

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

FERNANDO HENRIQUE DE LIMA

**ANÁLISE AEROELÁSTICA COM ATUADOR DE
SUPERFÍCIE DE CONTROLE EM MODO DE FALHA**

Ilha Solteira
2020



FERNANDO HENRIQUE DE LIMA

ANÁLISE AEROELÁSTICA COM ATUADOR DE SUPERFÍCIE DE CONTROLE EM MODO DE FALHA

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, UNESP, como parte dos requisitos para o título de Mestrado em Engenharia Mecânica de acordo com o Programa de Pós Graduação.

Prof. Dr. Douglas Domingues Bueno
Orientador

Ilha Solteira
2020



FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

L732a Lima, Fernando Henrique de.
Análise aeroelástica com atuador de superfície de controle em modo de falha / Fernando Henrique de Lima. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2020
85 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Dinâmica de Sistemas Mecânicos, 2020

Orientador: Douglas Domingues Bueno
Inclui bibliografia

1. Estabilidade aeroelastica. 2. Atuadores de superfície de controle em modo de falha. 3. Flutter linear equivalente.



João Josué Barbosa

Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação
Diretor Técnico
CRB 8-5642


CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Análise Aeroelástica com Atuador de Superfície de Controle em Modo de Falha

AUTOR: FERNANDO HENRIQUE DE LIMA

ORIENTADOR: DOUGLAS DOMINGUES BUENO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA MECÂNICA, área: Mecânica dos Sólidos pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. DOUGLAS DOMINGUES BUENO 
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. MARCOS SILVEIRA 
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP

Prof. Dr. SIDNEY BRUCE SHIKI 
Departamento de Engenharia Mecânica / Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

Ilha Solteira, 08 de janeiro de 2020

Dedico esta dissertação à memória de Diego Henrique Sebastiani, por todo o amor, incentivo e companherismo, minha eterna gratidão.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família por todo encorajamento, motivação, paciência, suporte financeiro, e em especial agradeço à minha mãe, Rosa Maria Valério Lima, pelo exemplo e inspiração de caráter, dignidade e resiliência.

Agradeço à UNESP - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, e a FEIS - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, pela oportunidade da realização deste trabalho, por toda estrutura física, e também, o corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. Agradeço ainda aos meus colegas do GMSINT - Grupo de Materiais e Sistemas Inteligentes, por toda ajuda e colaboração prestada durante a elaboração desta dissertação.

Em especial agradeço ao meu orientador Dr. Douglas Domingues Bueno por compartilhar sua experiência e conhecimento durante toda a execução deste projeto. Agradeço, ainda, todas as reuniões e conversas que auxiliaram e impulsionaram meu desenvolvimento profissional e pessoal. E sou grato por toda a sua orientação, paciência e todo incentivo prestado ao longo desses anos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

De acordo com agências de certificação aeronáutica, a estabilidade de sistemas aeroelásticos deve ser assegurada mesmo em condições de falhas nos atuadores das superfícies de controle. Estes transdutores transmitem comandos do piloto às superfícies de controle, sendo então de extrema importância para a aeronavegabilidade. Neste contexto, este trabalho consiste em desenvolver uma formulação para análise de estabilidade aeroelástica considerando atuadores de superfície de controle em modo de falha. Em particular, considera-se uma representação de falha hidráulica, o que permite descrever o atuador como um amortecedor viscoso não-linear.

Utiliza-se o método pk , amplamente utilizado para o cálculo da velocidade de flutter, como base para uma adaptação que permite considerar propriedades lineares equivalentes dos atuadores em modo de falha e, com isto, avaliar a estabilidade do sistema nestas condições de falha. Tais propriedades equivalentes são obtidas a partir da impedância mecânica dos transdutores. O método pk modificado permite calcular diagramas $V-g-f$ lineares equivalentes, que fornecem resultados conservativos para predição de instabilidades. As condições de flutter linear equivalentes, identificadas com este novo método, representam os possíveis pontos de oscilação de ciclo do sistema com o atuador em falha. Os resultados sugerem que a abordagem é adequada para a análise desta condição de falha, sendo de fácil aplicação também para sistemas aeroelásticos complexos, de múltiplos graus de liberdade.

Palavras-chave: Estabilidade aeroelástica. Atuadores de superfície de controle em modo de falha. Linearização equivalente. Método PK modificado. Flutter linear equivalente. Impedância mecânica.

Abstract

According to aeronautical certification agencies, the stability of aeroelastic systems must be ensured even under failure conditions on control surface actuators. These transducers transfer the pilot's inputs to the control surfaces and because of this they are very important for safe airworthiness. In this context, this work aims to develop an approach to carry out aeroelastic stability analysis considering a control surface actuator in failure mode. In particular, it is a conceptual representation of a hydraulic failure, which allows one to describe the actuator as a nonlinear viscous damper. The pk method, widely used for calculating flutter velocity, is adapted to consider equivalent linear properties of the actuators in failure mode. These equivalent properties are obtained from the mechanical impedance of the transducers. Using the modified pk method, linear equivalent V - g - f diagrams are obtained, and they provide conservative results for predicting the aeroelastic instabilities. Linear-equivalent flutter velocities are identified, which represent the possible limit cycle oscillation points due to the nonlinear transducer's behavior. The results suggest that the approach is suitable for the analysis of this failure condition, and it can be easily used to investigate complex aeroelastic systems with multiple degrees of freedom.

Key-words: Aeroelastic stability. Control surface actuators in failure mode. Equivalent linearization. Modified PK method. Linear-equivalent flutter, Mechanical impedance.

Lista de Figuras

1	Diagrama de Collar, sendo A as forças aerodinâmicas, E representa as forças elásticas, enquanto I remete as forças inerciais do sistema.	17
2	Representação de superfícies na empenagem da aeronave.	18
3	Representação de superfícies de controle na asa de uma aeronave.	18
4	Características geométricas de um aerofólio com três gdl, deslocamento vertical e angular do aerofólio $h(t)$ e $\alpha(t)$, e o deslocamento angular da superfície de controle $\beta(t)$. Sendo c a corda do aerofólio, b a semi-corda, k_h a rigidez ao deslocamento vertical do aerofólio, k_α a rigidez torcional e k_β a rigidez torcional da superfície de controle. Os pontos A' , B' , C' e D' representam os centro aerodinâmico, elástico, geométrico, de gravidade do aerofólio, os pontos E' e F' identificam os centros elástico e de gravidade da superfície de controle.	22
5	Ilustrações da resposta de um sistema dinâmico: estável (linha tracejada, preta), marginalmente estável (linha contínua, azul) e instável (linha pontilhada, vermelha).	26
6	Representação ilustrativa do atuador hidráulico de dupla ação.	29
7	Detalhe da conexão entre o atuador e a superfície de controle.	30
8	Deslocamento e velocidade do êmbolo do atuador e ilustração da função $sign()$ associada ao movimento para $A = 0.2\text{ m}$ e $\omega = \pi/4\text{ rad/s}$	32
9	Força de amortecimento quadrático para $A = 0.2\text{ m}$, $\omega = \pi/4\text{ rad/s}$, e $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, e $C_3 = 5\text{ kg/m}$	32
10	Força de amortecimento de Coulomb para $A = 0.1\text{ m}$, $\omega = \pi/4\text{ rad/s}$, $N = 20\text{ N}$ e $\mu_1 = 0.5$, $\mu_2 = 1$, e $\mu_3 = 2$	33
11	Representação qualitativa dos aspectos da força não linear de acordo com a predominância dos efeitos do amortecimento quadrático e de Coulomb.	34
12	Representação dos elementos que compõem a força equivalente	36
13	Esquema de configuração da bancada para realização do ensaio de impedância do atuador hidráulico.	38
14	Representação do atuador da superfície de controle, sendo Q identifica a vazão do fluido hidráulico, S é a seção do bocal, ΔP representa a diferença de pressão entre os reservatórios, δ_m é o deslocamento do atuador, e F a força não linear presente no sistema.	40

15	Representação qualitativa do comportamento da rigidez equivalente K_{eq} em função da frequência e do deslocamento do atuador hidráulico operando em modo de falha.	40
16	Representação qualitativa do comportamento da característica amortecimento equivalente C_{eq} em função da frequência e do deslocamento do atuador hidráulico operando em modo de falha.	41
17	Comportamento do parâmetro linear amortecimento equivalente C_{eq} para um modelo de força de amortecedor quadrático $f_q(t)$, definida para a amplitude de $A = 0.1m$, $C = 1.5 kg/m$, $\mu = 1 \times 10^{-4}$ e frequência de excitação $0 \leq f \leq 20Hz$	42
18	Etapas da análise aeroelástica sem a presença de não linearidades.	43
19	Representação do algoritmo de solução do método pk sendo $\mathbf{Q}(k)$ a matriz aerodinâmica e $\mathbf{A}(k)$ a matriz que representa o sistema no espaço de estados.	46
20	Etapas da análise aeroelástica com atuador em modo de falha.	47
21	Representação do algoritmo de solução do método pk modificado considerando o atuador em modo de falha, sendo $\mathbf{Q}(k)$ a matriz aerodinâmica e $\mathbf{A}(k)$ a matriz que representa o sistema aeroelástico no espaço de estados.	50
22	Variação das frequências aeroelásticas e do fator de amortecimento g para o aerofólio com três gdl em função de V_{keas} e $\rho = 1,125kg/m^3$. Identifica-se $V_{flutter} = 23,5 m/s$ e $f_{flutter} = 5,9 Hz$	52
23	Variação das frequências aeroelásticas e do fator de amortecimento g para o aerofólio com três gdl em função de V_{keas} e $\rho = 1,125kg/m^3$. Identifica-se $V_{flutter} = 27,6 m/s$ e $f_{flutter} = 14,0 Hz$	54
24	Análise FRF do gdl h , translação vertical do aerofólio, considerando-se os parâmetros: $\rho = 1.225 kg/m^3$, $m = 9kg$, $c = 0.9m$, $x_\alpha = 0.1$, $x_\beta = 0.01$, $a_h = -0.4$, $c_\beta = 0.7$, $w_h = 6 Hz$, $w_\alpha = 10Hz$, $w_\beta = 13Hz$, $r_\alpha = \sqrt{0.5}$ e $r_\beta = \sqrt{0.0125}$	55
25	Análise FRF do gdl α , rotação do aerofólio, considerando-se os parâmetros: $m = 9kg$, $c = 0.9m$, $x_\alpha = 0.1$, $x_\beta = 0.01$, $a_h = -0.4$, $c_\beta = 0.7$, $w_h = 6Hz$, $w_\alpha = 10Hz$, $w_\beta = 13Hz$, $r_\alpha = \sqrt{0.5}$ e $r_\beta = \sqrt{0.0125}$	56
26	Análise FRF do gdl β , rotação da superfície de controle do aerofólio, considerando-se os parâmetros: $m = 9kg$, $c = 0.9m$, $x_\alpha = 0.1$, $x_\beta = 0.01$, $a_h = -0.4$, $c_\beta = 0.7$, $w_h = 6Hz$, $w_\alpha = 10Hz$, $w_\beta = 13Hz$, $r_\alpha = \sqrt{0.5}$ e $r_\beta = \sqrt{0.0125}$	56
27	Resposta dinâmica no domínio do tempo dos gdl's $h(t)$, $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ do aerofólio considerando-se $V_{keas} = 10 m/s$ e $\rho = 1.225kg/m^3$. Tem-se $V_{keas} < V_{flutter} = 23,5 m/s$	57
28	Resposta dinâmica no domínio do tempo dos gdl's $h(t)$, $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ do aerofólio considerando-se $V_{keas} = 23.5m/s$ e $\rho = 1.225kg/m^3$. $V_{keas} = V_{flutter}$	58
29	Resposta dinâmica no domínio do tempo dos gdl's $h(t)$, $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ do aerofólio considerando-se $V_{keas} = 20m/s$ e $\rho = 1.225kg/m^3$. Sendo $V_{keas} < V_{flutter} = 27,6 m/s$	59

30	Resposta dinâmica no domínio do tempo dos gdl's $h(t)$, $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ do aerofólio considerando-se $V_{keas} = 27,6\text{m/s}$ e $\rho = 1.225\text{kg/m}^3$. $V_{keas} = V_{flutter}$	59
31	Diagrama V - g - f para $k_{\beta}^f = 0,1k_{\beta}$ (sem incluir o atuador em modo de falha), sendo a velocidade de flutter $V_{flutter} = 10,3\text{ m/s}$ e $f_{flutter} = 4,5\text{ Hz}$	61
32	Diagrama V - g - f para $k_{\beta}^f = 0,2k_{\beta}$ (sem incluir o atuador em modo de falha), sendo a velocidade de flutter $V_{flutter} = 14,4\text{ m/s}$ e $f_{flutter} = 6,4\text{ Hz}$	61
33	Amortecimento linear equivalente para amplitudes: $A = 0,05\text{ m}$ (linha azul com símbolo \times) e $A = 0,03\text{ m}$ (linha vermelha com símbolo \square) para $C = 10^{-5}\text{ kg/m}$ e $\mu = 2 \times 10^{-4}$	62
34	Espectro em frequência da força f_{nl} para um movimento harmônico imposto, com frequência $f = 6.5\text{ Hz}$, $A = 0,03\text{ m}$, $C = 10^{-5}\text{ kg/m}$ e $\mu = 2 \times 10^{-4}$. Harmônicos $3f$ e $5f$ evidentes.	63
35	Diagrama V - g - f linear equivalente para $A = 5\text{ cm}$, $C = 10^{-5}\text{ kg/m}$ e $\mu = 2 \times 10^{-4}$, implicando na velocidade de FLE igual a $17,4\text{ m/s}$	64
36	Diagramas V - g - f linear equivalente para $A = 3\text{ cm}$, $C = 10^{-5}\text{ kg/m}$ e $\mu = 2 \times 10^{-4}$, implicando na velocidade de FLE igual a $20,5\text{ m/s}$	65
37	Diagrama V - g - f linear equivalente para $A = 5\text{ cm}$, $C = 10^{-5}\text{ kg/m}$ e $\mu = 2 \times 10^{-4}$, implicando na velocidade de FLE igual a $16,4\text{ m/s}$	66
38	Diagramas V - g - f linear equivalente para $A = 3\text{ cm}$, $C = 10^{-5}\text{ kg/m}$ e $\mu = 2 \times 10^{-4}$, implicando na velocidade de FLE igual a $20,5\text{ m/s}$	66
39	Diagrama V - g - f linear equivalente para $A = 5\text{ cm}$, $C = 10^{-5}\text{ kg/m}$ e $\mu = 10^{-4}$, implicando na velocidade de FLE igual a $13,3\text{ m/s}$	67
40	Diagramas V - g - f linear equivalente para $A = 3\text{ cm}$, $C = 10^{-5}\text{ kg/m}$ e $\mu = 10^{-4}$, implicando na velocidade de FLE igual a $15,4\text{ m/s}$	68
41	Amortecimento linear equivalente para amplitudes: $A = 0,05\text{ m}$ (linha azul com símbolo \times) e $A = 0,03\text{ m}$ (linha vermelha com símbolo \square) para $C = 10^{-5}\text{ kg/m}$ e $\mu = 10^{-4}$	68
42	Rigidez K_{eq} e amortecimento C_{eq} lineares equivalentes para amplitude $A = 0.1\text{m}$, $C = 1.5$, $\mu = 0.0001$ e frequência de excitação $0 \leq f \leq 20\text{Hz}$ devido a força quadrática.	80
43	Rigidez K_{eq} e amortecimento C_{eq} lineares equivalentes para amplitude $A = 0.1\text{m}$, $C = 0.00001$, $\mu = 10$ e frequência de excitação $0 \leq f \leq 20\text{Hz}$ devido a força de atrito.	81
44	Comportamento de C_{eq} para diferentes valores de C , considerando $\mu = 1,2$ e $0 < f < 30\text{ Hz}$	82
45	Comportamento de C_{eq} para diferentes valores de μ , considerando $C = 0,1\text{ kg/m}$ e $0 < f < 30\text{ Hz}$	83

Lista de Símbolos

a_h	-	Parâmetro adimensional
A'	-	Posição do centro aerodinâmico
\mathbf{A}	-	Matriz dinâmica
$\overline{\mathbf{A}}$	-	Matriz dinâmica para modo de falha
b	-	Semi-corda do aerofólio
B'	-	Posição do centro elástico do aerofólio
\mathbf{B}	-	Matriz de amortecimento estrutural
$\overline{\mathbf{B}}$	-	Matriz de amortecimento estrutural em modo de falha
$\mathbf{B}_{\phi\phi}$	-	Matriz de amortecimento modal
\mathbf{B}^{ap}	-	Matriz de amortecimento estrutural aproximada
$\mathbf{B}_{\phi\phi}^{ap}$	-	Matriz de amortecimento aproximada modal
$\mathbf{B}_{\phi\phi}^f$	-	Matriz de amortecimento modal para modo de falha
c	-	Corda do aerofólio
c_β	-	Parâmetro adimensional
C	-	Constante de proporção para a força de amortecimento
C'	-	Posição do centro geométrico do aerofólio
C_{eq}	-	Amortecimento linear equivalente
C_{leq}^β	-	Amortecimento linear equivalente associado à variável β
\mathbf{C}_{eq}	-	Matriz de amortecimento linear equivalente
D	-	Rigidez dinâmica
D'	-	Posição do centro de gravidade do aerofólio
E'	-	Posição do centro elástico da superfície de controle
E_n	-	Energia do sistema
f	-	Frequência em Hz
f_c	-	Força de amortecimento de Coulomb
f_f	-	Módulo da força de atrito
f_n	-	Força normal
f_q	-	Força de amortecimento quadrático
f_{nl}	-	Força não linear
f_{eq}	-	Força equivalente
$f_{f(leq)}$	-	Frequência de flutter linear equivalente
f_{nl}^h	-	Força não linear advinda do aerofólio e associada à variável h
f_{nl}^α	-	Força não linear advinda do aerofólio e associada à variável α
f_{nl}^β	-	Força não linear advinda da superfície de controle
F'	-	Posição do centro de gravidade da superfície de controle

F_a^f	- Força do atuador em modo de falha
F_{nl}	- Força não linear do atuador no domínio da frequência
\mathbf{F}_a	- Matriz de forças aerodinâmicas
g	- Fator de amortecimento indicado no gráfico $V-g-f$
G	- Características geométricas
h	- Translação do aerofólio (<i>plunge</i>)
h_Ψ	- Deslocamento generalizado de <i>plunge</i>
H_{11}	- FRF para o <i>plunge</i>
H_{22}	- FRF para o <i>pitch</i>
H_{33}	- FRF para a superfície de controle
$\mathbf{H}(\omega)$	- Matriz de Função de resposta em frequência
I_α	- Momento de inércia em torno do centro elástico do aerofólio
I_β	- Momento de inércia em torno do centro elástico da superfície de controle
\mathbf{I}	- Matriz identidade
k	- Frequência reduzida
k_h	- Rigidez de <i>plunge</i>
k_α	- Rigidez de <i>pitch</i>
k_β	- Rigidez da superfície de controle
k_β^f	- Rigidez da superfície de controle reduzida em função da falha
K_{eq}	- Rigidez linear equivalente
K_{leq}^β	- Rigidez linear equivalente associada ao gdl β
\mathbf{K}	- Matriz de rigidez estrutural
$\bar{\mathbf{K}}$	- Matriz de rigidez estrutural em modo de falha
\mathbf{K}_{eq}	- Matriz de rigidez linear equivalente
L	- Força de sustentação
m	- Massa do aerofólio
M_{ap}	- Massa aparente
$M_{1/4}$	- Momento aerodinâmico
\mathbf{M}	- Matriz de massa
p	- Pressão
q	- Pressão dinâmica
Q	- Vazão do fluido no bocal do <i>anti-flutter</i>
\mathbf{Q}	- Matriz de coeficientes aerodinâmicos
r	- Raio de giro do atuador
r_α	- Raio de giro do aerofólio
r_β	- Raio de giro da superfície de controle
s	- Variável de Laplace
S	- Seção do bocal
S_α	- Momento estático de massa do aerofólio

S_β	-	Momento estático de massa da superfície de controle
t	-	Tempo
T	-	Temperatura
\mathbf{u}	-	Vetor de deslocamento em coordenadas físicas
$\dot{\mathbf{u}}$	-	Vetor de velocidade em coordenadas físicas
$\ddot{\mathbf{u}}$	-	Vetor de aceleração em coordenadas físicas
V	-	Velocidade
$V_{flutter}$	-	Velocidade de flutter
$V_{f(leq)}$	-	Velocidade de flutter linear equivalente
V_{keas}	-	Velocidade equivalente
x_α	-	Parâmetro adimensional
x_β	-	Parâmetro adimensional
\mathbf{W}	-	Matriz retangular
\mathbf{W}^+	-	Pseudo inversa de Moore Penrose \mathbf{W}
z	-	Razão entre a força não linear e a força equivalente
Z	-	Impedância mecânica

Letras Gregas

α	- Rotação do aerofólio (<i>pitch</i>)
α_b	- Parâmetro escalar para obtenção de \mathbf{B}
α_b^f	- Parâmetro escalar para obtenção de $\bar{\mathbf{B}}$
α_Ψ	- Deslocamento generalizado de <i>pitch</i>
β_Ψ	- Deslocamento generalizado da superfície de controle
β	- Grau de Liberdade que representa a rotação da superfície de controle
β_b	- Parâmetro escalar para obtenção de \mathbf{B}
β_b^f	- Parâmetro escalar para obtenção de $\bar{\mathbf{B}}$
δ_m	- Deslocamento do atuador
ΔP	- Variação de pressão no bocal
ε	- Critério de parada do método <i>pk</i>
λ_a	- Autovalor aeroelástico
λ_i	- i-ésimo autovalor
μ	- Coeficiente de atrito dinâmico
$\xi_{(i)}$	- i-ésimo fator de amortecimento
$\xi_{(i)}^{ap}$	- i-ésimo fator de amortecimento aproximado
ρ	- Massa específica
ρ_0	- Massa específica do ar ao nível do mar
Φ	- Matriz de modos estruturais
Φ^T	- Matriz de modos estruturais transposta
$\Phi_{(i)}$	- i-ésimo modo de vibrar
Ψ	- Matriz de modos aeroelásticos
ω	- Frequência em rad/s
ω_h	- Frequência natural desacoplada de <i>plunge</i>
ω_α	- Frequência natural desacoplada <i>pitch</i>
ω_β	- Frequência natural desacoplada da superfície de controle
$\omega_{n(i)}$	- i-ésima frequência natural

Sumário

1	Introdução	16
1.1	Objetivos	19
1.2	Contribuições do Trabalho	19
1.3	Organização do Trabalho	19
2	Modelo Aeroelástico	21
2.1	Seção Típica com 3 gdl	21
2.2	Equações do Movimento do Sistema Aeroelástico	21
2.3	Amortecimento Estrutural	24
2.4	Estabilidade de Sistemas Dinâmicos	25
2.5	Flutter	27
2.6	Não Linearidades Em Análises Aeroelásticas	27
3	Atuadores de Superfície de Controle	29
3.1	Atuadores Hidráulicos	29
3.2	Forças de Amortecimento	30
3.2.1	Amortecimento Quadrático	31
3.2.2	Amortecimento de Coulomb	33
3.3	Força do Atuador em Modo de Falha	34
3.4	Representação Linear Equivalente	35
3.4.1	Rigidez e Amortecimento Lineares Equivalentes	36
3.4.2	Ensaio de Impedância Dinâmica do Atuador	37
3.4.3	Atuador Operando em Modo de Falha	39
4	Estabilidade para Atuador em Modo de Falha	43
4.1	Método pk	43
4.2	Atuador em Modo de Falha	47
4.2.1	Equação do Movimento para Sistema com Atuador em Falha	47
4.2.2	Método pk Modificado	49
5	Resultados e Discussões	51
5.1	Predição de Flutter	52

5.2	Função de Resposta em Frequência Aeroelástica	54
5.3	Atuador em Modo de Falha	60
5.3.1	Flutter Linear Equivalente	62
6	Considerações Finais	70
6.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	73
	Referências Bibliográficas	74
	ANEXOS A	77
A.1	Aerodinâmica não Estacionária	77
	ANEXOS B	80
B.1	Representação Linear Equivalente	80
B.2	Força de Amortecimento de Coulomb	82
B.3	Força de Amortecimento Quadrático	83

1 Introdução

Sabe-se que antes de se iniciar a comercialização de aeronaves, bem como de produtos em geral, as equipes de engenharia tipicamente definem especificações para atendimento de requisitos, realizam ensaios padronizados, entre outras diversas análises para predição de funcionamento. Uma vez finalizado o projeto é possível obter a homologação, que trata-se de uma certificação que garante funcionalidade, integridade ao consumidor, além de qualidade e segurança.

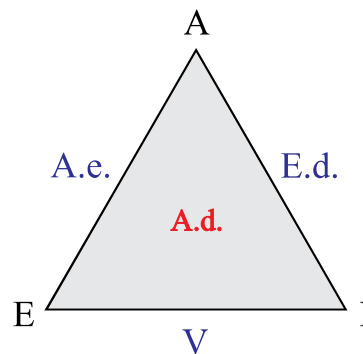
No Brasil, a ANAC, Agência Nacional de Aviação Civil é o órgão responsável pela normatização, certificação, fiscalização, e estabelece autorizações e concessões que tangem o transporte aéreo de passageiros ou cargas (ANAC, 2018). A certificação garante a confiabilidade de que o produto desenvolvido atende aos requisitos estabelecidos em regulamentos internacionais de aviação, visto que a certificação da ANAC segue a convenção de Chicago realizada em 1944, também aceita por diversos outros países.

No processo de homologação de aeronaves é comum a utilização de ferramentas de simulação computacional devido ao auxílio que proporcionam no desenvolvimento de produtos, como por exemplo a predição do comportamento dinâmico dos sistemas mecânicos e simulação de testes em condições de operação, reduzindo a necessidade da confecção de protótipos. Os resultados obtidos por esses processos são utilizados também como evidências que garantem a integridade do produto nas condições de trabalho simuladas.

No presente contexto, esta dissertação de mestrado discute um processo de análise de estabilidade aeroelástica para a condição de um atuador de superfície de controle em modo de falha. Trata-se de um escopo em aeroelasticidade, que é o ramo da engenharia que estuda os fenômenos associados aos efeitos que os carregamentos aerodinâmicos exercem sobre a estrutura das aeronaves, incluindo as características elásticas da estrutura, os efeitos e suas implicações (BISPLINGHOFF *et al.*, 1996; WRIGHT; COOPER, 2007).

Segundo Collar (1946), entende-se que a aeroelasticidade é responsável pelo estudo das interações do par fluido e estrutura, e considera em suas análises a relação entre as forças aerodinâmicas, elásticas e inerciais, representadas respectivamente por A, E e I no diagrama de Collar na fig.1, o qual é amplamente utilizado para ilustrar e classificar as possíveis análises que podem ser realizadas de acordo com as forças presentes no sistema (FUNG, 1993).

Figura 1 – Diagrama de Collar, sendo A as forças aerodinâmicas, E representa as forças elásticas, enquanto I remete as forças inerciais do sistema.



