



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Campus de Rio Claro

# O Desenvolvimento da Pesquisa em Equações Diferenciais no ICMC-USP: Contribuição de Nelson Onuchic.

**Patrícia de Souza**

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação – Mestrado Profissional em  
Matemática Universitária do Departamento  
de Matemática como requisito parcial para a  
obtenção do grau de Mestre

Orientador

**Prof. Dr. Sérgio Roberto Nobre**

Co-orientadora

**Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti**

**2011**

111 Souza, Patrícia  
X111x O Desenvolvimento da Pesquisa em Equações Diferenciais no  
ICMC-USP: Contribuição de Nelson Onuchic. / Patrícia de Souza-  
Rio Claro: [s.n.], 2011.  
44 f.: fig., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.  
Orientador: Sérgio Roberto Nobre  
Co-orientadora: Marta Cilene Gadotti

1. Análise. 2. História da Matemática. 3. Equação Diferencial.  
4. Matemática. I. Título

# TERMO DE APROVAÇÃO

Patrícia de Souza

O DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA EM EQUAÇÕES DIFERENCIAIS  
NO ICMC-USP: CONTRIBUIÇÃO DE NELSON ONUCHIC.

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Sérgio Roberto Nobre  
Orientador

Profa. Dra. Maria do Carmo Carbinatto  
Departamento de Matemática - ICMC - USP

Profa. Dra. Eliris Cristina Rizzioli  
Departamento de Matemática - IGCE - Unesp

**Rio Claro, 10 de Março de 2011**

*Dedico este trabalho à minha família e aos meus amigos.*

# Agradecimentos

Agradeço à minha família e meus amigos que me apoiaram durante todo o percurso do mestrado.

Ao meu orientador professor Sérgio Roberto Nobre.

À minha co-orientadora professora Marta Cilene Gadotti, que em muitos momentos me incentivou e orientou.

Aos professores que me ajudaram tanto, em particular à professora Maria do Carmo Carbinatto.

À professora Eliris Cristina Rizziolli por participar da banca deste trabalho.

E aos profissionais da Unesp pelo apoio e incentivo.

# Resumo

O objetivo desse trabalho é apresentar um importante e conhecido teorema sobre Equações Diferenciais, devido ao Professor Nelson Onuchic e Professor Philip Hartman publicado em 1963. Para isto é necessário descrever alguns resultados e conceitos básicos de Análise e Álgebra Linear. Além disso, analisar como esse resultado contribuiu em trabalhos posteriores de diversos pesquisadores e orientandos do Professor Nelson nas décadas que se seguiram até os tempos atuais, destacando a sua influência e colaboração com o desenvolvimento das Equações Diferenciais na região de São Carlos. Em particular, vamos apresentar a utilização do resultado por dois de seus orientandos, Hildebrando M. Rodrigues e Adalberto Spezamiglio. Nelson Onuchic foi um importante pesquisador na área de Equações Diferenciais. Em 1967, começou a trabalhar na USP campus São Carlos, onde orientou vários estudantes de pós-graduação e teve densa publicação. Ele faleceu em 3 de setembro de 1999.

**Palavras-chave:** Análise, História da Matemática, Equação Diferencial, Matemática.

# Abstract

The aim of this work is to present an important and well known theorem on Differential Equations, developed by Professor Nelson Onuchic and Professor Philip Hartman and published in 1963. For this reason it is necessary to describe some results and concepts of Analysis and Linear Algebra. Furthermore, we aim at examining how these results contributed to later papers of several researchers and students advised by Professor Nelson in the following until today, highlighting his influence and collaboration on the development of Differential Equations in the São Carlos region. In particular, we will present the use of these results by two of his advisees, Hildebrando M. Rodrigues and Adalberto Spezamiglio. Nelson Onuchic was an important researcher in the field of Differential Equations. In 1967, he started work as a faculty member of USP, São Carlos campus, where he supervised several graduate students and wrote a dense list of publications. He died on September 3, 1999.

**Keywords:** Analysis, History of Mathematics, Differential Equation, Mathematics.

# Sumário

|          |                                                          |           |
|----------|----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                        | <b>7</b>  |
| <b>2</b> | <b>Histórico</b>                                         | <b>9</b>  |
| <b>3</b> | <b>Preliminares</b>                                      | <b>12</b> |
| 3.1      | Resultados de Álgebra Linear . . . . .                   | 12        |
| 3.2      | Resultados de Análise . . . . .                          | 17        |
| <b>4</b> | <b>O Teorema de Hartman-Onuchic</b>                      | <b>29</b> |
| 4.1      | O Teorema de Hartman-Onuchic . . . . .                   | 29        |
| 4.2      | Utilização do Teorema . . . . .                          | 32        |
| 4.3      | Citações de alguns trabalhos de Nelson Onuchic . . . . . | 36        |
| <b>5</b> | <b>Publicações de Nelson Onuchic</b>                     | <b>38</b> |
| <b>6</b> | <b>Considerações Finais</b>                              | <b>42</b> |
|          | <b>Referências</b>                                       | <b>43</b> |

# 1 Introdução

Os trabalhos do professor Nelson Onuchic foram de grande importância para a Matemática no Brasil, em especial, Nelson teve grande contribuição para as Equações Diferenciais, área na qual ele fez escola. A expectativa com este trabalho é a comprovação deste fato, mostrar efetivamente como se deu o início dessa linha de pesquisa introduzida por Onuchic em São Carlos e a continuação da mesma por seus alunos e alunos dos seus alunos. Para isso vamos apresentar o uso do Teorema de Hartman-Onuchic em dois trabalhos de Doutorado, um de Hildebrando Munhoz Rodrigues<sup>1</sup> e o outro de Adalberto Spezamiglio<sup>2</sup>, ambos orientandos de Nelson.

O Mestrado Profissional em Matemática Universitária foca o Ensino Superior, por isso a preocupação em colocar as definições envolvidas durante o trabalho e algumas bibliografias, pois assim, um aluno de graduação tem condições de acompanhar a leitura do trabalho.

