

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

MARCOS VINÍCIUS FERREIRA DA SILVA

Subgrupos do grupo de Lorentz e simetria de matéria escura

Guaratinguetá

2020

Marcos Vinícius Ferreira da Silva

Subgrupos do grupo de Lorentz e simetria de matéria escura

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof^o Dr. Julio Marny Hoff da Silva
Coorientador: Prof^o Dr. Rodolfo José Bueno Rogerio .

Guaratinguetá
2020

S586s Silva, Marcos Vinícius Ferreira da
Subgrupos do grupo de Lorentz e simetria de matéria escura / Marcos
Vinícius Ferreira da Silva – Guaratinguetá, 2020.
58 f : il.
Bibliografia: f. 51-53

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de
Engenharia de Guaratinguetá, 2020.
Orientador: Prof. Dr. Julio Marny Hoff da Silva
Coorientador: Prof. Dr. Rodolfo José Bueno Rogério

1. Matéria escura (Astronomia). 2. Teoria quântica de campos.
3. Simetria (Física). 4. Relatividade (Física). I. Título

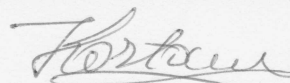
CDU 52(043)

MARCOS VINICIUS FERREIRA DA SILVA

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRE EM FÍSICA”

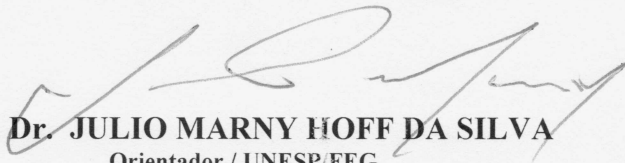
PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Dr. Konstantin Georgiev Kostov
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

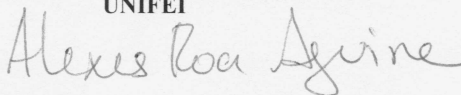


Prof. Dr. JULIO MARNY HOFF DA SILVA
Orientador / UNESP/FEG



Prof. Dr. ELIAS LEITE MENDONÇA
UNESPFEG

Prof. Dr. ALEXIS ROA AGUIRRE
UNIFEI



Março de 2020

DADOS CURRICULARES

MARCOS VINÍCIUS FERREIRA DA SILVA

NASCIMENTO 24/04/1993 - Guaratinguetá / SP

FILIAÇÃO Hamilton Bento da Silva
Margarida Maria Luíza Ferreira da Silva

2013 / 2018 Curso de graduação - Bacharelado em Física
Faculdade de Engenharia do Campos de Guaratinguetá
Universidade Estadual Paulista - UNESP, Guaratinguetá-SP.

2018 / 2020 Curso de Pós-Graduação em Física, nível Mestrado
Faculdade de Engenharia do Campos de Guaratinguetá
Universidade Estadual Paulista - UNESP, Guaratinguetá-SP.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais Margarida e Hamilton.

Também agradeço ao meu orientador *Prof^o Dr. Julio Marny Hoff da Silva*, que esteve me auxiliando desde a graduação até os dias atuais, sempre com muita paciência e sem medir esforços. Sendo que nesse período ele me ensinou muita física e também me incentivou várias vezes.

Ao meu amigo *Anderson Almeida Escobal*, que estudou comigo várias vezes ao decorrer das disciplinas da pós e também me auxiliou inúmeras vezes sem medir esforços.

Ao meu coorientador *Prof^o Dr. Rodolfo José Bueno Rogerio*, por ter me ajudado no desenvolvimento deste trabalho e também pelo fato de que esteve sempre disposto a me auxiliar, mesmo estando separados fisicamente.

Ao *Prof^o Dr. Rogério Teixeira Cavalcanti*, por ter feito parte da banca da minha qualificação e também por ter dado várias dicas que ajudaram no desenvolvimento desta dissertação.

Agradeço também a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

De modo geral, mas não menos importante, agradeço aos meus colegas da pós, aos meus colegas de sala, aos professores, a UNESP e a todos que fizeram parte direta ou indiretamente do desenvolvimento desta dissertação.

Este trabalho contou com o apoio da seguinte entidade:

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoa de Nível Superior

“Sábio é aquele que conhece os limites da própria ignorância.”
(Sócrates)

RESUMO

Teorias que violam as simetrias de Lorentz são de certa forma comumente encontradas na literatura. Com o estudo dos subgrupos do grupo de Lorentz (PATERA et al., 1976), uma pergunta fica no ar. Será preciso todo o grupo de Lorentz para descrever as simetrias do espaço-tempo ou apenas um subgrupo já seria suficiente? Se isso for possível teríamos um teoria que violaria as simetrias de Lorentz e consequentemente outras perguntas surgem. Essa teoria serve para descrever a matéria bariônica ou outro tipo de matéria? Neste trabalho usaremos os grupos da *very special relativity* (VSR) que são subgrupos do grupo de Lorentz e tentaremos responder essas perguntas com base em cálculos e em experimentos largamente difundidos na literatura: o experimento de Michelson-Morley e o fenômeno da precessão de Thomas. Também discutiremos algumas consequências advindas de uma teoria quântica de campos que viola as simetrias de Lorentz.

PALAVRAS-CHAVE: Precessão de Thomas. VSR. Matéria escura. Teoria Quântica de Campos.

ABSTRACT

Lorentz violating theories are somewhat commonly found in the literature. Studying the Lorentz subgroups (PATERA et al., 1976), one question is left in the air. Do we need the full Lorentz group to describe the space-time symmetries or just a subset would be enough? If this were possible we would have a theory that would violate Lorentz symmetries and consequently other questions arise. Does this theory is enough to describe baryonic matter or other kind of matter? In this essay we will use *very special relativity* (VSR) groups that are subgroups of Lorentz's group and will try to answer these questions based on calculations and experiments widely disseminated in the literature: Michelson-Morley experiment and Thomas precession phenomenon. We will also discuss some consequences of a Lorentz violating field theory.

KEYWORDS: Thomas precession. VSR. Dark matter. Quantum Field Theory.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Representação pictórica de dois referenciais.	21
Figura 2	Representação pictórica de boosts na relatividade restrita.	30

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Álgebra dos geradores dos grupos da VSR.	18
Tabela 2 – Invariantes da VSR.	26

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

VSR	Very Special Relativity (Relatividade Muito Especial).
SR	Special Relativity (Relatividade Restrita).
ELKO	Eigenspinoren des Ladungskonjugationsoperators.
Λ CDM	Lambda Cold Dark Matter model.

LISTA DE SÍMBOLOS

γ	Fator relativístico (fator de Lorentz).
g	Fator de Landé.
\equiv	Equivale a.
\not{p}	$\not{p} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^\mu p_\mu$ (notação <i>slash</i> de Feynman).
$\stackrel{\text{def}}{=}$	Define que.
\square	Operador de d'Alembert.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	TEORIA DA RELATIVIDADE MUITO ESPECIAL (VSR)	16
2.1	ESTRUTURA ALGÉBRICA E GRUPOS DE TRANSFORMAÇÃO DA VSR . .	16
2.2	ADIÇÃO DE VELOCIDADES NA VSR	21
2.3	REPRESENTAÇÃO ESPINORIAL DOS GRUPOS $HOM(2)$ E $SIM(2)$	24
2.4	GRUPOS $IHOM(2)$ E $ISIM(2)$	26
2.5	INVARIANTES DE CASIMIR DA VSR	26
3	PRECESSÃO DE THOMAS	28
3.1	PRECESSÃO DE THOMAS E ACOPLAMENTO SPIN-ÓRBITA NA RELATIVI- DADE RESTRITA	29
3.2	PRECESSÃO DE THOMAS E ACOPLAMENTO SPIN-ÓRBITA NA VSR . . .	32
4	ASPECTOS DE TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS FERMIÔNICA EM VSR	35
4.1	ESTRUTURA DE LOCALIDADE DOS CAMPOS QUÂNTICOS	35
4.2	PROPAGADOR DE FEYNMAN-DYSON	41
4.3	PROPAGADOR DE FEYNMAN PARA DIRAC	45
4.4	LAGRANGIANA	46
5	CONCLUSÃO	50
	REFERÊNCIAS	51
	APÊNDICE A – OBTENÇÃO DE UMA MATRIZ INVARIANTE POR TRANS- FORMAÇÕES DA VSR	54

1 INTRODUÇÃO

Atualmente existem várias teorias que violam as simetrias de Lorentz (BATTISTONI et al., 2005; COHEN; GLASHOW, 2006a; COLLADAY; KOSTELECKY, 1998; NITESCU; GHINESCU; STOICA, 2020), mas podemos destacar um caso específico de uma teoria interessante, composta de partículas de spin $1/2$ que formam um conjunto completo de auto-espinores do operador conjugação de carga, os quais, por sua vez, carregam helicidade dual. Tais espinores recebem o nome de ELKO, sendo este um acrônimo advindo do Alemão *Eigenspinoren des Ladungskonjugationsoperators*. Esses espinores, em sua forma primária, fornecem uma soma de spin que não se manifesta invariante (ou covariante) por transformações de Lorentz, entretanto são invariantes ou covariantes por transformações de alguns subgrupos do grupo de Lorentz (AHLUWALIA; GRUMILLER, 2005; ROGERIO, 2014). Esses subgrupos em questão possuem certas propriedades bem peculiares, uma delas é recuperar o grupo de Lorentz quando lhes adiciona a simetria de paridade ou reversão temporal. Podemos também destacar o fato da invariância do intervalo e que também existe uma velocidade universal e isotrópica para qualquer referencial, a velocidade da luz (c). Outra característica interessante que surge desses espinores está relacionada a não interação com partículas do Modelo Padrão (*Standard Model*), mas há a possibilidade de interação com o campo de Higgs (AHLUWALIA-KHALILOVA; GRUMILLER, 2005; GILLARD; MARTIN, 2009).

Os subgrupos do grupo de Lorentz referidos acima são $SIM(2)$ e $HOM(2)$, os quais possuem uma álgebra que é composta por recombinações lineares dos geradores de um subgrupo de Lorentz (ortócrono próprio). Estes grupos, que serão formalmente apresentados no Capítulo 2, estabelecem a teoria da relatividade muito especial (VSR), que foi proposta por Andrew Cohen e Sheldon Glashow em 2006 (COHEN; GLASHOW, 2006b), originando uma nova ramificação de teorias que violam as simetrias de Lorentz.

De acordo com o modelo Λ CDM (Lambda Cold Dark Matter model) o universo é composto por 68.66% de energia escura, 26.41% de matéria escura e os outros 4.93% são correspondente a matéria bariônica (AGHANIM et al., 2018). Se esse modelo estiver correto 84.73% da matéria do universo está no setor escuro. Infelizmente não há um modelo teórico amplamente aceito (embora haja propostas (CAPOZZIELLO; LAURENTIS, 2012; AHLUWALIA; GRUMILLER, 2005; FARRAR, 2018)) que explique a matéria escura até o presente momento. Mas pelo o que sabe, tal matéria não interage com o campo eletromagnético e nem com partículas do Modelo Padrão, podendo interagir com si mesma e também possui interação gravitacional.

Na visão de Wigner partículas são interpretadas como representações do grupo de Poincaré e são rotuladas pelos invariantes de Casimir do grupo. Entretanto, podemos explorar subgrupos do grupo de Poincaré afim de encontrar possíveis candidatos para representar a matéria escura. Portanto, com base no foi discutido anteriormente, podemos utilizar os grupos da VSR para fazer tal abordagem.

Buscaremos entender teorias que violam as simetrias de Lorentz, mas obedecem apenas as simetrias da VSR. Para isso, faremos um estudo detalhado da VSR e buscaremos contrastá-la com evidências experimentais. Com base nos cálculos realizados e os dados experimentais verificaremos se a teoria

da VSR pode ser utilizada na descrição da matéria usual ou se só pode ser utilizada na descrição de partículas que estão no setor escuro da matéria, por exemplo. Para tal abordagem os capítulos foram divididos como relatam os próximos parágrafos.

No Capítulo 2 discutiremos a teoria da VSR, onde abordaremos aspectos como estrutura algébrica, adição de velocidades e representação espinorial na VSR. Também definiremos os grupos que compõem a VSR e apresentaremos suas respectivas álgebras. Com base nos geradores construiremos a matriz de boost da VSR, responsável em conectar um referencial inercial a outro. Em resumo, abordaremos os principais aspectos físicos e matemáticos que uma teoria relativística tem que satisfazer.

Já o Capítulo 3 fora reservado para discutirmos as implicações da VSR em fenômenos físicos conhecidos como, por exemplo, a precessão de Thomas. Compararemos o fenômeno de precessão sob o ponto de vista da relatividade especial e da VSR. O intuito dessa abordagem é verificar se a VSR tem coerência com os fenômenos conhecidos e também se ela está de acordo com os experimentos. Quando se busca uma nova teoria relativística é importante que ela esteja de acordo com o experimento de Michelson-Morley e no caso da VSR isso ocorre para dois grupos $SIM(2)$ e $HOM(2)$ (COHEN; GLASHOW, 2006b). Entretanto, em relação a precessão de Thomas, analisaremos os resultados obtidos teoricamente e apreciaremos os resultados obtidos com certos resultados experimentais.

No Capítulo 4 abordaremos certos aspectos da VSR em teoria quântica de campos. Para tal, vamos considerar que as somas de spin de um campo fermiônico não sejam invariantes por transformações de Lorentz, mas sim invariantes por transformações da VSR. Essa escolha decorre do fato das somas de spin aparecerem com uma certa recorrência em uma teoria quântica de campos, por exemplo, no cálculo do propagador de Feynman-Dyson bem como no cálculo dos correladores quânticos. Os espinores que dão origem a uma soma de spin com essa característica não podem satisfazer a equação de Dirac, pois essa possui espaços de representação $(0,1/2)$ e $(1/2,0)$ que são relacionados um ao outro pela simetria de paridade e os grupos que compõe a VSR não possuem simetria de paridade por definição (ROGERIO, 2018; COHEN; GLASHOW, 2006b). Tendo isso em vista é razoável pensar que tais espinores obedeçam a equação de Klein-Gordon, semelhantemente ao caso do campo escalar, pois essa equação tem como base a conservação de energia. Portanto, vamos calcular e analisar nesse último capítulo os correladores de campo quântico que obedecem a estatística fermiônica e verificar seus respectivos resultados, e, também o impacto disso na teoria. Por último, vamos calcular o propagador de Feynman-Dyson com o objetivo de obter mais informações, como por exemplo, buscar um operador de campo quântico e uma possível lagrangiana associados à esse propagador.

2 TEORIA DA RELATIVIDADE MUITO ESPECIAL (VSR)

Em 1976 Patera apresentou vários subgrupos do grupo de Poincaré (PATERA et al., 1976) e posteriormente em 2006 Andrew Cohen e Sheldon Glashow propuseram uma teoria relativística que é formulada utilizando-se de subgrupos do grupo de Lorentz (COHEN; GLASHOW, 2006b). Os autores mostraram que esses subgrupos, apesar de apresentarem novas simetrias, mantêm coerência experimental relativística. Por exemplo, a velocidade luz é isotrópica e universal em qualquer referencial inercial. Assim, ressalta-se o fato de que não há a necessidade do grupo completo de Lorentz para manter tais propriedades físicas, pois existem dois subgrupos do grupo de Lorentz que satisfazem essas condições. Esses subgrupos são denotados por $HOM(2)$ e $SIM(2)$. Estes subgrupos são os principais subgrupos da VSR, pois eles reproduzem resultados esperados advindos da relatividade restrita (SR), como por exemplo, adição de velocidades, invariância do intervalo, e como dito, uma velocidade máxima isotrópica (velocidade da luz no vácuo). Isso nos mostra particularmente que a VSR está de acordo com o experimento de Michelson-Morley (COHEN; GLASHOW, 2006b).

De forma genérica, se a partícula é massiva e não viola nenhuma simetria discreta como por exemplo \mathcal{P} , \mathcal{T} , \mathcal{CP} e \mathcal{CT} , então o grupo que melhor se encaixa nesse situação é o grupo de Poincaré. Entretanto, se houver a quebra de uma dessas simetrias discreta, um grupo pertencente a VSR pode ser a melhor escolha (COHEN; GLASHOW, 2006b; ROGERIO, 2014).