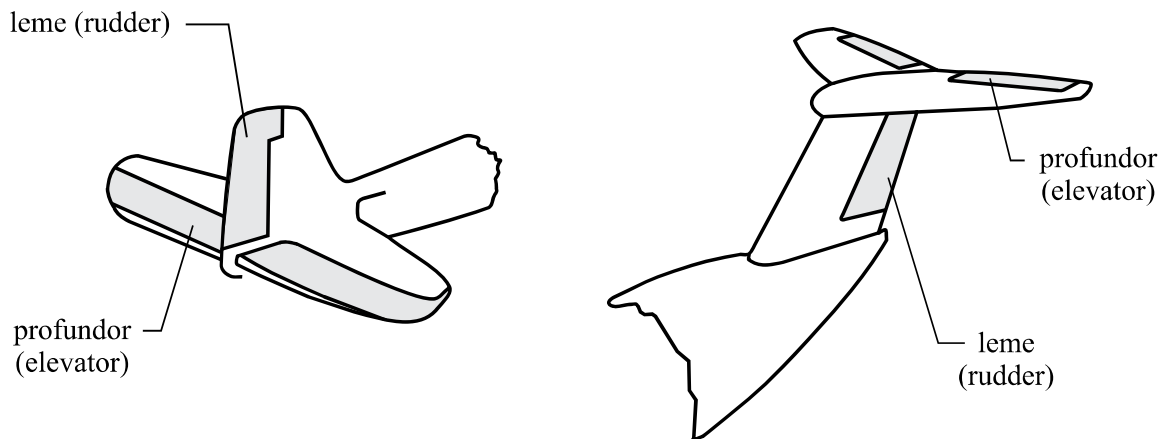
Fonte: Adaptado de Collar (1978)

O estudo da aeroelasticidade estática, representado por A.e., ocorre quando se tem forças aerodinâmicas e elásticas. Analogamente, E.d. representa análises de estabilidade dinâmica, sendo que, V está associado a fenômenos de vibração que não possuem influência de força aerodinâmica, e A.d representa a aeroelasticidade dinâmica. Dentre os problemas clássicos tratados na aeroelasticidade, tem-se os fenômenos da divergência, contido no campo da aeroelasticidade estática, e o flutter, que pertence ao domínio das análises da aeroelasticidade dinâmica (THEODORSEN, 1935). Em particular, este trabalho compreende um estudo em aeroelasticidade dinâmica envolvendo atuadores de superfície de controle.

Atuadores de superfícies de controle são dispositivos que permitem o piloto movimentar a aeronave durante o voo. Após uma solicitação do piloto, o atuador aplica força que permite a rotação de aileron, lemes, profundos, entre outras, alterando a distribuição de força sobre o veículo, gerando então uma correspondente alteração na direção de voo. As figuras 2 e 3 ilustram estas superfícies de controle. O aileron é responsável pelo movimento de rolamento da aeronave, por meio do comando das superfícies de controle localizadas no bordo de fuga das asas. O rolamento ocorre em torno do eixo longitudinal da aeronave. Já o movimento de arfagem, descrito pela rotação da aeronave em relação ao eixo lateral, é controlado por meio das superfícies de controle denominadas profundos, as quais estão localizadas na empennagem. Por sua vez, o leme, também localizado na empennagem, permite o controle do movimento de guinada, que consiste na rotação da aeronave em relação ao eixo vertical (TALAY, 1975).

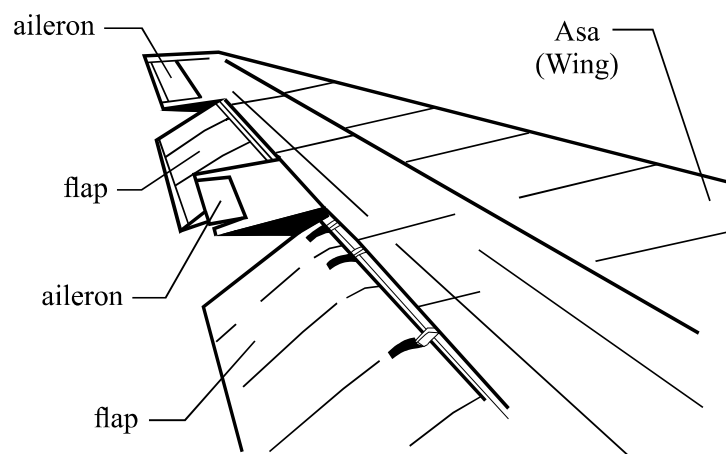
Tem-se em condições reais de engenharia que alguns tipos de falhas, como perda de pressão hidráulica, ruptura de fixação, entre outras, podem danificar o sistema de atuação, implicando em não se obter na superfície de controle o movimento desejado pelo piloto (MARÉ, 2016). No entanto, mesmo nestas condições, de acordo com as normas de certificação, a aeronave deve manter a estabilidade, permitindo ainda que o piloto tenha aeronavegabilidade segura (FAA, 1965). Nas falhas nos sistemas hidráulicos, tipicamente, o atuador da superfície de controle exibe o comportamento de um amortecedor viscoso não linear, conforme destaca Huet *et al.* (2011) e como caracterizado por (MARÉ, 2016) como quadrático. Assim, mesmo nessas con-

Figura 2 – Representação de superfícies na empennagem da aeronave.



Fonte: Adaptado de [Talay \(1975\)](#)

Figura 3 – Representação de superfícies de controle na asa de uma aeronave.



Fonte: Adaptado de [Talay \(1975\)](#)

dições, os projetos de engenharia devem assegurar o desenvolvimento de veículos aéreos livres de flutter dentro do envelope operacional da aeronave.

Diante deste contexto, o presente trabalho apresenta uma metodologia de análise de estabilidade aeroelástica considerando o atuador da superfície de controle como um amortecedor viscoso não linear. A proposta é baseada na sugestão apresentada no trabalho de [Huet et al. \(2011\)](#). Considera-se a seção típica de três graus de liberdade, com aerodinâmica não estacionária de [Theodorsen \(1935\)](#). A proposta compreende uma adaptação do método pk para incluir propriedades lineares equivalentes do transdutor em falha. As propriedades são obtidas a partir da simulação numérica e a descrição matemática de um modelo de força não linear, afim de representar adequadamente o ensaio experimental de impedância mecânica, que permite descrever o atuador em falha através de rigidez e amortecimento lineares equivalentes, para cada amplitude e frequência de movimento de interesse da análise. Os resultados permitem se obter

diagramas $V-g-f$ lineares equivalentes, que informam condições de voo com possíveis oscilações de ciclo limite. A partir deste estudo tem-se que a metodologia proposta é adequada para aplicações de engenharia.

1.1 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é adaptar o método pk para considerar a influência do atuador de superfície de controle em modo de falha hidráulica.

Destacam-se entre os objetivos secundários:

- Verificar a resposta do sistema dinâmico da seção típica de três gdl no envelope aerodinâmico definido como instável, por meio dos gráficos $V-g-f$, bem como discutir o flutter linear equivalente;
- Utilizar uma simulação computacional do ensaio de impedância para obter propriedades equivalentes de amortecedores viscosos não lineares;

1.2 Contribuições do Trabalho

- Ter adaptado o método pk para compreender iterações nas frequências angulares para incluir as propriedades lineares equivalentes de atuadores em modo de falha hidráulica, descritos por força de amortecimento não linear;
- Ter discutido o conceito de flutter linear equivalente e de possíveis pontos de oscilações de ciclo limite.

1.3 Organização do Trabalho

O conteúdo deste trabalho está organizado na seguinte forma:

- O capítulo 1 apresenta a introdução do tema deste trabalho, análise aeroelástica do atuador de superfície de controle em modo de falha hidráulica, expondo de modo genérico, a motivação do estudo desenvolvido, as aplicações, assim como o contexto sobre o domínio da aeroelasticidade que abrange simulações numéricas com o intuito de predição do comportamento de sistemas dinâmicos em condições de operação.
- O capítulo 2 discute a dinâmica linear do aerofólio com três graus de liberdade utilizando-se como referência o trabalho desenvolvido por [Theodorsen \(1935\)](#). Exibe-se as características geométricas e propriedades físicas essenciais utilizadas para a modelagem do

sistema. Além disso, evidencia-se as variáveis que compõem as equações do movimento que representam a dinâmica do aerófolio, assim apresenta-se a formulação na forma matricial. Discute-se, também, o conceito de estabilidade e o fenômeno flutter, destacando-se a necessidade de se considerar os efeitos não lineares do atuador em falha descrito por um amortecedor não linear.

- No capítulo 3 discute-se as características do atuador das superfícies de controle, o modelo de amortecimento, efeito da falha hidráulica, o funcionamento do dispositivo *anti-flutter*, assim como o método via ensaio de impedância usado para se obter as propriedades lineares equivalente do dispositivo em falha.
- No capítulo 4 apresenta-se o método *pk* na sua forma clássica e, também, a versão modificada para considerar as propriedades lineares equivalentes do atuador em modo de falha.
- O capítulo 5 compreende as simulações numéricas caracterizando o flutter linear, que representa a condição do atuador em modo normal de operação (sem falha), além das simulações das condições que representam falhas no sistema hidráulico, que permitem se obter os diagramas de flutter linear equivalente.
- Finalmente, o capítulo 6 apresenta as considerações finais do trabalho, além de sugestões para trabalhos futuros.

2 Modelo Aeroelástico

Este capítulo apresenta o modelo dinâmico do sistema aeroelástico de três graus de liberdade, além de apresentar sucintamente o conceito de estabilidade. Também, apresenta-se uma breve descrição do fenômeno de flutter.

2.1 Seção Típica com 3 gdl

A figura 4 apresenta a seção típica com três gdl, representando o deslocamento vertical $h(t)$, o deslocamento angular do aerofólio $\alpha(t)$ e o deslocamento angular da superfície de controle $\beta(t)$. Suas principais dimensões são a corda c , que equivale ao comprimento do aerofólio delimitado pelos bordos de ataque e de fuga; a semi-corda $b = c/2$, e o posicionamento dos centros aerodinâmico, elástico, geométrico e de gravidade, indicados pelas letras A' , B' , C' e D' . Também, apresenta-se por E' e F' os centros elástico e o centro de gravidade da superfície de controle respectivamente. Na figura, k_h é a rigidez associada ao deslocamento vertical do aerofólio, k_α é a rigidez torcional e k_β é a rigidez torcional da superfície de controle.

2.2 Equações do Movimento do Sistema Aeroelástico

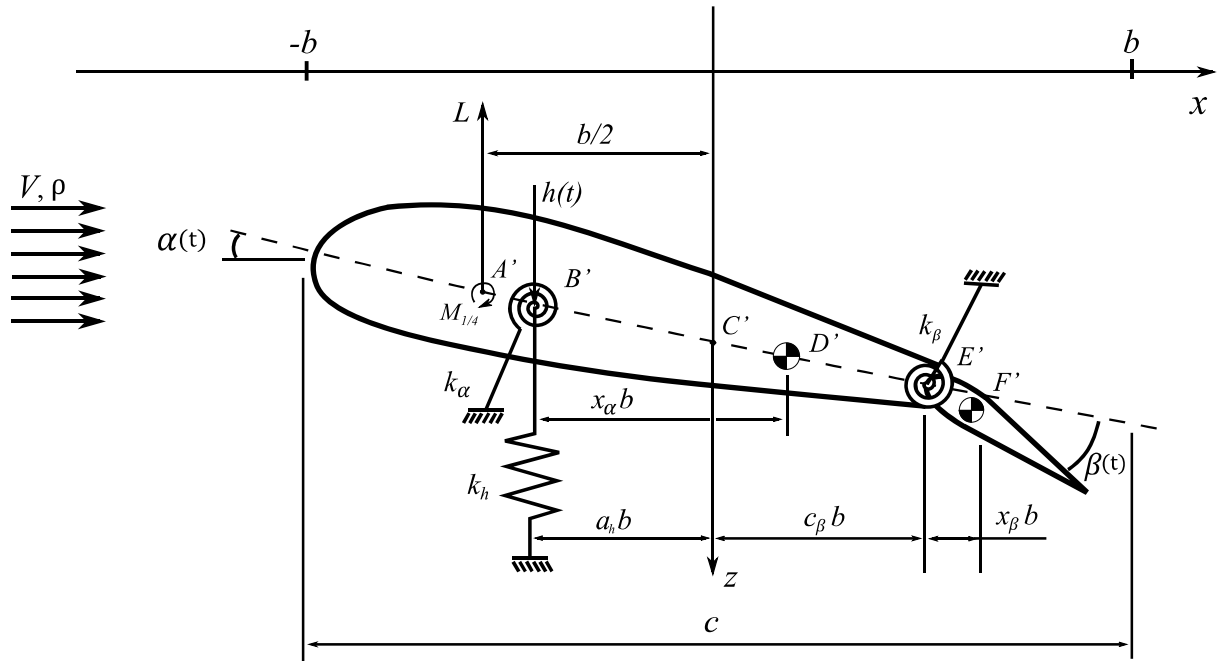
A Eq. (1) descreve o movimento do sistema aeroelástico em condição nominal (sem falha no atuador), sendo \mathbf{M} a matriz de massa, \mathbf{B} a matriz de amortecimento estrutural e \mathbf{K} a matriz de rigidez. \mathbf{F}_a é o vetor de forças aerodinâmicas não-estacionárias, que depende do movimento do sistema aeroelástico, das características do escoamento (velocidade V e massa específica ρ) e da geometria da estrutura, representada pela letra G como apresentado por [Wright e Cooper \(2007\)](#).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}_a(\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, t, V, \rho, G) \quad (1)$$

Para a seção típica de três graus de liberdade, o vetor de deslocamentos $\mathbf{u}(t)$ é dado por:

$$\mathbf{u}(t) = \left\{ h(t) \quad \alpha(t) \quad \beta(t) \right\}^T \quad (2)$$

Figura 4 – Características geométricas de um aerofólio com três gdl, deslocamento vertical e angular do aerofólio $h(t)$ e $\alpha(t)$, e o deslocamento angular da superfície de controle $\beta(t)$. Sendo c a corda do aerofólio, b a semi-corda, k_h a rigidez ao deslocamento vertical do aerofólio, k_α a rigidez torcional e k_β a rigidez torcional da superfície de controle. Os pontos A' , B' , C' e D' representam os centros aerodinâmico, elástico, geométrico, de gravidade do aerofólio, os pontos E' e F' identificam os centros elástico e de gravidade da superfície de controle.



Fonte: Adaptado de [Theodorsen \(1935\)](#)

[Theodorsen \(1935\)](#) define as rigidezes da seção típica em termos de frequências naturais para um sistema de três graus de liberdade desacoplado de acordo com as eq.(3), relação utilizada de modo análogo por [Lima \(2016\)](#) ao analisar um aerofólio com dois gdl e aerodinâmica estacionária. Assim, tem-se que

$$k_h = m\omega_h^2 \quad k_\alpha = I_\alpha\omega_\alpha^2 \quad k_\beta = I_\beta\omega_\beta^2 \quad (3)$$

sendo as inércias I_α e I_β definidas em termos de raios de giração r_α e r_β . Tais raios permitem representar as inércias de determinada forma de aerofólio em função da semicorda b , tal que $d = br_0$, o que permite definir o raio de giração como a razão entre a inércia e a massa do sistema multiplicado pela semicorda, ou seja, $r_0^2 = \frac{I_0}{mb^2}$. Com isto, as inércias do aerofólio e

da superfície de controle são dadas por:

$$\begin{aligned} I_\alpha &= m(br_\alpha)^2 \\ I_\beta &= m(br_\beta)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Considerando que o centro elástico de um aerofólio tipicamente pode não coincidir com o centro de gravidade, o momento estático de massa S_α e S_β , respectivamente para o aerofólio e a superfície de controle, geram forças, devido a aceleração, em todos os graus de liberdade. Tem-se que

$$S_\alpha = mbx_\alpha \quad S_\beta = mbx_\beta \quad (5)$$

sendo x_α e x_β parâmetros adimensionais que associados com a semi-corda b definem respectivamente a distância entre o centro elástico e o centro de gravidade do aerofólio, e da superfície de controle. Observe que as distâncias entre os posicionamentos presentes na caracterização da geometria do aerofólio na figura 4 estão em função da semi-corda b e associadas a um parâmetro adimensional, de modo que a distância seja fixa e representada em metros, uma vez definidos os parâmetros adimensionais.

Assim, partir da soma de forças e momentos atuantes no aerofólio, em cada grau de liberdade, pode-se estabelecer o modelo dinâmico da Eq. (1), tal que as matrizes de massa \mathbf{M} e rigidez \mathbf{K} assumam a configuração abaixo. Utiliza-se neste trabalho, a abordagem matemática desenvolvida por [Theodorsen \(1935\)](#), que desenvolve a análise aerodinâmica a partir do modelo da placa plana, considerando-se assim, o efeito de acoplamento na matriz de massa enquanto que a matriz de rigidez possui configuração diagonal.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & S_\alpha & S_\beta \\ S_\alpha & I_\alpha & (I_\beta + S_\beta b(c - a)) \\ S_\beta & (I_\beta + S_\beta b(c - a)) & I_\beta \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_h & 0 & 0 \\ 0 & k_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & k_\beta \end{bmatrix} \quad (7)$$

Salienta-se ainda que a e c_β , tratam-se de parâmetros adimensionais associados a semi-corda, que relacionam a distância entre os centros elásticos e o centro geométrico e, por isto, influenciam diretamente na dinâmica do sistema.

2.3 Amortecimento Estrutural

Considerando a matriz de modos estruturais $\Phi = [\Phi_1 \dots \Phi_n]$ obtida pela solução do problema de autovalor $[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} - \lambda_i\mathbf{I}]\Phi_i = \mathbf{0}$, sendo $\lambda_i = \omega_{n(i)}^2$, $\omega_{n(i)}$ a i -ésima frequência natural e Φ_i o i -ésimo modo de vibrar, para $i = 1, \dots, n$, a matriz de amortecimento modal é dada por

$$\mathbf{B}_{\phi\phi} = \Phi^T \mathbf{B} \Phi \quad (8)$$

Para a matriz de amortecimento estrutural proporcional às matrizes de massa e rigidez, tem-se [Bueno \(2007\)](#)

$$\mathbf{B} = \alpha_b \mathbf{M} + \beta_b \mathbf{K} \quad (9)$$

Substituindo a Eq. (9) na Eq. (8), tem-se as matrizes de massa modal e rigidez modal, respectivamente iguais a $\mathbf{M}_{\phi\phi} = \Phi^T \mathbf{M} \Phi$ e $\mathbf{K}_{\phi\phi} = \Phi^T \mathbf{K} \Phi$.

Sabe-se, também, que a matriz de $\mathbf{B}_{\phi\phi}$ é diagonal, tal que o i -ésimo elemento da diagonal é dado por [Gawronski \(2004\)](#)

$$B_{\phi\phi}^{(i)} = 2\xi_i \omega_{n(i)} \quad (10)$$

Assim, definindo um fator de amortecimento ξ_i para cada modo de vibrar n , é possível se obter a matriz de amortecimento modal $\mathbf{B}_{\phi\phi}$ de acordo com a eq.(11), e, a partir desta especificação, pode-se calcular os valores dos escalares α_b e β_b resolvendo o seguinte sistema:

$$\mathbf{B}_{\phi\phi} = \begin{bmatrix} 2\xi_1 \omega_{n(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\xi_2 \omega_{n(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\xi_n \omega_{n(n)} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{W} \begin{Bmatrix} \alpha_b \\ \beta_b \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_{\phi\phi}^d \quad (12)$$

sendo $diag(\cdot)$ a diagonal da matrix tal que $diag(\mathbf{B}_{\phi\phi})$ é posicionada como um vetor coluna $n \times 1$ e representado por $\mathbf{B}_{\phi\phi}^d$. Analogamente, posiciona-se as matrizes diagonais, $diag(\mathbf{M}_{\phi\phi})$ e $diag(\mathbf{K}_{\phi\phi})$ em vetores de dimensão $n \times 1$, de modo a obter a matriz \mathbf{W} sendo uma matriz $n \times 2$ dada por

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\phi\phi}^d & \mathbf{K}_{\phi\phi}^d \end{bmatrix} \quad (13)$$

sendo n o número de graus de liberdade do sistema. Note que o sistema da Eq. (12) é obtido a partir da Eq. (9) reescrita nas coordenadas modais. Ainda, note que a Eq. (12) envolve uma

matriz retangular e, portanto, uma solução aproximada pode ser obtida empregando a pseudo inversa de Moore Penrose \mathbf{W}^+ . Então, o vetor solução $\{\alpha_b \ \beta_b\}^T$ é dado por

$$\begin{Bmatrix} \alpha_b \\ \beta_b \end{Bmatrix} \approx \mathbf{W}^+ \mathbf{B}_{\phi\phi}^d \quad (14)$$

Note que a solução aproximada permite se obter uma matriz de amortecimento aproximada \mathbf{B}_{ap} , ou seja, $\mathbf{B} \approx \alpha_b \mathbf{M} + \beta_b \mathbf{K} = \mathbf{B}_{ap}$, tal que $\mathbf{B}_{\phi\phi}^{ap} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{B}_{ap} \mathbf{\Phi}$ é uma matriz diagonal dominante, sendo sua diagonal função de fatores de amortecimento estrutural aproximados ξ_i^{ap} , $i = 1, \dots, n$, com valores próximos aos ξ_i (Eq. 10), isto é, $\xi_i^{ap} \approx \xi_i$ para cada modo. Tem-se então que

$$\mathbf{B}_{\phi\phi}^{ap} = \text{diag}(2\xi_1^{ap} \omega_{n(1)}, \dots, 2\xi_n^{ap} \omega_{n(n)}) \approx \mathbf{B}_{\phi\phi} \quad (15)$$

Para clareza de entendimento, perceba que ao se utilizar este procedimento para calcular os valores de α_b e β_b a partir de fatores de amortecimento ξ_i de referência, e com estes valores se obter a matriz de amortecimento estrutural \mathbf{B}_{ap} , os fatores de amortecimento que atuam no sistema, e influenciam na velocidade de flutter, são os valores ξ_i^{ap} , em vez das referências ξ_i . Por simplicidade, emprega-se neste texto a notação ξ_h , ξ_α e ξ_β para indicar os fatores de amortecimento de cada modo estrutural da seção típica de três graus de liberdade, sendo que correspondem respectivamente a ξ_1^{ap} , ξ_2^{ap} e ξ_3^{ap} na notação apresentada nesta seção.

2.4 Estabilidade de Sistemas Dinâmicos

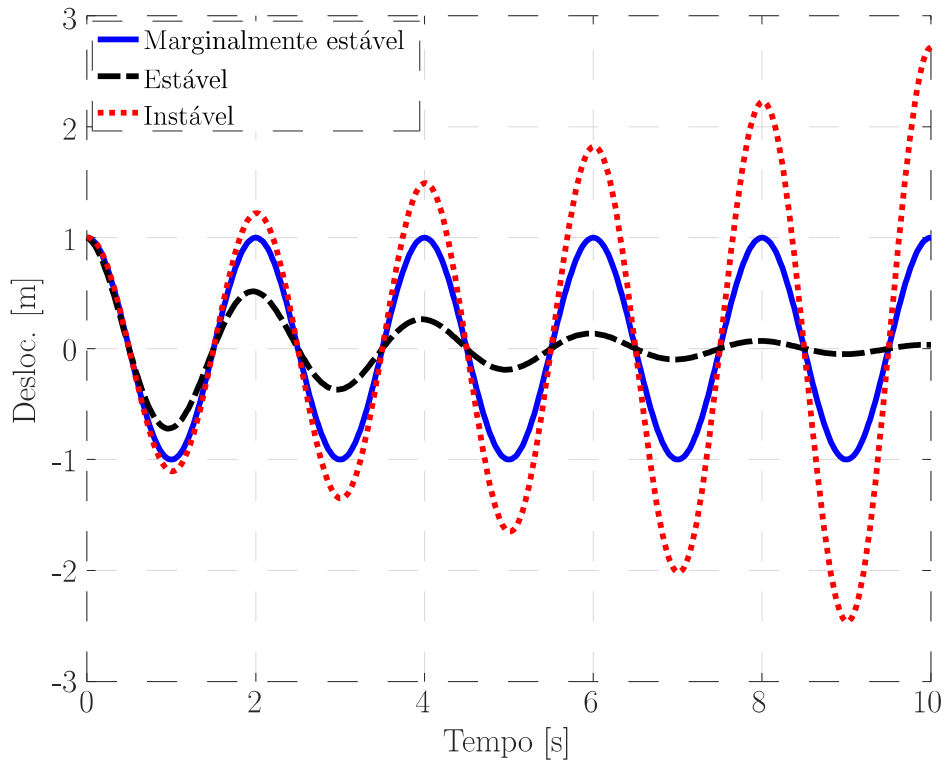
Pode-se avaliar a estabilidade de um sistema dinâmico através da análise da variação temporal da energia. De acordo com [Bueno \(2014\)](#), o conceito de estabilidade de [Liapounov \(1907\)](#) estabelece que o sistema é dito estável, se e somente se, a variação temporal da energia do sistema E é negativa, conforme a Eq. (16), sendo uma condição necessária para caracterizar um sistema como estável.

$$\frac{d}{dt}[E_n(t)] < 0 \quad (16)$$

Sendo o sistema dinâmico estável, sua resposta apresenta amplitude decaindo ao longo do tempo, conforme ilustra a figura 5. No entanto, o sistema pode também ser marginalmente estável, apresentando amplitude de movimento constante ou, ainda, instável, com amplitude crescente ao longo do tempo.

Outro ponto que cabe análise e discussão, no contexto deste trabalho, é que se analisa a estabilidade da resposta aeroelástica, e não a estabilidade do sistema em si, portanto, sistemas não lineares podem apresentar diversas soluções coexistentes, estáveis ou instáveis, de acordo com as condições de contorno utilizados, ou método de análise de estabilidade. Evidencia-se a

Figura 5 – Ilustrações da resposta de um sistema dinâmico: estável (linha tracejada, preta), marginalmente estável (linha contínua, azul) e instável (linha pontilhada, vermelha).



Fonte: Adaptado de *Balachandran e Magrab (2011)*

ideia proposta por [Liapounov \(1907\)](#) afim de ilustrar e associar graficamente o comportamento e resultados de instabilidades das respostas aeroelásticas exibidas nos posteriores capítulos deste trabalho.

2.5 Flutter

A partir das definições de [Fung \(1993\)](#), [Bisplinghoff *et al.* \(1996\)](#), [Wright e Cooper \(2007\)](#), pode-se descrever o fenômeno flutter como uma oscilação autoexcitante que ocorre quando um modo de vibrar do sistema aeroelástico deixa, em determinada condição de voo (ρ, V), de dissipar energia e passa recebê-la do escoamento, o que é caracterizado por um fator de amortecimento aeroelástico positivo.

O flutter é um fenômeno perigoso devido ao seu caráter destrutivo e, principalmente, por sua característica autoexcitante. Com o aumento da velocidade da aeronave atinge-se uma condição crítica de voo, neste limite operacional, ocorre um decremento acentuado do fator de amortecimento da estrutura devido ao carregamento aerodinâmico. E conseqüentemente, nesta condição de voo tem-se o flutter, fenômeno que representa as oscilações autoexcitantes que podem aumentar sua amplitude caso este limite operacional descrito como condição crítica não seja respeitado. Neste cenário, tem-se condição de voo insegura, pois pequenos distúrbios na velocidade do escoamento, ou efeitos externos como rajadas de ventos laterais, podem facilitar e operar como gatilhos para a ocorrência de oscilações com maiores amplitudes e de maior violência capazes de colapsar a estrutura da aeronave ([FUNG, 1993](#)). Por isto, o desenvolvimento de veículos aéreos segue rigoroso processo de análise, resultando na definição de um envelope de voo no qual a aeronave pode operar ([FAA, 1965](#)).

A típica análise físico matemática do flutter consiste em avaliar os autovalores do sistema para cada condição de voo (ρ, V), o que permite definir frequências e fatores de amortecimento aeroelásticos. Com estas informações pode-se construir diagramas $V-g-f$, que apresentam estas características de forma conveniente, conforme apresentado e discutido no capítulo 5. Trata-se de uma forma ilustrativa, comumente empregada na análise de flutter. Também, a análise de autovalores permite, a partir dos autovetores, visualizar os modos de vibrar aeroelásticos para cada condição de voo de interesse.

2.6 Não Linearidades Em Análises Aeroelásticas

O fenômeno de flutter pode ser identificado por uma análise linear, conforme apresentam inúmeros trabalhos da literatura. No entanto, não linearidades estruturais e aerodinâmicas podem alterar a estabilidade do sistema.

As origens de não linearidades no escoamento normalmente estão associadas à natureza de algumas condições do fluxo de ar, como ondas de choque em escoamento transônico. Por outro lado, as não linearidades associadas a parte estrutural são geralmente devido a rigidez, amortecimento, folgas, atrito, entre outras, conforme destaca [Camilo \(2007\)](#), [Almeida \(2012\)](#), [Vasconcellos \(2012\)](#).

