



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Ilha Solteira

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**“Um modelo de linha de transmissão bifásica desenvolvido
diretamente no domínio das fases”**

Newton Vieira de Souza Junior

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Kurokawa

**Ilha Solteira/SP
Agosto, 2011**



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de Ilha Solteira

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

“Um modelo de linha de transmissão bifásica desenvolvido
diretamente no domínio das fases”

Newton Vieira de Souza Junior

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Kurokawa

Dissertação apresentada à Faculdade
de Engenharia - UNESP – Campus de
Ilha Solteira, para obtenção do título
de Mestre em Engenharia Elétrica.
Área de Conhecimento: Automação.

**Ilha Solteira/SP
Agosto, 2011**

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira.

S729m Souza Junior, Newton Vieira de.
Um modelo de linha de transmissão bifásica desenvolvido diretamente no domínio das fases / Newton Vieira de Souza Junior. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2011
88 f. : il.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2011
Orientador: Sérgio Kurokawa
Inclui bibliografia
1. Domínio modal. 2. Linhas de transmissão. 3. Linhas polifásicas.
4. Matriz de transformação. 5. Newton-Raphson, Método.

Capes 30404029

21.09.2011



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Um modelo de linha de transmissão bifásica desenvolvido diretamente no domínio das fases

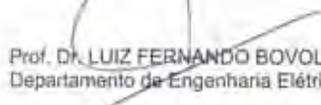
AUTOR: NEWTON VIEIRA DE SOUZA JUNIOR

ORIENTADOR: Prof. Dr. SERGIO KUROKAWA

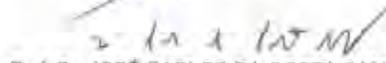
Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica - Área: AUTOMAÇÃO, pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. SERGIO KUROKAWA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. LUIZ FERNANDO BOVOLATO
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. JOSÉ CARLOS DA COSTA CAMPOS
Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade Federal de Vicosa

Data da realização: 26 de agosto de 2011.

*Dedico esse trabalho aos meus pais, Newton Vieira de Souza
e Márcia Helena da Cunha Souza (in memoriam) e
aos meus irmãos Marcelo Augusto da Cunha Souza
e Mariana Cristina da Cunha Souza,
pelo apoio e carinho a mim dedicados.*

Agradecimentos

Em primeiro lugar a **Deus** por ter me dado força e sabedoria para buscar e lutar por aquilo em que acredito.

E em especial quero agradecer e dedicar este trabalho à:

- ❖ *A meus pais **Newton Vieira de Souza e Márcia Helena da Cunha Souza** (in Memoriam) e a meus irmãos, **Marcelo Augusto da Cunha Souza e Mariana Cristina da Cunha Souza** e a minha namorada **Thaygra Cristina Moreira Barbosa** pelo apoio, compreensão e incentivo que me deram nas horas difíceis.*
- ❖ *A minha **Tia Maria Guimarães** pelo carinho dedicado a mim durante todo esse período de plena dedicação ao mestrado.*
- ❖ *Ao professor **Sérgio Kurokawa** a quem sou muito grato por toda confiança, dedicação e apoio confiados a mim durante todo o período em que estive desenvolvendo este trabalho. Sou lhe grato pela grande amizade obtida durante esse tempo.*
- ❖ *Aos **professores Luiz Fernando Bovolato, Afonso José do Prado e José Carlos da Costa Campos** pela disposição para participar da banca e principalmente pelas sugestões para a melhoria do meu trabalho.*
- ❖ *Aos colegas que fiz durante todo tempo que estudei e em especial, aos meus amigos de laboratório: **Carolina Goulart de Carvalho, Gislaine Aparecida Asti, Rodrigo Cléber e Ivan Brandt**, sou lhes grato pelo apoio, confiança e amizade adquiridos nesse período.*

A paz, se possível, mas a verdade a qualquer preço.

(Martin Lutero)

RESUMO

Sabe-se que uma linha de transmissão polifásica pode ser representada no domínio modal, por seus n modos de propagação que se comportam como sendo n linhas monofásicas independentes. Uma vez calculadas as correntes e tensões no domínio modal, as mesmas são convertidas para o domínio das fases por meio de uma matriz de transformação modal.

A matriz de transformação modal é uma matriz cujos elementos são escritos em função dos parâmetros longitudinais e transversais da linha, variam em função da frequência e, geralmente, são obtidos por meio de métodos numéricos. Deste modo, diz-se que o modelo obtido é um modelo numérico de linha.

Neste trabalho foi feita uma abordagem a respeito de um modelo analítico de linha de transmissão bifásica. O modelo proposto utiliza também a representação modal, mas a matriz de transformação será obtida analiticamente em função dos parâmetros da linha.

Deste modo, foi possível obter, analiticamente, relações entre as correntes e tensões de fase da linha baseando-se unicamente nos parâmetros longitudinais e transversais da mesma.

Palavras Chave– Domínio modal. Linhas de transmissão. Linhas polifásicas. Matriz de transformação. Newton-Raphson.

ABSTRACT

It is known that polyphase transmission line can be represented in the modal domain its n propagation modes that behave as n independent single-phase lines. Once calculated the currents and voltages in the modal domain, they are converted into the realm of the phases by means of a modal transformation matrix.

The modal transformation matrix is a matrix whose elements are written against the parameters of longitudinal and cross the and they are usually obtained by numerical methods. In this paper an approach was made on an analytical model of two-phase transmission line. The proposed model uses the modal representation, but the transmission matrix obtained analytical in terms of line parameters.

The development of the analytical model will be based on the modal model. Thus, initially will be obtained analytically, a modal matrix decomposition that allows to calculate analytically the eigenvalues of the product $[Z][Y]$ line. Once obtained the eigenvalues it possible to obtain the modes of propagation and characteristic impedance of the line modes.

Then, using the solutions algebraic differential equation of a single-phase line, we obtain the equations of currents and voltages of each of modes of spread of the row. In a final step, the equations of modal currents and voltages are converted into the realm of the phases, resulting in algebraic equations that can calculate the currents and phase voltages of the line in the frequency domain.

Keywords- Modal domain. Transmission line. Two-phase line. Transformation matrix. Newton-Raphson.

Lista de Figuras

Figura N°01-Mapa do SIN – Sistema de Transmissão.	13
Figura N°02- Representação em diagrama de blocos de uma linha no domínio modal.	15
Figura N°03 - Linha de transmissão monofásica de comprimento d.	16
Figura N°04 - Circuito equivalente para um elemento infinitesimal da linha.	17
Figura N°05 -Linha de comprimento d.	18
Figura N°06 - Representação das correntes e tensões nos terminais da linha.	19
Figura N°07 - Correntes de tensões em uma linha com n fases.	20
Figura N°08 - Representação em diagrama de blocos de uma linha no domínio modal.	34
Figura N°09 - Representação de uma linha de transmissão bifásica genérica sem plano de simetria vertical.	36
Figura N°10 - Linha bifásica genérica sem plano de simetria vertical com as correntes e tensões.	37
Figura N°11 - Modo genérico de uma linha de transmissão bifásica.	38
Figura N°12 -Linha de transmissão bifásica.	57
Figura N°13 - Energização da linha em aberto.	58
Figura N°14 - Tensão no terminal B da linha de 50 km em aberto (fase 1).	58
Figura N°15 - Tensão no terminal B da fase 2 da linha de 50 km em aberto (fase 2).	59
Figura N°16 -Ângulo da tensão no terminal B da linha de 50 km em aberto (fase 2)..	59
Figura N°17 -Tensão no terminal B da linha de 200 km em aberto (fase 1).	60
Figura N°18 - Tensão no terminal B da linha de 200 km em aberto (fase 2).	60
Figura N°19 - Ângulo da tensão no terminal B da linha de 200 km em aberto (fase 2).	61
Figura N°20 - Corrente no terminal A da linha de 50 km em aberto (fase 1).	61
Figura N°21-Ângulo da corrente no terminal A da linha de 50 km em aberto (fase 1).	62
Figura N°22 -Corrente no terminal A da linha de 50 km em aberto (fase 2).	62
Figura N°23 -Ângulo da corrente no terminal A da linha de 50 km em aberto (fase 2).	63
Figura N°24 -Corrente no terminal A da linha de 200 km em aberto (fase 1).	63
Figura N°25 -Ângulo da corrente no terminal A da linha de 200 km em aberto (fase 1).	64
Figura N°26 -Corrente no terminal A da linha de 200 km em aberto (fase 2).	64
Figura N°27 -Ângulo da corrente no terminal A da linha de 200 km em aberto (fase 2).	65
Figura N°28- Energização da linha em curto circuito.	65
Figura N°29 -Corrente no terminal A da linha de 50 km em curto (fase 1).	66

Figura N°30 -Ângulo da corrente no terminal A da linha de 50 km em curto (fase 1).	66
Figura N°31 -Corrente no terminal A da linha de 50 km em aberto (fase 2).	67
Figura N°32 -Ângulo da corrente no terminal A da linha de 50 km em curto (fase 2).	67
Figura N°33 -Corrente no terminal B da linha de 50 km em curto (fase 1).	68
Figura N°34 -Ângulo da corrente no terminal B da linha de 50 km em curto (fase 1).	68
Figura N°35 -Corrente no terminal B da linha de 50 km em curto (fase 2).	69
Figura N°36 -Ângulo da corrente no terminal B da linha de 50 km em curto (fase 2).	69
Figura N°37 -Corrente no terminal A da linha de 200 km em curto (fase 1).	70
Figura N°38 -Ângulo da corrente no terminal A da linha de 200 km em curto (fase 1)..	70
Figura N°39 -Corrente no terminal B da linha de 200 km em curto (fase 1).	71
Figura N°40 -Ângulo da corrente no terminal B da linha de 200 km em curto (fase 1).	71
Figura N°41 -Corrente no terminal A da linha de 200 km em curto (fase 2).	72
Figura N°42 -Ângulo da corrente no terminal A da linha de 200 km em curto (fase 2).	72
Figura N°43 -Corrente no terminal B da linha de 200 km em curto (fase 2).	73
Figura N°44 -Ângulo da corrente no terminal B da linha de 200 km em curto (fase 2).	73

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	14
1.1 – Introdução (DALTIM, 2006)	14
CAPÍTULO 2	18
EQUAÇÕES DE CORRENTES E TENSÕES DE LINHAS MONOFÁSICAS	18
2.1 – Introdução	18
2.2 – Equações diferenciais de uma linha monofásica.....	18
2.3 – Solução das equações de propagação caso de linhas sem perdas.	21
2.4 – Solução das equações de propagação para o caso de linhas com perdas.	22
2.5 – Conclusão.	25
CAPÍTULO 3	26
REPRESENTAÇÃO DE UMA LINHA POLIFÁSICA NO DOMÍNIO MODAL	26
3.1 – Introdução	26
3.2 – Equações de correntes e tensões para linhas polifásicas	26
3.3 – Representação da linha polifásica no domínio modal.....	28
3.4 – Matrizes de impedâncias e admitâncias no domínio modal (KUROKAWA, 2003)	32
3.5 – Relação entre as matrizes $[T_v]$ e $[T_I]$	33
3.6 – Relação entre $[\lambda]$, $[Z_m]$ e $[Y_m]$	35
3.7 - Procedimento para se calcular as correntes e tensões nos terminais de uma linha utilizando o modelo modal	36
3.8 – Conclusão	36
CAPÍTULO 4	38
DESENVOLVIMENTO DO MODELO DE LINHAS DE TRANSMISSÃO BIFÁSICAS DIRETAMENTE NO DOMÍNIO DAS FASES	38
4.1 – Introdução	38
4.2 – Desenvolvimento do modelo	38
4.3 – Obtenção das funções de propagação, das matrizes $[K]$ e $[P]$ e das impedâncias características.....	47
4.3.1 – Obtenção das funções de propagação dos modos (γ_{m1} e γ_{m2}).	48
4.3.2 – Obtenção das matrizes $[K]$ e $[P]$	50
4.3.3 – Obtenção das impedâncias características	55
4.4 – Conclusão	58
CAPÍTULO 5	59
VALIDAÇÃO DO MODELO DESENVOLVIDO.....	59
5.1 - Introdução.....	59
5.2 - Resultados obtidos	59
5.3 - Resultados obtidos para a linha em aberto	60
5.4 – Resultados obtidos para a linha em curto circuito	69
5.5 – Conclusão	79
CAPÍTULO 6	80
CONCLUSÕES	80
Referências	81
Apêndice A.....	83
A.1 – Introdução	83
A.2 – Solução dos autovalores λ_1 e λ_2	83
A.3 – Solução para a matriz $[T_v]$	84
A.4 – Solução para as matrizes de impedância $[Z_m]$ e de admitância $[Y_m]$ modais	85
A.5 – Solução para as impedâncias características dos modos de propagação	88

Apêndice B	90
B.1 – Introdução	90
B.2 - Resultados obtidos	90
B.3 – Matrizes K_1 , K_2 , K_3 e K_4	91
B.3.1 – Resultados obtidos de K_1 , K_2 , K_3 e K_4	92
B.4 – Matrizes P_1 , P_2 , P_3 e P_4	97
B.4.1 – Resultados obtidos de P_1 , P_2 , P_3 e P_4	98

CAPÍTULO 1

1.1 – Introdução (DALTIM, 2006)

A primeira linha de transmissão de que se tem registro no Brasil foi construída em 1883, na cidade de Diamantina, Minas Gerais. Essa linha transportava a energia gerada de uma usina hidroelétrica, constituída de duas rodas d'água e dois dínamos Gramme, a uma distância de 2 km, aproximadamente. A energia transmitida por meio dessa linha acionava bombas hidráulicas em uma mina de diamantes. Consta que era a linha mais longa do mundo, na época. Em 1901, com a entrada em serviço da central Hidroelétrica de Santana do Parnaíba, a então The San Paulo Tramway Light and Power Co. Ltd. construiu as primeiras linhas de seus sistemas de 40 kV. Em 1914, com a entrada em serviço da Usina Hidroelétrica de Utuparanga, a mesma empresa introduziu o padrão 88 kV. Esse padrão de tensão foi, em seguida, adotado pela Companhia Paulista de Estradas de Ferro, Estrada de Ferro Sorocabana e, por meio desta, pela USELPA, que futuramente viria a integrar o sistema CESP. Entre 1945 e 1947, construiu-se a primeira linha de 230 kV no Brasil, com um comprimento aproximado de 330 km. Essa linha, destinada-se a interligar os sistemas Rio Light e São Paulo Light, operava inicialmente em 170 kV, passando, em 1950, a operar com 230 kV. Foi também a primeira interligação de dois importantes sistemas realizada no Brasil. Vieram, a partir daí, em rápida sucessão, linhas de 230 kV do sistema da Cia. Hidroelétrica de São Francisco, 161 e 345 kV da CEMIG e FURNAS, 460 kV da CESP, as linhas de 500 kV de FURNAS e 800 kV do sistema Itaipu (FUCHS, 1977).

Atualmente, de acordo com (OPERADOR NACIONAL DO SISTEMA ELÉTRICO - ONS, 2011), a rede básica de transmissão compreende tensões entre 230 kV a 750 kV, atinge uma extensão de 80.022 km, engloba 815 circuitos de transmissão, contando com uma capacidade de transformação de 178.447 MVA, em 321 subestações distribuídas. A figura N°01 mostra um esquema do sistema de transmissão brasileiro (COMPANHIA DE TRANSMISSÃO DE ENERGIA ELÉTRICA PAULISTA - CTEEP, 2006). O mapa das linhas de transmissão pertencentes ao Sistema Interligado Nacional – SIN.

Figura Nº01 – Mapa do Sistema Interligado Nacional (SIN).



Fonte: Operador Nacional do Sistema Elétrico- ONS, 2011.

O sistema elétrico brasileiro, esquematizado na figura Nº01, apresenta como particularidade grandes extensões de linhas de transmissão e um parque produtor de geração predominantemente hidráulico. O mercado consumidor (47,2 milhões de unidades) concentra-se nas regiões Sul e Sudeste, as mais industrializadas. A região Norte é atendida de forma intensiva por pequenas centrais geradoras, a maioria das termoelétricas, movidas a óleo diesel (OPERADOR NACIONAL DO SISTEMA ELÉTRICO - ONS, 2011).

Verifica-se que, no Brasil, grande parte das linhas que constituem o Sistema Interligado Nacional são linhas de 750 kV, ± 600 kV cc, 500 kV, 440 kV, 345 kV, 230 kV e 138 kV (circuito duplo) (COMPANHIA DE TRANSMISSÃO DE ENERGIA ELÉTRICA PAULISTA - CETEEP, 2006).

Devido às suas peculiaridades, as linhas de transmissão podem ser modeladas de diferentes formas, de acordo com a precisão e eficiência necessárias.

Na literatura, existem diversas representações para as linhas de transmissão.

Quanto à técnica de simulação utilizada, os modelos podem ser classificados em dois grandes grupos que são os modelos descritos no domínio do tempo e os modelos descritos no domínio da frequência (FARIA et al., 2002).

Nos modelos do primeiro grupo, a solução é obtida diretamente em função do tempo sem o uso de transformadas inversas (de Fourier ou de Laplace), enquanto que, no segundo grupo, a solução é primeiramente obtida no domínio da frequência para em seguida ser convertida para o domínio do tempo por meio de transformadas inversas.

Os modelos escritos no domínio da frequência são limitados quanto à sua capacidade de representar corretamente alterações na configuração do sistema (tais como faltas e manobras) e apresentam dificuldades quanto à representação de elementos não lineares.

Os modelos de linhas de transmissão também podem ser classificados quanto à natureza de seus parâmetros em modelos a parâmetros constantes e modelos a parâmetros variáveis em relação à frequência. Os modelos a parâmetros constantes são de fácil utilização, mas não podem representar adequadamente a linha em toda a faixa de frequências nas quais estão presentes os fenômenos de natureza transitória. Na maior parte dos casos esses modelos aumentam a amplitude das harmônicas de ordem elevada, distorcendo as formas de onda e produzindo picos exagerados (FARIA et al., 2002).

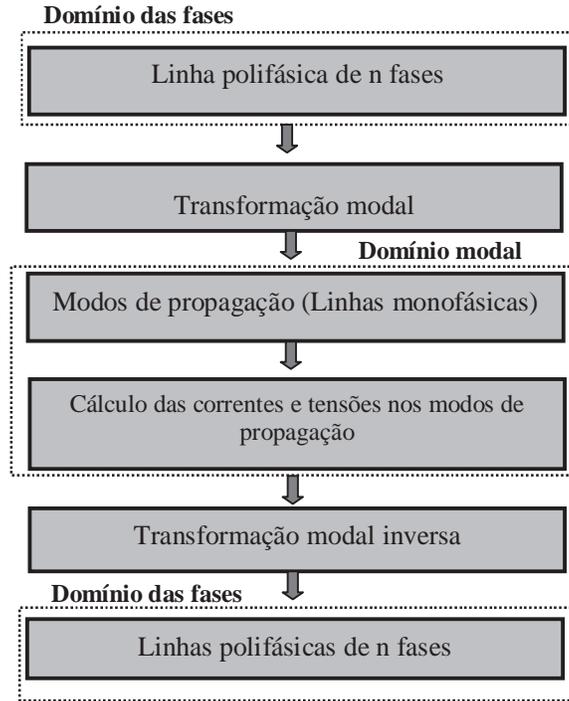
Os modelos com parâmetros variáveis em relação à frequência são considerados mais precisos quando comparados aos modelos que consideram os parâmetros constantes. A variação está na dependência da frequência, podendo esta ser representada por meio da associação série e paralela de elementos R e L (TAVARES, 1999).

As linhas de transmissão polifásicas podem ainda ser representadas no domínio modal ou no domínio das fases (FARIA et al., 2002). Os modelos que representam linhas polifásicas no domínio modal fazem uso da técnica de transformação modal. Nesse caso, a partir do cálculo dos autovalores do produto matricial envolvendo as matrizes de impedâncias longitudinais e admitâncias transversais, pode-se representar uma linha polifásica com n fases por meio de linhas monofásicas independentes e matematicamente equivalentes ao sistema polifásico original.

Na representação modal, todos os cálculos são realizados no sistema de n linhas monofásicas que representa o sistema original. Em seguida, utilizando uma matriz de transformação modal adequada, obtém-se os resultados para a linha polifásica. A vantagem da

representação da linha por meio de seus modos é que no domínio modal o acoplamento entre as fases é eliminado, facilitando os cálculos das correntes e tensões. A figura N°02, mostra um diagrama de bloco onde se representa uma linha no domínio modal.

Figura N°02 – Representação em diagrama de blocos de uma linha no domínio modal.



Fonte: Souza Junior (2011)

Quando a linha é representada no domínio das fases, todos os cálculos são realizados diretamente nas fases da linha, evitando a transição para o domínio modal (FARIA et al., 2002).

Neste trabalho foi feita uma abordagem a respeito de um modelo analítico de linha de transmissão bifásica. O modelo proposto utiliza também a representação modal, mas a matriz de transformação será obtida analiticamente em função dos parâmetros da linha.

Deste modo, foi possível obter, analiticamente, relações entre as correntes e tensões de fase da linha baseando-se unicamente nos parâmetros longitudinais e transversais da mesma.

CAPÍTULO 2

EQUAÇÕES DE CORRENTES E TENSÕES DE LINHAS MONOFÁSICAS

2.1 – Introdução

As linhas de transmissão têm como característica, a capacidade de conduzir energia eletromagnética, limitando essa energia à proximidade da própria linha de transmissão. Uma análise rigorosa desse problema exigiria a aplicação das equações de Maxwell nos problemas de campo, onde, ela pode ser representada por meio de seus parâmetros R, L, G e C.

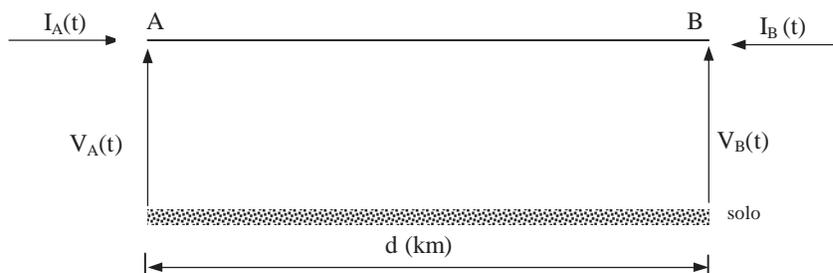
No entanto deve-se considerar que os parâmetros são distribuídos ao longo do comprimento da linha.

2.2 – Equações diferenciais de uma linha monofásica.

Considera-se que uma linha de transmissão é constituída por dois condutores metálicos, retilíneos e completamente isolada. Pela necessidade da existência de um circuito fechado, pode-se considerar o próprio solo como sendo o segundo condutor ou condutor de retorno. A figura N°03 mostra uma representação de uma linha de transmissão monofásica de comprimento d (HEDMAN, 1983; FUCHS, 1979):

Considere uma linha, de comprimento d , conforme mostra a figura 2.1.

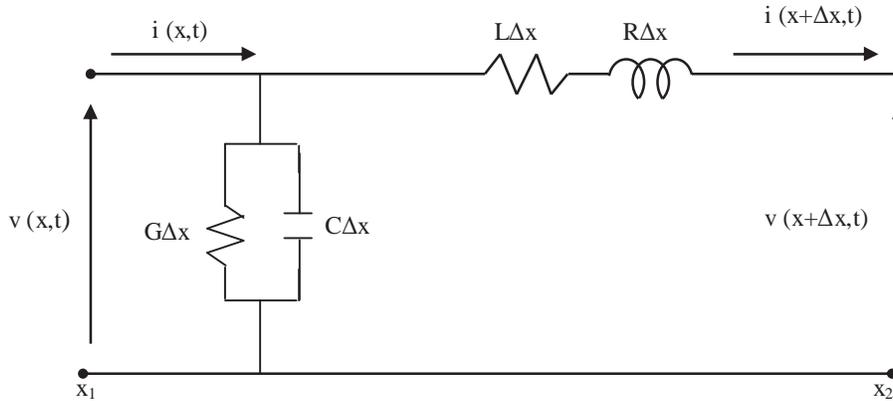
Figura N°03 - Linha de transmissão monofásica de comprimento d .



Fonte: Souza Junior (2011)

Sabendo-se que os parâmetros elétricos longitudinais e transversais de uma linha de transmissão, do tipo mostrado na figura N°03, são uniformemente distribuídos ao longo do comprimento da mesma. Pode-se representar um elemento infinitesimal desta linha, como mostraremos na figura N°04, a seguir. (CHIPMAN, 1972; GREENWOOD, 1977).

Figura N°04 - Circuito equivalente para um elemento infinitesimal da linha.



Fonte: Souza Junior (2011)

Na figura N°04, tem-se um seguimento de comprimento infinitesimal Δx de uma linha de transmissão, cuja resistência possui um valor R , a indutância possui um valor L , a capacitância possui um valor C e a condutância possui um valor G , todos uniformemente distribuídos ao longo do comprimento da linha.

Assim para o circuito da figura 2.2, podemos escrever que;

$$i(x, t) - i(x + \Delta x, t) = G\Delta x v(x + \Delta x, t) + C\Delta x \frac{\partial v(x + \Delta x, t)}{\partial t} \quad (2.1)$$

A equação (2.1) pode ser escrita na forma:

$$i(x + \Delta x, t) - i(x, t) = -G\Delta x v(x + \Delta x, t) - C\Delta x \frac{\partial v(x + \Delta x, t)}{\partial t} \quad (2.2)$$

Dividindo a expressão (2.2) por Δx , teremos:

$$\frac{i(x + \Delta x, t) - i(x, t)}{\Delta x} = -G v(x + \Delta x, t) - C \frac{\partial v(x + \Delta x, t)}{\partial t} \quad (2.3)$$

Calculando o limite da equação (2.3) para Δx tendendo a zero, obtém-se (SWOKOWSKI, 1994):

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{i(x + \Delta x, t) - i(x, t)}{\Delta x} \right) = -G v(x, t) - C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (2.4)$$

O lado esquerdo da equação (2.4) é a derivada parcial de $i(x, t)$ em relação à x . Portanto, (2.4) será escrita, como sendo (CHIPMAN, 1972):

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -G v(x, t) - C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (2.5)$$

Para o circuito da figura 2.2, também podemos escrever:

$$v(x, t) - V_R - V_L - v(x + \Delta x, t) = 0 \quad (2.6)$$

$$v(x, t) - R \Delta x i(x, t) - L \Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - v(x + \Delta x, t) = 0 \quad (2.7)$$

$$v(x, t) - v(x + \Delta x, t) = R \Delta x i(x, t) + L \Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (2.8)$$

$$v(x + \Delta x, t) - v(x, t) = -R \Delta x i(x, t) - L \Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (2.9)$$

Dividindo (2.9) por Δx , teremos:

$$\frac{v(x + \Delta x, t) - v(x, t)}{\Delta x} = -R i(x, t) - L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (2.10)$$

Calculando o limite de (2.10), para Δx tendendo a zero, (SWOKOWSKI, 1994), fica:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{v(x + \Delta x, t) - v(x, t)}{\Delta x} \right) = -R i(x, t) - L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (2.11)$$

A equação (2.11) pode ser escrita, como sendo:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = -R i(x, t) - L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (2.12)$$

As equações (2.5) e (2.12), são as equações de propagação de uma linha monofásica.

