

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA
BACHARELADO EM ENGENHARIA ELETRÔNICA
E DE TELECOMUNICAÇÕES

LUCAS GABRIEL CARDOSO

LEIS DE POTÊNCIA NO MAPA HASSELL: APLICAÇÕES EM CIRCUITOS

São João da Boa Vista

2021

Lucas Gabriel Cardoso

LEIS DE POTÊNCIA NO MAPA HASSELL: APLICAÇÕES EM CIRCUITOS

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Engenharia Eletrônica e de Telecomunicações do Campus de São João da Boa Vista, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia Eletrônica e de Telecomunicações.

Orientador: Profº Dr. Juliano Antônio de Oliveira

São João da Boa Vista

2021

C268l Cardoso, Lucas Gabriel
Leis de potência no mapa Hassell : Aplicações em circuitos / Lucas Gabriel Cardoso. -- São João da Boa Vista, 2021
41 p. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Engenharia de Telecomunicações) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Câmpus Experimental de São João da Boa Vista, São João da Boa Vista
Orientador: Juliano Antônio de Oliveira

1. Comportamento caótico nos sistemas. 2. Teoria da bifurcação. 3. Sistemas não lineares. 4. Circuitos eletrônicos. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Câmpus Experimental de São João da Boa Vista. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE SÃO JOÃO DA BOA VISTA
BACHARELADO EM ENGENHARIA ELETRÔNICA
E DE TELECOMUNICAÇÕES

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

LEIS DE POTÊNCIA NO MAPA HASSELL: APLICAÇÕES EM CIRCUITOS

ALUNO: Lucas Gabriel Cardoso

ORIENTADOR: Prof. Dr. Juliano Antônio de Oliveira

BANCA EXAMINADORA:

- Profº Dr. Juliano Antônio de Oliveira (Orientador)
- Profº Dr. Antonio Marcos Batista (Examinador)
- Profº Dr. Wilian Miranda dos Santos (Examinador)

A ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no prontuário do aluno
(Expediente nº 089/2021)

São João da Boa Vista, 06 de dezembro 2021

"Dedico essa conclusão de curso: a Deus, visto que ele sempre esteve ao meu lado e deu-me não só muita capacidade, mas também forças para continuar. À toda minha família, que sempre apoiou e aposta em meu futuro brilhante. Aos meus colegas que estiveram na jornada comigo, ao longo destes períodos de graduação."

AGRADECIMENTOS

Sou grato a todos que, de alguma maneira, me ajudaram no desenvolvimento deste trabalho de conclusão de curso direta e indiretamente. O apoio e o incentivo de todos foram, indubitavelmente, fundamentais para o crescimento pessoal e acadêmico durante esses longos anos de estudos neste curso de graduação.

Agradeço, profundamente, a Deus por estar comigo em todos os momentos mais difíceis de minha vida, por dar amparo verdadeiro e, sempre, por ser fiel comigo. Por me ajudar a passar as dificuldades, dando-me fé para continuar trilhando o caminho correto, sem Ele, nada disso seria possível.

Agradeço, imensamente, aos meus pais, por tudo que me ensinaram de mais importante da vida, o caminho certo, durante o decorrer da minha vida e por sempre darem forças e suporte para continuar meus estudos.

Agradeço, formidavelmente, aos meus tios, às minhas avós, por me ajudarem financeiramente a me manter uma moradia em outra cidade. Excepcionalmente, a todos meus irmãos e primos pelo apoio moral e por todo carinho que todos vocês têm por mim.

Agradeço aos amigos próximos e colegas de classe do campus da Unesp de São João da Boa Vista-SP, que durante todo o período de graduação, me ajudaram, trocaram muito conhecimento e experiência acadêmica comigo, muito obrigado pelos momentos ímpares que vivemos.

Agradeço aos meus amigos de moradia, meus segundos avós, que me acolheram de maneira única, na cidade de São João da Boa Vista, nessa cidade fantástica, considero vocês como meus parentes.

Agradeço, em especial, ao meu orientador, não só por me ajudar e apoiar nesse trabalho, mas também por preocupações pessoais e financeiras. Além de muitas conversas produtivas e dicas para uma vida e carreira acadêmica melhor.

Agradeço aos professores que passaram em minha formação, desde o primeiro até o presente momento, assim como também aos excelentes funcionários da biblioteca.

Agradeço a Unesp de SJBV, pela oportunidade de estudar, adquirindo grandes conhecimentos, de forma singular, nesta instituição e pelo apoio financeiro do auxílio socioeconômico ofertado, muito obrigado!

Este trabalho contou com o apoio da(s) seguinte(s) entidade(s):

Processo nº 2018/14685-9, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Processos 303242/2018-3 e 421254/2016-5 e o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

*“Tudo posso naquele que me fortalece.”
(Filipenses 4.13)*

RESUMO

Neste trabalho, consideramos o mapa Hassell e estudamos sobre a construção numérica do diagrama de órbitas, considerando valores diferentes dos parâmetros de controle, para avaliar o comportamento do sistema. Analisamos, numericamente, a convergência de órbita para um ponto fixo e próximo à bifurcação transcítica no mapa Hassell, para assim obter o expoente dinâmico, a partir da lei de potência. Investigamos a relaxação próximo à bifurcação transcítica de modo que em decaimento exponencial. Utilizamos a temática do expoente de Lyapunov para caracterizar o caos observando ao diagrama de órbitas. Neste trabalho, investigamos também o comportamento não linear e caótico do circuito eletrônico RLD (resistor, indutor e diodo). Para tanto, consideramos tal circuito em associação em série entre fonte de tensão, diodo, resistência e indutância. Assim, analisamos os comportamentos caóticos presentes no sistema, considerando modelos para o diodo, como capacitâncias não lineares em paralelo com a fonte de corrente, experimentalmente necessários para exibir o comportamento não linear.

PALAVRAS-CHAVE: Mapa Hassell, diagrama de órbitas, caos, expoentes de Lyapunov, bifurcação transcítica, ponto fixo, parâmetro de controle, convergência de órbitas para o estado estacionário, condição inicial e circuito RLD.

ABSTRACT

In this work, we consider the Hassell map and study the numerical construction of the orbit diagram, considering different values of the control parameters, to evaluate the behavior of the system. We numerically analyzed the convergence of the orbit to a fixed point and close to the transcritical bifurcation in the Hassell map, in order to obtain the dynamic exponent from the power law. We investigate the relaxation close to the transcritical bifurcation so that it is in exponential decay. We use the Lyapunov exponent thematic to characterize chaos by observing the orbit diagram. In this work, we also investigate the nonlinear and chaotic behavior of the RLD electronic circuit (resistor, inductor and diode). Therefore, we consider such a circuit in series association between voltage source, diode, resistance and inductance. Thus, we analyze the behaviors present in the system, considering models for the diode, such as non-linear capacitances in parallel with the current source, experimentally necessary to exhibit the non-linear behavior.

KEYWORDS: Hassell map, orbit diagram, chaos, Lyapunov exponents, transcritical bifurcation, fixed point, control parameter, orbit convergence to steady state, initial condition and RLD circuit.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Diagramas de órbitas do mapa Hassell considerando $a = 1$, e $N_0 = 0, 1$, para os valores dos parâmetros de controle (a) $\gamma = 2$, (b) $\gamma = 4$, (c) $\gamma = 6$ e (d) $\gamma = 8$. .	18
Figura 2	(a) Diagrama de órbitas do mapa Hassell. (b) Diagrama de órbitas com ampliação, considerando $\gamma = 2, 4, 6$ e 8 , em todos os diagramas utilizamos $a = 1$ e a condição inicial foi $N_0 = 0, 1$	20
Figura 3	Decaimento para o ponto fixo com a condição inicial de $N_0 = 10^{-2}$, considerando $a = 1$ e $\gamma = 2$ (círculo ciano), 4 (quadrado roxo), 6 (diamante marrom) e 8 (triângulo magenta).	21
Figura 4	Relaxação para o ponto fixo em função de μ , aproximando δ , com $a = 1$ e $\gamma = 6$.	22
Figura 5	(a) Diagrama de órbitas do mapa Hassell, $0 \leq r \leq 60$. (b) Expoente de Lyapunov λ , para caracterizar o caos, para esses casos foram usados $a = 1$ e $\gamma = 6$	27
Figura 6	Circuito eletrônico RLD.	28
Figura 7	Circuito RLD simplificando o diodo.	29
Figura 8	Diagrama de bifurcação do circuito experimental RLD	32

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
UNESP	Universidade Estadual Paulista
SJBV	São João da Boa Vista
EDO	Equação Diferencial Ordinária
RLD	Resistor Indutor Diodo

LISTA DE SÍMBOLOS

σ	Constante de Feigenbaum
β	Expoente critico da lei de potência
γ	Parâmetro de controle do mapa Hassell
δ	Expoente de relaxação
μ	Distância da bifurcação
λ	Expoente de Lyapunov
τ	Tempo de relaxação
ω	Frequência de oscilação do circuito
e	Número de Euler
q	Carga elementar
R	Resistência elétrica
L	Indutor
D	Diodo
E	Tensão senoidal
C	Capacitância
t	Tempo
$V_D(t)$	Tensão no diodo
$i_D(t)$	Corrente elétrica no diodo
V_j	Tensão de junção
C_j	Capacitância de junção
C_{df}	Capacitância de difusão
V_T	Tensão térmica
I_S	Corrente de saturação
E_0	Amplitude da tensão senoidal
K_B	Constante de Boltzmann
T	Temperatura em Kelvin

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Revisão teórica	15
1.2	Organização	17
2	DESENVOLVIMENTO	18
2.1	Diagrama de órbitas e ponto fixo	18
2.2	Convergência das órbitas no ponto fixo	21
2.3	Aproximação analítica da convergência das órbitas	23
2.4	Aproximação pelo Expoente de Lyapunov	25
3	APLICAÇÕES DE SISTEMAS CAÓTICOS EM TELECOMUNICAÇÕES .	28
3.1	Circuito RLD	28
3.2	Análises que levam ao caos nos circuitos RLD	29
4	COMENTÁRIOS FINAIS	33
	REFERÊNCIAS	36
	APÊNDICE A – CONCEITOS BÁSICOS DE LIMITES	39
	APÊNDICE B – CONCEITOS BÁSICOS DE DERIVADAS	40
	APÊNDICE C – CONCEITOS BÁSICOS DE INTEGRAIS	41
	APÊNDICE D – CONCEITOS BÁSICOS DE EDOS	42

1 INTRODUÇÃO

Ao decorrer dos estudos da humanidade, percebeu-se que há uma grande motivação para compreender os fenômenos físicos de sistemas dinâmicos caracterizados pela teoria do caos. A fim de explicar outros tipos de ocorrência na natureza até então pouco entendidos. Como nos casos da meteorologia, da existência das populações biológicas (LICHTENBERG; LIEBERMAN, 1992), da mecânica dos fluidos, da mecânica celestial, da estatística e probabilidade (PRADO, 2017), de sistemas da óptica, e da eletrônica (BOLLT, 2003).

Esses estudos na área de sistemas dinâmicos começaram a ser caracterizados por volta do século XVII, pelo físico e astrônomo Galileu Galilei, estudando o comportamento de corpos celestes e suas órbitas, posteriormente, por Johannes Kepler, através de suas leis planetárias (BASCOMPTE; SOLÉ, 1994). Depois desse período, outros estudos de sistemas dinâmicos foram destacados por Isaac Newton e por Leibniz, com a introdução ao cálculo diferencial e integral. Evidentemente, outros pensadores e cientistas também contribuíram para a raiz da teoria do caos em sistemas dinâmicos, como Pierre-Simon Laplace no século XVIII por tratar do determinismo universal, além de outros estudos correlatos como o movimento dos gases analisados por James Clerk Maxwell e Ludwig Boltzmann (OESTREICHER, 2007). Porém, a teoria do caos tomou um molde inicial pelo célebre matemático Jules Henri Poincaré, por volta do final do século XIX, quando ele tentava explicar e resolver o problema de interação de 3 corpos, descrevendo o movimento desses três corpos em interação mútua, além dos grandes estudos de mesma época pelo físico Aleksandr Lyapunov na área de sistemas dinâmicos. Esses métodos introduzidos por Poincaré, para tratar o problema, não levavam ao tipo de soluções regulares e periódicas existentes naquela década.

