

Ulcilea Alves Severino Leal

*Otimização Vetorial e Técnicas de Mistura de
Herbicidas Aplicadas ao Controle de Plantas
Daninhas*

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática

Ulcilea Alves Severino Leal¹

*Otimização Vetorial e Técnicas de Mistura de
Herbicidas Aplicadas ao Controle de Plantas
Daninhas*

Orientador:
Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
INSTITUTO DE BIOCIÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS
CÂMPUS DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO

São José do Rio Preto

17 de Fevereiro de 2012

¹ulcilea0803@hotmail.com/gsilva@ibilce.unesp.br

Severino-Leal, Ulcilea Alves.

Otimização Vetorial e Técnicas de Mistura de Herbicidas Aplicadas ao Controle de Plantas Daninhas / Ulcilea Alves Severino Leal - São José do Rio Preto: [s.n.], 2012.

99 f. : 12 il. ; 30 cm.

Orientador: Geraldo Nunes Silva.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.

1. Matemática. 2. Otimização matemática. 3. Controle ótimo. 4. Otimização vetorial. 5. Erva daninha - Controle. I. Silva, Geraldo Nunes. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 517.97

Ulcilea Alves Severino Leal

*Otimização Vetorial e Técnicas de Mistura de Herbicidas Aplicadas ao
Controle de Plantas Daninhas*

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Análise Aplicada, junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva
Professor Adjunto Doutor
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Weldon A. Lodwick
Full Graduate
University of Colorado Denver

Prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira
Professor Doutor
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 17 de Fevereiro de 2012.

À minha família por acreditar e apoiar os meus sonhos,
em especial os meus pais, Wilson e Léa.

Dedico.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus por ter me dado a vida e todas as coisas boas que tem proporcionado.

À minha família, Wilson Carlos e Léa Sílvia, meus pais, Ulisses Antônio, meu irmão, pelo amor, carinho e pelo apoio incondicional.

Ao meu esposo Aguinaldo, que sempre esteve ao meu lado e por todo o carinho e paciência durante esse período.

Ao Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva, meu orientador, pela confiança, atenção, compreensão e dedicação durante a realização deste trabalho.

A todos os meus amigos da Pós-Graduação e todos os professores. Em especial agradeço a Daniella Porto, pelo companheirismo e a Elenice Weber Stiegelmeier, pela atenção e ajuda durante a realização deste trabalho.

À Simone e a Meire, pela ótima convivência durante todo este período.

Ao CNPq, pelo auxílio financeiro.

“Porque eu fazia do amor um cálculo matemático errado: pensava que, somando as compreensões, eu amava. Não sabia que, somando as incompreensões é que se ama verdadeiramente.”

Clarice Lispector

O propósito desta pesquisa é o estudo de dois modelos de otimização dinâmica para a aplicação seletiva de herbicida, sendo um modelo de otimização multi-objetivo, no qual maximiza o lucro e minimiza a resistência, e outro mono-objetivo da otimização da concentração de mistura de herbicidas, no sistema anual de colheita da cultura do milho para o período de 5 e 10 anos. A densidade de sementes no solo no início do plantio e a frequência de alelos são tomados como variáveis de estado. A variável de controle é expressa na função de dose-resposta. Os modelos de otimização levam em consideração a diminuição da eficiência do herbicida ao longo do tempo, causada pela evolução da resistência da planta daninha. O objetivo é maximizar o lucro num período pré-determinado e minimizar a evolução da resistência. O problema de otimização dinâmica multi-objetivo foi resolvido via abordagem ϵ -restrito. O problema resultante e o problema de otimização da concentração de misturas de herbicidas foram resolvidos por programação não-linear via o método ASA_CG. Para os dois casos estudados, os resultados das simulações numéricas apresentam uma estratégia ótima da aplicação de herbicidas, para controlar a infestação causada pela planta daninha *Bidens subalternans*.

Palavras-chave: otimização multi-objetivo, controle ótimo, controle de plantas daninhas, resistências de plantas daninhas

ABSTRACT

The purpose of this research is the study of two dynamic optimization models for the selective application/mixture of herbicide in the annual system of corn crop harvest for period of 5 and 10 years. The density of seeds at the beginning of the planting and allele frequency are taken as state variables. The control variable is given by the dose-response function. The optimization models take into account the decreased efficiency of the herbicide over time caused by the evolution of weed resistance. The goal is to maximize profit in a predetermined period and minimize the resistance evolution. The dynamic optimization problem of multi-objective approach was solved by the ϵ -constraint method. The resulting problem and the problem of dynamic optimization of the concentration of the herbicide mixture were solved by non-linear programming with the conjugate gradient method combined with the method of projected gradient. Results of numerical simulations provide an optimal strategy of selective application of herbicides to control weed infestation by the *Bidens subalternans*. Two models studied, the first considers only one herbicide and the second considers the application of two herbicides.

Keywords: multi-objective optimization, optimal control, weed control, weed resistance

LISTA DE FIGURAS

1	Frequência de alelos resistentes (Fonte: Christoffoleti et al. (2004)).	p. 20
2	Mapeamento feito pela função $f(\cdot)$ (Fonte: Takahashi (2007)).	p. 36
3	Conceito de dominância (Fonte: Takahashi (2007)).	p. 38
4	O conjunto Pareto \mathcal{Y}^* (Fonte: Takahashi (2007)).	p. 39
5	Conjunto de Pareto-ótimo para 5 anos.	p. 75
6	Conjunto de Pareto-ótimo para 10 anos.	p. 75
7	Resultados da otimização multicritérios para o horizonte de 5 anos.	p. 77
8	Resultados da otimização multicritérios para o horizonte de 10 anos.	p. 78
9	Resultados da otimização mistura de herbicidas para um horizonte de 5 anos.	p. 87
10	Lucro no 5º ano.	p. 88
11	Resultados da otimização mistura de herbicidas para um horizonte de 10 anos.	p. 89
12	Lucro no 10º ano.	p. 89

LISTA DE TABELAS

1	Definição dos parâmetros e variáveis relacionados a frequência dos alelos	p. 64
2	Definição dos parâmetros e variáveis do modelo populacional	p. 65
3	Definição dos parâmetros e variáveis do modelo econômico	p. 68
4	Análise dos resultados	p. 78
5	Valores dos parâmetros usados na simulação numérica	p. 79
6	Análise dos resultados	p. 88
7	Valores dos parâmetros usados na simulação numérica	p. 90

1	Introdução	p. 14
1.1	Objetivo	p. 14
1.2	Organização do trabalho	p. 15
2	Plantas Daninhas	p. 16
2.1	Controle de plantas daninhas	p. 16
2.2	Resistência da planta daninha ao herbicida	p. 18
2.3	A modelagem matemática para o controle de plantas daninhas	p. 21
2.3.1	Modelos matemáticos de evolução da resistência	p. 24
3	Programação Matemática	p. 26
3.1	Programação não-linear	p. 26
3.1.1	Métodos clássicos	p. 28
3.1.2	Método ASA_CG	p. 32
3.1.3	Programação não-linear restrita	p. 32
3.2	Método de penalidade	p. 34
4	Otimização Multi-Objetivo	p. 35
4.1	O problema de otimização multi-objetivo	p. 35

4.2	Ordenamento de soluções	p. 37
4.3	Conjunto de Pareto-ótimo	p. 38
4.4	Solução utópica	p. 39
4.5	Condições de otimalidade	p. 40
4.6	Técnica para a otimização multi-objetivo	p. 42
4.6.1	Problema ponderado	p. 43
4.6.2	Problema ϵ -restrito	p. 44
4.6.3	Problema híbrido: ponderando e restringindo	p. 46
5	Controle Ótimo	p. 48
5.1	Teoria de controle ótimo: caso contínuo	p. 48
5.1.1	O Princípio do máximo para o caso contínuo	p. 51
5.2	Teoria de controle ótimo: caso discreto	p. 53
5.2.1	O Princípio do máximo para o caso discreto	p. 54
5.3	Solução numérica do problema de controle ótimo	p. 57
6	A Descrição do Problema de Controle de Planta Daninha	p. 60
6.1	O modelo de dose-resposta	p. 61
6.1.1	Evolução da resistência ao herbicida	p. 61
6.2	Frequência dos alelos	p. 62
6.3	Modelo populacional de plantas daninhas	p. 64
6.3.1	Resistência ao herbicida e frequência dos alelos	p. 65
6.4	A função de produção e a função lucro	p. 67
7	Otimização Dinâmica Multi-objetivo da Aplicação de Herbicida	p. 69
7.1	Formulação do problema de otimização multi-objetivo	p. 69
7.2	Resultados de simulação	p. 73

8	Otimização da Concentração de Mistura de Herbicidas	p. 80
8.1	Formulação do problema de otimização da concentração de mistura . . .	p. 80
8.2	Resultados de simulação	p. 84
9	Considerações Finais	p. 91
10	Trabalhos Futuros	p. 93
	Referências Bibliográficas	p. 94

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

As plantas daninhas interferem na agricultura causando preocupações e danos econômicos. Segundo Lorenzi (2000) 30 a 40% da redução da produção agrícola no mundo tropical é atribuída à interferência de plantas daninhas. Além desses prejuízos diretos, a presença das plantas daninhas reduz a eficiência agrícola aumentando os custos de produção.

Nos últimos anos, o controle de plantas daninhas, tem sido realizado basicamente pelo uso de herbicidas. Um fato importante é a existência de plantas daninhas resistentes a herbicidas, a evolução desta resistência em uma área depende da pressão de seleção, da variabilidade genética da espécie, do número de genes envolvidos, do fluxo gênico e da dispersão de propágulos.

Observa-se a seleção de certas populações de plantas daninhas a partir de biótipos resistentes a alguns herbicidas (CHRISTOFFOLETI, 2008). Porém, o uso intensivo de produtos químicos com o mesmo mecanismo de ação no controle de plantas daninhas gera espécies resistentes a determinado herbicida.

Assim, as perdas aliadas ao custo de controle e o retardo no acréscimo da resistência das plantas daninhas a um determinado herbicida, motivam o desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Objetivo

O objetivo principal deste trabalho é estudar dois modelos de otimização dinâmica que consideram a evolução da resistência através do uso de herbicida, buscando-se maximizar

o lucro num período pré-determinado de tempo e minimizar a evolução da resistência aos herbicidas. Os modelos estudados são: (1) modelo de otimização dinâmica multi-objetivo, que busca maximizar o lucro e minimizar o acréscimo da resistência, simultaneamente; (2) modelo de otimização dinâmica da concentração de mistura de herbicidas, que busca maximizar o lucro e através da técnica de mistura de herbicidas, retardar a evolução da resistência. Com isso, obtém-se uma melhor utilização do produto químico e, conseqüentemente, geram-se benefícios ao meio ambiente.

1.2 Organização do trabalho

O presente texto está dividido em 10 capítulos. O capítulo 2, seguinte a esta introdução, apresenta um breve conceito sobre os temas relevantes relacionados as plantas daninhas. No capítulo 3 apresenta-se uma introdução sobre programação não-linear. O capítulo 4 introduz a teoria de otimização multi-objetivo utilizada, onde são descritas definições, teoremas e algumas abordagens para a obtenção do conjunto de solução para estes problemas. O capítulo 5 introduz a teoria de controle utilizada, descreve os casos de controle ótimo contínuo e discreto para problemas com restrição de estado e é feita uma abordagem sobre a obtenção da solução numérica para problemas de controle ótimo utilizando programação não-linear. O capítulo 6 descreve o modelo populacional de plantas daninhas considerando a resistência aos herbicidas. O capítulo 7 apresenta a formulação do problema de otimização multi-objetivo ligado a produção de uma lavoura de milho e ao controle da planta daninha, o qual é otimizado utilizando os conceitos de teoria multi-objetivo, da teoria de controle ótimo, e os resultados numéricos obtidos utilizando programação não-linear. O capítulo 8 apresenta a formulação do problema de otimização utilizando-se mistura de herbicidas ligados a produção de uma lavoura de milho e ao controle de plantas daninhas, o qual é otimizado utilizando o conceito da teoria de controle ótimo, e os resultados numéricos obtidos utilizando programação não-linear. O capítulo 9 apresenta as considerações obtidas através dos dois modelos estudados, no presente trabalho. E finalmente, no capítulo 10 é apresentada proposta para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

PLANTAS DANINHAS

A crescente demanda por alimentos devido ao crescimento da população, principalmente urbana, acarreta a necessidade de grande acréscimo na produção de alimentos. Assim, acabam por revelar que a única alternativa para atender as demandas da sociedade moderna é o acréscimo significativo no rendimento por área. Esse acréscimo só é possível com a incorporação de tecnologias que permitam otimizar a produção e minimizar os custos, respeitando os aspectos básicos da sustentabilidade.

Diante desse contexto o sistema de produção agrícola se torna a cada dia mais complexo e profissional em virtude da adoção de novas tecnologias e técnicas para entender e melhor utilizar os recursos naturais na produção de alimentos. Um problema nos sistemas de produção tecnificados, que adotam os herbicidas como uma das principais ferramentas no manejo de plantas daninhas, é a ocorrência de biótipos resistentes, em função das pressões de seleção causada pelo herbicida.

2.1 Controle de plantas daninhas

A infestação por plantas daninhas é considerada um grande problema na agricultura moderna, pois, gera perdas em diversos níveis e por esse motivo busca-se controlá-la. As perdas de rendimento devido à interferência de plantas daninhas variam entre 10% a 80% na cultura do milho, de acordo com as espécies daninhas envolvidas, com o número de plantas por área e outros fatores. O controle inadequado de plantas daninhas é um dos principais fatores relacionados ao baixo rendimento das culturas.

As plantas daninhas competem com as culturas reduzindo o rendimento de grãos, o que causa aumento nos custos de produção e, conseqüentemente, diminui a renda do produtor. Outro aspecto importante é a sua grande capacidade de sobrevivência, diminuindo ou impedindo que plantas cultivadas tenham acesso aos recursos ambientais (nitrogênio, CO_2 , H_2O e luz). Assim, utiliza-se os métodos de controle e as práticas culturais de forma a aumentar as chances da cultura superar a planta daninha na competição por recursos.

O controle consiste em reduzir o número de plantas daninhas por área, até níveis aceitáveis para convivência com as espécies envolvidas, sem prejuízos para elas. A redução da interferência da planta daninha deve ser feita até o nível no qual as perdas pela interferência sejam iguais ao incremento no custo com o controle, ou seja, de modo que não interfiram na produção econômica da cultura (SILVA; PIRES, 1990).

Existem várias técnicas de controle de plantas daninhas, tais como: preventivo, cultura, mecânico, químico e biológico. A principal técnica utilizada para esse controle em sistemas de produção tecnificados é a aplicação de defensivos químicos, ou seja, aplicação de herbicidas. O uso de herbicidas é fundamental para o manejo de plantas daninhas, principalmente em locais que ocorrem altas infestações e o tempo disponível para o controle é reduzido, devido o tamanho da área ou a falta de equipamentos com elevado desempenho. Em grandes lavouras o controle químico aparece como o único método viável, devido à agilidade e à eficiência em condições de solo úmido (VARGAS; PEIXOTO; ROMAN, 2006).

Existem três conceitos importantes a considerar quando se avalia o controle de plantas daninhas pela aplicação de herbicidas, apresentados a seguir segundo definições de Vargas e Roman (2006).

- Planta sensível a um herbicida é quando o crescimento e desenvolvimento são alterados pela ação do produto, essa alteração pode promover a morte dessa planta quando esta é submetida a determinada dose do herbicida.
- Planta tolerante é a capacidade natural de algumas espécies em sobreviver e se reproduzir após o tratamento com herbicida, mesmo sofrendo injúrias. Essa característica se relaciona com a variabilidade genética natural da espécie.
- Planta resistente é a capacidade adquirida da planta em sobreviver a determinada dose de um herbicida que, em condições normais, controla os demais integrantes da

população.

2.2 Resistência da planta daninha ao herbicida

A Weed Science Society of America (WSSA) definiu resistência de plantas daninhas aos herbicidas como a habilidade de uma planta sobreviver e reproduzir, após exposição a uma dose de herbicida normalmente letal para o biótipo selvagem da planta (CHRISTOFFOLETI, 2008). Assim, a característica de resistência aos herbicidas de uma planta pode ser de ocorrência natural (selecionada em populações de plantas daninhas de ocorrência natural no campo) ou induzida por técnicas como engenharia genética ou seleção de variantes produzidas por culturas de tecidos ou mutagenesis.

A primeira constatação de resistência de plantas daninhas aos herbicidas ocorreu em 1957, com a identificação de biótipos de *Commelina diffusa* resistentes aos herbicidas pertencentes ao grupo das auxinas, nos Estados Unidos (WEEDSCIENCE, 2011). Atualmente são relatados aproximadamente 300 biótipos de plantas daninhas que apresentam resistência a um ou mais mecanismos de ação. O maior número de biótipos resistentes surge para alguns mecanismos de ação, como os grupos das triazinas e inibidores da acetolactato sintase (ALS), devido às altas especificidades e à eficiência destes e, também, ao fato de serem empregados em grandes áreas. Em função disso e por serem amplamente adotados no cultivo de milho no Brasil foram os grupos escolhidos para esse estudo.

Segundo Vidal e Fleck (1997a) o risco de encontrar uma área infestada com biótipos de plantas daninhas resistentes aos herbicidas depende de dois aspectos:

1. Probabilidade de seleção de um mutante resistente a certo mecanismo de ação herbicida e
2. Probabilidade de infestação da área com plantas resistentes a partir daquele mutante selecionado.

Os fatores que determinam a probabilidade de encontrar mutante resistente aos herbicidas com determinado mecanismo de ação, podem ser agrupados em três categorias:

1. Relacionados à genética da resistência;
2. Número de plantas daninhas sob seleção;
3. Herbicida.

O fator relacionado à genética da resistência e provavelmente, o fator de risco mais importante para a ocorrência de plantas daninhas resistentes aos herbicidas, é a frequência inicial do alelo de resistência.

Segundo Holst, Rasmussen e Bastiaans (2007) a resistência não é induzida pelo herbicida mas ocorre naturalmente devido a seleção de indivíduos em populações com variabilidade genética.

O aparecimento de biótipo de plantas daninhas resistentes aos herbicidas está condicionado a uma mudança genética na população, imposta pela pressão de seleção, causada pela aplicação repetitiva do herbicida na dose recomendada (CHRISTOFFOLETI, 2008).

De acordo com Christoffoleti (2008), qualquer população em que os indivíduos mostram uma base genética variável quanto à tolerância a uma medida de controle, irá com o tempo, mudar sua composição populacional como mecanismo de fuga para sobrevivência, diminuindo a sensibilidade a esta medida de controle.

O uso intensivo de herbicidas é uma das maiores causas da pressão de seleção, proporcionando os fenômenos de mudança de espécies na área e resistência de plantas daninhas aos herbicidas, devido à eficácia e controle seletivo. Assim, a escolha do herbicida, o sistema de cultivo, a escolha da cultura, as práticas culturais, as mudanças climáticas e a introdução de novas espécies podem ser incluídos como as maiores forças seletivas (CHRISTOFFOLETI; OVEJERO; CARVALHO, 2004).

A ocorrência de mutações genéticas na planta daninha pode desenvolver resistência ao herbicida. Essas ocorrem ao acaso e quase não são frequentes, podem ocorrer antes ou após a aplicação do herbicida e não há evidências de que as mutações sejam induzidas pelos defensivos químicos. Atualmente, esse mecanismo é pouco considerado.

Outro fator, amplamente aceito como explicação do desenvolvimento da resistência é a seleção natural. Assim, biótipos resistentes aos herbicidas sempre estão presentes em baixa frequência em determinada espécie de planta daninha. Quando o herbicida é aplicado, o mesmo atua como agente de pressão de seleção, as plantas suscetíveis são mortas e as plantas resistentes sobrevivem e se reproduzem sem competição das plantas suscetíveis (CHRISTOFFOLETI, 2008).

Entre os fatores genéticos que interagem no desenvolvimento da resistência, um dos principais é a frequência inicial do genoma resistente aos herbicidas. Segundo Vidal e Fleck (1997a) quanto maior a frequência inicial do biótipo resistente, maior a probabilidade de aumentar a proporção de indivíduos resistentes na população, em menor período de tempo,

com aplicações sucessivas do herbicida selecionador (ver Figura 2.2).

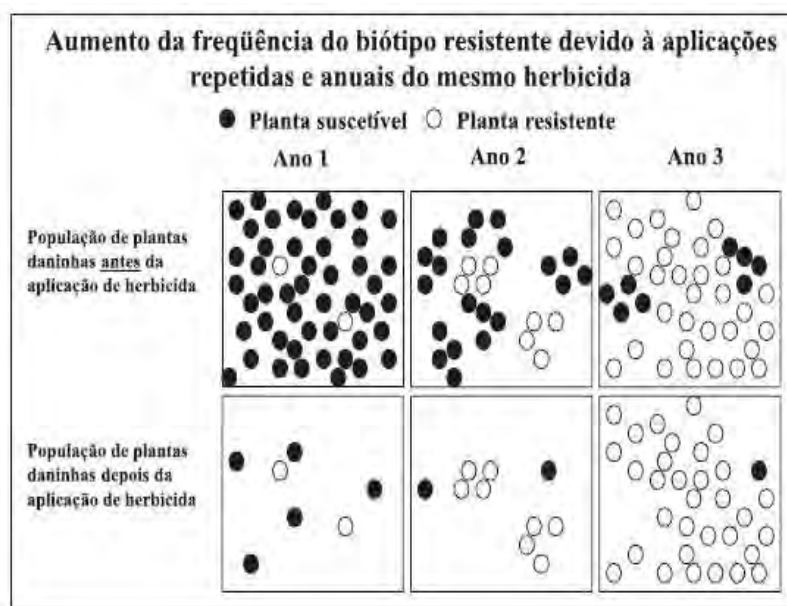


Figura 1: Frequência de alelos resistentes (Fonte: Christoffoleti et al. (2004)).

Outra característica determinante no desenvolvimento da resistência é a adaptação ecológica, na qual, biótipos mais adaptados são normalmente mais competitivos e capazes de aumentar sua proporção ao longo do tempo, eliminando os indivíduos menos adaptados ou competitivos (CHRISTOFFOLETI; OVEJERO; CARVALHO, 2004).

As características bioecológicas das plantas daninhas que conduzem a um rápido desenvolvimento da resistência são: ciclo de vida curto, elevada produção de sementes, baixa dormência da semente, várias gerações reprodutivas por ano, extrema suscetibilidade a um determinado herbicida e grande diversidade genética (CHRISTOFFOLETI; FILHO; SILVA, 1994; VIDAL; FLECK, 1997a; VARGAS; PEIXOTO; ROMAN, 2006)

Algumas das características que não favorecem o desenvolvimento da resistência são: plantas daninhas de ciclo de vida longo, pressão de seleção incompleta pelos herbicidas, baixa adaptabilidade ecológica dos biótipos resistentes, dormência prolongada das sementes no solo, plantas daninhas perenes com tecidos de reprodução vegetativa (CHRISTOFFOLETI; FILHO, 1994).

Quanto maior for o período de dormência das sementes das plantas daninhas, maior será o tempo necessário para esgotar o banco de sementes do biótipo suscetível no solo, mesmo que haja pressão de seleção muito forte. Portanto, a manutenção e o manejo de um banco de sementes diversificado no solo podem retardar o aparecimento de biótipos

de plantas resistentes a um determinado herbicida, mantendo-se baixa a frequência desse biótipo, por um tempo maior.

