

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JULIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**Controle de Vibrações em Estruturas Flexíveis
utilizando Observador de Estados**

Autor: Daniel Celso Daltin

Orientador: Prof. Dr. Tit. José Manoel Balthazar

Co-Orientador: Prof. Dr. Átila Madureira Bueno

Bauru, 2017

SP, Brasil

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JULIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

Controle de Vibrações em Estruturas Flexíveis utilizando Observador de Estados

Autor: Daniel Celso Daltin

Orientador: Prof. Dr. Tit. José Manoel Balthazar

Co-Orientador: Prof. Dr. Átila Madureira Bueno

Curso: Engenharia Mecânica

Área de concentração: Projetos Mecânicos

Dissertação apresentada no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, como requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Bauru, 2017

SP, Brasil

Daltin, Daniel Celso.

Controle de vibrações em estruturas flexíveis
utilizando observador de estados / Daniel Celso
Daltin, 2017

78 f. : il.

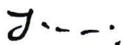
Orientador: José Manoel Balthazar
Co-orientador: Átila Madureira Bueno

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual
Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2017

1. Controle de vibração. 2. Estruturas flexíveis.
3. Observador de estados. I. Universidade Estadual
Paulista. Faculdade de Engenharia. II. Título.

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE DANIEL CELSO DALTIM, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, DA FACULDADE DE ENGENHARIA - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 12 dias do mês de maio do ano de 2017, às 16:00 horas, no(a) Anfiteatro da Seção Técnica de Pós-graduação da FEB, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. JOSE MANOEL BALTHAZAR - Orientador(a) do(a) Departamento de Engenharia Mecânica - docente voluntário / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP , Prof. Dr. PAULO JOSE AMARAL SERNI do(a) Engenharia de Controle e Automação / Instituto de Ciência e Tecnologia/UNESP/Sorocaba, Prof. Dr. ANDRE LUIZ ANDREOLI do(a) Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Bauru/UNESP, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de DANIEL CELSO DALTIM, intitulada **CONTROLE DE VIBRAÇÕES EM ESTRUTURAS FLEXÍVEIS UTILIZANDO OBSERVADOR DE ESTADOS**. Após a exposição, o discente foi arguido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO . Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.



Prof. Dr. JOSE MANOEL BALTHAZAR



Prof. Dr. PAULO JOSE AMARAL SERNI



Prof. Dr. ANDRE LUIZ ANDREOLI

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho à minha mãe Augusta Ferreira Daltin, aos meus irmãos e amigos, que sempre me apoiaram desde o início até o término do mestrado.

Dedico também esse trabalho a todos os Professores do Curso Pós-Graduação Engenharia Mecânica, pelo incentivo, dedicação e profissionalismo.

AGRADECIMENTOS

Esse trabalho não seria possível sem a ajuda de DEUS, por ser à base das minhas conquistas.

Ao meu Orientador Professor Doutor José Manoel Balthazar pela paciência, oportunidade por confiar e me aceitar como seu orientado e ter implantado em mim a semente pelo gosto à pesquisa e por toda atenção para que este trabalho se concretizasse e meu Co-Orientador Professor Doutor Átila Madureira Bueno pela dedicação em suas orientações prestadas na elaboração deste trabalho, pelos conhecimentos transmitidos, me incentivando e colaborando no desenvolvimento desta pesquisa.

Em especial minha Mãe que me acompanhou sem que deixasse em algum momento de omitir sua ajuda e preocupação com as dificuldades e obstáculos que tive de enfrentar durante o curso.

Aos meus amigos Alexandre de Castro Alves, Cilene de Oliveira, Fábio Julio Tavares, Fabrício Augusto Biazzon, Jefferson Aparecido Dias, Rodrigo Tumolin Rocha, e aos amigos de laboratório Unesp-Sorocaba que me acompanharam até a conclusão do mestrado.

Aos Professores, pela dedicação em suas orientações prestadas na elaboração deste trabalho, que em todo tempo me apoiaram e motivaram para a minha formação.

À Universidade Estadual Paulista - UNESP, em especial à Faculdade de Engenharia de Bauru - FEB e ao Instituto de Ciência e Tecnologia de Sorocaba - ICTS, que proporcionaram os meios necessários para a realização e término do mestrado. Agradeço a todos que de alguma forma colaboraram para a elaboração, execução e finalização desse trabalho e também na conclusão do mestrado.

À Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo (Proc. 2013/04101-6), e à CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pela apoio financeiro.

Àquelas pessoas que aqui não foram citadas, mas que de alguma forma, colaboraram para o sucesso da conclusão do mestrado, meus sinceros agradecimentos.

Encerro fazendo um agradecimento especial à banca examinadora composta pelo Professor Doutor Paulo José Amaral Serni e o Professor Doutor André Luiz Andreoli, pela revisão e sugestões de melhorias para este trabalho.

"Os que confiam no SENHOR serão como o Monte de Sião,
que não se abala, mas permanece para sempre".

(Salmo 125:1)

RESUMO

O estudo de técnicas de controle de vibração tem grande importância em diversas áreas da Engenharia, tais como Aeroespacial, Automobilística, Mecânica, Robótica, etc. Um dos principais problemas observados nesses sistemas referem-se as oscilações mecânicas oriundas dos movimentos, ocasionando as vibrações nas estruturas flexíveis. Os sistemas de controle de veículos espaciais, satélites artificiais, manipuladores robóticos, guindastes rotativos, vigas engastadas, entre outros, mesmo se considerados rígidos, apresentam comportamento não-linear. Analisar essas situações expostas visa, dentro das diversas áreas, proporcionar maior margem de segurança e estabilidade do equipamento, da carga e dos usuários. Diante desse contexto, este trabalho tem como objetivo desenvolver modelos matemáticos para sistemas rotacionais em estruturas flexíveis e aplicar um Observador de Estados para estimar as variáveis de estado, que permite diminuir a quantidade de sensores, e projetar controladores para atenuar vibrações, com base na resposta experimental, na avaliação, verificação e validação do modelo desenvolvido para controlar vibrações em estruturas flexíveis. A metodologia utilizada baseia-se em desenvolver modelos matemáticos do sistema de controle de vibração para o sistema *Rotary Flexible Link* da Quanser, que consiste de uma haste metálica flexível acoplada a um servomecanismo que permite o movimento rotacional no plano horizontal. Para a obtenção das equações de movimento, considerou-se o método de Euler-Lagrange. Os resultados foram o desenvolvimento e validação experimental dos modelos matemáticos para controlar a vibração da viga flexível, e com a utilização do Observador de Estados permitiu demonstrar uma ótima estimativa das variáveis de estado, além de eliminar a utilização do tacômetro e do *strain gage*.

Palavras-chave: *Controle de vibração, Estruturas flexíveis, Observador de estados*

ABSTRACT

The study of vibration control techniques has great importance in several areas of Engineering, such as Aerospace, Automotive, Mechanics, Robotics, etc. One of the main problems observed in these systems refers to the mechanical oscillations originating from the movements, causing the vibrations in the flexible structures. Space vehicle control systems, artificial satellites, robotic manipulators, rotary cranes, clamped beams, among others, even if considered rigid, exhibit non-linear behavior. Analyzing these exposed situations aims, within the several areas, to provide greater margin of safety and stability of the equipment, the load and the users. Given this context, this work aims to develop mathematical models for rotational systems in flexible structures and to apply a State Observer to estimate the state variables, which allows to reduce the number of sensors, and design controllers to attenuate vibrations, based on the response Experimental, in the evaluation, verification and validation of the model developed to control vibrations in flexible structures. The methodology used is based on developing mathematical models of the vibration control system for the Rotary Flexible Link system of Quanser, which consists of a flexible metal beam coupled to a servomechanism that allows rotational movement in the horizontal plane. In order to obtain the equations of motion, the Euler-Lagrange method was considered. The results were the development and experimental validation of the mathematical models to control the vibration of the flexible beam, and with the use of the State Observer, it was possible to demonstrate a good estimation of the state variables, besides eliminating the use of the tachometer and the strain gage.

Keywords: Vibration Control, Flexible Structures, State Observer

Lista de Figuras

2.1	Diagrama de blocos representado espaço dos estados (Ogata, 2003). . .	28
2.2	Diagrama de blocos com observador de ordem plena (Ogata, 2003). . .	32
2.3	Diagrama de blocos do sistema controlador-observador (Ogata, 2003). .	35
2.4	Diagrama de blocos com observador de ordem mínima (Ogata, 2003). .	36
3.1	Sistema <i>Rotary Flexible Link</i>	41
3.2	Representação do movimento da viga flexível (Lopes et al., 2014). . . .	44
3.3	Circuito da armadura do motor CC e caixa de engrenagens (Quanser, 2011).	45
3.4	Modelo físico da viga flexível.	47
3.5	Representação da vista superior da haste flexível.	50
4.1	Diagrama de blocos com observador de ordem plena.	67
4.2	Comparativo entre planta e o observador, utilizando Encoder.	68
4.3	Comparativo entre planta e o observador, utilizando Tacômetro.	68
4.4	Comparativo entre planta e o observador, utilizando strain gage.	69
4.5	Erro quadrático.	69
4.6	Diagrama de blocos do sistema de malha aberta.	70
4.7	Diagrama de blocos do sistema com controlador proporcional.	71
4.8	Resposta de malha aberta.	71
4.9	Resposta de malha fechada com controlador proporcional.	72
4.10	Resposta de malha fechada com Observador de Estados e ganho 25. . .	73
4.11	Resposta de malha fechada com Observador de Estados e ganho 30. . .	73

Lista de Tabelas

2.1	Lista de substituições para escrever a equação do observador de ordem mínima	38
3.1	Parâmetros físicos do sistema <i>Rotary Flexible Link</i>	42

Sumário

1	Introdução	14
2	Revisão Bibliográfica	19
2.1	Vibrações Mecânicas	19
2.2	Elementos da Dinâmica Analítica	20
2.2.1	Princípio do Trabalho Virtual	21
2.2.2	Princípio de D'Alembert	22
2.2.3	Princípio de Hamilton	23
2.2.4	Método de Lagrange	24
2.3	Métodos dos Modos Assumidos	26
2.4	Representação no Espaço dos Estados	27
2.4.1	Observador de Estados	29
2.4.1.1	Observador de Ordem Reduzida	31
2.4.1.2	Observador de Ordem Plena	31
2.4.1.3	Observador de Ordem Mínima	35
3	Modelo Matemático	41
3.1	Descrição do sistema <i>Rotary Flexible Link</i>	41
3.2	Modelo Matemático a Parâmetros Concentrados	43
3.2.1	Modelo do Motor de Corrente Contínua	44
3.2.2	Modelo Matemático da Viga Flexível Rotacional	46
3.3	Modelo Matemático a Parâmetros Distribuídos	50
3.3.1	Aplicação da Técnica dos Modos Assumidos	55
3.3.2	Equações do Movimento Completa	59

4	Resultados Experimentais	61
4.1	Projeto do Observador de Estados	61
4.1.1	Controlabilidade	61
4.1.2	Observabilidade	63
4.2	Análise do Desempenho do Sistema de Controle	70
5	Conclusões	74
6	Trabalhos Futuros	75
	Referências	78

Capítulo 1

Introdução

As vigas e eixos são elementos estruturais e mecânicos importantes na engenharia, onde as vigas são consideradas o mais importante de todos os elementos estruturais, pois são elementos usados para apoiar os pisos dos edifícios, pontes, asa de aviões, eixos de automóveis, lança de guindaste, dentre outros (Hibbeler, 2006).

As vibrações em vigas são problemas que devem ser controlados ou minimizados para dar maior estabilidade e robustez aos sistemas. Logo, o estudo de técnicas de controle ativo de vibrações tem aplicações em diversas áreas da Engenharia, tais como Engenharia Aeroespacial, Engenharia Mecânica, Engenharia Civil, Engenharia Automobilística, Robótica, transporte de cargas e até mesmo em Sistemas Micro-Nano-eletromecânicos (Junkins and Kim, 1993; Abdel-Rahman et al., 2003; Bhushan, 2004; Morita, 2009).

No caso dos helicópteros, os problemas de vibrações têm recebido uma grande atenção. Além de melhorar o conforto da tripulação e dos passageiros, a atenuação das vibrações na estrutura da aeronave protege os instrumentos de comunicação e navegação de possíveis falhas (Bittanti and Cuzzola, 2002).

As vibrações em automóveis são minimizadas através do sistema conhecido como suspensão. O objetivo de um sistema de suspensão de veículo é fornecer amortecimento eficaz da irregularidade da pista, melhorar a estabilidade e o controle direcional proporcionando maior conforto durante o passeio e proporciona estabilidade ao veículo. O sistema clássico da suspensão dos veículos é composto por molas e amortecedores (Yagiz and Sakman, 2005).

Em Sistemas de Transporte de carga, o problema da movimentação de grandes quantidades de cargas pesadas é encontrado em locais como construções, portos, aeroportos e complexos industriais, sendo que um dos sistemas mecânicos utilizados na movimentação de cargas pesadas é o guindaste. Os guindastes são sistemas mecânicos utilizados para deslocar cargas tanto verticalmente como horizontalmente. Há diversos modelos de guindastes, que podem ser classificados de acordo com o número de graus de liberdade que o mecanismo de suporte oferece ao ponto de suspensão. O guindaste gira a viga ou braço do guindaste sobre o plano horizontal em torno de um eixo vertical, permitindo que o ponto de suspensão seja capaz de executar movimentos tanto de translação como rotação sobre o plano horizontal (Abdel-Rahman et al., 2003).

Em alguns Sistemas Micro e Nano-eletromecânicos, o controle ativo de vibrações deve não apenas atenuar oscilações indesejáveis, mas também sintetizar movimentos oscilatórios com precisão suficiente. No caso do Microscópio de Força Atômica (MFA), uma microviga deve ser deliberadamente vibrada com frequência e amplitude previamente definidas (Morita, 2009; Bhushan, 2004; Balthazar et al., 2013).

Diversas técnicas podem ser usadas para o controle ativo de vibrações, por exemplo, filtros e compensadores projetados para garantir a estabilidade e o bom desempenho do sistema de controle, atenuando apropriadamente os modos de vibração. Algumas técnicas, como os sistemas eletromecânicos projetados para absorver a energia da vibração como os *Energy Absorbers* ou *Dynamic Vibration Absorbers* (DVAs) lineares, e os *Nonlinear Energy Sinks* (NES), têm sido objeto de intensa pesquisa atualmente (Yang et al., 2014; Iliuk et al., 2013).

Os sistemas de controle de veículos espaciais, satélites artificiais, manipuladores robóticos, guindastes rotativos, entre outros, mesmo se considerados rígidos, apresentam comportamento não linear. Dessa forma, o projeto de sistemas de controle de estruturas flexíveis confronta dificuldades adicionais (Bueno et al., 2010).

As vibrações podem também comprometer a nossa saúde, pois a vibração é um agente nocivo presente em várias atividades laborais, como as atividades de mineração e florestal, a indústria química, de móveis, da carne, automotiva, dentre outras, que submetem os trabalhadores às vibrações localizadas (também denominadas de vibração de mãos e braços ou de extremidades) e vibrações de corpo inteiro. As vibrações localizadas são transmitidas aos membros superiores através de uso de ferramentas ma-

nuais, portáteis ou não, tais como motosserras, furadeiras, serras, politrizes, britadeiras e martelos pneumáticos e as vibrações de corpo inteiro são características em plataformas industriais, veículos pesados, tratores, retroescavadeiras e até mesmo no trabalho em embarcações marítimas, fluviais e trens. Sendo que não há cura para a síndrome da vibração para mãos e braços, e que a prevenção é a palavra chave, que pode ser implementada pelo uso de ferramentas com *design* ergonômico ou com controle da vibração (Vendrame, 2008).

Nas últimas décadas diversas pesquisas têm sido realizadas, com objetivo de reduzir amplitudes de vibrações em estruturas submetidas a cargas dinâmicas, por meio de sistemas de controle de malha fechada. Os sistemas de controle ativo caracterizam-se por atuadores que necessitam de fonte de energia externa. Os sinais ou leis de controle são determinados em função das características dinâmicas das estruturas, dos sinais de excitação e da resposta temporal da planta controlada, ou seja, da amplitude de resposta do sistema, devendo ser determinada automaticamente, o que resulta em um maior grau de adaptabilidade (Nagahama, 2013). Além disso, os sistemas de controle de malha fechada são compostos por:

- Sensores: que traduzem informações como deslocamentos, velocidades e/ou acelerações de determinados pontos da estrutura;
- Controladores: que recebem as informações dos sensores e realizam o cálculo das ações de controle;
- Atuadores: que aplicam as ações de controle.

Os sistemas de malha fechada são sistemas de controle com realimentação, ou seja, é um sistema que mantém uma relação entre a grandeza de saída comparando-se com a grandeza de referência, e utilizando a diferença como meio de controle (Ogata, 2003).

Entretanto, existem diferenças entre teoria de controle moderno e a teoria de controle convencional. A teoria de controle moderno contrasta com a teoria de controle convencional no sentido de que a primeira é aplicável a sistemas com entradas e saídas múltiplas, lineares ou não-lineares, variantes ou invariantes no tempo, enquanto a última é aplicável apenas aos sistemas mono-variável (uma única entrada e uma única saída), lineares e invariantes no tempo. Além disso, a teoria de controle moderno é

uma abordagem centrada essencialmente no domínio do tempo, enquanto a teoria de controle convencional adota um enfoque no domínio de frequência complexa (Ogata, 2003).

Em projetos de sistemas de controle supõe-se que o vetor de estado completo está disponível para medição direta, mas nem sempre as variáveis de estado estão disponíveis, necessitando dessa forma estimar as variáveis que não são disponíveis por medição direta. Nesse caso o vetor de estado pode ser aproximadamente reconstruído, construindo um observador (Watanabe, 2010).

Luenberger (1966) define que o observador é um projeto de controle de um sistema que produz uma aproximação para o vetor de estado, também conhecido como observador de Luenberger.

Meirovitch (1970) afirma que em projeto de sistema de controle utilizando Observador de Estados, os mesmos podem reconstruir os estados não medidos ou os valores provenientes de pontos de difícil acesso no sistema a partir das variáveis de estado disponíveis.

Luenberger (1964) menciona que em diversos sistemas de controle, é fisicamente e economicamente inviável a instalação de todos os sensores que serão necessários para medir todas as variáveis de estado, portanto o projeto de sistemas de controle utilizando os observadores de estado pode reconstruir os estados não medidos, com isso, torna-se necessária a reconstrução que todos os estados sejam observáveis.

