feições de baixa frequência, logo o efeito resultante desses filtros é a caracterização das bordas e outros detalhes finos da imagem. Os filtros passa-banda removem regiões selecionadas entre altas e baixas frequências, no entanto, raramente são interessantes para realce de imagens.

2.1.5. Métodos de detecção de bordas

Segundo Lim (1990), uma borda em uma imagem é um limite ou contorno no qual uma mudança significativa ocorre em algum aspecto físico da imagem, como a refletância, iluminação ou à distância da superfície visível do observador.

Os métodos de segmentação baseados na detecção de bordas envolvem basicamente a localização de regiões da imagem onde a variação dos níveis de cinza ocorrem de maneira relativamente abrupta. As discontinuidades podem ocorrer na forma de pontos isolados, linhas, segmentos ou curvas e, a partir disto, são formados os contornos, ou bordas, dos objetos contidos na imagem. Na figura 4 (b) é possível visualizar as discontinuidades nos valores de brilho da imagem, o eixo x da figura 4 (b) representa as colunas da imagem original e o eixo y as variações dos níveis de brilho desta imagem. Neste exemplo apenas

uma linha da imagem 4 (a) foi considerada para representar graficamente essa variação. Tal linha corresponde a posição “90” na imagem original (figura 4(a)).

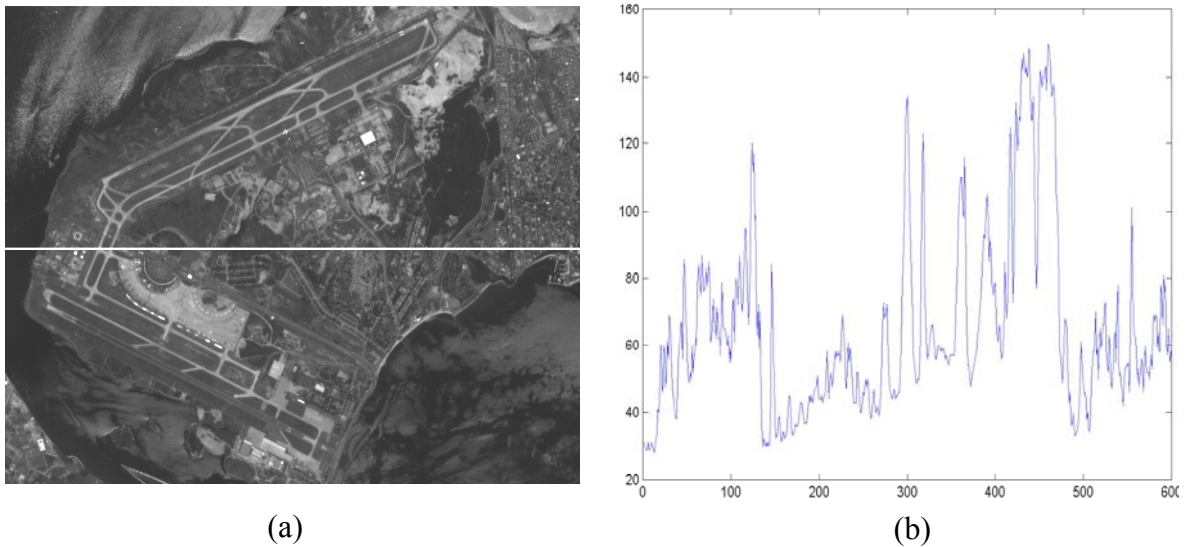


Figura 4 - (a) Imagem original, (b) gráfico da linha 90 representado em branco na figura 4 (a).

Alguns operadores detectam as descontinuidades através da aplicação de operadores de derivação, tais como os operadores de Gradiente e o Laplaciano, os quais são operadores de derivada de primeira e segunda ordem (figura 5).

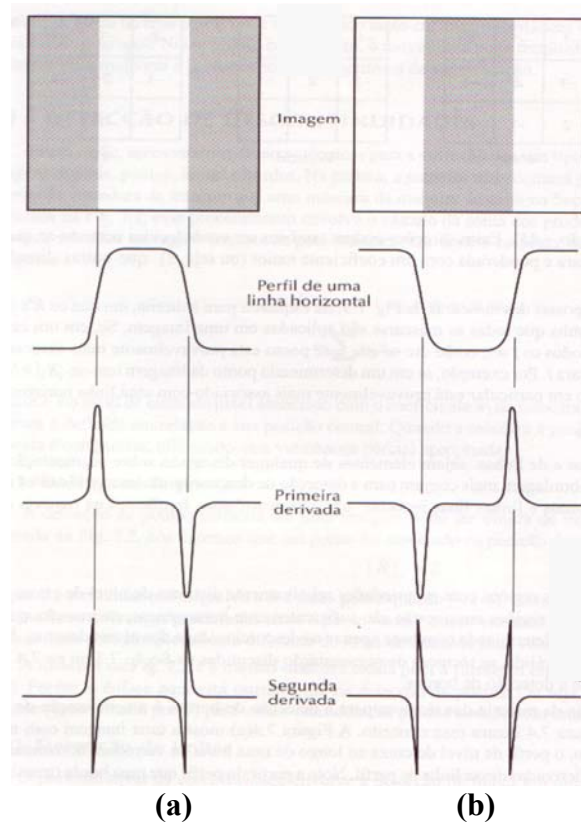


Figura 5 - Detecção de bordas por operadores de derivação: (a) faixa clara sobre um fundo escuro; (b) faixa escura sobre um fundo claro. (Fonte: GONZALEZ E WOODS, 2000).

A figura 5 ilustra graficamente a primeira e a segunda derivadas em uma imagem, neste caso as imagens são formadas por faixas claras e escuras. Logo a primeira derivada de qualquer ponto da imagem é obtida usando-se a magnitude do Gradiente naquele ponto, esta derivada permite encontrar as transições, visto que para as regiões de níveis constantes da imagem a derivada será zero e para as discontinuidades deverá assumir um valor de máximo ou mínimo. A segunda derivada é obtida através do Laplaciano. A partir da figura 5 é possível notar que a segunda derivada possui um cruzamento por zero na posição de cada borda, o que torna possível distinguir a ocorrência de transição de um tom escuro para um tom claro ou vice-versa.

2.1.5.1 Operador de Gradiente

Uma borda, como já definida, é considerada como sendo o limite entre duas regiões com propriedades distintas de nível de cinza. O Gradiente é um dos métodos que pode ser utilizado no processo de detecção de bordas.

Segundo Gonzalez e Woods (2000), o Gradiente de uma imagem $f(x, y)$ na posição (x, y) é dado pelo vetor:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4)$$

onde magnitude desse vetor é :

$$|\nabla f| = \text{mag}(\nabla f) = [G_x^2 + G_y^2]^{1/2} \quad (5)$$

Resultados similares são alcançados aproximando o Gradiente com valores absolutos:

$$|\nabla f| = |G_x| + |G_y| \quad (6)$$

A aplicação dos operadores G_x e G_y resultam nos gradientes da borda nas direções x e y , assim é possível obter a magnitude e a direção (ângulo) da borda em cada pixel, figura 6.

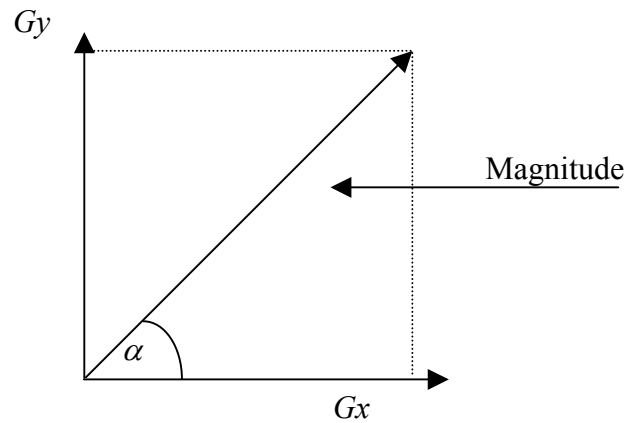


Figura 6 – Magnitude dos Gradientes e do ângulo

A direção do Gradiente em um ponto qualquer da imagem é dada por:

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{Gy}{Gx} \right) \quad (7)$$

Portanto, a magnitude da primeira derivada pode ser usada na detecção da presença de bordas em uma imagem. Devido a esse fato, o operador Gradiente é utilizado nessa dissertação como uma ferramenta para a segmentação de imagens.

2.1.5.2 Operador de Sobel

O operador de Sobel é um estimador de bordas e tem como característica suavizar e detectar bordas ao mesmo tempo. Logo, o operador realça linhas verticais e horizontais mais escuras que o fundo, sem realçar pontos isolados.

Esse operador calcula um Gradiente discreto nas direções horizontal e vertical, para um pixel de localização (i, j) . Assim, as componentes discretas do vetor Gradiente são dadas por:

$$\begin{aligned} G_x &= [U(i+1, j-1) + 2U(i+1, j) + U(i+1, j+1)] - [U(i-1, j-1) + 2U(i-1, j) + U(i-1, j+1)] \\ G_y &= [U(i-1, j+1) + 2U(i, j+1) + U(i+1, j+1)] - [U(i-1, j-1) + 2U(i, j-1) + U(i+1, j-1)] \\ |\nabla|_{(i,j)} &= \sqrt{(G_x^2 + G_y^2)} \end{aligned} \quad (8)$$

O operador Sobel é equivalente à aplicação simultânea das máscaras representadas na figura 7.

$$G_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \quad G_y = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Figura 7 - Máscaras utilizadas no operador de Sobel

Como esse operador apresenta os efeitos de suavização e diferenciação ao mesmo tempo, é importante destacar que as regiões homogêneas da imagem apresentam uma resposta nula. Assim, magnitudes de pequeno valor indicam que o pixel em estudo não pertence a uma borda bem definida.

Os resultados da aplicação do operador de Sobel podem ser visualizados a partir da figura 8. Inicialmente tem-se uma imagem original figura 8 (a); em seguida é aplicado o operador na direção horizontal G_x , sendo o resultado apresentado em 8 (b); neste caso obtém-se respostas fortes ao longo das bordas horizontais; logo após verifica-se a aplicação do operador na direção vertical G_y conforme resultados em 8 (c), fato similar

ocorre na direção vertical. E, finalmente a imagem resultante do operador de Sobel, combinando os resultados na direção horizontal e vertical, é apresentado em 8 (d).

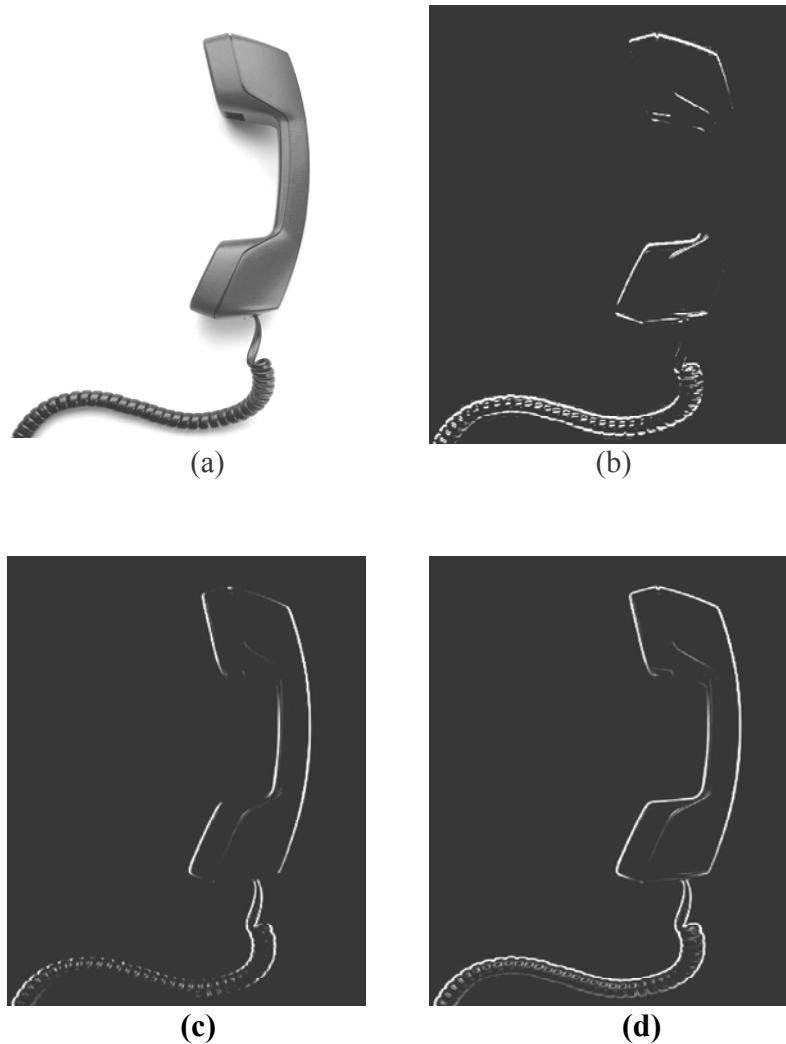


Figura 8 – (a) Imagem original; (b) resultado da aplicação do operador na direção horizontal (G_x); (c) resultado da aplicação do operador na direção vertical (G_y); (d) imagem completa do operador de Sobel.

2.1.6 Morfologia Matemática

A Morfologia Matemática (MM) teve seu início na década de sessenta através de Georges Matheron e Jean Serra. A palavra morfologia tem origem grega e significa estudo das formas, ela concentra seus esforços no estudo da estrutura geométrica das entidades presentes numa imagem. A morfologia matemática em termos de imagens representa um ramo não linear das técnicas de PDI, permitindo processar imagens com objetivos de realce, segmentação, detecção de bordas entre outras.

A grande potencialidade da morfologia matemática reside na palavra elemento estruturante, o qual é caracterizado como sendo um conjunto completamente definido e conhecido (forma, tamanho), que é comparado, a partir de uma transformação, ao conjunto desconhecido da imagem. Alguns exemplos de elementos estruturantes (3x3) com origem no centro do elemento são dados na figura 9.

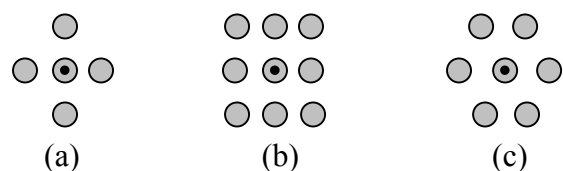


Figura 9 - Elemento estruturante - (a) cruz; (b) quadrado; (c) hexagonal.

2.1.6.1 Gradiente Morfológico

Dentre os operadores morfológicos destaca-se o Gradiente Morfológico, o qual é muito utilizado no processamento de imagens para detectar bordas. Ele é construído a partir dos operadores básicos da teoria de Morfologia Matemática (erosão e dilatação), logo, torna-se importante definir esses operadores.

Definição 1. A erosão segundo Soille (1999), de um conjunto X pelo elemento estruturante B é dada por:

$$\varepsilon_B(X) = \{x \mid B_x \subseteq X\}, \quad (9)$$

onde: ε representa a erosão;

B é o elemento estruturante;

B_x é o elemento estruturante centrado no pixel $x \in X$;

A figura 10 apresenta o efeito da aplicação do operador erosão em um conjunto X por um elemento estruturante (B) cruz (3x3) com origem no centro do elemento (representado pelo ponto branco), pode-se observar que a operação de erosão subtrai pontos do conjunto X .

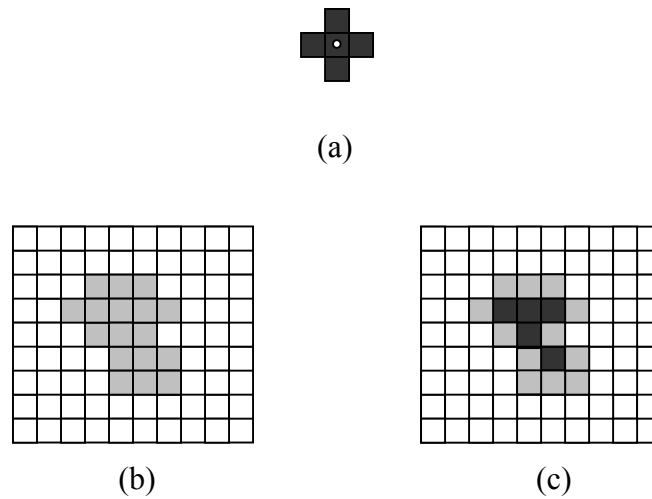


Figura 10 - (a) Elemento estruturante (B) cruz (3x3) com origem no centro do elemento; (b) conjunto original (X), representado pelos *pixels* cinza; (c) conjunto erodido representado pelos *pixels* pretos.