A resistência de biótipos de plantas daninhas aos herbicidas ocorre devido ao uso do mesmo herbicida ou de herbicidas com o mesmo mecanismo de ação. Buscando modificar essas práticas de modo a prevenir ou retardar o estabelecimento da resistência em alguns biótipos de plantas daninhas, algumas práticas recomendadas são:

1. Adequação da dose de herbicida;
2. A mistura de herbicidas;
3. A rotação de herbicidas;
4. A rotação de cultura.

Segundo Vidal e Fleck (1997b) a rotação de herbicidas de diferentes mecanismos de ação ou mistura de herbicidas diferentes, é prioritária para evitar novos focos de plantas resistentes na área.

O uso de misturas de herbicidas para manejo e prevenção da resistência está baseado no fato de que os ingredientes ativos controlam eficientemente os dois biótipos da mesma espécie, ou seja, o biótipo resistente a um dos herbicidas é controlado pelo outro ingrediente ativo da mistura (POWLES; HOLTUM, 1994).

Uma alternativa eficiente para reduzir os casos de resistência é a alternância de princípios ativos adotados em uma mesma área. Entretanto, o número de ingredientes ativos disponíveis para controle de algumas espécies daninhas é restrito, e o desenvolvimento de novas moléculas é cada vez mais difícil e oneroso. Nesse contexto outra opção passível de adoção é a utilização de misturas com produtos de diferentes modos de ação.

2.3 A modelagem matemática para o controle de plantas daninhas

A infestação de plantas daninhas é considerado um grande problema na agricultura moderna, pois geram perdas em vários níveis. O processo de aplicação de herbicida para controlar plantas daninhas gera custos significativos aos produtores. Afim de obter a melhor forma de controle, e uma vez que, resultados práticos podem ser demorados e

onerosos, devido ao período de cada cultura, têm-se utilizado modelos matemáticos para descrever tais situações.

Os ensaios biológicos de pesquisas científicas mais comuns sobre plantas daninhas são os de medir e comparar a resposta das plantas daninhas e as culturas a agentes químicos, físicos, biológicos, ou estímulos temporais. Entretanto, muitas vezes ensaios biológicos requerem o uso de modelos de regressão não-linear com limites superior e inferior, que fornecem informações sobre a dose necessária para controlar as espécies de interesse (STEVAN; STREIBIG; RITZ, 2007). Para obter a função dose-resposta, existem vários modelos, tais como: Gompertz, Von Bertalanffy, e a família Morgan-Mercer-Flodin (SEBER; WILD, 1986) porém, o mais utilizado pelos pesquisadores em ciência das plantas daninhas é o modelo log-logístico proposto por Seefeldt, Jensen e Fuerst (1995).

O modelo log-logístico tem sido amplamente utilizado para expressar dose-resposta nas mais diversas combinações de herbicidas. De acordo com Seefeldt, Jensen e Fuerst (1995), o modelo log-logístico deve ser considerado uma técnica padrão para a análise das relações de dose-resposta envolvendo sinergismo, antagonismo, seletividade e resistência. Vários autores têm utilizado e recomendado a curva de dose-resposta para determinar a suscetibilidade ou resistência de plantas daninhas aos herbicidas aplicados em diferentes culturas (STREIBIG; KUDSK, 1993; LACERDA; FILHO, 2004; KIM et al., 2006; HAAGE et al., 2007; SMITH et al., 2008; MEROTTO et al., 2009) e (STIEGELMEIER et al., 2010).

Modelos matemáticos que descrevem infestações de plantas daninhas, crescimento populacional e aplicação de defensivos, servem para fornecer informações sobre a biologia da planta e possibilitar o desenvolvimento de estratégias de controle (MORTIMER et al., 1980; DOYLE, 1991). Jones e Cacho (2000) e Jones (2005) apresentam modelos de otimização que buscam diminuir os custos num sistema de colheita. Esses trabalhos traçam estratégias de controle da infestação para um período de T anos, utilizando modelos populacionais dinâmicos e modelos dinâmicos de otimização.

Em Jones e Cacho (2000) encontra-se uma apresentação interessante sobre os modelos estáticos e dinâmicos, algumas características desses modelos são:

1. Modelos estáticos são aplicados quando procura-se maximizar o lucro de um investimento levando em consideração apenas o ano corrente. Assim, o objetivo do produtor é determinar a dose de herbicida que maximize, dentro de um único período, o seu lucro de produção.
2. Modelos dinâmicos são aplicados quando procura-se maximizar o lucro de um inves-

timento levando em consideração um período pré-determinado de tempo. Assim, o objetivo do produtor é determinar de que maneira, e em qual intensidade o banco de sementes, de cada estação ou ano, é alterado com a aplicação do controle, visando utilizar economicamente a melhor forma possível do herbicida e, conseqüentemente, maximizar seu lucro num período pré-determinado de tempo.

Pesquisas relacionadas aos modelos matemáticos que descrevem as infestações por plantas daninhas devem considerar alguns aspectos relevantes como a disseminação e expansão da planta, que muitas vezes são deixados de lado pelos modeladores e esses fatores de proliferação da planta são importantes do ponto de vista de prevenção das infestações.

Os modelos de manejo de plantas daninhas basicamente são feitos a partir da relação entre a densidade de plantas daninhas e as perdas de rendimento, da quantidade necessária de controle para conter a infestação ou erradicar totalmente as plantas daninhas, e do grau de infestação das plantas daninhas, para o qual medidas de controle são justificáveis (MORTIMER, 1987; DOYLE, 1991).

Visando alcançar uma maior amplitude do assunto é interessante adicionar outras questões, como é possível usar herbicidas de forma mais seletiva a ponto de manter viável economicamente o controle da planta daninha, de que forma pode ser utilizado técnicas de controles físicos e biológicos afim de minimizar os impactos ambientais causados pelos herbicidas e quais são os riscos econômicos assumidos ao utilizar controles físicos e biológicos (DOYLE, 1997).

Foram desenvolvidos modelos matemáticos para a dinâmica populacional da planta daninha, visando gerar mecanismo de controle, os quais possibilitam entender como esta se relaciona com o meio, de que forma compete com a plantação (PARK; BENJAMIN; WATKINSON, 2002), qual o seu comportamento quando se tenta controlar a infestação, qual a probabilidade e a taxa de evolução da resistência a herbicidas (MAXWELL; ROUSH; RADOSEVICH, 1990; DIGGLE; NEVE; SMITH, 2003) e quais as formas de atacar o problema de infestação.

Buscando reduzir as perdas de rendimento causadas pela competição da planta daninha com a lavoura (COUSENS, 1985a), perdas estas que chegam a inviabilizar o plantio, diversas formas de controle foram desenvolvidas para maximizar os lucros em uma determinada estação ou ano e, conseqüentemente, diminuir os custos em um sistema de colheita (AULD; TISDELL, 1987; CACHO, 1998; JONES; CACHO, 2000; JONES; CACHO; SINDEN,

2006).

Modelos matemáticos podem ser instrumentos úteis para entender, prever e simular os impactos causados pela interferência das plantas daninhas em uma certa cultura (LOTZ et al., 1996). Modelos de programação dinâmica determinística, dinâmica populacional de plantas daninhas e discussões sobre modelagem matemática podem ser encontrados em Odom et al. (2003), Sakai (2001) e Doyle (1997).

Os modelos dinâmicos indicam que a infestação não depende apenas da densidade de plantas daninhas mas, também, da produção de sementes e competitividade das espécies (PARK; BENJAMIN; WATKINSON, 2002; FIRBANK; WATKINSON, 1985). Usando um modelo hiperbólico, Cousens (1985b) descreve a perda de rendimento causada pela competição de plantas daninhas em uma cultura.

2.3.1 Modelos matemáticos de evolução da resistência

Na busca para desenvolver modelos matemáticos diversas tentativas têm sido feitas, visando interagir processos genéticos, fisiológicos e ecológicos na evolução de populações de plantas daninhas resistentes aos herbicidas (GRESSEL; SEGEL, 1990). O modelo apresentado por Gressel e Segel (1990) estima o aumento na proporção de plantas resistentes relacionado com o tempo baseado nos seguintes aspectos: frequência inicial de um genótipo resistente, pressão de seleção imposta pelo herbicida, adaptação ecológica relativa do biótipo resistente comparado à do suscetível na ausência de herbicida e longevidade do banco de sementes no solo.

O modelo proposto por Maxwell, Roush e Radosevich (1990) enfatiza a importância dos principais processos que determinam a dinâmica da resistência de plantas daninhas aos herbicidas. Destacam a sobrevivência e a fecundidade, ambas influenciadas pela competição entre plantas e que afetam a adaptação de biótipos resistentes relativamente ao biótipo suscetível, e em seguida, os processos que contribuem para o fluxo de genes no espaço e no tempo e que alteram a frequência de alelos resistentes e suscetível em uma população. Ambos os modelos concluem que a pressão de seleção deve ser reduzida para prevenir o desenvolvimento da resistência. No entanto, os dois modelos diferem nas estratégias propostas para alcançar os objetivos finais.

Segundo Diggle, Neve e Smith (2003) a probabilidade e a taxa de evolução da resistência ao herbicida depende da interação entre a dinâmica populacional e a genética populacional das plantas daninhas.

A detecção de biótipos resistentes aos herbicidas a partir de um modelo de evolução da resistência foi dado por Stiegelmeier et al. (2010), o qual foi inspirado na detecção de casos de resistência de plantas daninhas aos herbicidas (MOSS, 1999; SEEFELDT; JENSEN; FUERST, 1995) e também na evolução genética da resistência. Stiegelmeier et al. (2010) representa o comportamento da evolução da resistência da seguinte forma: modela o fator GR_{50} , que é utilizado para descrever a eficiência do herbicida, como uma função dos biótipos resistentes e suscetíveis, ou seja, eles incorporam o comportamento da evolução da resistência na função dose-resposta.

Visando retardar o aumento da resistência da planta daninha a determinado herbicida, Stiegelmeier (2012) propõe a rotação de herbicida para um determinado período de tempo e, com isso, ter uma maior eficácia no controle de plantas daninhas e uma melhor utilização do herbicida.

A mistura de herbicidas também tem sido proposta como estratégia para prevenir ou retardar a evolução da resistência (WRUBEL; GRESSEL, 1994), utilizam-se dois ou mais herbicidas, com diferentes mecanismos de ação, que reduzem a pressão de seleção do genótipo resistente.

Na busca de retardar a evolução da resistência de planta daninha a determinados herbicidas, o presente trabalho utiliza duas técnicas, que são: a minimização da resistência no tempo final e a mistura de herbicidas.

CAPÍTULO 3

PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

Este capítulo apresenta um breve resumo composto por: definições, condições de otimalidade e alguns métodos clássicos usados na resolução de problemas sobre programação não-linear irrestrita e restrita. O objetivo é utilizar estes conceitos no problema de controle de planta daninha.

3.1 Programação não-linear

A programação matemática envolve problemas de otimização cuja solução é composta de um número finito de valores reais que satisfazem as restrições e minimize o objetivo do problema. Entre eles estão os problemas de programação linear, programação não-linear e programação inteira. No presente trabalho será dado enfoque apenas aos problemas de programação não-linear.

Considere o seguinte problema não-linear geral:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{sujeito a:} \quad & \\ & x \in \mathcal{F}_x, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a função objetivo, e $\mathcal{F}_x \subseteq \mathbb{R}^n$ é a região factível do problema. Problemas como o apresentado acima possuem dois tipos de soluções.

Definição 1. Um ponto $x^* \in \mathcal{F}_x$ é um minimizador local de f em \mathcal{F}_x se e somente se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \geq f(x^*)$ para todo $x \in \mathcal{F}_x$ tal que $\|x - x^*\| < \varepsilon$.

Definição 2. Um ponto $x^* \in \mathcal{F}_x$ é um minimizador global de f em \mathcal{F}_x se e somente se $f(x) \geq f(x^*)$ para todo $x \in \mathcal{F}_x$.

Nas definições (1) e (2), se as desigualdades forem estritas, temos minimizador local estrito e minimizador global estrito, respectivamente. Quando a região factível é o \mathbb{R}^n , temos que (3.1) é chamado *problema de minimização irrestrita*.

As condições de otimalidade necessária de primeira e segunda ordem para problemas irrestritos, seguem dos seguintes resultados:

Proposição 1. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$. Se x^* é um minimizador local de f em \mathbb{R}^n , então $\nabla f(x^*) = 0$.

Proposição 2. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$. Se x^* é um minimizador local de f em \mathbb{R}^n , então

1. $\nabla f(x^*) = 0$;
2. $\nabla^2 f(x^*)$ é semidefinida positiva.

O resultado abaixo apresenta uma condição suficiente de segunda ordem para a otimalidade do problema.

Proposição 3. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2$. Se $x^* \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(x^*) = 0$, e $\nabla^2 f(x^*) > 0$, então x^* é um minimizador local estrito de f em \mathbb{R}^n .

As proposições (2) e (3) caracterizam minimizadores locais, para que um minimizador local seja também global não é uma tarefa fácil, a não ser que a função objetivo possua características especiais, como a de função convexa.

Proposição 4. Sejam $f \in C^2$ e $\mathcal{F}_x \subset \mathbb{R}^n$ convexo tal que $\text{int}(\mathcal{F}_x)$ não é vazio. Então, f é convexa se e somente se $\nabla^2 f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{F}_x$.

1. O conjunto $\Gamma \subset \mathcal{F}_x$ onde f toma seu valor mínimo é convexo;
2. Qualquer minimizador local de f é um minimizador global de f .

Proposição 5. Seja $f \in C^1$ convexa definida em \mathcal{F}_x convexo. Se existe $x^* \in \mathcal{F}_x$ tal que para todo $y \in \mathcal{F}_x$ se verifica que

$$\nabla^T f(x^*)(y - x^*) \geq 0,$$

então x^* é um minimizador global de f em \mathcal{F}_x .

As provas das proposições podem ser encontradas em Luenberger (1986).

Dado um problema como (3.1) o objetivo é obter seu minimizador. A obtenção analítica deste minimizador pode ser uma tarefa bastante difícil devido a complexidade do problema em questão, pois muitos problemas de otimização são construídos a partir de casos reais. Assim, métodos numéricos foram desenvolvidos com o objetivo de obter tal minimizador, alguns métodos podem ser encontrados em Luenberger (1986) e Bertsekas (1999). Em seguida, apresentaremos alguns métodos clássicos utilizados para tal propósito.

3.1.1 Métodos clássicos

Considere-se, a classe de métodos iterativos que possuem a seguinte forma:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

onde d^k e α^k são chamados de direção de busca e tamanho do passo, respectivamente, devendo ser satisfeito $\alpha^k \geq 0$. A cada iteração k , a direção de busca d^k é escolhida de modo que:

$$\nabla f(x^k)^T d^k < 0 \quad (3.3)$$

para $\nabla f(x^k) \neq 0$, uma vez que para, $\nabla f(x^k) = 0$, o método para, pois a condição necessária de primeira ordem é satisfeita. As diferentes escolhas para a direção d^k , satisfazendo (3.3), dão origem aos diversos métodos de otimização irrestrita. Além disso, α^k deve ser escolhido a cada iteração, ou seja, além de definir em que direção andar, deve-se também saber o quanto andar, de modo a garantir que haja convergência e que seja acelerada (BERTSEKAS, 1999).

1. Método do Gradiente

Apresentado em 1847 por M. Augustin Cauchy, este método é de implementação fácil porém de convergência lenta quando comparado com os demais. Foi motivado pela necessidade de se obter uma aproximação inicial para a solução do problema.

Este método consiste em escolher d^k na direção de $-\nabla f(x^k)$, assim, temos que (3.2) é dada por:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Neste caso, a direção de busca para o cálculo do ponto atual é sempre a direção do

vetor gradiente, no sentido oposto, calculado no ponto anterior. Entretanto, essa direção é sempre ortogonal à direção que leva ao mínimo da função objetivo, fazendo com que ocorra o comportamento conhecido como *zig-zagging*, que resulta no lento progresso do algoritmo.

2. Método de Newton

O método de Newton foi desenvolvido com o propósito de obter a raiz de uma equação $g(x) = 0$. Desse modo, pode-se utilizá-lo para encontrar x^* tal que $\nabla f(x^*) = 0$, e assim a condição necessária de primeira ordem seja satisfeita.

A forma geral deste método é:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k (\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ou seja, define $d^k = -(\nabla^2 f(x^k))^{-1} \nabla f(x^k)$.

Em sua forma original, conhecida como a forma pura, temos $\alpha^k = 1$. Nesse caso, a cada iteração, o método encontra o mínimo global de uma função quadrática positiva definida por

$$f^k(x) = f(x^k) + \nabla f(x^k)^T (x - x^k) + \frac{1}{2} (x - x^k)^T \nabla^2 f(x^k) (x - x^k),$$

a qual aproxima a função de custo $f(x^k)$ do problema original.

De um modo geral, o método possui rápida convergência e não apresenta o comportamento *zig-zagging* citado anteriormente. Entretanto sua implementação é um tanto complicada e exige o cálculo de derivadas de segunda ordem.

3. Método Quasi-Newton

Os Métodos Quasi-Newton são métodos do gradiente, esses são uma subclasse de métodos em que a direção é escolhida de modo a aproximar da direção do método de Newton, no qual a forma geral desses métodos são:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k H_k \nabla f(x^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ou seja, define $d^k = -H_k \nabla f(x^k)$ e α^k é escolhido de forma que minimize $f(x^{k+1})$. No qual, $H_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz definida positiva, que precisa ser ajustada de uma iteração para a outra, de modo que a direção d^k tende a se aproximar da direção de Newton. Desse modo, o método evita o cálculo de derivadas de segunda ordem ao custo da necessidade de armazenamento das matrizes H_k .

Uma idéia importante para muitos métodos Quasi-Newton é que duas iterações sucessivas, x^k e x^{k+1} , junto com os seus correspondentes gradientes, $\nabla f(x^k)$ e $\nabla f(x^{k+1})$, produzem informações de curvatura por meio da relação de aproximação:

$$q^k \approx \nabla^2 f(x^{k+1})p^k,$$

no qual

$$\begin{aligned} p^k &= x^{k+1} - x^k, \\ q^k &= \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k). \end{aligned}$$

Em particular, dado n iterações dos incrementos, p^0, \dots, p^{n-1} , linearmente independentes junto com os incrementos correspondentes dos gradientes, q^0, \dots, q^{n-1} pode-se obter à aproximação da Hessiana por:

$$\nabla^2 f(x^n) \approx [q^0 \dots q^{n-1}][p^0 \dots p^{n-1}]^{-1},$$

e sua inversa por:

$$\nabla^2 f(x^n)^{-1} \approx [p^0 \dots p^{n-1}][q^0 \dots q^{n-1}]^{-1}.$$

Quando os problemas possuem função objetivo quadrática, essa relação é exata. Com isso, na iteração $k + 1$, a matriz H_{k+1} pode ser obtida a partir de H_k, p^k e q^k da seguinte forma:

$$H_{k+1} = H_k + \frac{p^k(p^k)'}{(p^k)'q^k} - \frac{H_k q^k (q^k)' H_k}{(q^k)' H_k q^k} + \zeta^k (q^k)' H_k q^k v^k (v^k)', \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad (3.4)$$

com

$$v^k = \frac{p^k}{(p^k)'q^k} - \frac{H_k q^k}{(q^k)' H_k q^k}, \quad (3.5)$$

e H_0 é uma matriz definida positiva arbitrária. No qual, as escolhas dos escalares ζ^k determinam métodos específicos dentro da subclasse.

Esses métodos tem como propósitos determinar matrizes H_k de modo que o trabalho computacional do método resultante seja menor que o do método de Newton e tais que a sequência gerada por ele, quando converge, tenha ordem pelo mesmo superlinear.

4. Método Gradiente Conjugado

Este método tem como proposta melhorar os anteriores apresentados, combinando seus pontos positivos: baixo overhead e rápida convergência. Foi originalmente

proposto com o intuito de obter uma solução para um problema de otimização com função objetivo quadrática, do tipo:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x$$

onde Q é uma matriz definida positiva. Pela condição necessária de primeira ordem, temos o seguinte sistema linear

$$Qx = b.$$

A cada iteração, a escolha da direção d^k é feita de modo a formar um conjunto de direções Q -conjugadas com as direções escolhidas nas iterações anteriores. O passo α^k deve ser selecionado de modo que

$$f(x^k + \alpha^k d^k) = \min_{\alpha} f(x^k + \alpha d^k).$$

Um conjunto de direções d^1, d^2, \dots, d^k , não-nulas, é Q -conjugado se

$$(d^i)^T Q d^j = 0, \quad 0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq k, \quad \text{tal que} \quad i \neq j.$$

Essas direções podem ser geradas a partir de qualquer conjunto de vetores linearmente independentes, com o mesmo número de elementos, através do procedimento de *Gram-Schmidt*.

Este método termina em no máximo n iterações, ao se obter $\nabla f(x^k) = 0$. Problemas com função objetivo não-quadrática também podem ser resolvidos utilizando este método, entretanto podem ser necessárias mais que n iterações para que a solução seja obtida.

Os termos não-quadráticos da função objetivo e possíveis buscas lineares não precisas para α^k , fazem com que a conjugacidade das direções geradas seja progressivamente perdida e que o método *emperre*, pois as direções d^k geradas se tornam quase ortogonais ao gradiente $\nabla f(x^k)$, levando a $\nabla f(x^{k+1}) \approx \nabla f(x^k)$.

Entretanto, os coeficientes do procedimento *Gram-Schmidt* para o caso não-quadrático e diferente do caso quadrático, essa mudança nos coeficientes, faz com que os termos não-quadráticos da função de custo perda a conjugacidade. Em casos assim, pode ser usado método de máxima descida como reinício, a cada n iterações ou sempre que a perda de conjugacidade for detectado.

Para problemas com restrições na forma de limitantes inferiores e superiores, Hager e Zhang (2006) propôs um método de programação não-linear intitulado *active set algorithm* (ASA). Tal método será apresentado na subseção abaixo, destacando-se dos demais devido a sua utilização nas simulações numéricas deste trabalho. Para maiores informações sobre os métodos descritos acima e outros métodos clássicos de descida utilizados na resolução de problemas irrestritos podem ser encontrado em Luenberger (1986) e Bertsekas (1999).

3.1.2 Método ASA_CG

O método ASA_CG disponível em Hager (2010), consiste na combinação de dois algoritmos utilizados para a resolução numérica de problemas de programação não-linear. O algoritmo consiste de duas etapas, na qual a primeira é a projeção do gradiente não monótona e a segunda realiza uma otimização irrestrita, executada pelo método do gradiente conjugado, e também um conjunto de regras para a ramificação entre essas duas etapas. Ou seja, este algoritmo alterna entre iterações desses dois métodos. Um vez que, o método do gradiente projetado pode ter convergência lenta na vizinhança de um mínimo local, o algoritmo ramifica-se para o método do gradiente conjugado para explorar a propriedade de convergência superlinear que o método possui.

Esse método possui garantia de convergência global. De acordo com testes computacionais apresentados por Hager e Zhang (2006), o método ASA_CG possui desempenho computacional superior em relação aos principais métodos da literatura (L-BFGS-B, SPG2 v.2.1, GENCAN e TRON v. 1.2).

O método ASA_CG requer como entrada uma solução inicial x_0 e um procedimento que calcula o gradiente da função a ser maximizada. Como o algoritmo escolhe α^k e d^k é descrito em Hager e Zhang (2006). Para calcular α^k é feito uma busca linear na direção d^k , baseada no gradiente da função hamiltoniana do problema original. Para maiores informações sobre o método ASA_CG deve-se consultar Hager e Zhang (2006).

3.1.3 Programação não-linear restrita

Para os casos em que a região factível \mathcal{F}_x , não é necessariamente o \mathbb{R}^n , temos os chamados *problemas de minimização restritos*. A complexidade destes problemas depende fortemente de suas restrições.