Dessa forma, Henri Poincaré conseguiu descobrir o comportamento geral de um corpo sob a influência gravitacional de outros dois corpos que era irregular, notoriamente imprevisível, visto que duas órbitas quaisquer sob posse de condições iniciais aleatórias, próximas, resultavam em destino futuro em órbitas distantes (MARTINS; ZANOTELLO, 2017). Nesse caso, Poincaré tratou de identificar os conceitos essenciais do caos determinístico e, conseqüentemente, deduziu a generalizações. No entanto, suas teorias e ideias eram, claramente, avançadas para atribuírem certa sequência imediata. Toda a formulação matemática necessária para compreender e estudar o caos não estava desenvolvida, sendo que parte dela foi elaborada pelo próprio Poincaré, e, na época, não existiam computadores, como os atuais, a fim de evidenciar a descrição do comportamento caótico, mesmo para aqueles que não dominavam a matemática por trás (FÍSICA, 2010).

Posterior aos estudos realizados por Henri Poincaré, o matemático Andreï Nicolaïevitch Kolmogorov deu continuidade e revisitou os estudos de Poncairé, originando-se o teorema de KAM, o qual descreve uma transição progressiva para o caos em um sistema integrável, sendo que esse teorema clássico se preocupa com a estabilidade de movimentos em sistemas hamiltonianos, que são pequenas perturbações de sistemas hamiltonianos integráveis (POSCHER, 2020). Isso fez com que a teoria do caos se destaca ainda mais; contudo, um dos fatores mais importantes para colocar a teoria caótica, como um dos principais estudos da física em sistemas dinâmicos, foi proposto pelo meteorologista

Edward Lorenz, na década de 1960, em seu estudo “*Deterministic nonperiodic flow*”, observando-se ao alterar sutilmente as condições iniciais do sistema, houveram-se mudanças totalmente distintas durante a evolução dessas condições, quando comparadas entre elas (LORENZ, 1963). Dessa forma, estes comportamentos notados por Lorenz, indicavam ser de natureza caótica.

Devido a essas descobertas de sistemas sensíveis a condições iniciais, os estudos em dinâmica não linear e teoria do caos aumentaram muito nas últimas décadas e despertaram-se o interesse de pesquisadores, para essa área (DEVANEY, 1992). Com isso, notou-se que os sistemas dinâmicos poderiam ser caracterizados por mapeamentos (LI; YORKE, 1975), dos quais dependem de parâmetros de controle, cuja função é controlar a dinâmica do sistema. Em outras palavras, caso haja uma mudança nesses parâmetros, o sistema irá apresentar certos comportamentos diferentes, passando, assim, de periódico para caótico, ou vice versa. Nesse sentido, podemos classificar um sistema caótico como aquele que apresenta sensibilidade às condições iniciais (PRADO, 2017). Posteriormente, os estudos realizados e propostos por Robert May, professor de Oxford, com relação ao mapa logístico (MAY, 1974) - que representa um modelo que tem, além dos parâmetros de controles, não linearidades quadráticas - se destacaram muito ao redor do mundo. Porém, quando variam-se os parâmetros de controle, neste tipo de mapeamento, notou-se que ele apresenta comportamentos curiosos em sua dinâmica, por exemplo, pontos fixos, bifurcações, atratores caóticos, tendo também aplicações em áreas da ciência, como economia e criptografia (MAY, 1974).

1.1 REVISÃO TEÓRICA

Agora, para tratarmos da dinâmica dos sistemas, citamos a existência de sistemas dinâmicos lineares e não lineares. Por um lado, os lineares apresentam soluções gerais, e permitem determinar o comportamento do sistema futuro. Por outro, os não lineares exibem, geralmente, as soluções exatas não tão simples de obter, quando tratadas analiticamente, se obtidas, os resultados podem ser de difícil interpretação. Além disso, existem algumas ferramentas que facilitam os estudos desses tipos de sistemas. Por exemplo, das seções de Poincaré (HILBORN, 2000), que reduzem o fluxo de soluções e a discretização de equações diferenciais, podendo exigir um custo menor, numericamente, na determinação de informações do problema, quando comparado aos modelos descritos por equações diferenciais ordinárias.

Esses sistemas podem ser compreendidos, basicamente, em outras linhas de raciocínio, podendo ser conservativos, sendo aqueles onde a energia é conservada, ou dissipativos, sendo aqueles sistemas em que há parte da energia é perdida (AGUIAR, 1994). Os sistemas dinâmicos, conforme já mencionado, são parametrizados por parâmetros de controle, tal que a escolha dos parâmetros podem ilustrar comportamentos, caóticos, periódicos e bifurcações. Desse modo, uma bifurcação num sistema dinâmico é uma mudança na natureza de um ponto fixo, devida à modificação de um parâmetro do sistema (PRADO, 2017). Há três tipos comuns de bifurcação que são designados por bifurcação sela, bifurcação transcritical e bifurcação de forquilha (PRADO, 2017).

Agora, tratando em relação ao domínio contínuo e discreto do sistema dinâmico, tendo o sistema contínuo entendido como a evolução de algo ao longo do tempo. Para criar esse sistema dinâmico, simplesmente precisamos decidir qual é o “algo”, que irá evoluir ao longo do tempo e qual é a regra

que especifica como esse algo evolui com o tempo (BARROS; RAYZARO, 2018). Dessa forma, tal sistema é simplesmente um modelo que descreve a evolução temporal do sistema cujo estado progride ao longo do espaço de posição, continuamente, de acordo com uma regra fixa. Os sistemas dinâmicos podem ser modelados por equações diferenciais ordinária – EDO, dado por

$$\dot{x} = \frac{dy}{dt}, \ddot{x} = \frac{d^2y}{dt^2}, \dddot{x} = \frac{d^3y}{dt^3}, \dots x^n = \frac{d^ny}{dt^n}, \quad (1)$$

sendo essas equações de primeira, segunda e terceira ordens, assim por diante, dependendo do tamanho do sistema e de sua complexabilidade (FERREIRA, 2018). Podem ser modelados, também, por campo de direções (é um desenho do plano (x,y), onde em cada ponto aparece um vetor com declive igual a $f(x,y)$), por sistemas autônomos (em que a função não depende da variável independente, são designadas de equações diferenciais autônomas) e por métodos de resoluções de EDOS (exatas, homogêneas, separáveis entre outros) (SIMÕES, 2014).

Existe, também, o sistema dinâmico discreto, ele é definido como: em um intervalo de tempo entre dois desses instantes, o estado do sistema permanece constante. Nesse sistema discreto, o estado pode possuir diversas dimensões, tais como primeira, segunda, terceira, ... n-ésima (CABRAL; DRIEMEIER, 2014). O estado de um sistema discreto, com uma dimensão, é determinado completamente por uma variável do tipo y . O valor da variável de estado nos instantes $\{t_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n\}$ será uma sequência $\{y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$. Esse sistema discreto é caracterizado pela equação de evolução, que permite calcular o estado y_{n+1} , em um instante t_{n+1} , a partir do estado y_n , no instante anterior t_n , dada por

$$y_{n+1} = F(y_n), \quad (2)$$

na qual $F(y_n)$ é uma função conhecida (JESUS; SILVA; D'AFONSECA, 2016). É importante deixar claro que os sistemas dinâmicos abordados aqui são sistemas dinâmicos discretos simples. Daremos mais ênfase a esses sistemas, e definimos mais alguns conceitos essenciais presentes neles. A evolução de um sistema discreto de primeira ordem é expressa pela equação (2), ao passo que ela é obtida aplicando, sucessivamente, a função F , ao estado inicial $y_0 = k$, em forma compacta dada por

$$\{k, F(k), F^2(k), F^3(k), \dots F^n(k)\}. \quad (3)$$

Um ponto fixo do sistema da equação (2) é um ponto y_0 , onde o estado do sistema permanece fiel. Para tanto, é necessário e suficiente que $y_0 = F(x_0)$ tenha sucessivas aplicações de F não modificando o valor inicial. A resolução do sistema, com valor inicial y_0 , é uma sequência constante na forma $\{y_0, y_0, y_0, \dots\}$. Assim, definimos as órbitas, ou as trajetórias do sistema, o conjunto de pontos de evolução de um modelo unidimensional discreto, que inclui as condições iniciais estabelecidas, sendo as órbitas caóticas ou não caóticas. As características dessas órbitas são ligadas ao parâmetro de controle. Uma forma qualitativa de observar esses comportamentos é por meio do diagrama de órbitas do sistema, após um longo período de iterações (ALLIGOOD, 1997). Este tipo de diagrama apresenta a evolução da trajetória do sistema, em função do parâmetro de controle, evidenciando a evolução e a destruição do conjunto de atratores do problema. Outra forma de observar esse comportamento, após um período longo de iterações, é através do espaço de parâmetros (GALLAS, 1993), notando-se a

dinâmica do sistema em função dos parâmetros de controle.

Também, podemos observar alguns comportamentos nesse ponto fixo, em mapeamentos unidimensionais, sendo um ponto em que mapeia a si mesmo (NAHIAN; HOSEN; AHMED, 1999). Tal ponto pode ser instável, estável, ou assintoticamente estável. Além disso, relacionados com a dinâmica do sistema, existe o ponto de bifurcação, no qual ocorre uma mudança na estabilidade do ponto fixo, alterando seu comportamento de assintoticamente estável para instável ou vice e versa (HILBORN, 2000). Por fim, existem os atratores, classificados em duas formas caóticos e não caóticos, tendo o seu comportamento para explicar fenômenos do sistema dinâmico. Consideravelmente, os estudos sobre tais atratores, e como são afetados quando o parâmetro de controle do sistema é variado, receberam atenção de muitos pesquisadores (MARSDEN; MCCRACKEN, 1976). Alguns desses incluem a teoria de bifurcação, cascatas de duplicação de período resultando em caos, dentre outros (HUNTTIEN-YIEN; KENNEDY; NUSSE, 2004).

1.2 ORGANIZAÇÃO

Neste trabalho, portanto, estudaremos o decaimento de órbitas para os pontos fixos em duas divisões distintas, próximo à bifurcação transcítica e até a duplicação de período. Estudaremos levantamentos unidimensionais não lineares discretos, analisando o diagrama de órbitas e o decaimento das órbitas por meio da lei de potência e a duplicação do período das bifurcações. Encontraremos o conjunto analítico e numérico de expoentes críticos que descrevem as propriedades de escala nas bifurcações e perto delas. Esses expoentes caracterizam o tipo de bifurcação do problema. Também, analisaremos os eventos no mapa de Hassell. Nele, analisaremos o diagrama de órbitas, e o decaimento para o ponto fixo na bifurcação transcítica, e determinaremos analítica, e numericamente, os expoentes críticos que são característicos dessa bifurcação. Com o mapa logístico, construiremos o diagrama de órbitas, e realizamos o cálculo dos expoentes de Lyapunov. Neste estudo, usaremos o tempo de relaxação no mapa Hassell como ferramenta. Nesse mesmo mapa, faremos uma ponte para o circuito RLD, caracterizando o caos presente nele. Por fim, visaremos esses tipos de comportamentos presentes nos circuitos com elementos passivos, dando diversos modelos para compreender a dinâmica de elementos não lineares existentes nesse circuito RLD.

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 DIAGRAMA DE ÓRBITAS E PONTO FIXO

Neste capítulo, iremos argumentar e considerar o mapa Hassell (THUNBERG, 2001), dado pela seguinte equação

$$N_{n+1} = \frac{rN_n}{(1 + aN_n)^\gamma}, \quad (1)$$

onde a , r e γ são os parâmetros de controle, sendo N a variável dinâmica. Este mapeamento é usado para descrever estudos sobre populações biológicas (LEONEL, 2019). O parâmetro de controle $r > 0$ é considerado como a taxa de crescimento da população, $a > 0$ dimensiona o tamanho da população, ou ambiente, e $\gamma > 0$ descreve tanto a força quanto a forma da competição interna da população (BASCOMPTE; SOLÉ, 1994).

