

Antonio Espada Filho

Permutações - Deslocamento Permutações -
Encontro e Polinômios de Torres



1910000108



ANTONIO ESPADA FILHO

PERMUTAÇÕES-DESLOCAMENTO, PERMUTAÇÕES-ENCONTRO
E POLINÔMIOS DE TORRES

Aos membros do Grupo de Estudos e Pesquisas em Combinatória junto ao Departamento de Análise Numérica e Estatística em cuja programação de seminários discutimos assuntos relacionados com o trabalho tendo recebido sugestões valiosas para nossas conclusões.

Ao Prof. Dr. Ruy Madsen Barbosa pelos comentários que muito nos auxiliaram.

Aos demais membros do Grupo de Estudos e Pesquisas em Combinatória como parte dos requisitos para obtenção do título de Livre-Docente.

A Senhora Dirce Suzete, Secretária do Departamento, pelo cuidadoso trabalho de datilografia.

108/81/tese

SÃO JOSÉ DO RIO PRETO

- 1980 -



71



AGRADECIMENTOS

1. Introdução

Primeira Parte

2. Indicador de Permutações por Número de Encontros

e Número de Outros Ciclos

2.1. Recorrentes Básicas

3. Permutações

À Direção do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da UNESP, Campus de São José do Rio Preto, pelo apoio dado à realização do presente concurso bem como pelo incentivo aos estudos e pesquisas em desenvolvimento nesta Instituição.

Aos membros do Grupo de Estudos e Pesquisas em Combinatória junto ao Departamento de Análise Numérica e Estatística em cuja programação de seminários discutimos assuntos relacionados com o trabalho tendo recebido sugestões valiosas para nossas conclusões.

Ao Prof. Dr. Ruy Madsen Barbosa pelos comentários que muito nos auxiliaram e pelo estímulo imprescindível.

Aos demais colegas que sempre nos acolheram com palavras de incentivo.

À Senhorita Dirce Buzato, Secretária do Departamento, pelo cuidadoso trabalho de datilografia.

4.7. Um Novo Método para Obtenção do Indicador de Permutações-Encontro

4.8. Estudo da Distribuição do Número de Permutações-Encontro pelo Número de Encontros

5. Relações com as Frações Contínuas e o Cálculo de Diferenças Finitas

5.1. Relações com as Frações Contínuas

5.2. Relações com as Diferenças Finitas



ÍNDICE

1. Introdução	
Primeira Parte	
2. Indicador de Permutações por Número de Encontros e Número de Outros Ciclos	7
2.1. Recorrentes Básicas	7
3. Permutações-Deslocamento	10
3.1. Recorrentes para o Indicador de Permutações-Deslocamento	10
3.2. Recorrentes para os Coeficientes	11
3.3. Número Total de Permutações-Deslocamento	12
3.4. Tabela e Quadro das Permutações-Deslocamento	13
3.5. Geradora Exponencial do Indicador de Permutações-Deslocamento	17
3.6. Expressão Explícita do Indicador de Permutações-Deslocamento	17
3.7. Geradora Exponencial e Fórmula Geral do Número Total de Permutações-Deslocamento	18
4. Permutações-Encontro	20
4.1. Recorrentes para o Indicador de Permutações-Encontro	20
4.2. Recorrentes para os Coeficientes	21
4.3. Número Total de Permutações-Encontro	22
4.4. Tabela e Quadro das Permutações-Encontro	22
4.5. Geradora Exponencial do Indicador de Permutações-Encontro	26
4.6. Expressão Explícita do Indicador de Permutações-Encontro	27
4.7. Um Novo Método para Obtenção do Indicador de Permutações-Encontro	27
4.8. Estudo da Distribuição do Número de Permutações-Encontro pelo Número de Encontros	29
5. Relações com as Frações Contínuas e o Cálculo de Diferenças Finitas	32
5.1. Relações com as Frações Contínuas	32
5.2. Relações com as Diferenças Finitas	34

6. Relações com as Permanentes	36
6.1. Teoremas Básicos	37
6.2. Permanentes de Matrizes Booleanas	40
6.3. Permanentes e as Permutações-Deslocamento	42
7. Indicador das Permutações com Posições Interdi <u>tadas</u>	46
Segunda Parte:	
8. Polinômios de Torres	50
8.1. Conceitos e Teoremas Básicos	50
9. Tabuleiros Retangulares e Quadrangulares	53
9.1. Relação de Recorrência	53
9.2. Fórmula Geral e Propriedades	54
9.3. Método para Obtenção da Fórmula Geral	56
9.4. Geradora Exponencial dos Polinômios de Tor <u>res</u> para Tabuleiros Retangulares	57
9.5. Tabuleiros Quadrangulares	59
10. Tabuleiros Retangulares com Celas Acrescentadas	61
10.1. Tabuleiros Retangulares com Celas Acrescen <u>tadas</u> em Colunas	61
10.2. Tabuleiros Retangulares com Celas Acrescen <u>tadas</u> em Linhas	63
10.3. Tabuleiros Retangulares com Celas Acrescen <u>tadas</u> em Colunas e Linhas	64
11. Polinômios de Torres e o Problema das Permuta - ções-Deslocamento	67
11.1. Permutações com Posições Interditadas	67
11.2. O Problema das Permutações-Deslocamento	70
12. Bibliografia	72

INTRODUÇÃO

No presente trabalho apresentamos resultados que constituem parte de nossos estudos e pesquisas em Combinatória, especificamente sobre permutações em alguns tipos notadamente as relacionadas com o "Problema dos Encontros", importantes não só por suas possíveis aplicações (por exemplo em probabilidades e problemas de contagem) como também pelo aspecto teórico que envolve.

Inicialmente o nosso propósito era desenvolver estudos e pesquisas sobre "Polinômios de Torres" considerando o interesse em nós despertado pela importância do assunto devido ao relacionamento existente com tópicos de matemática aplicada como por exemplo na Teoria dos Grafos por meio dos Polinômios Cromáticos, como Polinômios Ortogonais e também com problemas de contagem principalmente envolvendo os vários tipos de permutações dos elementos de um conjunto finito qualquer.

Entretanto, na busca e estudo de suas questões fomos motivados a desenvolver com maior cuidado e interesse pesquisas referentes às permutações, mesmo porque estão contidos nesse assunto vários problemas de contagem e enumeração, em particular o clássico problema dos encontros, constantemente tratado em trabalhos divulgados em revistas especializadas com publicações recentes inclusive, e o que é óbvio, um estreito relacionamento com os polinômios de torres.

Assim sendo, diante da obtenção dos primeiros resultados optamos por um desenvolvimento teórico do assunto procurando estabelecer resultados gerais os quais impli

cam necessariamente num estudo abrangente de tópicos como os acima relacionados.

Consideramos também, para a elaboração do presente trabalho, o fato da não existência, ao nosso ver, de uma sistematização da teoria implícita no assunto. Isto porque observamos na divulgação de resultados que tratam diretamente das permutações em certos aspectos em particular aquelas que compreendem o problema dos encontros, a obtenção de fórmulas para determinação da solução e vários relacionamentos.

O tratamento dado até então ao assunto em termos de conteúdo e formalização de uma teoria praticamente resume-se no seguinte:

Historicamente o problema dos encontros foi proposto por P.R.Montmort em cuja obra "Essay d'Analyse sur le Jeux de Hassard" (1708) contém certamente a primeira discussão do problema, segundo David e Barton [11].

Há várias discussões do problema diferenciando na forma de apresentação e dependendo do contexto o qual encontra-se inserido.

Knopf [33] trata do referido problema sob o título "Um problema fundamental no jogo dos treze" desenvolvido em termos probabilísticos e cuja preocupação é a determinação da probabilidade de se retirar r fichas numeradas de uma urna contendo n , $r < n$, sem que haja coincidência entre a ordem da retirada e o número da ficha.

Na revista "Mathematique Notae" [47] foram publicadas duas soluções propostas por Sispánov e Frucht do seguinte problema: "De quantas maneiras diferentes pode se colocar n torres em um tabuleiro, tipo tabuleiro de xa-



drês, de n^2 celas de modo que nenhuma elimine a outra e uma das diagonais do tabuleiro fique livre de figuras".

Frucht observou que a questão é equivalente ao problema dos encontros, ou seja, trata-se da determinação do valor de D_n número de certas permutações de n elementos as quais de nominamos permutações-deslocamento.

Riordan [42] apresenta uma discussão teórica do problema fundamentada no princípio de inclusão e exclusão, o qual trata da contagem do número de elementos de um conjunto que satisfazem exatamente m das n propriedades associadas a tais elementos. É feito um desenvolvimento polinomial a partir de funções geradoras bem como a determinação da relação do número D_n com o cálculo de diferenças finitas em particular o resultado $D_n = \Delta^n 0!$

Kaufman [27] estuda a questão também fundamentando-se no princípio acima, referido assim como outros autores relacionados na bibliografia, e generaliza o problema através dos valores $D_{n,k}$ onde k indica o número de coincidências entre os elementos que constituem as permutações e as respectivas posições dos mesmos. Obtém a relação entre o número D_n e permanente de uma matriz sem entretanto apresentar desenvolvimento teórico contencioso resumindo-se em citações ou verificações de algumas propriedades.

Em geral os resultados apresentados nos trabalhos conhecidos resumem-se na obtenção das expressões:

a) $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$, fórmula de Oettinger

b) $D_n = n \cdot D_{n-1} + (-1)^n$, fórmula de Euler

c) $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$, fórmula de Euler



além de algumas aplicações.

Na bibliografia brasileira encontramos no livro de A.C.Bachx e outros "Prelúdio à Análise Combinatória" com a denominação "permutação desarrumada" ou "permutação caótica" para o cálculo de D_n . Os autores obtêm a fórmula de Oettinger pela relação $y = N(E) - N(E_1 \ E_2 \ \dots \ E_n)$ que na realidade trata-se do princípio de inclusão e exclusão.

No livro de R. Nogueira "Lição de Análise Combinatória", o problema é estudado estabelecendo-se o resultado geral que exprime o número de maneiras que exatamente k objetos ocupam a posição primitiva nas permutações de n elementos com posições pré-fixadas, trata-se dos valores $D_{n,k}$ já mencionados.

No livro de R.M.Barbosa [1] encontramos elementos básicos sobre polinômios de torres com ilustrações e aplicações em problemas de Combinatória.

Em relação ao presente trabalho julgamos conveniente dividi-lo em duas partes.

A primeira tratando das permutações relacionadas ao problema e a segunda sobre os polinômios de torres, especificamente aqueles com maior relacionamento com permutações.

Estabelecemos inicialmente uma expressão polinomial a duas variáveis a qual denominamos Indicador de Permutações por Número de Ciclos e obtivemos como resultados básicos duas relações de recorrência do referido indicador, mais adequadas às finalidades propostas.

Como consequência obtivemos os primeiros resultados sobre o que denominamos permutações-deslocamento e permutações-encontro que abrangem o estudo sobre o proble-



ma dos encontros e outros relacionados. Para tanto estabelecemos os indicadores para tais permutações, obtivemos as respectivas relações de recorrência inclusive para os seus coeficientes.

Por meio da geradora exponencial de cada uma das referidas permutações determinamos as expressões explícitas respectivas dos indicadores.

Como consequência obtivemos alguns resultados entre os quais o valor de D_n do problema dos encontros nas várias formas e o valor $\bar{D}_n$ que corresponde as permutações-encontro e diretamente relacionado com D_n .

Constatamos o relacionamento existente entre as permutações e as frações contínuas obtendo resultados que possibilitam o cálculo de D_n e $\bar{D}_n$ por meio das reduzidas de ordem n de um particular tipo de fração contínua bem como novas relações para tais valores e a interessante identidade formal entre eles.

Desenvolvemos um capítulo sobre permutações e as permanentes no qual apresentamos as várias propriedades e teoremas a partir da definição introduzida envolvendo aplicações injetoras entre conjuntos finitos.

Através das permanentes de matrizes booleanas obtivemos as relações com as permutações em estudo.

Sobre permutações com posições interditadas onde estão contidos os mais variados tipos de permutações / construímos, em co-autoria, um algoritmo de enumeração das mesmas possibilitando não só a determinação do seu número como também suas especificações.

Na segunda parte onde cuidamos dos polinômios de torres, nos fixamos com alguns tipos especiais particu-



larmente naqueles com maior relacionamento com problemas envolvendo permutações.

Fixamo-nos no estudo sobre os tabuleiros retangulares e quadrangulares e consequente obtenção de fórmulas e relações não comumente tratadas na bibliografia e que ampliam os resultados no assunto.

Criamos tipos de tabuleiros retangulares com celas acrescentadas obtendo as expressões respectivas para os vários tipos e com isso novas possibilidades de aplicações da teoria.

Por último tratamos das permutações com posições interditadas em particular com as que denominamos deslocamento porém agora através dos polinômios de torres caracterizando um relacionamento entre as duas partes.

No decorrer do desenvolvimento deste trabalho ora apresentado como tese satisfazendo a um dos requisitos para obtenção do título de Livre-Docente, verificamos por várias vezes a possibilidade de estendermos as nossas pequisas com a consequente obtenção de novos resultados aos quais ainda não nos dedicamos pelas próprias limitações impostas pelos objetivos por nós propostos.

Ao apresentá-lo então para julgamento temos no entanto convicção de termos oferecido contribuição tanto no aspecto quantitativo como qualitativo.



CAPÍTULO 1

INDICADOR DE PERMUTAÇÕES POR NÚMERO DE ENCONTROS E NÚMERO DE OUTROS CICLOS.

1.1. A. Preliminares

Indicaremos, em tudo que se segue, um conjunto finito com n elementos por X_n .

Consideremos as permutações dos elementos de X_n especificando o número de ciclos unitários (encontros) e o número de outros ciclos.

Definição: Indicador das permutações por número de encontros e o número de outros ciclos sobre X_n é o polinômio nas variáveis u e v , o qual indicaremos por $z_n(u;v)$, cujo coeficiente $z_{n,k,l}$ de $u^k v^l$ é o número de tais permutações com k encontros e l outros ciclos, sendo $z_0(u;v)=1$ e k e l variando de 0 a n .

PRIMEIRA PARTE

Em termos de função geradora,

$z_n(u;v) = G[z_{n-1,k,l}(u;v)]$ com $z_0(u;v) = 1$ e $k=0,1,2,\dots,n$; $l=0,1,2,\dots,n$. Ar $z_{n,k,l}$ acima definido.

1.2. Recorrência Básica

1.2.1. Primeira Recorrência Básica

Valendo-se de argumentos combinatórios e admitindo conhecido $z_{n-1}(u;v)$ sobre X_{n-1} , $n=0,1,2,\dots$, vamos determinar $z_{n+1}(u;v)$ sobre o conjunto X_{n+1} .

O conjunto X_{n+1} pode ser considerado como sendo o conjunto X_n acrescentando-se um novo elemento.

Acrescentando-se um novo elemento em X_n as situações abaixo deverão ocorrer originando as permutações de X_{n+1} .

CAPÍTULO I

INDICADOR DE PERMUTAÇÕES POR NÚMERO DE ENCONTROS E NÚMERO DE OUTROS CICLOS.

1.A. Preliminares

Indicaremos em tudo que se segue um conjunto finito com n elementos por X_n .

Consideremos as permutações dos elementos de X_n especificando o número de ciclos unitários (encontros) e o número de outros ciclos.

Definição: Indicador das permutações por número de encontros e o número de outros ciclos sobre X_n é o polinômio nas variáveis u e v , o qual, indicaremos por $z_n(u;v)$, cujo coeficiente $z_{n,k,\ell}$ de $u^k v^\ell$, é o número de tais permutações com k encontros e ℓ de outros ciclos, sendo $z_0(u;v)=1$ e k e ℓ variando de 0 a n .

Em termos de função geradora,

$z_n(u;v) = G[z_{n,k,\ell};(u;v)]$ com $z_0(u;v) = 1$ e $k=0,1,2,\dots, n$; $\ell=0,1,2,\dots, n$; $z_{n,k,\ell}$ acima definido.

