

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ÁREA DE FÍSICA APLICADA

**Investigação de Propriedades caóticas do
modelo bouncer relativístico**

Marcelo de Almeida Presotto

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2026

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Marcelo de Almeida Presotto

Investigação de Propriedades caóticas do modelo bouncer relativístico

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
do Câmpus de Rio Claro, da Universidade
Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”,
como parte dos requisitos para obtenção do
título de Mestre em Física.

Orientador: André Luis Prando livorati

Rio Claro - SP
2026

P934i

Presotto, Marcelo de Almeida

Investigação de Propriedades caóticas do modelo bouncer
relativístico / Marcelo de Almeida Presotto. -- Rio Claro, 2026
44 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientador: André Luis Prando Livorati

1. Caos. 2. Dinâmica não linear. 3. Leis de escala. 4. Transporte. 5.
Sistemas dinâmicos. I. Título.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Marcelo de Almeida Presotto

Investigação de Propriedades caóticas do modelo bouncer relativístico

Dissertação de Mestrado apresentada
ao Instituto de Geociências e Ciências
Exatas do Câmpus de Rio Claro, da
Universidade Estadual Paulista “Júlio
de Mesquita Filho”, como parte dos
requisitos para obtenção do título de
Mestre em Física.

Comissão Examinadora

Prof(a). Dr(a). André Luis Prando Livorati
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)

Prof(a). Dr(a). Rene Orlando Medrano Torricos
UNIFESP/Diadema (SP)

Prof(a). Dr(a). Matheus Palmero Silva
USP/São Carlos (SP)

conceito: aprovado

Rio Claro (SP), 20 de fevereiro de 2026.

Agradecimentos

Agradeço a minha família, especialmente ao meu pai e a minha mãe por todo o suporte que foi dado durante essa jornada de estudos.

Ao meu orientador Prof. André Luis Prando Livorati pela compreensão das minhas dificuldades e pelo apoio que foi me dado nos momentos das dúvidas.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil.

Ao grupo de pesquisa de caos e sistemas dinâmicos, ao grid Unesp por rodar diversas simulações necessárias ao meu trabalho e ao departamento de Física e o IGCE por providenciarem todo o material necessário para a realização dessa pesquisa.

Resumo

Nesse trabalho foi investigado a versão relativística do modelo *bouncing ball*, onde através das dinâmicas do mapa padrão e relativístico, foi obtido um mapeamento não linear bidimensional que apresentou uma dinâmica mista, onde variando os parâmetros de controle observamos diferentes espaços de fases, que apresentaram mares de caos, ilhas de estabilidade e curvas invariantes. Na análise estatística dos modelos, foi estudado a velocidade quadrática média e as propriedades de transporte para diferentes parâmetros de controle. No caso da velocidade quadrática média, foram observadas curvas apresentando um regime de crescimento até a saturação, e através do estudo determinamos os argumentos de escala. A respeito das propriedades de transporte, estudamos a probabilidade de sobrevivência das partículas, onde foram analisados os espaço de fases ao introduzir velocidades de escape para diferentes parâmetros de controles.

Palavras-chave: modelo *bouncing ball*, mapa padrão e relativístico, dinâmica mista e espaços de fase

Abstract

In this work, the relativistic version of the bouncing ball model was investigated. From the dynamics of the standard and relativistic maps, a two-dimensional nonlinear mapping is derived, exhibiting mixed dynamics. By varying the control parameters, different phase-space structures were observed, characterized by chaotic seas, islands of stability, and invariant curves. In the statistical analysis of the models, the root-mean-square velocity and the transport properties were studied for different control parameters. For the root-mean-square velocity, the curves displayed a growth regime followed by saturation, and from this study the scaling arguments were determined. Regarding the transport properties, the particle survival probability was investigated. The phase spaces were analyzed under the introduction of escape velocities for different control parameters.

Keywords: bouncing ball model, relativistic and standard map, mixed dynamics and phase-space structures

Sumário

1	Introdução	7
1.1	Teorema KAM	8
1.2	Mapa padrão relativístico	8
1.3	Stickiness	9
1.4	Aceleração de Fermi e modelo bouncer	10
1.5	Transporte	10
1.6	Leis de escala	11
1.7	Estrutura e informações sobre a Dissertação	12
2	Mapa padrão	13
2.1	Mapa padrão	13
2.2	Mapa padrão relativístico	17
2.3	Conexão com o modelo bouncer	20
3	Resultados numéricos para o Modelo <i>bouncer</i> relativístico	24
3.1	Espaço de fases	24
3.2	Curvas de V_{RMS}	26
3.3	Análise de escala	27
4	Transporte e as curvas de probabilidade de sobrevivência	31
5	Conclusão	39

Capítulo 1

Introdução

O estudo de sistemas em movimento, mais conhecidos como sistemas dinâmicos tem sido realizados por um longo tempo, onde as suas bases se apoiam em conceitos desenvolvidos por Galileu Galilei [Galilei, 2010, Galilei, 1999] em seus estudos envolvendo pêndulos, planos inclinados, projéteis e queda livre. Eles começaram a ganhar mais forma através dos estudos de Isaac Newton [Newton, 1846, Newton, 1990], cujas as leis descreviam, através de um conjunto de equações, a trajetória de um fenômeno no mundo macroscópico.

Entretanto, foi só no século XX que as propriedades caóticas dos sistemas dinâmicos começaram a ser estudadas, devido a dificuldade do seu tratamento analítico. Um dos trabalhos que viriam a ser pioneiros nessa área seria o problema de três corpos por Henri Poincaré [Poincaré, 1899], onde através do estudo de técnicas geométricas e topológicas, ele mostrou que a evolução do sistema vai ser caótica, ou seja, que dependendo das condições iniciais e das perturbações que ocorrem em tais condições, o estado final vai ser completamente diferente de um ponto para outro. Através dessa linha de estudos, surgiram outros trabalhos como o de Birkhoff [Birkhoff, 1927], seguido também de trabalhos de Kolmogorov [Kolmogorov, 1954] e Smale [Smale, 1967].

Porém foi só a partir do advento do desenvolvimento e dos avanços computacionais, que resultados utilizando a integração numérica de equações não lineares começaram a surgir para o caos determinístico. Um exemplo desses resultados foi o trabalho de Lorentz [Lorenz, 1963] em meteorologia, além de diversos outros trabalhos que surgiram como os trabalhos de Feigenbaum [Feigenbaum, 1978, Kaplan e Yorke [Kaplan e Yorke, 1979], Chirikov [Chirikov, 1979], May [May, 1976], Hénon [Hénon, 1976], Pomenau-Manneville [Pomeau e Manneville, 1980], Grebogi, Ott e Yorke [Grebogi et al., 1982], os quais forneceram propriedades de dinâmicas caóticas e como tais dinâmicas se instalam em sistemas físicos.

Por um longo tempo tem sido realizado o estudo dos sistemas Hamiltonianos, tais sistemas que se referem a um conjunto de equações que estão evoluindo ao longo do

tempo, cujo os resultados variam devido a regras específicas e os diferentes parâmetros de controle[Ciubotariu et al., 2002,Oliveira et al., 2011,Lan e Yapp, 2008,Nomura et al., 1992,Chirikov, 1979]. Esses sistemas podem ser classificados de três maneiras: (1) O sistema é integrável, onde o espaço de fase é composto por curvas invariantes que dominam os gráficos. (2) A dinâmica é ergódica, onde as curvas invariantes são destruídas e os mares de caos dominam os espaços de fase. (3) O sistema é misto, onde é observado a coexistência das ilhas de estabilidade, curvas invariantes e os mares de caos.

Para compreender o que será discutido nesse trabalho, será feita uma revisão de conceitos chave, para o estudo e a discussão dos resultados.

1.1 Teorema KAM

Esse teorema feito por Kolmogorov–Arnold–Moser (KAM)[Kolmogorov, 1954,Arnol'd e Avez, 1968,Arnol'd, 1963,Moser, 1962,Moser, 1973] estabelece que ao perturbar um sistema dinâmico integrável, nesse caso as curvas invariantes, a perturbação vai causar a deformação e até mesmo a destruição de algumas curvas do sistema. Isto é visto no espaço de fases, onde o aumento da perturbação no espaço, causa a transformação do sistema de integrável apresentando curvas constantes, para um sistema misto que está apresentando mares de caos coexistindo com ilhas de estabilidade e curvas invariantes de spanning. Com o aumento dessa perturbação, ocorre a destruição da última curva invariante do sistema, passando de um caso misto para um caso ergódico, onde os mares de caos dominam os espaços de fase conforme os parâmetros utilizados para definir tal sistema aumentam.

1.2 Mapa padrão relativístico

Através do estudo que será realizado nesse trabalho das equações dos sistemas Hamiltonianos, os espaços de fase serão definidos através das equações dos mapeamentos padrões e relativísticos[Oliveira et al., 2011,De Oliveira e Robnick, 2012,Miranda et al., 2021]. Definindo a equação do mapeamento relativístico como sendo:

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + K \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \frac{I_{n+1}}{\sqrt{1+(\beta I_{n+1})^2}} \end{cases} \quad (\text{mod } 2\pi), \quad (1.1)$$

onde I é a variável ação, K é intensidade da perturbação que vai ser fornecida no sistema, e β é o parâmetro relativístico onde para $\beta = 0$ recuperamos o mapeamento padrão.

Tal mapeamento será de grande importância nesse trabalho devido aos parâmetros K e β que controlam a transição da integrabilidade para a não integrabilidade dos mapeamentos estudados, pois conforme o parâmetro K aumenta e β diminui, o sistema passa

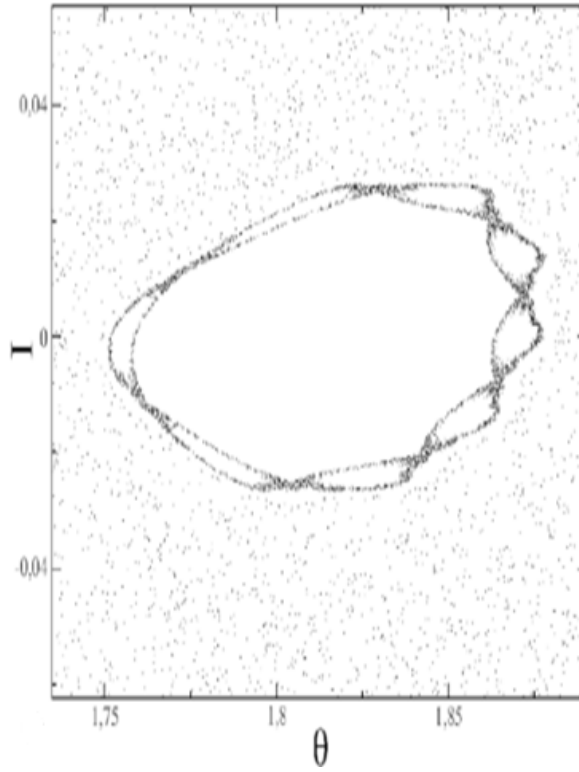


Figura 1.1: Stickiness ao redor de uma ilha de estabilidade

de integrável para misto, e de misto para ergódico e para K diminuindo e β aumentando teremos o caso inverso.

1.3 Stickiness

Para um espaço de fases do tipo misto, observa-se a presença tanto de mares de caos, como ilhas de estabilidade (KAM) e curvas invariantes spanning coexistindo em um mesmo espaço de fases, e que a presença dessas estruturas afeta o comportamento das órbitas caóticas que existem nos mares de caos. Sendo que esse fenômeno onde as órbitas do mar de caos acabam aprisionadas próximas as ilhas de estabilidade por períodos de tempo intermitentes, até elas escaparem desse aprisionamento temporário e retornarem para o mar de caos, é devido a existência de conjuntos fractais [Ott, 2002, Lichtenberg e Lieberman, 1992, Alligood et al., 1996], chamados cantori. Tais objetos vistos na figura (1.1) ao redor da ilha de estabilidade foram propostos na década de 80 por Macky, Meiss e Percival [Mackay et al., 1984], e essas estruturas foram formadas através da destruição dos toros invariantes com o aumento da perturbação do sistema.

Devido a presença dos cantori as órbitas em uma região de stickiness apresentam na sua evolução temporal um caráter quase regular durante o seu aprisionamento próxima a ilha de estabilidade, até elas escaparem novamente para o mar de caos.

1.4 Aceleração de Fermi e modelo bouncer

O modelo estudado nesse trabalho está intimamente ligado ao trabalho proposto em 1949 por Enrico Fermi [Fermi, 1949], que tentava explicar os raios cósmicos de alta energia que viajavam no meio interestelar. Chamado de acelerador de Fermi, esse mecanismo explicava que as partículas carregadas que compunham os raios cósmicos interagiam com os campos magnéticos oscilantes de grandes estruturas no espaço, como estrelas e galáxias, e tal interação resultava na perda ou ganho de energia por essas partículas carregadas. Fazendo uma análise da energia média, era possível notar que as partículas estavam ganhando energia com o passar do tempo.

