



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Câmpus de Ilha Solteira - SP

LEONARDO CASTELLI RISTER

**REPRESENTAÇÃO DE LINHAS DE TRANSMISSÃO POR
MEIO DE EQUAÇÕES DE ESTADO CONSIDERANDO O
EFEITO DA FREQUÊNCIA E A NATUREZA
DISTRIBUÍDA DOS PARÂMETROS: APLICAÇÃO EM
ANÁLISE DE TRANSITÓRIOS ELETROMAGNÉTICOS
EM SISTEMAS DE ENERGIA ELÉTRICA**

Ilha Solteira

2024



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de Ilha Solteira - SP

LEONARDO CASTELLI RISTER

**REPRESENTAÇÃO DE LINHAS DE TRANSMISSÃO POR
MEIO DE EQUAÇÕES DE ESTADO CONSIDERANDO O
EFEITO DA FREQUÊNCIA E A NATUREZA
DISTRIBUÍDA DOS PARÂMETROS: APLICAÇÃO EM
ANÁLISE DE TRANSITÓRIOS ELETROMAGNÉTICOS
EM SISTEMAS DE ENERGIA ELÉTRICA**

Dissertação apresentada no Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista - UNESP - Câmpus de Ilha Solteira, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área do Conhecimento: Automação

PROF. Dr. SÉRGIO KUROKAWA
Orientador

Ilha Solteira
2024

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

R597r Rister, Leonardo Castelli.
Representação de linhas de transmissão por meio de equações de estado considerando o efeito da frequência e a natureza distribuída dos parâmetros: aplicação em análise de transitórios eletromagnéticos em sistemas de energia elétrica / Leonardo Castelli Rister. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2024
117 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2024

Orientador: Sérgio Kurokawa

Inclui bibliografia

1. Linhas de transmissão. 2. Transitórios eletromagnéticos. 3. Modelo Pi equivalente. 4. Elementos de circuitos elétricos. 5. representação no domínio do tempo. 6. Espaço de estados.


Amanda Sertori dos Santos

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: REPRESENTAÇÃO DE LINHAS DE TRANSMISSÃO POR MEIO DE EQUAÇÕES DE ESTADO CONSIDERANDO O EFEITO DA FREQUÊNCIA E A NATUREZA DISTRIBUÍDA DOS PARÂMETROS: APLICAÇÃO EM ANÁLISE DE TRANSITÓRIOS ELETROMAGNÉTICOS EM SISTEMAS DE ENERGIA ELÉTRICA


AUTOR: LEONARDO CASTELLI RISTER

ORIENTADOR: SERGIO KUROKAWA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica, área: Automação pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. SERGIO KUROKAWA (Participação Presencial)

Departamento de Engenharia Eletrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Documento assinado digitalmente
 **SERGIO KUROKAWA**
Data: 01/03/2024 16:33:47-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Prof. Dr. AMAURI GUTIERREZ MARTINS BRITTO (Participação Virtual)

Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade de Brasília - UnB

Documento assinado digitalmente
 **AMAURI GUTIERREZ MARTINS BRITTO**
Data: 04/03/2024 09:59:20-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. PABLO TORREZ CABALLERO (Participação Virtual)

Universidade Federal do Acre - UFAC

Documento assinado digitalmente
 **PABLO TORREZ CABALLERO**
Data: 01/03/2024 18:37:21-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Ilha Solteira, 01 de março de 2024

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Além disso, gostaria de agradecer a minha família, amigos e orientador por sempre me apoiarem e darem base para o desenvolvimento do trabalho.

RESUMO

Modelos de linhas de transmissão desenvolvidos diretamente no domínio do tempo são de grande valia para o estudo de transitórios eletromagnéticos. Isso porque outros elementos do sistema elétrico de potência também são representados no domínio do tempo, tais como, para-raios, chaves e disjuntores. Contudo, sabe-se que os parâmetros longitudinais e transversais de uma linha de transmissão variam com a frequência. Dessa forma, na literatura científica são desenvolvidas modelagens, por meio de elementos de circuitos, que representam suas características físicas e a dependência da frequência sobre os parâmetros longitudinais, no domínio do tempo. Esses modelos, geralmente, consideram que um pequeno segmento da linha de transmissão pode ser representado por elementos discretos de circuitos. Tais modelos são denominados modelos a parâmetros discretos ou concentrados e podem levar em conta o efeito da frequência nos parâmetros longitudinais da linha. Nesse modelo, as correntes e tensões ao longo da linha de transmissão são representadas por meio de variáveis de estado, cujas soluções podem ser obtidas por meio de métodos numéricos. Uma outra maneira de representar a linha de transmissão por elementos discretos de circuitos levando em conta que os parâmetros da linha são distribuídos ao longo de seu comprimento é representando a mesma por meio de um circuito π equivalente. Esse modelo é desenvolvido diretamente no domínio do tempo, leva em conta o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais e pode ser facilmente representado em softwares de simulação do tipo EMTP (*Electromagnetic Transient Programs*). No entanto, o modelo baseado no circuito π equivalente, até o presente momento, depende de simuladores de circuitos para realizar os estudos, isso porque, apesar do modelo ter sido validado, não foram obtidas as equações que descrevem o comportamento das correntes e tensões nos terminais de uma linha de transmissão representada por tal modelo. Com o objetivo de expandir as possibilidades de utilização do modelo baseado no circuito π equivalente para representar uma linha de transmissão, este trabalho pretende descrever o circuito por meio de variáveis de estado. Assim, neste trabalho são obtidas as equações diferenciais de primeira ordem que descrevem o comportamento, diretamente no domínio do tempo, das correntes e tensões no circuito π equivalente de uma linha monofásica. A principal contribuição do trabalho, portanto, é permitir a utilização do modelo de linha de transmissão baseado no circuito π equivalente sem, necessariamente, utilizar um software para simulação de circuitos.

Palavras-chave: linhas de transmissão; transitórios eletromagnéticos; modelo π equivalente; elementos de circuitos elétricos; representação no domínio do tempo; espaço de estados.

ABSTRACT

Transmission line models developed directly in the time domain are of great value for the study of electromagnetic transients. This is because other elements of the electrical power system are also represented in the time domain, such as lightning rods, switches and circuit breakers. However, it is known that the longitudinal and transverse parameters of a transmission line vary with frequency. Thus, in the scientific literature models are developed using circuit elements, which represent their physical characteristics and the dependence of frequency on longitudinal parameters, in the time domain. These models generally consider that a small segment of the transmission line can be represented by discrete circuit elements. Such models are called discrete or lumped parameter models and can take into account the effect of frequency on the longitudinal parameters of the line. In this model, the currents and voltages along the transmission line are represented by means of state variables, whose solutions can be obtained by means of numerical methods. Another way to represent the transmission line by discrete elements of circuits, taking into account that the parameters of the line are distributed along its length, is to represent it by means of an equivalent circuit π . This model is developed directly in the time domain, takes into account the effect of frequency on the longitudinal parameters and can be easily represented in EMTP simulation software (*Electromagnetic Transient Programs*). However, the model based on the π equivalent circuit, so far, depends on circuit simulators to carry out the studies, because, despite the model having been validated, the equations that describe the behavior of the currents and voltages at the terminals of a transmission line represented by such a model. With the objective of expanding the possibilities of using the model based on the circuit π equivalent to represent a transmission line, this work intends to describe the circuit through state variables. Thus, in this work, first order differential equations are obtained that describe the behavior, directly in the time domain, of the currents and voltages in the π equivalent circuit of a single-phase line. The main contribution of the work, therefore, is to allow the use of the transmission line model based on the equivalent π circuit without necessarily using software for circuit simulation.

Keywords: transmission lines; electromagnetic transients; equivalent model π ; elements of electric circuit; modeling in time domain; state-space.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Representação genérica da linha de transmissão.	16
Figura 2	Representação do condutor cilíndrico e sua imagem.	21
Figura 3	Representação da linha de transmissão monofásica.	22
Figura 4	Resistência interna do condutor variando com a frequência.	23
Figura 5	Indutância interna do condutor variando com a frequência.	23
Figura 6	Indutância externa da linha de transmissão.	24
Figura 7	Resistência devido ao efeito do solo variando com a frequência.	24
Figura 8	Indutância devido ao efeito do solo variando com a frequência.	25
Figura 9	Capacitância da linha de transmissão.	25
Figura 10	Representação da linha de transmissão monofásica e do seguimento Δx	27
Figura 11	Representação do circuito π	28
Figura 12	Representação da linha de transmissão por uma cascata de circuitos π . .	30
Figura 13	Representação das impedâncias Z_0 a Z_m	32
Figura 14	Representação da linha de transmissão por um circuito π considerando o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais.	33
Figura 15	Processo de obtenção do modelo π equivalente.	35
Figura 16	Circuito π equivalente no domínio da frequência.	36
Figura 17	Representação da função parcial real por meio de elementos de circuitos.	38
Figura 18	Representação da função parcial complexa por meio de elementos de circuitos.	38
Figura 19	Circuito π equivalente no domínio do tempo e considerando o efeito da frequência nos parâmetros longitudinais.	39
Figura 20	Representação genérica do circuito π equivalente por elementos de circuitos	41
Figura 21	Representação genérica das parcelas que compõem os ramos.	41
Figura 22	Representação genérica destacando o emissor do modelo.	42
Figura 23	Representação genérica do ramo RL conectado ao emissor.	42
Figura 24	Representação genérica do ramo RLC conectado ao emissor.	43
Figura 25	Análise do capacitor do ramo RLC genérico.	43
Figura 26	Representação genérica destacando o ramo longitudinal e receptor do modelo.	45
Figura 27	Representação genérica do ramo RL longitudinal e RL do receptor . . .	45

Figura 28	Representação genérica do ramo RLC longitudinal e RL do receptor . . .	46
Figura 29	Representação o parcial do circuito π a partir de ramos RL	47
Figura 30	Representação o parcial do circuito π a partir de ramos RLC e RL . . .	48
Figura 31	Representação o parcial do circuito π a partir de ramos RL e RLC . . .	50
Figura 32	Representação o parcial do circuito π a partir de ramos RLC	51
Figura 33	Representação de dois ramos RL longitudinais	53
Figura 34	Representação de um ramo RLC e um RL longitudinais	54
Figura 35	Representação de dois ramos RLC longitudinais	55
Figura 36	Representação de dois ramos RL no receptor	56
Figura 37	Representação de um ramo RLC e um RL no receptor	57
Figura 38	Representação de dois ramos RLC no receptor	57
Figura 39	Representação do circuito π equivalente utilizando dois ramos	59
Figura 40	Modelo π equivalente descrito por elementos de circuitos utilizando 5 polos.	83
Figura 41	Tensão no receptor da linha utilizando 5 polos e uma entrada em degrau.	84
Figura 42	Tensão no receptor da linha utilizando 7 polos e uma entrada em degrau.	86
Figura 43	Tensão no receptor da linha utilizando 9 polos e uma entrada em degrau.	88
Figura 44	Tensão no receptor utilizando 5, 7, 9 polos e JMarti para uma entrada em degrau.	89
Figura 45	Representação genérica da linha de transmissão.	89
Figura 46	Tensão no receptor da linha utilizando 15 polos e uma entrada senoidal.	92
Figura 47	Tensão no receptor da linha utilizando 15 polos e uma entrada em degrau.	92
Figura 48	Tensão no receptor da linha utilizando 15 polos e uma entrada em degrau.	93
Figura 49	Tensão no receptor da linha utilizando 15 polos e uma descarga atmos- férica.	94

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Parâmetros dos ramos reais para o circuito com 5 polos.	83
Tabela 2	Parâmetros dos ramos complexos para o circuito com 5 polos.	84
Tabela 3	Parâmetros dos ramos reais para o circuito com 7 polos.	85
Tabela 4	Parâmetros dos ramos complexos para o circuito com 7 polos.	85
Tabela 5	Parâmetros dos ramos reais para o circuito com 9 polos.	87
Tabela 6	Parâmetros dos ramos complexos para o circuito com 9 polos.	87
Tabela 7	Parâmetros dos ramos reais para o circuito com 15 polos transversais e 30 polos longitudinais.	90
Tabela 8	Parâmetros dos ramos complexos para o circuito com 15 polos transver- sais.	91
Tabela 9	Parâmetros dos ramos complexos para o circuito com 15 polos longitu- dinais.	91

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	PARÂMETROS DA LINHA DE TRANSMISSÃO	16
2.1	Introdução	16
2.2	Parâmetros longitudinais	16
2.2.1	Resistência e indutância interna	17
2.2.2	Indutância externa	18
2.2.3	Resistência e indutância devido ao efeito do solo	19
2.3	Parâmetros transversais	20
2.3.1	Condutância	20
2.3.2	Capacitância	20
2.4	Comportamento dos parâmetros de uma linha de transmissão monofásica	22
2.5	Síntese do capítulo	26
3	MODELOS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO	27
3.1	Introdução	27
3.2	Representação da linha por cascata de circuitos π desconsiderando o efeito da frequência	27
3.3	Representação da linha por cascata de circuitos π considerando o efeito da frequência	32
3.4	Representação da linha de transmissão por meio do circuito π equivalente	34
3.5	Síntese do capítulo	39
4	REPRESENTAÇÃO DO CIRCUITO π EQUIVALENTE POR VARIÁVEIS DE ESTADO	40
4.1	Introdução	40
4.2	Descrição do circuito π equivalente	40
4.3	Análise do ramo emissor do circuito π equivalente	42

4.4	Análise do ramo longitudinal e receptor do circuito π equivalente	45
4.4.1	Equações dos ramos RL longitudinais e do receptor	47
4.4.2	Equações dos ramos RL e RLC longitudinais e do receptor	48
4.4.3	Equações dos ramos RLC longitudinais e no receptor	51
4.4.4	Equações dos ramos RL e RLC longitudinais	53
4.4.5	Equações dos ramos RL e RLC do receptor	56
4.5	Obtenção das equações de estado do circuito π equivalente considerando dois ramos	58
4.6	Obtenção das equações de corrente e tensão do circuito π equivalente	73
4.7	Síntese do capítulo	81
5	VALIDAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CORRENTE E TENSÃO DO CIRCUITO π EQUIVALENTE	82
5.1	Introdução	82
5.2	Simulações	82
5.3	Síntese do capítulo	94
6	CONCLUSÕES	95
6.1	Projeções futuras:	96
	REFERÊNCIAS	97
	APÊNDICE A - FUNÇÕES PARCIAIS	101
	APÊNDICE B - REPRESENTAÇÃO COMPUTACIONAL PARA 5 POLOS	103

1 INTRODUÇÃO

A primeira linha de transmissão de que se tem registro no Brasil foi construída por volta de 1883, na cidade de Diamantina, Minas Gerais. Essa linha transportava energia gerada em uma usina hidroelétrica, constituída de duas rodas d'água e dois dínamos Gramme, a uma distância de 2 km, aproximadamente. A energia transmitida por meio dessa linha acionava bombas hidráulicas em uma mina de diamantes. Consta que era a linha mais longa do mundo, na época. Em 1901, com a entrada em serviço da central Hidroelétrica de Santana do Parnaíba, a então *The San Paulo Tramway Light and Power Co. Ltd.* construiu as primeiras linhas de seus sistemas de 40 kV. Em 1914, com a entrada em serviço da Usina Hidroelétrica de Utopararanga, a mesma empresa introduziu o padrão 88 kV. Esse padrão de tensão foi, em seguida, adotado pela Companhia Paulista de Estradas de Ferro, Estrada de Ferro Sorocabana e, por meio desta, pela USELPA, que futuramente viria a integrar o sistema CESP. Entre 1945 e 1947, construiu-se a primeira linha de 230 kV no Brasil, com um comprimento aproximado de 330 km. Essa linha, destinada a interligar os sistemas Rio Light e São Paulo Light, operava inicialmente em 170 kV, passando, em 1950, a operar com 230 kV. Foi também a primeira interligação de dois importantes sistemas realizada no Brasil. Vieram, a partir daí, em rápida sucessão, linhas de 230 kV do sistema da Cia. Hidroelétrica de São Francisco, 161 e 345 kV da CEMIG e FURNAS, 460 kV da CESP, as linhas de 500 kV de FURNAS e 800 kV do sistema Itaipu (Charantola, 2007).

Após uma breve introdução sobre o sistema de transmissão de energia elétrica, um exame detalhado sobre linhas mostra que ondas eletromagnéticas viajantes guiadas ocorrerão em qualquer linha de transmissão aérea. Uma análise mais profunda das equações eletromagnéticas, inicialmente estudadas por Maxwell (1865), mostra que qualquer sistema com baixa perda pode ser analisado, primeiramente, especificando-se a indutância e a capacitância separadamente, assim, usando este sistema de constantes concentradas para formar uma malha. A equação diferencial que descreve esta malha prediz o efeito da onda viajante (Fuchs, 1977).

Além disso, sabe-se que uma linha de transmissão de energia elétrica possui uma característica básica que é o fato de seus parâmetros longitudinais e transversais serem distribuídos ao longo do seu comprimento. Esta característica tornam-a um elemento com certas particularidades que devem ser levadas em consideração no momento de sua representação (Marti, 1982). Além disso, os parâmetros longitudinais e transversais de uma linha de transmissão são definidos em função das características geométricas da linha, do meio que envolve seus condutores, das características elétricas e magnéticas dos condutores e do solo sobre o qual a linha foi construída (Hofmann, 2003). Todos estes fatores fazem com que os parâmetros longitudinais das linhas sejam variáveis em relação à frequência e espaço.

A representação das linhas de transmissão podem ser divididos em modelos baseado em parâmetros concentrados ou a parâmetros distribuídos. Além disso, também podem ser divididos em modelos baseados em parâmetros constantes e modelos a parâmetros dependentes da frequência. Para cada uma dessas divisões existem modelos que representam o transitório eletromagnético da linha e serão brevemente descritos adiante.

Modelos que fornecem a resposta no domínio da frequência também são usados mas, somente após a utilização de transformadas inversas de Fourier ou de Laplace, é possível obter a resposta no domínio do tempo. Lembrando que a transformada de Laplace, diferentemente da transformada de Fourier, pode ser usada para analisar sistemas instáveis; ou seja, a transformada de Fourier gera apenas uma linha de números, não um mapa, como Laplace. Além disso, outra desvantagem de modelos de linhas desenvolvidos no domínio da frequência é que tais modelos dificultam a inclusão de elementos não lineares (tais como para-raios, chaves e disjuntores) no sistema. Modelos desenvolvidos no domínio da frequência normalmente não são amplamente utilizados nos mais reconhecidos softwares de simulações de transitórios eletromagnéticos em sistemas de energia elétrica, tais como o programa de transitórios eletromagnéticos (EMTP), que é desenvolvido diretamente no domínio do tempo (Caballero, 2014).

Contudo, como as linhas de transmissão estão inseridas em um sistema elétrico que possui diversos elementos não lineares e, dessa forma, são de difícil representação no domínio da frequência, dá-se preferência por modelos de linhas que são desenvolvidos diretamente no domínio do tempo (Marti, 1988). Outro fato que faz com que os modelos de linhas desenvolvidos diretamente no domínio do tempo sejam mais utilizados é que a maioria dos programas que realizam simulações de transitórios eletromagnéticos em sistemas elétricos requer que os componentes do sistema estejam representados no domínio do tempo.

Um exemplo de aplicação de modelos de linhas no domínio do tempo é observando quando faz-se uma análise conjunta a outros elementos do circuito de transmissão e distribuição. Ou seja, sabendo que os transformadores de potência devem ter um nível de isolamento adequado para suportar os esforços elétricos provenientes da rede (Mombello; Portillo; Flórez, 2021). Além disso, para o transformador, a modelagem caixa branca onde o modelo implementado considera umas série de detalhes e, conseqüentemente, traz mais confiabilidade para as simulação, pelo fato de ser mais completo (Jazebi *et al.*, 2016) que é dado na forma de espaço de estados e modelado o amortecimento através de fatores empíricos (Mombello; Portillo; Flórez, 2021).

Dentre os diversos modelos de linha de transmissão desenvolvidos diretamente no domínio do tempo, estão os modelos que utilizam elementos discretos de circuitos para representar

a linha. Nestes modelos, considera-se que um pequeno segmento de linha pode ser representado por um circuito π . Estes modelos são conhecidos como à parâmetros discretos. Então, uma linha de transmissão é representada por circuitos π conectados em cascata (Yamanaka; Kurokawa; Prado, 2004).

Os modelos mais destacados que consideram a variação dos parâmetros com a frequência são o modelo Marti (1988) e o *Universal Line Model* (ULM). O modelo JMarti usa uma matriz de formação constante para desacoplar o modelo de fase em modos, ou seja, domínio modal. Os modos são independentes uns dos outros como se fossem circuitos desacoplados monofásicos. A matriz de transformação pode ser assumida como constante, exceto nas situações que envolvem baixas frequências. Já o modelo *Universal Line Model* é formulado no domínio das fases e pode ser aplicado a qualquer tipo de configuração de linha, mesmo quando a linha está associada a uma matriz de transformação muito dependente da frequência e quando os tempos de propagação modal são diferentes (Eraso, 2019).

A representação da linha por meio de variáveis de estado pode ser utilizada no ensino de conceitos básicos de propagação de ondas em linhas de transmissão (Kurokawa *et al.*, 2007; Freitas; Kurokawa; Pissolato, 2008; Yamanaka, 2009), na análise da distribuição de correntes e tensões ao longo da linha e na simulação de transitórios eletromagnéticos em linhas de transmissão que tenham elementos não lineares (Mamis, 2003). Os métodos atuais de análise temporal modelam o circuito por uma equação diferencial de primeira ordem (Martinez-Marin, 2010) que, por sua vez, relaciona as variáveis de entrada do modelo com os estados e, assim, combinando os estados com as variáveis de entrada obtêm-se a saída. Essas análises envolvem a derivada da corrente no indutor e a derivada da tensão no capacitor.

Outro modelo de linha de transmissão, no domínio do tempo, que utiliza elementos discretos de circuitos foi proposto por Balestero (2022). Este modelo leva em conta o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais e considera que os parâmetros são distribuídos ao longo da linha de transmissão. A vantagem dessa modelagem, em comparação com a representação da linha de transmissão por uma cascata de circuitos π , é que o primeiro considera a distribuição dos parâmetros longitudinais da linha ao longo de seu comprimento.

Então, o trabalho desenvolvido por Balestero (2022), propõe uma nova representação circuital de linha de transmissão para a simulação de transitórios eletromagnéticos representado diretamente no domínio do tempo. O modelo proposto constitui da sintetização do circuito π equivalente da linha de transmissão por um circuito elétrico composto por uma associação de elementos concentrados (resistor, indutor e capacitor). Assim, utiliza-se somente um único circuito π para modelar a linha de transmissão para qualquer comprimento. A nova represen-

tação de modelo pode ser usado em softwares de simulação de transitórios eletromagnéticos tais como, ATP, EMTP-RV ou PSCAD (Balestero, 2022). Porém, suas equações de estado, baseadas nas derivadas das correntes e tensões são desconhecidas.

Programas para simulações de transitórios eletromagnéticos (EMTP) são amplamente utilizadas para analisar o comportamento transitório de redes de energia. Além disso, existem muitos pacotes comerciais de simulação EMTP disponíveis hoje. Em seu nível mais básico, todo simulador EMTP resolve as equações dinâmicas de um circuito usando um método de integração numérica adequado (Sinkar *et al.*, 2021). Contudo, apesar de sua vasta aplicação, ao utilizar esses software as equações do modelo ainda não são conhecidas, como dito anteriormente. Alternativamente, uma abordagem é formular as equações do espaço de estado do circuito, o que fornece matrizes que são esparsas, tornando-o adequado para grandes sistemas.

O modelo representado pelo circuito π equivalente, proposto por Balestero (2022), foi testado, validado e pode ser implementado em softwares de simulações de circuitos elétricos. No entanto, ao contrário do que ocorre na representação da linha por meio de uma cascata de circuitos π , não foram desenvolvidas as equações que permitam calcular as correntes e tensões nos terminais da linha de transmissão, representadas pelo circuito π equivalente.

Deste modo, o trabalho pretende obter as equações que permitam calcular, diretamente no domínio do tempo, as correntes e tensões nos terminais da linha de transmissão, representada pelo circuito π equivalente. Para isso, as correntes e tensões do circuito serão descritas na forma de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, resultando em um sistema de equações de estado para o modelo representado pelo circuito π equivalente, proposto para a representação de linhas de transmissão (Rister; Balestero; Kurokawa, 2023).

Ao término do trabalho, pretende-se mostrar as regras de formação das matrizes de estado que permitam fazer uma representação genérica das linhas de transmissão monofásicas de quaisquer comprimento e em amplas faixas de frequência.

O estudo foi desenvolvida em seis capítulos e três apêndices.

O capítulo 2 analisa os parâmetros longitudinais e transversais da linha de transmissão, mostrando a maneira como são calculados e sua dependência da frequência.

O capítulo 3 descreve a representação da linha de transmissão por elementos discretos de circuitos, com e sem o efeito da frequência, e mostra também o modelo baseado no circuito π equivalente, proposto por Balestero (2022).

O capítulo 4 desenvolve um conjunto de equações diferenciais, a partir da primeira e segunda lei de Kirchhoff (Miller; Vandome; McBrewster, 2010), que descrevem o comportamento

das correntes e tensões no circuito π equivalente de modo a representarem uma linha de transmissão de energia elétrica monofásica.

O capítulo 5 traz a simulação do modelo em um software de cálculo de transitórios eletromagnéticos, como estudado por Balestero (2022), e compara-se a resposta com as equações de estado, obtidas no capítulo 4, a fim de validá-las.

O capítulo 6 apresenta as conclusões obtidas durante o trabalho.

No apêndice A é apresentado a maneira em que a impedância longitudinal da linha é aproximada por uma função racional e sua representação por elementos de circuitos.

No apêndice B é representada as equações de estado do modelo, considerando cinco polos, em formato de script para o software MATLAB. Além disso, faz-se uma correlação entre as equações, obtidas no apêndice B, e o script desenvolvido.

2 PARÂMETROS DA LINHA DE TRANSMISSÃO

2.1 Introdução

O estudo dos parâmetros elétricos de linhas de transmissão é de grande importância para as diversas áreas de sistemas elétricos de potência, envolvendo análise em regime permanente, bem como fenômenos de transitórios eletromagnéticos (Pinheiro; Tavares, 2009). Além disso, um dos aspectos importantes da modelagem de linhas está relacionado à dependência com a frequência dos parâmetros (Marti, 1982).

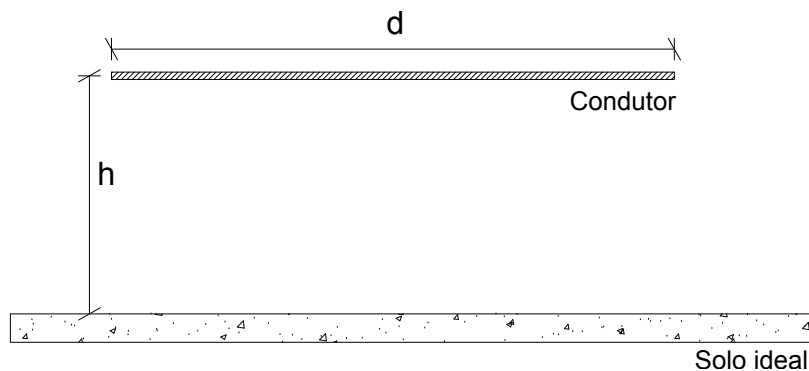
Modelos de linhas de transmissão de energia elétrica podem ser desenvolvidos no domínio do tempo ou no domínio da frequência. Os parâmetros que descrevem uma linha de transmissão são os parâmetros longitudinais e os parâmetros transversais (Kurokawa *et al.*, 2007). Esses parâmetros são a resistência (R) e indutância (L) que compõem a impedância longitudinal, capacitância (C) e condutância (G) que compõem a admitância transversal.

Neste capítulo apresenta-se como são calculados os parâmetros da linha de transmissão monofásica. Além disso, a partir das equações, demonstra-se em simulações a variação desses parâmetros em função da frequência.

2.2 Parâmetros longitudinais

A figura 1 ilustra uma representação genérica da linha de transmissão monofásica, onde d representa o comprimento da linha e h a altura entre a linha e o solo.

Figura 1 - Representação genérica da linha de transmissão.



Fonte: Autoria própria.

Com base na figura 1, é possível obter a impedância longitudinal, que é dada pela soma da impedância interna ($Z_{\text{int}}(\omega)$), impedância externa ($Z_{\text{ext}}(\omega)$) e impedância de correção devido

ao efeito do solo ($Z_{\text{solo}}(\omega)$), dada por (Hofmann, 2003):

$$Z_{\text{long}}(\omega) = Z_{\text{int}}(\omega) + Z_{\text{ext}}(\omega) + Z_{\text{solo}}(\omega) \quad [\Omega/\text{km}] \quad (1)$$

Diante da impedância longitudinal, obtém-se a resistência e indutância longitudinal, como mostra (Hofmann, 2003):

$$Z_{\text{long}}(\omega) = R_{\text{long}}(\omega) + j\omega L_{\text{long}}(\omega) \quad [\Omega/\text{km}] \quad (2)$$

dessa forma, têm-se (Hofmann, 2003):

$$R_{\text{long}}(\omega) = R_{\text{int}}(\omega) + R_{\text{solo}}(\omega) \quad [\Omega/\text{km}] \quad (3)$$

$$L_{\text{long}}(\omega) = L_{\text{int}}(\omega) + L_{\text{ext}}(\omega) + L_{\text{solo}}(\omega) \quad [\text{H}/\text{km}] \quad (4)$$

Cada parcela das equações (3) e (4) serão descritas a seguir.

2.2.1 Resistência e indutância interna

O efeito *Skin*, também conhecido como efeito pelicular, gera a impedância interna da linha de transmissão. Esse efeito caracteriza-se quando a densidade da corrente se concentra na superfície do condutor. Assim, diminuindo a densidade de corrente presente em seu interior (Chaves; Chagas, 2016). Sabe-se também que a área da seção transversal do condutor pela qual circula uma corrente elétrica diminui à medida que a frequência da corrente elétrica aumenta. A impedância interna ($Z_{\text{int}}(\omega)$) é dada por (Dommel, 1987):

$$Z_{\text{int}}(\omega) = j \frac{\omega\mu}{2\pi r m} \left[\frac{\text{ber}(mr) + j\text{bei}(mr)}{\text{ber}'(mr) + j\text{bei}'(mr)} \right] \quad [\Omega/\text{km}] \quad (5)$$

onde, $\omega = 2\pi f$ [rad/s] é a frequência angular, f [Hz] é a frequência da corrente alternada, μ [H/km] é a permeabilidade do condutor ($\mu = \mu_r \mu_0$), sendo $\mu_r \approx 1$ para condutores metálicos e μ_0 é permeabilidade magnética no vácuo $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-4}$ [H/km] e r [m] é o raio do condutor.

A constante de propagação m é dada por (Stevenson, 1978):

$$m = \sqrt{j\omega\sigma\mu} \quad [m] \quad (6)$$

sendo σ a condutividade do material [Ω/m].

Os termos $\text{ber}(u)$ e $\text{bei}(u)$ são funções de Bessel modificadas, também conhecidas como funções de Kelvin, e $\text{ber}'(u)$ e $\text{bei}'(u)$ correspondes as suas derivadas, definidas pelas seguintes

equações (Stevenson, 1978):

$$ber(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{m}{2}\right)^{2k}}{k!\Gamma(k+1)} \cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right) \quad (7)$$

$$bei(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{m}{2}\right)^{2k}}{k!\Gamma(k+1)} \sen\left(\frac{2k\pi}{4}\right), \quad (8)$$

$$ber'(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k\left(\frac{m}{2}\right)^{2k-1}}{k!\Gamma(k+1)} \cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right), \quad (9)$$

$$bei'(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k\left(\frac{m}{2}\right)^{2k-1}}{k!\Gamma(k+1)} \sen\left(\frac{2k\pi}{4}\right). \quad (10)$$

Onde a função gama (Γ) é dada por:

$$\Gamma(k) = (k-1)! \quad (11)$$

Nota-se que, a partir da equação (5), a parte real representa a resistência interna e a parte imaginária representa a indutância interna, conforme:

$$Z_{\text{int}} = R_{\text{int}}(\omega) + j\omega L_{\text{int}}(\omega) \quad [\Omega/km] \quad (12)$$

2.2.2 Indutância externa

A impedância externa surge devido ao campo magnético presente no ar que envolve os condutores. Essa impedância é produzida pelas correntes que percorrem longitudinalmente os condutores e seu cálculo é dado em função da geometria e características físicas, além do meio ao qual a linha está inserida.

A impedância externa ($Z_{\text{ext}}(\omega)$) é dada por (Martinez-Velasco, 2009):

$$L_{\text{ext}}(\omega) = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{2h}{r}\right) \quad [H/km] \quad (13)$$

sendo, r o raio [m] do condutor cilíndrico e h [m] a altura do condutor em relação ao solo. A permeabilidade magnética do ar é considerada igual à permeabilidade magnética do vácuo ($\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-4}$ [H/km]).

Considerando o solo com condutividade infinita, tem-se que a resistência externa ($R_{\text{ext}}(\omega)$) é zero, dessa forma, a impedância externa é formada somente pela parte imaginária (indutância),

é dada por (Martinez-Velasco, 2009):

$$Z_{\text{ext}}(\omega) = j\omega L_{\text{ext}} \quad [\Omega/\text{km}] \quad (14)$$

2.2.3 Resistência e indutância devido ao efeito do solo

Assim como o meio, uma vez que o solo sob o qual a linha de transmissão está disposto não é ideal, deve-se considerar que o mesmo possui uma impedância resultante da interação entre o condutor e o solo.

O problema da propagação de campos eletromagnéticos ao longo de uma linha de transmissão composta por um único condutor aéreo foi inicialmente estudada por Carson (1926). As formulações propostas por Carson partiram de um princípio onde algumas suposições ou limitações foram utilizadas pois, o problema da propagação de ondas por um fio aéreo paralelo à superfície plana da terra, apesar de sua grande importância técnica, não parecia ter sido resolvido satisfatoriamente. Embora uma solução completa do problema atual seja impossível, devido às desigualdades na superfície da Terra e sua falta de homogeneidade condutiva, a solução do problema, onde a terra real é substituída por um plano sólido semi-infinito homogêneo, é de considerável interesse teórico e prático (Carson, 1926). Porém, apesar das aproximações, há precisão em frequências até 1 MHz para os parâmetros concentrados, que dependem da configuração de condutores na torre, características do solo, dimensões do circuito e comprimento de onda (Gertrudes; Tavares; Portela, 2011). Contudo, como o estudo compreenderá a faixa de frequência entre 0,01 Hz e 1 MHz, as equações de Carson poderão ser aplicadas. A impedância devido ao efeito do solo ($Z_{\text{solo}}(\omega)$) é dada por (Carson, 1926):

$$Z_{\text{solo}}(\omega) = j \frac{\omega \mu_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2h\lambda}}{\sqrt{\lambda^2 + j\omega \mu_0 \sigma_{\text{solo}} + \lambda}} d\lambda \quad [\Omega/\text{km}] \quad (15)$$

onde, σ_{solo} [S/m] é a condutividade do solo, h [m] é a altura do condutor em relação ao solo.

A partir da equação (15), observa-se que a parte real representa a resistência devido ao efeito do solo e a parte imaginária representa a indutância devido ao efeito do solo, sendo assim (Carson, 1926):

$$Z_{\text{solo}} = R_{\text{solo}}(\omega) + j\omega L_{\text{solo}}(\omega) \quad [\Omega/\text{km}] \quad (16)$$

2.3 Parâmetros transversais

A admitância transversal é calculada pela junção da capacitância (C) com a condutância (G), dada como (Fuchs, 1977):

$$Y(\omega) = G + j\omega C \quad [S/km] \quad (17)$$

Cada parcela de (17) será apresentada posteriormente.