Analisaremos, agora, o comportamento do sistema, como pode ser visto na Figura 1. Esta imagem mostra o diagrama de órbitas usando os parâmetros de controle $a = 1$, variando $\gamma = 2, 4, 6$ e 8 (conforme mostra a legenda da figura), e mantendo fixo a condição inicial $N_0 = 0, 1$.

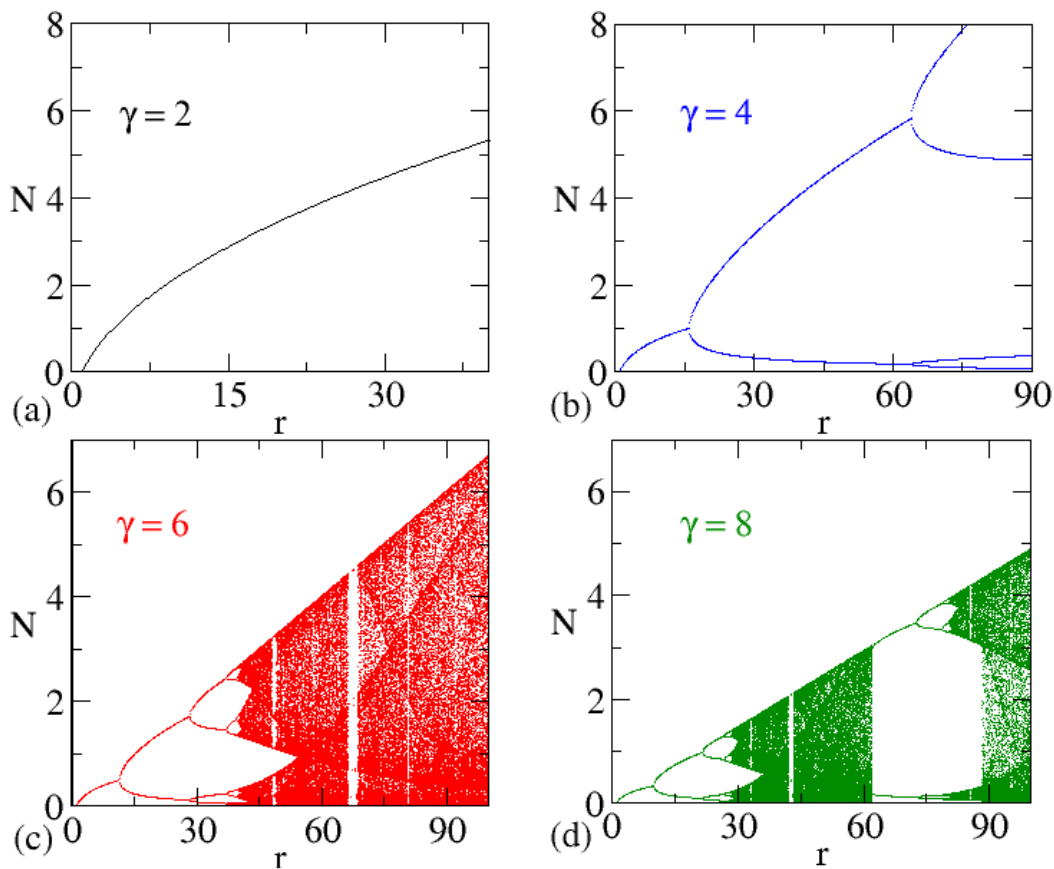


Figura 1 – Diagramas de órbitas do mapa Hassell considerando $a = 1$, e $N_0 = 0, 1$, para os valores dos parâmetros de controle (a) $\gamma = 2$, (b) $\gamma = 4$, (c) $\gamma = 6$ e (d) $\gamma = 8$.

A Figura 1(a) ilustra que existe um comportamento de um ponto fixo evidenciando que o parâmetro

de controle, $\gamma = 2$, não atinge a região caótica no mapa Hassell, visto que o parâmetro de controle r está em uma escala de observação menor ao caos. A Figura 1(b) representa $\gamma = 4$, atingindo bifurcações de duplicação de período. Aqui ainda a região caótica no mapa Hassell não é atingida, tendo em vista que o parâmetro r está em uma escala menor, anterior ao caos observável. Já a Figura 1(c) ilustra o parâmetro $\gamma = 6$, chegando esse valor a atingir a bifurcações de duplicação de período e, consequentemente, a região de caos no mapa Hassell, sendo que o parâmetro recursivo r está agora dentro da faixa da presença de observação do caos. Por fim, a Figura 1(d) apresenta o parâmetro de controle $\gamma = 8$, chegando a bifurcações de duplicação de período. Aqui a região caótica é atingida muito antes que mostrado na Figura 1(c), já que, na faixa de r , a desordem (caos) está instaurado no mapa.

Assim, podemos ver que conforme aumentamos os valores do parâmetro de controle γ , o comportamento da região caótica antecede a uma escala menor para o parâmetro de controle recursivo r . Em outras palavras, se fossemos aumentando o valor de γ , isso resultaria na antecipação da desordem presente no mapa Hassell.

Além disso, trazendo para uma análise analítica, os pontos fixos da equação (1) são obtidos utilizando a condição dada por:

$$F(N^*) = N^*. \quad (2)$$

Com auxílio da equação (2) e da (1), podemos chegar a seguinte expressão

$$\begin{aligned} F(N^*) &= \frac{rN^*}{(1 + aN^*)^\gamma} = N^*, \\ &= \frac{rN^*}{(1 + aN^*)^\gamma} - N^* = 0, \\ &= N^* \left(\frac{r}{(1 + aN^*)^\gamma} - 1 \right) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

solucionando a equação (3), em função de N^* , obtemos os pontos fixos $N_1^* = 0$ e $N_2^* = (r^{1/\gamma} - 1)a^{-1}$.

Agora, analisando a estabilidade dos pontos fixos, temos que

$$\left| \left[\frac{dF}{dN} \right]_{N=N^*} \right| < 1, \quad (4)$$

na qual

$$F = \frac{rN}{(1 + aN)^\gamma}. \quad (5)$$

Com auxílio da equação (3), no ponto $N = N^*$, a derivada da equação (4) é

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dN} &= \frac{r}{(1 + aN)^\gamma} - \frac{ra\gamma N}{(1 + aN)^{\gamma+1}}, \\ &= r(1 + aN)^{-\gamma} [1 - aN\gamma(1 + aN)^{-1}], \end{aligned} \quad (6)$$

aplicando os pontos fixos N_1^* e N_2^* , chegamos em

$$\left. \frac{dF}{dN} \right|_{N_1^*} = \frac{r}{1^\gamma} = r, \quad (7)$$

e

$$\left. \frac{dF}{dN} \right|_{N_2^*} = 1 - \gamma(1 - r^{-1/\gamma}). \quad (8)$$

A equação (4) garante que o ponto N_1^* é estável assintoticamente em $-1 < r < 1$, como ilustra a Figura 2. Assim, como $r \geq 0$, o ponto fixo $N_1^* = 0$ será estável quando $r \in [0, 1)$ e buscando o mesmo procedimento para N_2^* , este segundo ponto fixo será estável quando $r \in (1, 11.3)$.

Depois do ponto fixo N_2^* , uma sequência de bifurcações de duplicação de período pode ser observada, acumulando até as regiões caóticas. Logo após isso, janelas periódicas também são vistas para o caso de grandes valores do parâmetro r .

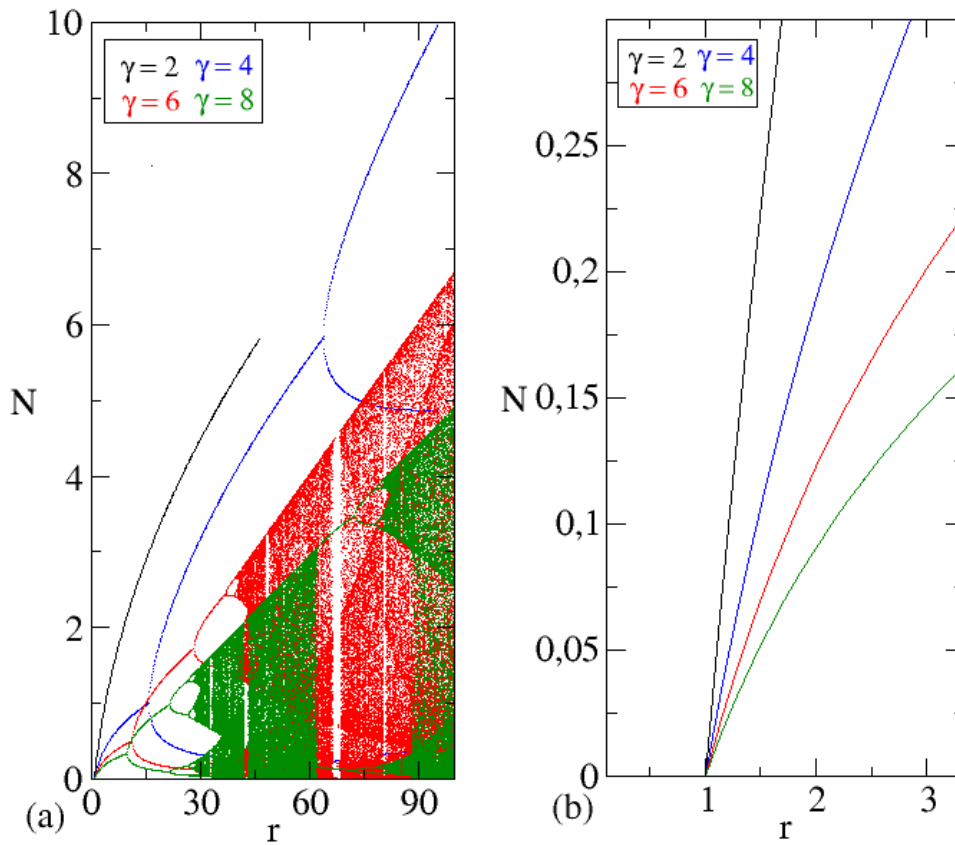


Figura 2 – (a) Diagrama de órbitas do mapa Hassell. (b) Diagrama de órbitas com ampliação, considerando $\gamma = 2, 4, 6$ e 8 , em todos os diagramas utilizamos $a = 1$ e a condição inicial foi $N_0 = 0, 1$.

Com base na Figura 2(a), podemos ver o mesmo comportamento das curvas da função do mapa de Hassell na Figura 1, variando γ até que atinja a região caótica, com análise do parâmetro de controle r em um dado intervalo definido em $[0 - 90]$.

A Figura 2(b) representa que independente do valor de γ , a primeira bifurcação ocorre no valor $r_c = 1$. Tal bifurcação, chamada de transcítica, é caracterizada pelo seguinte comportamento: antes do ponto de bifurcação, temos dois pontos fixos, um estável e outro instável. Após o ponto de bifurcação,

estes pontos fixos continuam existindo, mas a estabilidade deles é trocada, ou seja, o ponto fixo estável torna-se instável e vice-versa.

2.2 CONVERGÊNCIA DAS ÓRBITAS NO PONTO FIXO

Investigaremos, nesta seção, o comportamento da variável dinâmica N na bifurcação transcítica, aproximando do ponto fixo $N_1^* = 0$, para compreendermos melhor o decaimento das órbitas. Note que a convergência depende da condição inicial N_0 , de um parâmetro μ (que define a distância do ponto de bifurcação), e do número de iterações n .

Considerando o caso em que $\mu = 0$, com a condição inicial $N_0 = 10^{-2}$, sendo que os parâmetros de controle são $a = 1$ e considerando $\gamma = 2, 4, 6$ e 8 , (conforme mostra a legenda da imagem), foi possível plotar a Figura 3.