No ICMC-USP, Nelson Onuchic, foi um dos precursores no trabalho em Equações Diferenciais e possibilitou a formação de grupos de estudo e pesquisa nesta área, os quais até hoje estão em atividade neste instituto. Através de suas orientações estimulou seus alunos a continuar os trabalhos e foi um grande exemplo para eles.

Segundo Badin [1], Nelson Onuchic orientou catorze trabalhos de Mestrado e nove trabalhos de Doutorado, e seus orientandos, seguiram estudando as Equações Diferenciais, orientando outros alunos e assim iniciou-se a formação de grupo de pesquisa influenciado por ele.

Para alcançarmos nossa expectativa, focamos em um dos resultados desenvolvidos por Nelson Onuchic em parceria com Philip Hartman, o Teorema de Hartman-Onuchic, o qual foi apresentado no artigo, *On the Asymptotic Integration of Ordinary Differential Equations* (Pacific Journal of Mathematics, vol. 13, 1963). Veremos duas de suas aplicações e também algumas citações do mesmo.

O trabalho será estruturado da seguinte forma: temos a Introdução do trabalho, o capítulo seguinte é denominado Histórico, no qual encontramos algumas informações

---

<sup>1</sup>Professor Titular do Instituto de Ciências Matemáticas e Computação, Departamento de Matemática Aplicada e Estatística da Universidade de São Paulo Campus São Carlos.

<sup>2</sup>Professor Livre-Docente do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Departamento de Matemática da Unesp Campus São José do Rio Preto.

---

da vida de Nelson Onuchic e alguns dados de entrevista feita com os professores Plácido Zoega Táboas<sup>3</sup> e Hildebrando Munhoz Rodrigues, ambos foram orientados por Nelson; a seguir o capítulo de Preliminares que traz definições necessárias para o entendimento do Teorema de Hartman-Onuchic e definições implícitas a ele; posteriormente temos o capítulo com o Teorema de Hartman-Onuchic, dois exemplos de sua utilização, como já citado acima, os exemplos estão nos trabalhos de doutorado dos professores Hildebrando M. Rodrigues e Adalberto Spezamiglio e algumas citações do mesmo em alguns artigos científicos; um capítulo com uma lista das Publicações do professor Nelson Onuchic e por fim as Considerações Finais e também as Referências Bibliográficas.

---

<sup>3</sup>Professor Titular do Instituto de Ciências Matemáticas e Computação, Departamento de Matemática Aplicada e Estatística da Universidade de São Paulo Campus São Carlos.(professor aposentado e colaborador do ICMC-USP)

## 2 Histórico

As informações contidas nesse capítulo foram tomadas com base em Badin [1].

Nelson Onuchic nasceu no dia 11 de março de 1926, na cidade de Brodósqui no interior do estado de São Paulo, Brasil. Filho de Francisco Onusic e Maria Doles.

Em 1971 Nelson Onuchic começou a apresentar os primeiros sinais de mal de Parkinson e veio a falecer em 3 de setembro de 1999.

O trabalho desenvolvido por Nelson Onuchic na área de pesquisa em Matemática foi muito amplo e significativo. Teve vários trabalhos publicados no Brasil, Estados Unidos, Portugal, México, Itália, Holanda, Escócia e Japão. No capítulo cinco encontra-se uma lista com as publicações de Nelson Onuchic.

Licenciou-se em Física pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Instituto Mackenzie, São Paulo.

Trabalhou como Professor Assistente no Departamento de Matemática do Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA) no período de 1956 a 1958.

Entre 1955 e 1956 estudou Análise Funcional, Topologia Geral e Estruturas Uniformes sob a orientação do professor Chaim Samuel Hönl. Durante esse período produziu sua tese de doutorado intitulada *Estruturas Uniformes sobre  $P$ -Espaços e Aplicações da Teoria destes Espaços em Topologia Geral* a qual apresentou na F.F.C.L. da USP em 1957.

Nelson Onuchic participou do 1º Colóquio Brasileiro de Matemática. Escreveu o capítulo sobre Espaços de Banach e de Hilbert da publicação Análise Funcional, do mesmo colóquio. Esta publicação foi utilizada como texto para o curso ministrado por Nelson neste mesmo colóquio.

Em 1958, convidado pelo professor João Dias da Silveira para criar o Curso de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Rio Claro, hoje Unesp campus Rio Claro, Nelson Onuchic aceitou o convite e foi regente da cadeira de Análise Matemática e permaneceu nesta posição até o ano de 1966.

Em 1959, Nelson foi professor visitante do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de Montevidéo, Uruguai, onde ministrou um curso sobre o Método Topológico de Wazewski e conheceu os matemáticos Juan Jorge Schäffer e José Luís Massera.

A partir do contato com Massera, Onuchic teve interesse em estudar Equações Dife-

renciais e, o Método Topológico de Wazewski foi usado para resolver alguns problemas propostos por Massera.

Em 1961, no 3º Colóquio Brasileiro de Matemática, em Fortaleza, ministrou o curso de Equações Diferenciais Ordinárias: Estabilidade em Sistemas Lineares, Equivalência Assintótica e Método Topológico de Wazewski.

Outro fato muito relevante que fez com que Onuchic tivesse interesse nas Equações Diferenciais, foi sua ida para os Estados Unidos. Durante um ano Nelson ficou no "Research Institute for Advanced Studies" (RIAS), Baltimore, USA, onde aprofundou seus estudos em Equações Diferenciais. Lá teve grande influência de Jack K. Hale, matemático americano de grande importância que também fazia parte do grupo.

Segundo o Professor Plácido, Hale influenciou muito para o estudo das Equações Diferenciais no Brasil. Nelson Onuchic trouxe Jake Hale pela primeira vez para a USP São Carlos para que ele conhecesse o grupo de pesquisa que se formou por volta de 1970. O professor Plácido diz ainda que tal grupo contava, entre outros, com os professores Hildebrando M. Rodrigues, Antônio Fernandes Izé, Hermínio Cassago Júnior.