1.B. Recorrentes Básicas

1.B.1. Primeira Recorrente Básica

Valendo-se de argumentos combinatórios e admitido conhecido $z_{n-i}(u;v)$ sobre X_{n-i} , $i=0,1,2,\dots, n$, vamos determinar $z_{n+1}(u;v)$ sobre o conjunto X_{n+1} .

O conjunto X_{n+1} pode ser considerado como sendo o conjunto X_n acrescentando-se um novo elemento.

Acrescentando-se um novo elemento em X_n as situações abaixo deverão ocorrer originando as permutações de X_{n+1} .

a) O novo elemento constituir-se-á em um encontro, enquanto que o número de outros ciclos fica inalterado e portanto $uz_n(u;v)$ será parcela da expressão de $z_{n+1}(u;v)$;

b) O novo elemento formará um ciclo binário com um elemento de X_n e portanto o número de encontros é o mesmo que em X_{n-1} e o número de outros ciclos será o mesmo que em X_{n-1} aumentado de uma unidade. Como o novo elemento pode formar ciclo binário com qualquer um dos n elementos de X_n , pelas considerações acima, $nvz_{n-1}(u;v)$ será parcela da expressão de $z_{n+1}(u;v)$;

c) O novo elemento formará um ciclo ternário com dois elementos de X_n e portanto o número de encontros é o mesmo que em X_{n-2} e o número de outros ciclos será o mesmo que em X_{n-2} aumentado de uma unidade. Como o novo elemento pode formar ciclo ternário com dois elementos quaisquer de X_n e três elementos podem formar $2!$ ciclos ternários, pelas considerações acima, $n^{(2)}vz_{n-2}(u;v)$ será parcela da expressão de $z_{n+1}(u;v)$.

d) O novo elemento formará um ciclo quaternário com três elementos de X_n . Com o mesmo raciocínio dos casos anteriores observa-se que $n^{(3)}vz_{n-3}(u;v)$ será parcela da expressão de $z_{n+1}(u;v)$.

Assim sucessivamente até que o novo elemento formará um ciclo pleno ($n+1$ - ciclo) com os n elementos de X_n onde $n^{(n)}vz_0(u;v)$ será parcela da expressão de $z_{n+1}(u;v)$.

Conclusão:

$$z_{n+1}(u;v) = uz_n(u;v) + \sum_{i=1}^n n^{(i)}vz_{n-i}(u;v),$$

$n \geq 1$ com $z_0(u;v)=1$ por definição e $z_1(u;v)=u$.



1.B.2. Segunda Recorrente Básica

Do resultado acima

$$nz_n(u;v) = nuz_{n-1}(u;v) + \sum_{j=2}^n n^{(j)}vz_{n-j}(u;v)$$

Efetando $z_{n+1}(u;v) - nz_n(u;v)$, temos:

$$z_{n+1}(u;v) = (n+u)z_n(u;v) + n(v-u)z_{n-1}(u;v)$$

1.B.3. Ilustrações

Com as recorrentes obtemos sucessivamente, por exemplo:

$$z_0(u;v) = 1$$

$$z_1(u;v) = u$$

$$z_2(u;v) = u^2 + v$$

$$z_3(u;v) = u^3 + 3uv + 2v$$

$$z_4(u;v) = u^4 + 6u^2v + 8uv + 6v + 3v^2$$

$$z_5(u;v) = u^5 + 10u^3v + 20u^2v + 30uv + 15uv^2 + 24v + 20v^2$$

$$z_6(u;v) = u^6 + 15u^4v + 40u^3v + 115u^2v + 45u^2v^2 + 144uv + 95uv^2 + 120v + 130v^2 + 15v^3$$

CAPÍTULO II

PERMUTAÇÕES-DESLOCAMENTO

II.A. Preliminares

Definição: A aplicação bijetora $f: X_n \rightarrow X_n$ é uma permutação-deslocamento, se e somente se $f(i) \neq i$ para todo i em X_n .

Definição: Indicador das permutações-deslocamento sobre X_n é o polinômio na variável v , o qual indicaremos por $d_n(v)$, cujo coeficiente $d_{n,\ell}$ de v^ℓ é o número de tais permutações com ℓ ciclos, ℓ variando de 0 a n .

Em termos de função geradora,

$$d_n(v) = G[d_{n,\ell}; v] \text{ com } \ell = 0, 1, 2, \dots, n \text{ e } d_{n,\ell} \text{ acima definido.}$$

II.B. Relações entre os indicadores $z_n(u; v)$ e $d_n(v)$

Em $z_n(u; v)$ u especifica o número de encontros, portanto fazendo $u=0$, $z_n(0; v)$ é o indicador das permutações-deslocamento por número de ciclos.

Assim $z_n(0, v) = d_n(v)$ conforme a definição acima.

II.C. Recorrentes para o Indicador de Permutações-Deslocamento

II.C.1. Primeira Recorrente

Pela primeira recorrente básica,

$$z_{n+1}(0; v) = \sum_{i=1}^n n^{(i)} v z_{n-i}(0; v)$$

Como $z_n(0; v) = d_n(v)$,

$$d_{n+1}(v) = \sum_{i=1}^n n^{(i)} v d_{n-i}(v)$$

que é a primeira recorrente do indicador das permutações - deslocamento.

É claro que $d_0(v) = 1$ e $d_1(v) = 0$ e portanto tomamos $n \geq 1$ na recorrente.

II.C.2. Segunda Recorrente

Pela segunda recorrente básica,

$$z_{n+1}(0;v) = n z_n(0;v) + n v z_{n-1}(0;v)$$

$$\text{Como } z_n(0;v) = d_n(v),$$

$$d_{n+1}(v) = n d_n(v) + n v d_{n-1}(v)$$

$$d_{n+1}(v) = n [d_n(v) + v d_{n-1}(v)]$$

que é uma recorrente obtida por Riordan [43], pp 73, por outro procedimento.

II.C.3. Recorrentes para os Coeficientes

Como consequência das igualdades acima (primeira e segunda recorrentes) obtivemos recorrentes para os números $d_{n,\ell}$, que são:

II.C.3.1. Primeira Recorrente (Propriedades das Colunas)

Como $d_n(v) = G[d_{n,\ell};v]$, pela primeira recorrente do indicador das permutações-deslocamento vem:

$$G[d_{n+1,\ell};v] = \sum_{i=1}^n n^{(i)} v G[d_{n-i,\ell};v]$$

Por propriedades de geradora:

$$\sum_{i=1}^n n^{(i)} v G[d_{n-i,\ell};v] = G\left(\sum_{i=1}^n n^{(i)} d_{n-i,\ell-1};v\right)$$

Logo $d_{n+1,\ell} = \sum_{i=1}^n n^{(i)} d_{n-i,\ell-1}$, que denominamos

Propriedade das Colunas face a disposição de tais números na tabela.

II.C.3.2. Segunda Recorrente

Pela segunda recorrente do indicador das permutações-deslocamento vem:

$$G(d_{n+1,\ell};v) = nG(d_{n,\ell};v) + nvG(d_{n-1,\ell};v)$$

Por propriedades de geradoras,

$$G(d_{n+1,\ell};v) = G(nd_{n,\ell} + nd_{n-1,\ell-1};v)$$

$$\text{Logo } d_{n+1,\ell} = n(d_{n,\ell} + d_{n-1,\ell-1}) \quad (*)$$

Casos Particulares:

a) $d_{n,0} = 0$ para $n \geq 1$

b) $d_{n,1} = (n-1)!$ para $n \geq 2$

II.D. Número Total de Permutações-Deslocamento

Pela definição de $d_n(v)$ o valor $d_n(1)$ é o número total de permutações-deslocamento sobre o conjunto X_n .

Indicando por D_n tal número, isto é, $D_n = d_n(1) = \sum_{\ell=0}^n d_{n,\ell}$, temos imediatamente pelas recorrentes anteriores as duas recorrentes dos totais de permutações-deslocamento.

a) $D_{n+1} = \sum_{i=1}^n n^{(i)} \cdot D_{n-i}$

b) $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$

sendo $n \geq 1$, $D_0 = 1$ e $D_1 = 0$.

(*) Riordan dá uma prova direta por um argumento combinatório.



md

11.E. Tabela dos Números $d_{n,\ell}$ e D_n e Quadro das Permutações-Deslocamento.

A tabela nº 1 dada a seguir fornece os coeficientes $d_{n,\ell}$ e os totais D_n (n de 1 a 10), e pode ser construída com qualquer dos esquemas, baseados nas recorrentes, fornecidos abaixo.

No quadro nº 1 estão indicadas as estruturas cíclicas das permutações-deslocamento correspondentes e cujas constagens foram obtidas por argumentos combinatórios diretos.

Esquema 1 (Utilizando-se a primeira recorrente)

$n \backslash \ell$	0	1		$\ell-1$	ℓ
0				$\downarrow \circ$	$n(n) \cdot$
1				$^+ \downarrow \circ$	$n(n-1) \cdot$
$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$
$n-1$				$\downarrow$	$n(1) \cdot$
n				$\searrow$	$\vdots$
$n+1$					$\vdots$
$\vdots$					$\vdots$

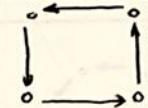
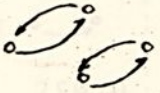
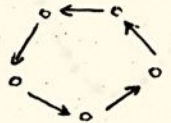
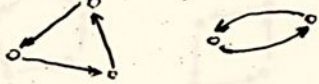
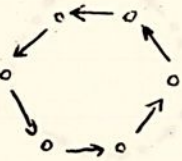
Esquema 2 (Utilizando-se a segunda recorrente)

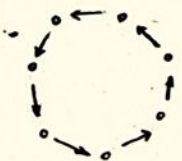
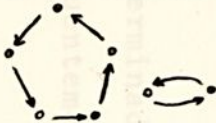
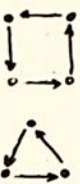
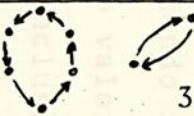
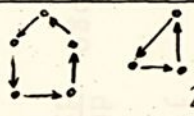
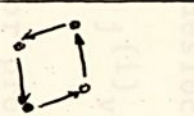
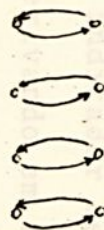
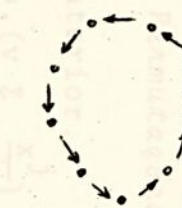
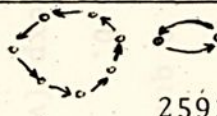
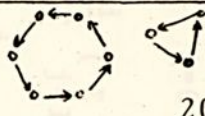
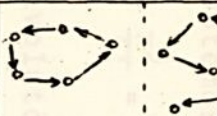
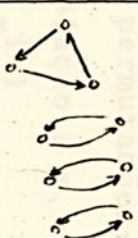
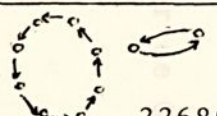
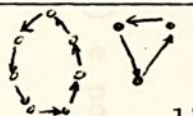
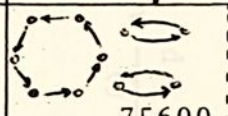
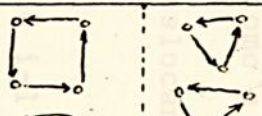
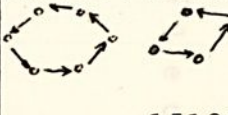
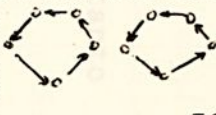
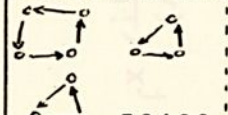
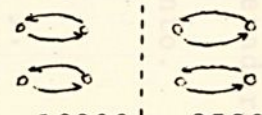
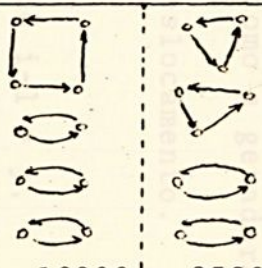
$n \backslash \ell$	0	1		$\ell-1$	ℓ
0				$\vdots$	$\vdots$
1				$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$
$n-1$				$\vdots$	$\vdots$
n				$\searrow$	n
$n+1$					$\downarrow =$
$\vdots$					$\vdots$

Tabela nº 1 ($d_{n,\ell}$ e D_n)

$n \backslash \ell$	0	1	2	3	4	5	D_n
0	1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	1
3	0	2	0	0	0	0	2
4	0	6	3	0	0	0	9
5	0	24	20	0	0	0	44
6	0	120	130	15	0	0	265
7	0	720	924	210	0	0	1854
8	0	5040	7308	2380	105	0	14833
9	0	40320	64224	26432	2520	0	133496
10	0	362880	623376	303660	44100	945	1334961

Quadro nº 1 (Permutações-deslocamento por Estrutura Cíclica)

$n \backslash \ell$	1	2	3	4	5
0	0				
1	0				
2	 1				
3	 2				
4	 6	 3			
5	 24	 20			
6	 120	 90	 15		

$n \backslash \ell$	1	2	3	4	5
7	 720	 504	 420	 210	
8	 5040	 3360	 2688	 1260	 105
9	 40320	 25920	 20160	 9072	 2520
10	 362880	 226800	 172800	 75600	 120960
		 151200	 72576	 50400	 56700
				 18900	 25200
					 945

II.F. Geradora Exponencial do Indicador de Permutações-Deslocamento

Coloquemos $G = \sum_{i=0}^{\infty} d_i(v) \frac{x^i}{i!}$ como a geradora exponencial do indicador de permutações-deslocamento.

Derivando em relação a x ,

$$G' = \sum_{i=1}^{\infty} d_i(v) \frac{x^{i-1}}{(i-1)!}, \text{ fazendo } i-1 = j,$$

$$G' = \sum_{j=0}^{\infty} d_{j+1}(v) \frac{x^j}{j!} = \sum_{j=1}^{\infty} d_{j+1}(v) \frac{x^j}{j!}$$

Aplicando a primeira recorrente do indicador de permutações-deslocamento obtemos:

$$G' = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^j j^{(i)} v d_{j-i}(v) \right) \frac{x^j}{j!} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^j v \frac{d_{j-i}(v)}{(j-i)!} \right) x^j$$

Por produto convolutório,

$$G' = \left(\sum_{j=1}^{\infty} v x^j \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{d_j(v)}{j!} x^j \right)$$

$$\text{Logo, } \frac{dG}{dx} = G \cdot \frac{d}{dx} \left(\sum_{j=1}^{\infty} v \cdot \frac{x^{j+1}}{j+1} \right) \text{ e portanto}$$

$G = \exp. \left(\sum_{j=2}^{\infty} v \frac{x^j}{j} + h \right)$, $h = \text{constante}$, que é determinada fazendo $x=0$ para o qual o valor de G é 1 e consequentemente o valor de h é 0.

$$\text{Conclusão: } G = \exp. \left(v \sum_{j=2}^{\infty} \frac{x^j}{j} \right)$$

II.G. Expressão Explícita ou Fórmula Geral do Indicador de Permutações-Deslocamento

Pelo resultado anterior,

$$GE[d_n(v); x] = \exp. \left(v \sum_{j=2}^{\infty} \frac{x^j}{j} \right)$$

Ou seja,

$$GE[d_n(v); x] = \exp.(-vx) \cdot \exp(v \ln(1-x)^{-1})$$

Porém, a exponencial

$$\exp(-vx) = G\left(\frac{(-v)^i}{i!}; x\right) \text{ e } \exp.(v \ln(1-x)^{-1}) = G\left(\frac{v^j}{j!}; x\right)$$

Por propriedades de geradora,

$$GE(d_n(v); x) = G\left\{\sum_{k=0}^n \frac{(-v)^k}{k!} \cdot \frac{v^{n-k}}{(n-k)!}; x\right\}$$

D_n e com o mesmo raciocínio utilizado na determinação da

$$GE(d_n(v); x) = GE\left\{\sum_{k=0}^n (-v)^k \cdot \binom{n}{k} v^{n-k}; x\right\}$$

$$\text{Conclusão: } d_n(v) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-v)^k \cdot v^{n-k}$$

que é a fórmula geral do indicador de permutações-deslocamento.