O projeto de controle para estimar as variáveis de estado que não são disponíveis por medição direta e uma aplicação do projeto de controle em que estima o vetor de estado para um sistema com Observador de Estado e substituiu um vetor de estado real em modelos de realimentação linear ou não linear sem perder a estabilidade, assim, concluiu que os observadores podem efetivamente superar as dificuldades associadas com projeto de controle quando o vetor de estado não é mensurável (Luenberger, 1971).

Em projeto de sistemas de controle utilizando observadores de estado, os mesmos podem reconstruir os estados não medidos ou os valores provenientes de pontos de difícil acesso no sistema a partir das variáveis de estado disponíveis (Meirovitch, 1990).

No desenvolvimento de projeto de sistemas de controle para que haja uma interface entre a planta e o sistema observado e suas variáveis, é comum a aplicação de *softwares*, sendo que o mais utilizado é o MATLABTM/SIMULINKTM.

O MATLABTM é um *software* para a computação técnica e científica, sua popularidade deve-se a facilidade de utilização desse programa. O nome MATLAB vem da elisão das palavras *Matrix Laboratory*, isto se deve à base operacional, que são as matrizes. Esse programa é utilizado para cálculos matemáticos, modelagens e simulações de sistemas lineares e não-lineares, discretos e contínuos no tempo, análises numéricas e processamentos, visualização de gráficos, desenvolvimentos de algoritmos, etc. (Gilat, 2009).

Diante desse contexto, este trabalho tem como objetivo desenvolver modelos matemáticos para sistemas rotacionais com estruturas flexíveis e aplicar um Observador de Estados para estimar as variáveis de estado, o que permite diminuir a quantidade de sensores. Além disso, objetiva-se realizar ensaios no sistema *Rotary Flexible Link* para validar o projeto dos controladores, de modo a atenuar as vibrações oriundas da flexão.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Vibrações Mecânicas

O estudo de vibrações surgiu a partir de Galileu Galilei (1564-1642) em sua obra *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno a Due Nuove Scienze*, publicado em 1638, no qual Galileu discutiu corpos vibratórios, com enfoque científico. Isaac Newton (1642-1727) publicou sua obra *Philosophiae naturalis principia mathematica* em 1686, na qual descreveu a lei da gravitação universal, bem como as três leis do movimento. A segunda lei do movimento de Newton é usada em vibrações para derivar as equações de movimento de um corpo em vibração. Brook Taylor (1685-1731) em 1713 apresentou o famoso teorema de Taylor para séries infinitas. A frequência natural de vibrações obtida pela equação de movimento derivada por Taylor concordava com os experimentos de Galileu e Mersenne. Daniel Bernoulli (1700-1782) por meio das equações dinâmicas em suas memórias publicadas pela Berlin Academy em 1755 definiu o princípio da coexistência de pequenas oscilações, no qual é conhecido como princípio da superposição, onde esse princípio é importante para o desenvolvimento da teoria das vibrações. D'Alembert (1717-1783) e Leonard Euler (1707-1783) duvidaram da validade desse princípio, entretanto, J.B.J. Fourier (1768-1830) em sua obra *Analytical theory of heat* (Teoria analítica do calor) em 1822, validou sua expansão sendo provada por ele. Joseph Lagrange (1736-1813) encontrou uma solução analítica da corda vibratória. Tal método para estabelecer a equação diferencial do movimento de uma corda (denominada equação de onda) sobre a teoria da vibração foi desenvolvida

primeiro por D'Alembert em suas memórias publicadas pela Academia de Berlim em 1750. Sendo que as vibrações de vigas delgadas apoiadas e engastadas foram estudadas primeiramente por Euler em 1744 e Bernoulli em 1751. Essa abordagem ficou conhecida como a teoria de Euler-Bernoulli ou de viga delgada. Nas abordagens mecânicas muitos problemas básicos incluindo os de vibrações, são não lineares. Lord Baron Rayleigh (1842-1919) publicou um livro sobre a teoria do som, no qual é considerado um clássico tanto no assunto do som quanto na vibração. Rayleigh determinou a frequência fundamental de vibração de um sistema conservativo utilizando o princípio da conservação de energia, conhecido atualmente como método de Rayleigh. Esse método apresentou ser extremamente útil para soluções de difíceis problemas de vibrações. Observa-se que a teoria matemática de vibrações não lineares começou com o trabalho de Poincaré (1854-1912) e Lyapunov (1857-1918). Poincaré desenvolveu o método das perturbações em 1892 em conexão com a solução de problemas de mecânica celeste não lineares. Lyapunov lançou as bases da teoria de estabilidade em 1892, que é aplicável a todos os tipos de sistemas dinâmicos. No século XX, os trabalhos de Duffing e Van der Pol (1889-1959) resultaram nas primeiras soluções definidas da teoria de vibrações não lineares e apresentaram sua importância para a área de engenharia, sendo que qualquer movimento que se repete em um intervalo de tempo é denominado de vibração ou oscilação (Rao, 2008).

Um sistema mecânico de movimento oscilatório é geralmente referido como vibração, a questão básica da vibração é como o sistema responde a vários estímulos ou excitações. A derivação da equação do movimento pode ser realizada por meio de métodos da mecânica Newtoniana ou por métodos de dinâmica analítica, também conhecida mecânica Lagrangiana (Meirovitch, 1970).

2.2 Elementos da Dinâmica Analítica

As leis de Newton foram formuladas para uma única partícula e podem ser estendidas a sistemas de partículas e corpos rígidos. Ao descrever o movimento, em coordenadas e forças físicas em quantidades que podem ser representadas por vetores. Por esta razão, esta abordagem é apresentada como mecânica vetorial. A principal desvantagem considera os componentes individuais de um sistema separadamente, exi-

gindo assim o cálculo da interação das forças resultantes de restrições cinemáticas. O cálculo dessas forças é uma complicação adicional e, além disso, em muitos casos, essas forças não são de interesse e devem ser eliminadas das equações de movimento. Uma abordagem diferente da mecânica refere-se à mecânica analítica, que considera o sistema como um todo, do que seus componentes individuais, eliminando assim a necessidade de calcular as forças que interagem. A abordagem é atribuída a Leibnitz e Lagrange que formula os problemas da mecânica em duas funções escalares, a energia cinética e a energia potencial, em uma expressão infinitesimal, onde o trabalho virtual é associado a forças não conservativas. A mecânica analítica representa um ponto de vista mais amplo, pois formula os problemas da mecânica por meio de coordenadas e forças generalizadas, que não são necessariamente coordenadas e forças físicas, embora em certos casos possam ser. Desta forma, a formulação matemática é apresentada independente em qualquer sistema especial de coordenadas. A mecânica analítica baseia-se fortemente no conceito de deslocamentos virtuais, o que levou ao desenvolvimento de cálculos de variações. Por esta razão, a mecânica analítica também é chamada de abordagem variacional à mecânica (Meirovitch, 1975).

2.2.1 Princípio do Trabalho Virtual

O princípio do trabalho virtual é basicamente uma afirmação do equilíbrio estático de um sistema mecânico. É o primeiro princípio variacional na mecânica pode ser empregado para facilitar a transição da mecânica Newtoniano para Lagrangiano, o trabalho virtual pode ser escrito para um sistema de N partículas, de modo semelhante ao conceito de trabalho real (Meirovitch, 1970), como:

$$\delta\bar{W} = \sum_{i=1}^N R_i \cdot \delta r_i \quad (2.1)$$

Onde R_i é a resultante das forças atuantes sobre a partícula i dada por:

$$R_i = F_i + f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.2)$$

Sendo F_i a força aplicada e f_i a força de vínculo.

Para um sistema em equilíbrio, cada partícula deve estar em repouso, portanto, $R_i = 0$ e, conseqüentemente, o produto escalar $R_i \cdot \delta r_i$ também será nulo. Com isso, a equação (2.1) é reescrita como:

$$\delta \bar{W} = \sum_{i=1}^N R_i \cdot \delta r_i = 0 \quad (2.3)$$

Substituindo a equação (2.2) na equação (2.3), resulta em

$$\delta \bar{W} = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta r_i + \sum_{i=1}^N f_i \cdot \delta r_i \quad (2.4)$$

Como a partícula é confinada a se movimentar sobre uma superfície devido às forças de vínculo (f_i) que são normais a esta superfície, o deslocamento virtual será então paralelo à superfície e como conseqüência, normal às forças de vínculo. Como o produto escalar de dois vetores normais é nulo, o somatório de todos os produtos $f_i \cdot \delta r_i$ do sistema será nulo, ou seja:

$$\delta \bar{W} = \sum_{i=1}^N f_i \cdot \delta r_i = 0 \quad (2.5)$$

Portanto, da equação (2.4) e equação (2.5),

$$\delta \bar{W} = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta r_i = 0 \quad (2.6)$$

Onde mostra o trabalho virtual $\delta \bar{W}$ realizado pelas forças F_i aplicadas através do deslocamento virtual infinitesimal δr_i compatível com os vínculos do sistema é nulo.

2.2.2 Princípio de D'Alembert

O princípio do trabalho virtual lida com o equilíbrio estático de sistemas, o que não se aplica a problemas da dinâmica, tentando estender este princípio para problemas de equilíbrio dinâmico, nasce o princípio atribuído a D'Alembert, conhecido como princípio de D'Alembert (Meirovitch, 1970).

Conforme com a segunda lei de Newton, a equação do movimento para cada partícula pode ser escrita na notação compacta vetorial como,

$$F_i + f_i - m_i \ddot{r}_i = 0 \quad (2.7)$$

onde $-m_i\ddot{r}_i$ é a força devido à inercia, dada pela taxa de variação do vetor do momento $p_i = -m_i\dot{r}_i$. A equação (2.7) é frequentemente chamada de princípio de D'Alembert, que permite o tratamento de problemas de dinâmica como se fossem problemas de estática.

Da equação (2.7) pode-se então escrever o trabalho virtual para a i -ésima partícula como:

$$(F_i + f_i - m_i\ddot{r}_i) \cdot \delta r_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.8)$$

Somando sobre todo o sistema de partículas e considerando a equação(2.5),

$$\sum_{i=1}^N (F_i - m_i\ddot{r}_i) \cdot \delta r_i = 0 \quad (2.9)$$

A equação (2.9) é referida como o princípio generalizado de D'Alembert.

2.2.3 Princípio de Hamilton

O princípio de Hamilton é o princípio variacional mais famoso da mecânica, e é conceitualmente fácil de aplicar, devido ao uso das energia potencial e cinética que são funções escalares das variáveis de estado dos sistemas, esse princípio deriva as equações de movimento tanto para sistemas de parâmetros distribuídos quanto para parâmetros concentrados (Junkins and Kim, 1993). Considerando uma extensão do princípio de D'Alembert, pode-se rearranjar a equação (2.9) (substituindo as coordenadas r devidamente por coordenadas generalizadas e integrando no tempo) em uma nova formulação, conhecida como a forma mais geral do princípio de Hamilton.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc}dt = 0 \quad (2.10)$$

Onde T é a energia cinética do sistema, V é a energia potencial do sistema, $\delta()$ representa o operador de deslocamento virtual (ou variacional) e δW_{nc} é o trabalho virtual realizado pelas forças não conservativas (forças de amortecimento e forças externas não incluídas em V). De forma geral o princípio de Hamilton é essencialmente uma forma integrada do princípio de D'Alembert, é aplicável em vários tipos de sistema mecânicos. No entanto, o princípio mais comum de Hamilton aplica-se a uma classe

de sistema mais restrito, onde engloba a maioria dos sistemas mecânicos e estruturais. Especificamente, a energia cinética é expressa em termos das coordenadas generalizadas e suas derivadas primeira enquanto a energia potencial é expressa somente pelas coordenadas generalizadas e o trabalho virtual é expresso como uma função linear dos deslocamentos virtuais nas coordenadas generalizadas, conforme segue:

$$\begin{aligned}
 T &= T(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t) \\
 V &= V(q_1, q_2, \dots, q_N, t) \\
 \delta W_{nc} &= Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_N \delta q_N
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

Onde Q_i são as forças generalizadas e q_i são as coordenadas generalizadas definidas como um conjunto de N variáveis independentes, que são suficiente para especificar completamente a posição inercial de cada elemento de massa no sistema. Para sistemas discretos, os q_i são funções do tempo, enquanto para sistemas de parâmetros distribuídos, algumas ou todas essas variáveis são funções de espaço e tempo. Além disso, para sistemas de parâmetros distribuídos, as formas T e V devem ser generalizadas para incluir derivadas e integrais sobre os domínios elásticos. Portanto, consideramos as coordenadas independentes generalizadas $q_i = q_i(t)$ como funções do tempo. Observe que as variações de coordenadas δq_i são definidas como deslocamentos virtuais, que são independentes, infinitesimais com mudanças arbitrárias nas coordenadas de um sistema, mas que devem ser compatíveis com as restrições no sistema. As variações admissíveis também são limitadas de tal forma que as variações inicial e final desaparecem como $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$; Essa condição é imposta para ser compatível com a versão de dois pontos do valor limite do princípio de Hamilton.

2.2.4 Método de Lagrange

O princípio estendido de Hamilton permite a derivação de todas as equações de movimento de um sistema a partir de três expressões escalares, a energia cinética, a energia potencial e o trabalho virtual devido as forças não conservativas. O princípio estendido de Hamilton não é o método eficiente para derivar a equação do movimento, pois envolve certas operações que devem ser realizadas sempre que o princípio é aplicado, como as integrações por partes. Usando o princípio de Hamilton estendido para

gerar um método rápido para derivar equações de movimento, que elimine a necessidade das operações em questão. Embora seja possível derivar as equações de Lagrange diretamente do princípio de D'Alembert, isto é, sem o uso do princípio de Hamilton estendido, a abordagem apresentada aqui é, sem dúvida, a maneira mais simples de derivar as equações de Lagrange. Para sistemas holonômicos é possível expressar as equações diferenciais do sistema a partir da formulação Lagrangiana, que provindo dos princípios de D'Alembert e Hamilton, possui a vantagem no sentido que nesta formulação as equações podem ser deduzidas de uma simples função, denominada Lagrangiana. Mostra-se ainda que este princípio pode ser também estendido para sistemas não holonômicos (Meirovitch, 1975).

A substituição da equação (2.11) pela equação (2.10), resolvendo as variações usando a regra da cadeia e integrando por partes, chega-se as equações de Lagrange que são amplamente utilizadas para derivar as equações de movimento para sistemas holonômicos de coordenadas discretas (Junkins and Kim, 1993).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.12)$$

Essa equação é válida para sistemas tanto lineares quanto não lineares, desde que a equação (2.11) seja obedecida e as coordenadas generalizadas q_i sejam funções dependentes somente do tempo, onde T , V e δW_{nc} tem as formas da equação (2.11), L é definida como a Lagrangiana e é dada, na sua forma clássica, por:

$$L = T - V \quad (2.13)$$

Uma generalização modesta permite que a equação (2.11) seja aplicada a uma classe de sistemas, isto é, as coordenadas q_i não são independentes, onde as restrições cinemáticas que dependem dos q s e suas derivadas de tempo, o conceito dos multiplicadores de Lagrange podem ser introduzidos para gerar forças de restrição generalizadas aditivas no lado direito da equação (2.11).

2.3 Métodos dos Modos Assumidos

O método dos modos assumidos é um procedimento para a discretização de um sistema a parâmetros distribuídos aplicado antes da derivação das equações do movimento. As deflexões nas estruturas são representadas através de uma série finita de funções dependentes do espaço que são multiplicadas por funções cujas amplitudes são dependentes do tempo. As funções dependentes do tempo são normalmente escolhidas como um conjunto de funções lineares independentes, de modo a satisfazer ao menos as condições de contorno geométrico e de serem diferenciáveis pelo menos a metade das vezes que o número da ordem do sistema. Estas funções são chamadas funções admissíveis. Apesar de terem que satisfazer estas condições mínimas expostas, quando possível, estas funções podem ser selecionadas para satisfazer também as condições de contorno físicas (naturais) e serem diferenciáveis tantas vezes quanto a ordem do sistema, sendo conhecidas, neste caso específico, como funções de comparação, que apresenta, para um mesmo número de funções, um resultado mais aproximado ao sistema real em comparação com funções admissíveis. Para gerar um modelo de uma viga flexível que tenha equação diferencial aproximada N graus de liberdade (D.O.F. - *Degrees Of Freedom*), para um sistema contínuo, o deslocamento do sistema contínuo é expandido como uma combinação linear de N funções de forma prescritas (Junkins and Kim, 1993). Assim, a deformação $y(x, t)$ é aproximada por:

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x)q_i(t) \quad (2.14)$$

Os $\phi_i(x)$ são as forma de modo assumido, $q_i(t)$ é a i -ésima coordenada generalizada e N o número de termos retidos na aproximação. A equação (2.14) é usada em conjunto com as equações de Lagrange para obter um sistema aproximado de dimensões finitas para as equações diferenciais ordinárias do movimento que governam a evolução das amplitudes $q_i(t)$ no tempo.

Este método será utilizado para a obtenção do modelo a parâmetros distribuídos descritos na seção 3.3.1.

2.4 Representação no Espaço dos Estados

O estado de um sistema dinâmico é o menor conjunto de valores de variáveis de modo que o conhecimento destes valores em $t = t_0$, e os valores do sinal de entrada para $t \geq t_0$, determina o comportamento do sistema em qualquer instante $t \geq t_0$. Sendo que as variáveis de estado de um sistema dinâmico são as grandezas destes conjuntos de valores que determinam o estado do sistema, onde as variáveis de estado não precisam ser grandezas fisicamente mensuráveis ou observáveis. Variáveis que não representam grandezas físicas e aquelas que não são nem mensuráveis e nem observáveis podem ser escolhidas como variáveis de estados. Se n variáveis de estado são necessárias para descrever o comportamento de um dado sistema, então estas n variáveis de estado podem ser consideradas as n componentes de um vetor x , este vetor é chamado de vetor de estado. O espaço n -dimensional cujos eixos coordenados consistem nos eixos x_1, x_2, \dots, x_n é chamado espaço de estados. As equações no espaço de estados são representadas por três tipos de variáveis na modelagem de sistemas dinâmicos: variáveis de entrada, variáveis de saída e variáveis de estado (Ogata, 2003).