A solução analítica de (2.5) e (2.12), somente é conhecida para o caso de linhas sem perdas ($R = 0$ e $G = 0$).

2.3 – Solução das equações de propagação caso de linhas sem perdas.

Denomina-se linhas sem perdas uma linha em que a resistência e a condutâncias são nulas.

Para este caso, as equações (2.5) e (2.12) tornam-se:

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = -L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (2.14)$$

Derivando (2.13) em relação à x obtém-se (NAIDU, 1985)

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = -L \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right) \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} = -C \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right) \quad (2.16)$$

Substituindo (2.14) em (2.15), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.17)$$

Derivando (2.14) em relação à x , obtém-se:

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = -C \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \right) \quad (2.18)$$

Substituindo (2.13) em (2.18), obtém-se:

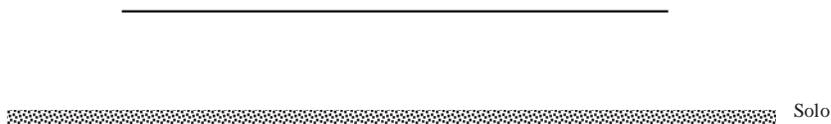
$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

As equações (2.17) e (2.19) mostram que, para o caso de uma linha sem perdas, a corrente e a tensão comportam-se como ondas.

2.4 – Solução das equações de propagação para o caso de linhas com perdas.

Considere uma linha de comprimento d , conforme mostra a figura N°05.

Figura N°05 - Linha de comprimento d .



Fonte: Souza Junior (2011)

Sabe-se que as equações diferenciais para a linha mostrada na figura N°05 são:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = -R i(x, t) - L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -G v(x, t) - C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (2.21)$$

Estas equações são de difícil solução no domínio do tempo, mas podem ser resolvidas no domínio da frequência.

Deste modo, aplicando a transformada de Laplace em (2.20) e (2.21) obtém-se:

$$\frac{\partial v(x,s)}{\partial x} = -R i(x,s) - s L i(x,s) \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial i(x,s)}{\partial x} = -G v(x,s) - C s \frac{\partial v(x,s)}{\partial x} \quad (2.23)$$

Fazendo $s = j\omega$, as equações (2.22) e (2.23) tornam-se (FUCHS, 1979):

$$\frac{dv(x)}{dx} = -(R + j\omega L) i(x) \quad (2.24)$$

$$\frac{dv(x)}{dx} = -Z i(x) \quad (2.25)$$

Analogamente, a equação (2.23) torna-se:

$$\frac{di(x)}{dx} = -Y v(x) \quad (2.26)$$

Derivando as equações (2.25) e (2.26) em relação à x , teremos:

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -Z \frac{di(x)}{dx} \quad (2.27)$$

$$\frac{d^2 i(x)}{dx^2} = -Y \frac{dv(x)}{dx} \quad (2.28)$$

Substituindo as equações (2.26) em (2.27) e (2.25) em (2.28), obtém-se:

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -Z Y v(x) \quad (2.29)$$

$$\frac{d^2 i(x)}{dx^2} = -ZY i(x) \quad (2.30)$$

Sabe-se que as soluções para as equações (2.29) e (2.30) são do tipo:

$$v(x) = ae^{-\gamma x} + be^{\gamma x} \quad (2.31)$$

$$i(x) = \frac{1}{Z_c} ae^{-\gamma x} - \frac{1}{Z_c} be^{\gamma x} \quad (2.32)$$

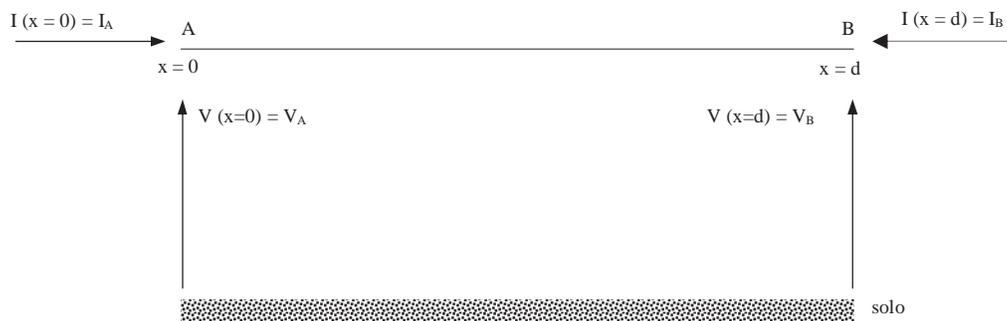
Nas equações (2.31) e (2.32) os termos γ e Z_c são respectivamente, a função de propagação e a impedância característica da linha e são escritos como sendo (MARTI, 1982; CHIPMAN, 1976):

$$\gamma = \sqrt{ZY} \quad (2.33)$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \quad (2.34)$$

Considere que a linha mostrada na figura 2.3 possui, em seus terminais, correntes e tensões conforme mostra a figura N°06:

Figura N°06 – Representação das correntes e tensões nos terminais da linha.



Fonte: Souza Junior (2011)

A partir da figura N°06, mostrada acima, pode-se escrever as equações hiperbólicas da linha como sendo (BUDNER, 1970):

$$V_B = V_A \cosh(\gamma d) - Z_C I_A \sinh(\gamma d) \quad (2.35)$$

$$I_B = -\frac{1}{Z_C} V_A \sinh(\gamma d) + I_A \cosh(\gamma d) \quad (2.36)$$

Onde:

$$\sinh(\gamma d) = \left(\frac{e^{\gamma d} - e^{-\gamma d}}{2} \right) \quad (2.37)$$

$$\cosh(\gamma d) = \left(\frac{e^{\gamma d} + e^{-\gamma d}}{2} \right) \quad (2.38)$$

Uma vez obtidas as correntes e tensões nos terminais da linha, no domínio da frequência, é possível convertê-las para o domínio do tempo por meio do uso das transformadas inversas de Fourier ou Laplace.

2.5 – Conclusão.

Neste capítulo, foram deduzidas as equações diferenciais que representam uma linha de transmissão cujos parâmetros são uniformemente distribuídos ao longo da linha.

Estas equações diferenciais obtidas são de difícil solução no domínio do tempo, sendo a solução conhecida para alguns casos específicos. Um caso em que é possível obter as correntes e tensões diretamente no domínio do tempo é quando se considera linhas sem perdas com parâmetros invariáveis em relação a frequência.

Para o caso de linhas com perdas, é possível converter as equações diferenciais das mesmas para o domínio da frequência, onde é possível obter as soluções das mesmas.

CAPÍTULO 3

REPRESENTAÇÃO DE UMA LINHA POLIFÁSICA NO DOMÍNIO MODAL

3.1 – Introdução

No capítulo anterior foram mostrados modelos de linhas que permitem obter as correntes e tensões de linhas monofásicas.

Para o caso de linhas com mais de uma fase, pode-se utilizar a técnica de decomposição modal (WEDEPOHL, 1996).

A técnica de decomposição modal consiste em representar uma linha polifásica no domínio modal, onde uma linha de n fases pode ser separada em seus n modos de propagação, sendo que cada um dos modos de propagação comporta-se como sendo uma linha monofásica independente das demais. Deste modo, as correntes e tensões de cada modo de propagação podem ser calculadas, no domínio modal, por meio das equações desenvolvidas no capítulo 2.

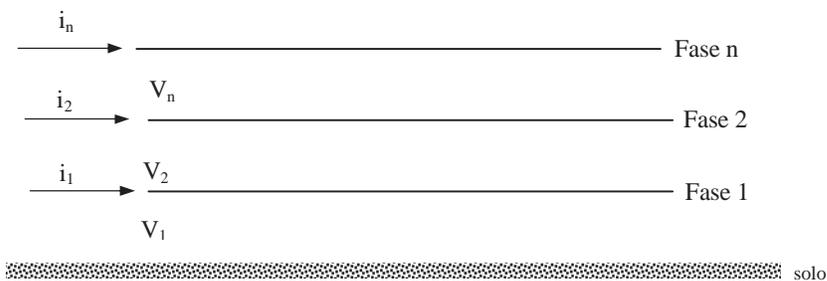
A representação de uma linha no domínio modal dá-se por meio de uma matriz denominada matriz de decomposição modal (WEDEPOHL, 1996).

Uma vez calculadas as correntes e tensões no domínio modal, é possível obter as correntes e tensões nas fases da linha polifásica por meio do uso da matriz de transformação modal inversa.

3.2 – Equações de correntes e tensões para linhas polifásicas

Considere uma linha com n fases, conforme mostra a figura N°07.

Figura N°07 – Correntes e tensões em uma linha com n fases.



Fonte: Souza Junior (2011)

Na figura N°07, i_1 e V_1 , são respectivamente a corrente e tensão na fase 1, i_2 e V_2 , são respectivamente a corrente e tensão na fase 2 e i_n e V_n , são respectivamente a corrente e tensão na fase n.

A matriz de impedância longitudinal $[Z]$ e de admitância transversal $[Y]$ da linha mostrada na figura N°07, são escritas como sendo:

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

As equações diferenciais de tensão e corrente para essa linha são escritas como sendo (BUDNER, 1970):

$$-\frac{d[V]}{dx} = [Z][I] \quad (3.3)$$

$$-\frac{d[I]}{dx} = [Y][V] \quad (3.4)$$

Nas equações (3.3) e (3.4), $[V]$ e $[I]$ são vetores com as tensões e correntes de fase, respectivamente.

Derivando (3.3) e (3.4) em relação à x , onde x é a posição ao longo da linha, têm-se (SWOKOWSKI, 1994):

$$-\frac{d^2[V]}{dx^2} = [Z] \frac{d[I]}{dx} \quad (3.5)$$

$$-\frac{d^2[I]}{dx^2} = [Y] \frac{d[V]}{dx} \quad (3.6)$$

Substituindo (3.3) e (3.4) em (3.6) e (3.5), respectivamente, obtêm-se:

$$\frac{d^2[V]}{dx^2} = [Z][Y][V] \quad (3.7)$$

$$\frac{d^2[I]}{dx^2} = [Y][Z][I] \quad (3.8)$$

Sendo:

$$[S_v] = [Z][Y] \quad (3.9)$$

$$[S_i] = [Y][Z] \quad (3.10)$$

Nas equações (3.7) e (3.8), os produtos $[Z][Y]$ e $[Y][Z]$ são distintos, e as matrizes $[Z]$ e $[Y]$ não são diagonais, fato que dificulta a obtenção das soluções das equações diferenciais.

Tais produtos podem ser transformados em matrizes diagonais a partir da utilização de uma transformação de similaridade (CHEN, 1984). Nesse caso, os produtos matriciais $[Z][Y]$ e $[Y][Z]$ resultarão em matrizes diagonais cujos elementos são os autovalores dos produtos matriciais.

Portanto, para obter as correntes e tensões nos terminais de uma linha monofásica, pode-se utilizar a técnica de decomposição modal que será mostrada em seguida.

3.3 – Representação da linha polifásica no domínio modal

As equações (3.7) e (3.8), podem ser escritas desta forma:

$$\frac{d^2[V]}{dx^2} = [S_v][V] \quad (3.11)$$

$$\frac{d^2[\mathbf{I}]}{dx^2} = [\mathbf{S}_I][\mathbf{I}] \quad (3.12)$$

Os autovalores das matrizes $[\mathbf{S}_V]$ e $[\mathbf{S}_I]$ são iguais, e podem ser escritos como sendo (WEDEPOHL, 1996; DOMMEL, 1997):

$$[\lambda] = [\mathbf{T}_V]^{-1}[\mathbf{Z}][\mathbf{Y}][\mathbf{T}_V] \quad (3.13)$$

$$[\lambda] = [\mathbf{T}_I]^{-1}[\mathbf{Y}][\mathbf{Z}][\mathbf{T}_I] \quad (3.14)$$

A matriz $[\lambda]$, em (3.13) e (3.14), é uma matriz diagonal do tipo (LIPSCHUTZ, 1974):

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Na equação (3.13), a matriz $[\mathbf{T}_V]$, é uma matriz cujas colunas são autovetores associados a $[\mathbf{S}_V]$ e, na equação (3.14), a matriz $[\mathbf{T}_I]$ é uma matriz cujas colunas são autovetores associados a $[\mathbf{S}_I]$ (WEDEPOHL, 1996).

Das equações (3.13) e (3.14), têm-se:

$$[\mathbf{S}_V] = [\mathbf{T}_V][\lambda][\mathbf{T}_V]^{-1} \quad (3.16)$$

$$[\mathbf{S}_I] = [\mathbf{T}_I][\lambda][\mathbf{T}_I]^{-1} \quad (3.17)$$

Substituindo as equações (3.16) e (3.17) respectivamente nas equações (3.11) e (3.12), obtêm-se:

$$\frac{d^2[\mathbf{V}]}{dx^2} = [\mathbf{T}_V][\lambda][\mathbf{T}_V]^{-1}[\mathbf{V}] \quad (3.18)$$

$$\frac{d^2[I]}{dx^2} = [T_1][\lambda][T_1]^{-1}[I] \quad (3.19)$$

A partir de (3.18) e (3.19) é possível escrever:

$$\frac{d^2[T_v]^{-1}[V]}{dx^2} = [\lambda][T_v]^{-1}[V] \quad (3.20)$$

$$\frac{d^2[T_1]^{-1}[I]}{dx^2} = [\lambda][T_1]^{-1}[I] \quad (3.21)$$

Fazendo:

$$[V_m] = [T_v]^{-1}[V] \quad (3.22)$$

$$[I_m] = [T_1]^{-1}[I] \quad (3.23)$$

Resulta:

$$\frac{d^2[V_m]}{dx^2} = [\lambda][V_m] \quad (3.24)$$

$$\frac{d^2[I_m]}{dx^2} = [\lambda][I_m] \quad (3.25)$$

Manipulando as equações (3.24) e (3.25), obtêm-se:

$$\frac{d^2[V_m]}{dx^2} = [Z_m][Y_m][V_m] \quad (3.26)$$

$$\frac{d^2[I_m]}{dx^2} = [Y_m][Z_m][I_m] \quad (3.27)$$

Onde nas equações (3.26) e (3.27), $[Z_m]$ e $[Y_m]$ serão mostradas a seguir.

Neste caso, $[V_m]$ e $[I_m]$ são os vetores com as tensões e as correntes modais da linha.

Desenvolvendo (3.26) e (3.27), fica:

$$\frac{d^2}{dx^2} \begin{bmatrix} V_{m1} \\ V_{m2} \\ \vdots \\ V_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{m1} \\ V_{m2} \\ \vdots \\ V_{mn} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ \vdots \\ I_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ \vdots \\ I_{mn} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Das equações (3.28) e (3.29), têm-se:

$$\begin{cases} \frac{d^2 V_{m1}}{dx^2} = \lambda_1 V_{m1} \\ \frac{d^2 I_{m1}}{dx^2} = \lambda_1 I_{m1} \end{cases} \quad (3.30)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 V_{m2}}{dx^2} = \lambda_2 V_{m2} \\ \frac{d^2 I_{m2}}{dx^2} = \lambda_2 I_{m2} \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 V_{mn}}{dx^2} = \lambda_n V_{mn} \\ \frac{d^2 I_{mn}}{dx^2} = \lambda_n I_{mn} \end{cases} \quad (3.32)$$

Os pares de equações (3.30) à (3.32) descrevem os n modos de propagação da linha de n fases, sendo que cada um dos modos é independente dos demais e comporta-se como uma linha monofásica.

As equações (3.26) e (3.27) são as equações diferenciais modais da linha. Uma vez que as matrizes $[Z_m]$ e $[Y_m]$ são diagonais, as equações (3.26) e (3.27) estão desacopladas e suas soluções são conhecidas (BUDNER, 1970).

Lembrando que as soluções das equações diferenciais de cada modo já foram estudadas no capítulo anterior.

3.4 – Matrizes de impedâncias e admitâncias no domínio modal (KUROKAWA, 2003)

As equações diferenciais de uma linha de n fases são escritas como sendo:

$$-\frac{d[V]}{dx} = [Z][I] \quad (3.33)$$

$$-\frac{d[I]}{dx} = [Y][V] \quad (3.34)$$

As relações entre as tensões e as correntes de fase no domínio modal são:

$$[V_m] = [T_v]^{-1} [V] \Rightarrow [V] = [T_v] [V_m] \quad (3.35)$$

$$[I_m] = [T_i]^{-1} [I] \Rightarrow [I] = [T_i] [I_m] \quad (3.36)$$

Substituindo (3.35) e (3.36) nas equações (3.33) e (3.34), têm-se:

$$-\frac{d[T_v][V_m]}{dx} = [Z][T_i][I_m] \quad (3.37)$$

$$-\frac{d[T_i][I_m]}{dx} = [Y][T_v][V_m] \quad (3.38)$$

Manipulando (3.37) e (3.38), obtêm-se:

$$-\frac{d[V_m]}{dx} = [T_v]^{-1} [Z][T_i][I_m] \quad (3.39)$$

$$-\frac{d[\mathbf{I}_m]}{dx} = [\mathbf{T}_I]^{-1}[\mathbf{Y}][\mathbf{T}_V][\mathbf{V}_m] \quad (3.40)$$

Sendo:

$$[\mathbf{Z}_m] = [\mathbf{T}_V]^{-1}[\mathbf{Z}][\mathbf{T}_I] \quad (3.41)$$

$$[\mathbf{Y}_m] = [\mathbf{T}_I]^{-1}[\mathbf{Y}][\mathbf{T}_V] \quad (3.42)$$

As matrizes $[\mathbf{Z}_m]$ e $[\mathbf{Y}_m]$ são, respectivamente, as matrizes de impedância longitudinal e de admitância transversal escritas no domínio modal.

Essas matrizes são escritas como sendo:

$$[\mathbf{Z}_m] = \begin{bmatrix} Z_{m1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{m2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & Z_{mn} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$[\mathbf{Y}_m] = \begin{bmatrix} Y_{m1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{m2} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & Y_{mn} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Portanto, foram apresentadas as matrizes de impedância longitudinal e de admitância transversal da linha.

3.5 – Relação entre as matrizes $[\mathbf{T}_V]$ e $[\mathbf{T}_I]$

Considere uma linha de n fases caracterizadas por suas matrizes $[\mathbf{Z}]$ e $[\mathbf{Y}]$, considerando na linha polifásica que a impedância mútua entre as fases i e j é idêntica à impedância mútua entre as fases j e i , pode-se escrever para essa linha:

$$[\mathbf{Z}] = [\mathbf{Z}]^T \quad (3.45)$$

$$[Y] = [Y]^T \quad (3.46)$$

Onde:

$[Z]^T$ é a transposta de $[Z]$;

$[Y]^T$ é a transposta de $[Y]$.

Conforme visto nas equações (3.13) e (3.14), têm-se:

$$[\lambda] = [T_v]^{-1} [Z][Y][T_v] \quad (3.47)$$

$$[\lambda] = [T_i]^{-1} [Y][Z][T_i] \quad (3.48)$$

Transpondo a equação (3.48), fica:

$$[\lambda]^T = \left([T_i]^{-1} [Y][Z][T_i] \right)^T \quad (3.49)$$

$$[\lambda]^T = \left\{ \left([T_i]^{-1} [Y] \right) \right\} \left\{ ([Z][T_i]) \right\}^T \quad (3.50)$$

$$[\lambda]^T = ([Z][T_i])^T \left([T_i]^{-1} [Y] \right)^T \quad (3.51)$$

$$[\lambda]^T = [T_i]^T [Z][Y] \left([T_i]^{-1} \right)^T \quad (3.52)$$

Sabendo que, $[\lambda] = [\lambda]^T$, as equações (3.47) e (3.52) são iguais, ou seja:

$$[T_v]^{-1} [Z][Y][T_v] = [T_i]^T [Z][Y] \left([T_i]^{-1} \right)^T \quad (3.53)$$

Portanto:

$$[T_v]^{-1} = [T_1]^T \quad (3.54)$$

3.6 – Relação entre $[\lambda]$, $[Z_m]$ e $[Y_m]$

Multiplicando a equação (3.41) pela equação (3.42), tem-se:

$$[Z_m][Y_m] = [T_v]^{-1} [Z][T_1][T_1]^{-1} [Y][T_v] \quad (3.55)$$

Então:

$$[Z_m][Y_m] = [T_v]^{-1} [Z][Y][T_v] \quad (3.56)$$

$$[Z_m][Y_m] = [\lambda] \quad (3.57)$$

Fazendo o produto das equações (3.42) e (3.41), tem-se:

$$[Y_m][Z_m] = [T_1]^{-1} [Y][T_v][T_v]^{-1} [Z][T_1] \quad (3.58)$$

Agora desenvolvendo a equação (3.58), obtém-se:

$$[Y_m][Z_m] = [T_1]^{-1} [Y][Z][T_1] \quad (3.59)$$

Fazendo a comparação das equações (3.14) e (3.59), tem-se:

$$[Y_m][Z_m] = [\lambda] \quad (3.60)$$

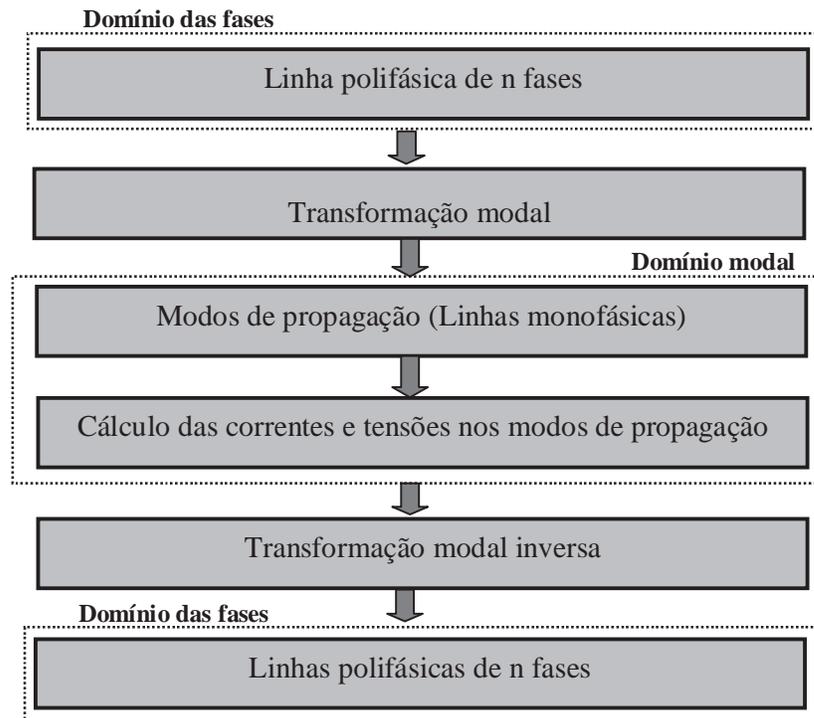
As equações (3.55) e (3.58) mostram que os produtos $[Z_m][Y_m]$ e $[Y_m][Z_m]$ são iguais. Portanto, as matrizes $[Z_m]$ e $[Y_m]$ são matrizes diagonais.

3.7 - Procedimento para se calcular as correntes e tensões nos terminais de uma linha utilizando o modelo modal

Verifica-se que para utilizar o modelo modal de linhas de transmissão, inicialmente a linha deve ser separada em seus modos de propagação que comportam-se como sendo linhas monofásicas. Em seguida calcula-se as correntes e tensões nos modos de propagação da linha, para finalizar, estas correntes e tensões modais são convertidas, por meio de uma matriz de transformação modal adequada, para o domínio das fases.

A figura N°08 mostra, na forma de diagrama de blocos, o procedimento para calcular as correntes e tensões nos terminais de uma linha utilizando o modelo modal.

Figura N°08 - Representação em diagrama de blocos de uma linha no domínio modal.



Fonte: Souza Junior (2011)

3.8 – Conclusão

Neste capítulo, mostrou-se o processo de decomposição modal de linhas de transmissão. A representação modal de linhas permite que uma linha de transmissão de n fases seja decomposta em seus n modos de propagação.

A vantagem de se representar a linha por meio de seus modos de propagação está no fato de que cada um dos modos comporta-se como uma linha monofásica. Desse modo, uma linha polifásica de n fases pode ser representada como sendo n linhas monofásicas independentes, cujas equações de correntes e tensões são conhecidas e cujas soluções foram mostradas no capítulo anterior.

A decomposição da linha em seus modos de propagação é feita por meio de uma transformação de similaridade, onde a matriz de transformação é uma matriz cujas colunas correspondem a um conjunto de autovetores do produto matricial $[Z][Y]$.

Uma vez que as matrizes $[Z]$ e $[Y]$ que são usadas para obter a matriz de transformação da linha são variáveis em função da frequência, deve-se obter um conjunto de autovetores para cada frequência.