Ilustração:

$$\text{Para } n=6, d_6(v) = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} (-v)^k \cdot v^{6-k} =$$

$$= 120v + 130v^2 + 15v^3 \text{ o que está de acordo com}$$

a tabela nº 1.

ambas já estudadas e obtidas anteriormente.

II.H. Geradora Exponencial e Fórmula Geral do Número Total de Permutações-deslocamento

Vimos em II.F. que $D_n = d_n(v)$ para $v=1$, então na geradora exponencial de $d_n(v)$ fazendo $v=1$, temos:

$$\begin{aligned} GE(d_n(1); x) &= GE(D_n; x) = \exp\left(\sum_{j=2}^n \frac{x^j}{j}\right) = \\ &= \exp\left(\sum_{j=1}^n \frac{x^j}{j}\right) \cdot \exp(-x) \end{aligned}$$

de onde se obtém facilmente que $GE(D_n; x) = (1-x)^{-1} \cdot e^{-x}$.

Esta fórmula foi obtida por Liu [34], a partir da recorrente $D_n - nD_{n-1} = (-1)^n$, multiplicando por $\frac{x^n}{n!}$ e somando sobre n a partir de 2 quando se obtém

$$D(x) - D_0 - D_1 x - x(D(x) - D_0) = e^{-x} - (1-x).$$

Como $D_0=1$ e $D_1=0$ obtemos $(1-x)D(x) = e^{-x}$, e fi-

erro inferior a $(n+1)$.



nalmente a geradora exponencial

$$D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D_n x^n}{n!} = e^{-x} \cdot (1-x)^{-1}$$

Da geradora exponencial $(1-x)^{-1} \cdot e^{-x}$ dos números D_n e com o mesmo raciocínio utilizado na determinação da fórmula geral de $d_n(v)$ obtivemos como corolário a expressão explícita de D_n ,

$$D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

II.J. Expressões do Número Total de Permutações -deslocamento

$$a) D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$$

$$b) D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

ambas já estudadas e obtidas anteriormente.

$$c) D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, \text{ obtida da anterior.}$$

II.K. Aproximações de D_n

Da expressão b) obtida em II.H. temos:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{n!} = e^{-1}$, portanto para n suficientemente grande $D_n \approx n!e^{-1}$.

Assim por exemplo, considerando $e^{-1} = 0,36787944$, para $n=8$, $n! = 40320$ e $D_8 \approx 14832,90$ o que se confirma pela tabela nº 1.

Estudo da aproximação $n!e^{-1}$ de D_n :

$$n!e^{-1} = D_n + n! \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$$

se n é um número ímpar, $n!e^{-1} - D_n < \frac{1}{n+1}$, se n é um número par, $D_n - n!e^{-1} < \frac{1}{n+1}$, isto é, $n!e^{-1}$ é uma aproximação de D_n com erro inferior a $(n+1)^{-1}$.



CAPÍTULO III

PERMUTAÇÕES-ENCONTRO

III.A. Preliminares

Definição: A aplicação bijetora $f: X_n \rightarrow X_n$ é uma permutação-encontro, se e somente se, $f(i)=i$ para algum i em X_n .

Definição: Indicador das permutações-encontro sobre o conjunto X_n é o polinômio na variável u , o qual indicaremos por $e_n(u)$, cujo coeficiente $e_{n,k}$ de u^k é o número de tais permutações com k encontros, k variando de 0 a n .

Em termos de função geradora

$e_n(u) = G[e_{n,k}; u]$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ e $e_{n,k}$ acima definido.

III.B. Relação entre os Indicadores $z_n(u;v)$ e $e_n(u)$

Em $z_n(u;v)$ fazendo $v=1$, desde que v especifica o número de outros ciclos, $z_n(u;1)$ é o indicador das permutações-encontro.

Assim $z_n(u;1) = e_n(u)$ conforme a definição dada acima.

III.C. Recorrentes para o Indicador das Permutações-Encontro

III.C.1. Primeira Recorrente

Pela primeira recorrente básica, fazendo $v=1$ temos:

$$z_{n+1}(u;1) = uz_n(u;1) + \sum_{i=1}^n n^{(i)} z_{n-i}(u;1)$$

Como $z_n(u;1) = e_n(u)$, obtemos

$$e_{n+1}(u) = ue_n(u) + \sum_{i=1}^n n^{(i)} e_{n-i}(u)$$

sendo $n \geq 1$, com $e_0(u) = 1$ e $e_1(u) = u$.

III.C.2. Segunda Recorrente

Pela segunda recorrente básica, com $v=1$ temos:

$$z_{n+1}(u;1) = (n+u) z_n(u;1) + n(1-u) z_{n-1}(u;1)$$

Como $z_n(u;1) = e_n(u)$ encontramos a segunda recorrente

$$e_{n+1}(u) = (n+u) e_n(u) + n(1-u) e_{n-1}(u)$$

III.C.3. Recorrentes para os Coeficientes

Como consequência das igualdades acima obtivemos recorrentes para os números $e_{n,k}$ que são:

III.C.3.1. Primeira Recorrente

Como $e_n(u) = G[e_{n,k};u]$, pela 1ª recorrente do indicador das permutações-encontro temos:

$$G[e_{n+1,k};u] = u G[e_{n,k};u] + \sum_{i=1}^n n^{(i)} G[e_{n-i,k};u]$$

Por propriedades de geradora

$$G[e_{n+1,k};u] = G[e_{n,k-1};u] + G\left[\sum_{i=1}^n n^{(i)} e_{n-i,k};u\right]$$

Consequentemente,

$$e_{n+1,k} = e_{n,k-1} + \sum_{i=1}^n n^{(i)} e_{n-i,k}$$

que é a primeira recorrente para os números $e_{n,k}$.

III.C.3.2. Segunda Recorrente

Pela segunda recorrente do indicador das permutações-encontro temos:

$$G(e_{n+1,k};u) = (n+u) G(e_{n,k};u) + n(1-u) G(e_{n-1,k};u)$$

Por propriedades de geradora,

$$G(e_{n+1,k};u) = G(n e_{n,k};u) + G(e_{n,k-1};u) + \\ + G(n e_{n-1,k};u) - G(n e_{n-1,k-1};u)$$

Consequentemente,

$$e_{n+1,k} = n(e_{n,k} + e_{n-1,k} - e_{n-1,k-1}) + e_{n,k-1}$$

que é a segunda recorrente para os números $e_{n,k}$.

Em ambas $n \geq 1$.

III.D. Número Total de Permutações-Encontro

Pelo fato de $e_{n,k}$ ser o número de permutações de n elementos com k encontros $e_{n,0} = D_n$, número de permutações-deslocamento.

Portanto $\sum_{k=1}^n e_{n,k}$ é o número total de permutações-encontro. Indicando tal número por $\bar{D}_n$, $\bar{D}_n = \sum_{k=1}^n e_{n,k}$.

Assim $\bar{D}_n = n! - D_n$.

Aplicando a recorrente b) dos números D_n obtemos $\bar{D}_{n+1} = n(\bar{D}_n + \bar{D}_{n-1})$.

Analogamente através da expressão c) dos números D_n obtemos $\bar{D}_n = n \bar{D}_{n-1} - (-1)^n$.

Também aqui $n \geq 1$, sendo $\bar{D}_0 = 0$ e $\bar{D}_1 = 1$.

III. E. Tabela dos Números $e_{n,k}$ e $\bar{D}_n$ e Quadro das Permutações-Encontro.

A tabela nº 2 dada a seguir fornece os coeficientes $e_{n,k}$ e os totais $\bar{D}_n$ (n de 1 a 10) e pode ser construída com qualquer dos esquemas, baseados nas recorrentes, fornecidos abaixo.



No quadro nº 2 estão indicadas as estruturas cíclicas das permutações-encontro correspondentes e cujas contagens foram obtidas por argumentos combinatórios diretos

Esquema 1 (Utilizando-se a primeira recorrente)

$n \backslash k$	0	1..... k-1	k
0			$n^{(n)}$
1			$n^{(n-1)}$
⋮			
⋮			
$n-1$			$n^{(1)}$
n			↙ ↘
$n+1$			
⋮			
⋮			

Esquema 2 (Utilizando-se a segunda recorrente)

$n \backslash k$	0	1..... k-1	k
0		⋮	⋮
1		⋮	⋮
⋮		⋮	⋮
⋮		⋮	⋮
$n-1$		n	n
n		n	n
$n+1$			
⋮			
⋮			

Tabela nº 2 - ($e_{n,k}$ e $\bar{D}_n$)

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\bar{D}_n$
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
3	2	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	4
4	9	8	6	0	1	0	0	0	0	0	0	15
5	44	45	20	10	0	1	0	0	0	0	0	76
6	265	264	135	40	15	0	1	0	0	0	0	454
7	1854	1855	924	315	70	21	0	1	0	0	0	3185
8	14833	14832	7420	2464	630	112	28	0	1	0	0	25458
9	133496	133497	66744	22260	5544	1134	168	36	0	1	0	229179
10	1334961	1334960	667485	222480	55650	11088	1890	240	45	0	1	2291663

Estrutura Cíclica e Número de Encontros

n	$e_{n,1}$	$e_{n,2}$	$e_{n,3}$	$e_{n,4}$	$e_{n,5}$	$e_{n,6}$	$e_{n,7}$	$e_{n,8}$	$e_{n,9}$	$e_{n,10}$
1	.									
2	.	.								
3	. 0	.	.							
4	. Δ	.	.	.						
5	. $\square$. 00	. Δ	.	.	.					
6	. $\diamond$. 0 Δ	. $\square$. 00	. Δ	.	.	.				
7	. $\diamond$. Δ Δ	. Δ . Δ	. $\square$. Δ	.	.	.	.			
8	. $\diamond$. 00 Δ	. $\square$. 00	. Δ . Δ	.	.	.	.	.		
9	. $\diamond$. 00 Δ Δ	. $\square$. 00 Δ	. Δ . Δ Δ	.	.	.	.	.	.	
10	. $\diamond$. 00 Δ Δ Δ	. $\square$. 00 Δ Δ	. Δ . Δ Δ Δ	.	.	.	.	.	.	.

III.F. Geradora Exponencial do Indicador de Permutações-Encontro

Coloquemos $G = \sum_{i=0}^{\infty} e_i(u) \frac{x^i}{i!}$ como a geradora exponencial do indicador de permutações-encontro.

Derivando em relação a x ,

$$G' = \sum_{i=1}^{\infty} e_i(u) \frac{x^{i-1}}{(i-1)!}, \text{ fazendo } i-1 = j,$$

$$G' = \sum_{j=0}^{\infty} e_{j+1}(u) \frac{x^j}{j!}$$

Pela primeira recorrente do indicador das permutações-encontro,

$$G' = \sum_{j=0}^{\infty} \left[u e_j(u) + \sum_{i=1}^j j^{(i)} e_{j-i}(u) \right] \frac{x^j}{j!}$$

$$G' = \sum_{j=0}^{\infty} u e_j(u) \frac{x^j}{j!} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^j \frac{e_{j-i}(u)}{(j-i)!} x^j$$

$$G' = u G + \left(\sum_{j=1}^{\infty} x^j \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{e_j(u)}{j!} x^j \right)$$

$$G' = u G + G \sum_{j=1}^{\infty} x^j = G(u + \sum_{j=1}^{\infty} x^j)$$

$$\text{Portanto } \frac{dG}{dx} = G \cdot \frac{d}{dx} \left(u x + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^{j+1}}{j+1} \right) \text{ e então,}$$

$G = \exp. \left(u x + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{x^j}{j} + h \right)$, h = constante que é determinada fazendo $x = 0$ para cujo valor G é 1 e consequentemente $h = 0$.

$$\text{Conclusão: } G = \exp. \left(u x + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{x^j}{j} \right).$$



III.G. Expressão Explícita ou Fórmula Geral do Indicador de Permutações-Encontro

Pelo resultado anterior (III.F.)

$$GE[e_n(u), x] = \exp(ux + \sum_{j=2}^n \frac{x^j}{j}), \text{ ou seja,}$$

$$GE[e_n(u), x] = \exp(ux-x) \cdot \exp. \ln(1-x)^{-1}.$$

$$\text{Porém: } \exp(u-1)x = G\left[\frac{(u-1)^1}{1!}; x\right]$$

$$\exp. \ln(1-x)^{-1} = G[1; x]$$

Logo, por propriedades de geradora,

$$GE[e_n(u); x] = G\left[\sum_{k=0}^n \frac{(u-1)^k}{k!}; x\right] = GE\left[n! \sum_{k=0}^n \frac{(u-1)^k}{k!}; x\right]$$

Conclusão: $e_n(u) = n! \sum_{k=0}^n \frac{(u-1)^k}{k!}$, que é a fórmula geral do indicador de permutações-encontro.

Ilustração:

$$\text{para } n=6, e_6(u) = 6! \sum_{k=0}^6 \frac{(u-1)^k}{k!}$$

$$e_6(u) = 265 + 264u + 135u^2 + 40u^3 + 15u^4 + u^6$$

cujos coeficientes podem ser verificados com a tabela nº 2.

III.H. Um novo método de obtenção do indicador de permutações-encontro

Da fórmula geral obtém-se o resultado:

$$e'_n(u) = n e_{n-1}(u), \quad e'_n(u) \text{ derivada em relação a } u.$$

Consequentemente, $d e_n(u) = n e_{n-1}(u) du$, ou seja, $e_n(u) = n \int e_{n-1}(u) du + h$, $h = \text{constante}$, que nos fornece um novo método de obtenção.

O método consiste então em aplicar a última igualdade e a partir de $e_0(u)=1$ obter sucessivamente os de

mais indicadores sendo que para cada integral calcula-se o valor da constante para $u=0$ lembrando que $e_n(0)=e_{n,0}=D_n$.

$$\text{Assim, } e_1(u) = \int e_0(u) du + h = u+h$$

Fazendo $u=0$, $e_1(0) = h$ e como $e_1(0)=D_1$ e $D_1=0$, $h=0$, portanto $e_1(u) = u$.

$$e_2(u) = 2 \int e_1(u) du + h = u^2+h$$

Fazendo $u=0$, $e_2(0)=h$ e como $e_2(0) = D_2$ e $D_2=1$, $h=1$, portanto $e_2(u) = u^2+1$

$$e_3(u) = 3 \int e_2(u) du + h = u^3+3u+h$$

Fazendo $u=0$, $e_3(0)=h$ e como $e_3(0) = D_3$ e $D_3=2$, $h=2$, portanto $e_3(u)=u^3+3u+2$.

Nota: A constante em cada integral poderá ser calculada fazendo $u=1$ lembrando que $e_n(1)=\sum_{k=0}^n e_{n,k}=n!$.

$$\text{Assim, } e_1(u) = \int e_0(u) du + h = u+h$$

Fazendo $u=1$, $e_1(1)=1+h$ e como $e_1(1)=1$, $h=0$, portanto $e_1(u)=u$.

$$e_2(u)=2 \int e_1(u) du + h = u^2+h$$

Fazendo $u=1$, $e_2(1)=1+h$ e como $e_2(1)=2$, $h=1$, portanto $e_2(u)=u^2+1$.

$$e_3(u)=3 \int e_2(u) du + h = u^3+3u+h$$

Fazendo $u=1$, $e_3(1)=4+h$ e como $e_3(1)=6$, $h=2$, portanto $e_3(u)=u^3+3u+2$

III.J. Uma nova propriedade para os coeficientes do indicador de permutações-encontro

Sendo $e_n(u) = \sum_{k=0}^n e_{n,k} u^k$ e desde que

$e'_n(u) = n e_{n-1}(u)$, temos,

$$\sum_{k=1}^n k e_{n,k} u^{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} e_{n-1,k} u^k, \text{ ou então,}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (j+1) e_{n,j+1} u^j = n \sum_{k=0}^{n-1} e_{n-1,k} \cdot u^k$$

Portanto, $(k+1) \cdot e_{n,k+1} = n e_{n-1,k}$, ou $k e_{n,k} = n e_{n-1,k-1}$ o que equivale a $e_{n,k} = \frac{n}{k} e_{n-1,k-1}$, $k \geq 1$, que é uma nova recorrente para os valores $e_{n,k}$ e que fornece um novo esquema para construção da tabela nº 2.