Em particular, o presente trabalho concentra-se em realizar uma análise aeroelástica na seção típica de três gdl considerando dois cenários. No primeiro, o atuador responsável pelo movimento da superfície de controle opera em condição intacta, também denominada neste texto como condição nominal. Neste caso, o atuador não influencia nas características estruturais do sistema. Por outro lado, no segundo cenário de análise, o atuador apresenta uma condição de falha, representando uma falha de sistema hidráulico, porém devido ao dispositivo anti-flutter que compõem o sistema do atuador é possível ainda comandar a superfície de controle na condição de operação denominada modo de falha. Nesta condição, o atuador apresenta uma redução de suas propriedades nominais, de rigidez e amortecimento e, adicionalmente, exibe um comportamento típico de um amortecedor viscoso não linear, combinado com atrito. Detalhes de falhas de atuadores de superfície de controle podem ser encontrados na literatura, como por exemplo no trabalho de [Maré \(2016\)](#), que discute que este tipo de atuador apresenta uma força de amortecimento quadrático com efeito de amortecimento de Coulomb, conforme se discute no capítulo 3.

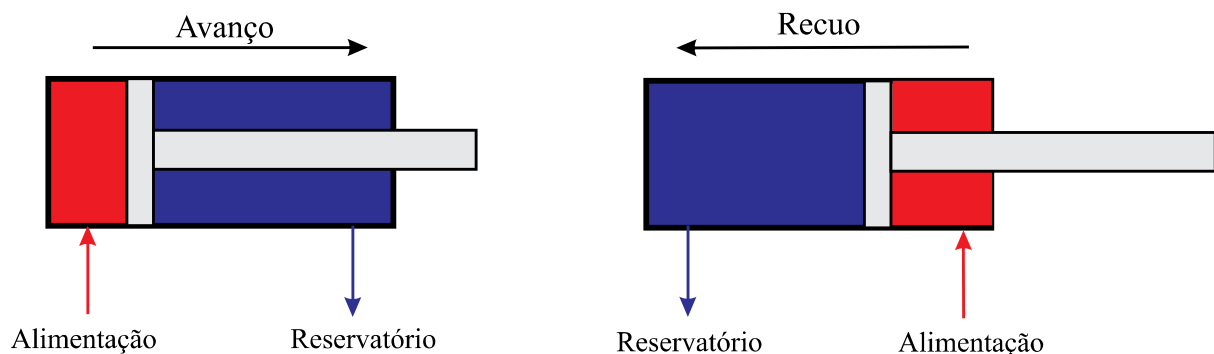
3 Atuadores de Superfície de Controle

Neste capítulo são apresentadas informações gerais sobre um atuador de superfície de controle, além das forças de amortecimento quadrático e de Coulomb, que descrevem a condição de falha em estudo neste trabalho. Também, apresenta-se a representação linear equivalente (LE) para a força não linear do atuador em modo de falha, bem como o procedimento do ensaio de impedância, que permite se obter a representação LE.

3.1 Atuadores Hidráulicos

Em linhas gerais, pode-se dizer que os atuadores hidráulicos realizam movimentos de avanço e de recuo da haste. Construtivamente os atuadores de dupla ação possuem duas câmaras de pressão separadas por um êmbolo, como é apresentado na ilustração da figura 6. Ainda, de acordo com a linha de alimentação hidráulica, define-se a direção do movimento da haste do atuador e, no caso dos atuadores de dupla ação, associa-se a este componente hidráulico as válvulas direcionais, responsáveis pelo controle de fluxo do fluido hidráulico, e conseqüentemente, do movimento de avanço e recuo do transdutor.

Figura 6 – Representação ilustrativa do atuador hidráulico de dupla ação.

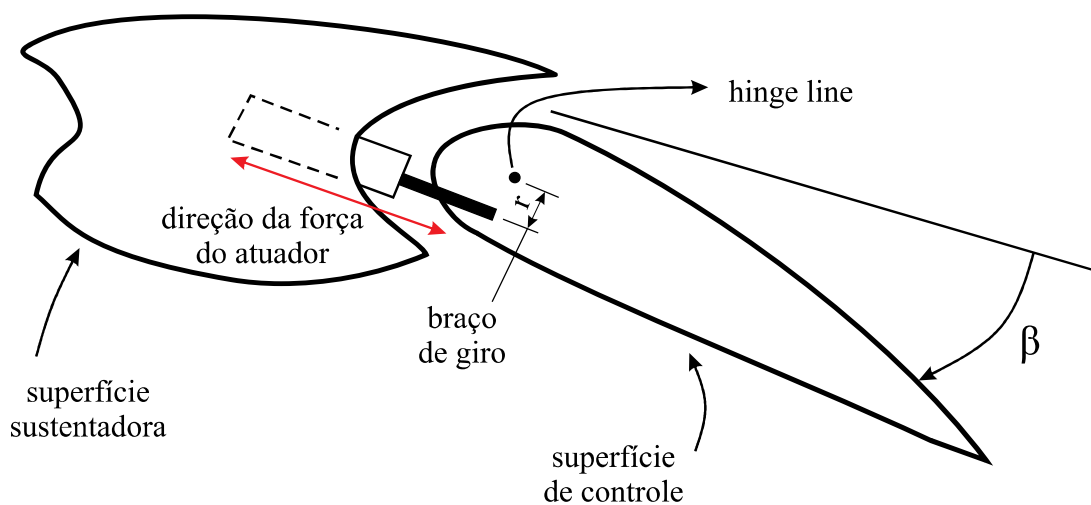


Fonte: Adaptado de *Maré (2016)*

Para estes atuadores, uma característica dos sistemas hidráulicos é que a velocidade do movimento que o atuador realiza está associada diretamente à pressão na linha de alimentação hidráulica, assim como o fluido de trabalho, pois propriedades físicas, como densidade e com-

pressibilidade, influenciam o sistema, em nível de velocidade e também de força [Dilda et al. \(2007\)](#). De modo geral, pode-se utilizar o ar como fluido em sistemas que necessitam de maior velocidade no acionamento. No entanto, os sistemas aeronáuticos consideram tipicamente óleos visto a necessidade do atuador aplicar consideráveis níveis de força ([CAMARGO, 2010](#)). Para clareza de entendimento, ilustra-se na figura 7 a representação da conexão entre o atuador hidráulico com a rotação da superfície de controle. Note que, enquanto a haste do atuador se move em translação da direção do corpo do transdutor, a superfície de controle gira em torno do eixo indicado no desenho como *hinge line*. Observe, ainda, que para pequenos ângulos o deslocamento A do atuador equivale aproximadamente a relação $A \approx r\beta$.

Figura 7 – Detalhe da conexão entre o atuador e a superfície de controle.



Fonte: Adaptado de [Talay \(1975\)](#)

As vantagens da utilização do sistema hidráulico em aeronaves está intrinsecamente relacionada a característica de reversibilidade do comando das linhas de pressão, pois diferentemente dos componentes elétricos, os sistemas hidráulicos suportam mudanças rápidas e sequenciais de direção ([CAMARGO, 2010](#)). Em relação aos sistemas pneumáticos, como utiliza-se o ar como fluido, sabe-se que apesar do sistema apresentar um maior velocidade de acionamento, trata-se de um fluido compressível, sendo assim, a capacidade dos sistemas hidráulicos em relação a força é maior, pois, o sistema hidráulico opera em linhas de pressões de amplitude mais elevadas.

3.2 Forças de Amortecimento

No contexto de sistemas dinâmicos, pode-se definir que o amortecimento trata-se da dissipação de energia que ocorre, comumente por meio da transmissão de calor e som ([SANTADE, 2017](#)). Também, tem-se que os atuadores de superfície de controle, particularmente em modo de falha hidráulica - o que implica em exibirem comportamento dinâmico de amortecedores,

são os elementos mecânicos associados a essa função (MARÉ, 2016).

Basicamente, pode-se classificar as forças de amortecimento como: lineares e não lineares. Em particular para amortecedores viscosos, descreve-se a força de amortecimento pela equação (17), que utiliza o parâmetro ϕ como expoente da velocidade $\dot{u}(t)$ da haste (SANTADE, 2017). Sendo $\phi \neq 1$, tem-se a força de amortecimento não linear, que tipicamente descreve um amortecedor viscoso não linear. Tem-se, tanto para um caso não linear, quanto linear, que a força é descrita, de modo geral, por um parâmetro C de proporcionalidade à velocidade.

$$F_{am}(t) = C\dot{u}(t)^\phi \quad (17)$$

Note que para $\phi = 1$, na Eq. (17), obtém-se o modelo classificado como amortecimento viscoso linear, de acordo com Ruzicka e Derby (1971). Trata-se de um dos mais recorrentes modelos na representação da dissipação de energia em sistemas dinâmicos, nos quais, a dissipação ocorre devido ao efeito do atrito ocasionado com a movimentação do fluido no atuador (RUZICKA; DERBY, 1971).

Além deste modelo linear, pode-se citar, também, os modelos não lineares mais comuns, que são o modelo de Coulomb para $\phi = 0$, e o quadrático, definido para $\phi = 2$ (RUZICKA; DERBY, 1971; BELARDO *et al.*, 2013).

3.2.1 Amortecimento Quadrático

Para a representação do modelo de amortecimento viscoso não linear quadrático, utiliza-se a Eq. (18), sendo C o coeficiente de amortecimento, $\dot{u}(t)$ a velocidade do êmbolo e $sign(\)$ a função sinal.

$$f_q(t) = C\dot{u}^2 sign(\dot{u}) \quad (18)$$

Para se estabelecer o ciclo de operação do atuador considera-se o movimento de avanço e recuo do componente ao longo do tempo, descrito pela Eq.(19), sendo A a amplitude movimento, ω a frequência, t o tempo, e $\sin(\)$ a função seno.

$$u(t) = A \sin(\omega t) \quad (19)$$

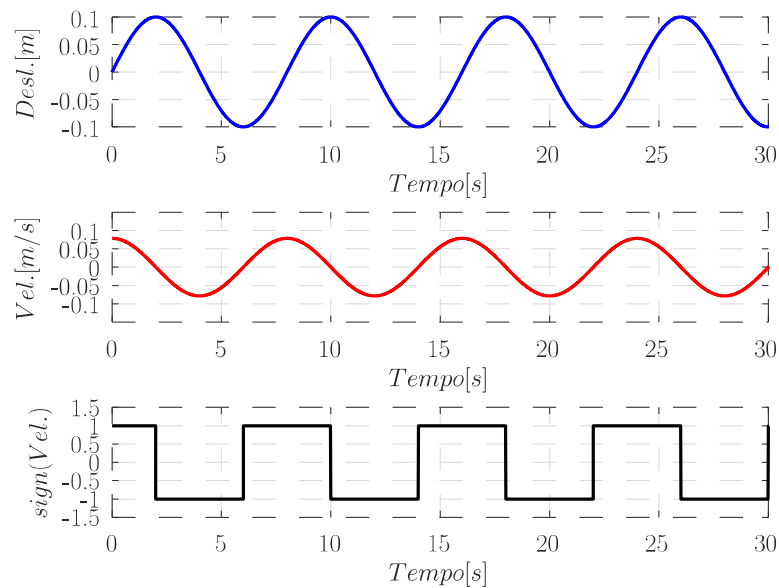
Assim, a partir da Eq.(19), obtém-se por derivação temporal a velocidade $\dot{u}(t)$ necessária para se calcular a força de amortecimento (Eq. 18). Assim, tem-se que $\dot{u}(t)$ é dada por

$$\dot{u}(t) = A\omega \cos(\omega t) \quad (20)$$

Para ilustrar, a figura 8 apresenta um exemplo de deslocamento e velocidade do êmbolo do

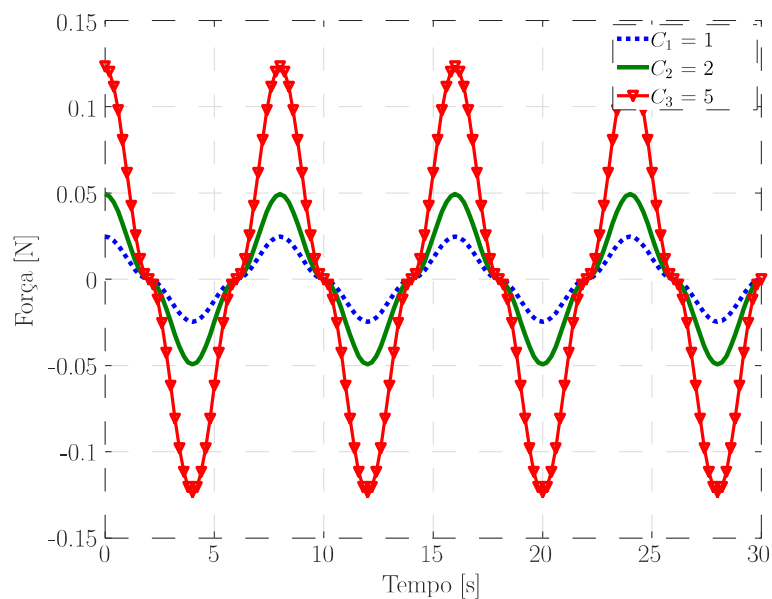
atuador, além da respectiva função sinal. Também, a figura 9 exibe o comportamento da força de amortecimento quadrático para diferentes valores de coeficiente C . Tem-se que a força $f_q(t)$ é diretamente proporcional a este coeficiente, conforme apresenta a Eq. (18).

Figura 8 – Deslocamento e velocidade do êmbolo do atuador e ilustração da função $sign()$ associada ao movimento para $A = 0.2 \text{ m}$ e $\omega = \pi/4 \text{ rad/s}$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 9 – Força de amortecimento quadrático para $A = 0.2 \text{ m}$, $\omega = \pi/4 \text{ rad/s}$, e $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, e $C_3 = 5 \text{ kg/m}$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.2.2 Amortecimento de Coulomb

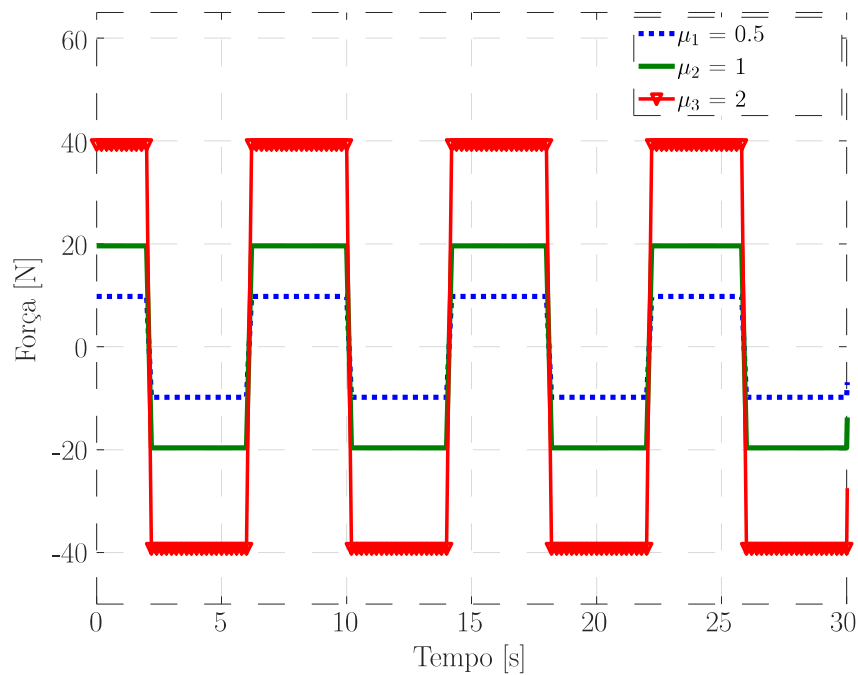
Conforme destaca [Maré \(2016\)](#), o atuador de superfície de controle apresenta força de atrito. Em particular, neste trabalho considera-se o atrito de Coulomb para, juntamente com a força de amortecimento quadrático, compor a força não linear do atuador em modo de falha. De acordo com [Ruzicka e Derby \(1971\)](#), [Santade \(2017\)](#), pode-se descrever a força de amortecimento de Coulomb, também citada na literatura como atrito de Coulomb, conforme mostra a Eq. (21).

$$f_c(t) = f_f \text{sign}(\dot{u}) \quad (21)$$

sendo f_f o coeficiente e equivale ao módulo da força, obtido por $f_f = \mu N$, na qual N é a força normal entre as partes e μ é coeficiente de atrito dinâmico.

$$f_f = \mu_{(j)} f_n \quad (22)$$

Figura 10 – Força de amortecimento de Coulomb para $A = 0.1 \text{ m}$, $\omega = \pi/4 \text{ rad/s}$, $N = 20 \text{ N}$ e $\mu_1 = 0.5$, $\mu_2 = 1$, e $\mu_3 = 2$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

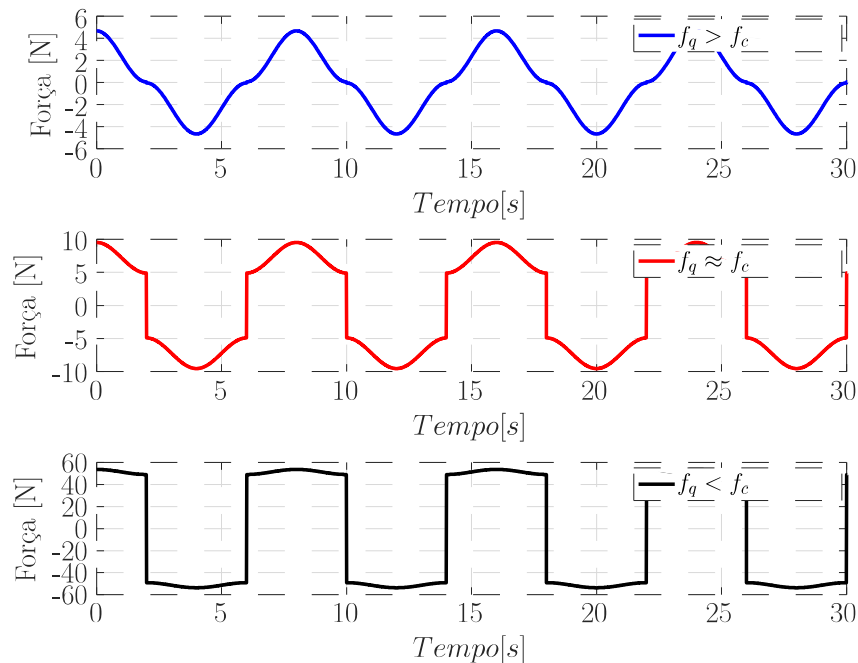
3.3 Força do Atuador em Modo de Falha

Considera-se neste trabalho que a força do atuador em modo de falha F_a^f é composta de três componentes. A primeira consiste em uma parcela da rigidez nominal do atuador. Assim, em particular para a seção típica em estudo, tem-se que tal parcela corresponde a $f_k = k_\beta^f \beta$, sendo $k_\beta^f < k_\beta$ a rigidez reduzida devido a falha - que, de forma ilustrativa, como representar o efeito de uma diminuição da pressão no sistema hidráulico que comanda o atuador. Por outro lado, as demais componentes de F_a^f correspondem a soma das forças de amortecimento quadrático e de Coulomb, tal que $F_a^f = f_k + f_{nl}$, sendo

$$f_{nl}(t) = f_q(t) + f_c(t) \quad (23)$$

na qual o subscrito nl é utilizado para indicar a característica não linear da força. De forma ilustrativa, a figura 11 apresenta três configurações de f_{nl} obtidas para $f_q > f_c$, $f_q \approx f_c$ e, por fim, $f_q < f_c$. São considerados para parâmetros $C = 30 \text{ kg/m}$, e $\mu_1 = 2.5 \times 10^{-3}$, $\mu_2 = 2.5 \times 10^{-1}$ e $\mu_3 = 2.5$, respectivamente.

Figura 11 – Representação qualitativa dos aspectos da força não linear de acordo com a predominância dos efeitos do amortecimento quadrático e de Coulomb.



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.4 Representação Linear Equivalente

A análise de estabilidade aeroelástica para o atuador em modo de falha é realizada considerando uma representação linear equivalente da força f_{nl} do atuador em modo de falha. Note que, uma vez que $F_a^f = f_k + f_{nl}$, o termo linear f_k pode ser facilmente rearranjado na forma matricial, como se destaca na Eq. (46). Assim, aplica-se uma abordagem tipicamente definida na literatura como método da Linearização Equivalente (MLE).

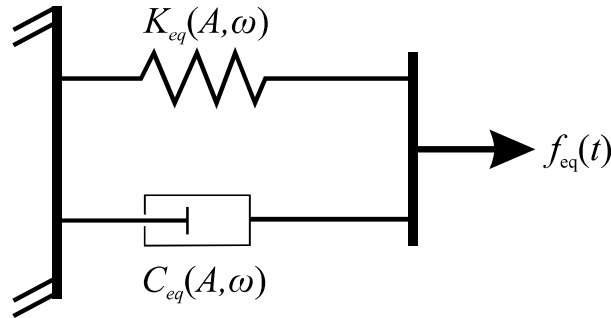
De acordo com [Feixin et al. \(2013\)](#), o MLE consiste em representar aproximadamente um comportamento não linear utilizando uma equação linear. Assim, tratando-se de uma aproximação, deve-se avaliar se o resultado obtido é de adequada representatividade. De modo geral, a força equivalente resultante não deve ter módulo maior que a força não linear que se deseja representar, pois, no processo de aproximação utiliza-se a análise espectral da força não linear e considera-se na aproximação somente a frequência de excitação que contém a maior amplitude, desprezando-se a contribuição das demais frequências presentes no espectro. Neste trabalho, de acordo com a representação utilizada para a força não linear, obteve-se uma relação de cerca de $f_{eq} = 0.95f_{nl}$ ao utilizar o MLE.

Neste trabalho considera-se que força f_{nl} pode ser adequadamente descrita por uma força equivalente $f_{eq} \approx f_{nl}$, uma vez que, ao realizar a simulação numérica no *Octave* para representar o ensaio de impedância os resultados obtidos da razão entre a f_{eq} pela f_{nl} variaram entre 0.95 e 0.99, sendo tal força equivalente composta por duas parcelas, respectivamente proporcionais ao deslocamento e a velocidade do êmbolo do atuador. Em particular, esta representação é particular para cada amplitude e frequência de movimento do êmbolo do transdutor. Assim, tem-se que $f_{eq} = g_k(A, \omega)u + g_\xi(A, \omega)\dot{u}$, sendo $g_k(\)$ e $g_\xi(\)$ funções que descrevem efeitos de rigidez e amortecimento. Tais efeitos são respectivamente denominados rigidez K_{eq} e amortecimento C_{eq} lineares equivalentes, e permitem escrever a seguinte equação

$$f_{eq}(t) = K_{eq}(A, \omega)u(t) + C_{eq}(A, \omega)\dot{u}(t) \quad (24)$$

A figura 12 apresenta uma ilustração da representação linear equivalente da força não linear do atuador em modo de falha. Note que, para cada possível amplitude A e frequência ω de movimento do êmbolo, do atuador em modo de falha, tem-se um par de propriedades lineares equivalentes.

Figura 12 – Representação dos elementos que compõem a força equivalente



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.4.1 Rigidez e Amortecimento Lineares Equivalentes

Para se obter K_{eq} e C_{eq} pode-se aplicar a transformada de Fourier em ambos os lados da Eq. (24), tal que:

$$F_{eq}(\omega) = K_{eq}U(\omega) + C_{eq}j\omega U(\omega) \quad (25)$$

sendo $j = \sqrt{-1}$ o número complexo imaginário puro. Considerando uma oscilação imposta no êmbolo do atuador, na frequência ω_0 , tal que $u = A \sin(\omega_0 t)$, pode-se estabelecer relações de entrada e saída na forma $D(\omega_0)$, $Z(\omega_0)$ e $M_{ap}(\omega)$, que representam respectivamente a rigidez dinâmica, a impedância mecânica e a massa aparente do atuador, tais que

$$\begin{Bmatrix} D(j\omega) \\ Z(j\omega) \\ M_{ap}(j\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{eq} + j\omega C_{eq} \\ -j\omega^{-1}K_{eq} + C_{eq} \\ -\omega^{-2}K_{eq} - j\omega^{-1}C_{eq} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

sendo que

$$D(\omega_0) = \frac{F_{eq}(\omega_0)}{U(\omega_0)} \quad Z(\omega_0) = \frac{F_{eq}(\omega_0)}{V_a(\omega_0)} \quad M_{ap}(\omega_0) = \frac{F_{eq}(\omega_0)}{A_a(\omega_0)} \quad (27)$$

e $V_a(\omega_0) = j\omega_0 U(\omega_0)$ é a velocidade e $A_a(\omega_0) = -\omega_0^2 U(\omega_0)$ a aceleração no domínio da frequência.

A partir da Eq. (26) pode-se obter as propriedades lineares equivalente a partir da seguinte equação:

$$\begin{Bmatrix} K_{eq} \\ C_{eq} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Re[D(j\omega_0)] \\ \frac{\Im[D(j\omega_0)]}{\omega_0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\omega_0 \Im[Z(j\omega_0)] \\ \Re[Z(j\omega_0)] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\omega_0^2 \Re[M_{ap}(j\omega_0)] \\ \frac{-\Im[M_{ap}(j\omega_0)]}{\omega_0} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

sendo $\Re[\]$ a parte real e $\Im[\]$ a parte imaginária.

Esta abordagem consiste em considerar a componente da função de resposta em frequência (D , Z ou M_{ap}) apenas correspondente à frequência ω_0 , na qual ocorre o movimento. Assim, uma vez que se considera $f_{eq} \approx f_{nl}$, pode-se submeter o atuador a um movimento imposto, nas amplitude e frequência (A, ω_0) de interesse da análise. Com isto, pode-se aplicar a transformada de Fourier na força não linear representada pela combinação das forças de amortecimento quadrática e Coulomb e considerando-se ainda a excitação harmônica $u = A \sin(\omega_0 t)$, obtendo-se $\mathcal{F}[f_{eq}] = F_{eq}$ e, substituindo $F_{eq}(\omega_0)$ na Eq. (27), é possível calcular $K_{eq}(A, \omega_0)$ e $C_{eq}(A, \omega_0)$ usando a Eq. (28). Tal procedimento de impor o movimento harmônico no atuador, previamente sua conexão no sistema aeroelástico, é conhecido como *ensaio de impedância*, conforme se descreve sucintamente a seguir.

3.4.2 Ensaio de Impedância Dinâmica do Atuador

A representação linear equivalente do atuador de superfície de controle é de extrema importância para a certificação aeroelástica de aeronaves. Para isso, comumente, emprega-se o ensaio de impedância dinâmica, que tem a finalidade de quantificar as propriedades dos atuadores operando em condições de pleno funcionamento da potência hidráulica, obtendo-se curvas características que relacionam as variáveis força, deslocamento, velocidade, frequência de excitação, como apresentado por [Ribeiro e Abreu \(2014\)](#) na caracterização de um atuador magnetoreológico e, também, por [Duarte \(2008\)](#). No ensaio, testa-se também condições adversas de funcionamento, como por exemplo redução da pressão hidráulica de alimentação do transdutor, sendo esta última condição denominada modo de falha ([LAYTON; GAINES, 2007](#)).

Para realização do ensaio de impedância dinâmica utiliza-se um equipamento eletromecânico específico, o qual, contém na área de teste do atuador dois acoplamentos, sendo um fixo e outro móvel associado a um transdutor. O atuador é alimentado por um sistema hidráulico auxiliar, representando suas condições de funcionamento¹. Para implementar este ensaio é necessário controlar a pressão hidráulica p , a temperatura T , frequência de excitação ω (ou seja, de movimento da haste do atuador), amplitude A do movimento da haste, além de força resultante e velocidade da haste ao longo do tempo ([LAYTON; GAINES, 2007](#); [SANTADE, 2017](#)).