2.1 ESTRUTURA ALGÉBRICA E GRUPOS DE TRANSFORMAÇÃO DA VSR

Um grupo G pode ser definido como um conjunto de elementos que munido de uma operação \circ satisfaz algumas condições. A primeira delas é o fechamento, onde (GARCIA; LEQUAIN, 2018; SOUZA, 2015)

$$g \circ g' = g'' \quad \forall g, g', g'' \in G; \quad (2.1)$$

já a segunda condição é a associatividade, que pode ser expressa pela seguinte relação

$$g \circ (g' \circ g'') = (g \circ g') \circ g'' \quad \forall g, g', g'' \in G; \quad (2.2)$$

precisamos também definir um único elemento que represente a identidade e este obedece a seguinte relação

$$\mathbb{1} \circ g = g \circ \mathbb{1} = g \quad \forall \mathbb{1}, g \in G; \quad (2.3)$$

por último precisamos que exista uma inversa para cada elemento $g \in G$, que denotaremos aqui por g^{-1} , sendo que este tem que satisfazer a seguinte condição

$$g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = \mathbb{1} \quad \forall g, g^{-1}, \mathbb{1} \in G. \quad (2.4)$$

Por definição, os subgrupos do grupo de Lorentz que dão origem a VSR, são os subgrupos que após a adição de simetrias discretas tais como \mathcal{P} , \mathcal{T} , \mathcal{CP} e \mathcal{CT} retornam ao próprio grupo de Lorentz

(COHEN; GLASHOW, 2006b; HORVATH, 2011). De acordo com a definição, o menor subgrupo que dispõe dessas propriedades é o constituído pelos seguintes geradores

$$T_1 = K_x + J_y \quad \text{e} \quad T_2 = K_y - J_x, \quad (2.5)$$

onde \mathbf{J} e \mathbf{K} são geradores de rotação e boosts respectivamente. Os geradores da equação (2.5) em sua forma matricial são representados por

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Esse subgrupo é isomorfo ao grupo de translações em um plano $T(2)$ (COHEN; GLASHOW, 2006b; HORVATH, 2011; ROGERIO, 2018). Vamos verificar a premissa de que ao inserir simetrias discretas ao subgrupo recuperamos o grupo de Lorentz. Portanto, atuando com paridade em T_1 e T_2 , obtemos respectivamente \bar{T}_1 e \bar{T}_2 , onde

$$\bar{T}_1 = -K_x + J_y \quad \text{e} \quad \bar{T}_2 = -K_y - J_x, \quad (2.7)$$

e são representados matricialmente representados por

$$\bar{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

pois

$$\mathcal{P}\mathbf{K}\mathcal{P}^{-1} \rightarrow -\mathbf{K}, \quad \mathcal{P}\mathbf{J}\mathcal{P}^{-1} \rightarrow \mathbf{J}. \quad (2.9)$$

A operação de paridade possui as seguintes propriedades $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$ e $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$, conseqüentemente, o gerador de boost ganha um sinal negativo e o gerador de rotação permanece inalterado, pois $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$ (WEINBERG, 1995). Temos a liberdade de combinar os geradores (2.5) com (2.7) de modo estratégico para obter K_x, K_y, J_x e J_y . Além disso, podemos obter K_z e J_z das relações de comutação usuais de Lorentz. Com isso, podemos provar que o subgrupo $T(2)$ com a adição de paridade é equivalente ao grupo de Lorentz. De modo análogo as outras simetrias discretas podem ser verificadas.

O grupo $T(2)$ não é o único grupo da VSR, a partir dele podemos definir os outros grupos. Podemos adicionar o gerador de rotação em torno de z , J_z , obtendo um grupo isomorfo ao grupo Euclidiano $E(2)$ de rotações e translações no plano xy (HORVATH, 2011). O grupo $E(2)$ com a adição de uma simetria discreta é equivalente ao grupo de Lorentz. Analogamente, podemos adicionar a $T(2)$ o gerador K_z , dando origem ao grupo $HOM(2)$ e também podemos inserir a $T(2)$ os geradores J_z e K_z simultaneamente formando um novo grupo denotado por $SIM(2)$. Como $T(2) \subset HOM(2)$ e $T(2) \subset SIM(2)$, a adição de \mathcal{P} , \mathcal{T} , \mathcal{CP} ou \mathcal{CT} leva ao grupo de Lorentz (HORVATH, 2011). De

maneira compacta a tabela abaixo apresenta os grupos da VSR com seus respectivos geradores e suas respectivas álgebras (HORVATH, 2011; ROGERIO, 2018).

Tabela 1 – Álgebra dos geradores dos grupos da VSR.

Grupo	Geradores	Álgebra
$T(2)$	T_1, T_2	$[T_1, T_2] = 0.$
$E(2)$	T_1, T_2, J_z	$[T_1, T_2] = 0, [T_1, J_z] = -iT_2, [T_2, J_z] = iT_1.$
$HOM(2)$	T_1, T_2, K_z	$[T_1, T_2] = 0, [T_1, K_z] = iT_1, [T_2, K_z] = iT_2.$
$SIM(2)$	T_1, T_2, J_z, K_z	$[T_1, T_2] = 0, [T_1, J_z] = -iT_2, [T_2, J_z] = iT_1,$ $[T_1, K_z] = iT_1, [T_2, K_z] = iT_2, [J_z, K_z] = 0.$

Os grupos $HOM(2)$ e $SIM(2)$ permitem a construção de uma transformação que conecta dois referenciais inerciais. Tal transformação pode ser obtida através do boost da VSR que é definido como (HORVATH, 2011)

$$L(\Lambda) \equiv e^{\alpha T_1} e^{\beta T_2} e^{\phi K_z} \quad (2.10)$$

e para obter os parâmetros da transformação devemos antes obter a matriz de transformação $L(\Lambda)$. Cada gerador pode ser exponenciado formando uma matriz que representa um boost numa direção específica e o produto dessas matrizes formam um boost geral. Podemos exponenciar uma matriz utilizando a expansão em série de Maclaurin da função exponencial, que é representada por

$$e^{xM} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n x^n}{n!}. \quad (2.11)$$

Utilizando a relação (2.11) e os geradores da VSR, obtemos

$$e^{\alpha T_1} = \mathbb{1} + \alpha T_1 + \frac{1}{2!} \alpha^2 T_1^2 + \frac{1}{3!} \alpha^3 T_1^3 + \dots + \frac{1}{n!} \alpha^n T_1^n, \quad (2.12)$$

$$e^{\beta T_2} = \mathbb{1} + \beta T_2 + \frac{1}{2!} \beta^2 T_2^2 + \frac{1}{3!} \beta^3 T_2^3 + \dots + \frac{1}{n!} \beta^n T_2^n, \quad (2.13)$$

$$e^{\phi K_z} = \mathbb{1} + \phi K_z + \frac{1}{2!} \phi^2 K_z^2 + \frac{1}{3!} \phi^3 K_z^3 + \dots + \frac{1}{n!} \phi^n K_z^n. \quad (2.14)$$

De forma explícita temos (DUTTA; BHATTACHARYA, 2011; DAS; MOHANTY, 2011)

$$e^{\alpha T_1} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\alpha^2}{2} & \alpha & 0 & -\frac{\alpha^2}{2} \\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\alpha^2}{2} & \alpha & 0 & 1 - \frac{\alpha^2}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

$$e^{\beta T_2} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\beta^2}{2} & 0 & \beta & -\frac{\beta^2}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 1 & -\beta \\ \frac{\beta^2}{2} & 0 & \beta & 1 - \frac{\beta^2}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

$$e^{\phi K_z} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & 0 & 0 & \sinh \phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \phi & 0 & 0 & \cosh \phi \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

onde as relações (2.15) e (2.16) são obtidas por uma expansão até segunda ordem, pois $(T_1)^3 = (T_2)^3 = 0$. De posse das matrizes (2.15), (2.16) e (2.17), a equação (2.10) fornece

$$L(\Lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^\phi + e^{-\phi}(1 + (\alpha^2 + \beta^2))) & \alpha & \beta & \frac{1}{2}(e^\phi - e^{-\phi}(1 + (\alpha^2 + \beta^2))) \\ \alpha e^{-\phi} & 1 & 0 & -\alpha e^{-\phi} \\ \beta e^{-\phi} & 0 & 1 & -\beta e^{-\phi} \\ \frac{1}{2}(e^\phi - e^{-\phi}(1 - (\alpha^2 + \beta^2))) & \alpha & \beta & \frac{1}{2}(e^\phi + e^{-\phi}(1 - (\alpha^2 + \beta^2))) \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Analogamente a inversa é definida por (DUTTA; BHATTACHARYA, 2011)

$$L^{-1}(\Lambda) \equiv e^{-\phi K_z} e^{-\beta T_2} e^{-\alpha T_1}, \quad (2.19)$$

onde é fácil ver que $L^{-1}(\Lambda)$ satisfaz as propriedades necessárias

$$L^{-1}(\Lambda)L(\Lambda) = L(\Lambda)L^{-1}(\Lambda) = \mathbb{1}. \quad (2.20)$$

Assim, a transformação inversa é dada por

$$L^{-1}(\Lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^\phi + e^{-\phi}(1 + (\alpha^2 + \beta^2))) & -\alpha e^{-\phi} & -\beta e^{-\phi} & \frac{1}{2}(-e^\phi + e^{-\phi}(1 - (\alpha^2 + \beta^2))) \\ -\alpha & 1 & 0 & \alpha \\ -\beta & 0 & 1 & \beta \\ \frac{1}{2}(-e^\phi + e^{-\phi}(1 + (\alpha^2 + \beta^2))) & -\alpha e^{-\phi} & -\beta e^{-\phi} & \frac{1}{2}(e^\phi + e^{-\phi}(1 - (\alpha^2 + \beta^2))) \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Os parâmetros da transformação para (2.18) que conectam um quadrivetor de repouso $\mathbf{k} = (1, 0, 0, 0)$ a um quadrivetor com quadrivelocidade arbitrária $\mathbf{u} = (\gamma_u, \gamma_u u_x, \gamma_u u_y, \gamma_u u_z)$ são obtidos via relação:

$$L(u)\mathbf{k} = \mathbf{u}. \quad (2.22)$$

Tal aplicação resulta em um sistema linear dado por

$$\gamma_u = \frac{1}{2}(e^\phi + e^{-\phi}(1 + (\alpha^2 + \beta^2))), \quad (2.23)$$

$$\gamma_u u_x = \alpha e^{-\phi}, \quad (2.24)$$

$$\gamma_u u_y = \beta e^{-\phi}, \quad (2.25)$$

$$\gamma_u u_z = \frac{1}{2}(e^\phi - e^{-\phi}(1 - (\alpha^2 + \beta^2))). \quad (2.26)$$

A diferença da equação (2.23) pela equação (2.26) resulta em

$$\gamma_u(1 - u_z) = e^{-\phi}. \quad (2.27)$$

A substituição de (2.27) nas equações (2.24) e (2.25) e também a aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da expressão (2.27) nos fornecem os parâmetros que são dados por¹ (DAS; MOHANTY, 2011)

$$\alpha = \frac{u_x}{1 - u_z}, \quad (2.28)$$

$$\beta = \frac{u_y}{1 - u_z}, \quad (2.29)$$

$$\phi = -\ln[\gamma_u(1 - u_z)]. \quad (2.30)$$

Por fim, substituindo os parâmetros (2.28), (2.29) e (2.30) em (2.18) temos (DAS; MOHANTY, 2011)

$$L(u) = \begin{pmatrix} \gamma_u & \frac{u_x}{1-u_z} & \frac{u_y}{1-u_z} & \gamma_u \frac{u_z-u^2}{1-u_z} \\ \gamma_u u_x & 1 & 0 & -\gamma_u u_x \\ \gamma_u u_y & 0 & 1 & -\gamma_u u_y \\ \gamma_u u_z & \frac{u_x}{1-u_z} & \frac{u_y}{1-u_z} & \gamma_u \frac{1-u^2}{1-u_z} \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

A partir de (2.31) podemos encontrar um conjunto de coordenadas transformadas, dado por²

$$t' = \gamma_u t + \gamma_u u_x x + \gamma_u u_y y + \gamma_u u_z z, \quad (2.32)$$

$$x' = \frac{u_x}{1 - u_z} t + x + \frac{u_x}{1 - u_z} z, \quad (2.33)$$

$$y' = \frac{u_y}{1 - u_z} t + y + \frac{u_y}{1 - u_z} z, \quad (2.34)$$

$$z' = \gamma_u \frac{u_z - u^2}{1 - u_z} t - \gamma_u u_x x - \gamma_u u_y y + \gamma_u \frac{1 - u^2}{1 - u_z} z, \quad (2.35)$$

que tem a propriedade de manter o intervalo entre dois eventos invariante ($(ds)^2 = (ds')^2$) (DUTTA; BHATTACHARYA, 2011; HORVATH, 2011). Note, por fim, que a observação de um boost de Lorentz, dado por (DAS; MOHANTY, 2011)

$$\Lambda(u) = \begin{pmatrix} \gamma_u & \gamma_u u_x & \gamma_u u_y & \gamma_u u_z \\ \gamma_u u_x & 1 + \frac{(\gamma_u - 1)u_x^2}{u^2} & \frac{(\gamma_u - 1)u_x u_y}{u^2} & \frac{(\gamma_u - 1)u_x u_z}{u^2} \\ \gamma_u u_y & \frac{(\gamma_u - 1)u_x u_y}{u^2} & 1 + \frac{(\gamma_u - 1)u_y^2}{u^2} & \frac{(\gamma_u - 1)u_y u_z}{u^2} \\ \gamma_u u_z & \frac{(\gamma_u - 1)u_x u_z}{u^2} & \frac{(\gamma_u - 1)u_y u_z}{u^2} & 1 + \frac{(\gamma_u - 1)u_z^2}{u^2} \end{pmatrix}, \quad (2.36)$$

mostra que este é bem diferente de um boost da VSR (2.31).

¹ Alguns autores (exemplo (COHEN; GLASHOW, 2006b)) apresentam parâmetros diferentes do que foi apresentado em (2.28), (2.29) e (2.30), pois os parâmetros dependem de como foi definido (2.10).

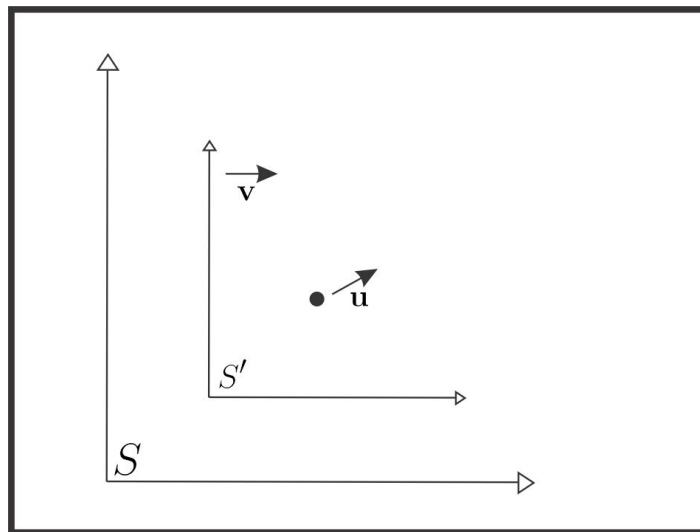
² Note que z' se transforma diferentemente de x' e y' .

2.2 ADIÇÃO DE VELOCIDADES NA VSR

A lei de composição de velocidades é essencial para que SR seja uma teoria que garanta a velocidade da luz como máxima e a mesma para qualquer referencial inercial. Portanto, para termos uma teoria alternativa à relatividade restrita, precisamos ter uma lei de adição de velocidades adequada (DAS; MOHANTY, 2011).

Imagine a seguinte situação: uma partícula movendo-se com velocidade \mathbf{u} em um referencial inercial S_1 que tem velocidade \mathbf{v} em relação a um referencial de repouso S . De acordo com a SR a aplicação de dois boosts sucessivos $\Lambda(v)\Lambda(u)$ em um referencial de repouso da partícula em questão fornece a lei de adição de velocidades (DAS; MOHANTY, 2011). Entretanto, na VSR não podemos fazer tal operação de modo completamente análogo à SR, pois a transformação depende do referencial, diferentemente de uma transformação de Lorentz na SR. Assim sendo, o operador de boost que leva uma partícula do repouso para uma velocidade \mathbf{u} não é sempre semelhante ao operador de boost que atua em uma partícula com velocidade \mathbf{v} e leva para uma velocidade \mathbf{u} , pois os parâmetros de boosts associados a esse operador podem depender explicitamente de \mathbf{v} e \mathbf{u} , como veremos a seguir (HORVATH, 2011; DAS; MOHANTY, 2011). Imaginemos um cenário onde um referencial S' move-se em relação a outro referencial S com uma quadrivelocidade constante \mathbf{v} e este possui uma partícula que se move em relação a ele com quadrivelocidade \mathbf{u} , como demonstra a próxima figura.

Figura 1 – Representação pictórica de dois referenciais.



Referencial S' movendo-se com velocidade constante \mathbf{v} em relação a S e uma partícula movendo-se com velocidade \mathbf{u} em relação a S' .

fonte: Próprio autor.