Utilizando-se a notação vetorial-matricial, uma equação de ordem n pode ser representada por uma equação diferencial vetorial-matricial, de primeira ordem. A representação de um sistema físico no espaço dos estados é dada por:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.15)$$

$$y = Cx(t) + Du(t) \quad (2.16)$$

Onde A é a matriz de estado, B a matriz de entrada, C a matriz de saída ou de observação e D matriz de transmissão direta.

Na abordagem por alocação de pólos no projeto de sistemas de controle, nem todas as variáveis estão disponíveis para realimentação, e por isso, precisa-se estimar as variáveis de estado não disponíveis, sendo que a estimativa de variáveis de estado que não são mensuráveis é denominada observação. Nesse contexto, é necessário que um dispositivo ou programa de computador que estime ou observe as variáveis de estado, no qual é denominado Observador de Estado (Ogata, 2003).

A equação (2.15) é chamada de equação de estado e a equação (2.16) é a equação de saída, ambas as equações são representados em forma de diagramas de blocos conforme Figura 2.1.

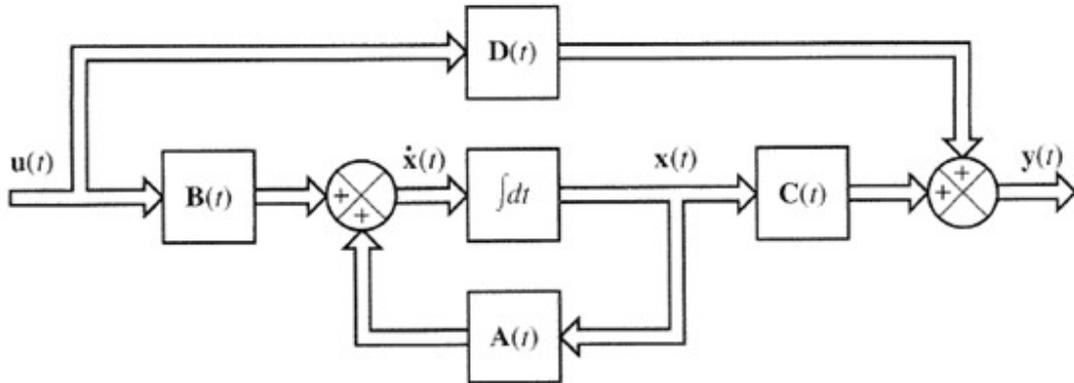


Figura 2.1: Diagrama de blocos representado espaço dos estados (Ogata, 2003).

Geralmente em sistemas de controle, o MATLABTM é uma ferramenta utilizada para realizar os cálculos, devido a grande probabilidade de ocorrência de erro quando realizados de forma manual, o MATLABTM também tem uma excelente interface gráfica que auxilia o engenheiro de controle a verificar se o sistema compensado com o controlador projetado satisfaz as especificações de projeto. Aliado ao programa têm-se o SIMULINKTM, que faz simulações de sistemas lineares e não-lineares, discretos e contínuos no tempo. Ao projetar um controlador, pode-se inseri-lo no sistema e realizar a simulação numérica, no qual é possível verificar se tal controlador satisfaz as especificações de desempenho do sistema (Basilio, 2004).

Um projeto de controle para estimar as variáveis de estado que não são disponíveis por medição direta e uma aplicação do projeto de controle em que estima um do vetor de estado para um sistema com Observador de Estado e substituiu um vetor de estado real em modelos de realimentação linear ou não linear sem perder a estabilidade, e concluiu que os observadores podem efetivamente superar as dificuldades associadas com projeto de controle quando o vetor de estado não é mensurável (Luenberger, 1966).

A aplicação do Observador de Estado é amplamente utilizado na realimentação de estados em malhas de controle projetadas e representada em espaço de estados.

2.4.1 Observador de Estados

A maior parte dos projetos de sistemas de controle está baseada na suposição de que o vetor de estado está disponível por medição direta, mas nem sempre as variáveis de estado estão disponíveis, necessitando assim, estimar as variáveis que não são disponíveis por medição direta, a estimativa de variáveis de estado não mensuráveis é comumente denominada observação, através de um dispositivo (ou programa de computador) que estima ou observa essas variáveis de estado (Ogata, 2003).

No projeto de sistemas de controle utilizando observadores de estado, os mesmos podem reconstruir os estados não medidos ou os valores provenientes de pontos de difícil acesso no sistema a partir das variáveis de estado disponíveis (Meirovitch, 1990).

O projeto de um sistema que produz uma aproximação para o vetor de estado é chamado de Observador de Estado ou observador de Luenberger (Luenberger, 1966, 1964)

Observadores de Estados podem ser projetados se, e somente se, a condição de Observabilidade for satisfeita. Os observadores de estados será utilizada a notação \tilde{x} para representar o vetor de estado observado.

Considere a planta definida por:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.17)$$

$$y = Cx \quad (2.18)$$

Onde: x = vetor de estados (vetor n)

u = vetor de controle (escalar)

y = sinal de saída (escalar)

A = matriz constante $n \times n$

B = matriz constante $n \times 1$

C = matriz constante $1 \times n$

O observador é um subsistema para reconstruir o vetor de estado da planta. O modelo matemático do observador é basicamente o mesmo que o da planta, exceto por um termo adicional que inclui o erro de estimação para compensar imprecisões nas matrizes A e B e a falta do erro inicial. O erro de estimativa ou erro de observação

é a diferença entre as saídas medida e estimada. O erro inicial é a diferença entre o estado inicial e o estado inicial estimado. Assim, definimos o modelo matemático do observador como:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + K_e(y - C\tilde{x}) = (A - K_eC)\tilde{x} + Bu + K_ey \quad (2.19)$$

O estado x é aproximado pelo estado \tilde{x} que é o estado estimado e $C\tilde{x}$ é a saída estimada, as entradas do observador são a saída y e a entrada de controle u . A matriz K_e , que é denominada de matriz de ganho de observador, é uma matriz de ponderação para o termo de correção envolvendo a diferença entre a saída medida y e a saída estimada $C\tilde{x}$. Este termo corrige continuamente a saída do modelo e melhora o desempenho do observador (Ogata, 2003).

O Observador de Estados pode ser projetado e implementado um modelo de controle de modo de deslocamento com base em um observador de atraso inercial, onde o observador estima os estados, bem como as incertezas e perturbações de forma integrada. Para avaliar o desempenho do observador e do controlador, a experimentação foi realizada sem incertezas e perturbações e em seguida, adicionado 20% de incertezas e distúrbios no sistema. As incertezas de modelagem e as perturbações presentes no sistema proporcionam melhores resultados em comparação com o observador proporcional clássico. A metodologia foi validada através da experimentação do servomecanismo da Quanser e os resultados mostraram a eficácia da combinação entre controlador-observador (Ginoya et al., 2011).

Normalmente os modos flexíveis presentes nos manipuladores com vigas flexíveis (*Flexible Link Manipulator - FLM*) causam vibrações que limitam o desempenho do FLM, sendo necessário controlar e atenuar essas vibrações. Desta forma o controle do manipulador flexível utilizando os modos discretos de deslocamento (*Discrete Sliding Mode - DSM*) e o observador de modo discreto de deslocamento (*Discrete Sliding Mode Observer - DSMO*) foram projetados para a estimar os estados onde o erro de estimativa de saída tende a zero em tempo finito. O DSMC com DSMO foi implementado experimentalmente para posicionar a ponta da viga flexível, onde o deslocamento angular almejado foi mantido em $\theta = 25^\circ$. Os autores validaram o método por meio de simulações numéricas (Kurode and Merchant, 2013).

2.4.1.1 Observador de Ordem Reduzida

O Observador de Estados que observa ou estima menos que n variáveis de estado, onde n é a dimensão do vetor de estado, é denominado observador de ordem reduzida. Se a ordem do Observador de Estado de ordem reduzida for a menor possível, o observador será denominado observador de ordem mínima. Portanto, mostra-se tanto o observadores de ordem mínima como os observadores de ordem plena (Ogata, 2003).

2.4.1.2 Observador de Ordem Plena

Quando o Observador de Estado analisa todas as variáveis do sistema, as variáveis não mensuráveis e as variáveis de medição direta, então ele é denominado Observador de Estado de ordem plena. O sistema definido pelas equações (2.17) e (2.18) constroem o modelo do observador definido pela equação (2.19). Para obter a equação de erro do observador, subtraia-se a equação (2.19) da equação (2.17).

$$\begin{aligned}\dot{x} - \dot{\tilde{x}} &= Ax - A\tilde{x} - K_e(Cx - C\tilde{x}) \\ &= (A - K_eC)(x - \tilde{x})\end{aligned}\tag{2.20}$$

Defina-se a diferença entre x e \tilde{x} como sendo o vetor erro e , ou seja:

$$e = x - \tilde{x}$$

$$\dot{e} = (A - K_eC)e\tag{2.21}$$

Analisando a equação (2.21), notamos que o comportamento dinâmico do vetor de erro é determinado pelos autovalores da matriz $(A - K_eC)$. Se a matriz $(A - K_eC)$ for uma matriz estável, o vetor de erro convergirá para zero, qualquer que seja o vetor de erro inicial $e(0)$. Ou seja, $\tilde{x}(t)$ convergirá para $x(t)$ independente do valor de $x(0)$ e $\tilde{x}(0)$. Se os autovalores da matriz $(A - K_eC)$ forem escolhidos de tal maneira que o comportamento do vetor de erro seja assintoticamente estável e adequadamente rápido, então qualquer vetor de erro tenderá a zero com uma velocidade adequada.

Outra consideração importante é que se a planta for completamente observável, é possível escolher a matriz K_e tal que $(A - K_eC)$ tenha seus autovalores escolhidos arbitrariamente. Para tanto, é preciso verificar a condição necessária e suficiente para

observação de estado. Ou seja, a partir das equações (2.17) e (2.18), verificamos que o posto de:

$$\begin{bmatrix} C^* & A^*C^* & \dots & (A^*)^{n-1}C^* \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

O sistema descrito pelas equações (2.17) e (2.18) é completamente observável se e o posto da matriz $n \times nm$ tiver posto n , ou se tiver n vetor-coluna linearmente independentes. A matriz dada pela equação (2.22) é chamada matriz de observabilidade.

Existe o Problema Dual no qual refere-se ao problema de projetar um Observador de Estados de ordem plena que resulta na determinação da matriz de ganho K_e do observador, tal que as dinâmicas do erro definido pela equação (2.21) sejam assintoticamente estáveis, com uma velocidade suficiente de resposta. Portanto, o projeto do observador de ordem plena resulta na determinação de um ganho K_e apropriado que $A - K_e C$ possua os autovalores desejados. Os autovalores desejados da equação característica devem ser escolhidos de modo que o Observador de Estado responda, pelo menos, duas a cinco vezes mais rápido que o sistema de malha fechada (Ogata, 2003).

A Figura 2.2 representa o diagrama de blocos do sistema com Observador de Estado de ordem plena.

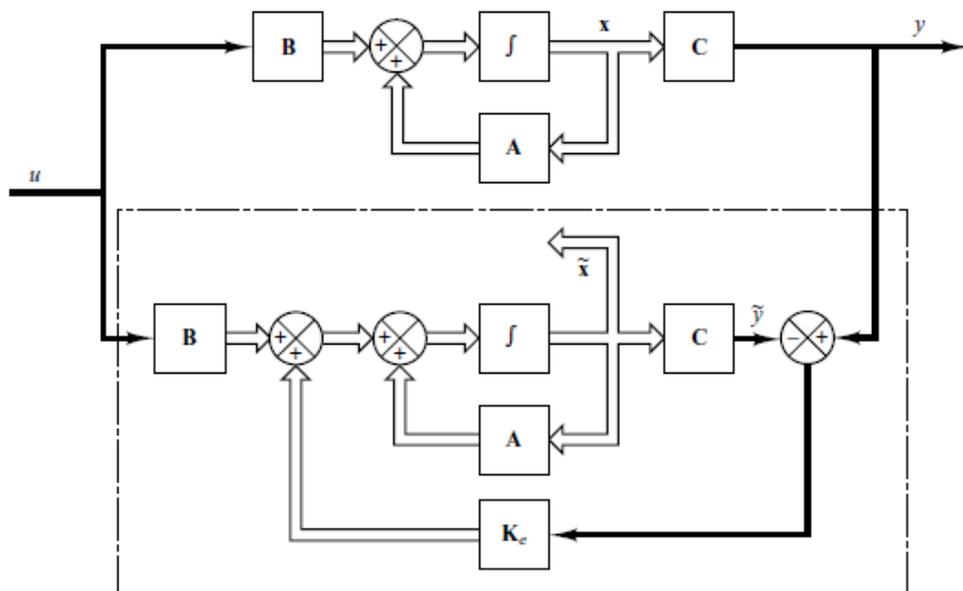


Figura 2.2: Diagrama de blocos com observador de ordem plena (Ogata, 2003).

Considerando um sistema completamente controlável e observável, definido pelas equações (2.17) e (2.18), temos a lei de controle baseado no estado observado \tilde{x} :

$$u = -K\tilde{x} \quad (2.23)$$

Para esse controle, a equação de estado resulta em:

$$\dot{x} = Ax - BK\tilde{x} = (A - BK)x + BK(x - \tilde{x}) \quad (2.24)$$

A diferença entre o estado real $x(t)$ e o estado observado \tilde{x} foi definida como o erro $e(t)$:

$$e(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$$

A substituição do vetor de erro $e(t)$ dentro da equação (2.24) temos:

$$\dot{x} = (A - BK)x + BKe \quad (2.25)$$

A equação do erro do observador foi dada pela equação (2.21), e repetida aqui:

$$\dot{e} = (A - K_e C)e \quad (2.26)$$

Utilizando a equação (2.26) do erro do observador e combinando com a equação (2.25) obtemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - K_e C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Esse equação descreve as dinâmicas do sistema de controle realimentado por estado observado. A equação característica desse sistema é:

$$\begin{bmatrix} sI - A + BK & -BK \\ 0 & sI - A + K_e C \end{bmatrix} = 0$$

ou

$$|sI - A + BK||sI - A + K_e C| = 0$$

Os pólos de malha fechada do sistema de controle realimentado por estado observado consistem nos pólos decorrentes do projeto por alocação de pólos e dos pólos decorrentes

do projeto isolado do observador. Isso significa que o projeto da alocação de polos e o projeto do observador são independentes entre si. Eles podem ser conduzidos separadamente e combinados para formar o sistema de controle realimentado por estado observado.

Em relação a função de transferência do controlador baseado em Observador de Estado de ordem plena, se considerarmos uma planta definida pelas equações (2.17) e (2.18), e supondo que esta planta seja completamente observável, ao aplicarmos uma lei de controle por realimentação de estado observado, teremos que as equações do observador serão dadas por:

$$\dot{\tilde{x}} = (A - K_e C - BK)\tilde{x} + K_e y \quad (2.28)$$

$$u = -K\tilde{x} \quad (2.29)$$

Supondo uma condição inicial nula e resolvendo a transformada de Laplace para $\tilde{X}(s)$ da equação (2.28), obtemos:

$$\tilde{X}(s) = (sI - A + K_e C + BK)^{-1} K_e Y(s) \quad (2.30)$$

Substituindo $\tilde{X}(s)$ na equação (2.29) e realizando a transformada de Laplace, obtemos:

$$U(s) = -K(sI - A + K_e C + BK)^{-1} K_e Y(s) \quad (2.31)$$

Então, a função transferência $U(s)/Y(s)$ pode ser obtida como:

$$\frac{U(s)}{Y(s)} = -K(sI - A + K_e C + BK)^{-1} K_e \quad (2.32)$$

Note que a função de transferência $K(sI - A + K_e C + BK)^{-1} K_e$ age como controlador do sistema. Por isso, denominamos esta função de transferência,

$$\frac{U(s)}{-Y(s)} = \frac{num}{den} = K(sI - A + K_e C + BK)^{-1} K_e \quad (2.33)$$

como função de transferência do controlador-observador.

O sistema controlador-observador é mostrado conforme Figura 2.3.

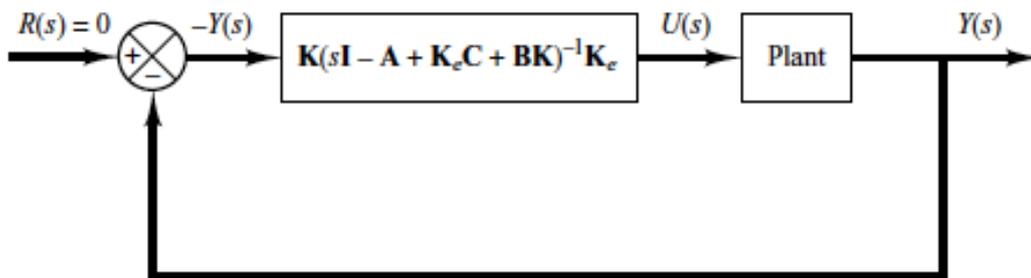


Figura 2.3: Diagrama de blocos do sistema controlador-observador (Ogata, 2003).

É importante destacar que a matriz do controlador-observador $A - K_e C - BK$ pode ser estável ou não, embora que $A - BK$ e $A - K_e C$ sejam escolhidas para serem estáveis.

2.4.1.3 Observador de Ordem Mínima

Em alguns casos, necessita-se da observação somente das variáveis de estado não mensuráveis, por exemplo, como as variáveis de saída são observáveis e estão linearmente relacionadas com as variáveis de estado, não precisamos observar todas as variáveis de estado, mas somente $n - m$ dessas variáveis, onde n é a dimensão do vetor de estado e m é a dimensão do vetor de saída. Um observador que estima menos que n variáveis de estado, é denominado Observador de Estado de ordem reduzida, e quando a ordem do Observador de Estado de ordem reduzida for a menor possível, o observador será considerado Observador de Estado de ordem mínima. Resumidamente, um Observador de Estado estima as variáveis de estado baseado na medida das variáveis de saída e das variáveis de controle. Expõe-se que o vetor de estados x seja n -dimensional e que vetor de saída y , m -dimensional, possa ser medido. Como as m variáveis de saída são combinações lineares das variáveis de estados, m variáveis de estados não precisam ser estimadas e, nesse caso, necessitam ser estimadas apenas $n - m$ variáveis de estados. Portanto, um observador de ordem reduzida se torna um observador de ordem $(n - m)$. Assim o observador de ordem $(n - m)$ é o observador de ordem mínima (Ogata, 2003).