Definição 2. De acordo com Soille (1999), a erosão de uma imagem em tons de cinza f por um elemento estruturante B é definida como:

$$[\mathcal{E}_B(f)](x) = \min_{b \in B} \{f(x+b) - B(b)\} \quad (10)$$

onde: $\mathcal{E}_B$ representa a erosão pelo elemento estruturante B ;

b pertence ao elemento estruturante B ; e

a erosão é representada pelo **min** (mínimo) de $f(x+b) - B(b)$.

Na figura 11 é possível perceber o efeito da erosão em uma imagem binária e em uma imagem em tons de cinza. Aplicando o elemento estruturante cruz (3x3) com origem no centro, tem-se a erosão de uma imagem binária (figura 11 (b)) e na figura 11 (d) tem-se respectivamente o efeito da erosão sobre uma imagem em tons de cinza (figura 11 (c)).

Assim, a aplicação do operador de erosão apresenta os efeitos de aumento do fundo escuro sobre os padrões claros, resultando em uma diminuição significativa da palavra morfologia.



(a) Imagem binária



(b) resultado da erosão sobre (a)



(c) Imagem em tons de cinza



(d) resultado da erosão sobre (c).

Figura 11 – Erosão de uma imagem binária e em tons de cinza pelo elemento estruturante (3x3) com origem no centro.

Definição 3. Segundo Soille (1999), a dilatação de um conjunto X pelo elemento estruturante B é dada por:

$$\delta_B(X) = \{x \mid B_x \cap X \neq \emptyset\}, \quad (11)$$

onde: δ representa a dilatação;

B é o elemento estruturante;

B_x é o elemento estruturante centrado no pixel $x \in X$.

Na figura 12 (a) o elemento estruturante B com origem no centro do elemento (representado pelo ponto branco) percorre a imagem e centrado em cada *pixel* x do conjunto original X representado na figura 12 (b), verifica uma possível intersecção com a vizinhança de x , caso ocorra essa intersecção o pixel será considerado relevante, neste caso a operação de dilatação acrescenta pontos ao conjunto X , resultado observado na figura 12 (c), pixels pretos.

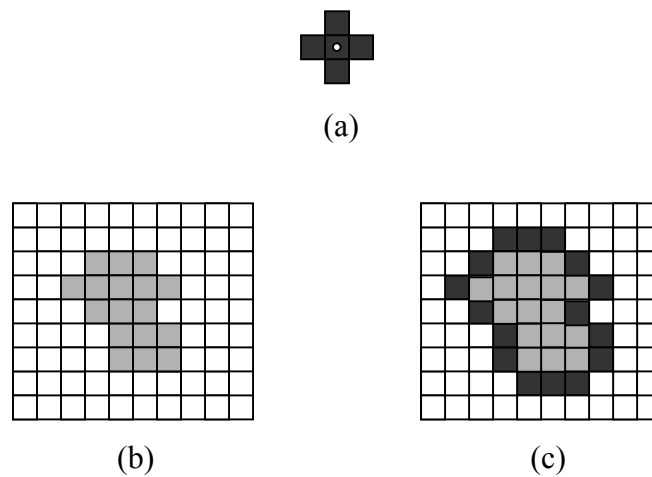


Figura 12- (a) Elemento estruturante (B) cruz (3x3) com origem no centro do elemento; (b) conjunto original; (c) conjunto dilatado.

Definição 4. De acordo com Soille (1999), a dilatação de uma imagem em tons de cinza f por um elemento estruturante B é definida como:

$$[\delta_B(f)](x) = \max_{b \in B} f(x + b) \quad (12)$$

onde: δ_B representa a dilatação de uma imagem pelo elemento estruturante B ;

b pertence ao elemento estruturante B ; e

a dilatação é representada pelo **max** (máximo) de $f(x + b)$.

Na figura 13 é possível perceber como ocorre a dilatação em uma imagem binária e em uma imagem em tons de cinza. A figura 13 (b) ilustra o resultado da dilatação em uma imagem binária (figura 13 (a)) pelo elemento estruturante cruz (3x3) com origem no centro. A figura 13 (d) representa o resultado da dilatação sobre uma imagem em tons de cinza (figura 13 (c)). As imagens resultantes apresentam os efeitos de aumento dos padrões claros (palavra morfologia) sobre o fundo escuro da imagem, resultando em um aumento significativo da palavra morfologia.



(a) Imagem binária



(c) resultado da dilatação sobre (a)



(c) Imagem em tons de cinza



(d) resultado da dilatação sobre (c).

Figura 13 - Dilatação de uma imagem binária e em tons de cinza pelo elemento estruturante (3x3) com origem no centro do elemento.

A partir dos operadores básicos da Morfologia Matemática (erosão e dilatação), Soille (1999) define o Gradiente Morfológico por erosão como sendo a diferença entre a imagem original e a imagem erodida pelo elemento estruturante B:

$$\rho_B^-(f) = f - \varepsilon_B(f), \quad (13)$$

onde: ρ_B^- representa o gradiente por erosão;

f representa a imagem original;

B é o elemento estruturante;

ε_B é a erosão pelo elemento estruturante B .

Através da figura 14 (b) é possível destacar a detecção de bordas em uma imagem em tons de cinza a partir do elemento estruturante cruz 3x3 com origem no centro do elemento, ressaltando que o gradiente por erosão tem como resultado a detecção de bordas nas posições dos níveis de cinza mais elevados das bordas.



Figura 14 - (a) Imagem original



(b) gradiente por erosão

Como definido em Soille (1999), o Gradiente Morfológico de uma imagem f por um elemento estruturante B a partir da dilatação é:

$$\rho_B^+(f) = \delta_B(f) - f \quad (14)$$

onde: ρ_B^+ representa o gradiente por dilatação;

B é o elemento estruturante;

δ_B é a dilatação pelo elemento estruturante B .

O gradiente por dilatação em níveis de cinza detecta bordas nas posições dos níveis de cinza mais baixos das bordas, esse fato pode ser visualizado na (figura 15 (b)) a partir do elemento estruturante cruz 3x3 com origem no centro do elemento. Logo, esses operadores têm como princípio básico à detecção de contornos mais finos na imagem.



Figura 15 - (a) Imagem original



(b) gradiente por dilatação

De acordo com Soille (1999), o Gradiente Morfológico por dilatação e erosão é definido como a diferença aritmética entre a dilatação e erosão de uma imagem f por um elemento estruturante B :

$$\rho(f) = \delta_B(f) - \varepsilon_B(f) \quad (15)$$

onde: ρ representa o gradiente por dilatação e erosão;

δ_B é a dilatação pelo elemento estruturante B ;

ε_B é a erosão pelo elemento estruturante B .

Na figura 16 (b) pode-se verificar a detecção de bordas em uma imagem em tons de cinza a partir do elemento estruturante cruz 3x3 com origem no centro, utilizando o gradiente por dilatação e erosão.



Figura 16 - (a) Imagem original

(b) gradiente por dilatação-erosão

Através desse processo observa-se que o gradiente por dilatação e erosão em níveis de cinza agrupa os resultados dos gradientes por erosão e por dilatação em níveis de cinza. Salienta-se que esse operador é mais efetivo no sentido de detecção de bordas, portanto será utilizado para a análise comparativa com o modelo de EDPs, onde será possível verificar o potencial do referido modelo, no sentido esperado de uma melhoria na extração de feições.

2.2 Equações Diferenciais Parciais

Segundo Iório (1991) uma EDP é definida como sendo uma equação envolvendo duas ou mais variáveis independentes $x, y, z, t, \dots$ e derivadas parciais de uma função (variável dependente) $u = u(x, y, z, t, \dots)$. Mais precisamente, uma EDP é uma equação da forma:

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0, \quad (16)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, F é uma função dada e $u = u(x)$ é a função que se quer determinar.

$$\frac{\partial u}{\partial x}, u_x, D_x u \quad \text{são as derivadas parciais de } u \text{ com relação a } x.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{xx}, D_{xx} u \quad \text{são as derivadas de segunda ordem com relação a } x.$$

Uma EDP é dita linear se é de primeiro grau em u e em todas as suas derivadas parciais que ocorrem na equação; caso contrário a EDP é dita não linear. A forma mais geral de uma EDP linear de primeira ordem é:

$$\sum_{j=1}^n a_j(x) D_j u + b(x)u + c(x) = 0, \quad (17)$$

onde alguns dos coeficientes a_j não são identicamente nulos e $D_j u$ corresponde a derivada parcial de u com relação a variável x_j .

Para equações de segunda ordem, a forma mais geral de uma EDP linear é:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{j=1}^n b_j(x) D_j u + c(x)u + d(x) = 0, \quad (18)$$

onde alguns dos coeficientes a_{ij} não são identicamente nulos e $D_i D_j u$ corresponde a derivada parcial mista com relação a x_i e x_j .

2.2.1 Classificação das Equações Diferenciais Parciais.

Dada a Equação Diferencial Parcial da forma:

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = f(x, y, u_x, u_y) \quad (19)$$

é possível associar a seguinte função (discriminante).

$$\delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y) c(x, y) \quad (20)$$

Definição: A EDP dada pela equação (19) é classificada como sendo:

- (i) parabólica no ponto $(x, y) \in \Omega$ se $\delta(x, y) = 0$;
- (ii) hiperbólica no ponto $(x, y) \in \Omega$ se $\delta(x, y) > 0$;
- (iii) elíptica no ponto $(x, y) \in \Omega$ se $\delta(x, y) < 0$.

Alguns exemplos de EDP são interessantes do ponto de vista físico, pois são protótipos dos tipos parabólico, hiperbólico e elíptico.

Tipo parabólico: O protótipo é dado pela Equação do Calor.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (21)$$

onde $u = u(x, t)$, $x \in \mathfrak{R}$, $t > 0$ e α^2 é uma constante.

Tipo hiperbólico: O protótipo é dado pela equação da onda.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (22)$$

onde $t > 0$ representa o tempo, $x \in \mathfrak{R}$ é a variável espacial e $c > 0$ é uma constante.

Tipo elíptico: O protótipo é dado pela equação de Poisson.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = h(x, y) \quad (23)$$

Pode ser dito ainda que a EDP dada na equação (19) é dita parabólica (respectivamente hiperbólica, elíptico) em Ω se for parabólica (respectivamente hiperbólica, elíptica) em todos os pontos de Ω .

2.2.2 A Equação do Calor

A Equação do Calor também conhecida como equação de difusão, representa o protótipo das equações parabólicas. Segundo Teixeira (2001), para o caso unidimensional a solução da Equação do Calor.

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (24)$$

é dada pela convolução:

$$u(x, t) = G_t(x) * u_0(x) \quad (25)$$

onde Gonzalez e Woods (2000), definem a convolução de duas funções $f(x)$ e $g(x)$, dada por $f(x)*g(x)$, como sendo:

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du \quad (26)$$

No caso bidimensional a Equação do Calor é dada por:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y, t), \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (27)$$

cujas solução é dada pela convolução:

$$u(x, y, t) = G_t(x, y) * u_0(x, y) \quad (28)$$

Dessa forma, o produto de convolução é utilizado no processamento de imagens para encontrar uma média ponderada dos valores em uma vizinhança de um determinado ponto.

O cálculo da solução da equação diferencial parcial dada pela equação (27) proporciona a obtenção de uma família de imagens para sucessivos instantes de tempo. Observar-se através da figura 17, níveis de suavização cada vez mais elevados a partir do aumento do número de iterações e ressalta-se também que há um efeito de “borramento” na imagem, visto que ocorre uma suavização dos componentes de alta-frequência, caracterizado por bordas e outros detalhes finos da imagem.

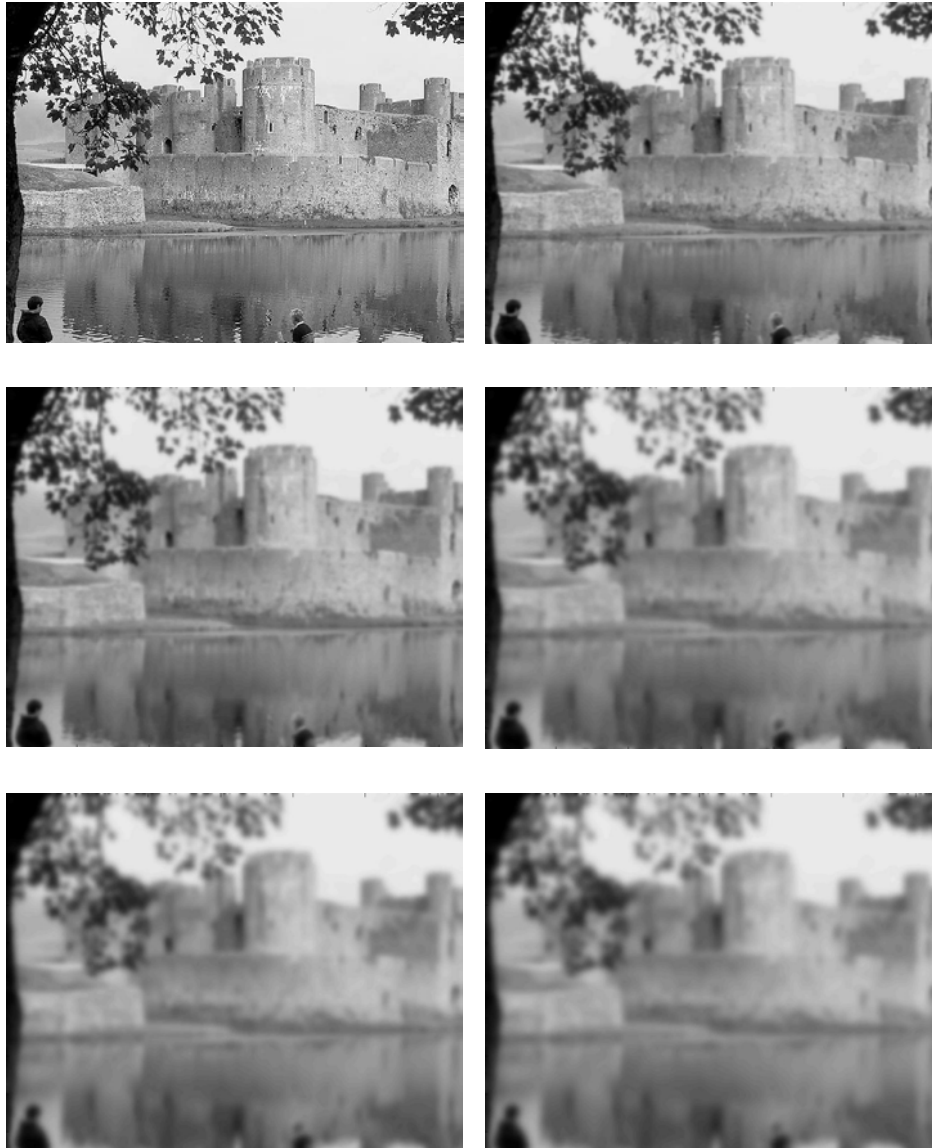


Figura 17 – Exemplo de Aplicação da Equação do Calor em uma imagem para diferentes níveis de suavização.

2.2.3 Espaço de escala

A convolução de um sinal com o núcleo Gaussiano tende a eliminar estruturas de escala menor, dependendo da variância escolhida. A escolha da variância adequada para uma determinada suavização é de suma importância em PDI, pois a imagem precisa ser suavizada adequadamente para que ocorra uma eliminação satisfatória das informações irrelevantes contidas na imagem.

Assim, torna-se natural definir como espaço de escala de um sinal (ou imagem) a composição deste sinal convoluído com Gaussianas de todas as variâncias possíveis. Segundo Teixeira (2001), deve-se notar que o objetivo da criação de um espaço de escala não é somente o de suavizar o sinal (ou imagem) em diversas quantidades, mas aproveitar as estruturas através das diferentes escalas para analisar a imagem em diferentes níveis de localização.

Dentre as possibilidades de se definir espaços de escala usando núcleos de convolução diferentes do Gaussiano e, além disso, criar estruturas distintas das usadas com a convolução de um sinal com o núcleo Gaussiano, surge uma definição alternativa para o espaço de escala Gaussiano que envolve a Equação do Calor ao invés da convolução com a Gaussiana.

O espaço de escala Gaussiano possui algumas propriedades matemáticas importantes como:

- ✓ linearidade: a transformação que leva o sinal original $u(x,0)$ ao espaço de escala Gaussiano $u(x,t)$ é linear;
- ✓ invariância por translações: se T é uma transformação, o espaço de escala $Tu(x,0)$ é $Tu(x,t)$, pois $G_t(x) * Tu(x,0) = T(G_t(x) * u(x,0))$;
- ✓ causalidade: o sinal $u(x,0)$ é simplificado com a escala.

As propriedades de linearidade e invariância por translações surgem do fato da Equação do Calor ser linear e todos os seus termos serem invariantes por translações, ou seja, como consequência do fato de $G_{\sigma}(x) * u(x,0)$ ser solução da Equação do Calor.