Para o caso em questão a transformação é dada por

$$L(v, u)\mathbf{u} = \mathbf{w}, \quad (2.37)$$

onde \mathbf{w} é a soma relativística de \mathbf{u} com \mathbf{v} . Quando \mathbf{u} representar um referencial em repouso $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 0)$, temos a seguinte relação

$$L(v, 0) = L(v), \quad (2.38)$$

e também temos um operador neutro para esse caso

$$L(0, u) = \mathbb{1}_{(4 \times 4)}. \quad (2.39)$$

Podemos tomar um caso semelhante ao anterior, mas agora a transformação consiste em um boost geral do grupo $HOM(2)$ (que é o mesmo do $SIM(2)$) que atua em uma partícula com quadrivelocidade arbitrária $\mathbf{u} = (\gamma_u, \gamma_u u_x, \gamma_u u_y, \gamma_u u_z)$ e leva a uma nova quadrivelocidade arbitrária $\mathbf{v} = (\gamma_v, \gamma_v v_x, \gamma_v v_y, \gamma_v v_z)$. Temos assim, o seguinte operador

$$L(v, u) = e^{\alpha T_1} e^{\beta T_2} e^{\phi k_z}, \quad (2.40)$$

que leva à seguinte transformação

$$L(v, u)\mathbf{u} = \mathbf{v}, \quad (2.41)$$

que na sua forma matricial é dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^\phi + e^{-\phi}(1 + (\alpha^2 + \beta^2))) & \alpha & \beta & \frac{1}{2}(e^\phi - e^{-\phi}(1 + (\alpha^2 + \beta^2))) \\ \alpha e^{-\phi} & 1 & 0 & -\alpha e^{-\phi} \\ \beta e^{-\phi} & 0 & 1 & -\beta e^{-\phi} \\ \frac{1}{2}(e^\phi - e^{-\phi}(1 - (\alpha^2 + \beta^2))) & \alpha & \beta & \frac{1}{2}(e^\phi + e^{-\phi}(1 - (\alpha^2 + \beta^2))) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_u \\ \gamma_u u_x \\ \gamma_u u_y \\ \gamma_u u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_v \\ \gamma_v v_x \\ \gamma_v v_y \\ \gamma_v v_z \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

e nos fornece o seguinte sistema linear

$$\gamma_v = \frac{1}{2}(e^\phi + e^{-\phi}(1 + (\alpha^2 + \beta^2)))\gamma_u + \alpha\gamma_u u_x + \beta\gamma_u u_y + \frac{1}{2}(e^\phi - e^{-\phi}(1 + (\alpha^2 + \beta^2)))\gamma_u u_z, \quad (2.43)$$

$$\gamma_v v_x = \alpha e^{-\phi}\gamma_u + \gamma_u u_x - \alpha e^{-\phi}\gamma_u u_z, \quad (2.44)$$

$$\gamma_v v_y = \beta e^{-\phi}\gamma_u + \gamma_u u_y - \beta e^{-\phi}\gamma_u u_z, \quad (2.45)$$

$$\gamma_v v_z = \frac{1}{2}(e^\phi - e^{-\phi}(1 - (\alpha^2 + \beta^2)))\gamma_u + \alpha\gamma_u u_x + \beta\gamma_u u_y + \frac{1}{2}(e^\phi + e^{-\phi}(1 - (\alpha^2 + \beta^2)))\gamma_u u_z. \quad (2.46)$$

Para resolver esse sistema podemos subtrair 2.46 de 2.43. Essa subtração resulta em

$$\gamma_v(1 - v_z) = e^{-\phi}(1 - u_z)\gamma_u, \quad (2.47)$$

que é igual a

$$e^{-\phi} = \frac{\gamma_v(1 - v_z)}{\gamma_u(1 - u_z)}. \quad (2.48)$$

Agora, se aplicarmos o logaritmo natural em ambos os lados de (2.48) obtemos

$$\phi = -\ln \left[\frac{\gamma_v(1 - v_z)}{\gamma_u(1 - u_z)} \right]. \quad (2.49)$$

Podemos também substituir o valor de ϕ encontrado em (2.44) e (2.45), a fim de obter os parâmetros α

e β , respectivamente. Portanto, temos as seguintes equações

$$\gamma_v v_x = \alpha \frac{\gamma_v(1-v_z)}{\gamma_u(1-u_z)} \gamma_u + \gamma_u u_x - \alpha \frac{\gamma_v(1-v_z)}{\gamma_u(1-u_z)} \gamma_u u_z, \quad (2.50)$$

$$\gamma_v v_x - \gamma_u u_x = \alpha \left(\frac{\gamma_v(1-v_z)}{(1-u_z)} - \frac{\gamma_v(1-v_z)}{(1-u_z)} u_z \right), \quad (2.51)$$

$$\gamma_v v_x - \gamma_u u_x = \alpha \left(\frac{\gamma_v(1-v_z)}{(1-u_z)} \right) (1-u_z), \quad (2.52)$$

$$\gamma_v v_x - \gamma_u u_x = \alpha \gamma_v (1-v_z), \quad (2.53)$$

logo

$$\alpha = \frac{\gamma_v v_x - \gamma_u u_x}{\gamma_v(1-v_z)}. \quad (2.54)$$

Analogamente para β , temos

$$\gamma_v v_y = \beta \frac{\gamma_v(1-v_z)}{\gamma_u(1-u_z)} \gamma_u + \gamma_u u_x - \beta \frac{\gamma_v(1-v_z)}{\gamma_u(1-u_z)} \gamma_u u_z, \quad (2.55)$$

$$\gamma_v v_y - \gamma_u u_x = \beta \left(\frac{\gamma_v(1-v_z)}{(1-u_z)} - \frac{\gamma_v(1-v_z)}{(1-u_z)} u_z \right), \quad (2.56)$$

$$\gamma_v v_y - \gamma_u u_y = \beta \left(\frac{\gamma_v(1-v_z)}{(1-u_z)} \right) (1-u_z), \quad (2.57)$$

$$\gamma_v v_y - \gamma_u u_y = \beta \gamma_v (1-v_z), \quad (2.58)$$

resultando em

$$\beta = \frac{\gamma_v v_y - \gamma_u u_y}{\gamma_v(1-v_z)}. \quad (2.59)$$

Agora podemos retomar o caso anterior (2.37), onde a soma relativística de $\mathbf{v} = (\gamma_v, \gamma_v v_x, \gamma_v v_y, \gamma_v v_z)$ com $\mathbf{u} = (\gamma_u, \gamma_u u_x, \gamma_u u_y, \gamma_u u_z)$ na VSR resulta em $\mathbf{w} = (\gamma_w, \gamma_w w_x, \gamma_w w_y, \gamma_w w_z)$, sendo que \mathbf{w} pode ser reescrito em termos de \mathbf{v} e \mathbf{u} , pois duas transformações sucessivas da VSR tem que resultar em uma terceira transformação que pertença a VSR (propriedade 2.1). Assim sendo, podemos fazer a seguinte comparação

$$L(u, v)L(u) = L(w), \quad (2.60)$$

obtendo as relações

$$\gamma_w = -\frac{\gamma_v [\gamma_v (u_x v_x + u_y v_y) + (u_z - 1)(v_z - 1) \gamma_u^2 + v_z]}{\gamma_u (u_z - 1)}, \quad (2.61)$$

$$w_x = -\frac{\gamma_u (u_z - 1) [v_x - \gamma_u u_x (v_z - 1)]}{\gamma_u (u_x v_x + u_y v_y + \gamma_u^2 (u_z - 1)(v_z - 1) + v_z)}, \quad (2.62)$$

$$w_y = -\frac{\gamma_u (u_z - 1) [v_y - \gamma_u u_y (v_z - 1)]}{\gamma_u (u_x v_x + u_y v_y + \gamma_u^2 (u_z - 1)(v_z - 1) + v_z)}, \quad (2.63)$$

$$w_z = \frac{\gamma_u (u_x v_x + u_y v_y + \gamma_u^2 u_z (u_z - 1)(v_z - 1) + v_z)}{\gamma_u (u_x v_x + u_y v_y + \gamma_u^2 (u_z - 1)(v_z - 1) + v_z)}, \quad (2.64)$$

onde $\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, $\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ e $\gamma_w = \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}$ são os fatores relativísticos (fatores de Lorentz) (HORVATH, 2011).

2.3 REPRESENTAÇÃO ESPINORIAL DOS GRUPOS $HOM(2)$ E $SIM(2)$

Essa seção tem com objetivo apresentar as representações espinoriais dos grupos $SIM(2)$ e $HOM(2)$, pois posteriormente nos será útil. Para fins práticos, vamos denotar as álgebras dos grupos $SIM(2)$ e $HOM(2)$ por $\mathfrak{sim}(2)$ e $\mathfrak{hom}(2)$, respectivamente. Tais álgebras admitem dois tipos de representações espinoriais de spin 1/2 os quais classificaremos por *tipo-a* e *tipo-b* (HORVATH, 2011; ROGERIO, 2018). Como definimos anteriormente, a paridade não é uma simetria pertencente aos grupos da VSR. Portanto, fica evidente que esses dois tipos não se transformam (um no outro) da mesma maneira da representação de Weyl, pois o *tipo-r* e o *tipo-l* são relacionados por paridade. A representação do *tipo-a* na representação espinorial $\mathfrak{sim}(2)$ é

$$\mathcal{T}_1^a \equiv \mathcal{K}_x^a + \mathcal{J}_y^a, \quad (2.65)$$

$$\mathcal{T}_2^a \equiv \mathcal{K}_y^a - \mathcal{J}_x^a, \quad (2.66)$$

juntamente com os geradores³ $\mathcal{K}_z^a, \mathcal{J}_z^a$ os quais são respectivamente boost no eixo z e rotação em torno do mesmo eixo, onde

$$\mathcal{K}^a = -i\sigma/2, \quad \mathcal{J}^a = \sigma/2. \quad (2.67)$$

Já para os *tipo-b*

$$\mathcal{T}_1^b \equiv \mathcal{K}_x^b + \mathcal{J}_y^b, \quad (2.68)$$

$$\mathcal{T}_2^b \equiv \mathcal{K}_y^b - \mathcal{J}_x^b, \quad (2.69)$$

e também os geradores $\mathcal{K}_z^b, \mathcal{J}_z^b$ que são boost e rotação respectivamente no eixo z , onde

$$\mathcal{K}^b = i\sigma/2, \quad \mathcal{J}^b = \sigma/2. \quad (2.70)$$

As matrizes de Pauli são representadas por $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ e são dadas por

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.71)$$

A combinação entre os geradores do *tipo-a* com os do tipo *tipo-b* é dada simplesmente por

$$\mathcal{T}_1 := \mathcal{T}_1^a \oplus \mathcal{T}_1^b, \quad \mathcal{T}_2 := \mathcal{T}_2^a \oplus \mathcal{T}_2^b, \quad (2.72)$$

$$\mathcal{K}_z := \mathcal{K}_z^a \oplus \mathcal{K}_z^b, \quad \mathcal{J}_z := \mathcal{J}_z^a \oplus \mathcal{J}_z^b, \quad (2.73)$$

³ A álgebra de $\mathfrak{hom}(2)$ é semelhante a de $\mathfrak{sim}(2)$ com a diferença de não ter o gerador de rotação em torno do eixo z .

que, por sua vez, dá origem a representação quadridimensional (HORVATH, 2011)

$$\mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.74)$$

$$\mathcal{J}_z = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.75)$$

De modo análogo à (2.10) podemos repetir o procedimento usando os novos geradores (HORVATH, 2011; ROGERIO, 2018)

$$\mathcal{V} \equiv e^{i\mathcal{T}_1\varepsilon_1} e^{i\mathcal{T}_2\varepsilon_2} e^{i\mathcal{K}_z\varphi_z}. \quad (2.76)$$

A expansão das exponencias em série em termos dos gerados nos fornece (HORVATH, 2011; ROGERIO, 2018)

$$e^{i\mathcal{T}_1\varepsilon_1} = 1 + i\mathcal{T}_1\varepsilon_1, \quad (2.77)$$

$$e^{i\mathcal{T}_2\varepsilon_2} = 1 + i\mathcal{T}_2\varepsilon_2, \quad (2.78)$$

$$e^{i\mathcal{K}_z\varepsilon_z} = 1 + i(2\mathcal{K}_z) \sinh(\varphi/2) + (2\mathcal{K}_z)^2 [1 - \cosh(\varphi_z/2)], \quad (2.79)$$

pois $(\mathcal{T}_1)^2 = (\mathcal{T}_2)^2 = 0_{(4 \times 4)}$ e $(2\mathcal{K}_z)^3 = -(2\mathcal{K}_z)$. Os parâmetros⁴ para (2.76) são dados por (HORVATH, 2011; ROGERIO, 2018)

$$\varepsilon_1 \equiv \frac{p^1}{p^0 - p^3}, \quad (2.80)$$

$$\varepsilon_2 \equiv \frac{p^2}{p^0 - p^3}, \quad (2.81)$$

$$\varepsilon_3 \equiv -\ln \frac{p^0 - p^3}{m}. \quad (2.82)$$

De posse das relações (2.77), (2.78) e (2.79) e dos parâmetros (2.80), (2.81) e (2.82) construímos a matriz de boost (HORVATH, 2011; ROGERIO, 2018)

$$\mathcal{V}(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{m}{p^0 - p^3}} & \frac{p^1 - ip^2}{\sqrt{m(p^0 - p^3)}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{p^0 - p^3}{m}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{p^0 - p^3}{m}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p^1 + ip^2}{\sqrt{m(p^0 - p^3)}} & \sqrt{\frac{m}{p^0 - p^3}} \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Portanto, encontramos uma transformação que se aplicada a um espinor no referencial de repouso,

⁴ Esses parâmetros são obtidos analogamente ao que foi feito para (2.22), mas em vez da transformação ser aplicada em uma quadrivelocidade é aplicada em um quadrimomento.

levá-nos a um referencial com quadrimomento arbitrário. Deste modo, encontramos a representação espinorial de boost da VSR, a qual corresponde a um boost geral, tanto para o grupo $SIM(2)$ com para o grupo $HOM(2)$.

2.4 GRUPOS IHOM(2) E ISIM(2)

Anteriormente exploramos os subgrupos do grupo de Lorentz pertencentes à VSR, mas podemos também analisar os subgrupos do grupo de Poincaré vinculados à VSR. Ou seja, os subgrupos em questão são basicamente formado pelos geradores da VSR mais os geradores de translações no espaço-tempo. Os dois grupos não homogêneos (*inhomogeneous*) mais relevantes fisicamente são o $IHOM(2)$ e o $ISIM(2)$, cujos geradores são mesmos do $HOM(2)$ e $SIM(2)$, respectivamente, mais os geradores de translações no espaço-tempo.

2.5 INVARIANTES DE CASIMIR DA VSR

Os invariantes de Casimir têm grande relevância física, pois no caso do grupo de Poincaré estão atrelados a massa e ao spin. Portanto, uma abordagem análoga deve ser feita para os grupos que compõem a VSR. Para fazer tal abordagem, precisamos definir os invariantes de Casimir que são dados por (RYDER, 1996)

$$C_1 = P_\mu P^\mu, \quad C_2 = W_\mu W^\mu, \quad (2.84)$$

onde $W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^\sigma$ é o pseudo-vetor de Pauli-Lubanski e $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ é o tensor de Livi-Civita.

Utilizado-se da definição (2.84), podemos obter os invariantes de Casimir para a VSR.

Tabela 2 – Invariantes da VSR.

Grupo	Invariantes
$T(2)$	$(J_y + K_x), (J_x - K_y)$
$E(2)$	$(J_y + K_x)^2 + (J_x - K_y)^2$
$HOM(2)$	$(J_x - K_y)/(J_y + k_x)$
$SIM(2)$	nenhum
$IHOM(2)$	m^2
$ISIM(2)$	$m^2, J_3 - \frac{P^2}{P^0 - P^3}T_1 + \frac{P^1}{P^0 - P^3}T_2$

fonte: (PATERA et al., 1976)

Para o grupo $ISIM(2)$ temos dois invariantes, sendo que um deles está relacionado com a massa e outro é uma generalização do operador helicidade que é dado por

$$\frac{W_0 - W_3}{P_0 - P_3} = J_3 - \frac{P^2}{P^0 - P^3}T_1 + \frac{P^1}{P^0 - P^3}T_2. \quad (2.85)$$

O operador helicidade generalizado (2.85) tem sido chamado na literatura (ALWIS; STERN, 1974; PATERA et al., 1976) por “*lightlike helicity*” ou “*light plane helicity*”.

O grupo $IHOM(2)$ possui apenas um invariante que é a massa ao quadrado. Já os outros grupos possuem invariantes que não são relevantes fisicamente. Esse resultado mostra que os invariantes da VSR não são iguais aos invariantes do grupo de Poincaré com exceção da massa.

3 PRECESSÃO DE THOMAS

Uhlenbeck e Goudsmit (GOUDSMIT; UHLENBECK, 1926) introduziram em 1926 o conceito de spin do elétron e também mostraram que se o elétron tivesse o fator g (fator de Landé) igual a 2, era possível explicar tanto o efeito Zeeman anômalo como também explicava a subdivisão dos multipletos. Entretanto, os intervalos da estrutura fina observados eram a metade dos valores obtidos teoricamente. Porém, se o fator g fosse igual a 1, os intervalos da estrutura fina seriam iguais aos obtidos teoricamente, mas o efeito Zeeman era o normal (JACKSON, 1983). A explicação mais satisfatória só apareceu com o advento da teoria relativística do elétron, proposta por Dirac (DIRAC, 1928a; DIRAC, 1928b).

Em 1927, Thomas (THOMAS, 1927) mostrou que a origem do problema estava ligada a cinemática relativística do elétron, que uma vez incorporada corretamente à teoria, possibilitaria explicar tanto o efeito Zeeman anômalo como as separações da estrutura fina. A precessão de Thomas fornecia uma explicação qualitativa sobre a interação spin-órbita nos núcleos atômicos (JACKSON, 1983).

A precessão de Thomas é uma consequência cinemática relativística que surge da não comutatividade de boosts sucessivos em direções diferentes, sendo que a relação de comutação entre dois boosts está relacionada com a relação $[K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk}J_k$ (JACKSON, 1983). Desta informação podemos ver que a composição de dois boosts, em direções distintas, resulta em um único boost associado a uma rotação, este fato é a ideia chave por trás da precessão de Thomas.

Ao longo de algumas décadas surgiram várias formulações para a precessão de Thomas, algumas são apenas reinterpretação da formulação original (THOMAS, 1927) e outras surgiram com o propósito de testar ou refutar a relatividade restrita. Muitas delas se mostraram incorretas levando a vários paradoxos físicos (MALYKIN, 2007).

Podemos imaginar que uma abordagem à precessão de Thomas pode ser feita no contexto da VSR, tendo assim uma maneira bem testada e avaliada de investigar suas simetrias. Pelo fato da VSR ser uma teoria que surgiu em 2006 (COHEN; GLASHOW, 2006b), o número de artigos que analisam a precessão de Thomas dentro dos moldes da VSR é bem menor comparados aos que utilizam a relatividade restrita como base. As luzes da VSR, temos até o presente momento dois artigos que se destacam. O primeiro deles é (DAS; MOHANTY, 2011) e o segundo é (GANJITABAR; SHOJAI, 2014). No primeiro artigo concluiu-se que a VSR é incompatível com a precessão de Thomas, pois nos fornece um valor diferente do experimental e no decorrer desse capítulo será explorado com uma maior riqueza de detalhes. Já no segundo artigo concluiu-se que a precessão de Thomas é um fenômeno que ocorre na relatividade restrita e não ocorre na VSR. Diante desses dois resultados distintos, vamos tomar como base o artigo (DAS; MOHANTY, 2011), pois no artigo (GANJITABAR; SHOJAI, 2014) os autores, ao desenvolverem os cálculos, não levaram em conta uma propriedade exclusiva e muito importante da VSR que é a lei de composição de velocidade¹, que contrasta fortemente com a lei de composição de velocidades na relatividade restrita.