CAPÍTULO 4

DESENVOLVIMENTO DO MODELO DE LINHAS DE TRANSMISSÃO BIFÁSICAS DIRETAMENTE NO DOMÍNIO DAS FASES

4.1 – Introdução

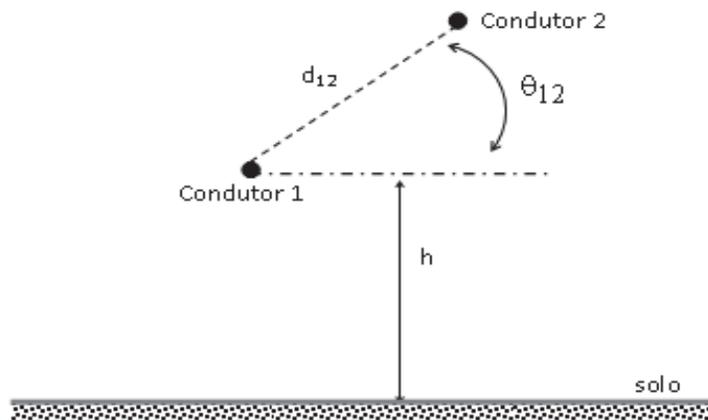
Neste capítulo será feita uma abordagem inicial a respeito de um modelo analítico para linhas de transmissão bifásica. Este modelo terá como base a representação da linha no domínio modal. No entanto a matriz de decomposição modal, que faz a conversão fase-modo-fase, será obtida analiticamente em função dos parâmetros da linha.

O método foi desenvolvido analiticamente para uma linha bifásica genérica, que é caracterizada por suas matrizes de impedância longitudinal $[Z]$ e de admitância transversal $[Y]$.

4.2 – Desenvolvimento do modelo

Seja a silhueta de uma linha bifásica genérica sem plano de simetria vertical, vista de lado conforme mostra a figura N°09.

Figura N°09 – Representação de uma linha de transmissão bifásica genérica sem plano de simetria vertical.

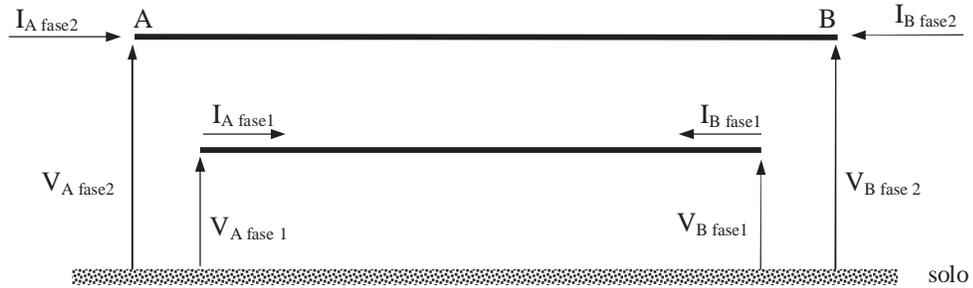


Fonte: Souza Junior (2011)

Na figura N°09, os condutores 1 e 2 são elementos da linha bifásica. O condutor 1 encontra-se a uma altura genérica h . Na mesma figura, d_{12} é a distância genérica entre os condutores 1 e 2 e θ_{12} pode assumir quaisquer valores.

A figura N°10, mostra as correntes e tensões de fase nos terminais A e B da linha mostrada figura N°09.

Figura N°10 – Linha bifásica genérica sem plano de simetria vertical com as correntes e tensões.



Fonte: Souza Junior (2011)

Na figura N°10, temos que, A e B são os terminais da linha $V_{A \text{ fase } 1}$ e $V_{A \text{ fase } 2}$ são tensões de fase 1 e fase 2 respectivamente no terminal A da linha enquanto que $V_{B \text{ fase } 1}$ e $V_{B \text{ fase } 2}$ são tensões de fase 1 e fase 2 respectivamente no terminal B da linha. Já $I_{A \text{ fase } 1}$ e $I_{A \text{ fase } 2}$ são correntes de fase 1 e fase 2 no terminal A da linha e $I_{B \text{ fase } 1}$ e $I_{B \text{ fase } 2}$ são correntes de fase 1 e fase 2 no terminal B da linha.

Para a figura N°10, podemos escrever as matrizes de impedâncias longitudinais $[Z]$ e admitâncias transversais $[Y]$ da linha conforme mostraremos abaixo.

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{22} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Se a linha bifásica descrita anteriormente for representada no domínio modal, deve-se obter as matrizes de impedância longitudinal $[Z_m]$ e de admitância transversal $[Y_m]$ no domínio modal, a partir das seguintes relações (WEDEPOHL, 1996; BUDNER, 1970), obtêm-se:

$$[Z_m] = [T_v]^{-1} [Z] ([T_v]^{-1})^T \quad (4.3)$$

$$[Y_m] = [T_v]^{-1} [Y] [T_v] \quad (4.4)$$

Nas equações (4.3) e (4.4) $[T_v]$ é uma matriz cujas colunas são os autovetores associados aos autovalores do produto $[Z][Y]$. As matrizes $[T_v]^T$ e $[T_v]^{-1}$ são, respectivamente a transposta e a inversa da matriz $[T_v]$. As matrizes $[Z_m]$ e $[Y_m]$ são as matrizes podem ser escritas como:

$$[T_v] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$[T_v]^{-1} = \begin{bmatrix} t_{11}^{-1} & t_{12}^{-1} \\ t_{21}^{-1} & t_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

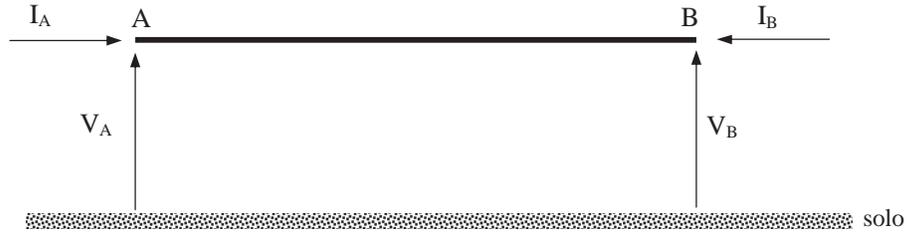
As matrizes $[Z_m]$ e $[Y_m]$ são as matrizes diagonais e podem ser escritas como (BUDNER, 1970):

$$[Z_m] = \begin{bmatrix} Z_{m11} & 0 \\ 0 & Z_{m22} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$[Y_m] = \begin{bmatrix} Y_{m11} & 0 \\ 0 & Y_{m22} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

No domínio modal, a linha bifásica mencionada anteriormente é representada por meio de seus dois modos de propagação que se comportam como duas linhas monofásicas independentes. A figura N°11 mostra um modo genérico de uma linha de transmissão bifásica.

Figura Nº11 - Modo genérico de uma linha de transmissão bifásica.



Fonte: Souza Junior (2011)

Na figura Nº11, V_A e V_B são as tensões transversais nos terminais A e B respectivamente, enquanto que os termos I_A e I_B são as correntes longitudinais nos terminais A e B respectivamente do modo de propagação. A relação entre as correntes e tensões descritas anteriormente são escritas como sendo (BUDNER, 1970):

$$V_A = V_B \cosh(\sqrt{ZY}d) + Z_c I_B \sinh(\sqrt{ZY}d) \quad (4.9)$$

$$I_A = -I_B \cosh(\sqrt{ZY}d) + \frac{V_B}{Z_c} \sinh(\sqrt{ZY}d) \quad (4.10)$$

Nas equações (4.9) e (4.10) Z e Y são, a impedância longitudinal e a admitância transversal respectivamente do modo. O termo Z_c é a impedância característica do modo e é escrita como sendo (MARTI, 1982; CHIPMAN, 1976).

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \quad (4.11)$$

Deste modo, as equações (4.9) e (4.10) para o modos 1 e 2 da linha bifásica descrita anteriormente, podem ser escritas como sendo:

$$V_{m1A} = V_{m1B} \cosh(\sqrt{Z_{m11} Y_{m11}} d) + Z_{cm1} I_{m1B} \sinh(\sqrt{Z_{m11} Y_{m11}} d) \quad (4.12)$$

$$I_{m1A} = -I_{m1B} \cosh(\sqrt{Z_{m11} Y_{m11}} d) + \frac{V_{m1B}}{Z_{cm1}} \sinh(\sqrt{Z_{m11} Y_{m11}} d) \quad (4.13)$$

Analogamente, para o modo 2, têm-se:

$$V_{m2A} = V_{m2B} \cosh(\sqrt{Z_{m22} Y_{m22}} d) + Z_{cm2} I_{m2B} \sinh(\sqrt{Z_{m22} Y_{m22}} d) \quad (4.14)$$

$$I_{m2A} = -I_{m2B} \cosh(\sqrt{Z_{m22} Y_{m22}} d) + \frac{V_{m2B}}{Z_{cm2}} \sinh(\sqrt{Z_{m22} Y_{m22}} d) \quad (4.15)$$

Onde, nas equações (4.12) - (4.15), V_{m1A} e V_{m1B} são as tensões transversais nos terminais A e B respectivamente do modo 1, enquanto que os termos I_{m1A} e I_{m1B} são as correntes longitudinais nos terminais A e B respectivamente do modo 1 de propagação da linha (BUDNER, 1970).

É possível escrever as equações (4.13) - (4.15) na forma matricial como sendo:

$$\begin{bmatrix} V_{A \text{ mod1}} \\ V_{A \text{ mod2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\sqrt{Z_{m11} Y_{m11}} d) & 0 \\ 0 & \cosh(\sqrt{Z_{m22} Y_{m22}} d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{B \text{ mod1}} \\ V_{B \text{ mod2}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{cm1} \sinh(\sqrt{Z_{m11} Y_{m11}} d) & 0 \\ 0 & Z_{cm2} \sinh(\sqrt{Z_{m22} Y_{m22}} d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{B \text{ mod1}} \\ I_{B \text{ mod2}} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\begin{bmatrix} I_{A \text{ mod1}} \\ I_{A \text{ mod2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\sqrt{Z_{m11} Y_{m11}} d) & 0 \\ 0 & \cosh(\sqrt{Z_{m22} Y_{m22}} d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{B \text{ mod1}} \\ I_{B \text{ mod2}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_{cm1}} \sinh(\sqrt{Z_{m11} Y_{m11}} d) & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z_{cm2}} \sinh(\sqrt{Z_{m22} Y_{m22}} d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{B \text{ mod1}} \\ V_{B \text{ mod2}} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

As equações (4.16) e (4.17) podem ser escritas de forma mais resumida, desta maneira:

$$[V_A] = [A][V_B] + [B][I_B] \quad (4.18)$$

$$[I_A] = [C][V_B] + [D][I_B] \quad (4.19)$$

Sendo:

$$[A] = \begin{bmatrix} \cosh(\sqrt{Z_{m11} Y_{m11}} d) & 0 \\ 0 & \cosh(\sqrt{Z_{m22} Y_{m22}} d) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} Z_{cm1} \sinh(\sqrt{Z_{m11} Y_{m11}} d) & 0 \\ 0 & Z_{cm2} \sinh(\sqrt{Z_{m22} Y_{m22}} d) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_{cm1}} \sinh(\sqrt{Z_{m11} Y_{m11}} d) & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z_{cm2}} \sinh(\sqrt{Z_{m22} Y_{m22}} d) \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \cosh(\sqrt{Z_{m11} Y_{m11}} d) & 0 \\ 0 & \cosh(\sqrt{Z_{m22} Y_{m22}} d) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Temos que as grandezas de fase-modo obedecem às seguintes relações:

$$[V_{\text{modo}}] = [T_I]^T [V_{\text{fase}}] \quad (4.24)$$

$$[I_{\text{modo}}] = [T_I]^{-1} [I_{\text{fase}}] \quad (4.25)$$

Na equação (4.24) $[V_{\text{fase}}]$ é o vetor com as tensões de fase enquanto que $[V_{\text{modo}}]$ é o vetor com as tensões modais, e na equação (4.25) $[I_{\text{fase}}]$ é o vetor com as correntes de fase da linha e $[I_{\text{modo}}]$ é o vetor com as correntes dos modos da linha.

Na equação (4.25) $[T_I]$ é uma matriz cujas colunas são os autovetores associados aos autovalores do produto $[Y][Z]$, e $[T_I]^{-1}$ é a inversa da matriz $[T_I]$. As matrizes $[T_V]$ e $[T_I]$ obedecem a seguinte relação (WEDEPHOL, 1996):

$$[T_I]^T = [T_V]^{-1} \quad (4.26)$$

Substituindo as equações (4.24) e (4.25) nas equações (4.18) e (4.19) manipulando-as adequadamente, obtêm-se:

$$[\mathbf{V}_{A \text{ fase}}] = [\mathbf{T}_1]^{-T} [\mathbf{A}] [\mathbf{T}_1]^T [\mathbf{V}_{B \text{ fase}}] + [\mathbf{T}_1]^{-T} [\mathbf{B}] [\mathbf{T}_1]^{-1} [\mathbf{I}_{B \text{ fase}}] \quad (4.27)$$

$$[\mathbf{I}_{A \text{ fase}}] = [\mathbf{T}_1] [\mathbf{C}] [\mathbf{T}_1]^T [\mathbf{V}_{B \text{ fase}}] - [\mathbf{T}_1] [\mathbf{D}] [\mathbf{T}_1]^{-1} [\mathbf{I}_{B \text{ fase}}] \quad (4.28)$$

As equações (4.27) e (4.28) podem ser escritas em função somente da matriz $[\mathbf{T}_v]$.

Deste modo, com base na equação (4.26), as equações (4.27) e (4.28) tornam-se:

$$[\mathbf{V}_{A \text{ fase}}] = [\mathbf{T}_v] [\mathbf{A}] [\mathbf{T}_v]^{-1} [\mathbf{V}_{B \text{ fase}}] + [\mathbf{T}_v] [\mathbf{B}] [\mathbf{T}_v]^{-T} [\mathbf{I}_{B \text{ fase}}] \quad (4.29)$$

$$[\mathbf{I}_{A \text{ fase}}] = ([\mathbf{T}_v]^{-1})^T [\mathbf{C}] [\mathbf{T}_v]^{-1} [\mathbf{V}_{B \text{ fase}}] - ([\mathbf{T}_v]^{-1})^T [\mathbf{D}] [\mathbf{T}_v]^T [\mathbf{I}_{B \text{ fase}}] \quad (4.30)$$

As equações (4.29) e (4.30) podem ser escritas, resumidamente, como sendo:

$$[\mathbf{V}_{A \text{ fase}}] = [\mathbf{M}_1] [\mathbf{V}_{B \text{ fase}}] + [\mathbf{M}_2] [\mathbf{I}_{B \text{ fase}}] \quad (4.31)$$

$$[\mathbf{I}_{A \text{ fase}}] = [\mathbf{M}_3] [\mathbf{V}_{B \text{ fase}}] - [\mathbf{M}_4] [\mathbf{I}_{B \text{ fase}}] \quad (4.32)$$

Onde:

$$[\mathbf{M}_1] = [\mathbf{T}_v] [\mathbf{A}] [\mathbf{T}_v]^{-1} \quad (4.33)$$

$$[\mathbf{M}_2] = [\mathbf{T}_v] [\mathbf{B}] [\mathbf{T}_v]^{-T} \quad (4.34)$$

$$[\mathbf{M}_3] = ([\mathbf{T}_v]^{-1})^T [\mathbf{C}] [\mathbf{T}_v]^{-1} \quad (4.35)$$

$$[\mathbf{M}_4] = ([\mathbf{T}_v]^{-1})^T [\mathbf{D}] [\mathbf{T}_v]^T \quad (4.36)$$

Substituindo as equações (4.5), (4.6) e (4.20) na equação (4.33) e a desenvolvendo matematicamente, obtém-se:

$$[\mathbf{M}_1] = \begin{bmatrix} t_{11} t_{11}^{-1} & t_{12} t_{11}^{-1} \\ t_{11} t_{12}^{-1} & t_{12} t_{12}^{-1} \end{bmatrix} \cosh(\gamma_{m1} d) + \begin{bmatrix} t_{21} t_{21}^{-1} & t_{22} t_{21}^{-1} \\ t_{21} t_{22}^{-1} & t_{22} t_{22}^{-1} \end{bmatrix} \cosh(\gamma_{m2} d) \quad (4.37)$$

Analogamente, substituindo as matrizes $[\mathbf{T}_v]$ e $[\mathbf{T}_v]^{-1}$, bem como as matrizes $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{C}]$ e $[\mathbf{D}]$ nas expressões de $[\mathbf{M}_2]$, $[\mathbf{M}_3]$ e $[\mathbf{M}_4]$ e fazendo as operações matemáticas necessárias, obtém-se:

$$[\mathbf{M}_2] = \begin{bmatrix} -t_{11}^2 & -t_{11} t_{12} \\ -t_{11} t_{12} & -t_{12}^2 \end{bmatrix} Z_{cm1} \sinh(\gamma_{m1} d) + \begin{bmatrix} -t_{21}^2 & -t_{21} t_{22} \\ -t_{22} t_{21} & t_{22}^2 \end{bmatrix} Z_{cm2} \sinh(\gamma_{m2} d) \quad (4.38)$$

$$[\mathbf{M}_3] = \begin{bmatrix} (t_{11}^{-1})^2 & t_{11}^{-1} t_{21}^{-1} \\ t_{11}^{-1} t_{21}^{-1} & t_{12}^{-1} t_{21}^{-1} \end{bmatrix} \frac{1}{Z_{cm1}} \sinh(\gamma_{m1} d) + \begin{bmatrix} t_{21}^{-1} t_{12}^{-1} & t_{21}^{-1} t_{22}^{-1} \\ t_{22}^{-1} t_{12}^{-1} & (t_{22}^{-1})^2 \end{bmatrix} \frac{1}{Z_{cm2}} \sinh(\gamma_{m2} d) \quad (4.39)$$

$$[\mathbf{M}_4] = \begin{bmatrix} -t_{11} t_{11}^{-1} & -t_{11} t_{21}^{-1} \\ -t_{12} t_{11}^{-1} & -t_{12} t_{21}^{-1} \end{bmatrix} \cosh(\gamma_{m1} d) + \begin{bmatrix} -t_{21} t_{12}^{-1} & -t_{21} t_{22}^{-1} \\ -t_{22} t_{12}^{-1} & -t_{21} t_{22}^{-1} \end{bmatrix} \cosh(\gamma_{m2} d) \quad (4.40)$$

Substituindo as equações (4.37) e (4.38) na equação (4.31) e a colocando na forma matricial, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{A \text{ fase1}} \\ \mathbf{V}_{A \text{ fase2}} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} t_{11} t_{11}^{-1} & t_{12} t_{11}^{-1} \\ t_{11} t_{12}^{-1} & t_{12} t_{12}^{-1} \end{bmatrix} \cosh(\gamma_{m1} d) + \begin{bmatrix} t_{21} t_{21}^{-1} & t_{22} t_{21}^{-1} \\ t_{21} t_{22}^{-1} & t_{22} t_{22}^{-1} \end{bmatrix} \cosh(\gamma_{m2} d) \right) \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{B \text{ fase1}} \\ \mathbf{V}_{B \text{ fase2}} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} -t_{11}^2 & -t_{11} t_{12} \\ -t_{11} t_{12} & -t_{12}^2 \end{bmatrix} Z_{cm1} \sinh(\gamma_{m1} d) + \begin{bmatrix} -t_{21}^2 & -t_{21} t_{22} \\ -t_{22} t_{21} & t_{22}^2 \end{bmatrix} Z_{cm2} \sinh(\gamma_{m2} d) \right) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{B \text{ fase1}} \\ \mathbf{I}_{B \text{ fase2}} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Chamando:

$$[\mathbf{K}_1] = \begin{bmatrix} t_{11} t_{11}^{-1} & t_{12} t_{11}^{-1} \\ t_{11} t_{12}^{-1} & t_{12} t_{12}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$[\mathbf{K}_2] = \begin{bmatrix} t_{21} t_{21}^{-1} & t_{22} t_{21}^{-1} \\ t_{21} t_{22}^{-1} & t_{22} t_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$[\mathbf{K}_3] = \begin{bmatrix} -t_{11}^2 & -t_{11} t_{12} \\ -t_{11} t_{12} & -t_{12}^2 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$[\mathbf{K}_4] = \begin{bmatrix} -t_{21}^2 & -t_{21} t_{22} \\ -t_{22} t_{21} & -t_{22}^2 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Portanto, substituindo as equações (4.42)-(4.45) na equação (4.41), obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{A \text{ fase1}} \\ \mathbf{V}_{A \text{ fase2}} \end{bmatrix} = \left([\mathbf{K}_1] \cosh(\gamma_{m1} \mathbf{d}) + [\mathbf{K}_2] \cosh(\gamma_{m2} \mathbf{d}) \right) \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{B \text{ fase1}} \\ \mathbf{V}_{B \text{ fase2}} \end{bmatrix} - \left([\mathbf{K}_3] Z_{cm1} \operatorname{sen h}(\gamma_{m1} \mathbf{d}) + [\mathbf{K}_4] Z_{cm2} \operatorname{sen h}(\gamma_{m2} \mathbf{d}) \right) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{B \text{ fase1}} \\ \mathbf{I}_{B \text{ fase2}} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Da mesma forma, substituindo as equações (4.39) e (4.40) na equação (4.32) e a colocando na forma matricial, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{A \text{ fase1}} \\ \mathbf{I}_{A \text{ fase2}} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} (t_{11}^{-1})^2 & t_{11}^{-1} t_{21}^{-1} \\ t_{11}^{-1} t_{21}^{-1} & (t_{22}^{-1})^2 \end{bmatrix} \frac{1}{Z_{cm1}} \operatorname{sen h}(\gamma_{m1} \mathbf{d}) + \begin{bmatrix} t_{21}^{-1} t_{12}^{-1} & t_{21}^{-1} t_{22}^{-1} \\ t_{22}^{-1} t_{12}^{-1} & (t_{22}^{-1})^2 \end{bmatrix} \frac{1}{Z_{cm2}} \operatorname{sen h}(\gamma_{m2} \mathbf{d}) \right) \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{B \text{ fase1}} \\ \mathbf{V}_{B \text{ fase2}} \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -t_{11} t_{11}^{-1} & -t_{11} t_{21}^{-1} \\ -t_{12} t_{11}^{-1} & -t_{12} t_{21}^{-1} \end{bmatrix} \cosh(\gamma_{m1} \mathbf{d}) + \begin{bmatrix} -t_{21} t_{12}^{-1} & -t_{21} t_{22}^{-1} \\ -t_{22} t_{12}^{-1} & -t_{22} t_{22}^{-1} \end{bmatrix} \cosh(\gamma_{m2} \mathbf{d}) \right) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{B \text{ fase1}} \\ \mathbf{I}_{B \text{ fase2}} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

Chamando:

$$[P_1] = \begin{bmatrix} (t_{11}^{-1})^2 & t_{11}^{-1} t_{21}^{-1} \\ t_{11}^{-1} t_{21}^{-1} & t_{12}^{-1} t_{21}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

$$[P_2] = \begin{bmatrix} t_{21}^{-1} t_{12}^{-1} & t_{21}^{-1} t_{22}^{-1} \\ t_{22}^{-1} t_{12}^{-1} & (t_{22}^{-1})^2 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

$$[P_3] = \begin{bmatrix} -t_{11} t_{11}^{-1} & -t_{11} t_{21}^{-1} \\ -t_{12} t_{11}^{-1} & -t_{12} t_{21}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$[P_4] = \begin{bmatrix} -t_{21} t_{12}^{-1} & -t_{21} t_{22}^{-1} \\ -t_{22} t_{12}^{-1} & -t_{21} t_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Logo, substituindo as equações (4.48)-(4.51) na equação (4.47) obtém-se:

$$\begin{bmatrix} I_{A \text{ fase1}} \\ I_{A \text{ fase2}} \end{bmatrix} = \left([P_1] \frac{1}{Z_{cm1}} \sinh(\gamma_{m1}d) + [P_2] \frac{1}{Z_{cm2}} \sinh(\gamma_{m2}d) \right) \begin{bmatrix} V_{B \text{ fase1}} \\ V_{B \text{ fase2}} \end{bmatrix} - \left([P_3] \cosh(\gamma_{m1}d) + [P_4] \cosh(\gamma_{m2}d) \right) \begin{bmatrix} I_{B \text{ fase1}} \\ I_{B \text{ fase2}} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

As equações (4.46) e (4.52) mostram as relações entre as correntes e tensões de fase nos terminais A e B de uma linha bifásica desenvolvida diretamente nas fases da mesma.

Observa-se que as correntes e tensões são expressas em função das matrizes $[T_v]$ e $[T_v]^{-1}$, das funções de propagação e das impedâncias características dos modos de propagação da linha. As matrizes $[T_v]$ e $[T_v]^{-1}$, bem como as funções de propagação e as impedâncias características dos modos são escritas em função das impedâncias longitudinais e das admitâncias transversais da linha. O desenvolvimento detalhado das matrizes que constituem as equações (4.46) e (4.52) será mostrado nos próximos itens deste capítulo.

4.3 – Obtenção das funções de propagação, das matrizes $[K]$ e $[P]$ e das impedâncias características

Neste item, serão mostradas as funções que relacionam as de propagação, as matrizes [K] e [P] e as impedâncias características com as matrizes de impedâncias longitudinais [Z] e de admitâncias transversais [Y] da linha.

4.3.1 – Obtenção das funções de propagação dos modos (γ_{m1} e γ_{m2}).

Para a linha representada na figura N°11, as matrizes de impedância longitudinal e admitância transversal são, respectivamente, dadas por:

$$[Z] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{12} & z_{22} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{12} & y_{22} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

A função de propagação modal da linha, são os autovalores do produto matricial [Z][Y] ou [Y][Z] (WEDEPHOL, 1996), sendo que tais autovalores podem ser obtidos a partir da seguinte expressão (LIPSCHUTZ, 1976):

$$\det([S] - \lambda [I]) = 0 \quad (4.55)$$

Onde [S] = [Z][Y] e λ são os autovalores de [S].