Nelson Onuchic em conjunto com Philip Hartman escreveu o artigo intitulado *On the Asymptotic Integration of Ordinary Differential Equations* (Pacific Journal of Mathematics, vol. 13, 1963). Neste trabalho, o resultado mais importante foi o Teorema de Hartman-Onuchic, o qual é considerado uma de suas grandes contribuições à Matemática e que tratamos neste trabalho.

Além das atividades de pesquisa Onuchic continuou ministrando cursos e abrindo uma linha de pesquisa em Equações Diferenciais no Brasil. No Instituto de Pesquisas Matemáticas da Universidade de São Paulo, ministrou cursos de pós-graduação como, Equações Diferenciais Ordinárias em 1963, Análise Funcional e Aplicações na Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias em 1963 e Equações Diferenciais Ordinárias e Funcionais em 1964.

Com a tese intitulada *Comportamento Assintótico das Soluções de um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias*, Nelson foi aprovado no concurso para a Livre-Docência junto a Cadeira de Cálculo Infinitesimal da F.F.C.L. da USP no ano de 1965.

A mudança de Nelson para São Carlos foi muito importante para a formação de um forte departamento de Matemática na EESC e, mais ainda, para a formação de um Curso de Matemática na USP São Carlos.

Em 1968, com a tese intitulada *Estabilidade de Sistemas Perturbados e Comportamento no Infinito de Sistemas de Equações Diferenciais com Retardamento no Tempo*, Nelson apresentou o trabalho para o concurso de Professor Titular da Escola de Engenharia de São Carlos-USP.

A partir de 1969, Nelson Onuchic juntamente com Antônio Fernandes Izé ficaram responsáveis pela área de pesquisa: Problemas de Comportamento Assintótico e de Estabilidade nas Equações Diferenciais Ordinárias e com o Tempo de Retardamento, para candidatos a título de Mestre e Doutor em Ciências da pós-graduação da EESC/USP.

Em 1972, Nelson Onuchic tornou-se professor titular de Matemática, no Instituto de Ciências Matemáticas USP - São Carlos, o qual hoje é o Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação.

Sua obra gerou o grupo de pesquisa em Equações Diferenciais de São Carlos. Tal grupo tem continuidade até os dias de hoje.

Em conversa com o professor Hildebrando, o mesmo diz que, além da importância de Nelson para sua formação matemática, Nelson foi importante também para sua formação pessoal e profissional. Aprendeu com ele a fazer relatórios e artigos científicos, planos de trabalho, atitude científica e sobre ética.

Conversando com o professor Plácido, ele cita também, a seriedade de Nelson quanto cientista e como era ótimo professor, querido por todos.

Tanto Plácido quanto Hildebrando ressaltaram muito que Onuchic era uma pessoa muito acessível, de grande simpatia, que estimulava os jovens e estava sempre pronto para ajudar e acolher.

Pelos depoimentos dados, podemos ver que o professor Nelson Onuchic, não foi de grande importância apenas para o desenvolvimento da Matemática, mas também como pessoa. Seu lado humano fica bem evidente nos depoimentos de dois de seus catorze orientandos de mestrado e nove de doutorado.

## 3 Preliminares

Este capítulo é composto não somente das definições e resultados envolvendo diretamente o Teorema de Hartman-Onuchic, mas também contém definições implícitas a essas definições e resultados, com o objetivo de que o leitor tenha em mãos as informações necessárias para o entendimento do Teorema.

Por exemplo, as definições de localmente integrável e de um par admissível para uma matriz, são diretamente utilizadas dentro do Teorema de Hartman-Onuchic. Já as definições de espaço vetorial e subespaço vetorial reais não aparecem diretamente, mas sim dentro de outras definições. Porém reforçamos que é um objetivo do nosso trabalho que o leitor tenha condições de entender os termos apresentados neste texto e portanto apresentamos definições mais básicas e outras mais complexas que aparecem no decorrer do trabalho.

As definições e resultados estão apresentados em duas seções, uma com os resultados de Análise e outra com os de Álgebra Linear. Para mais pesquisas pode-se consultar [2, 3, 4].

Dentro da seção de Análise temos definições de Equações Diferenciais, Espaços Métricos e Teoria da Medida. Para pesquisas nessas áreas pode consultar-se referências como: [5, 6, 7, 8].

### 3.1 Resultados de Álgebra Linear

**Definição 3.1.** Dizemos que um conjunto  $V \neq \emptyset$ , munido de uma adição e de uma multiplicação por um escalar, é um espaço vetorial real se são válidas as seguintes propriedades:

1.  $u + v = v + u$  para quaisquer  $u, v \in V$ ;
2.  $u + (v + w) = (u + v) + w$  para quaisquer  $u, v, w \in V$ ;
3. existe um elemento  $0 \in V$  tal que  $0 + u = u$  para todo  $u \in V$ ;
4. para cada  $u \in V$  existe  $v \in V$  tal que  $u + v = 0$ ;
5.  $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$  para quaisquer  $u \in V$  e  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ;

6.  $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$  para quaisquer  $u \in V$ , e  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ;

7.  $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$  para quaisquer  $u, v \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;

8.  $1u = u$  para qualquer  $u \in V$ .

**Exemplo 3.1.** Sejam  $A \subset \mathbb{R}$  e  $\mathfrak{F}(A; \mathbb{R})$  o conjunto de todas as funções  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $f, g \in \mathfrak{F}(A; \mathbb{R})$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  defina  $f + g : A \rightarrow \mathbb{R}$  por  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  e  $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ ,  $x \in A$ . Então,  $\mathfrak{F}(A; \mathbb{R})$  com esta adição e produto por escalar é um espaço vetorial real.