Este capítulo foi escrito tomando como base as referências (JACKSON, 1983) e (DAS; MOHANTY, 2011).

¹ A lei de composição de velocidades na VSR foi detalhada na seção 2.2.

3.1 PRECESSÃO DE THOMAS E ACOPLAMENTO SPIN-ÓRBITA NA RELATIVIDADE RESTRIITA

Imaginemos um átomo de hidrogênio. Neste sistema teremos um elétron se deslocando no plano xy em torno do núcleo, e, neste trajeto, podemos interpretar o deslocamento do elétron como se a cada instante sua posição e velocidade fossem dadas por boosts numa direção diferente da anterior.

Seja a velocidade do elétron em relação ao núcleo $\mathbf{v} = (v_x, 0, 0)$ para um tempo t e $\mathbf{v} + \delta\mathbf{v} = (v_x + \delta v_x, \delta v_y, 0)$ para o instante de tempo $t + \delta t$. Utilizando as transformações de Lorentz advindas da SR, podemos obter uma transformação que conecta o elétron a seu próprio referencial de repouso com demonstrado na equação abaixo

$$v(t) = \Lambda(\mathbf{v})v_0, \quad (3.1)$$

onde para cada valor de t teremos um referencial distinto. Analogamente, um referencial acrescido de um infinitésimo de tempo é dado pela relação

$$v(t + \delta t) = \Lambda(\mathbf{v} + \delta\mathbf{v})v_0. \quad (3.2)$$

Assim podemos interligar estes referenciais por sucessivos boosts da seguinte maneira:

$$v(t + \delta t) = \Lambda(\mathbf{v} + \delta\mathbf{v})\Lambda^{-1}(\mathbf{v})v(t) \quad (3.3)$$

$$= A_T^{SR}v(t). \quad (3.4)$$

Teremos então que as velocidades estão interligadas não mais por dois boosts, mas por um boost e uma rotação. Isso fica evidente se observarmos a forma explícita da transformação

$$A_T^{SR} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma^2\delta v_x & \gamma\delta v_y & 0 \\ \gamma^2\delta v_x & 1 & \frac{\gamma-1}{v_x}\delta v_y & 0 \\ \gamma\delta v_y & -\frac{\gamma-1}{v_x}\delta v_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

a qual pode ser decomposta em boosts e rotações da seguinte forma

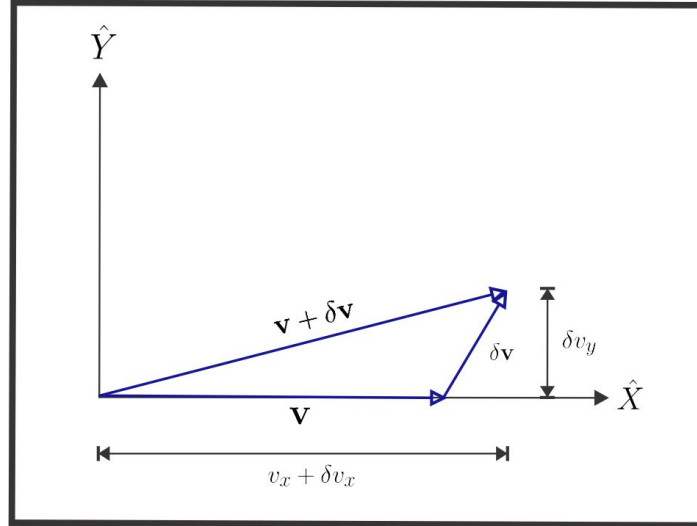
$$A_T^{SR}(\mathbf{v}) = \Lambda(\mathbf{v} + \delta\mathbf{v})\Lambda^{-1}(\mathbf{v}) = \mathbb{1} - \Delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{K} - \Delta\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{J}, \quad (3.6)$$

com $\Delta\mathbf{v} = -(\gamma^2\delta v_x, \gamma\delta v_y, 0)$ e $\Delta\boldsymbol{\Omega} = \left(0, 0, \frac{\gamma-1}{v_x}\delta v_y\right)$. A transformação (3.5) pode ter uma representação pictórica, como ilustra a próxima figura.

Agora podemos reescrever A_T^{SR} em primeira ordem para δv_i como um produto de boosts com rotações e vice-versa

$$A_T^{SR} = A_{\text{boost}}(\Delta\mathbf{v}) R(\Delta\boldsymbol{\Omega}) = R(\Delta\boldsymbol{\Omega}) A_{\text{boost}}(\Delta\mathbf{v}), \quad (3.7)$$

Figura 2 – Representação pictórica de boosts na relatividade restrita.



Velocidade \mathbf{v} sofrendo boosts e transformando-se em $\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}$.
 fonte: Adaptada de (JACKSON, 1983) .

onde boost e rotação são, respectivamente, dadas por

$$A_{\text{boost}}(\Delta\mathbf{v}) = \mathbb{1} - \Delta\mathbf{v} \cdot \mathbf{K}, \quad (3.8)$$

$$R(\Delta\Omega) = \mathbb{1} - \Delta\Omega \cdot \mathbf{J}, \quad (3.9)$$

e o parâmetro de rotação (ângulo) é

$$\Delta\Omega = \left(0, 0, \frac{\gamma - 1}{v_x} \delta v_y\right). \quad (3.10)$$

Assim, o elétron gira em relação ao referencial do núcleo com uma velocidade angular

$$\boldsymbol{\omega}_T = -\frac{\Delta\Omega}{\delta t} = \left(0, 0, -\frac{\gamma^2}{\gamma + 1} v_x a_y\right). \quad (3.11)$$

Se considerarmos o limite não-relativístico, ou seja $\gamma \approx 1$ obtemos simplesmente

$$\boldsymbol{\omega}_T \simeq \left(0, 0, -\frac{1}{2} v_x a_y\right). \quad (3.12)$$

O termo de acoplamento spin-órbita devido a precessão na SR é dado por

$$U_T = \boldsymbol{\omega}_T \cdot \mathbf{s}, \quad (3.13)$$

enquanto o momento magnético é definido por $\mu = IA$, onde A representa a área percorrida pelo elétron ao redor do núcleo. Como o período é dado por $T = \frac{2\pi}{\omega}$, temos que

$$I = \frac{-e}{T} = \frac{-e\omega}{2\pi}, \quad (3.14)$$

e conseqüentemente

$$\mu = \frac{-e\omega}{2}r^2. \quad (3.15)$$

Mas o elétron também possui momento angular, dado por

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad (3.16)$$

que possui um módulo²

$$L = mvr = m\omega r^2. \quad (3.17)$$

Sendo assim, espera-se que³

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{eg}{2m}\mathbf{L}. \quad (3.18)$$

O momento magnético do elétron tem a energia de interação

$$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}', \quad (3.19)$$

onde o momento magnético do elétron é representado por $\boldsymbol{\mu} = \frac{ge}{2m}\mathbf{s}$ e o campo magnético efetivo em relação ao referencial de repouso do elétron é dado por $\mathbf{B}' = -\mathbf{v} \times \mathbf{E}$, sendo que \mathbf{E} é o campo elétrico do núcleo e a força elétrica pode ser aproximada como o gradiente negativo de uma energia potencial média esferossimétrica, $V(r)$, que é dada por

$$e\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{r}}{r} \frac{dV}{dr}. \quad (3.20)$$

A energia total de interação spin-órbita do elétron pode ser escrita como

$$H_{SO} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}' + \omega_T \cdot \mathbf{s}. \quad (3.21)$$

Da equação (3.13), temos

$$U_T = \left(0, 0, -\frac{1}{2}v_x a_y\right) \cdot (s_x, s_y, s_z), \quad (3.22)$$

considerando que a aceleração pode ser $a_y = eE_y/m$ e também multiplicando e dividindo por m , temos

$$U_T = -\frac{1}{2}v_x s_z \frac{eE_y m}{m^2}. \quad (3.23)$$

Da equação (3.20) extraímos o valor de eE_y e obtemos

$$U_T = \frac{1}{2}v_x s_z \frac{m}{m^2 r} \frac{dV}{dr}. \quad (3.24)$$

Sabemos dos livros texto que $L_z = (xv_y - yv_x)m$ e como $v_y = 0$, temos

$$U_T = -\frac{1}{2m^2}\mathbf{s} \cdot \mathbf{L} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}. \quad (3.25)$$

² m denota a massa do elétron.

³ O fator g é obtido corretamente da equação de Dirac.

Deste modo podemos escrever a interação spin-órbita como

$$H_{SO} = \frac{g-1}{2m^2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{L} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}. \quad (3.26)$$

A medida das divisões das linhas espectrais decorrentes do efeito Zeeman gerados por um campo magnético nos fornece a razão giromagnética do elétron com um valor bem próximo de dois, ou seja $g \approx 2$. Se a precessão de Thomas estivesse ausente, o termo de acoplamento spin-órbita teria somente um fator g ao invés de $(g-1)$, o que acarretaria em um resultado incorreto comparado ao observado.

3.2 PRECESSÃO DE THOMAS E ACOPLAMENTO SPIN-ÓRBITA NA VSR

Agora calcularemos a precessão de Thomas na VSR de modo análogo ao que fizemos na seção anterior. Portanto, seguindo a mesma lógica precisamos encontrar a transformação que atua em $v(t)$, isto é

$$L(v + \delta v)L^{-1}(v)v(t). \quad (3.27)$$

Usaremos os parâmetros referentes à transformação (2.22) como base para obtermos a matriz de transformação análoga a (2.31). Depois resta-nos fazer a multiplicação das matrizes para a obtenção da matriz de transformação no contexto da VSR, que é dada por

$$A_T^{VSR} = L(v + \delta v)L^{-1}(v), \quad (3.28)$$

onde podemos interpretar $L(v + \delta v)v_0 = v(t + \delta t)$ e $L(v)v_0 = v(t)$ como sendo transformações da VSR que levam o elétron do seu referencial de repouso para o referencial de repouso do núcleo para os instantes de tempo $t + \delta t$ e t , respectivamente.

Dando prosseguimento à nossa proposta, temos que calcular explicitamente $L(v + \delta v)$ e posteriormente $L^{-1}(v)$. Para a primeira matriz de transformação temos

$$L(v + \delta v) = \begin{pmatrix} \gamma' & (v_x + \delta v_x) & \delta v_y & (\frac{1}{\gamma'} - \gamma') \\ \gamma'(v_x + \delta v_x) & 1 & 0 & -\gamma'(v_x + \delta v_x) \\ \gamma'\delta v_y & 0 & 1 & -\gamma'\delta v_y \\ 0 & (v_x + \delta v_x) & \delta v_y & \frac{1}{\gamma'} \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

onde γ' é o fator relativístico para a velocidade $\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}$. Seguindo o mesmo raciocínio para segunda transformação temos

$$L^{-1}(v) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v_x & 0 & 0 \\ -v_x & 1 & 0 & v_x \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma & -\gamma v_x & 0 & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

sendo γ o fator relativístico para velocidade \mathbf{v} .

Agora, se tomarmos a expansão de γ' em primeira ordem para δv_i ficamos com

$$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - (\mathbf{v} + \delta\mathbf{v})^2}} \simeq \gamma + \frac{1}{2}\gamma^3 v_x \delta v_x, \quad (3.31)$$

a qual será substituída em (3.29). Por fim, podemos multiplicar (3.29) por (3.30), resultando em

$$A_T^{VSR} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma^2 \delta v_x & \delta v_y & -\gamma^2 v_x \delta v_x \\ \gamma^2 \delta v_x & 1 & 0 & -\gamma^2 \delta v_x \\ \delta v_y & 0 & 1 & -\delta v_y \\ -\gamma^2 v_x \delta v_x & \gamma^2 \delta v_x & \delta v_y & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Agora observe que podemos reescrever a matriz de transformação (3.32), separando em boosts e rotações da seguinte forma

$$A_T^{VSR} = \mathbb{1} - \Delta\mathbf{v}_{VSR} \cdot \mathbf{K} - \Delta\boldsymbol{\Omega}_{VSR} \cdot \mathbf{J}, \quad (3.33)$$

onde $\Delta\mathbf{v}_{VSR} = -(\gamma^2 \delta v_x, \gamma v_y, -\gamma^2 v_x \delta v_x)$ e $\Delta\boldsymbol{\Omega}_{VSR} = (-\delta v_y, \gamma^2 \delta v_x, 0)$. Agora de posse de $\boldsymbol{\Omega}_{VSR}$ fica simples o cálculo da velocidade angular do elétron como é demonstrado na equação abaixo

$$\boldsymbol{\omega}_{VSR} = -\frac{\Delta\boldsymbol{\Omega}_{VSR}}{\delta t} = (a_y, -\gamma^2 a_x, 0). \quad (3.34)$$

Podemos escolher a posição do elétron em cima do eixo y , como a órbita é circular a aceleração é sempre radial, conseqüentemente $a_x = 0$. Portanto a frequência de precessão se resume a

$$\boldsymbol{\omega}_{VSR} = (a_y, 0, 0). \quad (3.35)$$

De (3.35) fica evidente que não há rotação em torno do eixo z , mas apenas em torno do eixo x . O termo de acoplamento spin-órbita devido a precessão na VSR é

$$U_{VSR} = \boldsymbol{\omega}_{VSR} \cdot \mathbf{s} = s_x a_y = s_x y \frac{1}{mr} \frac{dV}{dr}, \quad (3.36)$$

pois

$$a_y = \frac{y}{mr} \frac{dV}{dr}. \quad (3.37)$$

Deste modo, a energia total de interação de spin na VSR será

$$H_{SO}^{VSR} = \frac{g}{2m^2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{L} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} + s_x y \frac{1}{mr} \frac{dV}{dr}. \quad (3.38)$$

Se o elétron tem um estado de spin onde $\langle s_x \rangle = 0$, então a energia spin-órbita do elétron será advinda somente da equação (3.19):

$$H_{SO}^{VSR} = \frac{g}{2m^2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{L} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}. \quad (3.39)$$

Se compararmos a ordem de grandeza de H_{SO}^{VSR} com H_{SO}^{SR} veremos que o valor obtido na VSR é o

dobro do encontrado na SR, ainda no caso em que $\langle s_x \rangle = 0$. Caso contrario, teríamos de levar em conta o termo (3.36), que se assemelha ao termo (3.25), mas difere por não possuir um termo que expresse explicitamente a velocidade. Assim sendo, teríamos um valor novamente diferente do experimental.

Em suma, obtemos um valor para H_{SO}^{VSR} , que contrasta fortemente com os resultados experimentais e com o valor de H_{SO}^{SR} . Portanto, se as simetrias que embasam a VSR fossem respeitadas pela matéria bariônica teríamos uma discrepância já em correções relativísticas para o átomo de hidrogênio. Desse modo, tais simetrias, se úteis, devem ser estudadas no âmbito de abordagem teórica para matéria escura.

4 ASPECTOS DE TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS FERMIONIÇA EM VSR

Este capítulo fora reservado para explorarmos com mais detalhes o impacto da VSR em uma teoria quântica de campos fermiônica.

No Capítulo 3 vimos que a VSR é incompatível com a precessão de Thomas, mas isso foi avaliado para a matéria bariônica (no caso elétron). Entretanto, devemos ter em mente que nada impede que a teoria da VSR seja compatível com um tipo exótico de matéria (matéria escura, por exemplo) ou que ela seja aplicada em um cenário físico diferente do apresentado em (DAS; MOHANTY, 2011). Na literatura podemos encontrar uma gama de outras propostas que têm o intuito de investigar a fenomenologia da VSR (ALFARO; RIVELLES, 2014; NAYAK; JAIN, 2017; DUARTE et al., 2019), entretanto mais estudos são necessários para uma avaliação mais aprofundada da fenomenologia ligada a VSR.

4.1 ESTRUTURA DE LOCALIDADE DOS CAMPOS QUÂNTICOS

Esta seção tem como objetivo analisar a estrutura de localidade de um campo quântico fermiônico, cujas somas de spin não se manifestam de forma covariante por transformações de Lorentz, mas sejam invariantes (covariantes) por transformações da VSR.

Como vimos no capítulo anterior a VSR não fornece um valor correto para um fenômeno bem difundido na literatura, a precessão de Thomas. Mas há a possibilidade de outros tipos de partículas respeitarem as simetrias da VSR. Tal proposta não é absurda, pois podemos pensar em um grupo de partículas que não interajam com o campo eletromagnético. Se considerarmos isso, o cenário físico é alterado e conseqüentemente a precessão de Thomas vista no capítulo anterior não será adequada para se testar a teoria. Podemos interpretar que tal simetria descreve partículas que estão no setor escuro da matéria. Tal suposição é plausível, haja vista que de acordo com o modelo Λ CDM (Lambda Cold Dark Matter model) o universo é composto por 68.66% de energia escura, 26.41% de matéria escura e os outros 4.93% são correspondem a matéria bariônica (AGHANIM et al., 2018).