A Figura 2.4 mostra o diagrama de blocos de um sistema de controle com observador de ordem mínima.

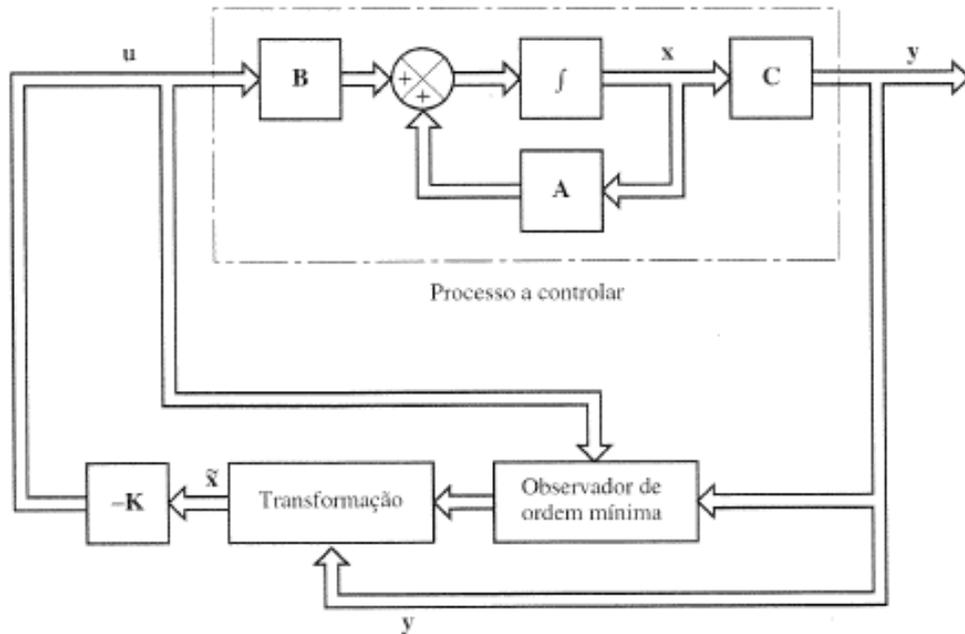


Figura 2.4: Diagrama de blocos com observador de ordem mínima (Ogata, 2003).

Para apresentar a ideia básica do observador de ordem mínima, vamos considerar que a saída que pode ser medida seja um escalar (ou seja, $m = 1$). Consideramos então, o sistema como descrito pelas equações (2.17) e (2.18), onde o vetor x é particionado em duas partes: x_a (escalar) que é igual a saída y e, portanto, pode ser medida diretamente e x_b (vetor com dimensão $n - 1$) que é a porção não medida do vetor de estado. Desse modo, a equação de estado particionada e a de saída resultam em:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dots \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{aa} & \vdots & A_{ab} \\ \dots & \vdots & \dots \\ A_{ba} & \vdots & A_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ \dots \\ x_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ \dots \\ B_b \end{bmatrix} u \quad (2.34)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ \dots \\ x_b \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Onde:

A_{aa} = escalar

A_{ab} = matriz $1 \times (n - 1)$

A_{ba} = matriz $(n - 1) \times 1$

A_{bb} = matriz $(n - 1) \times (n - 1)$

B_a = escalar

B_b = matriz $(n - 1) \times 1$

A partir da equação (2.34), podemos retirar a equação da porção mensurável do estado que resulta em:

$$\dot{x}_a = A_{aa}x_a + A_{ab}x_b + B_a u$$

ou

$$\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u = A_{ab}x_b \quad (2.36)$$

Consideramos o lado esquerdo da equação (2.36) podem ser medidos, essa equação age como a equação de saída. No projeto de observadores de ordem mínima, o lado esquerdo dessa equação tem como quantidades conhecidas. Desta forma podemos relacionar a quantidades mensuráveis e as não mensuráveis do estado que resulta em:

$$\dot{x}_b = A_{ba}x_a + A_{bb}x_b + B_b u \quad (2.37)$$

Como as quantidades $A_{ba}x_a$ e $B_b u$ são conhecidas, a equação (2.37) descreve as dinâmicas da porção não mensurável do estado.

Um dos métodos para projetar um observador de ordem mínima pode ser simplificados e for utilizado a técnica de projetos desenvolvido para o observador de ordem plena, comparando a equação de estado do observador de ordem plena com a do observador de ordem mínima. A equação de estado do observador de ordem plena é:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.38)$$

e a equação de estado do observador de ordem mínima é:

$$\dot{x}_b = A_{bb}x_b + A_{ba}x_a + B_b u \quad (2.39)$$

A equação de saída do observador de ordem plena é:

$$y = Cx \quad (2.40)$$

e a equação de saída do observador de ordem mínima é:

$$\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_bu = A_{ab}x_b \quad (2.41)$$

O projeto do observador de ordem mínima pode ser conduzido da seguinte forma: primeiro, note que a equação do observador de ordem plena é dada pela equação (2.19), que repetimos aqui:

$$\dot{\tilde{x}} = (A - K_eC)\tilde{x} + Bu + K_ey \quad (2.42)$$

Em seguida, fazendo as substituições conforme a tabela 2.1 na equação (2.42), obtemos:

$$\dot{\tilde{x}}_b = (A_{bb} - K_eA_{ab})\tilde{x}_b + A_{ba}x_a + B_bu + K_e(\dot{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u) \quad (2.43)$$

onde a matriz de ganho K_e do Observador de Estado é uma matriz $(n-1) \times 1$, observa-se que para estimar \tilde{x}_b , precisamos diferenciar x_a . Isso representa uma dificuldade, pois a diferenciação amplifica ruídos. Se $x_a (= y)$ for ruidoso, o uso de \dot{x}_a será inaceitável.

Tabela 2.1: Lista de substituições para escrever a equação do observador de ordem mínima

Observador de ordem plena	Observador de ordem mínima
\tilde{x}	\tilde{x}_b
A	A_{bb}
Bu	$A_{ba}x_a + B_bu$
y	$\tilde{x}_a - A_{aa}x_a - B_a u$
C	A_{ab}
K_e (matriz $n \times 1$)	K_e [matriz $(n-1) \times 1$]

Na equação (2.43) podemos observar que para estimar \tilde{x}_b , precisamos diferenciar x_a , o que representa uma dificuldade, pois a diferenciação amplifica ruídos. Portanto, analisando a equação (2.36) podemos reescrever a equação do observador de ordem mínima como:

$$\dot{\tilde{x}}_b = (A_{bb} - K_e A_{ab})\tilde{x}_b + A_{ba}x_a + B_b u + K_e A_{ab}x_b \quad (2.44)$$

Subtraindo a equação (2.44) da equação (2.37), obtém-se:

$$\dot{x}_b - \dot{\tilde{x}}_b = (A_{bb} - K_e A_{ab})(x_b - \tilde{x}_b) \quad (2.45)$$

Definindo:

$$e = x_b - \tilde{x}_b = \eta - \tilde{\eta} \quad (2.46)$$

A equação (2.46) resulta em:

$$\dot{e} = (A_{bb} - K_e A_{ab})e \quad (2.47)$$

Esta é a equação de erro para o observador de ordem mínima, note-se que e é um vetor de ordem $(n - 1)$. A dinâmica de erro pode ser escolhida como desejado pela seguinte técnica desenvolvida para o observador de ordem plena, providenciando que o posto da matriz:

$$\begin{bmatrix} A_{ab} \\ A_{ab}A_{bb} \\ \vdots \\ A_{ab}A_{bb}^{n-2} \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Seja $(n - 1)$. Esta é a condição de observabilidade completa aplicada ao observador de ordem mínima. A equação característica do observador de ordem mínima é obtida a partir da equação (2.47) como segue:

$$\begin{aligned} |sI - A_{bb} + k_e A_{ab}| &= (s - \mu_1)(s - \mu_2) \cdots (s - \mu_{n-1}) \\ &= s^{n-1} + \hat{\alpha}_1 s^{n-2} + \cdots + \hat{\alpha}_{n-2} s + \hat{\alpha}_{n-1} = 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

Onde $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ são os autovalores desejados do observador de ordem mínima. A matriz de ganho do observador K_e pode ser determinada escolhendo-se primeiro os autovalores desejados do observador de ordem mínima e utilizando-se do procedimento já desenvolvido para o observador de ordem plena com as modificações apropriadas.

Para o caso do sistema de controle realimentado por estado observado com observador de ordem mínima, a mesma conclusão se aplica. Portanto, a equação característica pode ser obtida como:

$$|sI - A + BK||sI - A_{bb} + K_e A_{ab}| = 0 \quad (2.50)$$

Mais uma vez, os polos de malha fechada do sistema de controle realimentado por estado observado com um observador de ordem mínima compreendem os polos de malha fechada da alocação de polos [os autovalores da matriz $(A - BK)$] e os polos de malha fechada devido ao observador de ordem mínima [os autovalores da matriz $(A_{bb} - K_e A_{ab})$]. Portanto, o projeto da alocação de polos e o projeto do Observador de Estado de ordem mínima são independentes entre si (Ogata, 2003).

Capítulo 3

Modelo Matemático

O material utilizado nessa pesquisa foi o sistema *Rotary Flexible Link*, fabricado pela empresa Canadense Quanser, utilizado para realizar os testes experimentais, assim como o *software* MATLABTM/SIMULINKTM, para demonstrar os cálculos e os gráficos resultantes do experimento, para posterior análise dos dados do modelo matemático e simulações numéricas para controle de vibrações em estruturas flexíveis com interface em tempo real usando o *software* QUARC.

3.1 Descrição do sistema *Rotary Flexible Link*

O equipamento utilizado na pesquisa foi o sistema *Rotary Flexible Link* do fabricante Quanser, mostrado na Figura 3.1, obtido através do auxílio regular a pesquisa FAPESP, (processo: 2013/04101-6).

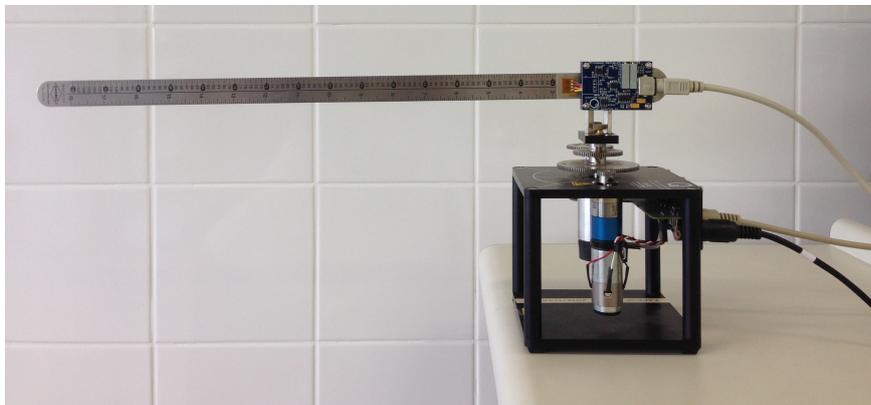


Figura 3.1: Sistema *Rotary Flexible Link*.

O equipamento pode ser dividido em dois módulos principais, sendo um servomecanismo e um *link* flexível. O servomecanismo é composto por um motor CC equipado com um conjunto de engrenagens, o qual é acoplado a uma estrutura sólida de alumínio. São acoplados três sensores no servomecanismo, um potenciômetro para medir a posição angular da saída, o tacômetro para medida de velocidade, e um encoder para uma medida mais precisa do ângulo de deslocamento. O *link* flexível consiste em uma viga de aço inoxidável fixo em uma extremidade, contendo um sensor do tipo *strain gage*, no qual tem a função de gerar um sinal de saída proporcional a flexão da viga.

Os parâmetros do sistema com seus valores são mencionados na Tabela 3.1, conforme (Quanser, 2011).

Tabela 3.1: Parâmetros físicos do sistema *Rotary Flexible Link*

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
B_{eq}	Coefficiente de amortecimento viscoso	0.004	$N.m/(rad/s)$
J_{eq}	Momento de inércia (eixo do motor)	2.08×10^{-3}	$kg.m^2$
m	Massa da viga	0.065	kg
l	Comprimento da viga	0.419	m
J_l	Momento de inércia (centro de massa)	0.0038	$kg.m^2$
K_s	Constante de rigidez	1.3	$N.m/rad$
K_g	Relação das engrenagens	70	
η_m	Eficiência do motor	0.69	
η_g	Eficiência da caixa de engrenagem	0.90	
k_m	Constante da força contra-eletromotriz	7.68×10^{-3}	$V/(rad/s)$
k_t	Constante de torque do motor	7.68×10^{-3}	$N.m/A$
V_{nom}	Tensão de entrada nominal no motor	6.0	V
R_m	Resistência da armadura	2.6	Ω
L_m	Indutância da armadura	0.18	mH
ω_n	Frequência natural	18.5	rad/s
ρ	Densidade linear da haste	0.1333	kg/m
EI	Módulo de Young da haste	0.1621	$N.m^2$

O encoder é utilizado para medir o deslocamento angular da viga (carga) é do tipo óptico, com uma resolução de 4096 contagens em quadratura e mede o ângulo relativo da viga (carga).

O *strain gage* é utilizado para medir a flexão da viga, é montado na base do apêndice, ou haste, e calibrado de tal modo que gere um sinal de aproximadamente 1 volt para cada polegada deslocada em um sentido ou em outro.

O conjunto do *link* flexível e o servomecanismo resultam em uma viga flexível com rotação horizontal, essa montagem se torna ideal para experimentos de sistemas de estruturas flexíveis, onde constata-se problemas ocasionados por vibrações, no qual podem ser atenuadas através de técnicas de controle. O *software* utilizado na coleta de dados e análise dos gráficos para a interface do sistema *Rotary Flexible Link* foi o MATLABTM/SIMULINKTM versão 2011, sendo popular em computação técnica e científica, sua popularidade deve-se a facilidade de utilização desse programa.

Geralmente em sistemas de controle, o MATLABTM é uma ferramenta utilizada para realizar os cálculos, devido a grande probabilidade de ocorrência de erro quando realizados de forma manual, aliado ao programa têm-se o SIMULINKTM que faz simulações de sistemas lineares e não-lineares, discretos e contínuos no tempo (Basilio, 2004).

3.2 Modelo Matemático a Parâmetros Concentrados

O propósito da modelagem matemática é representar todos os aspectos importantes do sistema com objetivo de obter as equações matemáticas que governam o comportamento do sistema. O modelo matemático pode ser linear ou não linear, dependendo do comportamento dos componentes do sistema. Modelos lineares permitem soluções rápidas e são simples de simular. Modelos não lineares às vezes revelam certas características do sistema que não podem ser previstas usando modelos lineares (Rao, 2008).

O modelo matemático considera a viga como um sistema a parâmetros concentrados bastante simples. Esse sistema consiste de uma viga metálica flexível acoplada a um servomecanismo que permite o movimento rotacional no plano horizontal. O sistema é instrumentado com um *strain gage* que pode medir a flexão na ponta da viga. Esse sistema é similar a estruturas flexíveis de grandes estruturas espaciais, como os painéis

em satélites artificiais ou estações espaciais, ou mesmo uma estrutura flexível como um manipulador robótico, um guindaste giratório, ou até mesmo ser utilizado para estudar o sistema de controle do Microscópio de Força Atômica. O sistema *Rotary Flexible Link* permite o estudo e análise de vibrações mecânicas em estruturas flexíveis.

Na Figura 3.2 são descritas as posições angulares da viga. A posição da viga rígida é dada pelo ângulo α , equivalente ao ângulo do servomotor, sendo representada pela linha reta. A posição da viga flexível, representada pela curva, é dada pela soma do ângulo do eixo do motor θ com a posição angular devido à flexão α .

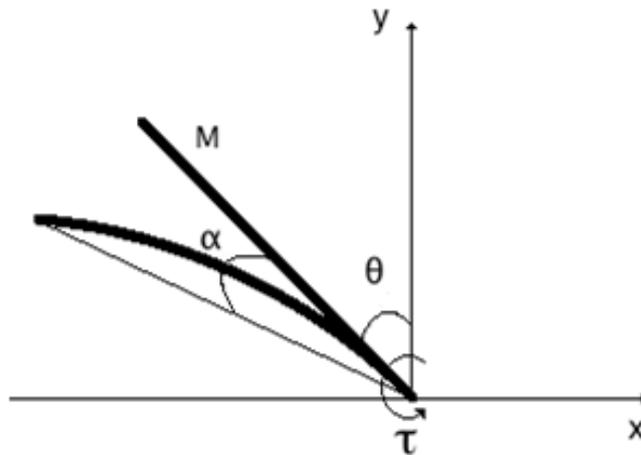


Figura 3.2: Representação do movimento da viga flexível (Lopes et al., 2014).

3.2.1 Modelo do Motor de Corrente Contínua

Motores de corrente contínua de ímã permanente é utilizado no sistema de controle. O circuito da armadura do motor é composto por uma tensão de entrada V_m , resistência da armadura R_m , indutância da armadura L_m , e a corrente I_m do circuito da armadura. A aplicação do motor CC é usado para gerar o torque necessário. O circuito da armadura do motor e a caixa de engrenagens são mostrados na Figura 3.3.

A força contra-eletromotriz *back-emf*, depende da velocidade do eixo do motor ω_m e da constante de *back-emf* do motor k_m . Ele se opõe ao fluxo da corrente. A força contra-eletromotriz é dada por:

$$e_b(t) = k_m \omega_m(t) \quad (3.1)$$

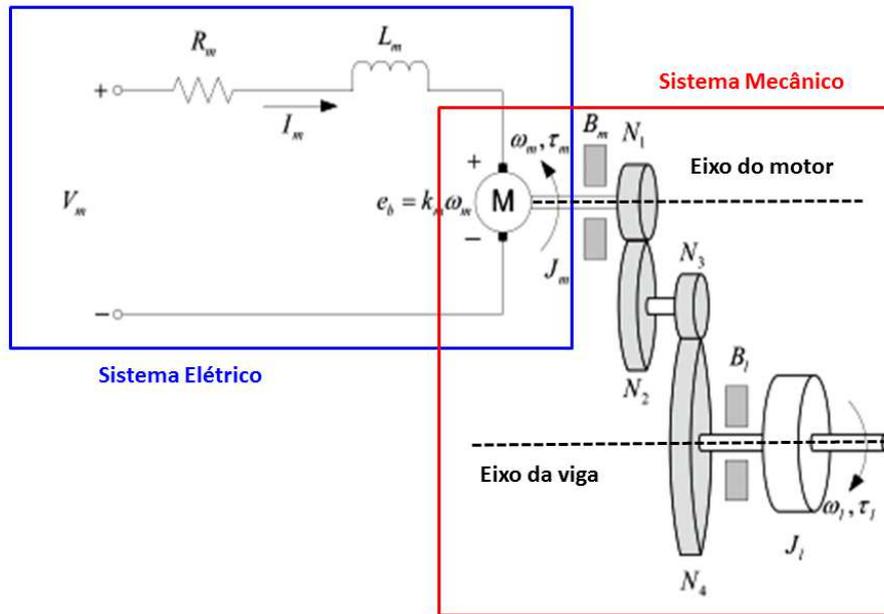


Figura 3.3: Circuito da armadura do motor CC e caixa de engrenagens (Quanser, 2011).