A partir de (4.53) e (4.54), é possível escrever [S] como sendo:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Onde:

$$S_{11} = z_{11}y_{11} + z_{12}y_{12} \quad (4.57)$$

$$S_{12} = z_{11}y_{12} + z_{12}y_{22} \quad (4.58)$$

$$S_{21} = z_{12}y_{11} + z_{22}y_{12} \quad (4.59)$$

$$S_{22} = z_{12}y_{12} + z_{22}y_{22} \quad (4.60)$$

Desenvolvendo a equação (4.55), obtém-se:

$$\lambda^2 - \lambda(S_{11} + S_{22}) + (S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21}) = 0 \quad (4.61)$$

A partir da equação (4.61) obtêm-se dois autovalores para [S], que são escritos como sendo:

$$\lambda_1 = \frac{(S_{11} + S_{22}) + \sqrt{(S_{11} - S_{22})^2 + 4S_{12}S_{21}}}{2} \quad (4.62)$$

$$\lambda_2 = \frac{(S_{11} + S_{22}) - \sqrt{(S_{11} - S_{22})^2 + 4S_{12}S_{21}}}{2} \quad (4.63)$$

Assim, verifica-se que os autovalores das equações (4.62) e (4.63) em função dos parâmetros da linha podem ser escritos como sendo:

$$\lambda_1 = \frac{(z_{11}y_{11} + 2z_{12}y_{12} + z_{22}y_{22}) + \sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 - 2z_{11}z_{22}y_{11}y_{22} - 4z_{12}^2y_{11}y_{22} + 4z_{12}z_{22}y_{22}^2 + 4z_{11}z_{22}y_{11}y_{22}}}{2} \quad (4.64)$$

$$\lambda_2 = \frac{(z_{11}y_{11} + 2z_{12}y_{12} + z_{22}y_{22}) - \sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 - 2z_{11}z_{22}y_{11}y_{22} - 4z_{12}^2y_{11}y_{22} + 4z_{12}z_{22}y_{22}^2 + 4z_{11}z_{22}y_{11}y_{22}}}{2} \quad (4.65)$$

Sabemos que a função de propagação dos modos pode ser escrita como sendo:

$$\gamma_m = \sqrt{\lambda_m} \quad (4.66)$$

Desta forma, a função de propagação para os modos 1 e 2 da linha bifásica pode ser escritos como:

$$\gamma_{m1} = \sqrt{\frac{(z_{11}y_{11} + 2z_{12}y_{12} + z_{22}y_{22}) + \sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 - 2z_{11}z_{22}y_{11}y_{22} - 4z_{12}^2y_{11}y_{22} + 4z_{12}z_{22}y_{22}^2 + 4z_{11}z_{22}y_{11}y_{22}}}{2}} \quad (4.67)$$

$$\gamma_{m2} = \sqrt{\frac{(z_{11}y_{11} + 2z_{12}y_{12} + z_{22}y_{22}) - \sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 - 2z_{11}z_{22}y_{11}y_{22} - 4z_{12}^2y_{11}y_{22} + 4z_{12}z_{22}y_{22}^2 + 4z_{11}z_{22}y_{11}y_{22}}}{2}} \quad (4.68)$$

Logo, as equações (4.67) e (4.68) são as equações da função de propagação nos modos 1 e 2 da linha desenvolvidas diretamente em função dos parâmetros da linha.

4.3.2 – Obtenção das matrizes [K] e [P].

Os elementos das matrizes [K] e [P] podem ser escritos como sendo:

$$[K_1] = \begin{bmatrix} t_{11} t_{11}^{-1} & t_{12} t_{11}^{-1} \\ t_{11} t_{12}^{-1} & t_{12} t_{12}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

$$[K_2] = \begin{bmatrix} t_{21} t_{21}^{-1} & t_{22} t_{21}^{-1} \\ t_{21} t_{22}^{-1} & t_{22} t_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

$$[K_3] = \begin{bmatrix} -t_{11}^2 & -t_{11} t_{12} \\ -t_{11} t_{12} & -t_{12}^2 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

$$[K_4] = \begin{bmatrix} -t_{21}^2 & -t_{21} t_{22} \\ -t_{22} t_{21} & t_{22}^2 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

$$[P_1] = \begin{bmatrix} (t_{11}^{-1})^2 & t_{11}^{-1} t_{21}^{-1} \\ t_{11}^{-1} t_{21}^{-1} & t_{12}^{-1} t_{21}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

$$[P_2] = \begin{bmatrix} t_{21}^{-1} t_{12}^{-1} & t_{21}^{-1} t_{22}^{-1} \\ t_{22}^{-1} t_{12}^{-1} & (t_{22}^{-1})^2 \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

$$[P_3] = \begin{bmatrix} -t_{11} t_{11}^{-1} & -t_{11} t_{21}^{-1} \\ -t_{12} t_{11}^{-1} & -t_{12} t_{21}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

$$[P_4] = \begin{bmatrix} -t_{21} t_{12}^{-1} & -t_{21} t_{22}^{-1} \\ -t_{22} t_{12}^{-1} & -t_{21} t_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

Nas equações (4.69)-(4.76) , verifica-se que os elementos das matrizes [K] e [P] são funções da matriz de transformação [T_v] da linha, cujas colunas são autovetores associados ao [Z][Y] da linha.

Sabe-se que os autovetores associados aos autovalores do produto [Z][Y] podem ser escritos como sendo:

$$[T_v] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

Na equação (4.77) cada coluna da matriz [T_v] é um autovetor associado a um autovalor do produto [Z][Y]. Deste modo, têm-se os seguintes autovetores:

$$[T_{v1}] = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

$$[T_{v2}] = \begin{bmatrix} T_{12} \\ T_{22} \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

O autovetor [T_{v1}] pode ser obtido a partir da solução do sistema mostrado na equação (4.80), que é escrito como sendo (WEDEPOHL, 1996):

$$([S] - \lambda_1 [I])[T_{v1}] = 0 \quad (4.80)$$

Na equação (4.78) o vetor $[T_{v1}]$ é o autovetor associado ao autovalor λ_1 do produto $[Z][Y]$ e $[I]$ é a matriz identidade.

Desenvolvendo o sistema mostrado na equação (4.78) tem-se:

$$\begin{bmatrix} S_{11} - \lambda_1 & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

Verifica-se que o sistema mostrado na equação (4.81) é indeterminado, cujas soluções são dadas por:

$$T_{11} = -\frac{S_{12}}{S_{11} - \lambda_1} T_{21} \quad (4.82)$$

É usual utilizar autovetores cujo módulo seja unitário (WEDEPOHL, 1996). Assim, considerando $[T_{v1}]$ como tendo módulo unitário, tem-se:

$$T_{11}^2 + T_{21}^2 + \dots + T_{n1}^2 = 1 \quad (4.83)$$

O sistema agora constituído pelas equações (4.82) e (4.83) possui uma única solução escrita como sendo:

$$T_{11} = -\frac{S_{12}}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}} \quad (4.84)$$

$$T_{21} = -\frac{S_{11} - \lambda_1}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}} \quad (4.85)$$

O autovetor $[T_{v2}]$ pode ser obtido a partir do sistema mostrado na equação (4.86), escrito como sendo:

$$([S] - \lambda_2 [I])[T_{v2}] = 0 \quad (4.86)$$

Usando procedimento análogo, ao que foi utilizado para obter o autovetor $[T_{v1}]$, obtêm-se:

$$T_{12} = -\frac{S_{12}}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2}} \quad (4.87)$$

$$T_{22} = \frac{S_{11} - \lambda_2}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2}} \quad (4.88)$$

Portanto, a matriz $[T_v]$ pode ser escrita como sendo:

$$[T_v] = \begin{bmatrix} -\frac{S_{12}}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}} & -\frac{S_{12}}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2}} \\ \frac{S_{11} - \lambda_1}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}} & \frac{S_{11} - \lambda_2}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2}} \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

Substituindo os elementos da matriz $[T_v]$ nas equações (4.69)-(4.76) obtêm-se os elementos das matrizes $[K]$ e $[P]$ que são escritas como sendo:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -\frac{S_{11} - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{S_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \frac{(S_{11} - \lambda_1)(S_{11} - \lambda_2)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} & \frac{S_{11} - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} \frac{S_{11} - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{S_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ -\frac{(S_{11} - \lambda_2)(S_{11} - \lambda_1)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} & -\frac{S_{11} - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} \left(-\frac{S_{12}}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}} \right)^2 & -\frac{S_{12}(S_{11} - \lambda_1)}{\left(\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2} \right)^2} \\ -\frac{S_{12}(S_{11} - \lambda_1)}{\left(\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2} \right)^2} & \left(-\frac{S_{11} - \lambda_1}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

$$\mathbf{K}_4 = \begin{bmatrix} \left(\frac{S_{12}}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2}} \right)^2 & \frac{S_{12}(S_{11} - \lambda_2)}{\left(\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2} \right)^2} \\ \frac{S_{12}(S_{11} - \lambda_2)}{\left(\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2} \right)^2} & \left(-\frac{S_{11} - \lambda_2}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \left(\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2} (S_{11} - \lambda_2)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} \right)^2 & \left(\frac{\left(\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2} \right)^2 (S_{11} - \lambda_2)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \right) \\ \left(\frac{\left(\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2} \right)^2 (S_{11} - \lambda_2)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \right) & \left(\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \left(\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2} (S_{11} - \lambda_1)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} \right)^2 & \left(\frac{\left(\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2} \right)^2 (S_{11} - \lambda_1)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \right) \\ \left(\frac{\left(\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2} \right)^2 (S_{11} - \lambda_1)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \right) & \left(\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{S_{11} - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{(S_{11} - \lambda_2)(S_{11} - \lambda_1)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} \\ -\frac{S_{12}(S_{11} - \lambda_2)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} & -\frac{S_{11} - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{bmatrix}, \quad (4.96)$$

$$\mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} -\frac{S_{11} - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{(S_{11} - \lambda_1)(S_{11} - \lambda_2)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} \\ -\frac{S_{12}(S_{11} - \lambda_1)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} & \frac{S_{11} - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{bmatrix} \quad (4.97)$$

4.3.3 – Obtenção das impedâncias características

Sabe-se que as matrizes de impedâncias e de admitâncias modais são escritas como sendo (KUROKAWA, 2003):

$$[Z_m] = [T_v]^{-1} [Z] [T_1] \quad (4.98)$$

$$[Y_m] = [T_v] [Y] [T_1]^{-1} \quad (4.99)$$

Sabendo que $[T_v]^{-1} = [T_1]^T$, e desenvolvendo as equações (4.98) e (4.99), as mesmas tornam-se:

$$[Z_m] = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 z_{11} + 2(\alpha_1 \alpha_2 z_{12}) + \alpha_2^2 z_{22} & 0 \\ 0 & \beta_1^2 z_{11} + 2(\beta_1 \beta_2 z_{12}) + \beta_2^2 z_{22} \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

$$[Y_m] = \begin{bmatrix} \phi_1^2 y_{11} + 2(\phi_1 \phi_2 y_{12}) + \phi_2^2 y_{22} & 0 \\ 0 & \rho_1^2 y_{11} + 2(\rho_1 \rho_2 y_{12}) + \rho_2^2 y_{22} \end{bmatrix} \quad (4.101)$$

Onde:

$$\alpha_1 = \left(-\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2} (S_{11} - \lambda_2)}{S_{12} (\lambda_2 - \lambda_1)} \right) \quad (4.102)$$

$$\alpha_2 = \left(-\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \quad (4.103)$$

$$\beta_1 = \left(\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2} (S_{11} - \lambda_1)}{S_{12} (\lambda_2 - \lambda_1)} \right) \quad (4.104)$$

$$\beta_2 = \left(-\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \quad (4.105)$$

$$\phi_1 = \left(-\frac{S_{12}}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}} \right) \quad (4.106)$$

$$\phi_2 = \left(-\frac{S_{11} - \lambda_1}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}} \right) \quad (4.107)$$

$$\rho_1 = \left(-\frac{S_{12}}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2}} \right) \quad (4.108)$$

$$\rho_2 = \left(\frac{S_{11} - \lambda_2}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2}} \right) \quad (4.109)$$

A impedância característica de um modo de propagação de uma linha de transmissão genérica é escrita como sendo (MARTI, 1982; CHIPMAN, 1976):

$$Z_{Cm} = \sqrt{\frac{Z_m}{Y_m}} \quad (4.110)$$

Portanto, podemos escrever a equação (4.110) função dos modos 1 e 2 da linha bifásica, logo:

$$Z_{Cm1} = \sqrt{\frac{Z_{m11}}{Y_{m11}}} \quad (4.111)$$

$$Z_{Cm2} = \sqrt{\frac{Z_{m22}}{Y_{m22}}} \quad (4.112)$$

Onde:

$$\begin{aligned}
Z_{m11} = & \left(\left[\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2} (S_{11} - \lambda_2)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} \right] (z_{11}) + \left[\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right] (z_{12}) \right) \left[\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2} (S_{11} - \lambda_2)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} \right] + \\
& \left(\left[\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2} (S_{11} - \lambda_2)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} \right] (z_{12}) + \left[\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right] (z_{22}) \right) \left[\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right]
\end{aligned} \tag{4.113}$$

$$\begin{aligned}
Y_{m11} = & \left(\left[-\frac{S_{12}}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}} \right] (y_{11}) + \left[\frac{S_{11} - \lambda_1}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}} \right] (y_{12}) \right) \left[-\frac{S_{12}}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}} \right] + \\
& \left(\left[-\frac{S_{12}}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}} \right] (y_{12}) + \left[\frac{S_{11} - \lambda_1}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}} \right] (y_{22}) \right) \left[-\frac{S_{11} - \lambda_1}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}} \right]
\end{aligned} \tag{4.114}$$

$$\begin{aligned}
Z_{m22} = & \left(\left[-\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2} (S_{11} - \lambda_1)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} \right] (z_{11}) + \left[-\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right] (z_{12}) \right) \left[-\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2} (S_{11} - \lambda_1)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} \right] + \\
& \left(\left[-\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2} (S_{11} - \lambda_1)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} \right] (z_{12}) + \left[-\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right] (z_{22}) \right) \left[-\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right]
\end{aligned} \tag{4.115}$$

$$\begin{aligned}
Y_{m22} = & \left(\left[-\frac{S_{12}}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2}} \right] (y_{11}) + \left[\frac{S_{11} - \lambda_2}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2}} \right] (y_{12}) \right) \left[-\frac{S_{12}}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2}} \right] + \\
& \left(\left[-\frac{S_{12}}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2}} \right] (y_{12}) + \left[\frac{S_{11} - \lambda_2}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2}} \right] (y_{22}) \right) \left[-\frac{S_{11} - \lambda_2}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2}} \right]
\end{aligned} \tag{4.116}$$

4.4 – Conclusão

Considerado uma linha de transmissão bifásica, neste capítulo mostramos o desenvolvimento de um modelo que nos permite calcular correntes e tensões de uma linha bifásica diretamente no domínio das fases.

As relações entre as correntes e tensões de fase da linha foram obtidas sem a necessidade de se obter numericamente os elementos da matriz de transformação. As correntes e tensões serão escritas em função única e exclusivamente em função das impedâncias longitudinais $[Z]$ e das admitâncias transversais $[Y]$ da linha no apêndice A.

CAPÍTULO 5

VALIDAÇÃO DO MODELO DESENVOLVIDO

5.1 - Introdução.

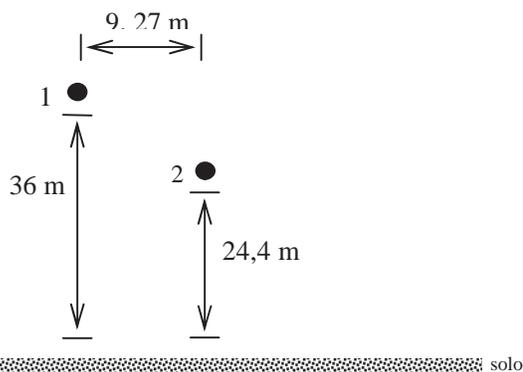
Neste capítulo, serão mostrados os resultados obtidos com o modelo desenvolvido direto domínio das fases (modelo proposto) da linha mostrado anteriormente neste trabalho e o modelo clássico (numérico) de Newton-Raphson (WEDEPOHL et al., 1996). O modelo será aplicado em uma linha bifásica sem plano de simetria vertical com comprimento de 50 km e 200 km, com frequência compreendida entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz. As simulações realizadas consideraram operações de energização de linhas com os terminais em aberto e em curto circuito, que é o procedimento básico utilizado para verificar o desempenho de modelos de linhas de transmissão utilizados em simulações de transitórios eletromagnéticos em sistemas de energia elétrica.

5.2 - Resultados obtidos

O modelo foi aplicado em uma linha bifásica sem plano de simetria vertical, onde as fases 1, 2 são constituídas de 2 condutores do tipo *Grosbeak* com raio $r = 0.0298$ m e a resistividade do solo foi considerada como sendo igual a $1000 \Omega.m$.

Essa linha foi decomposta em seus n modos. A decomposição da linha em seus n modos de propagação foi feita a partir da matriz de transformação modal $[T_V]$ que foi obtida através do método de Newton-Raphson (WEDEPOHL et al., 1996).

Figura Nº12 – Linha de transmissão bifásica.



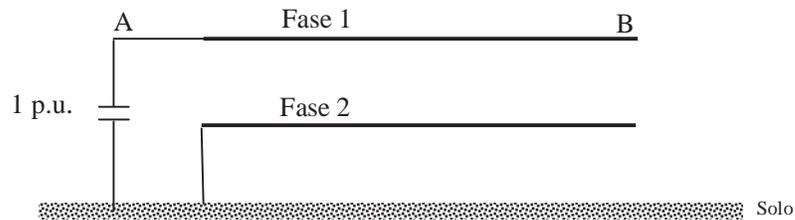
Fonte: Souza Junior (2011)

Na linha mostrada na figura N°12, os números 1 e 2 representam as fases da linha. Os parâmetros longitudinais da linha foram calculados tendo em conta os efeitos do solo e pelicular. A condutância transversal da linha foi desconsiderada e considerando a linha mostrada na figura N°12, as simulações foram feitas para obter as tensões e correntes nos terminais A e B da linha.

5.3 - Resultados obtidos para a linha em aberto

A figura N°13 mostra a linha bifásica, descrita anteriormente, sendo energizada por uma fonte de tensão constante e com o terminal receptor em aberto.

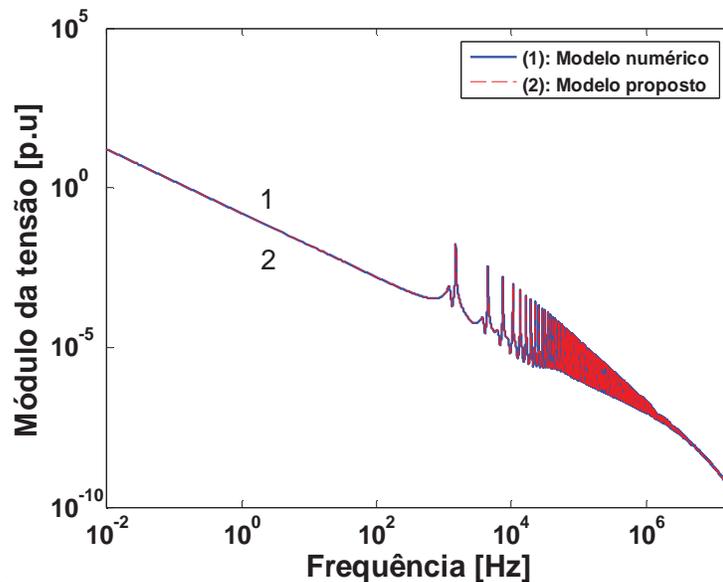
Figura N°13 – Energização da linha em aberto.



Fonte: Souza Junior (2011)

5.3.1 – Tensões no terminal B da linha em aberto das fases 1 e 2 com comprimento de 50 km e 200 km.

Figura N°14 – Tensão no terminal B da fase 1 da linha em aberto (50 km).

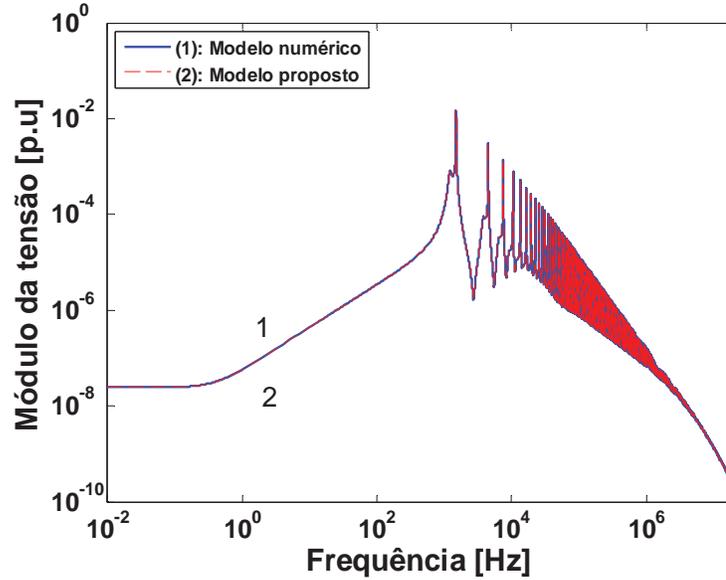


Fonte: Souza Junior (2011)

A figura. N°14, representa a tensão no terminal B da fase 1 da linha em aberto, com o comprimento de 50 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo

comportamento da curva 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^1 Hz e 10^6 Hz.

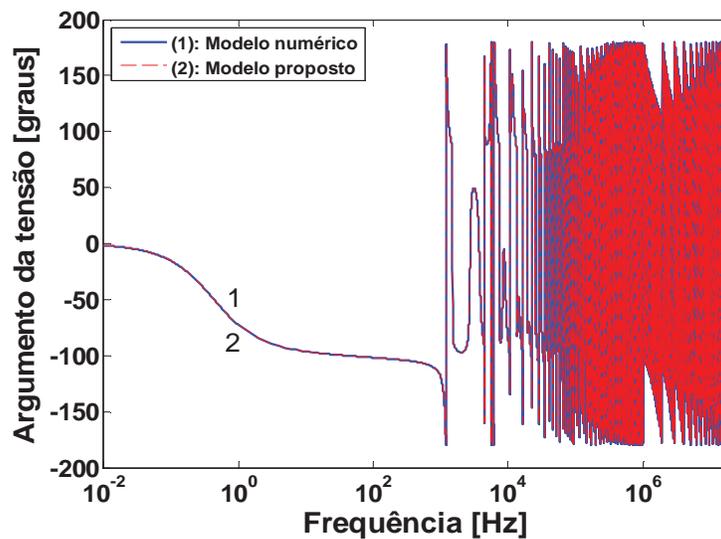
Figura Nº15 – Tensão no terminal B da fase 2 da linha em aberto (50 km).



Fonte: Souza Junior (2011)

A figura. Nº15, representa a tensão no terminal B da fase 2 da linha em aberto, com o comprimento de 50 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo comportamento da curva 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz .

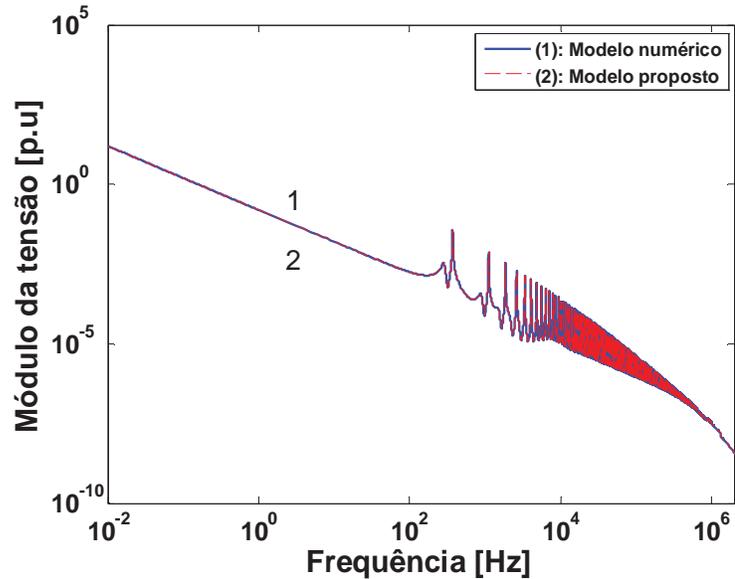
Figura Nº16 – Ângulo da tensão no terminal B da fase 2 da linha em aberto (50 km).



Fonte: Souza Junior (2011)

A figura. N°16, representa o ângulo da tensão no terminal B da fase 2 da linha em aberto, com o comprimento de 50 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo comportamento da curva 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz.

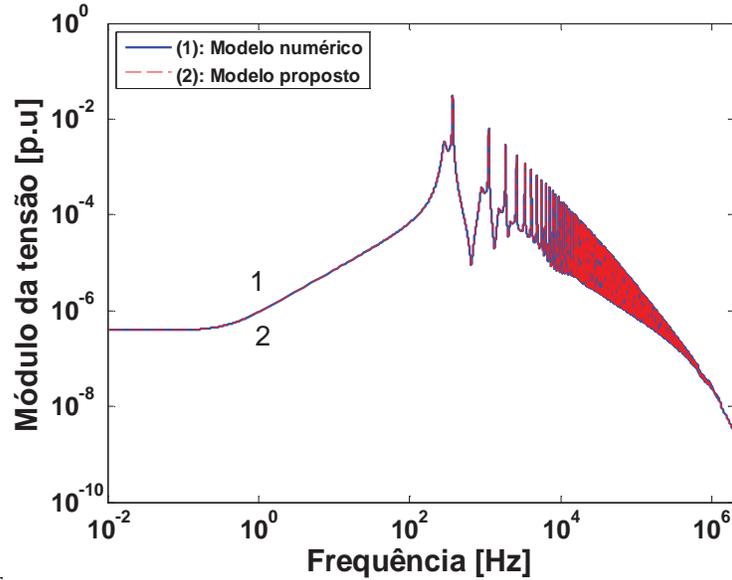
Figura N°17 – Tensão no terminal B da fase 1 da linha em aberto (200 km).



Fonte: Souza Junior (2011)

A figura. N°17, representa a tensão no terminal B da fase 2 da linha em aberto, com o comprimento de 200 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo comportamento da curva 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz.