Esquema

k		0	1		k-1	k
n	0					
	1					
	...					
	...					
	...					
	n-1				$\frac{n}{k}$	
	n					

III.K. Estudo da distribuição do número de permutações-encontro pelo número de encontros

Sendo $e_{n,k}$ o número de permutações de n elementos com k encontros podemos associar a esse fato uma distribuição de frequências representadas por tais números conforme os valores de k .

Consequentemente pode se determinar a média, momento fatorial e variância da referida distribuição possibilitando interpretações estatística para o indicador das permutações-encontro.

Vimos anteriormente que,

$$e_n(u) = G[e_{n,k}; u] = n! \sum_{k=0}^n \frac{(u-1)^k}{k!}$$

O momento fatorial $M_{(r)}$ de ordem r é dado por

$\frac{G^{(r)}}{n!} \Big|_{u=1}$ onde $G^{(r)}$ é a derivada de ordem r da geradora.

a) Média:

$$\frac{dG}{du} = \frac{d}{du} \cdot n! \sum_{k=0}^n \frac{(u-1)^k}{k!} = n! \left[1 + \sum_{k=1}^n \frac{(u-1)^{k-1}}{(k-1)!} \right]$$

Portanto $M_{(1)}=1$, isto é, $\mu=1$ média da distribuição.

b) Momento fatorial de 2ª ordem e variância:

$$\frac{d^2G}{du^2} = n! \left[1 + \sum_{k=2}^n \frac{(u-1)^{k-2}}{(k-2)!} \right]$$

Portanto $M_{(2)}=1$, com o qual segue imediatamente a variância,

$$\sigma^2 = M_{(2)} + M_{(1)} - M_{(1)}^2 = 1 \quad (*)$$

Ilustração:

Para $n=5$, $e_5(u) = 44+45u+20u^2+10u^3+u^5$, e o quadro de distribuição de permutações-encontro pelo número de encontros é,

k	$e_{5,k}$	$k \cdot e_{5,k}$	$k^2 \cdot e_{5,k}$
0	44	0	0
1	45	45	45
2	20	40	80
3	10	30	90
4	0	0	0
5	1	5	25
	120	120	240

(*) Resultado que coincide com os valores obtidos por David and Barton [11] ou Feller [18].



$$\text{Média } \mu = \frac{\sum k e_{5,k}}{\sum e_{5,k}} = 1$$

$$\text{Variança } \sigma^2 = \frac{\sum k^2 e_{5,k}}{\sum e_{5,k}} = \mu^2 = \frac{240}{120} - 1 = 1$$

Com isso novas expressões para B_n e $\bar{B}_n$ são obtidas ampliando a série de resultados conseguidos referentes as permutações-encontre e deslocamento.

IV. A. Relações com as frações contínuas

Consideremos a fração contínua geral:

$$x = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{\ddots}}}}$$

e as reduções:

$$\frac{p_1}{q_1} = a_1, \frac{p_2}{q_2} = a_1 + \frac{b_2}{a_2}, \frac{p_3}{q_3} = a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3}}, \text{ etc.}$$

Pela lei de formação das reduções, os números p_n e q_n são determinados pelas relações:

$$p_n = a_n \cdot p_{n-1} + b_n \cdot p_{n-2} \text{ e } q_n = a_n \cdot q_{n-1} + b_n \cdot q_{n-2}$$

com $p_0 = 1, q_0 = 0, p_1 = a_1 \text{ e } q_1 = 1$.

Pelos resultados obtidos em relação aos números B_n e $\bar{B}_n$ segue o teorema:

CAPÍTULO IV

RELAÇÕES COM AS FRAÇÕES CONTÍNUAS E O CÁLCULO DE DIFERENÇAS FINITAS

Considerando os resultados obtidos com os números D_n e $\bar{D}_n$ e o estudo das frações contínuas em particular certas propriedades das reduzidas, bem como elementos do cálculo de diferenças finitas em particular a aplicação do operador de diferenças ascendentes à função fatorial, estabelecemos algumas relações úteis entre aqueles números e tais tópicos.

Com isso novas expressões para D_n e $\bar{D}_n$ são obtidas ampliando a série de resultados conseguidos referentes as permutações-encontro e deslocamento.

IV.A. Relações com as frações contínuas

Consideremos a fração contínua geral,

$$x = \cfrac{b_2}{a_1 + \cfrac{b_3}{a_2 + \cfrac{b_4}{\ddots}}}$$

e as reduzidas,

$$\frac{p_1}{q_1} = a_1, \quad \frac{p_2}{q_2} = a_1 + \frac{b_2}{a_2}, \quad \frac{p_3}{q_3} = a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3}}, \text{ etc.}$$

Pela lei de formação das reduzidas, os números p_n e q_n são determinados pelas relações,

$$p_n = a_n \cdot p_{n-1} + b_n \cdot p_{n-2} \text{ e } q_n = a_n \cdot q_{n-1} + b_n \cdot q_{n-2},$$

com $p_0=1$, $q_0=0$, $p_1=a_1$ e $q_1=1$.

Pelos resultados obtidos em relação aos números D_n e $\bar{D}_n$ segue o teorema:

Teorema: A reduzida de ordem n da fração contínua

$$\left| \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 0 & & & & & \end{array} \right| \text{ é igual a } \frac{D_n}{\bar{D}_n}$$

(o cálculo de $\frac{D_n}{\bar{D}_n}$ é efetuado sem simplificações)

Demonstração:

A fração contínua acima é obtida da fração contínua geral considerando $a_1=0$, $b_i=i-1$ e $a_i=i-1$, $i > 2$.

Pela lei de formação das reduzidas,

$$p_n = (n-1)(p_{n-1}+p_{n-2}) \text{ e } q_n = (n-1)(q_{n-1}+q_{n-2}) \text{ e } \frac{p_1}{q_1} = \frac{0}{1},$$

$$\frac{p_2}{q_2} = 0 + \frac{1}{1}, \frac{p_3}{q_3} = 0 + \frac{1}{1+2} = \frac{2}{4}, \frac{p_4}{q_4} = 0 + \frac{1}{1+\frac{2}{2+3}} = \frac{9}{15}, \text{ etc.}$$

$$\text{Sabemos que } \frac{D_1}{\bar{D}_1} = \frac{0}{1}, \frac{D_2}{\bar{D}_2} = \frac{1}{1}, \frac{D_3}{\bar{D}_3} = \frac{2}{4}, \frac{D_4}{\bar{D}_4} = \frac{9}{15}, \text{ etc,}$$

e também

$$D_n = (n-1)(D_{n-1}+D_{n-2}) \text{ e } \bar{D}_n = (n-1)(\bar{D}_{n-1}+\bar{D}_{n-2}).$$

Então por comparação conclui-se que as sucessões p_n e D_n bem como q_n e $\bar{D}_n$ são idênticas e portanto a reduzida de ordem n da fração contínua acima é $\frac{D_n}{\bar{D}_n}$.

$$\text{Corolário 1: } D_n = nD_{n-1}+(-1)^n \text{ e } \bar{D}_n = n\bar{D}_{n-1}-(-1)^n$$

De fato, considerando a fração contínua do teorema e pela seguinte propriedade das reduzidas,

$$p_n \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot q_n = (-1)^n \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_4 \dots b_n \text{ temos imediatamente } D_n \cdot \bar{D}_{n-1} - D_{n-1} \cdot \bar{D}_n = (-1)^n \text{ da qual conclui-se o corolário 1.}$$

$$\text{Corolário 2: } D_n = (n-1) [n \cdot D_{n-2} - (-1)^n] \text{ e}$$

$$\bar{D}_n = (n-1) [n \cdot \bar{D}_{n-2} + (-1)^n]$$

Considerando a fração contínua do teorema e pe-

la seguinte propriedade das reduzidas,

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{a_n b_2 \dots b_{n-1}}{q_n \cdot q_{n-2}}, \text{ temos imediatamente}$$

$$\frac{D_n}{\bar{D}_n} - \frac{D_{n-2}}{\bar{D}_{n-2}} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{\bar{D}_n \cdot \bar{D}_{n-2}}, \text{ ou seja, } D_n \cdot \bar{D}_{n-2} - \bar{D}_n \cdot D_{n-2} =$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \text{ da qual conclui-se o corolário 2.}$$

IV.B. Relações com as Diferenças Finitas

No cálculo de diferenças finitas, vide referência [13], são válidas relações entre os operadores de diferenças descendentes e deslocamento de maneira que,

$$\Delta^n x! = (E-1)^n x! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \cdot (x+n-k)!$$

Considerando $x=0$,

$$\Delta^n 0! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \cdot (n-k)! = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

Portanto, de acordo com a expressão geral dos números D_n obtida em II.H, vem:

$$\Delta^n 0! = D_n$$

Empregando então a tabela do operador Δ para a função $x!$, os valores de D_n são obtidos imediatamente, pois as sucessivas diferenças de um mesmo argumento se dispõem em diagonal descendente, e para $x=0$ os valores correspondem aos números D_n e se localizam na primeira diagonal conforme a tabela nº 3.



TABELA nº 3

x	x!	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6	Δ^7	Δ^8	Δ^9	Δ^{10}
0	1 = D ₀										
1	1	0 = D ₁									
2	2	1	1 = D ₂								
3	6	4	3	2 = D ₃							
4	24	18	14	11	9 = D ₄						
5	120	96	78	64	53	44 = D ₅					
6	720	600	504	426	362	309	265 = D ₆				
7	5040	4320	3720	3216	2790	2428	2119	1854 = D ₇			
8	40320	35280	30960	27240	24024	21234	18806	16687	14833 = D ₈		
9	362880	322560	287280	256320	229080	205056	183822	165016	148329	133496 = D ₉	
10	3628800	3265920	2943360	2656080	2399760	2170680	1965624	1781802	1616785	1468457	1334961 = D ₁₀

CAPÍTULO V

RELAÇÕES COM AS PERMANENTES

V. A. Preliminares

Inicialmente "permanente" foi definida como o valor de uma função escalar de uma matriz da seguinte maneira:

Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz quadrada de ordem n , então permanente de A que indicamos por $\text{per } A$ é definida como segue,

$$\text{per } A = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}, \text{ onde a soma se esten-}$$

de sobre todas as $n!$ permutações do conjunto X_n ou então onde a soma se estende sobre S_n , S_n grupo simétrico de grau n .

Posteriormente notou-se que permanente pode ser definida para qualquer matriz $A = [a_{ij}]$ do tipo $m \times n$ porém com $m \leq n$, da seguinte maneira:

$$\text{per } A = \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^m a_{i\sigma(i)} \text{ onde a soma se estende so}$$

bre todas as m -permutações dos elementos de X_n .

Essa função escalar de uma matriz aparece repetidamente na literatura de combinatória em conexão com certas enumerações por ser em geral um invariante apropriado para matrizes que surgem em pesquisas na área onde o problema é essencialmente inalterado por transformações elementares sobre matrizes como por exemplo no cálculo das permutações-deslocamento e outras como veremos em seguida.

Segundo Minc [35] os primeiros estudos sobre permanentes surgiram em 1812 por Cauchy para posteriormen-



te vários resultados serem publicados muitos dos quais envolvendo identidades especiais com determinantes. Porém o desenvolvimento maior do assunto deu-se nos últimos '20 anos com a publicação de vários resultados inclusive com aplicações à física e à teoria das probabilidades.

Para a obtenção dos nossos resultados sobre as permutações-deslocamento e outras através da teoria das permanentes consideramos a seguinte definição.

Definição: Dada a matriz $A = [a_{ij}]$ do tipo $m \times n$, com $m \leq n$, per $A = \sum_{j_i} \prod_{i=1}^m a_{ij_i}$ cuja soma é estendida a todas as aplicações j_i injetoras do conjunto X_m no conjunto X_n .

Os primeiros índices são elementos do domínio e os segundos índices são elementos do conjunto imagem. Como consequência notamos que o número de parcelas na soma é $\binom{n}{m}$.

V.B. Teoremas Básicos

Teorema 1 - Se B é uma matriz obtida da matriz A efetuando-se trocas de posições entre linhas ou entre colunas, então $\text{per } B = \text{per } A$.

De fato:

Vamos supor que a matriz B seja obtida da matriz A trocando-se a linha r pela linha s com $r < s$.

$$\text{Então } B = [b_{ij}]_{m \times n} \text{ com } b_{ij} = a_{ij} \text{ para } i \neq r, i \neq s$$

$$b_{rj} = a_{sj}$$

$$b_{sj} = a_{rj}$$

$$\text{Portanto } \text{per } B = \sum b_{1j_1} b_{2j_2} \dots b_{rj_r} \dots b_{sj_s} \dots$$

$$\dots b_{mj_m}$$

ou, per $B = \sum a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{sj_s} \dots a_{rj_r} \dots a_{mj_m}$.

Isto é, per $B = \text{per } A$.

De maneira análoga demonstra-se quando B é obtida de A efetuando-se troca de posições entre colunas em A .

Teorema 2 - Multiplicando-se todos os elementos de uma mesma linha ou coluna de uma matriz A por um escalar λ , a permanente da matriz fica multiplicada por λ .

A demonstração é imediata.

Teorema 3 - A permanente de uma matriz quadrada A é igual a permanente da sua transposta A^t .

De fato:

$$\text{per } A = \sum a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

$$\text{per } A^t = \sum b_{1j_1} b_{2j_2} \dots b_{nj_n}$$

Como a soma é estendida a todas as aplicações f injetoras de X_n em X_n e sendo $f^{-1}(f^{-1})$, e como $a_{ij} = b_{ji}$ as parcelas da soma com os b_{ji} são as mesmas da soma com os a_{ij} .

Logo, per $A = \text{per } A^t$

Teorema 4 - (Propriedade da Expansão)

Se A_{ij} é a matriz obtida da matriz A do tipo $m \times n$ suprimindo-se a linha i e a coluna j , então

$$\text{per } A = \sum_{i=1}^m a_{ij} \text{ per } A_{ij}, \quad j \in X_n.$$

De fato:

Para $j=1$, per A_{i1} é a soma dos produtos dos a_{rs} onde $r \neq i$ e os s são as imagens das aplicações injetoras de $\{1, 2, \dots, m\} - \{i\}$ em $\{2, 3, \dots, m\}$.

O valor a_{i1} per A_{i1} é igual a soma dos produ -

tos dos a_{rs} , r qualquer e s as imagens das aplicações injetoras de $\{1, 2, \dots, m\}$ em $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que a imagem de i é 1 .

Portanto $\sum_{i=1}^m a_{i1}$ per A_{i1} é igual a soma dos produtos dos a_{rs} , onde r é do domínio e s da imagem de todas as aplicações f de X_n em X_n que é exatamente per A .

A demonstração foi feita para $j=1$ porém pelo teorema 1 o resultado é válido para os demais valores de j .

Teorema 5 - Consideremos:

$A = [a_{ij}]$ do tipo $m \times n$ com $m \leq n$;

A_k matriz obtida de A substituindo k colunas por colunas constituídas de zeros, $k=0, 1, 2, \dots, n-1$;

b_{ik} a soma dos elementos da linha i da matriz A_k ;

$c_k = \prod_{i=1}^m b_{ik}$ e $\sum c_k$ estendida a todas as combinações de n colunas k a k ;

Nessas condições, per $A = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{n-m+i}{i} \sum c_{n-m+i}$.