Considere o seguinte problema restrito:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{sujeito a:} \quad & \\ & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ com $m + p < n$, continuamente diferenciáveis. Assim, tem-se que $\mathcal{F}_x = \{x \in \mathbb{R}^n; g(x) \leq 0 \text{ e } h(x) = 0\}$.

Uma condição necessária de primeira ordem para estes problemas, apresentada por Kuhn e Tucker, é dada posteriormente no Teorema (6). Antes de expor o teorema definiremos o conceito de *ponto regular*.

Definição 3. *Sejam $h, g \in C^1$. Um ponto x^* satisfazendo um conjunto de restrições de igualdades $h(x^*) = 0$ e um conjunto de restrições de desigualdades $g(x^*) \leq 0$ é chamado ponto regular dessas restrições se os vetores gradientes $\nabla h_i(x^*)$ para todo i e $\nabla g_j(x^*)$ para todo j tal que $g_j(x^*) = 0$ forem linearmente independentes.*

Teorema 6. *Consideremos o problema (3.6). Seja x^* um ponto factível e regular, sendo que $f, g, h \in C^1$. Para x^* ser um minimizador local do problema, deve existir um conjunto de multiplicadores de Kuhn-Tucker $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ e $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ com $\mu^* \geq 0$ tal que:*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \nabla g_j(x^*) = 0$$

$$\mu_j^* g_j(x^*) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, p.$$

As demonstrações dos resultados apresentados podem ser encontradas em Luenberger (1986).

Métodos para resolver esses tipos de problemas têm motivado várias pesquisas, no sentido de desenvolver algoritmos, cuja tarefa é bastante árdua. Em Luenberger (1986) são apresentados alguns métodos utilizados na resolução de problemas restritos. Porém, para o desenvolvimento deste trabalho não se faz necessário entrar no mérito desses algoritmos, uma vez que utilizamos da técnica de penalidade, que tem a propriedade de transformar os problemas restritos em problemas irrestritos. Dessa forma, pode-se utilizar os métodos desenvolvidos para problemas irrestritos descritos na Seção 3.1.1.

3.2 Método de penalidade

Uma das formas fundamentais para a otimização restrita é transformar o problema original restrito em um problema irrestrito, através de uma função de penalidade que é composta da função objetivo original do problema de otimização com restrições somadas em um termo adicional. Este termo é positivo quando o ponto atual x viola essa restrição e zero caso contrário.

Afim de que o problema restrito (3.6), seja transformado em um problema irrestrito (3.1), neste contexto será utilizado o *Método da Penalidade Exterior*. Caso o objetivo da otimização seja minimizar a função objetivo $f(x)$, a função de penalidade $P(x)$ é somada à função principal $f(x)$ de modo a aumentar o valor da função nos pontos que estão fora da região viável. Analogamente, para o caso em que o objetivo da otimização seja maximizar, a função de penalidade é subtraída da função principal se o ponto não obedece às restrições.

O modelo matemático da nova função objetivo, chamada de *pseudo objetivo*, $\Phi(x)$, é:

$$\Phi(x) = f(x) + r_p P(x),$$

onde r_p é um fator de penalidade, toda vez que encontrar uma restrição ativa, e a função de penalidade $P(x)$ é dada por:

$$P(x) = \sum_{i=1}^m h_i(x)^2 + \sum_{j=1}^p (\max[0, g_j(x)])^2.$$

Assim, os valores de x fora da região viável gerarão péssimos valores na otimização e logo serão desconsiderados pelos métodos de otimização irrestrita. Outros tipos de penalizações podem ser encontradas em Bertsekas (1999), Correia, Matias e Serôdio (2008).

CAPÍTULO 4

OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO

A otimização multi-objetivo teve seus fundamentos matemáticos originados no período compreendido entre 1895 e 1906 (CARRIJO, 2004). Os fundamentos básicos dos espaços infinitas dimensões foram sugeridos neste período por Georg Cantor e Felix Hausdorff. Contudo, foi Harold W. Kuhn e Albert W. Tucker em 1951, que demonstraram o enfoque matemático da otimização multi-objetivo, com o conceito do problema de vetor máximo (CARRIJO, 2004).

A teoria de otimização multi-objetivo pode ser aplicada nos mais diversos tipos de problemas, por exemplo, em problemas físicos, da engenharia, em problemas relacionados à aeronáutica entre outros (BURGOS, 2008; TSOUKAS; TIRRELL; STEPHANOPOULOS, 1982; OBAYASHI, 1998). Assim, pode-se encontrar diversas formas de apresentar um problema multi-objetivo, dependendo de cada aplicação particular. Este capítulo apresenta uma breve introdução sobre a teoria de otimização multi-objetivo e alguns métodos clássicos usados na geração do conjunto de solução eficiente. Essa teoria será utilizada na formulação do problema de controle de planta daninha otimizando o custo do produtor e reduzindo a evolução da resistência da planta ao herbicida.

4.1 O problema de otimização multi-objetivo

O problema de otimização multi-objetivo (POMO), pode ser matematicamente definido como (DEB, 2001):

$$\min f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_l(x))$$

sujeito a :

$$g(x) \leq 0$$

$$h(x) = 0$$

$$x^L \leq x \leq x^U,$$

sendo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ o vetor objetivo do problema que são os critérios de avaliação para determinar a qualidade de uma solução, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ com $m + p < n$ as restrições de desigualdade e igualdade, respectivamente, e o último conjunto de restrição é chamado *variáveis limitadas*, sendo x^L e x^U os limites inferior e superior, respectivamente, da variável $x = (x_1, \dots, x_n)^T$.

Pode-se dizer que as restrições esboçam o contorno da região onde se encontra o conjunto de soluções factíveis do problema; considere-se $\mathcal{F}_x \in \mathbb{R}^n$ a região factível.

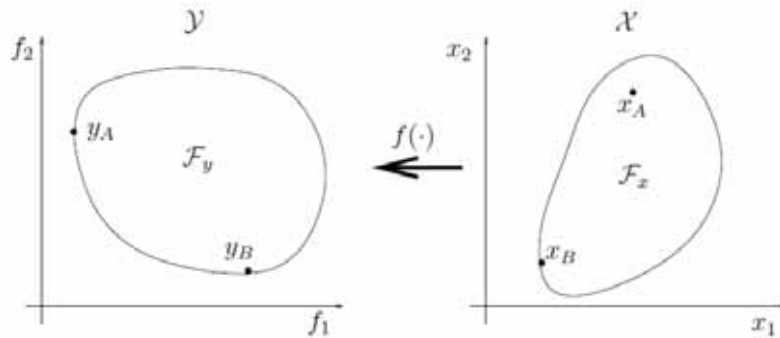


Figura 2: Mapeamento feito pela função $f(\cdot)$ (Fonte: Takahashi (2007)).

Os vetores $x \in \mathbb{R}^n$ são chamados de *variáveis de decisão* ou *vetores de parâmetros* do POMO, que formam o *espaço de parâmetros* \mathcal{X} . Os vetores $f(x) \in \mathbb{R}^l$ encontram-se num espaço vetorial que será denominado *espaço de objetivos*, sendo denotado por \mathcal{Y} .

Assim, o POMO tem por objetivo determinar o conjunto de pontos \mathcal{X}^* pertencentes ao espaço de parâmetros, que otimize as funções objetivos. Esses problemas possuem um conjunto de soluções, que otimiza as funções objetivos. Para a obtenção de tal conjunto se faz necessário a definição de alguns conceitos.

4.2 Ordenamento de soluções

O problema de otimização multi-objetivo se difere dos problemas de otimização mono-objetivo, a partir da análise do ordenamento das soluções, levando em conta os diversos objetivos. As soluções ótimas dos problemas multi-objetivos, são as melhores soluções entre as quais não existe um ordenamento, isto é, não há como definir, a partir da avaliação dos funcionais objetivos se uma determinada solução é melhor que a outra.

Para fundamentar este conceito, são apresentadas inicialmente as definições de *conjuntos ordenados* e *conjuntos parcialmente ordenados*, que serão relevantes na análise das soluções dos problemas otimização multi-objetivo.

Definição 4. Um conjunto C é ordenado de acordo com a relação de ordem " \preceq " se dados quaisquer dois elementos $x, y \in C$ é sempre verdade que $x \preceq y$ ou $y \preceq x$ e as seguintes propriedades com relação a " \preceq " são válidas:

- i. $x \preceq x$,
- ii. $x \preceq y$ e $y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$,
- iii. $x \preceq y$ e $y \preceq x \Rightarrow x = y$.

Definição 5. Diz-se ainda que C é parcialmente ordenado se valem as propriedades (i), (ii) e (iii) mas nem sempre $x \preceq y$ ou $y \preceq x$, isto é, nem sempre x e y são comparáveis.

Outro conceito bastante utilizado na análise das soluções dos POMO é a *operação de comparação*, apresentada abaixo.

Definição 6. As operações de comparação entre vetores pertencentes ao espaço \mathbb{R}^n serão definidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x \preceq y &\Rightarrow \{x_i \leq y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\} \\ x \prec y &\Rightarrow \{x_i < y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\} \\ x = y &\Rightarrow \{x_i = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

Os operadores \succeq e \succ são definidos analogamente. Observa-se que o operador \neq é definido de outra forma:

$$x \neq y \Rightarrow \{\exists i \mid x_i \neq y_i\}.$$

4.3 Conjunto de Pareto-ótimo

O fundamento principal da otimização multi-objetivo consiste no conjunto de soluções \mathcal{X}^* , denominado *conjunto Pareto-ótimo*, que irá conter as possíveis soluções x^* do problema de otimização multi-objetivo. O conceito de *dominância* definido abaixo, é de fundamental importância para a obtenção deste conjunto.

Definição 7. Diz-se que o ponto $x_A \in \mathcal{X}$ domina o ponto $x_B \in \mathcal{X}$ se $f(x_A) \leq f(x_B)$ e $f(x_A) \neq f(x_B)$. Equivalentemente, diz-se que $f(x_A) \in \mathcal{Y}$ domina $f(x_B) \in \mathcal{Y}$, nessas mesmas condições.

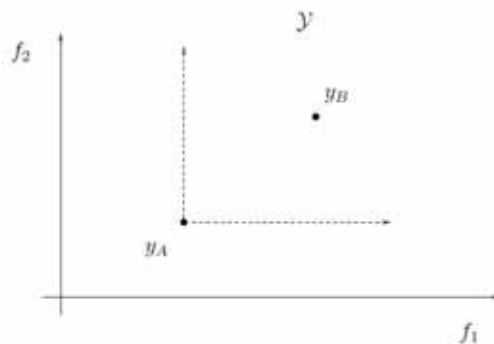


Figura 3: Conceito de dominância (Fonte: Takahashi (2007)).

Para analisar o conceito de dominância, um cone paralelo aos eixos coordenados do espaço objetivo é colocado com vértice no ponto $y_A = f(x_A)$ e todos os pontos no interior desse cone são dominados por y_A , de forma que y_A domina $y_B = f(x_B)$, como representado na Figura 3.

Definição 8. Diz-se que $x^* \in \mathcal{F}_x$ é uma solução Pareto-ótima do POMO se não existe qualquer outra solução x neste conjunto tal que $f(x) \leq f(x^*)$ e $f(x) \neq f(x^*)$, ou seja, se x^* não é dominado por nenhum outro ponto factível.

A definição anterior diz que uma solução é ótima de Pareto se não existe outra solução viável que melhore todos os objetivos simultaneamente, isto é, a melhora de um objetivo provoca uma degradação simultânea em pelo menos um outro objetivo. Observa-se que, uma solução ser Pareto-ótima não significa que essa é melhor que todas as outras soluções, mas que não é pior que nenhuma outra.

Na literatura encontra-se várias outras terminologias diversificadas referenciando as soluções Pareto-ótimas, tais como, *eficientes*, *não-dominada* e *não-inferior*.

O conjunto de Pareto-ótimo, \mathcal{Y}^* , é formado então por todas as soluções Pareto-ótimas.

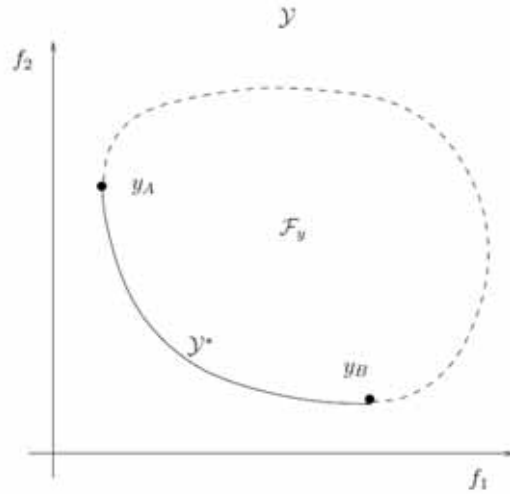


Figura 4: O conjunto Pareto \mathcal{Y}^* (Fonte: Takahashi (2007)).

Na Figura 4 o conjunto de Pareto $\mathcal{Y}^* \in \mathcal{Y}$, associado ao conjunto imagem da função $f(\cdot)$, encontra-se representado em linha contínua.

Um resultado importante em relação ao conjunto Pareto-ótimo é que todas as soluções eficientes do POMO estão contidas na fronteira do conjunto \mathcal{F}_y , ou seja, nenhuma solução eficiente está no interior de tal conjunto.

Define o conjunto Pareto-ótimo num sentido local, pois, em muitos casos trabalha-se com soluções apenas locais, tais como: casos em que é difícil estabelecer a globalidade e/ou casos em que não é necessária globalidade.

Definição 9. Diz-se que $x^* \in \mathcal{F}_x$ é uma solução localmente Pareto-ótima do POMO se existe uma vizinhança $N(x^*, \delta)$ tal que não existe qualquer outra solução $x \in N(x^*, \delta) \cap \mathcal{F}_x$ tal que $f(x) \leq f(x^*)$ e $f(x) \neq f(x^*)$, ou seja, se x^* não é dominado por nenhum outro ponto naquela vizinhança.

A condição da otimalidade de Pareto no sentido local adquire caráter global se o problema considerado é convexo, ou seja, as f_i , $i = 1, \dots, l$ são funções convexas definidas sobre um conjunto convexo $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$.

4.4 Solução utópica

Nos problemas de otimização multi-objetivo o conceito de solução utópica, está relacionado ao conceito de conjunto Pareto-ótimo. A solução utópica é usada como referência

para o conjunto Pareto-ótimo, de forma que tal conjunto esteja contido no primeiro quadrante e suas intersecções com os eixos coordenados sejam os mínimos individuais de cada um dos funcionais objetivos, como definido abaixo.

Definição 10. A solução utópica $f^* = (f^{*1}, f^{*2}, \dots, f^{*l})$ do POMO é definida como:

$$f^{*i} = f_i(x^{u^{i*}}), \quad i = 1, \dots, l$$

onde,

$$f_i(x^{u^{i*}}) = \min f_i(x)$$

sujeito a :

$$g(x) \leq 0$$

$$h(x) = 0$$

$$x^L \leq x \leq x^U,$$

no qual existe $x^{u^{i*}}$ para cada $i = 1, \dots, l$.

Observe que, f^* não é um ponto pertencente à imagem da função f restrita ao domínio \mathcal{F}_x . Esta situação justifica o estudo da otimização multi-objetivo.

4.5 Condições de otimalidade

Na Seção 3.1.3 foi apresentada a condição de Kuhn-Tucher para os problemas mono-objetivo não-linear restrito. Para os problemas multi-objetivo uma condição equivalente pode ser obtida a partir do resultado apresentado abaixo.

Teorema 7. Se x^* é eficiente então x^* resolve os problemas

$$(P_i) \left\{ \begin{array}{l} \min f_i(x) \\ \text{sujeito a:} \\ f_j(x) \leq f_j(x^*) \text{ para todo } j \neq i, \\ x \in \mathcal{F}_x. \end{array} \right.$$

para $i = 1, \dots, l$. Reciprocamente, se x^* resolve (P_i) , $i = 1, \dots, l$ então x^* é eficiente.

Demonstração: 1. \Rightarrow) Por hipótese, temos que x^* é eficiente. Logo pela Definição 8, não existe $x \in \mathcal{F}_x$ tal que

$$f(x) \leq f(x^*) \text{ e } f(x) \neq f(x^*),$$

consequentemente, não existe $x \in \mathcal{F}_x$ tal que:

$$f_j(x) \leq f_j(x^*) \text{ para todo } j \neq i \text{ e } f_i(x) < f_i(x^*) \text{ para algum } i$$

Portanto, x^* é o minimizador de (P_i) para $i = 1, \dots, l$.

\Leftrightarrow Reciprocamente, temos que x^* é o minimizador de (P_i) para $i = 1, \dots, l$. Suponha que x^* não é eficiente. Logo existe $x \in \mathcal{F}_x$ e algum i tal que $f_i(x) < f_i(x^*)$. Logo, x^* não é minimizador de (P_i) , mas isso é contra a hipótese.

Portanto, x^* é eficiente.

Serão apresentadas agora as condições de Kuhn-Tucker para eficiência (KTE). Porém as condições de Kuhn-Tucker para eficiência serão expostas apenas para o caso particular em que \mathcal{F}_x é dado por: $\mathcal{F}_x = \{x \in \mathcal{X}; g(x) \leq 0\}$.

Definição 11. Uma solução factível x^* satisfaz as condições necessárias de Kuhn-Tucker para eficiência se:

1. todos f_i e g_i são diferenciáveis e
2. existem vetores multiplicadores $\lambda^* \geq 0, \mu^* \geq 0$, com pelo menos uma desigualdade estrita $\lambda_i^* > 0$, tais que:

$$g_k(x^*) \leq 0; \quad \mu_k^* g_k(x^*) = 0, \quad k = 1, \dots, p,$$

$$\sum_{j=1}^l \lambda_j^* \nabla f_j(x^*) + \sum_{k=1}^p \mu_k^* \nabla g_k(x^*) = 0.$$

A prova da condição necessária de Kuhn-Tucker para eficiência pode ser encontrada em (CHANKONG; HAIMES, 1983). Veremos agora sob quais circunstâncias as condições necessárias de KTE tornam-se condições suficientes para a otimalidade do Pareto.

Teorema 8. Se o POMO satisfaz às KTE em x^* com todos os multiplicadores λ_i^* , para $i = 1, \dots, l$ estritamente positivos, então x^* é uma solução eficiente.

Demonstração: 2. Como o POMO satisfaz às KTE em x^* , temos que f, g são diferenciáveis e existem vetores multiplicadores $\lambda^* \geq 0, \mu^* \geq 0$, com pelo menos uma

desigualdade estrita $\lambda_i^* > 0$ tal que:

$$g_k(x^*) \leq 0; \quad \mu_k^* g_k(x^*) = 0, \quad k = 1, \dots, p,$$

$$\sum_{j=1}^l \lambda_j^* \nabla f_j(x^*) + \sum_{k=1}^p \mu_k^* \nabla g_k(x^*) = 0.$$

Uma vez que, $\lambda_i^* > 0$ segue que:

$$\frac{1}{\lambda_i^*} \left(\sum_{j=1}^l \lambda_j^* \nabla f_j(x^*) + \sum_{k=1}^p \mu_k^* \nabla g_k(x^*) \right) = 0.$$

Consequentemente, temos:

$$\nabla f_i(x^*) + \sum_{j \neq i} \frac{\lambda_j^*}{\lambda_i^*} \nabla f_j(x^*) + \sum_{k=1}^p \frac{\mu_k^*}{\lambda_i^*} \nabla g_k(x^*) = 0.$$

Portanto, como $\lambda_i^* > 0$ para $i = 1, \dots, l$, temos que KTE se reduz a condição de Kuhn-Tucker para os problemas (P_i) . Logo, x^* resolve (P_i) para $i = 1, \dots, l$ e pelo Teorema 7, segue que, x^* é eficiente.

Outra condição para que as KTE se tornem suficientes é que todas as funções f_i , $i = 1, \dots, l$, e g_k , $k = 1, \dots, p$, sejam estritamente convexas.

4.6 Técnica para a otimização multi-objetivo

Nesta seção, serão apresentados alguns métodos clássicos usados para manipulação dos problemas de otimização multi-objetivo. Estes métodos clássicos, sobre os quais têm-se pesquisado por várias décadas, são na verdade técnicas distintas de transformar problemas multi-objetivo em problemas mono-objetivo. Muitas pesquisas e algoritmos têm sido desenvolvidos de acordo com várias considerações. Miettinen (1999) classificou esses métodos nas seguintes classes:

- Métodos não-preferentes: tais métodos não assumem qualquer informação sobre importância dos objetivos, mas uma heurística é usada para encontrar uma única solução ótima. Esses métodos não fazem qualquer tentativa para encontrar múltiplas soluções do Pareto-ótimo.
- Método Posteriori: são métodos que usam informações, de preferência de cada

objetivo, e iterativamente geram o conjunto de soluções Pareto-ótimo.

- Método a priori: esses métodos utilizam mais informações sobre as preferências dos objetivos e geralmente encontram uma solução Pareto-ótima preferida.
- Métodos Iterativos: são métodos que utilizam as informações de preferência progressivamente durante o processo de otimização.

Porém existem outras classificações.

Os métodos aqui apresentados são utilizados para obtenção do conjunto de soluções eficientes. Estes gerarão sempre um subconjunto representativo do conjunto de soluções eficientes do problema em questão. Logo, as técnicas para a otimização multi-objetivo buscam determinar um conjunto de pontos que seja representativo para o conjunto de soluções eficientes, \mathcal{X}^* :

$$\mathcal{X}^* = \{x^* \in \mathcal{F}_x : \nexists x \in \mathcal{F}_x | f(x) \leq f(x^*) \text{ e } f(x) \neq f(x^*)\}.$$

4.6.1 Problema ponderado

Este método consiste na escalarização do problema multi-objetivo, na qual o vetor objetivo é substituído pela soma ponderada de funcionais objetivos. A escolha dos pesos, para a ponderação, depende da importância de cada funcional objetivo e do contexto do problema que está sendo resolvido.

Relembra-se as condições de KTE, e observa-se que estas são condições necessárias para o problema escalar resultante da abordagem de ponderação, dado por (P_λ) :

$$\min F(x) = \sum_{i=1}^l \lambda_i f_i(x),$$

sujeito a:

$$x \in \mathcal{F}_x,$$

no qual $\lambda \in \mathbb{R}^l$ e $\mathcal{F}_x = \{x \in \mathcal{X}; g(x) \leq 0\}$. A solução do novo problema corresponde, sob determinadas condições, a um ponto do conjunto Pareto-ótimo do problema multi-objetivo original. Tais condições podem ser encontradas em Deb (2001).

Sem perda de generalidade, pode-se considerar

$$\lambda \in \Lambda = \left\{ \lambda : \lambda \geq 0, \sum_{i=1}^l \lambda_i = 1 \right\}.$$

Em geral, o problema ponderado é capaz de gerar apenas parte do conjunto Pareto-ótimo. Esse método funciona adequadamente caso todos os objetivos sejam funções convexas. Ainda mais, caso adote a desigualdade estrita $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, l$, tem-se a garantia que todas as soluções geradas serão pertencentes ao conjunto de soluções eficientes.

Na maioria dos POMOs não-lineares, quando se tem um conjunto uniformemente distribuído de vetores pesos, isso não significa que irá encontrar um conjunto uniformemente distribuído de soluções Pareto-ótimo. Uma vez que o mapeamento não é usualmente conhecido, torna-se difícil definir o conjunto de vetores pesos para obter uma solução Pareto-ótima em uma região descrita no espaço objetivo.

Além do mais, uma vez que algoritmos de otimização mono-objetivo são projetados para encontrar uma solução que satisfaça o critério de otimalidade de primeira ordem, muitos testes são necessários para saber se a solução obtida é verdadeiramente uma solução mínima. Isso cresce a complexidade computacional desta abordagem.