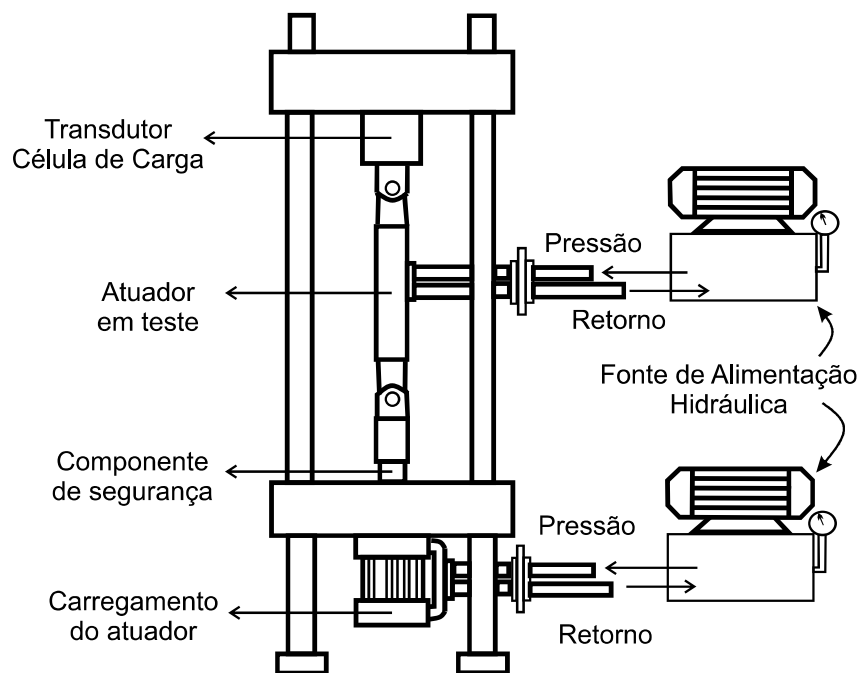
Destaca-se que, assim como o sistema aeroelástico apresenta uma resposta dinâmica diferente de acordo com o envelope aerodinâmico (ρ, V_{keas}), a impedância do atuador está associada diretamente com o par (A, ω) . Neste ensaio, a pressão e temperatura também influenciam, pois o fluido hidráulico pode ser sensível a esses parâmetros, o que exige utilização da instrumentação adequada, como termopares e manômetros, nas linhas de alimentação e retorno, para mantê-lo em monitoramento durante os ensaios ([LAYTON; GAINES, 2007](#)) e ([SANTADE, 2017](#)).

¹Quando está operando na aeronave, fixado à superfície de controle.

Para implementação prática do ensaio, é indispensável ter um sistema de aquisição de sinais para registrar força e velocidade na haste do atuador, enquanto é movimentado (note que trata-se de um movimento imposto e, portanto, exige o sistema auxiliar de atuação). No ensaio, registra-se força e velocidade para um número determinado de ciclos para cada condição de movimento, ou seja, cada par (A, ω) . Estas condições são definidas pelo engenheiro analista, que considera as possíveis amplitudes de rotação da superfície de controle, bem como a faixa de interesse na análise aeroelástica. Um exemplo de sistema de atuação auxiliar é apresentado na figura 13. O ensaio requer aplicação de procedimento padronizado e controlado, como por exemplo, recomenda-se não se considerar os primeiros ciclos de movimento no cálculo das propriedades lineares equivalentes, visto que é importante aguardar a temperatura do fluido hidráulico se estabilizar (LAYTON; GAINES, 2007).

Segundo o ensaio de impedância realizado para a aeronave F-22, descrito no trabalho desenvolvido por Layton e Gaines (2007), mediu-se o deslocamento no atuador com o auxílio de um arranjo de lasers, o que resultou em baixos níveis de erros (entre 1 e 2%). Recomenda-se, ainda, neste trabalho, tipos de carregamentos específicos, de acordo com a condição de operação do atuador, sendo, por exemplo, utilizado os procedimentos de carregamento *Alternating Mean Load* e *Ramp Load*, sendo que o primeiro consiste no carregamento alternado de diferentes intensidades de forças, e o segundo modelo que consiste no aumento gradual do carregamento do sistema. Detalhes destes procedimentos podem ser obtidos no trabalho destes referidos autores.

Figura 13 – Esquema de configuração da bancada para realização do ensaio de impedância do atuador hidráulico.



Fonte: Adaptado de Layton e Gaines (2007).

Ao se realizar o ensaio de impedância considerando o atuador em modo de falha, utiliza-se como suporte (ou mecanismo de segurança) um equipamento denominado compensador de pressão, que tem finalidade de manter a pressão hidráulica do cilindro e, conseqüentemente, a rigidez resultante no atuador, este dispositivo trata-se de um dos sistemas de segurança para o caso de falha no funcionamento do atuador (LAYTON; GAINES, 2007).

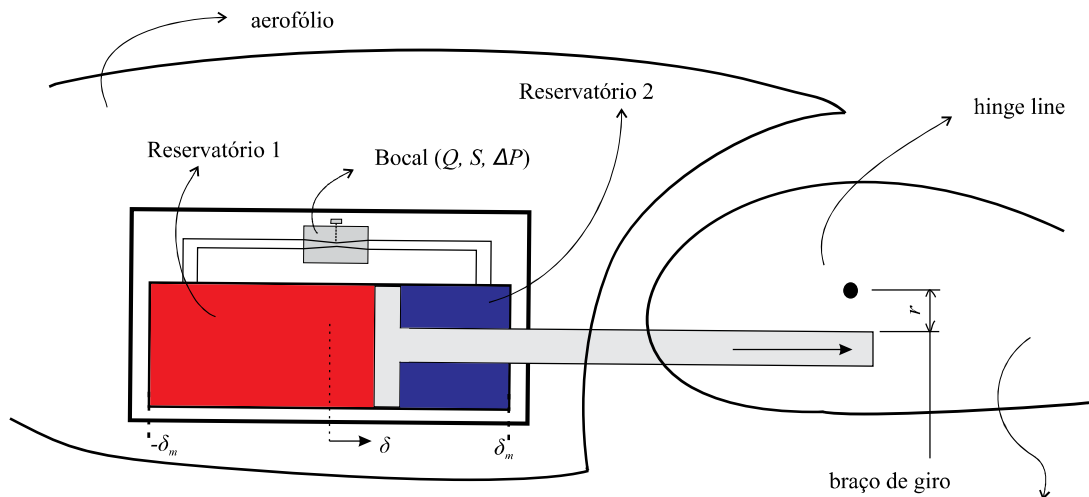
Finalmente, com o controle das condições de trabalho do fluido hidráulico, obtém-se a partir da aquisição de dados do ensaio, a relação entre os espectros de força e velocidade da haste do atuador, para cada par (A, ω) . Observa-se que é essencial para a certificação aeronáutica que se conheça o comportamento deste componente, principalmente, em condições não favoráveis de operação (FAA, 1965). Em particular para o caso de falha se mantém tal necessidade, pois mesmo nesta condição a aeronave não pode exibir a instabilidade aeroelástica, conforme exigido pelas agências de certificação (FAA, 2009).

3.4.3 Atuador Operando em Modo de Falha

Conforme destacam Huet *et al.* (2011), alguns atuadores de superfície de controle têm dispositivos de segurança, comumente denominados de sistemas anti-flutter, no caso tratado por Huet *et al.* (2011) o dispositivo é utilizado para equilibrar as pressões entre as câmaras de pressão do atuador da superfície de controle, com o intuito de manter a superfície móvel em configuração neutra e estável. Assim, na presença de uma falha hidráulica, tal sistema é acionado, equilibrando a pressão entre as câmaras do atuador por meio de um pequeno orifício. Com isto, garante-se que as superfícies de controle não sejam bloqueadas de se movimentarem - que pode implicar em importante prejuízo à aeronavegabilidade em termos de segurança de voo. Na figura 14 exibe-se um esquema do dispositivo anti-flutter que, de acordo com Huet *et al.* (2011), tem a função de evitar o acoplamento aeroelástico entre os modos de rotação, flexão e torção da superfície de controle quando o atuador opera em modo de falha.

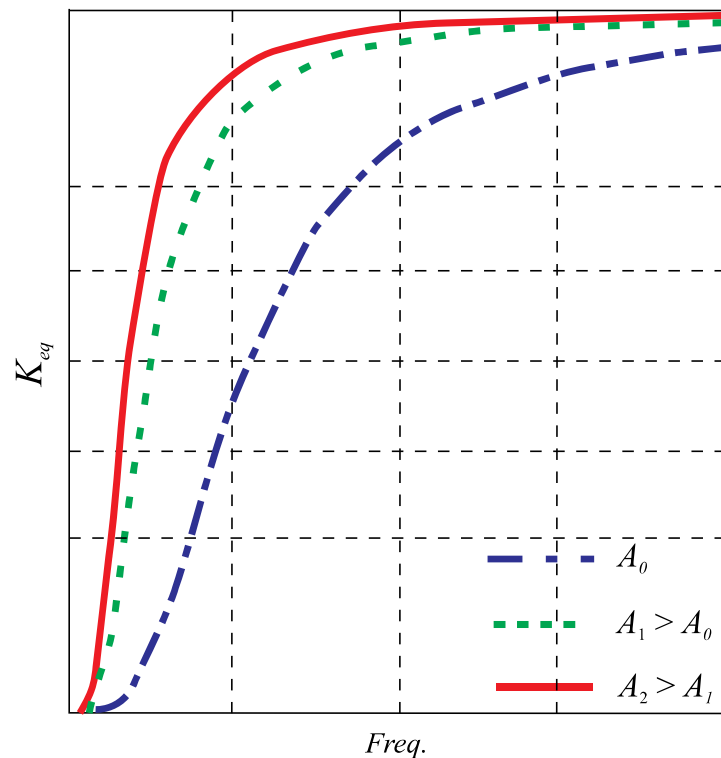
Para evidenciar a relevância e necessidade da caracterização do atuador em modo de falha na indústria aeronáutica, Huet *et al.* (2011) analisa o comportamento aeroelástico da aeronave FALCON, da fabricante Dassault Aviation. Os autores utilizam métodos analíticos, levando em consideração todas as características do atuador, assim como a condição de operação em modo de falha e, além disso, também avaliam como a mudança da amplitude e frequência de excitação do atuador podem influenciar na resposta do sistema aeroelástico. Eles apresentam resultados qualitativos, compatíveis com aqueles apresentados nas figuras 15 e 16, sendo respectivamente o comportamento de K_{eq} e C_{eq} para o atuador daquela aeronave. Destacam que tais resultados são obtidos por meio da função de transferência que relaciona a força com o deslocamento do atuador, ou seja, a rigidez dinâmica $D(s)$. Assim, nota-se que os autores empregam uma abordagem de representação Linear Equivalente para caracterizar o comportamento do atuador, conforme considerado neste trabalho.

Figura 14 – Representação do atuador da superfície de controle, sendo Q identifica a vazão do fluido hidráulico, S é a seção do bocal, ΔP representa a diferença de pressão entre os reservatórios, δ_m é o deslocamento do atuador, e F a força não linear presente no sistema.



Fonte: Adaptado de [Huet et al. \(2011\)](#).

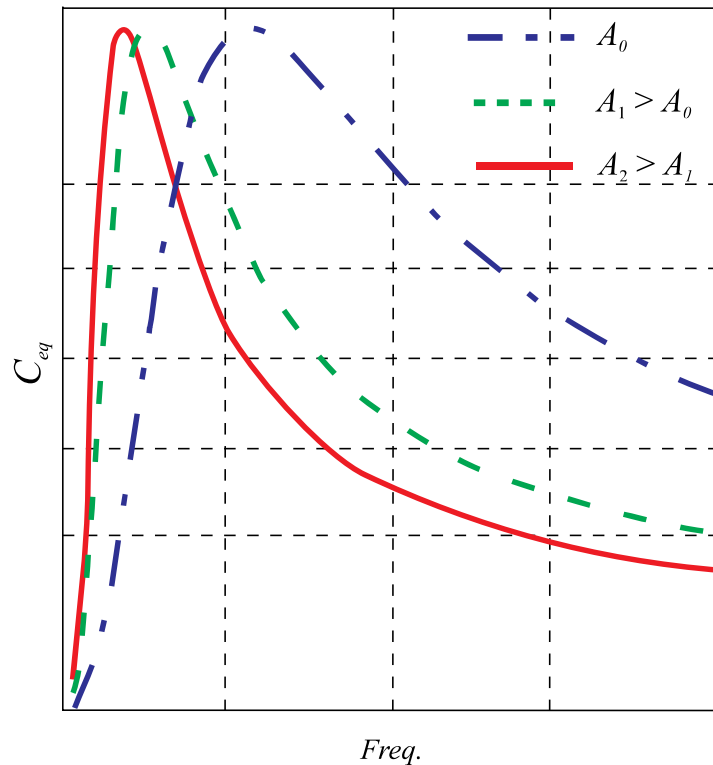
Figura 15 – Representação qualitativa do comportamento da rigidez equivalente K_{eq} em função da frequência e do deslocamento do atuador hidráulico operando em modo de falha.



Fonte: Adaptado de [Huet et al. \(2011\)](#).

Como descrição geral de comportamento das propriedades lineares equivalentes, tem-se que os atuadores de superfície de controle apresentam uma rigidez linear equivalente crescente com a frequência do movimento. Por outro lado, tipicamente C_{eq} decresce, podendo inicialmente, em baixa frequência, exibir um aumento até um nível máximo, para então decrescer.

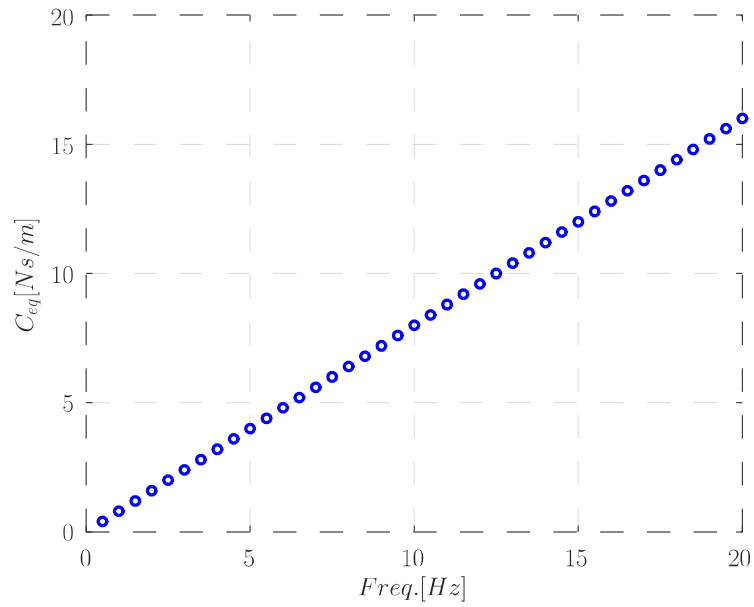
Figura 16 – Representação qualitativa do comportamento da característica amortecimento equivalente C_{eq} em função da frequência e do deslocamento do atuador hidráulico operando em modo de falha.



Fonte: Adaptado de (HUET et al., 2011).

Pode-se destacar que um típico atuador em modo de falha não pode ser descrito exclusivamente por um modelo de força de amortecimento quadrática (Eq. 18), visto que $C_{eq}(A, \omega)$ para tal representação é linear e crescente na frequência, conforme ilustra a figura 17. Ainda, para tal modelo, tem-se $K_{eq} \approx 0$, o que também não é consistente com as características destes transdutores em modo de falha. Assim, para este trabalho considera-se o atrito de Coulomb associado a força quadrática, conforme sugerido em (MARÉ, 2016). No entanto, esta representação também gera $K_{eq} \approx 0$ e, por isto, por simplicidade, considera-se que a falha do sistema hidráulico gera redução da rigidez e amortecimento estruturais lineares associados ao grau de liberdade de rotação da superfície de controle, ao qual o atuador está conectado. Detalhes desta representação são apresentados na seção 4.2.1.

Figura 17 – Comportamento do parâmetro linear amortecimento equivalente C_{eq} para um modelo de força de amortecedor quadrático $f_q(t)$, definida para a amplitude de $A = 0.1m$, $C = 1.5 kg/m$, $\mu = 1 \times 10^{-4}$ e frequência de excitação $0 \leq f \leq 20Hz$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

4 Estabilidade para Atuador em Modo de Falha

Neste tópic, inicia-se com a apresentação do método clássico para a predição de flutter para sistemas aeroelásticos, denominado método pk , e exibe-se, posteriormente, as modificações necessárias do método pk para adequar-se na situação hipotética de falha hidráulica no atuador da superfície de controle, o que implica no tratamento matemático do sistema aeroelástico, considerando-se as características não lineares advindas do atuador operando em modo de falha.

4.1 Método pk

Ao analisar a estabilidade de um sistema aeroelástico dito linear, pode-se discretizar as etapas da análise de acordo com as etapas representadas na figura 18. Basicamente utiliza-se o método pk para analisar a estabilidade e verificar a faixa de operação da aeronave identificando-se em quais condições do envelope aerodinâmico, favorece o aparecimento do fenômeno flutter.

Figura 18 – Etapas da análise aeroelástica sem a presença de não linearidades.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise de estabilidade aeroelástica realizada neste trabalho tem como referência o método pk desenvolvido por [Hassig \(1971\)](#). O método utiliza como domínio a frequência reduzida descrita na Eq. (29) e a análise dos autovalores, a solução é obtida pelo processo iterativo, garantindo-se a convergência entre a frequência reduzida e a frequência angular do sistema, considerando-se ainda, o envelope aerodinâmico representado pelo par de variáveis ρ e V . Outra motivação para a escolha do método consiste na sua ampla utilização para solução de problemas acadêmicos assim como problemas práticos da indústria.

$$k = \frac{\omega b}{V} \quad (29)$$

No método pk o sistema aeroelástico é descrito conforme a Eq. (1) considerando ainda o

termo $F_g = 0$. No entanto, o vetor referente as forças aerodinâmicas é escrito em função de outras variáveis como pode ser observado na Eq. (30).

$$\mathbf{F}_a(\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, t, V, \rho, G) = q\mathbf{Q}(k)\mathbf{u}(s) \quad (30)$$

sendo q a pressão dinâmica representada na Eq. (31), $\mathbf{Q}(k)$ é a matriz dos coeficientes aerodinâmicos definida para cada frequência reduzida k , em que ω representa a frequência angular do sistema, e b a semi-corda aerodinâmica como representado na figura 4. Por fim, $\mathbf{u}(s)$ trata-se do vetor de deslocamentos aeroelásticos descrito no domínio de Laplace. Assim, tem-se que $s = j\omega$ é a variável de Laplace, e sendo $j^2 = -1$.

$$q = \frac{1}{2}\rho V^2 \quad (31)$$

Em particular, tem-se que $\mathbf{Q}(k)$ é uma matriz complexa, definida para cada frequência reduzida k sendo, neste trabalho, obtida pela formulação de [Theodorsen \(1935\)](#) e representada conforme a eq. (32).

$$\mathbf{Q}(k) = \mathbf{Q}^R(k) + j\mathbf{Q}^I(k) \quad (32)$$

Observe que utiliza-se os índices R e I para referenciar-se a parte real e imaginária da matriz. Note que $\mathbf{Q}(k)$ é função de k e conseqüentemente de ω . Neste sentido, escreve-se a Eq. (1) no domínio de Laplace e, para isso, utiliza-se a Eq. (32) com a informação da Eq. (30). Assim, obtém-se a Eq. (33) em função de ω . Note, ainda, que o autovalor obtido no problema deve representar k utilizado para calcular \mathbf{Q} .

$$\left\{ -\omega^2\mathbf{M} + j\omega\mathbf{B} - jq\mathbf{Q}^I(k) + [\mathbf{K} - q\mathbf{Q}^R(k)] \right\} \mathbf{u}(\omega) = 0 \quad (33)$$

De acordo com as eq. (31) e eq. (29), pode-se escrever a eq. (34)

$$jq\mathbf{Q}^I(k) = j\omega \left[\frac{c}{4}\rho V \frac{\mathbf{Q}^I(k)}{k} \right] \quad (34)$$

sendo c referente a corda aerodinâmica evidenciada na figura 4. Posteriormente, substitui-se a Eq. (34) na Eq. (33), resultando em

$$\left\{ -\omega^2\mathbf{M} + j\omega \left[\mathbf{B} - \frac{c}{4}\rho V \frac{\mathbf{Q}^I(k)}{k} \right] + [\mathbf{K} - q\mathbf{Q}^R(k)] \right\} \mathbf{u}(\omega) = \mathbf{0} \quad (35)$$

Assim, definindo o autovalor como $\lambda_a = j\omega$, a Eq. (35) pode ser reescrita [Hassig \(1971\)](#). O subscrito a indica que trata-se de um autovalor aeroelástico.

$$\left\{ \lambda_a^2\mathbf{M} + \lambda_a \left[\mathbf{B} - \frac{c}{4}\rho V \frac{\mathbf{Q}^I(k)}{k} \right] + [\mathbf{K} - q\mathbf{Q}^R(k)] \right\} \mathbf{u}(\lambda_a) = \mathbf{0} \quad (36)$$

Escrevendo-se a Eq. (36) na forma matricial, tem-se $\mathbf{A}\mathbf{x} = s\mathbf{x}$, sendo s a variável de Laplace e \mathbf{A} definida na Eq. (37), no qual \mathbf{I} uma matriz identidade e $\mathbf{0}$ uma matriz de zeros.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{B} - \frac{c}{4} \rho V \frac{\mathbf{Q}^I(k)}{k} \right) & -\mathbf{M}^{-1} (\mathbf{K} - q \mathbf{Q}^R(k)) \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (37)$$

Assumindo $s = \lambda_a$, a representação no espaço de estados se torna

$$\lambda_a \mathbf{x}(\lambda_a) = \mathbf{A}(k) \mathbf{x}(\lambda_a) \quad (38)$$

sendo $\mathbf{x}(\lambda_a) = \{\lambda_a \mathbf{u}(\lambda_a) \ \mathbf{u}(\lambda_a)\}^T$. Observe que a Eq. (38) representa de fato um problema de autovalor e autovetor, pois $\mathbf{x}(\lambda_a)$ é um vetor tal que ao ser multiplicado por $\mathbf{A}(k)$ gera como resultado o próprio vetor $\mathbf{x}(\lambda_a)$ multiplicado por λ_a . Conclui-se, assim, que λ_a é o autovalor da matriz $\mathbf{A}(k)$ associado ao autovetor $\mathbf{x}(\lambda_a)$. Com isso, o autovalor obtido deve ser consistente com a frequência reduzida previamente utilizada nos coeficientes aerodinâmicos. Resolve-se, então, a seguinte equação:

$$[\mathbf{A}(k) - \lambda_a \mathbf{I}] \mathbf{x}(\lambda_a) = \mathbf{0} \quad (39)$$

Esquematizando o processo de solução do método pk na figura 19 observa-se que, resumidamente, inicia-se com a estimativa inicial $k^{(0)}$, calcula-se $\mathbf{Q}(k)$, conseqüentemente, define-se \mathbf{A} , extrai-se $N = 2n$ autovalores, sendo n o número de gdl do sistema e verifica-se alguns dos n $\lambda_{a(i)}$, com $i = 1, 2, \dots, n$ está associado a k , sendo $\lambda_{a(i)}^{(z)} = \omega^{(z)} (\gamma^{(z)} \pm j)$, ou seja, um par imaginário conjugado. Onde (z) indica a z -ésima iteração, pois se eventualmente nenhum dos autovalores obtidos implicam em $k = k^{(0)}$, altera-se o valor de k e se reinicia o processo.

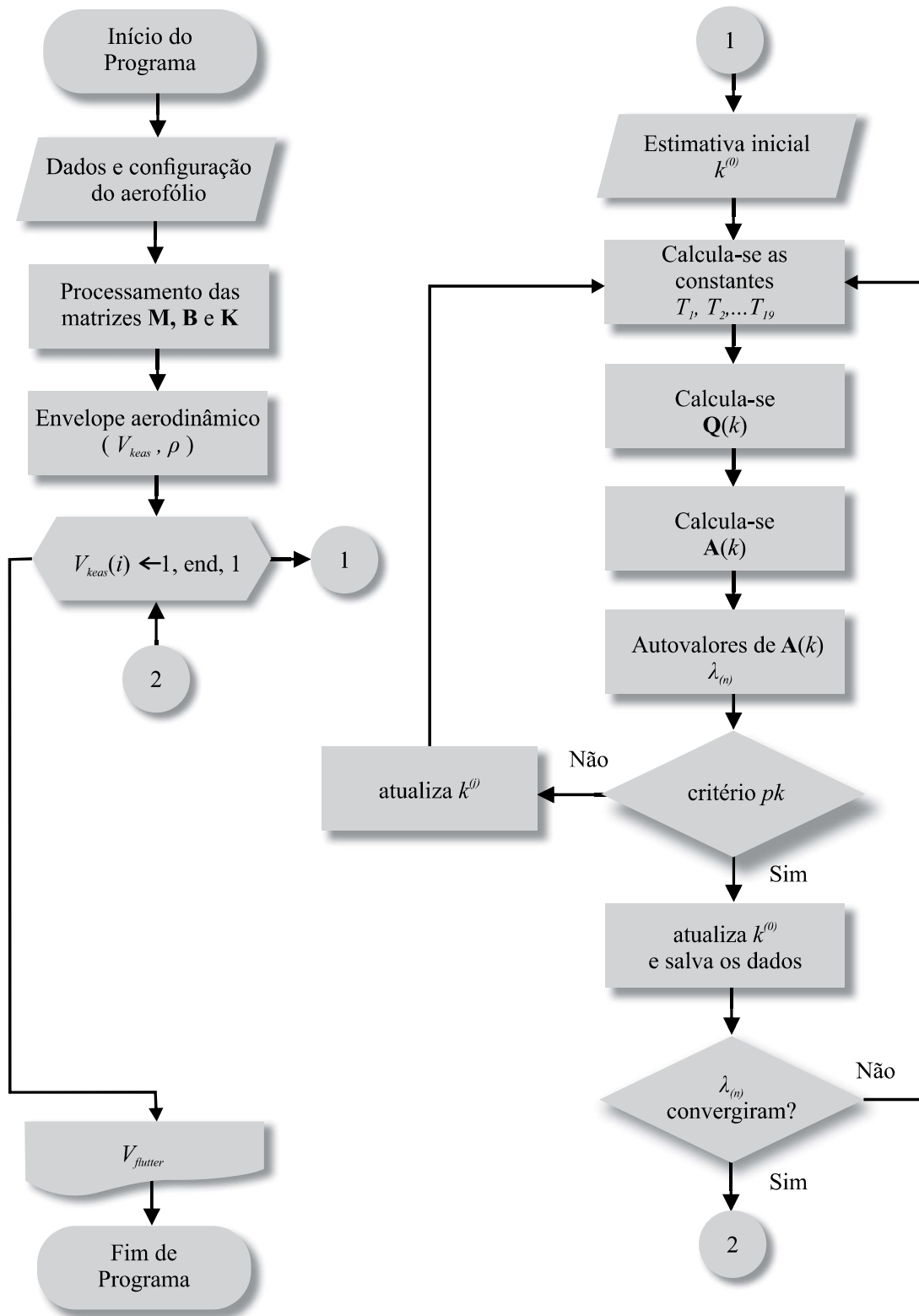
Na prática, utiliza-se o critério de convergência ao se comparar $k^{(z)}$ com k , sendo este o valor da z -ésima iteração aceito se satisfazer a relação

$$\lambda_{a(i)}^{(z)} = \omega^{(z)} (\gamma^{(z)} \pm j) \quad (40)$$

$$\begin{cases} |k^{(z)} - k^{(z-1)}| > \varepsilon & \text{se } k^{(z-1)} < 1.0 \quad \text{ou,} \\ |k^{(z)} - k^{(z-1)}| > \varepsilon k^{(z-1)} & \text{se } k^{(z-1)} \geq 1.0 \end{cases} \quad (41)$$

sendo geralmente $\varepsilon = 0,001$ ou inferior e definido como critério pk ou condição de parada para a convergência.

Figura 19 – Representação do algoritmo de solução do método pk sendo $\mathbf{Q}(k)$ a matriz aerodinâmica e $\mathbf{A}(k)$ a matriz que representa o sistema no espaço de estados.