**Definição 3.2.** Seja  $V$  um espaço vetorial real. Dizemos que  $W \subset V$  é um subespaço vetorial real de  $V$  se forem satisfeitas as seguintes condições

1.  $0 \in W$ ;

2. Se  $u, v \in W$  então  $u + v \in W$ ;

3. Se  $u \in W$  então  $\lambda u \in W$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 3.2.** Em  $\mathbb{R}^2$ , as retas passando pela origem são subespaços vetoriais de  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 3.3.** Dizemos que uma sequência de vetores  $u_1, \dots, u_n$  de um espaço vetorial real  $V$  é linearmente independente (l.i.) se a combinação linear  $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0$  só for satisfeita quando  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ .

**Definição 3.4.** Dizemos que um espaço vetorial real  $V$  é finitamente gerado se existir um subconjunto finito  $S \subset V$  tal que  $V = [S]$ , onde  $[S]$  denota o conjunto de todas as combinações lineares dos elementos de  $S$ , ou seja,  $u \in [S]$  se existirem  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  e  $u_1, \dots, u_n \in S$  tais que  $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ .

**Definição 3.5.** Dimensão de um espaço vetorial real é o número de vetores de uma base qualquer. Base é um conjunto de vetores linearmente independente (l.i.) que geram todo o espaço.

*Observação:* Se não existir um conjunto finito de vetores que geram o espaço dizemos que o espaço tem dimensão infinita.

**Exemplo 3.3.**  $\mathbb{R}^n$  é um espaço de dimensão finita. De fato possui um conjunto linearmente independente com  $n$  vetores que gera todo  $\mathbb{R}^n$ . Portanto,  $\dim \mathbb{R}^n = n$ . Por outro lado,  $C([a, b], \mathbb{R})$  não tem dimensão finita, pois não é finitamente gerado.

**Definição 3.6.** Seja  $V$  um espaço vetorial real. Um produto interno sobre  $V$  é uma aplicação que a cada par  $(u, v) \in V \times V$  associa um número real denotado por  $\langle u, v \rangle$ , satisfazendo as seguintes propriedades:

1.  $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ ,  $\forall u, v, w \in V$ ;

$$2. \langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle, \forall u, v \in V \text{ e } \alpha \in \mathbb{R};$$

$$3. \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \forall u, v \in V;$$

$$4. \langle u, u \rangle > 0 \text{ se } u \neq 0, \forall u \in V.$$

**Definição 3.7.** Um espaço vetorial real  $V$  munido de produto interno é chamado de espaço euclidiano.

**Exemplo 3.4.** Se  $f, g \in C([a, b]; \mathbb{R})$  definimos,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

produto interno e  $C([a, b]; \mathbb{R})$  é um espaço euclidiano.

**Exemplo 3.5.** Com relação ao produto interno apresentado no exemplo acima, calculemos o produto interno entre  $\text{sen}, \cos \in C([0, 2\pi]; \mathbb{R})$ ,

$$\langle \text{sen}, \cos \rangle = \int_0^{2\pi} \text{sen}x \cos x dx = \left[ \frac{\text{sen}^2 x}{2} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

**Exemplo 3.6.** Se  $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , definimos

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

produto interno e  $\mathbb{R}^n$  é um espaço euclidiano.

**Exemplo 3.7.** Com relação ao produto interno apresentado no exemplo acima, calculemos o produto interno entre os vetores  $(1, -1, 1), (0, 2, 4) \in \mathbb{R}^3$ .

$$\langle (1, -1, 1), (0, 2, 4) \rangle = 1.0 + (-1).2 + 1.4 = 2.$$

**Definição 3.8.** Uma norma em um espaço vetorial real  $X$  é uma função de  $X$  em  $\mathbb{R}$  definida por

$$x \longmapsto \|x\|$$

a qual satisfaz as propriedades:

$$1. \|x\| \geq 0;$$

$$2. \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

$$3. \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|;$$

$$4. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \text{ onde } x, y \in X \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}.$$

**Definição 3.9.** Um espaço normado  $X$  é um espaço vetorial real com uma norma definida nele.

Notação  $(X, \|\cdot\|)$

**Proposição 3.1.** Seja  $V$  um espaço euclidiano. Para cada  $u \in V$ , defina

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

A função  $u \in V \mapsto \|u\|$  é uma norma em  $V$ .

**Exemplo 3.8.** Em  $\mathbb{R}^n$ , com o produto interno dado no exemplo 3.6, a norma de  $x = (x_1, \dots, x_n)$  é dada por

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

**Definição 3.10.** Sejam  $U$  e  $V$  espaços vetoriais reais quaisquer. Dizemos que uma função  $T : U \longrightarrow V$  é uma transformação linear se forem verificadas as seguintes condições:

1.  $T(u + v) = T(u) + T(v)$ ,  $\forall u, v \in U$ ;
2.  $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ ,  $\forall u \in U$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 3.9.** Seja  $T : C([0, 1]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  função dada por

$$T(f) = \int_0^1 f(x) dx, \forall f \in C([0, 1]; \mathbb{R})$$

$T$  é uma transformação linear.

*Demonstração.* Sejam  $f, g \in C([0, 1]; \mathbb{R})$ .

Provemos que  $T(f + g) = T(f) + T(g)$ .

De fato,

$$T(f+g) = \int_0^1 (f+g)(x) dx = \int_0^1 (f(x)+g(x)) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx = T(f)+T(g).$$

Provemos agora que  $T(\lambda f) = \lambda T(f)$ .

De fato,

$$T(\lambda f) = \int_0^1 \lambda f(x) dx = \lambda \int_0^1 f(x) dx = \lambda T(f), \lambda \in \mathbb{R}.$$

Portanto  $T$  é uma transformação linear. □

**Definição 3.11.** Dizemos que uma transformação linear  $T : U \longrightarrow V$  é isomorfismo quando ela for bijetora.

**Definição 3.12.** Dizemos que os espaços vetoriais reais  $U$  e  $V$  são isomorfos se existir um isomorfismo  $T : U \longrightarrow V$ .

**Exemplo 3.10.**  $T : U \longrightarrow U$  dada por  $T(u) = u$  é um isomorfismo e, portanto, o espaço  $U$  é isomorfo a ele mesmo.