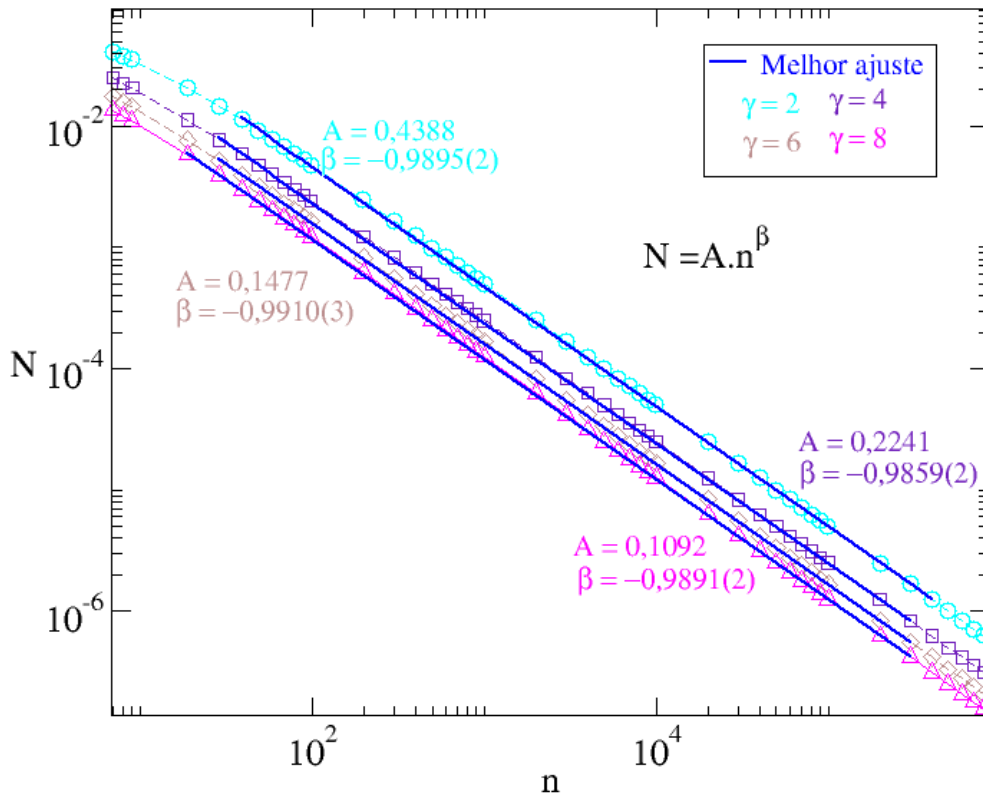


Figura 3 – Decaimento para o ponto fixo com a condição inicial de $N_0 = 10^{-2}$, considerando $a = 1$ e $\gamma = 2$ (círculo ciano), 4 (quadrado roxo), 6 (diamante marrom) e 8 (triângulo magenta).

Podemos observar que, por essa figura, as órbitas decaem de acordo com uma lei de potência do tipo: $N = An^\beta$, onde A é o coeficiente da lei de potência, n é o número de iterações no mapa Hassell e β é o expoente crítico de decaimento.

Observamos na Figura 3, para os valores diferentes dos parâmetros γ , os expoentes β podem ser determinados, a partir de um ajuste em lei de potência. A Figura 3 ressalta à medida que o parâmetro de controle γ aumenta, há um decaimento mais acentuado e o valor do parâmetro A tende a ficar cada

vez menor, ou seja, as curvas decaem em uma lei de potência, descrita por um expoente β , ilustrando a convergência para o ponto, sendo que β aproxima-se ao valor de $\beta \approx -0.999 \approx -1$.

Discutiremos, agora, a convergência das órbitas do mapa Hassell, da equação (1) para o ponto fixo, estando a uma distância de $\mu = 1 - r_c \ll 1$, com $r_c \leq r$, isto caracteriza a vizinhança ao redor da bifurcação. A evolução do ponto fixo é dada por uma lei de potência, de acordo com

$$N(n, \mu) \propto e^{-n/\tau}, \quad (9)$$

onde τ é o tempo de relaxação dado por

$$\tau \propto \mu^\delta, \quad (10)$$

e o parâmetro δ é um expoente de relaxação. Para o caso $a = 1$ e $\gamma = 6$, a Figura 4 ilustra o comportamento de τ vs. μ , apesar de que os outros valores de γ produziram o mesmo resultado, considerando o conjunto de 10^{-4} condições iniciais próximas ao ponto fixo, a distância μ representada, em décadas, e após um longo número de iterações do mapa da equação (1).

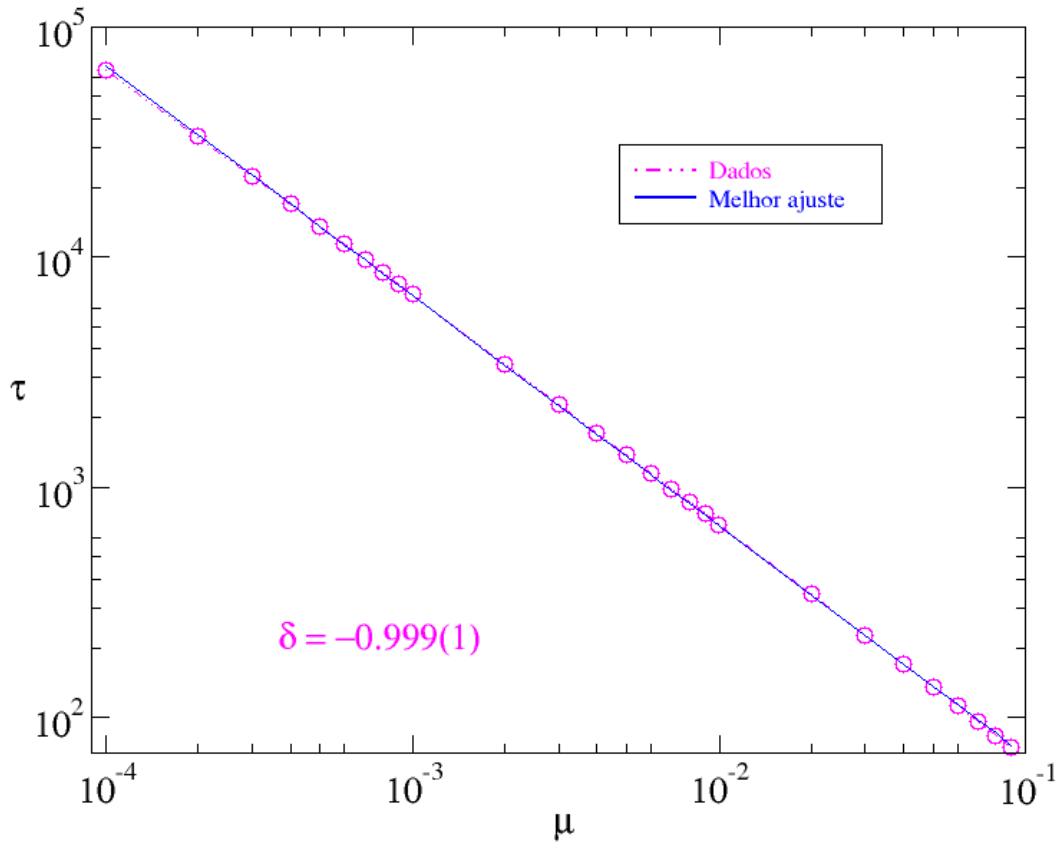


Figura 4 – Relaxação para o ponto fixo em função de μ , aproximando δ , com $a = 1$ e $\gamma = 6$.

Um ajuste em lei de potência, conforme a Figura 4, fornece o expoente $\delta = -0,999 \approx -1$ e ele é independente do valor do parâmetro γ .

2.3 APROXIMAÇÃO ANALÍTICA DA CONVERGÊNCIA DAS ÓRBITAS

Neste seção, discutiremos as diferentes aproximações analíticas para alcançar o equilíbrio. Primeiramente, consideramos o ponto de bifurcação para o parâmetro de relaxamento $\mu = 0$, e para $r = r_c = 1$, perto da bifurcação. Deste modo, o mapeamento Hassell pode ser reescrito como

$$N_{n+1} = \frac{N_n}{(1 + aN_n)^\gamma}. \quad (11)$$

Utilizando a expressão analítica da expansão da série de Taylor de N_n , quando $aN_n \ll 1$, temos que

$$N_{n+1} = N[1 - \gamma a N_n - \frac{1}{2}\gamma a^2(-1 - \gamma)N_n^2 - O(3)], \quad (12)$$

ao redor do ponto fixo, N é muito próximo de zero. Portanto, podemos manter os termos de baixa ordem na expressão, considerando somente o termo de primeira ordem (MENDONÇA, 2018). Dessa forma, temos

$$N_{n+1} = N_n(1 - \gamma a N_n), \quad (13)$$

sob essa óptica, podemos considerar a variável dinâmica N como contínua. Fazendo a manipulação algébrica da equação (13)

$$\begin{aligned} N_{n+1} &= N_n - \gamma a N_n^2, \\ N_{n+1} - N_n &= -\gamma a N_n^2, \\ &= \frac{N_{n+1} - N_n}{(n+1) - n}, \end{aligned} \quad (14)$$

com a equação (14), podemos aproximar para a sua derivada como

$$\begin{aligned} N_{n+1} - N_n &\approx \frac{dN}{dn}, \\ \frac{dN}{dn} &= -\gamma a N_n^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Fazendo a manipulação de variáveis, obtemos a seguinte equação diferencial

$$\frac{dN}{N^2} = -\gamma a dn. \quad (16)$$

Da equação (16), é possível utilizar a integração de ambos os lados, com a condição inicial N_0 definida para $n = 0$, enquanto que, para um n aleatório, tem-se N_n . Então, utilizando estas variáveis

para os limites da integral, temos assim a seguinte expressão

$$\int_{N_0}^{N_n} \frac{dN'}{(N')^2} = \int_0^n (-\gamma a) dn'. \quad (17)$$

Usando as propriedades de integração, chegamos à aproximação analítica, escrita como

$$N_n = \frac{1}{\left(\frac{1}{N_0} + \gamma an\right)}. \quad (18)$$

Fazendo a seguinte análise, para a situação de que $\gamma an \gg 1/N_0$, temos que a equação (18) se torna

$$\begin{aligned} N_n &= \frac{1}{[\gamma an]}, \\ &= [\gamma an]^{-1}, \\ &= (\gamma a)^{-1} n^{-1}, \\ &= B n^{-1}, \end{aligned} \quad (19)$$

onde $B = (\gamma a)^{-1}$. Comparando esse resultado com a lei de potência discutido anteriormente, concluímos que o expoente crítico se aproxima de $\beta = -1$.

Considerando a situação em que $\mu \neq 0$, a equação (13) é reescrita como

$$\begin{aligned} N_{n+1} &= rN_n(1 - \gamma aN_n), \\ N_{n+1} - N_n &= rN_n(1 - \gamma aN_n) - N_n, \\ &= \frac{N_{n+1} - N_n}{(n+1) - n} \approx \frac{dN}{dn}, \\ &= rN_n - \gamma arN_n^2 - N_n, \\ &= -(1 - r)N - arN^2, \end{aligned} \quad (20)$$

perto do ponto fixo $N_1^* \approx 0$, consideramos que o termo N^2 tende a zero mais rápido do que o termo N . Logo, o último termo da direita N^2 da expressão (20) pode ser desconsiderado e, assim, temos que

$$\frac{dN}{dn} = -\mu N, \quad (21)$$

onde $\mu = 1 - r$.

Da equação (21), é possível utilizar a integração de ambos os lados, com a condição inicial N_0 definida para $n = 0$, enquanto que, para um n aleatório, tem-se N_n . Então, utilizando estas variáveis para os limites da integral, temos a seguinte notação

$$\int_{N_0}^{N_n} \frac{dN'}{N'} = \int_0^n (-\mu) dn'. \quad (22)$$

Calculando a integral e rescrevendo os termos, obtemos a aproximação analítica do ponto fixo na forma a seguir

$$N_n = N_0 e^{-\mu n}. \quad (23)$$

Comparando estes resultados com as equações (9) e do tempo de relaxação (10), concluímos que $\delta = -1$ está em de acordo com o resultado mostrado na Figura 4. A convergência das trajetórias para o ponto fixo, N^* , na bifurcação transcítica produziu os mesmos expoentes críticos, incluindo δ , quando comparados com os resultados referentes ao mapa logístico (TEIXEIRA et al., 2015).