Como a abordagem descrita acima não é eficiente para espaço objetivo não-convexo, outros métodos foram desenvolvidos buscando eliminar tais dificuldades, por exemplo: abordagem ϵ -restrito, abordagem híbrida e outros (HAIMES; LASDON; WISMER, 1971; DEB, 2001; TAKAHASHI, 2010).

4.6.2 Problema ϵ -restrito

Para a resolução de problemas multi-objetivo nos quais o espaço objetivo é não-convexo, desenvolveram o método ϵ -restrito. Haimes, Lasdon e Wismer (1971) sugeriram a formulação do POMO, no qual mantém-se apenas um dos objetivos e restringe-se os demais objetivos. O problema modificado é o seguinte (P_ϵ):

$$\begin{aligned} \min \quad & f_i(x), \\ \text{sujeito a:} \quad & \\ & f_j(x) \leq \epsilon_j \quad j = 1, \dots, l \quad j \neq i, \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$g(x) \leq 0, \tag{4.2}$$

sendo ϵ_j o limitante superior do objetivo f_j , com $j = 1, \dots, l$ e $j \neq i$. Com esse método é possível gerar todo o conjunto de soluções eficientes, variando parametricamente ϵ_j , $\forall j \neq i$, mesmo quando os funcionais objetivos forem não-convexos. Porém, a seleção dos ϵ_j é uma tarefa bastante árdua. Podendo ocorrer casos em que o ponto obtido seja não eficiente e os valores de ϵ_j podem tornar (P_ϵ) infactível, para problemas com número de objetivo $l \geq 3$ (DEB, 2001).

Um algoritmo básico que implementa o problema (P_ϵ) é o seguinte:

Método ϵ -restrito:

1. Primeiramente, deve-se encontrar os valores adequados para inicializar o vetor ϵ . A obtenção de tais valores é feita da seguinte maneira: resolvendo os l problemas mono-objetivo, ou seja, $\{\min f_i(x); x \in \mathcal{F}_x\}$ com $i = 1, \dots, l$, no qual $\mathcal{F}_x = \{x \in \mathcal{X}; g(x) \leq 0\}$. Com isso, obtém-se os valores f_i^* para $i = 1, \dots, l$, que são os ótimos individuais de cada objetivo, os quais agregados, compõem o vetor f^* , correspondente à solução utópica do problema.
2. Simultaneamente, serão obtidos os piores valores atingidos por objetivo, da seguinte forma: quando um dos objetivos está em seu ótimo, sua solução produzirá valores ruins para os outros objetivos, uma vez que trata-se de objetivos conflitantes, assim o menor destes valores corresponderá ao f_i^0 , os quais agregados, compõem o vetor f^0 , correspondente à pior solução do problema.
3. O problema (4.1) é resolvido para vetores ϵ resultantes de um gerador de números aleatório com distribuição de probabilidade uniforme, atendendo à restrição:

$$f^* \leq \epsilon \leq f^0.$$

O método ϵ -restrito possui uma complexidade que restringe a aplicabilidade dos métodos de otimização. Outro fato é que as restrições tendem a aumentar, fazendo com que a região factível fique pequena em relação à região infactível. Assim, a utilização de métodos de direção de busca com tratamento de restrições do tipo barreira é inviável. Caso sejam empregados tais métodos, deverão ser acoplados ao tratamento de restrição por penalidade.

4.6.3 Problema híbrido: ponderando e restringindo

Este método combina as vantagens do método (P_λ) , este produz pontos que certamente são eficientes, quando λ é estritamente positivo, com as vantagens do método (P_ϵ) , que é capaz de gerar todos os pontos eficientes.

Desta combinação segue-se o seguinte problema, $(P_{\lambda,\epsilon})$:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^l \lambda_i f_i(x), \\ & \text{sujeito a:} \\ & f_j(x) \leq \epsilon_j, \quad j = 1, \dots, l \\ & g(x) \leq 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

sendo ϵ_j os limitantes superiores dos objetivos e λ_i as ponderações.

As abordagens apresentadas diferem-se uma das outras, sendo que cada uma possui vantagens e desvantagens. Existem vários outros métodos clássicos para a resolução de problema multi-objetivo, tais como: o método das métricas ponderadas, método de Benson, método da programação-alvo e outros (MIETTINEN, 1999; EHRGOTT, 2000; DEB, 2001; TAKAHASHI, 2010).

A partir da descrição de alguns algoritmos clássicos mais simples para a otimização multi-objetivo, observa-se um número de dificuldades, especialmente se o usuário está interessado em encontrar múltiplas soluções do Pareto-ótimo, tais como:

1. Somente uma solução Pareto-ótima pode ser encontrada em uma simulação de um algoritmo clássico;
2. Nem todas as soluções Pareto-ótima podem ser encontradas por alguns algoritmos em POMOs não-convexos;
3. Todos os algoritmos necessitam de algum conhecimento específico do problema, tais como os pesos adequados ou ϵ .

Outros métodos têm sido utilizados para resolver os problemas de otimização multi-objetivo, visando eliminar as dificuldades expostas acima, por exemplo: simulated annealing, algoritmos evolutivos, evolução diferencial e outros. Esses métodos são baseados em metaheurísticas (DEB, 2001).

No presente trabalho será utilizada a abordagem ϵ -restrito, pois o problema em questão é não-convexo. Outro fato, que levou a utilização desta abordagem foi que no problema de controle de plantas daninhas buscou-se otimizar o custo do produtor e reduzir a aceleração da resistência da planta daninha a determinado herbicida, ou seja, apenas dois objetivos estão sendo otimizados, e para este a técnica se aplica de forma satisfatória.

CAPÍTULO 5

CONTROLE ÓTIMO

Os problemas de controle ótimo originaram-se da teoria do cálculo variacional por volta de 1956. Bellman (1957) e Pontryagin et al. (1965) foram grandes contribuintes para o desenvolvimento desta teoria.

A teoria de controle ótimo está presente na modelagem de diversos tipos de problemas, por exemplo, de problemas físicos, biológicos, da área econômica e produtiva entre outros (KENNEDY, 1986; CACHO, 1999; CAMPO et al., 2006). Este capítulo apresenta um pequeno resumo sobre controle ótimo para os casos contínuo e discreto e uma condição necessária de otimalidade conhecida como Princípio do Máximo de Pontryagin (PMP).

5.1 Teoria de controle ótimo: caso contínuo

Os problemas de controle ótimo são geralmente definidos em um conjunto de dimensão infinita, no qual os controles podem ser funções do tempo que são limitadas ou integráveis.

Uma forma de representar o problema de controle ótimo contínuo pode ser a seguinte (VINTER, 2000):

$$\min g(x(S), x(T)) \quad (5.1)$$

sobre os arcos $x \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n)$ e u função mensurável satisfazendo

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \text{ q.t.p.} \quad (5.2)$$

$$u(t) \in U \text{ q.t.p.} \quad (5.3)$$

$$(x(S), x(T)) \in C, \quad (5.4)$$

no qual $f : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$, e conjuntos $C \subset \mathbb{R}^n$ e $U \subset \mathbb{R}^m$. No qual $W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n)$ denota as funções $f : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolutamente contínuas.

Essa formulação do problema de controle ótimo é referida como uma formulação de Pontryagin, e a importância dessa formulação é que abrange uma ampla gama de problemas de otimização. Tal formulação é bastante adequada para a derivação de condições necessárias gerais de otimalidade.

A variável dependente $x \in \mathbb{R}^n$ é chamada de *estado*. A função $x(t)$, descrevendo sua evolução no tempo, é chamada de *trajetória de estado*.

Uma função mensurável $u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ que satisfaz

$$u(t) \in U \text{ q.t.p.}$$

é chamada *função controle*.

Um *processo* (x, u) abrange uma função de controle u , junto com um arco $x \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n)$ que é uma solução para a equação diferencial

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \text{ q.t.p.}$$

Um processo (x, u) é *admissível* para o problema (5.1)-(5.4) se a trajetória de estado x satisfaz a restrição

$$(x(S), x(T)) \in C$$

e a equação diferencial dada em (5.2). Neste caso, dizemos que o sistema (5.2)-(5.4) é *controlável*.

A trajetória de estado depende da escolha da função controle e do estado inicial $x(S)$. O objetivo é escolher a função controle $u(\cdot)$ e o estado inicial que minimize o valor do custo $g(x(S), x(T))$. Quando o estado inicial for fixo o problema de minimização se resume em

escolher a função controle que minimize $g(x(S), x(T))$.

Frequentemente, o estado inicial é fixado, isto é, C tem a forma

$$C = \{x_0\} \times C_1 \text{ para algum } x_0 \text{ e algum } C_1 \in \mathbb{R}^n.$$

Neste caso, (5.1)-(5.4) é um problema de minimização sobre as funções de controle.

Na procura de solução para o problema de controle ótimo têm-se os seguintes casos: solução global ou solução local. No caso da solução local, pode-se dividir entre minimizador local ou minimizador fraco local.

Definição 12. *Seja (x^*, u^*) um processo admissível do problema (5.1)-(5.4). Então, tem-se as seguintes definições:*

Um processo (x^, u^*) é chamado de minimizador local se, e somente se, existe algum $\epsilon > 0$ que minimiza o custo sobre todo o processo (x, u) de (5.1)-(5.4) e satisfaz*

$$\|x(t) - x^*(t)\| < \epsilon,$$

para quase todo $t \in [S, T]$.

Um processo (x^, u^*) é chamado de minimizador local fraco se, e somente se, existe algum $\epsilon > 0$ que minimiza o custo sobre todo o processo (x, u) de (5.1)-(5.4) e satisfaz*

$$\|x(t) - x^*(t)\| < \epsilon \text{ e } \|u(t) - u^*(t)\| < \epsilon,$$

para quase todo $t \in [S, T]$.

Utiliza-se uma condição necessária de otimalidade conhecida como Princípio do Máximo de Pontryagin (PMP), para a obtenção da solução de um problema como o descrito acima, a qual permite a encontrar uma candidata à solução analítica para o problema, e portanto, exata. Mas devido à complexidade das expressões envolvidas, em muitos casos, torna-se difícil obter essa candidata a solução analiticamente. Devido a essa complexidade, utilizam-se métodos numéricos, nos quais é possível a obtenção de uma solução aproximada.

Problemas como os descritos em (5.1)-(5.4), podem ser representados considerando o tempo contínuo, $t \in \mathbb{R}$ ou discreto, $t \in A$, onde A é um subconjunto discreto de \mathbb{R} . Uma das diferenças entre esses dois problemas é que, no contínuo o sistema dinâmico relacionado ao estado do problema é descrito por uma equação diferencial, enquanto o caso discreto está relacionado à equações de diferenças. Essa diferença tem grande

importância, pois resolver uma equação de diferenças, em geral, é bem mais simples que uma equação diferencial. De fato, em uma equação de diferenças, resolvem-se somas e produtos, enquanto que a solução de uma equação diferencial envolve a integração de uma determinada expressão.

Sistemas cujos comportamentos podem ser modelados por um conjunto de n funções diferenciais ordinárias da forma (5.2), devem ser controlados a partir de um ponto inicial dado $x(S)$ em um tempo T variável, de tal forma que o funcional objetivo (5.1) seja minimizado. Ou seja, existem controles admissíveis u que levam o sistema de estado inicial $x(S)$ ao estado final $x(T)$, e dentre esses procura-se o que minimize (5.1). Tal controle é chamado de *controle ótimo*, denotado u^* . Admite-se a existência deste controle ótimo. Dessa forma, precisa-se agora determinar uma forma de distinguir esse controle dos demais. Uma condição necessária é dada por Pontryagin et al. (1965) e é conhecido como Princípio do Máximo de Pontryagin (PMP).

5.1.1 O Princípio do máximo para o caso contínuo

O princípio do Máximo de Pontryagin é um resultado fundamental para a obtenção da solução analítica de um problema de controle ótimo. A versão inicial deste princípio é devida à Pontryagin et al.

Teorema 9. O Princípio do Máximo. *Seja (\bar{u}, \bar{x}) um minimizador local do problema dado por (5.1)-(5.4). Suponha que*

1. g é continuamente diferenciável,
2. C é um conjunto fechado,
3. f é contínua, $f(t, \cdot, u)$ é continuamente diferenciável em x para cada (t, u) , e existem $\epsilon > 0$ e $k(\cdot) \in L^1$ tal que

$$|f(t, x, u) - f(t, x', u)| \leq k(t) |x - x'|$$

para todo $x, x' \in \bar{x}(t) + \epsilon B$ e $u \in U$, q.t.p, e

4. GrU é um conjunto de Borel.

Então existe um arco $p \in W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^n)$ e $\lambda \geq 0$, não simultaneamente nulos, tais que as seguintes condições são satisfeitas:

A equação adjunta:

$$-\dot{p}(t) = p(t) \cdot f_x(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \text{ q.t.p.};$$

A condição de Weierstrass generalizada:

$$p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U} p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), u) \text{ q.t.p.};$$

A condição de Transversalidade:

$$(p(S), -p(T)) = \lambda g_x(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + \eta$$

para algum $\eta \in N_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$.

No qual, GrU representa o gráfico de U , e N_C denota o cone normal limitante de C em $\bar{x}(S), \bar{x}(T)$, e é caracterizado sobre a condição de transversalidade.

De acordo com Vinter (2000), o PMP estabelece condições necessárias que devem cumprir o controle do problema em questão. Para a aplicação deste princípio no problema de controle ótimo descrito em (5.1)-(5.4), deve-se inicialmente definir a *Unmaximized Hamiltonian*, associado ao problema:

$$\mathcal{H}(t, x, p, u) = p \cdot f(t, x, u).$$

A equação adjunta e a condição generalizada de Weierstrass podem ser escritas, da seguinte forma:

$$(\dot{\bar{x}}(t), -\dot{p}(t)) = \nabla_{x,p} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \text{ q.t.p.},$$

e

$$\mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), u) \text{ q.t.p.}.$$

uma das forma com que as condições enfatiza sua afinidade com o sistema de Hamilton, equações no cálculo das variações.

Em condições favoráveis, justifica-se na definição do multiplicador de custo $\lambda = 1$, e a Condição Weierstrass Generalizada permite expressar u como uma função de x e p

$$u = u^*(x, p).$$

O Princípio do Máximo apresentado afirma que um arco minimizador \bar{x} é a primeira componente de um par de funções absolutamente contínuas (\bar{x}, p) satisfazendo a equação diferencial

$$(-\dot{p}(t), \dot{\bar{x}}(t)) = \nabla_{x,p} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), u^*(\bar{x}(t), p(t))) \text{ q.t.p.,}$$

e as condições do ponto final

$$(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \in C \text{ e } (p(S), -p(T)) \in N_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + \lambda \{g_x(\bar{x}(S), \bar{x}(T))\}.$$

O controle minimizador é dado pela fórmula

$$\bar{u}(t) = u^*(\bar{x}(t), p(t)).$$

Para maiores informações sobre este assunto deve-se consultar Vinter (2000).

5.2 Teoria de controle ótimo: caso discreto

Nesta seção será estudado problema de controle ótimo em tempo discreto. Esse problema trata de equações de diferenças ao invés de equações diferenciais, como no caso contínuo. De forma geral, um problema de controle ótimo discreto é dado da seguinte forma (FRYER; GREENMAN, 1987):

$$\max J = \sum_{t=0}^T f_t(x_t, u_t) \quad (5.5)$$

sujeito a

$$x_{t+1} - x_t = g_t(x_t, u_t), \quad (5.6)$$

$$x(0) = x_0, \quad u_t \in \Omega, \quad t = 0, \dots, T, \quad (5.7)$$

onde J é o funcional objetivo do problema, $f_t : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_t : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a equação dinâmica, Ω é o conjunto de controles admissíveis, $T \geq 0$ é o tempo final, e $x_0 \in \mathbb{R}$ é a condição inicial para o estado. Suponhamos que o tempo final T é fixo, e que não há restrição sobre o estado final $x(T)$. Admitiremos que a função Lagrangeana, L , definida posteriormente, seja continuamente diferenciável até segunda ordem, ou seja, $L \in C^2$.

No problema como o descrito acima, pode-se ter restrições sobre as variáveis x_t e u_t dependendo do caso. Um tipo de restrição que o problema pode ter é a restrição de caixa

sobre estas variáveis. De forma geral, o problema de controle ótimo discreto possui três características principais que o define:

1. As variáveis podem ser divididas em dois conjuntos distintos, as *variáveis de estado*, x_t , e as *variáveis de controle* u_t ;
2. O conjunto de restrições (5.6) relaciona a diferença entre as variáveis de estado, $x_{t+1} - x_t$, para os valores atuais, x_t, u_t , através da função g_t . A expressão $x_{t+1} - x_t = g_t(x_t, u_t)$ para cada t é chamada de *equação dinâmica* do problema;
3. A função objetivo (5.5) está expressa como a soma de $T + 1$ termos, e cada t -ésimo termo do somatório depende somente dos t -ésimos valores das variáveis de estado e controle. Uma função objetivo deste tipo é dita *separável*.

O sistema discreto (5.5) - (5.7) pode ser obtido do sistema (5.1)-(5.4) por meio de métodos de discretização (RUNGE, 1905; HAGER, 2000) ou, então, ser construído a partir de um sistema originalmente discreto.

Pode-se representar o problema (5.5) - (5.7) de várias formas, uma delas é deixá-lo na forma de Lagrange, ou transforma-lo para a forma de Mayer, na qual o funcional objetivo é expresso em função da variável de estado avaliada no tempo final. Pode-se descrever também o sistema na forma de Bolza, de acordo com a definição de seu funcional objetivo, sendo essas três formas equivalentes (CESARI, 1983).

5.2.1 O Princípio do máximo para o caso discreto

Considere o problema de otimização dado por (5.5)-(5.7). A função de Lagrange para este caso é dada por:

$$L = \sum_{t=0}^T f_t(x_t, u_t) - \sum_{t=0}^T \lambda_t(x_{t+1} - x_t - g_t(x_t, u_t)),$$

onde λ_t é o *multiplicador de Lagrange* para a t -ésima equação de (5.6). Ao se derivar a função L com relação as variáveis de controle e estado num ponto estacionário do problema, obtém-se uma relação dinâmica entre λ_t e λ_{t+1} .

Primeiramente, observa-se a forma expandida do somatório (5.8),

$$\begin{aligned}
L &= f_0(x_0, u_0) - \lambda_0(x_1 - x_0 - g_0(x_0, u_0)) \\
&+ f_1(x_1, u_1) - \lambda_1(x_2 - x_1 - g_1(x_1, u_1)) \\
&\dots\dots\dots \\
&+ f_{t-1}(x_{t-1}, u_{t-1}) - \lambda_{t-1}(x_t - x_{t-1} - g_{t-1}(x_{t-1}, u_{t-1})) \\
&+ f_t(x_t, u_t) - \lambda_t(x_{t+1} - x_t - g_t(x_t, u_t)) \\
&\dots\dots\dots \\
&+ f_T(x_T, u_T) - \lambda_T(x_{n+1} - x_T - g_T(x_T, u_T)).
\end{aligned}$$

Derivando L em relação a x_t num ponto estacionário, obtém-se a seguinte relação:

$$\frac{\partial L}{\partial x_t} = \frac{\partial f_t}{\partial x_t} + \lambda_t \frac{\partial g_t}{\partial x_t} - \lambda_{t-1} + \lambda_t = 0, \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (5.8)$$

Derivando agora a função L em relação a u_t , obtém-se:

$$\frac{\partial L}{\partial u_t} = \frac{\partial f_t}{\partial u_t} + \lambda_t \frac{\partial g_t}{\partial u_t} = 0, \quad t = 1, 2, \dots, T. \quad (5.9)$$

As duas relações dadas por (5.8) e (5.9) são apresentadas mais formalmente quando se define uma função H_t da seguinte forma:

$$H_t(\lambda_t, x_t, u_t) = f_t(x_t, u_t) + \lambda_t g_t(x_t, u_t).$$

Logo, tem-se o seguinte sistema de equações relacionadas a H_t :

$$0 = \frac{\partial H_t}{\partial u_t}, \quad t = 0, 1, \dots, T, \quad (5.10)$$

$$\lambda_{t+1} - \lambda_t = -\frac{\partial H_t}{\partial x_t}, \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \quad (5.11)$$

$$x_{t+1} - x_t = \frac{\partial H_t}{\partial \lambda_t}, \quad t = 0, 1, \dots, T, \quad (5.12)$$

onde (5.10) refere-se a condição necessária de otimalidade dada pelo PMP e (5.11) e (5.12) são chamadas de *equações de Hamilton*.

Observe que a expressão

$$\lambda_t - \lambda_{t-1} = -\frac{\partial H_t}{\partial x_t}, \quad t = 1, \dots, T \quad (5.13)$$

é equivalente à expressão (5.11).

A iteração de (5.10)-(5.12) possibilita determinar o conjunto de solução para as variáveis x_t , u_t e λ_t . A função H_t é chamada de *função de Hamilton, ou Hamiltoniana*. A variável λ_t é a variável de *coestado* do problema. É importante lembrar que o coestado para o caso discreto é originado do multiplicador de Lagrange.

A estratégia usada para resolver o sistema determinado por (5.10)-(5.12) é usar (5.10) para expressar u_t em termos de x_t e λ_t e, então, substituir u_t em (5.11) e (5.12), as quais se tornam dependentes somente de x_t e λ_t . Assim, (5.11) e (5.12) são exemplos de equações de diferenças e são conhecidas como as equações de diferença de Hamilton para o problema de controle ótimo discreto.

Veja a seguir um exemplo simples envolvendo controle discreto.

Exemplo 1. *Considere o problema de controle ótimo*

$$\begin{aligned} \max J &= -\frac{1}{2} \sum_{t=0}^3 (x_t^2 + u_t^2) \\ \text{sujeito a} \\ x_{t+1} &= x_t - u_t + 1 \\ x_0 &= 3 \end{aligned}$$

Para esse problema, a função de Hamilton é dada da seguinte forma

$$H_t = -\frac{1}{2}(x_t^2 + u_t^2) + \lambda_t(1 - u_t)$$

Assim, o sistema (5.10) - (5.12) é dado por

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial H_t}{\partial u_t} = -u_t - \lambda_t \\ \lambda_{t-1} - \lambda_t &= \frac{\partial H_t}{\partial x_t} = -x_t \\ x_{t+1} - x_t &= \frac{\partial H_t}{\partial \lambda_t} = 1 - u_t \end{aligned} \quad (5.14)$$

De (5.14), tem-se que

$$u_t = -\lambda_t.$$

Dado a condição de transversalidade $\lambda_3 = 0$ e a condição inicial do problema, obtém-se que:

$$x^* = (3, 16/7, -5/7, 1/7)^T \quad (5.15)$$

Da mesma forma, obtém-se o seguinte valor ótimo para o vetor de coestado λ^* :

$$\lambda^* = (-12/7, 4/7, -1/7, 0)^T$$

Substituindo cada coordenada de λ na equação (5.14), tem-se o vetor de controle u^* :

$$u^* = (12/7, -4/7, 1/7, 0)^T.$$

A teoria de controle ótimo é muito ampla e pode ser usada para resolver vários tipos de problemas dependendo das restrições de cada situação. Algumas variações em problemas de otimização com aplicação de controle podem ser dadas quando supõe-se condições relacionadas ao tempo final T e/ou estado final x_T . Pode-se ainda impor restrições às variáveis de estado e controle, x_t e u_t , em todo t .

Se inicialmente obtém-se um problema de tempo contínuo, sua discretização pode ser dada utilizando vários métodos. Dentre esses métodos, destaca-se o método de Runge-Kutta. Informações sobre a discretização de problemas de controle ótimo contínuos via o método de Runge-Kutta podem ser encontrados em Campos (2005) e Hager (2000).