**Exemplo 3.11.**  $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow P_{n-1}(\mathbb{R})$  dada por  $T(x_1, \dots, x_n) = x_1 + x_2 t + \dots + x_n t^{n-1}$  é um isomorfismo e, portanto, os espaços  $\mathbb{R}^n$  e  $P_{n-1}(\mathbb{R})$  são isomorfos.

**Definição 3.13.** Sejam  $U$  e  $W$  subespaços vetoriais de um espaço vetorial  $V$  reais. Dizemos que  $U + W$  é a soma direta de  $U$  e  $W$  se  $U \cap W = \{0\}$ .

Notação  $U \oplus W$ .

**Exemplo 3.12.**  $\mathbb{R}^3$  é soma direta de,

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\} \text{ e } W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = 0\}.$$

*Demonstração.* Note que  $W$  é de fato um subespaço vetorial real de  $\mathbb{R}^3$  pois

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 0\}$$

ou, alternativamente, se  $u_1 = (x_1, y_1, z_1), u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in W$  então,

$$x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = 0$$

e  $u_1 + u_2 = (0, 0, z_1 + z_2)$  é claramente um elemento de  $W$ .

Se  $\lambda \in \mathbb{R}$  então,

$$\lambda u_1 = \lambda(0, 0, z_1) = (\lambda 0, \lambda 0, \lambda z_1) = (0, 0, \lambda z_1) \in W.$$

Finalmente,  $(0, 0, 0) \in W$ , o que conclui a prova de que  $W$  é um subespaço vetorial real de  $\mathbb{R}^3$ .

Provemos agora que  $\mathbb{R}^3 = U + W$ .

De fato, dado  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  podemos escrever

$$(x, y, z) = (x, y, -x - y) + (0, 0, z + x + y)$$

e como  $(x, y, -x - y) \in U$  e  $(0, 0, z + x + y) \in W$  obtemos  $\mathbb{R}^3 = U + W$ .

Por fim, mostremos que  $U \cap W = \{0\}$ .

Seja  $(x, y, z) \in U \cap W$ . Temos,

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff (x, y, z) = (0, 0, 0)$$

Portanto,  $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ . □

**Proposição 3.2.** Sejam  $U$  e  $W$  subespaços vetoriais de um espaço vetorial  $V$  reais. Temos  $V = U \oplus W$  se, e somente se, para cada  $v \in V$  existirem um único  $u \in U$  e único  $w \in W$  satisfazendo  $v = u + w$ .

*Demonstração.* Suponha que  $V = U \oplus W$ , isto é,  $V = U + W$  e  $U \cap W = \{0\}$ .

Então, dado  $v \in V$  existem  $u \in U$  e  $w \in W$  satisfazendo  $v = u + w$ . Queremos mostrar que tal decomposição é única.

Suponha que existam  $u' \in U$  e  $w' \in W$  tais que  $v = u' + w'$ . Então,  $u + w = u' + w'$ , o que implica em  $u - u' = w' - w$ .

Mas  $u - u' \in U$  e  $w' - w \in W$  e, portanto,  $u - u' = w' - w \in U \cap W = \{0\}$ , ou seja  $u = u'$  e  $w = w'$ .

Suponha agora que para cada  $v \in V$  existam um único  $u \in U$  e um único  $w \in W$  satisfazendo  $v = u + w$ . É claro que  $V = U + W$ . Resta mostrar que  $U \cap W = \{0\}$ .

Obviamente,  $0 \in U \cap W$ .

Seja  $v \in U \cap W$ , isto é,  $v \in U \subset V$  e  $v \in W \subset V$ . Então, existem único  $u \in U$  e um único  $w \in W$  satisfazendo  $v = u + w$ .

Observe que  $v = u + w = (u + v) + (w - v)$  com  $u + v \in U$  e  $w - v \in W$  e, pela unicidade da decomposição, devemos ter  $u = u + v$  e  $w = w - v$ , isto é,  $v = 0$ .

Logo,  $U \cap W = \{0\}$ . □

## 3.2 Resultados de Análise

Esta seção contém conceitos e resultados envolvendo Equações Diferenciais, Análise Funcional, Teoria da Medida e resultados clássicos de Análise.

**Definição 3.14.** *Um sistema de equações diferenciais de primeira ordem é um sistema da forma:*

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y'_2 = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y'_n = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde,  $f_1, f_2, \dots, f_n$  são  $n$  funções definidas em um espaço euclidiano  $D$ ,  $n+1$ -dimensional, e  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  são as  $n$  funções incógnitas.

Resolver um sistema de equações diferenciais de primeira ordem consiste em encontrar um intervalo  $I$  no eixo  $t$  e  $n$  funções reais  $\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)$  definidas em  $I$  tais que:

1.  $\phi'_1(t), \phi'_2(t), \dots, \phi'_n(t)$  existem para cada  $t$  em  $I$ ;
2.  $(t, \phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)) \in D$  para cada  $t \in I$ ;
3.  $\phi'_j(t) = f_j(t, \phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t))$  para cada  $t \in I$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$

A solução de (3.1) pode ser visualizada como a curva na região  $D$ , com cada ponto  $p$  na curva dado pelas coordenadas  $(t, \phi_1(t), \dots, \phi_n(t))$  e com  $\phi'(t)$  como sendo a componente do vetor tangente a curva na direção  $y_i$ .

Um sistema de equações lineares não homogêneo pode ser representado da seguinte forma:

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \cdots + a_{1n}(t)y_n + g_1(t) \\ y'_2 = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \cdots + a_{2n}(t)y_n + g_2(t) \\ \vdots \\ y'_n = a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \cdots + a_{nn}(t)y_n + g_n(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

ou ainda,

$$y' = A(t)y + g(t) \quad (3.3)$$

$$\text{onde } A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \text{ e } g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

No caso homogêneo,  $y' = A(t)y$ , isto é,  $g(t) = 0$ .

É fácil ver que toda equação diferencial de ordem  $n \geq 2$  pode ser escrita na forma de sistema, como em (3.2).

