RESSALVA

Atendendo solicitação da
autora, o texto completo desta
dissertação será disponibilizado
somente a partir de 17/09/2020.

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Uma conexão entre a Álgebra Linear e a Teoria dos Conjuntos

Tharine Antunes Lopes

Rio Claro
2018

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Uma conexão entre a Álgebra Linear e a Teoria dos Conjuntos

Tharine Antunes Lopes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. João Peres Vieira

Rio Claro
2018

512.523 Lopes, Tharine Antunes
L864c Uma conexão entre a Álgebra Linear e a Teoria dos Conjuntos/ Tharine Antunes Lopes- Rio Claro: [s.n.], 2018.
88 f.:fig.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientador: João Peres Vieira

1. Espaços Vetoriais. 2. Conjuntos. 3. Funções. 4. Bijeções. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Tharine Antunes Lopes
Uma conexão entre a Álgebra Linear e a Teoria dos Conjuntos

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. João Peres Vieira
Orientador

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
Departamento de Matemática - UNESP

Profa. Dra. Letícia Sanches Silva
Departamento de Matemática - UFSCar

Rio Claro, 17 de setembro de 2018

*A Deus e à Nossa Senhora, ao meu avô Randolpho Antunes (in memoriam),*a minha *irmã Talita e meu namorado Luiz, dedico.*

Agradecimentos

A Deus por sempre ter me iluminado e protegido.

À minha irmã, por todo amparo que me deu nos estudos para que eu pudesse participar de todas as aulas deste mestrado e pelo carinho e amor que sempre me proporcionou.

Ao meu namorado, Luiz, pela compreensão, dedicação com que me auxiliou quando necessário, pelo companheirismo, segurança e amor de sempre. Obrigada por mostrar o tamanho do meu potencial, por me incentivar, me ouvir e sempre me aconselhar.

À minha família, pelo encorajamento e apoio.

Ao meu orientador, Prof. Dr. João Peres Vieira, pelo incentivo, paciência e confiança em mim depositada.

Aos meus colegas de curso pelo companheirismo, pelas conversas e por deixarem esta etapa mais prazerosa.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática do IGCE-UNESP- Rio Claro-SP, pelos ensinamentos e conselhos ao longo de todo o curso. Em especial, Profa. Dra. Elíris Cristina Rizziolli e Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti.

Resumo

Este trabalho estabelece uma conexão entre duas disciplinas da Matemática: Álgebra Linear e Teoria dos Conjuntos. O objetivo principal é responder a seguinte pergunta: **É possível dar a um mesmo conjunto mais do que uma estrutura de Espaço Vetorial?** Para isto mostraremos que: "Se conhecermos uma estrutura de espaço vetorial num conjunto V então podemos dar a V tantas outras estruturas de espaço vetorial quantas forem as classes de equivalência de bijeções de V em V, segundo a relação $\sim$ do Teorema 3.10 ". Também construiremos vários exemplos inusitados de espaços vetoriais que não são comumente discutidos num curso de Álgebra Linear, como aplicação do Teorema 3.7 (Teorema da Estrutura), página 38, que é o principal resultado deste trabalho.

Palavras-chave: Espaços Vetoriais, Conjuntos, Funções, Bijeções.

Abstract

This work establishes a connection between two disciplines of Mathematics: Linear Algebra and Sets Theory. The main objective is to answer the following question: **Is it possible to give to the same set more than a vector space structure?** For this we will show that: "If we know a vector space structure in a set V then we can give V as many other vector space structures as the equivalence classes of bijections from V into V, according to the relation $\sim$ of the Theorem 3.10, from the page 38 ". We will also construct several unusual examples of vector spaces that are not commonly discussed in a Linear Algebra course, as an application of the Theorem 3.7 (Structure Theorem), page 38 , which is the main result of this work.

Keywords: Vector Spaces, Sets, Functions, Bijections.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

A teoria dos conjuntos é um dos pilares da Matemática por sua importância e por ser aplicada naturalmente em todas as subáreas da Matemática, como Análise, Álgebra e Topologia.

"Segundo Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 – 1918): "Um conjunto é qualquer coleção de objetos definidos, distinguíveis, de nossa intuição ou de nosso intelecto, para serem concebidos como um todo. Os objetos são chamados os elementos (membros) do conjunto" [Gilmar Peres Novaes, Introdução à Teoria dos Conjuntos, SBM, 2018]"

Um espaço vetorial é um conjunto, munido de duas operações, satisfazendo certas propriedades. Assim, são espaços vetorias bem conhecidos: o conjunto das n-uplas de números reais, o conjunto das matrizes $n \times n$ de números complexos, o conjunto das funções reais, entre outros; todos munidos com as operações usuais. Porém não é esperado, por exemplo, que um hiperbolóide reunido com um ponto não pertencente a ele, tenha uma estrutura de espaço vetorial.