Vamos calcular e analisar os correlatores dos campos quânticos relacionados a partículas fermiônicas que estão possivelmente no setor escuro da matéria. Para férmions, os correlatores quânticos relevantes para a análise da estrutura de localidade são dados pelos seguintes anti-comutadores (PESKIN; SCHROEDER, 1995)

$$\{f(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}', t)\} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\mathbb{1}_{(4 \times 4)}, \quad (4.1)$$

$$\{f(\mathbf{x}, t), \bar{f}(\mathbf{x}', t)\} = 0_{(4 \times 4)}, \quad (4.2)$$

$$\{f(\mathbf{x}, t), f(\mathbf{x}', t)\} = 0_{(4 \times 4)}, \quad (4.3)$$

$$\{\mathbf{p}(\mathbf{x}, t), \mathbf{p}(\mathbf{x}', t)\} = 0_{(4 \times 4)}. \quad (4.4)$$

Se os anti-comutadores (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4) forem satisfeitos o campo quântico é local.

Consideraremos um campo fermiônico genérico e seu respectivo dual, dados por

$$\hat{f}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^\mu)}{2E(\mathbf{p})} \sum_{\alpha} [c_{\alpha} \Psi_{\alpha}^A(\mathbf{p}) e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} + d_{\alpha}^{\dagger} \Psi_{\alpha}^B(\mathbf{p}) e^{ip_{\mu}x^{\mu}}], \quad (4.5)$$

$$\bar{\hat{f}}(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^\mu)}{2E(\mathbf{p})} \sum_{\alpha} [c_{\alpha}^{\dagger} \bar{\Psi}_{\alpha}^A(\mathbf{p}) e^{ip_{\mu}x^{\mu}} + d_{\alpha} \bar{\Psi}_{\alpha}^B(\mathbf{p}) e^{-ip_{\mu}x^{\mu}}], \quad (4.6)$$

onde $a(p^\mu) \in \mathbb{R}$ e não será determinado explicitamente, pois só pode ser determinado se tomarmos um caso específico, já $\Psi_{\alpha}^{A/B}(\mathbf{p})$ e $\bar{\Psi}_{\alpha}^{A/B}(\mathbf{p})$ são espinores com seus respectivos duais.

Podemos considerar a relação de anti-comutação para os operadores de criação e aniquilação no caso fermiônico análoga ao que foi apresentada em (AHLUWALIA-KHALILOVA; GRUMILLER, 2005)

$$\{c_{\alpha}(\mathbf{p}), c_{\alpha'}^{\dagger}(\mathbf{p}')\} = 2E(\mathbf{p})b(p^\mu)(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\delta_{\alpha\alpha'}, \quad (4.7)$$

$$\{c_{\alpha}(\mathbf{p}), d_{\alpha'}(\mathbf{p}')\} = 0, \quad (4.8)$$

$$\{d_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{p}), c_{\alpha'}^{\dagger}(\mathbf{p}')\} = 0, \quad (4.9)$$

$$\{d_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{p}), d_{\alpha'}(\mathbf{p}')\} = 2E(\mathbf{p})b(p^\mu)(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\delta_{\alpha\alpha'}, \quad (4.10)$$

onde $b(p^\mu)$ similarmente a $a(p^\mu)$ só pode ser determinado mediante a uma ou mais condições, por exemplo, na imposição de uma Hamiltoniana positivo definida. Baseado no que foi discutido anteriormente, consideraremos as seguintes somas de spin:

$$\sum_{\alpha} \Psi_{\alpha}^A(\mathbf{p}) \bar{\Psi}_{\alpha}^A(\mathbf{p}) = \mathbb{M}(\mathbf{p}), \quad (4.11)$$

$$\sum_{\alpha} \Psi_{\alpha}^B(\mathbf{p}) \bar{\Psi}_{\alpha}^B(\mathbf{p}) = \mathbb{N}(\mathbf{p}), \quad (4.12)$$

onde $\mathbb{M}(\mathbf{p})$ e $\mathbb{N}(\mathbf{p})$ são matrizes invariantes por transformações do grupo $HOM(2)$, vide (2.83).

Antes de começar o cálculo dos correladores, precisamos analisar a dinâmica relacionada aos espinores que dão origem às somas de spin (4.11) e (4.12). Podemos traçar um paralelo entre a equação de Dirac e a simetria de paridade (SPERANÇA, 2014). Se impusermos a dinâmica de Dirac, teremos espinores do tipo-2 na classificação de Lounesto e obrigatoriamente a simetria paridade irá conectar os espaços de representação e vice-versa (VILLALOBOS; ROGERIO, 2016; ROGERIO, 2020). Entretanto, os espinores considerados aqui estão relacionados com a VSR e como vimos anteriormente a VSR não possui essa simetria. Portanto, somos levados a supor a princípio que tais espinores têm dinâmica ditada pela equação de Klein-Gordon. Tomando isso como base em nossa

investigação, temos como consequência a densidade de momento definida por

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}', t) = \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}', t)}{\partial t}. \quad (4.13)$$

Substituindo o valor do campo proposto em (4.13), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\mathbf{x}', t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{a(p'^\mu)}{2E(\mathbf{p}')} \sum_{\alpha'} \left[c_{\alpha'}^\dagger \bar{\Psi}_{\alpha'}^A e^{ip'_\mu x'^\mu} + d_{\alpha'} \bar{\Psi}_{\alpha'}^B e^{-ip'_\mu x'^\mu} \right], \\ &= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{a(p'^\mu)}{2E(\mathbf{p}')} iE(\mathbf{p}') \sum_{\alpha'} \left[c_{\alpha'}^\dagger \bar{\Psi}_{\alpha'}^A e^{ip'_\mu x'^\mu} - d_{\alpha'} \bar{\Psi}_{\alpha'}^B e^{-ip'_\mu x'^\mu} \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Agora, podemos calcular o correlator (4.1) a tempos iguais. Primeiramente temos

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial t}(\mathbf{x}', t) \right\} &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^\mu)}{2E(\mathbf{p})} \sum_{\alpha} \left[c_{\alpha} \Psi_{\alpha}^A(\mathbf{p}) e^{-ip_{\mu} x^{\mu}} + d_{\alpha}^{\dagger} \Psi_{\alpha}^B(\mathbf{p}) e^{ip_{\mu} x^{\mu}} \right] \times \\ &\int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{a(p'^{\mu})}{2E(\mathbf{p}')} \sum_{\alpha'} \left[c_{\alpha'}^{\dagger} \bar{\Psi}_{\alpha'}^A(\mathbf{p}') (iE(\mathbf{p}')) e^{ip'_{\mu} x'^{\mu}} + d_{\alpha'} \bar{\Psi}_{\alpha'}^B(\mathbf{p}') (-iE(\mathbf{p}')) e^{-ip'_{\mu} x'^{\mu}} \right] + \\ &\int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{a(p'^{\mu})}{2E(\mathbf{p}')} \sum_{\alpha'} \left[c_{\alpha'}^{\dagger} (\bar{\Psi}_{\alpha'}^A(\mathbf{p}'))^{\dagger} (iE(\mathbf{p}')) e^{ip'_{\mu} x'^{\mu}} + d_{\alpha'} (\bar{\Psi}_{\alpha'}^B(\mathbf{p}'))^{\dagger} (-iE(\mathbf{p}')) e^{-ip'_{\mu} x'^{\mu}} \right] \times \\ &\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^{\mu})}{2E(\mathbf{p})} \sum_{\alpha} \left[c_{\alpha} (\Psi_{\alpha}^A(\mathbf{p}))^{\dagger} e^{-ip_{\mu} x^{\mu}} + d_{\alpha}^{\dagger} (\Psi_{\alpha}^B(\mathbf{p}))^{\dagger} e^{ip_{\mu} x^{\mu}} \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

A multiplicação dos termos nos fornece

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial t}(\mathbf{x}', t) \right\} &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^{\mu})}{2E(\mathbf{p})} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{a(p'^{\mu})}{2E(\mathbf{p}')} iE(\mathbf{p}') \times \\ &\sum_{\alpha'} \sum_{\alpha} \left[c_{\alpha} c_{\alpha'}^{\dagger} \Psi_{\alpha}^A \bar{\Psi}_{\alpha'}^A e^{-i(p_{\mu} x^{\mu} - p'_{\mu} x'^{\mu})} - c_{\alpha} d_{\alpha'} \Psi_{\alpha}^A \bar{\Psi}_{\alpha'}^B e^{-i(p_{\mu} x^{\mu} + p'_{\mu} x'^{\mu})} + \right. \\ &\left. d_{\alpha}^{\dagger} c_{\alpha'}^{\dagger} \Psi_{\alpha}^B \bar{\Psi}_{\alpha'}^A e^{i(p_{\mu} x^{\mu} + p'_{\mu} x'^{\mu})} - d_{\alpha}^{\dagger} d_{\alpha'} \Psi_{\alpha}^B \bar{\Psi}_{\alpha'}^B e^{i(p_{\mu} x^{\mu} - p'_{\mu} x'^{\mu})} \right] + \\ &\int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{a(p'^{\mu})}{2E(\mathbf{p}')} iE(\mathbf{p}') \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^{\mu})}{2E(\mathbf{p})} \times \\ &\sum_{\alpha'} \sum_{\alpha} \left[c_{\alpha'}^{\dagger} c_{\alpha} (\bar{\Psi}_{\alpha'}^A)^{\dagger} (\Psi_{\alpha}^A)^{\dagger} e^{-i(p_{\mu} x^{\mu} - p'_{\mu} x'^{\mu})} + c_{\alpha'}^{\dagger} d_{\alpha}^{\dagger} (\bar{\Psi}_{\alpha'}^A)^{\dagger} (\Psi_{\alpha}^B)^{\dagger} e^{i(p_{\mu} x^{\mu} + p'_{\mu} x'^{\mu})} \right. \\ &\left. - d_{\alpha'} c_{\alpha} (\bar{\Psi}_{\alpha'}^B)^{\dagger} (\Psi_{\alpha}^A)^{\dagger} e^{-i(p_{\mu} x^{\mu} + p'_{\mu} x'^{\mu})} - d_{\alpha'} d_{\alpha}^{\dagger} (\bar{\Psi}_{\alpha'}^B)^{\dagger} (\Psi_{\alpha}^B)^{\dagger} e^{i(p_{\mu} x^{\mu} - p'_{\mu} x'^{\mu})} \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

As matrizes que surgem da multiplicação entre os espinores são hermitianas. Baseando-se nessa consideração temos a seguinte relação

$$\left(\bar{\Psi}_{\alpha'}^{A/B} \right)^{\dagger} \left(\Psi_{\alpha}^{A/B} \right)^{\dagger} = \left(\Psi_{\alpha}^{A/B} \bar{\Psi}_{\alpha'}^{A/B} \right)^{\dagger} = \Psi_{\alpha}^{A/B} \bar{\Psi}_{\alpha'}^{A/B}. \quad (4.17)$$

A relação (4.17) nos permite unir as duas parcelas de (4.16)

$$\left\{ \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial t}(\mathbf{x}', t) \right\} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^\mu)}{2E(\mathbf{p})} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{a(p'^\mu)}{2E(\mathbf{p}')} iE(\mathbf{p}') \times \quad (4.18)$$

$$\times \sum_{\alpha'} \sum_{\alpha} \left[\Psi_{\alpha}^A \bar{\Psi}_{\alpha'}^A \{c_{\alpha}, c_{\alpha'}^{\dagger}\} e^{-i(p_{\mu} x^{\mu} - p'_{\mu} x'^{\mu})} - \Psi_{\alpha}^A \bar{\Psi}_{\alpha'}^B \{c_{\alpha}, d_{\alpha'}\} e^{-i(p_{\mu} x^{\mu} + p'_{\mu} x'^{\mu})} + \right.$$

$$\left. \Psi_{\alpha}^B \bar{\Psi}_{\alpha'}^A \{d_{\alpha}^{\dagger}, c_{\alpha'}^{\dagger}\} e^{i(p_{\mu} x^{\mu} + p'_{\mu} x'^{\mu})} - \Psi_{\alpha}^B \bar{\Psi}_{\alpha'}^B \{d_{\alpha}^{\dagger}, d_{\alpha'}\} e^{i(p_{\mu} x^{\mu} - p'_{\mu} x'^{\mu})} \right].$$

Como as relações (4.8) e (4.9) são nulas, a equação se reduz a

$$\left\{ \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial t}(\mathbf{x}', t) \right\} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^\mu)}{2E(\mathbf{p})} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{a(p'^\mu)}{2E(\mathbf{p}')} iE(\mathbf{p}') \times \quad (4.19)$$

$$\sum_{\alpha'} \sum_{\alpha} \left[\Psi_{\alpha}^A \bar{\Psi}_{\alpha'}^A \{c_{\alpha}, c_{\alpha'}^{\dagger}\} e^{-i(p_{\mu} x^{\mu} - p'_{\mu} x'^{\mu})} - \Psi_{\alpha}^B \bar{\Psi}_{\alpha'}^B \{d_{\alpha}^{\dagger}, d_{\alpha'}\} e^{i(p_{\mu} x^{\mu} - p'_{\mu} x'^{\mu})} \right].$$

Substituindo os valores dos anti-comutares (4.7) e (4.10), obtemos

$$\left\{ \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial t}(\mathbf{x}', t) \right\} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^\mu)}{2E(\mathbf{p})} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{a(p'^\mu)}{2E(\mathbf{p}')} iE(\mathbf{p}') 2E(\mathbf{p}) b(p^\mu) (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\alpha\alpha'} \times \quad (4.20)$$

$$\sum_{\alpha'} \sum_{\alpha} \left[\Psi_{\alpha}^A \bar{\Psi}_{\alpha'}^A e^{-i(p_{\mu} x^{\mu} - p'_{\mu} x'^{\mu})} - \Psi_{\alpha}^B \bar{\Psi}_{\alpha'}^B e^{i(p_{\mu} x^{\mu} - p'_{\mu} x'^{\mu})} \right].$$

Fazendo a integração em \mathbf{p}' ficamos com

$$\left\{ \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial t}(\mathbf{x}', t) \right\} = i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{a^2(p^\mu)}{2^2 E^2(\mathbf{p})} 2E^2(\mathbf{p}) b(p^\mu) \times \quad (4.21)$$

$$\sum_{\alpha} \left[\Psi_{\alpha}^A \bar{\Psi}_{\alpha}^A e^{-i(E(\mathbf{p})x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E(\mathbf{p})x^0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}')} - \Psi_{\alpha}^B \bar{\Psi}_{\alpha}^B e^{i(E(\mathbf{p})x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E(\mathbf{p})x^0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}')} \right],$$

$$= \frac{i}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} a^2(p^\mu) b(p^\mu) \sum_{\alpha} \left[\Psi_{\alpha}^A(\mathbf{p}) \bar{\Psi}_{\alpha}^A(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} - \Psi_{\alpha}^B(\mathbf{p}) \bar{\Psi}_{\alpha}^B(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \right]. \quad (4.22)$$

Fazendo a troca de variável $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ na segunda integral, obtém-se

$$\left\{ \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial t}(\mathbf{x}', t) \right\} = \frac{i}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} a^2(p^\mu) b(p^\mu) \sum_{\alpha} \left[\Psi_{\alpha}^A(\mathbf{p}) \bar{\Psi}_{\alpha}^A(\mathbf{p}) - \Psi_{\alpha}^B(-\mathbf{p}) \bar{\Psi}_{\alpha}^B(-\mathbf{p}) \right] e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \quad (4.23)$$

Substituindo as somas de spin propostas anteriormente, encontramos

$$\left\{ \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial t}(\mathbf{x}', t) \right\} = \frac{i}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} a^2(p^\mu) b(p^\mu) [\mathbb{M}(\mathbf{p}) - \mathbb{N}(-\mathbf{p})] e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \quad (4.24)$$

Podemos considerar que $a^2(p^\mu)$ e $b(p^\mu)$ sejam responsáveis por manter o elemento de volume invariante por troca de referenciais. Agora, para que (4.24) seja a transformada de Fourier da delta de Dirac e nos

forneça o resultado esperado de (4.1), seria necessária a relação

$$[\mathbb{M}(\mathbf{p}) - \mathbb{N}(-\mathbf{p})] \propto \mathbb{1}_{(4 \times 4)}. \quad (4.25)$$