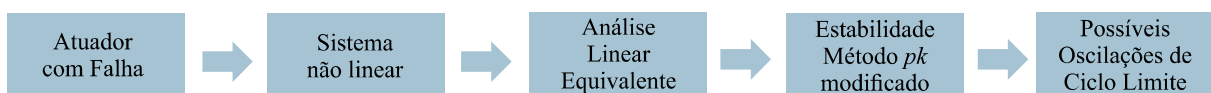
Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2 Atuador em Modo de Falha

Como exposto previamente neste texto, considera-se como atuador em modo de falha a condição em que há presença de falha no sistema hidráulico que aciona o atuador a partir de um comando do piloto, ou piloto automático. Nestes casos, após acionamento de sistemas anti-flutter, tem-se as características não lineares no sistema aero-servo-elástico, conforme discutem Belardo *et al.* (2013), Feixin *et al.* (2013). Assim, nesta condição de falha, aplica-se uma representação linear equivalente para descrever de forma aproximada a força não linear gerada pelo atuador. No entanto, uma vez que tais propriedades dependem de amplitude e frequência de movimento (A, ω), é preciso realizar uma alteração no método pk , pois este considera propriedades estruturais constantes, e por isto apenas busca convergência para matriz aerodinâmica utilizada na solução de autovalores, conforme discute-se na seção 4.1.

Diante do contexto apresentado, tem-se neste trabalho uma modificação no método pk para considerar as propriedades lineares equivalentes sendo alteradas, para cada frequência correspondente a frequência reduzida empregada no cálculo da matriz aerodinâmica, durante o processo de busca de convergência de k . Com isto, os resultados deste método pk modificado são denominados *lineares equivalentes*. Então, tem-se velocidades de flutter linear equivalente que, de acordo com esta abordagem, implicam em condições de voo (ou seja, ρ, V) de possíveis oscilações de ciclo limite. Os significados físicos e as interpretações são discutidos na seção de resultados desta pesquisa (seção 5.3.1). Ainda, a figura 20 apresenta uma sequência esquemática desta estratégia de análise.

Figura 20 – Etapas da análise aeroelástica com atuador em modo de falha.



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2.1 Equação do Movimento para Sistema com Atuador em Falha

Entende-se como método pk modificado a análise de estabilidade do sistema aeroelástico que considera a presença de um atuador em modo de falha. Nesta condição, deve-se adicionar à equação do movimento do sistema dinâmico eq. (1), no lado esquerdo da equação, o vetor \mathbf{F}_{nl} de força não linear do atuador em modo de falha hidráulica. Para o sistema em estudo neste trabalho, este vetor é apresentado na eq.(42), sendo 3×1 , uma vez que cada componente está diretamente associada a um dos gdl presentes no sistema. Sabe-se também que $f_{nl}^h(t)$ e $f_{nl}^\alpha(t)$ são nulos, pois a origem da força não linear está associada a superfície de controle, e

consequentemente, ao gdl β . Assim, somente a componente $f_{nl}^\beta(t)$ é não nula.

$$\mathbf{F}_{nl}(t) = \begin{Bmatrix} f_{nl}^h(t) \\ f_{nl}^\alpha(t) \\ f_{nl}^\beta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_{nl}^\beta(t) \end{Bmatrix} \quad (42)$$

Posteriormente, considera-se a linearização equivalente para representar de modo aproximado a força não linear, $f_{nl}^\beta(t)$, de acordo com a Eq. (24). Assim, tem-se a força linear equivalente associada ao gdl β

$$f_{nl}^\beta(t) \cong K_{leq}^\beta(\omega, A)\beta + C_{leq}^\beta(\omega, A)\dot{\beta}(t) \quad (43)$$

Conforme mencionado na seção 3.4.3, por se considerar a associação das forças de amortecedores quadrático e Coulomb - que implicam em rigidez linear equivalente nula, assume-se $K_{leq}^\beta(\omega, A) \rightarrow k_\beta^f$ contante, tal que $k_\beta^f < k_\beta$. Isto significa considerar que a falha hidráulica gera a redução da rigidez nominal do atuador, porém para um patamar constante (para cada nível de severidade de falha). Com isto, a força $f_{nl}^\beta(t)$ é reescrita tal que $f_{nl}^\beta(t) \approx k_\beta^f\beta(t) + f_{nl}(t)$, o que permite um rearranjo matricial das equações do movimento (veja f_{nl} na Eq. 23). Tem-se, então, o vetor de força linear equivalente \mathbf{F}_{eq} proporcional aos vetores de deslocamento e velocidade considerando as matrizes de rigidez e amortecimento lineares equivalentes \mathbf{K}_{eq} e \mathbf{C}_{eq} , respectivamente. Assim,

$$\mathbf{F}_{eq}(t) = \mathbf{K}_{eq}\mathbf{u}(t) + \mathbf{C}_{eq}\dot{\mathbf{u}}(t) \quad (44)$$

sendo, em particular para a seção típica de 3 gdl,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{eq}(\omega, A) &= \text{diag}(0, 0, K_{leq}^\beta) \\ \mathbf{C}_{eq}(\omega, A) &= \text{diag}(0, 0, C_{leq}^\beta) \end{aligned} \quad (45)$$

Devido a condição de falha no atuador e consequente redução de propriedades nominais, para realizar a análise de estabilidade, é necessário alterar as matrizes estruturais de rigidez e amortecimento, \mathbf{K} e \mathbf{B} , respectivamente. Em particular, a rigidez k_β nominal (do atuador sem falha) deve ser substituída por k_β^f , sendo, então, \mathbf{K} do sistema nominal alterada para $\bar{\mathbf{K}}$ tal que

$$\bar{\mathbf{K}} = \text{diag}(k_h, k_\alpha, K_{leq}^\beta) \quad (46)$$

Procedimento similar é realizado para a matriz de amortecimento \mathbf{B} , que é alterada para $\bar{\mathbf{B}}$. Neste caso, considera-se que o atuador em falha afeta a capacidade de amortecimento do sistema, reduzindo os fatores de amortecimento. Assim, a matriz de amortecimento do sistema em falha é tal que $\bar{\mathbf{B}} = \alpha_b^f\mathbf{M} + \beta_b^f\bar{\mathbf{K}}$. Os parâmetros α_b^f e β_b^f são obtidos a partir da definição de fatores de amortecimento de referência para o sistema com falha, ou seja, ξ_h^f , ξ_α^f e ξ_β^f . Então, a

matriz $\mathbf{B}_{\phi\phi}^f$ é dada por:

$$\mathbf{B}_{\phi\phi}^f = \text{diag}(\xi_h^f, \xi_\alpha^f, \xi_\beta^f) \quad (47)$$

Considerando a matriz $\mathbf{B}_{\phi\phi}^f$ e uma matriz \mathbf{W}^f definida em termos de $\text{diag}(\mathbf{M})$ e $\text{diag}(\overline{\mathbf{K}})$, pode-se resolver a Eq. (14) para se obter α_b^f e β_b^f .

A partir das representações das propriedades de rigidez e amortecimento para o sistema com o atuador no modo de falha, tem-se a seguinte equação do movimento:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + [\overline{\mathbf{B}} + \mathbf{C}_{eq}] \dot{\mathbf{u}}(t) + \overline{\mathbf{K}}\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}_a \quad (48)$$

4.2.2 Método *pk* Modificado

Para análise da estabilidade aeroelástica com o atuador em modo de falha, a primeira modificação no método *pk* consiste resolver o método para cada possível amplitude de movimento A . Para isto, o analista deve considerar a faixa de rotação possível para a superfície de controle $0 < \beta \leq \beta_{max}$. Assumindo que para a amplitude máxima de rotação β_{max} existe uma amplitude A_{max} , também máxima, de movimento no êmbolo do atuador da superfície de controle, a faixa $0 < A \leq A_{max}$ deve ser discretizada em n_A pontos. Assim, tem-se n_A possíveis amplitudes de movimento do êmbolo do atuador e, então, n_A soluções do método *pk* modificado.

O método proposto considera uma segunda modificação em relação ao *pk* clássico proposto por [Hassig \(1971\)](#). Tal modificação consiste em alterar, iterativamente, as propriedades lineares equivalentes do atuador $K_{eq}(\omega, A)$ e $C_{eq}(\omega, A)$, de forma compatível com a frequência reduzida k . Assim, além de buscar a convergência da matriz aerodinâmica - nos termos do método *pk* descrito na seção 4.1. Assim, fixada uma amplitude A para a qual se tem as propriedades lineares equivalentes do atuador em modo de falha, inicia-se o processo iterativo com a frequência reduzida inicial $k^{(0)}$ e, para cada velocidade V se tem a frequência angular $\omega^{(0)} = \frac{k^{(0)}V}{b}$ associada. Então, incluindo na equação do movimento (Eq. 48) as correspondentes propriedades $K_{eq}(\omega^{(0)}, A)$ e $C_{eq}(\omega^{(0)}, A)$, pode-se resolver o problema de autovalor.

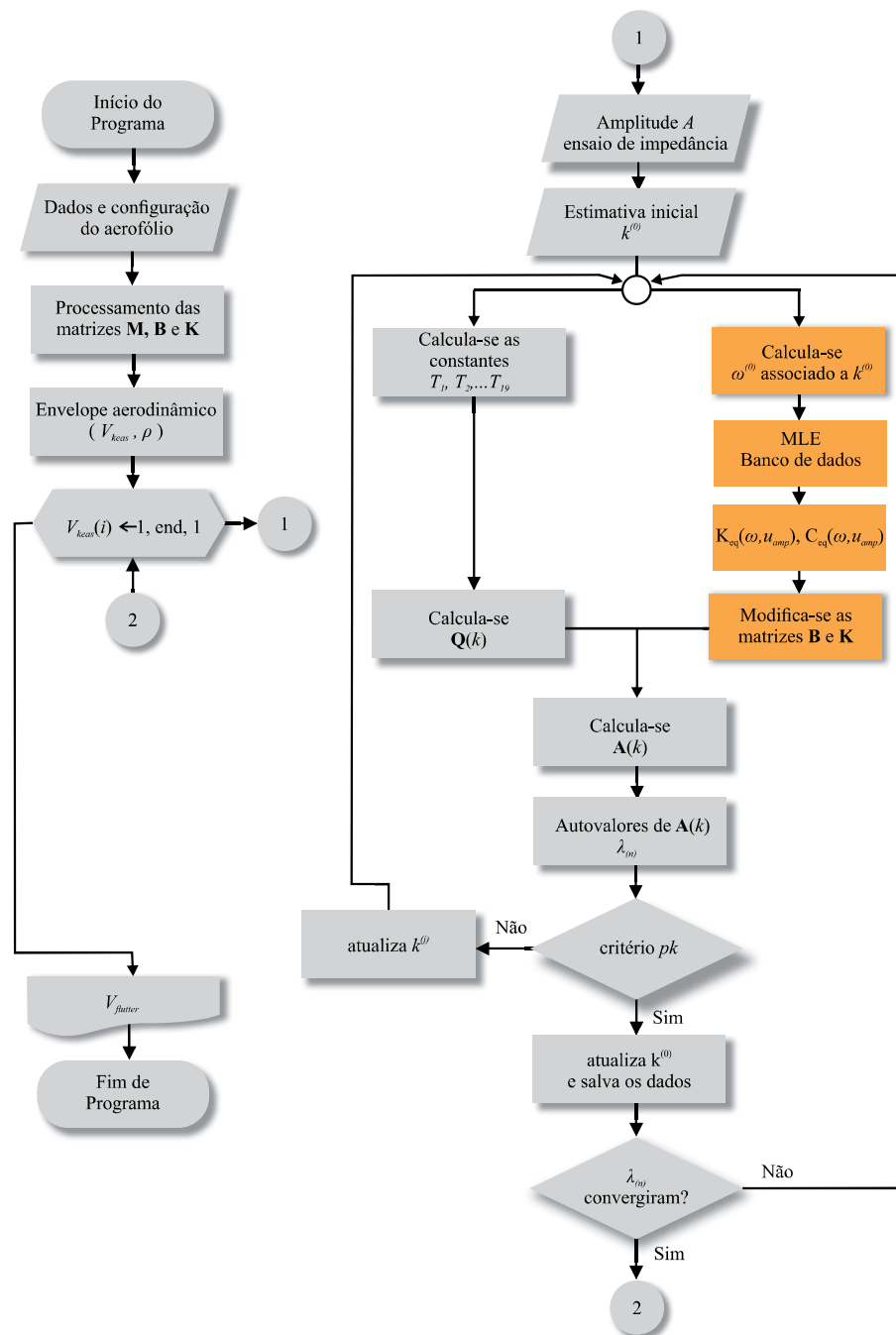
A solução do problema de autovalor iterativo, conforme no método *pk* clássico, consiste em extrair os autovalores da matriz dinâmica aeroelástica, escrita no domínio da frequência. Para a condição de falha tem-se $\overline{\mathbf{A}}(k, A)$, visto que o problema é resolvido para cada amplitude A . Neste caso, a matriz dinâmica é dada por:

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1} \left(\overline{\mathbf{B}} + \mathbf{C}_{eq} - \frac{c}{4} \rho V \frac{\mathbf{Q}^I(k)}{k} \right) & -\mathbf{M}^{-1} (\overline{\mathbf{K}} + \mathbf{K}_{eq} - q \mathbf{Q}^R(k)) \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (49)$$

Em relação a versão clássica do método, o *pk* modificado apresenta uma restrição adicional

para se buscar convergência. Na versão convencional altera-se na matriz dinâmica, durante o processo iterativo, a matriz aerodinâmica. No entanto, no método pk modificado para a análise em estudo neste trabalho exige alteração também nas matrizes \mathbf{K}_{eq} e \mathbf{C}_{eq} uma vez que as propriedades lineares equivalentes do atuador em modo de falha não são constantes na frequência. A figura 21 apresenta uma ilustração da sequência do algoritmo de solução.

Figura 21 – Representação do algoritmo de solução do método pk modificado considerando o atuador em modo de falha, sendo $\mathbf{Q}(k)$ a matriz aerodinâmica e $\mathbf{A}(k)$ a matriz que representa o sistema aeroelástico no espaço de estados.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5 Resultados e Discussões

Este capítulo apresenta resultados e discussões a partir de simulações numéricas computacionais considerando a seção típica de três graus de liberdade e o atuador em modo de falha hidráulica, descrito pelo amortecedor viscoso não linear combinado com atrito, conectado a superfície de controle.

A tabela 2 apresenta os parâmetros físico-geométricos que definem o aerofólio que representa o sistema em análise. Tem-se que as frequências f_h , f_α e f_β são usadas para calcular os valores de rigidezes estruturais, conforme apresenta [Theodorsen \(1935\)](#). Também considera-se um modelo com corda aerodinâmica média de 0,9 metros, com massa por unidade de envergadura de 9 kg/m.

Tabela 2 – Característica físico-geométricas do aerofólio de três gdl

semicorda aerodinâmica	$b = 0.45 \text{ m}$
massa do aerofólio	$m = 9 \text{ kg/m}$
frequência de plunge	$f_h = 6\text{Hz}$
frequência de pitch	$f_\alpha = 10\text{Hz}$
frequência de rotação da s.c.	$f_\beta = 13\text{Hz}$
c.e. do aerofólio em relação ao c.g.	$a_h = -0.4$
c.e. da s.c. em relação ao c.g.	$c_\beta = 0.7$
c.gr. do aerofólio em relação ao c.e.	$x_\alpha = 0.1$
c.gr. da s.c. em relação ao c.e.	$x_\beta = 0.01$
raio de giração do aerofólio	$r_\alpha = (0.5)^{0.5}$
raio de giração da s.c.	$r_\beta = (0.0125)^{0.5}$

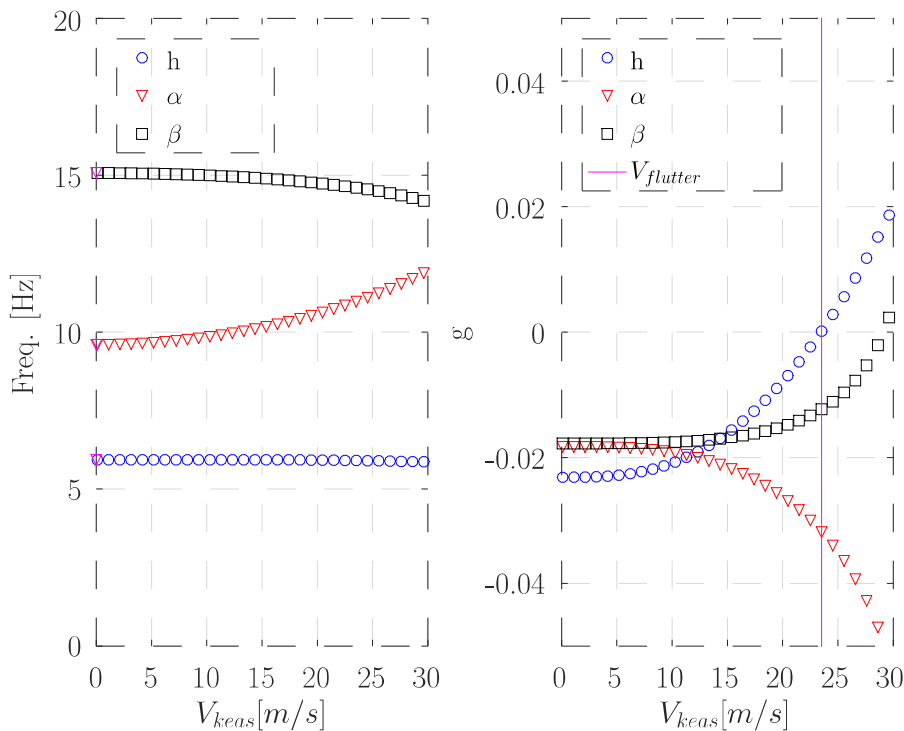
Fonte: Adaptado de [Bueno \(2014\)](#).

Nesta tabela, c.e. representa o centro elástico do aerofólio, c.g. o centro geométrico, c.gr. o centro de gravidade e s.c. a superfície de controle. Estes centros correspondem na figura 4 respectivamente aos pontos B', C', D', sendo ainda os pontos E' e F' o c.e. e o c.g. da superfície de controle.

5.1 Predição de Flutter

Para caracterizar as condições de voo com comportamento dinâmico estável do aerofólio, deve-se identificar a velocidade de flutter do sistema. Como regra geral, deve-se assegurar que a ocorrência do flutter se dê fora do envelope operacional de voo dos veículos aéreos. Caso contrário, o veículo apresenta respostas que crescem exponencialmente com o tempo, conforme ilustrado na figura 5. Em particular, neste trabalho a velocidade de flutter é obtida a partir do método pk , conforme descrito previamente nesse texto. Assim, para o sistema na condição nominal, tem-se o diagrama V - g - f mostrado na figura 22, sendo f a frequência aeroelástica e g o fator de amortecimento aeroelástico, sendo g a variável comumente utilizada na representação deste diagramas, entretanto, g e ξ apresentado nas seções anteriores representam o mesmo fator de amortecimento do sistema. Apresenta-se os resultados para uma velocidade $V_{keas} = V\sqrt{\rho/\rho_0}$, sendo ρ_0 a densidade do ar ao nível do mar, que permite representar o par (ρ, V) , que descreve a condição de voo, por um único parâmetro, que simplifica e facilita expressar os resultados na forma gráfica. Nesta condição nominal, que compreende o atuador sem falha, e portanto descrito por rigidez k_β constante, a velocidade de flutter é identificada como $V = 22,5$ m/s.

Figura 22 – Variação das frequências aeroelásticas e do fator de amortecimento g para o aerofólio com três gdl em função de V_{keas} e $\rho = 1,125\text{kg/m}^3$. Identifica-se $V_{flutter} = 23,5$ m/s e $f_{flutter} = 5,9$ Hz.



Fonte: Elaborado pelo autor

Conforme previamente mencionado, o método pk consiste de um processo iterativo que avalia se a frequência reduzida k corresponde à uma frequência aeroelástica do sistema, associada, por sua vez, a um autovalor $\lambda_{a(i)}$, extraído da matriz dinâmica aeroelástica. Somente modifica-se a condição de voo e se reinicia o processo iterativo se obter convergência atendendo o critério de parada via o erro pré-definido como aceitável.

No gráfico à esquerda da figura 22, evidencia-se a evolução das frequências aeroelásticas em função da velocidade equivalente V_{keas} . Esta ilustração, caracteriza o aerofólio com três gdl e, por isso, são apresentadas três curvas, sendo cada uma associada a um modo aeroelástico do sistema. A partir desses resultados, nota-se que a frequência aeroelástica associada a translação do aerofólio, gdl h , apresenta a menor variação em função do aumento de V_{keas} . A frequência aeroelástica associada a rotação do aerofólio, gdl α , aumenta cerca de 4 Hertz, enquanto que, o gdl β apresenta menor diminuição em torno de 2 Hertz.

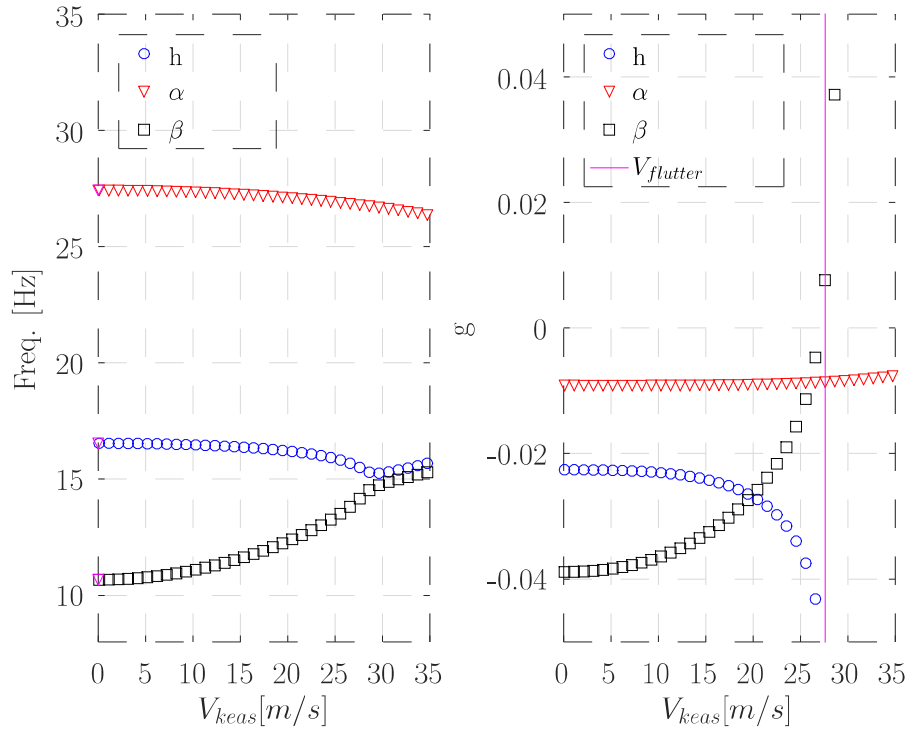
Analisando-se, ainda, a figura 22, no gráfico V - g , tem-se os resultados referentes ao comportamento do fator de amortecimento dos modos aeroelásticos em função da velocidade equivalente. Define-se como condição estável do sistema aeroelástico, velocidades equivalentes que possuam o fator de amortecimento negativo, portanto, $g < 0$. Por outro lado, valores de $g > 0$ representam condição de instabilidade e, ainda, define-se a velocidade de flutter $V_{flutter}$ como aquela para a qual tem-se $g = 0$. Note que assim, tem-se nesta velocidade uma condição marginalmente estável, sendo então o sistema instável para $V > V_{flutter}$. Neste caso, tem-se $V_{flutter} = 22,5$ m/s e, portanto, o sistema é instável para $V > 22,5$ m/s, sendo esta velocidade indicada na figura por uma linha vertical.

Fisicamente, devido a natureza do fenômeno flutter, interpreta-se que a presença de um fator de amortecimento negativo, ou seja, $g < 0$, é um indicativo que o sistema aeroelástico está dissipando energia, o que remete a estabilidade ao longo do tempo de acordo com o conceito de Liapounov (1907). Entretanto, para valores de $g > 0$, tem-se o acúmulo de energia ao longo tempo, o que associa-se a autoexcitação do fenômeno flutter, e sua característica de aumento exponencial das oscilações que implicam em condição insegura de instabilidade, que gera falhas catastróficas, implicando no colapso da estrutura.

A figura 22 mostra que o modo de *plunge* se torna instável, definindo o flutter. Assim, diz-se que o mecanismo de flutter é definido predominantemente por este modo. Por outro lado, considerando novos valores de rigidezes definidos pelas frequências estruturais $f_h = 16$, $f_\alpha = 25$ e $f_\beta = 11$ Hertz, tem-se um novo mecanismo de flutter definido pelo modo de rotação da superfície de controle. Na figura 23 tem-se os resultados do diagrama V - g - f para o aerofólio de três gdl para estes novos parâmetros.

No gráfico à esquerda na figura 23, observa-se a evolução das frequências aeroelásticas naturais em relação a velocidade equivalente. Nessas condições, nota-se um crescimento dos valores da frequência aeroelástica associada a rotação da superfície de controle, enquanto que

Figura 23 – Variação das frequências aeroelásticas e do fator de amortecimento g para o aerofólio com três gdl em função de V_{keas} e $\rho = 1,125\text{kg/m}^3$. Identifica-se $V_{flutter} = 27,6\text{ m/s}$ e $f_{flutter} = 14,0\text{ Hz}$.



Fonte: Elaborado pelo autor

as frequências associadas a translação e rotação do aerofólio, representadas pelas variáveis h e α , diminuem. Por outro lado, o diagrama V - g mostra que o modo de *pitch* mantém aproximadamente o mesmo nível de amortecimento aeroelástico em todo o envelope de voo, enquanto que o modo de *plunge* torna-se mais amortecido e o modo de rotação da superfície de controle perde amortecimento, tornando-se instável definindo o flutter do sistema. Nesta condição identifica-se o flutter em $V_{keas} = 27,5\text{ m/s}$. Com este resultado tem-se claramente que diferentes mecanismos de flutter podem definir a instabilidade do sistema.

A partir da comparação dos resultados das figuras 22 e 23 tem-se que aerofólios similares, no que tange aos aspectos dos posicionamentos dos centros elásticos, de gravidade, aerodinâmico, além das características como a corda e raio de giração do aerofólio, porém ao se modificar as rigidezes dos modos se obtém diferentes mecanismos de flutter, embora neste caso exista pequena alteração na velocidade de instabilidade.

5.2 Função de Resposta em Frequência Aeroelástica

Os resultados descritos nas figuras 22 e 23 podem ser verificados, de forma qualitativa, também usando a função de resposta em frequência aeroelástica, calculada para as diferentes

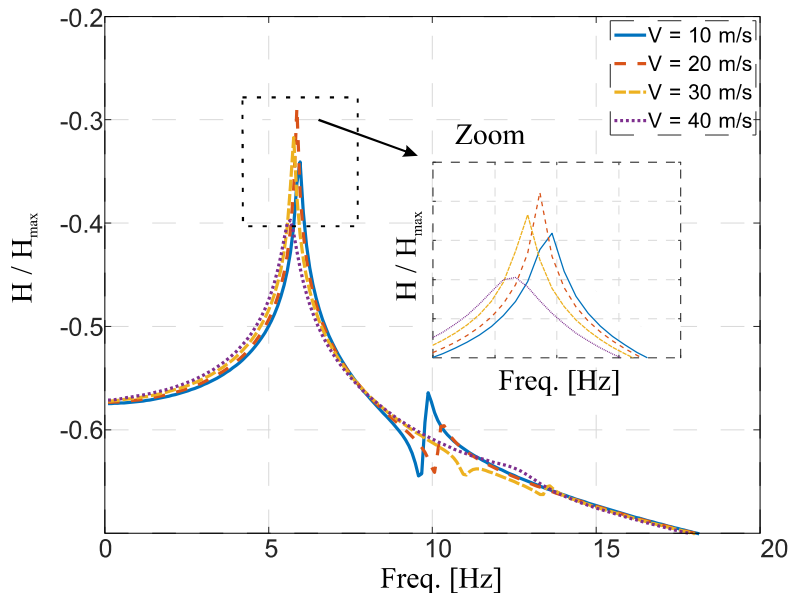
condições de pressão dinâmica. A matriz de função de resposta em frequência (FRF) para o sistema nominal é apresentada na Eq. (50).

$$\mathbf{H}(\omega) = \left\{ -\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \left[\mathbf{B} - \frac{c}{4} \rho V \frac{\mathbf{Q}^I(k)}{k} \right] + [\mathbf{K} - q \mathbf{Q}^R(k)] \right\}^{-1} \quad (50)$$

Sabendo que cada elemento H_{ij} da matriz de FRFs representa a relação entre o espectro de deslocamento no i -ésimo gdl e uma entrada no gdl j , a figura 24 mostra a FRF para o plunge (H_{11}) nas velocidades equivalentes de 10 m/s a 40 m/s. Nota-se que a pressão dinâmica altera as frequências aeroelásticas (correspondentes aos picos), bem como o nível de amortecimento do sistema.