Nota-se que, Maxwell percebeu a relação entre a corrente e variação temporal de fluxo elétrico e esse termo foi dado o nome de corrente de deslocamento (Maxwell, 1865). Ou seja, corrente de deslocamento é taxa de variação do fluxo do vetor deslocamento elétrico. Esta corrente flui através das capacitâncias transversais que estão distribuídas ao longo do comprimento da linha. A amplitude da corrente no emissor. Verifica-se também que a corrente oscila indefinidamente devido ao fato da linha ser uma linha sem perdas.

2.3.1 Condutância

A condutância (G) representa a facilidade com que a corrente elétrica flui por um condutor, e está relacionada às fugas de corrente que ocorrem nos isoladores e no ar ionizado. Com a aplicação de tensão alternada, ocorre um fluxo de cargas entre os condutores ou entre o condutor e o solo, referentes aos valores instantâneos das diferenças de potencial. Esse fluxo de cargas, que ocorre num processo de carregamento e descarregamento cíclico das linhas, recebe o nome de corrente de carga (Zanetta, 2006). Essa corrente de carga é quase insignificante em linhas aéreas curtas, mas pode atingir valores mais elevados em linhas longas. Portanto, é conveniente que não seja desprezada para a análise de linhas longas (Fuchs, 1977).

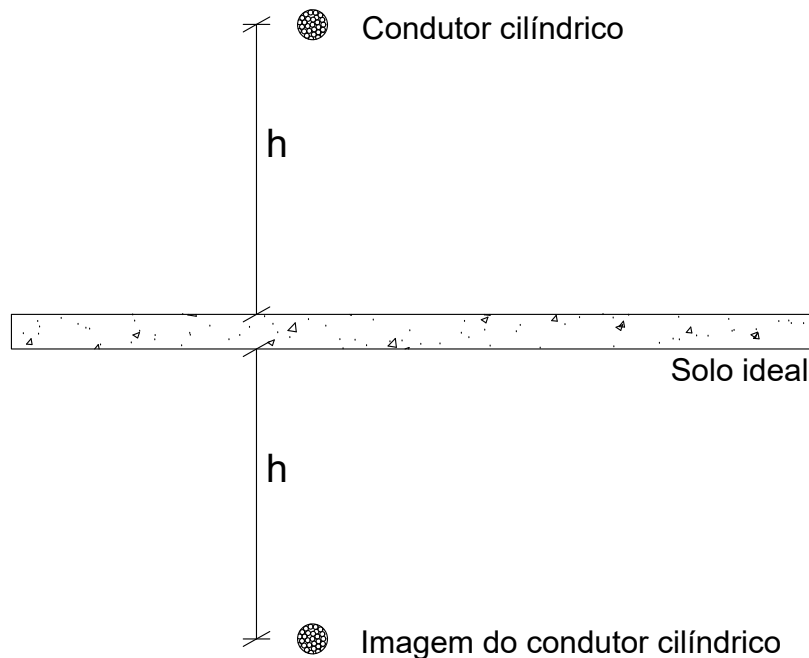
As linhas de transmissão podem ser curtas, médias ou longas, se tiverem comprimentos até 80 km, entre 80 km e 240 km e maiores que 240 km, respectivamente. No caso de linhas aéreas curtas e médias, ou seja, abaixo de 240 km, considera-se a condutância do ar desprezível, ou seja, $G(\omega) \approx 0$.

2.3.2 Capacitância

A capacitância (C), representam os elementos da linha de transmissão que estão entre a fase e a terra. Sabe-se que o condutor cilíndrico, eletricamente carregado, com carga Q_0 irá induzir uma carga $-Q_0$ no solo. Deste modo, o sistema mostrado na figura 2 é constituído por dois condutores carregados com cargas opostas e separados por um dielétrico, o ar. Ou seja, temos a

definição de um capacitor.

Figura 2 - Representação do condutor cilíndrico e sua imagem.



Fonte: Autoria própria.

Para determinar a capacitância será utilizado o método das imagens. Deste modo, o solo será substituído por uma superfície equipotencial e um condutor imagem, localizado a uma altura (h) da superfície equipotencial. Considera-se que as cargas do condutor cilíndrico e do condutor imagem sejam iguais em módulo e com sinais contrários.

Fisicamente, o fato do plano ter carga total igual a $-Q_0$ implica que todas as linhas de campo que emanam de Q_0 devem terminar no plano e ao deslocarmos a carga Q_0 , as cargas induzidas no plano também devem se deslocar. Além disso, a carga Q_0 produz um campo elétrico radial ao condutor com superfícies equipotenciais concêntricas ao condutor. De acordo com a lei de Gauss, o fluxo elétrico total que sai de uma superfície fechada é igual ao carga total dentro do volume delimitado pela superfície (Grigsby *et al.*, 2001).

A capacitância entre o condutor e o solo é definida como sendo:

$$C = \frac{Q}{V} \quad [F/km] \quad (18)$$

onde, Q é a carga do condutor cilíndrico e V é a diferença de potencial entre o solo e o condutor cilíndrico, ou seja, a diferença de potencial V é o trabalho necessário para levar uma carga pontual unitária positiva de um ponto B, localizado sobre o solo, até um ponto A, localizado na

superfície do condutor cilíndrico. Esse trabalho é representado por (Maxwell, 1865):

$$V = - \oint_B^A E dL \quad [F/km] \quad (19)$$

onde, E é o vetor campo elétrico e dL corresponde ao elemento vetorial diferencial do comprimento tangencial à curva de deslocamento.

Após o cálculo da diferença de potencial V , substitui-se em (18) o valor encontrado em (19) para obter a capacitância entre o condutor e o solo. Com isso, tem-se (Martinez-Velasco, 2009):

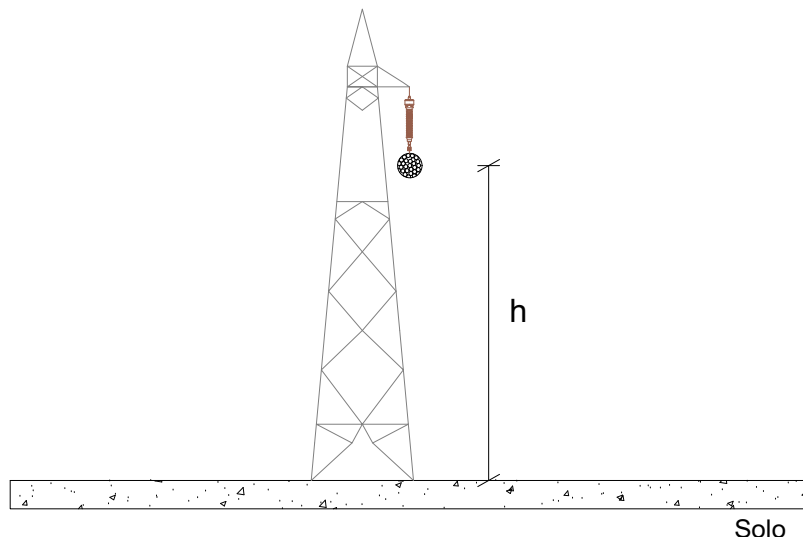
$$C = 2\pi\epsilon_0 \left[\ln \left(\frac{2h}{r} \right) \right]^{-1} \quad [F/km] \quad (20)$$

onde, ϵ_0 é a permissividade do vácuo $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} \times 10^{-6}$ [F/km].

2.4 Comportamento dos parâmetros de uma linha de transmissão monofásica

Para uma linha de transmissão monofásica, vide figuras 1 e 3, constituída por um condutor com 10 mm de raio, a uma altura de 10 m em relação ao solo, comprimento de 100 km e condutividade do material do condutor igual a $3,82 \times 10^7 \Omega.m^{-1}$, observa-se o comportamento dos parâmetros, a uma faixa de frequência compreendida entre 0,01 Hz e 1 MHz.

Figura 3 - Representação da linha de transmissão monofásica.

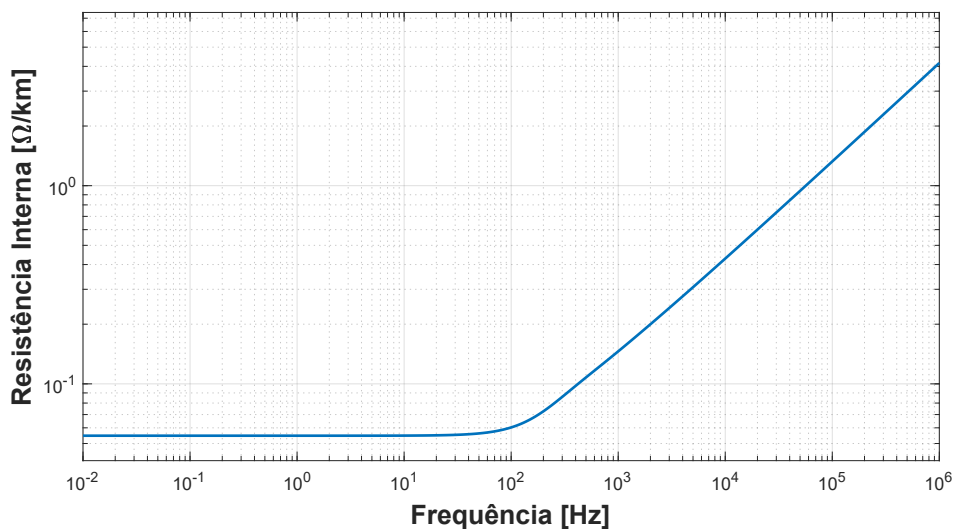


Fonte: Autoria própria.

As primeiras simulações são referentes a resistência e indutância interna, obtidas a partir das funções de Kelvin, oriundas das equações de Bessel, como mostrado nas equações (5) e (12) e mostradas nas figuras 4 e 5.

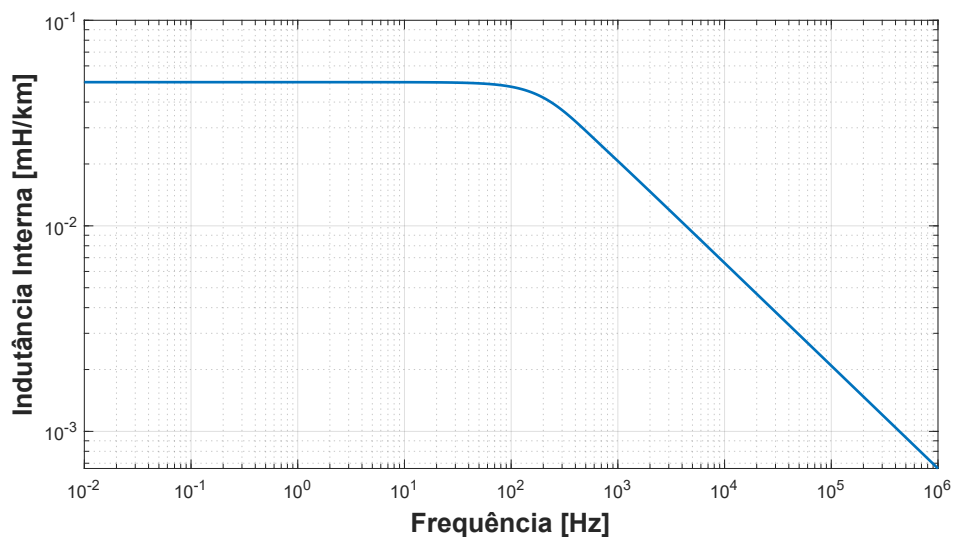
A partir das figuras 4 e 5, nota-se que os valores alteram-se exponencialmente a partir de

Figura 4 - Resistência interna do condutor variando com a frequência.



Fonte: Autoria própria.

Figura 5 - Indutância interna do condutor variando com a frequência.



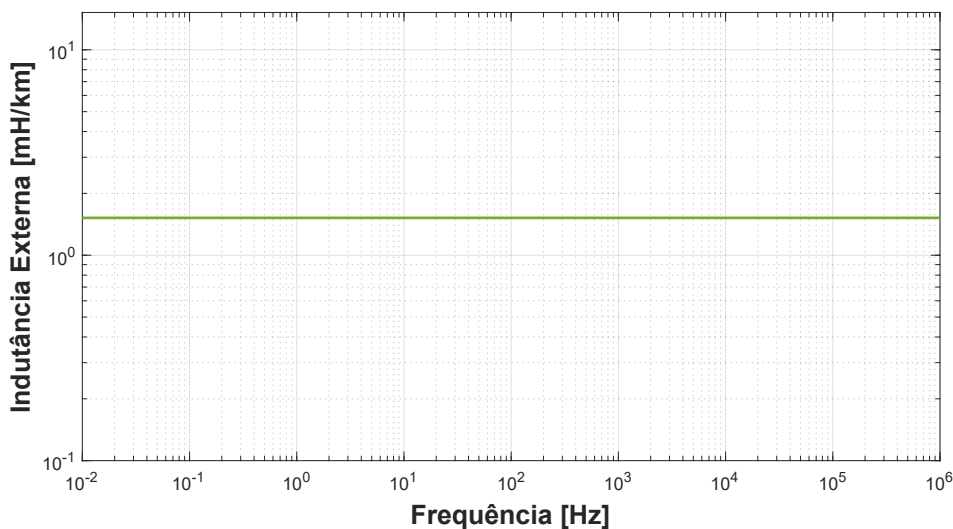
Fonte: Autoria própria.

uma frequência de 100 Hz. Na figura 4, com o aumento da frequência, o valor da resistência interna aumenta. Em contraponto, na figura 5, a medida que a frequência aumenta a indutância interna do condutor diminui. Além disso, nota-se que, tanto a resistência interna quanto a indutância interna, até uma frequência de 10^2 Hz seus valores são praticamente constante.

Já a indutância externa de uma linha monofásica, que é calculada a partir das equações (13) e (14), comporta-se como é representado na figura 6.

A partir da figura 6, verifica-se que indutância externa é um parâmetro constante, ou seja,

Figura 6 - Indutância externa da linha de transmissão.

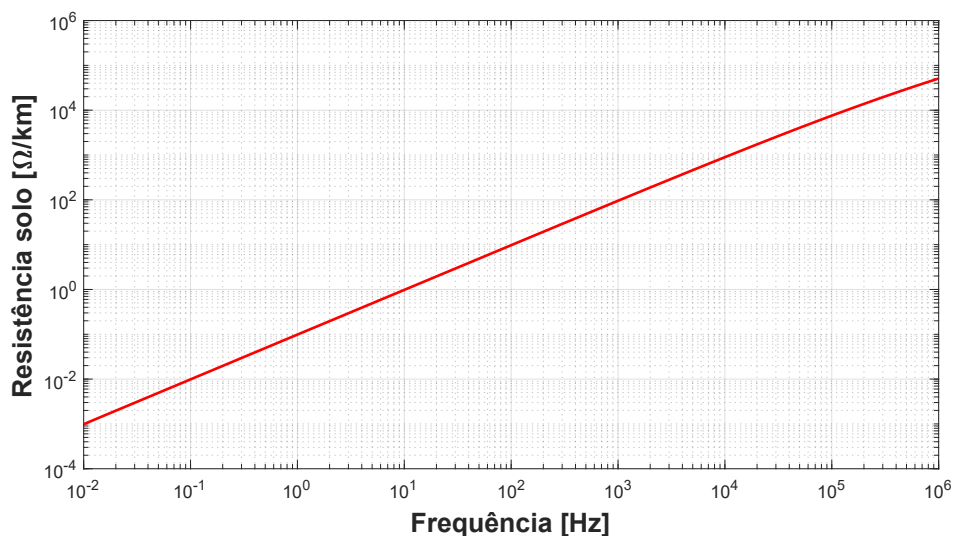


Fonte: Autoria própria.

seu cálculo é em função somente da altura do condutor em relação ao solo e do raio do condutor cilíndrico.

As simulações seguintes são realizadas para a resistência e indutância devido ao efeito do solo, calculadas como apresentado nas equações (15) e (16).

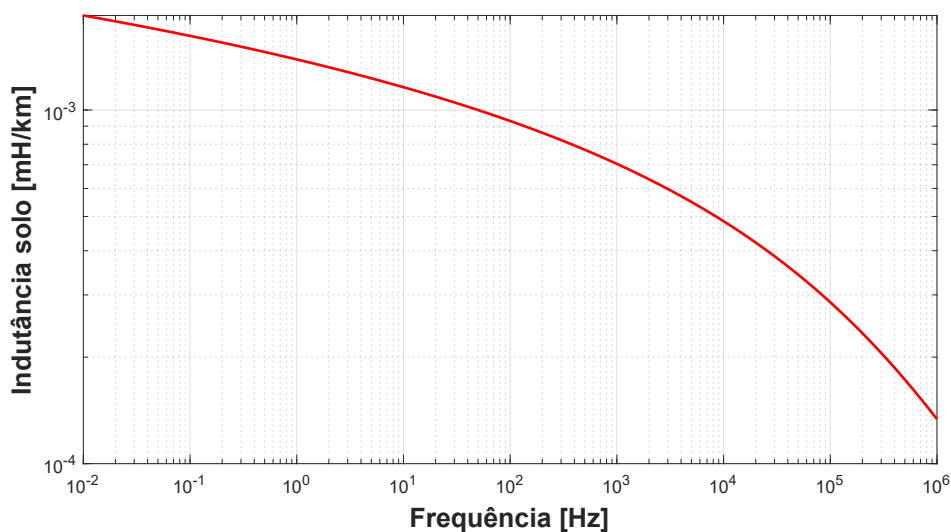
Figura 7 - Resistência devido ao efeito do solo variando com a frequência.



Fonte: Autoria própria.

Conforme figura 7, verifica-se que a resistência devido ao efeito do solo cresce com o aumento da frequência. Porém, diferente da resistência interna, a resistência devido ao efeito do solo cresce a partir da frequência inicial, ou seja, 0,01 Hz.

Figura 8 - Indutância devido ao efeito do solo variando com a frequência.

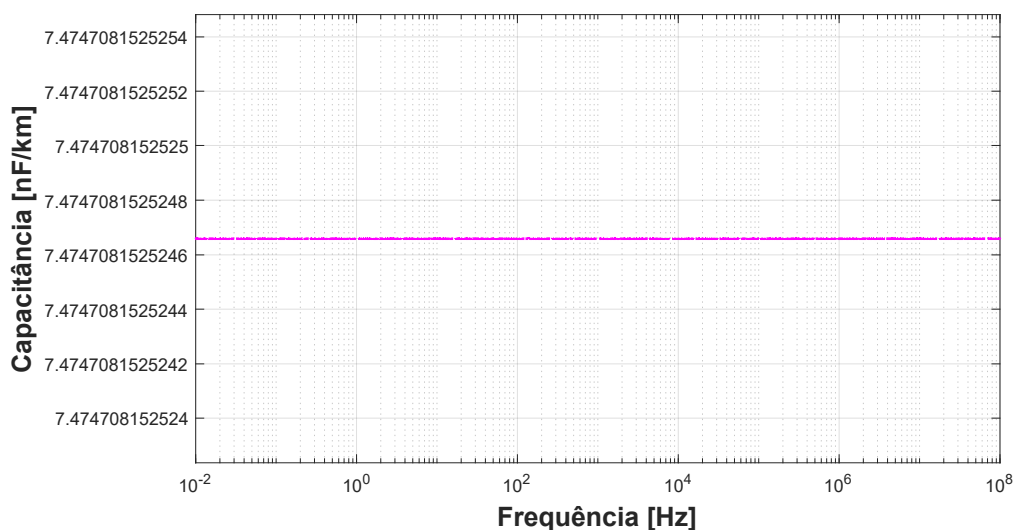


Fonte: Autoria própria.

A indutância devido ao efeito do solo, mostrada na figura 8, decresce com o aumento da frequência, da mesma maneira que aconteceu com a indutância interna. Em contrapartida, a indutância interna tem valor próximo de ser constante entre 0,01 e 100 Hz, enquanto a indutância devido ao efeito do solo cresce a partir da frequência inicial, ou seja, 0,01 Hz.

Por fim é realizada a simulação para a capacitância da linha, calculada em (20) e apresentada na figura 9.

Figura 9 - Capacitância da linha de transmissão.



Fonte: Autoria própria.

A partir da figura 9, nota-se que a a capacitância transversal da linha é um parâmetro cons-

tante. Observando a equação (20), percebe-se que a altura da linha e o meio onde a mesma está inserida alteram o valor da capacitância. Ou seja, quanto maior a altura da linha de transmissão, mais material dielétrico têm entre a mesma e o solo, então, menor a capacitância.

2.5 Síntese do capítulo

Nesse capítulo mostrou-se que os parâmetros da linha de transmissão podem ser divididos em longitudinais e transversais. Com isso, observou-se que o campo magnético, a altura do condutor em relação ao solo, o meio, o material do condutor e o solo interferem diretamente nesses parâmetros que, também variam com a frequência.

Por conta disso e, como visto nas equações (1) e (17), os efeitos da frequência nos parâmetros da linha se somam. Portanto, para o estudo de transitórios eletromagnéticos em linhas de transmissão, deve-se incluir o efeito da frequência. Essa afirmação confirma-se observando as figuras 4 a 9.

3 MODELOS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO

3.1 Introdução

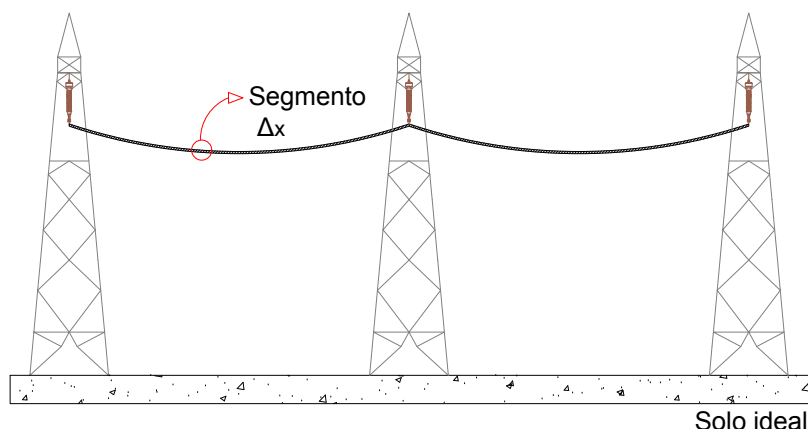
Os modelos de linhas de transmissão de energia elétrica podem ser desenvolvidos no domínio do tempo ou no domínio da frequência. No entanto, o sistema elétrico no qual as linhas de transmissão estão inseridas possui diversos elementos não lineares, dificultando, deste modo, a representação do sistema elétrico no domínio da frequência (Marti, 1988). Uma outra vantagem dos modelos que representam a linha diretamente no domínio do tempo é que são facilmente implementados em programas do tipo EMTP (*Eletromagnetic Transient Programs*), que são programas que realizam simulações de transitórios eletromagnéticos em sistemas de potência (Diefenthaler, 2019).

Nesse capítulo, são apresentados três modelos encontrados na literatura que representam as linhas de transmissão a parâmetros concentrados por meio de circuitos π , diretamente no domínio do tempo.

3.2 Representação da linha por cascata de circuitos π desconsiderando o efeito da frequência

Conforme mostrado no capítulo 2, uma linha de transmissão é caracterizada por ter seus parâmetros longitudinais e transversais distribuídos ao longo de seu comprimento. Apesar disso, é possível considerar, de maneira aproximada, que um pequeno segmento de linha (Δx) seja representado por elementos concentrados de circuitos (Dou *et al.*, 2020), como mostra a figura 10 que é ilustrativa; isso porque, para a representação em questão, considera-se uma linha homogênea e paralela ao solo.

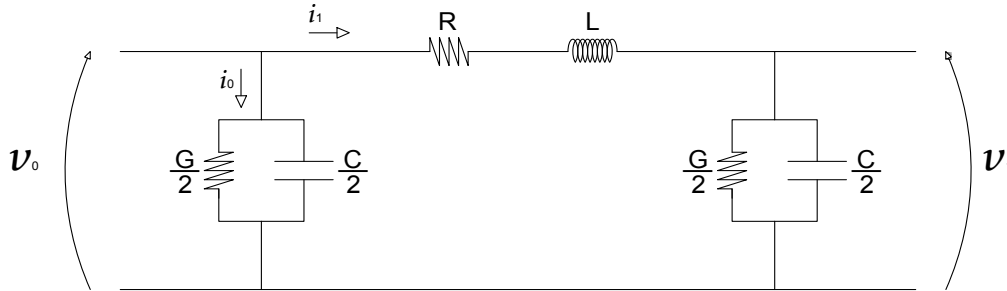
Figura 10 - Representação da linha de transmissão monofásica e do segmento Δx



Fonte: Autoria própria.

Assim, se o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais da linha for desconsiderado, um pequeno segmento de linha pode ser representado pelo circuito π , mostrado na figura 11.

Figura 11 - Representação do circuito π .



Fonte: Autoria própria.

Além disso, o sistema pode ser representado em espaço de estados. Uma vantagem dos métodos do espaço de estados é que eles também podem ser utilizados para sistemas que não podem ser descritos por equações diferenciais lineares. Além disso, os métodos do espaço de estados são utilizados para modelar sistemas para simulação em computadores digitais. Basicamente, esta representação transforma uma equação diferencial de ordem n em um sistema de n equações diferenciais simultâneas de primeira ordem (Nise, 2017).

Sabendo que a tensão no indutor ($v_1(t)$) e a corrente no capacitor ($i_c(t)$) podem ser escritas da seguinte forma (Alexander; Sadiku, 2016):

$$v_1 = L \frac{di_1}{dt} \quad (21)$$

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt} \quad (22)$$

A partir das equações (21) e (22), e conhecendo a primeira e a segunda lei de Kirchhoff (Miller; Vandome; McBrewster, 2010), é possível representar o circuito da figura 11 por:

$$v_0 = i_1 R + L \frac{di_1}{dt} + v_c \quad (23)$$

Nota-se, observando a figura 11, que $v_c(t) = v_1$. Com isso, temos:

$$v_0 = i_1 R + L \frac{di_1}{dt} + v_1 \rightarrow \frac{di_1}{dt} = \frac{v_0}{L} - \frac{i_1 R}{L} - \frac{v_1}{L} \quad (24)$$

Além disso, pela lei dos nós (Miller; Vandome; McBrewster, 2010), tem-se:

$$i_1 = i_g + i_c \quad (25)$$

Sabendo que $i_g(t) = \frac{G}{2}v_1(t)$ e $i_c = \frac{C}{2}\frac{dv_c(t)}{dt}$, substituindo na equação (25) tem-se:

$$i_1 = \frac{G}{2}v_1 + \frac{C}{2}\frac{dv_c}{dt} \rightarrow \frac{dv_c}{dt} = \frac{2}{C}i_1 - \frac{G}{C}v_1 \quad (26)$$

Como observado anteriormente, $v_c(t) = v_1$. Então, a equação (26) pode ser descrita da seguinte maneira:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{2}{C}i_1 - \frac{G}{C}v_1 \quad (27)$$

O capacitor conectado a entrada de energia pode ser descrito da seguinte maneira:

$$i_0 = i_g + i_c \rightarrow i_0 = \frac{G}{2}V_0 + \frac{C}{2}\frac{dV_{c0}}{dt} \rightarrow \frac{dV_{c0}}{dt} = \frac{2}{C}i_0 - \frac{G}{C}V_0 \quad (28)$$

Além disso, nota-se que $V_0 = V_{c0}$. Contudo, considerando uma fonte ideal, o primeiro ramo transversal não precisa entrar no equacionamento em espaço de estados.

A partir das equações que envolvem os estados, ou seja, a derivada da corrente $\left(\frac{di_1(t)}{dt}\right)$ e a derivada da tensão $\left(\frac{dv_1(t)}{dt}\right)$, é possível representar esse circuito pela equação de espaço de estados, dada por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (29)$$

sendo:

- $\mathbf{x}(t)$: vetor de estados do sistema.
- $\dot{\mathbf{x}}(t)$: derivada do vetor de estados do sistema.
- \mathbf{A} : matriz de estados que representa o sistema.
- \mathbf{B} : matriz de estados que representa as entradas do sistema.
- $\mathbf{u}(t)$: vetor de entrada do sistema.

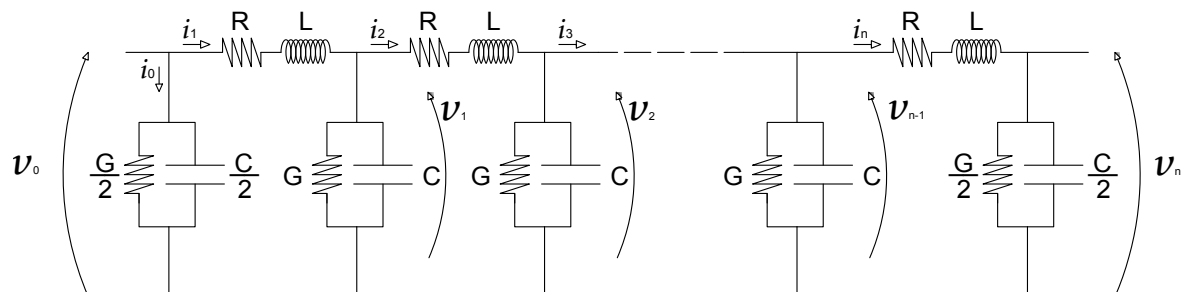
A partir da figura 11, para a linha representada por um circuito π , as matrizes de espaço de estados são dadas por:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} \\ \frac{dv_1}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{C} & -\frac{G}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v_0 \quad (30)$$

Com isso, considera-se que a linha de transmissão, com tamanho d , pode ser dividida em pequenos seguimentos (Δx), vide figura 10, e cada um desses segmentos é representado por um circuito π (Mamis; Nacaroglu, 2002), conforme figura 11.

A partir daí, a linha de transmissão pode ser representada por uma cascata de circuitos π , como mostra a figura 12.

Figura 12 - Representação da linha de transmissão por uma cascata de circuitos π .



Fonte: Autoria própria.

Considera-se que os elementos R , L , C e G têm comprimento (Δx), ou seja (Mamis, 2003):

$$R = R' \Delta x, \quad L = L' \Delta x, \quad C = C' \Delta x, \quad G = G' \Delta x, \quad (31)$$

em que, $\Delta x = \frac{d}{n}$, onde d é o comprimento da linha de transmissão e n o número de circuitos π que representam a linha, dessa forma, tem-se (Mamis, 2003):

$$R = R' \frac{d}{n}, \quad L = L' \frac{d}{n}, \quad C = C' \frac{d}{n}, \quad G = G' \frac{d}{n}. \quad (32)$$

Assim como foi mostrado para um circuito π , é possível representar o circuito da figura 12 pelas equações de estado. Salienta-se que as equações (21) e (22) serão utilizadas para o equacionamento. Dessa maneira, uma representação genérica para a cascata de circuitos π é obtida e escrita como (Mamis, 2003):

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{di_1}{dt} & \frac{di_2}{dt} & \cdots & \frac{di_n}{dt} & \frac{dv_1}{dt} & \frac{dv_2}{dt} & \cdots & \frac{dv_n}{dt} \end{bmatrix}^T, \quad (33)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n & v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix}^T, \quad (34)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T. \quad (35)$$

Já a matriz \mathbf{A} é representada por outras quatro submatrizes (Mamis, 2003).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

sendo que (Mamis, 2003):

- \mathbf{A}_1 : é a matriz onde a diagonal principal tem elementos não nulos e iguais a $-\frac{R}{L}$. Os elementos fora da diagonal principal são zero.
- \mathbf{A}_2 : é a matriz onde a diagonal principal tem elementos não nulos e iguais a $-\frac{1}{L}$. Já os elementos da subdiagonal inferior são iguais a $\frac{1}{L}$. Os elementos fora da diagonal principal e da subdiagonal inferior são zero.
- \mathbf{A}_3 : é a matriz onde a diagonal principal tem elementos não nulos e iguais a $\frac{1}{C}$, com exceção do ultimo elemento da diagonal, que é representado por $\frac{2}{C}$. Já os elementos da subdiagonal superior são iguais a $-\frac{1}{C}$. Os elementos fora da diagonal principal e da subdiagonal superior são zero.
- \mathbf{A}_4 : é a matriz onde a diagonal principal tem elementos não nulos e iguais a $-\frac{G}{C}$. Os elementos fora da diagonal principal são zero.

Portando, as matrizes \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 , \mathbf{A}_3 e \mathbf{A}_4 são representadas, genericamente, da seguinte forma (Fuchs, 1977):

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad (37)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix}, \quad (38)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\frac{1}{C} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{C} \end{bmatrix}, \quad (39)$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} -\frac{G}{C} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{G}{C} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{G}{C} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{G}{C} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

3.3 Representação da linha por cascata de circuitos π considerando o efeito da frequência

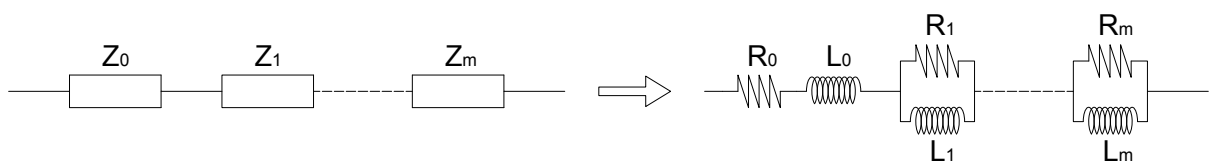
A simulação das correntes e tensões nos terminais de uma linha exige a solução, no domínio de tempo, de diversas integrais de convolução. A solução dessas integrais pode ser realizada por meio de métodos numéricos, mas com um elevado esforço computacional e instabilidade numérica. Uma técnica muito utilizada para reduzir o esforço computacional, consiste em aproximar os parâmetros por funções racionais (Yamanaka, 2009).

Geralmente, não existe uma função que descreva a impedância $Z(\omega)$ pois os parâmetros $R(\omega)$ e $L(\omega)$ são obtidos por meio de séries numéricas (Yamanaka, 2009). No entanto, a impedância $Z(\omega)$ pode ser descrita, de maneira aproximada, por meio de uma função racional $F(\omega)$ cujos polos são todos reais negativos e os resíduos são números reais positivos (Kurokawa *et al.*, 2007; Freitas; Kurokawa; Pissolato, 2008).

Portanto, para considerar o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais da linha, a impedância longitudinal da linha é aproximada por uma função racional que, por sua vez, é representada por meio de uma associação de elementos de circuitos. Essa aproximação é mostrada nas equações (219) a (221) descritas no Apêndice.

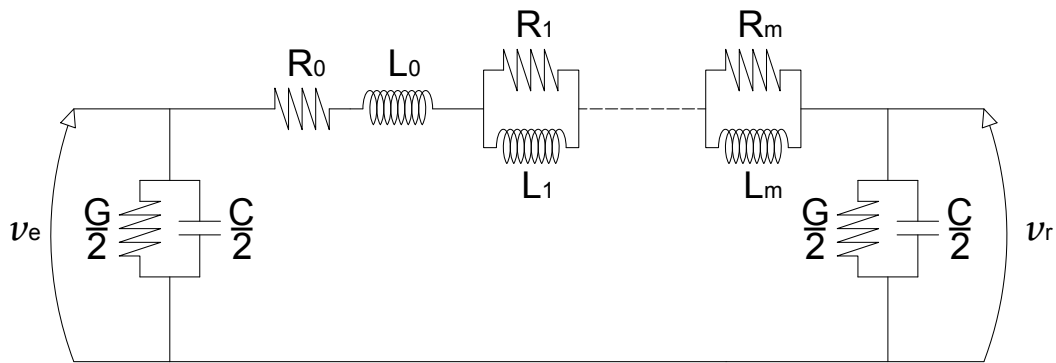
Uma vez conhecidas as impedâncias, os polos e resíduos da função, é possível obter o circuito que representa a impedância longitudinal de uma linha aérea quando se considera o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais do condutor (Kurokawa *et al.*, 2007), conforme figura 13.