A propriedade de causalidade está relacionada com o fato do princípio do máximo, onde se torna possível a partir da evolução de um sinal (ou imagem) no espaço de escala, verificar que a quantidade de mínimos e máximos locais não aumenta durante essa evolução, ou seja, quando a escala temporal aumenta, os valores de mínimos tendem a aumentar e os valores de máximos a decrescer. A partir da figura 18, observa-se o efeito de suavização ocasionando a eliminação de “ruídos”, suavizando a imagem em todas as direções.



Figura 18 – Suavização através da Equação do Calor

Os efeitos observados na figura 18 correspondem à aplicação da Equação do Calor, onde a partir do aumento do tempo de evolução tem-se como resultado uma perda de detalhes, ou seja, a imagem torna-se “borrada”, causando uma atenuação progressiva dos componentes de alta-frequência, onde os mesmos são caracterizados por bordas e detalhes finos da imagem. Esse “borramento” é uma característica inerente do processo de difusão.

2.3 Implementação Numérica

Em se tratando de equações diferenciais, poucas técnicas matemáticas são conhecidas para encontrar uma função, ou uma família de funções, as quais representem o conjunto solução dessas equações. Obter uma solução analítica, na maior parte dos casos, torna-se uma tarefa difícil restando, no entanto, a busca de aproximações numéricas através de métodos apropriados para cada problema.

Para explicitar as respectivas equações numéricas, utilizam-se métodos de diferenças finitas e, através da discretização do domínio de solução, obtêm-se as soluções numéricas das equações de diferenças, onde as mesmas representam um estágio da evolução na escala temporal, ou seja, a solução da EDP no estágio n representa a evolução da EDP no instante de tempo t_n .

Segundo Cunha (2000) a essência dos métodos numéricos está na discretização do contínuo. É essa discretização que torna “finito” o problema e, portanto, viabiliza sua “solução” através de computadores.

O método das diferenças finitas consiste em discretizar as derivadas parciais que estão na equação diferencial, ou seja, as derivadas são aproximadas por diferenças entre valores da solução discretizada. A série de Taylor é a ferramenta matemática utilizada na definição de aproximações das derivadas na região dos pontos de interesse.

Assim, para o caso unidimensional, isto é, funções de uma variável, define-se:

$$1) \text{ fórmula avançada } y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{h}{2} y''(\xi) \quad (29)$$

$$2) \text{ fórmula atrasada } y'(x) = \frac{y(x) - y(x-h)}{h} + \frac{h}{2} y''(\xi) \quad (30)$$

$$3) \text{ fórmula centrada } y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} + \frac{h^2}{3!} y'''(\xi) \quad (31)$$

A fórmula da discretização da derivada de segunda ordem é dada por:

$$y''(x) = \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} + \frac{h^2}{12} y^{(iv)}(\xi) \quad (32)$$

para algum $\xi \in (x-h, x+h)$.

Segundo Cunha (2000) na construção de soluções aproximadas para equações diferenciais parciais, em primeiro lugar discretiza-se o domínio onde a equação diferencial é definida. Nesta dissertação foram utilizadas imagens representadas pela função $u: \Omega \in \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, com $n = 2$, onde procura-se a solução $u(x), x \in \mathfrak{R}^n$ das EDPs nas quais baseia-se o modelo. Com isso, definiu-se a malha sobre a qual foi calculada a solução aproximada.

A malha de passo h e k (figura 19), associada a (x_i, y_j) é constituída por:

$$(x_i, y_j) = (x + ih, y + jk) \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Considerando $h = k$, tem-se uma malha regular em (x, y) .

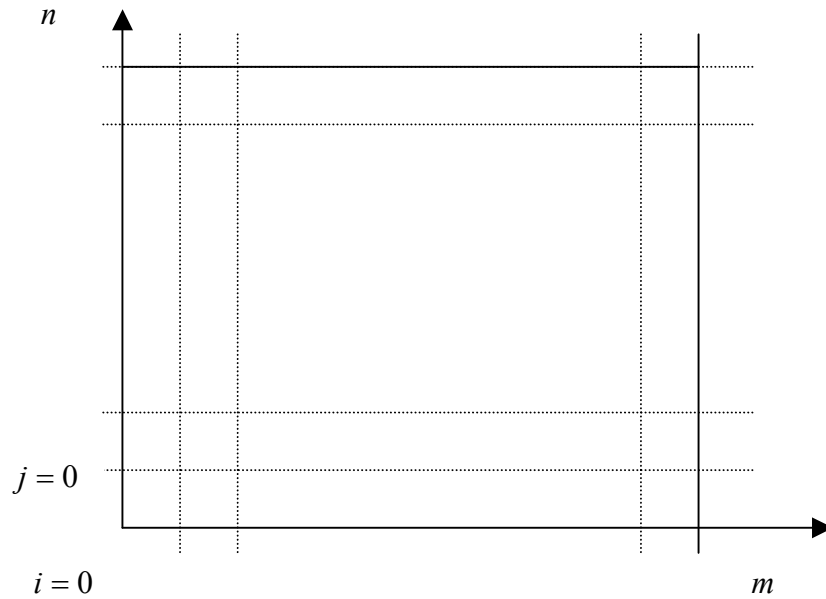


Figura 19 – Malha de $m \times n$ pontos e $h = 1$.

Generalizando as definições do caso unidimensional para o caso bidimensional, obtém-se as seguintes equações de diferenças relativas às derivadas parciais da função $u(x, y)$.

- 1) Fórmula avançada $\rightarrow u_x \cong u_{i+1,j} - u_{i,j}$
- 2) Fórmula atrasada $\rightarrow u_x \cong u_{i,j} - u_{i-1,j}$
- 3) Fórmula centrada $\rightarrow u_x \cong \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2}$
- 4) Fórmula avançada $\rightarrow u_y \cong u_{i,j+1} - u_{i,j}$
- 5) Fórmula atrasada $\rightarrow u_y \cong u_{i,j} - u_{i,j-1}$
- 6) Fórmula centrada $\rightarrow u_y \cong \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2}$

7) Derivada parcial mista

$$\begin{aligned} u_{xy} &= \frac{(u_x)_{j+1} - (u_x)_{j-1}}{2} \cong \frac{\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2} - \frac{u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{2}}{2} \\ &= \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{4} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{4} \end{aligned}$$

8) Derivadas de segunda ordem em x e y .

$$\rightarrow u_{xx} \cong u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}$$

$$\rightarrow u_{yy} \cong u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}$$

Utilizando as fórmulas das derivadas parciais de segunda ordem e o operador de diferenças avançadas ou atrasadas no tempo, pode-se discretizar o operador Laplaciano, o qual é comum aos três protótipos dados pelas equações do calor da onda e de Poisson.

$$u_{xx}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} \quad (33)$$

$$u_{yy}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h^2} \quad (34)$$

Utilizando uma malha uniforme e igualmente espaçada nas duas direções, tem-se:

$$\nabla^2 u \Big|_{(x_i, y_j)} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h^2} + o(h^2) \quad (35)$$

A malha regular fornece uma aproximação com erro da ordem de h^2 .

Nesta dissertação foram utilizadas imagens de dimensão $m \times n$, as quais são representadas pela função $u: \Omega \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Assim a região Ω foi discretizada em uma malha uniforme e igualmente espaçada com $h = 1$.

Generalizando a discretização do Laplaciano dado pela equação (35) em relação a variável tempo em uma malha regular e considerando as seguintes condições:

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = u^0(x, y), & (x, y) \in R & \text{Condição inicial} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & & \text{Condição de contorno (Neumann)} \end{cases}$$

A partir da condição de contorno de Neumann, tem-se para as regiões de contorno C_1 , C_2 , C_3 e C_4 as seguintes fórmulas de diferenças.

$$C_1 = u'_{i,j} = u_{i+1,j} - u_{i,j} \Rightarrow 0 = u_{i+1,j} - u_{i,j} \Rightarrow u_{i,j} = u_{i+1,j} \quad \text{Fórmula avançada}$$

$$C_2 = u'_{i,j} = u_{i,j} - u_{i-1,j} \Rightarrow 0 = u_{i,j} - u_{i-1,j} \Rightarrow u_{i,j} = u_{i-1,j} \quad \text{Fórmula atrasada}$$

$$C_4 = u'_{i,j} = u_{i,j+1} - u_{i,j} \Rightarrow 0 = u_{i,j+1} - u_{i,j} \Rightarrow u_{i,j} = u_{i,j+1} \quad \text{Fórmula atrasada}$$

$$C_3 = u'_{i,j} = u_{i,j} - u_{i,j-1} \Rightarrow 0 = u_{i,j} - u_{i,j-1} \Rightarrow u_{i,j} = u_{i,j-1} \quad \text{Fórmula avançada}$$

Utilizando essas condições de contorno na malha (figura 20), têm-se:

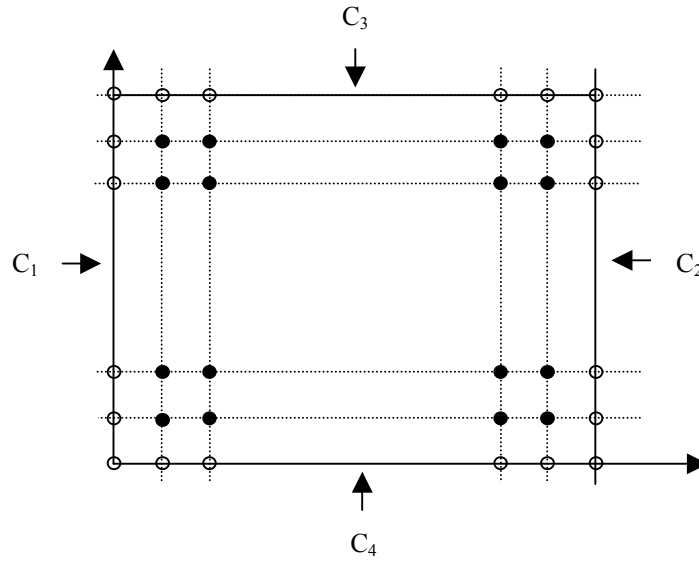


Figura 20 - Malha das derivadas parciais de primeira ordem na região de contorno, ● (pontos internos) e ○ (pontos de contorno).

Nas figuras 21 e 22 estão apresentados os dois esquemas numéricos correspondentes aos métodos explícito e implícito.

O método explícito é obtido usando diferenças avançadas no tempo e a discretização usual para a segunda derivada é dada por:

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} - a_{i,j}^k \{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k\} = f(x_i, y_j, t_k) \quad (36)$$

com $i = 1:m-1$, $j = 1:n-1$ e $k = 0, 1, \dots$

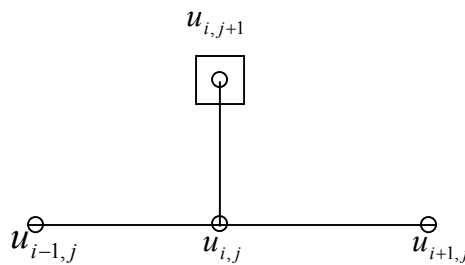


Figura 21 – Esquema computacional para o método explícito

A figura 21 ilustra o esquema computacional utilizado no método explícito, este método é considerado condicionalmente estável, pois a estabilidade do método depende de uma relação entre os tamanhos dos passos utilizados na discretização das variáveis independentes da equação. Nesta dissertação foi utilizado o método explícito, pelo fato da resolução do problema por esse método ser relativamente simples e o método apresentar um esquema de evolução na variável temporal, no qual a cada nível de tempo a solução é calculada de modo explícito.

O método implícito será definido apenas a título ilustrativo, pois o mesmo não foi utilizado nesse trabalho. Sua equação geral é dada por:

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} - a_{i,j}^{k+1} \left\{ \frac{u_{i+1,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^{k+1} - 2u_{i,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta y^2} \right\} = f(x_i, y_j, t_{k+1}) \quad (37)$$

com $i = 1:m-1$, $j = 1:n-1$ e $k = 0, 1, \dots$

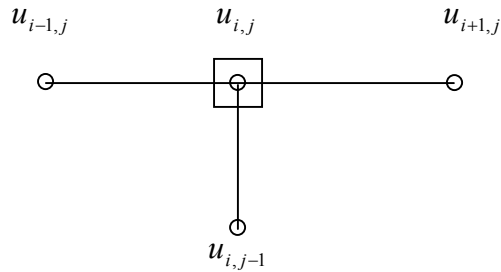


Figura 22 – Esquema computacional para o método implícito

A figura 22 representa o esquema computacional para o método implícito, esse método apesar de ser considerado incondicionalmente estável, independente do número

de pontos da malha, tem um custo computacional maior, uma vez que é necessário resolver um sistema de equações lineares em cada nível de tempo.

2.3.1 Modelos de Equações Diferenciais Parciais

Alguns trabalhos vêm sendo desenvolvidos na última década, com intuito principal de eliminar ruídos preservando bordas e outros detalhes da imagem. Silva Jr., Boaventura e Barcelos (2001), apresentam um trabalho de pesquisa que leva em consideração a proposta de um modelo de difusão não linear e uma análise comparativa com modelos importantes propostos na literatura. É importante destacar que esse trabalho serviu de inspiração para o desenvolvimento desta dissertação.

Faz-se necessário salientar, que a Equação do Calor possui papel fundamental nesses estudos, a qual é dada por:

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y, t),$$

$$u(x, y, 0) = I(x, y)$$
(38)

onde: $u(x, y, t)$ representa a imagem para a escala t ;

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$; e, as derivadas de segunda ordem com relação a x e y , representam o operador Laplaciano (∇^2).

A partir da Equação do Calor linear dada em (38), alguns autores propuseram alterações e acréscimos na sua estrutura, fazendo com que os modelos fundamentados a partir

de então tivessem como característica principal à difusão anisotrópica, ou seja, suavização maior em áreas homogêneas da imagem e menor próximo às bordas.

A equação proposta por Perona e Malik (1990), foi de grande contribuição para a comunidade de processamento de imagens. A idéia central desses autores consistia em realizar uma suavização seletiva na imagem. A partir dessa idéia a equação passou a representar um modelo de difusão não linear, que fornece um algoritmo potencial para segmentação de imagens, remoção de ruídos, detecção de bordas e realce de imagem (WEI, 1998). Essa equação é dada por:

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \text{div}[(g(|\nabla u(x, y, t)|))\nabla u(x, y, t)]$$

$$u(x, y, 0) = I(x, y)$$
(39)

onde: *div* representa o operador divergente;

∇ é o operador gradiente;

g é uma função suave e monótona decrescente, onde $g(0)=1$, $g(s) \geq 0$, e $g(s) \rightarrow 0$, quando $s \rightarrow \infty$.

Seguindo esta linha de pesquisa, outros autores propuseram algumas alterações no modelo. Uma importante contribuição foi dada por Nordström (1990), que sugeriu a inclusão de um termo regularizador $(u - I)$ na equação (39). Esse termo tem como função principal preservar melhor os contornos e bordas da imagem.

Adotando uma notação simplificada para os modelos a seguir, a equação (39) com o termo $(u - I)$ passou a ser expressa por:

$$\begin{aligned}
 u_t &= \text{div}[(g |\nabla u|)\nabla u] - (u - I) \\
 u(x, y, 0) &= I(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

onde: $u(x, y, t)$ representa a imagem suavizada no instante t ;

$I(x, y)$ representa a imagem original.

A função g , neste caso, utiliza a idéia de $|\nabla u|$, dada por:

$$g(|\nabla u|) = \frac{1}{1 + |\nabla u|^2} \tag{41}$$

Quando a função g dada em (41) é utilizada, verifica-se que esse detector de bordas apresenta inconsistências. Se a imagem apresentar uma grande quantidade de ruídos, no caso de imagens orbitais informações irrelevantes, o módulo do gradiente $|\nabla u|$ será grande e como efeito indesejável, a função g será quase nula em todos os pontos, e quase todos os ruídos permanecerão, assim esse processo não elimina suficientemente as regiões “ruidosas” da imagem.

Para que essa instabilidade fosse superada, houve a substituição do gradiente por uma suavização com a Gaussiana, o termo $|\nabla G_\sigma * u|$ representa uma média dos valores circunvizinhos a $u_{i,j}$, o que torna possível a identificação de componentes de alta frequência isolados, não detectando essas regiões, mas se for uma região de contorno o comportamento do gradiente será uniforme, possibilitando a detecção desse contorno. A partir dessa alteração a função g dada em (41) foi substituída por:

$$g(|\nabla G_\sigma * u|) = \frac{1}{1 + k |\nabla G_\sigma * u|^2} \quad (42)$$

onde: k é uma constante;

$$G_\sigma(x, y) = \frac{1}{4\pi\sigma} \exp\left[-(x^2 + y^2)/(2\sigma^2)\right];$$

$u(x, y, t)$ representa a imagem suavizada no instante t .