A partir desse mecanismo, foram propostos alguns modelos para explicar a aceleração de Fermi, onde o modelo bouncer [Pustilnikov, 1983, Livorati, 2014] que será estudado neste trabalho é um desses modelos. O modelo bouncer é composto de uma partícula que se desloca no eixo vertical sobre os efeitos da gravidade g que vai estar funcionando como um mecanismo de re-injeção da partícula a uma zona de colisão dada por uma parede que se move periodicamente no tempo no tempo t com uma velocidade v , cujo o movimento da parede é dado pela equação $y(t) = \varepsilon \cos(\omega t)$ (onde a zona de colisão é definida na região $y \in [-\varepsilon, \varepsilon]$), sendo ω a frequência da parede e ε a amplitude da oscilação. Nota-se que dependendo da posição da parede, a partícula está ganhando ou perdendo energia, podendo ser visto na figura (1.2) que ilustra esquematicamente a dinâmica do modelo bouncer.

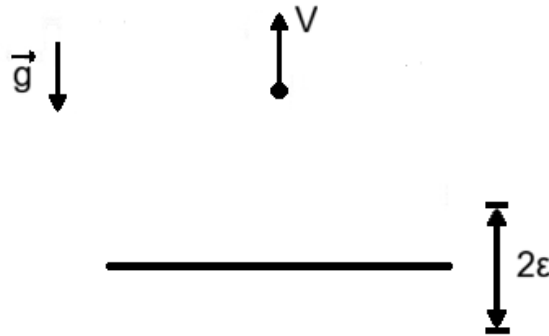


Figura 1.2: Desenho esquemático do Modelo bouncer e seus parâmetros

1.5 Transporte

A presença de cadeias de ilhas de estabilidade afeta o comportamento das órbitas caóticas nos espaços de fase, onde elas podem ser aprisionadas por um longo período de

tempo em regiões estreitas próximas as ilhas até que elas escapem novamente para o mar de caos. Então para estudar o comportamento das órbitas caóticas de um sistema misto, ao invés de definir o comportamento individual de cada partícula, podemos estudar os comportamentos médios dos sistemas.

Um método para a realização desse estudo é a introdução de uma barreira ou vazamento, onde a probabilidade da amostragem sobreviver ao vazamento é dada como sendo P_{surv} . Nesse sentido podemos dividir a dinâmica da sobrevivência das partículas em duas, o primeiro caso sendo para as partículas que escaparam pelo vazamento introduzido, já o segundo caso é para as partículas que não escaparam ainda, e através dessas duas possibilidades podemos definir uma equação de acordo com [Gaspard, 1998, Altmann et al., 2013, Livorati et al., 2015] tal que:

$$P_{\text{surv}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N N_{\text{rec}}(j), \quad (1.2)$$

onde o somatório é feito ao longo de um ensemble de N condições iniciais distintas, e N_{rec} representa o número de condições iniciais que não escaparam pela velocidade de escape nos espaços de fase.

Considerando os aspectos temporais da probabilidade de sobrevivência, são observados dois tipos de comportamento. O primeiro se dá na região do mar de caos onde a órbita tem um movimento errático similar a um movimento browniano [Pathria, 2008], possuindo uma estatística exponencial para os tempos de escape através do buraco. O segundo caso ocorre próximo das ilhas de estabilidade, onde devido ao processo de stickness, as órbitas ficam aprisionadas por um longo tempo próximo das ilhas de estabilidade. Sendo esse tempo de aprisionamento dado por um formato de lei de potência para as correlações de escape [Altmann et al., 2013, Pathria, 2008] e a dinâmica das órbitas apresenta um caráter quase regular.

1.6 Leis de escala

Para sistemas dinâmicos, as leis de escala são relações que governam a variação de um objeto de estudo quando os parâmetros dos sistema são modificados [Leonel et al., 2004, Schuster e Just, 2005, Ott, 2002, Zaslavsky, 2004]. Para ilustrar o funcionamento das leis de escala podemos considerar um observável g descrito pelos parâmetros x e y . Onde $g(x, y)$ é uma relação de escala se (1.5) for satisfeita:

$$g(x, y) = l g(l^a x, l^b y), \quad (1.3)$$

em que l é um fator de escala arbitrário e a e b são os expoentes característicos dessa relação de escala [Leonel, 2019, Leonel, 2015de Almeida, 2025]. Sendo l um fator de escala podemos escolher $l = y^{-\frac{1}{b}}$, onde teremos

$$g(x, y) = y^{-\frac{1}{b}} g(y^{-\frac{a}{b}} x, 1). \quad (1.4)$$

Considerando $g(x, y)$ é descrita por leis de potência, o estudo das propriedades de escala em g nos permite obter os expoentes a e b . A generalização para um maior número de variáveis é direta, onde para uma função g de variáveis x , y e z , temos que:

$$g(x, y, z) = l g(l^a x, l^b y, l^c z). \quad (1.5)$$

1.7 Estrutura e informações sobre a Dissertação

Esse trabalho vai ser baseado em um dos modelos utilizados para explicar o crescimento de energia na aceleração de Fermi, o modelo bouncer. Foram também introduzidos conceitos que vão ser utilizados ao longo dessa dissertação, como por exemplo a integrabilidade de um sistema e a presença de propriedades de stickness em torno das ilhas de estabilidade.

No Capítulo 2 será estudado o mapeamento, onde foi definido através de equações os sistemas que formam o mapa padrão e padrão relativístico e através desse sistema foi possível encontrar os respectivos espaços de fases.

O capítulo 3 é dedicado a análise dos resultados obtidos através de uma conexão entre mapa padrão e padrão relativístico e o modelo bouncer, onde observamos como os parâmetros ϵ e β afetam o comportamento dos resultados dos espaços de fases, tanto pela análise dos pontos fixos, quanto a análise das curvas de V_{RMS} e suas propriedades.

No capítulo 4 é estudado as propriedades de transporte do sistema, onde é realizado um estudo de como as estruturas do mapeamento afetam os espaços de fase através do estudo de bacias de escape para determinadas velocidades variam conforme os parâmetros ϵ e β , e são introduzidas nos espaços de fases. De mesma forma serão estudadas as probabilidades de uma partícula sobreviver a introdução dessas velocidades de escape.

O capítulo 5 será a conclusão desse trabalho, junto com as perspectivas futuras.

O desenvolvimento dessa dissertação é o resultado de estudos iniciados em março de 2024 e terminados em dezembro de 2025. O período de mestrado foi financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). As simulações numéricas utilizadas para a obtenção dos resultados foram executadas com a utilização de ambos Windows e Linux e os compiladores foram qtgrace, Xmgrace, gnuplot e Gimp. O programa utilizado no windows foi o Visual Studio Code (VS code) com as extensões WSL,

modern Fortran, Code Runner, C/C++, e o Ubuntu 20,04 para simular um ambiente de linux no VS code, e para o linux foi utilizado o Fortran 90, o gfortran contido dentro GCC (GNU Compiler Collection), e o xmgrace.

Capítulo 2

Mapa padrão

2.1 Mapa padrão

Proposto por Boris Valerianovich Chirikov [Chirikov, 1979, Zaslavsky, 2004, Zaslavsky, 2007], o mapa padrão, vai ser de grande importância para os estudos realizados nesse trabalho. O estudo analítico do sistema Hamiltoniano é descrita pelo conjunto de equações variáveis chamados de estado que são descritas por N coordenadas generalizadas $q = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ e de N momentos conjugados generalizados $p = (p_1, p_2, \dots, p_N)$, que caracterizam o sistema. Evoluindo do estado inicial o sistema passa por pontos dos espaços de fases, sendo esse conjunto de pontos denominado de órbitas, e o conjunto de todas essas órbitas possíveis vai ser o espaço de fases [Ott, 2002, Lichtenberg e Lieberman, 1992]. O movimento desses corpos pode ser descrito pelo formalismo hamiltoniano com a função $H(p, q)$ onde p e q são coordenadas generalizadas. Vamos considerar o estudo do rotor quicado, que se trata de uma massa girando ao redor de um ponto central sofrendo quiques. Considerando H como a energia do sistema estudado, observa-se que essa energia vai ser dada pela soma das energias cinética e potencial, tal que poderemos escrever o hamiltoniano do rotor quicado como sendo:

$$H = \frac{J^2}{2I} + K \cos \theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (2.1)$$

onde J é o momento angular, θ é a posição angular, I é o momento de inércia, K é a amplitude dos quiques e T é o período entre quiques onde para $t = nT$ o sistema sofre um quique. Isso é visto na figura (2.1) que representa o rotor quicado.

A evolução temporal desse formalismo é dada pelas seguintes equações de Hamilton [Goldstein, 1969, Reichl, 2004]:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_i} \end{cases} \quad (2.2)$$

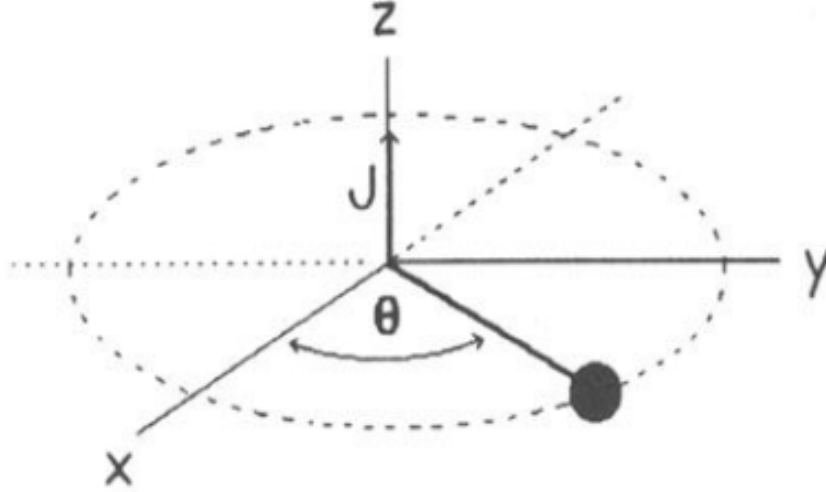


Figura 2.1: Exemplo esquemático do rotor quicado.

Podemos reescrever as equações de Hamilton como sendo:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = K \text{sen}(\theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (t - nT), \quad (2.3)$$

e

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial J} = \frac{J}{I}. \quad (2.4)$$

É dado um impulso de função delta no rotor a cada intervalo de tempo $t = nT$. Entretanto, entre os impulsos, nenhuma força está agindo e portanto o rotor evolui livremente. Então, entre os impulsos J é constante e θ está evoluindo com o tempo. No impulso, J muda descontinuamente para que a taxa de crescimento de θ entre os diferentes impulsos seja diferente. Integrando as equações (2.5) e (2.6) de um tempo antes do impulso em $t = nT$ para um tempo antes do impulso em $t = (n+1)T$. A única contribuição da força ocorre quando $t = nT$. Então:

$$J_{n+1} - J_n = \int_{(nT)^-}^{((n+1)T)^-} \frac{\partial J}{\partial t} dt = \int_{(nT)^-}^{((n+1)T)^-} K \text{sen}(\theta) \delta(t - nT) dt = K \text{sen}(\theta_n), \quad (2.5)$$

e

$$\theta_{n+1} - \theta_n = \int_{(nT)^-}^{((n+1)T)^-} \frac{\partial \theta}{\partial t} dt = \int_{(nT)^-}^{((n+1)T)^-} \frac{J_{n+1}}{I} dt = \frac{J_{n+1}T}{I}. \quad (2.6)$$

Concebendo $I = 1$ e $T = 1$, podemos chegar no seguinte mapeamento:

$$\begin{cases} J_{n+1} = J_n + K \text{sen}(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + J_{n+1} \end{cases} \quad (\text{mod } 2\pi). \quad (2.7)$$

Tendo o mapeamento, é possível observar que para o sistema o parâmetro K identifica a intensidade da não linearidade para o sistema acima, nota-se também que para $K = 0$ a variável J se preserva, uma vez que $J_{n+1} = J_n = J$, de tal modo que o mapa é integrável. Isso se apresenta em formato de toros no espaço de fases, sendo os toros definidos como curvas invariantes no espaço de fases, onde as condições iniciais permanecem em cima do toro e preenchem uma curva fechada toroidal com a evolução temporal [Ott, 2002, Lichtenberg e Lieberman, 1992, Goldstein, 1969, Fermi, 1949]. Entretanto, quando $K \neq 0$, J vai estar diretamente relacionado à não linearidade do pareamento, variando com o decorrer das interações, o que significa que o mapeamento não vai ser integrável. Portanto, é possível observar que o parâmetro K controla a transição da integrabilidade quando $K = 0$, para a não integrabilidade quando $K \neq 0$.