Figura 13 - Representação das impedâncias Z_0 a Z_m .



Considerando que os parâmetros longitudinais de uma linha de transmissão podem ser sintetizados por meio de um circuito do tipo mostrado na figura 13, pode-se utilizar uma cascata de circuitos π para representar uma linha de transmissão levando em conta o efeito da frequência sobre os seus parâmetros longitudinais (Yamanaka, 2009). Nesse caso, cada um dos circuitos terá o aspecto mostrado na figura 14.

Figura 14 - Representação da linha de transmissão por um circuito π considerando o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais.



Fonte: Autoria própria.

A partir da figura 14 obtém-se as equações de tensão e corrente que descrevem o circuito. Assim como para a representação da linha de transmissão por cascata de circuitos π , mostrada anteriormente, para essa metodologia as equações de tensão e corrente também são escritas na forma de espaço de estados dada por:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (41)$$

Considerando que a linha de transmissão de comprimento d e composta por n circuitos, como o apresentado na figura 14, as matrizes e vetores dados genericamente pela equação (41) são escritos como (Yamanaka, 2009):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \cdots & \mathbf{N}_m & \mathbf{T} \\ \mathbf{M}_1 & -\mathbf{M}_1 & \mathbf{Z} & \cdots & \cdots & \mathbf{Z} \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{Z} & -\mathbf{M}_2 & \mathbf{Z} & \cdots & \mathbf{Z} \\ \vdots & \vdots & \mathbf{Z} & \ddots & \mathbf{Z} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{M}_m & \vdots & \vdots & \mathbf{Z} & -\mathbf{M}_m & \mathbf{Z} \\ \mathbf{U} & \mathbf{Z} & \mathbf{Z} & \mathbf{Z} & \mathbf{Z} & \mathbf{V} \end{bmatrix}, \quad (42)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_k = \left[\frac{di_{k0}}{dt} \quad \frac{di_{k1}}{dt} \quad \frac{di_{k2}}{dt} \quad \cdots \quad \frac{di_{km}}{dt} \quad \frac{dv_{k1}}{dt} \right]^T, \quad (43)$$

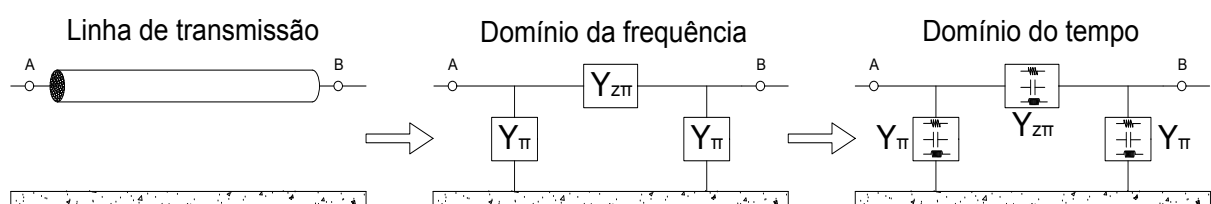
de incluir picos errôneos que distorcem as respostas transitórias, principalmente em seus valores de pico, denominados “oscilações espúrias” (ARAÚJO, 2017). Estas oscilações também são conhecidas como fenômeno de Gibbs ou oscilações de Gibbs e são consequências da cascata de circuitos π nominal que representa a linha de transmissão, associadas com um método de integração trapezoidal, mas não representam o valor real dos transitórios eletromagnéticos (Balestero, 2022).

Em Balestero (2022), o autor propõe um novo modelo de linha de transmissão para a simulação de transitórios eletromagnéticos representado diretamente no domínio do tempo. O modelo proposto constitui da sintetização do circuito π equivalente da linha de transmissão por um circuito elétrico composto por uma associação de elementos concentrados. Assim, utiliza-se somente um único circuito π que tem ramos acrescentados em paralelo para modelar a linha de transmissão de qualquer comprimento.

O modelo proposto representa uma linha de transmissão monofásica no domínio do tempo, por um único circuito π equivalente, formado somente por elementos concentrados de circuito de dois terminais cada (Siqueira, 2021). O modelo possibilita a simulação em regime permanente, mas principalmente em transitórios eletromagnéticos levando em conta o efeito da frequência e o fato dos parâmetros da linha serem distribuídos ao longo do seu comprimento. Ou seja, enquanto que no modelo a parâmetros concentrados com cascata de circuitos π , para uma maior precisão, acrescenta-se mais circuitos π em série, para o modelo π equivalente, esses ramos são acrescentados em paralelo.

Para a obtenção desse modelo, inicialmente a linha é representada pelo circuito π equivalente exato formado por admitâncias no domínio da frequência, conforme mostrado na figura 15. Tais admitâncias são equacionadas de maneira que representem diretamente as equações hiperbólicas da linha de transmissão, sem qualquer uso de aproximações (Balestero, 2022). Além disso, o processo para sintetizar essa associação de elementos de circuitos é o *Vector Fitting* (Gustavsen; Semlyen, 1998, 1999).

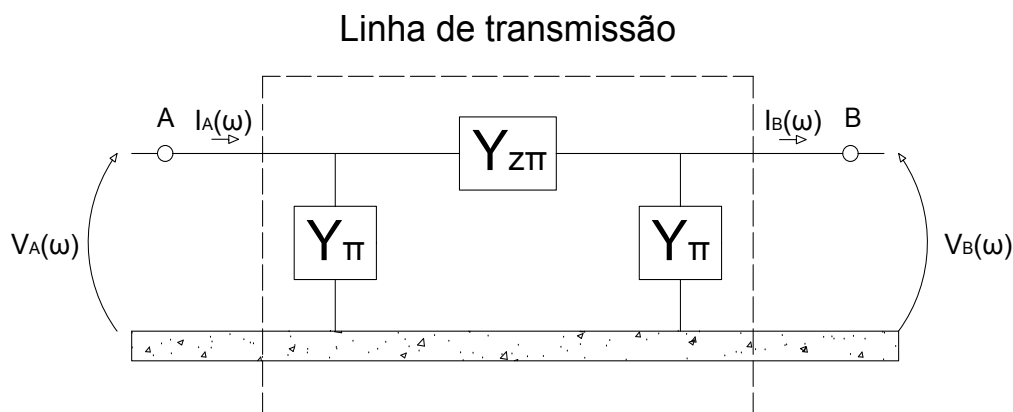
Figura 15 - Processo de obtenção do modelo π equivalente.



Fonte: Autoria própria.

Para implementação do novo modelo, considera-se que um circuito π seja o circuito equivalente de uma linha de transmissão de comprimento qualquer, do tipo mostrado na figura 16 (Dommel, 1987). Esse modelo é caracterizado por uma admitância $Y_{z\pi}$ em série entre os terminais A e B e uma admitância em transversal Y_{π} em ambos os terminais (Zanetta, 2006).

Figura 16 - Circuito π equivalente no domínio da frequência.



Fonte: Autoria própria.

A partir da figura 16, encontram-se as equações hiperbólicas da linha de transmissão (Cballero, 2014):

$$v_A(\omega) = \cosh(\gamma(\omega)d) v_B(\omega) + Z_c \sinh(\gamma(\omega)d) i_B(\omega), \quad (49)$$

$$i_A(\omega) = \frac{1}{Z_c} \sinh(\gamma(\omega)d) v_B(\omega) + \cosh(\gamma(\omega)d) i_B(\omega). \quad (50)$$

As equações hiperbólicas (49) e (50) também podem ser escritas da seguinte maneira (Balestero, 2022):

$$v_A(\omega) = A(\omega)v_B(\omega) + B(\omega)i_B(\omega), \quad (51)$$

$$i_A(\omega) = C(\omega)v_B(\omega) + D(\omega)i_B(\omega), \quad (52)$$

onde:

$$A(\omega) = \cosh(\gamma(\omega)d), \quad (53)$$

$$B(\omega) = Z_c \sinh(\gamma(\omega)d), \quad (54)$$

$$C(\omega) = \frac{1}{Z_c} \sinh(\gamma(\omega)d), \quad (55)$$

$$D(\omega) = \cosh(\gamma(\omega)d). \quad (56)$$

As admitâncias $Y_{z\pi}$ e Y_{π} do circuito da figura 16 devem ter os mesmos termos $A(\omega)$, $B(\omega)$, $C(\omega)$ e $D(\omega)$ encontrados nas equações (53), (54), (55) e (56) (Balestero, 2022). Então, aplicando as leis de Kirchhoff (Miller; Vandome; McBrewster, 2010), são encontradas as equações

que representam esses termos, dadas por:

$$v_A(\omega) = \left[\frac{Y_\pi(\omega) + Y_{z\pi}(\omega)}{Y_\pi(\omega)} \right] v_B(\omega) + \frac{1}{Y_{z\pi}(\omega)} i_B(\omega), \quad (57)$$

$$i_A(\omega) = \left[Y_\pi^2(\omega) \frac{1}{Y_{z\pi}(\omega)} + 2Y_\pi(\omega) \right] v_B(\omega) + \left[Y_\pi(\omega) \frac{1}{Y_{z\pi}(\omega)} + 1 \right] i_B(\omega). \quad (58)$$

Considerando que:

$$A_\pi(\omega) = \frac{Y_\pi(\omega) + Y_{z\pi}(\omega)}{Y_\pi(\omega)}, \quad (59)$$

$$B_\pi(\omega) = \frac{1}{Y_{z\pi}(\omega)}, \quad (60)$$

$$C_\pi(\omega) = Y_\pi^2(\omega) \frac{1}{Y_{z\pi}(\omega)} + 2Y_\pi(\omega), \quad (61)$$

$$D_\pi(\omega) = Y_\pi(\omega) \frac{1}{Y_{z\pi}(\omega)} + 1, \quad (62)$$

é possível igualar as equações (54) com (60) para obter (Balestero, 2022):

$$Y_{z\pi}(\omega) = \frac{1}{Z_c(\omega) \sinh(\gamma(\omega)d)}. \quad (63)$$

Além disso, igualando as equações (53) com (59) e substituindo (63) obtém-se (Balestero, 2022):

$$\cosh(\gamma(\omega)d) = Y_\pi(\omega) Z_c(\omega) \sinh(\gamma(\omega)d) + 1, \quad (64)$$

que também pode ser escrita por:

$$Y_\pi(\omega) = \frac{\cosh(\gamma(\omega)d) - 1}{Z_c(\omega) \sinh(\gamma(\omega)d)}. \quad (65)$$

A partir disso, e aplicando a identidade trigonométrica para o $\cosh(\gamma(\omega)d)$ e $\sinh(\gamma(\omega)d)$ na equação (65), obtém-se o $Y_\pi(\omega)$ (Balestero, 2022):

$$Y_\pi(\omega) = \frac{\tanh\left(\frac{\gamma(\omega)d}{2}\right)}{Z_c(\omega)}. \quad (66)$$

Então, as admitâncias $Y_{z\pi}(\omega)$ e $Y_\pi(\omega)$ são representadas, respectivamente, pelas equações (63) e (66).

Na literatura o modelo com circuito π equivalente é bastante utilizado (Singh; Marti; Srivastava, 2010). No entanto, o fato da representação no domínio da frequência, traz algumas restrições (Balestero, 2022). Em softwares do tipo EMTP, utilizados para a simulação de transitórios eletromagnéticos, são geralmente descritos no domínio do tempo. Nesse caso, obriga-

toriamamente a linha deve estar representada no domínio do tempo. Além disso, ao se estudar o sistema elétrico como um todo deve-se considerar a presença de elementos não lineares e também as alterações que ocorrem no sistema, tais como, faltas, chaveamento de disjuntores e conexões de diferentes tipos de cargas que não são facilmente representadas no domínio da frequência (Marti, 1988).

Para representação do circuito π equivalente exato, a partir de funções racionais, usa-se o *Vector Fitting* (Gustavsen; Semlyen, 1998, 1999); contudo, existem outros métodos que podem ser desenvolvidos. Então, considera-se que a função racional F_s pode representar a admitância $Y_{z\pi}(\omega)$ e $Y_{\pi}(\omega)$ no domínio da frequência (Gustavsen, 2002).

Para cada fração parcial é obtido um ramo que corresponde a um circuito elétrico equivalente. O número de ramos depende da quantidade de frações parciais que, por sua vez, dependerá do número de polos e resíduos escolhido (Balestero, 2022).

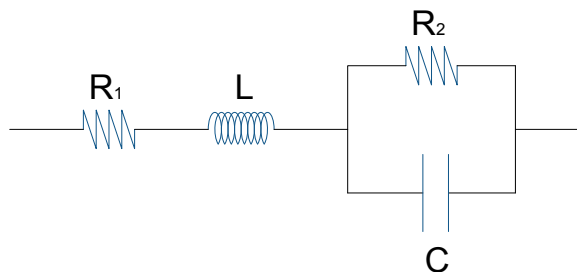
Considerando a fração parcial formada por números reais (Gustavsen; Semlyen, 1998, 1999), o circuito elétrico utilizado para sintetizar a função é do tipo mostrado na figura 17 (Balestero, 2022). Agora, caso a fração parcial seja formada por números complexos, o circuito elétrico que sintetiza a função é do tipo mostrado na figura 18 (Balestero, 2022).

Figura 17 - Representação da função parcial real por meio de elementos de circuitos.



Fonte: Autoria própria.

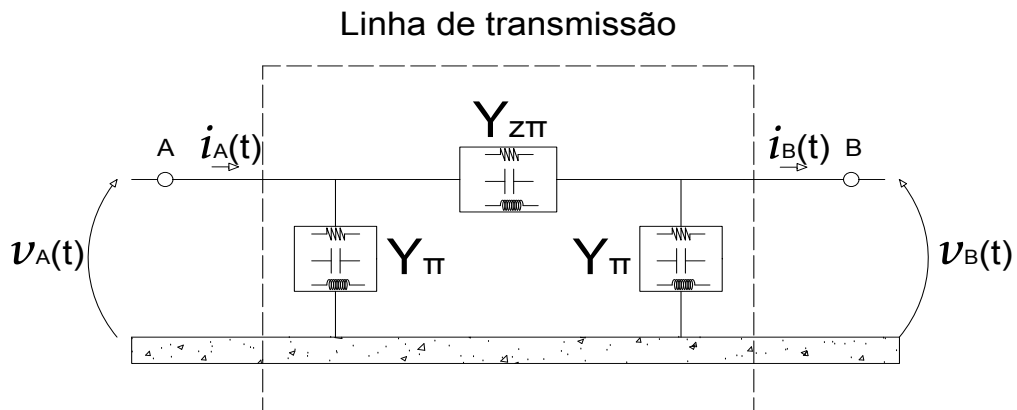
Figura 18 - Representação da função parcial complexa por meio de elementos de circuitos.



Fonte: Autoria própria.

Dessa maneira, o circuito elétrico resultante, de acordo com a figura 19, representa a linha de transmissão considerando o efeito da frequência nos parâmetros longitudinais. Esse circuito pode ser utilizado na simulação de transitórios eletromagnéticos, diretamente no domínio do tempo, em softwares, como ATP, EMTP-RV ou PSCAD. Além disso, por ser formado somente por elementos de circuitos, o modelo pode ser implementado em qualquer outro software de simulação de circuitos elétricos (Balestero, 2022).

Figura 19 - Circuito π equivalente no domínio do tempo e considerando o efeito da frequência nos parâmetros longitudinais.



Fonte: Autoria própria.

Portanto, o modelo π equivalente pode ser descrito por elementos das funções parciais formada por números reais, de acordo com a figura 17, e funções parciais formada por números complexos, de acordo com a figura 18, em paralelo. Esse paralelismo ocorre tanto na admitância $Y_{z\pi}$, quanto na admitância Y_{π} .

Contudo, o modelo π equivalente desenvolvido por Balestero (2022), diferente do modelo a parâmetros concentrados que utiliza a cascata de circuitos π e do modelo desenvolvido por Yamanaka (2009), não tem uma representação na forma de espaço de estados e uma regra de formação simplificada ou otimizada para sua implementação em código de programação, tais como no software MATLAB. Dessa forma, no capítulo 4 serão apresentadas as equações de estado para o modelo π equivalente, a fim de encontrar uma matriz de formação do modelo.

3.5 Síntese do capítulo

Nesse capítulo foram apresentadas as seguintes representações de linhas: (i) representação por meio de cascata de circuitos π desconsiderando o efeito da frequência; (ii) representação por meio de cascata de circuitos π considerando o efeito da frequência; (iii) circuito π equivalente. Observou-se que (i) e (ii) podem ser representados na forma de espaço de estados.

Na representação (iii), desenvolvido por Balestero (2022), o efeito da frequência sobre os condutores é considerado a partir das equações hiperbólicas da linha. Com isso, a linha pode ser representada, no domínio do tempo, por elementos de circuito, ou seja, resistências (R), capacitâncias (C) e indutâncias (L). Contudo, ele é desenvolvido diretamente em simuladores de circuitos que analisam o transitório eletromagnético, ou seja, a representação da linha de transmissão desenvolvida por Balestero (2022) não está descrita por equações de estado.

4 REPRESENTAÇÃO DO CIRCUITO π EQUIVALENTE POR VARIÁVEIS DE ESTADO

4.1 Introdução

A análise de circuitos elétricos é um assunto central nos estudos de engenharia. O estudo de redes mais complexas envolve mais habilidades matemáticas. Por exemplo, em alguns casos aparecem derivadas da função degrau, ou, em outros casos, é necessário o cálculo dos valores iniciais da saída e suas derivadas quando a saída não corresponde a tensões em capacitores ou correntes em indutores. A formulação de espaço de estado supera tais limitações, oferecendo, além disso, uma ferramenta moderna para análise e projeto de computador (Nise, 2017). O comportamento do circuito pode ser simulado de maneira direta, pois a equação de estado é especialmente adequada para ser resolvida numericamente por um computador (Martinez-Marin, 2010).

Uma das aplicações das equações diferenciais é em modelagem de linhas de transmissão. Estas equações podem ser solucionadas pelos métodos numéricos, já que muitas vezes o processo analítico se torna inviável (Silva *et al.*, 2015).

Os métodos numéricos são utilizados para resolver equações diferenciais ordinárias, ou seja, envolvem uma ou mais derivadas de uma função desconhecida e todas as derivadas são consideradas em relação a uma só variável independente (Campos, 2007). Então, um modelo representado por elementos de circuitos, como a cascata de circuitos π e o circuito π equivalente, também podem ser representados por matrizes de estado, vide equação (29).

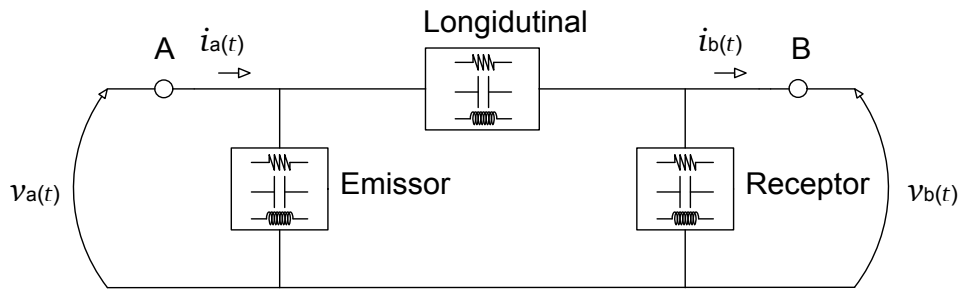
O circuito π equivalente, mostrado no capítulo 3, pode ser utilizado na simulação de transitórios eletromagnéticos, diretamente no domínio do tempo, em softwares, tais como, ATP, EMTP-RV ou PSCAD (Balestero, 2022). Porém, esse mesmo circuito não têm uma representação matemática para ser simulado em softwares de programação, o que é de grande valia para os estudos de transitórios eletromagnéticos. Portanto, utilizando métodos matemáticos de derivadas e integrais (Alexander; Sadiku, 2016) e as leis de Kirchhoff (Miller; Vandome; Mc-Brewster, 2010), nesse capítulo é realizada a representação do circuito π equivalente por meio de variáveis de estado.

4.2 Descrição do circuito π equivalente

O circuito π equivalente envolve um número elevado de ramos com funções parciais reais, vide figura 17, e ramos com funções parciais complexas, vide figura 18.

Sabe-se, também, que os ramos de Y_π , tanto conectados ao emissor quanto conectados ao receptor, tem valores iguais de resistências, indutâncias e capacitâncias. Porém, para o equacionamento, a letra "e" será vinculada ao ramo Y_π emissor e a letra "r" ao ramo Y_π receptor. Já para os ramos de $Y_{z\pi}$, a letra "l" será vinculada a cada termo do circuito. Assim como mostra a figura 21.

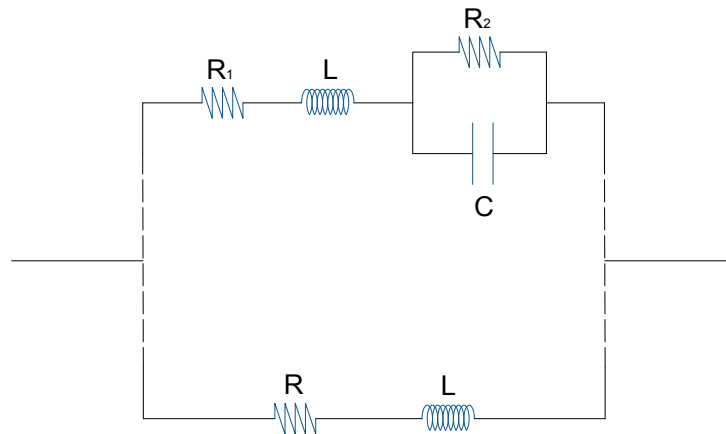
Figura 20 - Representação genérica do circuito π equivalente por elementos de circuitos



Fonte: Autoria própria.

O ramo receptor (r), longitudinal (l) e do receptor (r), são dados em parcelas compostas por ramos reais (RL) e complexos (RLC), assim como mostra a figura 21 .

Figura 21 - Representação genérica das parcelas que compõem os ramos.



Fonte: Autoria própria.

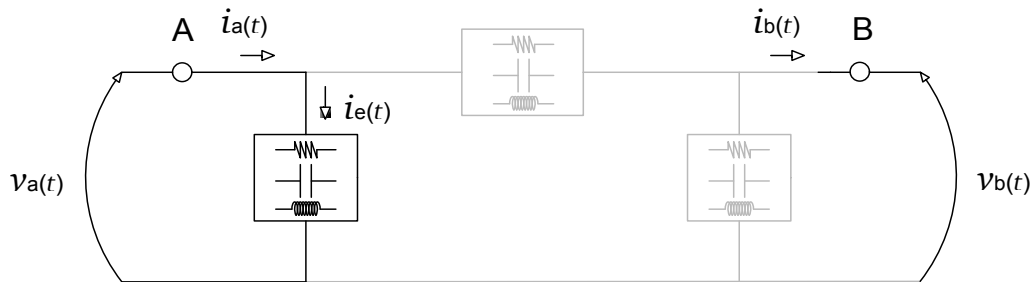
Para encontrar uma matriz genérica do modelo, em espaço de estados, a análise é dividida em partes para que seja possível encontrar uma regra de formação do modelo, assim como para a cascata de circuitos π , mostrada no capítulo 3.

Então, inicialmente, analisa-se o ramo emissor, que está diretamente conectado a fonte de tensão. Em seguida, faz-se uma análise em conjunto dos ramos longitudinais e do receptor, onde ambos ramos também estão conectados a fonte de tensão.

4.3 Análise do ramo emissor do circuito π equivalente

Como dito anteriormente, o circuito π equivalente é dividido para compreender melhor suas equações e criar uma matriz de formação genérica. Então, observa-se apenas o ramo conectado ao emissor, como mostra a figura 22.

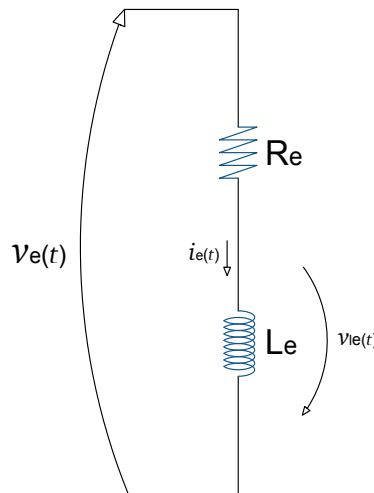
Figura 22 - Representação genérica destacando o emissor do modelo.



Fonte: Autoria própria.

A partir das equações (21), que descreve a tensão no indutor, e da figura 23, é possível encontrar a equação de estado que descreve a corrente no indutor do ramo RL conectado ao emissor da linha de transmissão.

Figura 23 - Representação genérica do ramo RL conectado ao emissor.



Fonte: Autoria própria.

Então, a equação que envolve a corrente na indutância de um ramo RL do emissor ($i_e(t)$) é dada por:

$$v_e = R_e i_e + L_e \frac{di_e}{dt} \quad (67)$$

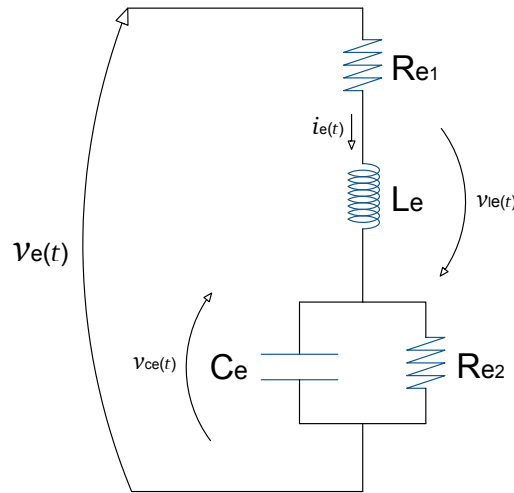
Reorganizando a equação (67), obtêm-se:

$$\frac{di_e}{dt} = \frac{1}{L_e} [v_e - R_e i_e] \quad (68)$$

Então, nota-se que, para ramos RL conectados ao emissor da linha de transmissão, contém apenas uma derivada, relacionada ao indutor.

Agora, a partir das equações (22) e da figura 24, é possível encontrar a equação de estado que descreve a tensão no capacitor.

Figura 24 - Representação genérica do ramo RLC conectado ao emissor.



Fonte: Autoria própria.

Então, a equação que envolve a tensão no capacitor de um ramo RLC do emissor ($v_e(t)$) é dada por:

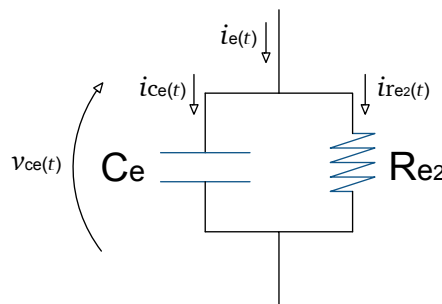
$$v_e = R_e i_e + L_e \frac{di_e}{dt} + v_{ce} \quad (69)$$

Reorganizando a equação (69), obtêm-se:

$$\frac{di_e}{dt} = \frac{1}{L_e} [v_e - R_e i_e + v_{ce}] \quad (70)$$

Agora, a tensão no capacitor genérico C_e é mostrada na figura 25. Além disso, o resistor R_{e2} também é representado.

Figura 25 - Análise do capacitor do ramo RLC genérico.



Fonte: Autoria própria.

Nota-se que, diferentemente do ramo RL, para a equação que representa o ramo RLC genérico conectado ao emissor é adicionado mais um termo. Este termo representa a tensão no capacitor, descrita genericamente pela equação (22) e mostrado na figura 25, será descrita a seguir.

Então, analisando a figura 25, obtêm-se a equação que envolve a tensão no capacitor do ramo RLC conectado ao emissor. Essa equação parte da análise das correntes, descrita pela primeira lei de Kirchhoff (Miller; Vandome; McBrewster, 2010), que envolvem o capacitor genérico C_e , mostrada a seguir:

$$i_e = i_{C_e} + i_{R_{e2}} \quad (71)$$

Onde:

$$i_{C_e} = C_e \frac{dv_{C_e}}{dt} \quad (72)$$

Além disso, a tensão sob a resistência genérica R_{e2} é dada por:

$$i_{R_{e2}} = R_{e2} v_{C_e} \quad (73)$$

Agora, substituindo as equações (72) e (73) em (71), obtêm-se:

$$i_e = C_e \frac{dv_{C_e}}{dt} + \frac{v_{C_e}}{R_{e2}} \quad (74)$$

Reorganizando a equação (74), obtêm-se:

$$\frac{dv_{C_e}}{dt} = \frac{1}{C_e} \left(i_e - \frac{v_{C_e}}{R_{e2}} \right) \quad (75)$$

Então, diferentemente do ramo RL, como mostra a figura 23 e a equação (68), as equações (70) e (75), que representam os ramos RLC conectados ao emissor da linha de transmissão, contém duas derivadas, uma relacionada ao indutor e outra relacionada ao capacitor, assim como mostra a figura 24.

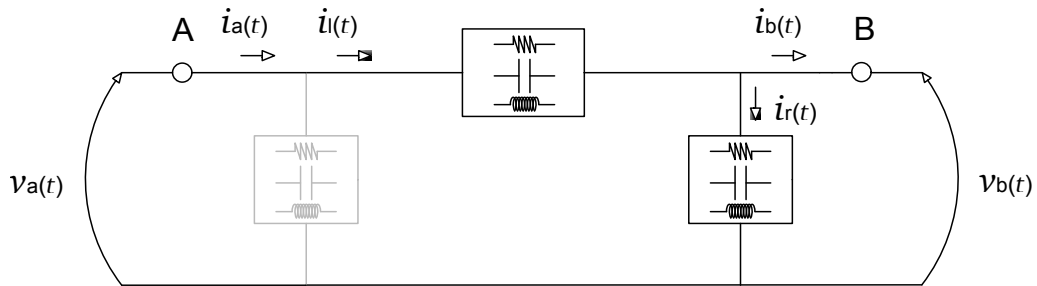
Nota-se que, analisando apenas a admitância Y_π do emissor, as equações de estado são de fáceis resolução. Isso deve-se ao fato da fonte de tensão estar conectada diretamente a esse respectivo ramo.

Agora, a análise para encontrar as equações de estado que descrevem o restante do circuito π equivalente serão descritas no subcapítulo a seguir.

4.4 Análise do ramo longitudinal e receptor do circuito π equivalente

Como dito no início do subcapítulo anterior, o circuito π equivalente é dividido para compreender melhor suas equações e criar uma matriz de formação genérica. Então, observa-se agora os ramos longitudinais e transversais, como mostra a figura 26.

Figura 26 - Representação genérica destacando o ramo longitudinal e receptor do modelo.

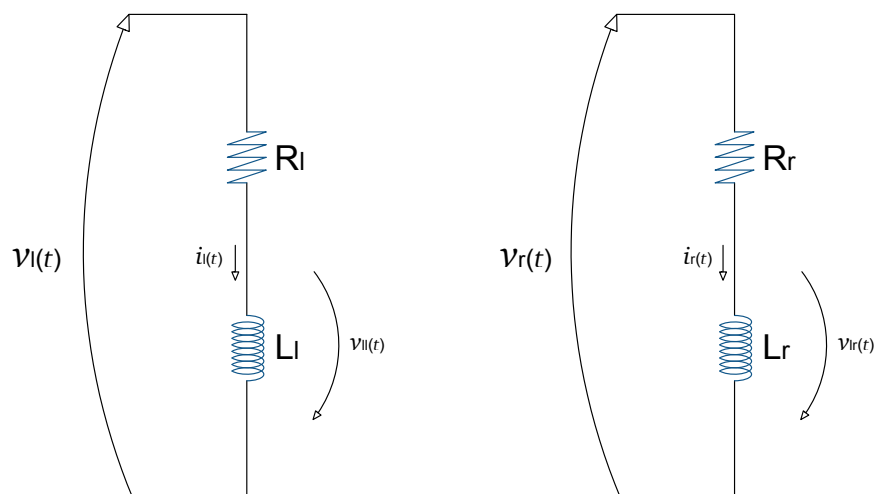


Fonte: Autoria própria.

Agora, é possível observar que existem duas admitâncias que estão conectadas a tensão de entrada. Essas admitâncias são o $Y_{z\pi}$ e o Y_{π} do receptor da linha. Contudo, apesar das duas admitâncias estarem conectadas a entrada de energia, o objetivo do trabalho é encontrar a tensão na saída da linha, ou seja, Y_{π} do receptor.

Para o equacionamento do sistema, também utiliza-se a equação (21), que descreve a tensão no indutor, tanto para os ramos longitudinais quanto para os ramos do receptor, como mostra a figura 27.

Figura 27 - Representação genérica do ramo RL longitudinal e RL do receptor



Fonte: Autoria própria.

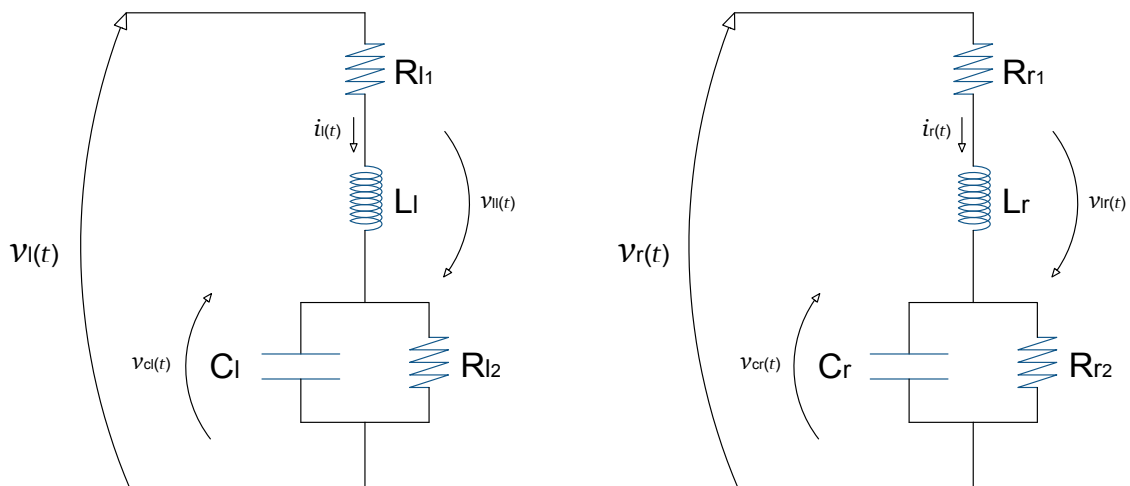
Onde, a tensão genérica aplicada nos ramos longitudinais é dada por $v_l(t)$ e a tensão genérica aplicada nos ramos transversais do receptor é dada por $v_r(t)$. Além disso, R_l e L_l correspon-

dem aos elementos genéricos do ramo RL longitudinal e R_r e L_r correspondem aos elementos genéricos do ramo RL do receptor.

Então, nota-se que, para ramos RL, contém apenas uma derivada em sua equação básica, relacionada ao indutor. Contudo, como não se sabe a tensão aplicada sobre os ramos RL longitudinais e do receptor, as equações de estado serão mais complexas; isso deve-se ao fato das tensões serem relacionadas, causando também uma relação entre as derivadas das correntes dos indutores de todos os ramos. Essas relações serão descritas adiante.

Agora, a partir das equações (22) e da figura 28, é possível encontrar a equação de estado que descreve a tensão no capacitor e a corrente no indutor dos ramos genéricos RLC longitudinais e do receptor da linha.

Figura 28 - Representação genérica do ramo RLC longitudinal e RL do receptor



Fonte: Autoria própria.