Usando a equação conhecida como fluxo da curvatura média:

$$u_t = |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \quad (43)$$

Alvarez, Lions e Morel (1992), propuseram um modelo, seguindo a corrente teórica proposta por Perona e Malik (1990), combinando a equação (43) com a substituição feita na função g . Assim, a equação (40) passou a ser escrita como:

$$u_t = g(|\nabla G_\sigma * u|) |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - (u - I) \quad (44)$$

$$u(x, y, 0) = I(x, y)$$

onde: $g(|\nabla G_\sigma * u|) = \frac{1}{1 + k |\nabla G_\sigma * u|^2};$

$I(x, y)$ representa a imagem original;

$u(x, y, t)$ é a imagem suavizada a partir de I no instante t .

Segundo Silva Jr., Boaventura e Barcelos (2001) esse modelo apresentou melhores resultados que os modelos descritos anteriormente, consequência direta da aproximação efetuada pelo produto de convolução.

Baseados em modelos propostos na literatura Barcelos e Chen (2000), descreveram um modelo que apresenta resultados expressivos, no que tange a remoção de ruídos e segmentação de imagens.

Esse modelo segundo Silva Jr., Boaventura e Barcelos (2001), apresentou resultados satisfatórios, principalmente em relação à qualidade da segmentação de imagens. Esse modelo consiste em:

$$u_t = g^2 |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + g \nabla g * \nabla u - \beta g |\nabla u| (u - I)$$

$$u(x, y, 0) = I(x, y)$$
(45)

$$\text{onde: } g(|\nabla G_\sigma * u|) = \frac{1}{1 + k |\nabla G_\sigma * u|^2}, \quad k \text{ constante;}$$

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{4\pi}} \exp(-|x|/4\sigma^2), \quad \sigma > 0 \text{ constante.}$$

Seguindo os modelos propostos anteriormente Barcelos, Boaventura e Silva Jr. (2001) propuseram um modelo de equação de difusão não linear, que segue a corrente teórica formulada a partir de Perona e Malik (1990), onde através de substituições e acréscimos, tem-se a seguinte equação:

$$u_t = g(|\nabla G_\sigma * u|) |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \lambda(1 - g)(u - I),$$

$$u(x, y, 0) = I(x, y)$$
(46)

onde: $g(|\nabla G_\sigma * u|) = \frac{1}{1 + k |\nabla G_\sigma * u|^2}$;

σ e λ são parâmetros.

O modelo definido na equação (46), tem como objetivo primordial suavizar seletivamente a imagem, considerando onde o $|\nabla G_\sigma * u|$ é pequeno, tem-se $g \sim 1$ o que resulta em $(1 - g) \sim 0$. Assim o termo regularizador $(u - I)$ não atuará no modelo, fazendo com que a região homogênea sofra maior suavização. O efeito contrário ocorrerá se $|\nabla G_\sigma * u|$ for grande. Se isso ocorrer tem-se $g \sim 0$, o que implica em $(1 - g) \sim 1$ fazendo com que o termo regularizador $(u - I)$ atue significativamente na imagem, mantendo as características originais das bordas contidas na imagem.

A função Gaussiana utilizada na equação (46), sofreu uma substituição de parâmetros, os autores consideraram $at = \sigma^2$. Essa adaptação se justifica pela relação entre o parâmetro de escala σ e o tempo de evolução t . Assim, a função Gaussiana é dada por:

$$G_t(x, y) = \frac{1}{2a\pi t} e^{-(x^2 + y^2)/2at}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (47)$$

Barcelos, Boaventura e Silva Jr. (2001) introduziram ainda o conceito de “tempo ótimo de suavização”, onde a partir de uma estimativa do nível de ruído ou nível de informação irrelevante contida na imagem, é possível evoluir até o grau de suavização adequado.

Esse tempo ótimo é definido pela expressão:

$$T_0 = \frac{\sigma^2}{a} \quad (48)$$

onde: a é o parâmetro presente no núcleo de suavização Gaussiana;

σ é o valor estimado para o nível de informações irrelevantes.

Cabe salientar que esse modelo serviu de inspiração para essa dissertação, pois o modelo vem ao encontro das expectativas em relação à eliminação de ruídos (informações irrelevantes) e detecção de bordas, aplicado a imagens orbitais de Sensoriamento Remoto.

CAPÍTULO 3

MATERIAIS E MÉTODOS

3.1 *Software* utilizado na implementação do modelo

- ***Software* MATLAB e a *Toolbox* de Morfologia Matemática**

De acordo com Vieira (2001), o termo "MATLAB" tem origem na conjugação dos termos *MATrix* e *LABoratory*. É um *software* interativo de alta performance voltado para o cálculo numérico. Ele integra análise numérica, cálculo com matrizes, processamento de sinais e construção de gráficos em ambiente de fácil utilização, onde

problemas e soluções são expressos quase exatamente como são escritos matematicamente, ao contrário da programação tradicional.

O ambiente MATLAB possui uma janela de trabalho (figura 23), que permite a realização de algoritmos numéricos sobre matrizes com o mínimo de programação. Além disso, no ambiente MATLAB é possível a criação e manipulação de matrizes sem a necessidade de dimensionamento prévio.

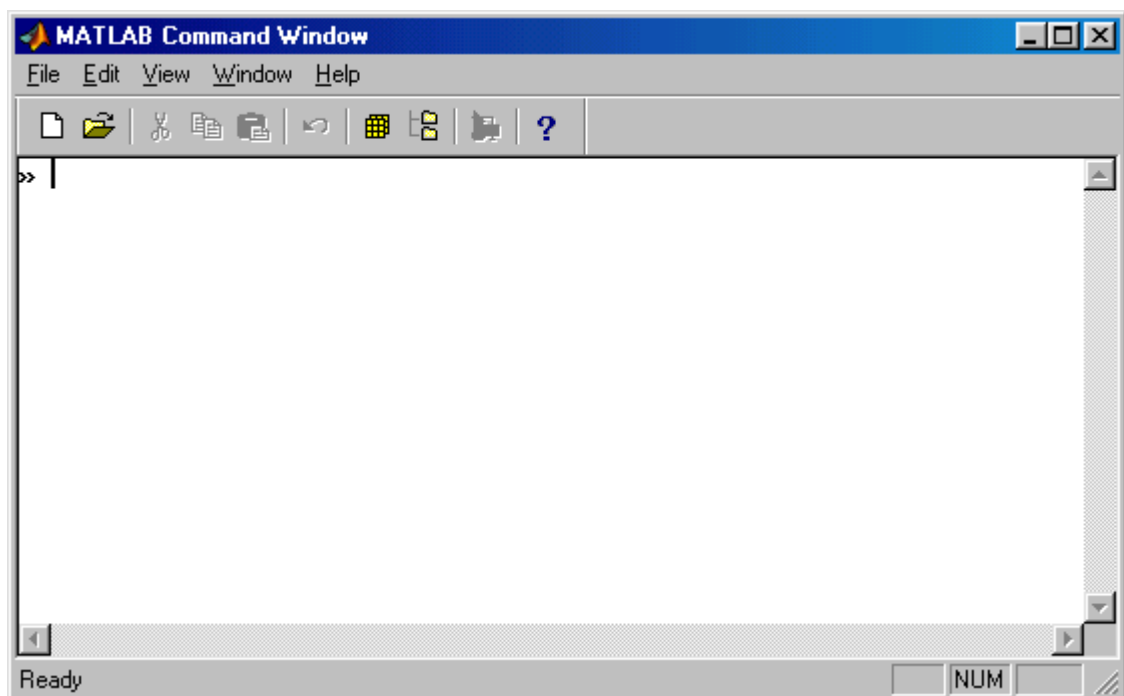


Figura 23 – Tela do ambiente MATLAB.

O sistema MATLAB é constituído pela linguagem, a qual permite a manipulação e criação de matrizes de forma rápida e intuitiva, possuindo um conjunto muito vasto de funções que permitem resolver problemas complexos de forma eficiente.

Na figura 24 pode-se visualizar o editor do ambiente MATLAB, este ambiente de trabalho permite a gestão e visualização das variáveis, leitura e gravação das

mesmas em disco, gerando programas em linguagem MATLAB, possibilitando assim a automatização de cálculos complexos.

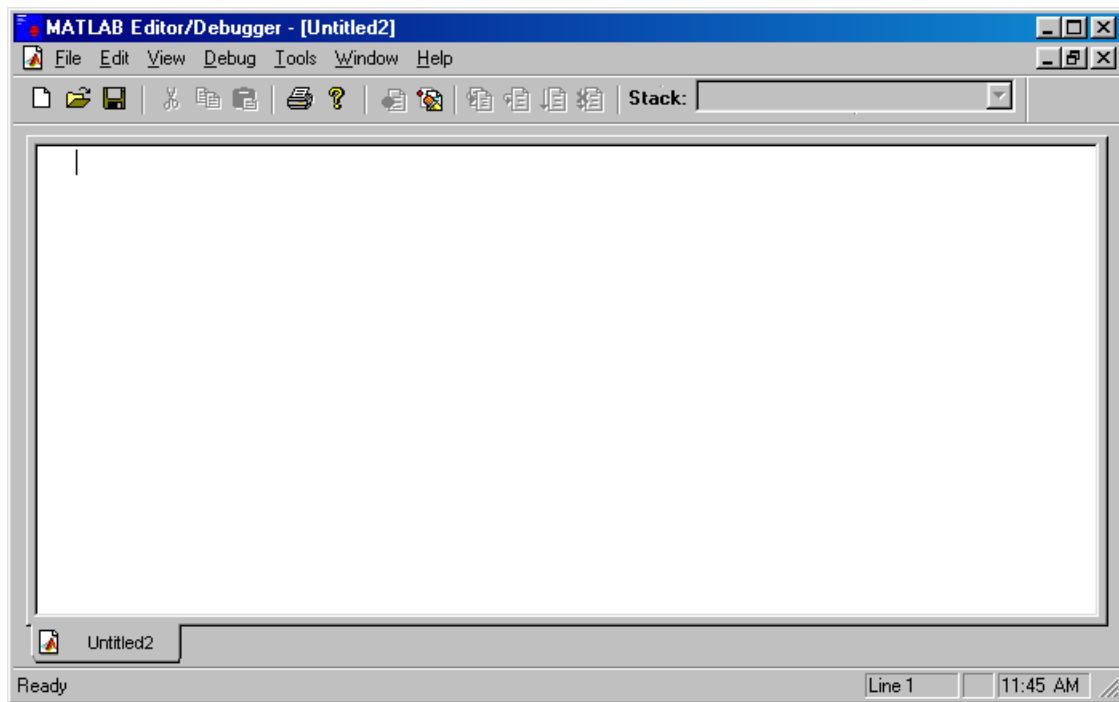


Figura 24 – Tela do editor do ambiente MATLAB

O ambiente MATLAB possui um recurso gráfico, onde a criação, visualização e manipulação dos mesmos são de fácil utilização. E, ainda possui as *Toolboxes* que são constituídas por um conjunto de pacotes de funções para as mais variadas áreas de cálculo científico. As *Toolboxes* podem ser utilizadas em processamento de sinal, sistema de simulação dinâmico, sistema de identificação, redes neurais, processamento digital de imagens e outros.

Nesta dissertação, o MATLAB foi utilizado como plataforma para a *Toolbox* de Morfologia Matemática da *SDC Information Systems* a qual manipula e trata imagens por processos morfológicos através de realce, segmentação, detecção de bordas, esqueletização, tratamento visual, análise de formas, entre outros operadores da polivalente ferramenta morfológica (*SDC Morphology Toolbox for MATLAB 5*, 2002) .

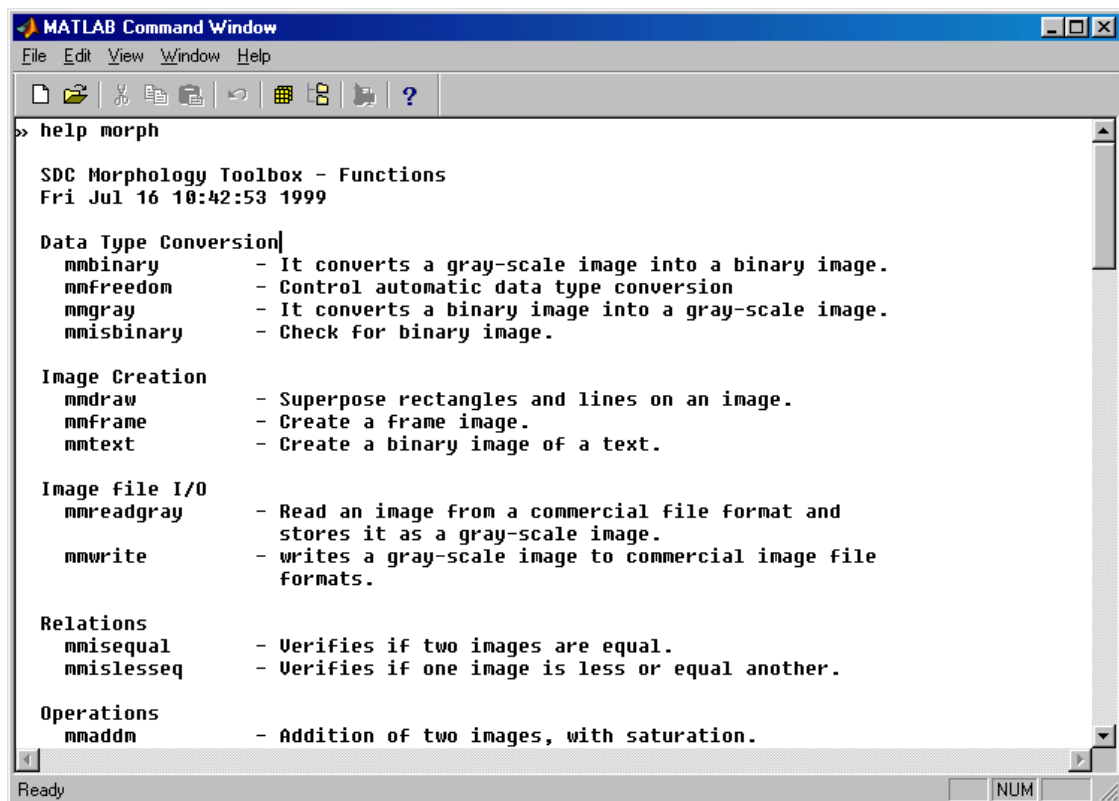


Figura 25 – Tela da *Toolbox* da Morfologia Matemática

A *Toolbox* da Morfologia Matemática ilustrada na figura 25, encontra-se no item geral (*General*) do MATLAB. Para verificar seus componentes basta digitar no visor o comando de ajuda morfológica (*help morph*) após a linha de comando ativo (prompt “>>”), e assim verificar todos os operadores morfológicos.

3.2 Imagens teste utilizadas

No desenvolvimento desta dissertação foram utilizadas imagens Landsat TM.

▪ **Imagens LANDSAT TM**

Segundo Novo (1989), um sistema sensor pode ser definido como qualquer equipamento capaz de transformar alguma forma de energia em um sinal passível de ser convertido em informação sobre o ambiente. No caso específico de Sensoriamento Remoto, a energia utilizada é a radiação eletromagnética e a imagem obtida é gerada à distância.

Os diferentes sistemas sensores são caracterizados por sua resolução, onde o termo resolução é definido como a medida de habilidade que um sistema sensor possui de distinguir entre respostas que são semelhantes espectralmente ou próximas espacialmente e pode ser classificado em resoluções espacial, espectral, radiométrica e temporal.

As imagens teste utilizadas na dissertação foram:

- A sub-imagem³ contendo o Aeroporto Internacional Antônio Carlos Jobim (RJ) representada na figura 26, foi escolhida por apresentar uma multiplicidade de bordas e fronteiras que delineiam as pistas do aeroporto, as quais representam as feições cartográficas de interesse. A imagem é do Landsat 5 – TM, resolução de 30 metros, banda 3, datada de 01/08/1987.

³ – O termo sub-imagem refere-se a uma parte da imagem original.



Figura 26 – Sub-imagem do Aeroporto Internacional Antônio Carlos Jobim (RJ).

A sub-imagem contendo a região de Presidente Prudente (figura 27), contém uma avenida construída recentemente que não consta da carta do município, esse fato torna extremamente relevante a detecção dessa feição para posterior atualização cartográfica. Essa sub-imagem é do Landsat 7 – ETM, resolução de 30 metros, banda 3, datada de 22/08/2000.