É possível observar uma transição em $K = K_c \approx 0,9716$ de caos local quando $K < K_c$, para caos global quando $K > K_c$, no qual ocorre a destruição da última curva invariante de tal modo que o comportamento caótico se difunde ao longo do espaço de fase com exceção das ilhas de estabilidade, que também desaparecem com o aumento de K . Tais comportamentos podem ser observados na figura (2.2):

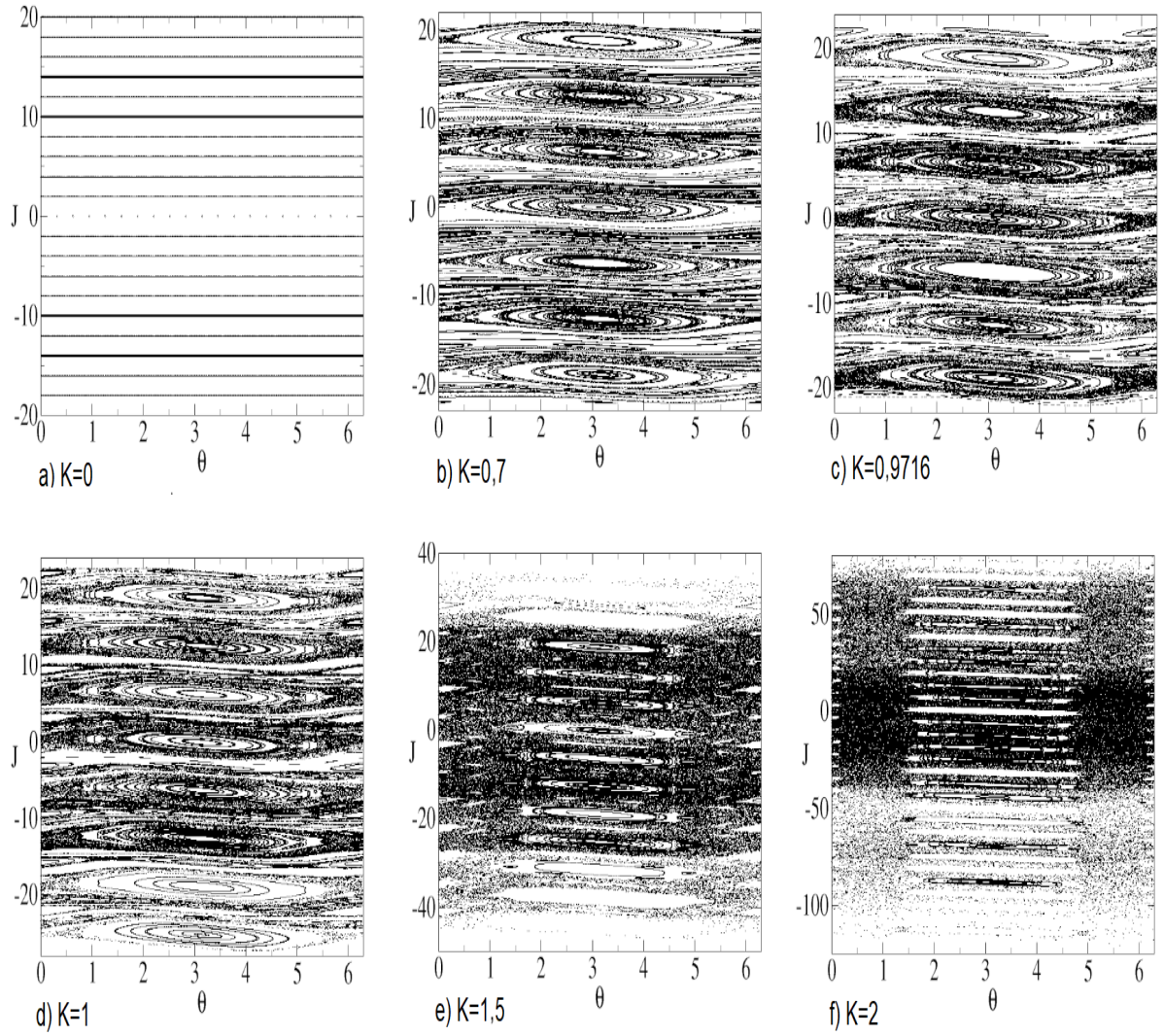


Figura 2.2: Espaços de fase para (a) $K = 0$; (b) $K = 0,7$; (c) $K = 0,9716$; (d) $K = 1,0$; (e) $K = 1,5$ e (f) $K = 2,0$.

Na figura (2.2) (a) onde $K = 0$ é observado um mapeamento integrável com as curvas invariantes dos espaços de fase. Para (2.2) (b) para $K = 0,7$, ocorre a transição da integrabilidade para a não integrabilidade (pois $K \neq 0$), onde o sistema é misto e apresenta mares de caos coexistindo com ilhas de estabilidade e curvas invariantes de spanning. Já para a figura (2.2) (c) $K = 0,9716$ como já discutido ocorre a destruição da última curva invariante e o comportamento do sistema passa de localmente caótico para globalmente caótico. Tal transição não é imediatamente visível na figura (2.2) (d) para $K = 1,0$, devido a proximidade do valor do parâmetro com a figura (2.2) (c). Porém os efeitos dessa transformação são visíveis nas figuras (2.2) (e) $K = 1,5$ e (2.2) (f) $K = 2,0$, onde com o aumento do parâmetro K , o comportamento caótico se difunde ao longo dos espaços de fase.

2.2 Mapa padrão relativístico

Tendo encontrado o sistema de equações para o mapeamento padrão através das equações de Hamilton, será possível encontrar de forma similar, um sistema de equações para o mapeamento padrão relativístico, onde como primeiro passo será considerado um campo elétrico de um pacote de onda [Oliveira et al., 2011, Nomura et al., 1992, Oliveira e Leonel, 2014]

$$E(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \sin(k_n x - \omega_n t). \quad (2.8)$$

Considerando um amplo espectro onde $E_n = E_0$, $k_n = k_0$ e $\omega_n = n\omega_0$

$$E(x, t) = E_0 \sin(k_0 x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(n\omega_0 t). \quad (2.9)$$

Usando a decomposição de Fourier para a função delta de Dirac periódica $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} T \cos(n\omega_0 t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (2.10)$$

Substituindo na equação do campo elétrico pode ser encontrado:

$$E(x, t) = E_0 T \sin(k_0 x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (2.11)$$

Assumindo que o movimento de um elétron com massa de repouso m_0 e carga $-e$ em um campo elétrico dado pela equação acima podem ser descritos pela Hamiltoniana relativística

$$H(x, p, t) = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - \frac{e E_0 T}{k_0} \cos(k_0 x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (2.12)$$

onde c é a velocidade da luz e $p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$ é o momento relativístico.

Realizando o cálculo das equações de Hamilton, onde entre dois impulsos (ou "kicks") consecutivos teremos que a partícula está em movimento livre, temos que o sistema é dado por:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{pc^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}}, \quad (2.13)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -e E_0 T \sin(k_0 x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (2.14)$$

onde $\dot{x}$ é análogo a $\dot{q}$.

Definindo $\theta = k_0 x$, e introduzindo variáveis auxiliares como $\beta = \frac{\omega_0}{kc}$, $I = \frac{k_0 p}{m_0 \omega_0}$ e $K = \frac{2\pi e E_0 k_0}{m_0 \omega_0^2}$, onde (I_n, θ_n) são os valores da variável antes do n -ésimo kick e (I_{n+1}, θ_{n+1}) , são os valores antes do kick $(n+1)$, o mapeamento é dado por:

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + K \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \frac{I_{n+1}}{\sqrt{1 + (\beta I_{n+1})^2}} \end{cases} \quad (\text{mod } 2\pi). \quad (2.15)$$

A presença do parâmetro β que vai estar definindo o mapa como relativístico. Tal parâmetro, assim como o parâmetro K do mapa padrão vai estar definindo o comportamento do sistema. Entretanto, enquanto o aumento de K garante a transição do sistema de integrável para misto e de misto para ergódico, o parâmetro β vai apresentar o comportamento inverso, onde para $\beta \rightarrow \infty$ o sistema volta a ser integrável, e para $\beta = 0$ o sistema volta a ser um mapeamento padrão dominado apenas por K . Tal comportamento pode ser observado na figura (2.3) com diversos espaços de fase para diferentes parâmetros utilizados:

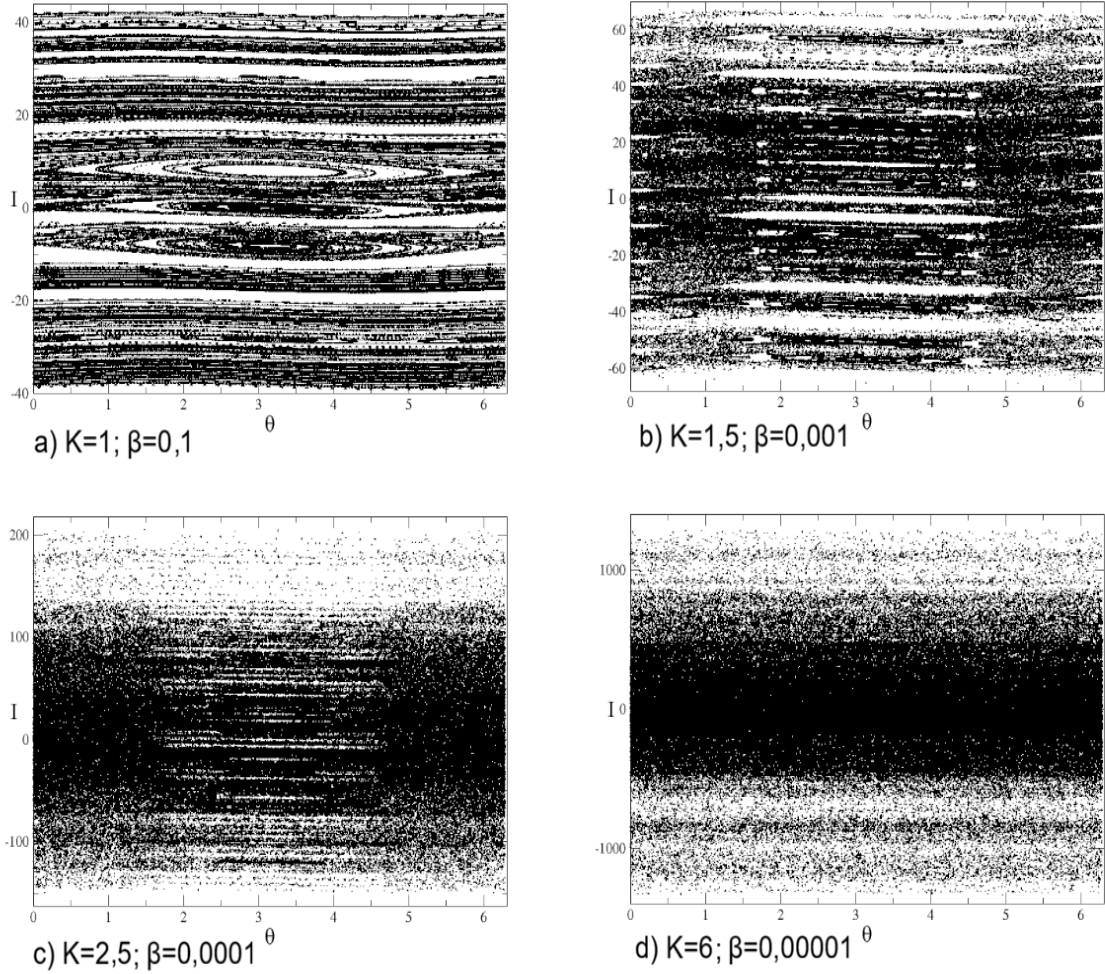


Figura 2.3: Espaços de fase para (a) $K = 1,0$, $\beta = 0,1$; (b) $K = 1,5$, $\beta = 0,001$; (c) $K = 2,5$, $\beta = 0,0001$ e (d) $K = 6,0$, $\beta = 0,00001$

Na figura (2.3) (a) para $K = 1,0$, $\beta = 0,1$, observamos um espaço de fase misto, cujo os mares de caos são localmente caóticos. Já na figura (2.3) (b) para $K = 1,5$, $\beta = 0,001$, temos a destruição das curvas invariantes, com a transição do sistema de localmente caótico para globalmente caótico tendo ocorrido, e a difusão do mar de caos no espaço de fase, entretanto tal difusão ainda é limitada pelas ilhas de estabilidade presentes. A importância dessas ilhas para limitar a difusão dos mares de caos pode ser comprovada pela observação das figuras (2.3) (c) $K = 2,5$, $\beta = 0,0001$ e (2.3) (d) $K = 6,0$, $\beta = 0,00001$, onde devido aos valores de β estarem diminuindo e os valores de K aumentando, notamos uma diminuição do tamanho das ilhas permitindo uma difusão maior dos mares de caos no espaço de fases para a figura (2.3) (c), e um completo desaparecimento das ilhas permitindo que os mares de caos se difundam sem limites para a figura (2.3) (d).