2.4 APROXIMAÇÃO PELO EXPOENTE DE LYAPUNOV

Para caracterizar o caos nas trajetórias do mapeamento de Hassell, utilizaremos a teoria dos expoentes característicos de Lyapunov. A divergência exponencial média de trajetórias vizinhas é uma propriedade que leva a um tipo de comportamento chamado de caótico (HILBORN, 2000). Esta divergência é dada por

$$d_t = d_0 e^{\lambda t}, \quad (24)$$

na qual t é o tempo, d_0 a distância inicial entre as trajetórias, d_t a distância prevista e λ é o expoente característico de Lyapunov.

Consideramos um mapeamento unidimensional discreto expresso por

$$X_{n+1} = F(x_n), \quad (25)$$

com $F(x_n)$ sendo uma função não linear. Para analisarmos suas órbitas, consideramos duas condições iniciais próximas e introduziremos o conceito de expoentes de Lyapunov para mapas unidimensionais.

Seja uma condição inicial x_0 e uma outra condição inicial x'_0 , muito próximas, sendo que a distância entre os pontos é

$$d_0 = |x'_0 - x_0|, \quad (26)$$

consideravelmente pequena. Realizado a primeira iteração do mapa unidimensional, a distância entre os pontos correspondentes a cada órbita é dada por

$$d_1 = |x'_1 - x_1| = |F(x'_0) - F(x_0)|, \quad (27)$$

conforme a seguinte iteração

$$d_2 = |x'_2 - x_2| = |F^{[2]}(x'_1) - F^{[2]}(x_1)|. \quad (28)$$

Assim, realizando a n -ésima iteração

$$d_n = |x'_n - x_n| = |F^{[n]}(x'_0) - F^{[n]}(x_0)|. \quad (29)$$

Se o comportamento das órbitas tem característica caótica, a distância entre as trajetórias do mapa unidimensional da equação (25) diverge com a iteração n (HILBORN, 2000). Portanto, podemos reescrever a equação (24) como

$$d_n = d_0 e^{\lambda n}. \quad (30)$$

Substituindo a equação (26), conjuntamente com a equação (29), na expressão (30) é possível obter

$$|F^{[n]}(x'_0) - F^{[n]}(x_0)| = |x'_0 - x_0| e^{\lambda n}. \quad (31)$$

Manipulando a equação (31),

$$\begin{aligned} e^{\lambda n} &= \frac{|F^{[n]}(x'_0) - F^{[n]}(x_0)|}{|x'_0 - x_0|}, \\ \ln(e^{\lambda n}) &= \ln\left(\frac{|F^{[n]}(x'_0) - F^{[n]}(x_0)|}{|x'_0 - x_0|}\right), \\ \lambda &= \frac{1}{n} \ln\left(\frac{|F^{[n]}(x'_0) - F^{[n]}(x_0)|}{|x'_0 - x_0|}\right), \end{aligned} \quad (32)$$

onde $d_0 = x'_0 - x_0 \rightarrow x'_0 = d_0 + x_0$, assim

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{F^{[n]}(d_0 + x_0) - F^{[n]}(x_0)}{d_0}\right). \quad (33)$$

Aplicando os limites na equação (33), quando d_0 tende a zero e n tendendo ao infinito, obtemos

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\ln\left(\lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{F^{[n]}(d_0 + x_0) - F^{[n]}(x_0)}{d_0}\right) \right]. \quad (34)$$

A equação (34) indica a definição de derivada por Newton, e é a definição de derivada da função $F^{[n]}(x_0)$.

Dessa forma, a equação (34) é reescrita na forma

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left[\left(\frac{dF^{[n]}(x)}{dx} \right)_{x=x_0} \right]. \quad (35)$$

Derivando a equação (35), aplicada no ponto x_0 , pela regra da cadeia, (STEWART, 2019) pode ser escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \left(\frac{dF^{[n]}(x)}{dx} \right)_{x=x_0} &= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{dF(x_i)}{dx_i}, \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} F'(x_i), \end{aligned} \quad (36)$$

substituindo este resultado na equação (35) e recordando-se da seguinte propriedade matemática: o

logaritmo do produto é a soma dos logaritmos de cada um dos seus fatores. Logo, podemos desenvolver a expressão final para o expoente de Lyapunov dada por

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |F'(x_i)|. \quad (37)$$

A função F que define o mapa unidimensional discreto depende, em geral, de um parâmetro de controle. Assim, foi possível plotar as Figura 5 (a) e (b).

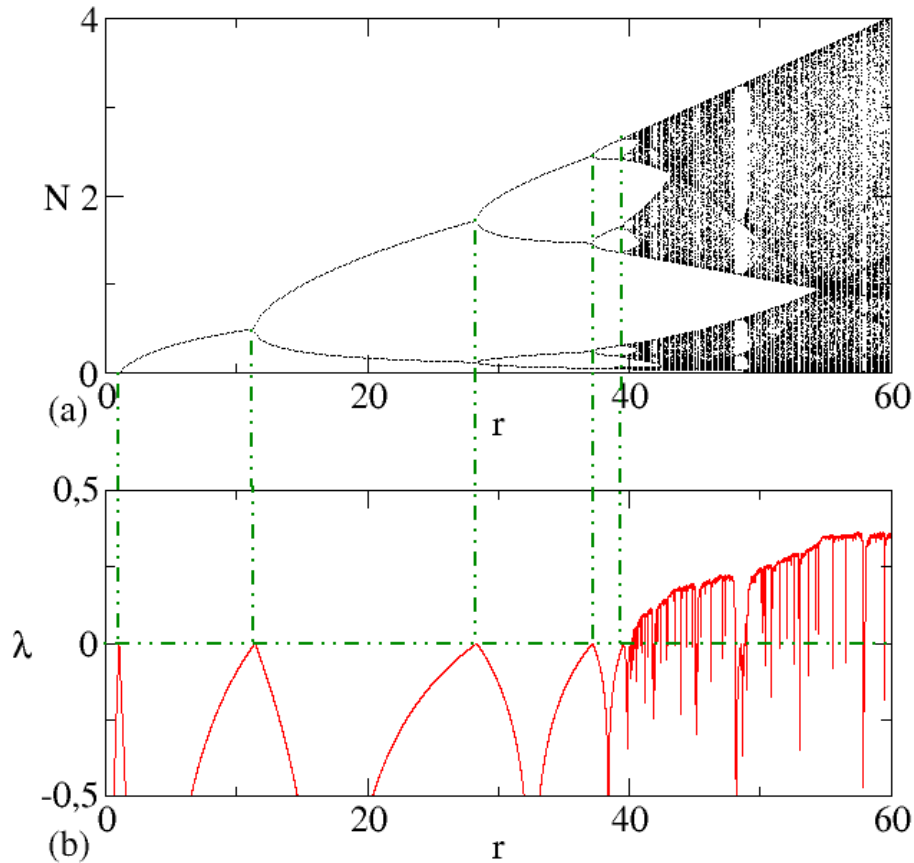


Figura 5 – (a) Diagrama de órbitas do mapa Hassell, $0 \leq r \leq 60$. (b) Expoente de Lyapunov λ , para caracterizar o caos, para esses casos foram usados $a = 1$ e $\gamma = 6$.

Observando a Figura 5 (a), notamos que ela segue o mesmo comportamento das Figura 1 e Figura 2 (a). A Figura 5 (b) indica que para o caso quando $r = 1$, em cor verde, $\lambda = 0$, é tocada pela curva em vermelho, isto implica que neste ponto ocorreu uma bifurcação, caracterizada como sendo transcítica, ao passo que quando comparamos a Figura 5 (a) e (b), notamos que conforme aumentamos o valor de r , acontece a incidência de mais bifurcações de duplo período, e o expoente de Lyapunov positivo, $\lambda > 0$, representa bifurcações transcítica mais recorrentes, até chegar ao ponto caótico do mapa, enquanto que o expoente negativo de Lyapunov, $\lambda < 0$, é estável e periódico (MENDONÇA, 2018). Por fim, nos pontos de bifurcação, os expoentes de Lyapunov têm valor zero, uma vez que, nesses pontos, as regiões não podem ser caracterizadas como caóticas.

3 APLICAÇÕES DE SISTEMAS CAÓTICOS EM TELECOMUNICAÇÕES

3.1 CIRCUITO RLD

Dentre os circuitos eletrônicos com comportamentos caóticos, apresentamos o circuito RLD, constituído de um indutor, um diodo, uma resistência e uma fonte senoidal de tensão alternada, ligados em série, conforme ilustra a Figura 6. Esse circuito eletrônico analógico emula o comportamento dinâmico de sistemas físicos e matemáticos (MARTINS, 2013).

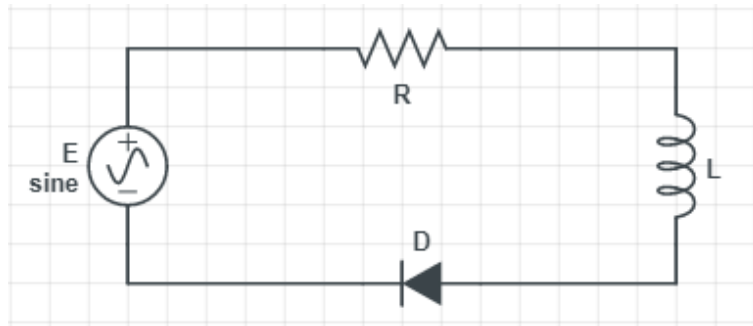


Figura 6 – Circuito eletrônico RLD.

Tal circuito tem apresentado uma dinâmica muito expressiva, quando forçado por uma tensão externa harmônica, podendo ser do tipo senoidal, e vem sendo objeto de estudo desde a década de 80. Esse é um circuito que possui apenas elementos passivos, são os que recebem energia do circuito e, portanto, a potência dissipada é negativa (BROPHY, 1976). Contudo, ainda existem estudos com variantes deste circuito em dinâmica não linear. Nesse âmbito, certas varreduras nos parâmetros de controle do circuito RLD podem fazer com que esse sistema oscile, eletronicamente, entre regiões periódicas e regiões caóticas, sendo o diodo elemento não linear responsável pelo surgimento do caos (HUNT, 1982). O cientista Paul S. Linsay foi um dos estudiosos, dessa área, a relatar a existência de dobramento de período e caos nesse sistema (LINSAY, 1981). Assim, ele conseguiu concluir, no final do seu artigo, que a simplicidade desse sistema permite testes simples das teorias de comportamento caótico.

Com isso, precisamos definir a principal peça para as não linearidade, o diodo cujo material é do tipo semicondutor (é uma classe especial de elementos cuja condutividade está entre a de um bom condutor e a de um isolante), sendo suas aplicações numerosas demais para serem citadas. Ele é criado pela simples junção de um material do tipo n (o elétron é chamado de portador majoritário e a lacuna de portador minoritário) com outro do tipo p (a lacuna é o portador majoritário e o elétron é o portador minoritário). Então, o diodo é nada mais que a união de um material com a maioria dos portadores elétrons a outro com a maioria dos portadores lacunas (BOYLESTAD; NASHELSKY, 2013). Além disso, podemos definir a resistência que é a oposição ao fluxo de carga através de um circuito elétrico, tendo as unidades em ohms e a indutância cuja função é estabelecer um forte campo magnético na unidade medida em henry (BOYLESTAD, 2012).

3.2 ANÁLISES QUE LEVAM AO CAOS NOS CIRCUITOS RLD

Utilizando um modelo de capacitância não linear para descrever o comportamento do diodo, podemos escrever as equações para esse sistema e estudar a sua dinâmica numericamente (BOYLESTAD; NASHELSKY, 2013). Além disso, consideremos uma descrição do diodo que leva em conta o efeito capacitivo como principal responsável pelo comportamento não linear. Tendo em vista que esse efeito descreve o diodo como uma capacitância não linear em paralelo com uma fonte de corrente, como pode ser ilustrado na Figura 7.