Onde, assim como para o ramo RL, a tensão genérica aplicada nos ramos longitudinais é dada por $v_l(t)$ e a tensão genérica aplicada nos ramos transversais do receptor é dada por $v_r(t)$. Além disso, R_{l1} , L_{l1} , R_{l2} e C_l correspondem aos elementos genéricos do ramo RLC longitudinal e R_{r1} , L_r , R_{r2} e C_r correspondem aos elementos genéricos do ramo RLC do receptor. Agora, $v_{cl}(t)$ e $v_{cr}(t)$ correspondem as tensões dos capacitores nos ramos RLC longitudinais e do receptor, respectivamente.

Como dito anteriormente, os ramos longitudinais e transversais do receptor estão conectados, em série, a mesma fonte de tensão ($v_a(t) = v_e(t)$). Então, para a análise desses ramos, uma série de combinações entre as derivadas das correntes nos indutores será desenvolvida para encontrar as equações genérica de formação.

Contudo, antes de partir para o equacionamento, algumas nomenclaturas serão descritas de modo a facilitar o entendimento matemático do sistema.

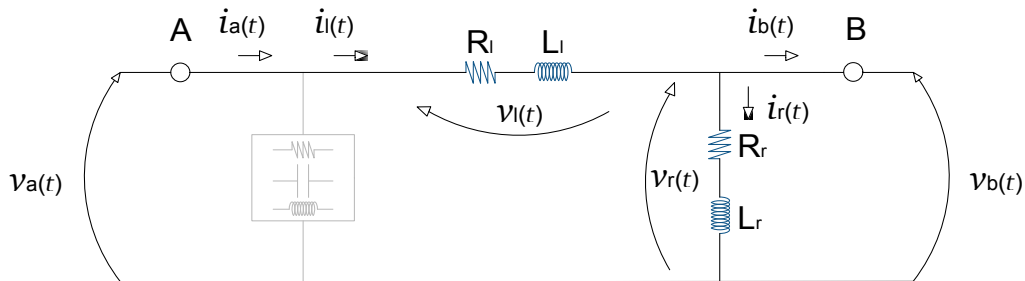
4.4.1 Equações dos ramos RL longitudinais e do receptor

Para o equacionamento do sistema, considera-se o circuito fechado, ou seja, a tensão de entrada ($v_e(t)$), a tensão dos ramos longitudinais ($v_l(t)$) e a tensão dos ramos do receptor ($v_r(t)$). Com isso, conclui-se que:

$$v_e(t) = v_l(t) + v_r(t) \quad (76)$$

Agora, considera-se que a tensão longitudinal e a tensão do receptor serão obtidas a partir de ramos RL, de acordo com figura 29.

Figura 29 - Representação o parcial do circuito π a partir de ramos RL



Fonte: Autoria própria.

Nota-se que, observando a figura acima, os termos R_l e L_l correspondem a resistência e indutância longitudinal genérica. Já R_r e L_r correspondem a resistência e indutância genérica do receptor. Além disso, $v_{Ll}(t)$ e $v_{Lr}(t)$ correspondem as tensões sob o indutor longitudinal e do receptor, respectivamente.

Então, a partir da figura 29 é possível obter as seguintes relações:

$$v_l(t) = i_l(t)R_l + v_{Ll}(t) \quad (77)$$

e

$$v_r(t) = i_r(t)R_r + v_{Lr}(t) \quad (78)$$

Agora, substituindo as equações (77) e (78) em (76) obtém-se:

$$v_e(t) = i_l(t)R_l + v_{Ll}(t) + i_r(t)R_r + v_{Lr}(t) \quad (79)$$

A partir da equação de tensão no indutor, dado em (21), obtém-se:

$$v_e(t) = i_l(t)R_l + L_l \frac{di_l}{dt} + i_r(t)R_r + L_r \frac{di_r}{dt} \quad (80)$$

Trabalhando a equação (80) é possível deixar os termos em função das derivadas das cor-

rentes dos ramos longitudinais ou do receptor, assim como mostram as equações abaixo.

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{L_1} \left[v_e(t) - i_1(t)R_1 - i_r(t)R_r - L_r \frac{di_r}{dt} \right] \rightarrow \frac{di_1}{dt} = \frac{v_e(t)}{L_1} - \frac{i_1(t)R_1}{L_1} - \frac{i_r(t)R_r}{L_1} - \frac{L_r}{L_1} \frac{di_r}{dt} \quad (81)$$

e

$$\frac{di_r}{dt} = \frac{1}{L_r} \left[v_e(t) - i_1(t)R_1 - i_r(t)R_r - L_1 \frac{di_1}{dt} \right] \rightarrow \frac{di_r}{dt} = \frac{v_e(t)}{L_r} - \frac{i_1(t)R_1}{L_r} - \frac{i_r(t)R_r}{L_r} - \frac{L_1}{L_r} \frac{di_1}{dt} \quad (82)$$

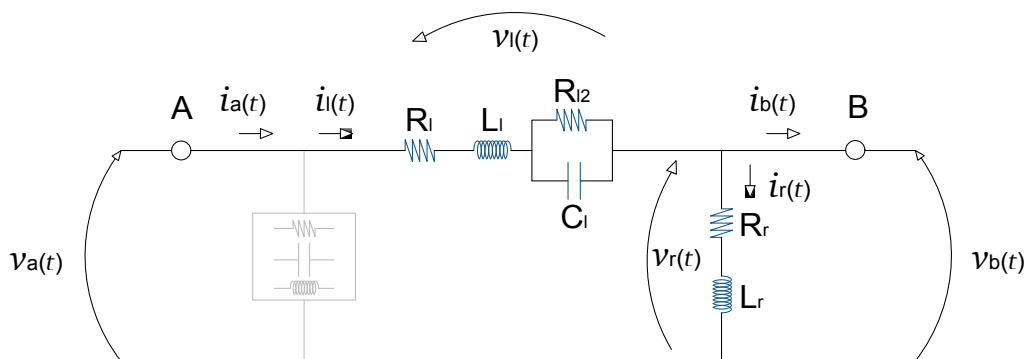
Então, para ramos RL longitudinais e no receptor, as equações (81) e (82) representam, genericamente, o equacionamento a partir das derivadas.

4.4.2 Equações dos ramos RL e RLC longitudinais e do receptor

Sabendo que o circuito π equivalente é composto por ramos reais (RL) e complexos (RLC), para o equacionamento do sistema, também considera-se o circuito fechado, ou seja, a tensão de entrada ($v_e(t)$), a tensão dos ramos longitudinais ($v_l(t)$) e a tensão dos ramos do receptor ($v_r(t)$), como mostra a equação (76).

Agora, considera-se que a tensão longitudinal é obtida por um ramo RLC e a tensão do receptor é obtida por um ramo RL, de acordo com figura 30.

Figura 30 - Representação o parcial do circuito π a partir de ramos RLC e RL



Fonte: Autoria própria.

Nota-se que, observando a figura acima, os termos R_1 , L_1 , C_1 e R_{l2} correspondem as resistências, indutância e capacitância longitudinal genérica. Já R_r e L_r correspondem a resistência e indutância genérica do receptor. Além disso, $v_{L1}(t)$ e $v_{Lr}(t)$ correspondem as tensões sob o indutor longitudinal e do receptor, respectivamente.

Então, a partir da figura 30 é possível obter as seguintes relações:

$$v_l(t) = i_1(t)R_1 + v_{L1}(t) + v_{C1}(t) \quad (83)$$

e

$$v_r(t) = i_r(t)R_r + v_{Lr}(t) \quad (84)$$

Agora, substituindo as equações (83) e (84) em (76) obtém-se:

$$v_e(t) = i_1(t)R_1 + v_{L1}(t) + v_{C1}(t) + i_r(t)R_r + v_{Lr}(t) \quad (85)$$

A partir da equação de tensão no indutor, dado em (21), e da corrente no capacitor, dado em (22) obtém-se:

$$v_e(t) = i_1(t)R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + v_{C1}(t) + i_r(t)R_r + L_r \frac{di_r}{dt} \quad (86)$$

Trabalhando a equação (86) é possível deixar os termos em função das derivadas das correntes dos ramos longitudinais ou do receptor, assim como mostram as equações abaixo.

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{1}{L_1} \left[v_e(t) - v_{C1}(t) - i_1(t)R_1 - i_r(t)R_r - L_r \frac{di_r}{dt} \right] \quad (87)$$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{v_e(t)}{L_1} - \frac{v_{C1}(t)}{L_1} - \frac{i_1(t)R_1}{L_1} - \frac{i_r(t)R_r}{L_1} - \frac{L_r}{L_1} \frac{di_r}{dt} \quad (88)$$

e

$$\frac{di_r}{dt} = \frac{1}{L_r} \left[v_e(t) - i_1(t)R_1 - i_r(t)R_r - L_1 \frac{di_1}{dt} - v_{C1}(t) \right] \quad (89)$$

$$\frac{di_r}{dt} = \frac{v_e(t)}{L_r} - \frac{i_1(t)R_1}{L_r} - \frac{i_r(t)R_r}{L_r} - \frac{L_1}{L_r} \frac{di_1}{dt} - \frac{v_{C1}(t)}{L_r} \quad (90)$$

Então, para ramos RLC longitudinais e RL no receptor, as equações (87) e (89) representam, genericamente, o equacionamento a partir das derivadas. Além disso, a equação que representa a tensão no capacitor longitudinal ($v_{C1}(t)$) foi desenvolvida e explicada nas equações (71) a (75) e é dada, genericamente, por:

$$\frac{dv_{C1}}{dt} = \frac{1}{C_1} (i_1 - R_{12}v_{C1}) \quad (91)$$

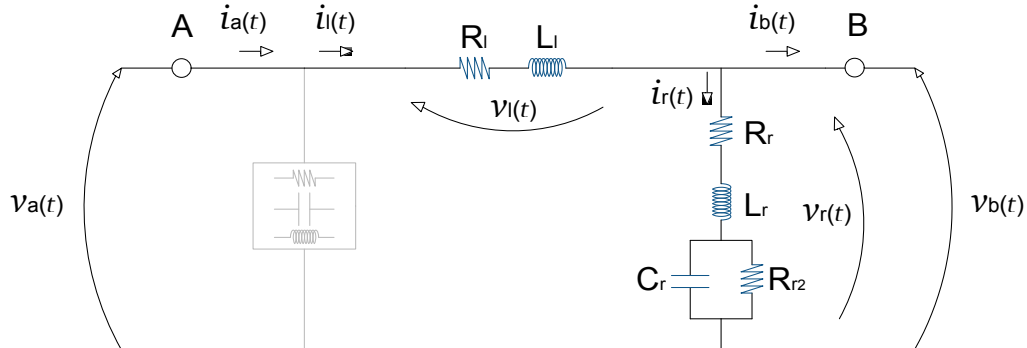
Nota-se que, diferentemente das equações obtidas para ramos RL longitudinal e no receptor, obtidas em (81) e (81), que são descritas apenas pelas derivadas das correntes nos indutores, as equações (87) e (89) também são descritas pelas correntes nos indutores e, agora, pela tensão no capacitor do ramo RLC longitudinal, descrita pela equação (91).

Então, quando inclui-se um ramo complexo (RLC) no equacionamento, duas derivadas são acrescentadas.

Agora, considera-se que a tensão longitudinal é obtida por um ramo RL e a tensão do receptor é obtida por um ramo RLC, ou seja, inverte-se os ramos que foram descritos anteriormente,

de acordo com figura 31.

Figura 31 - Representação o parcial do circuito π a partir de ramos RL e RLC



Fonte: Autoria própria.

Nota-se agora que, observando a figura acima, os termos R_l e L_l correspondem a resistência e indutância longitudinal genérica. Já R_r , L_r , C_r e R_{r2} correspondem as resistências, indutância e capacitância genérica do receptor. Além disso, $v_{l1}(t)$ e $v_{Lr}(t)$ correspondem as tensões sob o indutor longitudinal e do receptor, respectivamente.

Da mesma maneira que para o ramo RLC longitudinal e RL no receptor e, a partir da figura 31, é possível obter as seguintes relações:

$$v_l(t) = i_l(t)R_l + v_{Ll}(t) \quad (92)$$

e

$$v_r(t) = i_r(t)R_r + v_{Lr} + v_{Cr}(t)(t) \quad (93)$$

Agora, substituindo as equações (92) e (93) em (76) obtém-se:

$$v_e(t) = i_l(t)R_l + v_{Ll}(t) + i_r(t)R_r + v_{Lr}(t) + v_{Cr}(t) \quad (94)$$

A partir da equação de tensão no indutor, dado em (21), e da corrente no no capacitor, dado em (22) obtém-se:

$$v_e(t) = i_l(t)R_l + L_l \frac{di_l}{dt} + i_r(t)R_r + L_r \frac{di_r}{dt} + v_{Cr}(t) \quad (95)$$

Trabalhando a equação (95) é possível deixar os termos em função das derivadas das correntes dos ramos longitudinais ou do receptor, assim como mostram as equações abaixo.

$$\frac{di_l}{dt} = \frac{1}{L_l} \left[v_e(t) - i_l(t)R_l - i_r(t)R_r - L_r \frac{di_r}{dt} - v_{Cr}(t) \right] \quad (96)$$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{v_e(t)}{L_1} - \frac{i_1(t)R_1}{L_1} - \frac{i_r(t)R_r}{L_1} - \frac{L_r}{L_1} \frac{di_r}{dt} - \frac{v_{Cr}(t)}{L_1} \quad (97)$$

e

$$\frac{di_r}{dt} = \frac{1}{L_r} \left[v_e(t) - i_1(t)R_1 - L_1 \frac{di_1}{dt} - i_r(t)R_r - v_{Cr}(t) \right] \quad (98)$$

$$\frac{di_r}{dt} = \frac{v_e(t)}{L_r} - \frac{i_1(t)R_1}{L_r} - \frac{L_1}{L_r} \frac{di_1}{dt} - \frac{i_r(t)R_r}{L_r} - \frac{v_{Cr}(t)}{L_r} \quad (99)$$

Então, para ramos RL longitudinais e RLC no receptor, as equações (96), (97), (98) e (99) representam, genericamente, o equacionamento a partir das derivadas. Além disso, a equação que representa a tensão no capacitor do receptor ($v_{Cr}(t)$) foi desenvolvida e explicada nas equações (71) a (75) e é dada, genericamente, por:

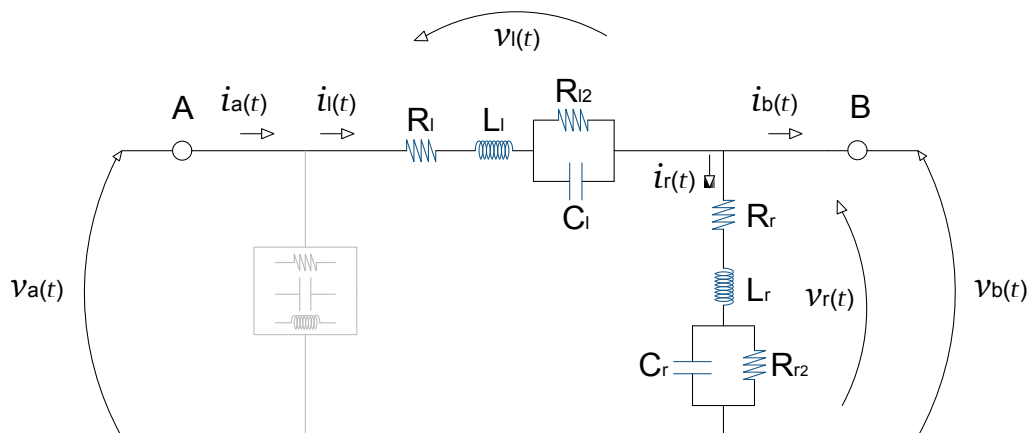
$$\frac{dv_{Cr}}{dt} = \frac{1}{C_r} (i_r - R_{r2}v_{Cr}) \quad (100)$$

Então, da mesma maneira que para ramos RLC longitudinais e RL no receptor, quando inclui-se um ramo complexo (RLC), agora no receptor, no equacionamento, duas derivadas são acrescidas.

4.4.3 Equações dos ramos RLC longitudinais e no receptor

Como o circuito π equivalente é composto por ramos reais (RL) e complexos (RLC) é necessário também considerar que a tensão longitudinal é obtida por um ramo RLC e a tensão do receptor também é obtida por um ramo RLC, de acordo com figura 32.

Figura 32 - Representação o parcial do circuito π a partir de ramos RLC



Fonte: Autoria própria.

Nota-se que, observando a figura acima, os termos R_1 , L_1 , C_1 e R_{12} correspondem as resistências, indutância e capacitância longitudinal genérica. Já R_r , L_r , C_r e R_{r2} correspondem as

resistências, indutância e capacitância genérica do receptor. Além disso, $v_{Ll}(t)$ e $v_{Lr}(t)$ correspondem as tensões sob o indutor longitudinal e do receptor, respectivamente.

A partir da figura 32, é possível obter as seguintes relações:

$$v_l(t) = i_l(t)R_l + v_{Ll}(t) + v_{Cl}(t) \quad (101)$$

e

$$v_r(t) = i_r(t)R_r + v_{Lr}(t) + v_{Cr}(t) \quad (102)$$

Agora, substituindo as equações (101) e (102) em (76) obtém-se:

$$v_e(t) = i_l(t)R_l + v_{Ll}(t) + v_{Cl}(t) + i_r(t)R_r + v_{Lr}(t) + v_{Cr}(t) \quad (103)$$

A partir da equação de tensão no indutor, dado em (21), e da corrente no no capacitor, dado em (22) obtém-se:

$$v_e(t) = i_l(t)R_l + L_l \frac{di_l}{dt} + v_{Lr}(t) + i_r(t)R_r + L_r \frac{di_r}{dt} + v_{Cr}(t) \quad (104)$$

Trabalhando a equação (104) é possível deixar os termos em função das derivadas das correntes dos ramos longitudinais ou do receptor, assim como mostram as equações abaixo.

$$\frac{di_l}{dt} = \frac{1}{L_l} \left[v_e(t) - i_l(t)R_l - v_{Cl}(t) - i_r(t)R_r - L_r \frac{di_r}{dt} - v_{Cr}(t) \right] \quad (105)$$

$$\frac{di_l}{dt} = \frac{v_e(t)}{L_l} - \frac{i_l(t)R_l}{L_l} - \frac{v_{Cl}(t)}{L_l} - \frac{i_r(t)R_r}{L_l} - \frac{L_r}{L_l} \frac{di_r}{dt} - \frac{v_{Cr}(t)}{L_l} \quad (106)$$

e

$$\frac{di_r}{dt} = \frac{1}{L_r} \left[v_e(t) - i_l(t)R_l - v_{Cl}(t) - i_r(t)R_r - L_l \frac{di_l}{dt} - v_{Cr}(t) \right] \quad (107)$$

$$\frac{di_r}{dt} = \frac{v_e(t)}{L_r} - \frac{v_{Cl}(t)}{L_r} - \frac{i_l(t)R_l}{L_r} - \frac{L_l}{L_r} \frac{di_l}{dt} - \frac{i_r(t)R_r}{L_r} - \frac{v_{Cr}(t)}{L_r} \quad (108)$$

Então, para ramos RLC longitudinais e no receptor, as equações (105), (106), (107) e (108) representam, genericamente, o equacionamento a partir das derivadas. Além disso, a equação que representa a tensão no capacitor do ramo longitudinal ($v_{Cr}(t)$) foi descrita pela equação (91) e a equação que representa a tensão no capacitor do receptor ($v_{Cr}(t)$) foi descrita pela equação (100).

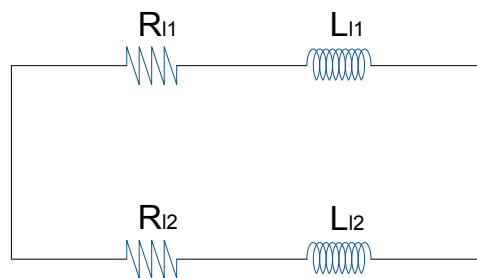
Logo, é possível concluir que, cada ramo complexo (RLC) que é acrescido no circuite π equivalente representa o aumento de duas derivadas, uma correspondente a corrente no indutor e da tensão no capacitor.

4.4.4 Equações dos ramos RL e RLC longitudinais

Além das relações das tensões descritas pela segunda lei de Kirchhoff (Miller; Vandome; McBrewster, 2010) e desenvolvidas nos subcapítulos anteriores, é necessário fazer um análise exclusiva para os ramos longitudinais.

Então, inicialmente considera-se dois ramos RL longitudinais onde R_{11} e L_{11} representam a resistência e indutância do primeiro ramo RL e R_{12} e L_{12} que representam a resistência e indutância do segundo ramo RL, assim como mostra a figura 33.

Figura 33 - Representação de dois ramos RL longitudinais



Fonte: Autoria própria.

Ainda de acordo com a segunda lei de Kirchhoff (Miller; Vandome; McBrewster, 2010), que afirma que a soma dos potenciais elétricos ao longo de uma malha fechada deve ser igual a zero, obtém-se as seguintes equações da malha, descrita na figura 33.

$$0 = i_{11}(t)R_{11} + v_{11}(t) - i_{12}(t)R_{12} + v_{12}(t) \rightarrow i_{11}(t)R_{11} + v_{11}(t) = i_{12}(t)R_{12} + v_{12}(t) \quad (109)$$

A partir da equação de tensão no indutor, dado em (21), obtém-se:

$$i_{11}(t)R_{11} + L_{11} \frac{di_{11}}{dt} = i_{12}(t)R_{12} + L_{12} \frac{di_{12}}{dt} \quad (110)$$

Trabalhando a equação (110) é possível deixar os termos em função das derivadas das correntes dos ramos longitudinais, assim como mostram as equações abaixo.

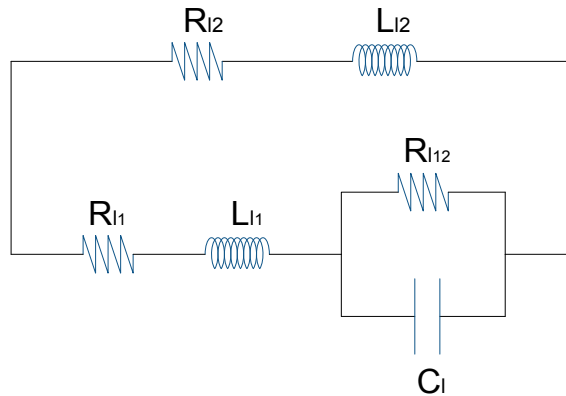
$$\frac{di_{11}}{dt} = \frac{1}{L_{11}} \left[-i_{11}(t)R_{11} + i_{12}(t)R_{12} + L_{12} \frac{di_{12}}{dt} \right] \quad (111)$$

e

$$\frac{di_{12}}{dt} = \frac{1}{L_{12}} \left[i_{11}(t)R_{11} - i_{12}(t)R_{12} + L_{11} \frac{di_{11}}{dt} \right] \quad (112)$$

Agora, considerando um ramo RLC e outro RL longitudinais onde R_{11} , R_{112} , L_{11} e C_{11} representam as resistências, indutância e capacitância do ramo RLC e R_{12} e L_{12} representam a resistência e indutância do ramo RL, assim como mostra a figura 34.

Figura 34 - Representação de um ramo RLC e um RL longitudinais



Fonte: Autoria própria.

Aplicando a segunda lei de Kirchhoff (Miller; Vandome; McBrewster, 2010) é possível obter as seguintes equações da malha, descrita na figura 34.

$$0 = i_{11}(t)R_{11} + v_{11}(t) + v_{C11}(t) - i_{12}(t)R_{12} - v_{12}(t) \quad (113)$$

A partir da equação da corrente no indutor, descrita em (21), a equação (113) pode ser descrita da seguinte maneira.

$$i_{11}(t)R_{11} + L_{11} \frac{di_{11}}{dt} + v_{C11}(t) = i_{12}(t)R_{12} + L_{12} \frac{di_{12}}{dt} \quad (114)$$

Trabalhando a equação (114) é possível deixar os termos em função das derivadas das correntes dos ramos longitudinais, assim como mostram as equações abaixo.

$$\frac{di_{11}}{dt} = \frac{1}{L_{11}} \left[-i_{11}(t)R_{11} - v_{C11} + i_{12}(t)R_{12} + L_{12} \frac{di_{12}}{dt} \right] \quad (115)$$

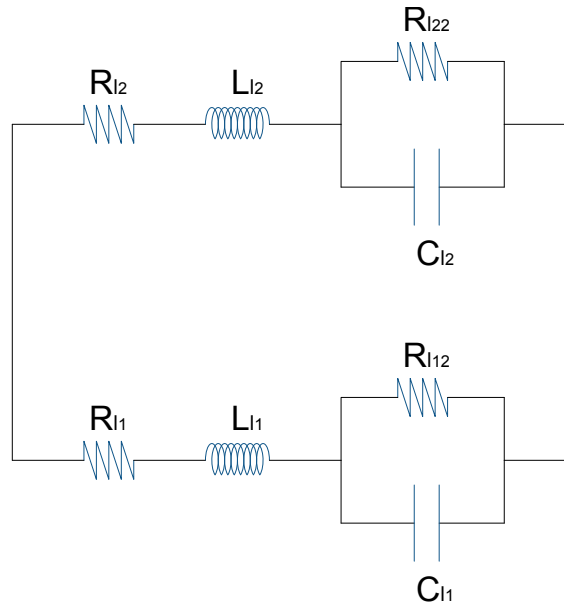
e

$$\frac{di_{12}}{dt} = \frac{1}{L_{12}} \left[i_{11}(t)R_{11} - i_{12}(t)R_{12} + v_{C11} + L_{11} \frac{di_{11}}{dt} \right] \quad (116)$$

Observando as equações obtidas por um ramo real e outro complexo, descritas em (115) e (116), e comparando com as equações obtidas por apenas dois ramos reais, descritas em (111) e (112), nota-se que, ao trocar um ramo real (RL) por um ramo complexo (RLC) é acrescentado um termo na equação. Este termo corresponde a tensão no capacitor do ramo complexo que foi descrita, especificamente, pela equação (25) e ao longo dos subcapítulos anteriores.

Por fim, considerando dois ramos RLC longitudinais onde R_{11} , R_{112} , L_{11} e C_{11} representam as resistências, indutância e capacitância do primeiro ramo RLC e R_{12} , R_{122} , L_{12} e C_{12} representam as resistências, indutância e capacitância do segundo ramo RLC, como mostra a figura 35.

Figura 35 - Representação de dois ramos RLC longitudinais



Fonte: Autoria própria.

Ainda aplicando a segunda lei de Kirchhoff (Miller; Vandome; McBrewster, 2010) é possível obter as seguintes equações da malha, descrita na figura 35.

$$0 = i_{11}(t)R_{l1} + v_{C11}(t) - i_{12}(t)R_{l2} - v_{12}(t) - v_{C12}(t) \quad (117)$$

A partir da equação da corrente no indutor, descrita em (21), a equação (117) pode ser descrita da seguinte maneira.

$$i_{11}(t)R_{l1} + L_{l1} \frac{di_{11}}{dt} + v_{C11}(t) = i_{12}(t)R_{l2} + L_{l2} \frac{di_{12}}{dt} + v_{C12}(t) \quad (118)$$

Trabalhando a equação (118) é possível deixar os termos em função das derivadas das correntes dos ramos longitudinais, assim como mostram as equações abaixo.

$$\frac{di_{11}}{dt} = \frac{1}{L_{l1}} \left[-i_{11}(t)R_{l1} - v_{C11} + i_{12}(t)R_{l2} + v_{C12} + L_{l2} \frac{di_{12}}{dt} \right] \quad (119)$$

e

$$\frac{di_{12}}{dt} = \frac{1}{L_{l2}} \left[i_{11}(t)R_{l1} - i_{12}(t)R_{l2} + v_{C11} - v_{C12} + L_{l1} \frac{di_{11}}{dt} \right] \quad (120)$$

Agora, nota-se que as equações obtidas utilizando dois ramos RLC longitudinais, descritas em (119) e (120), é acrescido dois termos, se comparar com as equações obtidas utilizando dois termos RL longitudinais, descritas em (111) e (112). Estes termos são as tensões dos capacitores nos ramos um (v_{C11}) e dois (v_{C12}).

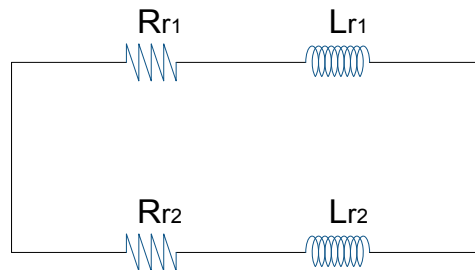
4.4.5 Equações dos ramos RL e RLC do receptor

Além das relações das tensões descritas pela segunda lei de Kirchhoff (Miller; Vandome; McBrewster, 2010) e desenvolvidas nos subcapítulos anteriores e da análise exclusiva para os ramos longitudinais também é necessário fazer um estudo exclusivo para os ramos do receptor do modelo, como será descrito a seguir.

Contudo, a análise que será representada agora é semelhante a descrita no subcapítulo 4.4.4 e, por conta disso, as equações não serão descritas tão detalhadamente quanto anteriormente. Porém, a representação dos circuitos serão descritos, de acordo com as figuras a seguir, e as equações baseadas nas derivadas dos indutores também será apresentada.

Considerando dois ramos RL no receptor onde R_{r1} e L_{r1} representam a resistência e indutância do primeiro ramo RL e R_{r2} e L_{r2} que representam a resistência e indutância do segundo ramo RL, assim como mostra a figura 33.

Figura 36 - Representação de dois ramos RL no receptor



Fonte: Autoria própria.

Observando a figura 36 é possível deixar os termos em função das derivadas das correntes dos ramos do receptor, assim como mostram as equações abaixo.

$$\frac{di_{r1}}{dt} = \frac{1}{L_{r1}} \left[-i_{r1}(t)R_{r1} + i_{r2}(t)R_{r2} + L_{r2} \frac{di_{r2}}{dt} \right] \quad (121)$$

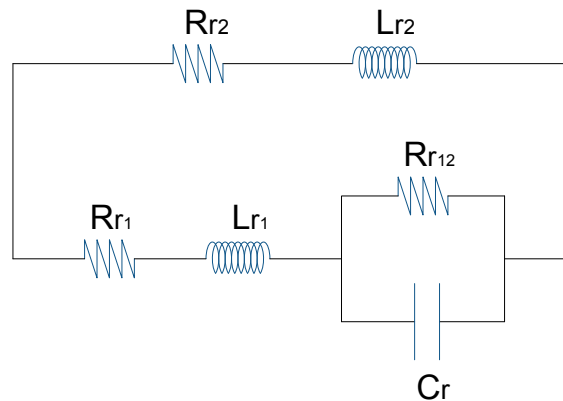
e

$$\frac{di_{r2}}{dt} = \frac{1}{L_{r2}} \left[i_{r1}(t)R_{r1} - i_{r2}(t)R_{r2} + L_{r1} \frac{di_{r1}}{dt} \right] \quad (122)$$

Lembra-se que a equação que representa a tensão no indutor a partir da derivada da corrente é descrita pela equação (21).

Agora, considerando um ramo RLC e outro RL no receptor onde R_{r1} , R_{r12} , L_{r1} e C_{r1} representam as resistências, indutância e capacitância do ramo RLC e R_{r2} e L_{r2} representam a resistência e indutância do ramo RL, assim como mostra a figura 37. A equação que relaciona a corrente no capacitor com a derivada da corrente é descrita em (22).

Figura 37 - Representação de um ramo RLC e um RL no receptor



Fonte: Autoria própria.

Observando a figura 37 é possível deixar os termos em função das derivadas das correntes dos ramos do receptor, assim como mostram as equações abaixo.

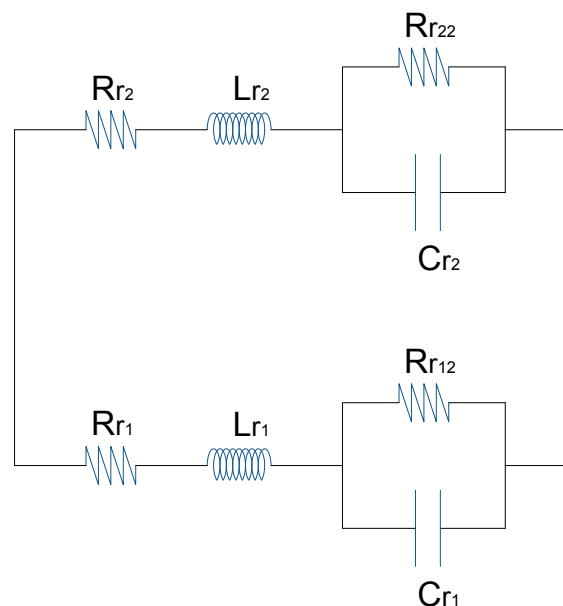
$$\frac{di_{r1}}{dt} = \frac{1}{L_{r1}} \left[-i_{r1}(t)R_{r1} - v_{Cr1} + i_{r2}(t)R_{r2} + L_{r2} \frac{di_{r2}}{dt} \right] \quad (123)$$

e

$$\frac{di_{r2}}{dt} = \frac{1}{L_{r2}} \left[i_{r1}(t)R_{r1} - i_{r2}(t)R_{r2} + v_{Cr1} + L_{r1} \frac{di_{r1}}{dt} \right] \quad (124)$$

Por fim, considerando dois ramos RLC no receptor onde R_{r1} , R_{r12} , L_{r1} e C_{r1} representam as resistências, indutância e capacitância do primeiro ramo RLC e R_{r2} , R_{r22} , L_{r2} e C_{r2} representam as resistências, indutância e capacitância do segundo ramo RLC, como mostra a figura 38.

Figura 38 - Representação de dois ramos RLC no receptor



Fonte: Autoria própria.

Observando a figura 38 é possível deixar os termos em função das derivadas das correntes dos ramos do receptor, assim como mostram as equações abaixo e a equação que relaciona a corrente no capacitor com a derivada da corrente é descrita em (22).

$$\frac{di_{r1}}{dt} = \frac{1}{L_{r1}} \left[-i_{r1}(t)R_{r1} - v_{Cr1} + i_{r2}(t)R_{r2} + v_{Cr2} + L_{r2} \frac{di_{r2}}{dt} \right] \quad (125)$$

e

$$\frac{di_{r2}}{dt} = \frac{1}{L_{r2}} \left[i_{r1}(t)R_{r1} - i_{r2}(t)R_{r2} + v_{Cr1} - v_{Cr2} + L_{r1} \frac{di_{r1}}{dt} \right] \quad (126)$$

4.5 Obtenção das equações de estado do circuito π equivalente considerando dois ramos

A partir dos equacionamentos parciais que foram demonstrados no subcapítulo anterior, agora modela-se um circuito π equivalente considerando dois ramos no emissor, longitudinais e no receptor da linha. Além disso, a linha de transmissão que será equacionada encontra-se em aberto.

É interessante ressaltar que, o modelo que será equacionado a seguir, ainda não representa a resposta transitória da linha de transmissão. Isso deve-se ao fato da pouca quantidade de ramos que será utilizado. Contudo, faz-se necessário esta representação para que a posteriori esse sistema seja expandido para qualquer quantidade de ramos, como será visto no próximo subcapítulo.

O modelo que será representado é composto pelos seguintes ramos no emissor:

- RL_{e1} : representa o primeiro ramo real composto por uma resistência (R_{e1}) e uma indutância (L_{e1});
- RL_{e2} : representa o segundo ramo real composto por uma resistência (R_{e2}) e uma indutância (L_{e2}).