Usando a lei de tensão de Kirchhoff, podemos escrever a seguinte equação:

$$V_m(t) - R_m I_m(t) - L_m \frac{dI_m(t)}{dt} - k_m \omega_m(t) = 0 \quad (3.2)$$

No motor CC a indutância L_m da armadura é muito pequena (Castrucci, 2006; Ogata, 2003), de modo que:

$$L_m \frac{dI_m(t)}{dt} \ll R_m I_m(t) \quad (3.3)$$

assim a equação (3.2) pode ser simplificada para:

$$V_m(t) - R_m I_m(t) - k_m \omega_m(t) = 0 \quad (3.4)$$

Para determinar a corrente do motor $I_m(t)$ pode ser escrito conforme a equação abaixo:

$$I_m(t) = \frac{V_m(t) - k_m \omega_m(t)}{R_m} \quad (3.5)$$

Lembrando que $\omega_m = \dot{\theta}_m$, e a força contra-eletromotriz gerada pelo motor é proporcional à velocidade do motor.

O torque do motor τ_m varia proporcionalmente com a corrente I_m aplicada em sua armadura da seguinte maneira:

$$\tau_m(t) = \eta_m k_t I_m(t) \quad (3.6)$$

Onde k_t é a constante da relação corrente-torque em $(N.m/A)$, η_m é a eficiência do motor e I_m é a corrente da armadura.

O torque τ_l que é aplicado na base da viga flexível é:

$$\tau_l(t) = \eta_g K_g \tau_m(t) \quad (3.7)$$

Onde K_g é a relação das engrenagens e η_g é a eficiência da caixa de engrenagens. O conjunto da engrenagem planetária é montada diretamente no servomecanismo do sistema *Rotary Flexible Link* é representada pelas engrenagens N_1 , N_2 , N_3 e N_4 conforme a Figura 3.3 tem uma relação de engrenagem de:

$$K_g = \frac{N_2 N_4}{N_1 N_3} \quad (3.8)$$

Da mesma forma a velocidade angular de corpo rígido (θ) da viga, é proporcional à velocidade angular do eixo do motor ($\dot{\theta}_m = \omega_m$), ou seja:

$$\dot{\theta}_m = K_g \dot{\theta}_l \quad (3.9)$$

A partir das equações (3.5), (3.6), (3.7) e (3.9), obtém-se:

$$\tau_l = \frac{\eta_g K_g \eta_m k_t (V_m - K_g k_m \dot{\theta})}{R_m} \quad (3.10)$$

que é o torque aplicado na base da viga flexível.

3.2.2 Modelo Matemático da Viga Flexível Rotacional

O sinal de entrada do servomotor V_m gera um torque na engrenagem de carga, rotacionando a viga flexível. O atrito viscoso e o momento de inércia do eixo do

servomotor são B_{eq} e J_{eq} respectivamente. O modelo físico da viga em rotação é descrito na Figura 3.4.

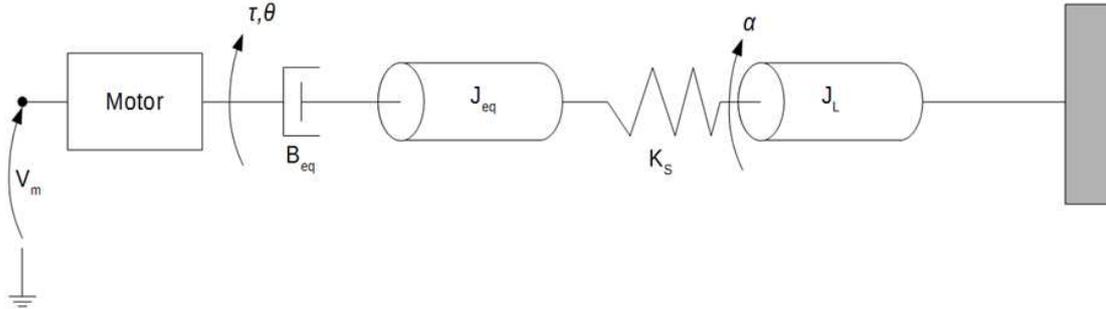


Figura 3.4: Modelo físico da viga flexível.

Conforme as equações para o deslocamento devido à flexão da viga, deve-se encontrar as equações que representam a dinâmica do sistema. Para isso, utilizando a formulação de Euler-Lagrange (Junkins and Kim, 1993).

A partir das figuras 3.2 e 3.4, a energia potencial V e cinética T do sistema são:

$$V = \frac{1}{2}K_s\alpha^2 \quad (3.11)$$

A energia cinética total T é dada pela soma da energia cinética devido ao deslocamento do corpo rígido com a energia cinética devido ao deslocamento flexível da viga:

$$T = \frac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_l(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 \quad (3.12)$$

Onde J_{eq} é o momento de inércia do eixo do motor, e J_l é o momento de inércia de corpo rígido da viga.

O Lagrangeano é dado por:

$$L = T - V \quad (3.13)$$

e com isso:

$$L = \frac{1}{2}J_{eq}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_l(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 - \frac{1}{2}K_s\alpha^2 \quad (3.14)$$

As coordenadas generalizadas do sistema são o ângulo de corpo rígido θ e o ângulo da flexão α . Com isso, aplicando a equação de Lagrange para cada coordenada generalizada tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_l}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau_l - B_{eq} \dot{\theta} \quad (3.15)$$

e

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \quad (3.16)$$

Resolvendo a equação (3.15):

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left(\frac{J_{eq} \dot{\theta}^2}{2} + \frac{J_l (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2}{2} - \frac{K_s \alpha^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{J_{eq} \dot{\theta}^2}{2} + \frac{J_l (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2}{2} - \frac{K_s \alpha^2}{2} \right) = \tau_l - B_{eq} \dot{\theta} \quad (3.17)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left(\frac{J_{eq} \dot{\theta}^2}{2} + \frac{J_l (\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\alpha} + \dot{\alpha}^2)}{2} - \frac{K_s \alpha^2}{2} \right) \right] = \tau_l - B_{eq} \dot{\theta} \quad (3.18)$$

$$\frac{d}{dt} \left(J_{eq} \dot{\theta} + J_l (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \right) = \tau_l - B_{eq} \dot{\theta} \quad (3.19)$$

Dessa forma, a dinâmica de corpo rígido é dada por:

$$(J_{eq} + J_l) \ddot{\theta} + J_l \ddot{\alpha} + B_{eq} \dot{\theta} = \tau_l \quad (3.20)$$

Resolvendo a equação (3.16):

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}} \left(\frac{J_{eq} \dot{\theta}^2}{2} + \frac{J_l (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2}{2} - \frac{K_s \alpha^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{J_{eq} \dot{\theta}^2}{2} + \frac{J_l (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2}{2} - \frac{K_s \alpha^2}{2} \right) = 0 \quad (3.21)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\alpha}} \left(\frac{J_{eq} \dot{\theta}^2}{2} + \frac{J_l (\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\alpha} + \dot{\alpha}^2)}{2} - \frac{K_s \alpha^2}{2} \right) \right] + K_s \alpha = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{d}{dt} \left(J_{eq} \dot{\theta} + J_l (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \right) = 0 \quad (3.23)$$

A dinâmica da flexão é dada pela equação:

$$J_l (\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) + K_s \alpha = 0 \quad (3.24)$$

Considerando as equações (3.10) e (3.20) obtém-se:

$$(J_{eq} + J_l)\ddot{\theta} + J_l\ddot{\alpha} + \left(B_{eq} + \frac{\eta_g\eta_m k_t k_m K_g^2}{R_m} \right) \dot{\theta} = \frac{\eta_g\eta_m k_t K_g}{R_m} V_m \quad (3.25)$$

Dessa forma as equações (3.25) e (3.24) representam o comportamento dinâmico do sistema *Rotary Flexible Link*, relacionando a tensão de entrada V_m com as variáveis θ e α , ângulo de corpo rígido e ângulo de flexão, respectivamente.

Definindo o vetor de estados de acordo com a equação (3.26)

$$x^T = \begin{bmatrix} \theta & \alpha & \dot{\theta} & \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

uma realização das equações (3.25) e (3.24) no espaço de estados é dada por:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.27)$$

$$y = Cx + Du \quad (3.28)$$

sendo,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_s}{J_{eq}} & -\frac{\eta_g\eta_m k_t k_m K_g^2 + B_{eq} R_m}{J_{eq} R_m} & 0 \\ 0 & -\frac{K_s(J_L + J_{eq})}{J_L J_{eq}} & \frac{\eta_g\eta_m k_t k_m K_g^2 + B_{eq} R_m}{J_{eq} R_m} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\eta_g\eta_m k_t K_g}{J_{eq} R_m} \\ -\frac{\eta_g\eta_m k_t K_g}{J_{eq} R_m} \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

3.3 Modelo Matemático a Parâmetros Distribuídos

Os parâmetros distribuídos descrevem muitos sistemas mecatrônicos com aplicações em indústrias aeronáuticas, robóticas, transportes de carga e transmissão de energia, baseado na teoria da viga de Euler-Bernoulli pode modelar com precisão a vibração longitudinal e transversal para viga. O subsistema mecânico envolve equações diferenciais parciais (EDP) acopladas a equações de atuador e sensores. A dinâmica elétrica dos circuitos de interface, atuadores e sensores são tipicamente agrupados e descritos por equações diferenciais ordinárias (EDO). E afirma que o princípio de Hamilton tem duas vantagens sobre outros métodos de geração de equações de movimento para sistemas mecânicos. O primeiro, as equações derivam das energias cinética, potencial e de trabalho do sistema, em segundo lugar, a abordagem gera automaticamente condições de contorno, incluindo os efeitos da inércia do atuador (Rahn and Rahn, 2001).

Em sistemas contínuos, o princípio de Hamilton estendido é amplamente utilizado para derivar as equações de movimento, e o uso do princípio de Hamilton oferece uma vantagem, por exemplo, as leis de Newton, em que as condições de contorno espaciais são obtidas automaticamente a partir da resultante das condições de transversalidade. Como exemplo clássico, considerou a vibração transversal de um viga de Euler-Bernoulli (engastada/livre), por sua simplicidade a deformação por cisalhamento e inércia rotativa foram ignorados para derivar as equações de movimento. Para generalidade, contudo, manteve uma densidade de massa variável e rigidez à deflexão (Junkins and Kim, 1993).

A viga flexível mostrado na Figura 3.5 é modelado de acordo com o modelo de uma viga de Euler-Bernoulli, preso a um cubo rotativo e livre na outra extremidade.

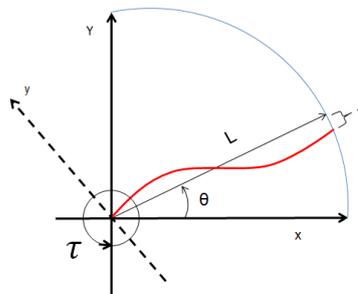


Figura 3.5: Representação da vista superior da haste flexível.

A energia cinética e potencial são dadas por:

$$T = \frac{1}{2}\rho \int_0^L \left[(\dot{v} + x\dot{\theta})^2 + (v\dot{\theta})^2 \right] dx \quad (3.33)$$

e

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI (v'')^2 dx \quad (3.34)$$

O Lagrangeano é definido por:

$$\mathcal{L} = T - U \quad (3.35)$$

Resultando em:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho \int_0^L \left[(\dot{v} + x\dot{\theta})^2 + (v\dot{\theta})^2 \right] dx - \frac{1}{2} \int_0^L EI (v'')^2 dx \quad (3.36)$$

O princípio de Hamilton afirma que a variação do Lagrangeano é identicamente zero $t \in [t_1, t_2]$, ou seja:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0 \quad (3.37)$$

Desde que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(v, \dot{v}, v'', \dot{\theta}, x)$ resulta em:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \delta v + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} \delta \dot{v} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v''} \delta v'' + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \delta \dot{\theta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \delta x \right\} dt = 0 \quad (3.38)$$

As derivadas parciais são dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = \rho \int_0^L v \dot{\theta}^2 dx \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}} = \rho \int_0^L (\dot{v} + x\dot{\theta}) dx \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v''} = -EI \int_0^L v'' dx \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \rho \int_0^L (x\dot{v} + x^2\dot{\theta} + v^2\dot{\theta}) dx \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \rho \int_0^L (\dot{v}\dot{\theta} + x\dot{\theta}^2) dx \quad (3.43)$$

Desenvolvendo as equações (3.39) a (3.43) na equação (3.38), resulta:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \rho \int_0^L v \dot{\theta}^2 dx \delta v + \rho \int_0^L (\dot{v} + x \dot{\theta}) dx \delta \dot{v} + -EI \int_0^L v'' dx \delta v'' + \right. \\ \left. \rho \int_0^L (x \dot{v} + x^2 \dot{\theta} + v^2 \dot{\theta}) dx \delta \dot{\theta} + \rho \int_0^L (\dot{v} \dot{\theta} + x \dot{\theta}^2) dx \delta x \right\} dt = 0 \quad (3.44)$$

Para eliminar os termos $\delta \dot{v}$, $\delta v''$, e $\delta \dot{\theta}$ na equação (3.44) é realizada a seguinte integração por partes.

A integração por partes do termo envolvendo $\delta \dot{v}$ é dada por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\rho \int_0^L (\dot{v} + x \dot{\theta}) dx \right] \delta \dot{v} dt = uw|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} w du$$

Para $u = \rho \int_0^L (\dot{v} + x \dot{\theta}) dx \Rightarrow du = \rho \int_0^L (\ddot{v} + x \ddot{\theta}) dx dt$, e para $dw = \delta \dot{v} dt$, desde que $\delta \dot{v} = \frac{d}{dt} \delta v$, com $w = \delta v$. Resultando:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\rho \int_0^L (\dot{v} + x \dot{\theta}) dx \right] \delta \dot{v} dt = \rho \int_0^L (\dot{v} + x \dot{\theta}) dx \delta v \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[\rho \int_0^L (\ddot{v} + x \ddot{\theta}) dx \right] dt \delta v \quad (3.45)$$

Da mesma forma, a integração por partes do termo envolvendo $\delta \dot{\theta}$ é dada por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\rho \int_0^L (x \dot{v} + x^2 \dot{\theta} + v^2 \dot{\theta}) dx \right] \delta \dot{\theta} dt = uw|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} w du$$

Para $u = \rho \int_0^L (x \dot{v} + x^2 \dot{\theta} + v^2 \dot{\theta}) dx \Rightarrow du = \rho \int_0^L (x \ddot{v} + 2v \dot{v} \dot{\theta} + (x^2 + v^2) \ddot{\theta}) dx dt$, e para $dw = \delta \dot{\theta} dt$, desde que $\delta \dot{\theta} = \frac{d}{dt} \delta \theta$, com $w = \delta \theta$. Resultando em:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\rho \int_0^L (x \dot{v} + x^2 \dot{\theta} + v^2 \dot{\theta}) dx \right] dt \delta \dot{\theta} = \rho \int_0^L (x \dot{v} + x^2 \dot{\theta} + v^2 \dot{\theta}) dx \delta \theta \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[\rho \int_0^L (x \ddot{v} + 2v \dot{v} \dot{\theta} + (x^2 + v^2) \ddot{\theta}) dx \right] dt \delta \theta \quad (3.46)$$

Finalmente, a integração por partes do termo envolvendo $\delta v''$ é dada por:

$$\int_0^L v'' \delta v'' dx = uw|_0^L - \int_0^L w du$$

Para $u = v'' \Rightarrow du = v'''dx$, e para $dw = \delta v''dx$, desde que $\delta v'' = \frac{d^2}{dx^2}\delta v$, com $w = \delta v'$. Resultando:

$$\int_0^L v'' \delta v'' dx = v'' \delta v' \Big|_0^L - \int_0^L v''' \delta v' dx$$

Outra integração por partes é necessária no segundo termo do lado direito da equação acima. Assim sendo,

$$\int_0^L v''' \delta v' dx = uv \Big|_0^L - \int_0^L w du$$

Para $u = v''' \Rightarrow du = v^{iv}dx$, e para $dw = \delta v' dx$, desde que $\delta v' = \frac{d}{dx}\delta v$, com $w = \delta v$ consequentemente temos,

$$\int_0^L v''' \delta v' dx = v''' \delta v \Big|_0^L - \int_0^L v^{iv} dx \delta v$$

E considerando as relações precedentes, resultando em:

$$\int_0^L v'' \delta v'' dx = v'' \delta v' \Big|_0^L - v''' \delta v \Big|_0^L + \int_0^L v^{iv} dx \delta v \quad (3.47)$$

Substituindo as equações (3.45), (3.46) e (3.47) na equação (3.44), resulta:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \left[\rho \left(v \dot{\theta}^2 - \ddot{v} - x \ddot{\theta} \right) - E I v^{iv} \right] dx \delta v \right. \\ \left. - \int_0^L \rho \left[x \ddot{v} + 2v \dot{\theta} + (x^2 + v^2) \ddot{\theta} \right] dx \delta \theta \right. \\ \left. + \int_0^L \rho \left(\dot{v} \dot{\theta} + x \dot{\theta}^2 \right) dx \delta x - E I v'' \delta v' \Big|_0^L + E I v''' \delta v \Big|_0^L \right\} dt \\ + \int_0^L \rho \left(\dot{v} + x \dot{\theta} \right) dx \delta v \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_0^L \rho \left(x \dot{v} + x^2 \dot{\theta} + v^2 \dot{\theta} \right) dx \delta \theta \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Como $\delta v(t_1) = \delta v(t_2) = 0$ e $\delta \theta(t_1) = \delta \theta(t_2) = 0$ conforme (Meirovitch, 1970), os termos de contorno fora da integração sobre t na equação (3.48) são zero, por exemplo,

$$\int_0^L \rho \left(\dot{v} + x \dot{\theta} \right) dx \delta v \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (3.49)$$

$$\int_0^L \rho \left(x \dot{v} + x^2 \dot{\theta} + v^2 \dot{\theta} \right) dx \delta \theta \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (3.50)$$

Adicionalmente, os termos de contorno dentro da integração sobre t na equação (3.48), podem ser reescritos como:

$$\int_{t_1}^{t_2} (EIv''' \delta v|_{x=L} - EIv''' \delta v|_{x=0}) dt = 0, \quad (3.51)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} (EIv'' \delta v'|_{x=L} - EIv'' \delta v'|_{x=0}) dt = 0. \quad (3.52)$$

Para $x = 0$, a viga é fixa, resultando que $\delta v(0, t) = \delta v'(0, t) = 0$, nas equações (3.51) e (3.52). Pela mesma razão, em $x = 0$, resulta as condições de contorno:

$$v(0, t) = 0, \quad (3.53)$$

$$v'(0, t) = 0. \quad (3.54)$$

Adicionalmente, para $x = L$, $\delta v(L, t)$ e $\delta v'(L, t)$ são arbitrários. Consequentemente, para satisfazer as equações (3.51) e (3.52), temos as seguintes condições de contorno:

$$v''(L, t) = 0, \quad (3.55)$$

$$v'''(L, t) = 0, \quad (3.56)$$

As variações δx são zero devido a restrições geométricas consideradas no movimento da viga.