O resultado fornecido pelo primeiro correlator não é o suficiente para assegurar a localidade dos campos. Portanto, vamos calcular o correlator (4.2) para obtermos uma segunda equação para as somas de spin. Analogamente ao caso anterior o correlator (4.2) nos fornece

$$\begin{aligned} \{\mathbb{f}(\mathbf{x}, t), \bar{\mathbb{f}}(\mathbf{x}', t)\} &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^\mu)}{2E(\mathbf{p})} \sum_{\alpha} [c_{\alpha} \Psi_{\alpha}^A(\mathbf{p}) e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} + d_{\alpha}^{\dagger} \Psi_{\alpha}^B(\mathbf{p}) e^{ip_{\mu}x^{\mu}}] \times \\ &\quad \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{a(p'^{\mu})}{2E(\mathbf{p}')} \sum_{\alpha'} [c_{\alpha'}^{\dagger} \bar{\Psi}_{\alpha'}^A(\mathbf{p}') e^{ip'_{\mu}x'^{\mu}} + d_{\alpha'} \bar{\Psi}_{\alpha'}^B(\mathbf{p}') e^{-ip'_{\mu}x'^{\mu}}] + \\ &\quad \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{a(p'^{\mu})}{2E(\mathbf{p}')} \sum_{\alpha'} [c_{\alpha'}^{\dagger} (\bar{\Psi}_{\alpha'}^A(\mathbf{p}'))^{\dagger} e^{ip'_{\mu}x'^{\mu}} + d_{\alpha'} (\bar{\Psi}_{\alpha'}^B(\mathbf{p}'))^{\dagger} e^{-ip'_{\mu}x'^{\mu}}] \times \\ &\quad \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^{\mu})}{2E(\mathbf{p})} \sum_{\alpha} [c_{\alpha} (\Psi_{\alpha}^A(\mathbf{p}))^{\dagger} e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} + d_{\alpha}^{\dagger} (\Psi_{\alpha}^B(\mathbf{p}))^{\dagger} e^{ip_{\mu}x^{\mu}}]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Assim como anteriormente, a multiplicação dos termos resulta em

$$\begin{aligned} \{\mathbb{f}(\mathbf{x}, t), \bar{\mathbb{f}}(\mathbf{x}', t)\} &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^{\mu})}{2E(\mathbf{p})} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{a(p'^{\mu})}{2E(\mathbf{p}')} \times \\ &\quad \sum_{\alpha'} \sum_{\alpha} \left[\Psi_{\alpha}^A \bar{\Psi}_{\alpha'}^A \{c_{\alpha}, c_{\alpha'}^{\dagger}\} e^{-i(p_{\mu}x^{\mu} - p'_{\mu}x'^{\mu})} + \Psi_{\alpha}^A \bar{\Psi}_{\alpha'}^B \{c_{\alpha}, d_{\alpha'}\} e^{-i(p_{\mu}x^{\mu} + p'_{\mu}x'^{\mu})} \right. \\ &\quad \left. + \Psi_{\alpha}^B \bar{\Psi}_{\alpha'}^A \{d_{\alpha}^{\dagger}, c_{\alpha'}^{\dagger}\} e^{i(p_{\mu}x^{\mu} + p'_{\mu}x'^{\mu})} + \Psi_{\alpha}^B \bar{\Psi}_{\alpha'}^B \{d_{\alpha}^{\dagger}, d_{\alpha'}\} e^{i(p_{\mu}x^{\mu} - p'_{\mu}x'^{\mu})} \right], \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde podemos utilizar novamente o fato que as relações (4.8) e (4.9) são nulas e com isso obtemos simplesmente

$$\begin{aligned} \{\mathbb{f}(\mathbf{x}, t), \bar{\mathbb{f}}(\mathbf{x}', t)\} &= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{a(p'^{\mu})}{2E(\mathbf{p}')} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^{\mu})}{2E(\mathbf{p})} \times \\ &\quad \sum_{\alpha, \alpha'} \left[\Psi_{\alpha}^A(\mathbf{p}) \bar{\Psi}_{\alpha'}^A(\mathbf{p}') \{c_{\alpha}(\mathbf{p}), d_{\alpha'}^{\dagger}(\mathbf{p}')\} e^{(-ip_{\mu}x^{\mu} + ip'_{\mu}x'^{\mu})} \right] \\ &\quad + \left[\Psi_{\alpha}^B(\mathbf{p}) \bar{\Psi}_{\alpha'}^B(\mathbf{p}') \{c_{\alpha}(\mathbf{p}), d_{\alpha'}^{\dagger}(\mathbf{p}')\} e^{(ip_{\mu}x^{\mu} - ip'_{\mu}x'^{\mu})} \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Substituindo (4.7) e (4.10) em (4.28) e também integrando em relação a \mathbf{p}' ficamos com

$$\{\mathbb{f}(\mathbf{x}, t), \bar{\mathbb{f}}(\mathbf{x}', t)\} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{a^2(p^{\mu})}{4E^2(\mathbf{p})} (2E(\mathbf{p})) b(p^{\mu}) \times \quad (4.29)$$

$$\sum_{\alpha} \left[\Psi_{\alpha}^A(\mathbf{p}) \bar{\Psi}_{\alpha}^A(\mathbf{p}) e^{(-ip_{\mu}x^{\mu} + ip_{\mu}x'^{\mu})} + \Psi_{\alpha}^B(\mathbf{p}) \bar{\Psi}_{\alpha}^B(\mathbf{p}) e^{(ip_{\mu}x^{\mu} - ip_{\mu}x'^{\mu})} \right]. \quad (4.30)$$

Agora, fazendo uma troca de variável analogamente ao caso anterior $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ na segunda integral,

ficamos com a seguinte expressão

$$\{\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}', t)\} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a^2(p^\mu)}{2E(\mathbf{p})} b(p^\mu) \sum_{\alpha} [\Psi_{\alpha}^A(\mathbf{p}) \bar{\Psi}_{\alpha}^A(\mathbf{p}) + \Psi_{\alpha}^B(-\mathbf{p}) \bar{\Psi}_{\alpha}^B(-\mathbf{p})] e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}. \quad (4.31)$$

Por fim, substituindo os valores das somas de spin e comparando com o resultado fornecido em (4.2), obtém-se

$$\{\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}', t)\} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a^2(p^\mu)}{2E(\mathbf{p})} b(p^\mu) [\mathbb{M}(\mathbf{p}) + \mathbb{N}(-\mathbf{p})] e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} = 0_{(4 \times 4)}. \quad (4.32)$$

Portanto, a segunda equação para as somas de spin é dada por

$$[\mathbb{M}(\mathbf{p}) + \mathbb{N}(-\mathbf{p})] = 0_{(4 \times 4)}. \quad (4.33)$$

Como encontramos duas equações para as somas de spin, podemos montar um sistema linear da seguinte maneira

$$\begin{cases} [\mathbb{M}(\mathbf{p}) - \mathbb{N}(-\mathbf{p})] \propto \mathbb{1}_{(4 \times 4)}, \\ [\mathbb{M}(\mathbf{p}) + \mathbb{N}(-\mathbf{p})] = 0_{(4 \times 4)}. \end{cases} \quad (4.34)$$

Para que o campo definido anteriormente seja local, o sistema (4.34) tem que ser satisfeito. Encontrar a solução desse sistema é bem simples e ela nos fornece

$$\begin{cases} \mathbb{M}(\mathbf{p}) \propto \mathbb{1}_{(4 \times 4)}, \\ \mathbb{N}(\mathbf{p}) = -\mathbb{M}(\mathbf{p}). \end{cases} \quad (4.35)$$

Nossa premissa implica que as somas de spin sejam invariantes sob as transformações do grupo $HOM(2)$ (2.83), isso em termos matemáticos traduz-se em

$$\mathcal{V}(p)\mathbb{M}(\mathbf{p})\mathcal{V}^{-1}(p) = \mathbb{M}(\mathbf{p}) \quad (4.36)$$

e

$$\mathcal{V}(p)\mathbb{N}(\mathbf{p})\mathcal{V}^{-1}(p) = \mathbb{N}(\mathbf{p}). \quad (4.37)$$

Uma matriz hermitiana genérica¹ que possui essa característica e que também é covariante as transformações do grupo $SIM(2)$ e é dada por

$$\mathbb{H}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & -i\eta e^{-i\phi} \\ 0 & A & i\eta e^{i\phi} & 0 \\ 0 & -i\eta e^{-i\phi} & B & 0 \\ i\eta e^{i\phi} & 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \quad (4.38)$$

onde² $A, B, \eta \in \mathbb{R}$. Note que a dependência de uma direção espacial ϕ (ângulo azimutal do sistema esférico de coordenadas), não permite invariância por transformações de Lorentz. Esse resultado é uma

¹ No Apêndice A apresentamos um matriz mais geral ainda e discutimos mais detalhes.

² Esse cálculo foi realizado utilizando-se do *software Wolfram Mathematica 11.2*.

generalização do resultado das somas de spin para a primeira formulação do ELKO (AHLUWALIA-KHALILOVA; GRUMILLER, 2005; HORVATH, 2011; ROGERIO, 2014).

O resultado da matriz (4.38) contrasta com os resultados (4.35). Isso nos leva a concluir que se as somas de spin forem (4.38) o campo será não local e para ele ser local as somas de spin têm que ser invariantes de Lorentz. Podemos também ressaltar o fato que a matriz (4.38) pode não possuir inversa, pois

$$\det(\mathbb{H}(\mathbf{p})) = (AB)^2 - (\eta)^4. \quad (4.39)$$

Portanto, concluímos que a nossa premissa leva a um campo não local, pois os valores advindos das somas de spin fazem com que os correlatores (4.1) e (4.2) não sejam satisfeitos. Já os correlatores (4.3) e (4.4) podem ser calculados analogamente ao que foi realizado para (4.1) e (4.2). Mas esses não dependem das somas de spin e para a nossa análise os dois primeiros correlatores já são suficientes.

4.2 PROPAGADOR DE FEYNMAN-DYSON

Ao estudar a estrutura de localidade dos campos na seção anterior, somos levados a concluir que tais campos não podem obedecer a equação de Dirac e se tomarmos como base a equação de Klein–Gordon os campos carregam o aspecto de não-localidade. Diante disso, vamos calcular o propagador de Feynman-Dyson para tais espinores e a partir do propagador encontrar um operador de campo quântico e uma lagrangiana associada a ele. Feito isso, podemos comparar os resultados com os casos conhecidos da literatura e também podemos avaliar as implicações físicas dos resultados obtidos.

O propagador de Feynman-Dyson é uma quantidade bastante relevante em teoria de campos, pois esse está atrelado a amplitude de propagação de uma partícula. Na literatura encontramos várias formas de calcular o propagador, como por exemplo (BARONE; BOSCHI-FILHO; FARINA, 2003). Vamos utilizar a seguinte definição³ (GREINER; REINHARDT, 1996)

$$iD(x - x') = \langle 0 | \mathcal{T}[\hat{f}(x)\bar{\hat{f}}(x')] | 0 \rangle, \quad (4.40)$$

onde \mathcal{T} denota o operador de ordenamento temporal, o qual atua nos operadores de campo $\hat{f}(x)$ e $\bar{\hat{f}}(x')$.

Definindo dois operadores arbitrários $\mathbf{a}(x)$ e $\mathbf{b}(x')$ dependentes do tempo, o operador de ordenamento temporal \mathcal{T} atua neles da seguinte maneira (GREINER; REINHARDT, 1996)

$$\mathcal{T}[\mathbf{a}(x)\mathbf{b}(x')] = \mathbf{a}(x)\mathbf{b}(x')\theta(x^0 - x'^0) \pm \mathbf{b}(x')\mathbf{a}(x)\theta(x'^0 - x^0), \quad (4.41)$$

onde θ é a função de Heaviside e o sinal é definido baseando-se nas propriedades dos operadores em questão⁴. Portanto, o propagador pode ser reescrito como se segue

$$iD(x - x') = \langle 0 | \hat{f}(x)\bar{\hat{f}}(x') | 0 \rangle \theta(x^0 - x'^0) - \langle 0 | \bar{\hat{f}}(x')\hat{f}(x) | 0 \rangle \theta(x'^0 - x^0). \quad (4.42)$$

³ Na literatura o propagador é definido a menos de uma constante cuja função é deixar a normalização igual a 1.

⁴ No caso bosônico o sinal será positivo, já para o caso fermiônico será negativo.

Baseando-nos nas propriedades da função de Heaviside, temos a seguinte situação:

$$\mathcal{T} [f(x)\bar{f}(x')] = \begin{cases} f(x)\bar{f}(x') & x^0 > x'^0, \\ -\bar{f}(x')f(x) & x'^0 > x^0. \end{cases} \quad (4.43)$$

Vamos então primeiramente calcular a primeira parcela, onde $x^0 > x'^0$. De forma explícita podemos representá-la por

$$\begin{aligned} \langle 0|f(x)\bar{f}(x')|0\rangle &= \left\langle 0 \left| \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^\mu)}{2E(\mathbf{p})} \sum_{\alpha} [c_{\alpha} \Psi_{\alpha}^A(\mathbf{p}) e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} + d_{\alpha}^{\dagger} \Psi_{\alpha}^B(\mathbf{p}) e^{ip_{\mu}x^{\mu}}] \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{a(p'^{\mu})}{2E(\mathbf{p}')} \sum_{\alpha'} [c_{\alpha'}^{\dagger} \bar{\Psi}_{\alpha'}^A(\mathbf{p}') e^{ip'_{\mu}x'^{\mu}} + d_{\alpha'} \bar{\Psi}_{\alpha'}^B(\mathbf{p}') e^{-ip'_{\mu}x'^{\mu}}] \right| 0 \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Mais explicitamente, obtemos

$$\begin{aligned} \langle 0|f(x)\bar{f}(x')|0\rangle &= \left\langle 0 \left| \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^\mu)}{2E(\mathbf{p})} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{a(p'^{\mu})}{2E(\mathbf{p}')} \times \right. \right. \\ &\quad \sum_{\alpha'} \sum_{\alpha} [c_{\alpha} c_{\alpha'}^{\dagger} \Psi_{\alpha}^A \bar{\Psi}_{\alpha'}^A e^{-i(p_{\mu}x^{\mu} - p'_{\mu}x'^{\mu})} + c_{\alpha} d_{\alpha'} \Psi_{\alpha}^A \bar{\Psi}_{\alpha'}^B e^{-i(p_{\mu}x^{\mu} + p'_{\mu}x'^{\mu})} \\ &\quad \left. \left. + d_{\alpha}^{\dagger} c_{\alpha'}^{\dagger} \Psi_{\alpha}^B \bar{\Psi}_{\alpha'}^A e^{i(p_{\mu}x^{\mu} + p'_{\mu}x'^{\mu})} + d_{\alpha}^{\dagger} d_{\alpha'} \Psi_{\alpha}^B \bar{\Psi}_{\alpha'}^B e^{i(p_{\mu}x^{\mu} - p'_{\mu}x'^{\mu})}] \right| 0 \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.45)$$

O operador de aniquilação quando atua em um estado de vácuo, acaba por aniquilá-lo, consequentemente, temos (GREINER; REINHARDT, 1996)

$$c_{\alpha}(\mathbf{p}) |0\rangle = 0 \stackrel{CD}{\Leftrightarrow} \langle 0|c_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{p}) = 0. \quad (4.46)$$

Utilizando da relação (4.46), a equação (4.45) se reduz à

$$\begin{aligned} \langle 0|f(x)\bar{f}(x')|0\rangle &= \left\langle 0 \left| \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^\mu)}{2E(\mathbf{p})} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{a(p'^{\mu})}{2E(\mathbf{p}')} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sum_{\alpha'} \sum_{\alpha} [c_{\alpha} c_{\alpha'}^{\dagger} \Psi_{\alpha}^A \bar{\Psi}_{\alpha'}^A e^{-i(p_{\mu}x^{\mu} - p'_{\mu}x'^{\mu})}] \right| 0 \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Tendo em vista a relação de anti-comutação (4.7) e a propriedade (4.46), temos então

$$\langle 0|c_{\alpha}(\mathbf{p})c_{\alpha'}^{\dagger}(\mathbf{p}')|0\rangle + \underbrace{\langle 0|c_{\alpha'}^{\dagger}(\mathbf{p}')c_{\alpha}(\mathbf{p})|0\rangle}_0 = 2E(\mathbf{p})b(p^{\mu})(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\delta_{\alpha\alpha'}. \quad (4.48)$$

Aplicando as relações (4.48) e (4.11) em (4.47), obtemos então

$$\langle 0|f(x)\bar{f}(x')|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a^2(p^{\mu})b(p^{\mu})}{2E(\mathbf{p})} \mathbb{M}(\mathbf{p}) e^{-ip_{\mu}(x^{\mu} - x'^{\mu})}. \quad (4.49)$$

Para o caso em que $x'^0 > x^0$, temos resultado análogo ao caso anterior

$$\langle 0 | \bar{f}(x') f(x) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{a^2(p^\mu) b(p^\mu)}{2E(\mathbf{p})} \mathbb{N}(\mathbf{p}) e^{ip_\mu(x^\mu - x'^\mu)}. \quad (4.50)$$

Para dar seqüência ao cálculo, precisamos representar a função de Heaviside em sua forma integral, que é dada por (HORVATH, 2011; WEINBERG, 1995)

$$\theta(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\tau t}}{\tau + i\epsilon} d\tau. \quad (4.51)$$