Na figura 24 nota-se a primeira frequência aeroelástica do sistema encontra-se em torno de 6 Hz, conforme indicado no diagrama V - g - f . Também, tem-se que os picos se deslocam para a esquerda, ou seja, com o aumento da velocidade equivalente V_{keas} a frequência aeroelástica diminui, sendo compatível com os resultados da primeira configuração de aerofólio analisada (Fig. 22).

Figura 24 – Análise FRF do gdl h , translação vertical do aerofólio, considerando-se os parâmetros: $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$, $m = 9 \text{ kg}$, $c = 0.9 \text{ m}$, $x_\alpha = 0.1$, $x_\beta = 0.01$, $a_h = -0.4$, $c_\beta = 0.7$, $w_h = 6 \text{ Hz}$, $w_\alpha = 10 \text{ Hz}$, $w_\beta = 13 \text{ Hz}$, $r_\alpha = \sqrt{0.5}$ e $r_\beta = \sqrt{0.0125}$.

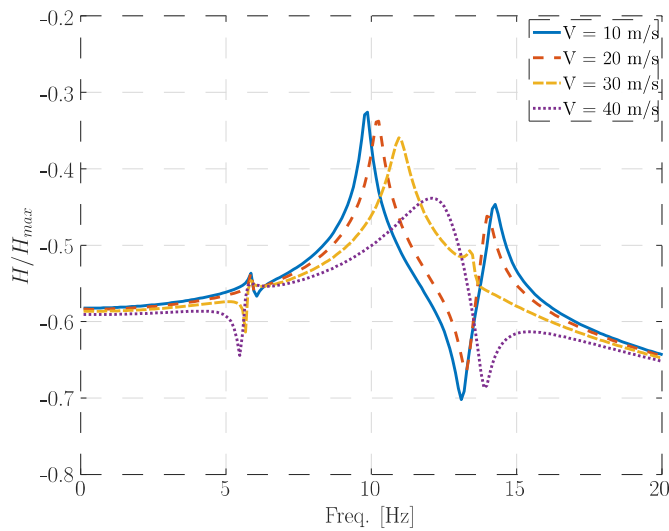


Fonte: Elaborado pelo autor.

Similarmente, a figura 25 mostra a FRF H_{22} , com destaque para o modo de *pitch*, que revela uma alteração mais significativa nas frequências e fatores de amortecimento aeroelásticos em relação ao modo de *plunge*. Ainda, a partir da figura 26, nota-se comportamento semelhante para o modo de rotação de superfície de controle.

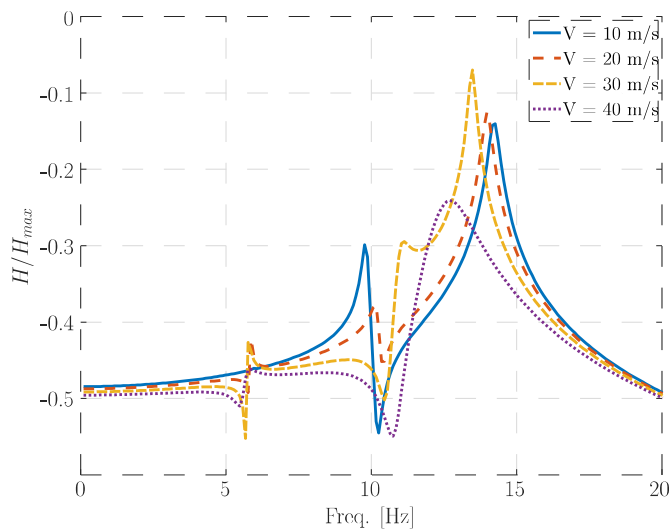
A partir desta verificações qualitativas, tem-se resultados consistentes aos diagramas V - g - f . Ainda, para algumas curvas, é possível se obter a frequência de alguns dos modos (ou seja, aquelas associadas ao picos). No entanto, este procedimento é dependente da discretização em frequência considerada para o cálculo das FRF no algoritmo computacional.

Figura 25 – Análise FRF do gdl α , rotação do aerofólio, considerando-se os parâmetros: $m = 9\text{kg}$, $c = 0.9\text{m}$, $x_\alpha = 0.1$, $x_\beta = 0.01$, $a_h = -0.4$, $c_\beta = 0.7$, $w_h = 6\text{Hz}$, $w_\alpha = 10\text{Hz}$, $w_\beta = 13\text{Hz}$, $r_\alpha = \sqrt{0.5}$ e $r_\beta = \sqrt{0.0125}$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 26 – Análise FRF do gdl β , rotação da superfície de controle do aerofólio, considerando-se os parâmetros: $m = 9\text{kg}$, $c = 0.9\text{m}$, $x_\alpha = 0.1$, $x_\beta = 0.01$, $a_h = -0.4$, $c_\beta = 0.7$, $w_h = 6\text{Hz}$, $w_\alpha = 10\text{Hz}$, $w_\beta = 13\text{Hz}$, $r_\alpha = \sqrt{0.5}$ e $r_\beta = \sqrt{0.0125}$.



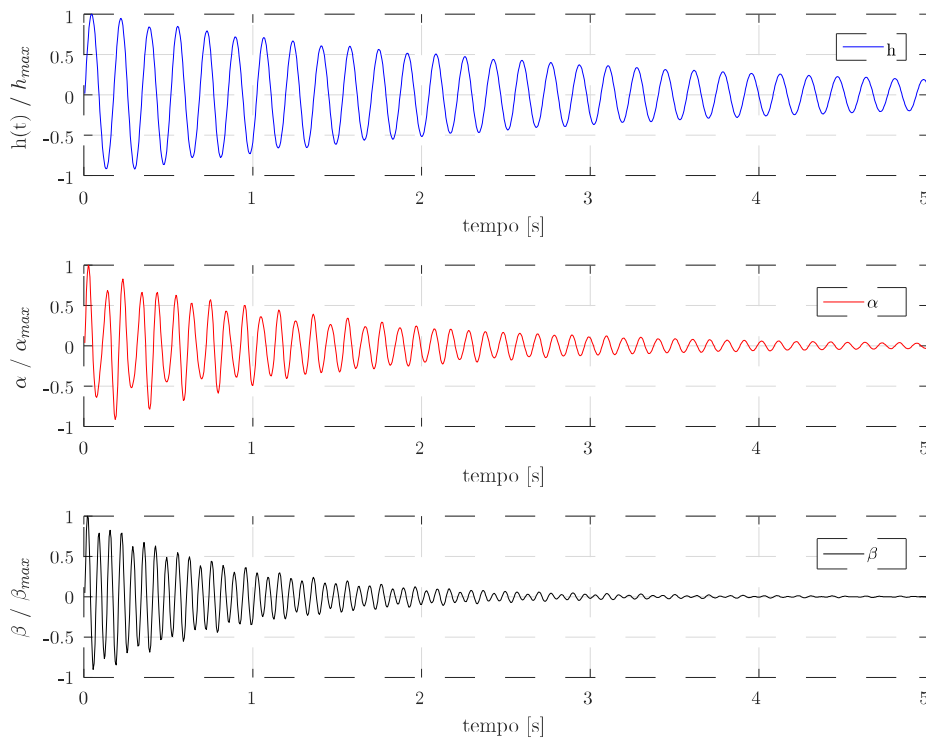
Fonte: Elaborado pelo autor.

De forma complementar, pode-se aplicar a transformada inversa de Fourier em cada uma das FRFs H_{ij} de interesse para se observar as respostas aeroelásticas ao impulso. Assim, definindo convenientemente uma velocidade menor, e a velocidade de flutter, para cada uma das duas configurações de aerofólios investigadas, pode-se obter o histórico temporal para cada um dos graus de liberdade do aerofólio.

Nos resultados considera-se $\rho = 1.225\text{kg/m}^3$. Em particular, a figura 27 exhibe as respostas para $V_{keas} = 10\text{ m/s}$. Os resultados confirmam a estabilidade do sistema.

Ainda, tem-se que cada gdl dissipa a resposta ao impulso com amortecimento aeroelástico diferente, pois cada modo aeroelástico tem diferente fator de amortecimento, e a resposta de cada um deles é dominada pelo respectivo modo aeroelástico. Para clareza de entendimento, assumindo $\Psi = [\Psi_1 \ \Psi_2 \ \Psi_3]$ a matriz de modos aeroelásticos para uma determinada condição do voo, tem-se que $\mathbf{u} = \Psi\mathbf{u}_\psi$ (similarmente à mudança para coordenadas generalizadas, na qual $\mathbf{u} = \Phi\mathbf{u}_\phi$), o que permite escrever $h = \Psi_{11}h_\psi + \Psi_{12}\alpha_\psi + \Psi_{13}\beta_\psi$, sendo, por exemplo, Ψ_{11} um coeficiente no modo de *plunge* $\Psi_1 = \{\Psi_{11} \ \Psi_{21} \ \Psi_{31}\}^T$ e h_ψ o deslocamento generalizado de *plunge*. Assim, a resposta h é dominada pelo termo $\Psi_{11}h_\psi$, enquanto α é por $\Psi_{22}\alpha_\psi$ e β por $\Psi_{33}\beta_\psi$.

Figura 27 – Resposta dinâmica no domínio do tempo dos gdl's $h(t)$, $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ do aerofólio considerando-se $V_{keas} = 10\text{ m/s}$ e $\rho = 1.225\text{kg/m}^3$. Tem-se $V_{keas} < V_{flutter} = 23,5\text{ m/s}$.

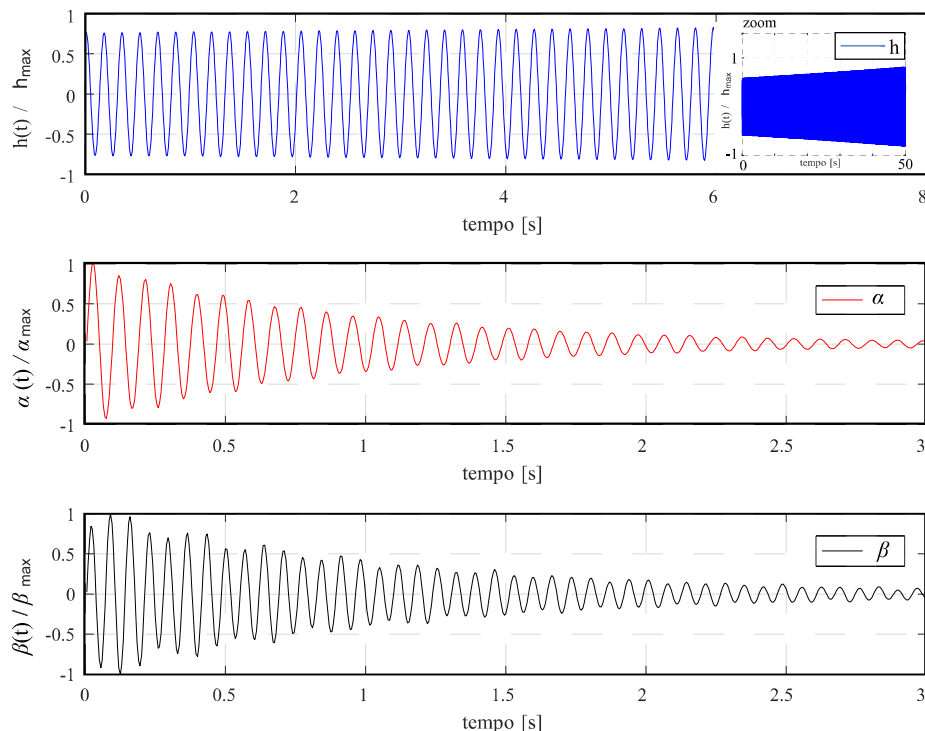


Fonte: Elaborado pelo autor.

Diferentemente do resultado anterior, a figura 28 é obtida para V_{keas} ligeiramente acima da velocidade de flutter, tal que o fator de amortecimento aeroelástico do primeiro modo (que corresponde ao modo instável, conforme Fig. 22), é positivo. Então, verifica-se que a translação vertical representada pelo gdl $h(t)$ apresenta pequeno incremento ao longo do tempo, expressando, assim, o acúmulo de energia. Note que os demais gdl permanecem estáveis, conforme observado no diagrama V - g - f .

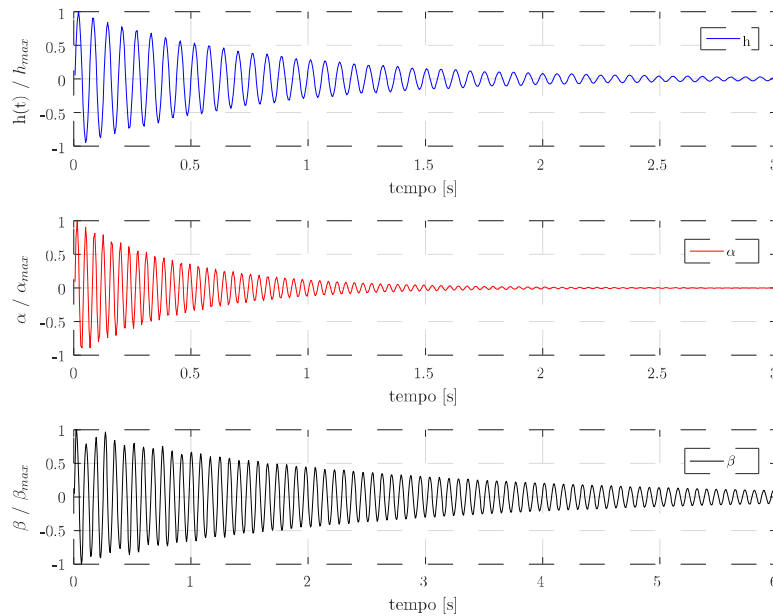
De forma similar, a figura 29 mostra a função de resposta aerolástica ao impulso para o aerofólio definido pela segunda configuração (Fig. 23). O resultado é mostrado para uma velocidade menor que a de flutter e, portanto, tem-se o sistema estável ($V_{keas} = 20$ m/s). Por outro lado, para velocidade aproximadamente a de flutter, porém com fator de amortecimento aeroelástico positivo (ou seja, acima da velocidade de flutter), tem-se o resultado da figura 30, que destaca os dois primeiros modos aeroelásticos estáveis, porém a rotação de controle com amplitude crescente ao longo do tempo, também de forma compatível com o resultado apresentado pelo diagrama V - g - f .

Figura 28 – Resposta dinâmica no domínio do tempo dos gdl's $h(t)$, $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ do aerofólio considerando-se $V_{keas} = 23.5$ m/s e $\rho = 1.225$ kg/m³. $V_{keas} = V_{flutter}$.



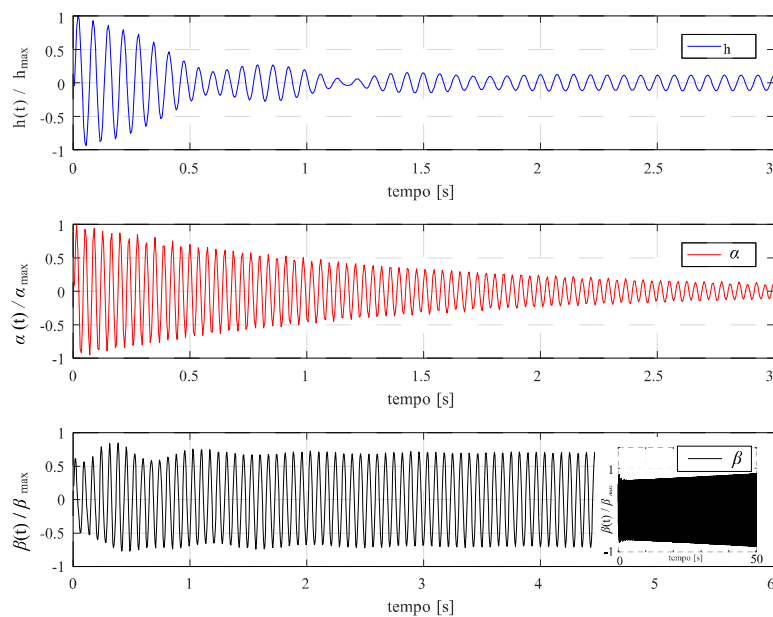
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 29 – Resposta dinâmica no domínio do tempo dos gdl's $h(t)$, $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ do aerofólio considerando-se $V_{keas} = 20\text{m/s}$ e $\rho = 1.225\text{kg/m}^3$. Sendo $V_{keas} < V_{flutter} = 27,6\text{ m/s}$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 30 – Resposta dinâmica no domínio do tempo dos gdl's $h(t)$, $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ do aerofólio considerando-se $V_{keas} = 27,6\text{m/s}$ e $\rho = 1.225\text{kg/m}^3$. $V_{keas} = V_{flutter}$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com os resultados exibidos até aqui, observa-se que o método pk identifica adequadamente as condições críticas do sistema aeroelástico, uma vez que, verificou-se pelas funções de trans-

ferência a mesma evolução das frequências aeroelásticas em função da velocidade equivalente V_{keas} , assim como a instabilidade da resposta do sistema ao impulso para condições abaixo da velocidades de flutter e acima de $V_{flutter}$ definidas pelo método pk , obtendo-se respectivamente, comportamento estável e instável, em ambas configurações dos aerofólios. Nas análises evidencia-se ainda a ocorrência da resposta instável nos gdl correspondentes aos verificados no método pk .

5.3 Atuador em Modo de Falha

A partir da análise do atuador em condição nominal, pode-se avaliar a condição de falha. Nesta condição, que ilustra um efeito típico de perda de pressão no sistema hidráulico, o transdutor exibe comportamento de um amortecedor viscoso não linear. Em particular, neste trabalho considera-se uma perda parcial de pressão, o que na prática implica em uma redução da rigidez nominal do atuador. Em consequência, ocorre a redução do amortecimento estrutural do sistema aeroelástico o que implica em significativa redução na velocidade de flutter, como mostra a tabela 3. Neste caso, o valor da rigidez da superfície de controle, k_β , exibe apenas um percentual de seu valor nominal. Note, por exemplo, que para $30\%k_\beta$ a velocidade de flutter é 17 m/s, ocorrendo na frequência de 7,7 Hertz. Despreza-se também nessa hipótese da queda de pressão, qualquer contribuição do atuador em relação ao fator de amortecimento, sendo portanto os ξ apresentados na tabela 3 referentes aos fatores de amortecimento estruturais aparentes.

Tabela 3 – Velocidade de flutter de acordo com mudanças na rigidez devido a queda de pressão e perda de amortecimento

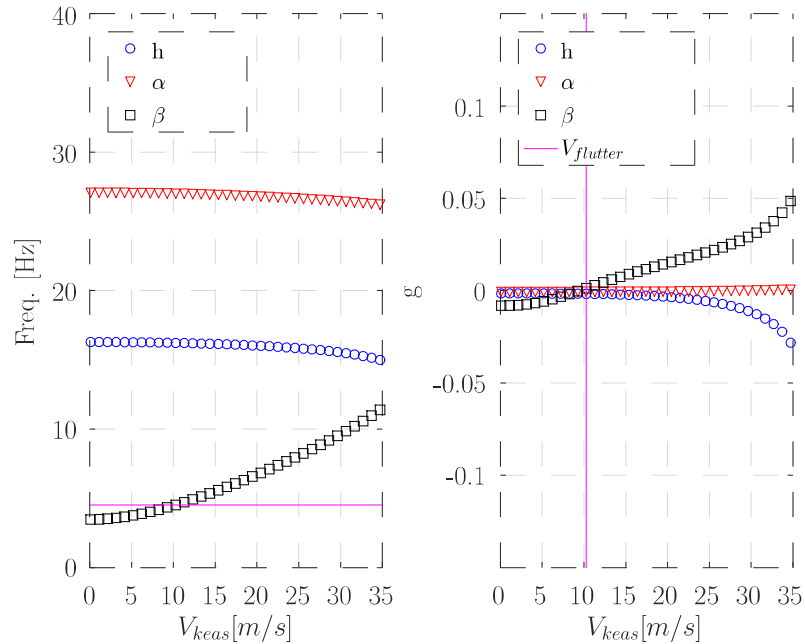
k_β^f (% de k_β)	$V_{flutter}$ (m/s)	$f_{flutter}$ (Hz)	Fator de amortecimento, ξ_i^{ap} (%)		
			h	α	β
10	10,3	4,5	0,4	0,1	0,1
20	14,4	6,4	0,5	0,2	0,1
30	17,0	7,7	0,5	0,2	0,2
40	19,7	9,0	0,6	0,3	0,2
50	20,3	9,8	0,6	0,3	0,2
60	21,6	10,6	0,6	0,4	0,3
70	22,4	11,3	0,6	0,4	0,3
80	23,7	12,1	0,8	0,5	0,4
90	25,0	12,9	1,0	0,7	0,4
100	27,7	14,0	1,9	1,1	0,5

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os resultados apresentados na tabela acima são obtidos por uma análise convencional usando o método pk . Para ilustrar, a figura 31 e a figura 32 apresentam o diagrama $V-g-f$ para 10% e 20% de k_β , que implica na velocidade e frequência de flutter respectivamente iguais a 14,4 m/s

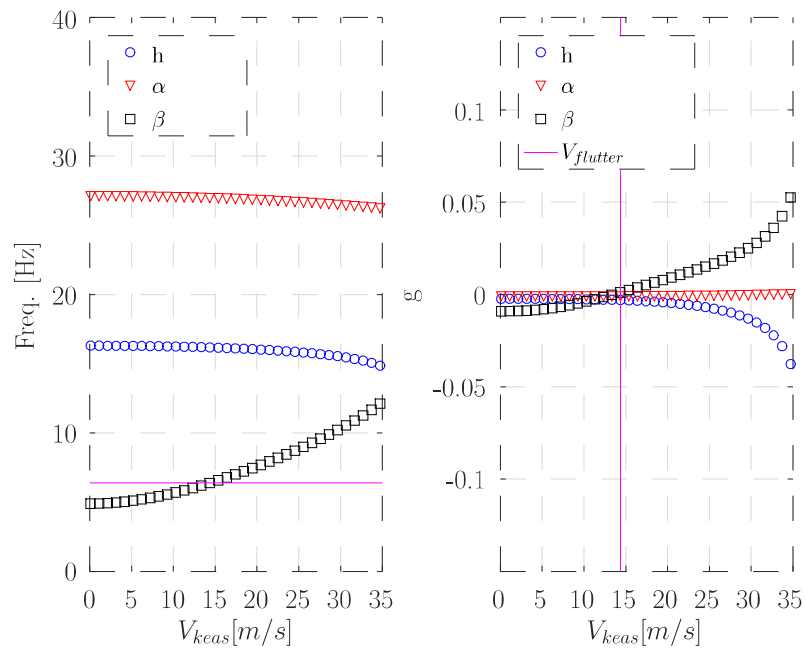
e 6,4 Hz e 10,3 m/s e 4,5 Hz.

Figura 31 – Diagrama V - g - f para $k_{\beta}^f = 0,1k_{\beta}$ (sem incluir o atuador em modo de falha), sendo a velocidade de flutter $V_{flutter} = 10,3$ m/s e $f_{flutter} = 4,5$ Hz.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 32 – Diagrama V - g - f para $k_{\beta}^f = 0,2k_{\beta}$ (sem incluir o atuador em modo de falha), sendo a velocidade de flutter $V_{flutter} = 14,4$ m/s e $f_{flutter} = 6,4$ Hz.

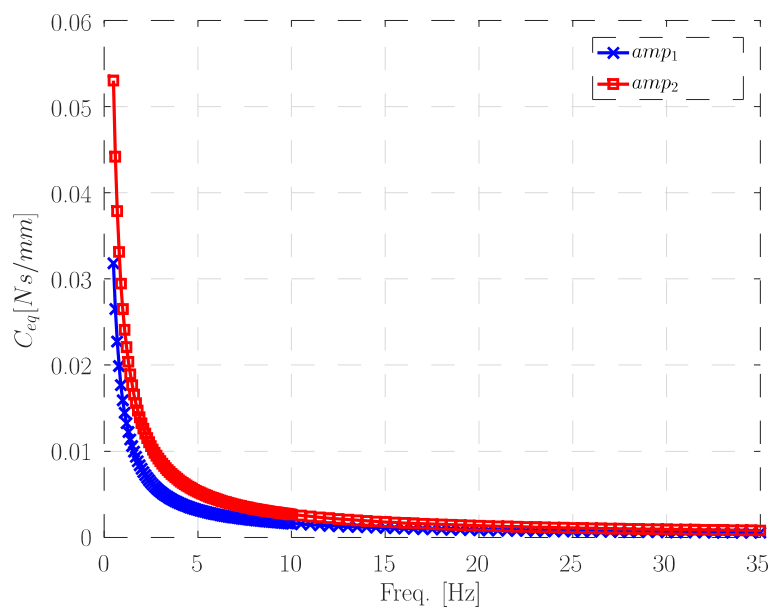


Fonte: Elaborado pelo autor.

5.3.1 Flutter Linear Equivalente

Para inclusão do efeito do atuador em modo de falha é preciso inicialmente obter as propriedades lineares equivalentes, conforme descrito na seção 3.4.3, para as amplitudes de interesse. Em particular, para ilustrar a metodologia proposta, a figura 33 apresenta o coeficiente de amortecimento linear equivalente para as amplitudes de ensaio de impedância de 5 cm e 3 cm, obtidas por meio da utilização do MLE associado a força não linear descrita como combinação dos modelos quadráticos e de Coulomb como descrito anteriormente na seção 3.4.1. Ainda, note que, conforme previamente descrito neste texto, o modelo considerado não apresenta rigidez linear equivalente. Os resultados apresentados nesta seção, leva em consideração o atuador da superfície de controle atuando como um amortecedor, o que é denominado modo de falha, sendo assim, aqui considera-se não só a perda parcial de pressão, mas também a contribuição do atuador no amortecimento do sistema, por meio da adição as equações do movimento de um fator de amortecimento equivalente.

Figura 33 – Amortecimento linear equivalente para amplitudes: $A = 0,05$ m (linha azul com símbolo \times) e $A = 0,03$ m (linha vermelha com símbolo \square) para $C = 10^{-5}$ kg/m e $\mu = 2 \times 10^{-4}$.