A demonstração é baseada no princípio da inclusão e exclusão generalizado o qual trata-se do seguinte:

Associemos a cada elemento i do conjunto X_n um número real a_i denominado o seu peso. Seja $P_1, P_2, \dots, P_r, \dots$ propriedades relacionadas com os elementos de X_n e $W(P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_r})$ a soma dos pesos dos elementos de X_n que satisfazem r propriedades cada um.

Se $E(m)$ é a soma dos pesos dos elementos de X_n que satisfazem exatamente m das n propriedades, então:

$$E(m) = \sum_{i=0}^{n-m} (-1)^i \binom{m+i}{m} W(m+i), \text{ com}$$

$$W(r) = \sum W(P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_r}).$$

Dada então a matriz $A = [a_{ij}]$ do tipo $m \times n$, com $m \leq n$ e sendo S o conjunto das m -uplas obtidas de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, podemos considerar:

a) O valor $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{mj_m}$ que é o peso associado ao elemento $(j_1, j_2, \dots, j_m)$ do conjunto S ;

b) As propriedades $P_1, P_2, \dots, P_r, \dots$ relacionadas com os elementos de S tal que um elemento qualquer satisfaz a propriedade P_i se não possui o elemento i .

Considerando as matrizes A_r e os valores c_r conforme o enunciado do teorema, a soma dos pesos dos elementos de S que satisfazem r propriedades cada um será c_r . Assim $W(r) = \sum c_r$.

Por outro lado, sendo $\text{per } A = \sum a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{mj_m}$.

Conforme a definição, $\text{per } A$ é igual a soma dos pesos dos elementos de S que satisfazem exatamente $n-m$ propriedades P_i .

Portanto pelo resultado acima expresso pelo valor $E(m)$ temos:

$$\text{per } A = E(n-m) = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{n-m+i}{i} \sum c_{n-m+i}$$

Corolário: No caso em que $m=n$, isto é, A é matriz quadrada, $\text{per } A = \sum_{i=0}^{n-1} \sum (-1)^i c_i$

V.C. Permanente de Matrizes Booleanas

No caso de termos $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ tal que $a_{ij} = 0$ ou 1 dizemos, como é usual, que A é matriz booleana.

Teorema 6 - Se I é matriz identidade de ordem n então, $\text{per } I = 1$.

De fato:

Sendo $I = [a_{ij}]_{n \times n}$; $a_{ij} = 1$ para $i = j$
 $= 0$ para $i \neq j$

per $I = \sum_{i=1}^n a_{i1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ cuja soma é estendida a todas as aplicações injetoras de X_n em X_n .

Neste particular tais aplicações, cujos valores a_{ij} são diferentes de zero, resumem-se na aplicação idêntica e portanto per $I = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = 1$.

Teorema 7 - Se P é matriz de permutação então, per $P = 1$.

De fato:

A matriz $P = [p_{ij}]_{n \times n}$ é de permutação se $p_{ij} = 0$ ou 1 e $\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1, (j=1, 2, \dots, n), \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, (i=1, 2, \dots, n)$.

Pelo teorema 1, per $P =$ per I e portanto pelo teorema 6, per $P = 1$.

Teorema 8 - Se J é matriz quadrada de ordem n com todos elementos iguais a um então, per $J = n!$.

De fato:

$J = [j_{ij}]_{n \times n}$ com $j_{ij} = 1$.

Para $n=1$, $J = [1]$, per $J = 1 = 1!$

$n=2$, $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, per $J = 2 = 2!$

Por indução, supondo válido para $n=k$, sendo agora $n=k+1$, per $J = \sum_{i=1}^{k+1} j_{i1} \cdot \text{per } J_{ij}, (j=1, 2, \dots, n)$ pelo teorema 4.

Como $j_{ij}=1$, per $J = \sum_{i=1}^{k+1} \text{per } J_{ij}$, ou seja, per $J = \sum_{i=1}^{k+1} k! = (k+1)!$. Assim o teorema é válido para

qualquer valor da ordem n da matriz J .

Corolário: $\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \cdot (n-r)^n = n!$

Aplicando o teorema 5 para o cálculo da matriz

J teremos os seguintes valores:

$$c_0 = n^n, \quad \Sigma c_1 = \binom{n}{1} (n-1)^n, \quad \Sigma c_2 = \binom{n}{2} (n-2)^n, \quad \dots,$$

$$\Sigma c_{n-1} = \binom{n}{n-1} \cdot 1^n, \text{ pois como } b_{ir} = (n-r),$$

$c_r = (n-r)^n$, entretanto existem $\binom{n}{r}$ matrizes J_r o que implica $\Sigma c_r = \binom{n}{r} (n-r)^n$.

Logo, per $J = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \cdot (n-r)^n$ e consequente -
mente $\sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \cdot (n-r)^n = n!$

V.D. Permanentes e as Permutações-Deslocamento

Consideremos as matrizes quadradas:

$[b_{ij}] = J - I$, que indicamos por B para ordem n,
 B_1 para ordem n-1 e B_2 para ordem
n-2.

$[k_{ij}]$ com $k_{ij} = 1$ para $i \neq j$

$$k_{11} = 1$$

$$k_{ij} = 0 \text{ para } i=j, i \neq 1 \text{ e } j \neq 1$$

que indicamos com K para ordem n, K_1 para ordem n-1 e K_2
para ordem n-2.

Lema 1 - per B = (n-1) per K_1

De fato:

$$\text{per B} = \sum_{i=1}^n b_{i1} \text{ per } B_{i1}, \quad B_{i1} \text{ é de ordem } n-1$$

$$\text{per B} = \sum_{i=2}^n \text{per } B_{i1}, \text{ pois } b_{11}=0 \text{ e } b_{i1}=1 \text{ para}$$

$i \neq 1$.

$$\text{per B} = \sum_{i=2}^n \text{per } K_1, \text{ pois } B_{i1} = k_1 \text{ para } i \neq 1.$$

Logo, $\text{per } B = (n-1) \text{ per } K_1$.

Lema 2 - $\text{per } K_1 = \text{per } B_2 + (n-2) \text{ per } K_2$

De fato:

$$\text{per } K_1 = \sum_{i=1}^{n-1} k_{i1} \text{ per } K_{i1}$$

$$\text{per } K_1 = k_{11} \cdot \text{per } K_{11} + \sum_{i=2}^{n-1} \text{per } K_{i1}$$

$$\text{per } K_1 = \text{per } B_2 + \sum_{i=2}^{n-1} \text{per } K_2, \text{ pois } K_{11} = B_2 \text{ e}$$

$K_{i1} = K_2$ de acordo com as considerações iniciais.

Logo, $\text{per } K_1 = \text{per } B_2 + (n-2) \text{ per } K_2$.

Teorema 9 - $\text{per } B = (n-1) [\text{per } B_1 + \text{per } B_2]$

De fato:

Pelo lema 1, $\text{per } B = (n-1) \text{ per } K_1$ e portanto pelo lema 2, $\text{per } B = (n-1) [\text{per } B_2 + (n-2) \text{ per } K_2]$.

Ou seja, $\text{per } B = (n-1) \text{ per } B_2 + (n-1) \text{ per } B_1$.

Logo, $\text{per } B = (n-1) \cdot [\text{per } B_1 + \text{per } B_2]$.

Corolário: $\text{per } B = D_n$

De fato:

Para $n=2$, $\text{per } B=1$.

Como $D_2=1$ e $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ que é exatamente a mesma recorrente para $\text{per } B$ demonstrada no teorema 9, então concluímos que as sucessões D_n e $\text{per } B$ são idênticas.

Observação:

O cálculo de $\text{per } B$ através do teorema 5 é expresso pela igualdade:

$$\text{per } B = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n}{r} \cdot (n-r-1)^{n-r}$$

pois de acordo com a definição da matriz B

$$b_{ir} = n-r \text{ para } r \text{ linhas}$$

$$= n-r-1 \text{ para a restante } n-r \text{ linhas}$$

$$\text{Então, } c_r = (n-r)^r \cdot (n-r-1)^{n-r} \text{ e}$$

$$\Sigma c_r = \binom{n}{r} (n-r)^r \cdot (n-r-1)^{n-r}$$

Segue portanto o seguinte teorema:

$$\text{Teorema 10 - } D_n = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \binom{n}{r} (n-r)^r (n-r-1)^{n-r}$$

Demonstração imediata pela observação e o corolário.

Ilustração:

Cálculo de D_3 por permanentes.

Temos que $D_3 = \text{per } B$, B de ordem 3.

$$\text{Portanto } D_3 = \text{per} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Por regra análoga à de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$D_3 = 2$$

b) Pelo corolário do teorema 5:

$\text{per } B = c_0 - \Sigma c_1 + \Sigma c_2$, sendo

$$c_0 = \prod_{i=1}^3 b_{i0}, \quad c_1 = \prod_{i=1}^3 b_{i1} \text{ e } c_2 = \prod_{i=1}^3 b_{i2}$$

$$\text{Como, } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = B \text{ e as matrizes}$$

do tipo B_1 são:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

as matrizes do tipo B_2 são:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Consequentemente:

$$c_0 = b_{10} \cdot b_{20} \cdot b_{30} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$c_1 = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \text{ para a } 1^{\text{a}} \text{ matriz do tipo } B_1$$

$$c_1 = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \text{ para a } 2^{\text{a}} \text{ matriz do tipo } B_1$$

$$c_1 = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \text{ para a } 3^{\text{a}} \text{ matriz do tipo } B_1$$

$$c_2 = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0 \text{ para a } 1^{\text{a}} \text{ matriz do tipo } B_2$$

$$c_2 = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0 \text{ para a } 2^{\text{a}} \text{ matriz do tipo } B_2$$

$$c_2 = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \text{ para a } 3^{\text{a}} \text{ matriz do tipo } B_2$$

$$\text{Então per } B = 8 - (2+2+2) + (0+0+0) = 2$$

c) Pelo teorema 10:

$$D_3 = \sum_{r=0}^2 (-1)^r \binom{3}{r} (3-r)^r (2-r)^{3-r}$$

$$D_3 = 8 - 6 = 2$$

CAPÍTULO VI

INDICADOR DAS PERMUTAÇÕES COM POSIÇÕES INTERDITADAS

Como vimos na parte de permanentes, toda permutação dos elementos do conjunto X_n pode ser representada por uma matriz booleana $A = [a_{ij}]$ de ordem n com $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$, $j=1,2,\dots,n$ e $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$, $i=1,2,\dots,n$. Para tanto convencionou-se que se $a_{ij} = 1$ o elemento i ocupa a posição j e se $a_{ij} = 0$ o elemento i não ocupa a posição j na permutação.

As permutações com posições interditadas serão representadas por matrizes booleanas em cujas posições interditadas necessariamente o elemento da matriz é zero e os demais elementos serão 1 ou 0 dependendo da permutação considerada.

Assim, por exemplo, nas permutações-deslocamento as matrizes booleanas que as representam têm os elementos da diagonal principal, a_{ij} , todos iguais a zero.

Entretanto, uma matriz booleana identifica-se de uma certa maneira com um tabuleiro, tipo tabuleiro de xadrez, onde as celas (casas) interditadas correspondem na matriz às posições interditadas cujo elemento correspondente é necessariamente zero e cujas celas livres correspondem na matriz elementos que poderão ser 1 ou 0.

Valendo-se da representação de permutações em tabuleiros descreveremos nesta parte um algoritmo (*) que possibilita a determinação de um polinômio o qual denominaremos *Indicador das Permutações com Posições Interditadas*,

(*) O algoritmo foi encontrado em pesquisa conjunta com R. M. Barbosa e posteriormente feita a programação para HP-9830 - BASIC por J.S.Jr.



e cujas posições serão representadas por celas interditadas no tabuleiro.

Algoritmo:

Uma primeira forma:

Fases: F_1 a cada linha i , $i=1,2,\dots,n$, do tabuleiro associa-se o polinômio $P_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}$, j diferente da coluna em cuja linha i há cela interditada.

F_2 - efetua-se o produto $P_1 \cdot P_2 \dots P_n$

F_3 - anula-se os termos do produto que contenha em seus fatores dois segundos índices iguais.

O produto resultante é o Indicador de Permutações com Posições Interditadas cuja expressão é da forma $\sum x_{1j_1} \cdot x_{2j_2} \dots x_{nj_n}$ e cada um dos termos $x_{1j_1} x_{2j_2} \dots x_{nj_n}$ indica uma permutação cuja representação no tabuleiro faz-se marcando as celas correspondentes aos índices duplos de cada x .

Uma segunda forma:

Fases: F_1 - a cada linha i , $i=1,2,\dots,n$, do tabuleiro associa-se o polinômio $P_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}$, j diferente da coluna em cuja linha i há cela interditada.

F_2 - escreve-se $Y_1 = P_1$.

F_3 - calcula-se $Y_i = Y_{i-1} \cdot P_i$, $i=2,3,\dots,n$, e a cada passo elimina-se os termos com dois segundos índices iguais.

O polinômio resultante de Y_n é o Indicador de Permutações Interditadas.

Prova do Algoritmo:

Observemos que os P_i não permitem ter elementos nas posições interditadas e obriga ter um elemento em cada



linha.

A eliminação de termos com segundos índices iguais não permite ter dois elementos numa mesma coluna.

Assim, os termos do polinômio resultante $P_1 \cdot P_2 \dots P_n$ ou Y_n correspondem as permutações dos n elementos considerando-se a disposição das posições a serem ocupadas no tabuleiro, uma e apenas uma em cada linha e em cada coluna e nunca em posições interditadas.

Caso particular:

Como caso particular de permutações com posições interditadas temos as permutações-deslocamento as quais são representadas por um tabuleiro $n \times n$ com celas interditadas na diagonal principal.

Ilustração:

1.^a-Seja o tabuleiro 4×4 com posições interditadas as quais marcamos com x.

	1	2	3	4
1			X	
2	X	X		
3		X		X
4				X

Através do mesmo podem ser representadas todas as permutações dos elementos do conjunto X_4 tal que o elemento 1 não pode ocupar a posição 3, o elemento 2 não pode ocupar as posições 1 e 2, o elemento 3 não pode ocupar as posições 2 e 4 e o elemento 4 não pode ocupar a posição 4.

$$\text{Assim: } P_1 = x_{11} + x_{12} + x_{14}$$

$$P_2 = x_{23} + x_{24}$$

$$P_3 = x_{31} + x_{33}$$

$$P_4 = x_{41} + x_{42} + x_{43}$$

Encontra-se pela primeira ou segunda forma,

$$Y_4 = x_{11} x_{24} x_{33} x_{42} + x_{12} x_{24} x_{31} x_{43} + x_{12} x_{24} x_{33} x_{41} + x_{14} x_{23} x_{31} x_{42}, \text{ que corresponde as seguintes soluções:}$$

Solução 1	Solução 2	Solução 3	Solução 4																																																																
<table><tr><td>0</td><td></td><td>X</td><td></td></tr><tr><td>X</td><td>X</td><td></td><td>0</td></tr><tr><td></td><td>X</td><td>0</td><td>X</td></tr><tr><td></td><td>0</td><td></td><td>X</td></tr></table>	0		X		X	X		0		X	0	X		0		X	<table><tr><td></td><td>0</td><td>X</td><td></td></tr><tr><td>X</td><td>X</td><td></td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>X</td><td></td><td>X</td></tr><tr><td></td><td></td><td>0</td><td>X</td></tr></table>		0	X		X	X		0	0	X		X			0	X	<table><tr><td></td><td>0</td><td>X</td><td></td></tr><tr><td>X</td><td>X</td><td></td><td>0</td></tr><tr><td></td><td>X</td><td>0</td><td>X</td></tr><tr><td>0</td><td></td><td></td><td>X</td></tr></table>		0	X		X	X		0		X	0	X	0			X	<table><tr><td></td><td></td><td>X</td><td>0</td></tr><tr><td>X</td><td>X</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>0</td><td>X</td><td></td><td>X</td></tr><tr><td></td><td>0</td><td></td><td>X</td></tr></table>			X	0	X	X	0		0	X		X		0		X
0		X																																																																	
X	X		0																																																																
	X	0	X																																																																
	0		X																																																																
	0	X																																																																	
X	X		0																																																																
0	X		X																																																																
		0	X																																																																
	0	X																																																																	
X	X		0																																																																
	X	0	X																																																																
0			X																																																																
		X	0																																																																
X	X	0																																																																	
0	X		X																																																																
	0		X																																																																

2ª - Permutações-deslocamento

Consideremos o conjunto X_3 , então o tabuleiro que pode representar todas as permutações-deslocamento é o seguinte:

X		
	X	
		X

Neste caso, $P_1 = x_{12} + x_{13}$, $P_2 = x_{21} + x_{23}$ e $P_3 = x_{31} + x_{32}$.