As relações anteriores aplicadas na equação (3.48) resultam:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L \left[\rho (v\dot{\theta}^2 - \ddot{v} - x\ddot{\theta}) - EIv^{iv} \right] dx \delta v - \int_0^L \rho \left[x\ddot{v} + 2v\dot{\theta}\dot{\theta} + (x^2 + v^2)\ddot{\theta} \right] dx \delta \theta \right\} dt = 0 \quad (3.57)$$

De acordo com o princípio de Hamilton, a equação (3.57) é identicamente zero, conseqüentemente, as seguintes integrais também são identicamente zero.

$$\int_0^L \rho \left[x\ddot{v} + 2v\dot{\theta}\dot{\theta} + (x^2 + v^2)\ddot{\theta} \right] dx \delta \theta = 0 \quad (3.58)$$

$$\int_0^L \left[\rho (v\dot{\theta}^2 - \ddot{v} - x\ddot{\theta}) - EIv^{iv} \right] dx \delta v = 0 \quad (3.59)$$

Pode-se notar que $\delta\theta$ é arbitrária sobre $x \in [0, L]$ na equação (3.58). E também δv é arbitrária no intervalo $x \in [0, L]$ na equação (3.59) e para $x = 0$, devido às restrições de fixação, a expressão entre colchetes na equação (3.59) é zero. Resultando em:

$$x\ddot{v} + 2v\dot{\theta} + (x^2 + v^2)\ddot{\theta} = \tau_L, \quad (3.60)$$

$$\rho v\dot{\theta}^2 - \rho\ddot{v} - \rho x\ddot{\theta} - EIv^{iv} = 0 \quad (3.61)$$

Onde τ representam os torques externos aplicados na viga. As equações (3.60) e (3.61) representam as equações do movimento, respectivamente para corpo rígido e para a deflexão.

3.3.1 Aplicação da Técnica dos Modos Assumidos

O método de modos assumidos considera a seguinte separação de variáveis (Meirovitch, 1980; P.Hagedorn and Stadler, 1998).

$$v = \sum_{i=1}^N \phi_i(x)q_i(t). \quad (3.62)$$

Substituindo a equação (3.62) na equação (3.36), resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}\rho \int_0^L \left[\left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x)\dot{q}_i(t) + x\dot{\theta} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x)q_i(t) \right)^2 \dot{\theta}^2 \right] dx \\ & - \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x)''q_i(t) \right)^2 dx \end{aligned} \quad (3.63)$$

A partir do princípio de Hamilton, declarado na equação(3.37), considerando $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N, \dot{\theta}, x)$, e que as variações δx são zero, resultando em:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{\eta=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\eta} \delta q_\eta + \sum_{\kappa=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\kappa} \delta \dot{q}_\kappa + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \delta \dot{\theta} \right\} dt = 0. \quad (3.64)$$

As derivadas parciais são dadas por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\eta} = \int_0^L \left[\rho \phi_\eta \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \right) \dot{\theta}^2 - EI \phi_\eta'' \left(\sum_{i=1}^N \phi_i''(x) q_i(t) \right) \right] dx \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\kappa} = \int_0^L \rho \phi_\kappa(x) \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) \dot{q}_i(t) + x \dot{\theta} \right) dx \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \int_0^L \rho \left[x \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) \dot{q}_i(t) + x \dot{\theta} \right) + \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \right)^2 \dot{\theta} \right] dx \quad (3.67)$$

Substituindo as equações (3.65), (3.66) e (3.67) na equação (3.64), resulta:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{\eta=1}^N \int_0^L \left[\rho \phi_\eta \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \right) \dot{\theta}^2 - EI \phi_\eta'' \left(\sum_{i=1}^N \phi_i''(x) q_i(t) \right) \right] dx \delta q_\eta + \sum_{\kappa=1}^N \int_0^L \rho \phi_\kappa(x) \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) \dot{q}_i(t) + x \dot{\theta} \right) dx \delta \dot{q}_\kappa + \int_0^L \rho \left[x \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) \dot{q}_i(t) + x \dot{\theta} \right) + \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \right)^2 \dot{\theta} \right] dx \delta \dot{\theta} \right\} dt = 0. \quad (3.68)$$

Para eliminar os termos $\delta \dot{q}_i$ e $\delta \dot{\theta}$ na equação (3.68), é realizada a seguinte integração por partes.

A integração por partes do termo envolvendo $\delta \dot{\theta}$ é a seguinte:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho \left[x \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) \dot{q}_i(t) + x \dot{\theta} \right) + \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \right)^2 \dot{\theta} \right] dx \delta \dot{\theta} dt = u w \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} w du$$

Para $u = \int_0^L \rho \left[x \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) \dot{q}_i(t) + x \dot{\theta} \right) + \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \right)^2 \dot{\theta} \right] dx \Rightarrow$
 $du = \int_0^L \rho \left[x \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \ddot{q}_i(t) + 2 \sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \sum_{j=1}^N \phi_j(x) \dot{q}_j(t) \dot{\theta} + \left(x^2 + \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \right)^2 \right) \ddot{\theta} \right] dx dt$, e para $dw = \delta \dot{\theta} dt$, desde que $\delta \dot{\theta} = \frac{d}{dt} \delta \theta$, com $w = \delta \theta$.

A integração é dada por:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho \left[x \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) \dot{q}_i(t) + x \dot{\theta} \right) + \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \right)^2 \dot{\theta} \right] dx \delta \dot{\theta} dt = \\
& \int_0^L \rho \left[x \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) \dot{q}_i(t) + x \dot{\theta} \right) + \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \right)^2 \dot{\theta} \right] dx \delta \theta \Big|_{t_1}^{t_2} - \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho \left[x \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \ddot{q}_i(t) + \left(x^2 + \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \right)^2 \right) \ddot{\theta} + \right. \\
& \left. 2 \sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \sum_{j=1}^N \phi_j(x) \dot{q}_j(t) \dot{\theta} \right] dx dt \delta \theta
\end{aligned} \tag{3.69}$$

A integração por partes do termo envolvendo $\delta \dot{q}_\kappa$ é dada por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho \phi_\kappa(x) \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) \dot{q}_i(t) + x \dot{\theta} \right) dx \delta \dot{q}_\kappa dt = u w \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} w du$$

Para $u = \int_0^L \rho \phi_\kappa(x) \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) \dot{q}_i(t) + x \dot{\theta} \right) dx \Rightarrow du = \int_0^L \rho \phi_\kappa(x) \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) \ddot{q}_i(t) + x \ddot{\theta} \right) dx dt$, e para $dw = \delta \dot{q}_\kappa dt$, desde que $\delta \dot{q}_\kappa = \frac{d}{dt} \delta q_\kappa$, com $w = \delta q_\kappa$. A integração é então dada por:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho \phi_\kappa(x) \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) \dot{q}_i(t) + x \dot{\theta} \right) dx \delta \dot{q}_\kappa dt = \\
& \int_0^L \rho \phi_\kappa(x) \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) \dot{q}_i(t) + x \dot{\theta} \right) dx \delta q_\kappa \Big|_{t_1}^{t_2} - \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho \phi_\kappa(x) \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) \ddot{q}_i(t) + x \ddot{\theta} \right) dx \delta q_\kappa dt
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Substituindo as equações (3.69) e (3.70) equação (3.68), resulta:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{\eta=1}^N \int_0^L \left[\rho \phi_\eta \left(- \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \ddot{q}_i(t) - x \ddot{\theta} + \sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \dot{\theta}^2 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - EI \phi_\eta'' \sum_{i=1}^N \phi_i''(x) q_i(t) \right] dx \delta q_\eta + \right. \\
& \quad \left. \int_0^L \rho \left[x \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \ddot{q}_i(t) + \left(x^2 + \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \right)^2 \right) \ddot{\theta} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. 2 \sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \sum_{j=1}^N \phi_j(x) \dot{q}_j(t) \dot{\theta} \right] dx \delta \theta \right\} dt \\
& \quad \left. \sum_{\eta=1}^N \int_0^L \rho \phi_\eta(x) \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) \dot{q}_i(t) + x \dot{\theta} \right) dx \delta q_\eta \right|_{t_1}^{t_2} + \\
& \quad \left. \int_0^L \rho \left[x \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) \dot{q}_i(t) + x \dot{\theta} \right) + \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \right)^2 \dot{\theta} \right] dx \delta \theta \right|_{t_1}^{t_2} = 0.
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Os termos $\delta q_\eta(t_1) = \delta q_{\eta t_1}(t_2) = 0$ e $\delta \theta(t_1) = \delta \theta(t_2) = 0$, que cada um dos termos de contorno fora da integração sobre t na equação (3.71) são zero (Meirovitch, 1970).

$$\int_0^L \rho \left[x \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) \dot{q}_i(t) + x \dot{\theta} \right) + \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \right)^2 \dot{\theta} \right] dx \delta \theta \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \tag{3.72}$$

$$\int_0^L \rho \phi_\eta(x) \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) \dot{q}_i(t) + x \dot{\theta} \right) dx \delta q_\eta \Big|_{t_1}^{t_2} = 0, \tag{3.73}$$

para $\eta = 1, \dots, N$. A equação (3.71) é identicamente zero, as seguintes integrais são:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \rho \left[x \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \ddot{q}_i(t) + \left(x^2 + \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \right)^2 \right) \ddot{\theta} + \right. \\
& \quad \left. 2 \sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \sum_{j=1}^N \phi_j(x) \dot{q}_j(t) \dot{\theta} \right] dx \delta \theta = 0
\end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \left[\rho \phi_\eta \left(- \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \ddot{q}_i(t) - x \ddot{\theta} + \sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \dot{\theta}^2 \right) \right. \\
& \quad \left. - EI \phi_\eta'' \sum_{i=1}^N \phi_i''(x) q_i(t) \right] dx \delta q_\eta = 0
\end{aligned} \tag{3.75}$$

para $\eta = 1, \dots, N$.

Pode-se notar que $\delta\theta$ é arbitrário sobre $x \in [0, L]$ na equação (3.74). E também δq_n são arbitrários no intervalo $x \in [0, L]$ na equação (3.75), e para $x = 0$, devido às restrições de fixação, a expressão entre colchetes na equação (3.75) é zero. Resultando em:

$$x \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \ddot{q}_i(t) + \left(x^2 + \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \right)^2 \right) \ddot{\theta} + 2 \sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \sum_{j=1}^N \phi_j(x) \dot{q}_j(t) \dot{\theta} = \tau_i \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \rho \phi_1 \left(- \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \ddot{q}_i(t) - x \ddot{\theta} + \sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \dot{\theta}^2 \right) - EI \phi_1'' \sum_{i=1}^N \phi_i''(x) q_i(t) &= 0 \\ \vdots & \\ \rho \phi_N \left(- \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \ddot{q}_i(t) - x \ddot{\theta} + \sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \dot{\theta}^2 \right) - EI \phi_N'' \sum_{i=1}^N \phi_i''(x) q_i(t) &= 0 \end{aligned} \quad (3.77)$$

Onde τ representam os torques externos aplicados na viga. As equações (3.76) e (3.77) representam as equações do movimento, respectivamente para corpo rígido e para a deflexão.

3.3.2 Equações do Movimento Completa

As equações de movimento obtidas antes da aplicação do método de Modos Assumidos consistem em um conjunto de equações diferenciais parciais. A partir das equações (3.60), (3.61) e (3.10) as equações de movimento são dadas por:

$$(x^2 + v^2) \ddot{\theta} + x \ddot{v} + \left(2v \dot{v} + \frac{\eta_g \eta_m k_t k_m K_g^2}{R_m} \right) \dot{\theta} = \frac{\eta_g \eta_m k_t k_m K_g}{R_m} V_m, \quad (3.78)$$

$$\rho v \dot{\theta}^2 - \rho \ddot{v} - \rho x \ddot{\theta} - EI v^{iv} = 0 \quad (3.79)$$

Para obter um conjunto de equações diferenciais ordinárias foi aplicado o método dos Modos Assumidos a partir das equações (3.76), (3.77) e (3.10).

$$\begin{aligned}
x \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \ddot{q}_i(t) + \left(x^2 + \left(\sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \right)^2 \right) \ddot{\theta} + \\
\left(\frac{\eta_g \eta_m k_t k_m K_g^2}{R_m} + 2 \sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \sum_{j=1}^N \phi_j(x) \dot{q}_j(t) \right) \dot{\theta} = \frac{\eta_g \eta_m k_t k_m K_g}{R_m} V_m,
\end{aligned} \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned}
\rho \phi_1 \left(- \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \ddot{q}_i(t) - x \ddot{\theta} + \sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \dot{\theta}^2 \right) - EI \phi_1'' \sum_{i=1}^N \phi_i''(x) q_i(t) = 0 \\
\vdots \\
\rho \phi_N \left(- \sum_{i=1}^N \phi_i(x) \ddot{q}_i(t) - x \ddot{\theta} + \sum_{i=1}^N \phi_i(x) q_i(t) \dot{\theta}^2 \right) - EI \phi_N'' \sum_{i=1}^N \phi_i''(x) q_i(t) = 0
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Capítulo 4

Resultados Experimentais

Conforme o objetivo da pesquisa os resultados experimentais foram desenvolver um modelo matemático para vigas flexíveis, considerando o método de Euler-Lagrange, a validação do modelo, análise das condições de controlabilidade e observabilidade, projeto de um Observador de Estado, estimando a flexão da viga, e com isso, eliminando o sensor *strain gage*. Dessa forma foi possível projetar o sistema de controle, atenuando as vibrações devidas à flexão de viga, utilizando como dispositivo sensor apenas um encoder para medir a posição angular do eixo do motor, estimando as demais variáveis de estado, como por exemplo o ângulo devido a flexão de viga e a velocidade de rotação do eixo do motor.

4.1 Projeto do Observador de Estados

Como foi dito anteriormente, um Observador de Estados é um sistema de controle de malha fechada cujo o objetivo é o de estimar as variáveis de estados da planta. Entretanto para que seja possível o projeto de um Observador de Estados é necessário testar se o sistema é controlável e observável, com isso pode-se estimar os estados a partir da medição da saída (Ogata, 2003).

4.1.1 Controlabilidade

Um sistema é dito controlável no instante t_0 se é possível, usando-se um vetor de controle arbitrário (sem restrições), transferir o sistema de qualquer estado inicial $x(t_0)$

para qualquer outro estado em um intervalo finito de tempo (Ogata, 2003).

A representação por espaço de estados para um sistema dinâmico linear, ou seja, a planta do sistema é apresentada em forma matriciais:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 625 & -40.5720 & 0 \\ 0 & -976.1053 & 40.5720 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 61.8933 \\ -61.8933 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

A controlabilidade depende apenas das matrizes A e B e está associada à existência de uma trajetória ligando dois pontos quaisquer do espaço de estados. O sistema $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$ é controlável se e somente se o posto da matriz de controlabilidade é igual a n , ou seja, se M_{cont} tem posto completo.

$$M_{cont} = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Repare que a dimensão de M_{cont} é $n \times n.m$. O posto de uma matriz está associado ao número de linhas (ou colunas) linearmente independentes, e o valor máximo do posto é dado pelo mínimo entre o número de linhas e o número de colunas. Matrizes que têm posto máximo são chamadas de matrizes de posto completo.

A Controlabilidade é calculada no MATLABTM com o comando *ctrb*.

```
>> CONT = ctrb(A, B)
```

$$CONT = 1.0e + 005 * \begin{bmatrix} 0 & 0.0006 & -0.0251 & 0.6320 \\ 0 & -0.0006 & 0.0251 & -0.4202 \\ 0.0006 & 0.0251 & 0.6320 & -9.5463 \\ -0.0006 & -0.0251 & -0.4202 & 1.3556 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Utilizando o MATLABTM com o comando *rank(CONT)* calcula do posto da matriz, e o comando *length(A)* mostra a ordem do sistema:

```
>> rank(CONT)
```

```
ans = 4
```

```
>> ordemdosistema = length(A)
ans = 4
```

Como o sistema é de 4 ordem e o calculo do $rank(CONT)$ é 4, essa igualdade demonstra que o sistema é controlável.

4.1.2 Observabilidade

Um sistema é dito observável no instante t_0 se, com o sistema no estado $x(t_0)$, é possível determinar este estado a partir da observação de saída durante um intervalo de tempo finito (Ogata, 2003).

O sistema $\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$ é observável se e somente se o posto da matriz de observabilidade é igual a n , ou seja, se \mathcal{O} tem posto completo. Repare que a dimensão de M_{obs} é $p.n \times n$.

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

A Observabilidade é calculada no MATLABTM com o comando *obsv*.

```
>> OBSEER = obsv(A, C)
```

$$OBSEER = \begin{bmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0 & -342.1052 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -342.1052 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Utilizando o MATLABTM com o comando $rank(OBSEER)$ calcula do posto da matriz, e o comando $length(A)$ mostra a ordem do sistema:

```
>> rank(OBSEER)
ans = 4
```

```
>> ordemdosistema = length(A)
ans = 4
```

Quando o cálculo do posto da matriz $rank(OBSER)$, é igual a ordem do sistema (planta), dizemos que o sistema é observável (Kailath, 1980; Chen, 1995).