5.3 Solução numérica do problema de controle ótimo

Na maioria das vezes não é possível determinar analiticamente a solução de um problema de controle ótimo devido a sua complexidade. Porém, em alguns casos consegue-se determinar uma solução numérica para o problema, solução aproximada. Para a resolução dos problemas de controle existem diversos métodos numéricos, os quais possibilitam a obtenção de uma solução aproximada. Algumas possibilidades de solução são baseados em Raggett (1977), Kumar (1976) e Hager (2000).

Métodos numéricos vêm sendo desenvolvidos desde a apresentação do Princípio do Máximo de Pontryagin, com o intuito de resolver o problema de controle ótimo. Os primeiros métodos desenvolvidos baseavam-se na procura de soluções que obedecessem o princípio de otimalidade, e não realizavam uma otimização direta no funcional objetivo do problema em questão (SCHWARTZ, 1996).

Os métodos utilizados na resolução dos problemas de controle ótimo podem ser divididos em duas classes, segundo Griesse e Walther (2004). Tais classes são:

1. *Métodos indiretos*: esses métodos utilizam o PMP na obtenção de condições necessárias para a otimização do problema. Tais condições convertem as equações de estado e adjuntas em um problema de valor de contorno, que pode ser resolvido numericamente.
2. *Métodos diretos*: esses métodos utilizam da abordagem de discretização do problema de controle ótimo os quais possui dimensão infinita, de modo a obter um problema de controle ótimo de dimensão finita, denominado problema de programação matemática, que pode ser resolvido numericamente (ver Capítulo 3), na qual a solução do problema discretizado converge para a solução ótima do problema.

A classe dos métodos diretos pode distinguir duas técnicas utilizadas na discretização do problema, sendo essas: a *discretização completa* que discretiza tanto as variáveis de estado quanto as variáveis de controle, e a *discretização recursiva* que realiza a discretização apenas nas variáveis de controle, e assim, para a avaliação do funcional objetivo necessita-se da integração das equações de estado (GRIESSE; WALTHER, 2004).

Kumar (1976) e Raggett (1977) apresentaram métodos indiretos como alternativas numéricas para a resolução de problemas de controle ótimo. Kumar (1976) faz uma investigação numérica do intitulado *control averaging technique* (CAT). Com a utilização desse método pode-se obter uma boa aproximação da solução ótima do problema de controle ótimo singular, com tempo computacional considerado pequeno. Essa abordagem representa o problema de valor de contorno resultante, da aplicação da condição necessária de Pontryagin, com um caso especial do operador geral de ponto fixo.

Enquanto que, Raggett (1977) descreve um método do tipo gradiente, intitulado *double operator gradient method* (DOG), que em geral é mais eficiente que os métodos do gradiente utilizados. Tal abordagem não utiliza o mesmo tamanho do passo nas iterações, como ocorre, por exemplo, no método do gradiente de passo fixo. Este por sua vez, dobra o tamanho do passo enquanto o valor do objetivo diminui. Caso ocorra um aumento no objetivo em algum determinado passo, então o passo é diminuído pela metade.

Os métodos diretos utiliza-se de alguma forma de discretização do problema antes que algum método de otimização seja aplicado. Hager (2000) e Griesse e Walther (2004) utilizaram da técnica de métodos diretos. A discretização completa para problemas

de controle ótimo é utilizada por Hager (2000), no qual as equações do método de discretização são tratadas como uma restrição adicional.

A partir da discretização do problema de controle ótimo, é possível determinar um problema de programação não-linear, o qual pode ser resolvido utilizando-se de vários métodos. Para a resolução dos problemas de controle de plantas daninhas será utilizado a técnica dos métodos diretos, no qual será efetuado a discretização completa (HAGER, 2000) de problema e posteriormente aplicado o método proposto por Hager e Zhang (2006), intitulado *active set algorithm* (ASA_CG) (ver Capítulo 3).

CAPÍTULO 6

A DESCRIÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE DE PLANTA DANINHA

Primeiramente, apresenta-se a função de dose-resposta, que é usada para quantificar a sensibilidade da planta ao herbicida, a relação entre a dose do herbicida e a resposta da planta daninha é importante para a compreensão da eficácia do herbicida. Através dessa análise pode-se detectar casos de resistência ao herbicida, pois plantas resistentes apresentam menor sensibilidade ao herbicida e, portanto, sua função de dose-resposta difere da função de plantas suscetíveis da mesma espécie. Casos de resistência de plantas daninhas ao herbicida inspiraram na detecção de biótipo resistente a partir de um modelo de evolução da resistência e também na evolução genética da resistência.

Posteriormente, apresenta-se a dinâmica populacional da planta daninha, considerando a evolução da resistência ao herbicida. A dinâmica populacional da planta daninha, possibilita entender como esta se relaciona com o meio e de que forma compete com a plantação (PARK; BENJAMIN; WATKINSON, 2002), qual o seu comportamento quando tenta controlar a infestação, qual a probabilidade e a taxa de evolução da resistência aos herbicidas (MAXWELL; ROUSH; RADOSEVICH, 1990; DIGGLE; NEVE; SMITH, 2003) e quais as formas de atacar o problema de infestação.

E finalmente, faz-se a formulação do rendimento final de uma colheita, considerando vários fatores que influenciam este rendimento, por exemplo, a forma em que é feito o plantio, o clima, densidade pluviométrica, pragas, doenças, infestação por plantas daninhas e outros fatores.

6.1 O modelo de dose-resposta

A relação entre a dose de herbicida e a resposta da planta é de fundamental importância para analisar a eficácia do herbicida e o meio de ação. A função de dose-resposta é usada para quantificar a sensibilidade da planta daninha ao herbicida.

A curva de dose-resposta usada para determinar a suscetibilidade ou resistência de plantas daninhas aos herbicidas aplicados é utilizada por diversos autores, e estes sugerem que o modelo log-logístico apresenta várias vantagens em relação a outros métodos de análise (STREIBIG; KUDSK, 1993; LACERDA; FILHO, 2004; KIM et al., 2006; MEROTTO et al., 2009).

Segundo Seefeldt, Jensen e Fuerst (1995) o modelo mais adequado de dose-resposta é o log-logístico devido a presença do parâmetro GR_{50} (growth reduction) na equação. O índice GR_{50} , representa a dose necessária para reduzir 50% do crescimento de uma população de plantas. Esse índice permite comparar o grau diferencial de suscetibilidade aos herbicidas entre espécies resistentes e suscetíveis.

A ação de diferentes herbicidas, dependendo do princípio ativo do herbicida, do genótipo da planta e/ou condições ambientais, gerará diferentes funções de dose-resposta.

O modelo de dose-resposta proposto por Seefeldt, Jensen e Fuerst (1995) usado para quantificar a sensibilidade da planta ρ ao herbicida u é o seguinte:

$$\rho(u) = c + \frac{d - c}{1 + \exp[b(\ln(u) - \ln(GR_{50}))]}, \quad (6.1)$$

em que c é o limite inferior da curva que corresponde às respostas médias com doses altas de herbicidas, d é o limite superior da curva que corresponde à resposta média da testemunha, b é a declividade da curva em torno de GR_{50} , GR_{50} corresponde à dose necessária para reduzir 50% do crescimento da planta daninha em relação a testemunha.

Variedades da mesma planta por algumas diferenças fisiológicas, dentre estas está a resistência da planta à dose do herbicida aplicado, faz com que estes parâmetros sofram alterações.

6.1.1 Evolução da resistência ao herbicida

A resistência de plantas daninhas ao herbicida é a capacidade adquirida e herdável de alguns biótipos da mesma espécie de sobreviverem e se reproduzirem após a exposição

à dose de um herbicida (CHRISTOFFOLETI, 2008). O aparecimento de biótipos de plantas daninhas resistentes aos herbicidas está condicionado a uma mudança genética na população, imposta pela pressão de seleção, causada pela aplicação repetitiva do herbicida na dose recomendada.

A pressão seletiva causada pela aplicação de herbicidas, aumenta a frequência dos biótipos resistentes (AITKENHEAD et al., 2003). O desenvolvimento do biótipo resistente é favorecido quando se aplicam elevadas doses do herbicida, utiliza-se herbicida com residual prolongado ou herbicida sem ação residual, mas, aplicado repetidamente, herbicida com alto grau de eficiência no controle do biótipo suscetível, proporcionando uma pressão de seleção muito grande.

As plantas daninhas apresentam uma grande variabilidade genética devido a diversos fatores como: adaptabilidade a diversos climas e solos, rapidez e diferentes métodos de reprodução, existir em diversas áreas, haver um banco de sementes dormentes capaz de manter múltiplas gerações imunes à condições não favoráveis.

A resistência pode ocorrer numa população de plantas daninhas através da mutação e da mudança na população da planta daninha por genes pré-existentes. Um dos principais fatores no desenvolvimento da resistência é a frequência inicial do genoma resistente a herbicida, mesmo em baixíssima frequência. Quanto maior a frequência inicial do biótipo resistente, maior a probabilidade de aumentar a proporção de indivíduos resistentes na população, em menor período de tempo, com aplicações sucessivas do herbicida selecionador (VIDAL; FLECK, 1997a).

O processo evolutivo é dinâmico, a velocidade da disseminação da característica na população é dada pela diferença na pressão seletiva, e diferentes formas de pressão seletiva levam a evolução em diferentes direções.

6.2 Frequência dos alelos

As funções de frequência genética dos alelos dominantes e recessivos em função da pressão seletiva segue os princípios descobertos por Fisher, Haldane e Wright, os três criadores da teoria moderna evolucionária (BRITTON, 2003):

$$p_{t+1} = p_t + g(p_t), \quad (6.2)$$

onde

$$g(p_t) = p_t q_t \frac{(w_x - w_y)p_t + (w_x - w_z)q_t}{w_x p_t^2 + 2w_y p_t q_t + w_z q_t^2}, \quad (6.3)$$

com parâmetros definidos na Tabela (1). A função $g(p_t)$ descreve o acréscimo entre as gerações de indivíduos cada vez mais resistentes, ou seja, a evolução por pressão seletiva, definida pela diferença entre as vantagens evolutiva w_x, w_y e w_z . A razão entre as vantagens evolutivas obedece $f(s)$:

$$\begin{aligned} f(s) &= (w_x, w_y, w_z) \\ &= \begin{cases} (1 + s, 1 + s, 1) & \text{alelo dominante,} \\ (1 + s, 1, 1) & \text{alelo recessivo,} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.4)$$

onde s é o fator de pressão seletiva e mede a resistência de seleção para o alelo p_t , sendo que $10^{-6} \leq s \leq 5 \times 10^{-1}$.

A função (6.2) prevê o comportamento esperado de uma população que se reproduz sexuadamente com gerações distintas, e é responsável pela evolução genética da resistência que depende da característica do biótipo da planta. O alelo pode ser dominante nuclear ou recessiva nuclear (BRITTON, 2003). A equação (6.2) é conhecida como função matemática de Fisher-Haldane-Wright (FHW).

Alelo dominante

No caso do alelo ter resistência dominante nuclear, de (6.4) tem-se $f(s) = (1 + s, 1 + s, 1)$. Assim, substituindo em (6.3), a equação FHW (6.2) torna-se:

$$p_{t+1} = p_t + s p_t q_t \frac{q_t}{1 + s(p_t^2 + 2p_t q_t)}.$$

Alelo recessivo

No caso do alelo ter resistência recessiva nuclear, de (6.4) tem-se $f(s) = (1 + s, 1, 1)$. Assim, substituindo em (6.3) a equação FHW (6.2) torna-se:

$$p_{t+1} = p_t + s p_t q_t \frac{p_t}{1 - s p_t^2}.$$

Tabela 1: Definição dos parâmetros e variáveis relacionados a frequência dos alelos

p_0	Frequência inicial da alelo
p_t	Frequência do alelo no ano t
q_t	Frequência do alelo oposto ($q_t = 1 - p_t$) no ano t
w_x	Vantagem evolutiva do homocigoto resistente
w_y	Vantagem evolutiva do heterocigoto resistente/suscetível
w_z	Vantagem evolutiva do homocigoto suscetível
s	Coefficiente de seleção

6.3 Modelo populacional de plantas daninhas

As plantas daninhas competem rigorosamente com as colheitas, resultando em grande perda de rendimento, pois essas plantas possui um alto poder de reprodução, gerando um grande número de sementes, afetando diretamente o tamanho do banco de sementes no solo.

O modelo que descreve a dinâmica populacional para as plantas daninhas é descrito segundo Jones e Cacho (2000):

$$y_t = x^g \delta x_t \quad (6.5)$$

$$y_t^a = (1 - \rho(u_t)) y_t \quad (6.6)$$

$$x_t^r = \exp[\gamma \ln y_t^a / (\mu + \varepsilon \ln y_t^a)] \quad (6.7)$$

$$x_t^n = \kappa x_t^r - \eta + \xi \quad (6.8)$$

$$x_{t+1} = x_t^n + (1 - \Psi)(1 - \delta)x_t \quad (6.9)$$

com variáveis e parâmetros definidos na Tabela (2). Considera-se x_t^r nulo quando y_t^a for menor que 0,5, pois, devido a forma do funcional em questão, o resultado de (6.7) tende ao infinito quando y_t^a se aproxima de zero.

A taxa de mortalidade induzida pelo herbicida, $\rho(u_t)$, apresentada em (6.1) é de fundamental importância. Esta descreve a relação entre a dose de herbicida e a resposta da planta, que é utilizada na compreensão da eficácia do herbicida e seu modo de ação. Logo, a função de dose-resposta tem como objetivo quantificar a sensibilidade da planta daninha ao herbicida, e assim, mudanças nessa sensibilidade alteram esta função. Plantas resistentes têm uma menor sensibilidade ao herbicida e, portanto, sua função dose-resposta difere da função dose-resposta de plantas daninhas suscetível da mesma espécie. Essa diferença na função dose-resposta é usada para detectar casos de resistência ao herbicida (MOSS, 1999).

Tabela 2: Definição dos parâmetros e variáveis do modelo populacional

x_t	Densidade do banco de sementes (m^{-2}) no início do ano t
p_t	Frequência do alelo dominante no ano t
q_t	Frequência do alelo recessivo no ano t
y_t	Densidade de plantas daninhas jovens (m^{-2}) no ano t
y_t^a	Densidade de plantas daninhas emergentes (m^{-2}) que chegam à fase adulta
x_t^r	Densidade de sementes (m^{-2}) resultantes da reprodução da planta daninha
x_t^n	Novas sementes adicionadas ao banco de sementes (m^{-2}) no ano t
x_t^g	Porcentagem de sementes germinadas que emergiram (m^{-2})
δ	Taxa de germinação anual das sementes da planta daninha
u_t	Dose de herbicida aplicada (litro ha^{-1}) no ano t
ρ	Taxa de mortalidade de plantas daninhas induzida pelo herbicida no ano t
γ, μ, ε	Coefficientes de x_t^r
κ	Taxa de sobrevivência de novas sementes
η	Retirada de sementes na colheita
ξ	Importação de sementes (vento, pássaros, etc)
Ψ	Índice de mortalidade de sementes dormentes
R	Porcentagem de biótipos resistentes
S	Porcentagem de biótipos suscetíveis

A resistência pode ser interpretada como uma diminuição significativa da eficiência do herbicida sobre plantas específicas, já que GR_{50} é utilizado para medir a eficiência do herbicida. Em toda uma população, a diminuição gradual dessa eficiência é o comportamento esperado, pois, o biótipo resistente se torna gradualmente mais presente no banco de sementes.

O modelo que descreve o comportamento da evolução da resistência GR_{50} , desenvolvido por Stiegelmeier et al. (2010), é expresso da seguinte forma:

$$GR_{50t}(R_t) = R_t GR_{50R} + (1 - R_t) GR_{50S} \quad (6.10)$$

onde GR_{50R} e GR_{50S} corresponde à dose necessária para a redução de 50% da resposta da planta daninha resistente e suscetível, respectivamente, e R_t é a resistência ao herbicida no tempo t , a qual é obtida como uma função da frequência dos alelos descrita posteriormente em (6.11).

6.3.1 Resistência ao herbicida e frequência dos alelos

O percentual de resistência R_t do biótipo resistente, assim como o seu complementar S_t , o biótipo suscetível, pode ser inferido através do conhecimento do fenótipo esperado da planta. O fenótipo é a característica observável do indivíduo, nesse caso os biótipos

resistentes e suscetíveis, resultado da interação do genótipo com o ambiente. Cada um dos três genótipos diferentes, dependem das características dos alelos que formam cada genótipo. Apresentam-se como mais comuns presentes em plantas daninhas os casos de alelos dominantes ou recessivos.

Stiegelmeier et al. (2010) utiliza dos conceitos de Mendel e do equilíbrio de Hardy-Weinberg, presentes em Britton (2003), para obter a relação do alelo com o genótipo.

No caso de alelo recessivo, somente o genótipo homozigoto (p_t^2) é responsável pela resistência. Então, a proporção de indivíduos resistentes pode ser obtida através de R_t^r :

$$R_t^r = p_t^2.$$

No caso de alelo dominante, além do genótipo homozigoto (p_t^2) o genótipo heterozigoto [$2p_t(1 - p_t)$] também é responsável pela resistência. Nesse caso, a proporção de indivíduos resistentes pode ser obtida através de R_t^d :

$$R_t^d = p_t^2 + 2p_t(1 - p_t).$$

Como há apenas a possibilidade de um dos dois casos, considera-se:

$$R_t = \begin{cases} R_t^r & \text{para o caso recessivo,} \\ R_t^d & \text{para o caso dominante.} \end{cases} \quad (6.11)$$

No caso do alelo ter resistência dominante nuclear, a função Fisher-Haldane-Wright (FHW) descrita na Seção 6.2 é dada por:

$$p_{t+1} = p_t + s(u_t)p_tq_t \frac{q_t}{1 + s(u_t)(p_t^2 + 2p_tq_t)} \frac{x_t^n}{x_t}, \quad (6.12)$$

onde $s(u_t) = Au_t$ é o coeficiente de pressão seletiva e A é um coeficiente de ajuste. O termo de ponderação x_t^n/x_t em (6.12) funciona como um "buffer" genético, atrasando a evolução da resistência ao expor somente as plantas adultas aos fatores de pressão seletiva. Considerando, assim, a existência do banco de sementes como alvo da evolução da resistência, englobando toda população, inclusive as sementes dormentes.

O modelo consiste, então, de (6.5)-(6.9), mas, com a função de dose-resposta (6.1) substituída por $\rho(u_t, R_t)$, GR_{50} por $GR_{50t}(R_t)$ dado por (6.10), R_t descrito segundo (6.11) e p_t dado por (6.12). Com isso, tem-se o seguinte modelo:

$$\begin{aligned}
x_{t+1} &= (1 - \Psi)(1 - \delta)x_t + \kappa \exp^{\frac{\gamma \ln \left(\left(1 - \left(c + \frac{d-c}{1 + \exp[b(\ln(u_t) - \ln(GR_{50t}(R_t)))]} \right) \right) x^{g \delta x_t} \right)}{\mu + \varepsilon \ln \left(\left(1 - \left(c + \frac{d-c}{1 + \exp[b(\ln(u_t) - \ln(GR_{50t}(R_t)))]} \right) \right) x^{g \delta x_t} \right)}} - \eta + \xi \\
p_{t+1} &= p_t + s(u_t) p_t q_t \frac{q_t}{1 + s(u_t)((p_t)^2 + 2p_t q_t)} \frac{x_t^n}{x_t}.
\end{aligned}$$

6.4 A função de produção e a função lucro

Na determinação da produção de um sistema agrícola vários fatores são envolvidos, estes podem ser fixos ou variáveis. Por exemplo, o rendimento da cultura é determinado por fatores como o tipo de variedade, solo, precipitação pluviométrica, pragas, doenças e vários outros fatores.

O objetivo nesse momento é avaliar as mudanças na densidade de plantas daninhas na lavoura através da aplicação de herbicidas, ou seja, não será utilizada qualquer outra técnica de controle além da aplicação do defensivo químico. Dessa forma, apenas dois fatores serão tomados como variáveis: a população inicial de plantas daninhas, x_t , e a dosagem de herbicida aplicada, u_t , e todos os outros fatores serão fixos denotados por z_t (JONES; CACHO, 2000). A função de produção pode ser escrita da seguinte forma:

$$Y = f(x_t, u_t, z_t). \quad (6.13)$$

O efeito de x_t em Y é reduzir o rendimento alcançado na lavoura, enquanto que o efeito de u_t é amenizar a perda causada por x_t . A função de produção (6.13) pode ser separada em outras duas funções: Y_0 , que é o rendimento de produção numa lavoura livre de plantas daninhas, e Y_L que é a perda de rendimento associada com a densidade e controle da planta daninha, expresso por:

$$\begin{aligned}
Y_0 &= f_1(z_t) \\
Y_L &= f_2(x_t, u_t),
\end{aligned}$$

no qual Y_L corresponde à perda de rendimento através da concorrência entre a cultura e a planta daninha. Segundo Cousens (1985b) a função que melhor descreve a perda de rendimento como uma função de densidade de planta daninhas é um hiperbolóide, pois, para uma baixa densidade de plantas daninhas têm-se uma maior competição com a cultura e assim causa uma redução na produção. No entanto, quando a densidade de planta daninha é alta o aumento da concorrência intra-específica tende a reduzir a perda

de rendimento. A função hiperbolóide é dada da seguinte forma:

$$Y_L = \frac{aD}{1 + \frac{a}{r}D},$$

onde a é o parâmetro que representa a perda de rendimento causada a cada adição de uma planta daninha por m^2 (baixas densidades de plantas daninhas), r é o parâmetro que indica a perda de rendimento quando a densidade de plantas daninhas tende ao infinito (altas densidades de plantas daninhas) e D é uma função da densidade inicial da planta daninha e da proporção de plantas daninhas mortas pela aplicação do herbicida de acordo com $\rho(u_t, R_t)$:

$$D = x_t(1 - \rho(u_t, R_t)), \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

Quando o herbicida é aplicado, há uma perda de rendimento na produção devido à ação tóxica do produto químico, Y_p , e dessa forma, a função de produção Y é descrita por:

$$Y = Y_0(1 - Y_L)(1 - Y_p).$$

Definida a função de produção, a função lucro para um problema no qual deseja-se determinar a dosagem ótima do herbicida aplicado na lavoura levando em consideração a resistência de planta e o custo de produção, é dada por:

$$\pi(x_t, p_t, u_t) = P_y Y(x_t, p_t, u_t) - P_u u_t - C(t) \quad (6.14)$$

com parâmetros definidos na Tabela (3). O termo $P_y Y$ de (6.14) é o rendimento total, sendo determinado não apenas pelo nível da variável de controle, mas também pela densidade inicial de plantas daninhas, x_t , e pela frequência do alelo, p_t . Portanto, o rendimento total para qualquer variação de u_t será especificado pelo valor inicial de x_t e p_t .

Tabela 3: Definição dos parâmetros e variáveis do modelo econômico

π	Lucro anual da fazenda (R\$ ha^{-1})
P_y	Preço de cada unidade do produto (R\$ $tonelada^{-1}$)
P_u	Custo por unidade de controle (R\$ $litro^{-1}$)
C	Constante dos custos de aplicação do controle e produção

CAPÍTULO 7

OTIMIZAÇÃO DINÂMICA MULTI-OBJETIVO DA APLICAÇÃO DE HERBICIDA

Neste capítulo, será apresentada a formulação do problema de otimização dinâmica multi-objetivo da aplicação de herbicida em planta daninha. Deve ficar claro que o objetivo em geral não é erradicar totalmente a planta daninha, e sim determinar uma relação entre o equilíbrio da lavoura com a planta daninha, visando maximizar o lucro do produtor e minimizar a evolução da resistência dessas plantas causada pelo uso do herbicida.