Encontra-se pela primeira ou segunda forma,

$$Y_3 = x_{12} x_{23} x_{31} + x_{13} x_{21} x_{32}, \text{ que corresponde às soluções:}$$

Solução 1

X	0	
	X	0
0		X

Solução 2

X		0
0	X	
	0	X

CAPÍTULO VII

POLINÔMIOS DE TORRES

VII.A. Preliminares

Nesta segunda parte estudamos os polinômios de torres detendo-nos em alguns tipos especiais particularmente naqueles correspondentes a tabuleiros retangulares e quadrangulares pelo maior relacionamento dos mesmos com a primeira parte do trabalho.

Os nossos estudos nesta área iniciaram-se com os polinômios de torres, e na busca e estudo de suas questões fomos motivados a dar um bom desenvolvimento ao trabalho no que tange ao que denominamos primeira parte.

Tratamos inicialmente dos elementos básicos do assunto para então nos dedicarmos aos polinômios de torres para tabuleiros retangulares e quadrangulares e alguma extensão a tabuleiros retangulares com celas acrescentadas em linha e ou coluna, onde novamente cremos ter fornecido contribuições.

SEGUNDA PARTE

VII.B. Conceitos e Teoremas Básicos

Definição: Denominamos tabuleiro um subconjunto finito qualquer de $N \times N$, N conjunto dos números naturais.

Intuitivamente, um tabuleiro será considerado um conjunto de celas ou quadrículas tipo tabuleiro de xadrez como afirmamos anteriormente o que facilitará o entendimento bem como fixação de idéias.

A cada ponto corresponderá uma cela e reciprocamente, estando os mesmos dispostos em linhas e colunas.



CAPÍTULO VII

POLINÔMIOS DE TORRES

VII.A. Preliminares

Nesta segunda parte estudamos os polinômios de torres detendo-nos em alguns tipos especiais particularmente naqueles correspondentes a tabuleiros retangulares e quadrangulares pelo maior relacionamento dos mesmos com a primeira parte do trabalho.

Os nossos estudos nesta área iniciaram-se com os polinômios de torres, e na busca e estudo de suas questões fomos motivados a dar um bom desenvolvimento ao trabalho no que tange ao que denominamos primeira parte.

Tratamos inicialmente dos elementos básicos do assunto para então nos fixarmos nos polinômios de torres para tabuleiros retangulares e quadrangulares e alguma extensão a tabuleiros retangulares com celas acrescentadas em linha e ou coluna, onde novamente cremos ter fornecido contribuições.

VII.B. Conceitos e Teoremas Básicos

Definição: Denominamos tabuleiro um subconjunto finito qualquer de $N \times N$, N conjunto dos números naturais.

Intuitivamente, um tabuleiro será considerado um conjunto de celas ou quadrículas tipo tabuleiro de xadrez como afirmamos anteriormente o que facilitará o entendimento bem como fixação de idéias.

A cada ponto corresponderá uma cela e reciprocamente, estando os mesmos dispostos em linhas e colunas.



Indicaremos por $r_k(C)$ o número de maneiras de se considerar k pontos ou k pares ordenados $(m;n)$ no tabuleiro C tal que dois deles não estejam na mesma linha ou mesma coluna. Consideremos $r_0(C) = 1$ e observamos que $r_k(C) = 0$ a partir de um certo valor de k dependendo da constituição do tabuleiro C e o seu número de celas.

O número $r_k(C)$ corresponde então ao número de maneiras de se colocar k torres num tabuleiro sem que nenhuma elimine outra, ou seja, duas quaisquer não estejam numa mesma linha ou coluna.

Definição: A função geradora da sequência $\langle r_k(C) \rangle$ é denominada polinômio de torres do tabuleiro C .

Indicando por $R(x,C)$ o polinômio de torres do tabuleiro C , $R(x,C) = [r_k(C), x]$ onde $r_0(C) = 1$.

Teorema 1 - Qualquer que seja o tabuleiro C , $R(0,C) = 1$.

Imediato.

Teorema 2 - Se um tabuleiro C possui r celas, então $r_1(C) = r$.

Imediato.

Definição: Dois tabuleiros C_1 e C_2 são disjuntos, se e somente se, para todo $(m_1, n_1) \in C_1$ não existe $(m_2, n_2) \in C_2$ tal que $m_1 = m_2$ ou $n_1 = n_2$.

Teorema 3 - Se um tabuleiro C consiste de dois outros C_1 e C_2 disjuntos, então $R(x,C) = R(x,C_1) \cdot R(x,C_2)$.

De fato:

$$r_k(C) = \sum_{j=0}^k r_j(C_1) \cdot r_{k-j}(C_2), \text{ pois colocar } k \text{ torres em } C \text{ é o mesmo que colocar } j \text{ em } C_1 \text{ e } k-j \text{ em } C_2, j=0,1,$$



2, ..., k.

Consequentemente, $\langle r_k(C) \rangle = \langle r_k(C_1) \rangle * \langle r_k(C_2) \rangle$,
(produto convolutório).

Então, $G[\langle r_k(C) \rangle, x] = G[\langle r_k(C_1) \rangle * \langle r_k(C_2) \rangle, x] =$
 $= G[\langle r_k(C_1) \rangle, x] \cdot G[\langle r_k(C_2) \rangle, x]$ e portanto $R(x, C) =$
 $= R(x, C_1) \cdot R(x, C_2)$.

Teorema 4 - Fixada uma cela qualquer num tabuleiro C e indicando por C_i o tabuleiro obtido de C eliminando-se a linha e a coluna da cela escolhida e por C_e o tabuleiro obtido de C eliminando-se apenas a cela escolhida, então: $R(x, C) = xR(x, C_i) + R(x, C_e)$.

De fato:

O número de maneiras de se colocar k torres em C pode ser dividido em duas categorias:

- a) aquela que tem uma torre na cela escolhida, corresponde ao número $r_{k-1}(C_i)$ de se colocar k torres em C .
- b) aquela que não tem torre na cela escolhida, corresponde ao número $r_k(C_e)$ de se colocar k torres em C .

Então, $r_k(C) = r_{k-1}(C_i) + r_k(C_e)$.

Portanto $G[r_k(C), x] = G[r_{k-1}(C_i), x] +$
 $+ G[r_k(C_e), x]$.

Por propriedade de geradora,

$G[r_k(C), x] = xG[r_{k-1}(C_i), x] + G[r_k(C_e), x]$

Portanto, $R(x, C) = xR(x, C_i) + R(x, C_e)$.

Trata-se portanto de uma fórmula de recorrência a qual possibilita a determinação do polinômio de torres de um tabuleiro qualquer, geralmente empregada como técnica de cálculo de tais polinômios.

CAPÍTULO VIII

TABULEIROS RETANGULARES E QUADRANGULARES

Definição: Diremos que um tabuleiro C é retangular do tipo $m \times n$, se e somente se, o mesmo é constituído de $m \cdot n$ celas dispostas em m linhas e n colunas.

Indicaremos por $R_{m,n}(x)$ o polinômio de torres do tabuleiro retangular do tipo $m \times n$. (m e n inteiros positivos).

VIII.A. Relação de Recorrência

Para os tabuleiros retangulares do tipo $m \times n$, vale: $R_{m,n}(x) = R_{m-1,n}(x) + nxR_{m-1,n-1}(x)$.

De fato:

Pelo teorema 4, fixada uma cela qualquer no tabuleiro, temos:

$$R_{m,n}(x) = xR_{m-1,n-1}(x) + R(x, C_e)$$

sendo C_e o tabuleiro retangular sem a cela fixada.

Novamente com aplicação do teorema 4, porém agora em C_e , fixando-se uma cela da mesma linha ou coluna da primeira fixada, temos:

$$R_{m,n}(x) = xR_{m-1,n-1}(x) + xR_{m-1,n-1}(x) + R(x, C'_e)$$

sendo C'_e o tabuleiro retangular sem as duas celas já fixadas.

Com esse raciocínio aplicando-se sucessivamente o teorema 4 a tabuleiros do tipo C_e chega-se ao retangular do tipo $m \times n$ com $n-1$ celas fixadas numa mesma linha e cuja expressão é a seguinte,

$$R_{m,n}(x) = (n-1)xR_{m-1,n-1}(x) + R(x, C_e^{(n-2)})$$

Por último aplicando o teorema 4 no tabuleiro

$C_e^{(n-2)}$ fixando-se a única cela existente naquela linha das celas fixadas, temos:

$$R_{m,n}(x) = R_{m-1,n}(x) + nxR_{m-1,n-1}(x)$$

VIII.B. Fórmula Geral de $R_{m,n}(x)$

a) Por raciocínio direto:

A colocação de k torres no tabuleiro retangular do tipo $m \times n$ exige a fixação de k linhas entre as m existentes, o que pode se dar de $\binom{m}{k}$ maneiras, e a fixação de k colunas entre as n existentes o que pode se dar de $\binom{n}{k}$ maneiras.

Porém fixadas as k linhas e as k colunas, as k torres podem ser colocadas de $k!$ maneiras, pois existem k^2 celas e duas torres não podem ser colocadas numa mesma linha ou coluna.

$$\text{Então, } r_k = k! \binom{m}{k} \binom{n}{k} = \frac{m^{(k)} \cdot n^{(k)}}{k!} \text{ e portanto}$$

$$R_{m,n}(x) = G \left[\frac{m^{(k)} \cdot n^{(k)}}{k!}, x \right], \quad k=0,1,2,\dots, m \text{ se } m \leq n$$

$$\text{Assim, } R_{m,n}(x) = \sum_{k=0}^m \frac{m^{(k)} \cdot n^{(k)}}{k!} x^k.$$

b) Por indução:

$$\text{É claro que, } R_{1,n}(x) = 1+nx$$

$$R_{2,n}(x) = 1+2nx+n^{(2)}x^2, \quad R_{3,n}(x) = 1+3nx+3n^{(2)}x^2 + n^{(3)}x^3.$$

Prosseguindo com o mesmo raciocínio para outros valores de m , os resultados nos levam para a expressão de $R_{m,n}(x)$ seguinte:

$$R_{m,n}(x) = \sum_{k=0}^m \frac{m^{(k)} \cdot n^{(k)}}{k!} x^k$$

Com aplicação do método de indução, supondo a expressão válida para m vamos demonstrar a sua validade para $m+1$.

Pelo teorema 4 e a hipótese da indução,

$$R_{m+1,n}(x) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} n^{(k)} x^k + nx \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (n-1)^{(k)} x^k$$

Separando a primeira parcela do primeiro somatório, trocando a variável do segundo somatório, e isolando a sua última parcela podemos escrever:

$$R_{m+1,n}(x) = \binom{m}{0} n^{(0)} x^0 + \sum_{k=1}^m \left[\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right] n^{(k)} x^k + \binom{m}{m} n^{(m+1)} x^{m+1}$$

Considerando a clássica relação de Stifel e o fato que $\binom{m}{0} = \binom{m+1}{0}$ e $\binom{m}{m} = \binom{m+1}{m+1}$, obtemos:

$$R_{m+1,n}(x) = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} n^{(k)} x^k$$

VIII.C. Propriedades

1.ª) Relação com os polinômios de Laguerre

Os polinômios de Laguerre são definidos por:

$$n! L_n^\alpha(x) = e^x \cdot x^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} \cdot x^{n+\alpha})$$

tal que, $L_0^\alpha(x) = 1$

$$L_1^\alpha(x) = \alpha + 1 - x$$

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}$$

Para α inteiro:

$$\begin{aligned} R_{n,n+\alpha}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n+\alpha)^{(k)} x^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \binom{n+\alpha}{k} k! x^k \end{aligned}$$

fazendo $n-k = k$,

$$R_{n,n+\alpha}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \binom{n+\alpha}{n-k} x^{n-k}$$

$$= n! x^n \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{x^{-k}}{k!}$$

$$\text{Portanto, } R_{n,n+\alpha}(x) = n! x^n L_n^\alpha(-x^{-1})$$

2.ª) Diferença finita parcial

$$\Delta_1 R_{m,n}(x) = nxR_{m,n-1}(x)$$

sendo Δ_1 o operador de diferenças finitas atuando sobre a variável m (1.ª variável).

De fato:

$$\Delta_1 R_{m,n}(x) = R_{m+1,n}(x) - R_{m,n}(x)$$

Pela relação de recorrência,

$$R_{m+1,n}(x) = R_{m,n}(x) + nxR_{m,n-1}(x)$$

$$\text{Portanto: } \Delta_1 R_{m,n}(x) = nxR_{m,n-1}(x)$$

VIII.D. Método para obtenção de $R_{m,n}(x)$

A partir da igualdade $R_{m,1}(x) = 1+mx$ e com aplicação da segunda propriedade e resultados do cálculo de diferenças finitas podemos obter sucessivamente as expressões de $R_{m,2}(x)$, $R_{m,3}(x)$, etc., $R_{m,n}(x)$.

Estabelecemos assim um método para a obtenção dos polinômios de torres para os tabuleiros retangulares / conforme descrevemos abaixo:

$$\Delta_1 R_{m,2}(x) = 2xR_{m,1}(x) = 2x+2mx^2$$

Aplicando o operador $\sum$ (somação) de diferenças finitas na igualdade acima, temos:

$$\sum \Delta_1 R_{m,2}(x) = \sum (2x+2mx^2), \text{ onde os operadores}$$

atuam sobre a variável m .

Logo, $R_{m+1,2}(x) = 2x(m+1) + 2x^2 \cdot \frac{(m+1)^{(2)}}{2} + h$,
 h constante.

Para $m=0$, $R_{1,2}(x) = 2x+h$, e como $R_{1,2}(x)=1+2x$,
conclui-se que $h=1$.

Assim, $R_{m+1,2}(x) = 1+2(m+1)x + (m+1)^{(2)}x^2$ ou
 $R_{m,2}(x) = 1+2mx+m^{(2)}x^2$.

Analogamente obtêm-se $R_{m,3}(x)$ por:

$$\Delta_1 R_{m,3}(x) = 3xR_{m,2}(x)$$

$$\Delta_1 R_{m,3}(x) = 3x+6mx^2+3m^{(2)}x^3$$

Aplicando o operador $\sum$ como anteriormente,

$$\sum \Delta_1 R_{m,3}(x) = \sum (3x+6mx^2+3m^{(2)}x^3)$$

Logo, $R_{m+1,3}(x) = 3(m+1)x + 3(m+1)^{(2)}x^2 +$
 $+ (m+1)^{(3)}x^3 + h$, h constante.

Fazendo $m=0$ prova-se que $h=1$ e portanto,

$$R_{m,3}(x) = 1+3(m+1)x + 3(m+1)^{(2)}x^2 + (m+1)^{(3)}x^3, \text{ ou}$$

$$R_{m,3}(x) = 1 + 3mx + 3m^{(2)}x^2 + m^{(3)}x^3.$$

Prosseguindo com esse raciocínio podemos obter
 $R_{m,4}(x)$, etc., $R_{m,n}(x)$ supondo conhecido $R_{m,n-1}(x)$ com apli-
cação da segunda propriedade e o operador somação.

VIII.E. Geradora Exponencial dos Polinômios de Torres para Tabuleiros Retangulares.