Para o ramo longitudinal, o modelo é composto por:

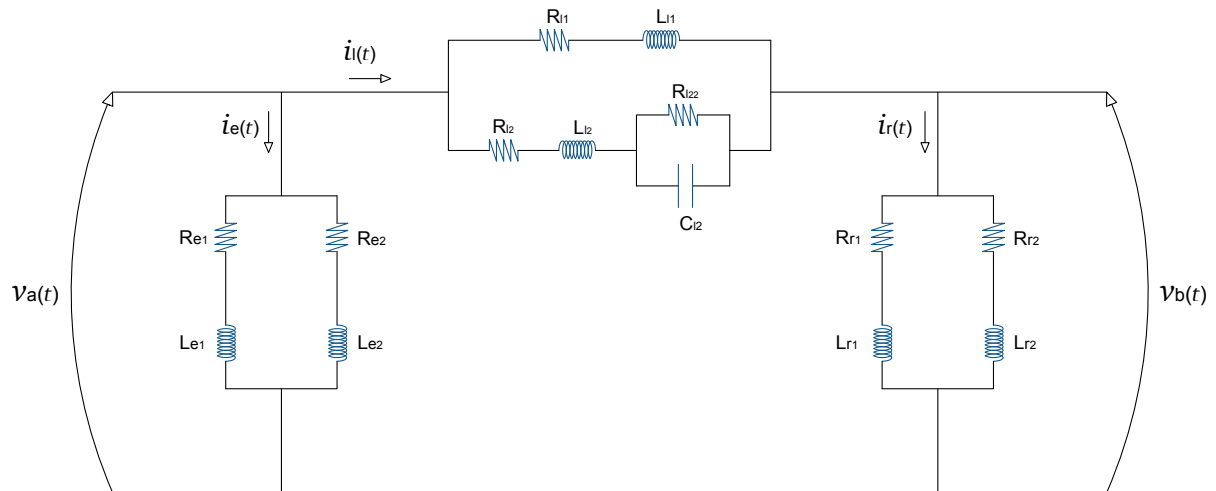
- RL_{11} : representa um ramo real composto por uma resistência (R_{11}) e uma indutância (L_{11});
- RLC_{12} : representa um ramo complexo composto por uma resistência (R_{12}), outra resistência (R_{122}), um capacitância (C_{12}) e uma indutância (L_{12}).

Por fim, o circuito é descrito, no receptor, por:

- RL_{r1} : representa o primeiro ramo real composto por uma resistência (R_{r1}) e uma indutância (L_{r1});
- RL_{r2} : representa o segundo ramo real composto por uma resistência (R_{r2}) e uma indutância (L_{r2}).

Os elementos de circuitos que formam os ramos e foram descritos anteriormente também são encontrados na figura (39).

Figura 39 - Representação do circuito π equivalente utilizando dois ramos



Fonte: Autoria própria.

Então, de acordo com as equações (67) e (68), mostradas no subcapítulo 4.3, os ramos conectados ao emissor da linha podem ser equacionados como mostrado abaixo.

Para o primeiro ramo do receptor (RL_{e1}) têm-se:

$$v_a(t) = R_{e1}i_{e1}(t) + L_{e1} \frac{di_{e1}}{dt} \rightarrow \frac{di_{e1}}{dt} = \frac{1}{L_{e1}} [v_a(t) - R_{e1}i_{e1}(t)] \quad (127)$$

O segundo ramo do receptor (RL_{e2}) pode ser descrito da seguinte forma:

$$v_a(t) = R_{e2}i_{e2}(t) + L_{e2} \frac{di_{e2}}{dt} \rightarrow \frac{di_{e2}}{dt} = \frac{1}{L_{e2}} [v_a(t) - R_{e2}i_{e2}(t)] \quad (128)$$

A partir das equações (127) e (128) é possível notar que há apenas uma derivada em cada equação, que é oriunda da equação da tensão no indutor, descrita em (21). Além disso e, como já comentado anteriormente, o emissor da linha está diretamente conectado a fonte de tensão de entrada; por conta disso, suas equações são de fácil resolução.

Agora, de acordo com a equação (68), mostrada no subcapítulo 4.4, equaciona-se o primeiro ramo longitudinal (RL_{l1}) e o primeiro ramo do receptor (RL_{r1}) utilizando a segunda lei de

Kirchhoff (Miller; Vandome; McBrewster, 2010), como mostra-se abaixo.

$$v_e(t) = i_{11}(t)R_{11} + v_{L11}(t) + i_{r1}(t)R_{r1} + v_{Lr1}(t) \quad (129)$$

A partir da equação de tensão no indutor, dado em (21), obtém-se:

$$v_e(t) = i_{11}(t)R_{11} + L_{11} \frac{di_{11}}{dt} + i_{r1}(t)R_{r1} + L_{r1} \frac{di_{r1}}{dt} \quad (130)$$

Trabalhando a equação (130) é possível deixar os termos em função das derivadas das correntes dos ramos longitudinais ou do receptor, assim como mostram as equações abaixo.

$$\frac{di_{11}}{dt} = \frac{1}{L_{11}} \left[v_e(t) - i_{11}(t)R_{11} - i_{r1}(t)R_{r1} - L_{r1} \frac{di_{r1}}{dt} \right] \quad (131)$$

A equação (132) também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{di_{11}}{dt} = \frac{v_e(t)}{L_{11}} - \frac{i_{11}(t)R_{11}}{L_{11}} - \frac{i_{r1}(t)R_{r1}}{L_{11}} - \frac{L_{r1}}{L_{11}} \frac{di_{r1}}{dt} \quad (132)$$

Assim como isolou-se a derivada das correntes do primeiro ramo longitudinal, descritas pelas equações (131) e (132), é possível utilizar a equação (130) para isolar a derivada da corrente do primeiro ramo do receptor, como observa-se a seguir.

$$\frac{di_{r1}}{dt} = \frac{1}{L_{r1}} \left[v_e(t) - i_{11}(t)R_{11} - i_{r1}(t)R_{r1} - L_{11} \frac{di_{11}}{dt} \right] \quad (133)$$

A equação (133) também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{di_{r1}}{dt} = \frac{v_e(t)}{L_{r1}} - \frac{i_{11}(t)R_{11}}{L_{r1}} - \frac{i_{r1}(t)R_{r1}}{L_{r1}} - \frac{L_{11}}{L_{r1}} \frac{di_{11}}{dt} \quad (134)$$

Da mesma maneira e, ainda de acordo com a equação (68), mostrada no subcapítulo 4.4, equaciona-se o primeiro ramo longitudinal (RL_{11}) e, agora, o segundo ramo do receptor (RL_{r2}), como mostra-se abaixo.

$$v_e(t) = i_{11}(t)R_{11} + v_{L11}(t) + i_{r2}(t)R_{r2} + v_{Lr2}(t) \quad (135)$$

A partir da equação de tensão no indutor, dado em (21), obtém-se:

$$v_e(t) = i_{11}(t)R_{11} + L_{11} \frac{di_{11}}{dt} + i_{r2}(t)R_{r2} + L_{r2} \frac{di_{r2}}{dt} \quad (136)$$

Trabalhando a equação (136) é possível deixar os termos em função das derivadas das

correntes dos ramos longitudinais ou do receptor, assim como mostram as equações abaixo.

$$\frac{di_{11}}{dt} = \frac{1}{L_{11}} \left[v_e(t) - i_{11}(t)R_{11} - i_{r2}(t)R_{r2} - L_{r2} \frac{di_{r2}}{dt} \right] \quad (137)$$

A equação (137) também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{di_{11}}{dt} = \frac{v_e(t)}{L_{11}} - \frac{i_{11}(t)R_{11}}{L_{11}} - \frac{i_{r2}(t)R_{r2}}{L_{11}} - \frac{L_{r2}}{L_{11}} \frac{di_{r2}}{dt} \quad (138)$$

Da mesma maneira que isolou-se a derivada das correntes do primeiro ramo longitudinal, descritas pelas equações (137) e (138), é possível utilizar a equação (136) para isolar a derivada da corrente do primeiro ramo do receptor, como observa-se a seguir.

$$\frac{di_{r2}}{dt} = \frac{1}{L_{r2}} \left[v_e(t) - i_{11}(t)R_{11} - i_{r2}(t)R_{r2} - L_{11} \frac{di_{11}}{dt} \right] \quad (139)$$

A equação (139) também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{di_{r2}}{dt} = \frac{v_e(t)}{L_{r2}} - \frac{i_{11}(t)R_{11}}{L_{r2}} - \frac{i_{r2}(t)R_{r2}}{L_{r2}} - \frac{L_{11}}{L_{r2}} \frac{di_{11}}{dt} \quad (140)$$

Utilizando agora o ramo complexo longitudinal e, de acordo com a equação (68), mostrada no subcapítulo 4.4, equaciona-se o primeiro ramo longitudinal (RLC_{12}) e o primeiro ramo do receptor (RL_{r1}) utilizando a segunda lei de Kirchhoff (Miller; Vandome; McBrewster, 2010), como mostra-se abaixo.

$$v_e(t) = i_{12}(t)R_{12} + v_{L12}(t) + v_{C12}(t) + i_{r1}(t)R_{r1} + v_{Lr1}(t) \quad (141)$$

A partir da equação de tensão no indutor, dado em (21), obtém-se:

$$v_e(t) = i_{12}(t)R_{12} + L_{12} \frac{di_{12}}{dt} + v_{C12}(t) + i_{r1}(t)R_{r1} + L_{r1} \frac{di_{r1}}{dt} \quad (142)$$

Trabalhando a equação (142) é possível deixar os termos em função das derivadas das correntes dos ramos longitudinais ou do receptor, assim como mostram as equações abaixo.

$$\frac{di_{12}}{dt} = \frac{1}{L_{12}} \left[v_e(t) - i_{12}(t)R_{12} - v_{C12}(t) - i_{r1}(t)R_{r1} - L_{r1} \frac{di_{r1}}{dt} \right] \quad (143)$$

A equação (143) também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{di_{12}}{dt} = \frac{v_e(t)}{L_{12}} - \frac{i_{12}(t)R_{12}}{L_{12}} - \frac{v_{C12}(t)}{L_{12}} - \frac{i_{r1}(t)R_{r1}}{L_{12}} - \frac{L_{r1}}{L_{12}} \frac{di_{r1}}{dt} \quad (144)$$

Assim como isolou-se a derivada das correntes do primeiro ramo longitudinal, descritas pelas equações (143) e (150), é possível utilizar a equação (130) para isolar a derivada da corrente do primeiro ramo do receptor, como observa-se a seguir.

$$\frac{di_{r1}}{dt} = \frac{1}{L_{r1}} \left[v_e(t) - i_{l2}(t)R_{l2} - v_{Cl2}(t) - i_{r1}(t)R_{r1} - L_{l2} \frac{di_{l2}}{dt} \right] \quad (145)$$

A equação (145) também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{di_{r1}}{dt} = \frac{v_e(t)}{L_{r1}} - \frac{i_{l2}(t)R_{l2}}{L_{r1}} - \frac{v_{Cl2}(t)}{L_{r1}} - \frac{i_{r1}(t)R_{r1}}{L_{r1}} - \frac{L_{l2}}{L_{r1}} \frac{di_{l2}}{dt} \quad (146)$$

Utilizando agora o ramo complexo longitudinal e, de acordo com a equação (68), mostrada no subcapítulo 4.4, equaciona-se o primeiro ramo longitudinal (RLC_{l2}) agora com o segundo ramo do receptor (RL_{r2}), como mostra-se abaixo.

$$v_e(t) = i_{l2}(t)R_{l2} + v_{Ll2}(t) + v_{Cl2}(t) + i_{r2}(t)R_{r2} + v_{Lr2}(t) \quad (147)$$

A partir da equação de tensão no indutor, dado em (21), obtém-se:

$$v_e(t) = i_{l2}(t)R_{l2} + L_{l2} \frac{di_{l2}}{dt} + v_{Cl2}(t) + i_{r2}(t)R_{r2} + L_{r2} \frac{di_{r2}}{dt} \quad (148)$$

Trabalhando a equação (148) é possível deixar os termos em função das derivadas das correntes dos ramos longitudinais ou do receptor, assim como mostram as equações abaixo.

$$\frac{di_{l2}}{dt} = \frac{1}{L_{l2}} \left[v_e(t) - i_{l2}(t)R_{l2} - v_{Cl2}(t) - i_{r2}(t)R_{r2} - L_{r2} \frac{di_{r2}}{dt} \right] \quad (149)$$

A equação (149) também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{di_{l2}}{dt} = \frac{v_e(t)}{L_{l2}} - \frac{i_{l2}(t)R_{l2}}{L_{l2}} - \frac{v_{Cl2}(t)}{L_{l2}} - \frac{i_{r2}(t)R_{r2}}{L_{l2}} - \frac{L_{r2}}{L_{l2}} \frac{di_{r2}}{dt} \quad (150)$$

Assim como isolou-se a derivada das correntes do primeiro ramo longitudinal, descritas pelas equações (149) e (??), é possível utilizar a equação (130) para isolar a derivada da corrente do primeiro ramo do receptor, como observa-se a seguir.

$$\frac{di_{r2}}{dt} = \frac{1}{L_{r2}} \left[v_e(t) - i_{l2}(t)R_{l2} - v_{Cl2}(t) - i_{r2}(t)R_{r2} - L_{l2} \frac{di_{l2}}{dt} \right] \quad (151)$$

A equação (151) também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{di_{r2}}{dt} = \frac{v_e(t)}{L_{r2}} - \frac{i_{l2}(t)R_{l2}}{L_{r2}} - \frac{v_{Cl2}(t)}{L_{r2}} - \frac{i_{r2}(t)R_{r2}}{L_{r2}} - \frac{L_{l2}}{L_{r2}} \frac{di_{l2}}{dt} \quad (152)$$

Após a representação circuital que relaciona a tensão de entrada ($v_e(t)$), tensão do ramo longitudinal ($v_l(t)$) e da tensão do ramo do receptor ($v_r(t)$) é necessário fazer o equacionamento, também utilizando a segunda lei de Kirchhoff, analisando apenas os ramos longitudinais e os ramos do receptor.

Inicia-se equacionando os ramos longitudinais, assim como descrito detalhadamente no subcapítulo 4.4.4, e descrito pelas equações a seguir.

$$0 = i_{11}(t)R_{11} + v_{11}(t) - i_{12}(t)R_{12} - v_{12}(t) - v_{Cl2}(t) \quad (153)$$

A partir da equação da corrente no indutor, descrita em (21), a equação (153) pode ser descrita da seguinte maneira.

$$i_{11}(t)R_{11} + L_{11} \frac{di_{11}}{dt} = i_{12}(t)R_{12} + L_{12} \frac{di_{12}}{dt} + v_{Cl2}(t) \quad (154)$$

Trabalhando a equação (154) é possível deixar os termos em função das derivadas das correntes dos ramos longitudinais, assim como mostram as equações abaixo.

$$\frac{di_{11}}{dt} = \frac{1}{L_{11}} \left[-i_{11}(t)R_{11} + i_{12}(t)R_{12} + L_{12} \frac{di_{12}}{dt} + v_{Cl2}(t) \right] \quad (155)$$

e

$$\frac{di_{12}}{dt} = \frac{1}{L_{12}} \left[i_{11}(t)R_{11} - i_{12}(t)R_{12} - v_{Cl2}(t) + L_{11} \frac{di_{11}}{dt} \right] \quad (156)$$

Agora, equacionando os ramos do receptor, assim como descrito detalhadamente no subcapítulo 4.4.5, e descrito pelas equações a seguir.

$$0 = i_{r1}(t)R_{r1} + v_{r1}(t) - i_{r2}(t)R_{r2} + v_{r2}(t) \rightarrow i_{r1}(t)R_{r1} + v_{r1}(t) = i_{r2}(t)R_{r2} + v_{r2}(t) \quad (157)$$

A partir da equação de tensão no indutor, dado em (21), obtém-se:

$$i_{r1}(t)R_{r1} + L_{r1} \frac{di_{r1}}{dt} = i_{r2}(t)R_{r2} + L_{r2} \frac{di_{r2}}{dt} \quad (158)$$

Trabalhando a equação (158) é possível deixar os termos em função das derivadas das correntes dos ramos longitudinais, assim como mostram as equações abaixo.

$$\frac{di_{r1}}{dt} = \frac{1}{L_{r1}} \left[-i_{r1}(t)R_{r1} + i_{r2}(t)R_{r2} + L_{r2} \frac{di_{r2}}{dt} \right] \quad (159)$$

e

$$\frac{di_{r2}}{dt} = \frac{1}{L_{r2}} \left[i_{r1}(t)R_{r1} - i_{r2}(t)R_{r2} + L_{r1} \frac{di_{r1}}{dt} \right] \quad (160)$$

Após encontrar todas as equações que envolvem as malhas, a seguir faz-se uma representação em espaço de estados. Lembrando que, nos capítulos anteriores a representação genérica das equações de estado foi explicada mas, resumidamente, é descrito de maneira genérica a seguir.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (161)$$

Para a criação das matrizes de estado, as equações desenvolvidas neste subcapítulo serão utilizadas e, para facilitar o entendimento, a formação das matrizes de estado serão descritas passo a passo.

A partir das equações (127) e (128), que descrevem os ramos da entrada, é possível equacionar em matrizes de estado da maneira mostrada a seguir.

$$\begin{bmatrix} \frac{di_{r1}}{dt} \\ \frac{di_{r2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_{e1}}{L_{e1}} & 0 \\ 0 & -\frac{R_{e2}}{L_{e2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{e1} \\ i_{e2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{e1}} \\ \frac{1}{L_{e2}} \end{bmatrix} v_a \quad (162)$$

As relações de tensão que descrevem as equações dos ramos longitudinais e do receptor têm uma forma peculiar para ser representada na forma de equações de estado. Isso deve-se ao fato de que, em cada equação que descreve a corrente, duas derivadas são encontradas. Para solucionar este problema, usa-se a primeira lei de Kirchhoff (Miller; Vandome; McBrewster, 2010), ou seja, faz-se uma relação entre as correntes longitudinais e transversais para isolar as derivadas.

Para facilitar a compreensão, a seguir encontra-se a equação da corrente do ramo longitudinal (RL_{l1}) a partir da relação das correntes, descrita a seguir.

$$i_l = i_r \rightarrow i_{l1} + i_{l2} = i_{r1} + i_{r2} \rightarrow i_{l1} = i_{r1} + i_{r2} - i_{l2} \quad (163)$$

A partir da relação encontrada em (163), faz-se a seguinte relação.

$$\frac{di_{l1}}{dt} = \frac{di_{r1}}{dt} + \frac{di_{r2}}{dt} - \frac{di_{l2}}{dt} \quad (164)$$

Nota-se que as relações das derivadas das correntes i_{l2} , i_{r1} e i_{r2} que relacionam-se a corrente i_{l1} já foram encontradas anteriormente e são descritas, respectivamente, pelas equações (134), (140) e (156). Então, substituindo estas equações em (164) obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{di_{l1}}{dt} = \left[\frac{v_e(t)}{L_{r1}} - \frac{i_{l1}(t)R_{l1}}{L_{r1}} - \frac{i_{r1}(t)R_{r1}}{L_{r1}} - \frac{L_{l1}}{L_{r1}} \frac{di_{l1}}{dt} \right] + \left[\frac{v_e(t)}{L_{r2}} - \frac{i_{l1}(t)R_{l1}}{L_{r2}} - \frac{i_{r2}(t)R_{r2}}{L_{r2}} - \frac{L_{l1}}{L_{r2}} \frac{di_{l1}}{dt} \right] -$$

$$- \left[\frac{i_{l1}(t)R_{l1}}{L_{l2}} - \frac{i_{l2}(t)R_{l2}}{L_{l2}} - \frac{v_{Cl2}(t)}{L_{l2}} + \frac{L_{l1}}{L_{l2}} \frac{di_{l1}}{dt} \right] \quad (165)$$

A partir da equação (165) é necessário agrupar os termos similares para formar a matriz de estado. Então, faz-se:

$$\begin{aligned} \frac{di_{l1}}{dt} \left[1 + \frac{L_{l1}}{L_{l2}} + \frac{L_{l1}}{L_{r1}} + \frac{L_{l1}}{L_{r2}} \right] = v_e(t) \left[\frac{1}{L_{r1}} + \frac{1}{L_{r2}} \right] - i_{l1}(t) \left[-\frac{R_{l1}}{L_{l2}} + \frac{R_{l1}}{L_{r1}} + \frac{R_{l1}}{L_{r2}} \right] + i_{l2}(t) \left[\frac{R_{l2}}{L_{l2}} \right] - \\ - i_{r1}(t) \left[\frac{R_{r1}}{L_{r1}} \right] - i_{r2}(t) \left[\frac{R_{r2}}{L_{r2}} \right] + v_{Cl2}(t) \left[\frac{1}{L_{l2}} \right] \end{aligned} \quad (166)$$

A partir da relação encontrada em (163), agora faz-se a seguinte relação para encontrar a equação que relaciona a corrente do segundo ramo longitudinal.

$$\frac{di_{l2}}{dt} = \frac{di_{r1}}{dt} + \frac{di_{r2}}{dt} - \frac{di_{l1}}{dt} \quad (167)$$

Substituindo as equações (146), (152) e (155) em (167), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{di_{l2}}{dt} = \left[\frac{v_e(t)}{L_{r1}} - \frac{i_{l2}(t)R_{l2}}{L_{r1}} - \frac{v_{Cl2}(t)}{L_{r1}} - \frac{i_{r1}(t)R_{r1}}{L_{r1}} - \frac{L_{l2}}{L_{r1}} \frac{di_{l2}}{dt} \right] + \\ + \left[\frac{v_e(t)}{L_{r2}} - \frac{i_{l2}(t)R_{l2}}{L_{r2}} - \frac{v_{Cl2}(t)}{L_{r2}} - \frac{i_{r2}(t)R_{r2}}{L_{r2}} - \frac{L_{l2}}{L_{r2}} \frac{di_{l2}}{dt} \right] - \\ - \left[-\frac{i_{l1}(t)R_{l1}}{L_{l1}} + \frac{i_{l2}(t)R_{l2}}{L_{l1}} + \frac{L_{l2}}{L_{l1}} \frac{di_{l2}}{dt} + \frac{v_{Cl2}(t)}{L_{l1}} \right] \end{aligned} \quad (168)$$

A partir da equação (168) também faz-se necessário agrupar os termos similares para formar a matriz de estado. Então, têm-se:

$$\begin{aligned} \frac{di_{l2}}{dt} \left[1 + \frac{L_{l2}}{L_{l1}} + \frac{L_{l2}}{L_{r1}} + \frac{L_{l2}}{L_{r2}} \right] = v_e(t) \left[\frac{1}{L_{r1}} + \frac{1}{L_{r2}} \right] + i_{l1}(t) \left[\frac{R_{l1}}{L_{l1}} \right] - i_{l2}(t) \left[-\frac{R_{l2}}{L_{l1}} + \frac{R_{l2}}{L_{r1}} + \frac{R_{l2}}{L_{r2}} \right] - \\ - i_{r1}(t) \left[\frac{R_{r1}}{L_{r1}} \right] - i_{r2}(t) \left[\frac{R_{r2}}{L_{r2}} \right] - v_{Cl2}(t) \left[\frac{1}{L_{l1}} + \frac{1}{L_{r1}} + \frac{1}{L_{r2}} \right] \end{aligned} \quad (169)$$

Ao comparar a equação (166) com a equação (169) nota-se que, para o ramo RLC, existem mais componentes que compõem a parcela relacionada a tensão no capacitor ($v_{Cl2}(t)$).

Depois da obtenção das equações dos ramos longitudinais, usa-se a equação (163) para encontrar a relação abaixo e, a partir dela, encontrar a primeira equação relacionada ao ramo RL do receptor.

$$\frac{di_{r1}}{dt} = \frac{di_{l1}}{dt} + \frac{di_{l2}}{dt} - \frac{di_{r2}}{dt} \quad (170)$$

Substituindo as equações (132), (150) e (160) em (170), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{di_{l2}}{dt} = & \left[\frac{v_e(t)}{L_{11}} - \frac{i_{l1}(t)R_{l1}}{L_{11}} - \frac{i_{r1}(t)R_{r1}}{L_{11}} - \frac{L_{r1}}{L_{11}} \frac{di_{r1}}{dt} \right] + \\ & + \left[\frac{v_e(t)}{L_{12}} - \frac{i_{l2}(t)R_{l2}}{L_{12}} - \frac{v_{Cl2}(t)}{L_{12}} - \frac{i_{r1}(t)R_{r1}}{L_{12}} - \frac{L_{r1}}{L_{12}} \frac{di_{r1}}{dt} \right] - \\ & - \left[\frac{i_{r1}(t)R_{r1}}{L_{r2}} - \frac{i_{r2}(t)R_{r2}}{L_{r2}} + \frac{L_{r1}}{L_{r2}} \frac{di_{r1}}{dt} \right] \end{aligned} \quad (171)$$

A partir da equação (171) é possível agrupar os termos similares, como é possível observar na equação abaixo.

$$\begin{aligned} \frac{di_{r1}}{dt} \left[1 + \frac{L_{r1}}{L_{11}} + \frac{L_{r1}}{L_{12}} + \frac{L_{r1}}{L_{r2}} \right] = & v_e(t) \left[\frac{1}{L_{11}} + \frac{1}{L_{12}} \right] - i_{l1}(t) \left[\frac{R_{l1}}{L_{11}} \right] - i_{l2}(t) \left[\frac{R_{l2}}{L_{12}} \right] - \\ & - i_{r1}(t) \left[\frac{R_{r1}}{L_{11}} + \frac{R_{r1}}{L_{12}} - \frac{R_{r1}}{L_{r2}} \right] + i_{r2}(t) \left[\frac{R_{r2}}{L_{r2}} \right] - v_{Cl2}(t) \left[\frac{1}{L_{12}} \right] \end{aligned} \quad (172)$$

Por fim, usa-se a equação (163) para encontrar a relação abaixo e, a partir dela, encontrar a segunda equação relacionada ao ramo RL do receptor.

$$\frac{di_{r2}}{dt} = \frac{di_{l1}}{dt} + \frac{di_{l2}}{dt} - \frac{di_{r1}}{dt} \quad (173)$$

Substituindo as equações (138), (150) e (159) em (173), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{di_{l2}}{dt} = & \left[\frac{v_e(t)}{L_{11}} - \frac{i_{l1}(t)R_{l1}}{L_{11}} - \frac{i_{r2}(t)R_{r2}}{L_{11}} - \frac{L_{r2}}{L_{11}} \frac{di_{r2}}{dt} \right] + \\ & + \left[\frac{v_e(t)}{L_{12}} - \frac{i_{l2}(t)R_{l2}}{L_{12}} - \frac{v_{Cl2}(t)}{L_{12}} - \frac{i_{r2}(t)R_{r2}}{L_{12}} - \frac{L_{r2}}{L_{12}} \frac{di_{r2}}{dt} \right] - \\ & - \left[-\frac{i_{r1}(t)R_{r1}}{L_{r1}} + \frac{i_{r2}(t)R_{r2}}{L_{r1}} + \frac{L_{r2}}{L_{r1}} \frac{di_{r2}}{dt} \right] \end{aligned} \quad (174)$$

A partir da equação (171) agrupa-se os termos similares de acordo com o mostrado abaixo.

$$\begin{aligned} \frac{di_{r2}}{dt} \left[1 + \frac{L_{r2}}{L_{11}} + \frac{L_{r2}}{L_{12}} + \frac{L_{r2}}{L_{r1}} \right] = & v_e(t) \left[\frac{1}{L_{11}} + \frac{1}{L_{12}} \right] - i_{l1}(t) \left[\frac{R_{l1}}{L_{11}} \right] - i_{l2}(t) \left[\frac{R_{l2}}{L_{12}} \right] + \\ & + i_{r1}(t) \left[\frac{R_{r1}}{L_{r1}} \right] - i_{r2}(t) \left[\frac{R_{r2}}{L_{11}} + \frac{R_{r2}}{L_{12}} - \frac{R_{r2}}{L_{r1}} \right] - v_{Cl2}(t) \left[\frac{1}{L_{12}} \right] \end{aligned} \quad (175)$$

A partir das equações parciais que relacionam as correntes dos ramos longitudinais e do receptor, é possível criar um modelo em espaço de estado que representam o circuito. O vetor

de estados $(\mathbf{x}(t))''$ é dado por:

$$\mathbf{x}(t)'' = \begin{bmatrix} i_{l1}(t) \\ i_{l2}(t) \\ i_{r1}(t) \\ i_{r2}(t) \end{bmatrix} \quad (176)$$

Nota-se que usou-se (") para representar que os vetores e as matrizes representadas ainda não são as matrizes de estado final. Para este caso, (") não representam o sistema transposto.

Já o vetor da derivada do vetor de estados do sistema $(\dot{\mathbf{x}}(t))''$ é dado por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t)'' = \begin{bmatrix} \frac{di_{l1}}{dt} \\ \frac{di_{l2}}{dt} \\ \frac{di_{r1}}{dt} \\ \frac{di_{r2}}{dt} \end{bmatrix} \quad (177)$$

Então, a partir das equações (166), (169), (172) e (175) é possível criar a matriz parcial de estados $[S]$, dada abaixo.

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{R_{l1}}{L_{l2}} - \frac{R_{l1}}{L_{r1}} - \frac{R_{l1}}{L_{r2}} & \frac{R_{l2}}{L_{r2}} & -\frac{R_{r1}}{L_{r1}} & -\frac{R_{r2}}{L_{r2}} \\ \frac{R_{l1}}{L_{l1}} & \frac{R_{l2}}{L_{l1}} - \frac{R_{l2}}{L_{r1}} - \frac{R_{l2}}{L_{r2}} & -\frac{R_{r1}}{L_{r1}} & -\frac{R_{r2}}{L_{r2}} \\ -\frac{R_{l1}}{L_{l1}} & -\frac{R_{l2}}{L_{l2}} & -\frac{R_{r1}}{L_{l1}} - \frac{R_{r1}}{L_{l2}} + \frac{R_{r1}}{L_{r2}} & \frac{R_{r2}}{L_{r2}} \\ -\frac{R_{l1}}{L_{l1}} & -\frac{R_{l2}}{L_{l2}} & \frac{R_{r1}}{L_{r1}} & -\frac{R_{r2}}{L_{l1}} - \frac{R_{r2}}{L_{l2}} + \frac{R_{r2}}{L_{r1}} \end{bmatrix} \quad (178)$$

Ainda observando as equações das correntes nota-se que a componente que relaciona a tensão no indutor do ramo RLC longitudinal (v_{C12}) às equações das correntes ainda não foi incluída nas matrizes de estado. Antes da adição na matriz de estados, é necessário relembrar a equação que envolve a tensão no indutor.

$$i_{l2} = i_{R22} + i_{c2} \rightarrow i_{c2} = i_{l2} + i_{R22} \quad (179)$$

Agora, substituindo a equação que descreve a corrente no capacitor (22), obtêm-se:

$$C_{12} \frac{dv_{C12}}{dt} = i_{12} - \frac{v_{C2}}{R_{122}} \quad (180)$$

Reorganizando a equação (180), obtêm-se:

$$\frac{dv_{C12}}{dt} = \frac{1}{C_{12}} \left[i_{12} - \frac{v_{C2}}{R_{122}} \right] \quad (181)$$

O vetor de estados $[x']$ agora é dado por:

$$[x'] = \begin{bmatrix} i_{11}(t) \\ i_{12}(t) \\ i_{r1}(t) \\ i_{r2}(t) \\ v_{C12} \end{bmatrix} \quad (182)$$

Nota-se que agora usou-se (') para representar que os vetores e as matrizes representadas também não são as matrizes de estado final mas, agora, inclui-se a parcela do capacitor na matriz [S].

Já o vetor da derivada do vetor de estados do sistema novo $[\dot{x}']$ é dado por:

$$[\dot{x}'] = \begin{bmatrix} \frac{di_{11}}{dt} \\ \frac{di_{12}}{dt} \\ \frac{di_{r1}}{dt} \\ \frac{di_{r2}}{dt} \\ \frac{dv_{C12}}{dt} \end{bmatrix} \quad (183)$$

A matriz de estados incluindo a equação do capacitor, que foram descritas pelas equações (180) e (181), é dada abaixo. Nota-se que a matriz será chamada de [SK] e, além disso, ela será

dividida em duas partes apenas para facilitar o alocamento das equações, isso porque a matriz é extensa.

$$[SK] = \begin{bmatrix} \frac{R_{11}}{L_{12}} - \frac{R_{11}}{L_{r1}} - \frac{L_{11}}{L_{r2}} & \frac{R_{12}}{L_{r2}} \\ \frac{R_{11}}{L_{11}} & \frac{R_{12}}{L_{11}} - \frac{R_{12}}{L_{r1}} - \frac{L_{12}}{L_{r2}} \\ -\frac{R_{11}}{L_{11}} & -\frac{R_{12}}{L_{12}} \\ -\frac{R_{11}}{L_{11}} & -\frac{R_{12}}{L_{12}} \\ 0 & -\frac{1}{C_{12}} \\ -\frac{R_{r1}}{L_{r1}} & -\frac{R_{r2}}{L_{r2}} & \frac{1}{L_{12}} \\ -\frac{R_{r1}}{L_{r1}} & -\frac{R_{r2}}{L_{r2}} & \frac{1}{L_{11}} - \frac{1}{L_{r1}} - \frac{1}{L_{r2}} \\ -\frac{R_{r1}}{L_{11}} - \frac{R_{r1}}{L_{12}} + \frac{R_{r1}}{L_{r2}} & \frac{R_{r2}}{L_{r2}} & -\frac{1}{L_{12}} \\ \frac{R_{r1}}{L_{r1}} & -\frac{R_{r2}}{L_{11}} - \frac{R_{r2}}{L_{12}} + \frac{R_{r2}}{L_{r1}} & -\frac{1}{L_{12}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_{122} \times C_{12}} \end{bmatrix} \quad (184)$$

Agora, partir da matriz dada em (184) é necessário incluir as parcelas relacionadas aos ramos do emissor, descritas em (162). Então, finalmente, o vetor $[x]$ é dado por:

$$[x] = \begin{bmatrix} i_{e1}(t) \\ i_{e2}(t) \\ i_{11}(t) \\ i_{12}(t) \\ i_{r1}(t) \\ i_{r2}(t) \\ v_{C12} \end{bmatrix} \quad (185)$$

Já o vetor da derivada do vetor de estados do sistema $[\dot{x}]$ é dado por:

$$[\dot{x}] = \begin{bmatrix} \frac{di_{e1}}{dt} \\ \frac{di_{e2}}{dt} \\ \frac{di_{l1}}{dt} \\ \frac{di_{l2}}{dt} \\ \frac{di_{r1}}{dt} \\ \frac{di_{r2}}{dt} \\ \frac{dv_{C12}}{dt} \end{bmatrix} \quad (186)$$

O vetor de entradas, dado por $[B]$, é descrito abaixo.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{e1}} \\ \frac{1}{L_{e2}} \\ \frac{1}{L_{r1}} + \frac{1}{L_{r2}} \\ \frac{1}{L_{r1}} + \frac{1}{L_{r2}} \\ \frac{1}{L_{l1}} + \frac{1}{L_{l2}} \\ \frac{1}{L_{l1}} + \frac{1}{L_{l2}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (187)$$

Por fim, a matriz de estados $[A]$ final, é a junção das matrizes de estados do emissor, dos

ramos longitudinais e transversais e da tensão no capacitor. Essa matriz é dada abaixo.

$$[A] = \begin{bmatrix} -\frac{R_{e1}}{L_{e1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_{e2}}{L_{e2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_{l1}}{L_{l2}} - \frac{R_{l1}}{L_{r1}} - \frac{L_{l1}}{L_{r2}} & \frac{R_{l2}}{L_{r2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R_{l1}}{L_{l1}} & \frac{R_{l2}}{L_{l1}} - \frac{R_{l2}}{L_{r1}} - \frac{L_{l2}}{L_{r2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_{l1}}{L_{l1}} & -\frac{R_{l2}}{L_{l2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_{l1}}{L_{l1}} & -\frac{R_{l2}}{L_{l2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_{l2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{R_{r1}}{L_{r1}} & -\frac{R_{r2}}{L_{r2}} & \frac{1}{L_{l2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{R_{r1}}{L_{r1}} & -\frac{R_{r2}}{L_{r2}} & -\frac{1}{L_{l1}} - \frac{1}{L_{r1}} - \frac{1}{L_{r2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{R_{r1}}{L_{l1}} - \frac{R_{r1}}{L_{l2}} + \frac{R_{r1}}{L_{r2}} & \frac{R_{r2}}{L_{r2}} & -\frac{1}{L_{l2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{R_{r1}}{L_{r1}} & -\frac{R_{r2}}{L_{l1}} - \frac{R_{r2}}{L_{l2}} + \frac{R_{r2}}{L_{r1}} & -\frac{1}{L_{l2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_{l22} \times C_{l2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (188)$$

A partir da matriz $[A]$, representada na equação (188) é possível concluir que, as duas primeiras linhas correspondem aos termos relacionados as correntes dos ramos RL do receptor. Em seguida, as outras quatro linhas correspondem as equações das correntes nos ramos longitudinais e transversais e, por fim, a ultima linha corresponde a equação da derivada de tensão no capacitor no ramo RLC longitudinal. Nota-se também que a ultima colina da matriz corresponde a parcela da tensão no capacitor que aparece na equação das correntes.