2.3 Conexão com o modelo bouncer

Para o modelo bouncer podemos observar dois casos para a colisão da partícula com a parede móvel, o primeiro caso vai ser para colisões sucessivas, onde após a colisão a partícula não abandona a zona de colisão, e colide novamente com a parede, o segundo caso é para colisões indiretas, onde após a partícula sofre uma única colisão com a parede, ela abandona a zona de colisão.

Observando as colisões das partículas, nota-se que elas vão ser controladas por três parâmetros específicos ε , ω e g . Podemos através deles definir um conjunto de variáveis adimensionais $V_n = \frac{v_n \omega}{g}$, $\epsilon = \frac{\varepsilon \omega^2}{g}$ e medimos o tempo através do número de oscilações da parede móvel como sendo $\phi_n = \omega t_n$. A partir dessas variáveis assumindo o instante $\phi \in [0, 2\pi]$, a posição da partícula é $y_p(\phi_n) = \epsilon \cos(\phi_n)$ com a velocidade inicial $V_n > 0$, poderemos escrever o mapeamento (2.16):

$$T_c : \begin{cases} V_{n+1} = -V_n^* + \phi_c - 2\epsilon \sin(\theta_{n+1}) \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + \Delta T_n] \quad (\text{mod } 2\pi), \end{cases} \quad (2.16)$$

onde o subíndice c desse mapeamento indica que o modelo estudado é o modelo completo. Observa-se que as expressões de V_n^* e ΔT_n dependem do tipo de colisão que ocorre, e que o parâmetro ϵ é a razão das acelerações entre a parede vibrante e o campo gravitacional.

Para o caso onde ocorre as colisões sucessivas as expressões serão $V_n^* = V_n$ e $\Delta T_n = \phi_c$, onde ϕ_c é obtida no momento da colisão da partícula com a parede móvel, que é dada pela seguinte equação transcendental:

$$G(\phi_c) = \epsilon \cos(\phi_n + \phi) - \epsilon \cos(\phi_n) - V_n \phi_c + \frac{1}{2} \phi_c^2. \quad (2.17)$$

Já para o caso de colisões indiretas, a expressão vai ser $V_n^* = -\sqrt{V_n^2 + 2\epsilon(\cos(\phi_n) - 1)}$ e $\Delta T_n = \phi_s + \phi_d + \phi_c$, onde $\phi_s = V_n$ vai ser o tempo de subida da partícula após colidir com a parede móvel até ela atingir a altura máxima onde a sua velocidade é zero, $\phi_d = \sqrt{V_n^2 + 2\epsilon(\cos(\phi_n) - 1)}$ é o tempo de descida da partícula após atingir o ápice da sua trajetória até a sua colisão com a parede móvel e ϕ_c vai ser obtido numericamente da equação transcendental $F(\phi_c) = 0$, que vai ser dada por

$$F(\phi_c) = \epsilon \cos[\phi_s + \phi_d + \phi_c] - \epsilon - V_n \phi_c + \frac{1}{2} \phi_c^2. \quad (2.18)$$

Outra maneira para estudar o modelo *bouncer* é assumir a parede como sendo fixa, porém no instante da colisão a partícula sofre uma troca de energia e *momentum* como se a parede ainda estivesse em movimento. Tal método é chamada de versão simplificada e ele foi proposto em uma época onde o poder computacional não era tão robusto como nos

dias atuais [Lichtenberg et al., 1980] pois as simulações numéricas através desse método eram mais rápidas. Outra vantagem da versão simplificada é o fato dela não envolver as equações transcendentais $F(\phi_c)$ e $G(\phi_c)$.

Um fator importante que pode ser observado, será a conexão que pode ser observada do mapeamento simplificado com o mapa padrão, onde aplicando o mapa padrão no modelo *bouncer* de forma que os sistemas vão estar sendo definidos por um conjunto de variáveis adimensionais $I_n = 2V_n$, $K = 4\epsilon$ e $\theta_n = \phi_{n+1} + \pi$, teremos:

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + K \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1} \end{cases} \pmod{2\pi} \Rightarrow S_{rel} : \begin{cases} V_{n+1} = V_n - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \\ \phi_{n+1} = \phi_n + 2V_n \end{cases} \pmod{2\pi}. \quad (2.19)$$

Tal mapeamento é observado para o caso onde as partículas apresentam um coeficiente relativístico β nulo. Para o caso onde o coeficiente β não é nulo, será recuperado o mapeamento relativístico tal que:

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + K \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \frac{I_{n+1}}{\sqrt{1+(\beta I_{n+1})^2}} \end{cases} \pmod{2\pi} \Rightarrow S_{rel} : \begin{cases} V_{n+1} = V_n - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \\ \phi_{n+1} = \phi_n + \frac{2V_n}{\sqrt{1+(2\beta V_n)^2}} \end{cases} \pmod{2\pi}. \quad (2.20)$$

Nota-se que o parâmetro ϵ , de forma similar ao parâmetro K (considerando que $K = 4\epsilon$), controla a transição de integrabilidade para a não-integrabilidade, onde para $\epsilon = 0$, o sistema apresenta um caráter integrável, com curvas constantes. Para $\epsilon \neq 0$, o sistema apresenta um caráter não integrável, podendo apresentar um caráter ergódico, sem perturbações aleatórias no seu espaço de fases, ou como nos casos estudados nesse trabalho, quando $\epsilon = \epsilon_c \approx 0,2429$ ($K = K_c \approx 0,9716$), o sistema apresenta uma transição de comportamento, de localmente caótico para globalmente caótico, com um caráter misto, apresentando um mar de caos coexistindo com ilhas de estabilidade e curvas invariantes de *spanning*.

É possível observar também que para $\epsilon < \epsilon_c$ os espaço de fases apresenta as curvas invariantes de *spanning* limitando o crescimento da energia. Já para o caso onde $\epsilon > \epsilon_c$ as curvas invariantes são destruídas, levando ao crescimento ilimitado da energia.

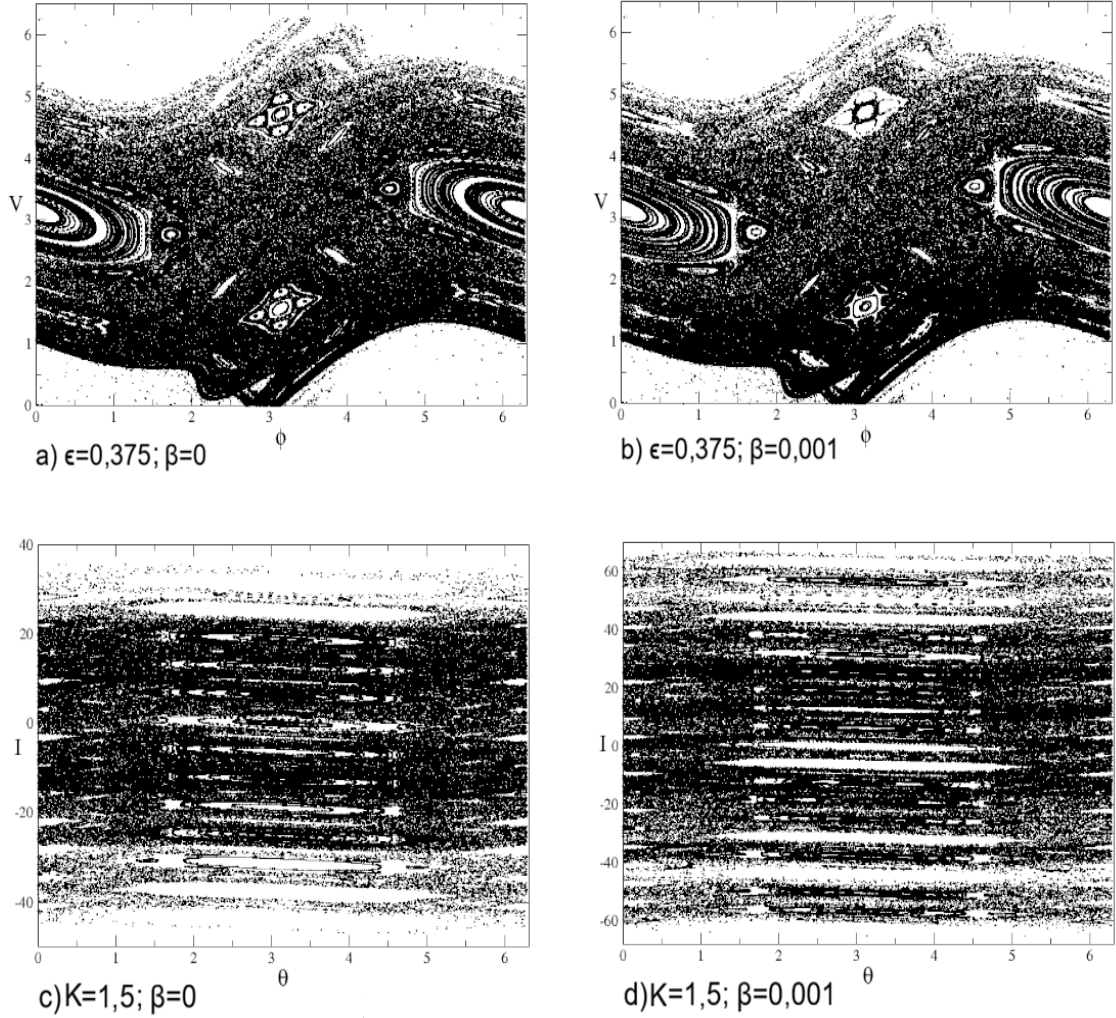


Figura 2.4: gráficos do modelo *bouncer* na parte superior para os valores de a) $\epsilon = 0,375$, $\beta = 0$; b) $\epsilon = 0,375$, $\beta = 0,001$, e para o mapa relativístico na parte inferior para os valores de c) $K = 1,5$, $\beta = 0$; d) $K = 1,5$, $\beta = 0,001$

Nas figuras (2.4) (a) e (b), teremos os espaços de fases para o modelo *bouncer*, onde em (2.4) (a) $\epsilon = 0,375$, $\beta = 0$ temos um espaço de fase misto dado pelos sistemas visto na (2.19). Para a figura (2.4) (b) $\epsilon = 0,375$, $\beta = 0,001$ o espaço de fase continua sendo misto, porém com a presença do parâmetro relativístico β influenciando o espaço de fase como visto no sistema (2.20). Nas figuras (2.4) (c) e (d), teremos o espaço de fases para o mapeamento padrão e o mapeamento relativístico respectivamente, onde em (2.4) (c) $K = 1,5$, $\beta = 0$ teremos um espaço de fase misto dado pelo sistema (2.7). Já na figura (2.4) (d) $K = 1,5$, $\beta = 0,001$, teremos um espaço de fase para um sistema relativístico como foi observado através na equação (2.15).

Uma das principais diferenças entre o mapeamento padrão e relativístico com o modelo *bouncer*, além das variáveis utilizadas em ambos os modelos, é vista na figura (3.4), onde o

eixo das variáveis de ação para o mapa padrão é positivo e negativo, enquanto as variáveis de velocidade são comparáveis as variáveis de ação do mapa padrão relativístico, só podem ser positivas.