O modelo matemático foi validado por experimentos e simulações numéricas no *Rotary Flexible Link* utilizado para analisar o comportamento da deflexão da viga, assim como o *software* MATLABTM/SIMULINKTM, para demonstrar os cálculos e os gráficos resultantes do experimento, com interface em tempo real usando o software QUARC.

Para implementar e validar o observador para o controle de posição é possível através das configurações experimentais no *Rotary Flexible Link* da Quanser sob diferentes condições de carga (Ginoya et al., 2011).

No projeto de sistemas de controle utilizando observadores de estado, os mesmos podem reconstruir os estados não medidos ou os valores provenientes de pontos de difícil acesso no sistema a partir das variáveis de estado disponíveis (Meirovitch, 1990).

Observador de estados é um subsistema para reconstruir o vetor de estado da planta. O modelo matemático do observador é basicamente o mesmo que o da planta, exceto que por um termo adicional que incorpora o erro de estimação. O erro de estimação é dado pela diferença entre o estado inicial (\mathbf{x}) e o estado estimado ($\tilde{\mathbf{x}}$) (Ogata, 2003).

A planta do sistema é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u\end{aligned}\tag{4.6}$$

A modelagem matemática do observador é definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_e(y - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{K}_ey\end{aligned}\tag{4.7}$$

Onde $\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}$ é a saída estimada e a matriz \mathbf{K}_e é a matriz ganho do Observador.

Admitindo que a planta seja dada pelas equações (4.6) e o modelo do observador pela equação (4.7), é possível obter a equação do erro da observação, para isso basta subtraí-las.

$$\dot{\mathbf{x}} - \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})\tag{4.8}$$

A diferença entre \mathbf{x} e $\tilde{\mathbf{x}}$ como sendo o vetor erro \mathbf{e} , ou seja

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$$

Portanto, a equação (4.8) torna-se:

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C})\mathbf{e} \quad (4.9)$$

A equação (4.9) o comportamento dinâmico do vetor erro é determinado pelos autovalores da matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C})\mathbf{e}$, se esta for uma matriz estável o erro convergirá para zero para qualquer que seja o valor do vetor $\mathbf{e}(0)$.

A planta sendo observável é possível escolher uma matriz \mathbf{K}_e de tal forma que $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C})\mathbf{e}$ tenha seus auto valores arbitrariamente escolhidos, pode se dizer que a matriz \mathbf{K}_e (matriz ganho do observador) serve para gerar uma matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C})\mathbf{e}$ desejada.

Para encontrar a matriz K (ganho) de realimentação, usa-se as matrizes A e B da planta mais a sua equação característica $\phi(A)$.

Reescrevendo as equações (4.6) com realimentação de estado $u = -\mathbf{K}\mathbf{x}$,

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{x} \quad (4.10)$$

Podemos definir:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{BK} \quad (4.11)$$

Da equação característica:

$$\begin{aligned} |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| &= |s\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)\dots(s - \mu_n) \\ &= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

Do teorema de Cayley-Hamilton:

$$\phi(\tilde{\mathbf{A}}) = \tilde{\mathbf{A}}^n + \alpha_1 \tilde{\mathbf{A}}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \tilde{\mathbf{A}} + \alpha_n \mathbf{I} = 0 \quad (4.13)$$

Como $\phi(\tilde{\mathbf{A}}) = 0$, obtemos:

$$\phi(\tilde{\mathbf{A}}) = \phi(\mathbf{A}) - \alpha_2 \mathbf{BK} - \alpha_1 \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{BK}\tilde{\mathbf{A}}^2 - \alpha_1 \mathbf{ABK} - \mathbf{ABK}\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{A}^2 \mathbf{BK} \quad (4.14)$$

Logo:

$$\begin{aligned}\phi(\tilde{\mathbf{A}}) &= \mathbf{B}(\alpha_2 \mathbf{K} + \alpha_1 \mathbf{K} \tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K} \tilde{\mathbf{A}}^2) + \mathbf{A} \mathbf{B}(\alpha_1 \mathbf{K} + \mathbf{K} \tilde{\mathbf{A}}) + \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \mathbf{K} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A} \mathbf{B} & \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \mathbf{K} + \alpha_1 \mathbf{K} \tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{K} \tilde{\mathbf{A}}^2 \\ \alpha_1 \mathbf{K} + \mathbf{K} \tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{K} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.15)$$

Com as devidas manipulações pode ser reescrito como:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A} \mathbf{B} & \mathbf{A}^2 \mathbf{B} \end{bmatrix}^{-1} \phi(\mathbf{A}) \quad (4.16)$$

A equação (4.16) representa a fórmula de Ackermann para a determinação da matriz de ganho K de realimentação de estado.

Utilizando a Fórmula de Ackermann encontramos a seguinte matriz de ganho do observador:

$$\mathbf{k}_e = \begin{bmatrix} 10 & 9 & 11 & 8, 8 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

O desenvolvimento do projeto do Observador de Estados desta pesquisa permitiu estimar as variáveis de posição, velocidade e o deslocamento da flexão.

A seguir são apresentados os resultados experimentais do projeto do Observador de Estados, sendo a comparação entre planta do sistema real e as variáveis de estados, analisando as variáveis de posição angular, velocidade angular, deslocamento flexível e o erro quadrático.

Diagrama de blocos de um sistema é uma representação gráfica dos fluxos dos sinais e das funções desempenhadas por cada componente do sistema diferindo da representação matemática abstrata pura, tem a vantagem de indicar pela simples interligação dos blocos, de acordo com o fluxo de sinais do sistema real, e pela possibilidade de avaliar a contribuição de cada componente para o desempenho global do sistema. Um diagrama de blocos contém informações relativas ao comportamento dinâmico, mas não inclui nenhuma informação sobre a construção física do sistema (Ogata, 2003).

A Figura 4.1 mostra o diagrama de blocos do sistema com o observador de ordem plena, onde foram estimadas todas as variáveis de estados.

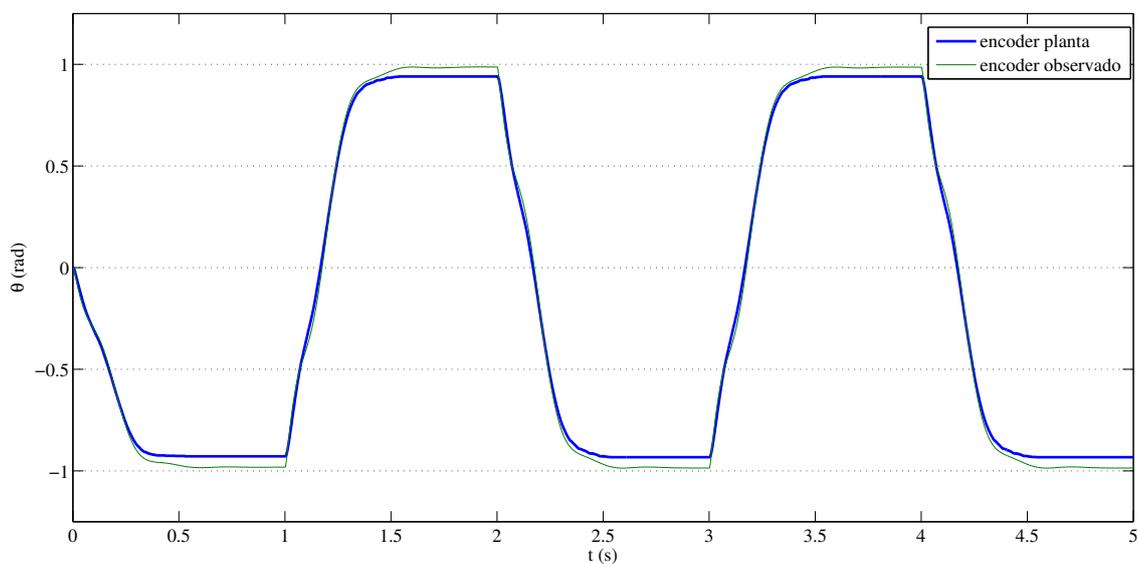


Figura 4.2: Comparativo entre planta e o observador, utilizando Encoder.

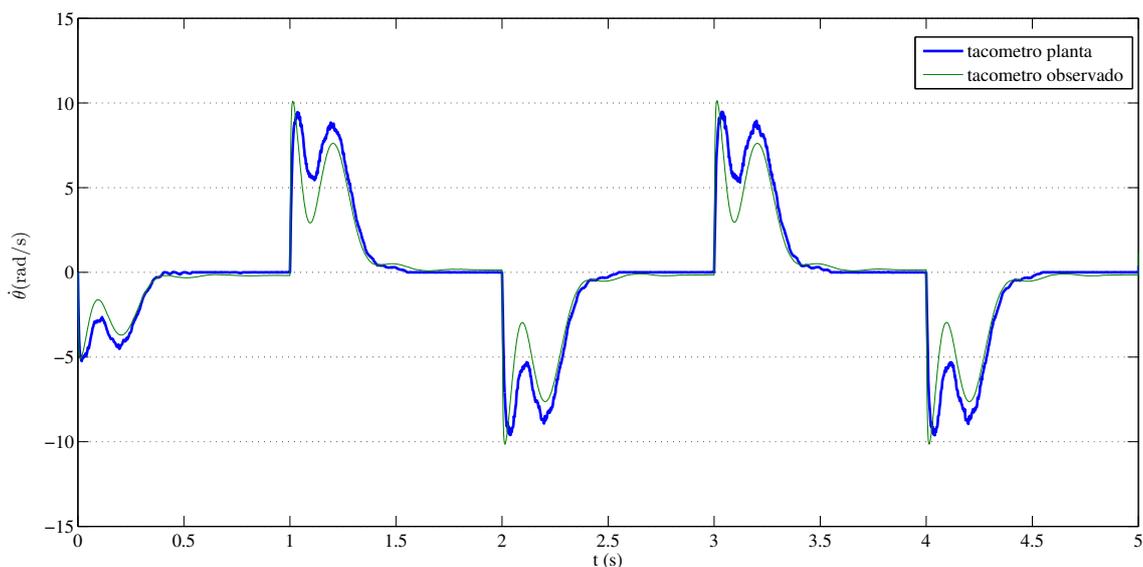


Figura 4.3: Comparativo entre planta e o observador, utilizando Tacômetro.

O comparativo em relação ao deslocamento flexível α medido pelo *strain gage* e a variável de estado estimada $\tilde{\alpha}$, a Figura 4.4 mostra um bom resultado para a estimação da amplitude da flexão. Com isso, será possível dispensar a utilização do *strain gage* na malha de controle.

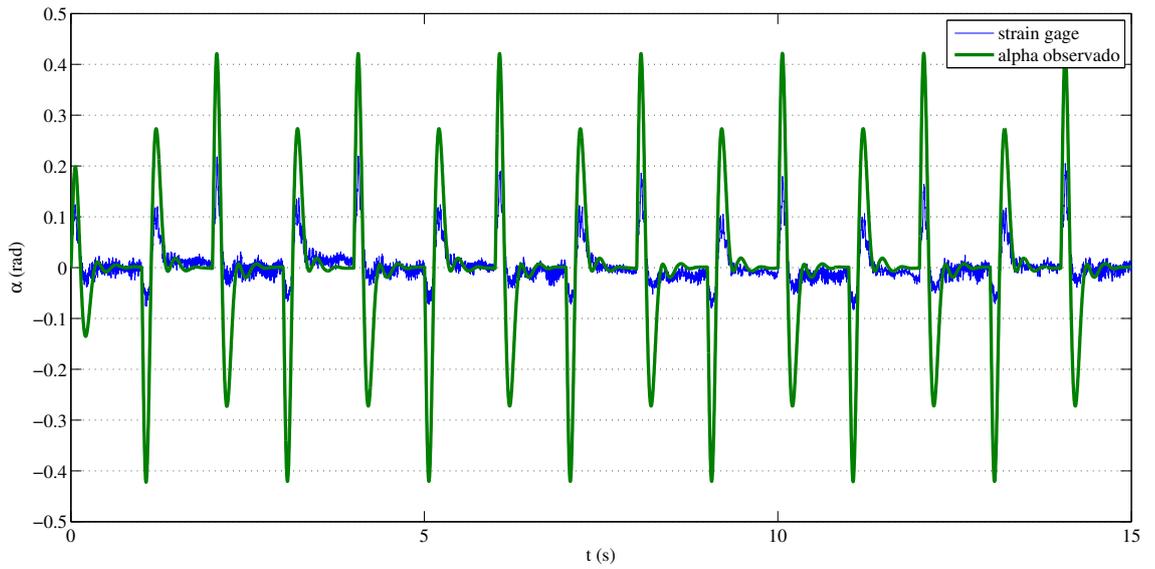


Figura 4.4: Comparativo entre planta e o observador, utilizando strain gage.

O Erro Quadrático entre a variável observada $\hat{\theta}$ e a variável medida $\dot{\theta}$, (tacômetro) mostrado na Figura 4.5, indica que passado o transitório o erro de estimação tende para um valor suficientemente pequeno, mostrando que o projeto do Observador de Estados pode ser considerado satisfatório.

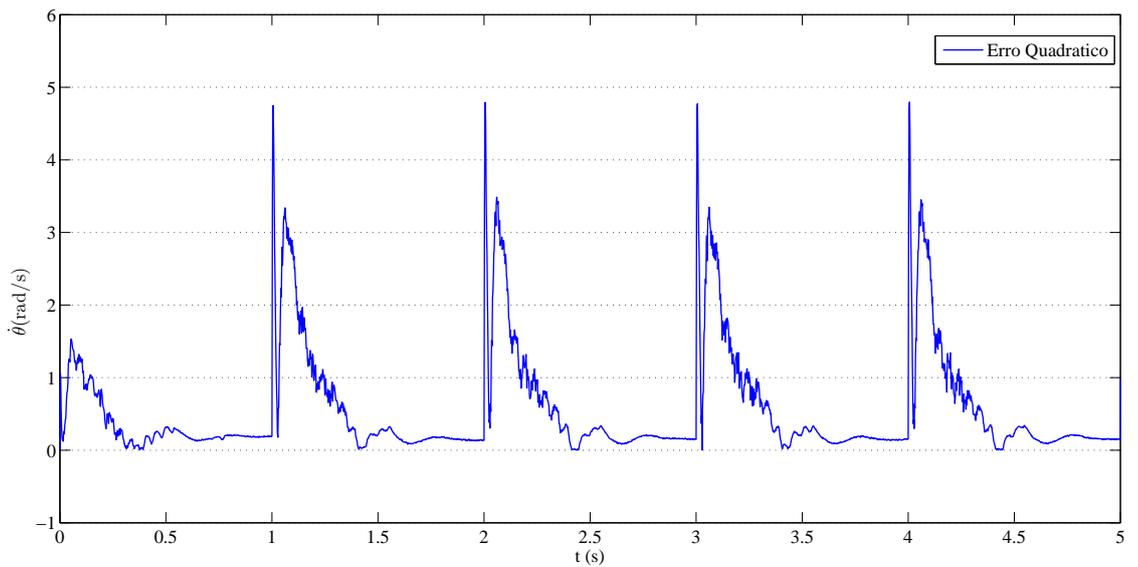


Figura 4.5: Erro quadrático.

4.2 Análise do Desempenho do Sistema de Controle

A título de comparação, serão apresentados a seguir, as respostas do sistema *Rotary Flexible Link* obtidos em diversos ensaios, considerando diferentes estruturas de controle.

Os ensaios foram realizados em malha aberta, como mostrado no diagrama de blocos da Figura 4.6. Em malha fechada utilizando um controlador proporcional, o diagrama de blocos pode ser visto na Figura 4.7.

O último ensaio apresentado, cujo diagrama de blocos pode ser visto na Figura 4.1, implementa um sistema de controle que utiliza um Observador de Estados, realimentação de velocidade e um compensador em avanço. No caso desse ensaio, deve-se observar que a realimentação de velocidade é efetuada através do observador de estados. Com isso, o tacômetro não é utilizado pela malha de controle.

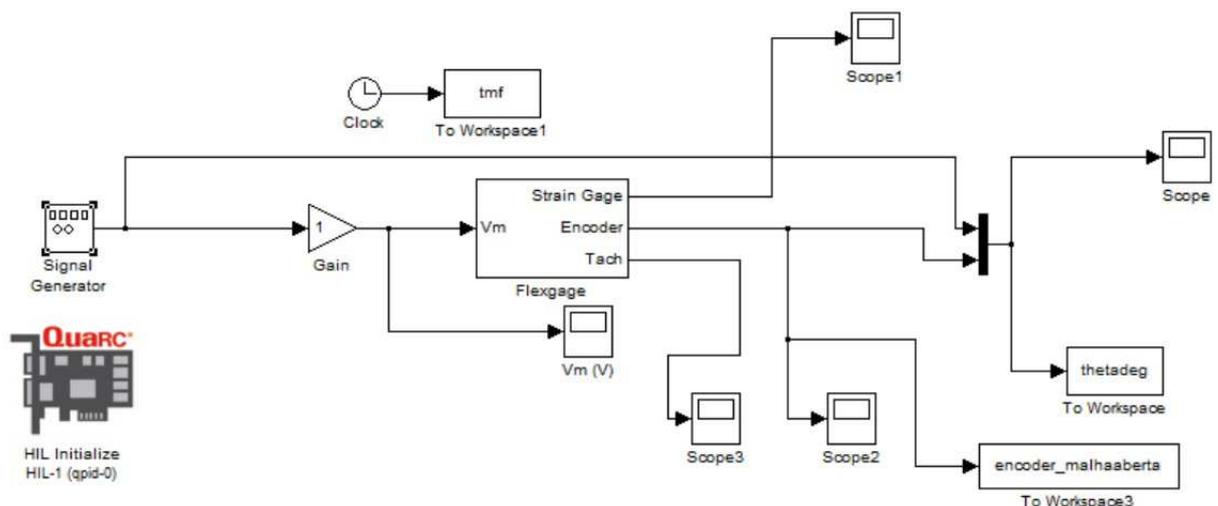


Figura 4.6: Diagrama de blocos do sistema de malha aberta.

Para os três casos analisados foi utilizado como sinal de referência uma onda quadrada com frequência de $0,5Hz$ e amplitude de $1rad$.