Nota-se, contudo, que o termo que multiplica a derivada da corrente que está sendo analisada ainda não foi adicionado na equação. Esse termo será chamado de T e pode ser equacionado assim como mostrado abaixo.

A partir da equação (166) observa-se que há um termo que está multiplicando com a derivada da corrente do ramo um, como observa-se:

$$\frac{di_{l1}}{dt} \left[1 + \frac{L_{l1}}{L_{l2}} + \frac{L_{l1}}{L_{r1}} + \frac{L_{l1}}{L_{r2}} \right] \quad (189)$$

Então, o termo T_{l1} é dado por:

$$T_{l1} = \frac{1}{1 + \frac{L_{l1}}{L_{l2}} + \frac{L_{l1}}{L_{r1}} + \frac{L_{l1}}{L_{r2}}} \quad (190)$$

Da mesma maneira que obteve-se o termo relacionado a corrente longitudinal do primeiro ramo, partir da equação (169), o termo T_{l2} é dado por:

$$T_{l2} = \frac{1}{1 + \frac{L_{l2}}{L_{l1}} + \frac{L_{l2}}{L_{r1}} + \frac{L_{l2}}{L_{r2}}} \quad (191)$$

A partir da equação (172) observa-se que há um termo que está multiplicando com a derivada da corrente do ramo um, como observa-se:

$$\frac{di_{r1}}{dt} \left[1 + \frac{L_{r1}}{L_{l1}} + \frac{L_{r1}}{L_{l2}} + \frac{L_{r1}}{L_{r2}} \right] \quad (192)$$

Agora, o termo T_{r1} é dado por:

$$T_{r1} = \frac{1}{1 + \frac{L_{r1}}{L_{l1}} + \frac{L_{r1}}{L_{l2}} + \frac{L_{r1}}{L_{r2}}} \quad (193)$$

Da mesma maneira, a partir da equação (175), o termo T_{r2} é dado por:

$$T_{r2} = \frac{1}{1 + \frac{L_{r2}}{L_{l1}} + \frac{L_{r2}}{L_{l2}} + \frac{L_{r2}}{L_{r1}}} \quad (194)$$

Então, todos os termos que estão relacionados as equações das correntes longitudinais e do receptor do modelo são divididos pelos termos auxiliar. Por exemplo, o termo T_{l1} divide toda a linha da matriz $[A]$ que está relacionada a este termo. Além disso, os termos da matriz de entradas $[B]$ também são divididos pelos seus respectivos termos.

4.6 Obtenção das equações de corrente e tensão do circuito π equivalente

Baseando-se nas equações de estado, dada em (29), na equação que relaciona a tensão no indutor com a derivada de sua corrente, dada em (21) e na equação que relaciona a corrente no capacitor com a derivada de sua tensão, dada em (22), é possível modelar um circuito elétrico e representá-lo por matrizes de estado. Contudo, ao analisar o circuito π equivalente, nota-se que, para aumentar a precisão do modelo, mais polos devem ser usados, acarretando um aumento na quantidade de ramos.

No subcapítulo anterior, demonstrou-se a representação em espaço de estados de um circuito simples, utilizando apenas dois ramos em cada parcela do modelo. Apesar disso, as matrizes de estado já tem razoável dificuldade para serem encontradas. Essa dificuldade deve-se muito ao fato da relação entre as correntes dos ramos longitudinais e transversais.

Agora, como visto em Balestero (2022), o sistema é representado por 15, 30, 45 e até 100 polos, gerando uma certa complexidade no equacionamento do sistema. A partir dessa dificuldade, fez-se necessário a criação de uma regra de formação genérica que sirva tanto para o sistema com 2 polos quanto para o sistema com 100 polos.

Então, para representar as regras de formação das matrizes, usa-se alguns termos de nomenclatura para facilitar o entendimento e, futuramente, permitir que os somatórios sejam desenvolvidos. Esses termos são dados da seguinte maneira:

- Emissor: nos ramos RL os termos são dados por R_{ei} e L_{ei} , onde ' i ' representa o ramo que está sendo referido. Já para ramos RLC os termos são dados por R_{ei} , L_{ei} , C_{ei} e R_{ei2} . Além disso, o ultimo termo do emissor é representado por ' ee ';
- Longitudinal: nos ramos RL os termos são dados por R_{lj} e L_{lj} , onde ' j ' representa o ramo que está sendo referido. Já para ramos RLC os termos são dados por R_{lj} , L_{lj} , C_{lj} e R_{lj2} . Além disso, o ultimo termo longitudinal é representado por ' ll ';
- Receptor: nos ramos RL os termos são dados por R_{rk} e L_{rk} , onde ' k ' representa o ramo que está sendo referido. Já para ramos RLC os termos são dados por R_{rk} , L_{rk} , C_{rk} e R_{rk2} . Além disso, o ultimo termo do receptor é representado por ' rr '.

Assim como, para o modelo representado por dois polos, é necessário dividir a matriz de estados $[A]$, que tem dimensão $2(e + l + r) \times 2(e + l + r)$, em outras submatrizes que são dadas

da seguinte forma.

$$[A] = \begin{bmatrix} [J] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & T \times [S] & & T \times [K] \\ 0 & & & \\ [& & P &] \end{bmatrix}_{2(e+l+r) \times 2(e+l+r)} \quad (195)$$

A submatriz representada por $[J]$ contempla a derivadas das correntes nos indutores dos ramos do emissor, assim como descrito no exemplo do subcapítulo anterior pelas equações (159) e (159). Essa submatriz tem dimensão de $e \times e$ e sua regra de formação genérica é dada por:

$$[J] = \begin{bmatrix} -\frac{R_{e1}}{L_{e1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{R_{e2}}{L_{e2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{R_{ee}}{L_{ee}} \end{bmatrix}_{e \times e} \quad (196)$$

Então, a submatriz $[J]$ têm apenas a diagonal principal com valores, o restante é preenchido com zeros. A diagonal principal é dada por menos a resistência do ramo dividido pela indutância do ramo. Ou seja, o ramo 1 do emissor têm seu termo da diagonal dado por $-R_{e1}/L_{e1}$. Esse equacionamento é referente tanto ao ramo real, chamado de RL, quanto no ramo complexo, chamado de RLC e, a parcela do capacitor do ramo RLC será descrita posteriormente.

Relacionando a submatriz genérica $[J]$ com o equacionamento do sistema desenvolvido no subcapítulo anterior, essa submatriz é representada da seguinte maneira.

$$[J] = \begin{bmatrix} -\frac{R_{e1}}{L_{e1}} & 0 \\ 0 & -\frac{R_{e2}}{L_{e2}} \end{bmatrix} \quad (197)$$

Observando a matriz $[A]$, descrita em (195), o termo T é um auxiliar que surge a fim de simplificar as equações das submatrizes $[S]$ e $[K]$. Sua representação genérica para os termos longitudinais é dada a partir do seguinte somatório:

$$T_{lj} = \frac{1}{\sum \frac{L_{lj}}{L_{lj}} + \cdots + \frac{L_{lj}}{L_{ll}} + \frac{L_{lj}}{L_{r1}} + \cdots + \frac{L_{lj}}{L_{rr}}} \quad (198)$$

Ou seja, o termo T corresponde a divisão de 1 por um somatório. Este somatório é composto pela divisão da indutância do ramo em análise por todas as outras indutâncias. Ou seja, considerando dois ramos longitudinais e dois ramos no receptor o termo T referente ao ramo

RL_{11} é dado por:

$$T_{11} = \frac{1}{\sum \frac{L_{11}}{L_{11}} + \frac{L_{11}}{L_{12}} + \frac{L_{11}}{L_{r1}} + \frac{L_{11}}{L_{r2}}} \quad (199)$$

O termo T referente ao ramo RL_{12} é dado por:

$$T_{12} = \frac{1}{\sum \frac{L_{12}}{L_{11}} + \frac{L_{12}}{L_{12}} + \frac{L_{12}}{L_{r1}} + \frac{L_{12}}{L_{r2}}} \quad (200)$$

Agora, o termo T têm sua representação genérica para os termos do receptor dado a partir do seguinte somatório:

$$T_{1k} = \frac{1}{\sum \frac{L_{1k}}{L_{1k}} + \dots + \frac{L_{1k}}{L_{11}} + \frac{L_{1k}}{L_{r1}} + \dots + \frac{L_{1k}}{L_{rr}}} \quad (201)$$

Considerando os mesmos dois ramos longitudinais e dois ramos no receptor, o termo T referente ao ramo RL_{r1} é dado por:

$$T_{r1} = \frac{1}{\sum \frac{L_{r1}}{L_{11}} + \frac{L_{r1}}{L_{12}} + \frac{L_{r1}}{L_{r1}} + \frac{L_{r1}}{L_{r2}}} \quad (202)$$

Já o termo T referente ao ramo RL_{r2} é dado por:

$$T_{r2} = \frac{1}{\sum \frac{L_{r2}}{L_{11}} + \frac{L_{r2}}{L_{12}} + \frac{L_{r2}}{L_{r1}} + \frac{L_{r2}}{L_{r2}}} \quad (203)$$

No subcapítulo anterior todos os termos relacionados ao modelo utilizando dois polos foram dados pelas equações (189) à (194). Além disso, mostrou-se o desenvolvimento e a obtenção das equações passo a passo.

A submatriz das derivadas das correntes nos indutores dos ramos longitudinais e do receptor é representada por $[S]$. Essa submatriz tem dimensão de $(l+r) \times (l+r)$, que representa a quantidade de ramos RL e RLC longitudinal e no receptor. Sua regra de formação genéricas é dadas por:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_1 & \frac{R_{12}}{L_{12}} & \dots & -\frac{R_{rr}}{L_{rr}} \\ \frac{R_{11}}{L_{11}} & S_2 & \dots & -\frac{R_{rr}}{L_{rr}} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\frac{R_{11}}{L_{11}} & -\frac{R_{12}}{L_{12}} & \dots & S_r \end{bmatrix}_{(l+r) \times (l+r)} \quad (204)$$

Observando a matriz genérica $[S]$, dada pela equação (204), os termos que não fazem parte da diagonal principal positiva são dados por uma divisão simples. Além disso, quando o termo

fora da diagonal principal relaciona-se com a equação da corrente do mesmo "tipo" de ramo (longitudinal ou do receptor), seu valor é positivo. Já para o termo que também está fora da diagonal principal e relaciona-se com a equação da corrente de outro ramo, seu valor é negativo. Então, de forma genérica, os termos da diagonal principal relacionados aos ramos longitudinais, dados por S_1 , são representados por:

$$S_1 = \sum \frac{R_{l1}}{L_{l2}} + \frac{R_{l1}}{L_{l3}} + \dots - \frac{R_{l1}}{L_{r(r-1)}} - \frac{R_{l1}}{L_{rr}} \quad (205)$$

Agora, os termos da diagonal principal relacionados aos ramos do receptor, dados por S_r , são representados por:

$$S_r = \sum -\frac{R_{rr}}{L_{l1}} - \frac{R_{rr}}{L_{l2}} + \dots + \frac{R_{rr}}{L_{r(r-1)}} \quad (206)$$

Nota-se que, a indutância do próprio ramo não entra no somatório de S . Ou seja, para o primeiro ramo longitudinal o termo L_{l1} não entra no equacionamento.

Então, também relacionando a submatriz genérica $[S]$ com o equacionamento do sistema desenvolvido no subcapítulo anterior, essa submatriz é representada da seguinte maneira.

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{R_{l1}}{L_{l2}} - \frac{R_{l1}}{L_{r1}} - \frac{R_1}{L_{r2}} & \frac{R_{l2}}{L_{r2}} & -\frac{R_{r1}}{L_{r1}} & -\frac{R_{r2}}{L_{r2}} \\ \frac{R_{l1}}{L_{l1}} & \frac{R_{l2}}{L_{l1}} - \frac{R_{l2}}{L_{r1}} - \frac{R_2}{L_{r2}} & -\frac{R_{r1}}{L_{r1}} & -\frac{R_{r2}}{L_{r2}} \\ -\frac{R_{l1}}{L_{l1}} & -\frac{R_{l2}}{L_{l2}} & -\frac{R_{r1}}{L_{l1}} - \frac{R_{r1}}{L_{l2}} + \frac{R_{r1}}{L_{r2}} & \frac{R_{r2}}{L_{r2}} \\ -\frac{R_{l1}}{L_{l1}} & -\frac{R_{l2}}{L_{l2}} & \frac{R_{r1}}{L_{r1}} & -\frac{R_{r2}}{L_{l1}} - \frac{R_{r2}}{L_{l2}} + \frac{R_{r2}}{L_{r1}} \end{bmatrix} \quad (207)$$

Já a submatriz $[K]$ representa a parcela que a tensão dos capacitores exerce nas equações da correntes nos indutores dos ramos longitudinais e do receptor. Essa submatriz tem dimensão de $(l+r) \times (l+r)$. Então, para ramos RLC , um somatório é relacionado a sua respectiva equação e, para o restante das equações, uma divisão simples é relacionada as demais equações. Nota-se que, se o ramo RLC for longitudinal, as demais equações longitudinais tem um valor positivo relacionado a elas, já as demais equações transversais tem um valor negativo relacionado a elas. Além disso, para ramos RL , sua referente colina é zero. Sua regra de formação genérica é dada

por:

$$[K] = \begin{bmatrix} -\sum \left(\frac{1}{L_{l2}} + \dots + \frac{1}{L_{r1}} + \dots \frac{1}{L_{rr}} \right) & \dots & & -\frac{1}{L_{rr}} \\ & \frac{1}{L_{l1}} & \dots & -\frac{1}{L_{rr}} \\ & \vdots & \dots & \vdots \\ -\frac{1}{L_{l1}} & \dots & \dots & \frac{1}{L_{rr}} \\ & \vdots & \dots & \vdots \\ -\frac{1}{L_{l1}} & \dots & -\sum \left(\frac{1}{L_{l1}} + \dots + \frac{1}{L_{r1}} + \dots \frac{1}{L_{r(r-1)}} \right) & \dots \end{bmatrix}_{(l+r) \times (l+r)} \quad (208)$$

Da mesma maneira, para tornar o equacionamento mais visível utiliza-se o equacionamento realizado no subcapítulo anterior para exemplificar a representação da submatriz $[K]$. Então, considerando dois ramos longitudinais e dois ramos transversais no receptor, têm-se a seguinte matriz.

$$[K] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L_{l2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_{l1}} - \frac{1}{L_{r1}} - \frac{1}{L_{r2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_{l2}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_{l2}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (209)$$

Nota-se, observando a equação (209), que três colunas são nulas. Este fato está relacionado aos ramos RL, ou seja, não têm capacitor em seus ramos.

A submatriz que representa a tensão dos capacitores dos ramos do emissor, longitudinal e do receptor é representada por $[P]$. Essa submatriz é dividida em $[P_1]$ e $[P_2]$.

$$[P] = \begin{bmatrix} [P_1] & [P_2] \end{bmatrix}_{(e+l+r) \times 2(e+l+r)} \quad (210)$$

As regras de formação de P_1 e P_2 são dadas por:

$$[P_1] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_{e1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_{e2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{C_{rr}} \end{bmatrix}_{(e+l+r) \times (e+l+r)} \quad (211)$$

Nota-se que a submatriz $[P_1]$, que tem dimensão $(e+l+r) \times (e+l+r)$, representa a fração da equação da tensão nos indutores dos ramos RLC que relaciona-se a corrente do mesmo ramo.

$$[P_2] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_{e1} \times R_{e12}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_{e2} \times R_{e22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{C_{rr} \times R_{rr2}} \end{bmatrix}_{(e+l+r) \times (e+l+r)} \quad (212)$$

Nota-se também que a submatriz $[P_2]$, que tem dimensão $(e+l+r) \times (e+l+r)$, representa a fração da equação da tensão nos indutores dos ramos RLC que relaciona-se a própria tensão do indutor.

Utiliza-se o equacionamento realizado no subcapítulo anterior para exemplificar a representação da submatriz $[P_1]$. Então, considerando dois ramos longitudinais e dois ramos transversais no receptor e também dois ramos transversais no receptor, têm-se a seguinte matriz.

$$[P_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (213)$$

Já a submatriz $[P_2]$ é descrita da seguinte forma:

$$[P_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_{12} \times R_{122}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (214)$$

Observando as matrizes descritas nas equações (213) e (214) nota-se que, para ramos reais, ou seja, ramos RL, a referente linha e coluna é zero. Isso deve-se ao fato dos ramos reais não conterem capacitores em sua formação.

A representação genérica do vetor de entradas, representado pela matriz $[B]$, é a parcela da equação das correntes e tensões que está relacionada a tensão de entrada. Sua representação genérica é dada por:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{e1}} \\ \vdots \\ \frac{1}{L_{ee}} \\ \sum \frac{1}{L_{r1}} + \frac{1}{L_{r2}} + \cdots \frac{1}{L_{rr}} \\ \vdots \\ \sum \frac{1}{L_{r1}} + \frac{1}{L_{r2}} + \cdots \frac{1}{L_{rr}} \\ \sum \frac{1}{L_{l1}} + \frac{1}{L_{l2}} + \cdots \frac{1}{L_{ll}} \\ \vdots \\ \sum \frac{1}{L_{l1}} + \frac{1}{L_{l2}} + \cdots \frac{1}{L_{ll}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{2(e+l+r)} \quad (215)$$

Onde os termos da matriz $[B]$ que estão relacionados aos ramos do emissor são dados por uma divisão simples e vai do primeiro ramo ao ultimo ramo do emissor, representado por 'ee', como dito anteriormente.

Agora, os termos relacionados aos ramos longitudinais são dados por um somatório formado por divisões simples que vai do primeiro ao ultimo ramo do receptor, representado por 'rr'. Ou seja, na parcela relacionada aos ramos longitudinais, as indutâncias que entram no somatório são as relacionadas ao receptor.

Já os termos relacionados aos ramos do receptor também são dados por um somatório formado por divisões simples que vai do primeiro ao ultimo ramo longitudinal, representado por 'll'. E, na parcela relacionada aos ramos do receptor, as indutâncias que entram no somatório são as relacionadas ao ramo longitudinal.

Utiliza-se o equacionamento realizado no subcapítulo anterior para exemplificar a representação da matriz $[B]$. Então, considerando dois ramos longitudinais e dois ramos transversais

no receptor e também dois ramos transversais no receptor, têm-se a seguinte matriz.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{e1}} \\ \frac{1}{L_{e2}} \\ \frac{1}{L_{r1}} + \frac{1}{L_{r2}} \\ \frac{1}{L_{r1}} + \frac{1}{L_{r2}} \\ \frac{1}{L_{l1}} + \frac{1}{L_{l2}} \\ \frac{1}{L_{l1}} + \frac{1}{L_{l2}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (216)$$

Por fim, o vetor de estados, representado por x , é dado da seguinte maneira:

$$x = \begin{bmatrix} i_{e1} \\ \vdots \\ i_{ee} \\ i_{l1} \\ \vdots \\ i_{ll} \\ i_{r1} \\ \vdots \\ i_{rr} \\ v_{Ce1} \\ \vdots \\ v_{Crr} \end{bmatrix} \quad (217)$$

Então, observando o vetor de estados representado na equação (217), nota-se que ele contempla todas as correntes dos ramos, iniciando pela corrente do primeiro ramo do emissor até a última corrente do emissor, em seguida têm a corrente do primeiro ramo longitudinal até a corrente do último ramo longitudinal e a corrente do primeiro ramo do receptor até a corrente do último ramo do receptor. Em seguida, segue-se a mesma lógica para a tensão nos capacitores; ou seja, a tensão no capacitor do primeiro ramo do emissor até a tensão no capacitor do último

ramo do receptor.

Tendo em vista o vetor de estados, descrito genericamente na equação (217), o a derivada do vetor de estados é dado da seguinte forma:

$$[\dot{x}] = \begin{bmatrix} \frac{di_{e1}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{di_{ee}}{dt} \\ \\ \frac{di_{l1}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{di_{ll}}{dt} \\ \\ \frac{di_{r1}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{di_{rr}}{dt} \\ \\ \frac{dv_{Ce1}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dv_{Cr}}{dt} \end{bmatrix} \quad (218)$$

4.7 Síntese do capítulo

Nesse capítulo mostrou-se que, a partir de um modelo desenvolvido em programas para análise de transitórios eletromagnéticos, é possível encontrar equações de estado, a partir das correntes nos capacitores e das tensões nos indutores, que o represente. Além disso, é necessário fazer uma relação entre as correntes, utilizando as leis de Kirchhoff, para isolar os termos desejados.

Para a solução com inúmeros ramos com funções parciais reais (RL) e ramos com funções parciais complexas (RLC), é necessário desenvolver uma regra de formação para que o circuito possa ser simulado em qualquer outro software de programação.

Então, a partir de inúmeras soluções do modelo, para diferentes tipos e quantidades ramos longitudinais, criou-se uma matriz de formação genérica que pode ser utilizada para qualquer quantidade de polos.

5 VALIDAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CORRENTE E TENSÃO DO CIRCUITO π EQUIVALENTE

5.1 Introdução

Sabendo que a partir das derivadas das correntes nos indutores e das derivadas das tensões nos capacitores (Alexander; Sadiku, 2016) é possível obter a modelagem do circuito π equivalente. Além disso, a partir das representações por equações de estado é possível criar uma matriz de formação genérica, ou seja, para qualquer quantidade de ramos essa matriz simula o circuito elétrico, assim como foi visto e, com isso, é possível desenvolver scripts computacionais que descrevem este circuito

O desenvolvimento do modelo, inicialmente, foi simulado com uma baixa quantidade de polos a fim de verificar se a generalização das equações de estado desenvolvidas neste estudo estão corretas. A partir da validação do equacionamento, aumentou-se o número de polos para comparar as equações genéricas de estado com o modelo Marti (1982), já consagrado na literatura específica na área de transitórios eletromagnéticos.

Além disso, o trabalho visa validar a generalização das matrizes de estados desenvolvidas no capítulo 4. A validação do modelo representado pelo circuito π equivalente foi desenvolvido em Balestero (2022).

Dessa forma, neste capítulo, as equações de estado desenvolvidas anteriormente serão implementadas computacionalmente no software MATLAB a fim de validar a representação do modelo. Contudo, salienta-se que as equações desenvolvidas neste trabalho podem ser utilizadas em qualquer software de programação.

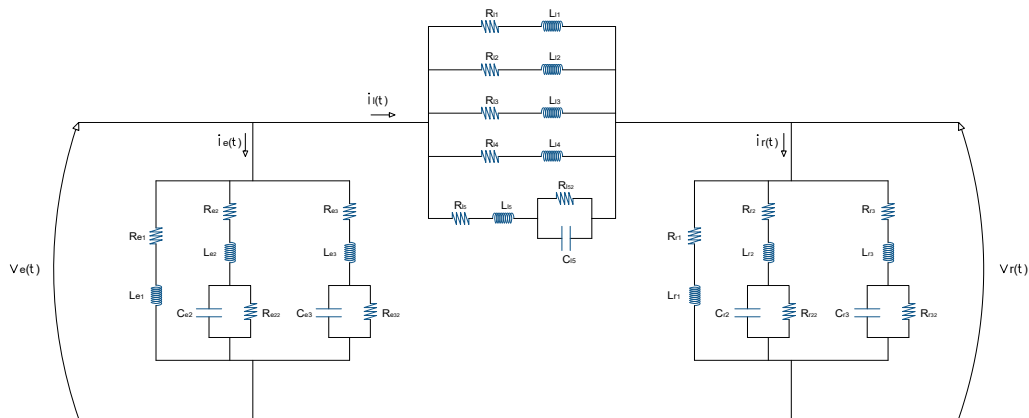
5.2 Simulações

Inicialmente observa-se um circuito π equivalente com 5 polos que, por elementos de circuitos, é representado por um ramo real (RL) e dois ramos complexos (RLC) transversais, tanto no emissor quanto no receptor da linha. Já longitudinalmente o circuito é composto por quatro ramos reais (RL) e um ramo complexo (RLC).

Para uma melhor compreensão do modelo, a figura 40 representa cada elemento de circuito, as conexões entre os ramos e o tipo de ramo, descrito anteriormente. Além disso, a partir da figura que descreve o circuito π equivalente com 5 polos, é possível observar as tensões no emissor ($v_e(t)$) e no receptor ($v_r(t)$). Já a corrente no emissor é dada por ($i_e(t)$), a corrente longitudinal é dada por ($i_c(t)$) e a corrente no receptor é dada por ($i_r(t)$).

Nota-se que os elementos de circuitos descritos na figura abaixo são dados de forma genérica. Adiante duas tabelas trarão os valores de cada termo do circuito.

Figura 40 - Modelo π equivalente descrito por elementos de circuitos utilizando 5 polos.



Fonte: Autoria própria.

É importante ressaltar que, mesma para uma pequena quantidade de polos, já há uma considerável quantidade de ramos. Por conta disso, os elementos de circuitos descritos na figura 40 não estão em um tamanho tão grande. Contudo, a figura é importante para entender melhor o circuito que foi descrito.

A tabela abaixo traz os valores dos elementos de circuito que compõem os ramos reais e foram representados na figura 40.

Tabela 1 - Parâmetros dos ramos reais para o circuito com 5 polos.

Resistência (Ω)	Indutância (H)
$R_{e1} = R_{r1} = 3,5368 \times 10^3$	$L_{e1} = L_{r1} = 1,3134 \times 10^2$
$R_{11} = 4,3610 \times 10^1$	$L_{11} = 4,6336 \times 10^3$
$R_{12} = 6,4033$	$L_{12} = 3,2680 \times 10^2$
$R_{13} = 1,1850 \times 10^2$	$L_{13} = 2,0503 \times 10^3$
$R_{14} = 9,6406 \times 10^2$	$L_{14} = 2,6025 \times 10^3$

Fonte: Autoria própria.

Agora, a tabela abaixo traz os valores dos elementos de circuito que compõem os ramos complexos e também foram representados na figura 40.

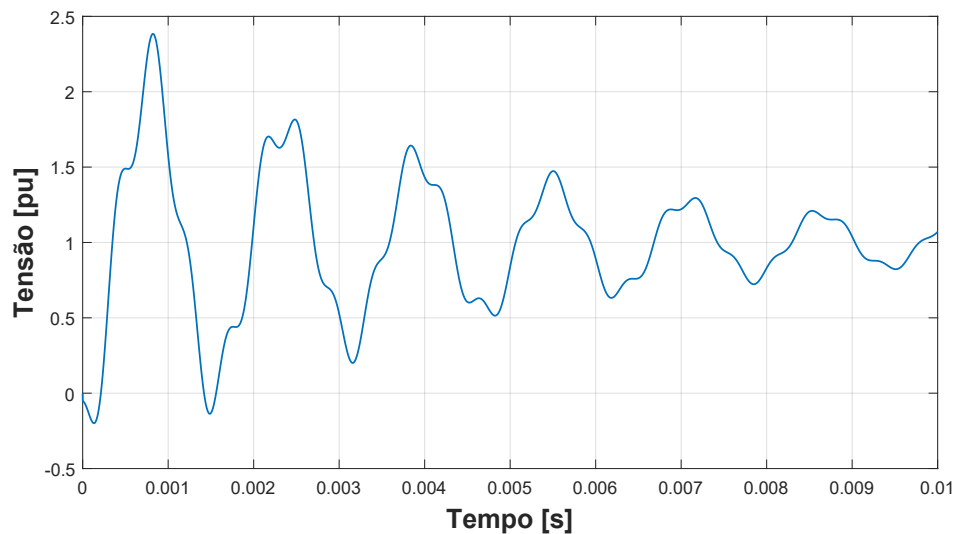
Tabela 2 - Parâmetros dos ramos complexos para o circuito com 5 polos.

Resistência 1 (Ω)	Resistência 2 (Ω)	Indutância (H)	Capacitância (F)
$R_{e2} = 4,990 \times 10^1$	$R_{e22} = -1,164 \times 10^4$	$L_{e2} = 5,344 \times 10^1$	$C_{e2} = 2,843 \times 10^{-1}$
$R_{e3} = 1,133 \times 10^2$	$R_{e32} = -5,011 \times 10^3$	$L_{e3} = 1,407 \times 10^1$	$C_{e3} = 6,860 \times 10^{-2}$
$R_{r2} = 4,990 \times 10^1$	$R_{r22} = -1,164 \times 10^4$	$L_{r2} = 5,344 \times 10^1$	$C_{r2} = 2,843 \times 10^{-1}$
$R_{r3} = 1,133 \times 10^2$	$R_{r32} = -5,011 \times 10^3$	$L_{r3} = 1,407 \times 10^1$	$C_{r3} = 6,860 \times 10^{-2}$
$R_{l5} = -2,455 \times 10^2$	$R_{l52} = 8,154 \times 10^3$	$L_{l5} = -1,104 \times 10^2$	$C_{l5} = -1,315 \times 10^{-1}$

Fonte: Autoria própria.

Agora, aplicando uma tensão de entrada em degrau de 1 p.u. e fazendo a análise para uma faixa de tempo que varia entre 0 e 0,01 segundos, o circuito π equivalente descrito por 5 polos têm a tensão na saída do sistema, representada por $(v_e(t))$, dada de acordo com a figura 41.

Figura 41 - Tensão no receptor da linha utilizando 5 polos e uma entrada em degrau.



Fonte: Autoria própria.

Então, observando a figura 41, o modelo começa a descrever uma resposta transitória para a linha de transmissão. Contudo, como utilizou-se uma baixa quantidade de polos, representada pelas tabelas 1 e 2, esta representação ainda não é aplicável para o estudo de linhas mais detalhadas.

Para uma representação mais próxima da realidade, aumenta-se a quantidade de polos a fim de encontrar uma melhor reprodução do transitório eletromagnético. Contudo, salienta-se que o trabalho visa validar as equações de estado desenvolvidas anteriormente; a validação do modelo representado pelo circuito π equivalente é descrito em Balestero (2022).

Para obter uma resposta transitória mais próxima da realidade e, principalmente, validar as equações de estado, analisa-se agora o circuito π equivalente considerando 7 polos. Esses polos compõem três ramos reais (RL) e dois ramos complexos (RLC) transversais, tanto no emissor quanto no receptor da linha. Já longitudinalmente o circuito é composto por cinco ramos reais (RL) e um ramo complexo (RLC).

A tabela abaixo traz os valores dos elementos de circuito que compõem os ramos reais.

Tabela 3 - Parâmetros dos ramos reais para o circuito com 7 polos.

Resistência (Ω)	Indutância (H)
$R_{e1} = R_{r1} = 1,2863 \times 10^5$	$L_{e1} = L_{r1} = 7,1543 \times 10^4$
$R_{e2} = R_{r2} = -9,3125 \times 10^4$	$L_{e2} = L_{r2} = -1,5928 \times 10^4$
$R_{e3} = R_{r3} = 2,5951 \times 10^3$	$L_{e3} = L_{r3} = 6,4502 \times 10^1$
$R_{l1} = 7,2005 \times 10^1$	$L_{l1} = 9,2290 \times 10^3$
$R_{l2} = 6,3354$	$L_{l2} = 3,4036 \times 10^2$
$R_{l3} = 6,6220 \times 10^1$	$L_{l3} = 1,6180 \times 10^3$
$R_{l4} = 5,9739 \times 10^2$	$L_{l4} = 3,2597 \times 10^3$
$R_{l5} = 3,0558 \times 10^3$	$L_{l5} = 2,5013 \times 10^3$

Fonte: Autoria própria.

Observando a tabela 3 nota-se que acrescentou-se um ramo real transversal, dado por $R_{e3} = R_{r3}$ e $L_{e3} = L_{r3}$, em comparação com a tabela 1.

Agora, a tabela abaixo traz os valores dos elementos de circuito que compõem os ramos complexos.

Tabela 4 - Parâmetros dos ramos complexos para o circuito com 7 polos.

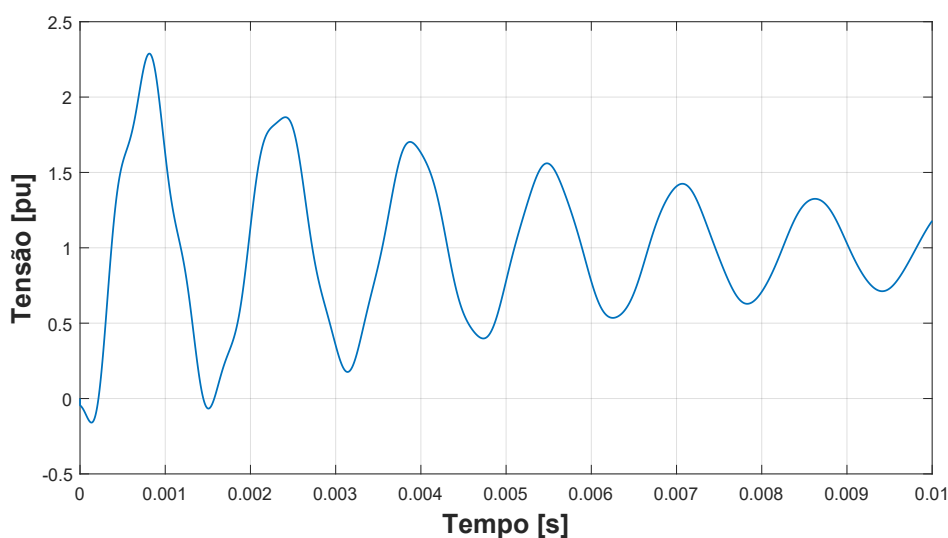
Resistência 1 (Ω)	Resistência 2 (Ω)	Indutância (H)	Capacitância (F)
$R_{e4} = 4,996 \times 10^1$	$R_{e42} = -1,160 \times 10^4$	$L_{e4} = 5,344 \times 10^1$	$C_{e4} = 2,843 \times 10^{-1}$
$R_{e5} = 1,488 \times 10^2$	$R_{e52} = -3,528 \times 10^3$	$L_{e5} = 1,833 \times 10^1$	$C_{e5} = 6,467 \times 10^{-2}$
$R_{r4} = 4,996 \times 10^1$	$R_{r42} = -1,160 \times 10^4$	$L_{r4} = 5,344 \times 10^1$	$C_{r4} = 2,843 \times 10^{-1}$
$R_{r5} = 1,488 \times 10^2$	$R_{r52} = -3,528 \times 10^3$	$L_{r5} = 1,833 \times 10^1$	$C_{r5} = 6,467 \times 10^{-2}$
$R_{l6} = -1,212 \times 10^2$	$R_{l62} = 2,086 \times 10^4$	$L_{l6} = -1,224 \times 10^2$	$C_{l6} = -1,261 \times 10^{-1}$

Fonte: Autoria própria.