Este trabalho, além de exibir exemplos interessantes de espaços vetoriais, ainda mostra uma infinidade de possibilidades de um mesmo conjunto ser espaço vetorial com operações não usuais, ou seja, neste trabalho é quantificado as possíveis construções de espaço vetorial, fixado um dado conjunto.

Vale destacar que embora tenhamos realizado um estudo sobre todos os conceitos e resultados pertinentes ao tema, a "beleza" deste trabalho está na construção dos exemplos inéditos de espaços vetoriais. Portanto, a maior parte do texto é inédito, trazendo uma contribuição relevante à área da Álgebra Linear.

Assim, estabelecemos uma conexão entre a Álgebra Linear e a Teoria dos Conjuntos.

Este trabalho será desenvolvido da seguinte forma:

a) no Capítulo 2, exibiremos vários exemplos de bijeções que serão úteis para a construção de exemplos no Capítulo 4, como por exemplo, a Projeção Estereográfica.

b) no Capítulo 3, responderemos a pergunta : **É possível dar a um mesmo conjunto mais do que uma estrutura de Espaço Vetorial?**

c) no Capítulo 4 construiremos vários exemplos inéditos de Espaços Vetoriais.

Para o desenvolvimento deste trabalho usamos as referências [1], [2], [3], [4] e [5] e nos comentários finais a referência [6].

5 Comentários Finais

O resultado principal demonstrado neste trabalho permitiu dar a determinados conjuntos uma estrutura de espaço vetorial. Além disso, como consequência, observou-se que um mesmo conjunto pode ter várias possibilidades de estrutura de espaço vetorial.

Então é natural perguntarmos quantos produtos internos podemos definir num mesmo espaço vetorial. Para ajudar a reflexão sobre isso, podemos consultar o livro [[6], 6.1.4, p.163], onde é provado o seguinte resultado:

Sejam V e W espaços vetoriais sobre o mesmo corpo e seja $\langle\cdot\rangle$ um produto interno em V. Se $T : V \to W$ for uma transformação linear injetora, então podemos definir um produto interno em W da seguinte forma

$$\langle u, v\rangle_T = \langle T(u), T(v)\rangle, \forall u, v \in W.$$

Este resultado nos permite definirmos produtos internos em certos espaços, como por exemplo, o $\mathbb{C}$ - espaço vetorial

$$V = \mathcal{C}\left([0,1]\,; \mathbb{C}\right) = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} : f \text{ é contínua }\},$$

com adição e multiplicação por escalar definidas, respectivamente, por $(f \oplus g)(t) = f(t) + g(t), \forall t \in [0,1]$ e $(\alpha \odot f)(t) = \alpha \cdot f(t), \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall t \in [0,1]$, munido do produto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t) \cdot \overline{g(t)} dt$.

Se

$$\begin{array}{rcl} T : V & \to & V \\ f & \mapsto & T(f) : [0,1] \quad \to \quad \mathbb{C}, \end{array}$$

onde $T(f)(t) = t \cdot f(t), \forall t \in [0,1]$ e $\forall f \in V$, note que T é um operador linear, pois $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ e $\forall f, g \in V$ temos

$$T(\alpha \odot f \oplus g) = \alpha \odot T(f) \oplus T(g).$$

De fato, $T(\alpha \odot f \oplus g)(t) = t \cdot (\alpha \odot f \oplus g)(t) = t \cdot ((\alpha \odot f)(t) + g(t)) = t \cdot (\alpha \cdot f(t) + g(t)) = t \cdot (\alpha \cdot f(t)) + t \cdot g(t) = \alpha \cdot (t \cdot f(t)) + t \cdot g(t) = \alpha \cdot T(f)(t) + T(g)(t) = (\alpha \odot T(f))(t) + T(g)(t) = (\alpha \odot T(f) \oplus T(g))(t), \forall t \in [0,1]$.

Além disso, se $f \in V$ é tal que $T(f) = 0$, ou seja, $0 = T(f)(t) = t \cdot f(t), \forall t \in [0,1]$, segue que $f(t) = 0, \forall t \in\,]0,1]$ e como f é contínua, devemos ter $f(0) = 0$. Portanto, $f = 0$ e T é um operador linear injetor.

Assim, pelo resultado acima

$$\langle f, g\rangle_T = \langle T(f), T(g)\rangle = \int_0^1 t^2 f(t) \cdot \overline{g(t)} dt, \forall f, g \in V$$

define um outro produto interno sobre V.

Referências

[1] HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Álgebra Linear*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo e Polígono, 1970.

[2] CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. *Álgebra Linear e Aplicações*. 6. ed. São Paulo: Editora Atual, 1990.

[3] WALL, C. T. C. *A Geometric Introduction to Topology*. United States of America: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1972.

[4] LIPSCHUTZ, S. *Teoria dos Conjuntos*. São Paulo: McGraw-Hill, 1972.

[5] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[6] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um curso de Álgebra Linear*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.