Capítulo 3

Resultados numéricos para o Modelo *bouncer* relativístico

3.1 Espaço de fases

O estudo do modelo *bouncer* relativístico se deu através da coleta de dados utilizando as simulações computacionais onde foram utilizadas 20 condições iniciais e iteramos elas por 10^4 iteradas. Um dos resultados observados foram os gráficos dos espaços de fase, dados por V vs ϕ , onde para diferentes parâmetros de condições iniciais, com velocidades iniciais perto de ϵ e a fase inicial distribuída entre 0 e 2π foram observados diferentes comportamentos nos espaços de fase, visíveis na figura (3.1)

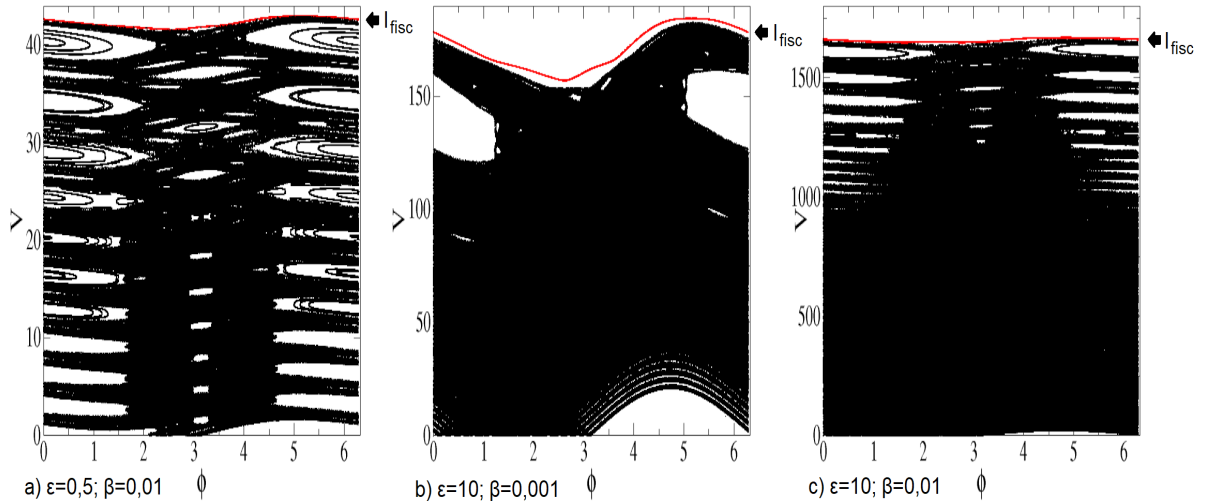


Figura 3.1: Espaços de fase para (a) $\epsilon = 0,5$, $\beta = 0,01$; (b) $\epsilon = 10$, $\beta = 0,001$; (c) $\epsilon = 10$, $\beta = 0,01$. As curvas em vermelho em cada espaço de fase são a primeira curva invariante de spanning

Para os diferentes espaço de fases na figura (3.1) observamos diferentes comportamentos, para (3.1) (a) $\epsilon = 0,5$, $\beta = 0,01$ é observado um espaço de fases misto, que apresenta

diversas ilhas de estabilidade e uma curva invariante limitando o crescimento do seu mar de caos, também podemos observar que o sistema vai ser globalmente caótico. Em (3.1) (b) $\epsilon = 10$, $\beta = 0,001$ observamos poucas ilhas limitando o mar de caos, levando ao crescimento da energia. Para (3.1) (c) $\epsilon = 10$, $\beta = 0,01$ entretanto, é observado um aumento dos mares de caos para o espaço de fase, mesmo com o aumento do valor de β e a quantidade de ilhas de estabilidade no espaço de fase estudado. Podemos observar através do sistema (2.20) e da imagem (3.1), a variação dos espaços de fase devido aos valores de ϵ e β . Vamos analisar os pontos fixos [Monteiro, 2011] de período $V_{n+1} = V_n = V^*$ e $\phi_{n+1} = \phi_n = \phi^* + 2m\pi$ [Nomura et al., 1992], onde substituindo essas expressões nas equações do mapeamento para o modelo *bouncer* relativístico nós temos:

$$V^* = \frac{2m\pi}{\sqrt{1 - (2m\pi\beta)^2}} \quad \phi^{(1)} = \arcsen\left(\frac{V}{4\epsilon}\right) \quad (3.1)$$

onde para $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, sendo observado que os pontos fixo são reais apenas se $\beta < (2m\pi)^{-1}$.

A maneira mais convencional de analisar a estabilidade dos pontos fixos é através da matriz jacobiana que é definida por:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} \end{pmatrix}$$

onde as derivadas parciais para o mapeamento relativístico são dadas por:

$$\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} = 1 - 2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} = -2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} = \frac{4}{\sqrt{1 + 4\beta^2 V_n^2}} - \frac{2(4V_n\beta)}{2(1 + 4\beta^2 V_n^2)^{3/2}} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1 + \frac{4\epsilon \cos \phi_n}{\sqrt{1 + 16\beta^2 \epsilon^2 \cos^2 \phi^2}}, \quad (3.5)$$

substituindo essas equações na matriz jacobiana, e realizando os cálculos obtemos o determinante como sendo:

$$\det(J) = 1 \quad (3.6)$$

para $\det(J) = 1$ preserva a área e do espaço de fases e portanto é um sistema conservativo.

3.2 Curvas de V_{RMS}

Para investigar as propriedades estatísticas das órbitas caóticas estudaremos as propriedades médias das velocidades. Para essa análise é utilizado a equações da velocidade quadrática média $V_{\text{RMS}} = \sqrt{\overline{V^2}(n)}$, dada por:

$$V_{rms} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sqrt{V_{ij}^2} \quad (3.7)$$

onde o primeiro somatório se observa as médias no ensemble de condições iniciais(M) e no segundo se observa as médias nas iteradas (n). A média será realizada para 2×10^3 condições iniciais e 10^9 iteradas.

Nota-se que o comportamento do V_{RMS} é dado pela figura (3.2), onde as curvas apresentam um padrão de crescimento com expoente $\frac{1}{2}$ para n pequeno, mas para n grande elas acabam convergindo para um regime de saturação em um platô constante, que é determinada por V_{sat} .

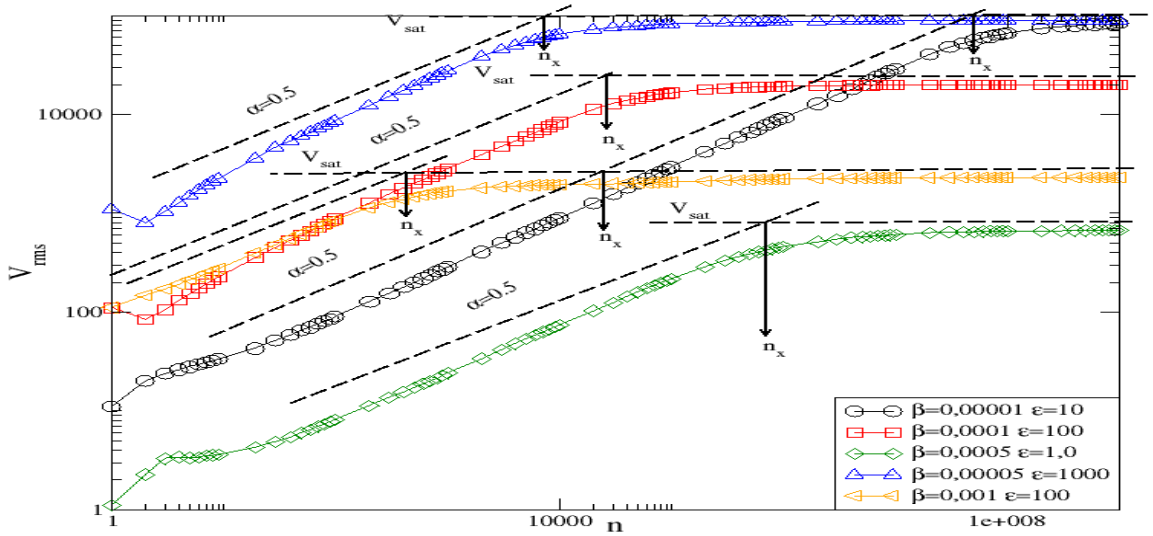


Figura 3.2: Gráfico das curvas de saturação para $\epsilon = 10$, $\beta = 0,00001$; $\epsilon = 100$, $\beta = 0,0001$; $\epsilon = 1$, $\beta = 0,0005$; $\epsilon = 1000$, $\beta = 0,00005$; $\epsilon = 100$, $\beta = 0,001$

Nota-se que para os diferentes parâmetros de controle ϵ e β das curvas que são vistas na figura (3.2), é possível observar que os valores da saturação V_{sat} e do *crossover* n_x vão ser diretamente proporcionais com os valores de ϵ , ou seja quanto maior o valor ϵ , maior vai ser os valores de V_{sat} e n_x . Já para o caso do coeficiente β , V_{sat} e n_x vão ser menores aos valores do coeficiente relativístico, e portanto quanto maior o valor de β , menor é os valores de V_{sat} e n_x . com base na figura (3.2), podemos mostrar as seguintes hipóteses de escala[Leonel, 2019]:

1. para $n \ll n_x$, em que α é o expoente de crescimento, onde nesse regime de crescimento através de um ajuste de lei de potência encontramos $\alpha \cong 0,5$

$$V_{\text{RMS}} \propto (n\epsilon^2)^\alpha \quad (3.8)$$

2. para $n \gg n_x$, com expoentes de saturação γ_1 e γ_2 , temos que:

$$V_{\text{RMS}} = V_{\text{sat}} \propto \epsilon^{\gamma_1} \beta^{\gamma_2} \quad (3.9)$$

3. para $n = n_x$, onde z_1 e z_2 são os expoentes de *crossover*, teremos:

$$n_x \propto \epsilon^{z_1} \beta^{z_2} \quad (3.10)$$

3.3 Análise de escala

Com as hipóteses de escala definidas é possível descrever o comportamento do V_{RMS} através de uma função homogênea generalizada do tipo

$$V_{\text{RMS}}(n\epsilon^2, \epsilon, \beta) = l V_{\text{RMS}}(l^a n\epsilon^2, l^b \epsilon, l^c \beta), \quad (3.11)$$

sendo l um fator de escala e a , b e c expoentes característicos.

Escolhendo $l^a n\epsilon^2 = 1$, temos que:

$$l = (n\epsilon^2)^{-\frac{1}{a}}, \quad (3.12)$$

substituindo esse resultado na equação (3.11) generalizada tem que:

$$V_{\text{RMS}}(n\epsilon^2, \epsilon, \beta) = (n\epsilon^2)^{-\frac{1}{a}} V_{\text{RMS}}(1, (n\epsilon^2)^{-\frac{b}{a}} \epsilon, (n\epsilon^2)^{-\frac{c}{a}} \beta). \quad (3.13)$$

Comparando o resultado da (3.13) com a primeira hipótese em (3.8) de escala pode se concluir que $\alpha = -\frac{1}{a}$.

Considerando que para $l^b \epsilon = 1$

$$l = \epsilon^{-\frac{1}{b}}, \quad (3.14)$$

substituindo na (3.11), pode-se observar:

$$V_{\text{RMS}}(n\epsilon^2, \epsilon, \beta) = \epsilon^{-\frac{1}{b}} V_{\text{RMS}}(\epsilon^{-\frac{a}{b}} n\epsilon^2, 1, \epsilon^{-\frac{c}{b}} \beta). \quad (3.15)$$

Fazendo a comparação do resultado da (3.15) com a segunda hipótese de escala em (3.9) obtemos $\gamma_1 = -\frac{1}{b}$.

Finalmente, considerando que $l^c \beta = 1$, então:

$$l = \beta^{-\frac{1}{c}}, \quad (3.16)$$

substituindo na função homogênea generalizada (3.11), observa-se:

$$V_{\text{RMS}}(n\epsilon^2, \epsilon, \beta) = \beta^{-\frac{1}{c}} V_{\text{RMS}}(\beta^{-\frac{a}{c}} n\epsilon^2, \beta^{-\frac{b}{c}} \epsilon, 1). \quad (3.17)$$

Comparando o resultado da (3.17) com a segunda hipótese de escala em (3.9) obtemos $\gamma_2 = -\frac{1}{c}$. Para determinar as leis de escala do problema, será feita as igualdades entre os valores l das equações (3.12) e (3.14) teremos como resultado:

$$n = \epsilon^{\frac{\gamma_1}{\alpha} - 2} \quad (3.18)$$

Comparando essa equação com a terceira hipótese de escala em (3.10) para encontrar z_1 teremos que:

$$z_1 = \frac{\gamma_1}{\alpha} - 2 \quad (3.19)$$

Realizando novamente as igualdades dos valores l das equações (3.12) e (3.16):

$$n = \beta^{\frac{\gamma_2}{\alpha}} \quad (3.20)$$

Realizando a comparação dessa equação com a terceira hipótese em (3.10) de escala para encontrar z_2 obteremos:

$$z_2 = \frac{\gamma_2}{\alpha} \quad (3.21)$$

Tendo o valor de $\alpha = 0,5$ os valores de γ_1 e γ_2 podem ser obtidos através do ajuste lei de potência dos parâmetros ϵ e β utilizados para definir as curvas em (3.3). Onde $\gamma_1 = 0,36$ e $\gamma_2 = -0,96$.