**Exemplo 3.13.** Seja a equação diferencial de segunda ordem  $x'' = a_1 \cdot x' + a_2 \cdot y + g(t)$ , quando se toma  $y_1 = x$  e  $y_2 = x'$ , obtêm-se o sistema:

$$\begin{cases} y'_1 = x' \\ y'_2 = x'' \end{cases} \sim \begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = x'' = a_1 \cdot y_2 + a_2 \cdot y_1 + g(t) \end{cases}$$

Para  $n > 2$  o procedimento é análogo. Considere a equação diferencial de ordem  $n$  dada por:

$$x^{(n)} + a_{n-1} \cdot x^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot x' + a_0 \cdot x = b(t).$$

Tome  $y_1 = x$ ,  $y_2 = x'$ ,  $\dots$ ,  $y_n = x^{(n-1)}$  para obter o sistema:

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \vdots \\ y'_{n-1} = x^{(n-1)} \\ y'_n = x^{(n)} \end{cases} \sim \begin{cases} y'_1 = x' = y_2 \\ y'_2 = x'' = y_3 \\ \vdots \\ y'_{n-1} = x^{(n-1)} = y_n \\ y'_n = x^{(n)} = -a_{n-1}(t)y_n - \cdots - a_1(t)y_2 - a_0(t)y_1 + b(t) \end{cases}$$

Que pode ser escrito na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{bmatrix}$$

Ou ainda,

$$\dot{Y} = A(t) \cdot Y + g(t) \quad (3.4)$$

**Definição 3.15.** O problema de valor inicial associado ao sistema (3.1) consiste na equação (3.1) e uma condição inicial  $\eta \in \mathbb{R}^n$  dada no instante inicial  $t_0$ .

Notação:  $y(t_0) = \eta$ .

Resolver um problema de valor inicial consiste em encontrar uma solução passando pelo ponto  $P_0 = (t_0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$  de  $D$ .

A seguir enunciamos o Teorema de Existência e Unicidade para sistemas de equações diferenciais de primeira ordem. Apresentaremos a demonstração da existência de soluções para ilustrar como as técnicas de Análise são utilizadas para mostrar resultados na teoria de Equações Diferenciais Ordinárias.

**Teorema 3.1.** Suponha  $A(t)$  e  $g(t)$  como em (3.3) funções Riemann integráveis de  $t$  em um intervalo  $(a, b)$ , isto é, as integrais de Riemann existem em algum intervalo  $[c, d] \subset (a, b)$  para cada  $a_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$  em  $A(t)$  e cada  $b_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  em  $b(t)$ , e suponha também que existe uma função real  $k(t)$  com domínio  $(a, b)$ , tal que:

1.  $k(t)$  é contínua e limitada em  $(a, b)$ ;
2.  $|A(t)| \leq k(t)$  e  $|b(t)| \leq k(t)$

Seja  $t_0 \in (a, b)$  e suponha que  $y^0$  é um vetor dado. Então a equação (3.4) tem uma única solução  $y(t)$  em  $(a, b)$  tal que  $y(t_0) = y^0$  e  $y$  satisfaz, para todo  $t \in (a, b)$ , a igualdade:

$$y(t) = y^0 + \int_{t_0}^t A(s) \cdot y(s) ds + \int_{t_0}^t b(s) ds \quad (3.5)$$

*Demonstração.* Apresentaremos somente a prova da existência de solução.

Seja  $M$  tal que  $|k(t)| \leq M$ ,  $M > 0$ .

Para  $t \in (a, b)$  defina:

$$y_0(t) = y^0$$

$$y_1(t) = y^0 + \int_{t_0}^t A(s) \cdot y_0(s) ds + \int_{t_0}^t b(s) ds$$

$\vdots$

$$y_n(t) = y^0 + \int_{t_0}^t A(s) \cdot y_{n-1}(s) ds + \int_{t_0}^t b(s) ds$$

$$y_{n+1}(t) = y^0 + \int_{t_0}^t A(s) \cdot y_n(s) ds + \int_{t_0}^t b(s) ds$$

com  $n = 1, 2, \dots$

$y_n(t)$  é uma função contínua em  $(a, b)$  já que é definida pela soma de funções contínuas, então  $A(s) \cdot y_n(s)$  é integrável em qualquer intervalo  $[c, d] \subset (a, b)$  e daí,  $y_{n+1}$  é contínua em  $(a, b)$ .

Considere  $t \in (a, b)$ ;

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_0(t)| &\leq \int_{t_0}^t |A(s)| \cdot |y_0(s)| + |b(s)| ds \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t (k(s)|y_0(s)| + k(s)) ds \right| \leq (1 + |y^0|) \cdot \int_{t_0}^t |k(s)| ds \end{aligned}$$

Seja  $K(t) = \int_{t_0}^t |k(s)| ds$ , então

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq (1 + |y^0|) \cdot K(t)$$

Tomando  $n = 2$  tem-se:

$$\begin{aligned} |y_2(t) - y_1(t)| &\leq \int_{t_0}^t |A(s)| \cdot |y_1(s) - y_0(s)| ds \leq \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |A(s)| (1 + |y^0|) \cdot K(s) ds \right| \leq \\ &\leq (1 + |y^0|) \cdot \int_{t_0}^t k(s) \cdot K(s) ds \end{aligned}$$

Observe que integrando por partes obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t k(s) \cdot K(s) ds &= (K(s))^2 - \int_{t_0}^t k(s) \cdot K(s) ds \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cdot \int_{t_0}^t k(s) \cdot K(s) ds = (K(t))^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{t_0}^t k(s) \cdot K(s) ds = \frac{(K(t))^2}{2!} \end{aligned}$$