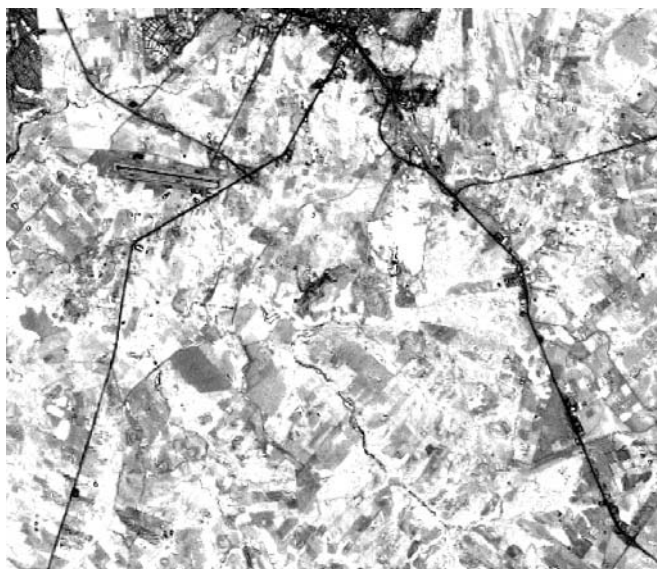


Figura 27 – Sub-imagem da região de Presidente Prudente (SP).

Tais imagens foram escolhidas por estarem disponíveis no banco de imagens da FCT/UNESP de Presidente Prudente.

3.3 Discretização dos termos presentes no modelo de EDP

Como já descrito no capítulo 2, foi utilizado o método de diferenças finitas para discretizar os termos presentes no modelo de EDP dada por:

$$u_t = g |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \lambda(1-g)(u-I), \quad (49)$$

Para explicitar a evolução temporal que está presente no modelo, deve-se ressaltar que essa evolução se caracteriza por um processo iterativo. Assim, para a derivada de u com relação ao tempo, foi utilizado neste caso o operador de diferenças avançadas no tempo, conforme segue:

$$u_t \cong \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (50)$$

onde: $u_{i,j}^{n+1}$ representa a imagem no estágio de tempo $n+1$, onde $n = 1, 2, \dots, N$.

$u_{i,j}^n$ representa a imagem no estágio de tempo n ;

Δt representa o tamanho do passo da evolução temporal.

Tomando, $L(u) = g \|\nabla u\| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) - \lambda(1-g)(u-I)$, e

$u_t = L(u_{i,j}^n)$, tem-se:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = L(u_{i,j}^n) \Rightarrow u_{i,j}^{n+1} = \Delta t L(u_{i,j}^n) + u_{i,j}^n \quad (51)$$

O método de discretização da derivada com relação ao tempo dado em (50) está associado com o esquema numérico correspondente ao método explícito.

A função $g(\|\nabla G_\sigma * u\|)$, utilizada no modelo, tem na sua formulação o produto de convolução. Neste caso para convoluir a função u com o núcleo Gaussiano, utilizou-se o produto de convolução por extensão constante. E, como já descrito no capítulo 2, a convolução é uma forma importante de processar uma imagem, na qual o processo ocorre entre uma imagem $f(a,b)$ com o núcleo $h(a,b)$, representada por $f * h$ definida no pixel de coordenadas (x,y) que é dada por:

$$(f * h)(x,y) = \sum_{a=0}^{m-1} \sum_{b=0}^{n-1} f(a,b)h(x-a,y-b) \quad (52)$$

com $0 < m \leq M$ e $0 < n < N$.

Os valores inteiros m e n correspondem ao subdomínio discreto de pontos ou máscara a qual é utilizada para calcular a convolução. A figura (28) ilustra o núcleo de convolução com a máscara (3x3) centrada no ponto em destaque.

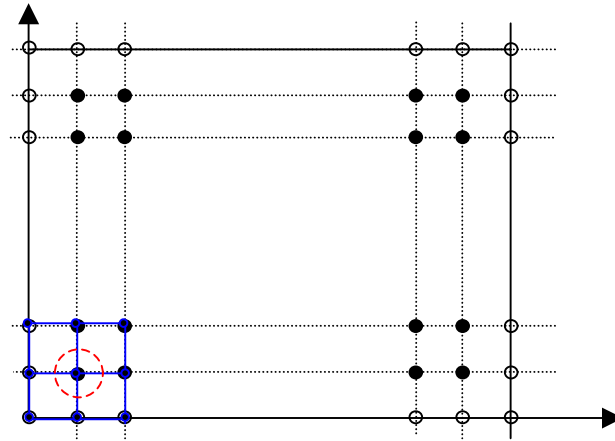


Figura 28 - Núcleo de convolução com a máscara (3x3) centrada no ponto $u_{i,j}$ em destaque.

Para calcular o produto de convolução, foi utilizada nesta dissertação, a regra de Simpson para o cálculo das integrais. Mas inicialmente é importante destacar que o produto de convolução é utilizado para encontrar uma média ponderada de valores em uma vizinhança de um determinado pixel. Iório (1991) define a convolução de duas funções f e $g \in SC_{per}(2l)$, o espaço das funções seccionalmente periódicas de período $2l$, considerando $l=1$, como a função $f * g : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(y)g(x-y)dy \quad (53)$$

A convolução das funções f e g é calculada em uma vizinhança (3x3) do ponto $u_{i,j}$.

Assim, a partir do cálculo da integral dada por:

$$(f * g)(x_i, y_j) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x_i - x, y_j - y)g(x, y)dx dy \quad (54)$$

Pode-se avaliar essas integrais, utilizando a regra de Simpson. Tomando uma função $f(x)$ e num intervalo $[a,b]$ os pontos $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ e $x_2 = b$, onde $f(x_0), f(x_1)$ e $f(x_2)$ são conhecidos, a regra de Simpson para a aproximação da integral $\int_a^b f(x)dx$ é dada por:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \left(\frac{h^5}{90}\right)f^{(4)}(\beta), \quad x_0 < \beta < x_2, \quad (55)$$

onde, $-\left(\frac{h^5}{90}\right)f^{(4)}(\beta)$ representa o erro cometido na aproximação.

Assim, a partir da integral dupla dada em (54), tem-se:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x_i - x, y_j - y)g(x, y)dx \quad (56)$$

$$\text{e } I_2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_1 dy \quad (57)$$

Utilizando a regra de Simpson dada em (55) para calcular o valor das integrais dadas em (56) e (57), respectivamente, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{36} [f(1,1)g(x_{i-1}, y_{j-1}) + 4f(0,1)g(x_i, y_{j-1}) + f(-1,1)g(x_{i+1}, y_{j-1}) + 4f(1,0)g(x_{i-1}, y_j) \\ & + 16f(0,0)g(x_i, y_j) + 4f(-1,0)g(x_{i+1}, y_j) + f(1,-1)g(x_{i-1}, y_{j+1}) + 4f(0,-1)g(x_i, y_{j+1}) \\ & + f(-1,-1)g(x_{i+1}, y_{j+1})] \end{aligned} \quad (58)$$

e:

$$\begin{aligned} f(x_i, y_j) &= G_\sigma(x_i, y_j) \\ g(x_i, y_j) &= u(x_i, y_j) = u_{i,j} \end{aligned} \quad (59)$$

A partir das considerações feitas em (59), a expressão numérica dada em (58) é reescrita da forma:

$$\begin{aligned} (G_\sigma * u)(i, j) &= \frac{1}{36} \{ G_\sigma(1,1)u_{i-1,j-1} + G_\sigma(-1,1)u_{i+1,j-1} + G_\sigma(1,-1)u_{i-1,j+1} \\ &+ G_\sigma(-1,-1)u_{i+1,j+1} + 16G_\sigma(0,0)u_{i,j} + 4[G_\sigma(0,1)u_{i,j-1} + G_\sigma(1,0)u_{i-1,j} \\ &+ G_\sigma(-1,0)u_{i+1,j} + G_\sigma(0,-1)u_{i,j+1} \} \end{aligned} \quad (60)$$

Utilizando a forma “conv” (de convolução) para a expressão (60), $conv(i, j) = (G_\sigma * u)(i, j)$, e o operador de diferenças centradas para o cálculo das derivadas de primeira ordem de conv, já descrito no capítulo 2, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial conv(i, j)}{\partial x} &\cong \frac{conv_{i+1,j} - conv_{i-1,j}}{2} = c_1 \\ \frac{\partial conv(i, j)}{\partial y} &\cong \frac{conv_{i,j+1} - conv_{i,j-1}}{2} = c_2 \end{aligned} \quad (61)$$

Dessa forma, é obtida a expressão $\nabla(G_\sigma * u) = \left(\frac{\partial conv}{\partial x}, \frac{\partial conv}{\partial y} \right)$.

Finalizando o processo a expressão acima é dada por:

$$|\nabla(G_\sigma * u)| = \left[\left(\frac{\partial G_\sigma * u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial G_\sigma * u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow |\nabla(G_\sigma * u)|^2 = c_1^2 + c_2^2 \quad (62)$$

O resultado obtido em (62) é utilizado na função g , dada por:

$$g(|\nabla G_\sigma * u|) = \frac{1}{1 + k |c_1^2 + c_2^2|^2}, \quad k \text{ constante.}$$

O termo de difusão dado por $|\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$, foi discretizado a partir dos operadores de diferenças finitas, descritos anteriormente no capítulo 2. Após o desenvolvimento dos termos presentes na expressão, tem-se:

$$|\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \frac{u_x^2 u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{xx}}{u_x^2 + u_y^2} \quad (63)$$

Utilizando os operadores de diferenças finitas, tem-se:

$$\begin{aligned}
|\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \Big|_{i,j} &\equiv \frac{\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2} \right)^2 (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1})}{\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2} \right)^2 + \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2} \right)^2} \\
&- \frac{2 \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2} \right) \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2} \right) \left(\frac{u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{4} \right)}{\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2} \right)^2 + \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2} \right)^2} \\
&+ \frac{\left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2} \right)^2 (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})}{\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2} \right)^2 + \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2} \right)^2}
\end{aligned} \tag{64}$$

É importante salientar que foram utilizadas condições de contorno de Neumann $\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \right)$, ressaltando que nas regiões de contorno não há pontos suficientes para a utilização da fórmula de diferenças centradas. Logo, foram utilizados os operadores de diferenças avançadas e atrasadas para os pontos existentes nessas regiões.

De posse dos termos já discretizados, é possível implementar a equação diferencial parcial como segue:

$$u_{i,j}^{n+1} = \Delta t \, L(u_{i,j}^n) + u_{i,j}^n \tag{65}$$

Após a aplicação do modelo de EDP dado pela equação (65), é realizada a segunda etapa do processo que consiste na segmentação da imagem processada. A função utilizada para a segmentação é dada por:

$$g(|\nabla|) = \frac{1}{1 + k |\nabla|^2} \quad (66)$$

A função (66) foi discretizada utilizando as fórmulas de diferenças finitas centradas em x e y . Os resultados obtidos com o modelo de EDP dado pela equação (65) e a segmentação dada pela função (66) são apresentados no capítulo 4.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados apresentados neste capítulo foram obtidos a partir da aplicação do modelo de EDP, do Gradiente Morfológico por erosão e dilatação e, o operador de Sobel em imagens orbitais. O modelo de EDP e o operador de Sobel foram implementados no software MATLAB e o Gradiente Morfológico foi obtido a partir da *Toolbox* da Morfologia Matemática contida no ambiente MATLAB.

O modelo de EDP implementado corresponde a equação:

$$L(u) = g(|\nabla u|) \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \lambda(1 - g)(u - I)$$

$$u_{i,j}^{n+1} = \Delta t L(u_{i,j}^n) + u_{i,j}^n$$

A imagem obtida a partir desse resultado, é segmentada através do detetor de bordas dado por:

$$g(|\nabla u|) = \frac{1}{1 + k |\nabla u|^2}$$

Nos testes realizados com a aplicação do modelo de EDPs na sub-imagem referente ao Aeroporto Internacional Antônio Carlos Jobim (RJ) foram utilizados os seguintes parâmetros:

T_0 - corresponde ao total de iterações realizadas;

σ_r e λ - valores estimados que dependem da quantidade de informações irrelevantes contida na imagem;

Δt - tamanho do passo da evolução temporal;

k - variável estimada;

a - constante presente na função Gaussiana;

k_{seg} - constante presente no detetor de bordas.

A escolha dos valores de σ_r levam em conta a distribuição média dos valores dos níveis de cinza presentes na imagem, fato observado através do histograma da imagem, onde é possível verificar o desvio padrão de uma imagem e a partir deste dado estimar o valor de σ_r .

A figura 29 representa o histograma da sub-imagem do aeroporto do Rio de Janeiro. Através do desvio padrão da imagem dado por $\sigma_r = 23.1$, foi possível estimar valores aproximados para σ_r (tabela 1), obtendo a partir desses parâmetros níveis adequados de segmentação após aplicação do modelo de EDP.

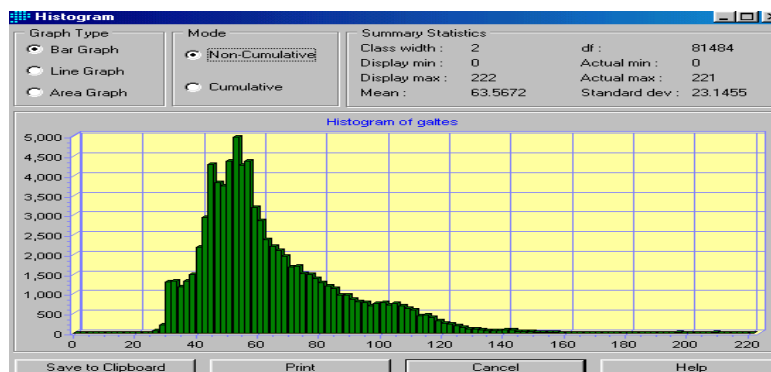


Figura 29 – Histograma da sub-imagem do Rio de Janeiro

A tabela 1 apresenta os parâmetros utilizados para a sub-imagem do Rio de Janeiro.

Tabela 1 – Parâmetros utilizados no modelo de EDP.

Imagens	Parâmetros						
	T_0	σ_r	λ	Δt	k	a	kS_{eg}
1- c , d	11	15	15	0.2	706.8	100	0.001
2 – e , f	45	30	30	0.2	2827.4	100	0.001
3 – g , h	122.5	35	35	0.1	1924.2	100	0.001

A figura 30 apresenta o procedimento metodológico utilizado para a sub-imagem do Rio de Janeiro, neste caso a coluna esquerda da figura apresenta a imagem original em 30 (a) e as imagens 30 (c), 30 (e) e 30 (g) com $\sigma_r = 15, 30$ e 35

respectivamente, a coluna direita apresenta os resultados obtidos do processo de segmentação a partir das imagens da coluna esquerda.

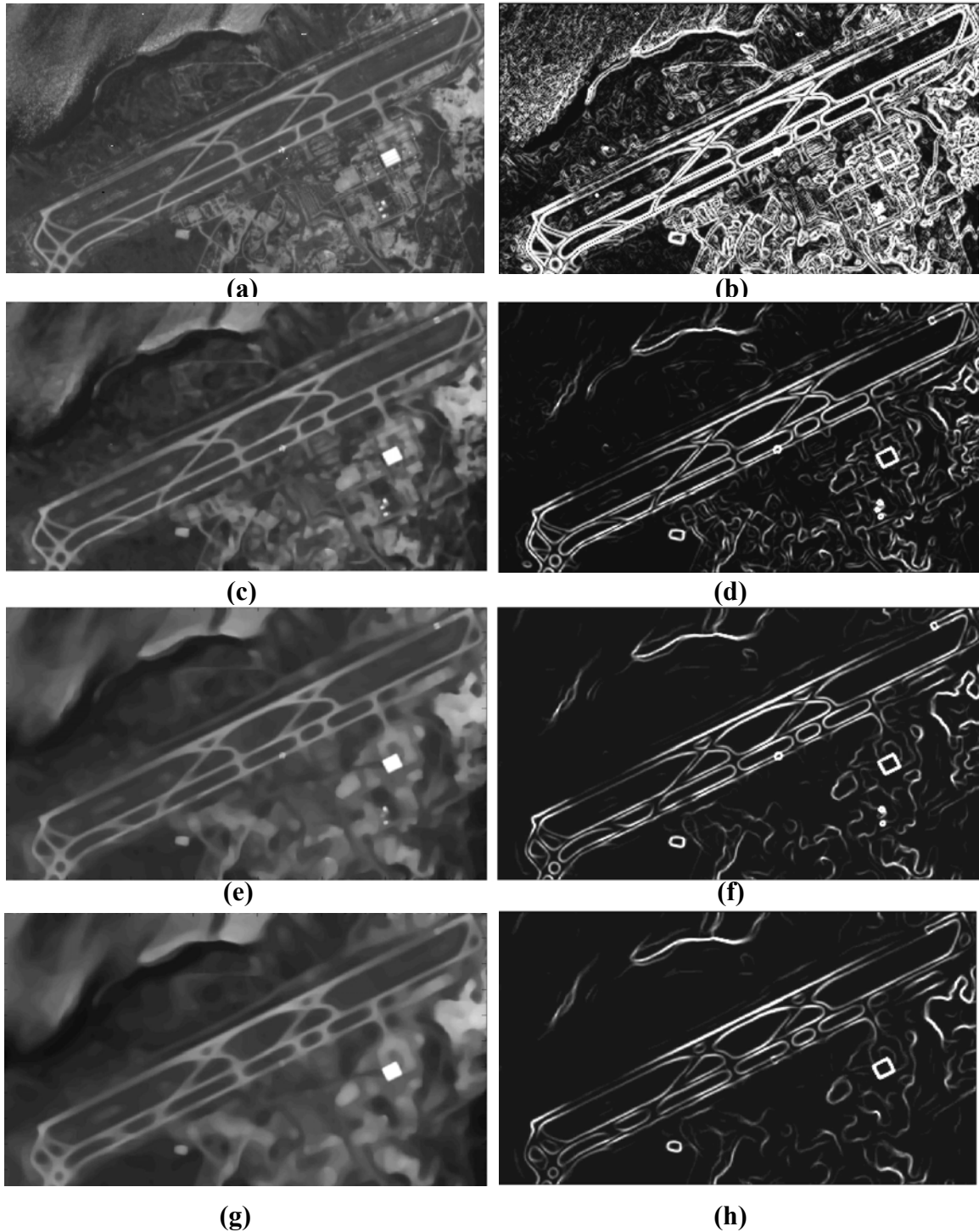


Figura 30 - (a) Imagem original e (b) sua segmentação, (c) e (d) imagem com $\sigma_r = 15$ e sua segmentação, (e) e (f) imagem com $\sigma_r = 30$ e sua segmentação, (g) e (h) imagem com $\sigma_r = 35$ e sua segmentação.