Para a resolução do problema seguirão as seguintes etapas: primeiramente utiliza-se da técnica de otimização multi-objetivo, para transformar o problema multi-objetivo em um problema de otimização mono-objetivo e posteriormente será utilizada uma estratégia que consiste em transformar o problema de controle ótimo resultante em um problema de programação não-linear.

7.1 Formulação do problema de otimização multi-objetivo

Segundo Kennedy (1986) o problema de controle de planta daninha deve ser tratado como um problema de manejo de recursos e, para isso, necessita-se desenvolver um modelo dinâmico. Logo é necessário definir de que forma a variável de estado irá evoluir com o tempo. Neste caso, considera-se como variável de estado o banco de sementes, x_t , e a frequência de alelo, p_t , e como variável de controle, u_t , expressa na função de dose-resposta $\rho(u_t, R_t)$. Deve-se definir a equação que descreve a variação deste banco de sementes com

o passar do tempo, como sendo uma equação dinâmica. Para esse caso, tratam-se as sementes da planta como um recurso renovável, e o banco de sementes como o estoque deste recurso. Nos problemas dinâmicos esse estoque pode alterar com o passar do tempo a solução ótima do problema.

Ao longo do tempo, o banco de semente pode sofrer alterações no seu tamanho, devido a diversos fatores, como a ação do controle aplicado, que causa o decréscimo do banco de sementes, e também, um aumento no número de sementes resistentes, ou a reprodução da planta, que faz com que o banco de sementes cresça com o passar dos anos. Essas alterações podem ser descritas da seguinte forma:

$$x_{t+1} = (1 - \Psi)(1 - \delta)x_t + \kappa \exp^{\frac{\gamma \ln \left(\left(1 - \left(c + \frac{d-c}{1 + \exp[b(\ln(u_t) - \ln(GR_{50t}(R_t)))]} \right) \right) x^{g \delta x_t}}{\mu + \varepsilon \ln \left(\left(1 - \left(c + \frac{d-c}{1 + \exp[b(\ln(u_t) - \ln(GR_{50t}(R_t)))]} \right) \right) x^{g \delta x_t}} \right)} - \eta + \xi \quad (7.1)$$

$$p_{t+1} = p_t + s(u_t)p_t q_t \frac{q_t}{1 + s(u_t)((p_t)^2 + 2p_t q_t)} \frac{x_t^n}{x_t}. \quad (7.2)$$

Observe que, no modelo populacional dado por (6.5)-(6.9), ao substituir (6.5) em (6.6), (6.6) em (6.7), (6.7) em (6.8), (6.8) em (6.9) e considerando que $GR_{50t}(R_t)$ é dado por (6.10), obtém-se a dinâmica populacional sintetizado por (7.1), a dinâmica da frequência dos alelos dada por (7.2) é obtida como apresentado em (6.12). A otimização do processo no período t influencia diretamente a otimização no período $t + 1$, no modelo dinâmico (7.1)-(7.2). Ou seja, a quantidade do controle aplicado em um período, irá afetar diretamente a solução ótima no ano seguinte.

De modo geral, o objetivo é determinar de que maneira, e em qual intensidade, o banco de sementes, x_t , de cada estação ou ano, é alterado com aplicação do herbicida, u_t , visando assim reduzir o uso do herbicida e, conseqüentemente, maximizar o lucro do produtor e minimizar o acréscimo da resistência da planta daninha causada pelo uso do herbicida num período pré-determinado. Como o interesse da pesquisa é otimizar dois fatores, o problema resultante será um problema de otimização multicritérios, cuja teoria foi exposta no Capítulo 4.

O problema de otimização dinâmica multi-objetivo é descrito da seguinte forma:

$$\max (J_1, J_2) = \left(\sum_{t=0}^T \alpha^t \pi(x_t, p_t, u_t), -R_T \right) \quad (7.3)$$

sujeito a:

$$x_{t+1} = g(x_t, p_t, u_t) \quad (7.4)$$

$$p_{t+1} = v(x_t, p_t, u_t) \quad (7.5)$$

$$x(0) = x_0 \quad (7.6)$$

$$p(0) = p_0 \quad (7.7)$$

$$0 \leq p(t) \leq 1 \quad (7.8)$$

$$\frac{10^{-6}}{A} \leq u(t) \leq \min\left\{u_{\max}, \frac{0.5}{A}\right\} \quad (7.9)$$

onde J_1 é o lucro alcançado em um período de T anos, π é uma função suave dada por (6.14), J_2 é o oposto da resistência da planta daninha dada por (6.11), g é a taxa de mudança no banco de sementes a partir da aplicação do herbicida dada por (7.1), v é a taxa de mudança na frequência dos alelos decorrente da pressão de seleção exercida pelo herbicida dada por (7.2), A é um coeficiente de ajuste, α é um fator de desconto (KENNEDY, 1986), u_{\max} é a dose máxima de herbicida permitida em campo e (7.9) é o conjunto de valores admissíveis para u_t .

O problema descrito por (7.3)-(7.9) apresenta dois objetivos a serem otimizados que são conflitantes entre si, ou seja, é impossível melhorar um objetivo sem deteriorar o outro. Para a resolução do problema (7.3)-(7.9) utilizou-se a abordagem ϵ -restrito, descrita na Subseção 4.6.2, essa abordagem consiste em transformar o problema multi-objetivo em um problema mono-objetivo, de forma que apenas um objetivo seja otimizado e os outros objetivos são restritos sob determinadas condições que garantem que a solução obtida é uma solução eficiente (HAIMES; LASDON; WISMER, 1971; DEB, 2001). Neste problema especificamente será otimizado o lucro, e o oposto da resistência no tempo final será restrito.

Via a abordagem ϵ -restrito, obtém-se o seguinte problema equivalente (P_ϵ):

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=0}^T \alpha^t \pi(x_t, p_t, u_t) \\ \text{sujeito a:} \quad & \\ & -R_T \geq \epsilon \\ & x_{t+1} = g(x_t, p_t, u_t) \\ & p_{t+1} = v(x_t, p_t, u_t) \\ & x(0) = x_0 \\ & p(0) = p_0 \\ & 0 \leq p(t) \leq 1 \\ & \frac{10^{-6}}{A} \leq u(t) \leq \min\{u_{\max}, \frac{0.5}{A}\}, \end{aligned}$$

onde $\epsilon \in [J_2^0, J_2^*]$ e J_2^0, J_2^* são os valores mínimo e máximo para ϵ , respectivamente. Agora, utilizando o método de penalização no problema (P_ϵ), tem-se o seguinte problema (P'_ϵ):

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{t=0}^T \alpha^t \pi(x_t, p_t, u_t) - r_p (\max[0, \epsilon + R_T]^2) \\ \text{sujeito a:} \quad & \\ & x_{t+1} = g(x_t, p_t, u_t) \\ & p_{t+1} = v(x_t, p_t, u_t) \\ & x(0) = x_0 \\ & p(0) = p_0 \\ & 0 \leq p(t) \leq 1 \\ & \frac{10^{-6}}{A} \leq u(t) \leq \min\{u_{\max}, \frac{0.5}{A}\}, \end{aligned}$$

onde r_p é o parâmetro de penalidade. A teoria de controle ótimo é aplicada para determinar a taxa anual de herbicida que maximize o funcional objetivo. Uma componente importante desse tipo de problema são as variáveis de coestado, denotadas por λ_t e β_t , semelhantes aos multiplicadores de Lagrange. A forma como as variáveis de coestado são inseridas no problema de controle ótimo é através da função Hamiltoniana. Para o problema de manejo de plantas daninhas a função Hamiltoniana é dada por Kennedy (1986):

$$\begin{aligned} H_t(\lambda_{t+1}, \beta_{t+1}, x_t, p_t, u_t) = & (\pi(x_t, p_t, u_t) - r_p (\max[0, \epsilon + R_T])^2) + \alpha \lambda_{t+1} g(x_t, p_t, u_t) \\ & + \alpha \beta_{t+1} v(x_t, p_t, u_t). \end{aligned}$$

A função Hamiltoniana, H_t , representa o máximo do funcional objetivo a partir de um determinado nível das variáveis de estado, x_t e p_t , e do controle u_t , mais o valor de alguma mudança no estoque das variáveis de estado, avaliada com as variáveis de coestado λ_{t+1} e β_{t+1} , onde α é um fator de desconto dado segundo Kennedy (1986).

Para o problema de manejo de plantas daninhas a função Hamiltoniana é dada segundo Kennedy (1986):

$$\frac{\partial H_t}{\partial u_t} = P_y \frac{\partial Y}{\partial u_t} - P_u + \alpha \lambda_{t+1} \frac{\partial g}{\partial u_t} + \alpha \beta_{t+1} \frac{\partial v}{\partial u_t} = 0 \quad (7.10)$$

$$\alpha \lambda_{t+1} = -\frac{\partial H_t}{\partial x_t} = -P_y \frac{\partial Y}{\partial x_t} - \alpha \lambda_{t+1} \frac{\partial g}{\partial x_t} \quad (7.11)$$

$$x_{t+1} = \frac{\partial H_t}{\partial \lambda_{t+1}} = g(x_t, p_t, u_t) \quad (7.12)$$

$$\alpha \beta_{t+1} = -\frac{\partial H_t}{\partial p_t} = -P_y \frac{\partial Y}{\partial p_t} - \alpha \beta_{t+1} \frac{\partial v}{\partial p_t} \quad (7.13)$$

$$p_{t+1} = \frac{\partial H_t}{\partial \beta_{t+1}} = v(x_t, p_t, u_t) \quad (7.14)$$

onde (7.10) fornece a condição necessária para a maximização do problema com relação a u_t , (7.11) e (7.13) corresponde às equações de coestado e (7.12) e (7.14) são as redeclarações das equações de movimento em relação ao banco de sementes e a frequência do alelo, respectivamente. As variáveis de estado dependem do estado inicial do sistema x_0 e p_0 , embora x_0 e p_0 sejam dados, λ_1 e β_1 são desconhecidos e uma condição adicional, conhecida como a condição de transversalidade, é requerida para o problema obtenha solução única. Em particular, tem-se que o tempo final T é dado, e o estado final x_T é livre, assim a condição de transversalidade é $\lambda_{T+1} = 0$ e $\beta_{T+1} = 1$. Com isso, permite determinar o processo ótimo, composto pelas variáveis de estado x^* e p^* , a variável de controle u^* e as variáveis de coestado relacionadas ao estado, λ^* e β^* , respectivamente.

Uma vez que o problema em questão, (P'_c) , possui restrição sobre a variável de controle, u_t , na forma de limitantes inferiores e superiores, um método de programação não-linear para variáveis limitadas deve ser adotado. Assim, utilizou-se o método ASA_CG descrito na Seção 3.1.2.

7.2 Resultados de simulação

Nesta seção apresenta-se um estudo de caso que analisará a dinâmica populacional da planta daninha *Bidens subalternans*, presente na cultura do milho, com aplicação de controle através do herbicida nicosulfuron, no qual será utilizado o mesmo mecanismo de

ação em cada aplicação. Busca-se a melhor forma de combater a infestação para obter a melhor lucratividade e diminuir a aceleração da resistência da planta daninha ao herbicida.

Os valores dos parâmetros econômicos utilizados para a cultura do milho safra 2009/2010, do modelo populacional e do modelo de dose-resposta encontram-se na Tabela 5. Os coeficientes técnicos e os custos de cultivo do milho, safra 2009/2010 foram obtidos Broch e Pedroso (2009), os dados referentes ao modelo populacional foram obtidos Jones e Cacho (2000), e os experimentos para determinar os parâmetros da função de dose-resposta foram conduzidos em casa de vegetação na Embrapa Milho e Sorgo de Sete Lagoas-MG. As sementes foram disponibilizadas pelo Dr. Dionisio Gazziero da Embrapa Soja de Londrina-PR.

Foi avaliado o desenvolvimento do banco de sementes, da dinâmica da resistência, através da frequência dos alelos, e a taxa ótima do herbicida para os períodos de 5 e 10 anos, com condição inicial do banco de sementes de 500 sementes m^{-2} e frequência dos alelos 0, 1. Essa frequência indica um percentual de indivíduos resistentes na população próximo ao índice detectável agronomicamente.

Os resultados foram obtidos utilizando o método ASA_CG, descrito na Seção 3.1.2. A implementação computacional foi feita em linguagem de programação C e os testes foram executados em um microcomputador Intel Core i3, com 4 GB de memória RAM.

A Figura 5 apresenta o conjunto de Pareto-ótimo para um horizonte de 5 anos. Tal conjunto é obtido conforme os valores de ϵ variam no intervalo $[-0,55; -0,20]$, obtido segundo a abordagem ϵ -restrito. Analisando o conjunto de Pareto-ótimo, observamos que a melhor solução para o problema em curso ocorre quando o lucro é R\$814,96 e o oposto resistência da planta daninha no tempo final é $-0,44$, pois, para valores menores do oposto da resistência ocorre um acréscimo muito pequeno no lucro e para valores maiores no oposto da resistência tem-se um decréscimo acentuado no lucro.

Já a Figura 6 apresenta o conjunto de Pareto-ótimo para um horizonte de 10 anos. Tal conjunto é obtido conforme os valores de ϵ variam no intervalo $[-0,68; -0,20]$. Analisando o conjunto de Pareto-ótimo, considere que a melhor solução para o problema em curso ocorre quando o lucro é R\$815,24 e o oposto resistência da planta daninha no tempo final é $-0,56$, pela mesma análise feita anteriormente.

A partir das análises feitas nos conjuntos de Pareto-ótimos, serão apresentados os resultados quando maximiza-se separadamente o lucro do produtor, minimiza-se separadamente a aceleração da resistência da planta daninha no último ano, e do problema

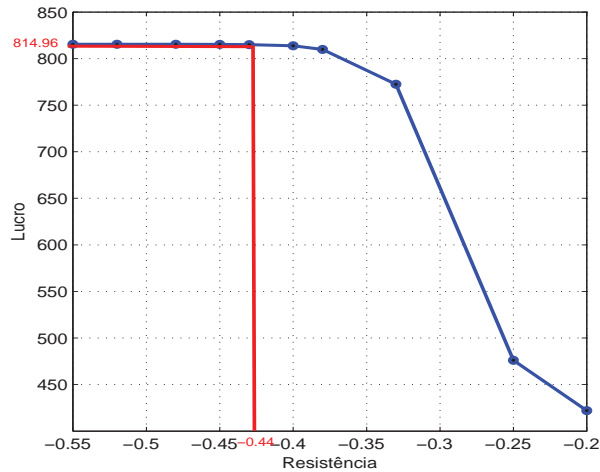


Figura 5: Conjunto de Pareto-ótimo para 5 anos.

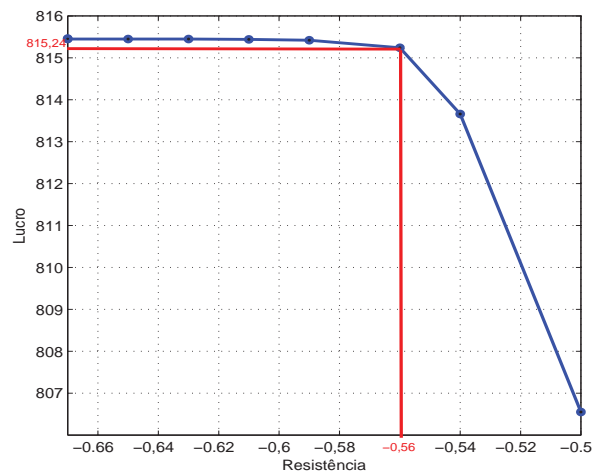


Figura 6: Conjunto de Pareto-ótimo para 10 anos.

multi-objetivo em questão, em que busca-se maximizar o lucro e minimizar a evolução da resistência da planta daninha ao herbicida, simultaneamente.

As Figuras 7(a) e 8(a) trazem o valor ótimo do banco de sementes, x^* , as Figuras 7(b) e 8(b) trazem a frequência ótima dos alelos, p^* , e as Figuras 7(c) e 8(c) a taxa ótima de controle aplicado, u^* , para um horizonte de 5 e 10 anos, respectivamente.

Verifica-se nas Figuras 7(a) e 8(a) que o banco de sementes sofre um decréscimo significativo com o passar do tempo. No caso multi-objetivo houve um pequeno acréscimo, no terceiro e sexto ano, respectivamente, devido às baixas doses do herbicida aplicadas anterior a esse período, em virtude da busca por minimizar a resistência. Nas Figuras 7(b) e 8(b) observa-se um decréscimo significativo da frequência dos alelos do biótipo resistente

aplicando a otimização multi-objetivo, comparado com o caso quando otimiza-se apenas o lucro, fato esse que ocorre devido às baixas doses do herbicidas aplicadas nos períodos considerados.

Já nas Figuras 7(c) e 8(c) tem-se a taxa ótima da aplicação de herbicidas para um horizonte de 5 e 10 anos, respectivamente. Em cada um dos problemas analisados quando considera-se a resistência das plantas daninhas, observa-se que em quase todo o período as doses do herbicida aplicadas são baixas comparadas com o caso em que busca-se apenas maximizar o lucro.

Nas Figuras 7(d) e 8(d) mostra-se o lucro ótimo obtido no último ano para cada um dos problemas analisados e o lucro de produção de uma lavoura de milho safra 2009/2010, segundo Broch e Pedroso (2009).

Comparando-se o lucro de produção de uma lavoura de milho safra 2009/2010, que gira em torno de R\$766, 11 com o lucro otimizado R\$814, 96 no quinto ano, e R\$815, 45 no décimo ano, verifica-se um maior benefício econômico usando o herbicida de forma seletiva e uma diminuição significativa na presença de sementes resistentes de plantas daninhas, em comparação os resultados obtidos quando otimiza-se apenas o lucro.

Quando busca apenas maximizar o lucro, obtém-se um retorno econômico de R\$815, 78 no quinto ano e de R\$815, 45 no décimo ano. Porém o percentual de resistência da planta daninha gira em torno de 0, 55 e de 0, 68, respectivamente. Já quando utiliza-se o problema multi-objetivo, obtém-se um retorno econômico de R\$814, 96 no quinto ano e de R\$815, 24 no décimo ano, praticamente equivalente ao caso anterior. Entretanto, o percentual da resistência da planta daninha (*Bidens subalternans*) cai para 0, 45 e 0, 56, respectivamente (ver Tabela 4).

Assim, observa-se que é desaconselhável para o controle de planta daninha otimizar exclusivamente o lucro ou a resistência (ou seja, no extremo do conjunto de Pareto mostrado), pois, sempre pode-se encontrar uma alternativa que busca uma solução de compromisso, sem necessariamente ter uma redução brusca no lucro. Em outras palavras, pode-se mover de um ponto de extremidade do conjunto de Pareto (solução utópica de um funcional), buscando-se uma melhoria do outro funcional, com pouquíssimo sacrifício deste.

Portanto, a partir do problema de otimização multi-objetivo conclui-se que o uso do herbicida de forma seletiva contribui para o aumento de produção de uma lavoura tornando o processo de produção cada vez mais viável economicamente, com um retardo

na predição da resistência da planta daninha e, ainda, uma melhor utilização do produto químico que está em curso, o que gera benefício ao meio ambiente. Permitindo com isso o uso mais racional da técnica de controle químico da planta daninha na cultura do milho, tanto do ponto de vista econômico, possibilitando maior lucro ao produtor, com do ponto de vista ambiental, com redução dos volumes de produtos, como social reduzindo o risco de contaminação do aplicador, em virtude da redução da dose.

Além dos benefícios apontados pode-se destacar que a utilização da técnica de otimização multi-objetivo, no caso de controle químico de plantas daninhas, prolonga o período de uso da molécula de herbicida em questão, ocasionando ganhos econômico a empresa detentora, que necessitará desprezar sua linha de produção.

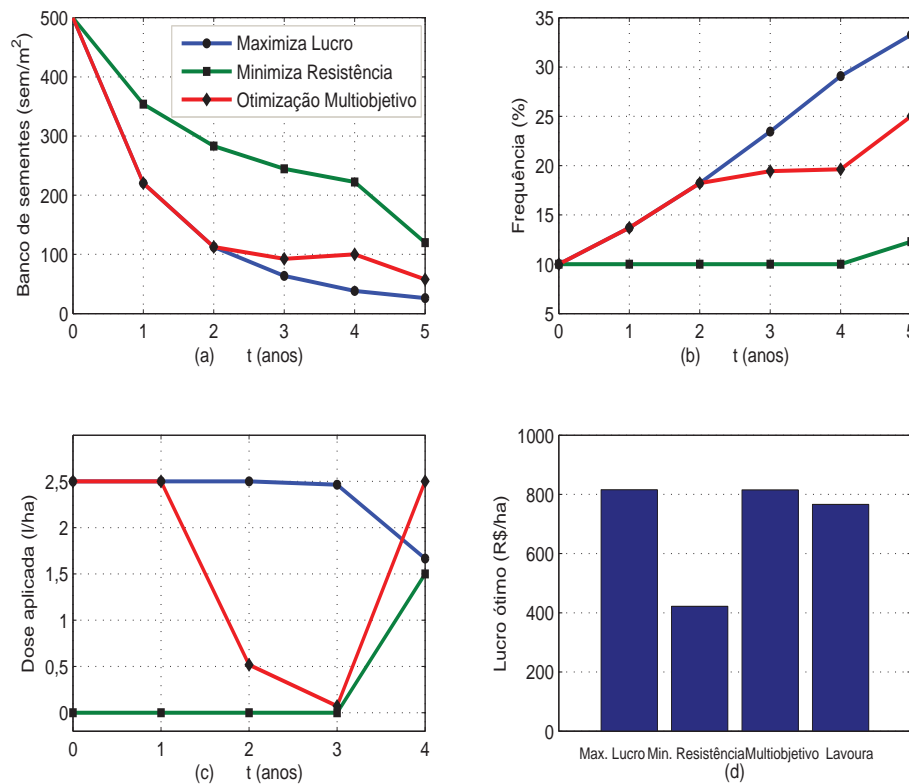


Figura 7: Resultados da otimização multicritérios para o horizonte de 5 anos.

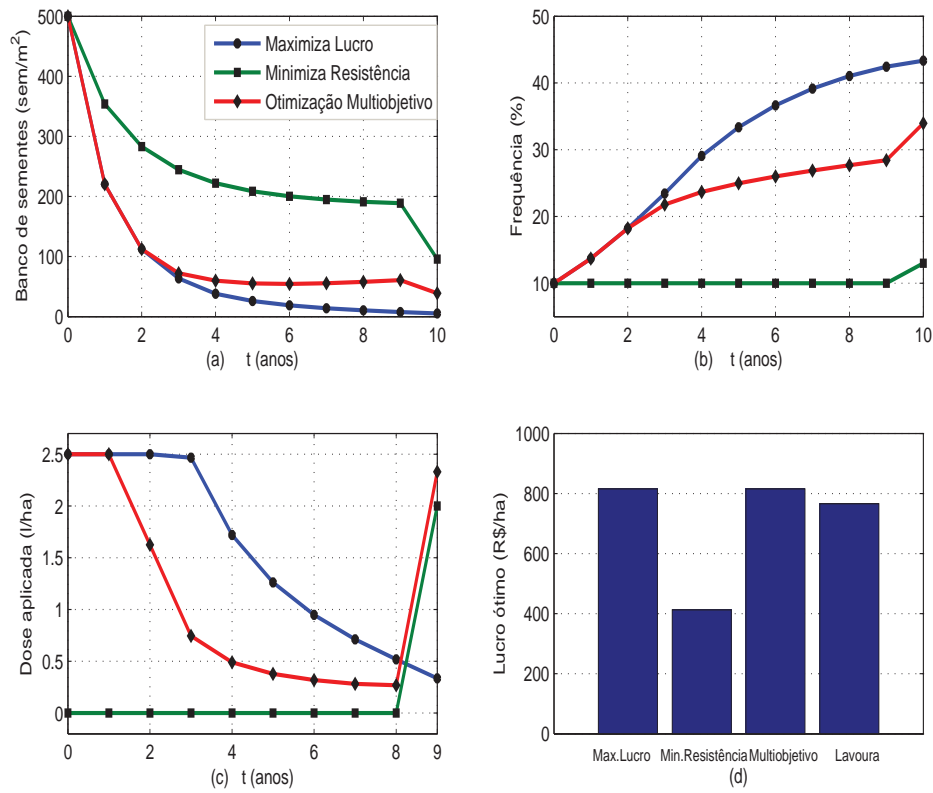


Figura 8: Resultados da otimização multicritérios para o horizonte de 10 anos.