Observando a tabela 4 nota-se que nenhum ramo complexo foi adicionado ao circuito, em comparação com a tabela 2.

Também aplicando uma tensão de entrada em degrau de 1 p.u. e fazendo a análise para uma faixa de tempo que varia entre 0 e 0,01 segundos, o circuito π equivalente descrito por 7 polos têm a tensão na saída do sistema, representada por (v_e), dada de acordo com a figura 42.

Figura 42 - Tensão no receptor da linha utilizando 7 polos e uma entrada em degrau.



Fonte: Autoria própria.

O modelo descrito por 7 polos representa melhor a resposta que quer ser obtida, isso se compara-mos com a resposta obtida na figura 41. Contudo, ambas respostas obtidas nos dois modelos, representadas pelas figuras 41 e 42, ainda não representam de maneira tão precisa o transitório eletromagnético da linha de transmissão.

Nota-se que, diferente da representação do circuito utilizando 5 polos descrita na figura 40, a representação circuital não foi descrita em forma de figura para o modelo com 7 polos. Isso deve-se ao fato do modelo crescer muito e não ficar viável a representação dos elementos de circuitos neste documento.

Então, aumentando a quantidade de polos o circuito fica mais complexo e, portanto, a representação genérica das equações de estado são de grande valia para a simulação do modelo descrito por elementos de circuitos. Isso porque, como visto no capítulo anterior, as equações de estado dependem das correntes nos ramos, ou seja, cada vez que adiciona-se um ramo a matriz de estado aumenta.

Ainda para validar as equações de estado, analisa-se agora o circuito π equivalente considerando 9 polos. Esses polos compõem três ramos reais (RL) e três ramos complexos (RLC)

transversais, tanto no emissor quanto no receptor da linha. Já longitudinalmente o circuito é composto por cinco ramos reais (RL) e dois ramo complexo (RLC).

Assim como o circuito representado por 7 polos, a representação utilizando 9 polos também não terá um modelo circuitual em forma de figura, diferente da representação com 5 polos e descrito na figura 41.

A tabela abaixo traz os valores dos elementos de circuito que compõem os ramos reais.

Tabela 5 - Parâmetros dos ramos reais para o circuito com 9 polos.

Resistência (Ω)	Indutância (H)
$R_{e1} = R_{r1} = 3,6873 \times 10^5$	$L_{e1} = L_{r1} = 2,1994 \times 10^5$
$R_{e2} = R_{r2} = 1,4439 \times 10^5$	$L_{e2} = L_{r2} = 2,7509 \times 10^4$
$R_{e3} = R_{r3} = 4,1348 \times 10^3$	$L_{e3} = L_{r3} = 1,9119 \times 10^1$
$R_{l1} = 8,0978 \times 10^1$	$L_{l1} = 1,0922 \times 10^4$
$R_{l2} = 6,3814$	$L_{l2} = 3,4717 \times 10^2$
$R_{l3} = 5,6803 \times 10^1$	$L_{l3} = 1,4871 \times 10^3$
$R_{l4} = 5,3940 \times 10^2$	$L_{l4} = 3,2641 \times 10^3$
$R_{l5} = 2,6764 \times 10^3$	$L_{l5} = 2,3962 \times 10^3$

Fonte: Autoria própria.

Agora, a tabela abaixo traz os valores dos elementos de circuito que compõem os ramos complexos.

Tabela 6 - Parâmetros dos ramos complexos para o circuito com 9 polos.

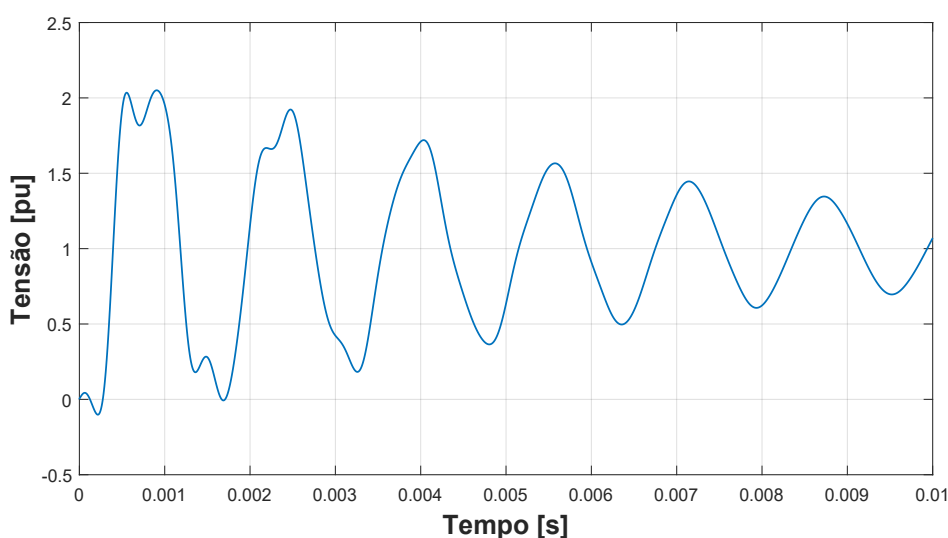
Resistência 1 (Ω)	Resistência 2 (Ω)	Indutância (H)	Capacitância (F)
$R_{e4} = 4,989 \times 10^1$	$R_{e42} = -1,164 \times 10^4$	$L_{e4} = 5,344 \times 10^1$	$C_{e4} = 2,843 \times 10^{-1}$
$R_{e5} = 8,574 \times 10^2$	$R_{e52} = -3,638 \times 10^3$	$L_{e5} = 5,436 \times 10^1$	$C_{e5} = 2,246 \times 10^{-2}$
$R_{e6} = -3,719 \times 10^2$	$R_{e62} = -1,324 \times 10^2$	$L_{e6} = -1,516 \times 10^1$	$C_{e6} = -2,708 \times 10^{-1}$
$R_{r4} = 4,989 \times 10^1$	$R_{r42} = -1,164 \times 10^4$	$L_{r4} = 5,344 \times 10^1$	$C_{r4} = 2,843 \times 10^{-1}$
$R_{r5} = 8,574 \times 10^2$	$R_{r52} = -3,638 \times 10^3$	$L_{r5} = 5,436 \times 10^1$	$C_{r5} = 2,246 \times 10^{-2}$
$R_{r6} = -3,719 \times 10^2$	$R_{r62} = -1,324 \times 10^2$	$L_{r6} = -1,516 \times 10^1$	$C_{r6} = -2,708 \times 10^{-1}$
$R_{l6} = -1,023 \times 10^2$	$R_{l62} = 2,148 \times 10^4$	$L_{l6} = -1,066 \times 10^2$	$C_{l6} = -1,424 \times 10^{-1}$
$R_{l7} = -1,209 \times 10^2$	$R_{l72} = 3,256 \times 10^5$	$L_{l7} = 1,417 \times 10^2$	$C_{l7} = 2,703 \times 10^{-2}$

Fonte: Autoria própria.

Observando a tabela 6 nota-se que nenhum ramo real foi adicionado ao circuito transversal e longitudinal, em comparação com a tabela 4. Agora, observando a tabela 6 nota-se que acrescentou-se dois ramos complexos transversal e um ramo complexo longitudinal, em comparação com a tabela 4.

Ainda aplicando uma tensão de entrada em degrau de 1 p.u. e fazendo a análise para uma faixa de tempo que varia entre 0 e 0,01 segundos, o circuito π equivalente descrito por 9 polos têm a tensão na saída do sistema, representada por (v_e), dada de acordo com a figura 43.

Figura 43 - Tensão no receptor da linha utilizando 9 polos e uma entrada em degrau.



Fonte: Autoria própria.

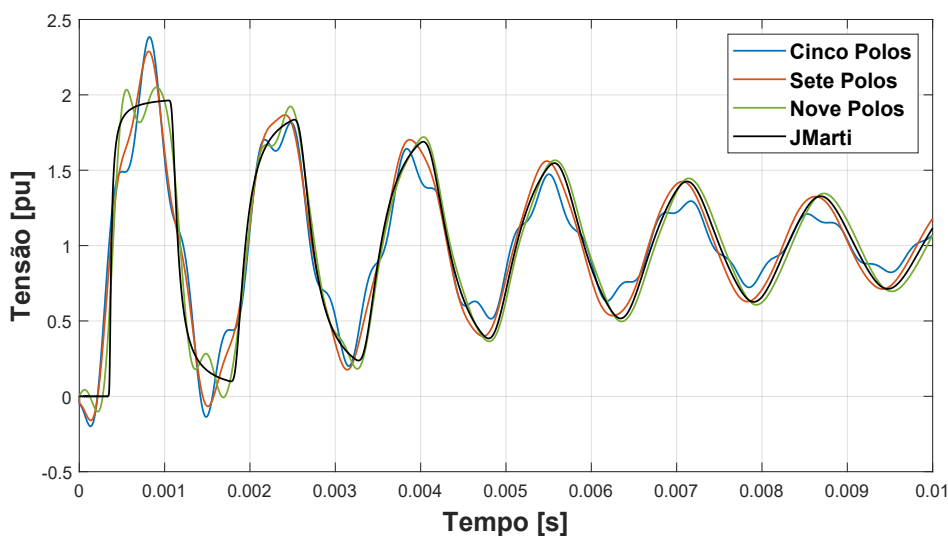
O modelo descrito por 9 polos representa melhor a resposta que quer ser obtida, isso se compara-mos com as respostas obtidas nas figuras 41 e 42. Contudo, as respostas obtidas nos três modelos, representadas pelas figuras 41, 42 e 43, ainda não representam de maneira fidedigna o transitório eletromagnético da linha de transmissão.

Contudo, apesar dos modelos de linha descritos por 5, 7 e 9 polos ainda não representarem de maneira tão precisa o transitório eletromagnético para uma entrada em degrau, a figura 44 as três representações em um mesmo gráfico.

Então, aplicando uma tensão de entrada em degrau de 1 p.u. e fazendo a análise para uma faixa de tempo que varia entre 0 e 0,01 segundos, é possível observar que, quanto maior a quantidade de polos utilizadas para representar a linha, mais próximo do resultado desejado a resposta é obtida, como observado na figura abaixo. Contudo, o trabalho em questão não pretende fazer uma análise da quantidade de polos ideal para representar a linha e sim equacionar, a partir de matrizes de estado, o sistema descrito por elementos de circuitos. A análise da

quantidade de ramos é descrita em Balestero (2022), onde o modelo foi testado e validado para diferentes quantidades de polos e, conseqüentemente, ramos.

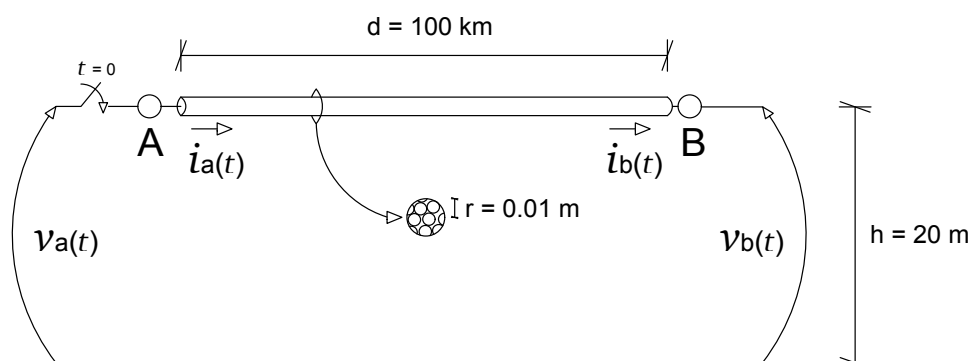
Figura 44 - Tensão no receptor utilizando 5, 7, 9 polos e JMarti para uma entrada em degrau.



Fonte: Autoria própria.

Para validação da representação do circuito π equivalente considerou-se uma linha, representada pela figura 45, de 100 km, quatro condutores com espaçamento de 0,04 m, raio do condutor de 0,0153 m, resistividade do solo constante e igual a 1.000 $\Omega \cdot m$ e altura de 20 m em relação ao solo. Os parâmetros longitudinais foram calculados considerando os efeitos do solo e pelicular para frequência variando entre 0,1 Hz e 100 kHz. A capacitância transversal é considerada constante e seu valor calculado foi de 6.89 $\eta F/km$. Além disso, considera-se 15 polos para o ramo longitudinal ($Y_{z\pi}$) onde 7 são ramos reais (RL) e 4 são ramos complexos (RLC); já para os ramos transversais (Y_{π}) considera-se 30 polos, tanto no emissor quanto no receptor, onde 1 são ramos reais (RL) e 9 são ramos complexos (RLC) (Balestero, 2022).

Figura 45 - Representação genérica da linha de transmissão.



Fonte: Autoria própria.

A partir da 45 e das equações do modelo π equivalente, descritas no capítulo 3, a tabela abaixo traz os valores dos elementos de circuito que compõem os ramos reais.

Tabela 7 - Parâmetros dos ramos reais para o circuito com 15 polos transversais e 30 polos longitudinais.

Resistência (Ω)	Indutância (H)
$R_{e1} = R_{r1} = 1,3855 \times 10^2$	$L_{e1} = L_{r1} = 2,3988 \times 10^4$
$R_{e2} = R_{r2} = 7,6173$	$L_{e2} = L_{r2} = 4,5060 \times 10^2$
$R_{e3} = R_{r3} = 2,1632 \times 10^1$	$L_{e3} = L_{r3} = 8,0192 \times 10^2$
$R_{e4} = R_{r4} = 2,9291 \times 10^2$	$L_{e4} = L_{r4} = 3,3531 \times 10^3$
$R_{e5} = R_{r5} = 1,3357 \times 10^3$	$L_{e5} = L_{r5} = 3,7743 \times 10^3$
$R_{e6} = R_{r6} = 4,9944 \times 10^3$	$L_{e6} = L_{r6} = 2,4308 \times 10^3$
$R_{e7} = R_{r7} = -4,2157 \times 10^4$	$L_{e7} = L_{r7} = -5,7406 \times 10^2$
$R_{11} = -2,4324 \times 10^8$	$L_{11} = -2,9606 \times 10^9$
$R_{12} = 2,5970 \times 10^7$	$L_{12} = 1,0162 \times 10^8$
$R_{13} = -7,9143 \times 10^6$	$L_{13} = 1,3277 \times 10^7$
$R_{14} = 1,2371 \times 10^6$	$L_{14} = 1,0212 \times 10^6$
$R_{15} = -6,4285 \times 10^6$	$L_{15} = -3,0207 \times 10^6$
$R_{16} = 1,3886 \times 10^5$	$L_{16} = 3,6516 \times 10^4$
$R_{17} = 2,4750 \times 10^5$	$L_{17} = 3,8765 \times 10^4$
$R_{18} = 3,4917 \times 10^4$	$L_{18} = 3,3413 \times 10^3$
$R_{19} = 2,3684 \times 10^5$	$L_{19} = 1,3878 \times 10^4$
$R_{110} = 2,1224 \times 10^4$	$L_{110} = 7,2482 \times 10^2$
$R_{111} = -4,0267 \times 10^5$	$L_{111} = -7,2882 \times 10^3$
$R_{112} = 6,2061 \times 10^2$	$L_{112} = 4,4429 \times 10^{-1}$

Fonte: Autoria própria.

Salienta-se que os valores foram retirados do trabalho realizado por Balestero (2022). Neste trabalho é possível encontrar os polos e resíduos para esse sistema assim como a validação do mesmo.

Agora, as tabelas abaixo trazem os valores dos elementos de circuito que compõem os ramos complexos. A tabela 8 corresponde aos ramos RLC do emissor e receptor da linha.

Tabela 8 - Parâmetros dos ramos complexos para o circuito com 15 polos transversais.

Resistência 1 (Ω)	Resistência 2 (Ω)	Indutância (H)	Capacitância (F)
$R_{e8} = -1,010 \times 10^2$	$R_{e82} = 2,250 \times 10^4$	$L_{e8} = -1,069 \times 10^2$	$C_{e8} = -1,420 \times 10^{-1}$
$R_{e9} = 1,855 \times 10^2$	$R_{e92} = -5,145 \times 10^4$	$L_{e9} = 1,035 \times 10^2$	$C_{e9} = 3,548 \times 10^{-2}$
$R_{e10} = -2,809 \times 10^2$	$R_{e102} = 6,742 \times 10^4$	$L_{e10} = -1,004 \times 10^2$	$C_{e10} = -1,595 \times 10^{-2}$
$R_{e11} = -1,382 \times 10^2$	$R_{e112} = 5,877 \times 10^4$	$L_{e11} = 1,461 \times 10^2$	$C_{e11} = 6,245 \times 10^{-2}$
$R_{r8} = -1,010 \times 10^2$	$R_{r82} = 2,250 \times 10^4$	$L_{r8} = -1,069 \times 10^2$	$C_{r8} = -1,420 \times 10^{-1}$
$R_{r9} = 1,855 \times 10^2$	$R_{r92} = -5,145 \times 10^4$	$L_{r9} = 1,035 \times 10^2$	$C_{r9} = 3,548 \times 10^{-2}$
$R_{r10} = -2,809 \times 10^2$	$R_{r102} = 6,742 \times 10^4$	$L_{r10} = -1,004 \times 10^2$	$C_{r10} = -1,595 \times 10^{-2}$
$R_{r11} = -1,382 \times 10^2$	$R_{r112} = 5,877 \times 10^4$	$L_{r11} = 1,461 \times 10^2$	$C_{r11} = 6,245 \times 10^{-2}$

Fonte: Autoria própria.

Agora, a tabela 9 corresponde aos ramos RLC longitudinais da linha.

Tabela 9 - Parâmetros dos ramos complexos para o circuito com 15 polos longitudinais.

Resistência 1 (Ω)	Resistência 2 (Ω)	Indutância (H)	Capacitância (F)
$R_{l13} = 4,989 \times 10^1$	$R_{l132} = -1,165 \times 10^4$	$L_{l13} = 5,344 \times 10^1$	$C_{l13} = 2,843 \times 10^{-1}$
$R_{l14} = 1,392 \times 10^2$	$R_{l142} = -3,551 \times 10^4$	$L_{l14} = 5,071 \times 10^1$	$C_{l14} = 3,159 \times 10^{-2}$
$R_{l15} = 2,236 \times 10^2$	$R_{l152} = -6,026 \times 10^4$	$L_{l15} = 4,951 \times 10^1$	$C_{l15} = 1,137 \times 10^{-2}$
$R_{l16} = 3,046 \times 10^2$	$R_{l162} = -8,577 \times 10^4$	$L_{l16} = 3,875 \times 10^1$	$C_{l16} = 5,802 \times 10^{-3}$
$R_{l17} = 3,827 \times 10^2$	$R_{l172} = -1,122 \times 10^5$	$L_{l17} = 4,820 \times 10^1$	$C_{l17} = 3,510 \times 10^{-3}$
$R_{l18} = 4,590 \times 10^2$	$R_{l182} = -1,386 \times 10^5$	$L_{l18} = 4,775 \times 10^1$	$C_{l18} = 2,350 \times 10^{-3}$
$R_{l19} = 1,127 \times 10^3$	$R_{l192} = -3,646 \times 10^4$	$L_{l19} = 4,635 \times 10^1$	$C_{l19} = 1,673 \times 10^{-3}$
$R_{l20} = 1,275 \times 10^3$	$R_{l202} = -2,116 \times 10^4$	$L_{l20} = 2,715 \times 10^1$	$C_{l20} = 1,822 \times 10^{-3}$
$R_{l21} = 2,152 \times 10^3$	$R_{l212} = -2,835 \times 10^3$	$L_{l21} = 4,208$	$C_{l21} = 1,014 \times 10^{-3}$

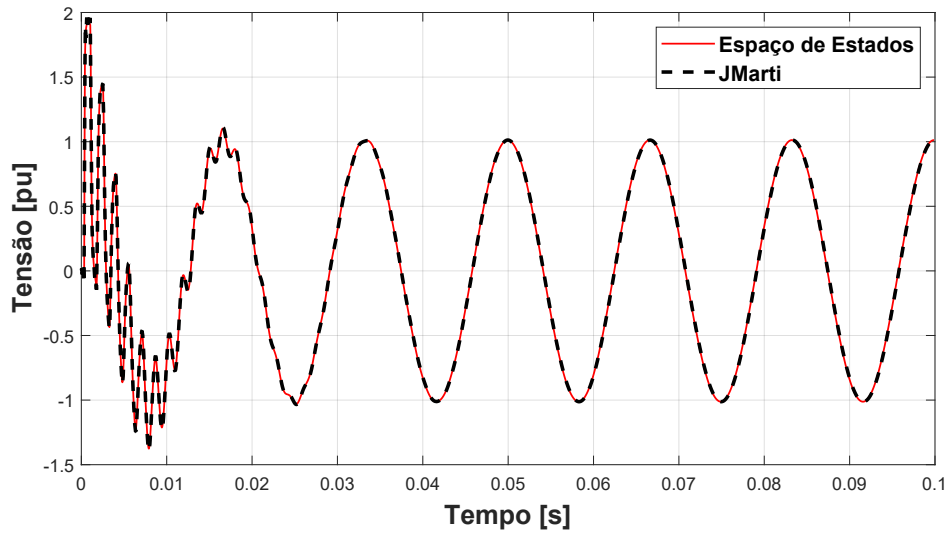
Fonte: Autoria própria.

A partir dos valores das resistências, indutâncias e capacitâncias que compõem o modelo π equivalente em questão, utiliza-se as equações genéricas de estado, desenvolvidas no capítulo anterior, para fazer uma simulação da resposta transitória do modelo. Esta resposta é comparado com a encontrada pelo JMarti, modelo já consagrado na literatura de estudos de transitórios eletromagnéticos.

Aplicando uma fonte senoidal de 1 p.u. no terminal emissor da linha de transmissão, con-

siderando que o receptor está em aberto e um tempo de análise de 0,1 segundo, obtêm-se a resposta da figura 46.

Figura 46 - Tensão no receptor da linha utilizando 15 polos e uma entrada senoidal.

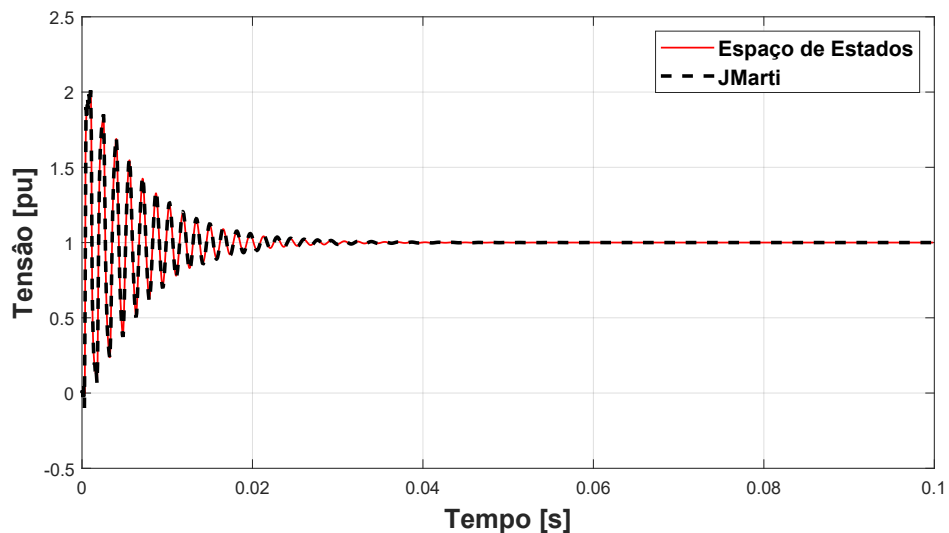


Fonte: Autoria própria.

Observando a figura 46, observa-se que o modelo representado por equações de estado representa de maneira satisfatória a resposta transitória obtida pelo modelo JMarti.

Aplicando uma fonte de tensão degrau de 1 p.u. no emissor da linha de transmissão, considerando que o receptor está em aberto e um tempo de análise de 0,1 segundos, obtêm-se a resposta da figura 47.

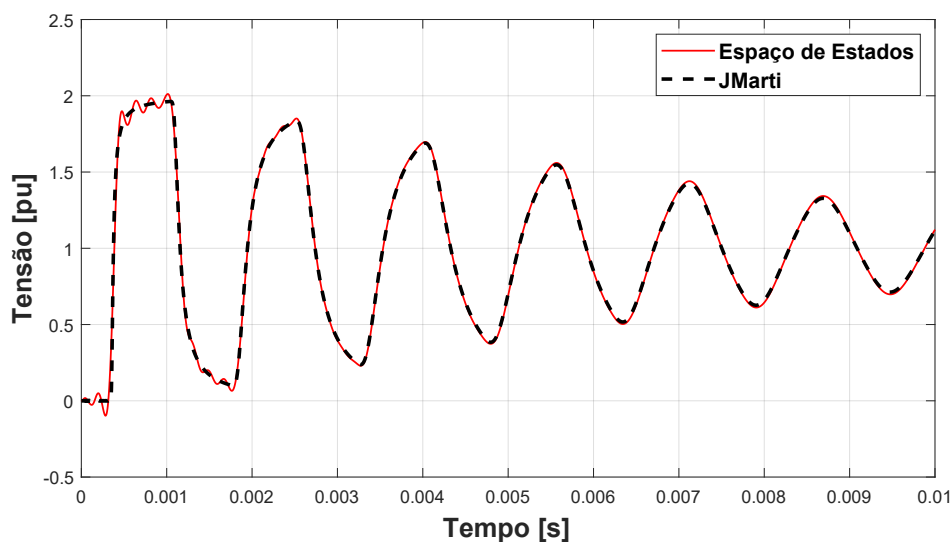
Figura 47 - Tensão no receptor da linha utilizando 15 polos e uma entrada em degrau.



Fonte: Autoria própria.

Aplicando uma fonte de tensão degrau de 1 p.u. no emissor da linha de transmissão, considerando que o receptor está em aberto e agora um tempo de análise de 0,01 segundo, obtêm-se a resposta da figura 47.

Figura 48 - Tensão no receptor da linha utilizando 15 polos e uma entrada em degrau.



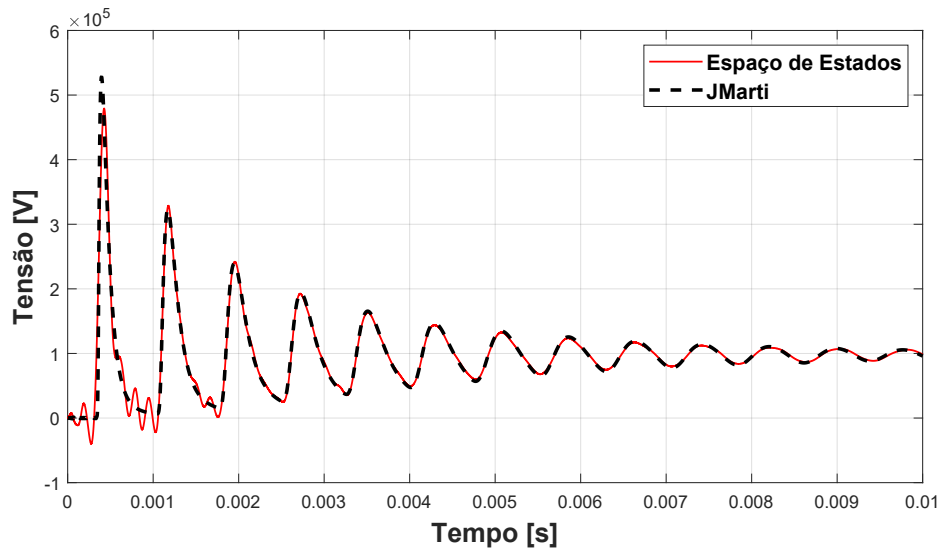
Fonte: Autoria própria.

Observando a figura 47 é possível concluir que o modelo representado por equações de estado representa de maneira satisfatória a resposta transitória obtida pelo modelo JMarti. Contudo, ao analisarmos a resposta para um tempo dez vezes menor, como observado na figura 48, nos primeiros ciclos da energização o modelo representado por equações de estado apresenta algumas oscilações que não fazem parte da resposta da linha.

Para uma maior precisão na representação do modelo do circuito π equivalente, representado por elementos de circuitos, é necessário fazer uma análise mais abrangente do número de polos; contudo, o trabalho pretende trazer uma representação em espaço de estados para que seja possível simular o circuito para qualquer quantidade de polos. Com maior número de polos alcançou-se os melhores resultados, onde as curvas obtidas com o novo modelo foram idênticas ao modelo exato, viabilizando a utilização do modelo (Balestero, 2022).

A descarga atmosférica, representada por um impulso de alta tensão, é aplicada no terminal emissor da linha de transmissão. O tempo analisado é de 0,01 segundo, contemplando doze oscilações de tensão.

Figura 49 - Tensão no receptor da linha utilizando 15 polos e uma descarga atmosférica.



Fonte: Autoria própria.

5.3 Síntese do capítulo

Nesse capítulo utilizou-se as equações de estado genéricas, desenvolvidas no capítulo 4, para representar o circuito π equivalente. A partir dessa representação, simulou-se o modelo para diferentes quantidades de polos que, conseqüentemente, têm diferentes quantidades de ramos.

Inicialmente as equações de estado representaram modelos com 5, 7 e 9 polos. Esses modelos representam o transitório eletromagnético da linha, porém, para uma análise mais precisa, é necessário o acréscimo de polos. Contudo, as representações com menos polos mostraram que as equações desenvolvidas estavam corretas e, além disso, mostrou a evolução da resposta ao aumentar a quantidade de polos e ramos.

Por fim, utilizando as equações de estado desenvolvidas no trabalho, obteve-se as respostas transitórias para a energização com entradas senoidal, em degrau e a partir de uma descarga atmosférica. Essas respostas foram comparadas com o modelo JMarti, consagrado na literatura, e obtiveram resultados satisfatórios.

6 CONCLUSÕES

O trabalho teve como objetivo apresentar uma representação genérica para os ramos longitudinais do modelo π equivalente.

Para analisar o modelo, em primeiro lugar mostrou-se que os parâmetros longitudinais (resistência interna e indutância interna, indutância externa e resistência devido o efeito do solo e indutância devido o efeito do solo) e os parâmetros transversais (condutância e capacitância) variam com a frequência. Esse fato foi provado demonstrando as equações de cada parâmetro, vistas no capítulo 2.

Posteriormente, fez-se uma revisão bibliográfica sobre alguns modelos, no domínio do tempo, que representam a linha de transmissão, vista no capítulo 3.

O modelo com cascata de circuitos π é apresentado e modelado. Essa modelagem é feita em espaço de estados e têm uma matriz de formação genérica. Porém, o modelo da cascata de circuitos π não leva em conta que os parâmetros são dependentes da frequência.

Uma das alternativas para representar o efeito da frequência nos parâmetros longitudinais da linha foi desenvolvido por Yamanaka (2009). Esse modelo usa as funções parciais para encontrar elementos de circuitos que são conectados aos circuitos π . Essa representação, diferente da cascata de circuitos π , leva em conta o efeito da frequência nos parâmetros longitudinais da linha de transmissão. Além disso, a modelagem é feita em espaço de estados e também têm uma matriz de formação genérica.

Outra alternativa para representar o efeito da frequência nos parâmetros longitudinais da linha foi desenvolvido por Balestero (2022). Esse modelo também usa as funções parciais para encontrar elementos de circuitos que, divididos em circuitos RL e RLC, fazem a representação do efeito da frequência nos parâmetros da linha de transmissão. Além disso, nota-se que o modelo representado pelo circuito π equivalente não utiliza, em seu equacionamento, o tempo de propagação da onda, diferenciando do JMarti e do ULM.

Porém, em contraponto com os dois modelos estudados anteriormente, o modelo π equivalente não tinha uma representação em espaço de estados e, em consequência a isso, uma matriz de formação genérica. Portanto, nesse estudo fez-se diversos equacionamentos do modelo π equivalente em espaço de estados a fim de se encontrar uma regra de formação onde, a partir daí, criar-se uma matriz de formação genérica.

Então, inicialmente equacionou-se o modelo a partir de poucos ramos, a fim de encontrar uma similaridade na formação das matrizes de estado para várias quantidades de ramos.

A partir daí, observou-se que os ramos RL têm apenas uma derivada, que é oriunda da corrente no indutor, e contribui com apenas uma linha na matriz genérica. Já os ramos RLC têm duas derivadas, que são oriundas da corrente no indutor e da tensão no capacitor, contribuindo, assim, para o acréscimo de duas linhas na matriz genérica. Uma linha corresponde a corrente no indutor e outra a tensão no capacitor.

Além disso, notou-se que os ramos conectados diretamente ao emissor da linha têm um equacionamento mais fácil. Isso deve-se ao fato da fonte de tensão também estar conectada a ele. Já os ramos longitudinais e transversais dependem de uma relação entre as correntes, tornando as equações mais complexas. Para os ramos longitudinais e transversais também é possível observar que as correntes dos outros ramos influencia no equacionamento da corrente de seu próprio ramo, além da tensão nos capacitores dos ramos RLC.

Com a matriz de formação genérica encontrada, simulou-se o modelo representado a partir de elementos de circuitos e comparou-se com o modelo representado em espaço de estados. Observou-se que o modelo encontrado representa de forma muito fiel o modelo do circuito π equivalente representado por elementos de circuito. Essas comparações foram realizadas no capítulo 5 e, a partir das respostas obtidas, comprova-se que a representação em espaço de estados desenvolvida no trabalho é válida e pode ser usada no estudo de transitórios eletromagnéticos em sistemas elétricos de potência. Além disso, o estudo desenvolvido neste trabalho foi apresentado e publicado no *Workshop on Communication Networks and Power Systems* (Rister; Balestero; Kurokawa, 2023).

Contudo, sabe-se que as equações genéricas das matrizes ainda não são tão amigáveis para a representação e entendimento, sendo tema de trabalhos futuros do autor, como veremos adiante.

6.1 Projeções futuras:

- Simplificar as matrizes de formação genéricas para o circuito π equivalente a fim de facilitar sua representação;
- Fazer a representação de uma linha de transmissão de energia elétrica trifásica a partir das equações de estado desenvolvidas;
- Analisar a interferência dos termos fora da diagonal principal a fim de simplificar ainda mais as matrizes de formação genéricas.