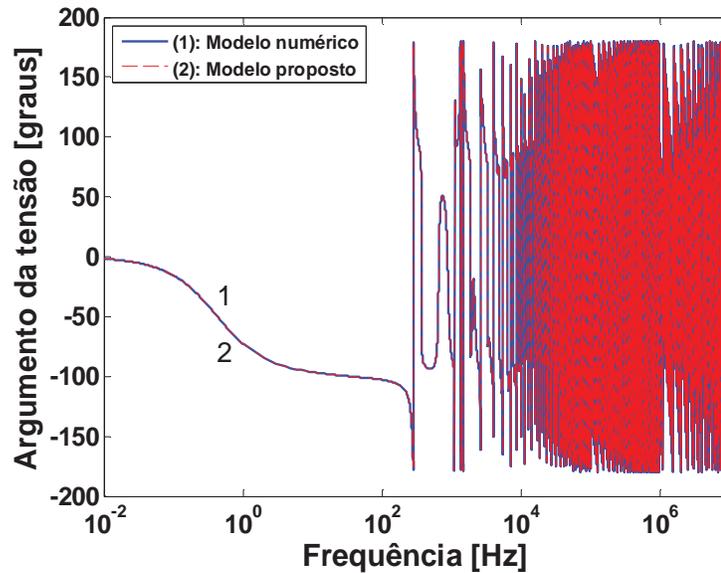
Figura N°18 – Tensão no terminal B da fase 2 da linha em aberto (200 km).



Fonte: Souza Junior (2011)

A figura. N°18, representa a tensão no terminal B da fase 2 da linha em aberto, com o comprimento de 200 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo comportamento da curva 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz.

Figura N°19 – Ângulo da tensão no terminal B da fase 2 da linha em aberto (200 km).



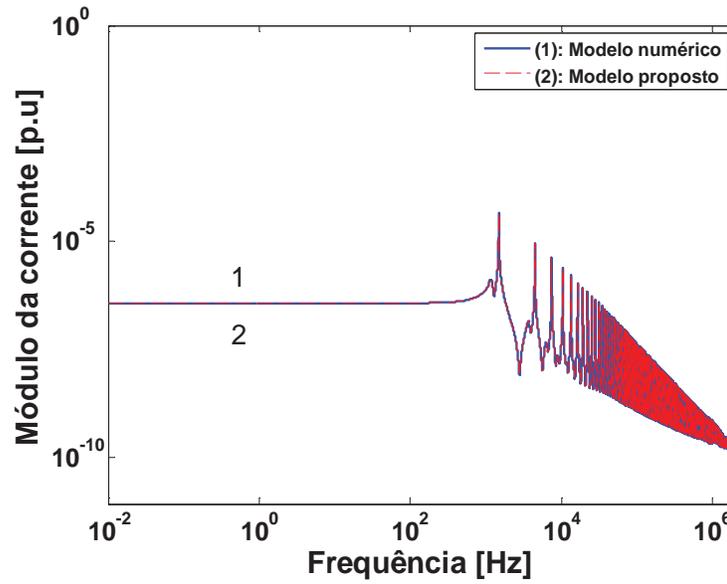
Fonte: Souza Junior (2011)

A figura. N°19, representa o ângulo da tensão no terminal B da fase 2 da linha em aberto, com o comprimento de 200 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico

tem o mesmo comportamento da curva 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^8 Hz aproximadamente.

5.3.2 – Correntes nos terminais A e B da linha em aberto das fases 1 e 2 com comprimento de 50 km e 200 km.

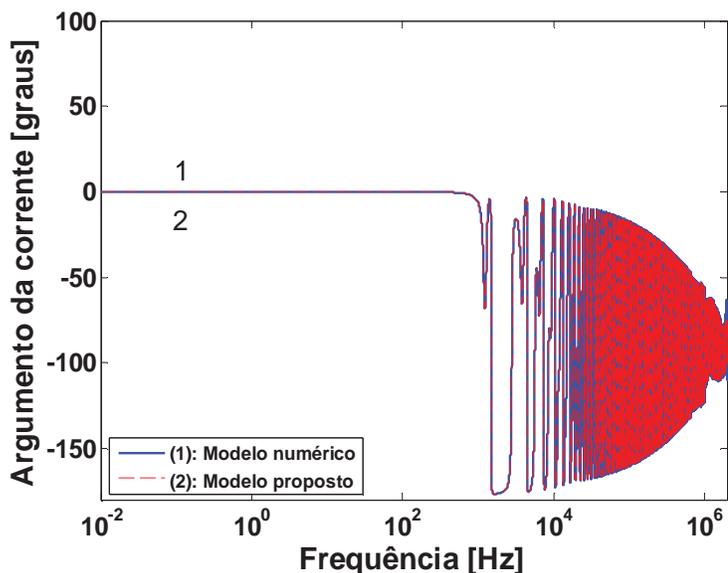
Figura Nº20 – Corrente no terminal A da fase 1 da linha em aberto (50 km).



Fonte: Souza Junior (2011)

A figura. Nº20, representa a corrente no terminal A da fase 1 da linha em aberto, com o comprimento de 50 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo comportamento da curva 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz.

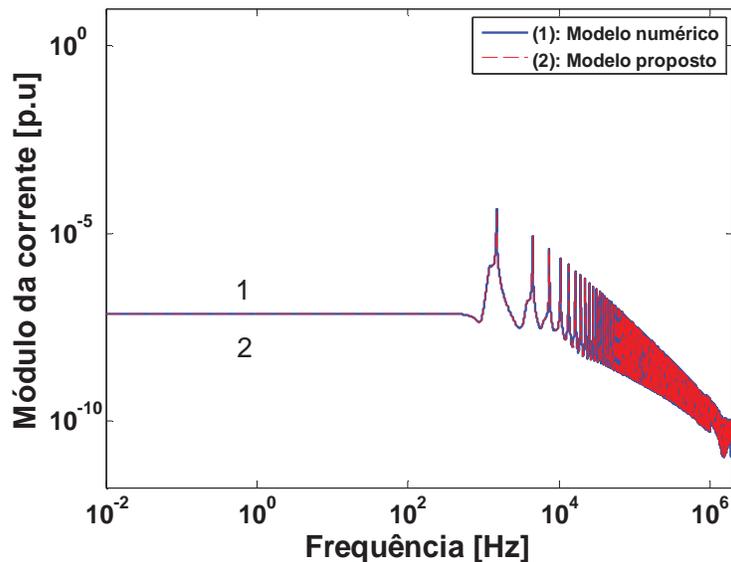
Figura Nº21 – Ângulo da corrente no terminal A da fase 1 da linha em aberto (50 km).



Fonte: Souza Junior (2011)

A figura. Nº21, representa o ângulo da corrente no terminal A da fase 1 da linha em aberto, com o comprimento de 50 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo comportamento da curva 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz.

Figura Nº22 – Corrente no terminal A da fase 2 da linha em aberto (50 km).

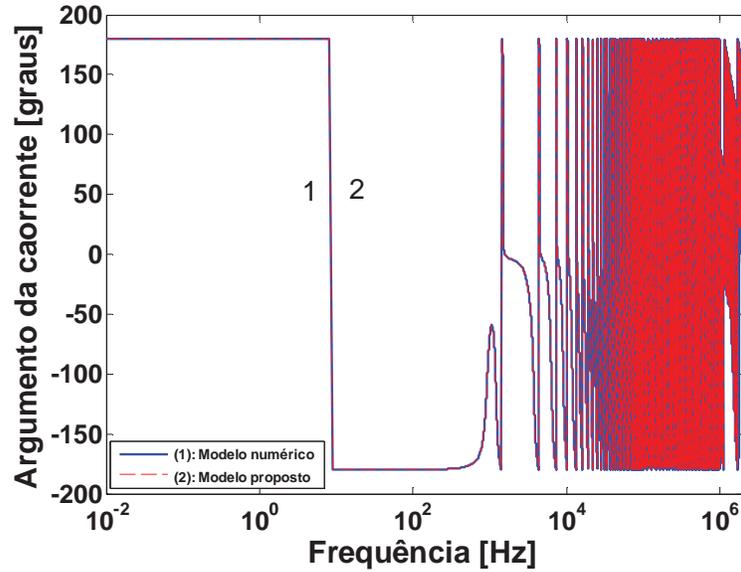


Fonte: Souza Junior (2011)

A figura. Nº22, representa a corrente no terminal A da fase 2 da linha em aberto, com o comprimento de 50 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo

comportamento da curva 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz.

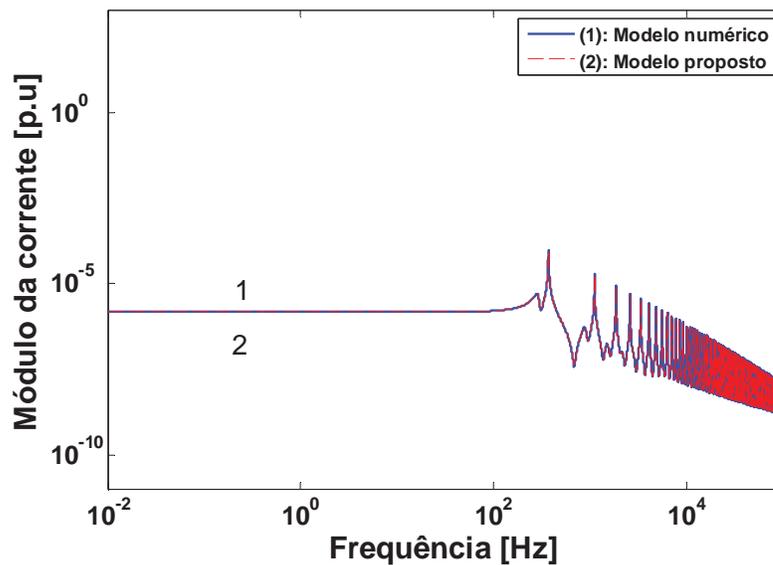
Figura Nº23 – Ângulo da corrente no terminal A da fase 2 da linha em aberto (50 km).



Fonte: Souza Junior (2011)

A figura. Nº23, representa o ângulo da corrente no terminal A da fase 2 da linha em aberto, com o comprimento de 50 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo comportamento da curva 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz.

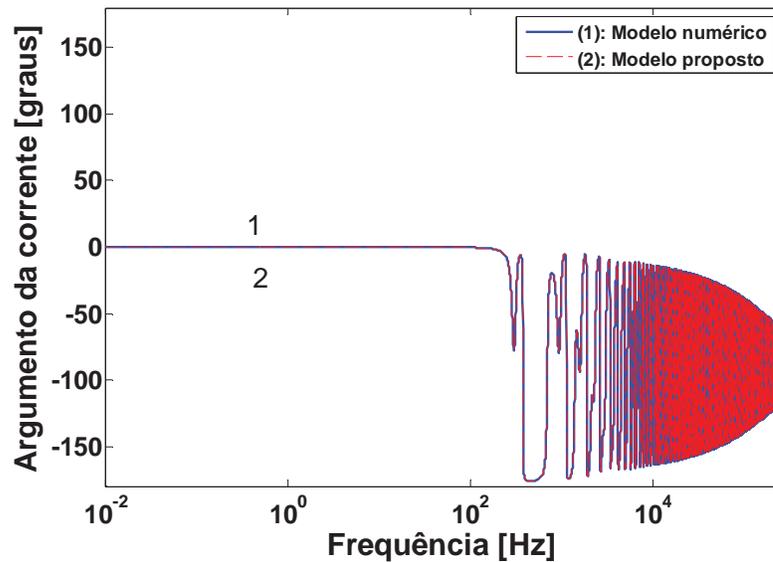
Figura Nº24 – Corrente no terminal A da fase 1 da linha em aberto (200 km).



Fonte: Souza Junior (2011)

A figura. N°24, representa a corrente no terminal A da fase 1 da linha em aberto, com o comprimento de 200 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo comportamento da curva 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^5 Hz.

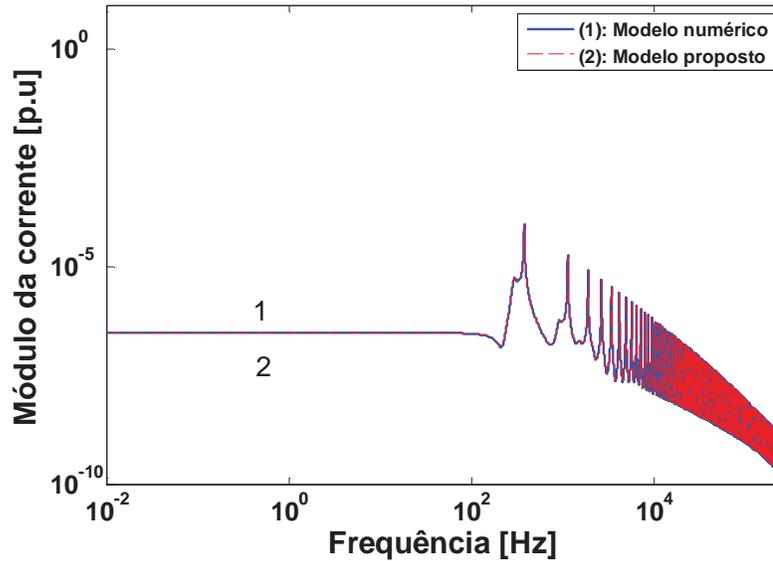
Figura N°25 – Ângulo da corrente no terminal A da fase 1 da linha em aberto (200 km).



Fonte: Souza Junior (2011)

A figura. N°25, representa o ângulo da corrente no terminal A da fase 1 da linha em aberto, com o comprimento de 200 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo comportamento da curva 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz.

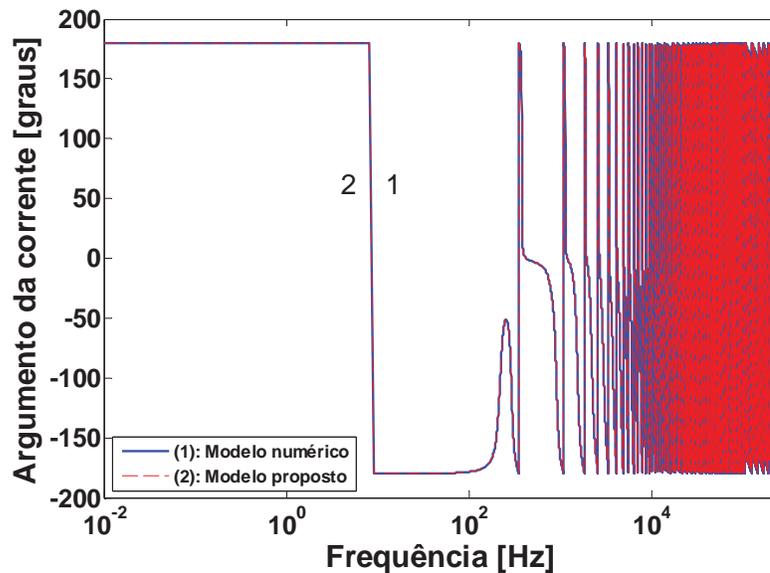
Figura Nº26 – Corrente no terminal A da fase 2 da linha em aberto (200 km).



Fonte: Souza Junior (2011)

A figura. Nº26, representa a corrente no terminal A da fase 2 da linha em aberto, com o comprimento de 200 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo comportamento da curva 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^5 Hz.

Figura Nº27 – Ângulo da corrente no terminal A da fase 2 da linha em aberto (200 km).



Fonte: Souza Junior (2011)

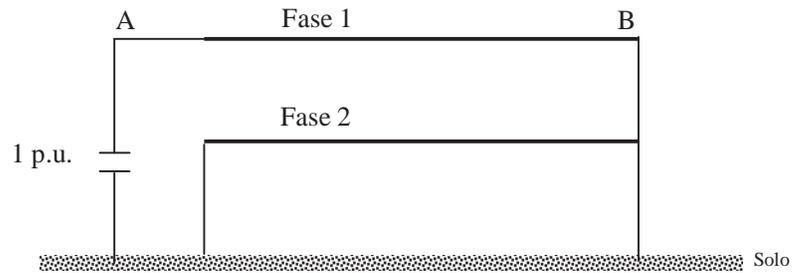
A figura. Nº27, representa o ângulo da corrente no terminal A da fase 2 da linha em aberto, com o comprimento de 200 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico

tem o mesmo comportamento da curva 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz.

5.4 – Resultados obtidos para a linha em curto circuito

A figura N°28, mostra a linha bifásica, descrita anteriormente, sendo energizada por uma fonte de tensão constante e com o terminal receptor em curto.

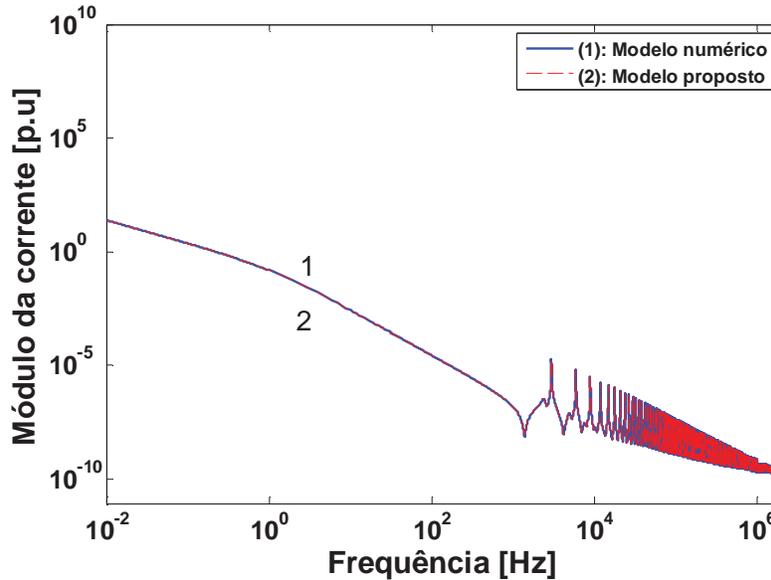
Figura N°28 – Energização da linha em curto circuito.



Fonte: Souza Junior (2011)

5.4.1 - Correntes para os terminais A e B em curto circuito da linha com o comprimento de 50 km e 200 km.

Figura N°29 – Corrente no terminal A da fase 1 da linha em curto (50 km).

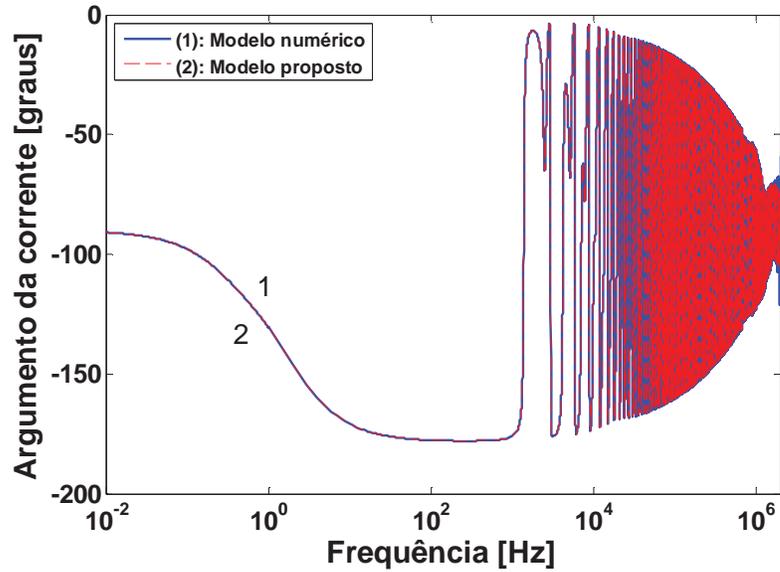


Fonte: Souza Junior (2011)

A figura N°29, representa a corrente no terminal A da fase 1 da linha em curto, com comprimento de 50 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo

comportamento que a 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz.

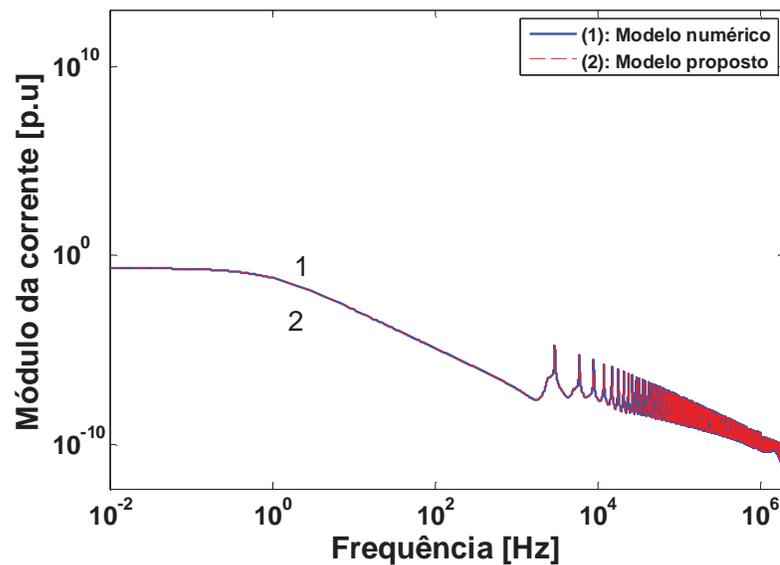
Figura Nº30 – Ângulo da corrente no terminal A da fase 1 da linha em curto (50 km).



Fonte: Souza Junior (2011)

A figura. Nº30, representa o ângulo da corrente no terminal A da fase 1 da linha em curto, com comprimento de 50 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo comportamento da curva 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^1 Hz e 10^6 Hz.

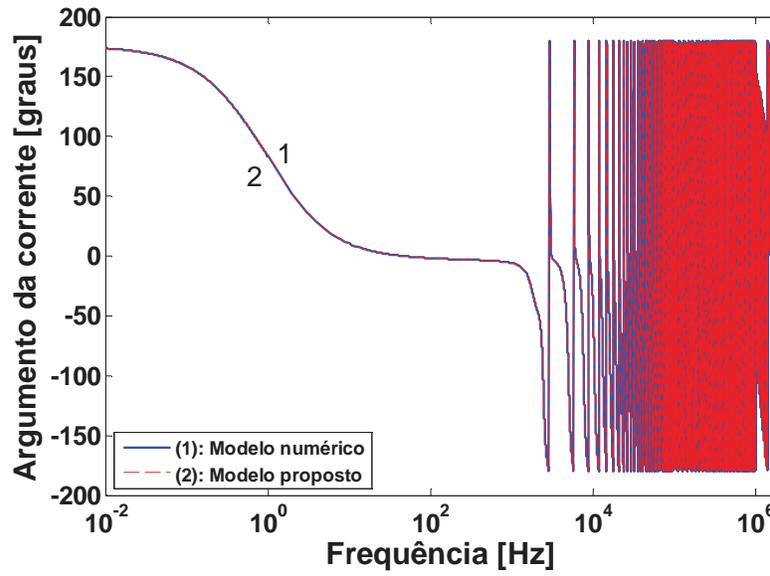
Figura Nº31 – Corrente no terminal A da fase 2 da linha em aberto (50 km).



Fonte: Souza Junior (2011)

A figura. N°31, representa a corrente no terminal A da fase 2 da linha em curto, com comprimento de 50 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo comportamento da curva 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz.

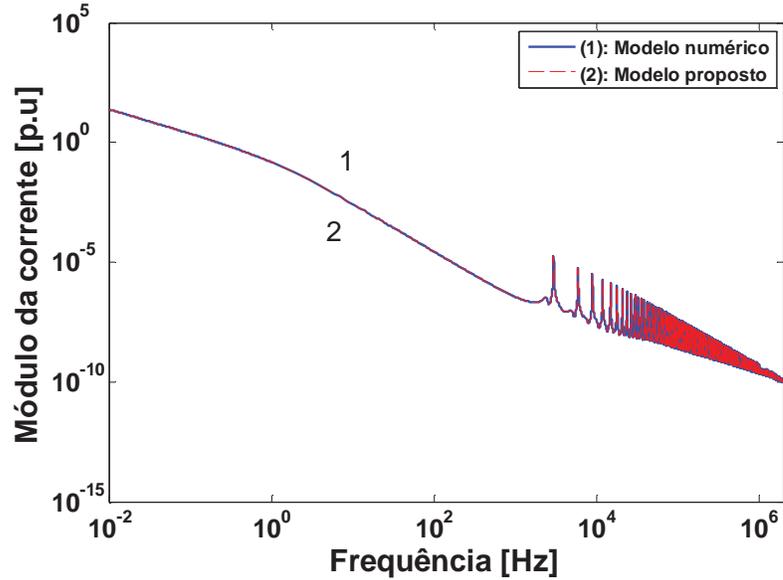
Figura N°32 – Ângulo da corrente no terminal A da fase 2 da linha em curto (50 km).



Fonte: Souza Junior (2011)

A figura. N°32, representa o ângulo da corrente no terminal A da fase 2 da linha em curto, com comprimento de 50 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo comportamento da curva 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz.

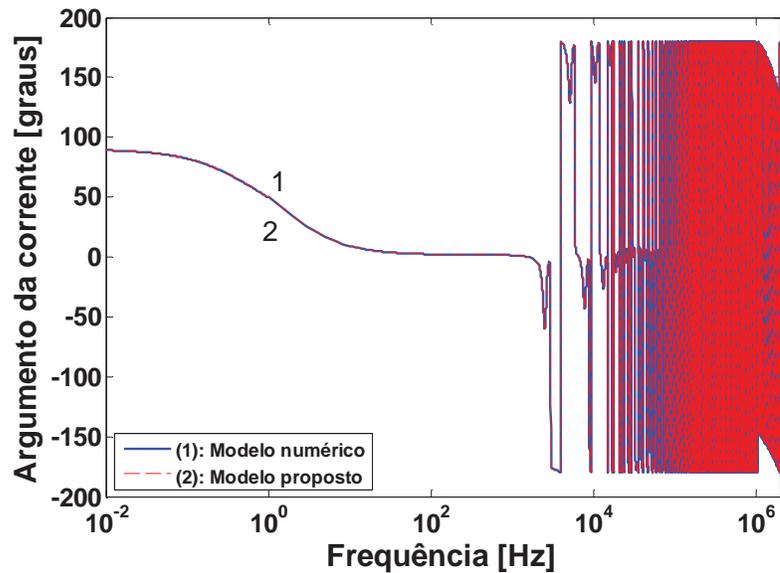
Figura N°33 – Corrente no terminal B da fase 1 da linha em curto (50 km).



Fonte: Souza Junior (2011)

A figura. N°33, representa a corrente no terminal B da fase 1 da linha em curto, com comprimento de 50 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo comportamento da curva 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz .

Figura N°34 – Ângulo da corrente no terminal B da fase 1 da linha (50 km).

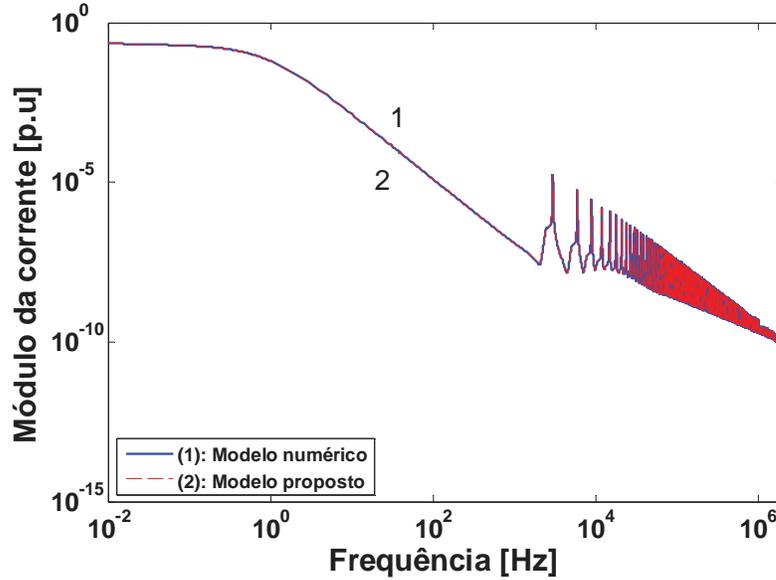


Fonte: Souza Junior (2011)

A figura. N°34, representa o ângulo da corrente no terminal B da fase 2 da linha em curto, com comprimento de 50 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o

mesmo comportamento da curva 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz.

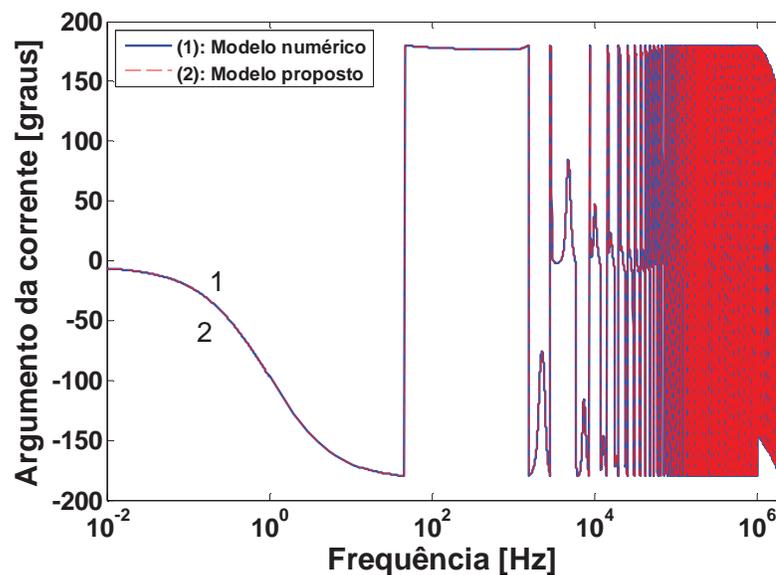
Figura Nº35 – Corrente no terminal B da fase 2 da linha em curto (50 km).



Fonte: Souza Junior (2011)

A figura. Nº35, representa a corrente no terminal B da fase 2 da linha em curto, com comprimento de 50 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo comportamento da curva 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz .

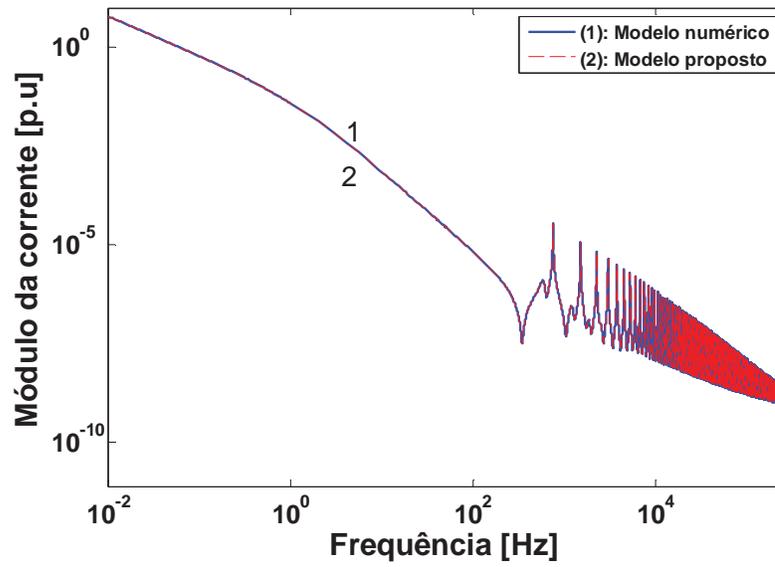
Figura Nº36 – Ângulo da corrente no terminal B da fase 2 da linha (50 km).



Fonte: Souza Junior (2011)

A figura. N°36, representa o ângulo da corrente no terminal B da fase 2 da linha em curto, com comprimento de 50 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo comportamento da curva 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz.

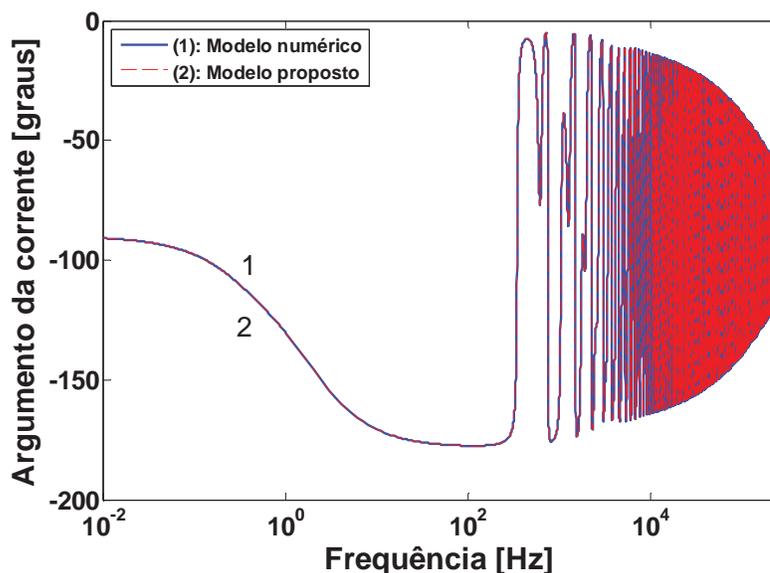
Figura N°37 – Corrente no terminal A da fase 1 da linha em curto (200 km).



Fonte: Souza Junior (2011)

A figura N°37, representa a corrente no terminal A da fase 1 da linha em curto, com comprimento de 200 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo comportamento que a 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^5 Hz.

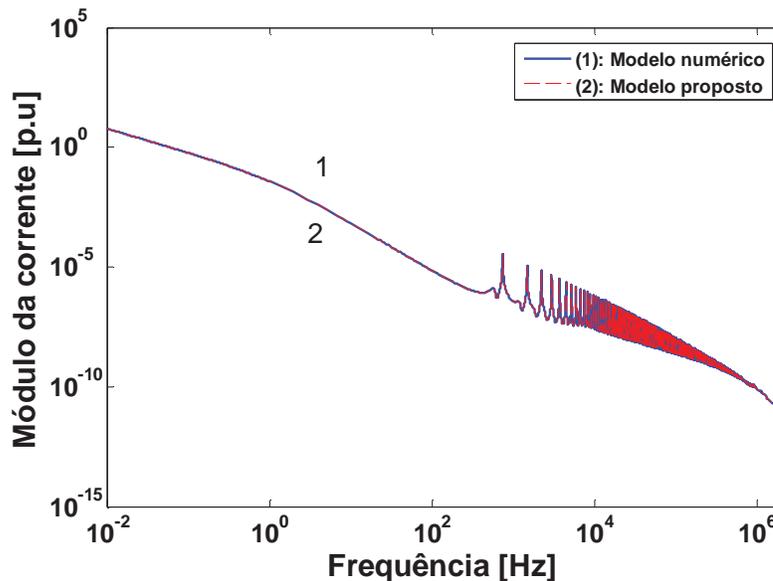
Figura Nº38 – Ângulo da corrente no terminal A da fase 1 da linha (200 km).



Fonte: Souza Junior (2011)

A figura. Nº38, representa o ângulo da corrente no terminal A da fase 1 da linha em curto, com comprimento de 200 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo comportamento da curva 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^5 Hz.

Figura Nº39 – Corrente no terminal B da fase 1 da linha em curto (200 km).

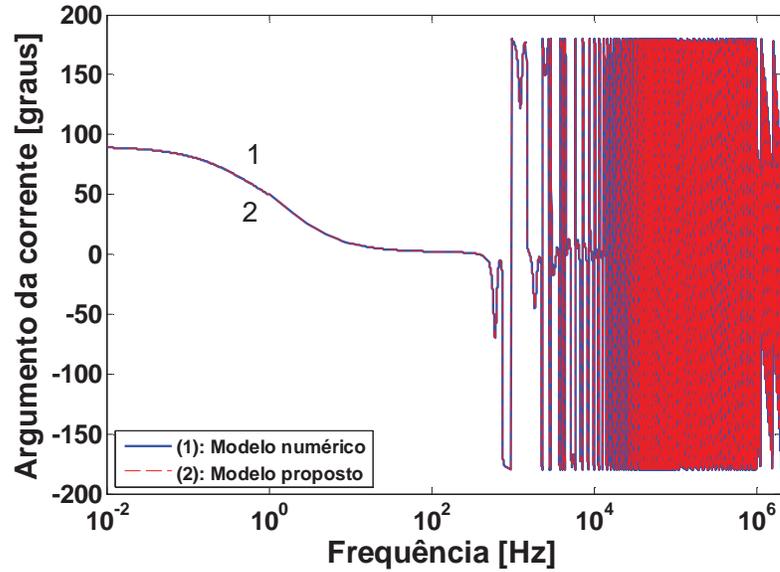


Fonte: Souza Junior (2011)

A figura Nº39, representa a corrente no terminal B da fase 1 da linha em curto, com comprimento de 200 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo

comportamento que a 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz.

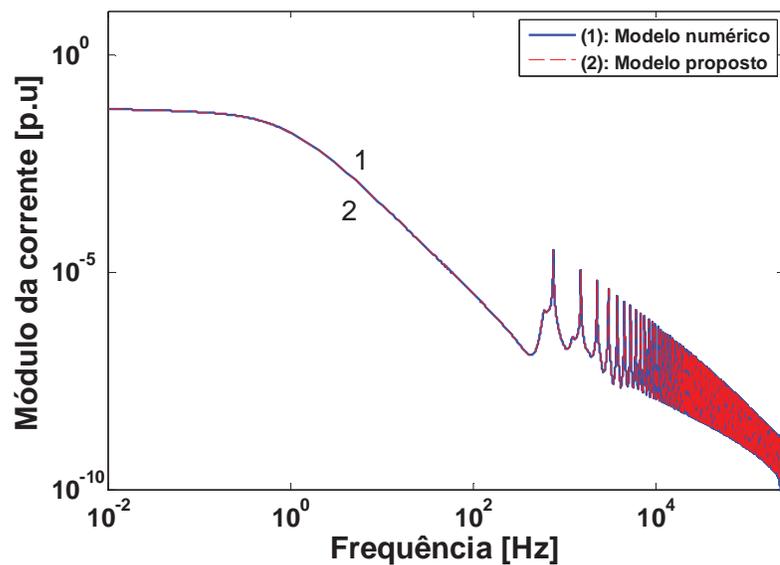
Figura Nº40 – Ângulo da corrente no terminal B da fase 1 da linha em curto (200 km).



Fonte: Souza Junior (2011)

A figura. Nº40, representa o ângulo da corrente no terminal B da fase 1 da linha em curto, com comprimento de 200 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo comportamento da curva 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz.

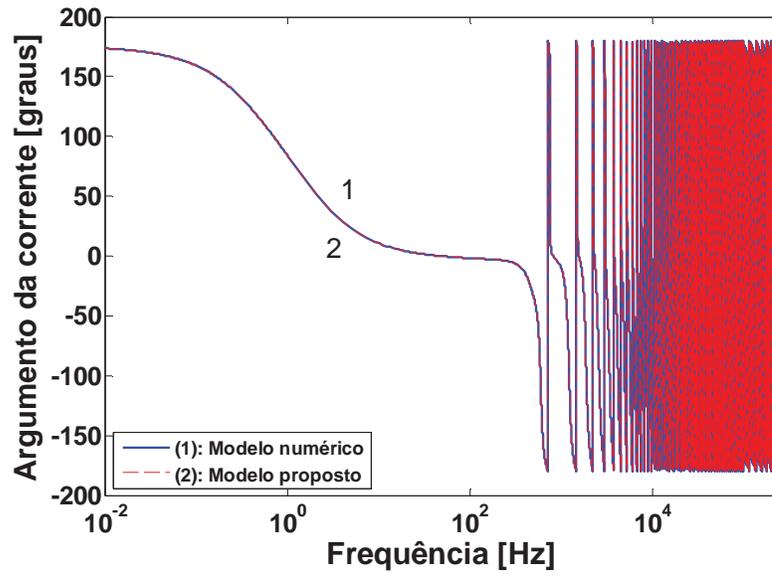
Figura Nº41 – Corrente no terminal A da fase 2 da linha em curto (200 km).



Fonte: Souza Junior (2011)

A figura N°41, representa a corrente no terminal A da fase 2 da linha em curto, com comprimento de 200 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo comportamento que a 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz.

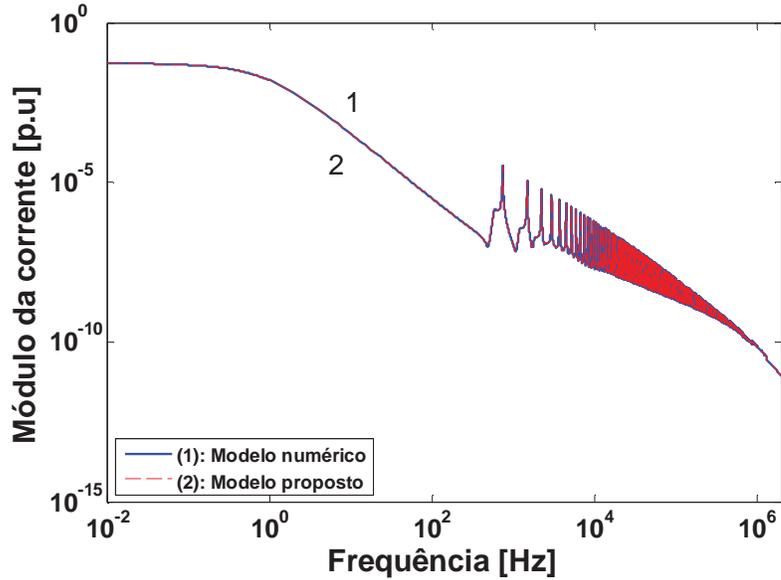
Figura N°42 – Ângulo da corrente no terminal A da fase 2 da linha (200 km).



Fonte: Souza Junior (2011)

A figura. N°42, representa o ângulo da corrente no terminal A da fase 2 da linha em curto, com comprimento de 200 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo comportamento da curva 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^5 Hz.

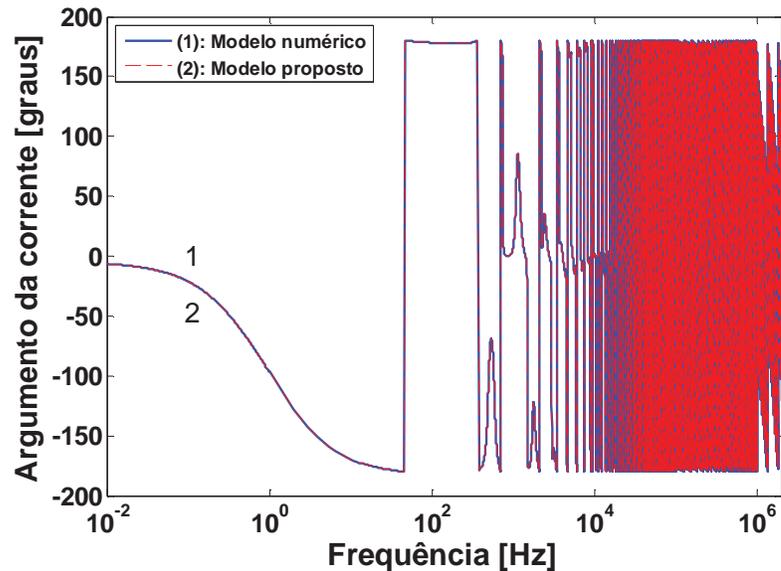
Figura Nº43 – Corrente no terminal B da fase 2 da linha em curto (200 km).



Fonte: Souza Junior (2011)

A figura Nº43, representa a corrente no terminal B da fase 2 da linha em curto, com comprimento de 200 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem o mesmo comportamento que a 2 obtida pelo modelo proposto (analítico) para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz.

Figura Nº44 – Ângulo da corrente no terminal B da fase 2 da linha em curto (200 km).



Fonte: Souza Junior (2011)

A figura. Nº44, representa o ângulo da corrente no terminal B da fase 2 da linha em curto, com comprimento de 200 km, nota-se que a curva 1 obtida pelo modelo numérico tem

o mesmo comportamento da curva 2 obtida pelo modelo analítico para frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz.

5.5 – Conclusão

Neste capítulo, as simulações foram feitas para 4 casos, no primeiro caso, foram feitas simulações para as tensões das fases 1 e 2 do terminal B da linha em aberto.

No segundo caso, as simulações feitas foram para as correntes das fases 1 e 2 da linha no terminal A da mesma em aberto.

No terceiro caso foram feitas simulações para as correntes das fases 1 e 2 da linha em curto no terminal A da mesma.

E no quarto e último caso, as simulações feitas foram para as corrente de fase 1 e 2 da linha em curto no terminal B da mesma.

Assim, mostramos que modelo proposto desenvolvido direto no domínio das fases tem o mesmo comportamento para as correntes e tensões que o modelo clássico (numérico), com frequências compreendidas entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz.

Verificamos que a validade do modelo proposto, desenvolvido e aplicado em uma linha de transmissão bifásica sem plano de simetria vertical mostrou-se eficaz, pois os resultados obtidos com este são iguais aos resultados obtidos com a utilização de um modelo clássico.

Com isso, pode-se concluir que para a linha bifásica estudada o modelo proposto é válido uma vez que este pode ser utilizado para calcular as correntes e tensões dessa linha.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

Neste trabalho foi feita uma abordagem a respeito de um modelo analítico de linha de transmissão bifásica direto nas fases e no domínio da frequência.

O modelo proposto utilizou a representação modal, mas a matriz de transformação foi obtida analiticamente em função dos parâmetros da linha.

O desenvolvimento do modelo analítico tomou como base o modelo modal. Deste modo, inicialmente foi obtida, analiticamente, uma matriz de decomposição modal que permitiu calcular analiticamente os autovalores do produto $[Z][Y]$ da linha. Uma vez obtidos os autovalores, foi possível obter os modos de propagação e a impedância característica dos modos da linha. Em seguida, foram utilizadas as soluções algébricas das equações diferenciais de uma linha monofásica, onde obtivemos as equações de correntes e tensões de cada um dos modos de propagação da linha. Em uma etapa final, as equações de correntes e tensões modais foram convertidas para o domínio das fases, resultando assim em equações algébricas que permitem calcular as correntes e tensões de fase da linha no domínio da frequência.

As simulações foram feitas para 4 casos, no primeiro caso, foram feitas simulações para as tensões das fases 1 e 2 do terminal B da linha em aberto.

No segundo caso, as simulações feitas foram para as correntes das fases 1 e 2 da linha no terminal A da mesma em aberto.

No terceiro caso foram feitas simulações para as correntes das fases 1 e 2 da linha em curto no terminal A da mesma.

E no quarto e último caso, as simulações feitas foram para as corrente de fase 1 e 2 da linha em curto no terminal B da mesma.

Portanto, mostramos que modelo desenvolvido direto no domínio das fases mostrou-se correto, pois os resultados obtidos quando comparados com o modelo clássico foram idênticos, comprovando a validade do modelo.

A vantagem do modelo é que o usuário não precisa estar familiarizado com a representação no domínio modal.

A sugestão para trabalhos futuros é que, pode-se realizar o estudo visando representar o modelo proposto diretamente no domínio do tempo.

Referências

BUDNER, A. Introduction of frequency-dependent line parameters into an electromagnetic transients program. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, New York, v. PAS-89, n. 1, p. 88-97, Jan. 1970.

CHEN, C. T. **Linear system theory and design**. New York: Holt, Rinehart and Winston. 1984. p.352.

CHIPMAN, R. A. **Teoria e problemas de linhas de transmissão**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1972. p. 276.

DALTIM, R. S. **Representação modal alternativa de linhas de transmissão trifásicas simétricas não idealmente transpostas**. 2006. 83 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica)- Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2006.

DOMMEL, H. W.; NGUYEN, H. V.; MARTÍ, J. R. Direct phase-domain modelling of frequency-dependent overhead transmission Lines. **IEEE Transactions on Power Delivery**, Vancouver, Canadá. v. 12, n. 3, p. 1335-1342, July 1997.

FARIA, A. B.; WASHINGTON, L. A.; ANTÔNIO, C. S. Modelos de linhas de transmissão no domínio das fases: estado da arte. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 14., 2002, Natal: [s.n.], 2002. p. 801-806

FUCHS, R. D. **Transmissão de energia elétrica: linhas aéreas; teoria das linhas em regime permanente**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979. p. 359.

GUSTAVSEN, B.; SENLYEN, A. Combined phase and modal domain calculation of transmission transients based on vector fitting. **IEEE Transactions on Power Delivery**, Toronto, Canadá, v. 13, n. 2, p. 596-604, April 1998.

GREENWOOD, A. **Electrical transients in power systems**. United States: John Wiley & Sons, 1977. p. 200.

HEDMAN, D. E. **Teorias das linhas de transmissão-II**. 2. ed. Santa Maria: UFSM, 1983. v. 2 -3.

HOFMANN, L. Series expansions for line series impedances considering different specific resistances, magnetic permeabilities, and dielectric permittivities of conductors, air, and ground. **IEEE Trans. on Power Delivery**, New York, v. 18, n. 2, p. 570-664, 2003.

KUROKAWA, S. **Parâmetros longitudinais e transversais de linhas de transmissão calculados a partir das correntes e tensões de fase**. 2003. 169 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.

LIPSCHUTZ, S. **Álgebra linear**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1974. p. 397.

MARTÍ, J. R. Accurate modelling of frequency-dependent transmission lines in electromagnetic transient simulations. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, New York, v. PAS-101, n. 1, p.147-155, 1982.

NAIDU, S. R. **Transitórios eletromagnéticos em sistemas de potência**. Campina-Grande: Grafset, , 1985. p. 316.

OPERADOR nacional do sistema elétrico. Brasília: [s.n.], 2011. Disponível em: <http://www.ons.org.br/conheca_sistema/mapas_sin.aspx>. Acesso em: 10 Ago. 2011.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Makron do Brasil, 1994. v. 2, p.618.

TAVARES, M. C.; PISSOLATO, J.; PORTELA, C. M. Quasi-modes multiphase transmission line model. **Electric Power Systems Research, Lausanne**, v. 49, n.3, p. 159-167, 1999.

WEDEPHOL, L. M.; NGUYEN, H. V.; IRWIN, G. D. Frequency-dependent transformation matrices for untransposed transmission lines using Newton-Raphson method. **IEEE Trans. Power Delivery**, Hoes, v. 11, n. 3, p. 1538-1546, Aug. 1996.

Apêndice A

A.1 – Introdução

No capítulo 5 desenvolvemos as equações dos autovalores λ_1 e λ_2 , da matriz de transformação $[T_v]$ e das matrizes de impedância $[Z_m]$ e de admitâncias modais, todas em função da matriz $[S]$, onde a mesma é dada pela equação (5.4).

Neste capítulo, mostraremos as soluções das equações dos autovalores λ_1 e λ_2 , da matriz de transformação $[T_v]$ e das matrizes de impedância $[Z_m]$ e de admitâncias modais, somente em função dos parâmetros da linha.

A.2 – Solução dos autovalores λ_1 e λ_2

Temos que os autovalores λ_1 e λ_2 , são dados por:

$$\lambda_1 = \frac{(S_{11} + S_{22}) + \sqrt{(S_{11} - S_{22})^2 + 4S_{12}S_{21}}}{2} \quad (\text{A.1})$$

$$\lambda_2 = \frac{(S_{11} + S_{22}) - \sqrt{(S_{11} - S_{22})^2 + 4S_{12}S_{21}}}{2} \quad (\text{A.2})$$

Desenvolvendo as equações (A.1) e (A.2) e as deixando em função dos parâmetros da linha $[Z][Y]$, obtêm-se:

$$\lambda_1 = \frac{(z_{11}y_{11} + 2z_{12}y_{12} + z_{22}y_{22}) + \sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 - 2z_{11}z_{22}y_{11}y_{22} - 4z_{12}^2y_{11}y_{22} + 4z_{12}z_{22}y_{22}^2 + 4z_{11}z_{22}y_{11}y_{22}}}{2} \quad (\text{A.3})$$

$$\lambda_2 = \frac{(z_{11}y_{11} + 2z_{12}y_{12} + z_{22}y_{22}) - \sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 - 2z_{11}z_{22}y_{11}y_{22} - 4z_{12}^2y_{11}y_{22} + 4z_{12}z_{22}y_{22}^2 + 4z_{11}z_{22}y_{11}y_{22}}}{2} \quad (\text{A.4})$$

A função de propagação de uma linha pode ser escrita como sendo:

$$\gamma_m = \sqrt{\lambda_m} \quad (\text{A.5})$$

Portanto:

$$\gamma_{m1} = \sqrt{\frac{(z_{11}y_{11} + 2z_{12}y_{12} + z_{22}y_{22}) + \sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 - 2z_{11}z_{22}y_{11}y_{22} - 4z_{12}^2y_{11}y_{22} + 4z_{12}z_{22}y_{22}^2 + 4z_{11}z_{22}y_{11}y_{22}}}{2}} \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma_{m2} = \sqrt{\frac{(z_{11}y_{11} + 2z_{12}y_{12} + z_{22}y_{22}) - \sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 - 2z_{11}z_{22}y_{11}y_{22} - 4z_{12}^2y_{11}y_{22} + 4z_{12}z_{22}y_{22}^2 + 4z_{11}z_{22}y_{11}y_{22}}}{2}} \quad (\text{A.7})$$

Portanto, as equações (A.3), (A.4), (A.5) e (A.6) estão calculadas somente em função dos parâmetros da linha.