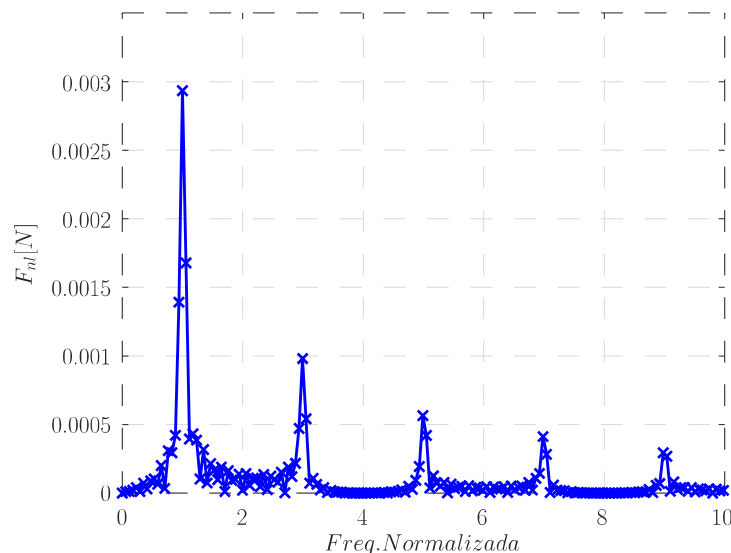
Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir das propriedades lineares equivalentes é possível resolver o método *pk* modificado para cada amplitude. Note que a solução gera uma velocidade de *flutter linear equivalente*, que fisicamente indica apenas uma representação do movimento do sistema. Isto porque o atuador em modo de falha gera uma força não linear no sistema aeroelástico e, devido sua natureza dissipativa, tal força gera um movimento assintoticamente estável até que a pressão dinâmica seja suficiente para gerar uma oscilação de ciclo limite (OCL). No entanto, note que a predição

da OCL é possível ser obtida por uma análise temporal, a partir da integração das equações do movimento¹ (Eq. 48). Por outro lado, a predição do flutter linear equivalente, que envolve uma solução no domínio da frequência, baseia-se na hipótese da OCL de ciclo limite ter apenas um harmônico, correspondente à frequência do flutter linear equivalente (FLE), com amplitude de rotação da superfície de controle correspondente à amplitude do ensaio de impedância (para qual a solução do método *pk* modificado foi obtida). Caso a hipótese se verifique, o FLE (obtido para o sistema linear equivalente) é uma representação linear da OCL (que ocorre no sistema físico, real, não linear). Caso contrário, a predição do FLE não é física, implicando do sistema real apresentar um movimento assintoticamente estável.

Para clareza de entendimento, considere que o atuador em modo de falha, que neste caso é descrito pela combinação das forças não lineares de amortecimento, dissipa energia em quantidade igual, ou maior, que sua representação linear equivalente. Pode-se facilmente compreender tal afirmação ao se observar que a força do atuador em modo de falha pode exibir componentes harmônicos mesmo para um movimento imposto como em única frequência, conforme ilustra a figura 34, obtida para $f = 6.5$ Hz (note que o eixo de frequência está normalizado por f), $A = 0,03$ m, $C = 10^{-5}$ kg/m e $\mu = 2 \times 10^{-4}$. Também, sabe-se que o movimento real da superfície de controle pode ter mais que um harmônico², o que também implica em maior dissipação de energia no dispositivo real, não linear, do que em sua representação linear equivalente.

Figura 34 – Espectro em frequência da força f_{nl} para um movimento harmônico imposto, com frequência $f = 6.5$ Hz, $A = 0,03$ m, $C = 10^{-5}$ kg/m e $\mu = 2 \times 10^{-4}$. Harmônicos $3f$ e $5f$ evidentes.



Fonte: Elaborado pelo autor.

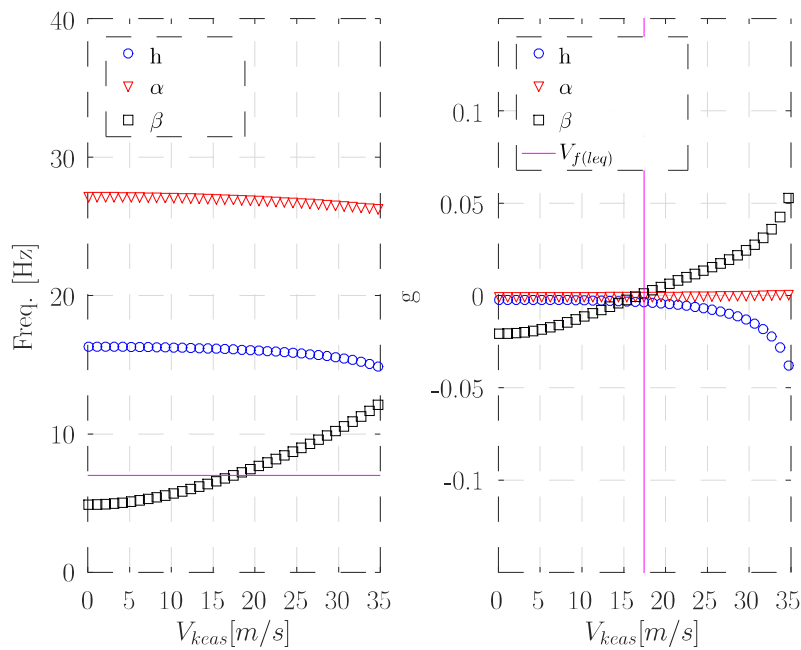
¹O que neste caso requer escrever as forças aerodinâmicas no domínio do tempo - o que não é escopo deste trabalho.

²De maneira geral tem-se que o movimento da superfície de controle para o atuador em modo de falha pode até mesmo não ser harmônico.

Considerando as amplitudes de ensaio de impedância iguais a 5 e 3 centímetros, para uma condição de k_{β}^f de $20\%k_{\beta}$, $C = 10^{-5}\text{kg/m}$ e $\mu = 2 \times 10^{-4}$, os diagramas V - g - f lineares equivalentes são obtidos respectivamente conforme as figuras 35 e 36. São obtidas as velocidades de FLE respectivamente iguais a $V_{f(leq)} = 17,4 \text{ m/s}$ e $20,5 \text{ m/s}$, cujas frequências correspondentes são $f_{f(leq)} = 7,0 \text{ Hz}$ e $7,7 \text{ Hz}$. Assim, tem-se que a inclusão das propriedades lineares equivalentes do atuador em modo de flutter suprimem o flutter que é verificado para $k_{\beta}^f = 0,2k_{\beta}$, em $V_{flutter} = 14,4 \text{ m/s}$ (conforme tabela 3) - que existe se f_{nl} é desprezada.

Para comparação direta da situação descrita, organizou-se a tabela 4 abaixo, verificando que o aumento da amplitude do atuador de $A = 3$ para $A = 5$ centímetros, implica na diminuição da velocidade de flutter equivalente, observe ainda, que os outros parâmetros não foram alterados, sendo a queda de pressão também mantida na proporção de $k_{\beta}^f = 0,2k_{\beta}$.

Figura 35 – Diagrama V - g - f linear equivalente para $A = 5 \text{ cm}$, $C = 10^{-5} \text{ kg/m}$ e $\mu = 2 \times 10^{-4}$, implicando na velocidade de FLE igual a $17,4 \text{ m/s}$.



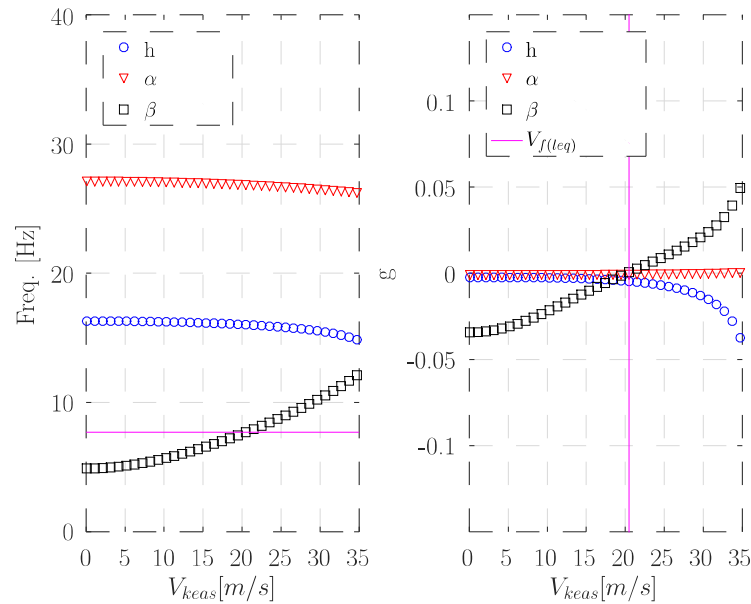
Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 4 – Velocidade $V_{f(leq)}$ e frequência $f_{f(leq)}$ de flutter linear equivalente $k_{\beta}^f = 0,2k_{\beta}$, amplitudes de ensaio de impedância A e força não linear $f_{nl} = \text{constante}$.

k_{β}^f (% de k_{β})	A (cm)	C (kg/m)	μ	$V_{f(leq)}$ (m/s)	$f_{f(leq)}$ (Hz)
20	5	10^{-5}	2×10^{-4}	17,4	7,0
20	3	10^{-5}	2×10^{-4}	20,5	7,7

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 36 – Diagramas V - g - f linear equivalente para $A = 3$ cm, $C = 10^{-5}$ kg/m e $\mu = 2 \times 10^{-4}$, implicando na velocidade de FLE igual a 20,5 m/s.



Fonte: Elaborado pelo autor.

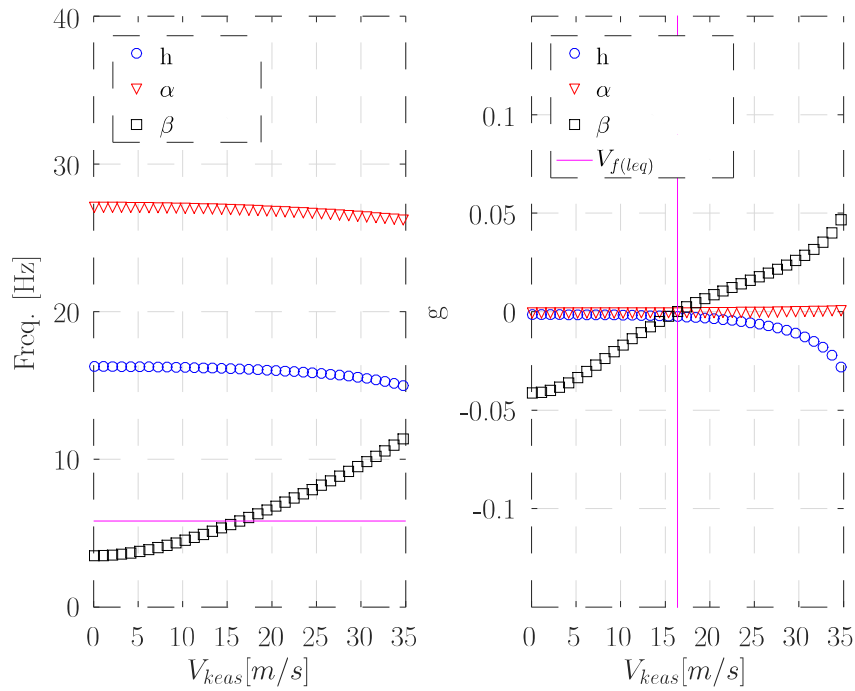
Caso as propriedades lineares equivalentes do atuador em modo de falha (que correspondem a componente f_{nl}) permaneçam inalteradas ($C = 10^{-5}$ kg/m e $\mu = 2 \times 10^{-4}$), porém se tenha uma menor força total do atuador F_a^f reduzindo k_β^f , pode-se obter uma diferente condição de estabilidade aeroelástica linear equivalente. Em particular para $k_\beta^f = 0,1k_\beta$, as figuras 37 e 38 apresentam os diagramas V - g - f lineares equivalentes respectivamente para amplitudes $A = 5$ e 3 cm. Nestes casos são obtidas as velocidades de FLE respectivamente iguais a $V_{f(leq)} = 16,4$ m/s e 20,5 m/s, com frequências correspondentes de $f_{f(leq)} = 5,8$ e 6,8 Hz, evidenciando a redução de k_β^f em relação a $k_\beta^f = 0,2k_\beta$. Os resultados descritos estão também organizados na tabela 5, que evidencia novamente, que o sistema operando em modo de falha associado a ação do dispositivo anti-flutter, faz com que o sistema exiba um fator de amortecimento maior, se comparado com o cenário de falha que considera somente a queda de pressão, em que se tem a velocidade de flutter $V_{flutter} = 10,3$ m/s (na tabela 3).

Tabela 5 – Velocidade $V_{f(leq)}$ e frequência $f_{f(leq)}$ de flutter linear equivalente para $k_\beta^f = 0,1k_\beta$, amplitudes de ensaio de impedância A e força não linear f_{nl} .

k_β^f (% de k_β)	A (cm)	C (kg/m)	μ	$V_{f(leq)}$ (m/s)	$f_{f(leq)}$ (Hz)
10	5	10^{-5}	2×10^{-4}	16,4	5,8
10	3	10^{-5}	2×10^{-4}	20,5	6,8

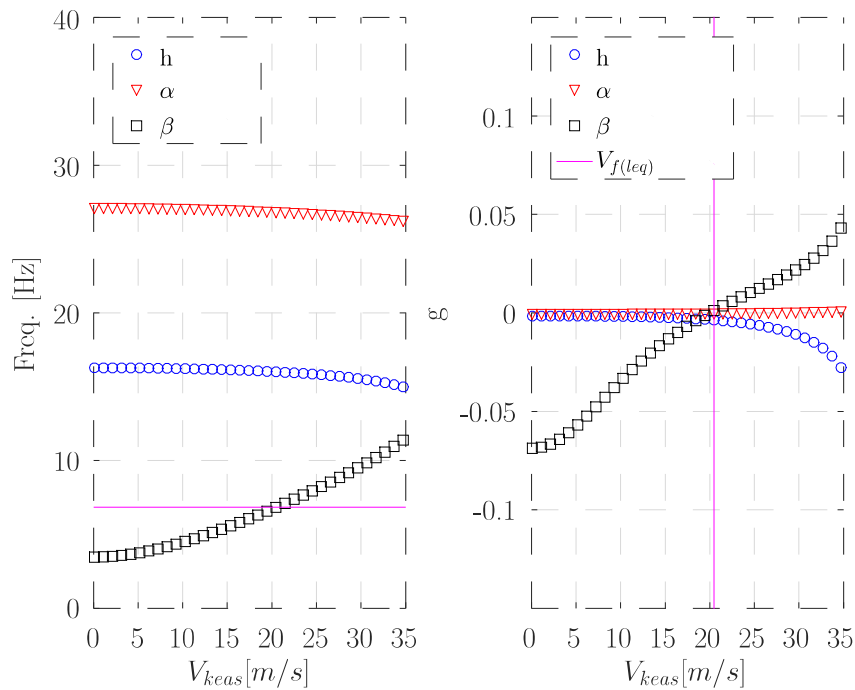
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 37 – Diagrama V - g - f linear equivalente para $A = 5$ cm, $C = 10^{-5}$ kg/m e $\mu = 2 \times 10^{-4}$, implicando na velocidade de FLE igual a 16,4 m/s.



Fonte: Elaborado pelo autor.

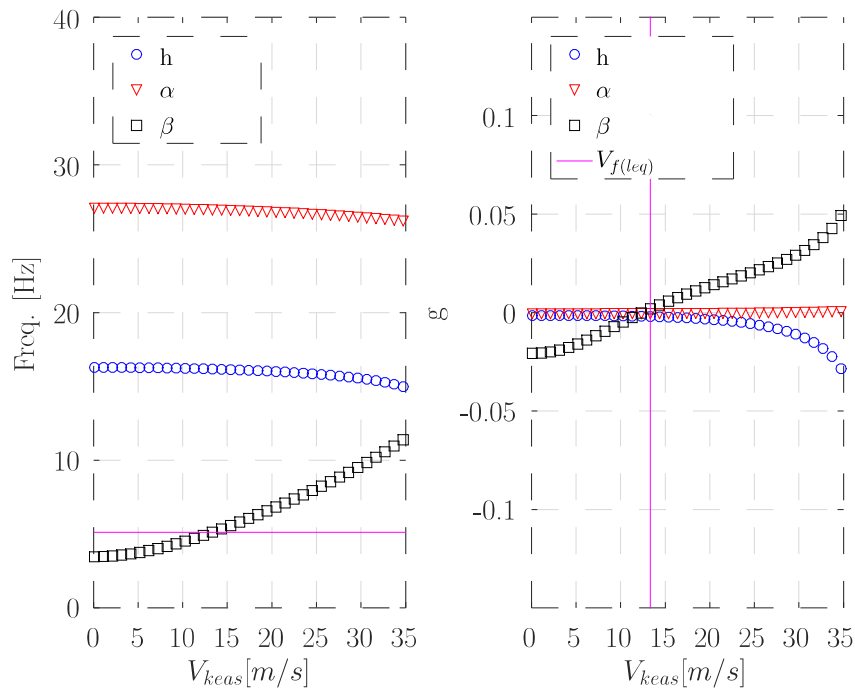
Figura 38 – Diagramas V - g - f linear equivalente para $A = 3$ cm, $C = 10^{-5}$ kg/m e $\mu = 2 \times 10^{-4}$, implicando na velocidade de FLE igual a 20,5 m/s.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por outro lado, fixando $k_{\beta}^f = 0,1k_{\beta}$ e reduzindo f_{nl} tal que $C = 10^{-5}$ kg/m e $\mu = 10^{-4}$, a capacidade dissipativa do sistema aeroelástico é também reduzida, implicando em menores velocidades de flutter linear equivalente. As figuras 39 e 40 apresentam os diagramas V - g - f lineares equivalentes respectivamente para amplitudes $A = 5$ cm e 3 cm. Para este caso, tem-se as velocidades de FLE respectivamente iguais a $V_{f(leq)} = 13,3$ m/s e 15,4 m/s, com frequências correspondentes de $f_{f(leq)} = 5,1$ e 5,6 Hz, analogamente os dados estão apresentados na tabela 6, e verifica-se a condição $V_{f(leq)} > V_{flutter} = 10,3$ m/s. As propriedades lineares equivalentes nesta configuração de força f_{nl} são mostradas na figura 41.

Figura 39 – Diagrama V - g - f linear equivalente para $A = 5$ cm, $C = 10^{-5}$ kg/m e $\mu = 10^{-4}$, implicando na velocidade de FLE igual a 13,3 m/s.



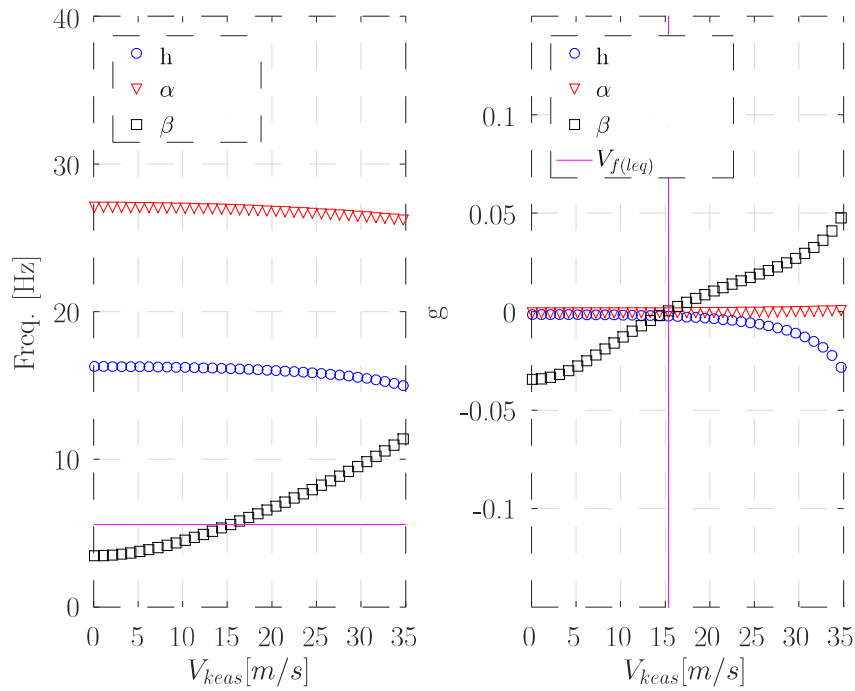
Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 6 – Velocidade $V_{f(leq)}$ e frequência $f_{f(leq)}$ de flutter linear equivalente para $k_{\beta}^f = 0,1k_{\beta}$, com modificação nos parâmetros da força não linear f_{nl} .

k_{β}^f (% de k_{β})	A (cm)	C (kg/m)	μ	$V_{f(leq)}$ (m/s)	$f_{f(leq)}$ (Hz)
10	5	10^{-5}	10^{-4}	13,3	5,1
10	3	10^{-5}	10^{-4}	15,4	5,6

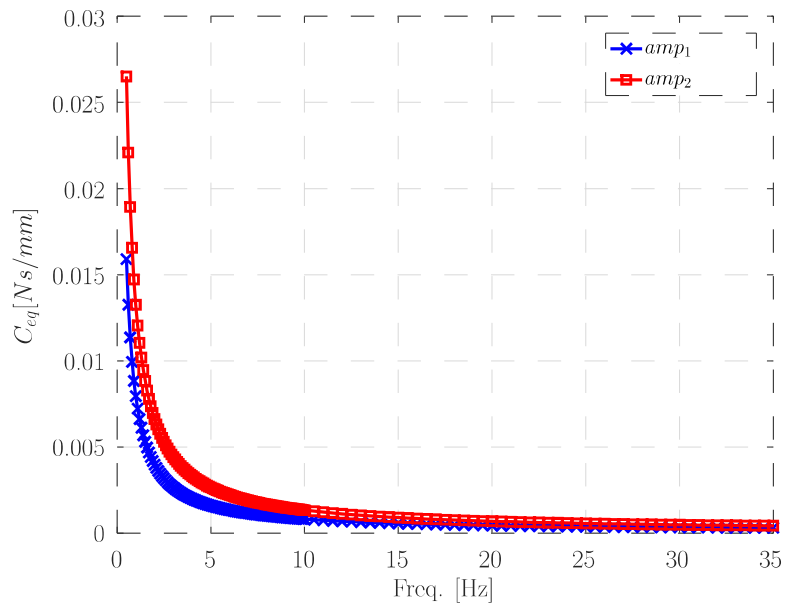
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 40 – Diagramas V - g - f linear equivalente para $A = 3$ cm, $C = 10^{-5}$ kg/m e $\mu = 10^{-4}$, implicando na velocidade de FLE igual a 15,4 m/s.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 41 – Amortecimento linear equivalente para amplitudes: $A = 0,05$ m (linha azul com símbolo \times) e $A = 0,03$ m (linha vermelha com símbolo \square) para $C = 10^{-5}$ kg/m e $\mu = 10^{-4}$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Deve destacar que, enquanto o diagrama V - g - f - que é obtido para o sistema linear (que não considera f_{nl}) - apresenta frequências e fatores de amortecimento aeroelásticos para todas as condições de voo (ρ, V) para as quais são calculados, os diagramas V - g - f lineares equivalentes (Figs. 36 a 39) têm informação potencialmente física apenas em $(\rho, V_{f(leg)})$, sendo os demais resultados apenas numérico matemáticos. Esta interpretação deve-se ao fato de que os V - g - f LE são calculados considerando propriedades lineares equivalentes do atuador não linear, obtidas para o transdutor particularmente em movimento harmônico simples (amplitude constante e uma frequência fixa) - que corresponde ao ensaio de impedância. Assim, apenas a condição de fator de amortecimento aeroelástico $g_{f(leg)}$ (no FLE), que corresponde a $g = 0$, é compatível com a física descrita pela solução.

Note que a explicação anterior menciona que os pontos do envelope de voo $(\rho, V_{f(leg)})$ descrevem uma situação apenas potencialmente física, pois conforme descrito previamente nesta seção de resultados, o FLE representa uma possível OCL, que eventualmente pode de fato ser apenas uma condição assintoticamente estável uma vez que a energia dissipada por f_{nl} (Eq. 23) é sempre maior ou igual a $f_{eq}(t)$ (Eq. 24) pois o MLE garante isso ao utilizar somente a contribuição da força não linear na frequência de excitação.

6 Considerações Finais

Neste trabalho se apresentou a discretização matemática do sistema dinâmico representado pela seção típica associada a uma superfície de controle, sendo assim, caracterizou-se um aerofólio com três gdl. A partir da teoria desenvolvida por [Theodorsen \(1935\)](#) foi possível estruturar as equações do movimento que regem o sistema aeroelástico. E, em seguida, organizou-se as informações de modo matricial para posterior implementação numérica usando linguagem computacional interpretada no software livre *Octave*.

Discutiu-se também, em mais detalhes, o desenvolvimento do método pk , sendo este uma ferramenta amplamente utilizada na indústria aeronáutica para a análise de estabilidade dos sistemas aeroelásticos, sendo então utilizada durante os processos de idealização e desenvolvimento dos projetos aeronáuticos com o intuito de auxiliar nas tomadas de decisão, além de prever resultados experimentais e permitir as simulações de aerofólios com outras configurações.

É possível visualizar também que no [Software \(2004\)](#) o algoritmo do método pk está implementado e presente no software, o qual é utilizado pela indústria devido a característica de rápida convergência do processo iterativo presente no algoritmo de análise de estabilidade. Neste ponto, observou-se nas simulações realizadas no decorrer do desenvolvimento do algoritmo que são necessárias cerca de cinco iterações para obter a convergência de uma frequência reduzida k com um erro da ordem de $\varepsilon = 10^{-4}$, por isso a sua popularidade, o algoritmo apresenta uma velocidade vantajosa de execução.

Apresenta-se ainda, na seção de resultados, os diagramas $V-g-f$ com o intuito da identificação das condições críticas de voo, ou limites operacionais da aeronave, a partir da análise do envelope aerodinâmico. Por meio dos $V-g-f$ apresentados, identifica-se a velocidade de flutter $V_{flutter}$ e a frequência de flutter $f_{flutter}$ do sistema aeroelástico em análise.

A análise da resposta de sistemas aeroelásticos são necessários para obtenção da certificação e homologação dos projetos aeronáuticos ([FAA, 1965](#)), sendo que o método pk auxilia na predição dos limites operacionais, a partir da resposta dinâmica da seção típica de três gdl e análise do envelope aerodinâmico. Dentro deste escopo, é necessário e exigido segundo a [FAA \(2009\)](#) obter um método que identifique as novas condições limites do sistema aeroelástico em caso de falha no atuador da superfície de controle do aerofólio.

Por isso, este trabalho considera a análise do fenômeno flutter na seção típica com três gdl, com aerodinâmica não estacionária de Theodorsen. A pesquisa compreendeu a análise de flutter considerando um atuador de superfície de controle em modo de falha, considerando-se nessa condição falha hidráulica, e descrevendo o comportamento dinâmico do atuador como um amortecedor não linear, como evidenciado na seção 3.3 e proposto por [Maré \(2016\)](#).

Apresentou-se portanto, os cenários de perda de pressão hidráulica, no qual simula-se numericamente a perda de rigidez nos comandos das superfícies de controle, alterando-se consequentemente o fator de amortecimento do sistema dinâmico, caracterizando-se assim, o aerofólio operando em modo de falha devido a queda de pressão. Observou-se nos resultados mostrados na tabela 3, utilizando ainda neste ponto o método pk associado a queda de pressão, constata-se que a perda de rigidez do sistema aeroelástico, e consequentemente, fatores de amortecimento $\xi_{(i)}$ menores que os nominais. Com isso, observou-se também que o *range* operacional do sistema aeroelástico em relação ao envelope de voo estável ou seguro, tornou-se menor, ou seja, com a presença da falha hidráulica a velocidade de flutter ocorre em uma velocidade menor que a obtida no sistema aeroelástico nominal. Sendo observado a relação proporcional entre os parâmetros, com a queda de pressão, utilizando-se k_{β}^f representando a rigidez da superfície de controle, tem-se a queda do módulo de $V_{flutter}$.

Em outro tópico, exibe-se o cenário do atuador em modo de falha, devido a presença e ação do dispositivo anti-flutter, o qual modifica a função do atuador da superfície de controle e passa a exibir função de amortecedor.

Com o intuito, de obter portanto, as novas condições críticas ou limites operacionais do sistema aeroelástico para os cenários de funcionamento em modo de falha, modificou-se o método pk , inserindo nas equações do movimento a força não linear advinda do atuador devido a falha hidráulica, utilizando-se para isso a caracterização das propriedades equivalentes do atuador em modo de falha descrita graficamente por [Huet et al. \(2011\)](#) e utilizando-se ainda como referência o modelo matemático da força não linear do atuador em modo de falha evidenciado por [Maré \(2016\)](#). Além disso, para adequação da modificação do método pk foi necessário implementar o Método Linear Equivalente (MLE) e realizar a simulação do ensaio de impedância realizado em atuadores, afim de definir o banco de dados das propriedades equivalentes que modificam as matrizes estruturais do sistema dinâmico inicialmente definido.