Então, segue que:

$$|y_2(t) - y_1(t)| \leq (1 + |y^0|) \cdot \frac{(K(t))^2}{2!}$$

Usando indução para concluir que a desigualdade é válida para um  $m$  qualquer, basta supor que vale para  $m > 0$ , isto é:

$$|y_m(t) - y_{m-1}(t)| \leq (1 + |y^0|) \cdot \frac{(K(t))^m}{m!}$$

e mostrar que vale para  $m + 1$ :

$$\begin{aligned} |y_{m+1} - y_m| &\leq \int_{t_0}^t |A(s)| \cdot |y_m(s) - y_{m-1}(s)| ds \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t k(s) \cdot (1 + |y^0|) \cdot \frac{(K(s))^m}{m!} ds \leq \\ &\leq \frac{(1+|y^0|)}{m!} \int_{t_0}^t k(s) \cdot (K(s))^m ds \end{aligned}$$

Integrando por partes obtém-se o seguinte resultado:

$$|y_{m+1} - y_m| \leq \frac{(1 + |y^0|)}{m!} \cdot \frac{(K(t))^{m+1}}{m+1} \leq (1 + |y^0|) \cdot \frac{(K(t))^{m+1}}{(m+1)!}$$

Basta mostrar que a sequência de funções  $(y_m(t))$  é convergente:

De fato,

$$\begin{aligned} |y_m(t) - y_0(t)| &= |(y_1(t) - y_0(t)) + (y_2(t) - y_1(t)) + \cdots + (y_m(t) - y_{m-1}(t))| \leq \\ &\leq |(y_1(t) - y_0(t))| + |(y_2(t) - y_1(t))| + \cdots + |(y_m(t) - y_{m-1}(t))| = \sum_{j=0}^m |y_{j+1}(t) - y_j(t)| \end{aligned}$$

A série  $\sum_{j=0}^m |y_{j+1}(t) - y_j(t)|$  é convergente para todo  $t \in [c, d]$  pois  $|y_{j+1} - y_j| \leq (1 + |y^0|) \cdot \left(\frac{(k(t))^{j+1}}{j+1}\right)$  que converge uniformemente em  $[c, d] \subset (a, b)$  para uma função contínua  $y(t)$ , isto é, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|y_n(t) - y(t)| < \frac{\varepsilon}{M \cdot (b-a)}$  para todo  $t \in [c, d]$ .

Agora é preciso mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t A(s) \cdot y_n(s) ds = \int_{t_0}^t A(s) \cdot y(s) ds \quad (3.6)$$

Para isso, observe que  $y(s)$  é contínua portanto,  $\int_{t_0}^t A(s) \cdot y(s) ds$  existe para todo  $t$  em um intervalo fechado  $[c, d] \subset (a, b)$ . Então, dado um  $\varepsilon > 0$ , tomando  $n \leq n_0$  tem-se

$$\left| \int_{t_0}^t A(s) \cdot (y_n(s) - y(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |A(s)| \cdot |y_n(s) - y(s)| ds \leq \varepsilon \cdot M$$

onde  $M$  é um limitante para  $k(t)$  em  $(a, b)$ , segue então (3.6).

□

**Teorema 3.2.** *Se para  $i, j = 1, \dots, n$  cada  $a_{ij}(t)$  e  $b_j(t)$  são contínuas para todo  $t \in \mathbb{R}$ , então, se  $(t_0, y_0)$  é um ponto arbitrário no espaço  $(t, y)$  existe uma única solução  $y(t, t_0, y_0)$  da equação (3.1) tal que  $y(t_0, t_0, y_0) = y_0$  e a solução  $y(t, t_0, y_0)$  existe para este domínio no eixo real  $t$ .*

*Demonstração.* A prova deste teorema segue da prova do Teorema 3.1. Observe que se os elementos de  $A(t)$  e  $b(t)$  são funções contínuas então, já que a solução  $y(t)$  é contínua, a equação (3.5) pode ser derivada com respeito a  $t$ , e segue que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= \frac{d}{dt} \left[ y_0 + \int_{t_0}^t A(s) \cdot y(s) ds + \int_{t_0}^t b(s) ds \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow y'(t) = A(t) \cdot y(t) + b(t). \end{aligned}$$

substituindo  $t_0$  na equação (3.5) obtém-se:

$$y(t_0) = y^0 + \int_{t_0}^{t_0} A(s) \cdot y(s) ds + \int_{t_0}^{t_0} b(s) ds = y^0.$$

Logo,  $y(t_0, t_0, y_0) = y^0$ . Portanto,  $y(t)$  é solução da equação (3.1). □

**Definição 3.16.** *Um sistema autônomo é um sistema de equações diferenciais em que a função  $f_1, f_2, \dots, f_n$  não dependem explicitamente de  $t$ . Representamos tal sistema da seguinte forma:*

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y'_2 = f_2(y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ y'_n = f_n(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (3.7)$$

onde  $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  são funções de classe  $C^1$ .

**Exemplo 3.14.** A equação escalar de segunda ordem  $y'' + y = 0$  pode ser escrito como o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}.$$

De fato, quando se toma  $x_1 = y$  e  $x_2 = y'$  tem-se que  $\begin{matrix} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{matrix}$  chamando  $f(x_1, x_2) = (x_2, -x_1)$  tem-se um sistema autônomo.

Como  $f$  e suas funções derivadas são funções contínuas em todo o seu domínio, pelos Teoremas 3.1 e 3.2 dado algum  $(t_0, \eta)$ , com  $\eta$  no domínio de  $f$ , existe uma única solução real  $\phi$  da equação (3.5) satisfazendo a condição inicial  $\phi(t_0) = \eta$ . Essa solução existe em algum intervalo  $I$  e é uma função contínua de  $(t, t_0, \eta)$  com  $t, t_0 \in I$ .

Um outro exemplo de sistema autônomo é o sistema linear

$$\dot{y} = A \cdot y \quad (3.8)$$

onde  $A$  é uma matriz de coeficientes constantes.

**Lema 3.1.** *Se  $x(t)$  é uma solução da equação (3.5) no intervalo  $(a, b)$  e  $c$  uma constante qualquer, então a função  $y(t) = x(t + c)$  é solução de (3.6) no intervalo  $(a - c, b - c)$ .*

*Demonstração.* Temos  $y'(t) = x'(t + c) = f(x(t + c)) = f(y(t))$ .  $\square$

Note que a propriedade garantida pelo Lema acima não é assegurada para sistemas não autônomos.