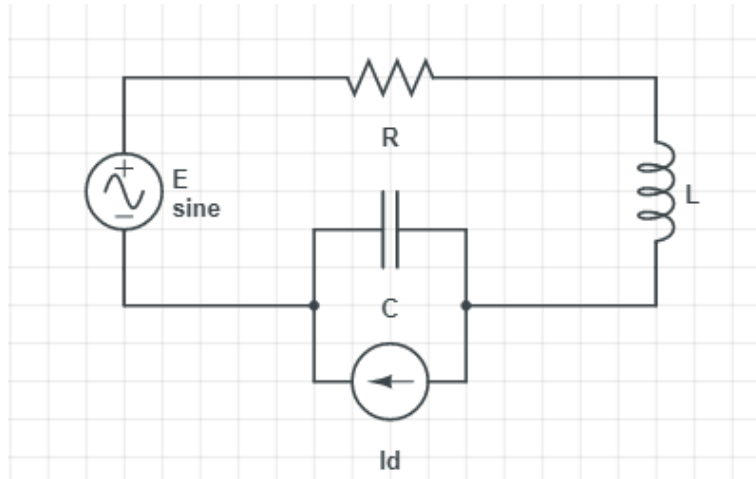


Figura 7 – Circuito RLD simplificando o diodo.

Nessa linha de raciocínio, é possível escrever as equações do circuito RLD da Figura 6, como sendo

$$E_0 \sin(\omega t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + V_D(t), \quad (1)$$

onde $V_D(t)$ é a tensão em cima do diodo, E_0 amplitude da fonte de tensão, t é o período da onda senoidal e ω é a frequência de oscilação do circuito (FÉDER, 2004). O termo $\sin(\omega t)$ enfatiza, também, a não linearidade do circuito RLD, e pode, eventualmente, ter evoluções caóticas.

Dessa forma, podemos escrever a corrente para o segundo modelo do circuito RLD, da Figura 7, então a corrente, i_D , é dada por

$$i_D = I_S \left(e^{\frac{V_D}{nV_T}} - 1 \right), \quad (2)$$

onde I_S é a corrente de saturação reversa, quando reversamente polarizado, a corrente no diodo tende a $-I_S$. V_D é a tensão de polarização direta aplicada ao diodo, n é um fator de idealidade – que é função das condições de operação e construção física (tem intervalo entre 1 e 2) – dependendo de uma grande variedade de fatores e controla a inclinação da curva i_D vs. V do diodo (BOYLESTAD; NASHELSKY, 2013). $V_T = \frac{K_B T}{q}$ é a tensão térmica, na qual $q = 1,6 \cdot 10^{-19} C$, $K_B = 1,38 \cdot 10^{-23} J/K$ e $T = (293 + C^\circ)K$. A equação (2) é conhecida como equação de Shockley, para as regiões de polarização direta e reversa (SMITH, 2014).

Da mesma forma, para a análise capacitiva, o capacitor possui uma capacitância não linear dada por:

$$C = \frac{dQ}{dV}. \quad (3)$$

Assim, o efeito capacitivo dos diodos é resultado da contribuição de dois termos, o primeiro é a capacitância de junção, resultado da presença das densidades de carga na zona de depleção. Esse termo é dominante quando o diodo está reversamente polarizado e depende da tensão aplicada como descrito na seguinte equação

$$C_j = C_{j0} \frac{1}{\sqrt{1 - V_D/V_j}}, \quad (4)$$

onde C_{j0} é a capacitância da junção quando não há tensão externa aplicada e V_j é o potencial da junção (ONIAS, 2012).

O segundo termo que contribui para a capacitância do diodo é a capacitância de difusão, essa decorre da densidade de portadores injetados através da junção, dada por

$$C_{df} = C_{df0} e^{\frac{V_D}{nV_T}}. \quad (5)$$

onde C_{df0} é a capacitância da difusão quando não há tensão externa aplicada. Com isso, a capacitância do diodo, devido às duas contribuições (SMITH, 2014) é

$$C = C_{df} + C_j. \quad (6)$$

Utilizando esse modelo para o diodo, a lei das malhas de Kirchhoff e a lei dos nós (BOYLESTAD, 2012), podemos então escrever as seguintes equações que descrevem o circuito RLD em série (ONIAS, 2012):

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \frac{E - RI - V_D}{L}, \\ \dot{V}_D &= \frac{I - i_D}{C}, \\ \dot{\theta} &= \omega, \end{aligned} \quad (7)$$

onde a última parte da equação (7) é escrita para tornar o sistema autônomo, sendo obtida a partir da equação para a fase da tensão $\theta = \omega t$ (BOYLESTAD, 2012).

Então, esse circuito RLD autônomo atende a três critérios para exibir um comportamento caótico; ou seja, ele deve conter pelo menos um elemento não linear, ao menos um resistor ativo localmente e

três ou mais elementos de armazenamento de energia (RAMOS, 2019).

No circuito RLD, portanto, o diodo é substituído por um capacitor e uma fonte de corrente, o que gera uma variação não linear da capacitância em função da tensão aplicada, o que pode resultar no aparecimento do caos. Como a evolução de um sistema físico depende de um, ou mais parâmetros, denominados de parâmetros de controle e o comportamento dinâmico desse sistema pode ser bastante diferente, se os parâmetros de controle forem mudados. Assim, no caso do circuito RLD, tanto a frequência quanto a tensão aplicada podem ser considerados parâmetros de controle. Por exemplo, quando um parâmetro de controle μ é variado, podem aparecer novos padrões de comportamento, ou sequências de novos estados para o sistema. Neste caso, diz-se que ocorreram bifurcações e μ_k é o valor do parâmetro de controle, para o qual ocorre cada bifurcação (CARLIN et al., 2005).

O tipo mais comum de bifurcação, no circuito RLD, é a chamada bifurcação de duplicação de período. Nesse caso, uma solução estável do sistema perde a estabilidade com a variação de um parâmetro de controle e aparece, ao mesmo tempo, uma nova solução estável com o dobro do período da solução anterior. Se o parâmetro de controle for variado continuamente, esse processo pode se repetir indefinidamente levando a soluções com período infinito, o que geralmente leva ao caos (PRADO, 2017). Chamando de μ_K o valor de μ na k -ésima bifurcação, o período da solução imediatamente após a bifurcação será $2k$. Os estados assintóticos do sistema são geralmente denominados de atratores e dizemos que o atrator sofre a duplicação de período. Geralmente, conforme varia-se o parâmetro de controle, regiões com soluções caóticas podem ser observadas entre regiões com atratores estáveis, que usualmente são chamadas de janelas de caos (BILDERLING; RAMONEDA, 2004). Pode-se verificar que os valores de μ_k , para os quais as bifurcações ocorrem, obedecem à seguinte lei de universalidade

$$\begin{aligned}\sigma &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\mu_K - \mu_{k-1}}{\mu_{k+1} - \mu_k} \right), \\ \sigma &\approx 4,6692.\end{aligned}\tag{8}$$

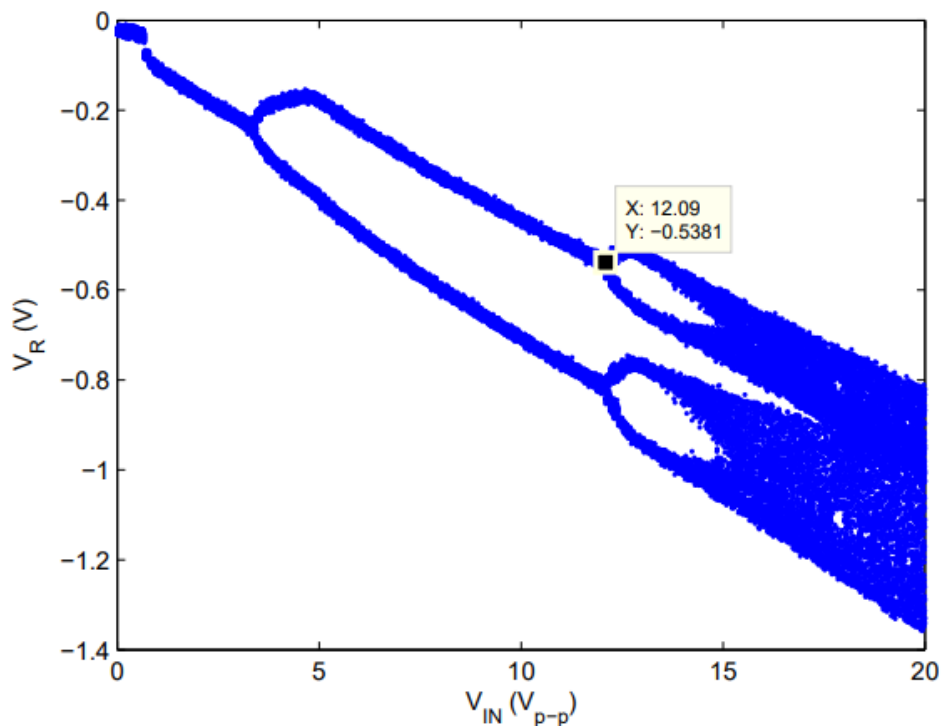
Assim, o diagrama de bifurcações pode ser construído acompanhando-se a variação nas amplitudes dos picos presentes na resposta do diodo em função da frequência. Dessa forma, no diagrama de bifurcações no circuito RLD, pode se observar as janelas de caos, com as frequências correspondentes às bifurcações. Então, o número de Feigenbaum pode ser estimado para comparação com o valor conhecido, sendo ($\sigma \approx 4,67$); entretanto, é preciso ressaltar que o número de Feigenbaum é o limite obtido para essa razão após se observar um grande número de bifurcações (COSTA, 2018). O método utilizado para determinar a constante de Feigenbaum permite determinar essa constante com boa precisão, além disso, é possível constatar a validade dessa constante para mais um mapeamento, além do caso do mapa Hassell.

Uma outra descrição física de como o circuito RLD leva à duplicação do período é descrita quando o circuito opera na frequência ressonante, uma certa quantidade de corrente reversa irá fluir através do diodo em cada ciclo reverso de polarização, devido ao tempo de recuperação finito do diodo. Se a corrente de pico " I_m " é grande no ciclo de condução, o diodo desligará com um certo atraso, devido à recuperação do tempo finita e assim permitirá que uma corrente flua, uniformemente, no ciclo de polarização reversa. Esta corrente reversa, por sua vez, impedirá que o diodo, instantaneamente, ligue

no ciclo de polarização direta, ligando com um atraso. Isso manterá a corrente de pico à frente menor do que no ciclo de polarização anterior, portanto, dando origem a dois picos distintos da corrente para a frente, observando-se que alonga dois ciclos do sinal de condução neste processo. Isso é o que identificamos como uma bifurcação que duplica o período, quando o valor de pico da tensão da unidade é aumentado, a bifurcação para o período quadruplo ocorre, seguida por bifurcações superiores e, eventualmente, o caos (ALAM; ANWAR, 2010).

Caos e bifurcações são geralmente observados mudando apenas um parâmetro (mantendo todos os outros constante) e notando a resposta do sistema. Em nosso caso, o sistema é um circuito RLD, no qual corrente e tensão serão feitas para oscilar usando um sinal AC. O sinal é controlado por meio de dois parâmetros, sendo frequência e amplitude. Portanto, temos a opção de manter um deles constante e mudando o outro. Neste caso, a frequência pode ser mantida constante, enquanto a amplitude é variada, assim, comprovamos a existência de caos no circuito RLD, conforme o diagrama de bifurcação mostrado na Figura 8. Então, essa figura baseou-se por amostragem de amplitudes de pico do sinal AC de tensão no circuito. No primeiro período, todos os picos têm a mesma amplitude, no segundo período, são picos de duas amplitudes diferentes, no quarto período, há picos de quatro amplitudes diferentes presentes e vice versa. Portanto, na Figura 8, um parâmetro (neste caso, a amplitude, V_{IN}) é variado ao longo de um período de tempo e os picos são amostrados, assim como as amplitudes de pico são amostradas de V_R .