Consideremos as duas funções geradoras,

$$e^t = G\left[\frac{1}{1!}; t\right] \text{ e } (1+xt)^n = G\left[\binom{n}{i}x^i; t\right]$$

O produto das mesmas será:

$$e^t \cdot (1+xt)^n = G\left[\frac{1}{1!}; t\right] \cdot G\left[\binom{n}{i}x^i; t\right]$$

$$\frac{d}{dx} GE[R_{i,n}(x); t] = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} t^i \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i t^i \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^i \frac{1}{j!} \binom{n}{i-j} x^{i-j} \right) t^i$$

Considerando $i-j=k$, obtemos:

$$e^t \cdot (1+xt)^n = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^i \frac{1}{(i-k)!} \binom{n}{k} x^k \right) t^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^i \frac{n^{(k)}}{(i-k)!k!} x^k \right) t^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^i \frac{i! n^{(k)}}{(i-k)!k!} x^k \right) \frac{t^i}{i!}$$

Isto é, pela fórmula geral de $R_{i,n}(x)$,

$$e^t \cdot (1+xt)^n = \sum_{i=0}^{\infty} R_{i,n}(x) \frac{t^i}{i!} \text{ e portanto}$$

$$GE[R_{m,n}(x); t] = e^t \cdot (1+xt)^n.$$

VIII.F. Propriedade da Derivada

Pelo resultado anterior vimos que a geradora exponencial dos polinômios de torres $R_{i,n}(x)$ é $e^t \cdot (1+xt)^n$ e portanto derivando em relação a x teremos:

$$\frac{d}{dx} GE[R_{i,n}(x); t] = \frac{d}{dx} (1+xt)^n \cdot e^t = nt(1+xt)^{n-1} \cdot e^t$$

Por propriedades de geradora, obtemos:

$$\frac{d}{dx} GE[R_{i,n}(x); t] = G[n \binom{n-1}{i-1} x^{i-1}; t] \cdot G\left[\frac{1}{1!}; t\right]$$

Multiplicando as geradoras efetuando o produto convolutório, teremos:

$$\frac{d}{dx} GE[R_{i,n}(x); t] = G\left[\sum_{j=0}^i n \binom{n-1}{i-j-1} x^{i-j-1} \cdot \frac{1}{j!}; t\right]$$

Considerando $i-j=k$,

(*) Pode ser obtida por derivação direta através da fórmula geral.



$$\frac{d}{dx} GE[R_{i,n}(x); t] = G\left[\sum_{k=0}^i n \binom{n-1}{k-1} \frac{x^{k-1}}{(i-k)!}; t\right] \quad \text{ou}$$

$$\frac{d}{dx} GE[R_{i,n}(x); t] = GE\left[ni \sum_{k=0}^i \binom{n-1}{k-1} \frac{(i-1)! x^{k-1}}{(i-k)!}; t\right]$$

Considerando a expressão geral dos polinômios de torres para tabuleiros retangulares e o fato que

$$\frac{d}{dx} GE[R_{i,n}(x); t] = GE\left[\frac{d}{dx} R_{i,n}(x); t\right], \text{ concluímos que}$$

$$\frac{d}{dx} R_{i,n}(x) = ni R_{i-1,n-1}(x) \quad (*).$$

Consequência imediata dessa igualdade é o resultado:

$$R_{i,n}(x) = in \int R_{i-1,n-1}(x) dx + C$$

que na realidade poderia ser empregado como uma outra técnica para o cálculo dos polinômios de torres para tabuleiros retangulares.

VIII.G. Tabuleiros Quadrangulares

Trata-se dos tabuleiros do tipo $R_{m,n}(x)$ onde $m=n$. Indicaremos por $Q_n(x)$ tais tabuleiros e portanto considerando a relação de recorrência para os retangulares do tipo $m \times n$, temos:

$$Q_n(x) = R_{n-1,n}(x) + nxQ_{n-1}(x) \quad \text{ou}$$

$$Q_{n+1}(x) = R_{n,n+1}(x) + (n+1)xQ_n(x).$$

Como, $nxQ_n(x) = nxR_{n-1,n}(x) + n^2x^2Q_{n-1}(x)$, vem:

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(x) - nxQ_n(x) &= R_{n,n+1}(x) - nxR_{n-1,n}(x) + (n+1)xQ_n(x) - \\ &\quad - n^2x^2Q_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Usando a relação de recorrência em $R_{n,n+1}(x)$ e

(*) Pode ser obtida por derivação direta através da fórmula geral.

substituindo na igualdade acima, temos:

$$Q_{n+1}(x) = [1 + (2n+1)x] \cdot Q_n(x) - n^2 x^2 Q_{n-1}(x)$$

que é a recorrente para os tabuleiros quadrangulares.

Exemplos:

A partir de $Q_0(x) = 1$ e $Q_1(x) = 1+x$, obtemos,

$$Q_2(x) = 1 + 4x + x^2$$

$$Q_3(x) = 1 + 9x + 18x^2 + 6x^3$$

$$Q_4(x) = 1 + 16x + 72x^2 + 96x^3 + 24x^4$$

$$Q_5(x) = 1 + 21x + 136x^2 + 312x^3 + 216x^4 + 24x^5$$

A partir das propriedades válidas para os retangulares, temos:

$$a) Q_n(x) = n! x^n L_n(-x^{-1}) \text{ com } L_n(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}$$

$$b) \frac{d}{dx} Q_n(x) = n^2 Q_{n-1}(x)$$

$$c) Q_n(x) = n^2 \int Q_{n-1}(x) + C, \text{ o que corresponde}$$

a um novo método de obtenção dos polinômios de torres para os tabuleiros quadrangulares.

CAPÍTULO IX

TABULEIROS RETANGULARES COM CELAS ACRESCENTADAS

IX.A. Tabuleiros Retangulares com Celas acrescentadas em Colunas

IX.A.1. Uma cela é acrescentada ao tabuleiro retangular $m \times n$ transformando-o num tabuleiro constituído de m linhas e $n+1$ colunas com uma das colunas possuindo uma única cela.

Indicando por C^1 o tabuleiro assim constituído, pelo teorema 4:

$$R(x, C^1) = xR(x, C_i^1) + R(x, C_e^1)$$

$$\text{Portanto: } R(x, C^1) = xR_{m-1, n}(x) + R_{m, n}(x)$$

Desenvolvendo $R_{m-1, n}(x)$ e $R_{m, n}(x)$,

$$R(x, C^1) = 1 + \sum_{k=1}^m \left[\binom{m-1}{k-1} n^{(k-1)} + \binom{m}{k} n^{(k)} \right] x^k$$

IX.A.2. Duas células são acrescentadas ao tabuleiro retangular $m \times n$ transformando-o num tabuleiro constituído de m linhas e $n+1$ colunas com uma das colunas possuindo duas células.

Indicando por C^2 o tabuleiro assim constituído:

$$R(x, C^2) = xR(x, C_i^2) + R(x, C_e^2)$$

$$\text{Portanto: } R(x, C^2) = xR_{m-1, n}(x) + R(x, C^1)$$

Desenvolvendo $R_{m-1, n}(x)$ e $R(x, C^1)$,

$$R(x, C^2) = 1 + \sum_{k=1}^m \left[2 \binom{m-1}{k-1} + \binom{m}{k} n^{(k)} \right] x^k$$

IX.A.3. De um modo geral consideramos o acrêscimo de r células, $r < m$, ao tabuleiro retangular $m \times n$ transformando

do-o num tabuleiro constituído, de m linhas e $n+1$ colunas com uma delas possuindo r celas.

Indicando por C^r o tabuleiro assim construído;

$$R(x, C^r) = xR(x, C_i^r) + R(x, C_e^r)$$

$$\text{Portanto: } R(x, C^r) = xR_{m-1, n}(x) + R(x, C^{r-1})$$

Desenvolvendo $R_{m-1, n}(x)$ e $R(x, C^{r-1})$,

$$R(x, C^r) = 1 + \sum_{k=1}^m \left[r \binom{m-1}{k-1} n^{(k-1)} + \binom{m}{k} n^{(k)} \right] x^k,$$

que é a expressão geral do polinômio de torre para tabuleiros construídos por acréscimos de celas em colunas.

Tal expressão foi induzida pelos resultados IX.A.1. e IX.A.2. supondo válida para $R(x, C^{r-1})$, porém de monstra-se a mesma por indução:

De fato:

- a) Já verificamos a sua validade para $r=1$ e $r=2$;
- b) Supondo válida para r verificamos que também é para $r+1$.

$$R(x, C^{r+1}) = xR_{m-1, n}(x) + R(x, C^r)$$

$$= x \left[\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} n^{(k)} x^k \right] + 1 +$$

$$+ \sum_{k=1}^m \left[r \binom{m-1}{k-1} n^{(k-1)} + \binom{m}{k} n^{(k)} \right] x^k$$

$$R(x, C^{r+1}) = 1 + \sum_{k=1}^m \binom{m-1}{k-1} n^{(k-1)} x^k +$$

$$+ \sum_{k=1}^m \left[r \binom{m-1}{k-1} n^{(k-1)} + \binom{m}{k} n^{(k)} \right] x^k$$

$$R(x, C^{r+1}) = 1 + \sum_{k=1}^m \left[(r+1) \binom{m-1}{k-1} n^{(k-1)} + \binom{m}{k} n^{(k)} \right] x^k$$

IX.B. Tabuleiros Retangulares com Celas acres-
centadas em Linhas

IX.B.1. Uma cela é acrescentada ao tabuleiro $m \times n$ transformando-o num com m linhas e $n+1$ colunas (mesmo estudo de IX.A.1.)

IX.B.2. Duas celas são acrescentadas ao tabuleiro $m \times n$, numa mesma linha, transformando-o num com m linhas e $n+2$ colunas.

Indicando por L^2 o tabuleiro assim construído:

$$R(x, L^2) = xR(x, L_i^2) + R(x, L_e^2)$$

$$\text{Portanto: } R(x, L^2) = xR_{m-1, n}(x) + R(x, C^1)$$

$$R(x, L^2) = R(x, C^2) \quad (\text{IX.A.2.})$$

IX.B.3. Três celas são acrescentadas ao tabuleiro $m \times n$, numa mesma linha, transformando-o num com m linhas e $n+3$ colunas.

Indicando por L^3 o tabuleiro assim construído:

$$R(x, L^3) = xR(x, L_i^3) + R(x, L_e^3)$$

$$\text{Portanto: } R(x, L^3) = xR_{m-1, n}(x) + R(x, L^2)$$

$$R(x, L^3) = xR_{m-1, n}(x) + R(x, C^2)$$

$$R(x, L^3) = R(x, C^3) \quad (\text{IX.A.3.})$$

IX.B.4. De um modo geral considerando o acréscimo de r celas ao tabuleiro $m \times n$, numa mesma linha, transformando-o num com m linhas e $n+r$ colunas o qual indicando-se por L^r , temos:

$$R(x, L^r) = xR(x, L_i^r) + R(x, L_e^r)$$

$$R(x, L^r) = xR_{m-1, n}(x) + R(x, L^{r-1})$$

$$= xR_{m-1, n}(x) + R(x, C^{r-1})$$

$$R(x, L^r) = R(x, C^r) \quad (\text{IX.A.3.})$$

que é a expressão geral do polinômio de torre para tabuleiros construídos por acréscimos de celas numa mesma linha.

Tal expressão foi induzida pelos resultados IX.B.2. e IX.B.3. supondo válida para $R(x, L^r)$ a qual pode ser demonstrada por indução.

De fato:

a) Já verificamos a sua validade para $r=1$, $r=2$ e $r=3$.

b) Supondo válida para r verificamos que também é para $r+1$, pois:

$$\begin{aligned} R(x, L^{r+1}) &= xR_{m-1, n}(x) + R(x, L^r) \\ &= xR_{m-1, n}(x) + R(x, C^r) \\ &= R(x, C^{r+1}) \end{aligned} \quad (\text{IX.A.3.})$$

IX.C. Tabuleiros Retangulares com Celas acrescentadas em Colunas e Linhas simultaneamente

Consideremos a seguir o tabuleiro $m \times n$ acrescido de r celas em coluna, isto é, o tabuleiro C^r .

IX.C.1. acrescentamos numa cela a C^r transformando-o num com m linhas e $n+2$ colunas com uma das colunas possuindo r celas e outra uma única cela.

Indicando por $C^r L^1$ o tabuleiro assim construído:

$$R(x, C^r L^1) = xR(x, C^r L_i^1) + R(x, C^r L_e^1)$$

$$\begin{aligned} \text{Portanto: } R(x, C^r L^1) &= xR_{m-1, n}(x, C^{r-1}) + R(x, C^r) \\ &= x \left[1 + \sum_{k=1}^{m-1} (r-1) \binom{m-2}{k-1} n^{(k-1)} + \right. \\ &\quad \left. + \binom{m-1}{k} n^{(k)} \right] x^k + 1 + \sum_{k=1}^m \left[r \binom{m-1}{k-1} n^{(k-1)} + \binom{m}{k} n^{(k)} \right] x^k = \\ &= 1 + (1+r+m n)x + \sum_{k=1}^{m-1} \left[(r-1) \binom{m-2}{k-1} n^{(k-1)} + (1+r) \binom{m-1}{k} n^{(k)} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \binom{m}{k+1} n^{(k+1)} \Big] x^{k+1}.$$

IX.C.2. Acrescentando duas celas C^r transformando-o num com m linhas e $n+3$ colunas com uma das colunas possuindo r celas e outras duas uma única cela cada.

Indicando por $C^r L^2$ o tabuleiro assim constituído:

$$\begin{aligned} R(x, C^r L^2) &= xR(x, C^r L_i^2) + R(x, C^r L_e^2) \\ &= xR_{m-1, n}(x, C^{r-1}) + R(x, C^r L^1) \\ &= x \left[1 + \sum_{k=1}^{m-1} (r-1) \binom{m-2}{k-1} n^{(k-1)} + \right. \\ &\quad \left. + \binom{m-1}{k} n^{(k)} \right] x^k + 1 + (1+r+m n)x + \sum_{k=0}^{m-1} \left[(r-1) \binom{m-2}{k-1} n^{(k-1)} + \right. \\ &\quad \left. + (1+r) \cdot \binom{m-1}{k} n^{(k)} + \binom{m}{k+1} n^{(k+1)} \right] x^{k+1} \\ R(x, C^r L^2) &= 1 + (2+r+m n)x + \sum \left[2(r-1) \binom{m-2}{k-1} \cdot \right. \\ &\quad \left. n^{(k-1)} + (2+r) \binom{m-1}{k} + \binom{m}{k+1} n^{(k+1)} \right] x^{k+1} \end{aligned}$$

IX.C.3. De um modo geral considerando o acrêscimo de s celas a C^r numa mesma linha transformando-o num com m linhas e $n+s+1$ colunas com uma das colunas possuindo r celas e outras s colunas possuindo uma única cela.

Indicando tal tabuleiro por:

$R(x, C^r L^s)$ usando o teorema 4

$$\begin{aligned} R(x, C^r L^s) &= xR(x, C^r L_i^s) + R(x, C^r L_e^s) \\ &= xR_{m-1, n}(x, C^r) + R(x, C^r L^{s-1}) \\ &= 1 + (s+r+m)x + \sum_{k=1}^{m-1} \left[s(r-1) \binom{m-2}{k-1} n^{(k-1)} + \right. \\ &\quad \left. + (s+r) \binom{m-1}{k} n^{(k)} + \binom{m}{k+1} n^{(k+1)} \right] x^{k+1} \end{aligned}$$

que é a expressão geral para o tipo de tabuleiros acima considerados.



Tal expressão foi induzida pelos resultados IX.C.1. e IX.C.2. supondo válida para $R(x, C^r L^{s-1})$, porém de monstra-se por indução.

Para $s=1,2$ vimos a validade da mesma.

Supondo válida para s vamos demonstrá-la para $s+1$.