A figura 30 (a) ilustra a imagem original e sua respectiva segmentação 30 (b); neste caso observa-se uma excessiva segmentação da imagem. Na imagem ilustrada em 30 (c) pode-se observar o produto da aplicação do modelo de EDP e 30 (d) sua respectiva segmentação. Nesta imagem é possível perceber o efeito positivo da aplicação do modelo, uma vez que o resultado obtido tem menor nível de segmentação em comparação ao resultado obtido em 30 (b). Os resultados obtidos em 30 (f) e 30 (h), utilizando a imagem original com $\sigma_r = 30$, e $\sigma_r = 35$ respectivamente, apresentam melhorias significativas da diminuição da segmentação. Em 30 (f), percebe-se claramente esta diminuição em relação a 30 (d) em toda a imagem, facilitando a identificação das pistas. Em 30 (h), visualmente, o resultado obtido foi ainda melhor, onde a segmentação presente pode ser considerada mínima.

Na seqüência o mesmo procedimento metodológico utilizado para a sub-imagem do Rio de Janeiro foi seguido para a sub-imagem de Presidente Prudente. A figura 31 apresenta o histograma da imagem de Presidente Prudente, após a realização de um contraste na imagem. Neste caso o desvio padrão obtido não foi utilizado como estimativa para o σ_r presente no modelo de EDP.

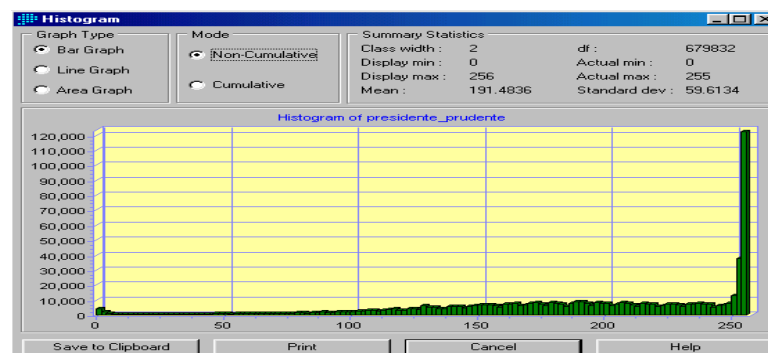


Figura 31 – Histograma da sub-imagem de Presidente Prudente (após realização de contraste na imagem).

A figura 32 apresenta o histograma da imagem original de Presidente Prudente (banda 3), neste caso o desvio padrão obtido foi utilizado como estimativa para a escolha dos σ_r constantes da tabela 2.

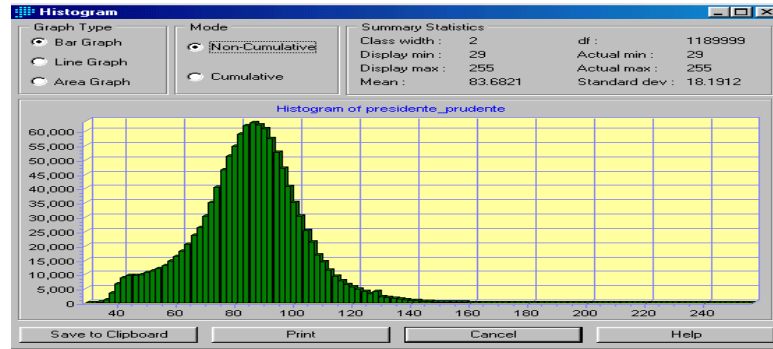


Figura 32 – Histograma da imagem de Presidente Prudente (sem contraste).

A tabela 2 apresenta os parâmetros utilizados no modelo de EDP e na segmentação da imagem, respectivamente.

Tabela 2 – Parâmetros utilizados no modelo de EDP.

Imagens	Parâmetros						
	T_0	σ_r	λ	Δt	k	a	ks_{eg}
1 - c e d	11	15	15	0.2	706.8	100	0.001
2 – e e f	32	17.9	17.9	0.1	503.2	100	0.001
3 – g e h	36	19	19	0.1	567.1	100	0.001

A figura 33 apresenta todos os processamentos realizados sobre a sub-imagem da região de Presidente Prudente, sendo que na coluna esquerda da referida imagem tem-se: em 33 (a) a imagem original e em 33 (c), 33 (e) e 33 (g) a imagem processada pelo modelo de EDP com $\sigma_r=15$, $\sigma_r=17.9$, $\sigma_r=19$, respectivamente, e a coluna direita apresenta os resultados obtidos da segmentação das imagens à esquerda.

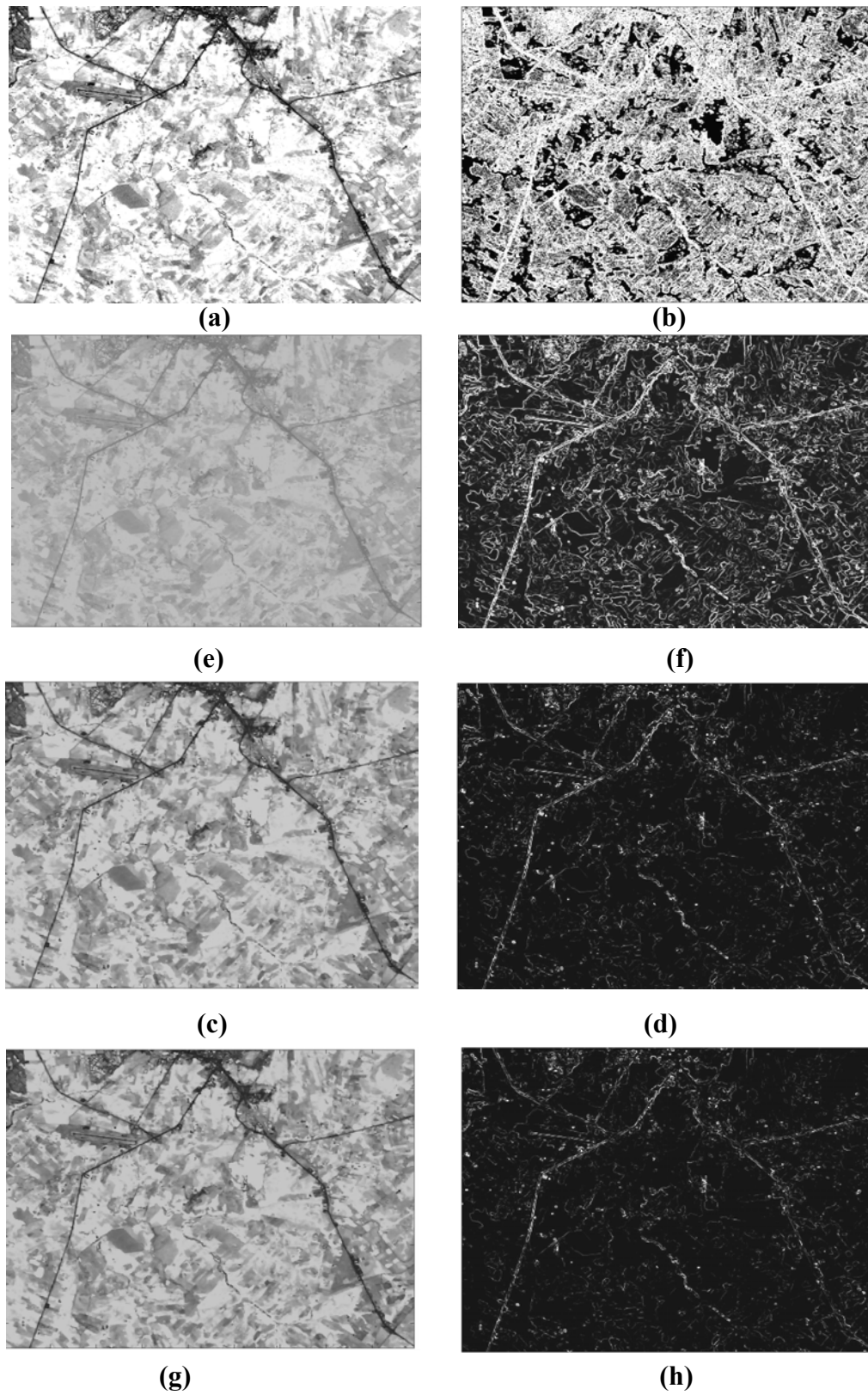


Figura 33 – (a) Imagem original e (b) sua segmentação, (c) e (d) imagem com $\sigma_r = 15$ e sua segmentação, (e) e (f) imagem com $\sigma_r = 17.9$ e sua segmentação, (g) e (h) imagem com $\sigma_r = 19$ e sua segmentação.

A figura 33 (a) apresenta grande variabilidade nos valores de níveis de cinza dos alvos presentes na cena, tornando mais difícil a obtenção de uma boa segmentação. A figura 33 (a) representa a imagem original e 33 (b) sua respectiva segmentação, a partir das figuras subsequentes é possível observar as imagens após a aplicação do modelo de EDP e suas respectivas segmentações. Nestas imagens, com a mudança de parâmetros ocorre o efeito de suavização seletiva e detecção de bordas, sendo que a figura 33 (h) possui consequentemente menor nível de segmentação em relação aos resultados da figura 33 (d) e 33 (f), diminuindo boa parte das informações irrelevantes e principalmente mantendo as regiões de interesse (avenidas).

As imagens de Sensoriamento Remoto apresentam grande variabilidade interna nos valores dos níveis de cinza presentes na cena. Isto decorre do fato de alvos diferentes estarem contidos numa mesma imagem. As duas imagens teste são de áreas com presença de alvos diferentes. Isto faz com que os parâmetros utilizados em cada uma das imagens, sejam também diferentes.

O operador de Sobel corresponde a aplicação simultânea dos operadores G_x na direção horizontal e G_y na direção vertical, resultando na imagem completa do operador. O resultado obtido para a sub-imagem do Rio de Janeiro é o apresentado na figura 34 e, na figura 35 está o resultado para a sub-imagem de Presidente Prudente.

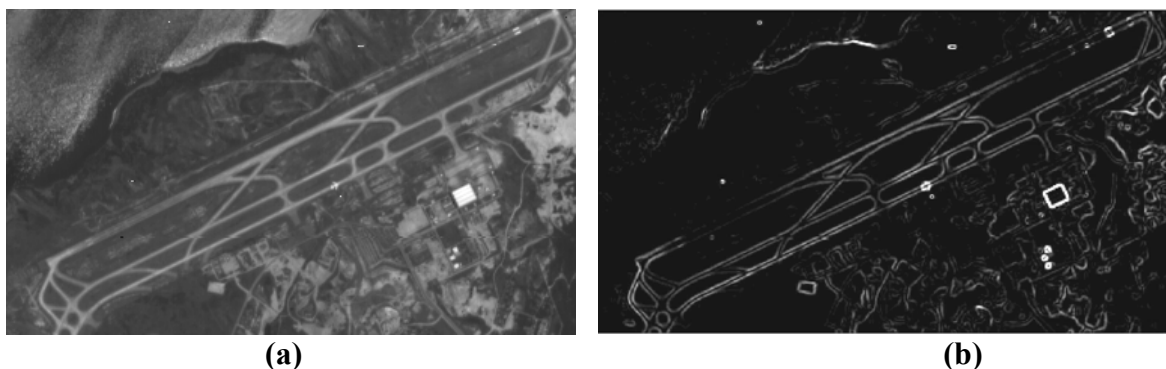


Figura 34 – (a) Imagem original, (b) resultado da aplicação do operador de Sobel.

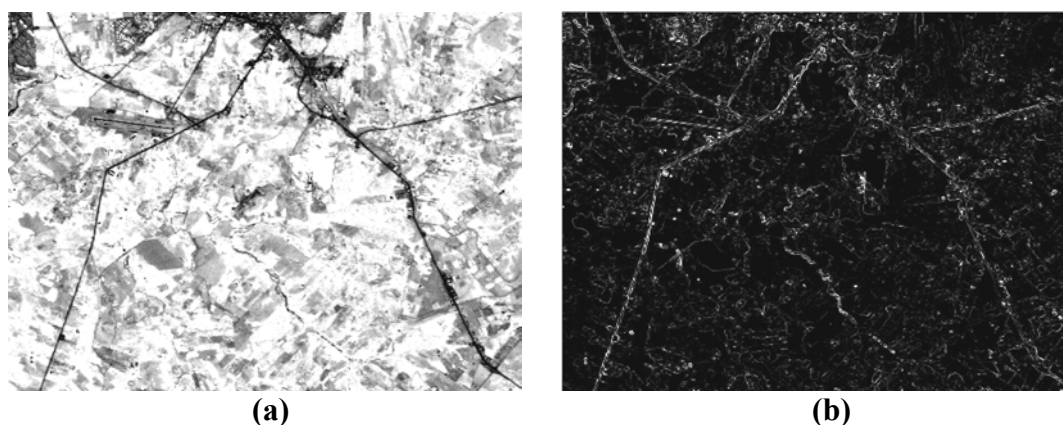


Figura 35 – (a) Imagem original, (b) resultado da aplicação do operador de Sobel.

Da análise da figura 34 (b) conclui-se que há um nível elevado de segmentação e há partes das pistas onde o nível de brilho se confunde com o valor de fundo prejudicando a visualização completa da feição. Na figura 35 (b) é possível identificar as pistas rodoviárias com boa definição, apesar da segmentação ser grande.

O Gradiente Morfológico por dilatação e erosão a partir dos elementos estruturante cruz e *box* 3x3 respectivamente, foi aplicado sobre as imagens teste. Na figura 36 os resultados obtidos são da sub-imagem do Rio de Janeiro e na figura 37 correspondem a sub-imagem da região de Presidente Prudente.