A.3 – Solução para a matriz $[T_v]$

Para a matriz de transformação $[T_v]$, que é dada por:

$$[T_v] = \begin{bmatrix} -\frac{S_{12}}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}} & -\frac{S_{12}}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2}} \\ \frac{S_{11} - \lambda_1}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}} & \frac{S_{11} - \lambda_2}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Calculando cada autovetor da matriz $[T_v]$, obtêm-se:

$$[T_v(1,1)] = -\frac{z_{11}y_{12} + z_{12}y_{22}}{\sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 + 2z_{12}^2y_{12}y_{22} + z_{12}^2y_{22}^2 + \left(\frac{(4z_{12}^2y_{12} + z_{11}y_{11} + z_{22}y_{22}) - \sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 + 2z_{11}z_{22}y_{11}y_{22} - 4z_{12}^2y_{11}y_{22} - 4z_{12}z_{22}y_{22}^2 + 4z_{11}z_{22}y_{11}y_{22}}}{2} \right)}} \quad (\text{A.9})$$

$$[T_v(1,2)] = -\frac{z_{11}y_{12} + z_{12}y_{22}}{\sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 + 2z_{12}^2y_{12}y_{22} + z_{12}^2y_{22}^2 + \left(\frac{(4z_{12}^2y_{12} + z_{11}y_{11} + z_{22}y_{22}) + \sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 + 2z_{11}z_{22}y_{11}y_{22} - 4z_{12}^2y_{11}y_{22} - 4z_{12}z_{22}y_{22}^2 + 4z_{11}z_{22}y_{11}y_{22}}}{2} \right)}} \quad (\text{A.10})$$

$$[T_v(2,1)] = \frac{\left(\frac{(4z_{12}^2y_{12} + z_{11}y_{11} + z_{22}y_{22}) - \sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 + 2z_{11}z_{22}y_{11}y_{22} - 4z_{12}^2y_{11}y_{22} - 4z_{12}z_{22}y_{22}^2 + 4z_{11}z_{22}y_{11}y_{22}}}{2} \right)}{\sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 + 2z_{12}^2y_{12}y_{22} + z_{12}^2y_{22}^2 + \left(\frac{(4z_{12}^2y_{12} + z_{11}y_{11} + z_{22}y_{22}) - \sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 + 2z_{11}z_{22}y_{11}y_{22} - 4z_{12}^2y_{11}y_{22} - 4z_{12}z_{22}y_{22}^2 + 4z_{11}z_{22}y_{11}y_{22}}}{2} \right)}} \quad (\text{A.11})$$

$$[T_v(2,2)] = -\frac{\left(\frac{(4z_{12}^2y_{12} + z_{11}y_{11} + z_{22}y_{22}) + \sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 + 2z_{11}z_{22}y_{11}y_{22} - 4z_{12}^2y_{11}y_{22} - 4z_{12}z_{22}y_{22}^2 + 4z_{11}z_{22}y_{11}y_{22}}}{2} \right)}{\sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 + 2z_{12}^2y_{12}y_{22} + z_{12}^2y_{22}^2 + \left(\frac{(4z_{12}^2y_{12} + z_{11}y_{11} + z_{22}y_{22}) + \sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 + 2z_{11}z_{22}y_{11}y_{22} - 4z_{12}^2y_{11}y_{22} - 4z_{12}z_{22}y_{22}^2 + 4z_{11}z_{22}y_{11}y_{22}}}{2} \right)}} \quad (\text{A.12})$$

Portanto, as equações (A.9)-(A.12), são os elementos da matriz $[T_v]$ e estão todos calculados em função dos parâmetros da linha.

A.4 – Solução para as matrizes de impedância $[Z_m]$ e de admitância $[Y_m]$ modais

Temos que as matrizes de impedância $[Z_m]$ e de admitância $[Y_m]$ modais, são dadas por:

$$[Z_m] = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 z_{11} + 2(\alpha_1 \alpha_2 z_{12}) + \alpha_2^2 z_{22} & 0 \\ 0 & \beta_1^2 z_{11} + 2(\beta_1 \beta_2 z_{12}) + \beta_2^2 z_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$[Y_m] = \begin{bmatrix} \phi_1^2 y_{11} + 2(\phi_1 \phi_2 y_{12}) + \phi_2^2 y_{22} & 0 \\ 0 & \rho_1^2 y_{11} + 2(\rho_1 \rho_2 y_{12}) + \rho_2^2 y_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Onde:

$$Z_{m11} = \alpha_1^2 z_{11} + 2(\alpha_1 \alpha_2 z_{12}) + \alpha_2^2 z_{22} \quad (\text{A.15})$$

$$Z_{m22} = \beta_1^2 z_{11} + 2(\beta_1 \beta_2 z_{12}) + \beta_2^2 z_{22} \quad (\text{A.16})$$

$$Y_{m11} = \phi_1^2 y_{11} + 2(\phi_1 \phi_2 y_{12}) + \phi_2^2 y_{22} \quad (\text{A.17})$$

$$Y_{m22} = \rho_1^2 y_{11} + 2(\rho_1 \rho_2 y_{12}) + \rho_2^2 y_{22} \quad (\text{A.18})$$

Logo, seus elementos são escritos como sendo:

$$\alpha_1 = \left[-\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2} (S_{11} - \lambda_2)}{S_{12} (\lambda_2 - \lambda_1)} \right] \quad (\text{A.19})$$

$$\alpha_2 = \left[-\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right] \quad (\text{A.20})$$

$$\beta_1 = \left[\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2} (S_{11} - \lambda_1)}{S_{12} (\lambda_2 - \lambda_1)} \right] \quad (\text{A.21})$$

$$\beta_2 = \left[-\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right] \quad (\text{A.22})$$

$$\phi_1 = \left[-\frac{S_{12}}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}} \right] \quad (\text{A.23})$$

$$\phi_2 = \left[-\frac{S_{11} - \lambda_1}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}} \right] \quad (\text{A.24})$$

$$\rho_1 = \left[-\frac{S_{12}}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2}} \right] \quad (\text{A.25})$$

$$\rho_2 = \left[\frac{S_{11} - \lambda_2}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2}} \right] \quad (\text{A.26})$$

Desenvolvendo as equações (A.19)-(A.26) e as deixando em função dos parâmetros da linha, obtém-se:

$$\alpha_1 = -\frac{x_1 x_2}{x_3} \quad (\text{A.27})$$

Onde:

$$x_1 = \sqrt{z_{11}^2 y_{11}^2 + 2z_{12}^2 y_{12} y_{22} + z_{22}^2 y_{22}^2 + \left(\frac{(4z_{12}^2 y_{12} + z_{11} y_{11} + z_{22} y_{22}) - \sqrt{z_{11}^2 y_{11}^2 + 2z_{11} z_{22} y_{11} y_{22} - 4z_{12}^2 y_{11} y_{22} - 4z_{12} z_{22} y_{22}^2 + 4z_{11} z_{22} y_{11} y_{22}}}{2} \right)} \quad (\text{A.28})$$

$$x_2 = \frac{(4z_{12}^2 y_{12} + z_{11} y_{11} + z_{22} y_{22}) + \sqrt{z_{11}^2 y_{11}^2 + 2z_{11} z_{22} y_{11} y_{22} - 4z_{12}^2 y_{11} y_{22} - 4z_{12} z_{22} y_{22}^2 + 4z_{11} z_{22} y_{11} y_{22}}}{2} \quad (\text{A.29})$$

$$x_3 = -(z_{11} y_{12} + z_{12} y_{22}) \sqrt{z_{11}^2 y_{11}^2 + 2z_{11} z_{22} y_{11} y_{22} - 4z_{12}^2 y_{11} y_{22} - 4z_{12} z_{22} y_{22}^2 + 4z_{11} z_{22} y_{11} y_{22}} \quad (\text{A.30})$$

Assim, as equações (A.28)-(A.30) são os elementos da equação (A.19), desenvolvida em função dos parâmetros da linha.

Para a equação (A.20), tem-se:

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{z_{11}^2 y_{11}^2 + 2z_{12}^2 y_{12} y_{22} + z_{12}^2 y_{22}^2 + \left(\frac{(4z_{12}^2 y_{12} + z_{11} y_{11} + z_{22} y_{22}) - \sqrt{z_{11}^2 y_{11}^2 + 2z_{11} z_{22} y_{11} y_{22} - 4z_{12}^2 y_{11} y_{22} - 4z_{12} z_{22} y_{22}^2 + 4z_{11} z_{22} y_{11} y_{22}}}{2} \right)}}{\sqrt{z_{11}^2 y_{11}^2 + 2z_{11} z_{22} y_{11} y_{22} - 4z_{12}^2 y_{11} y_{22} - 4z_{12} z_{22} y_{22}^2 + 4z_{11} z_{22} y_{11} y_{22}}} \quad (\text{A.31})$$

De forma, análoga para equação (A.21), tem-se:

$$\beta_1 = \frac{p_1 p_2}{p_3} \quad (\text{A.32})$$

Onde:

$$p_1 = \sqrt{z_{11}^2 y_{11}^2 + 2z_{12}^2 y_{12} y_{22} + z_{12}^2 y_{22}^2 + \left(\frac{(4z_{12}^2 y_{12} + z_{11} y_{11} + z_{22} y_{22}) + \sqrt{z_{11}^2 y_{11}^2 + 2z_{11} z_{22} y_{11} y_{22} - 4z_{12}^2 y_{11} y_{22} - 4z_{12} z_{22} y_{22}^2 + 4z_{11} z_{22} y_{11} y_{22}}}{2} \right)} \quad (\text{A.33})$$

$$p_2 = \sqrt{z_{11}^2 y_{11}^2 + 2z_{12}^2 y_{12} y_{22} + z_{12}^2 y_{22}^2 + \left(\frac{(4z_{12}^2 y_{12} + z_{11} y_{11} + z_{22} y_{22}) - \sqrt{z_{11}^2 y_{11}^2 + 2z_{11} z_{22} y_{11} y_{22} - 4z_{12}^2 y_{11} y_{22} - 4z_{12} z_{22} y_{22}^2 + 4z_{11} z_{22} y_{11} y_{22}}}{2} \right)} \quad (\text{A.34})$$

$$p_3 = -(z_{11} y_{12} + z_{12} y_{22}) \sqrt{z_{11}^2 y_{11}^2 + 2z_{11} z_{22} y_{11} y_{22} - 4z_{12}^2 y_{11} y_{22} - 4z_{12} z_{22} y_{22}^2 + 4z_{11} z_{22} y_{11} y_{22}} \quad (\text{A.35})$$

Assim, as equações (A.33)-(A.35) são os elementos da equação (A.21), desenvolvida em função somente dos parâmetros da linha.

Para a equação (A.22), tem-se:

$$\beta_2 = - \frac{\sqrt{z_{11}^2 y_{11}^2 + 2z_{12}^2 y_{12} y_{22} + z_{12}^2 y_{22}^2 + \left(\frac{(4z_{12}^2 y_{12} + z_{11} y_{11} + z_{22} y_{22}) + \sqrt{z_{11}^2 y_{11}^2 + 2z_{11} z_{22} y_{11} y_{22} - 4z_{12}^2 y_{11} y_{22} - 4z_{12} z_{22} y_{22}^2 + 4z_{11} z_{22} y_{11} y_{22}}}{2} \right)}}{\sqrt{z_{11}^2 y_{11}^2 + 2z_{11} z_{22} y_{11} y_{22} - 4z_{12}^2 y_{11} y_{22} - 4z_{12} z_{22} y_{22}^2 + 4z_{11} z_{22} y_{11} y_{22}}} \quad (\text{A.36})$$

Para a equação (A.23), tem-se:

$$\phi_1 = \frac{z_{11}y_{12} + z_{12}y_{22}}{\sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 + 2z_{12}^2y_{12}y_{22} + z_{22}^2y_{22}^2 + \left(\frac{(4z_{12}^2y_{12} + z_{11}y_{11} + z_{22}y_{22}) - \sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 + 2z_{11}z_{22}y_{11}y_{22} - 4z_{12}^2y_{11}y_{22} - 4z_{12}z_{22}y_{22}^2 + 4z_{11}z_{22}y_{11}y_{22}}}{2} \right)}} \quad (\text{A.37})$$

Para a equação (A.24), tem-se:

$$\phi_2 = \frac{\left(\frac{(4z_{12}^2y_{12} + z_{11}y_{11} + z_{22}y_{22}) - \sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 + 2z_{11}z_{22}y_{11}y_{22} - 4z_{12}^2y_{11}y_{22} - 4z_{12}z_{22}y_{22}^2 + 4z_{11}z_{22}y_{11}y_{22}}}{2} \right)}{\sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 + 2z_{12}^2y_{12}y_{22} + z_{22}^2y_{22}^2 + \left(\frac{(4z_{12}^2y_{12} + z_{11}y_{11} + z_{22}y_{22}) - \sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 + 2z_{11}z_{22}y_{11}y_{22} - 4z_{12}^2y_{11}y_{22} - 4z_{12}z_{22}y_{22}^2 + 4z_{11}z_{22}y_{11}y_{22}}}{2} \right)}} \quad (\text{A.38})$$

Para a equação (A.25), tem-se:

$$\rho_1 = \frac{z_{11}y_{12} + z_{12}y_{22}}{\sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 + 2z_{12}^2y_{12}y_{22} + z_{22}^2y_{22}^2 + \left(\frac{(4z_{12}^2y_{12} + z_{11}y_{11} + z_{22}y_{22}) + \sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 + 2z_{11}z_{22}y_{11}y_{22} - 4z_{12}^2y_{11}y_{22} - 4z_{12}z_{22}y_{22}^2 + 4z_{11}z_{22}y_{11}y_{22}}}{2} \right)}} \quad (\text{A.39})$$

$$\rho_2 = \frac{\left(\frac{(4z_{12}^2y_{12} + z_{11}y_{11} + z_{22}y_{22}) + \sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 + 2z_{11}z_{22}y_{11}y_{22} - 4z_{12}^2y_{11}y_{22} - 4z_{12}z_{22}y_{22}^2 + 4z_{11}z_{22}y_{11}y_{22}}}{2} \right)}{\sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 + 2z_{12}^2y_{12}y_{22} + z_{22}^2y_{22}^2 + \left(\frac{(4z_{12}^2y_{12} + z_{11}y_{11} + z_{22}y_{22}) + \sqrt{z_{11}^2y_{11}^2 + 2z_{11}z_{22}y_{11}y_{22} - 4z_{12}^2y_{11}y_{22} - 4z_{12}z_{22}y_{22}^2 + 4z_{11}z_{22}y_{11}y_{22}}}{2} \right)}} \quad (\text{A.40})$$

Portanto, as equações de (A.36)-(A.40) estão desenvolvidas somente em função dos parâmetros da linha.

A.5 – Solução para as impedâncias características dos modos de propagação

$$Z_{Cm} = \sqrt{\frac{Z_m}{Y_m}}, \quad (\text{MARTI, 1982; CHIPMAN, 1976})$$

Temos:

$$Z_{Cm} = \sqrt{\frac{Z_m}{Y_m}} \quad (A.41)$$

Onde:

$$Z_{Cm1} = \sqrt{\frac{Z_{m11}}{Y_{m11}}} \quad (A.42)$$

$$Z_{Cm2} = \sqrt{\frac{Z_{m22}}{Y_{m22}}} \quad (A.43)$$

Que são as equações da função de propagação e impedância característica dos modos 1 e 2 da linha de transmissão, porém, os elementos das equações de (A.42) e (A.43) já foram calculados em função dos parâmetros da linha pelas equações de (A.28)-(A.40).

Apêndice B

B.1 – Introdução

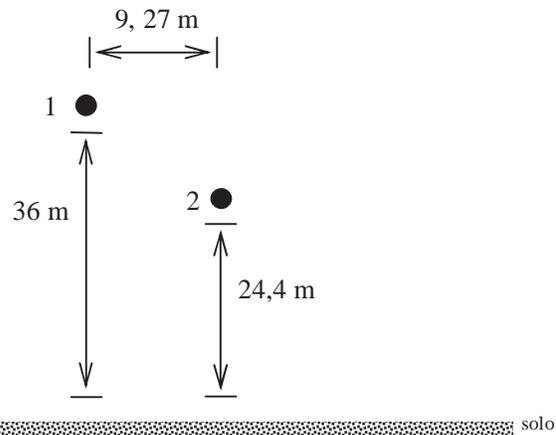
Neste capítulo mostraremos as simulações feitas a partir das matrizes K_1 , K_2 , K_3 , K_4 , P_1 , P_2 , P_3 e P_4 . Essas simulações terão como objetivo nos mostrar o comportamento de cada elemento das matrizes mencionadas acima.

B.2 - Resultados obtidos

O modelo foi aplicado em uma linha bifásica sem plano de simetria vertical, onde as fases 1, 2 são constituídas de 2 condutores do tipo *Grosbeak* com raio $r = 0.0298$ m e a resistividade do solo foi considerada como sendo igual a $1000 \Omega.m$.

Essa linha foi decomposta em seus n modos. A decomposição da linha em seus n modos de propagação foi feita a partir da matriz de transformação modal $[T_V]$ que foi obtida através do método de Newton-Raphson (WEDEPOHL et al., 1996).

Figura B.1 – Linha de transmissão bifásica.



Fonte: Souza Junior (2011)

Na linha mostrada na figura B.1, os números 1 e 2 representam as fases da linha. Os parâmetros longitudinais da linha foram calculados tendo em conta os efeitos do solo e pelicular. A condutância transversal da linha foi desconsiderada e considerando a linha mostrada na figura B.1, as simulações foram feitas para obter as tensões e correntes nos terminais A e B da linha.

B.3 – Matrizes K_1 , K_2 , K_3 e K_4

Sabe-se que as matrizes K_1 , K_2 , K_3 e K_4 são dadas por:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -\frac{S_{11}-\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} & -\frac{S_{12}}{\lambda_2-\lambda_1} \\ \frac{(S_{11}-\lambda_1)(S_{11}-\lambda_2)}{S_{12}(\lambda_2-\lambda_1)} & \frac{S_{11}-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} \frac{S_{11}-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1} & \frac{S_{12}}{\lambda_2-\lambda_1} \\ -\frac{(S_{11}-\lambda_2)(S_{11}-\lambda_1)}{S_{12}(\lambda_2-\lambda_1)} & -\frac{S_{11}-\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} \left(-\frac{S_{12}}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11}-\lambda_1)^2}} \right)^2 & -\frac{S_{12}(S_{11}-\lambda_1)}{\left(\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11}-\lambda_1)^2} \right)^2} \\ -\frac{S_{12}(S_{11}-\lambda_1)}{\left(\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11}-\lambda_1)^2} \right)^2} & \left(-\frac{S_{11}-\lambda_1}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11}-\lambda_1)^2}} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} \left(\frac{S_{12}}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11}-\lambda_2)^2}} \right)^2 & \frac{S_{12}(S_{11}-\lambda_2)}{\left(\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11}-\lambda_2)^2} \right)^2} \\ \frac{S_{12}(S_{11}-\lambda_2)}{\left(\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11}-\lambda_2)^2} \right)^2} & \left(-\frac{S_{11}-\lambda_2}{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11}-\lambda_1)^2}} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Fazendo:

$$K_1 = \begin{bmatrix} K_1(1,1) & K_1(1,2) \\ K_1(2,1) & K_1(2,2) \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} K_2(1,1) & K_2(1,2) \\ K_2(2,1) & K_2(2,2) \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} K_3(1,1) & K_3(1,2) \\ K_3(2,1) & K_3(2,2) \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

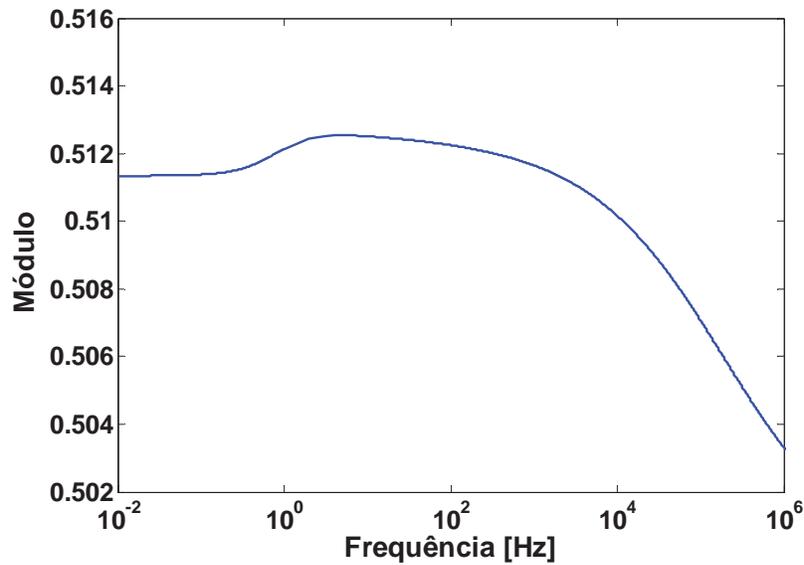
$$\mathbf{K}_4 = \begin{bmatrix} K_4(1,1) & K_4(1,2) \\ K_4(2,1) & K_4(2,2) \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

B.3.1 – Resultados obtidos de \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 , \mathbf{K}_3 e \mathbf{K}_4

Agora, mostraremos as curvas do módulo e do ângulo do primeiro elemento de cada equação de (B.1)-(B.4).

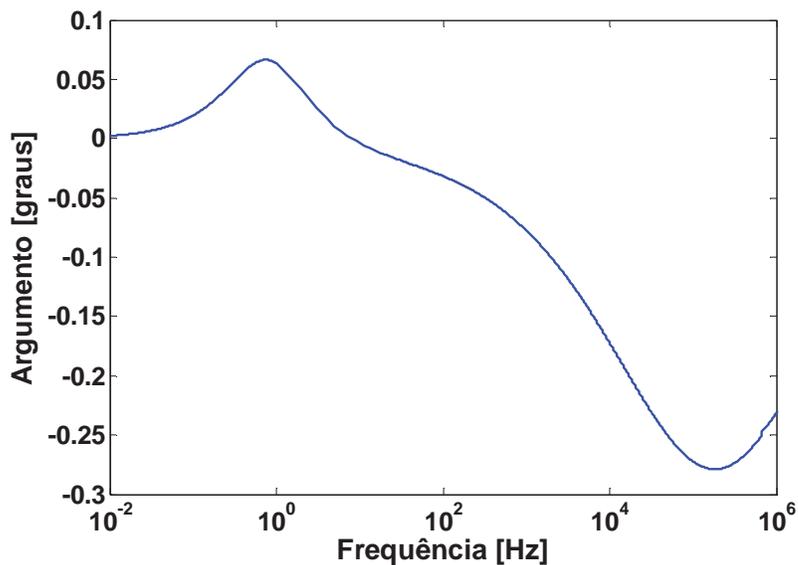
As figuras B.2 e B.3 mostram o módulo e ângulo do elemento $K_1(1,1)$ respectivamente.

Figura B.2 – Módulo do elemento da matriz $K_1(1,1)$.



Fonte: Souza Junior (2011)

Figura B.3 – Ângulo do elemento da matriz $K_1(1,1)$.

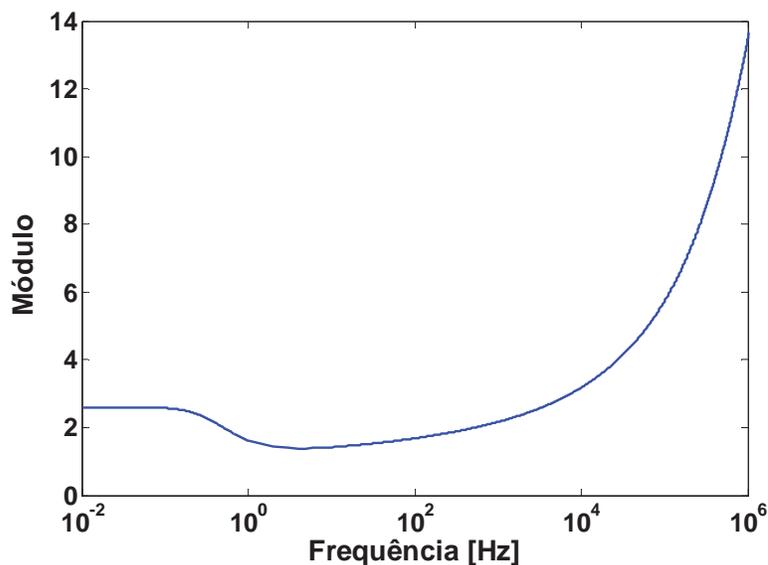


Fonte: Souza Junior (2011)

Na figura B.2 notamos que o módulo do elemento $K_1(1,1)$ varia entre 0,512 e 0,505 , em uma faixa de frequência compreendida entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz ou seja, a variação do módulo deste elemento é pequena. Quanto ao argumento do elemento $K_1(1,1)$, a figura B.3 mostra que o mesmo varia aproximadamente 0,3 graus na faixa de frequência analisada..