REFERÊNCIAS

- ALEXANDER, C.; SADIKU, M. *Fundamentals of Electric Circuits*. [S.l.]: Editora McGraw Hill, 2016.
- ARAÚJO, A. R. J. e. a. Mitigation of erroneous oscillations in electromagnetic transient simulations using analogue filter theory. [s. l.]. *IET Science, Measurement and Technology*, v. 11, n. 1, p. 41–48, 2017.
- BALESTERO, J. P. R. *Representação de linhas de transmissão no domínio do tempo por meio do circuito π equivalente. Ilha Solteira*. 150 f. Dissertação (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade Estadual Paulista – UNESP, Ilha Solteira, 2022.
- CABALLERO, P. T. *Representação de linhas de transmissão por meio do modelo de bergeron: inclusão do efeito da frequência nos parâmetros longitudinais*. 98 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade Estadual Paulista – UNESP, Ilha Solteira, 2014.
- CAMPOS, F. F. *Algoritmos Numéricos*. [S.l.]: Editora LTC, 2007.
- CARSON, J. R. Wave propagation in overhead wires with ground return. [s. l.]. *The Bell System Technical Journal*, Nokia Bell Labs, v. 5, n. 4, p. 539–554, 1926.
- CHARANTOLA, D. J. *Representação de linhas de transmissão monofásicas por meio de variáveis de estado: comparação das soluções numérica e analítica*. 99 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade Estadual Paulista – UNESP, Ilha Solteira, 2007.
- CHAVES, D.; CHAGAS, N. B. Características e comportamentos do efeito pelicular. [s. l.]. *Anais do Salão Internacional de Ensino, Pesquisa e Extensão*, v. 8, n. 2, 2016.
- DIEFENTHÄLER, A. T. *Modelagem matemática de linhas de transmissão baseada em dados reais da rede de distribuição primária de energia elétrica*. 86 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) — Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul – Unijuí, Ijuí, 2019.
- DOMMEL, H. W. *Electro magnetic transients program theory book*. [S.l.]: Editora Bonneville Power Administration, 1987.
- DOU, H.-b.; HUA, Y.-f.; QI, A.-x.; XU, J.; ZHAO, J.-q. A transient response domain time analysis method of transmission lines. [s. l.]. In: SPRINGER. *Advances in Natural Computation, Fuzzy Systems and Knowledge Discovery: Volume 2*. [S.l.], 2020. p. 869–873.
- ERASO, L. C. T. *Análise de modelos de linhas de transmissão considerando parâmetros dependentes da frequência*. 354 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) — Universidade de São Paulo (USP), 2019.
- FREITAS, M.; KUROKAWA, S.; PISSOLATO, J. Corona effect in frequency dependent transmission line models. [s. l.]. In: IEEE. *2008 IEEE/PES Transmission and Distribution*

Conference and Exposition: Latin America. [S.l.], 2008. p. 1–7.

FUCHS, R. D. Transmissão de energia elétrica: Linhas aéreas (vol. 1). *Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora*, 1977.

GERTRUDES, J.; TAVARES, M.; PORTELA, C. Influência da dependência de parâmetros do solo com a frequência na modelagem de linhas aéreas de transmissão: caso de condutor único. [s. l.]. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, SciELO Brasil, v. 22, p. 506–522, 2011.

GRIGSBY, L. L. *et al. The electric power engineering handbook*. [S.l.]: CRC Press Boca Raton, FL, USA, 2001. v. 2.

GUSTAVSEN, B. Computer code for rational approximation of frequency dependent admittance matrices. [s. l.]. *IEEE Transactions on Power Delivery*, p. 1093–1098, 2002.

GUSTAVSEN, B.; SEMLYEN, A. Simulation of transmission line transients using vector fitting and modal decomposition. [s. l.]. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 13, n. 2, p. 605–614, 1998.

GUSTAVSEN, B.; SEMLYEN, A. Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting. [s. l.]. *IEEE Transactions on Power Delivery*, p. 1052–1061, 1999.

HOFMANN, L. Series expansions for line series impedances considering different specific resistances, magnetic permeabilities, and dielectric permittivities of conductors, air, and ground. *IEEE Transactions on Power Delivery*. [S. l.], v. 18, n. 2, p. 564–570, 2003.

JAZEBI, S.; REZAEI-ZARE, A.; LAMBERT, M.; ZIRKA, S. E.; CHIESA, N.; MOROZ, Y. I.; CHEN, X.; DURO, M. cabanez; ARTURI, C. M.; DICK, E. P.; NARANG, A.; WALLING, R. A.; MAHSEREDJIAN, J.; MARTINEZ, J. A.; LEÓN, F. de. Duality-derived transformer models for low-frequency electromagnetic transients—part ii: Complementary modeling guidelines. [s. l.]. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 31, n. 5, p. 2420–2430, 2016.

KUROKAWA, S.; YAMANAKA, F. N. R.; PRADO, A. J. d.; BOVOLATO, L. F.; PISSOLATO, J. Representação de linhas de transmissão por meio de variáveis de estado levando em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais. [s. l.]. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, SciELO Brasil, v. 18, p. 337–346, 2007.

MACIAS, J. A. R. e. a. A comparison of techniques for state- space transient analysis of transmission lines. [s. l.]. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 20, n. 2, p. 894–903, 2005.

MAMIS, M. Computation of electromagnetic transients on transmission lines with nonlinear components. *Generation, Transmission and Distribution, IEE Proceedings-*, v. 150, p. 200 – 204, 04 2003.

MAMIS, M.; NACAROGLU, A. Transient voltage and current distributions on transmission lines. [s. l.]. *Generation, Transmission and Distribution, IEE Proceedings-*, v. 149, p. 705 – 712, 12 2002.

MARTI, J. R. Accurate modelling of frequency-dependent transmission lines in electromagnetic

- transient simulations. [s. l.]. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-101, n. 1, p. 147–157, 1982.
- MARTI, L. Simulation of transients in underground cables with frequency-dependent modal transformation matrices. [s. l.]. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 3, n. 3, p. 1099–1110, 1988.
- MARTINEZ-MARIN, T. State-space formulation for circuit analysis. [s. l.]. *IEEE Transactions on Education*, v. 53, n. 3, p. 497–503, 2010.
- MARTINEZ-VELASCO, J. A. *Power system transients: parameter determination*. Flórida, U.S.A.: CRC press, 2009. 644 p.
- MAXWELL, J. C. A dynamical theory of the electromagnetic field. [s. l.]. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, v. 155, n. 1, p. 459–512, 1865.
- MILLER, F. P.; VANDOME, A. F.; MCBREWSTER, J. *Kirchhoff's Circuit Laws*. [S.l.]: Editora VDM Publishing, 2010.
- MOMBELLO, E. E.; PORTILLO, ; FLÓREZ, G. A. D. New state-space white-box transformer model for the calculation of electromagnetic transients. [s. l.]. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 36, n. 5, p. 2615–2624, 2021.
- NISE, N. S. *Nises Control Systems Engineering*. [S.l.]: Editora John Wiley Sons, 2017.
- PINHEIRO, M.; TAVARES, M. C. Análise de sensibilidade de parâmetros elétricos de linhas de transmissão dependentes na frequência. [s. l.]. *SBA: Controle Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, v. 20, p. 335–344, 09 2009.
- RISTER, L. C.; BALESTERO, J. P. R.; KUROKAWA, S. Representation of transmission lines by state-space equations obtained from the propagation function and characteristic impedance. Brasília. In: *2023 Workshop on Communication Networks and Power Systems (WCNPS)*. [S.l.: s.n.], 2023. p. 1–7.
- SILVA, B. F.; CONCEIÇÃO, K.; BESPALHUK, K. J.; PRADO, A. J. Métodos numéricos de integração aplicados a simulações em engenharia. [s. l.]. *Latin-American Congress on Electricity Generation and Transmission*, v. 1, 2015.
- SINGH, A.; MARTI, J. R.; SRIVASTAVA, K. D. Algorithms for fast simulation of transformer windings for diagnostic testing of power transformers. [s. l.]. *IEEE transactions on power delivery*, IEEE, v. 25, n. 3, p. 1564–1572, 2010.
- SINKAR, A.; ZHAO, H.; QU, B.; GOLE, A. M. A comparative study of electromagnetic transient simulations using companion circuits, and descriptor state-space equations. [s. l.]. *Electric Power Systems Research*, Elsevier, v. 198, p. 107360, 2021.
- SIQUEIRA, J. C. G. e. a. *Introduction to Transients in Electrical Circuits: Analytical and Digital Solution Using an EMTP-based Software*. [S.l.]: Editora Springer, 2021.
- STEVENSON, W. J. *Elements of Power System Analysis*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1978.
- YAMANAKA, F.; KUROKAWA, S.; PRADO, A. Transitórios eletromagnéticos em linhas de

transmissão: estudo por meio de cascatas de circuitos . ilha solteira. In: . [S.l.: s.n.], 2004.

YAMANAKA, F. N. R. *Inclusão do efeito da frequência nas equações de estado de linhas bifásicas: análise no domínio do tempo*. 108 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade Estadual Paulista – UNESP, Ilha Solteira, 2009.

ZANETTA, L. C. J. *Fundamentos de sistemas elétricos de potência*. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2006.

APÊNDICE A - FUNÇÕES PARCIAIS

Sabe-se que a simulação das correntes e tensões nos terminais de uma linha exige a solução, no domínio de tempo, de diversas integrais de convolução. A solução dessas integrais pode ser realizada por meio de métodos numéricos, mas com um elevado esforço computacional. Uma técnica muito utilizada para reduzir o esforço computacional, consiste em aproximar os parâmetros por funções racionais. Desse modo, as integrais de convolução podem ser resolvidas por meio de fórmulas recursivas (Yamanaka, 2009).

Para considerar o efeito do solo sobre os parâmetros longitudinais da linha, a impedância longitudinal da linha será aproximada por uma função racional que, por sua vez, será representada por meio de uma associação de elementos de circuitos (Kurokawa *et al.*, 2007).

F_s é uma função racional se a mesma pode ser escrita em função de polinômios que, por sua vez, representam os polos e zeros. Ou seja:

$$F_s = \frac{N_s}{D_s} = \frac{K (s + z_1) (s + z_2) (s + z_3) \cdots (s + z_m)}{(s + p_1) (s + p_2) (s + p_3) \cdots (s + p_n)}, \quad (219)$$

onde, N_s é o polinômio de grau m , D_s é o polinômio de grau n , $z_1, z_2, z_3, \dots, z_m$ representam os zeros, $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ representam os polos da função F_s e K representa a constante de ganho da função (Nise, 2017).

Se o grau do polinômio do numerador de F_s é maior que o grau do polinômio do denominador, então, a função racional é dita como própria e a equação (219) pode ser expandida em uma soma de frações parciais, ou seja (Yamanaka, 2009):

$$F_s = \frac{N_s}{D_s} = \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{a_2}{s + p_2} + \frac{a_3}{s + p_3} + \cdots + \frac{a_i}{s + p_i}, \quad (220)$$

onde, os polos (p_i) são números reais negativos, os resíduos (a_i) são números reais positivos (Yamanaka, 2009).

Uma função que não seja conhecida na sua forma analítica pode ser escrita, de forma aproximada, como sendo uma função racional F'_s , desde que, esta função não apresente variações bruscas no domínio da frequência. Uma função que não seja racional, mas cujas variações são suaves no domínio da frequência, pode ser escrita, de maneira aproximada, como uma função

racional F'_s do tipo (Gustavsen; Semlyen, 1998):

$$F'_s = F_{\text{hf}} + \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{a_2}{s + p_2} + \frac{a_3}{s + p_3} + \dots + \frac{a_i}{s + p_i} = F_{\text{hf}} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s + p_i}, \quad (221)$$

onde o termo F_{hf} é um número real positivo (Yamanaka, 2009).

Assim, para uma função tabulada no domínio da frequência existem diversos métodos que permitem determinar o termo F_{hf} , os polos e os resíduos da função racional F'_s . Como exemplo, cita-se o método de Prony, o *Vector Fitting*, o Levenberg-Marquardt, dentre outros. Para o estudo em questão será utilizado o *Vector Fitting* pois, faz-se a aproximação racional no domínio da frequência das admitâncias que representam a linha (Balestero, 2022). Então, para cada admitância, é sintetizado um circuito elétrico composto por uma associação de elementos concentrados, modelando assim a linha de transmissão por elementos de circuito.

Gustavsen e Semlyen (1998) apresentam um método genérico para o ajuste de dados no domínio da frequência por funções polinomiais racionais, denominado de ajuste vetorial, ou *Vector Fitting*. Neste método, a função a ser aproximada pode ser um escalar complexo ou um vetor com elementos complexos. No último caso, todos os elementos do vetor são aproximados por funções racionais com polos comuns.

No método de ajuste vetorial, o processo de ajuste é realizado em dois estágios, ambos com polos conhecidos. O primeiro estágio faz uso de estimativas iniciais reais e/ou complexas para os polos, distribuídos de forma linear ou logarítmica, em toda a faixa de frequência de interesse. Para tanto, uma função escalonamento é introduzida. Deste ajuste preliminar, uma nova estimativa para os polos é obtida, e então utilizados no segundo estágio do ajuste, agora para a função objetivo, sem qualquer escalonamento. O erro absoluto é utilizado como função de mérito e o ajuste é otimizado iterativamente (Gustavsen; Semlyen, 1999).

APÊNDICE B - REPRESENTAÇÃO COMPUTACIONAL PARA 5 POLOS

% MODELO EM ESPAÇO DE ESTADOS PARA REPRESENTAR O TRANSITÓRIO ELETROMAGNÉTICO DA L.T. CONSIDERANDO 5 POLOS NO CIRCUITO EQUIVALENTE

clc; clear;

%%%

% VALORES DOS ELEMENTOS DOS RAMOS RL E RLC DO EMISSOR, RECEPTOR E LONGITUDINAL

% Dados do emissor

Re1 = 3.5368726e3; Le1 = 1.3134559e-1;

Re2 = 4.990156e1; Le2 = 5.3449535e-2; Re22 = -1.1644991e4; Ce2 = 2.843169e-7;

Re3 = 1.1336544e2; Le3 = 1.4072094e-2; Re32 = -5.0113e3; Ce3 = 6.8605003e-8;

% Dados do receptor

Rr1 = 3.5368726e3; Lr1 = 1.3134559e-1;

Rr2 = 4.990156e1; Lr2 = 5.3449535e-2; Rr22 = -1.1644991e4; Cr2 = 2.843169e-7;

Rr3 = 1.1336544e2; Lr3 = 1.4072094e-2; Rr32 = -5.0113e3; Cr3 = 6.8605003e-8;

% Dados longitudinais

Rl1 = 4.3610368e1; Ll1 = 4.6336187;

Rl2 = 6.4033773e0; Ll2 = 3.268029e-1;

Rl3 = 1.1850141e2; Ll3 = 2.0503325;

Rl4 = 9.6406222e2; Ll4 = 2.6025795;

Rl5 = -2.4554337e2; Ll5 = -1.1041628e-1; Rl52 = 8.1546496e3; Cl5 = -1.3153412e-7;

%%%

% EQUAÇÕES DE ESTADO DO SISTEMA

% Termos da matriz A relacionados ao emissor do ramo RLe 1

A01_01 = -Re1/Le1; %Ie1

A01_02 = 0; %Ie2

A01_03 = 0; %Ie3

A01_06 = 0; %II1

A01_07 = 0; %II2

A01_08 = 0; %II3

A01_09 = 0; %II4

A01_10 = 0; %II5

A01_12 = 0; %Ir1

A01_13 = 0; %Ir2

A01_15 = 0; %Ir3

A01_04 = 0; %Vce2

A01_05 = 0; %Vce3

A01_11 = 0; %Vcl5

A01_14 = 0; %Vcr2

A01_16 = 0; %Vcr3

%

% Termos da matriz A relacionados a corrente do emissor do ramo RLCE 2

A02_01 = 0; %Ie1

A02_02 = -Re2/Le2; %Ie2

A02_03 = 0; %Ie3

A02_06 = 0; %II1

A02_07 = 0; %II2

A02_08 = 0; %II3

A02_09 = 0; %II4

A02_10 = 0; %II5

$$A02_{12} = 0; \%Ir1$$

$$A02_{13} = 0; \%Ir2$$

$$A02_{15} = 0; \%Ir3$$

$$A02_{04} = -1/Le2; \%Vce2$$

$$A02_{05} = 0; \%Vce3$$

$$A02_{11} = 0; \%Vcl5$$

$$A02_{14} = 0; \%Vcr2$$

$$A02_{16} = 0; \%Vcr3$$

%

% Termos da matriz A relacionados a corrente do emissor do ramo RLCE 3

$$A03_{01} = 0; \%Ie1$$

$$A03_{02} = 0; \%Ie2$$

$$A03_{03} = -Re3/Le3; \%Ie3$$

$$A03_{06} = 0; \%II1$$

$$A03_{07} = 0; \%II2$$

$$A03_{08} = 0; \%II3$$

$$A03_{09} = 0; \%II4$$

$$A03_{10} = 0; \%II5$$

$$A03_{12} = 0; \%Ir1$$

$$A03_{13} = 0; \%Ir2$$

$$A03_{15} = 0; \%Ir3$$

$$A03_{04} = 0; \%Vce2$$

$$A03_{05} = -1/Le3; \%Vce3$$

$$A03_{11} = 0; \%Vcl5$$

$$A03_{14} = 0; \%Vcr2$$

$$A03_{16} = 0; \%Vcr3$$

```
%  
  
% Termos da matriz A relacionados ao capacitor do emissor do ramo RLCE 2  
  
A04_01 = 0; %Ie1  
A04_02 = 1/Ce2; %Ie2  
A04_03 = 0; %Ie3  
A04_06 = 0; %II1  
A04_07 = 0; %II2  
A04_08 = 0; %II3  
A04_09 = 0; %II4  
A04_10 = 0; %II5  
A04_12 = 0; %Ir1  
A04_13 = 0; %Ir2  
A04_15 = 0; %Ir3  
A04_04 = -1/(Ce2*Re22); %Vce2  
A04_05 = 0; %Vce3  
A04_11 = 0; %Vcl5  
A04_14 = 0; %Vcr2  
A04_16 = 0; %Vcr3  
  
%  
  
% Termos da matriz A relacionados ao capacitor do emissor do ramo RLCE 2  
  
A05_01 = 0; %Ie1  
A05_02 = 0; %Ie2  
A05_03 = 1/Ce3; %Ie3  
A05_06 = 0; %II1  
A05_07 = 0; %II2  
A05_08 = 0; %II3
```

$$A05_09 = 0; \%II4$$

$$A05_10 = 0; \%II5$$

$$A05_12 = 0; \%Ir1$$

$$A05_13 = 0; \%Ir2$$

$$A05_15 = 0; \%Ir3$$

$$A05_04 = 0; \%Vce2$$

$$A05_05 = -1/(Ce3*Re32); \%Vce3$$

$$A05_11 = 0; \%Vcl5$$

$$A05_14 = 0; \%Vcr2$$

$$A05_16 = 0; \%Vcr3$$

%

% Termos da matriz A relacionados a corrente longitudinal do ramo RL1 1

$$aux_II1 = 1/(1+(L11/LI2)+(L11/LI3)+(L11/LI4)+(L11/LI5)+(L11/Lr1)+(L11/Lr2)+(L11/Lr3));$$

%TI1: Termo que multiplica II1_ponto

$$A06_01 = 0; \%Ie1$$

$$A06_02 = 0; \%Ie2$$

$$A06_03 = 0; \%Ie3$$

$$A06_06 = (-((R11/LI2)+(R11/LI3)+(R11/LI4)+(R11/LI5)+(R11/Lr1)+(R11/Lr2)+(R11/Lr3)))*aux_II1;$$

%II1: termo da diagonal principal

$$A06_07 = (RI2/LI2)*aux_II1; \%II2$$

$$A06_08 = (RI3/LI3)*aux_II1; \%II3$$

$$A06_09 = (RI4/LI4)*aux_II1; \%II4$$

$$A06_10 = (RI5/LI5)*aux_II1; \%II5$$

$$A06_12 = -(Rr1/Lr1)*aux_II1; \%Ir1$$

$$A06_13 = -(Rr2/Lr2)*aux_II1; \%Ir2$$

$$A06_15 = -(Rr3/Lr3)*aux_II1; \%Ir3$$

$$A06_04 = 0; \%Ve2$$

$$A06_05 = 0; \%Ve3$$

$$A06_11 = (1/L15)*aux_II1; \%Vcl5$$

$$A06_14 = -(1/Lr2)*aux_II1; \%Vcr2$$

$$A06_16 = -(1/Lr3)*aux_II1; \%Vcr3$$

%

% Termos da matriz A relacionados a corrente longitudinal do ramo RL1 2

$$aux_II2 = 1/(1+(L12/L11)+(L12/L13)+(L12/L14)+(L12/L15)+(L12/Lr1)+(L12/Lr2)+(L12/Lr3));$$

% TI2: Termo que multiplica II2_ponto

$$A07_01 = 0; \%Ie1$$

$$A07_02 = 0; \%Ie2$$

$$A07_03 = 0; \%Ie3$$

$$A07_06 = (R11/L11)*aux_II2; \%II1$$

$$A07_07 = (-((R12/L11)+(R12/L13)+(R12/L14)+(R12/L15)+(R12/Lr1)+(R12/Lr2)+(R12/Lr3)))*aux_II2;$$

%II2: termo da diagonal principal

$$A07_08 = (R13/L13)*aux_II2; \%II3$$

$$A07_09 = (R14/L14)*aux_II2; \%II4$$

$$A07_10 = (R15/L15)*aux_II2; \%II5$$

$$A07_12 = -(Rr1/Lr1)*aux_II2; \%Ir1$$

$$A07_13 = -(Rr2/Lr2)*aux_II2; \%Ir2$$

$$A07_15 = -(Rr3/Lr3)*aux_II2; \%Ir3$$

$$A07_04 = 0; \%Ve2$$

$$A07_05 = 0; \%Ve3$$

$$A07_11 = (1/L15)*aux_II2; \%Vcl5$$

$$A07_14 = -(1/Lr2)*aux_II2; \%Vcr2$$

$$A07_16 = -(1/Lr3)*aux_II2; \%Vcr3$$

%

% Termos da matriz A relacionados a corrente longitudinal do ramo RL1 3

$$\text{aux_II3} = 1/(1+(L13/L11)+(L13/L12)+(L13/L14)+(L13/L15)+(L13/Lr1)+(L13/Lr2)+(L13/Lr3));$$

%Tl3: Termo que multiplica II3_ponto

$$A08_01 = 0; \%Ie1$$

$$A08_02 = 0; \%Ie2$$

$$A08_03 = 0; \%Ie3$$

$$A08_06 = (R11/L11)*\text{aux_II3}; \%II1$$

$$A08_07 = (R12/L12)*\text{aux_II3}; \%II2$$

$$A08_08 = (-((R13/L11)+(R13/L12)+(R13/L14)+(R13/L15)+(R13/Lr1)+(R13/Lr2)+(R13/Lr3)))*\text{aux_II3};$$

%II3: termo da diagonal principal

$$A08_09 = (R14/L14)*\text{aux_II3}; \%II4$$

$$A08_10 = (R15/L15)*\text{aux_II3}; \%II5$$

$$A08_12 = -(Rr1/Lr1)*\text{aux_II3}; \%Ir1$$

$$A08_13 = -(Rr2/Lr2)*\text{aux_II3}; \%Ir2$$

$$A08_15 = -(Rr3/Lr3)*\text{aux_II3}; \%Ir3$$

$$A08_04 = 0; \%Ve2$$

$$A08_05 = 0; \%Ve3$$

$$A08_11 = (1/L15)*\text{aux_II3}; \%Vcl5$$

$$A08_14 = -(1/Lr2)*\text{aux_II3}; \%Vcr2$$

$$A08_16 = -(1/Lr3)*\text{aux_II3}; \%Vcr3$$

%

% Termos da matriz A relacionados a corrente longitudinal do ramo RL1 4

$$\text{aux_II4} = 1/(1+(L14/L11)+(L14/L12)+(L14/L13)+(L14/L15)+(L14/Lr1)+(L14/Lr2)+(L14/Lr3));$$

%Tl4: Termo que multiplica II4_ponto

$$A09_01 = 0; \%Ie1$$

$$A09_02 = 0; \%Ie2$$

$$A09_03 = 0; \%Ie3$$

$$A09_06 = (R11/L11)*\text{aux_II4}; \%II1$$

$$A09_07 = (R12/L12)*aux_II4; \%II2$$

$$A09_08 = (R13/L13)*aux_II4; \%II3$$

$$A09_09 = (-((R14/L11)+(R14/L12)+(R14/L13)+(R14/L15)+(R14/Lr1)+(R14/Lr2)+(R14/Lr3)))*aux_II4;$$

%II4: termo da diagonal principal

$$A09_10 = (R15/L15)*aux_II4; \%II5$$

$$A09_12 = -(Rr1/Lr1)*aux_II4; \%Ir1$$

$$A09_13 = -(Rr2/Lr2)*aux_II4; \%Ir2$$

$$A09_15 = -(Rr3/Lr3)*aux_II4; \%Ir3$$

$$A09_04 = 0; \%Ve2$$

$$A09_05 = 0; \%Ve3$$

$$A09_11 = (1/L15)*aux_II4; \%Vcl5$$

$$A09_14 = -(1/Lr2)*aux_II4; \%Vcr2$$

$$A09_16 = -(1/Lr3)*aux_II4; \%Vcr3$$

%-----

% Termos da matriz A relacionados a corrente longitudinal do ramo RLC1 5

$$aux_II5 = 1/(1+(L15/L11)+(L15/L12)+(L15/L13)+(L15/L14)+(L15/Lr1)+(L15/Lr2)+(L15/Lr3));$$

%TI5: Termo que multiplica II5_ponto

$$A10_01 = 0; \%Ie1$$

$$A10_02 = 0; \%Ie2$$

$$A10_03 = 0; \%Ie3$$

$$A10_06 = (R11/L11)*aux_II5; \%II1$$

$$A10_07 = (R12/L12)*aux_II5; \%II2$$

$$A10_08 = (R13/L13)*aux_II5; \%II3$$

$$A10_09 = (R14/L14)*aux_II5; \%II4$$

$$A10_10 = (-((R15/L11)+(R15/L12)+(R15/L13)+(R15/L14)+(R15/Lr1)+(R15/Lr2)+(R15/Lr3)))*aux_II5;$$

%II5: termo da diagonal principal

$$A10_12 = -(Rr1/Lr1)*aux_II5; \%Ir1$$

$$A10_{13} = -(Rr2/Lr2)*aux_II5; \%Ir2$$

$$A10_{15} = -(Rr3/Lr3)*aux_II5; \%Ir3$$

$$A10_{04} = 0; \%Ve2$$

$$A10_{05} = 0; \%Ve3$$

$$A10_{11} = (-(1/Ll1)-(1/Ll2)-(1/Ll3)-(1/Ll4)-(1/Lr1)-(1/Lr2)-(1/Lr3))*aux_II5; \%Vcl5$$

$$A10_{14} = -(1/Lr2)*aux_II5; \%Vcr2$$

$$A10_{16} = -(1/Lr3)*aux_II5; \%cr3$$

%

% Termos da matriz A relacionados ao capacitor longitudinal do ramo RLCl 5

$$A11_{01} = 0; \%Ie1$$

$$A11_{02} = 0; \%Ie2$$

$$A11_{03} = 0; \%Ie3$$

$$A11_{06} = 0; \%II1$$

$$A11_{07} = 0; \%II2$$

$$A11_{08} = 0; \%II3$$

$$A11_{09} = 0; \%II4$$

$$A11_{10} = 1/Cl5; \%II5$$

$$A11_{12} = 0; \%Ir1$$

$$A11_{13} = 0; \%Ir2$$

$$A11_{15} = 0; \%Ir3$$

$$A11_{04} = 0; \%Vce2$$

$$A11_{05} = 0; \%Vce3$$

$$A11_{11} = -1/(Cl5*RI52); \%Vcl5$$

$$A11_{14} = 0; \%Vcr2$$

$$A11_{16} = 0; \%Vcr3$$

%

% Termos da matriz A relacionados a corrente do receptor do ramo R_{Lr} 1

$$\text{aux_Ir1} = 1/(1+(L_{r1}/L_{l1})+(L_{r1}/L_{l2})+(L_{r1}/L_{l3})+(L_{r1}/L_{l4})+(L_{r1}/L_{l5})+(L_{r1}/L_{r2})+(L_{r1}/L_{r3}));$$

%Tr1: Termo que multiplica Ir1_ponto

$$A_{12_01} = 0; \%Ie1$$

$$A_{12_02} = 0; \%Ie2$$

$$A_{12_03} = 0; \%Ie3$$

$$A_{12_06} = -(R_{l1}/L_{l1})*\text{aux_Ir1}; \%I11$$

$$A_{12_07} = -(R_{l2}/L_{l2})*\text{aux_Ir1}; \%I12$$

$$A_{12_08} = -(R_{l3}/L_{l3})*\text{aux_Ir1}; \%I13$$

$$A_{12_09} = -(R_{l4}/L_{l4})*\text{aux_Ir1}; \%I14$$

$$A_{12_10} = -(R_{l5}/L_{l5})*\text{aux_Ir1}; \%I15$$

$$A_{12_12} = (-((R_{r1}/L_{l1})+(R_{r1}/L_{l2})+(R_{r1}/L_{l3})+(R_{r1}/L_{l4})+(R_{r1}/L_{l5})+(R_{r1}/L_{r2})+(R_{r1}/L_{r3}))*\text{aux_Ir1};$$

%Ir1: termo da diagonal principal

$$A_{12_13} = (R_{r2}/L_{r2})*\text{aux_Ir1}; \%Ir2$$

$$A_{12_15} = (R_{r3}/L_{r3})*\text{aux_Ir1}; \%Ir3$$

$$A_{12_04} = 0; \%Ve2$$

$$A_{12_05} = 0; \%Ve3$$

$$A_{12_11} = -(1/L_{l5})*\text{aux_Ir1}; \%Vcl5$$

$$A_{12_14} = (1/L_{r2})*\text{aux_Ir1}; \%Vcr2$$

$$A_{12_16} = (1/L_{r3})*\text{aux_Ir1}; \%Vcr3$$

%-----

% Termos da matriz A relacionados a corrente do receptor do ramo R_{LCr} 2

$$\text{aux_Ir2} = 1/(1+(L_{r2}/L_{l1})+(L_{r2}/L_{l2})+(L_{r2}/L_{l3})+(L_{r2}/L_{l4})+(L_{r2}/L_{l5})+(L_{r2}/L_{r1})+(L_{r2}/L_{r3}));$$

%Tr2: Termo que multiplica Ir2_ponto

$$A_{13_01} = 0; \%Ie1$$

$$A_{13_02} = 0; \%Ie2$$

$$A_{13_03} = 0; \%Ie3$$

$$A13_06 = -(R11/L11)*aux_Ir2; \%II1$$

$$A13_07 = -(R12/L12)*aux_Ir2; \%II2$$

$$A13_08 = -(R13/L13)*aux_Ir2; \%II3$$

$$A13_09 = -(R14/L14)*aux_Ir2; \%II4$$

$$A13_10 = -(R15/L15)*aux_Ir2; \%II5;$$

$$A13_12 = (Rr1/Lr1)*aux_Ir2; \%Ir1$$

$$A13_13 = (-((Rr2/L11)+(Rr2/L12)+(Rr2/L13)+(Rr2/L14)+(Rr2/L15)+(Rr2/Lr1)+(Rr2/Lr3)))*aux_Ir2; \%Ir2$$

$$A13_15 = (Rr3/Lr3)*aux_Ir2; \%Ir3$$

$$A13_04 = 0; \%Ve2$$

$$A13_05 = 0; \%Ve3$$

$$A13_11 = -(1/L15)*aux_Ir2; \%Vcl5$$

$$A13_14 = (-((1/L11)+(1/L12)+(1/L13)+(1/L14)+(1/L15)+(1/Lr1)+(1/Lr3)))*aux_Ir2; \%Vcr2$$

$$A13_16 = (1/Lr3)*aux_Ir2; \%Vcr3$$

%

% Termos da matriz A relacionados ao capacitor do receptor do ramo RLCr 2

$$A14_01 = 0; \%Ie1$$

$$A14_02 = 0; \%Ie2$$

$$A14_03 = 0; \%Ie3$$

$$A14_06 = 0; \%II1$$

$$A14_07 = 0; \%II2$$

$$A14_08 = 0; \%II3$$

$$A14_09 = 0; \%II4$$

$$A14_10 = 0; \%II5$$

$$A14_12 = 0; \%Ir1$$

$$A14_13 = 1/Cr2; \%Ir2$$

$$A14_{15} = 0; \%Ir3$$

$$A14_{04} = 0; \%Vce2$$

$$A14_{05} = 0; \%Vce3$$

$$A14_{11} = 0; \%Vcl5$$

$$A14_{14} = -1/(Cr2*Rr22); \%Vcr2$$

$$A14_{16} = 0; \%Vcr3$$

%

% Termos da matriz A relacionados a corrente do receptor do ramo RLCr 3

$$aux_Ir3 = 1/(1+(Lr3/L11)+(Lr3/L12)+(Lr3/L13)+(Lr3/L14)+(Lr3/L15)+(Lr3/Lr1)+(Lr3/Lr2));$$

%Tr3: Termo que multiplica I15_ponto

$$A15_{01} = 0; \%Ie1$$

$$A15_{02} = 0; \%Ie2$$

$$A15_{03} = 0; \%Ie3$$

$$A15_{06} = -(R11/L11)*aux_Ir3; \%I11$$

$$A15_{07} = -(R12/L12)*aux_Ir3; \%I12$$

$$A15_{08} = -(R13/L13)*aux_Ir3; \%I13$$

$$A15_{09} = -(R14/L14)*aux_Ir3; \%I14$$

$$A15_{10} = -(R15/L15)*aux_Ir3; \%I15;$$

$$A15_{12} = (Rr1/Lr1)*aux_Ir3; \%Ir1$$

$$A15_{13} = (Rr2/Lr2)*aux_Ir3; \%Ir2$$

$$A15_{15} = (-((Rr3/L11)+(Rr3/L12)+(Rr3/L13)+(Rr3/L14)+(Rr3/L15)+(Rr3/Lr1)+(Rr3/Lr2)))*aux_Ir3;$$

%Ir3

$$A15_{04} = 0; \%Ve2$$

$$A15_{05} = 0; \%Ve3$$

$$A15_{11} = -(1/L15)*aux_Ir3; \%Vcl5$$

$$A15_{14} = (1/Lr2)*aux_Ir3; \%Vcr2$$

$$A16_{16} = (-((1/L11)+(1/L12)+(1/L13)+(1/L14)+(1/L15)+(1/Lr1)+(1/Lr2)))*aux_Ir3; \%Vcr2$$

```

%
% Termos da matriz A relacionados ao capacitor do receptor do ramo RLCr 3
A16_01 = 0; %Ie1
A16_02 = 0; %Ie2
A16_03 = 0; %Ie3
A16_06 = 0; %II1
A16_07 = 0; %II2
A16_08 = 0; %II3
A16_09 = 0; %II4
A16_10 = 0; %II5
A16_12 = 0; %Ir1
A16_13 = 0; %Ir2
A16_15 = 1/Cr3; %Ir3
A16_04 = 0; %Vce2
A16_05 = 0; %Vce3
A16_11 = 0; %Vcl5
A16_14 = 0; %Vcr2
A16_16 = -1/(Cr3*Rr32); %Vcr3
%%%%%%%%%%
% Termos relacionados a matriz B
B1 = 1/Le1;
B2 = 1/Le2;
B3 = 1/Le3;
B6 = (1/Lr1+1/Lr2+1/Lr3)*aux_II1;
B7 = (1/Lr1+1/Lr2+1/Lr3)*aux_II2;
B8 = (1/Lr1+1/Lr2+1/Lr3)*aux_II3;

```

$$B9 = (1/Lr1+1/Lr2+1/Lr3)*aux_II4;$$

$$B10 = (1/Lr1+1/Lr2+1/Lr3)*aux_II5;$$

$$B12 = (1/Ll1+1/Ll2+1/Ll3+1/Ll4+1/Ll5)*aux_Ir1;$$

$$B13 = (1/Ll1+1/Ll2+1/Ll3+1/Ll4+1/Ll5)*aux_Ir2;$$

$$B15 = (1/Ll1+1/Ll2+1/Ll3+1/Ll4+1/Ll5)*aux_Ir3;$$

$$B4 = 0;$$

$$B5 = 0;$$

$$B11 = 0;$$

$$B14 = 0;$$

$$B16 = 0;$$

% Representação da matriz B

$$B = [B1;B2;B3;B4;B5;B6;B7;B8;B9;B10;B11;B12;B13;B14;B15;B16];$$