Figura 8 – Diagrama de bifurcação do circuito experimental RLD



fonte: Adaptado (ALAM; LATIF, 2015)

4 COMENTÁRIOS FINAIS

Ao longo desse trabalho, apresentamos conceitos básicos da teoria do caos e suas origens presentes nos sistemas dinâmicos, para fazermos estudos no mapa Hassell e no circuito RLD. Com essas definições, partimos para a consideração do mapa Hassell, caracterizando seus conceitos mais importante desse tipo de mapa. Assim, com o mapa de Hassell em mãos, consideremos pontos fixos no mapa, para que, dessa forma, fosse possível analisar o seu comportamento através do diagrama de órbitas, tendo em vista os parâmetros de controle recursivo, no caso, modificamos γ , em relação ao equacionamento do mapa de Hassell, de forma simples no valor de 2 a 8, e pudemos observar através da Figura 1, da seção 2.1, que quando alteramos γ , para valores maiores, e fixamos uma condição inicial pequena, notamos que o caos é antecipado no mapa, uma vez que esse parâmetro como já definido, ele garante a força populacional de um sistema.

Nesse sentido, se fossemos aumentando o valor do parâmetro γ , pudemos deduzir que cada vez mais o aparecimento do caos iria anteceder, é claro, deixando fixos tanto a condição inicial quanto o tamanho da população nesse caso, senão, poderíamos ver outros tipos de comportamentos presentes. Notamos, também, que as bifurcações de duplicação de período fica mais claro quando γ cresce em valor, porém visualmente esse mesma duplicação tende a ser menos observável, deixando mais evidente a presença do caos no diagrama de órbitas no mapa Hassell.

Além disso, ainda analisando o comportamento da equação do mapa de Hassell, foi possível verificarmos, conforme a Figura 2, da seção 2.1, que modificando o parâmetro γ , para os mesmos valores da Figura 1, ocorre a amplificação para melhor entender o fenômeno; assim notamos que aconteceu uma bifurcação no mesmo valor do parâmetro recursivo r , nesse caso, chamado de crítico, para o qual $r_c = 1$. Esse valor, como o nome já sugerido, transcorre uma bifurcação transcritical, que apresenta independência para seu início do valor de γ . Em outras palavras, mesmo que se fossemos alterar para outros valores de γ , presenciaremos o fator r_c crítico ocorrendo em 1. Então, essa bifurcação tem o comportamento em que esse ponto fixo existe, no caso r_c , para qual todos os valores de um parâmetro nunca é alterado, nesse caso γ . No entanto, tal ponto fixo troca sua estabilidade com outro ponto fixo, conforme o parâmetro γ é variado. Ou seja, antes e depois da bifurcação, existe um ponto fixo instável e um ponto fixo estável, no entanto, sua estabilidade é trocada quando eles colidem.

Estendemos nossos estudos, investigando o comportamento da variável dinâmica N na bifurcação transcritical, aproximando do ponto fixo $N_1^* = 0$, para compreendermos melhor o decaimento das órbitas. Dessa forma, consideramos o parâmetro da distância de bifurcação μ fixo em 0, assim como a condição inicial $N_0 = 10^{-2}$ e $a = 1$, destacando que o valor de γ foi analisado para os mesmos valores dos anteriores. Nessa aproximação, conforme a Figura 3, conseguimos utilizar a lei de potência, para esse decaimento no ponto fixo, e observamos pela equação de potência, os expoentes β foram se aproximando para a convergência do valor $\beta \approx -1$ na bifurcação transcritical. Então, nessa Figura 3 evidenciou à medida que o parâmetro de controle γ cresce, há um decaimento mais acentuado e o valor do parâmetro A tende a ficar cada vez menor, ou seja, as curvas da aproximação decaem em uma lei de potência, conforme a faixa do número de iterações n no mapa Hassell. Agora, quando

consideramos o parâmetro da distância de bifurcação como $\mu = 1 - r_c < 1$, com $r_c \leq r$, percebemos a evolução do ponto fixo deu-se pela lei de potência, da equação (9), que fornece relação com o tempo de relaxação, através do qual foi possível plotar a Figura 4, e analisamos que, mesmo mudando os valores do parâmetro γ , utilizando um conjunto de condições iniciais, esse ajuste na lei de potência fornece uma aproximação para o expoente no valor de convergência $\delta = -1$ na bifurcação transcítica, ou seja, o expoente de relaxação também independe do parâmetro γ .

Além das discussões da convergência da órbita no ponto fixo, de forma numérica e gráfica, também definimos a aproximação analítica para o caso da lei de potência tanto do expoente crítico β quanto do expoente de relaxação δ . Portanto, depois de ter fornecido todas as ferramentas matemáticas e suas simplificações necessárias, para ambos, levando em consideração os mesmos fatores usados na análise gráfica e levando em consideração as diferentes aproximações para alcançar o equilíbrio, no mapa Hassell; notamos que seus valores são os mesmos obtidos graficamente. Esse fato ocorre na bifurcação transcítica, ali existe um ponto fixo para todos os valores de um parâmetro e que apresenta independência para o valor de γ .

Em continuidade, através dos expoentes de Lyapunov e de suas definições matemáticas, também, pudemos fazer uma análise da presença do caos no mapa Hassell. Nessa análise, destacamos que o expoente característico de Lyapunov para o caso positivo, ou $\lambda > 0$, ocorre bifurcações transcítica mais recorrentes, até chegar ao ponto caótico do mapa, mais especificamente, como pôde ser visto na Figura 5, próximo ao valor de $r > 40$, após esse valor, a análise visual fica impossível de distinguir, devido ao aumento da ordem do caos. Conseguimos observar, também, que para $\lambda = 0$ acontece, nesse valor, uma bifurcação de duplo período, sendo notado esse comportamento através da reta pontilhada verde, e conforme r cresce, essa bifurcação se torna mais recorrente. Agora, para o caso quando $\lambda < 0$, notamos não só pela investigação matemática, bem como pela análise gráfica, que o expoente negativo de Lyapunov se comporta de forma estável e periódica, conforme altera-se o valor do parâmetro recursivo r , evidenciando, claramente, que o expoente de Lyapunov λ tem dependência do parâmetro de controle no mapa Hassell.

Posteriormente, nas aplicações de telecomunicações, tentamos fazer uma ponte entre a investigação do caos presente no mapa de Hassell e no circuito elétrico do tipo RLD. Como já dito, escolhemos esse circuito, pois ele apresenta uma grande dinâmica rica que já tem sido estudada desde o século XX por grandes cientistas de sistemas dinâmicos e caos. Então, a partir das definições e conceitos básicos introduzidos do circuito RLD, em série, pudemos concluir que o principal elemento que proporciona a presença do caos é, claramente, o elemento passivo diodo. Feito essa identificação, analisamos pela qual forma que isso acontece, nesse circuito simples com elementos passivos; através do equacionamento do circuito RLD, percebemos que o diodo, embora seja considerado um elemento simples, possui um comportamento consideravelmente complexo, uma vez que ele pode ser interpretado de várias formas. Nesse caso, optamos por um capacitor em paralelo com uma fonte de corrente, sendo esse capacitor com duas contribuições, em um lado, a capacitância de junção, por outro lado, a capacitância de difusão. Dessa forma, o capacitor funcionou como um elemento não linear do sistema em função da tensão aplicada, o que, conseqüentemente, resultou no aparecimento do caos no circuito RLD.

Além dessa investigação, conseguimos perceber, por meio do equacionamento das EDOS do

circuito RLD, que outro elemento possível de levar a existência do aparecimento de caos é a tensão senoidal, tendo em vista o termo senoidal representando a não linearidade. A partir desse equacionamento desenvolvido, recaímos em um sistema de equações autônomas, por sua vez, que apresentou a progressão para o caos no circuito RLD.

Depois disso, fizemos a caracterização e identificamos os parâmetros de controle presentes no circuito RLD, como sendo a tensão e a frequência aplicadas, para que assim fosse possível desenvolver, mais especificamente, alguns preceitos teóricos para a definição da constante de Feigenbaum, responsável pelo limite obtido para a razão de cada intervalo de bifurcação, entre cada duplicação de período após se observar um grande número de bifurcações. Dessa forma, pelo diagrama de bifurcações no circuito RLD, pode se observar as janelas de caos, com as frequências correspondentes às bifurcações, fazendo com que o número de Feigenbaum pôde ser estimado para comparação com o valor conhecido, no mapa Hassell.

Finalmente, fizemos uma última investigação do circuito RLD, que leva ele a ter comportamento caótico, que foi descrita por meio de uma certa quantidade de corrente reversa que flui através do diodo em cada ciclo reverso de polarização, devido ao tempo de recuperação reversa do diodo. Desse modo, percebemos que para uma dada grande corrente de pico no ciclo de condução, o diodo possui um dado atraso, devido a esse tempo de recuperação finita, fazendo com que a corrente flua no ciclo de polarização reversa. E essa corrente reversa, impediu do diodo ligar, instantaneamente, no ciclo de polarização direta, ligando com um atraso. Isso proporcionou que a corrente de pico tendesse a ficar frente menor do que no ciclo de polarização anterior. Portanto, deu-se origem a dois picos distintos da corrente para a frente, observando-se que demorou dois ciclos do sinal de condução no processo. Com isso foi possível identificar uma bifurcação de duplo período, quando o valor de pico da tensão aumentou, a bifurcação para o próximo período sucedeu, seguidamente por bifurcações superiores e, assim, o caos.

Então, foi possível vislumbrar esse comportamento, de acordo com a Figura 8, por meio de uma análise experimental da implementação do circuito RLD, encontrado mais a fundo em (ALAM; LATIF, 2015), notamos que o caos esteve presente, no mapa logístico, dado pela implementação do parâmetro da amplitude V_{IN} , variando-se ao longo de um período de tempo, mantendo-se constante a frequência de oscilação do circuito RLD, e os picos foram amostrados, assim como as amplitudes de pico amostradas de V_R e assim foram plotadas. Para trabalhos futuros, seria interessante implementarmos, no laboratório, outros tipos de circuitos RLD, por exemplo em paralelo, para apreciarmos a presença da teoria do caos na prática.

REFERÊNCIAS

- AGUIAR, M. A. M. de. Caos em sistemas clássicos conservativos. **Revista brasileira de ensino de física**, Instituto de física Gleb Wataghin, v. 16, n. 18, p. 1–4, 1994.
- ALAM, J.; ANWAR, S. **Chasing Chaos with an RL-Diode Circuit**. 2010. Disponível em: <https://physlab.org/wp-content/uploads/2016/04/Chasing_chaos_revised.pdf>.
- ALAM, M. S. A. J.; LATIF, U. A. Non-linear dynamics with an rl-diode circuit. **LUMS School of Science and Engineering**, 2015.
- ALLIGOOD, T. S. e. J. Y. T. K. **Chaos: An Introduction to Dynamical Systems**. New York, NY - Estados Unidos: Oxford University Prees, 1997.
- BARROS, W. L. de M.; RAYZARO, O. S. Introdução ao sistema dinâmico discreto. **ENEPEX**, A internacionalização da universidade e o fortalecimento do ensino, v. 12, n. 9, 2018.
- BASCOMPTE, J.; SOLÉ, R. V. Spatially induced bifurcations in siglespecies population dynamics. **Journal of Animal Ecology**, British Ecological Society, v. 63, n. 2, p. 256–264, 1994.
- BILDERLING, C. V.; RAMONEDA, E. H. Caos en un circuito r-l-diodo. **Dpto. de Física. FCEYN. UBA**, Buenos Aires, 2004.
- BOLLT, E. M. **Chaos Control Theory and applications**. Potsdam, Brandemburgo - Alemanha: Springer, 2003.
- BOYLESTAD, R. L. **Introdução à análise de circuitos**. São Paulo, SP - Brasil: Pearson, 2012.
- BOYLESTAD, R. L.; NASHELSKY, L. **Dispositivos Eletrônicos e Teoria de Circuitos**. São Paulo, SP - Brasil: Person Education, 2013.
- BROPHY, J. J. **Basic Electronics For Scientists**. Nova Iorque, NY - Estados Unidos: McGraw-Hill, 1976.
- CABRAL, E. L.; DRIEMEIER, L. Sistemas dinâmicos i. **Escola Politécnica**, Universidade de São Paulo, 2014.
- CARLIN, N. et al. Chaotic behavior in a non-linear rlc circuit. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Universidade de São Paulo, v. 27, n. 2, 2005.
- COSTA, J. D. V. H. e. F. H. G. Fábio H. da. Determinação da constante de feigenbaum via mapa hassell. **Jornada Científica e Tecnológica**, Simpósio da Pós Graduação, v. 10, n. 7, p. 2319–0124, 2018.
- DEVANEY, R. L. **A First Course In Chaotic Dynamical Systems Theory And Experiment (Studies in Nonlinearity)**. Boston, Massachusetts - Estados Unidos: Westview Press, 1992.
- FERREIRA, P. G. D. **Um Estudo Exploratório sobre Diferentes Abordagens para as Soluções da EDO**. Macapá, Amapá - Brasil: [s.n.], 2018.
- FÉDER, R. **Dinâmica não linear e caos em retificadores monofásicos de meia onda carga RL**. Curitiba, PR, - Brasil: [s.n.], 2004.
- FÍSICA, P. luz da. **Dinâmica não linear e caos**. 2010. Disponível em: <<http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo1/topico2.php>>.