Tabela 4: Análise dos resultados

	Lucro (R\$)	
	5 ^o ano	10 ^o ano
Max. Lucro	815,78	815,45
Otim. Multi-objetivo	814,96	815,24
	Resistência (%)	
	5 ^o ano	10 ^o ano
Max. Lucro	55	68
Otim. Multi-objetivo	44	56

Tabela 5: Valores dos parâmetros usados na simulação numérica

Populacional	Valores
$\delta(\%)$	60
$\psi(\%)$	30
$\eta(\text{sementes } m^{-2})$	0
$\xi(\text{sementes } m^{-2})$	0
$\kappa(\%)$	30
$x^g(\%)$	80
γ	6,80
μ	2,00
ε	0,67
A	0,20
Dose-resposta	
b	-0,599
c	$-0,917 \cdot 10^{-3}$
d	112,73
GR_{50S} (litro ha^{-1})	$0,125 \cdot 10^{-1}$
GR_{50R} (litro ha^{-1})	2,173
Econômicos	
P_y (R\$ tonelada $^{-1}$)	283,33
P_u (R\$ litro $^{-1}$)	49,90
Y_0 (tonelada ha^{-1})	8,64
C (R\$ ha^{-1})	436,26
u_{max} (litro ha^{-1})	7,00

CAPÍTULO 8

OTIMIZAÇÃO DA CONCENTRAÇÃO DE MISTURA DE HERBICIDAS

O uso intensivo de produtos químicos com o mesmo mecanismo de ação no controle de plantas daninhas contribui para o aumento da proporção da resistência destas plantas (CHRISTOFFOLETI, 2008). No capítulo anterior, utilizamos da otimização multi-objetivo para controlar essa situação. Aqui, será apresentada a formulação do problema de otimização dinâmica na aplicação de mistura de herbicidas, herbicidas esses, que possuem diferentes mecanismo de ação em planta daninha. Com isso, busca-se retardar o acréscimo da resistência da planta daninha a determinado herbicida e um acréscimo na lucratividade do produtor.

Para a resolução do problema de controle ótimo será utilizada uma estratégia que consiste em transformar o problema de controle ótimo em um problema de programação não-linear.

8.1 Formulação do problema de otimização da concentração de mistura

A aplicação sequencial de dois herbicidas diferentes, mas com o mesmo mecanismo de ação, tem um efeito semelhante à aplicação repetitiva de um dos herbicidas isoladamente, pois, ambos exercem pressão de seleção semelhante na população. Assim, a mistura de herbicidas com diferentes mecanismos de ação é importante para retardar o aparecimento de biótipos resistentes e, com isso, ter uma eficácia maior no controle de plantas daninhas

e uma melhor utilização dos produtos estará em curso.

Para a modelagem do problema de controle de plantas daninhas utilizando diferentes tipos de herbicidas é necessário inserir no modelo o índice relacionado i , a qual está relacionada ao tipo de herbicida que será utilizado no controle de planta daninha (STIEGELMEIER, 2012).

A dinâmica populacional das plantas daninhas, quando se utiliza diferentes tipos de herbicidas, é apresentada por Stiegelmeier (2012):

$$\begin{aligned} g_i(x_t, p_t^i, u_t^i) &= (1 - \Psi)(1 - \delta)x_t + \kappa \exp \frac{\gamma \ln \left(\left(1 - \left(c + \frac{d-c}{1 + \exp[b(\ln(u_t^i) - \ln(GR_{50t}(R_t^i))]} \right) \right)^{x^g \delta x_t} \right)}{\mu + \varepsilon \ln \left(\left(1 - \left(c + \frac{d-c}{1 + \exp[b(\ln(u_t^i) - \ln(GR_{50t}(R_t^i))]} \right) \right)^{x^g \delta x_t} \right)} - \eta + \xi \\ v_i(x_t, p_t^i, u_t^i) &= p_t^i + s(u_t^i) p_t^i q_t^i \frac{q_t^i}{1 + s(u_t^i)((p_t^i)^2 + 2p_t^i q_t^i)} \frac{x_t^n}{x_t}, \end{aligned}$$

no qual, i corresponde ao tipo de herbicida. A função de produção é dado por Jones e Cacho (2000):

$$Y_i(x_t, p_t^i, u_t^i) = Y_0(1 - Y_L)(1 - Y_p)$$

onde Y_0, Y_p são constantes e a função de perda de rendimento é:

$$Y_L = \frac{aD_i}{1 + \frac{a}{r}D_i}$$

com a e r constantes definidas na Seção 6.4 e

$$D_i(x_t, p_t^i, u_t^i) = x_t(1 - \rho(u_t^i, R_t^i)), \quad 0 \leq \rho_i \leq 1.$$

A função de dose-resposta do herbicida i é dada por:

$$\rho_i(u_t^i, R_t^i) = c + \frac{d-c}{1 + \exp[b(\ln(u_t^i) - \ln(GR_{50i}(R_t^i)))]}.$$

A função que descreve a evolução da resistência em relação ao herbicida i é descrita por Stiegelmeier (2012), da seguinte forma:

$$GR_{50i}(R_t^i) = R_t^i GR_{50R}^i + (1 - R_t^i) GR_{50S}^i$$

no qual, R_t^i é dado como em (6.11), referente ao herbicida i .

A função de produção para o problema no qual deseja-se determinar a dosagem ótima

do herbicida aplicado na lavoura levando em consideração a resistência da planta daninha e o custo de produção, é dada por:

$$\pi_i(x_t, p_t^i, u_t^i) = P_y Y_i(x_t, p_t^i, u_t^i) - P_u u_t^i - C^i(t).$$

O objetivo, neste momento, é determinar a concentração ótima dos herbicidas a serem aplicados e a dosagem ótima destes em um período pré-determinado de tempo T , visando assim reduzir o uso de herbicida e retardar o aparecimento de biótipos resistentes e, conseqüentemente, maximizar o lucro em um período pré-determinado de tempo.

O problema de otimização, considerando a concentração de mistura de herbicidas, pode ser modelado como um problema de controle ótimo:

$$\max_{u_t^i, \lambda_t^i} J = \sum_{i=1}^l \sum_{t=0}^T \lambda_t^i \alpha^t [P_y Y_i(x_t, p_t^i, u_t^i) - P_u u_t^i - C^i(t) - p^i(T)] \quad (8.1)$$

sobre o processo $(x_t, p_t^i, u_t^i, \lambda_t^i)$ satisfazendo

$$x_{t+1} = \sum_{i=1}^l \lambda_t^i g_i(x_t, p_t^i, u_t^i) \quad (8.2)$$

$$p_{t+1}^i = v_i(x_t, p_t^i, u_t^i) \quad (8.3)$$

$$x(0) = x_0 \quad (8.4)$$

$$p^i(0) = p_0^i \quad (8.5)$$

$$\sum_{i=1}^l \lambda_t^i \frac{10^{-6}}{A^i} \leq \sum_{i=1}^l u_t^i \leq \sum_{i=1}^l \min \left\{ u_{max}^i, \frac{0,5}{A^i} \right\} \lambda_t^i \quad (8.6)$$

$$\sum_{i=1}^l \lambda_t^i = 1, \quad \lambda_t^i \in [0, 1] \quad i = 1, \dots, l; \quad t = 0, \dots, T. \quad (8.7)$$

com variáveis a população de plantas daninhas, x_t , a frequência dos alelos, p_t^i , a dosagem de cada herbicida, u_t^i , e o percentual da dosagem referente a cada herbicida utilizado, λ_t^i , com parâmetros definidos na Tabela 2. A restrição (8.7) permite que se utilize a concentração de mistura dos herbicidas numa mesma aplicação.

Para o problema (8.1)-(8.7), tem-se a seguinte função de penalidade, $P(x_t, p_t^i, u_t^i, \lambda_t^i)$:

$$P(x_t, p_t^i, u_t^i, \lambda_t^i) = \left(\max \left[0, \sum_{i=1}^l u_t^i - \sum_{i=1}^l \min \left\{ u_{max}^i, \frac{0,5}{A^i} \right\} \lambda_t^i \right] \right)^2 + \left(\max \left[0, \sum_{i=1}^l \lambda_t^i \frac{10^{-6}}{A^i} - \sum_{i=1}^l u_t^i \right] \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^l \lambda_t^i - 1 \right)^2.$$

Assim, a nova função objetivo chamada pseudo objetivo, penalizada de acordo com um fator de penalidade r_p , é dada por:

$$\Phi(x_t, p_t^i, u_t^i, \lambda_t^i) = \sum_{i=1}^l (\lambda_t^i \alpha^t \{P_y Y_i(x_t, p_t^i, u_t^i) - P_u^i u_t^i - C^i(t) - p^i(T)\}) - r_p P(x_t, p_t^i, u_t^i, \lambda_t^i).$$

Conseqüentemente, tem-se o seguinte problema resultante:

$$\max_{u_t^i, \lambda_t^i} J = \sum_{t=0}^T \Phi(x_t, p_t^i, u_t^i, \lambda_t^i) \quad (8.8)$$

sobre o processo $(x_t, p_t^i, u_t^i, \lambda_t^i)$ satisfazendo

$$x_{t+1} = \sum_{i=1}^l \lambda_t^i g_i(x_t, p_t^i, u_t^i) \quad (8.9)$$

$$p_{t+1}^i = v_i(x_t, p_t^i, u_t^i) \quad (8.10)$$

$$x(0) = x_0 \quad (8.11)$$

$$p^i(0) = p_0^i \quad (8.12)$$

$$\lambda_t^i \in [0, 1], \quad i = 1, \dots, l \text{ e } t = 0, \dots, T. \quad (8.13)$$

Aplicando a teoria de controle ótimo no problema resultante (8.8)-(8.13), para obter as taxas anuais dos herbicidas e das concentrações de mistura que maximize o funcional objetivo em questão. Para o problema de manejo de plantas daninhas a função Hamiltoniana é dada por Kennedy (1986):

$$H_t = \Phi(x_t, p_t^i, u_t^i, \lambda_t^i) + \alpha \mu_{t+1} \sum_{i=1}^l \lambda_t^i g_i(x_t, p_t^i, u_t^i) + \sum_{i=1}^l \alpha \beta_{t+1}^i v_i(x_t, p_t^i, u_t^i), \quad (8.14)$$

no qual μ_{t+1} e β_{t+1}^i , com $i = 1, \dots, l$, são as variáveis de coestado e α é um fator de desconto (KENNEDY, 1986). Assim, as condições de primeira ordem para o problema de manejo de recursos, dadas pelo princípio do máximo de Pontryagin, segundo Kennedy (1986) são:

$$\frac{\partial H_t}{\partial u_t^i} = 0 \quad (8.15)$$

$$\frac{\partial H_t}{\partial \lambda_t^i} = 0 \quad (8.16)$$

$$\alpha \mu_{t+1} = -\frac{\partial H_t}{\partial x_t} \quad (8.17)$$

$$x_{t+1} = \frac{\partial H_t}{\partial \mu_{t+1}} = \sum_{i=1}^l \lambda_t^i g_i(x_t, p_t^i, u_t^i) \quad (8.18)$$

$$\alpha \beta_{t+1}^i = -\frac{\partial H_t}{\partial p_t^i} \quad (8.19)$$

$$p_{t+1}^i = \frac{\partial H_t}{\partial \beta_{t+1}^i} = v_i(x_t, p_t^i, u_t^i) \quad (8.20)$$

$$i = 1, \dots, l \quad (8.21)$$

onde (8.15) e (8.16) fornecem as condições necessárias para a maximização do problema com relação a u_t^i e λ_t^i , respectivamente, (8.17) e (8.19) correspondem às equações de coestado e (8.18) e (8.20) são as redeclarações das equações de movimento em relação ao banco de sementes e a frequência dos alelos, respectivamente. As variáveis de estado que são dadas dependem do estado inicial, e requerida a condição de transversalidade permitem que o problema (8.15)-(8.21) possua uma única solução, ou seja, determinar o processo ótimo.

Uma vez que o problema em questão, (8.8)-(8.13), possui restrição sobre a variável de controle, λ_t^i , na forma de limitantes inferiores e superiores, um método de programação não-linear para variáveis limitadas deve ser adotado. Assim, utilizou-se o método ASA_CG descrito na Seção 3.1.2.

8.2 Resultados de simulação

Nesta seção é apresentado um estudo de caso da planta daninha *Bidens subalternans*, presente na cultura do milho, com aplicação de controle através dos herbicidas nicosulfuron (inibidor de ALS) e atrazine (inibidor de fotossíntese, FS II), herbicidas com diferentes mecanismo de ação, aplicados isoladamente e em concentração de mistura. Busca-se a melhor forma de combater a infestação e retardar a evolução da resistência, buscando obter a melhor lucratividade possível com reduzido comprometimento ambiental.

Os valores dos parâmetros econômicos utilizados para a cultura do milho safra 2009/2010,

do modelo populacional e do modelo da dose-resposta encontram-se na Tabela 7. Os coeficientes técnicos de produção e o custo do cultivo do milho, safra 2009/2010 foram obtidos de Broch e Pedroso (2009), os dados referentes ao modelo populacional foram obtidos de Jones e Cacho (2000), e os experimentos para determinar os parâmetros das funções de dose-resposta foram conduzidos em casa de vegetação na Embrapa Milho e Sorgo de Sete Lagoas-MG, no qual as sementes foram disponibilizadas pelo Dr. Dionisio Gazziero da Embrapa Soja de Londrina-PR.

Foi avaliado o desenvolvimento do banco de sementes, da dinâmica da resistência, através da frequência dos alelos, do percentual da taxa ótima de concentração de mistura dos herbicidas e da dose ótima dos herbicidas para o período de 5 e 10 anos, com condição inicial do banco de sementes de 500 sementes m^{-2} e as frequências dos alelos 0,1 para ambos mecanismo de ação. Essa frequência indica um percentual de indivíduos resistentes na população, próximo ao índice detectável agronomicamente.

Os resultados foram obtidos utilizando o método ASA_CG, a implementação computacional foi feita em linguagem de programação C e os testes foram executados em um microcomputador Intel Corel i3, com 4 GB de memória RAM.

A seguir, apresentam-se os resultados quando utiliza a aplicação dos herbicidas separadamente, isto é, apenas o nicosulfuron ou a atrazine, e em mistura, quando utiliza o nicosulfuron e a atrazine em diferentes concentrações de mistura dos mesmos.

As Figuras 9(a) e 11(a) trazem o valor ótimo do banco de sementes, x^* , este sofre um decréscimo significativo com o passar do tempo nos três casos avaliados, independente do período da simulação. Quando utilizou-se apenas a atrazine, na simulação de 10 anos, obteve-se um pequeno aumento no banco de sementes após o quinto ano. Esse aumento é coincidente com as baixas doses do produto aplicadas nesse período (ver Figura 11(d)), estabilizando a frequência de alelos a partir do quinto ano (ver Figura 11(b)).

Já as Figuras 9(b) e 11(b) trazem a evolução da resistência da planta daninha com o passar do tempo, através de p^* . No caso da utilização de mistura a frequência dos alelos resistentes é apresentada separadamente para cada herbicida, apontados nas figuras 9(b) e 11(b) por mistura $i = 1$ e mistura $i = 2$, para os herbicidas nicosulfuron e atrazine, respectivamente. Houve um decréscimo significativo da frequência dos alelos do biótipo resistente quando utilizada a mistura de herbicidas em concentrações variadas nos diferentes anos, comparado com os casos em que os herbicidas são utilizados separadamente. Portanto, confirmando a teoria de Powles e Howat (1990) e de Vidal e Fleck (1997b) a utilização de mistura de herbicidas com modos de ação distintos representa uma

estratégia eficiente para reduzir a evolução da resistência de plantas daninhas. No caso desse trabalho, considerando o tempo de 10 anos de cultivo de milho, essa redução foi de aproximadamente 20% na frequência dos alelos resistente, comparado com o herbicida nicosulfuron.

Nas Figuras 9(c) e 11(c) apresenta-se a taxa ótima da concentração de mistura de herbicidas, λ^* , para um horizonte de 5 e 10 anos, respectivamente. As Figuras 9(d) e 11(d) apresentam as doses ótimas dos herbicidas para os três casos avaliados, para um horizonte de 5 e 10 anos, respectivamente. Quando aplicou-se a técnica de mistura de herbicidas visando a otimização do lucro houve a necessidade de menores doses de nicosulfuron, em relação a aplicação do mesmo isolado, exceto na sexta aplicação (ano 5), para simulação de 10 anos. Fato condizente com os resultados apresentados em condições de campo por Tomquelski (2011) para o controle de plantas daninhas na cultura do milho.

Essa redução da dose de nicosulfuron em mistura com a atrazine além de permitir maior lucro, reduz a fitotoxicidade promovida pela aplicação do nicosulfuron, como demonstrado por Tomquelski (2011) e Dan et al. (2010), para diferentes híbridos de milho cultivados nas condições de Chapadão do Sul-MS e Rio Verde-GO, respectivamente.

Nas Figuras 10 e 12 expõem-se o lucro ótimo obtido no último ano para cada um dos casos avaliados e o lucro de produção de uma lavoura de milho safrão 2009/2010 segundo Broch e Pedroso (2009). Observa-se, que ao utilizar a técnica de concentração de mistura obtém-se um lucro de R\$914,86 e de R\$951,87 no quinto e décimo ano, respectivamente, resultados esses significativamente superior em relação à utilização do nicosulfuron isoladamente que obteve um lucro de R\$815,78 e de R\$815,95 nesse período. Essa técnica também ocasionou no retardo da evolução da resistência, nos dois períodos apresentados. De fato, o percentual da resistência da planta daninha referente a aplicação do nicosulfuron isoladamente é de 0,53 e de 0,75 no quinto e décimo ano, respectivamente, já quando utiliza-se a concentração de mistura o percentual da resistência referente ao nicosulfuron cai para 0,33 e de 0,49 nesse período (ver Tabela 6).

Analisando a aplicação da atrazine observa-se que o lucro foi maior no quinto ano, esse fato está associado ao preço dos produtos (ver Tabela 7). Todavia à utilização da atrazine isoladamente possibilitou maior frequência de alelos resistentes comparado com a técnica de concentração de mistura (ver Figura 9(b)), além de que o uso da atrazine isoladamente não promove controle satisfatório de outras plantas daninhas (gramíneas) frequentemente associadas a cultura do milho. Porém, os lucros obtidos através dos três casos avaliados mostraram-se superior ao de uma lavoura, quando não se aplica a teoria

de otimização.

Assim, a partir do momento que se leva em consideração como estratégia de controle a concentração de mistura de herbicidas, obtém-se um maior retorno financeiro e possibilita retardar a dinâmica da resistência da planta daninha comparada a aplicação isolada de cada um dos herbicidas. Portanto, o uso da concentração da mistura de herbicida mostra-se eficiente quando levado em consideração a resistência da planta daninha.

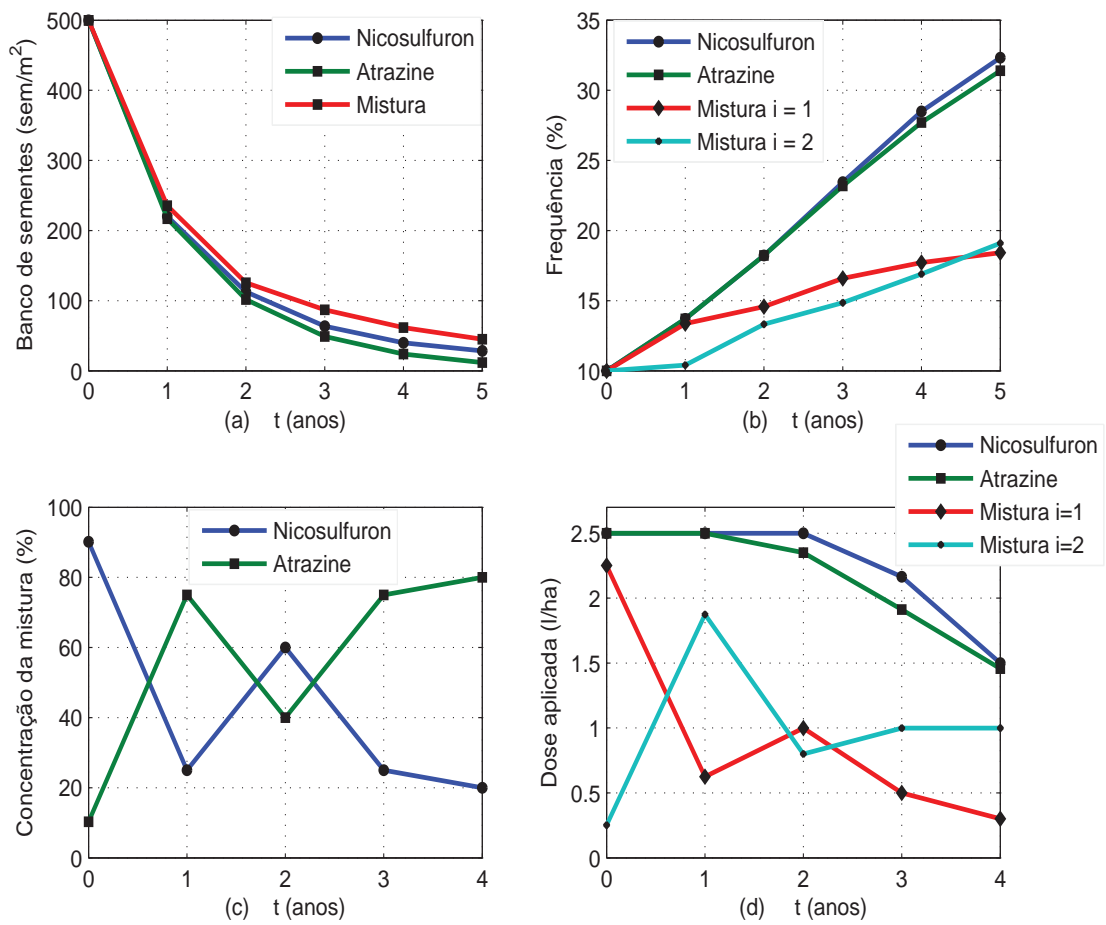


Figura 9: Resultados da otimização mistura de herbicidas para um horizonte de 5 anos.

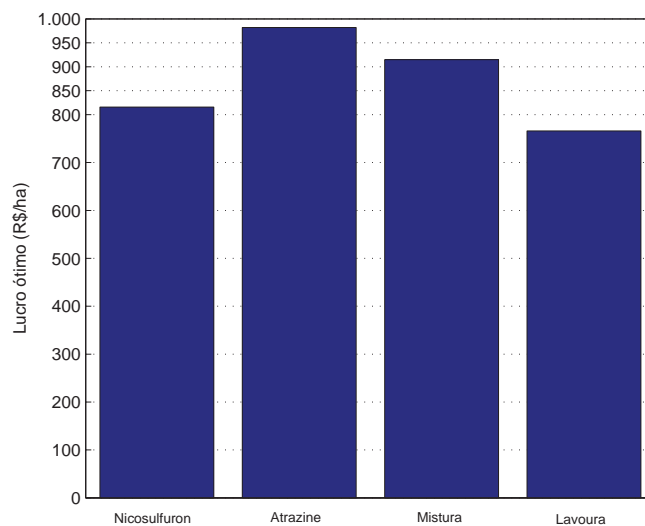


Figura 10: Lucro no 5º ano.