Portando, o propagador pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} iD(x - x') &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{a^2(p^\mu) b(p^\mu)}{2E(\mathbf{p})} \mathbb{M}(\mathbf{p}) e^{-ip_\mu(x^\mu - x'^\mu)} \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\tau(x^0 - x'^0)}}{\tau + i\epsilon} d\tau \\ &\quad - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{a^2(p^\mu) b(p^\mu)}{2E(\mathbf{p})} \mathbb{N}(\mathbf{p}) e^{ip_\mu(x^\mu - x'^\mu)} \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\tau(x^0 - x'^0)}}{\tau + i\epsilon} d\tau. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Reorganizando os termos dentro das integrais ficamos com

$$\begin{aligned} iD(x - x') &= \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{a^2(p^\mu) b(p^\mu)}{2E(\mathbf{p})} \mathbb{M}(\mathbf{p}) \frac{e^{-ip_\mu(x^\mu - x'^\mu)} e^{-i\tau(x^0 - x'^0)}}{\tau + i\epsilon} \\ &\quad - \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{a^2(p^\mu) b(p^\mu)}{2E(\mathbf{p})} \mathbb{N}(\mathbf{p}) \frac{e^{ip_\mu(x^\mu - x'^\mu)} e^{i\tau(x^0 - x'^0)}}{\tau + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Separando a parte espacial da parte temporal nas exponenciais, obtemos

$$\begin{aligned} iD(x - x') &= -\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{a^2(p^\mu) b(p^\mu)}{2E(\mathbf{p})} \mathbb{M}(\mathbf{p}) \frac{e^{-i(\tau+p^0)(x^0 - x'^0) + i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}}{\tau + i\epsilon} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{a^2(p^\mu) b(p^\mu)}{2E(\mathbf{p})} \mathbb{N}(\mathbf{p}) \frac{e^{i(\tau+p^0)(x^0 - x'^0) - i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}}{\tau + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Fazendo a troca de variáveis $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ e $\tau \rightarrow -\tau$ no segundo termo, obtém-se

$$\begin{aligned} D(x - x') &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{a^2(p^\mu) b(p^\mu)}{2E(\mathbf{p})} \mathbb{M}(\mathbf{p}) \frac{e^{-i(\tau+p^0)(x^0 - x'^0) + i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}}{\tau + i\epsilon} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{a^2(p^\mu) b(p^\mu)}{2E(\mathbf{p})} \mathbb{N}(-\mathbf{p}) \frac{e^{-i(\tau-p^0)(x^0 - x'^0) + i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}}{-\tau + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Podemos fazer novamente uma troca de variáveis. No primeiro termo façamos $\mathbf{p} \rightarrow \tilde{\mathbf{p}}$ e $\tilde{p}^0 = \tau + p^0$, consequentemente $\tau = \tilde{p}^0 - \sqrt{\tilde{\mathbf{p}}^2 + m^2}$, pois $p^0 = \sqrt{\tilde{\mathbf{p}}^2 + m^2}$. No segundo termo, analogamente ao

primeiro, $\mathbf{p} \rightarrow \tilde{\mathbf{p}}$ e $\tilde{p}^0 = \tau - p^0$, sendo que $\tau = \tilde{p}^0 + \sqrt{\tilde{\mathbf{p}}^2 + m^2}$. Fazendo isso, obtém-se

$$D(x - x') = \int \frac{d^3\tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{p}^0 \frac{a^2(\tilde{p}^\mu)b(\tilde{p}^\mu)}{2\sqrt{\tilde{\mathbf{p}}^2 + m^2}} \mathbb{M}(\tilde{\mathbf{p}}) \frac{e^{-i\tilde{p}^0(x^0-x'^0)+i\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{\tilde{p}^0 - \sqrt{\tilde{\mathbf{p}}^2 + m^2} + i\epsilon} - \int \frac{d^3\tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{p}^0 \frac{a^2(\tilde{p}^\mu)b(\tilde{p}^\mu)}{2\sqrt{\tilde{\mathbf{p}}^2 + m^2}} \mathbb{N}(-\tilde{\mathbf{p}}) \frac{e^{-i\tilde{p}^0(x^0-x'^0)+i\tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}}{-\tilde{p}^0 - \sqrt{\tilde{\mathbf{p}}^2 + m^2} + i\epsilon}. \quad (4.56)$$

Agrupando em um único denominador, temos

$$D(x - x') = \int \frac{d^3\tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{p}^0 \frac{a^2(\tilde{p}^\mu)b(\tilde{p}^\mu)}{2\sqrt{\tilde{\mathbf{p}}^2 + m^2}} \times \frac{\mathbb{M}(\tilde{\mathbf{p}}) \left(-\tilde{p}^0 - \sqrt{\tilde{\mathbf{p}}^2 + m^2} + i\epsilon\right) - \mathbb{N}(-\tilde{\mathbf{p}}) \left(\tilde{p}^0 - \sqrt{\tilde{\mathbf{p}}^2 + m^2} + i\epsilon\right)}{\left(\tilde{p}^0 - \sqrt{\tilde{\mathbf{p}}^2 + m^2} + i\epsilon\right) \left(-\tilde{p}^0 - \sqrt{\tilde{\mathbf{p}}^2 + m^2} + i\epsilon\right)} e^{-i\tilde{p}_\mu(x^\mu-x'^\mu)}. \quad (4.57)$$

O cálculo do denominador da equação (4.57) nos fornece⁵

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{p}^0 - \sqrt{\tilde{\mathbf{p}}^2 + m^2} + i\epsilon\right) \left(-\tilde{p}^0 - \sqrt{\tilde{\mathbf{p}}^2 + m^2} + i\epsilon\right) = -(\tilde{p}^0)^2 - \tilde{p}^0 \sqrt{\tilde{\mathbf{p}}^2 + m^2} + \\ & + i\epsilon \tilde{p}^0 + \tilde{p}^0 \sqrt{\tilde{\mathbf{p}}^2 + m^2} + (\tilde{\mathbf{p}}^2 + m^2) - i\epsilon \sqrt{\tilde{\mathbf{p}}^2 + m^2} - i\epsilon \tilde{p}^0 - i\epsilon \sqrt{\tilde{\mathbf{p}}^2 + m^2} + O(\epsilon^2) = \\ & -(\tilde{p}^0)^2 + (\tilde{\mathbf{p}}^2 + m^2) - 2i\epsilon \sqrt{\tilde{\mathbf{p}}^2 + m^2} = -(\tilde{p}_\mu \tilde{p}^\mu - m^2 + i\epsilon). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Portanto, a equação (4.57) se traduz em

$$D(x - x') = \int \frac{d^3\tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{p}^0 \frac{a^2(\tilde{p}^\mu)b(\tilde{p}^\mu)}{2\sqrt{\tilde{\mathbf{p}}^2 + m^2}} \times \frac{[\mathbb{M}(\tilde{\mathbf{p}}) - \mathbb{N}(-\tilde{\mathbf{p}})] \sqrt{\tilde{\mathbf{p}}^2 + m^2} + [\mathbb{M}(\tilde{\mathbf{p}}) + \mathbb{N}(-\tilde{\mathbf{p}})] \tilde{p}^0}{\tilde{p}_\mu \tilde{p}^\mu - m^2 + i\epsilon} e^{-i\tilde{p}_\mu(x^\mu-x'^\mu)}. \quad (4.59)$$

A equação (4.59) nos fornece uma forma geral para o propagador. Podemos tentar compará-lo com o propagador de Dirac, que é dado por

$$S(x - x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu p_\mu + m\mathbb{1}}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} e^{-ip_\mu(x^\mu-x'^\mu)}. \quad (4.60)$$

Note que não é possível obter o propagador de Dirac utilizando as somas de spin (4.11) e (4.12), pois essas possuem forma geral semelhante a matriz (A.15). Um caso mais apto a comparação é o propagador do ELKO que é dado por (AHLUWALIA, 2017)

$$S^{(ELKO)}(x - x') = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\mathbb{1}}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} e^{-ip_\mu(x^\mu-x'^\mu)}. \quad (4.61)$$

O propagador do ELKO é um caso particular de (4.59), onde as somas de spin são proporcionais a

⁵ A fim de simplificar, notemos que $2\epsilon\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ é da mesma ordem de grandeza de ϵ , de modo que escreveremos apenas ϵ para depois tomarmos o limite $\epsilon \rightarrow 0$.

identidade e também obedecem o vínculo semelhante a (4.35) obtido anteriormente. Neste caso o propagador satisfaz a equação de Klein–Gordon

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) S^{(ELKO)}(x - x') = \delta^{(4)}(x - x') \mathbb{1}_{4 \times 4}. \quad (4.62)$$

Note, no entanto, que teríamos um campo local. Agora, nossa análise se volta para o caso geral, onde as somas de spin não se restringem a serem proporcionais a identidade, nem se sujeitam às restrições para um campo local. Neste caso, para obtermos um propagador à la Klein–Gordon, temos que impor um vínculo as somas de spin, que é dado por⁶

$$[\mathbb{M}(\mathbf{p}) + \mathbb{N}(-\mathbf{p})] = 0_{(4 \times 4)}. \quad (4.63)$$

Substituindo (4.63) em (4.59), obtemos

$$D(x - x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{c(p^\mu) \mathbb{M}(\mathbf{p}) e^{-ip_\mu(x^\mu - x'^\mu)}}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon}, \quad (4.64)$$

onde $c(p^\mu) = a^2(p^\mu)b(p^\mu)$.

Portanto, a partir de (4.59) conseguimos obter um propagador semelhante a um propagador de Klein–Gordon, mas ao invés das somas de spin serem invariantes por transformações de Lorentz, elas são matrizes invariantes por transformações da VSR.

4.3 PROPAGADOR DE FEYNMAN PARA DIRAC

Na seção anterior, vimos o propagador para o caso em que as somas de spin são matrizes invariantes por transformações da VSR. Agora vamos estudar, a título de comparação, o propagador de Feynman para espinores de Dirac. Neste caso o propagador pode ser definido analogamente ao caso anterior e, portanto, isso se traduz em

$$iS_{\alpha\beta}(x - x') = \langle 0 | \mathcal{T}[\hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\psi}_\beta(x')] | 0 \rangle. \quad (4.65)$$

A atuação do operador de ordenamento temporal nos fornece

$$\mathcal{T}[\hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\psi}_\beta(x')] = \begin{cases} \hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\psi}_\beta(x') & x^0 > x'^0, \\ -\hat{\psi}_\beta(x') \hat{\psi}_\alpha(x) & x'^0 > x^0. \end{cases} \quad (4.66)$$

Baseando-nos em (4.66), podemos reescrever o propagador utilizando a função de Heaviside da seguinte maneira

$$iS_{\alpha\beta}(x - x') = \langle 0 | \hat{\psi}_\alpha(x) \hat{\psi}_\beta(x') | 0 \rangle \theta(x^0 - x'^0) - \langle 0 | \hat{\psi}_\beta(x') \hat{\psi}_\alpha(x) | 0 \rangle \theta(x'^0 - x^0). \quad (4.67)$$

⁶ Note que essa relação também aparece no cálculo do correlator (4.2), porém lá essa expressão era uma das condições necessárias para localidade. Aqui, essa condição aparece em outro contexto. Por fim, note que a validade de (4.63) não implica localidade.

Semelhantemente ao caso anterior precisamos das somas de spin, que nesse caso são dadas por (PESKIN; SCHROEDER, 1995; MAGGIORE, 2005)

$$\sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \not{p} + m, \quad (4.68)$$

associada a partícula e

$$\sum_s v^s(p) \bar{v}^s(p) = \not{p} - m, \quad (4.69)$$

associada a anti-partícula, onde utilizamos da seguinte notação $\not{p} \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^\mu p_\mu$.

Vamos ocultar a sequência dos cálculos, pois é discutida largamente na literatura e como resultado final temos (GREINER; REINHARDT, 1996; PESKIN; SCHROEDER, 1995)

$$S_{\alpha\beta}(x - x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu p_\mu + m \mathbb{1}}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} e^{-ip_\mu(x^\mu - x'^\mu)}. \quad (4.70)$$

Este propagador foi obtido a título de comparação, pois espinores de Dirac são largamente difundidos nos livros texto e o leitor pode comparar o propagador obtido anteriormente com um caso bem conhecido.

4.4 LAGRANGIANA

Vamos começar a nossa discussão analisando a lagrangiana do campo escalar (PESKIN; SCHROEDER, 1995)

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2. \quad (4.71)$$

Se pensarmos em termos da ação, essa lagrangiana estaria sob integração e de

$$\partial_\mu (\phi \partial^\mu \phi) = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \phi \square \phi, \quad (4.72)$$

desprezando o termo de superfície, temos

$$-\phi \square \phi = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi. \quad (4.73)$$

Portanto, podemos reescrever a lagrangiana da seguinte maneira

$$\mathcal{L} = \phi \underbrace{(-\square - m^2)}_{\mathcal{O}} \phi, \quad (4.74)$$

onde o operador \mathcal{O} é operador de Klein–Gordon e $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu$.

Tanto o ELKO como o campo escalar possuem lagrangianas semelhantes, tendo como base a equação de Klein–Gordon, pois essa está atrelada a conservação de energia. Já para o propagador (4.64), Klein–Gordon só atende ao caso em que

$$\mathbb{M}(\mathbf{p}) \propto \mathbb{1}_{4 \times 4}, \quad (4.75)$$

mas queremos encontrar um operador mais geral, que não está sujeito a restrição (4.75). Para tal, vamos tomar como base a lagrangiana do campo escalar e adicionar a ela um termo extra. Deste modo, encontraremos a lagrangiana para o caso geral e rescreveremos ela da seguinte maneira

$$\mathcal{L} = \bar{f}(-\square\mathbb{1} - m^2\mathbb{1} + \mathbb{F})f. \quad (4.76)$$

A partir da nova lagrangiana (4.76) que definimos, podemos definir um novo operador, que é dado por

$$\mathcal{D} = (-\square - m^2)\mathbb{1} + \mathbb{F}, \quad (4.77)$$

onde definimos \mathbb{F} como sendo uma matriz 4×4 .

Precisamos encontrar \mathbb{F} . Para tanto precisamos analisá-la no espaço dos momentos. Denotaremos \mathbb{F} e \mathcal{D} no espaço dos momentos como $\tilde{\mathbb{F}}$ e $\tilde{\mathcal{D}}$, respectivamente. Assim sendo, temos

$$\tilde{\mathcal{D}} = \left(p_\mu p^\mu \mathbb{1} - m^2 \mathbb{1} + \tilde{\mathbb{F}} \right), \quad (4.78)$$

onde assumiremos que $\tilde{\mathcal{D}}$ é inversível e sua inversa é simplesmente dada por

$$\tilde{\mathcal{D}}^{-1} = \left(p_\mu p^\mu \mathbb{1} - m^2 \mathbb{1} + \tilde{\mathbb{F}} \right)^{-1}. \quad (4.79)$$

Agora podemos comparar o integrando do propagador (4.64) com a equação (4.79), com isso obtemos

$$\left(p_\mu p^\mu \mathbb{1} - m^2 \mathbb{1} + \tilde{\mathbb{F}} \right)^{-1} = \frac{\mathbb{M}(\mathbf{p})}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon}. \quad (4.80)$$

A equação (4.80) nos possibilita encontrar o valor da matriz $\tilde{\mathbb{F}}$. Se multiplicarmos ela ambos os lados por $\left(p_\mu p^\mu \mathbb{1} - m^2 \mathbb{1} + \tilde{\mathbb{F}} \right)$ e depois por $[\mathbb{M}(\mathbf{p})]^{-1}$, encontramos

$$[\mathbb{M}(\mathbf{p})]^{-1} = \mathbb{1} \left(\frac{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon + \tilde{\mathbb{F}}}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} \right), \quad (4.81)$$

onde a matriz $[\mathbb{M}(\mathbf{p})]^{-1}$ representa a inversa da matriz $\mathbb{M}(\mathbf{p})$. Prosseguindo com o cálculo, temos

$$[\mathbb{M}(\mathbf{p})]^{-1} = \mathbb{1} \left(\frac{p_\mu p^\mu - m^2}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} + \frac{\tilde{\mathbb{F}}}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} \right). \quad (4.82)$$

Como ϵ é um valor infinitesimal, temos

$$[\mathbb{M}(\mathbf{p})]^{-1} = \mathbb{1} + \frac{\tilde{\mathbb{F}}}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} \quad (4.83)$$

e finalmente obtemos

$$\tilde{\mathbb{F}} = [(\mathbb{M}(\mathbf{p}))^{-1} - \mathbb{1}] (p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon). \quad (4.84)$$

Agora precisamos substituir $\tilde{\mathbb{F}}$ em (4.78) para obtermos o operador $\tilde{\mathcal{D}}$, deste modo temos

$$\tilde{\mathcal{D}} = (p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon) + [(\mathbb{M}(\mathbf{p}))^{-1} - \mathbb{1}] (p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon). \quad (4.85)$$

Portanto, o operador $\tilde{\mathcal{D}}$ é dado por

$$\tilde{\mathcal{D}} = [\mathbb{M}(\mathbf{p})]^{-1} (p_\mu p^\mu - m^2). \quad (4.86)$$

Entretanto, precisamos defini-lo no espaço das posições. Anteriormente supomos que o operador seria o operador de Klein–Gordon com um termo extra somado, mas a expressão (4.86) nos mostra que tal operador pode ser reescrito como produto, onde o operador \mathcal{D} é o operador de Klein–Gordon multiplicado por uma matriz que viola as simetrias de Lorentz (mas respeita as simetrias da VSR) representada no espaço das posições. De forma geral temos

$$\mathcal{D} = -(\mathcal{M}_{ab})^{-1} (\square + m^2), \quad (4.87)$$

onde \mathcal{M}_{ab} é a matriz $\mathbb{M}(\mathbf{p})$ no espaço da posições. Encontrar uma forma explícita para a matriz \mathcal{M}_{ab} não é uma tarefa fácil, pois a sua dependência do momento não se dá de forma usual.

Como podemos obter \mathbb{F} da expressão (4.84), a lagrangiana (4.76) pode ser dada por

$$\mathcal{L} = -\bar{\mathbf{f}} ((\mathcal{M}_{ab})^{-1} (\square + m^2)) \mathbf{f}. \quad (4.88)$$

Caso a matriz $(\mathcal{M}_{ab})^{-1}$ não dependa de derivadas usuais ou de qualquer parâmetro que não comute com o campo $\bar{\mathbf{f}}$, podemos então reescrevê-la como

$$\mathcal{L} = (\mathcal{M}_{ab})^{-1} (\partial^\mu \bar{\mathbf{f}}_a(x) \partial_\mu \mathbf{f}_b(x) - m^2 \bar{\mathbf{f}}_a(x) \mathbf{f}_b(x)). \quad (4.89)$$

No Apêndice A tentamos obter uma matriz invariante por boost da VSR (grupo $HOM(2)$), mas notamos que há uma gama de possibilidades. Entretanto, existe uma delas que é especial, pois essa também é covariante por transformações do grupo $SIM(2)$ dada por

$$\mathbb{H}(p) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & -i\eta e^{-i\phi} \\ 0 & A & i\eta e^{i\phi} & 0 \\ 0 & -i\eta e^{-i\phi} & B & 0 \\ i\eta e^{i\phi} & 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \quad (4.90)$$

onde $A, B, \eta \in \mathbb{R}$. Fica nítido que tal matriz não depende do momento de forma linear. Por esse motivo representá-la no espaço das posições não é trivial.