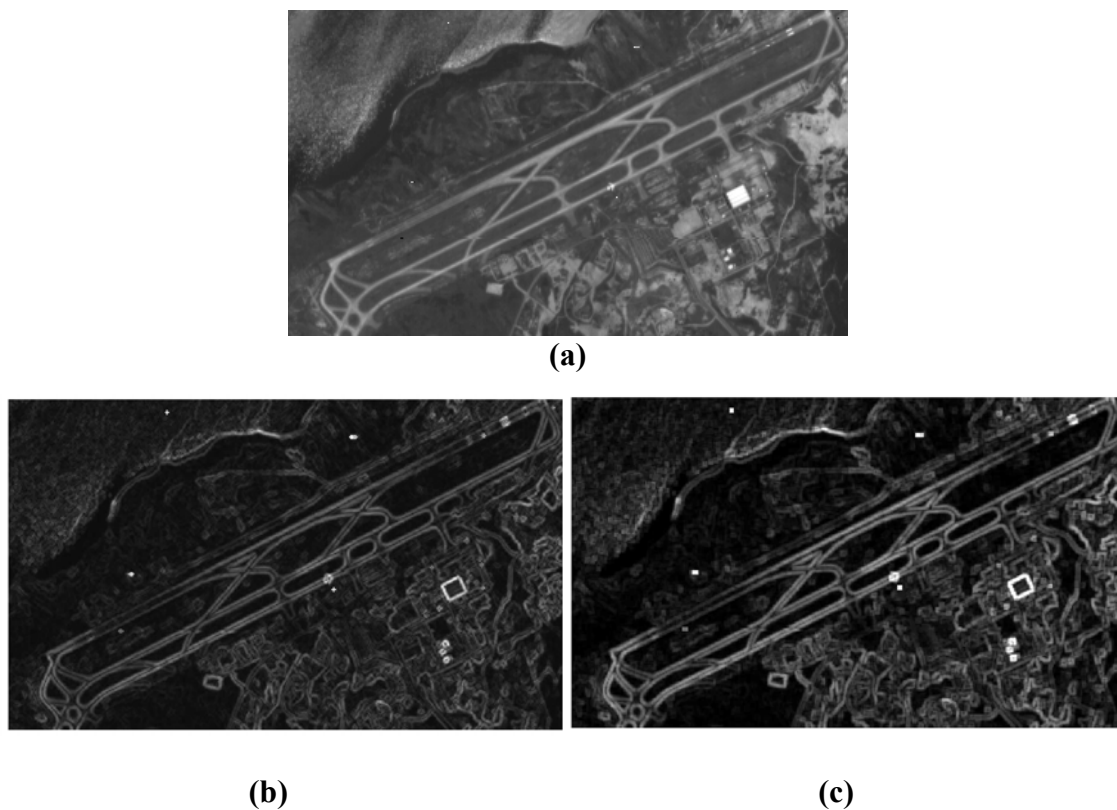


Figura 36 – (a) Imagem original, (b) aplicação do Gradiente Morfológico a partir do elemento estruturante cruz 3x3, (c) aplicação do Gradiente Morfológico a partir do elemento estruturante *box* 3x3.

O resultado obtido em 36 (b) usando o elemento estruturante cruz 3x3 mostra-se com pior desempenho visual em relação ao elemento estruturante *box* 3x3 apresentado em 36 (c). Ambos apresentam alto nível de segmentação, mas o resultado em 36 (c) apresenta as pistas com melhor definição visual.

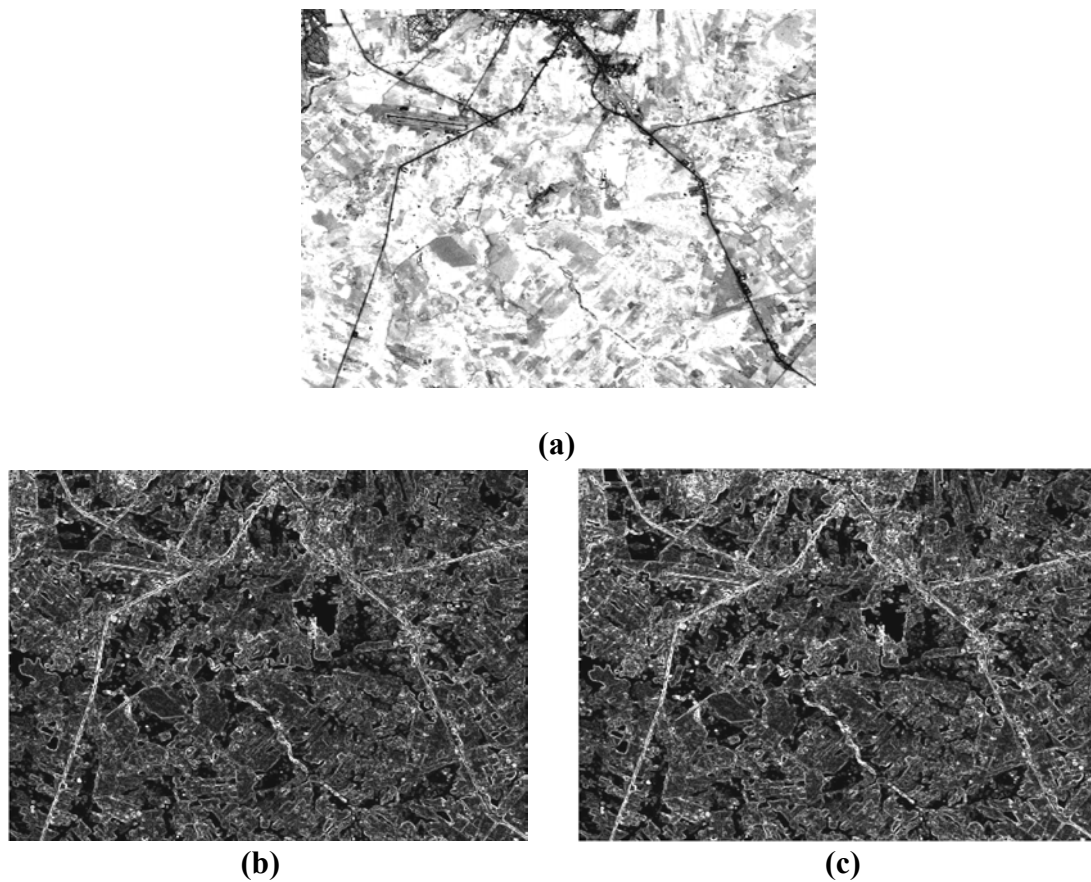


Figura 37 – (a) Imagem original, (b) aplicação do Gradiente Morfológico a partir do elemento estruturante cruz 3x3, (c) aplicação do Gradiente Morfológico a partir do elemento estruturante *box* 3x3.

Os resultados obtidos em 37 (b) e 37 (c) não possuem diferenças significativas, mesmo com a mudança do elemento estruturante. Nesses resultados, percebe-se claramente segmentação excessiva.

A figura 38 apresenta os resultados comparativos entre os testes efetuados para a sub-imagem do Rio de Janeiro.

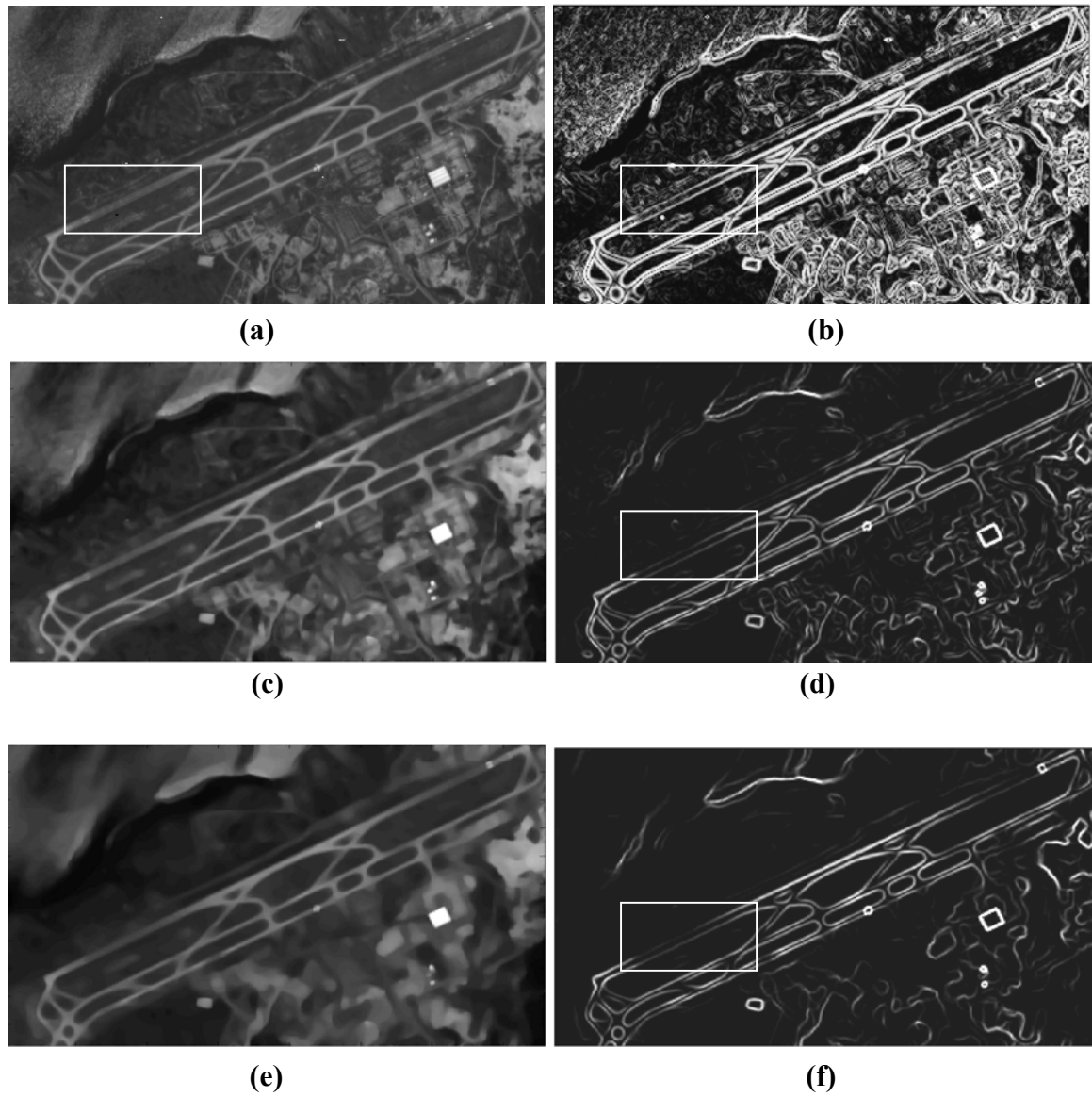
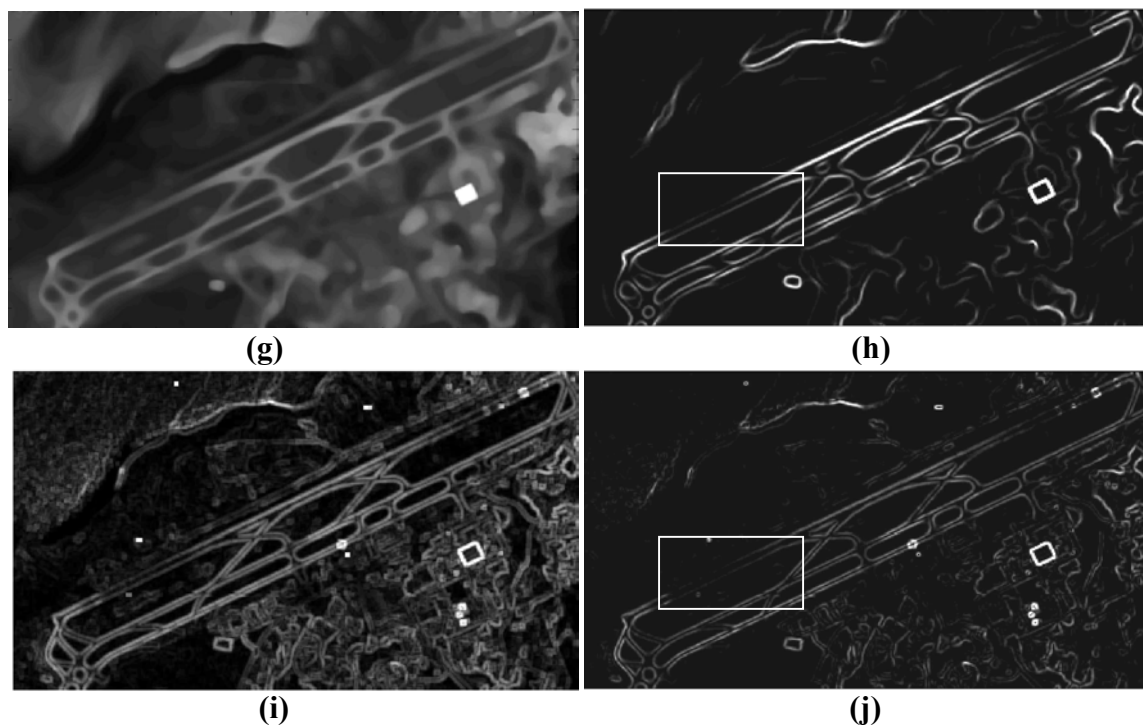


Figura 38- Teste comparativo para o modelo de EDP com parâmetros dados na tabela 1, (a) imagem original e (b) sua segmentação, (c) aplicação do parâmetro $\sigma_r=15$ (d) sua segmentação, (e) aplicação do parâmetro $\sigma_r=30$, (f) sua segmentação,



Cont. Figura 38- Teste comparativo para o modelo de EDP com parâmetros dados na tabela 1, (g) aplicação do parâmetro $\sigma_r=35$, (h) sua segmentação, (i) gradiente morfológico a partir do elemento estruturante *box* 3x3, (j) operador de Sobel.

Da análise da figura 38, em relação ao modelo de EDP, considerando os parâmetros fornecidos respectivamente na tabela 1, pode-se concluir que os melhores resultados referem-se a figura 38 (h) em relação aos outros resultados; neste caso a quantidade de segmentação é relativamente baixa e a estrutura da pista não sofre alteração no nível de brilho, fato observado com a aplicação do operador de Sobel figura 38 (j), onde parte da pista tem o nível de brilho confundido com o valor de fundo, dificultando a visualização das pistas. Na figura 38 (d) o modelo de EDP foi implementado com parâmetros que resultam em resultados inferiores aos resultados comparativos em relação à segmentação obtida na figura 38 (f). No entanto, quando o tempo de evolução aumenta, conforme resultado na figura 38 (h), visualmente, tem-se uma melhor performance do modelo em relação aos outros operadores. O

Gradiente Morfológico e o operador de Sobel produz segmentação excessiva de acordo com resultados apresentados nas figuras 38 (i) e 38 (j), neste caso a evolução temporal e a alteração em busca de parâmetros adequados tornam o modelo de EDP mais adequado para os propósitos cartográficos, ou seja, eliminação de informações indesejadas mantendo as pistas, feições de interesse, devidamente segmentadas.

A figura 39 representa a comparação entre o modelo de EDP para a sub-imagem da região de Presidente Prudente (SP), o operador de Sobel e o Gradiente Morfológico a partir do elemento estruturante *box* 3x3.

As imagens da coluna esquerda representam em 39 (a) a imagem original e em 39 (c), 39 (e) e 39 (g) respectivamente as imagens processadas pelo modelo de EDP, e em 39 (i) a imagem resultante da aplicação do Gradiente Morfológico. A coluna direita da imagem representa em 39 (b) a segmentação da imagem original e em 39 (d), 39 (f) e 39 (h) as respectivas segmentações relativas às imagens da coluna esquerda, em 39 (j) a imagem após aplicação do operador de Sobel.