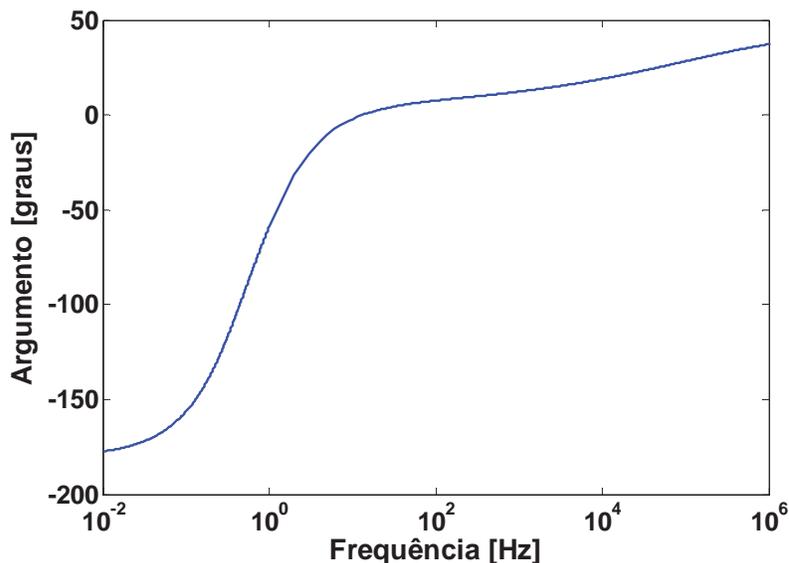
As figuras B.4 e B.5 mostram o módulo e ângulo do elemento $K_2(1,1)$ respectivamente.

Figura B.4 - Módulo do elemento da matriz $K_2(1,1)$.



Fonte: Souza Junior (2011)

Figura B.5 - Ângulo do elemento da matriz $K_2(1,1)$.

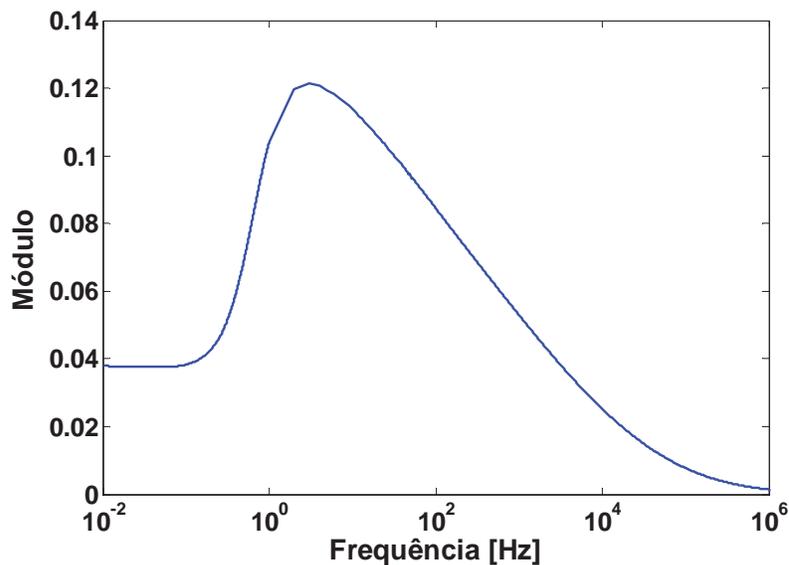


Fonte: Souza Junior (2011)

Na figura B.3 notamos que o módulo do elemento $K_2(1,1)$ varia entre 2,3 e 13, em uma faixa de frequência compreendida entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz. Quanto ao argumento do elemento $K_2(1,1)$, a figura B.5 mostra que o mesmo varia aproximadamente -180 graus à 45 graus aproximadamente na faixa de frequência analisada..

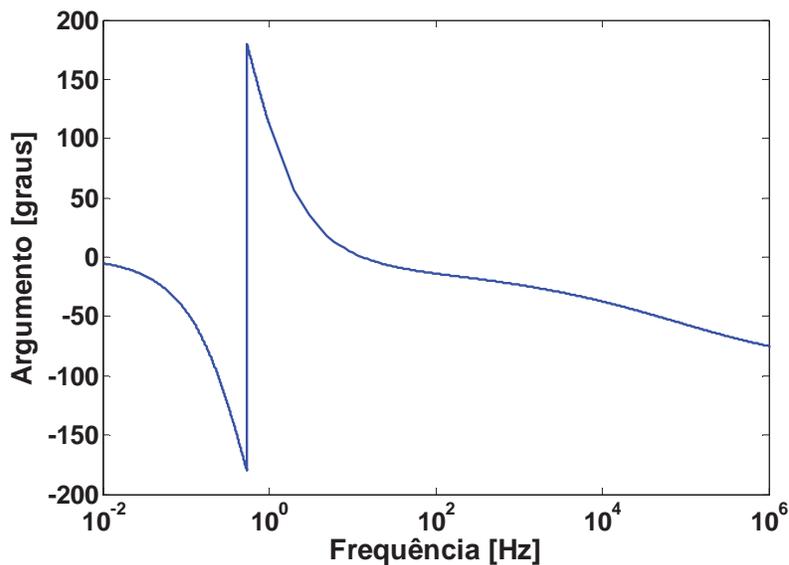
As figuras B.6 e B.7 mostram o módulo e ângulo do elemento $K_3(1,1)$ respectivamente.

Figura B.6 - Módulo do elemento da matriz $K_3(1,1)$.



Fonte: Souza Junior (2011)

Figura B.7 – Ângulo do elemento da matriz $K_3(1,1)$.

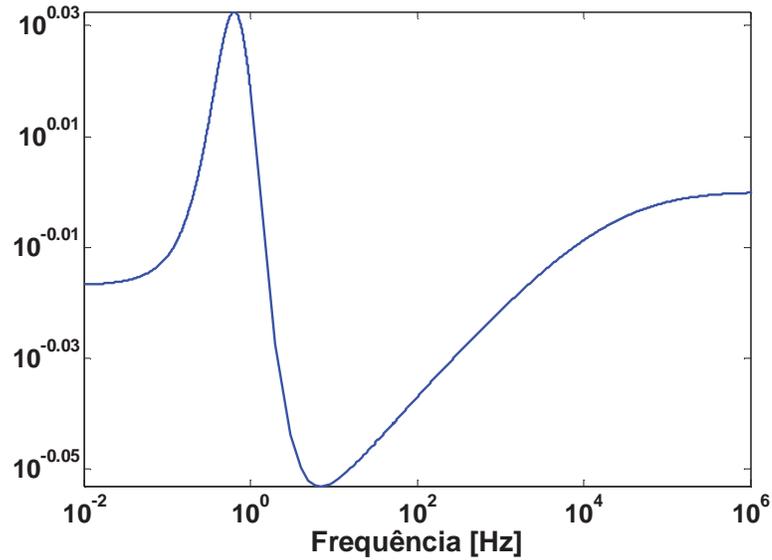


Fonte: Souza Junior (2011)

Na figura B.6 notamos que o módulo do elemento $K_3(1,1)$ varia entre 0,04 e 0 aproximadamente em uma faixa de frequência compreendida entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz ou seja, a variação do módulo deste elemento é pequena. Quanto ao argumento do elemento $K_3(1,1)$, a figura B.7 mostra que o mesmo varia aproximadamente -0.1 á -180 graus para freqüências até 1 Hz aproximadamente, e se alternando entre 180 graus e -50 graus aproximadamente na faixa de freqüência analisada..

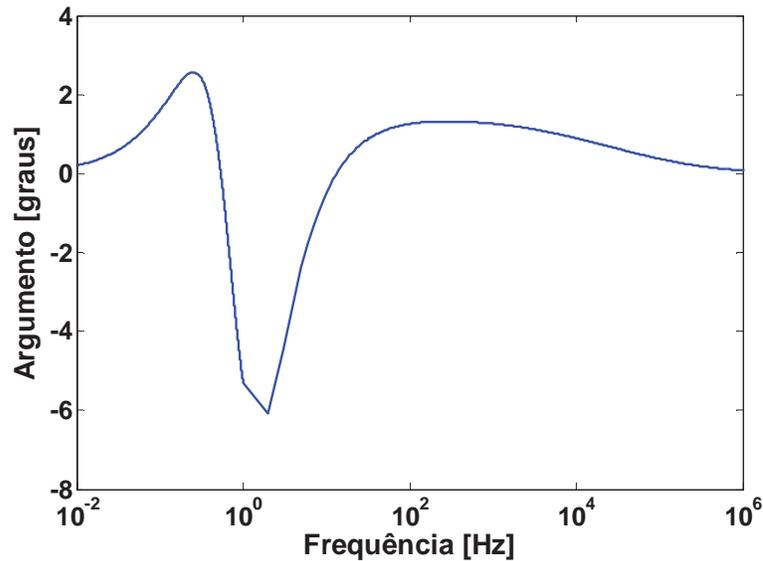
As figuras B.8 e B.9 mostram o módulo e ângulo do elemento $K_4(1,1)$ respectivamente.

Figura B.8 - Módulo do elemento da matriz $K_4(1,1)$.



Fonte: Souza Junior (2011)

Figura B.9 - Ângulo do elemento da matriz $K_4(1,1)$.



Fonte: Souza Junior (2011)

Na figura B.8 notamos que o módulo do elemento $K_4(1,1)$ varia entre $10^{-0.02}$ e 1 aproximadamente em uma faixa de frequência compreendida entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz ou seja, a variação do módulo deste elemento é pequena. Quanto ao argumento do elemento $K_4(1,1)$, a figura B.9 mostra que o mesmo varia aproximadamente 0.1 à -6 graus para frequências até 1 Hz aproximadamente se elevando até 0 graus aproximadamente na faixa de frequência analisada.

B.4 – Matrizes P_1, P_2, P_3 e P_4

Sabe-se que as matrizes P_1, P_2, P_3 e P_4 são dadas por:

$$P_1 = \begin{bmatrix} \left(\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2} (S_{11} - \lambda_2)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} \right)^2 & \left(\frac{\left(\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2} \right)^2 (S_{11} - \lambda_2)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \right) \\ \left(\frac{\left(\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2} \right)^2 (S_{11} - \lambda_2)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \right) & \left(\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_1)^2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} \left(\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2} (S_{11} - \lambda_1)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} \right)^2 & \left(\frac{\left(\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2} \right)^2 (S_{11} - \lambda_1)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \right) \\ \left(\frac{\left(\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2} \right)^2 (S_{11} - \lambda_1)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \right) & \left(\frac{\sqrt{S_{12}^2 + (S_{11} - \lambda_2)^2}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right)^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} -\frac{S_{11} - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{(S_{11} - \lambda_2)(S_{11} - \lambda_1)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} \\ -\frac{S_{12}(S_{11} - \lambda_2)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} & -\frac{S_{11} - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.11})$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} -\frac{S_{11} - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \frac{(S_{11} - \lambda_1)(S_{11} - \lambda_2)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} \\ -\frac{S_{12}(S_{11} - \lambda_1)}{S_{12}(\lambda_2 - \lambda_1)} & \frac{S_{11} - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Fazendo:

$$P_1 = \begin{bmatrix} P_1(1,1) & P_1(1,2) \\ P_1(2,1) & P_1(2,2) \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} P_2(1,1) & P_2(1,2) \\ P_2(2,1) & P_2(2,2) \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} P_3(1,1) & P_3(1,2) \\ P_3(2,1) & P_3(2,2) \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

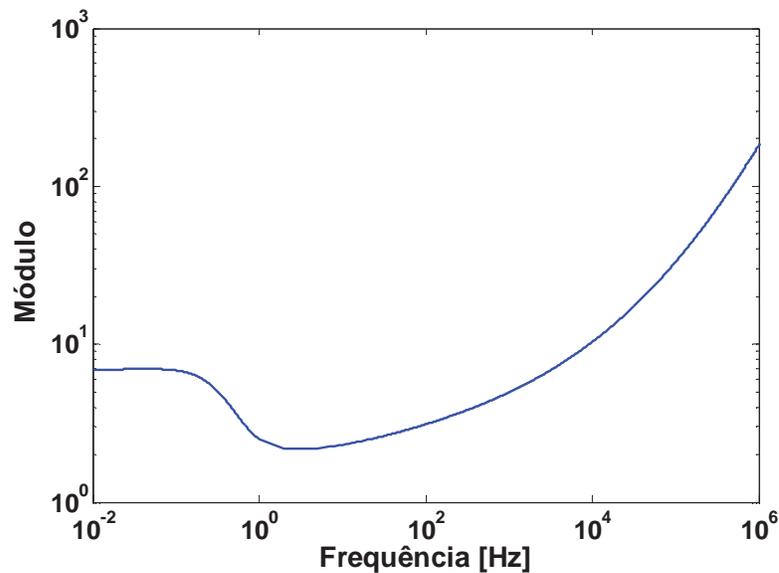
$$P_4 = \begin{bmatrix} P_4(1,1) & P_4(1,2) \\ P_4(2,1) & P_4(2,2) \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

B.4.1 – Resultados obtidos de P_1 , P_2 , P_3 e P_4

Agora, mostraremos as curvas do módulo e do ângulo do primeiro elemento de cada equação de (B.13)-(B.16).

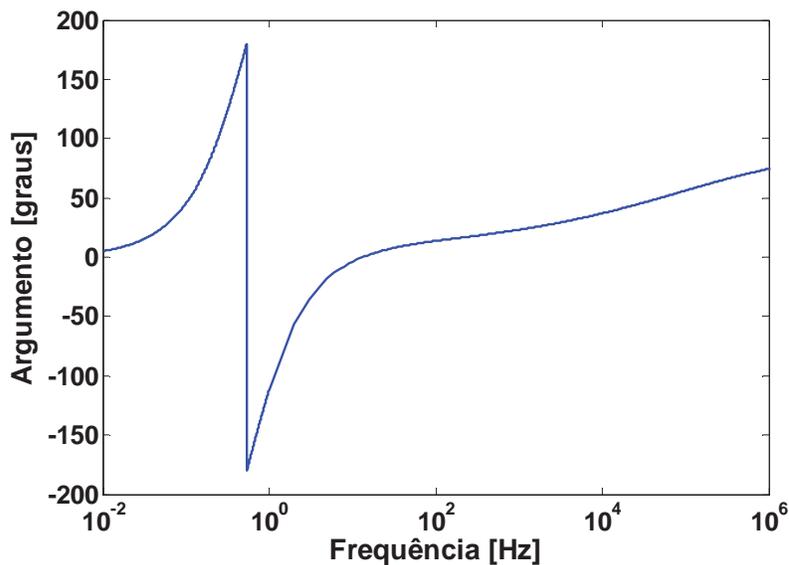
As figuras B.10 e B.11 mostram o cálculo do módulo e ângulo do elemento $P_1(1,1)$.

Figura B.10 – Módulo do elemento da matriz $P_1(1,1)$.



Fonte: Souza Junior (2011)

Figura B.11 - Ângulo do elemento da matriz $P_1(1,1)$.

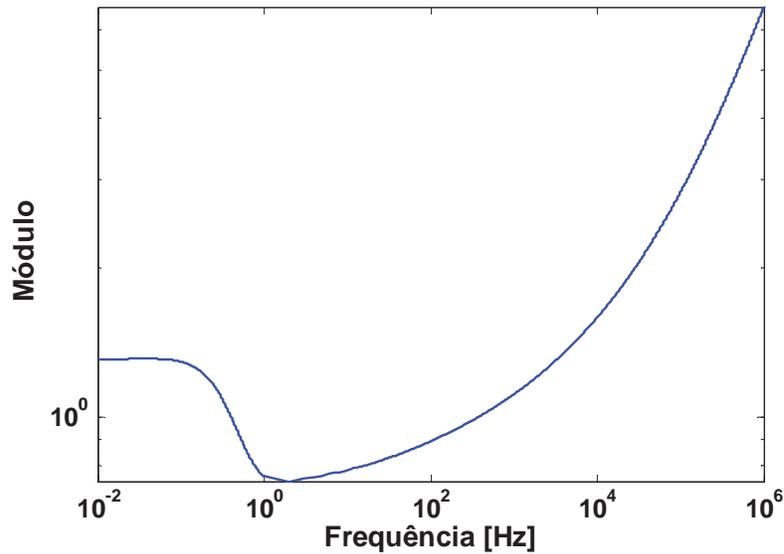


Fonte: Souza Junior (2011)

Na figura B.10 notamos que o módulo do elemento $P_1(1,1)$ varia entre $10^{0.9}$ e $10^{2.5}$ aproximadamente em uma faixa de frequência compreendida entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz. Quanto ao argumento do elemento $P_1(1,1)$, a figura B.11 mostra que o mesmo varia aproximadamente -0.1 á 180 graus para frequências até 1 Hz aproximadamente, e se alternando entre -180 graus e 50 graus aproximadamente na faixa de frequência analisada.

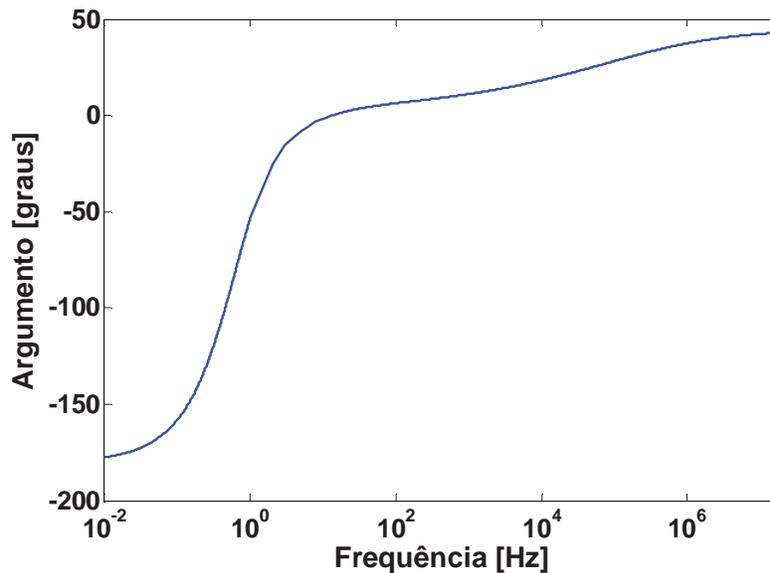
As figuras B.12 e B.13 mostram o cálculo do módulo e ângulo do elemento $P_2(1,1)$.

Figura B.12 – Módulo do elemento da matriz $P_2(1,1)$.



Fonte: Souza Junior (2011)

Figura B.13 - Ângulo do elemento da matriz $P_2(1,1)$.

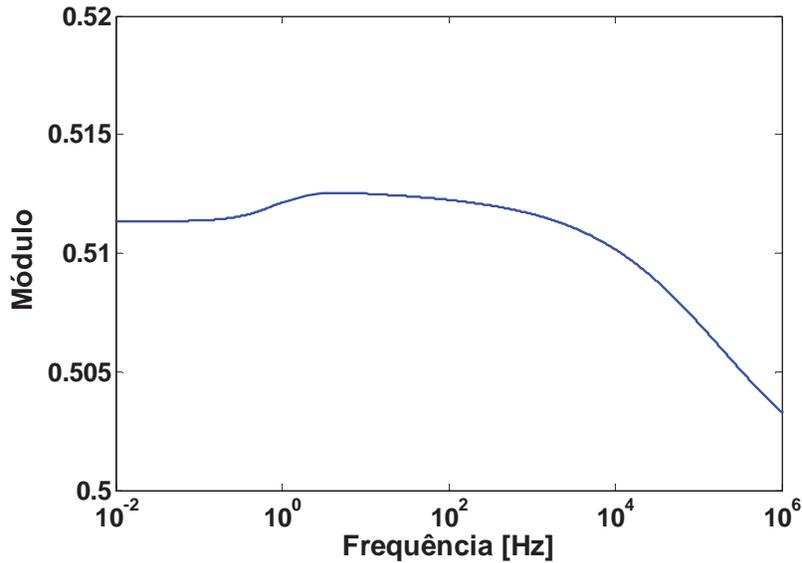


Fonte: Souza Junior (2011)

Na figura B.12 notamos que o módulo do elemento $P_2(1,1)$ varia entre $10^{1.3}$ e 10^3 aproximadamente em uma faixa de frequência compreendida entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz, ou seja, a variação do módulo deste elemento é pequena. Quanto ao argumento do elemento $P_2(1,1)$, a figura B.13 mostra que o mesmo varia de -180 graus à 50 graus aproximadamente na faixa de frequência analisada.

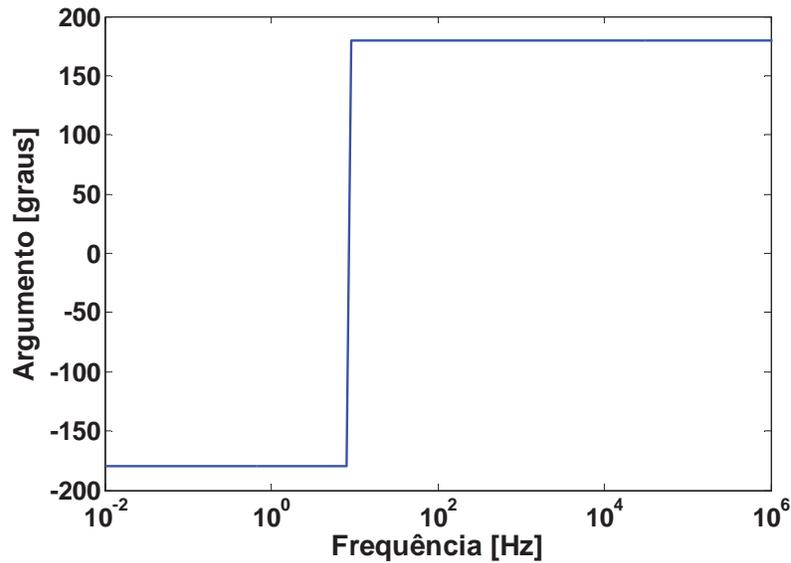
As figuras B.14 e B.15 mostram o cálculo do módulo e ângulo do elemento $P_3(1,1)$.

Figura B.14 – Módulo do elemento da matriz $P_3(1,1)$.



Fonte: Souza Junior (2011)

Figura B.15 – Ângulo do elemento da matriz $P_3(1,1)$.

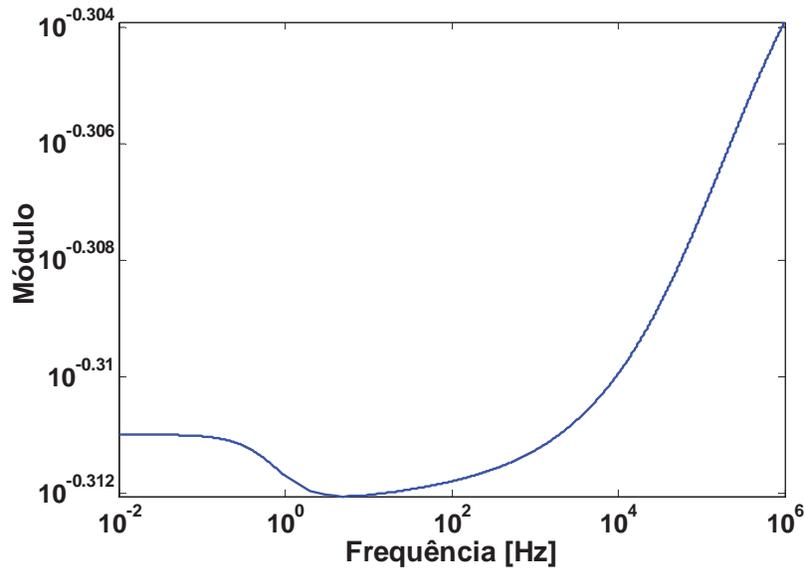


Fonte: Souza Junior (2011).

Na figura B.14 notamos que o módulo do elemento $P_3(1,1)$ varia entre 0.51 à 0. e 0.50 aproximadamente em uma faixa de frequência compreendida entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz. Quanto ao argumento do elemento $P_3(1,1)$, a figura B.15 mostra que o mesmo varia aproximadamente -180 graus à 180 graus para frequências na faixa de frequência analisada.

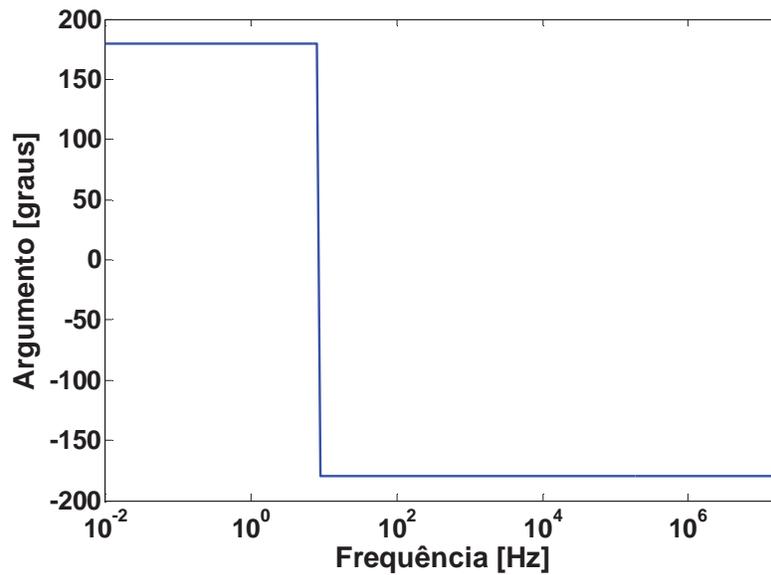
As figuras B.16 e B.17 mostram o cálculo do módulo e ângulo do elemento $P_4(1,1)$.

Figura B.16 – Módulo do elemento da matriz $P_4(1,1)$.



Fonte: Souza Junior (2011)

Figura B.17 - Ângulo do 1º elemento da matriz P_4 .



Fonte: Souza Junior (2011)

Na figura B.16 notamos que o módulo do elemento $P_4(1,1)$ varia entre $10^{-0.312}$ à $10^{-0.304}$ aproximadamente em uma faixa de frequência compreendida entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz, ou seja, a variação do módulo deste elemento é pequena.. Quanto ao argumento do elemento $P_4(1,1)$, a figura B.17 mostra que o mesmo varia aproximadamente 180 graus à -180 graus para frequências na faixa de frequência analisada.

Neste capítulo, mostramos o comportamento de alguns elementos das matrizes [K] e [P]. Os resultados mostraram que tais elementos variam de maneira suave em relação à frequência.

Verificou-se que todos os elementos das matrizes [K] e [P] apresentam comportamento semelhante ao comportamento dos elementos mostrados nas figuras B.1 a B.16.