Vamos analisar como tal matriz está relacionada com o momento. A parte referente ao momento é dada por exponenciais complexas e podemos relacionar tais exponencias com o momento da seguinte forma⁷ (LEE, 2016)

⁷ Note que a função que relaciona o momento com a exponencial complexa dependente de ϕ é uma função plurívoca ao invés de ser uma função unívoca. Aumentando a complexidade do nosso problema.

$$\begin{aligned}
\left[\frac{(p^1 \pm ip^2)}{(p^1 \mp ip^2)} \right]^{1/2} &= \left[\frac{(|p| \cos \phi \sin \theta \pm i|p| \sin \phi \sin \theta)}{(|p| \cos \phi \sin \theta \mp i|p| \sin \phi \sin \theta)} \right]^{1/2}, \\
&= \left[\frac{e^{\pm i\phi}}{e^{\mp i\phi}} \right]^{1/2}, \\
&= [e^{\pm 2i\phi}]^{1/2} = e^{\pm i\phi},
\end{aligned} \tag{4.91}$$

onde ϕ é o ângulo azimutal das coordenadas esféricas.

A equação (4.91) nos mostra de forma clara que a matriz $\mathbb{H}(p)$ tem uma relação não linear com o momento. Porém, existe uma possibilidade de representá-la no espaço das posições, feita em termos de derivadas fracionárias. Tal abordagem é feita em detalhes⁸ em (LEE, 2016), onde autor mostra que o operador de campo quântico é dado por

$$\mathcal{D} = \mathcal{A}_{ab} (\square + m^2), \tag{4.92}$$

sendo que \mathcal{A}_{ab} é uma representação particular da matriz $(\mathcal{M}_{ab})^{-1}$ escrita em termos de derivadas fracionárias. Nesse caso, é possível representar a lagrangiana associada a esse operador (4.92) da seguinte maneira (LEE, 2016)

$$\mathcal{L} = \mathcal{A}_{ab} (\partial^\mu \bar{f}_a(x) \partial_\mu f_b(x) - m^2 \bar{f}_a(x) f_b(x)). \tag{4.93}$$

Essa Lagrangiana nos fornece uma densidade de momento que faz com as relações de localidade sejam todas satisfeitas. Mas agora existe um termo que viola as simetrias de Lorentz explicitamente na Lagrangiana.

Para o caso mais geral possível temos uma matriz arbitrária invariante por transformações do grupo $HOM(2)$. Tal matriz pode ser expressa de várias formas e para cada uma delas não sabemos se há representação única no espaço das posições. Assumindo que haja uma tal, teríamos, como visto, como consequência uma Lagrangiana que possui um termo que viola as simetrias de Lorentz explicitamente ao invés da violação aparecer apenas camuflada nas somas de spin.

⁸ Nesse artigo o autor trabalha com a primeira formulação do ELKO, mas é análogo ao nosso e serve como exemplo.

5 CONCLUSÃO

A VSR é uma teoria que reproduz certos resultados esperados para uma teoria relativística, tal como a velocidade da luz ser invariante por troca de referenciais inerciais e também por possuir uma velocidade limite, assim como a SR. Outra propriedade que é vital para uma teoria relativística é a lei de adição de velocidades, sendo que na VSR tal composição se diferencia da SR por possuir transformações que dependem do referencial que está sendo aplicado (2.37) e também pelo fato de haver uma direção privilegiada, como foi demonstrado na seção (2.1).

Apesar da VSR satisfazer os requisitos físicos e matemáticos para uma teoria relativística ela falha em reproduzir o fator de correção correto para a precessão de Thomas, fenômeno esse que tem embasamento teórico e experimental. Observe também que não é possível alterar os parâmetros de modo que (3.32) tenha a mesma forma que (3.5), ou seja, não há como reproduzir os resultados da SR utilizando boosts da VSR. Assim sendo, concluímos que o valor incorreto da precessão de Thomas não advém da escolha da direção dos dois boosts, mas sim deriva das propriedades intrínsecas da teoria. As transformações de Lorentz têm a propriedade de que dois boosts sucessivos são equivalentes a um boost e uma rotação. Esse resultado é derivado diretamente da álgebra, pois a comutação de dois boosts é igual a uma rotação a menos de um fator multiplicativo. Já para os grupos $SIM(2)$ e $HOM(2)$ a álgebra é diferente e de um tal modo que não podemos combinar dois boosts da VSR de modo a obter um boost e uma rotação.

Embora nossa análise da precessão de Thomas seja puramente geométrica e a baixas energias, não podemos ignorar o fato que partículas como elétrons respeitam a equação de Dirac. No entanto, essa equação tem como base a paridade e a VSR não possui essa simetria. Portanto, a VSR não pode ser utilizada na descrição de certas partículas como o elétron, por exemplo, mas há a possibilidade de descrever outros tipos de partículas, mais especificamente, partículas que estão no setor escuro da matéria. Conseqüentemente, uma vez que essas partículas não interagem com o campo eletromagnético, o problema da incompatibilidade da VSR com a precessão de Thomas, por exemplo, desaparece.

A possibilidade da existência de partículas que estão no setor escuro da matéria violarem Lorentz, mas estarem de acordo com a VSR, leva-nos a estudar a estrutura de localidade de campos quânticos fermiônicos cujas somas de spin são invariantes por transformações da VSR, mais especificamente, transformações do grupo $HOM(2)$. Essa imposição sob as somas de spin nos leva necessariamente a campos não locais, como vimos no Capítulo 4.

Calcular o propagador utilizando somas de spin invariantes por VSR nos leva a concluir que o operador de campo quântico associado a ele não é Klein–Gordon, mas sim o produto entre o operador de Klein–Gordon com uma matriz que viola as simetrias de Lorentz. A matriz que causa essa violação pode não estar relacionada com o momento de forma linear e conseqüentemente sua representação no espaço das posições não se dá de forma trivial.

REFERÊNCIAS

- AGHANIM, N. et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. 2018. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1807.06209v2>>.
- AHLUWALIA, D. V. The theory of local mass dimension one fermions of spin one half. **Adv. Appl. Clifford Algebras**, v. 27, n. 3, p. 2247–2285, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00006-017-0775-1>>.
- AHLUWALIA, D. V.; GRUMILLER, D. Dark matter: A Spin one half fermion field with mass dimension one? **Phys. Rev.**, D72, p. 067701, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.72.067701>>.
- AHLUWALIA-KHALILOVA, D. V.; GRUMILLER, D. Spin-half fermions with mass dimension one: theory, phenomenology, and dark matter. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2005, n. 07, p. 012, 2005. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1475-7516/2005/07/012/pdf>>.
- ALFARO, J.; RIVELLES, V. O. Very Special Relativity and Lorentz Violating Theories. **Phys. Lett.**, B734, p. 239–244, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2014.05.068>>.
- ALWIS, S. D.; STERN, J. Why and how to make constituent and current quarks different. **Nucl. Phys. B**, v. 77, p. 509–544, 1974. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0550-3213\(74\)90379-4](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90379-4)>.
- BARONE, F. A.; BOSCHI-FILHO, H.; FARINA, C. Three methods for calculating the Feynman propagator. **Am. J. Phys.**, v. 71, p. 483–491, 2003. Disponível em: <<https://doi.org/10.1119/1.1538573>>.
- BATTISTONI, G. et al. Search for a Lorentz invariance violation contribution in atmospheric neutrino oscillations using MACRO data. **Phys. Lett.**, B615, p. 14–18, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2005.04.010>>.
- CAPOZZIELLO, S.; LAURENTIS, M. D. The dark matter problem from f(R) gravity viewpoint. **Annalen Phys.**, v. 524, p. 545–578, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/andp.201200109>>.
- COHEN, A. G.; GLASHOW, S. L. A Lorentz-Violating Origin of Neutrino Mass? 2006. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/hep-ph/0605036>>.
- COHEN, A. G.; GLASHOW, S. L. Very special relativity. **Physical Review Letters**, v. 97, 2006. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.021601>>.
- COLLADAY, D.; KOSTELECKY, V. A. Lorentz violating extension of the standard model. **Phys. Rev.**, D58, p. 116002, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.58.116002>>.
- DAS, S.; MOHANTY, S. Very special relativity is incompatible with thomas precession. **Modern Physics Letters A**, v. 26, n. 2, p. 139 – 150, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0217732311034037>>.
- DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the electron. **Royal Society**, v. 117, p. 610 – 624, 1928. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rspa.1928.0023>>.
- DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the electron. part ii. **Royal Society**, v. 118, p. 351 – 361, 1928. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rspa.1928.0056>>.

- DUARTE, L. C. et al. An alternative approach concerning Elko spinors and the hidden unitarity. **Adv. Appl. Clifford Algebras**, v. 29, n. 4, p. 66, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00006-019-0988-6>>.
- DUTTA, B.; BHATTACHARYA, K. Length contraction in very special relativity. 2011. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/1105.4219v1>>.
- FARRAR, G. R. 6-quark Dark Matter. **PoS, ICRC2017**, p. 929, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.22323/1.301.0929>>.
- GANJITABAR, H.; SHOJAI, A. Thomas precession and spin interaction energy in very special relativity. **Mod. Phys. Lett.**, A29, p. 1450140, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1070/10.1142/S0217732314501405>>.
- GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **Elementos de álgebra**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2018. (Projeto Euclides).
- GILLARD, A. B.; MARTIN, B. M. S. Quantum fields, dark matter and non-standard Wigner classes. In: **Proceedings, 7th International Heidelberg Conference on Dark Matter in Astro and Particle Physics (DARK 2009): Christchurch, New Zealand, January 18-24, 2009**. [s.n.], 2009. p. 451–456. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/9789814293792_0036>.
- GOUDSMIT, S. A.; UHLENBECK, G. H. Spinning electrons and the structure of spectra. **Nature**, v. 117, p. 264–265, 1926. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/117264a0>>.
- GREINER, W.; REINHARDT, J. **Field Quantization**. [S.l.]: Springer, 1996.
- HORVATH, S. P. **On the relativity of Elko dark matter**. 2011. Dissertação de Mestrado.
- JACKSON, J. D. **Eletrodinâmica Clássica**. [S.l.]: Wiley, 1983.
- LEE, C.-Y. A lagrangian for mass dimension one fermionic dark matter. **Physics Letters B**, v. 760, 06 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2016.06.064>>.
- MAGGIORE, M. **A Modern introduction to quantum field theory**. [S.l.: s.n.], 2005.
- MALYKIN, G. Thomas precession: Correct and incorrect solutions. **Physics-Uspekhi**, v. 49, p. 837, 10 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1070/PU2006v049n08ABEH005870>>.
- NAYAK, A. C.; JAIN, P. Phenomenological Implications of Very Special Relativity. **Phys. Rev.**, D96, n. 7, p. 075020, 2017. Disponível em: <<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.075020>>.
- NITESCU, O.; GHINESCU, S.; STOICA, S. Lorentz violation effects in two neutrino double-beta decay. 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1361-6471/ab7e8c>>.
- PATERA, J. et al. Subgroups of the poincaré group and their invariants. **Journal of Mathematical Physics**, v. 17, n. 6, p. 977 – 985, 1976. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.522991>>.
- PESKIN, M. E.; SCHROEDER, D. V. **An introduction to quantum field theory**. Boulder, CO: Westview, 1995.
- ROGERIO, R. B. Subliminal aspects concerning the Lounesto's classification. **Eur. Phys. J. C**, v. 80, n. 4, p. 299, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-020-7865-2>>.
- ROGERIO, R. J. B. **Campos espinoriais elko**. Guaratinguetá, São Paulo - Brasil: [s.n.], 2014. Disponível em: <<https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/115989/000798812.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>.

ROGERIO, R. J. B. **Aspectos clássicos e quânticos de espinores de dinâmica não-usual: espinores de dimensão de massa um**. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista - Júlio de Mesquita Filho, Guaratinguetá, São Paulo - Brasil, 2018. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/181673>>.

RYDER, L. H. **Quantum field theory**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996.

SOUZA, G. S. **The representations of HOM(2) and SIM(2) in the context of Very Special Relativity**. Campinas, São Paulo - Brasil: [s.n.], 2015. Dissertação de Mestrado. Disponível em: <<http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/276949>>.

SPERANÇA, L. D. An Identification of the Dirac Operator with the Parity Operator. **Int. J. Mod. Phys.**, D23, n. 14, p. 1444003, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1142/S0218271814440039>>.

THOMAS, L. H. The Kinematics of an electron with an axis. **Phil. Mag. Ser.7**, v. 3, p. 1–21, 1927. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/14786440108564170>>.

VILLALOBOS, C. H. C.; ROGERIO, R. J. B. The connection between dirac dynamic and parity symmetry. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 116, n. 6, p. 60007, dec 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1209/0295-5075/116/60007>>.

WEINBERG, S. **The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. ISBN 9781139644167.

**APÊNDICE A – OBTENÇÃO DE UMA MATRIZ INVARIANTE POR
TRANSFORMAÇÕES DA VSR**

A matriz $\mathbb{M}(p)$ será invariante sob transformações de boost da VSR $\mathcal{V}(p)$, desde que obedeça

$$\mathcal{V}(p)\mathbb{M}(p)\mathcal{V}^{-1}(p) = \mathbb{M}(p), \quad (\text{A.1})$$

onde vamos escrever a matriz (ou operador) $\mathbb{M}(p)$ da forma mais genérica possível:

$$\mathbb{M}(p) = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ I & J & K & L \\ M & N & O & P \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Sabemos que o boost geral da VSR é dado por

$$\mathcal{V}(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{m}{p^0-p^3}} & \frac{p^1-ip^2}{\sqrt{m(p^0-p^3)}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{p^0-p^3}{m}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{p^0-p^3}{m}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p^1+ip^2}{\sqrt{m(p^0-p^3)}} & \sqrt{\frac{m}{p^0-p^3}} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

possuindo como inversa

$$\mathcal{V}^{-1}(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{p^0-p^3}{m}} & -\frac{p^1-ip^2}{\sqrt{m(p^0-p^3)}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{m}{p^0-p^3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{m}{p^0-p^3}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p^1+ip^2}{\sqrt{m(p^0-p^3)}} & \sqrt{\frac{p^0-p^3}{m}} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

A equação (A.1) juntamente com (A.2), (A.3) e (A.4) é satisfeita mediante as seguintes condições

$$\left\{ \begin{array}{l} B = C = E = H = I = L = N = O = 0, \\ A = F, \\ K = P, \\ D = J, \\ G = M \end{array} \right. \quad (\text{A.5})$$

e

$$G(p^1 - ip^2) + D(p^1 + ip^2) = 0. \quad (\text{A.6})$$

Podemos escrever (A.6) em coordenadas esféricas. Sendo que p^1 e p^2 em coordenadas esféricas são respectivamente

$$p^1 = |p| \cos \phi \sin \theta, \quad (\text{A.7})$$

$$p^2 = |p| \sin \phi \sin \theta, \quad (\text{A.8})$$

temos

$$G|p| \sin \theta (\cos \phi - i \sin \phi) + D|p| \sin \theta (\cos \phi + i \sin \phi) = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$G(\cos \phi - i \sin \phi) + D(\cos \phi + i \sin \phi) = 0, \quad (\text{A.10})$$

$$G(e^{-i\phi}) + D(e^{i\phi}) = 0.$$

Então uma matriz invariante por boost da VSR é dada por

$$\mathbb{M}(p) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & D \\ 0 & A & G & 0 \\ 0 & D & B & 0 \\ G & 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

onde D e G são soluções da equação (A.6) e $A, B \in \mathbb{R}$.

A equação (A.6) admite uma enorme gama de soluções. Entretanto, podemos adicionar mais restrições à matriz $\mathbb{M}(p)$ e para esse caso renomearemos a matriz $\mathbb{M}(p)$ por $\mathbb{H}(p)$. Essas restrições fazem com que ela seja invariante (ou talvez covariante) por transformações do grupo $SIM(2)$ e essa restrição consiste em

$$\Gamma \mathbb{H}(p) [\Gamma]^{-1} = \mathbb{H}(p), \quad (\text{A.12})$$

onde $\Gamma \equiv e^{i\mathcal{J}_z\phi}$ e esta transformação consiste em uma rotação entorno do eixo z .

Com o acréscimo da condição (A.12) teríamos uma única solução, onde a matriz $\mathbb{H}(p)$ teria de ser proporcional a identidade. Esse resultado não é interessante para nós, pois a identidade é também invariante por transformações de Lorentz e queremos que ela seja invariante apenas pela VSR. Outra possibilidade é a matriz ser covariante mediante transformações de rotações entorno do eixo z . Portanto, temos uma nova equação que dada por

$$\Gamma \mathbb{H}(\phi) [\Gamma]^{-1} = \mathbb{H}(\phi + \phi'). \quad (\text{A.13})$$

Essa nova condição faz com que a matriz seja

$$\mathbb{H}(p) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & -\eta e^{-i\phi} \\ 0 & A & \eta e^{i\phi} & 0 \\ 0 & -\eta e^{-i\phi} & B & 0 \\ \eta e^{i\phi} & 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

onde $A, B, \eta \in \mathbb{C}$.

Agora se considerarmos que tal matriz seja hermitiana, obtemos

$$\mathbb{H}(p) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & -i\eta e^{-i\phi} \\ 0 & A & i\eta e^{i\phi} & 0 \\ 0 & -i\eta e^{-i\phi} & B & 0 \\ i\eta e^{i\phi} & 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

onde $A, B, \eta \in \mathbb{R}$.

Portanto, obtemos uma matriz hermitiana (A.15) que é invariante por transformações de boosts da VSR (grupo $HOM(2)$) e covariante pelas transformações do grupo $SIM(2)$.