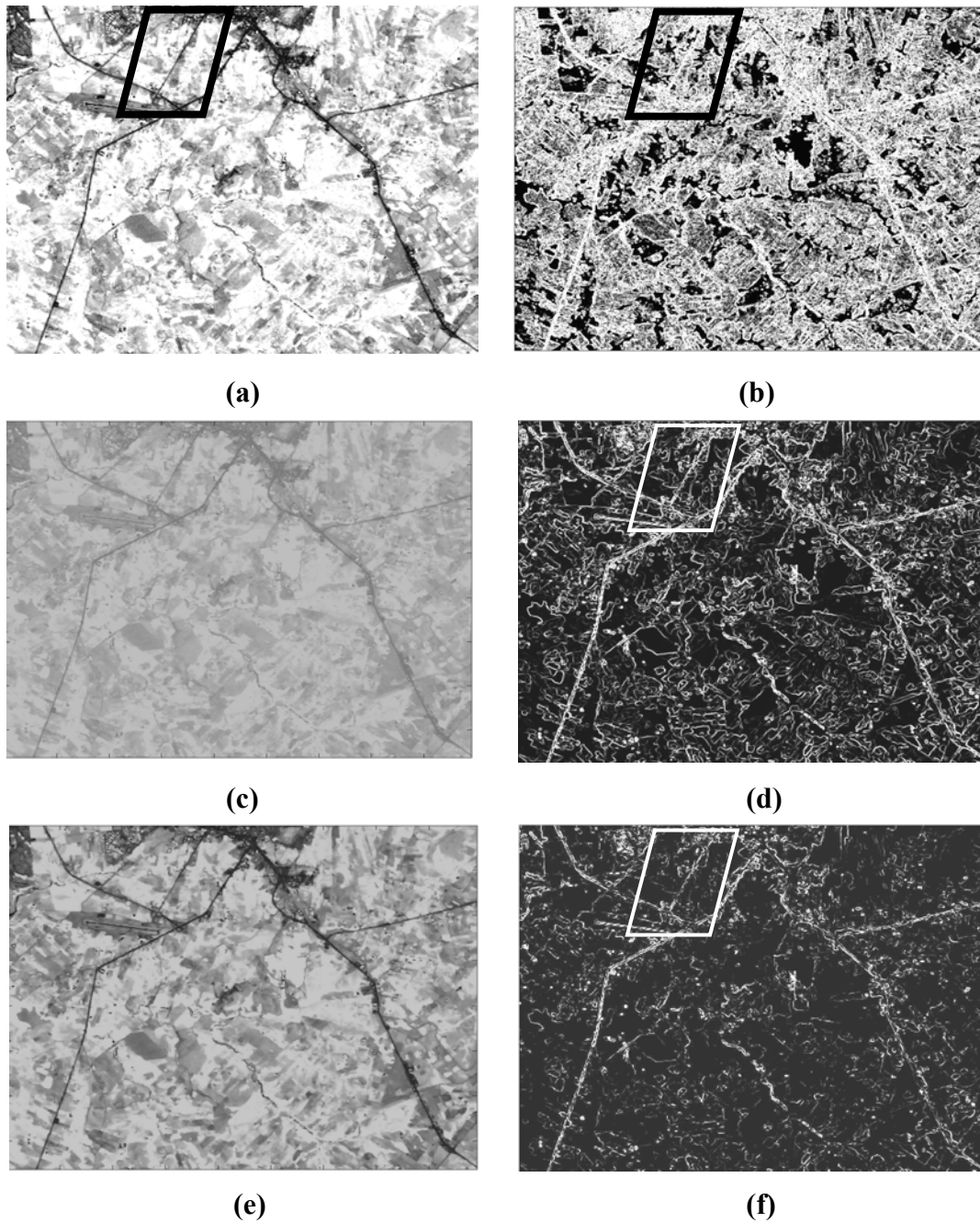
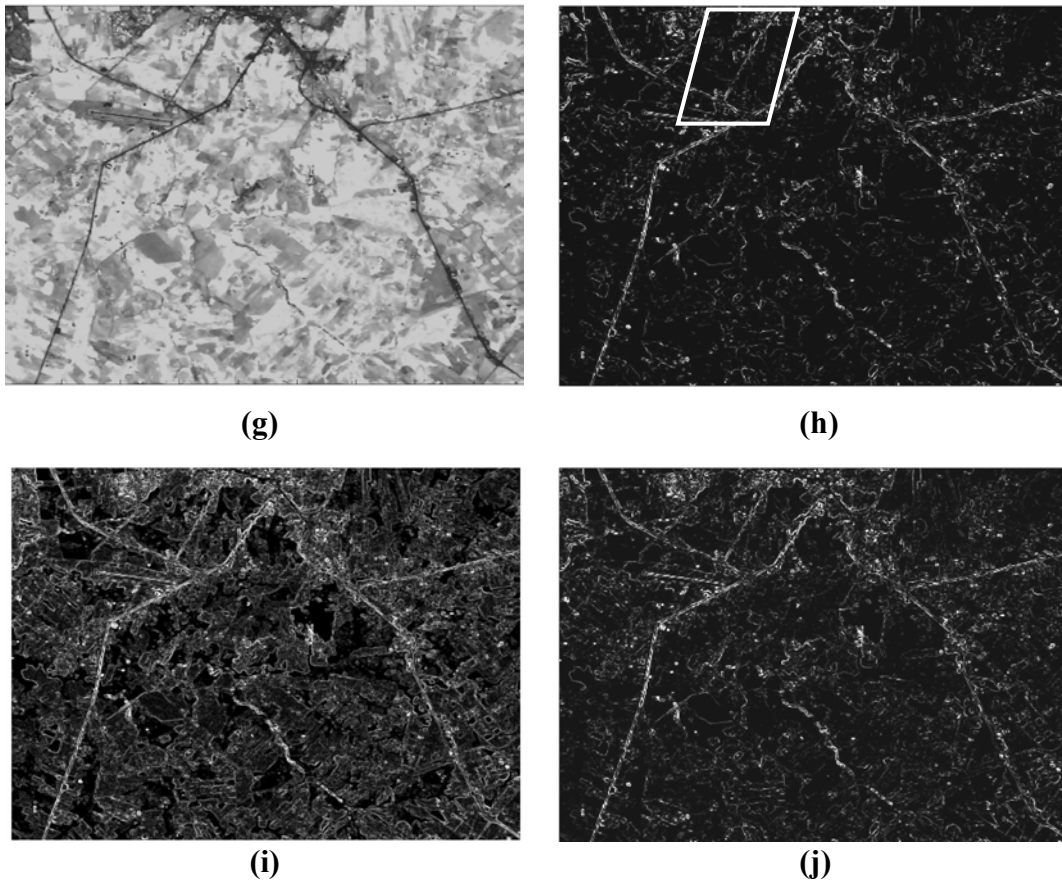


Figura 39 - Teste comparativo para o modelo de EDP com parâmetros dados na tabela 2, (a) imagem original e (b) sua segmentação, (c) aplicação dos parâmetros $\sigma_r=15$ (d) sua segmentação, (e) aplicação dos parâmetros $\sigma_r=17.9$, (f) sua segmentação,



Cont. Figura 39 - Teste comparativo para o modelo de EDP com parâmetros dados na tabela 2, (g) aplicação dos parâmetros $\sigma_r=19$, (h) sua segmentação, (i) gradiente morfológico a partir do elemento estruturante *box* 3x3, (j) operador de Sobel.

A análise dos resultados obtidos com os testes comparativos para a sub-imagem da região de Presidente Prudente (figura 39), considerando os parâmetros utilizados respectivamente na tabela 2, apontam visualmente na figura 39 (b) um elevado nível de segmentação, mas em 39 (d) após a aplicação do modelo para $\sigma_r=15$ tem-se uma redução desses níveis de segmentação. Já em 39 (f) e 39 (h) os resultados mostram-se melhores em relação à figura 39 (d), no entanto, o resultado obtido em 39 (h) é similar ao obtido em 39 (f), considerando os níveis de segmentação. Em relação ao Gradiente Morfológico e o operador de Sobel, esses apresentam resultados inferiores ao modelo de EDP apresentado em 39 (h), pois ocorre em 39 (i) e 39 (j) grandes níveis de segmentação. Assim, a evolução temporal e a

alteração em busca de parâmetros adequados satisfazem o objetivo desejado, ou seja, diminuir a quantidade excessiva de segmentação, mantendo as feições cartográficas de interesse.

A partir dos testes realizados para as duas áreas testes, é possível destacar o desempenho positivo da aplicação do modelo de EDP em relação aos operadores de Sobel e Gradiente Morfológico. O modelo de EDP mostrou-se superior, apresentando um menor nível de segmentação e principalmente mantendo as bordas das pistas e rodovias presentes. Cabe ressaltar que os resultados obtidos foram analisados visualmente e por imagem diferença, dessa forma, pode-se concluir o bom desempenho do modelo de EDP comparativamente com os outros operadores.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

A área de Cartografia vem buscando ao longo dos anos técnicas capazes de extrair adequadamente áreas ou feições de interesse. Algumas técnicas mostram-se capazes de oferecer resultados satisfatórios para este fim, no entanto, a complexidade e a variabilidade de alvos e principalmente a presença de informações irrelevantes que por características próprias possuem níveis de cinza semelhantes aos das feições de interesse, dificultam a extração seletiva dessas feições. Contudo técnicas que forneçam detecção seletiva de bordas são de grande interesse para o processamento digital de imagens orbitais de Sensoriamento Remoto.

O modelo de EDP produziu resultados satisfatórios em relação ao operador de Sobel e o Gradiente Morfológico por dilatação e erosão. Através da realização de testes

para uma quantidade variada de parâmetros foi possível alcançar resultados significativos para as imagens teste utilizadas.

As imagens resultantes da aplicação do modelo de EDP demonstraram o potencial do mesmo em suavizar regiões homogêneas da imagem, mantendo seletivamente as pistas e rodovias contidas nas imagens teste. Na figura 38 (d) pode-se notar o elevado nível de segmentação para o modelo de EDP, visto que nesta imagem os parâmetros utilizados representam menor estimativa para a quantidade de informações irrelevantes contidas na imagem. Logo, a evolução temporal neste caso é menor ocasionando resultados similares ao operador de Sobel. No entanto deve-se ressaltar que ainda nesta figura o modelo de EDP demonstrou-se visualmente superior em relação aos outros processos no que tange a segmentação sem o efeito de perda de parte das pistas.

Ao estimar valores mais elevados, figura 38 (f) deve-se levar em consideração o aumento da evolução temporal e consequentemente a obtenção de menores níveis de segmentação, neste caso o efeito seletivo do modelo diminui as áreas irrelevantes da imagem e mantém a estrutura das pistas. A figura 38 (h) apresenta o melhor resultado para a imagem do aeroporto, os parâmetros estimados representam uma maior evolução na escala temporal, gerando a partir desse processamento um nível de segmentação melhor em relação ao operador de Sobel, nesse caso, mesmo a evolução sendo maior não houve perdas significativas das pistas do aeroporto.

Ao aplicar o modelo de EDP na sub-imagem da região de Presidente Prudente foi possível notar que apesar da excessiva segmentação não houve perda progressiva das feições de interesse, nesse caso uma avenida em destaque na figura 39 (a). A imagem apresenta uma grande variabilidade de níveis de brilho, o que dificultou a escolha de

parâmetros adequados para alcançar o objetivo proposto. Neste caso com o aumento na evolução temporal figura 39 (h), houve resultados visualmente superiores aos outros processamentos, tornando o modelo viável para os propósitos cartográficos pelo fato de manter inalteradas a estrutura da avenida em destaque na figura 39 (h). O Gradiente Morfológico (figura 39 (i)) e Sobel (figura 39 (j)), apresentam altos níveis de segmentação na imagem.

Essa dissertação trouxe contribuições significativas para a área de PDI, principalmente no que se refere a segmentação de imagem com eliminação de “ruídos”, informações irrelevantes contidas na imagem. Cabe salientar que do ponto de vista computacional a extensa quantidade de métodos numéricos existentes na literatura favorecem o uso de Equações Diferenciais Parciais.

Como recomendações futuras, em função dos resultados obtidos, sugere-se que novos parâmetros sejam testados, buscando a obtenção de resultados superiores aos alcançados neste trabalho e ainda, a implementação da equação através de outras linguagens buscando obter maior rapidez no processamento, visto que o MATLAB, apesar das facilidades já descritas no capítulo 3, não possui a rapidez no processamento e conseqüentemente limita a realização de um maior número de testes para alcançar parâmetros mais adequados.

Em relação à Morfologia Matemática, essa possui outros operadores que por suas características próprias são mais eficientes que o Gradiente Morfológico dependendo do problema a ser solucionado, como, por exemplo, os operadores watershed, abertura por reconstrução, entre outros.

Em se tratando de extração e atualização de feições cartográficas, sugere-se a utilização do modelo fundamentado pela teoria de EDPs, com análise estatística do método

para posterior extração da pista ou avenidas, utilizando essas feições extraídas em processos de atualização de produtos cartográficos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVAREZ, L.; LIONS, P. L.; MOREL, J. M., Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion II, SIAM J. Numer. Anal. 29(3), 1992. p. 845-866.

BARCELOS, C. A. Z.; BOAVENTURA, M.; SILVA Jr., E. C., Um Modelo de Difusão Não Linear para Eliminação de Ruídos com Preservação de Bordas em Imagens, Anais, 54º Seminário Brasileiro de Análise, 2001. p. 221-235.

BARCELOS, C. A. Z.; CHEN, Y., Heat Flow and Related Minimization Problem in Image Restoration, Computers & Mathematics with applications, n. 39, 2000. p. 81-97.

CUNHA, M. C. C., Métodos Numéricos, 2ª Edição, Editora da UNICAMP, São Paulo, 2000.

GOMES, J.; VELHO, L., Computação Gráfica: Imagem, Rio de Janeiro, IMPA/SBM, 1994.

GONZALES, R. C.; WOODS, R. E., Digital Image Processing, Addison-Weslly publishing company, 2000. 716p.

IÓRIO, V. M., EDP, um Curso de Graduação, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1991.

KOENDERINK, J. J., The Structure of Images, Biol. Cybernet. 50 (1984), pp. 363-370, 1984.

LIM, J. S., Two-dimensional Signal and Image Processing, Prentice Hall Signal Processing Series, New Jersey, 1990.

MARR, D.; HILDRETH, E., Theory of Edge Detection, Proc. Roy. Soc. London Ser. B, 207, pp. 187-217, 1980.

NORDSTRÖM, K. N., Biased anisotropic diffusion: a unified regularization and diffusion approach to edge detection, Image and Vision Computing, (8), 1990. p. 318-327.

PERONA, P.; MALIK, J., Scale space and edge detection using anisotropic diffusion, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 12, 7, 1990. p. 629-639.

SILVA Jr., E. C.; BOAVENTURA, M.; BARCELOS, C. A. Z., Eliminação de ruídos e segmentação de imagens via equação de difusão não linear, Anais, 1ª Escola Brasileira de Aplicações em Dinâmica e Controle – APLICON'2001, 2001. p. 44-49.

SOILLE, P., Morphological image analysis: principles and applications, Springer, ISBN, 1999.

TEIXEIRA, R., Introdução aos Espaços de Escala, 23º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, Rio de Janeiro, 2001.

VIEIRA, J. M. N., MATLABNumInstante. Disponível em: www.ieeta.pt/~vieira/MatlabNumInstante.pdf. acesso em: 11 de junho 2002.

WEI, G. W., Quasi Wavelets and Quasi Interpolating Wavelets, Chem. Phys. Lett., vol. 296, pp. 215-222, 1998.

BIBLIOGRAFIAS

BAKKER, M. P. R., Cartografia: Noções básicas, Rio de Janeiro: DHN, 1965. 242p.

BANON, G. J. F.; BARRERA, J., Bases da Morfologia Matemática para a Análise de Imagens Binárias, IX Escola de Computação, Recife, 1994.

BARCELOS, C. A. Z.; BOAVENTURA, M.; SILVA Jr., E. C., Well-balanced Flow Equation for Noise Removal and Edge Detection, IEEE Trans. Image Processing, 2002.

BARRERA, J., Uma Abordagem Unificada para os Problemas de Processamento digital de Imagens: a Morfologia Matemática, Dissertação de mestrado, INPE, São José dos Campos, 1987.

BLACK, M. et al. Robust Anisotropic Diffusion, IEEE Transactions on Image Processing, vol. 7, nº 3, 1998.

CHEN, Y.; VEMURI, B. C.; WANG, L., Image Denoising and Segmentation via Nonlinear Diffusion, Comput. Math. Appl. 39 (5/6), 2000. p. 131-149.

Conferência Nacional de Geografia e Cartografia, 1., 1968, Rio de Janeiro. Comunicações (sobre Cartografia), Rio de Janeiro, IBGE, 1968.

CRÓSTA, A.P., Processamento Digital de Imagens de Sensoriamento Remoto, Campinas, SP : IG/UNICAMP, 1992.

FACON, J., Morfologia Matemática: Teoria e Aplicações, Curitiba: Editora Universitária Champagnat da Pontífica Universidade Católica do Paraná, 1996. 320p.

GARCIA, G. J., Sensoriamento Remoto: Princípios e Interpretação de Imagens. São Paulo: Nobel, 1982.

IÓRIO Jr., R.; IÓRIO, V. M., Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1988.

JOLY, F. A Cartografia: Campinas, São Paulo: Editora Papirus, 1990.

LIBAULT, André. GeoCartografia. São Paulo, 1975.

MATHERON, G. Random Sets and Integral Geometry. J. Wiley, new York, 1975.

NOVO, E. M. L. M., Sensoriamento Remoto Princípios e Aplicações, São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1995.

OLIVEIRA, C., Curso de Cartografia Moderna, Rio de Janeiro: IBGE, 1988.

PRÉTEUX, F., Mathematical Morphology in Image Processing, chapter On a Distance Function Approach for Gray-Level Mathematical Morphology. E. Dougherty, Rochester Institute of Technology, New York, 1993.

RICHARDS, J. A; JIA, X., Remote Sensing Digital Image Analysis, Australian National University, 1998.

RUDIN, L.; OSHER, S.; FATEMI, E. Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms. *Physica D* 60, 259-268, 1992.

SERRA, J. Image Analysis and Mathematical Morphology. Academic Press, London, 1982.

SETHIAN, J. A., Level Set Methods. Cambridge University Press, 1996.

SILVA, E. A. et al. Comparação entre dois métodos de fusão de imagem de dados. Anais do XVI Congresso Brasileiro de Cartografia. Rio de Janeiro. 04 a 08/10/93.

SMITH, S. M.; BRADY, M., SUSAN - A New Approach to Low Level Image Processing. *International Journal of Computer Vision*, vol. 23(1), 45-78, 1997.

TEBOUL, S. et al. Variational Approach for Edge-preserving Regularization Using Coupled PDE's. IEEE Trans. Image Processing, vol. 7, pp. 387–397, 1998.

WITKIN, A. P., Scale-space Filtering, Proc. IJCA, Karlsruhe, pp. 1019-1021, 1983.