De fato:

$$\begin{aligned}
 R(x, C^r L^{s+1}) &= xR(x, C^r L_i^{s+1}) + R(x, C^r L_e^{s+1}) \\
 \text{ou} \quad R(x, C^r L^{s+1}) &= xR_{m-1,n}(x, C^{r-1}) + R(x, C^r L^s) \\
 &= x \left[1 + \sum_{k=1}^{m-1} (r-1) \binom{m-2}{k-1} + \binom{m-1}{k} n^{(k)} \right] x^k \\
 &\quad + 1 + (s+r+m n)x + \sum_{k=1}^{m-1} \left[s(r-1) \cdot \binom{m-2}{k-1} n^{(k-1)} + (s+r) \binom{m-1}{k} n^{(k)} + \right. \\
 &\quad \left. + \binom{m}{k+1} n^{(k+1)} \right] x^{k+1} \\
 &= 1 + ((s+1)+r+m n)x \sum_{k=1}^{m-1} \left[(s+1)(r-1) \binom{m-2}{k-1} n^{(k-1)} + ((s+1)+r) \binom{m-1}{k} n^{(k)} + \right. \\
 &\quad \left. + \binom{m}{k+1} n^{(k+1)} \right] x^{k+1}
 \end{aligned}$$

Indiquemos por A_i o conjunto das permutações dos elementos de X_n nas quais o i -ésimo elemento ($i=1,2,\dots,n$) ocupa uma posição interdita.

Assim a questão de contagem do número de permutações com posições interditas, isto é, sem elementos em cela proibida constitui-se no cálculo do número.

$$N = N(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \dots \bar{A}_n)$$

onde considerou-se A o conjunto das permutações dos elementos de X_n , A_i um sub conjunto de A nas condições acima e $\bar{A}_i$ o complementar a A_i em relação a A .



POLINÔMIOS DE TORRES E O PROBLEMA DAS PERMUTAÇÕES-DESLOCAMENTO.

X.A. Permutações com Posições Interditadas

Na primeira parte do trabalho estudamos esta questão no tocante a apresentação de um algoritmo de enumeração (capítulo VI).

Voltamos agora nesta segunda parte a analisar o problema que nos possibilitará relacioná-lo aos polinômios de torres, e o que é importante, determinar uma fórmula geral de contagem de tais permutações.

Fórmula Geral de Contagem

Consideremos um tabuleiro $n \times n$ com posições interditadas (celas proibidas) e seja $r_k(I)$ o número de maneiras de se colocar k torres sobre o tabuleiro I constituído das posições interditadas, com a condição que duas torres quaisquer não estejam numa mesma linha ou coluna.

Indiquemos por A_i o conjunto das permutações dos elementos de X_n nas quais o i -ésimo elemento ($i=1,2,\dots,n$) ocupa uma posição interditada.

Assim a questão de contagem do número de permutações com posições interditadas, isto é, sem elementos em cela proibida constitui-se no cálculo do número,

$$N = N(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \dots \bar{A}_n)$$

onde considerou-se A o conjunto das permutações dos elementos de X_n , A_i um sub conjunto de A nas condições acima e $\bar{A}_i$ o complementar a A_i em relação a A .



Com a aplicação do princípio de inclusão e exclusão, temos:

$$N = N(A) - \sum N(A_i) + \sum_{i < j} N(A_i A_j) - \sum_{i < j < k} N(A_i A_j A_k) + \dots + (-1)^n N(A_1 A_2 A_3 \dots A_n)$$

Por outro lado,

$$N(A) = n!$$

$\sum N(A_i) = (n-1)! r_1(I)$, pois um único elemento es tá em posição interdita.

$\sum N(A_i A_j) = (n-2)! r_2(I)$, pois exatamente dois e lementos estão em posições interditas.

E assim sucessivamente, considerando $N(A) = r_0(n-0)!$, segue que:

$$N = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot (n-k)! r_k(I)$$

fórmula na qual os números $r_k(I)$ são os coeficientes do po linômio de torres do tabuleiro I constituído das celas in terditadas.

Ilustração:

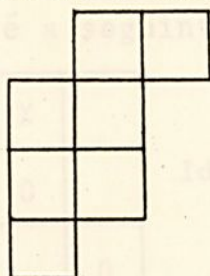
A seguir damos um exemplo de utilização da fôr mula completando com a aplicação do algoritmo para uma me lhor visão do seu uso.

Seja o tabuleiro 5x5 com celas interditas as sinaladas com x.

		X	X	
	X	X		
	X	X		
	X			

a) Contagem:

Para o tabuleiro I das células interditadas encon



tra-se com os teoremas básicos o seu polinômio de torres ,
 $1 + 7x + 12x^2 + 4x^3$.

Portanto, pela fórmula:

$$N = \sum_{k=0}^5 (-1)^k \cdot (5-k)! \cdot R_k(I)$$

$$N = 5! - 4! \cdot 7 + 3! \cdot 12 - 2! \cdot 4 + 1! \cdot 0 - 0! \cdot 0 = 16$$

b) Enumeração:

$$P_1 = x_{11} + x_{12} + x_{15}$$

$$P_2 = x_{21} + x_{24} + x_{25}$$

$$P_3 = x_{31} + x_{34} + x_{35}$$

$$P_4 = x_{41} + x_{43} + x_{44} + x_{45}$$

$$P_5 = x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55}$$

Através da aplicação do algoritmo determina-se o polinômio:

$$Y_5 = x_{11}x_{24}x_{35}x_{43}x_{52} + x_{11}x_{25}x_{34}x_{43}x_{52} + x_{12}x_{24}x_{35}x_{41}x_{53} + x_{12}x_{24}x_{35}x_{43}x_{51} + \\ + x_{12}x_{25}x_{31}x_{43}x_{54} + x_{12}x_{25}x_{31}x_{44}x_{53} + x_{12}x_{25}x_{34}x_{41}x_{53} + x_{12}x_{25}x_{34}x_{43}x_{51} + \\ + x_{15}x_{21}x_{34}x_{43}x_{52} + x_{15}x_{24}x_{31}x_{43}x_{52} + x_{12}x_{21}x_{34}x_{43}x_{55} + x_{12}x_{21}x_{34}x_{45}x_{53} + \\ + x_{12}x_{21}x_{35}x_{43}x_{54} + x_{12}x_{21}x_{35}x_{44}x_{53} + x_{12}x_{24}x_{31}x_{43}x_{55} + x_{12}x_{24}x_{31}x_{45}x_{53}.$$

Tal polinômio enumera especificando as 16 permutações que se obtêm com os elementos de X_5 respeitadas as posições interditadas conforme o tabuleiro 5x5 acima.

Assim por exemplo, o primeiro termo desse polinômio, $x_{11}x_{24}x_{35}x_{43}x_{52}$, especifica a permutação cuja representação no tabuleiro é a seguinte:

0		X	X	
	X	X	0	
	X	X		0
	X	0		
	0			

Idem para os demais termos.

X.B. O problema das permutações-deslocamento

Para este problema a questão se resume em adequar apenas o estudo anterior ao tabuleiro abaixo, pois as posições interditadas são aquelas da diagonal do tabuleiro.

Consideremos o caso de n elementos

X			...	
	X			
		X		
			⋮	
			...	X

O tabuleiro I constituído das celas interditadas possui por polinômio de torres o seguinte:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

Consequentemente,

$$N = D_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k (n-k)! \binom{n}{k}$$

$$\text{ou } D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

que nada mais é que a fórmula de Oettinger já vista na primeira parte do presente trabalho.

1. BARBOSA, E. M. - Combinatória e Grafos - Vol. 1, Nobel S.A., S.P. - 1974.
2. - Combinatória e Grafos - Vol. 2, Nobel S.A., S.P. - 1975.
3. - Média e Variância da Distribuição de Permutação por Inversão - Comunicação à IV Jornada Científica de Botucatu - UNESP, 1977.
4. - Um Método para obtenção do Polinômio Indicador de Ciclos do Grupo Simétrico - Comunicação à Reunião Regional da SBM - Ilha Solteira - UNESP - 1977.
5. - Cycle Index of Symmetric Group - Directs Proofs and Determinant Form - Naturália 4 - (55-60) - 1978.
6. - Grupos e Combinatória - SBM - IMILCE - S.J. do Rio Preto - UNESP - 1979.
7. BARBOSA e Godinho - Uma Nota sobre a Geradora e Distribuição de Permutações por Número de Ciclos - Combinatória 1 - (1-15) - 1979.
8. BERMAN and Fryer - Introduction to Combinatorics - Academic Press - N.Y. - 1972.
9. BRUALD, E.A. - Permanents - Bulletin of the American Mathematical Society - Vol. 1, n° 6 - (965-973) - 1979.
10. COTLAR, M. - Una Generalización de los Polinomios- Matricas Nornes - Año Quinto - Fasc. 2 - Rosário - Argentina - 1945.



BIBLIOGRAFIA

1. BARBOSA, R.M. - Combinatória e Grafos - Vol. 1, Nobel S.A., S.P. - 1974.
2. - Combinatória e Grafos - Vol. 2, Nobel S.A., S.P. - 1975.
3. - Média e Variância da Distribuição de Permutação por Inversão - Comunicação à IV Jornada Científica de Botucatu - UNESP, 1977.
4. - Um Método para obtenção do Polinômio Indicador de Ciclos do Grupo Simétrico - Comunicação à Reunião Regional da SBM - Ilha Solteira - UNESP - 1977.
5. - Cycle Index of Symmetric Group - Directs Proofs and Determinant Form - Naturália 4 - (55-60) - 1978.
6. - Grupos e Combinatória - DANE - IBILCE - S.J. do Rio Preto - UNESP - 1979.
7. BARBOSA e Godinho - Uma Nota sobre a Geradora e Distribuição de Permutações por Número de Ciclos - Combinatória 1 - (1-15) - 1979.
8. BERMAN and Fryer - Introduction to Combinatorics - Academic Press - N.Y. - 1972.
9. BRUALD, R.A. - Permanents - Bulletin of the American Mathematical Society - Vol. 1, nº 6 - (965-973) - 1979.
10. COTLAR, M. - Una Generalización de los Factoriales-Matematicae Notae - Año Quinto - Fasc. 2 - Rosário - Argentina - 1945.



11. DAVID and Barton - Combinatorial Chance - Griffin - Lon
don - 1962.
12. EISEN, M. - Elementary Combinatorial Analysis - Gordon
and Breach - N.Y. - 1969.
13. ESPADA, Barbosa e Bellomo - Cálculo de Diferenças Finini
tas - Nobel S.A., S.P. - 1973.
14. ESPADA FILHO, A. - Polinômios de Torres para Tabuleiros
Retangulares com Celas Acrescentadas -
Combinatória 2 - (1-15) - 1979.
15. - Indicador de Permutações-deslocamento
to - Expressão Geral - Comunicação ao
3º COMAC - Maringá - 1980.
16. ESPADA, Barbosa e Sahão - Indicador de Permutações com
Posições Interditadas - Algoritmo e Progra
ma - Comunicação ao 3º COMAC - Maringá
- 1980.
17. EVEN and Gillis - Derangements and Laguerre Polynomials
- Mat. Proc. of the Cambridge Phil. Soc.
- 79 - (135 a 143) - 1976.
18. FELLER, W. - An Introduction to Probability Theory and
its Applications - Wiley - N.Y. - 1950.
19. FLACHSMEYER, J. - Kombinatorik - Veb. Deutscher Verlag
- Berlim - 1972.
20. GOLDMAN, Joichi and White - Rook Theory I - Rook Equi-
valence of Ferrers Boards - Proc. of the
Am. Mat. Society - 57 - (485-491) - 1975.
21. - Rook Theory II - Boards of
Binomial Type - SIAM J. Appl. Mat. - Vol.
31, nº 4 - (618-633) - 1976.



22. GOLDMAN, Joichi and White - Rook Theory III - Rook Polynomials and the Chromatic Structure of Graphs - Journal of Combinatorial Theory (B) - 25 - (135-142) - 1978.
23. - Rook Theory IV - Orthogonal Sequences of Rook Polynomials - Studies in Applied Mathematics - 56 - (267-272) - 1977.
24. - Rook Theory V - Rook Polynomials, Möbius Inversion and the Umbral Calculus - Journal of Combinatorial Theory (A) - 21 - (230-239) - 1976.
25. GREAVER and Watkins - Combinatorics with emphasis on the Theory of Graphs - Springer Verlag - N.Y. - 1977.
26. JACKSON, D.M. - Laguerre Polynomials and Derangements - Mat. Proc. of the Cambridge Phil. soc. - 80 - Parte 2 - (213-214) - 1976.
27. KAUFMANN, A. - Introducción a la Combinatoria y sus Aplicaciones - C.E. Continental - México - 1971.
28. KAUFMANN et Coster - Exercices de Combinatoire avec Solutions - Tome 1 - Dunod - Paris, 1969.
29. KAPLANSKY and Riordan - The Problem of the Rooks and its Applications - Duke Mat. Jour. - 13 - (259-268) - 1943.
30. - Multiple Matching and Runs by the Symbolic Method - The Annals of Mat. Statistics - 16 - (272-277) - 1945.



31. KAPLANSKY, I. - On the Generalization of the Problem
des Rencontres - Am. Mat. Montly - 46 -
(906-914) - 1944.
32. - Solution of the "Problemes des Ménages"
- Bulletin of the Amer. Mat. Society -
49 - (784-785) - 1943.
33. KNOPF, K. - Cálculo de Probabilidades - Manuales Tec-
nico Labor - Barcelona - 1956.
34. LIU, C.L. - Introduction to Combinatorial Mathematics
- Mc Graw-Hill - N.Y. - 1968.
35. MARCUS and Minc - Permanents - American Mat. Monthly -
72 - (577-591) - 1965.
36. MENDELSON, N.S. - The Asymptotic Series for a Certain
Class of Permutation Problems - Canadian
Journal of Mathematics - Vol. VIII, nº 2
- (234-244) - 1956.
37. NETTO, E. - Lehrbuch der Combinatorik - Chelsea - N.Y.
- 1958.
38. NIVENHUIS and Siwilt - Combinatorial Algorithms - Aca-
demic Press - N.Y. - 1975.
39. OLDS, E.G. - A Moment Generating Function wich is use-
ful in Solving Certain Matching Problems
- Bulletin of the Am. Mat. Society - 44-
(407-413) - 1938.
40. PARZEN, E. - Modern Probability Theory and its Applica-
tions - Wiley - N.Y. - 1960.
41. PERCUS, J.K. - Combinatorial Methods Applied Mathemati-
cal Science (4) - Springer Verlag - N.Y.
- 1971.



42. REILLY and Tamy - Counting Successions in Permutations
- Studies in Applied Mathematics - 61 -
(73-81) - 1979.
43. RIORDAN, J. - An Introduction to Combinatorial Analysis
- Wiley - N.Y. - 1958.
44. ROSELLE, D.P. - Permutations by Number of Rises and
Successions - Proc. Amer. Mat. Society-
19 - (8-16) - 1968.
45. RYSER, H.V. - Combinatorial Mathematics - Wiley - N.Y.
- 1963.
46. SAINTE-LAGUE, M.A. - Les Reseaux (on graphes) - Mémo-
rial des Sciences Mathématiques - Fasc.
XVIII - 1926.
47. SPÁNDV y Frucht - Ejercicios y Problemas - Mathemati-
cae Notae - Año Cuarto - Fasc. 1 - (51-
59) - Rosário - Argentina - 1944.
48. TANNY, S.M. - Permutations and Successions - Journal
of Combinatorial Theory (A) - 21 - (196-
202) - 1976.
49. TOUCHARD, J. - Permutation on Discordant with two gi-
ven Permutations - Scripta Mathematica-
19 - (109-119) - 1953.
50. YUEH and Bedrosian - Coefficient Relationship between
Rook and Chromatic Polynomials - Journal
of the Franklin Institute - Vol. 302, nº
4 - (313-317) - 1976.
51. WITWORTH, W.A. - Choice and Chance - Hafnes - N.Y. -
1959.

db/.