- GALLAS, J. A. C. Structure of the parameter space of the h  non map. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 70, n. 18, p. 2714, 1993.
- HILBORN, R. C. **Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers**. Oxford, Inglaterra - Reino Unido: Oxford University Press, 2000.
- HUNT, E. R. Comment on a driven nonlinear oscillator. **Physics Review Letters**, American Physical Society, v. 49, n. 14, p. 1054, 1982.
- HUNTTIEN-YIEN, B. R.; KENNEDY, L. A.; NUSSE, H. E. **A Teoria dos Atratores Caóticos**. New York, NY - Estados Unidos: Springer, 2004.
- JESUS, E. A. de; SILVA, T. T. da; D'AFONSECA, L. A. **Sistemas Dinâmicos Discretos**. São João del-Rei, Minas Gerais - Brasil: [s.n.], 2016.
- LEONEL, E. D. **Invariância de Escala em Sistemas Dinâmicos Não Lineares**. São Paulo, SP - Brasil: Blucher, 2019.
- LI, T. Y.; YORKE, J. A. Period three implies chaos. **The American Mathematical Monthly**, Taylor e Francis Group, v. 82, n. 10, p. 985–992, 1975.
- LICHTENBERG, A.; LIEBERMAN, M. **Regular and Chaotic Dynamics**. New York, NY - Estados Unidos: Applied Mathematical Sciences, 1992.
- LINSAY, P. S. Period doubling and chaotic behavior in a driven anharmonic oscillator. **Physics Review Letters**, American Physical Society, v. 47, n. 19, p. 1394–1352, 1981.
- LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of the Atmospheric Sciences**, american meteorological society, v. 20, n. 2, p. 130–141, 1963.
- MARSDEN, J. E.; MCCracken, M. **The Hopf Bifurcation and Its Applications**. New York, NY - Estados Unidos: Springer-Verlag, 1976.
- MARTINS, A. M. B. e S. A. M. **Bifurca  o e caos em circuitos eletrônicos: simula  o e experimento**. São João del-Rei, Minas Gerais - Brasil: [s.n.], 2013.
- MARTINS, F. A. C.; ZANOTELLO, M. Mecânica celeste e a teoria dos sistemas dinâmicos: uma revisão do problema circular restrito de três corpos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Scielo, v. 40, n. 2, p. 45, 2017.
- MAY, R. M. Biological populations with nonoverlapping generations: Stable points, stable cycles, and chaos. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 186, n. 4164, p. 645–647, 1974.
- MENDONÇA, H. M. J. de. **Propriedade de escala e cascatas de bifurca  es em mapas unidimensionais discretos**. Rio Claro, SP, - Brasil: [s.n.], 2018.
- NAHIAN, S. A. A.; HOSEN, Z.; AHMED, P. Um estudo elementar de comportamentos caóticos em mapas 1-d. **Journal of Applied Mathematics and Physics**, Scirp Org, v. 7, n. 5, 1999.
- OESTREICHER, C. **A history of chaos theory**. 2007. Disponível em: <<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3202497/>>.
- ONIAS, H. H. dos S. **Bifurca  es dinâmicas em circuitos eletrônicos**. Recife, Pernambuco - Brasil: [s.n.], 2012.

POSCHEL, J. **A Lecture on the Classical KAM Theorem**. 2020. Disponível em: <https://courses.seas.harvard.edu/climate/eli/Courses/APM203/2003fall/Poschel_ClassicalKAM.pdf>.

PRADO, N. F.-F. e Carmen P. Cintra do. **Caos uma introdução**. São Paulo, SP - Brasil: Edgar Bluncher Ltda, 2017.

RAMOS, L. C. N. **Propriedades dinâmicas e leis de escala em mapeamentos unidimensionais discretos: aplicações em circuitos**. São João da Boa Vista, SP, - Brasil: [s.n.], 2019.

SIMÕES, C. A. E. **Equações Diferenciais na Física**. Évora, Alentejo - Portugal: [s.n.], 2014.

SMITH, S. **Microelectronic Circuits**. Oxônia, IN - Reino Unido: Oxford Series, 2014.

STEWART, J. **Cálculo**. São Paulo, SP - Brasil: Cengage Learning, 2019.

TEIXEIRA, R. M. et al. Convergence towards asymptotic state in 1-d mappings: A scaling investigation. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 379, p. 1246–1250, 2015.

THUNBERG, H. Periodicity versus chaos in one-dimensional dynamics. **Society For Industrial And Applied Mathematics**, SIAM REVIEW, v. 43, n. 1, p. 3–30, 2001.

APÊNDICE A – CONCEITOS BÁSICOS DE LIMITES

Tendo em vista, ao decorrer desse TCC, usamos as propriedades dos limites quando queremos definir as características do expoente de Lyapunov e o número de Feigenbaum no circuito RLD, vamos voltar nossa atenção para os limites em geral, definindo-os de maneira mais formal, e daremos exemplos simples de como calculá-los, para facilitar a compreensão desse trabalho.

Suponhamos que $f(x)$ seja definido quando está próximo ao número, por exemplo, b . (Isso significa que f é definido em algum intervalo aberto que contenha b , exceto possivelmente no próprio b). Então escrevemos e dizemos “o limite de f , quando x tende a b , é igual a L ” se pudermos tornar os valores de arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de b (por ambos os lados de b), mas não igual a b , assim

$$L = \lim_{x \rightarrow b} f(x). \quad (1)$$

Exemplo : Determine o valor da função $f(x) = \frac{e^x + x}{x^2 - 2e^x}$, quando x tende a $b = 0$.

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow b} f(x), \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x}{x^2 - 2e^x}, \\ &= \frac{e^0 + 0}{0^2 - 2e^0}, \\ &= \frac{1 + 0}{0 - 2}, \\ L &= \frac{-1}{2} = -0,5. \end{aligned} \quad (2)$$

Exemplo : Calcule $\lim_{x \rightarrow b} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x + 4\cos(x)}$, para $b = 0$.

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow b} \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x + 4\cos(x)}, \\ &= \frac{0^3 + 0^2 + 0 + 1}{0 + 4\cos(0)}, \\ &= \frac{1}{4}, \\ L &= 0,25. \end{aligned} \quad (3)$$

APÊNDICE B – CONCEITOS BÁSICOS DE DERIVADAS

Utilizamos, além do limite, algumas propriedades de derivadas na introdução dos conceitos e no desenvolvimento do TCC. Desse feito, faremos uma breve descrição e definição de derivadas, a fim de facilitar e deixar mais claro o entendimento das passagens desse TCC.

A derivada de uma função f em um número, por exemplo b , denotada por $f'(b)$, é

$$f'(b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}, \quad (1)$$

desde que esse limite exista.

Exemplo : Calcule a derivada da função $f(x) = x^2 - 2x$, para b genérico.

$$\begin{aligned} f'(b) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}, \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(b+h)^2 - 2(b+h) - (b^2 - 2b)}{h}, \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(b^2 + 2hb + h^2) - 2(b+h) - (b^2 - 2b)}{h}, \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hb + h^2 - 2h}{h}, \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2b + h - 2}{1}, \\ &= \frac{2b + 0 - 2}{1}, \\ f'(b) &= 2b - 2 = 2(b - 1). \end{aligned} \quad (2)$$

Se usarmos a notação tradicional para indicar que a variável independente é x e a variável dependente é y , então algumas notações alternativas para a derivada são as seguintes:

$$f'(x) = y' = Df(x) = D_x f(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}. \quad (3)$$

Os símbolos $Df(x)$ e $\frac{dy}{dx}$ são chamados de operadores diferenciais, pois indicam a operação de diferenciação, que é o processo de cálculo de uma derivada.

APÊNDICE C – CONCEITOS BÁSICOS DE INTEGRAIS

Tanto os limites quanto as derivadas vistas ao longo desse TCC, usamos também as propriedades das integrais quando definimos as características das convergências das órbitas. Iremos definir as integrais de maneira mais formal, e daremos exemplos simples de como obtê-las.

Se $f(x)$ é uma função contínua definida em $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais $\Delta x = (b - a)n^{-1}$. Sejam $x_0(= a), x_1, x_2, x_3, \dots, x_n(= b)$ as extremidades desses subintervalos, e sejam $x_1^*, \dots, x_n^*$ pontos amostrais arbitrários nesses subintervalos, de forma que x_j^* esteja no j -ésimo subintervalo $[x_{j-1}, x_j]$. Então, a integral definida de f de a até b é

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(x_j^*)\Delta x, \quad (1)$$

desde que o limite exista e dê o mesmo valor para todas as possíveis escolhas de pontos amostrais. Se ele existir, dizemos que f é integrável em $[a, b]$.

Exemplo : Determine a integral da função $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$, para o intervalo $[2, -2]$.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_2^{-2} (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)dx, \\ &= x + \frac{2x^2}{2} + \frac{3x^3}{3} + \frac{4x^4}{4} \Big|_2^{-2}, \\ &= x + x^2 + x^3 + x^4 \Big|_2^{-2}, \\ &= (-2 - 2) + [(-2)^2 - 2^2] + [(-2)^3 - (2)^3] + [(-2)^4 - (2)^4], \\ &= (-4) + [0] + [-16] + [0], \\ \int_a^b f(x)dx &= -20. \end{aligned} \quad (2)$$

Exemplo : Calcule a integral da função $f(x) = 2e^{(2-2x)}$, para o intervalo $[0, 1]$.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_0^1 [2e^{(2-2x)}]dx, \\ &= \frac{-1}{2} e^{(2-2x)} * 2 \Big|_0^1, \\ &= -e^{(2-2x)} \Big|_0^1, \\ &= -e^{(2-2)} + e^{(2-0)}, \\ &= -e^{(0)} + e^{(2-0)}, \\ \int_a^b f(x)dx &= e^2 - 1. \end{aligned} \quad (3)$$

APÊNDICE D – CONCEITOS BÁSICOS DE EDOS

Além das integrais usadas no TCC, utilizamos algumas propriedades das equações diferenciais ordinárias (EDOS), quando definimos os conceitos introdutórios e partes dos equacionamentos dos circuitos RLD. Definiremos as EDOS de forma formal e simples, e daremos exemplos de aplicações simples, para um melhor entendimento.

Assim, uma EDO é uma equação diferencial ordinária que contém uma, ou várias derivadas da função incógnita. As EDOS são equações que possuem apenas derivadas em relação a uma única variável. Existem diferentes notações para derivadas. Livros com diferentes interesses, usam diferentes notações. Às vezes, a escolha de uma determinada notação facilitará a resolução da EDO, e podem ser escritas como

$$\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x} \dots \quad (1)$$

$$x', x'', x''' \dots \quad (2)$$

$$\frac{dx}{dy}, \frac{d^2x}{dy^2}, \frac{d^3x}{dy^3} \dots \quad (3)$$

Exemplo : Algumas EDOS mais usuais:

$$\dot{x} = \frac{dy}{dt}, \quad (4)$$

$$\frac{dP}{dt} = KP, \quad (5)$$

$$m \frac{d^2x}{dx^2} = -kx, \quad (6)$$

$$y' = xy. \quad (7)$$

Além disso, podemos citar as aplicações mais recorrentes de EDOS, que são em engenharia, física, matemática, economia, circuitos elétricos, mecânica dos fluidos, modelos biológicos, entre outras.