Verificou-se ainda, que o MLE permite uma aproximação da força não linear do atuador de modo conservativo, sendo portanto, a força equivalente aproximada e menor que a força não linear. Outro detalhe na elaboração do método pk modificado foi que para não prejudicar a característica de rápida execução do método pk , criou-se por meio de simulação numérica o banco de dados das propriedades equivalente separadamente, de acordo com cada situação proposta, levando-se em conta os aspectos da força não linear envolvida (parâmetros C e μ), assim como as amplitudes A e frequências de excitação ω do atuador.

Assim, o novo método é resolvido para cada possível amplitude de movimento harmônico que a superfície de controle pode ter, o que pode ser definido em função das características geométricas de cada veículo aéreo. A abordagem considera, simultaneamente o processo de convergência da frequência reduzida, as alterações das propriedades mecânicas que descrevem, de forma equivalente e linearizada, a dinâmica do atuador em falha para cada amplitude e frequência de movimento.

O método *pk* modificado considera o atuador em modo de falha representados por propriedades de rigidez e coeficiente de amortecimento lineares equivalentes. Estas propriedades são extraídas da força não linear do transdutor, obtida para cada amplitude e frequência de movimento, a partir da impedância mecânica. Neste sentido, o trabalho descreveu sucintamente alguns aspectos básicos do ensaio de impedância para auxiliar o entendimento do leitor.

Ao executar o método *pk* modificado notou-se pequena variação no tempo de processamento do método iterativo, sendo que em apenas alguns pontos do envelope aerodinâmico foram necessárias mais do que cinco iterações para atender ao critério *pk*. Com isso, obteve-se os diagramas *V-g-f-equivalentes* que delimitam as novas condições críticas do sistema aeroelástico em modo de falha, definido neste trabalho como velocidade de flutter equivalente V_{leq} .

Em particular, o caso de falha considerado implicou em descrever a força do atuador em modo de falha em termos de uma rigidez linear equivalente constante, na frequência e na amplitude, enquanto que este não é comportamento típico de atuadores aeronáuticos, conforme discute [Huet et al. \(2011\)](#). No entanto, esta simplificação foi adotada neste trabalho e, portanto, pode ser objeto de futuras investigações neste tema. Além disso, identifica-se nos resultados obtidos nos diagramas *V-g-f-equivalentes*, velocidade de flutter equivalente V_{leq} superior aos valores obtidos quando considerado o cenário que assume somente queda de pressão, e sendo ainda, estes valores identificados pelo método *pk* modificado menores quando comparados ao sistema nominal, evidenciando-se assim o aumento do fator de amortecimento do sistema aeroelástico devido a mudança de comportamento do atuador para amortecedor não linear como sugere [Huet et al. \(2011\)](#), [Maré \(2016\)](#).

Organizando-se as velocidades críticas em ordem crescente, tem-se a seguinte sequência, a menor velocidade associada ao cenário que considera somente a queda de pressão, a velocidade de flutter equivalente tem-se o atuador operando como amortecedor não linear, e posteriormente a maior velocidade de flutter sendo o melhor cenário simulado, em que o sistema aeroelástico apresenta suas características nominais.

O trabalho desenvolvido apresenta portanto, resultados coerentes a análise de estabilidade aeroelástica no que tange a identificação das velocidades críticas nos cenários citados para um aerofólio discretizado com três *gld*, além de comprovar que o MLE, apesar de conservativo, é válido e representa adequadamente a força não linear presente na superfície de controle quando esta opera em modo de falha, pode se afirmar ainda, que com a modificação do método *pk* não

houve perda significativa na velocidade de execução do algoritmo e que os resultados obtidos e apresentados nos *V-g-f-equivalentes*, são indicadores de possíveis pontos críticos, sendo assim, o método permite um norteamento para as condições críticas de operação do aerófolio em modo de falha, auxiliando desse modo, posterior análise e verificação das OCL.

6.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

A seguir são apresentadas algumas sugestões de trabalhos futuros:

- avaliar via pk modificado novos modelos de forças não lineares que representem atuadores em modo de falha, especialmente para se considerar as variações na rigidez linear equivalente.
- avaliar o sistema não linear no domínio do tempo para verificar se as possíveis oscilações de ciclo limite de fato ocorrem.
- investigar o quanto esta abordagem linear equivalente pode ser conservativa, e quais as implicações em um projeto de aeronave.
- realizar ensaios experimentais em túneis de vento para comprovar as observações e previsões.

Referências

- ALMEIDA, S. F. D. **Desenvolvimento de ferramentas computacionais para análise de interação fluido-estrutura incluindo não linearidades geométricas**. 2012. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.
- AGÊNCIA NACIONAL NACIONAL DE AVIAÇÃO CIVIL — ANAC. **Certificação de aeronaves**. 2018. Disponível em: <https://sistemas.anac.gov.br/-/certificacao/>. Acesso em: 11 fev. 2020.
- BALACHANDRAN, B.; MAGRAB, E. B. **Vibrações mecânicas**. São Paulo: Cengage Learning, 2011.
- BELARDO, M.; PECORA, M.; PALLETA, N. Aeroelastic response with non linear hydraulic servo-actuator model. **International Journal of Aerospace Sciences**, Rosemead, v. 2, n. 2, p. 37-44, 2013.
- BISPLINGHOFF, R. L.; ASHLEY, H.; HALFMAN, R. L. **Aeroelasticity**. Mineola: Dover Publications, 1996.
- BUENO, D. D. **Controle ativo de vibrações e localização ótima de sensores e atuadores piezelétricos**. 2007. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2007, Ilha Solteira.
- BUENO, D. D. **A contribution to aeroelasticity using Lyapunov’s theory**. 2014. Tese (Doutorado) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2014.
- CAMARGO, G. D. O. **Comandos hidráulicos e pneumáticos**. São Paulo: SENAI - Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial, 2010.
- CAMILO, E. **Aeroelasticidade computacional transônica em aerofólios com modelo estrutural não linear**. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007.
- COLLAR, A. R. The expanding domain of aeroelasticity. **The Royal Aeronautical Society**, Cambridge, v. 50, n. 428, p. 613-636, 1946.
- COLLAR, A. R. **The first fifty years of aeroelasticity**. Aerospace Royal Aeronautical Society Journal, Cambridge, v.5, p. 12-20., 1978.
- DILDA, V.; MIOTTO, F.; VALDIEIRO, A. C.; ANDRIGHETTO, P. L.; RAFKOV, M. Estudo do comportamento dinâmico de um atuador hidráulico e suas características não lineares. **In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA, CNMAC**, 2007, 30, Florianópolis. Anais [...]. Florianópolis: SBMAC, 2007. Disponível em: http://arquivo.sbmac.org.br/eventos/cnmac/xxx_cnmac/PDF/484.pdf. Acesso em: 11 fev. 2020.

DUARTE, F. J. A. **Aperfeiçoamento de uma máquina para ensaio de amortecedores.** 2008. Dissertação (Mestrado) — Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2008.

FAA. **Airworthiness Standards Federation Aviation Administration FAR Part 25.** [S.l.], 1965.

FAA. **Airworthiness Standards Federation Aviation Administration FAR Part 35 - Propellers.** [S.l.: s.n.], 2009.

FEIXIN, C.; JIKE, L.; YANMAO, C. Flutter analysis of an airfoil with nonlinear damping using equivalent linearization. **Chinese Journal of Aeronautics**, Beijing, v. 27, n. 1, p. 59-64, 2013.

FUNG, Y. C. **An introduction to the theory of aeroelasticity.** [S.l.: s.n.], 1993.

GAWRONSKI, W. K. **Advanced structural dynamics and active control of structures.** New York : Springer-Verlag, 2004.

HASSIG, H. J. An approximate true damping solution of flutter equation by determinant iteration. **Journal of Aircraft**, Reston, v. 8, n. 11, p. 885-889, 1971.

HUET, S.; BROUX, G.; GARRIDES, E. **Aeroelastic behavior of a falcon business jet in case of a failed servo-actuator.** Dassault Aviation, 2011.

LAYTON, D. S.; GAINES, V. G. F-22 actuator dynamic stiffness (impedance) testing. **In: AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC STRUCTURES, DYNAMICS, AND MATERIALS**, 15, 2007, Honolulu. **Proceedings of the [...]**. Honolulu: AI

LIAPOUNOV, A. M. **Problème général de la stabilité du mouvement.** [S.l.]: Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 7, 1907.

LIMA, F. H. D. **Análise da resposta aeroelástica de um aerofólio de 2 GDL.** *In:* CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA, 2016, Ilha Solteira.

MARÉ, J. C. **Aerospace actuators 1 - needs, reliability and hydraulic power solutions.** New York: Iste, 2016.

RIBEIRO, F. A.; ABREU, G. L. C. M. d. Modelagem matemática de um amortecedor com fluido magnetoreológico. **In: CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA**, 8, 2014, Uberlândia. **Anais [...]**. Uberlândia: ABCM, 2014.

RUZICKA, J. E.; DERBY, T. F. **Influence of damping in vibration isolation.** Technical report. Michigan: The Shock and Vibration Information Center, 1971.

SANTADE, F. **Análise dinâmica de amortecedores não lineares assimétricos, com histerese e sujeitos a folga e avaliação da temperatura.** 2017. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia de Bauru, Bauru, 2017. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/handle/11449/151680>. Acesso em: 12 fev. 2020.

SOFTWARE, M. MSC. **Nastran Version 68 - Aeroelastic Analysis User Guide.** [S.l.: s.n.], 2004.

TALAY, T. A. **Introduction to the aerodynamics of flight.** [S.l.]: Scientific and Technical Information Office; Washington, D.C., 1975.

THEODORSEN, T. **General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter.** NACA Rept. 496, 1935.

WRIGHT, J.; COOPER, J. **Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads.** John Wiley and Sons, 2007. (AIAA education series). ISBN 9781563477225. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=gdEeAQAAIAAJ>>.

ANEXOS A

A.1 Aerodinâmica não Estacionária

Este apêndice apresenta as equações que definem a aerodinâmica não estacionária da seção típica de três graus de liberdade, conforme estabelece (THEODORSEN, 1935). Nestas equações c representa a corda do aerofólio e a é um parâmetro adimensional que multiplica b , a semi-corda. Assim, conseqüentemente, define-se a distância entre o centro elástico e o centro de gravidade do aerofólio.

$$T_1 = -\frac{1}{3}\sqrt{1-c^2}(2+c^2) + c\cos^{-1}(c) \quad (51)$$

$$T_2 = c(1-c^2) - \sqrt{1-c^2}(1+c^2)\cos^{-1}(c) + c(\cos^{-1}(c))^2 \quad (52)$$

$$T_3 = -\left(\frac{1}{8} + c^2\right)(\cos^{-1}(c))^2 + \frac{1}{4}c\sqrt{1-c^2}\cos^{-1}(c)(7+2c^2) - \frac{1}{8}(1-c^2)(5c^2+4) \quad (53)$$

$$T_4 = \cos^{-1}(c) + c\sqrt{1-c^2} \quad (54)$$

$$T_5 = -(1-c^2) - (\cos^{-1}(c))^2 + 2c\sqrt{1-c^2}\cos^{-1}(c) \quad (55)$$

$$T_6 = T_2 \quad (56)$$

$$T_7 = -\left(\frac{1}{8} + c^2\right)\cos^{-1}(c) + \frac{1}{8}c\sqrt{1-c^2}(7+2c^2) \quad (57)$$

$$T_8 = -\frac{1}{3}\sqrt{1-c^2}(2c^2+1) + c\cos^{-1}(c) \quad (58)$$

$$T_9 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} (\sqrt{1-c^2})^3 + aT_4 \right] \quad (59)$$

$$T_{10} = \sqrt{1-c^2} + \cos^{-1}(c) \quad (60)$$

$$T_{11} = \cos^{-1}(c)(1-2c) + \sqrt{1-c^2}(2-c) \quad (61)$$

$$T_{12} = \sqrt{1-c^2}(2+c) - \cos^{-1}(c)(2c+1) \quad (62)$$

$$T_{13} = \frac{1}{2} [-T_7 - (c-a)T_1] \quad (63)$$

$$T_{14} = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}ac \quad (64)$$

$$T_{15} = T_4 + T_{10} \quad (65)$$

$$T_{16} = T_1 - T_8 - (c-a)T_4 + \frac{T_{11}}{2} \quad (66)$$

$$T_{17} = -2T_9 - T_1 + \left(a - \frac{1}{2}\right)T_4 \quad (67)$$

$$T_{18} = T_5 - T_4T_{10} \quad (68)$$

$$T_{19} = -\frac{1}{2}T_4T_{11} \quad (69)$$

$$\mathbf{M}_{nc} = \begin{bmatrix} -\pi & \pi a & T_1 \\ \pi a & -\pi \left(a^2 + \frac{1}{8} \right) & -2T_{13} \\ T_1 & -2T_{13} & \frac{T_3}{\pi} \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$\mathbf{B}_{nc} = \begin{bmatrix} 0 & -\pi a & T_4 \\ 0 & \pi \left(a - \frac{1}{2} \right) & -T_{16} \\ 0 & -T_{17} & -\frac{T_{19}}{\pi} \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$\mathbf{R}_1 = \left\{ -2\pi \quad 2\pi \left(a + \frac{1}{2} \right) \quad -T_{12} \right\}^t \quad (72)$$

$$\mathbf{S}_1 = \left\{ 0 \quad 1 \quad \frac{T_{10}}{\pi} \right\} \quad (73)$$

$$\mathbf{S}_2 = \left\{ 1 \quad \left(\frac{1}{2} - a \right) \quad \frac{T_{11}}{2\pi} \right\} \quad (74)$$

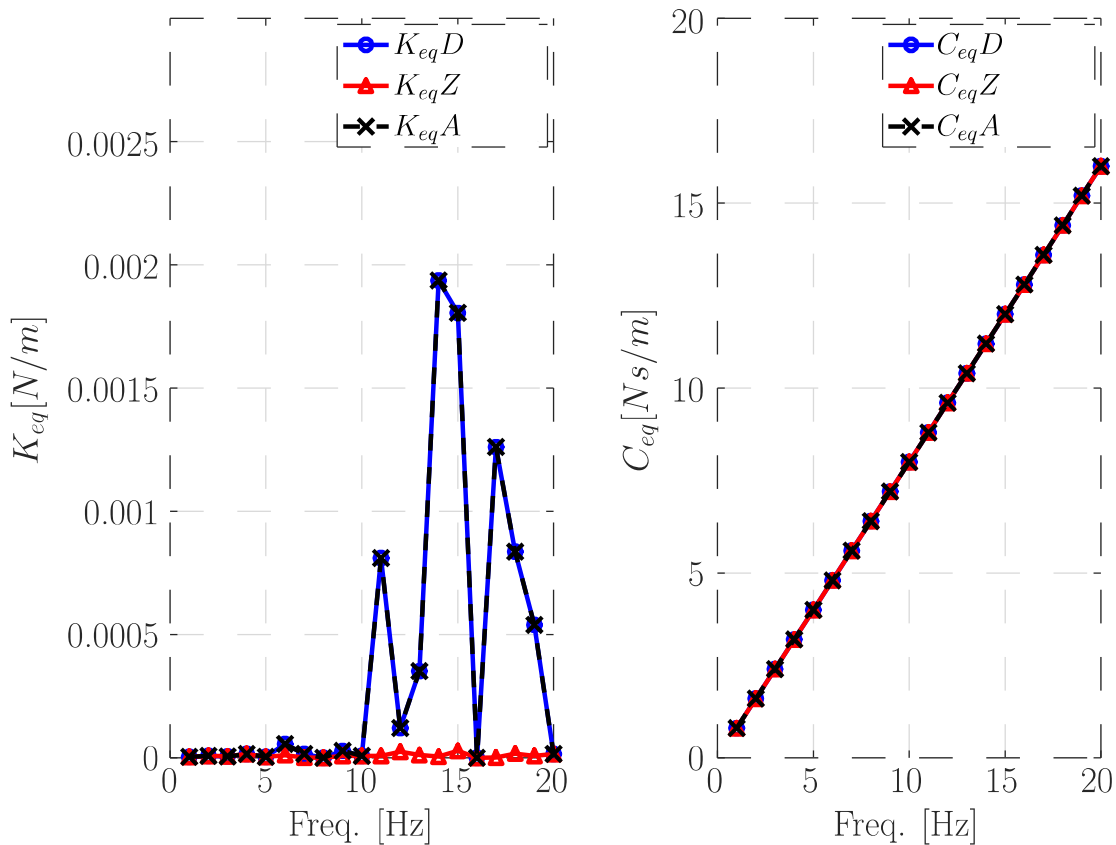
$$\mathbf{K}_{nc} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T_{15} \\ 0 & 0 & -\frac{T_{18}}{\pi} \end{bmatrix} \quad (75)$$

ANEXOS B

B.1 Representação Linear Equivalente

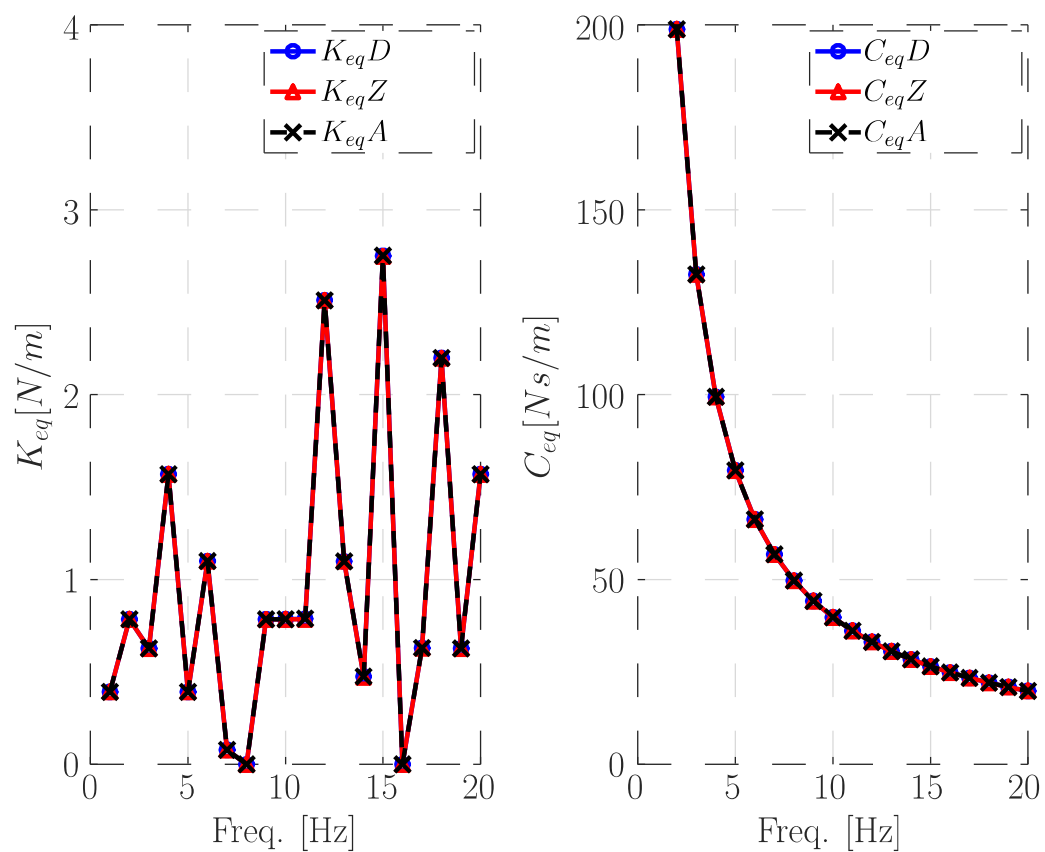
O modelo de força não linear utilizado para obtenção dos resultados apresentados nas figuras 42 e 43 apresenta característica dissipativa. Por isso, os valores da rigidez linear equivalente K_{eq} evidenciados são desprezados na composição da força equivalente f_{eq} . Estes valores de K_{eq} são apenas numéricos, que não descrevem efeitos de rigidez. Por outro lado, o parâmetro C_{eq} representa a características dissipativas do atuador em modo de falha, de acordo com os módulos da força quadrática f_q e de atrito f_c , que compõem a força não linear f_{nl} .

Figura 42 – Rigidez K_{eq} e amortecimento C_{eq} lineares equivalentes para amplitude $A = 0.1m$, $C = 1.5$, $\mu = 0.0001$ e frequência de excitação $0 \leq f \leq 20\text{Hz}$ devido a força quadrática.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

Figura 43 – Rigidez K_{eq} e amortecimento C_{eq} lineares equivalentes para amplitude $A = 0.1m$, $C = 0.00001$, $\mu = 10$ e frequência de excitação $0 \leq f \leq 20\text{Hz}$ devido a força de atrito.

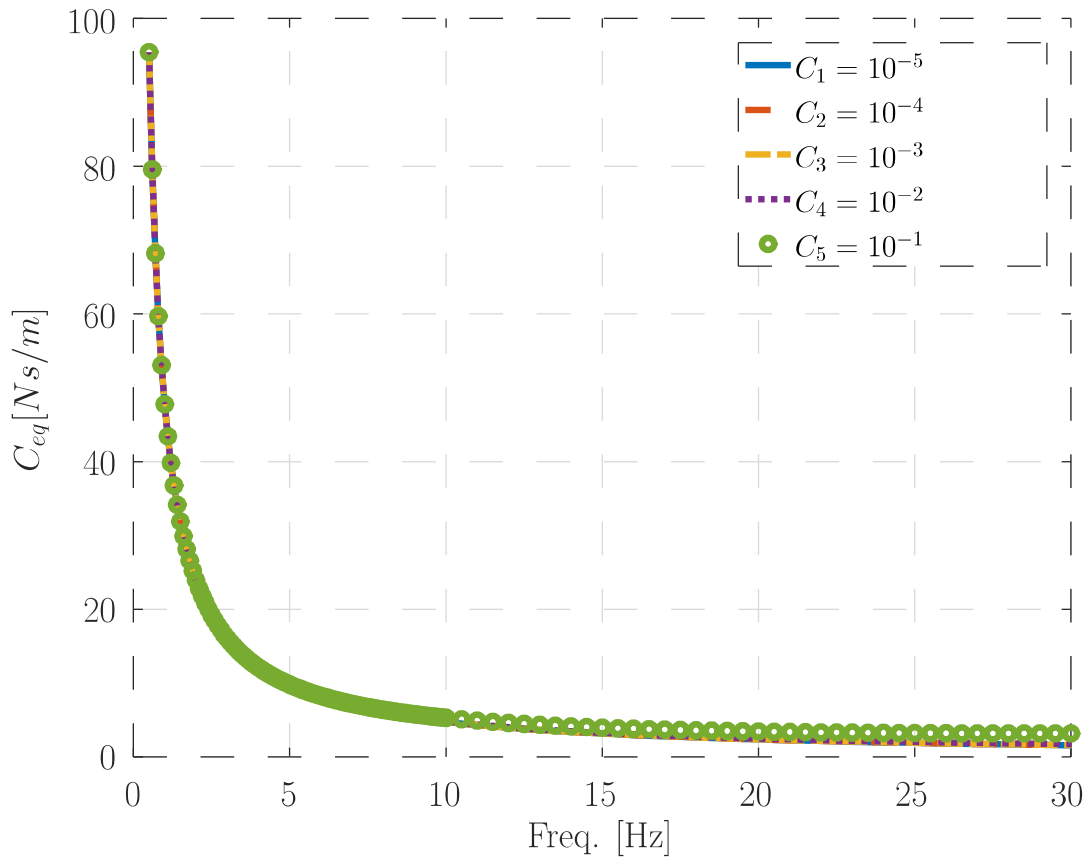


Fonte: Elaborado pelo autor, 2018.

B.2 Força de Amortecimento de Coulomb

Nesta seção exibe-se o comportamento gráfico dos parâmetros rigidez e amortecimento equivalente representados pelas variáveis K_{eq} e C_{eq} respectivamente. Considera-se a figura 44 somente a variação do parâmetro $C_{(j)}$ relacionado a força de amortecimento de Coulomb f_c . Assim, mantém-se constante a componente da força de amortecimento quadrática f_q , sendo o módulo do coeficiente de atrito dinâmico igual a $\mu = 2$. Utiliza-se ainda, os seguintes dados para a obtenção dos resultados exibidos na figura 44, amplitude do atuador $u_{amp} = 0.1m$, frequência de excitação $\omega = \pi/4 \text{ rad/s}$, e a faixa de frequência $0 < f < 30 \text{ Hz}$.

Figura 44 – Comportamento de C_{eq} para diferentes valores de C , considerando $\mu = 1, 2$ e $0 < f < 30 \text{ Hz}$.

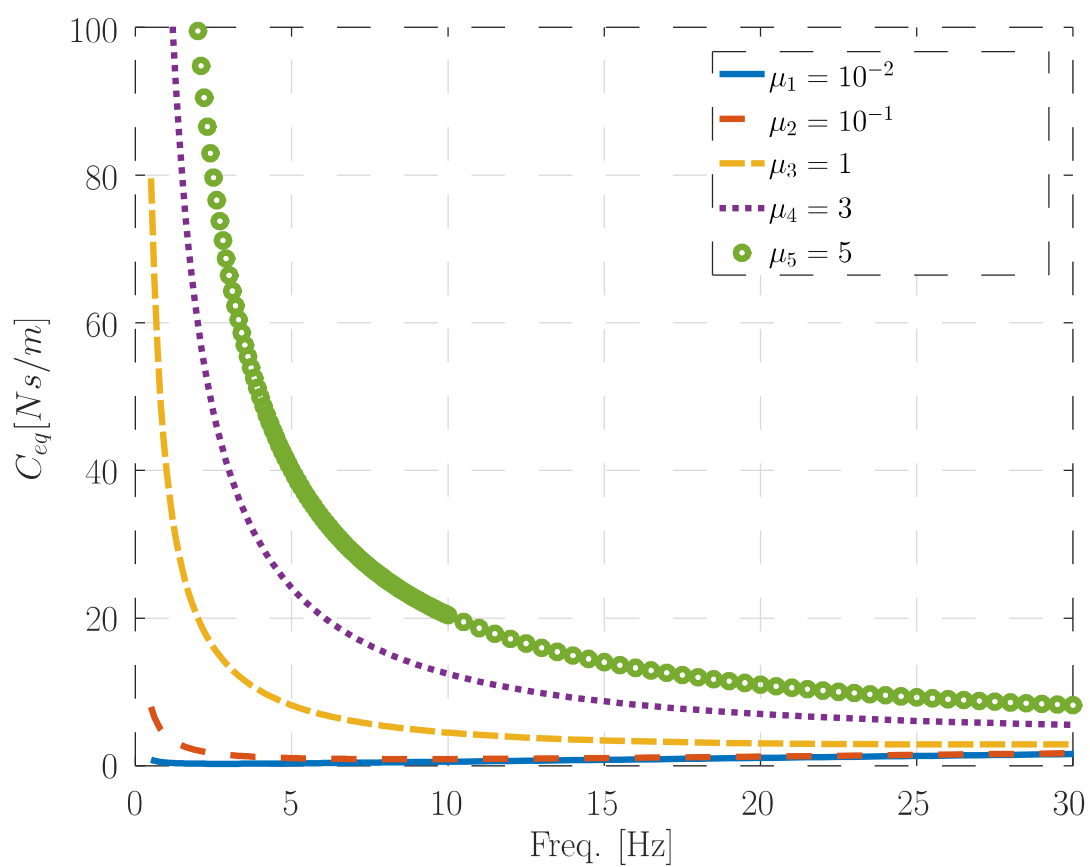


Fonte: Elaborado pelo autor, 2018

B.3 Força de Amortecimento Quadrático

Nessa análise considera-se a força quadrática f_q constante e com parâmetro $C = 1.5$, e evidencia-se na figura 45 a relação entre o parâmetro C_{eq} em função da variação do coeficiente de atrito μ , para amplitude do atuador $A = 0.1$ m e frequência de excitação de $0 < f \leq 30$ Hz.

Figura 45 – Comportamento de C_{eq} para diferentes valores de μ , considerando $C = 0,1$ kg/m e $0 < f < 30$ Hz.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2018