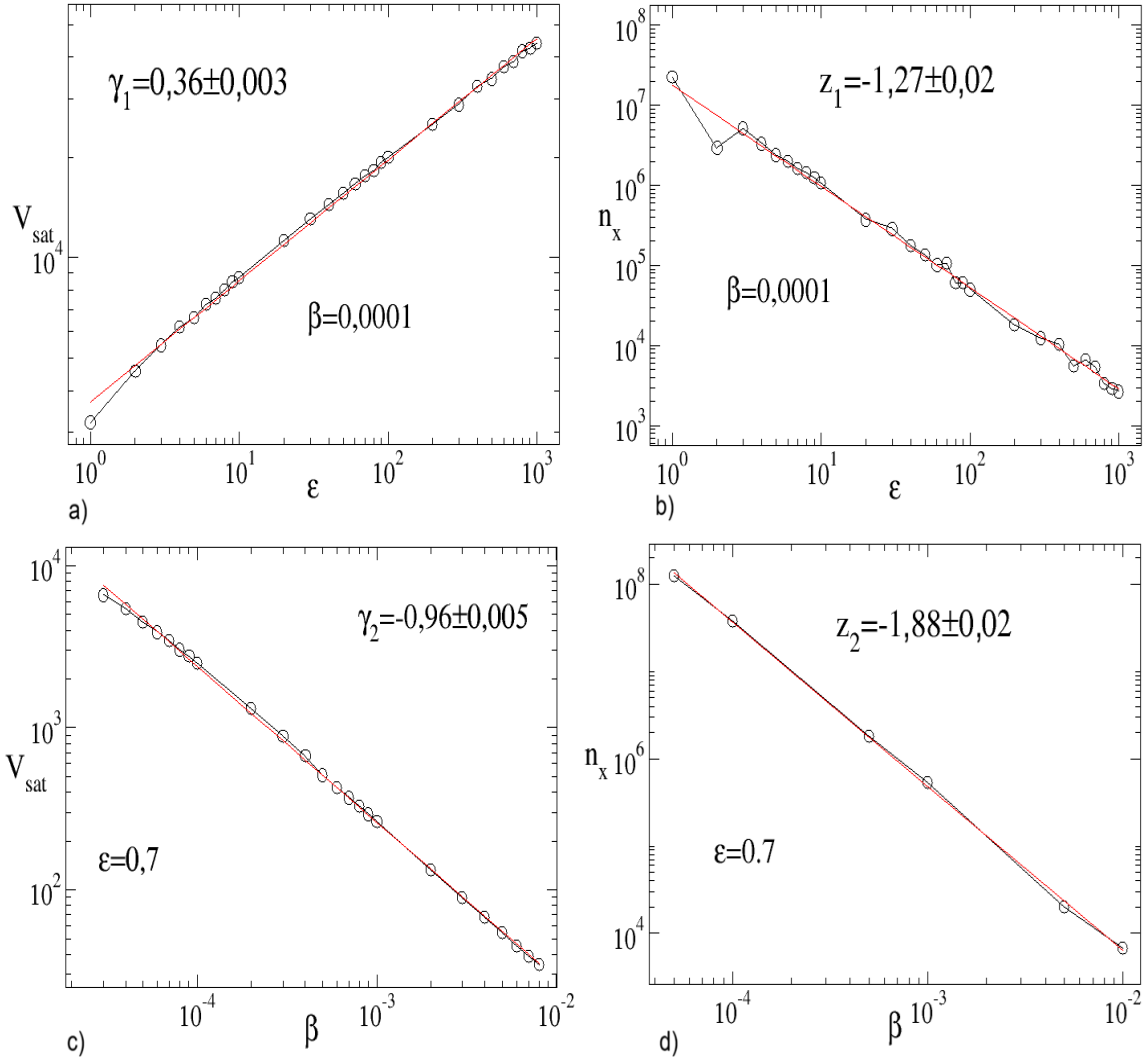


Figura 3.3: gráfico dos expoentes de saturação γ_1 e γ_2 e dos expoentes de *crossover* z_1 e z_2 , feito através das análises numéricas das hipóteses de escala das curvas de V_{RMS}

A partir dos valores de γ_1 e γ_2 , os expoentes z_1 e z_2 podem ser obtidos através das leis de escala, tais que:

$$z_1 = \frac{\gamma_1}{\alpha} - 2 \Rightarrow z_1 = \frac{0,36}{0,5} - 2 = -1,27, \quad (3.22)$$

$$z_2 = \frac{\gamma_2}{\alpha} \Rightarrow z_2 = -\frac{0,96}{0,5} = -1,92. \quad (3.23)$$

Através da análise das curvas de V_{rms} vs n obtemos os valores dos pontos de saturação V_{sat} e *crossover* n_x para cada curva, e também o expoente de crescimento $\alpha = 0,5$, onde tais valores são utilizados nas hipóteses de escala que definem o comportamento das curvas. Com as hipóteses de escala será necessário definir os expoentes críticos γ_1 , γ_2 , z_1 e z_2 , que será realizado através do estudo dos valores dos coeficientes ϵ e β e dos valores obtidos V_{sat} e n_x obtidos através das curvas. Com esses valores vai ser possível montar os

gráficos observados em (3.3) para os expoentes críticos, obtendo os valores de $\gamma_1 = 0,36$, $\gamma_2 = -0,96$, $z_1 = -1,27$ e $z_2 = -1,88$.

Através dos argumentos de escala, as curvas de V_{RMS} podem ser transformadas de acordo :

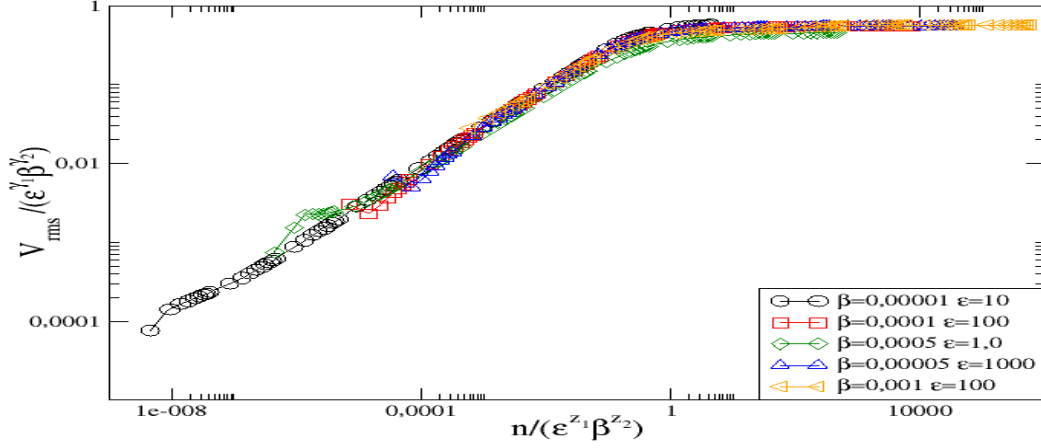


Figura 3.4: Colapso universal das curvas de saturação considerando os argumentos de escala

O colapso universal visto na figura (3.4), é feito através da transformação dos eixos da curva de saturação utilizando as hipóteses de escala, nos permite observar que independente dos valores inseridos para os parâmetros ϵ e β , todas as curvas vão apresentar um mesmo comportamento de crescimento até eles alcançarem um determinado valor de *crossover*, onde elas então mudam para um comportamento de saturação.

Capítulo 4

Transporte e as curvas de probabilidade de sobrevivência

O estudo dos comportamentos médios dos sistemas são realizados através das análises das propriedades de transporte do sistema, onde utilizando a velocidade de saturação V_{sat} obtida nos gráficos de V_{RMS} vs n da figura (3.2) como uma velocidade de escape para as órbitas, onde cada V_{sat} é característico dos valores de β e ϵ fornecidos, e a velocidade de escape no espaço de fases é retratada esquematicamente pela figura (4.1) onde a região pontilhada em verde é obtida pela velocidade de saturação V_{sat} .

Nota-se que para um ensemble de baixas energias, é considerado que as condições iniciais escaparam quando elas atingem um valor da velocidade maior que V_{sat} . O oposto vai ser visto para condições de altas energias, onde as condições escapam para valores menores que V_{sat} .

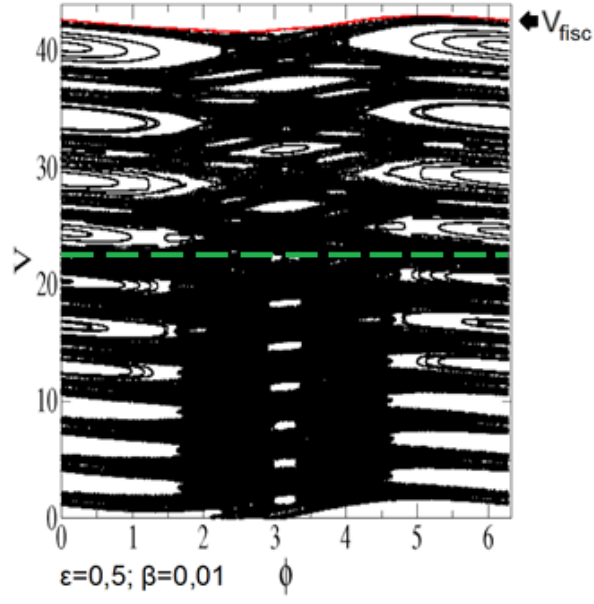


Figura 4.1: Espaço de fase para $\epsilon = 0,5$, $\beta = 0,01$ com um escape pontilhado em verde em $V_{\text{sat}} = 22,43$

Utilizado uma grade 1000×1000 condições iniciais que estão igualmente distribuídas ao longo dos eixos $V_0 \in [0, V_{fisc}]$ e $\phi_0 \in [0, 2\pi]$. Cada condição inicial foi iterada até 10^5 colisões com a parede móvel ou até que a velocidade de escape fosse atingida pela dinâmica, sendo que a velocidade de escape é obtida através das curvas de V_{RMS} vs n , cujo o valor de V_{sat} que é utilizado vai estar dependendo dos parâmetros ϵ e β inseridos como condições iniciais, e através desses valores obteremos bacias de escape como observado na figura (4.2).

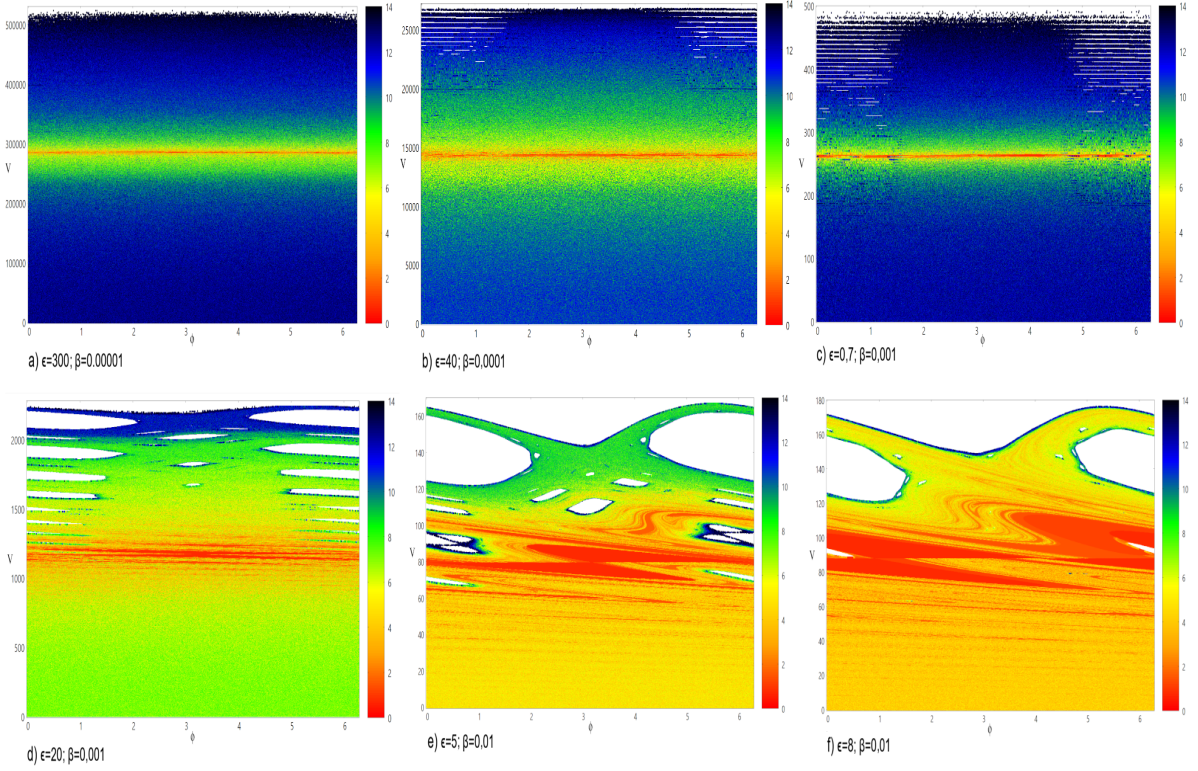


Figura 4.2: Bacias de escape para a) $\epsilon = 300$, $\beta = 0,00001$; b) $\epsilon = 40$, $\beta = 0,0001$; c) $\epsilon = 0,7$, $\beta = 0,001$; d) $\epsilon = 20$, $\beta = 0,001$; e) $\epsilon = 5$, $\beta = 0,01$; f) $\epsilon = 8$, $\beta = 0,01$

O gradiente de cores permite observar o escape durante toda a evolução da dinâmica da órbita, onde a região em vermelho vai estar representando um escape mais rápido das partículas, as regiões laranja, amarela e verde vão ser um escape intermediário (indo da mais rápida para a mais lenta), e a região azul vai estar representando escape para tempos muito longos. As regiões brancas que aparecem na figura denotam locais onde as condições iniciais foram dadas em cima de ilhas de estabilidade, e portanto as órbitas estão confinadas naquele local para sempre.