Tabela 6: Análise dos resultados

	Lucro (R\$)	
	5º ano	10º ano
Nicosulfuron	815,78	815,95
Atrazine	981,85	925,32
Nicosulfuron + Atrazine	914,86	951,87
	Resistência (%)	
	5º ano	10º ano
Nicosulfuron	53	75
Atrazine	52	57
Nicosulfuron + Atrazine	34 33	49 47

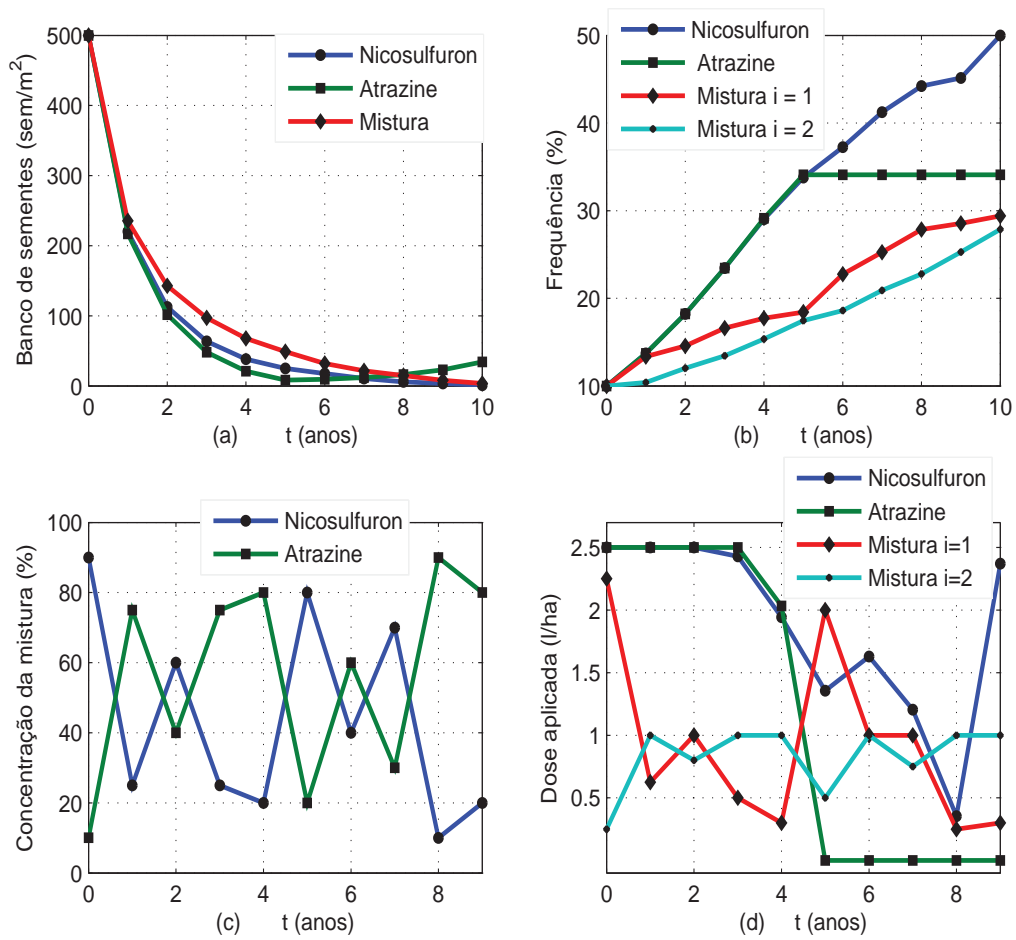


Figura 11: Resultados da otimização mistura de herbicidas para um horizonte de 10 anos.

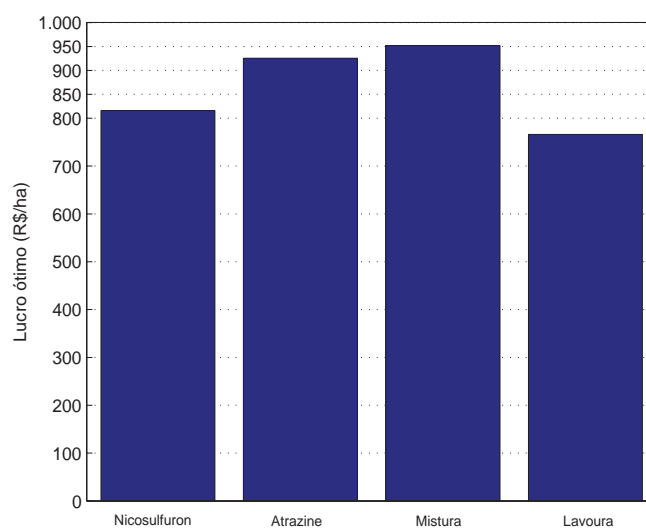


Figura 12: Lucro no 10^o ano.

Tabela 7: Valores dos parâmetros usados na simulação numérica

Populacional	Valores	
$\delta(\%)$	60	
$\psi(\%)$	30	
$\eta(\text{sementes } m^{-2})$	0	
$\xi(\text{sementes } m^{-2})$	0	
$\kappa(\%)$	30	
$x^g(\%)$	80	
γ	6,80	
μ	2,00	
ε	0,67	
A	0,20	
Dose-resposta	Nicosulfuron	Atrazine
b	-0,599	-1,6621
c	$-0,917 \cdot 10^{-3}$	$-0,225 \cdot 10^{-2}$
d	112,73	89,756
GR_{50S} (litro ha^{-1})	$0,125 \cdot 10^{-1}$	0,351
GR_{50R} (litro ha^{-1})	2,173	0,887
Econômicos		
P_y (R\$ tonelada $^{-1}$)	283,33	283,33
P_u (R\$ litro $^{-1}$)	49,90	6,90
Y_0 (tonelada ha^{-1})	8,64	8,64
C (R\$ ha^{-1})	436,26	436,26
u_{max} (litro ha^{-1})	7,00	7,00

CAPÍTULO 9

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho foram apresentadas duas abordagens, a técnica de multicritério e a concentração de mistura, que buscaram retardar a evolução da resistência de uma planta daninha aos herbicidas, e ao mesmo tempo maximizar o lucro do produtor. Primeiramente, fez-se uso da estratégia multi-objetivo, na qual utilizou-se apenas um herbicida, logo o mesmo mecanismo de ação, e posteriormente, trabalhou-se a estratégia de concentração de mistura de herbicidas, onde foram utilizados dois herbicidas com mecanismo de ação distintas.

Considerando o modelo de otimização dinâmica multi-objetivo, conclui-se que o uso de herbicida de forma seletiva contribui para o aumento de produção de uma lavoura tornando o processo mais viável economicamente, com um retardo significativo na predição da resistência da planta daninha.

Já no modelo de otimização dinâmica da concentração de mistura de herbicidas, obtém-se um retorno financeiro maior ao mesmo tempo que possibilita retardar a dinâmica da resistência da planta daninha, comparado a aplicação isolada de cada um dos herbicidas.

Portanto, os dois modelos estudados apresentaram resultados significativos na estratégia de retardar a evolução da resistência da planta daninha ao herbicida, e com isso uma melhor utilização do produto químico está em curso o que gera benefício ao meio ambiente, conseqüentemente a sociedade. Como o número de ingredientes ativos disponíveis para controle de algumas espécies daninhas é restrito, e o desenvolvimento de novas moléculas é cada vez mais difícil e oneroso, a utilização da estratégia multi-objetivo não permite a

ocorrência desse problema.

CAPÍTULO 10

TRABALHOS FUTUROS

O propósito para futuras pesquisa é o estudo do modelo de otimização dinâmica para a aplicação seletiva/mistura de herbicidas sendo o modelo de otimização multi-objetivo, no sistema anual de colheita da cultura do milho para um período de 5, 10 e 20 anos. No qual o problema de otimização dinâmica multi-objetivo será tratado como problema de controle ótimo multi-objetivo com incertezas nos parâmetros.

Assim, propõe-se desenvolver novas teorias de otimalidade para estes problemas, considerando primeiramente os parâmetros incertos como intervalos e tomando o estado, também, como um intervalo variável no tempo. Isto naturalmente leva o problema de otimização a ser formulado como um problema de controle ótimo no paradigma de inclusão diferencial, para o qual há teorias existentes que servirão de ponto de partida para a pesquisa.

Conseqüentemente, pretende-se alcançar os seguintes objetivos:

- Propor condições teóricas de otimalidade para o problema de otimização multi-objetivo com incertezas.
- Desenvolver métodos e técnicas de otimização multi-objetivo para estudar a dinâmica de evolução do banco de sementes acoplado à dinâmica de evolução da resistência a herbicidas com incertezas nos parâmetros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AITKENHEAD, M. J. et al. Weed and crop discrimination using image analysis and artificial intelligence methods. *Computers and Electronics in Agriculture*, v. 39, n. 3, p. 157–171, 2003.
- AULD, B. A.; TISDELL, C. Economic threshold and response to uncertainty in weed control. *Agricultural Systems*, v. 25, n. 3, p. 219–127, 1987.
- BELLMAN, R. *Dymanic Programming*. Priceton, NJ: Princeton University Press, 1957.
- BERTSEKAS, D. *Nonlinear Programming. 2a ed.* Belmont, MA: Athena Scientific, 1999.
- BRITTON, N. F. *Essential Mathematical Biology*. London, UK: Springer Undergraduate Mathematics Series, 2003.
- BROCH, D. L.; PEDROSO, R. S. *Custo de produção da cultura do milho*. Acessado em dezembro 2009. [Http://www.fundacaoms.org.br/ãrequest.php118](http://www.fundacaoms.org.br/ãrequest.php118).
- BURGOS, D. F. S. *Técnica de Otimização Multiobjetivo Aplicada ao Projeto Preliminar de Navios Petroleiros*. São Paulo, SP: [s.n.], 2008.
- CACHO, O. J. Solving bioeconomic optimal control models numerically. In: *Bioeconomics Workshop post-Australian Agricultural and Resource Economics Society Conference*. [S.l.: s.n.], 1998. p. 13–26.
- CACHO, O. J. Dynamic models, externalities and sustainability in agriculture. In: *Workshop Paper Series in Agricultural and Resource Economics*. [S.l.: s.n.], 1999. p. 1–9.
- CAMPO, J. R. et al. Simulações da dinâmica populacional de plantas daninhas com aplicação de controle. In: *Anais do 5o Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações*. Guaratinguetá, SP: [s.n.], 2006. p. CD Rom.
- CAMPOS, J. R. *Uma Abordagem para Problemas de Controle Ótimo Via Métodos de Runge-Kutta e Análise de Erro*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Biociência, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, SP, 2005.

- CARRIJO, I. B. *Extração de regras operacionais ótimas de sistemas de distribuição de água através de algoritmos genéticos multiobjetivos e aprendizado de máquina*. São Carlos, SP: [s.n.], 2004.
- CESARI, L. *Optimisation Theory and Applications. Problems with Ordinary Differential Equations*. Los Angeles, CA: Springer-Verlag, 1983.
- CHANKONG, V.; HAIMES, Y. *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*. New York: North-Holland (Elsevier), 1983.
- CHRISTOFFOLETI, P. J. *Aspectos de Resistência de Plantas Daninhas a Herbicidas*. 3. ed. Piracicaba, BR: Associação Brasileira de Ação à Resistência de Plantas Daninhas, 2008. 120 p.
- CHRISTOFFOLETI, P. J.; FILHO, V. R.; SILVA, C. B. Resistência de plantas daninhas aos herbicidas. *Planta Daninha*, v. 12, n. 1, p. 13–20, 1994.
- CHRISTOFFOLETI, P. J.; OVEJERO, R. F. L.; CARVALHO, J. C. *Aspectos de Resistência de Plantas Daninhas a Herbicidas*. Campinas, BR: Associação Brasileira de Ação à Resistência de Plantas Daninhas, 2004.
- CORREIA, A.; MATIAS, J.; SERÔDIO, C. Métodos de penalidade exacta para resolução de problemas de otimização não linear. *Investigação Operacional*, v. 28, p. 17–30, 2008.
- COUSENS, R. An empirical model relating crop yield to weed crop density and a statistical comparison with other models. *Journal of Agricultural Science*, v. 105, n. 3, p. 513–521, 1985.
- COUSENS, R. A simple model relating yield loss to weed density. *Annals of Applied Biology*, v. 107, n. 2, p. 239–252, 1985.
- DAN, H. A. et al. Seletividade do nicosulfuron e da mistura com atrazine na cultura do milho. *Revista Agrarian*, v. 3, n. 10, p. 243–252, 2010.
- DEB, K. *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*. [S.l.]: John Wiley and Sons, New York, 2001.
- DIGGLE, A. J.; NEVE, P. B.; SMITH, F. P. Herbicides used in combination can reduce the probability of herbicide resistance in finite weed populations. *Weed Research*, v. 43, n. 5, p. 371–382, 2003.
- DOYLE, C. J. Mathematical models in weed management. *Crop Protection*, v. 10, n. 6, p. 432–444, 1991.
- DOYLE, C. J. A review of the use of models of weed control in integrated crop protection. *Agriculture Ecosystems Environment*, v. 64, n. 2, p. 165–172, 1997.
- EHRGOTT, M. *Multicriteria Optimization*. [S.l.]: University of Kaiserslautern, 2000.
- FIRBANK, L. G.; WATKINSON, A. A model of interference within plant monocultures. *Journal of Theoretical Biology*, v. 116, n. 2, p. 291–311, 1985.
- FRYER, M.; GREENMAN, J. *Optimisation Theory. Applications in OR and Economics*. London, UK: Edward Arnold Ltd, 1987.

- GRESSEL, J.; SEGEL, L. A. Managing resistance to agrochemicals: from fundamental research to practical strategies. In: _____. Washington: America Chemical Society, 1990. p. 430–458.
- GRIESSE, R.; WALTHER, A. Evaluating gradients in optimal control: Continuous adjoints versus automatic differentiation. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 122, n. 1, p. 63–86, 2004.
- HAAGE, I. R. et al. Are pre-spraying growing conditions a major determinant of herbicide efficacy. *Weed Research*, v. 47, n. 5, p. 1365 – 1380, 2007.
- HAGER, W. W. Runge-kutta methods in optimal control and the transformed adjoint system. *Numerische Mathematik*, v. 87, n. 2, p. 247–282, 2000.
- HAGER, W. W. *Source code for ASA-CG Version 1.3*. Acessado em novembro 2010. [Http://www.math.ufl.edu/~hager/papers/Software](http://www.math.ufl.edu/~hager/papers/Software).
- HAGER, W. W.; ZHANG, H. A new active set algorithm for box constrained optimization. *Journal of Optimization*, v. 17, n. 2, p. 526–557, 2006.
- HAIMES, Y.; LASDON, L.; WISMER, D. On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, v. 1, n. 3, p. 296–297, 1971.
- HOLST, N.; RASMUSSEN, L. A.; BASTIAANS, L. Field weed population dynamics: a review of model approaches and applications. *Weed Research*, v. 47, n. 1, p. 1–14, 2007.
- JONES, R. Sustainability and integrated weed management in australian winter cropping systems: A bioeconomic analysis. In: *49th Annual Conference of the Australian Agricultural and Resource Economic Society*. [S.l.: s.n.], 2005. p. 1–15.
- JONES, R.; CACHO, O. J. A dynamic optimisation model of weed control. In: *44th Annual Conference of the Australian Agricultural and Resource Economics*. [S.l.: s.n.], 2000. p. 1–17.
- JONES, R.; CACHO, O. J.; SINDEN, J. The importance of seasonal variability and tactical responses to risk on estimating the economic benefits of integrated weed management. *Agricultural Economics*, v. 35, n. 3, p. 245–256, 2006.
- KENNEDY, J. O. S. *Dynamic Programming: Applications to Agriculture and Natural Resources*. New York, NY: Elsevier, 1986.
- KIM, D. S. et al. Modelling the effects of sub-lethal doses of herbicide and nitrogen fertilizer on crop weed competition. *Weed Research*, v. 46, n. 6, p. 492–502, 2006.
- KUMAR, V. A control averaging technique for solving a class of singular optimal control problems. *International Journal of Control*, v. 23, n. 3, p. 361–380, 1976.
- LACERDA, A.; FILHO, R. V. Curvas de dose-resposta em espécies de plantas daninhas com uso do herbicida glyphosate. *Bragantia*, v. 63, n. 1, p. 73–79, 2004.
- LORENZI, H. *Manual de Identificação e de Controle de Plantas Daninhas: Plantio Direto e Convencional*. Nova Odessa, SP: Instituto Plantarum de Estudos da Flora Ltda, 2000.

- LOTZ, L. A. P. et al. Prediction of the competitive effects of weeds on crop yields based on the relative leaf area of weeds. *Weed Research*, v. 36, n. 1, p. 93–101, 1996.
- LUENBERGER, D. G. *Linear and nonlinear programming*. 2. ed. Nova York: Addison-Wesley Publishing Company, 1986.
- MAXWELL, B. D.; ROUSH, M. L.; RADOSEVICH, S. R. Predicting the evolution and dynamics of herbicide resistance in weed populations. *Weed Technology*, v. 4, n. 1, p. 2–13, 1990.
- MEROTTO, A. J. et al. Cross resistance to herbicides of five als inhibiting groups and sequencing of the als gene in cyperus difformis l. *Agricultural and Food Chemistry*, v. 57, n. 4, p. 1389–1398, 2009.
- MIETTINEN, K. M. *Nonlinear Multiobjective Optimization*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, Boston, Massachusetts, 1999.
- MORTIMER, A. The population ecology of weed - implications for integrated management, forecasting and conservation. In: *British Crop Protection Conference Weeds, British Crop Protection Council*. Farnham, UK: [s.n.], 1987. p. 935–944.
- MORTIMER, A. et al. The prediction of weed infestations and cost of differing control strategies. *British Crop Protection Conference Weeds, British Crop Protection Council*, p. 415–422, 1980.
- MOSS, S. *Detecting Herbicide Resistance*. Acessado em 1999.
[Http://www.hracglobal.com/Publications/DetectingHerbicideResistance](http://www.hracglobal.com/Publications/DetectingHerbicideResistance).
- OBAYASHI, S. Multidisciplinary design optimization of aircraft wing planform based on evolutionary algorithms. *IEEE*, v. 4, p. 3148 – 3153, 1998.
- ODOM, D. I. S. et al. Policies for the management of weeds in natural ecosystems: the case of scotch broom (cytisis scoparius, l.) in an australian national park. *Ecological Economics*, v. 44, n. 1, p. 119 – 135, 2003. ISSN 0921-8009.
- PARK, S.; BENJAMIN, L.; WATKINSON, A. Comparing biological productivity in cropping systems: A competition approach. *Journal of Applied Ecology*, v. 39, p. 416–426, 2002.
- PONTRYAGIN, L. S. et al. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York, NY: John Wiley, 1965.
- POWLES, S.; HOLTUM, J. Herbicide resistance in plants: biology and biochemistry. *New York: CRC Press*, p. 353, 1994.
- POWLES, S. B.; HOWAT, P. D. Herbicide resistance weeds in australia. *Weed Technology*, v. 4, p. 178–185, 1990.
- RAGGETT, G. An efficient gradient technique for the solution for optimal control problems. *Computer Methods in Applied Machanics and Engineering*, v. 12, n. 3, p. 315–322, 1977.

- RUNGE, C. Über die numerische auflösung totaler differentialgleichungen. *Nachr. Gesel. Wiss.*, p. 252–257, 1905.
- SAKAI, K. *Nonlinear Dynamics and Chaos in Agricultural Systems*. Amsterdam, Netherlands: Elsevier, 2001. (Developments in Agricultural Systems).
- SCHWARTZ, A. L. *Theory and Implementation of Numerical Methods Based on Runge-Kutta Integration for Solving Optimal Control Problems*. Dissertação (Mestrado) — University of California, Berkeley, CA, 1996.
- SEBER, G. A. F.; WILD, C. J. *Nonlinear Regression*. Canada: John Wiley & Sons Canada, Ltd., 1986.
- SEEFELDT, S. S.; JENSEN, J. E.; FUERST, E. P. Log-logistic analysis of herbicide dose-response relationships. *Weed Technology*, v. 9, n. 1, p. 218–227, 1995.
- SILVA, J. B.; PIRES, N. M. Controle de plantas daninhas na cultura do milho. *Inf. Agropec*, v. 14, n. 164, p. 17–20, 1990.
- SMITH, M. et al. Dose-response model for listeria monocytogenes-induced stillbirths in nonhuman primates. *Infection and Immunity*, v. 76, n. 2, p. 726–731, 2008.
- STEVAN, Z.; STREIBIG, C.; RITZ, C. Utilizing r software package for dose-response studies: The concept and data analysis. *Weed Technology*, v. 21, p. 840–848, 2007.
- STIEGELMEIER, E. W. *Modelo de otimização para o controle de plantas daninhas usando a dinâmica de resistência*. São Paulo, SP: [s.n.], 2012.
- STIEGELMEIER, E. W. et al. Modelo de otimização da aplicação de herbicida para o controle de plantas daninhas considerando a evolução da resistência. In: *XVIII Congresso Brasileiro de Automática, SBA*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 886–893.
- STREIBIG, J. C.; KUDSK, P. *Herbicide Bioassays*. Boca Raton, FL: CRC Press, 1993.
- TAKAHASHI, R. *Notas de aulas: Otimização Escalar e Vetorial*. Acessado em julho 2010. [Http://www.mat.ufmg.br/taka/](http://www.mat.ufmg.br/taka/).
- TOMQUELSKI, G. V. Plantas daninhas na cultura do milho. *Pesquisa - Tecnologia - Produtividade*, v. 1, n. 4, p. 189–197, 2011.
- TSOUKAS, A.; TIRRELL, M.; STEPHANOPOULOS, G. Multiobjective dynamic optimization of semibatch copolymerization reactors. *Chemical Engineering Science*, v. 37, n. 12, p. 1785–1795, 1982.
- VARGAS, L.; PEIXOTO, C. M.; ROMAN, E. S. Manejo de plantas daninhas na cultura do milho. *Embrapa - Documentos Online*, v. 61, 2006.
- VARGAS, L.; ROMAN, E. S. Resistência de plantas daninhas a herbicidas: conceitos, origem e evolução. *Embrapa - Documentos Online*, v. 58, 2006.
- VIDAL, R. A.; FLECK, N. C. Análise do risco da ocorrência de biótipos de plantas daninhas resistentes aos herbicidas. *Planta Daninha*, v. 15, n. 2, p. 152–161, 1997b.

VIDAL, R. A.; FLECK, N. G. Three weed species with confirmed resistance to herbicides in brazil. In: *37th Meeting of the Weed Science Society of America*. Orlando, USA: [s.n.], 1997a. p. 100.

VINTER, R. *Optimal Control*. New York, USA: Birkhäuser, 2000.

WEEDSCIENCE. *ALS inhibitor Resistant Weeds Globally-2010*. Acessado em junho 2011. [Www.weedscience.com](http://www.weedscience.com).

WRUBEL, R. P.; GRESSEL, J. Are herbicide mixtures useful for delaying the rapid evolution of resistance? a case study. *Weed Technology*, v. 8, n. 3, p. 635–648, 1994.

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 27 de Fevereiro de 2012.

Ulcilea Alves Severino Leal