Na Figura 4.8 a resposta de malha aberta é apresentada. Fica evidente, nesse caso, que a ausência de realimentação faz com que o servomecanismo não seja capaz de seguir a referência, como era esperado.

Para que o servomecanismo seja capaz de, ao menos, apresentar comportamento semelhante ao da referência, é necessária a utilização de um sistema de controle de malha

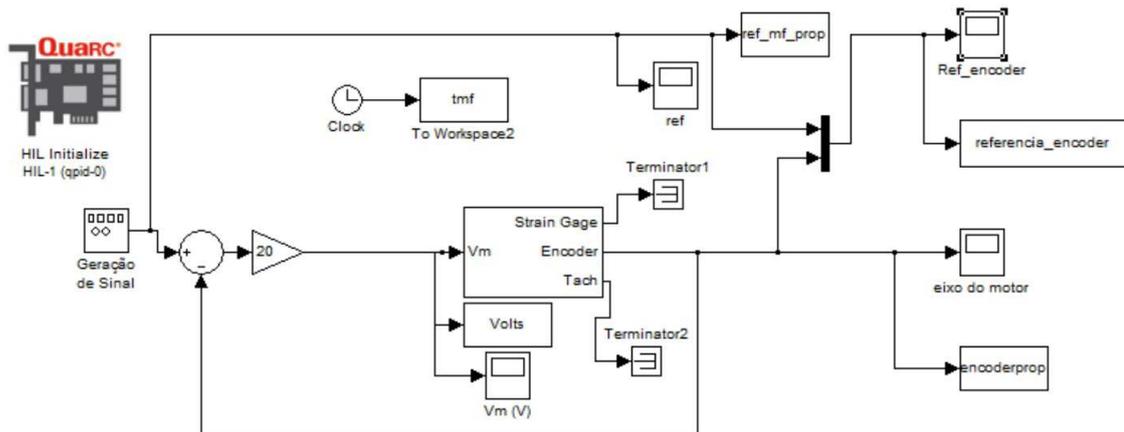


Figura 4.7: Diagrama de blocos do sistema com controlador proporcional.

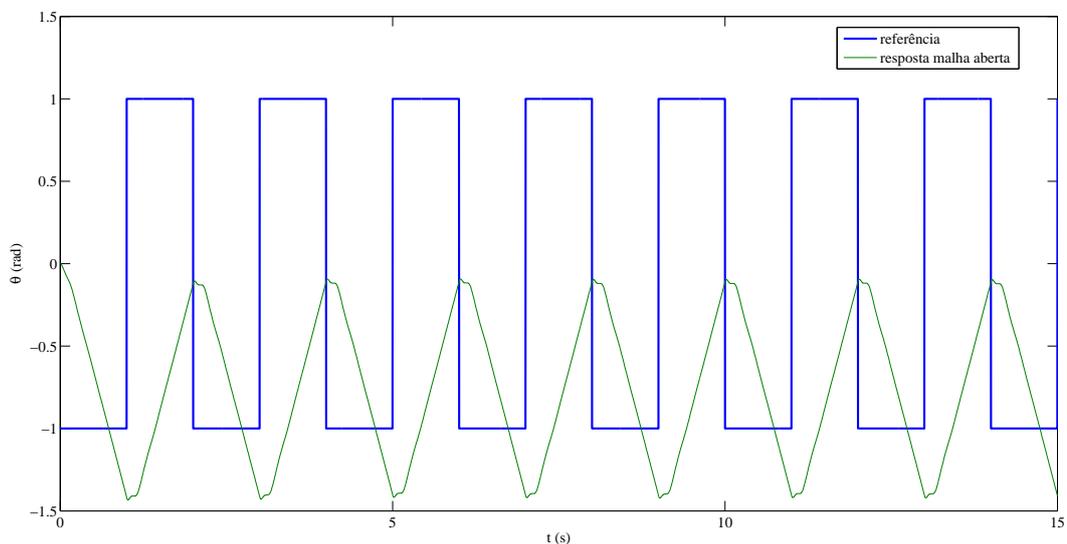


Figura 4.8: Resposta de malha aberta.

fechada. Na Figura 4.9 a resposta do sistema de controle de malha fechada, utilizando um controlador proporcional é apresentada. Nesse caso, para ganhos baixos o sistema de controle apresenta comportamento transitório lento, embora bem amortecido.

Para melhorar a resposta transitória, tornando-a mais rápida, é necessário aumentar o valor do ganho do controlador proporcional, entretanto, ao fazer isso, a viga passa a vibrar com amplitude considerável. De fato, para ganhos mais elevados, a amplitude das oscilações pode se tornar muito elevada, trazendo risco de quebra ao equipamento. Na Figura 4.9, o valor do ganho do controlador proporcional é 20.

Com o exposto anteriormente, pode-se constatar que o sistema de controle deve

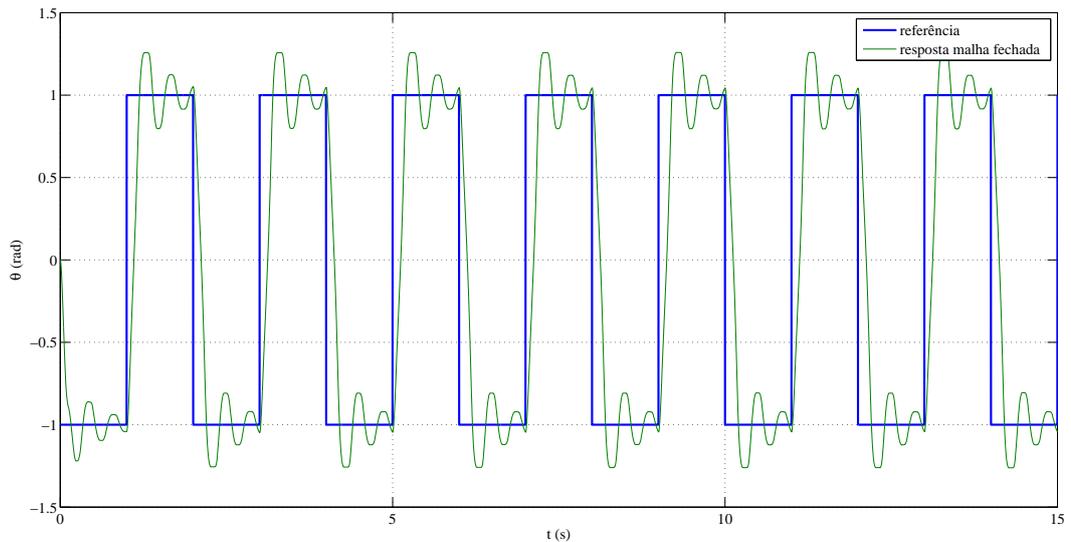


Figura 4.9: Resposta de malha fechada com controlador proporcional.

apresentar ganho suficientemente alto, de modo a tornar a resposta transitória suficientemente rápida. Além disso, ganhos mais altos também diminuem o erro da resposta de estado estacionário (Ogata, 2003).

Por outro lado, o sistema de controle também deve atenuar as oscilações da viga, diminuindo a amplitude do sobressinal, amortecendo as vibrações de forma rápida.

A estratégia de controle utilizando realimentação de velocidade é bastante eficiente no sentido de permitir ganhos de malha direta mais altos e com sobressinais de amplitudes menores. Compensadores em avanço também são bastante eficientes no sentido de atenuar vibrações em sistemas de controle.

A desvantagem de utilizar a estratégia de realimentação de velocidade reside na necessidade de sensores de velocidade, como tacômetros.

Na Figura 4.10, é apresentada a resposta do sistema *Rotary Flexible Link*, com sistema de controle utilizando compensador em avanço e realimentação de velocidade. Entretanto, nesse caso, a realimentação de velocidade é efetuada a partir do Observador de Estados, eliminando a necessidade do tacômetro.

Pode-se observar na Figura 4.10, que a sistema de controle atua de modo a fazer com que o *Rotary Flexible Link* siga a referência, com resposta transitória rápida e bem amortecida.

A Figura 4.11 apresenta a resposta do sistema de controle, utilizando ganho um

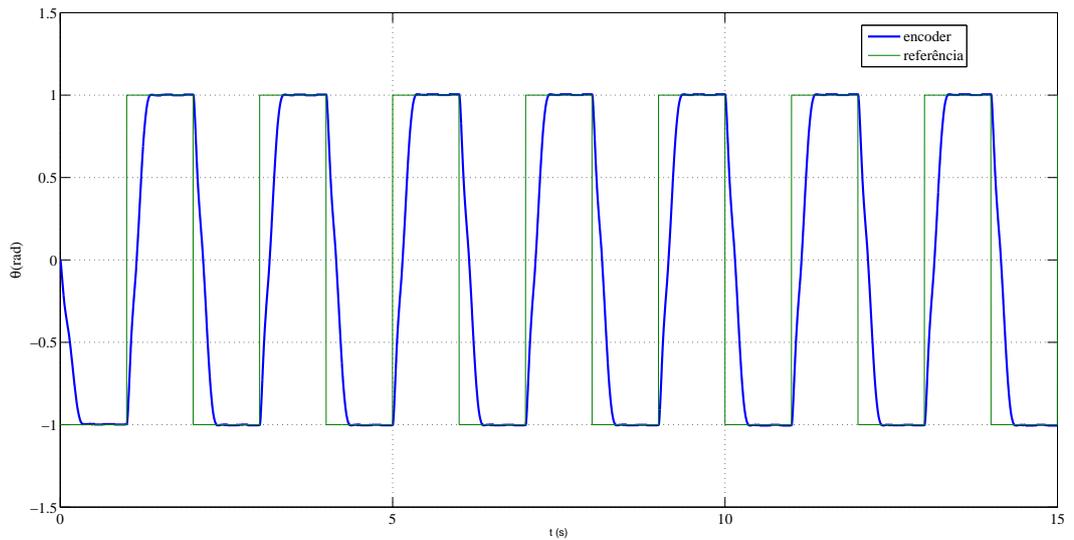


Figura 4.10: Resposta de malha fechada com Observador de Estados e ganho 25.

pouco maior. Já se observa, nesse caso, o aparecimento de um pequeno sobressinal, embora a resposta transitória continue bem amortecida, e o erro de estado estacionário praticamente nulo.

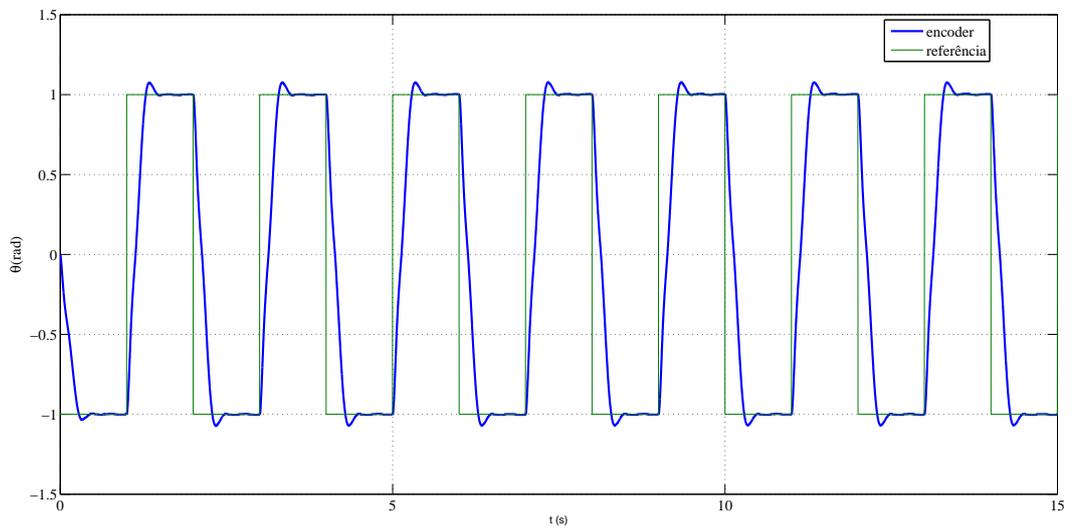


Figura 4.11: Resposta de malha fechada com Observador de Estados e ganho 30.

Os principais resultados experimentais nesta pesquisa também estão disponíveis para serem visualizadas por meio do canal do YouTube "Modelagem e Controle de Sistemas Dinâmicos ModCon"(Daltin, 2017).

Capítulo 5

Conclusões

Os modelos matemáticos para o sistema *Rotary Flexible Link* foram desenvolvidos, verificados e validados experimentalmente. Além disso, também foi projetado um Observador de Estados, para que se possa estimar em tempo real as variáveis de estado, e com isso pode determinar a velocidade angular de corpo rígido (eixo do motor CC), e a amplitude de flexão da viga. Dessa forma, foi possível eliminar a necessidade de utilização do tacômetro e do *strain gage*, na malha de controle. Os ensaios mostraram que o modelo matemático com o Observador de Estados apresentaram resultados satisfatório, já que a malha de controle foi capaz de controlar o sistema real (planta) e o sistema observado, apresentando resposta transitória rápida e bem amortecida, bem como erro de estado estacionário nulo.

Capítulo 6

Trabalhos Futuros

Pode-se ainda, considerar para continuação do trabalho os seguintes tópicos:

- Estudar e aplicar Filtro de Kalman para o projeto do Observador de Estados;
- Desenvolvimento de Observador de Estados não linear, a partir da abordagem distribuída para o modelo matemático;
- Aprofundar o estudo de controle de vibração em estruturas com quatros hastes flexíveis.
- Estudo e projeto de outros métodos de controle, como controle ótimo ou controle robusto.

Referências Bibliográficas

- Abdel-Rahman, E. M., Nayfeh, A. H., and Masoud, Z. N. (2003). Dynamics and control of cranes: A review. *Journal of Vibration and Control*, 9(7):863–908.
- Balthazar, J. M., Tusset, A. M., De Souza, S. L. T., and Bueno, A. M. (2013). Microcantilever chaotic motion suppression in tapping mode atomic force microscope. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 227(8):1730–1741.
- Basilio, J. C. (2004). Laboratório de sistemas de controle. Technical report, Universidade Federal do Rio de Janeiro - Escola de Engenharia - Departamento de Eletrotécnica.
- Bhushan, B. (2004). *Springer Handbook of Nanotechnology*. Springer.
- Bittanti, S. and Cuzzola, F. A. (2002). Generalized active control of vibrations in helicopters. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 25(2):340–351.
- Bueno, A. M., Ferreira, A. A., and Piqueira, J. R. C. (2010). Modeling and filtering double-frequency jitter in one-way master–slave chain networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 57(12):3104–3111.
- Castrucci, P. (2006). *Controle Automático*. LTC, 1 ed.
- Chen, C.-T. (1995). *Linear system theory and design*. Oxford University Press.
- Daltin, D. C. (2017). Modelagem e controle de sistemas dinâmicos modcon. <https://www.youtube.com/watch?v=8LGhPWKB-lY>, Accessed on, 31(05):2017.
- Gilat, A. (2009). *MATLAB com aplicações em Engenharia*. Bookman Editora.

- Ginoya, D. L., Patel, T. R., Shendge, P., and Phadke, S. (2011). Design and hardware implementation of model following sliding mode control with inertial delay observer for uncertain systems. *IEEE*, 3:192–196.
- Hibbeler, R. C. (2006). *Resistência dos materiais*. Pearson Prentice Hall, 5 ed.
- Iliuk, I., Balthazar, J. M., Tuset, A. M., Piqueira, J. R., de Pontes, B. R., Felix, J. L., and Bueno, Á. M. (2013). Application of passive control to energy harvester efficiency using a nonideal portal frame structural support system. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 25(4):417–429.
- Junkins and Kim (1993). *Introduction to dynamics and control of flexible structures*. AIAA.
- Kailath, T. (1980). *Linear systems*. Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ.
- Kurode, S. and Merchant, M. (2013). Observer based control of flexible link manipulator using discrete sliding modes. In *Control Applications (CCA), 2013 IEEE International Conference on*, pages 276–281. IEEE.
- Lopes, G. C., Bueno, A. M., and Balthazar, J. M. (2014). Elastic beam vibration control with phase-locked loop. In *ASME 2014 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. American Society of Mechanical Engineers.
- Luenberger, D. (1966). Observers for multivariable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11(2):190–197.
- Luenberger, D. (1971). An introduction to observers. *IEEE Transactions on automatic control*, 16(6):596–602.
- Luenberger, D. G. (1964). Observing the state of a linear system. *IEEE transactions on military electronics*, 8(2):74–80.
- Meirovitch, L. (1970). *Methods of analytical dynamics*. Courier Corporation.
- Meirovitch, L. (1975). *Elements of vibration analysis*. McGraw-Hill.
- Meirovitch, L. (1980). *Computational methods in structural dynamics*, volume 5. Springer Science & Business Media.

- Meirovitch, L. (1990). *Dynamics and control of structures*. John Wiley & Sons.
- Morita, S. (2009). *Noncontact Atomic Force Microscopy 2*. Springer-Verlag GmbH.
- Nagahama, C. (2013). Análise numérica e modelagem computacional de um sistema estrutural com controle semiativo de vibração do tipo amortecedor. Master's thesis, Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora-MG.
- Ogata, K. (2003). *Engenharia de Controle Moderno*. Pearson Prentice Hall, 4 ed.
- P.Hagedorn and Stadler, W. (1998). *Non-linear oscillations*. Oxford engineering science series. Clarendon Press.
- Quanser (2011). *SRV02 Rotary Flexible Link User Manual*.
- Rahn, C. D. and Rahn, C. (2001). *Mechatronic control of distributed noise and vibration*. Springer.
- Rao, S. (2008). *Vibrações Mecânicas*. Pearson Prentice Hall.
- Vendrame, A. (2008). Exposição ocupacional às vibrações. <http://www.vendrame.com.br/downloads/>>, Accessed on, 12(09):2008.
- Watanabe, L. (2010). Utilização de modelos de falhas e observadores de estado em estruturas reticuladas. Master's thesis, Universidade Estadual Paulista (UNESP).
- Yagiz, N. and Sakman, L. (2005). Robust sliding mode control of a full vehicle without suspension gap loss. *Journal of Vibration and Control*, 11(11):1357–1374.
- Yang, F., Sedaghati, R., and Esmailzadeh, E. (2014). Vibration suppression of curved beam-type structures using optimal multiple tuned mass dampers. *Journal of Vibration and Control*, 20(6):859–875.