As bacias de escape dadas na figura (4.2) estão ordenadas do menor valor $\beta = 10^{-5}$ para o maior dado por $\beta = 10^{-2}$. Nota-se em (a) para $\epsilon = 300$ e $\beta = 0,00001$, que β é um valor muito pequeno em relação a ϵ . Portanto o parâmetro β não afeta a dinâmica de forma significativa, enquanto que para $\epsilon = 300$ há um crescimento significativo da energia no espaço de fase. Por essa razão, quando as órbita são colocadas nos valores que estão distantes da V_{sat} , elas acabam levando mais tempo para escapar, com uma pequena região com escapes mais rápidos concentrada apenas em torno da velocidade de escape. A mesma situação é observada para (b) $\epsilon = 40$ e $\beta = 0,0001$, onde mesmo observado a presença de algumas pequenas ilhas, o mar de caos ainda apresenta um crescimento significativo, e portanto as órbitas nos valores distantes de V_{sat} apresentam longos tempos de escape. Porém diferente de (a), as regiões com um escape intermediário estão mais difundidas no

espaço de fase, fazendo com que (b) não seja totalmente dominada por regiões com um escape mais lento como é visto em (a).

Para (c) $\epsilon = 0,7$ e $\beta = 0,001$, observamos o parâmetro β limitando o crescimento do mar de caos no eixo V através das ilhas de estabilidade, e também a influência das ilhas nos tempos de escape, levando a dominação das regiões com o tempo de escape mais longo em maior parte do espaço de fase e as regiões com um escape mais rápido sendo concentradas apenas onde a velocidade de escape foi introduzida, onde não é observado ilhas de estabilidade na região. Em (d) para $\epsilon = 20$ e $\beta = 0,001$ observamos como ambos os parâmetros afetam o escape, onde observaremos um maior crescimento do mares de caos no espaço de fase em relação a (c) devido a um maior valor de ϵ para o mesmo valor de β . Sendo que as regiões com o escape mais lento estão concentradas nas regiões próximas as ilhas de estabilidade. Entretanto ainda é possível observar uma dominância das zonas com um escape intermediário em verde na figura, além de um aumento das zonas em amarelo e vermelho com escapes mais rápidos ao redor da zona da velocidade de escape.

Para (e) $\epsilon = 5$, $\beta = 0,01$, considerando que β não é tão pequeno em relação ao valor de ϵ os mares de caos são limitados no seu crescimento devido ao parâmetro β , e portanto tempos de escape mais lentos estão confinados apenas nas bordas das ilhas de estabilidade, onde as regiões próximas as ilhas observamos um escape intermediário, e para a zonas próximas a velocidade de escape V_{sat} e que não estão sendo afetadas pelas ilhas de estabilidade, os escapes das órbitas são mais rápidos. E para (f) $\epsilon = 8$, $\beta = 0,01$, ocorre o desaparecimento de alguma ilhas de estabilidade que estavam atrasando o escape em (e), e portanto o escape acaba sendo rápido em maior parte do espaço de fase, com exceção das regiões próximas das ilhas de estabilidade com um escape intermediário em verde, e nas bordas das ilhas, com um escape mais lento em azul.

Um fator importante para esse estudo vai ser a análise estatística cumulativa para a distribuição dos tempos de recorrência, a qual será obtida através da integração dos histogramas de escape das partículas. A partir disso, cada condição inicial que escapou vai ser salva em um vetor, juntamente com a iteração onde escape ocorreu, e partir desses resultados poderemos escrever um histograma caracterizando diferentes tipos de transporte que podem ser dados por escapes mais rápidos ou mais lentos. Tal distribuição é também conhecida como probabilidade de sobrevivência, e como vista no capítulo (1.5) tal probabilidade vai ser dada pela seguinte equação:

$$P_{\text{surv}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N N_{\text{rec}}(j), \quad (4.1)$$

onde $N = 10^8$ condições iniciais distintas. Considerando que as órbitas estudadas devem

apresentar um caráter intermitente, ocorrendo uma alternância entre um regime regular confinado nas ilhas de estabilidade para um regime caótico, se deslocando nos mares de caos, sendo que esse processo ocorre na presença de um regime de *stickiness*. O ensemble de condições iniciais deve ser sempre definido na região do mar de caos, tomando cuidado para que nenhuma condição esteja dentro de uma ilha de estabilidade.

A probabilidade de sobrevivência está sendo caracterizada por decaimentos do tipo exponencial, onde devido a presença de estruturas mistas nos espaços de fase a probabilidade de sobrevivência apresenta comportamentos distintos nos espaços de fase como pode ser visto na figura (4.3):

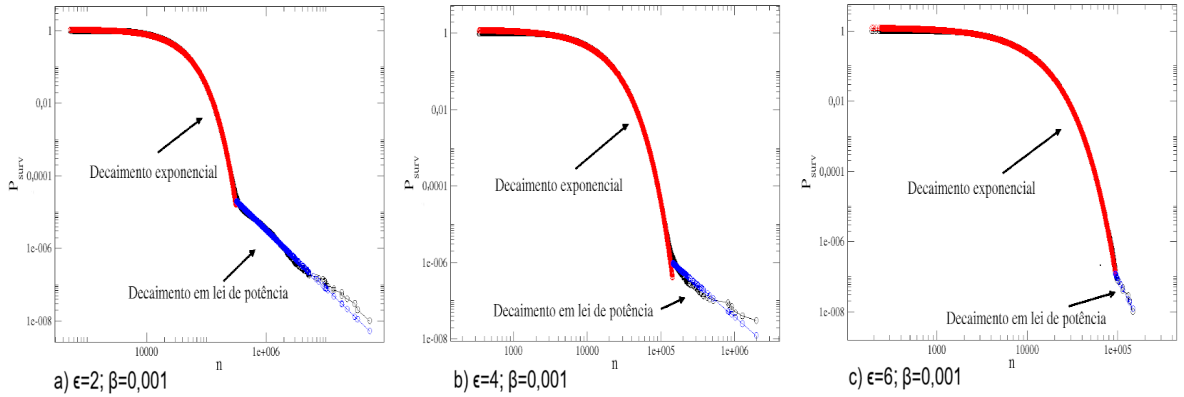


Figura 4.3: Decaimento para (a) $\epsilon = 2$ e $\beta = 0,001$, (b) $\epsilon = 4$ e $\beta = 0,001$ e (c) $\epsilon = 6$ e $\beta = 0,001$

Analisando o comportamento da figura (4.3) podemos observar que maior parte das órbitas são afetadas pela presença de ilhas de estabilidade na sua estrutura, levando a dinâmica a apresentar órbitas em regime de *stickiness*. Devido a essas regiões de estabilidade será observado uma mudança de comportamento nas curvas de P_{surv} , onde as curvas apresentam um comportamento de um decaimento exponencial, e subitamente elas mudam de comportamento para um decaimento mais lento em lei de potência ou o decaimento para exponencial esticada. Para o caso do modelo *bouncer* ambos os decaimentos podem ser observados dependendo dos parâmetros de controle ϵ e β e das condições iniciais escolhidas.

Considerando as curvas observadas, é definido um ajuste numérico para cada tipo de decaimento observado. Para o decaimento exponencial, tem que:

$$P_{\text{surv}} \propto \exp\{(n\mu)\}, \quad (4.2)$$

onde μ é o expoente desse decaimento exponencial. Porém para um decaimento sobre a influência das órbitas do regime de *stickiness*, vai estar obedecendo um regime de lei de potência tal que:

$$P_{\text{surv}} \propto n^{-\gamma}, \quad (4.3)$$

onde γ é o decaimento em lei de potência. Realizando diversas análises de como os parâmetros ϵ e β o comportamento dos decaimentos, utilizando valores além daqueles que foram observados na figura (4.2), observa-se que conforme o parâmetro ϵ aumenta, o expoente de escape também aumenta, e para o parâmetro β conforme ele diminui o expoente de escape também diminui. Sendo assim, o expoente de escape é diretamente proporcional a ambos os parâmetros ϵ e β .

É importante mencionar que o resultado obtido descreve o comportamento das curvas de P_{surv} para o caso onde o decaimento é exponencial.

O estudo do comportamento dos decaimentos observados na figura (4.2) variam para os parâmetros ϵ e β , foram feitos gráficos para os diferentes valores dos expoentes γ em relação ao parâmetros de ϵ e β , onde foi fixado um dos parâmetros enquanto o outro variava, como pode ser visto a seguir:

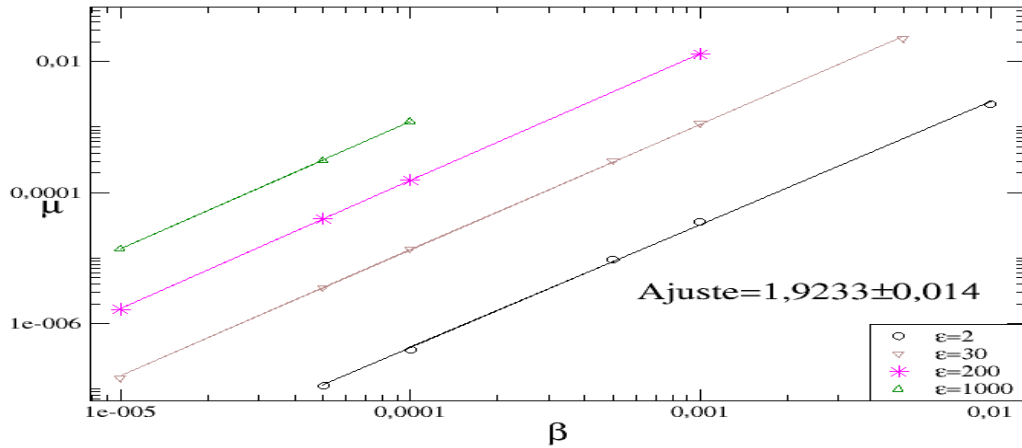


Figura 4.4: Gráfico de μ vs β para os valores de ϵ fixo, tais valores são preto: $\epsilon = 2$, marrom: $\epsilon = 30$, lilás: $\epsilon = 200$ e verde: $\epsilon = 1000$

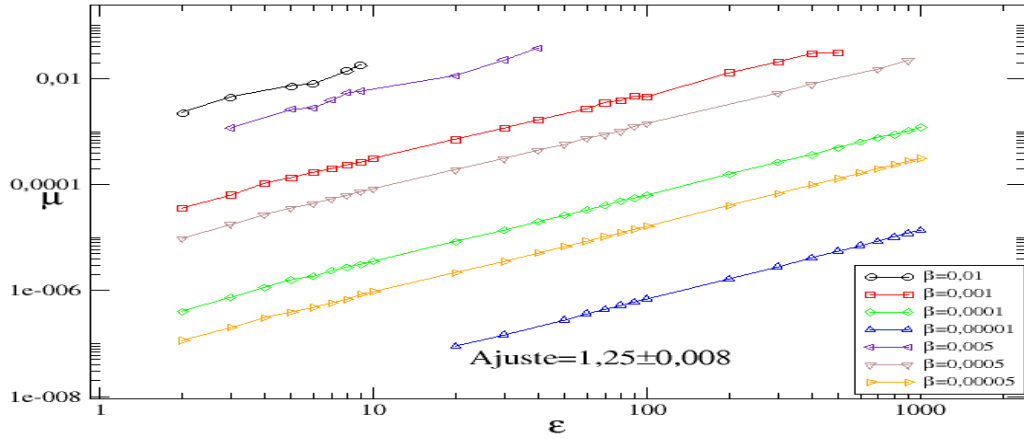


Figura 4.5: Gráfico de μ vs ϵ para os valores de β fixo, tais valores são preto: $\beta = 0,01$, vermelho: $\beta = 0,001$, verde: $\beta = 0,0001$, azul: $\beta = 0,00001$, violeta: $\beta = 0,005$, (f) $\beta = 0,0005$ e (g) $\beta = 0,00005$

É possível observar através das figura (4.4) e (4.5), que os ajustes se comportam de forma idêntica conforme variam os valores de ϵ e mantém β fixo, e observamos o mesmo comportamento para quando β varia e ϵ permanece fixo. isso se dá devido as órbitas em regime de *stickness* encontradas nos espaços de fase. Através dos valores de κ_1 e κ_2 , podemos colapsar os decaimentos exponenciais em único decaimento como é visto na figura (4.6)

Através do colapso universal dos decaimentos , observamos que o comportamento do decaimento exponencial da probabilidade de sobrevivência é comum para todos os parâmetros ϵ e β . Entretanto, o decaimento mais lento em lei de potência não garantido, pois só é observado uma lei de potência significativa para $\epsilon = 2$, $b = 0,001$, sendo talvez necessário um maior número de iterações para observar se a lei de potência existe nesses decaimentos.

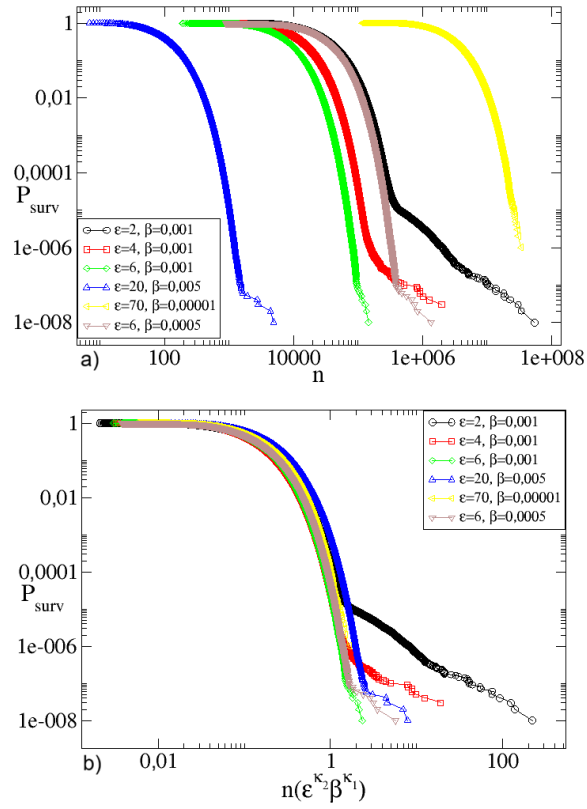


Figura 4.6: Em a) temos os decaimento para $\epsilon = 2, \beta = 0,001$; $\epsilon = 4, \beta = 0,001$; $\epsilon = 6, \beta = 0,001$; $\epsilon = 20, \beta = 0,005$; $\epsilon = 70, \beta = 0,00001$; $\epsilon = 6, \beta = 0,0005$. Em b) teremos o colapso obtido através dos valores κ_1 e κ_2 .

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho foi realizado o estudo do sistema Hamiltoniano do modelo *bouncer* relativístico e suas propriedades. Os mapeamentos padrão e padrão relativístico surgiram do estudo do rotor quicado utilizando o formalismo Hamiltoniano, e ao substituirmos variáveis adimensionais nos sistemas obtidos, podemos definir o mapeamento utilizado nos espaços de fase do modelo *bouncer*.

Começando no capítulo 1 com uma introdução histórica sobre os sistemas dinâmicos e algumas propriedades caóticas, além da introdução básica sobre os conceitos de teorema KAM, mapa padrão relativístico e as propriedades de *stickness*. Então, o modelo *bouncer* é introduzido através da exposição de suas origens como um modelo par explicar a aceleração de Fermi para os raios cósmicos, e é feita uma breve discussão sobre os seus mecanismos, as propriedades de transporte e as leis de escala.

No capítulo 2 foi apresentado os mapeamentos padrão e padrão relativístico, onde para encontra tais mapeamentos foi realizado um desenvolvimento matemático através das equações de Hamilton, resultando no sistema de equações utilizado nos gráficos dos espaços de fase vistos no mapeamento. Através dos sistemas dos mapas padrão e padrão relativístico, foi possível encontrar o mapeamento que vai estar definindo os espaços de fase para o modelo *bouncer* através de algumas transformações de variáveis, e também pode observar as suas características em relação com o mapeamento padrão e relativístico.

Através da definição do mapeamento encontrado para o modelo *bouncer* no capítulo 2, foi possível observar a importância dos parâmetros ϵ e β no comportamento dos espaços de fase, onde enquanto ambos controlam a transição da integrabilidade para a não integrabilidade, veremos que essa transição ocorre conforme os valores de ϵ aumentam e os valores de β diminuem. Com esses resultados, foram realizadas análises nos sistemas e nos gráficos no capítulo 3, onde primeiramente foram estudados os pontos fixos e os cálculos para a sua estabilidade. Feito isso foi investigado as propriedades das órbitas caóticas através das curvas de V_{RMS} e foi realizada a análise das suas hipóteses

de escala, onde foram obtidos os valores para os expoentes de *crossover*, que definem as propriedades das curvas de V_{RMS} .

Por fim, no capítulo 4 estudamos as propriedades de transporte para as órbitas caóticas do modelo *bouncer*, onde foi introduzido uma velocidade de escape nos espaços de fase, permitindo observar o comportamento para diferentes parâmetros de ϵ e β do escape das suas órbitas através dos gráficos da bacia de escape. E foi estudado também a probabilidade dessas órbitas sobreviverem a introdução da velocidade de escape, onde a probabilidade de sobrevivência da partícula foi determinada através da utilização dos gráficos e das equações.

Nesse sentido essa dissertação observa características interessantes do modelo *bouncer*, como o seu surgimento através da aceleração de Fermi, a dependência dos parâmetros iniciais utilizados para o estudo do modelo, o fato que os espaços de fase do modelo *bouncer* vão ser derivados das equações para os mapas padrões e relativísticos, a sua análise através das curvas de saturação e como o modelo interage com a introdução de uma velocidade de escape no seu espaço de fases.

Como perspectivas futuras, seria possível realizar um estudo mais aprofundado nas propriedades de transporte, obtendo uma maior quantidade de resultados para o expoente μ para uma maior quantidade de interações no decaimento, podendo estudar as propriedades do seu ajuste.

Outro caminho que pode ser também avaliado é a influência da introdução da dissipação na dinâmica do modelo *bouncer*, com estruturas *shrimp* e crises de fronteira.

Bibliografia

- Alligood, K. T., Sauer, T. D., & Yorke, J. A. (1996). *Chaos: An introduction to dynamical systems*. Springer-Verlag.
- Altmann, E. G., Portela, J. S. E., & Tél, T. (2013). Leaking chaotic systems. *Rev. Mod. Phys.*, 85, 869–918.
- Arnol'd, V. I. (1963). Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics. *Russian Mathematical Surveys*, 18(6), 85.
- Arnol'd, V. I., & Avez, A. (1968). *Ergodic problems of classical mechanics*. Springer-Verlag.
- Birkhoff, G. D. (1927). Dynamical Systems. *American Mathematical Society - Colloquium Publications*, 9.
- Chirikov, B. V. (1979). A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics Reports*, 52(5), 263–379.
- Ciubotariu, C., Bădeliță, L., & Stancu, V. (2002). Chaos in dissipative relativistic standard maps. *Chaos, Solitons & Fractals*, 13(6), 1253–1267.
- De Oliveira, D. F. M., & Robnick, M. (2012). *Statistical Properties of Time-dependent Systems* [tese de dout., University of Maribor, Krekova].
- de Almeida, M. A. M. (2025). Convergência de órbitas para o estado estacionário em mapas bidimensionais discretos.
- Feigenbaum, M. (1978). Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, 19, 25.
- Fermi, E. (1949). On the Origin of the Cosmic Radiation. *Physical Review*, 75, 1169–1174.
- Galilei, G. (1999). *O ensaiador* (Vol. 1). Nova Cultural.
- Galilei, G. (2010). *Siderus Nuncious: O mensageiro das estrelas*. Fundação Calouste Gulbenkian.
- Gaspard, P. (1998). *Chaos, Scattering and Statistical Mechanics*. Cambridge University Press.
- Goldstein, H. (1969). *Classical Mechanics*. Addison Wesley.
- Grebogi, C., Ott, E., & Yorke, J. A. (1982). CHAOTIC ATTRACTORS IN CRISIS. *Physical Review Letters*, 48, 1507–1510.

- Hénon, M. (1976). A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*, 50, 69–77.
- Kaplan, J. L., & Yorke, J. A. (1979). Preturbulence: A regime observed, in a fluid flow model of Lorenz. *Communications in Mathematical Physics*, 67, 93.
- Kolmogorov, A. N. (1954). Preservation of conditionally periodic movements with small change in hamiltonian function. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 98, 527.
- Lan, B. L., & Yapp, C. (2008). Dissipative relativistic standard map: Periodic attractors and basins of attraction. *Chaos, Solitons & Fractals*, 37(5), 1300–1304.
- Leonel, E., McClintock, P., & Silva, J. (2004). Fermi-Ulam Accelerator Model under Scaling Analysis. *Physical review letters*, 93, 014101.
- Leonel, E. D. (2015). *Fundamentos da Física Estatística*. Blucher.
- Leonel, E. D. (2019). *Invariância de escala em sistemas dinâmicos não lineares*. Blucher.
- Lichtenberg, A. J., & Lieberman, M. A. (1992). *Regular and Chaotic Dynamics* (Vol. 2). Springer.
- Lichtenberg, A., Lieberman, M., & Cohen, R. (1980). Fermi acceleration revisited. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1(3), 291–305.
- Livorati, A. L. P. (2014). Influência do Fenômeno de Stickness em alguns Sistemas Dinâmicos Clássicos. *Univ São Paulo, IFUSP, Inst Fis*, 39–46.
- Livorati, A. L. P., Dettmann, C. P., Caldas, I. L., & Leonel, E. D. (2015). On the statistical and transport properties of a non-dissipative Fermi-Ulam model. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 25(10), 103107.
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of Atmospheric Sciences*, 20, 130.
- Mackay, R., Meiss, J., & Percival, I. (1984). Transport in Hamiltonian systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 13(1), 55–81.
- May, R. (1976). Simple Mathematical Models With Very Complicated Dynamics. *Nature*, 26, 457.
- Miranda, L. K. A., Kuwana, C. M., Huggler, Y. H., da Fonseca, A. K. P., Yoshida, M., de Oliveira, J. A., & Leonel, E. D. (2021). A short review of phase transition in a chaotic system. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 231, 167–177.
- Monteiro, L. H. A. (2011). *Sistemas dinâmicos*. Editora Livraria da Física.
- Moser, J. (1962). On invariant curves of area-preserving mapping of an annulus. *On invariant curves of area-preserving mapping of an annulus*, 1, 1–20.
- Moser, J. (1973). *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*. Princeton University Press.
- Newton, I. (1846). *Newton's principia: mathematical principles of natural philosophy*. Daniel Adee.

- Newton, I. (1990). *Principia: princípios matemáticos da filosofia natural*. Editora USP.
- Nomura, Y., Ichikawa, Y., & Horton, W. (1992). Nonlinear dynamics of the relativistic standard map. *Physical review. A*, *45*, 1103–1115.
- Oliveira, D. F., & Leonel, E. D. (2014). Statistical and dynamical properties of a dissipative kicked rotator. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, *413*, 498–514.
- Oliveira, D. F., Leonel, E. D., & Robnik, M. (2011). Boundary crisis and transient in a dissipative relativistic standard map. *Physics Letters A*, *375*(38), 3365–3369.
- Ott, E. (2002). *Chaos in Dynamical Systems* (Vol. 2). Cambridge University Press.
- Pathria, R. K. (2008). *Statistical Mechanics*. Elsevier.
- Poincaré, J. H. (1899). *Les Methodes Nouvelles de la Meccanique Celeste*. Gauthier-Villars.
- Pomeau, Y., & Manneville, P. (1980). Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Communications in Mathematical Physics*, *74*, 189–197.
- Pustilnikov, L. D. (1983). On Ulam’s problem. *Theor. Math. Phys*, *57*, 1035.
- Reichl, L. (2004). *The Transition to Chaos: Conservative Classical Systems and Quantum Manifestations* (Vol. 2nd). Springer.
- Schuster, H., & Just, W. (2005). *Deterministic chaos. An introduction. 4th, revised and enlarged ed.* Wiley-VCH.
- Smale, S. (1967). Differentiable dynamical systems. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *73*, 747.
- Zaslavsky, G. M. (2004). *Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics*. Oxford University Press.
- Zaslavsky, G. M. (2007). *The physics of chaos in Hamiltonian systems*, Imperial College Press.