As equações tratadas no resultado de Hartman-Onuchic são as seguintes:

1.  $x' = A(t)x$
2.  $x' = A(t)x + g(t)$
3.  $x' = A(t)x + f(t, x)$

**Definição 3.17.** *Diz-se que um conjunto  $X$ , cujos elementos chamaremos pontos, é um espaço métrico se a cada dois pontos  $p$  e  $q$  de  $X$  está associado um número real  $d(p, q)$ , chamado distância de  $p$  a  $q$ , tal que*

1.  $d(p, q) > 0$  se  $p \neq q$ ;  $d(p, q) = 0$ ;
2.  $d(p, q) = d(q, p)$ ;
3.  $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$ , qualquer que seja  $r \in X$ .

Uma norma em  $X$  define uma métrica  $d$  em  $X$  a qual é dada por  $d(x, y) = \|x - y\|$ ,  $\forall x, y \in X$ , denominada métrica induzida pela norma.

**Exemplo 3.15.** São exemplos de espaços métricos os espaços euclidianos  $\mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 1$ . A distância em  $\mathbb{R}^n$  é dada por

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

**Definição 3.18.** Diz-se que uma sequência  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  em um espaço métrico  $X$  é uma sequência de Cauchy quando dado um  $\epsilon > 0$ , corresponde um inteiro  $N$  tal que

$$d(x_n, x_m) < \epsilon$$

se  $n \geq N$  e  $m \geq N$ .

**Definição 3.19.** Diz-se que um espaço métrico  $X$  no qual toda sequência de Cauchy converge é completo.

**Exemplo 3.16.**  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{C}^n$ .

**Definição 3.20.** Um espaço de Banach é um espaço normado completo (completo na métrica definida pela norma).

**Definição 3.21.** Um número  $a$  é chamado de limitante superior(inferior) de um subconjunto  $X$  da reta se  $x \leq a(x \geq a)$ , para todo  $x \in X$ .

**Definição 3.22.** Diz-se que um conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  é limitado superiormente quando existe algum  $b \in \mathbb{R}$  tal que  $x \leq b$  para todo  $x \in X$ .

**Exemplo 3.17.** O conjunto dos inteiros negativos é limitado superiormente no conjunto dos números reais com a ordem usual.

De fato,  $-1$  é uma cota superior para o conjunto  $\mathbb{Z}^-$  dos inteiros negativos, pois  $-1$  não é menor que nenhum elemento de  $\mathbb{Z}^-$ . Todo número real maior que  $-1$  é também cota superior do conjunto dos inteiros negativos.

**Definição 3.23.** Diz-se que um conjunto  $X \subset \mathbb{R}$  é limitado inferiormente quando existe algum  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $a \leq x$  para todo  $x \in X$ .

**Exemplo 3.18.** O conjunto dos inteiros positivos é limitado inferiormente no conjunto dos números reais com a ordem usual.

De fato,  $1$  é uma cota inferior para o conjunto  $\mathbb{Z}^+$  dos inteiros positivos, pois  $1$  não é maior que nenhum inteiro positivo. Todo inteiro menor que  $1$  é também cota inferior do conjunto dos inteiros positivos.

**Definição 3.24.** Se um conjunto  $X$  é limitado superior e inferiormente, diz-se que  $X$  é um conjunto limitado.

**Definição 3.25.** Considere  $n$  intervalos fechados  $I = \{x/a_j \leq x \leq b_j, j = 1, 2, \dots, n\}$  e seus volumes

$$V(I) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$$

Para definir a medida de um subconjunto arbitrário  $E \subset \mathbb{R}^n$ , cubra  $E$  por uma coleção enumerável  $S$  de intervalos  $I_k$  e seja

$$\sigma(S) = \sum_{I_k \in S} V(I_k)$$

A medida exterior de  $E$  denotado por  $|E|_e$  é definida por

$$m(E) = |E|_e = \inf \sigma(S)$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as coberturas de  $E$ .

Quando  $\inf \sigma(S) = 0$ , dizemos que o conjunto  $E$  tem medida nula.

*Observação:* Quando  $n = 1$  temos a definição de medida em  $\mathbb{R}$ .

Por exemplo, todo intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  tem  $m([a, b]) = b - a$ .

**Definição 3.26.** Um conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  é mensurável se para cada conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  temos

$$m(A) = m(A \cap E) + m(A \cap E^c)$$

onde  $E^c$  é o complementar do conjunto  $E$ .

**Definição 3.27.** Uma função  $f$  a valores reais é mensurável (no sentido de Lebesgue) se seu domínio é mensurável e se satisfaz uma das seguintes condições

1. Para cada número real  $\alpha$  o conjunto  $\{x : f(x) > \alpha\}$  é mensurável.
2. Para cada número real  $\alpha$  o conjunto  $\{x : f(x) \geq \alpha\}$  é mensurável.
3. Para cada número real  $\alpha$  o conjunto  $\{x : f(x) < \alpha\}$  é mensurável.
4. Para cada número real  $\alpha$  o conjunto  $\{x : f(x) \leq \alpha\}$  é mensurável.
5. Para cada número real  $\alpha$  o conjunto  $\{x : f(x) = \alpha\}$  é mensurável.

**Exemplo 3.19.** Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto mensurável e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Então  $f$  é mensurável.

**Exemplo 3.20.** Seja  $D$  nas condições acima a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}$$

$f$  é mensurável.

**Definição 3.28.** Uma função é localmente integrável em um subconjunto  $E$  de seu domínio se for integrável em cada subconjunto limitado de  $E$ .

**Exemplo 3.21.** Seja  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = e^{-x}$ , então é integrável em  $[0, \infty)$  portanto é localmente integrável.

**Definição 3.29.** Dado um conjunto  $A$ , quando temos uma certa propriedade que é válida nos pontos de  $A$ , exceto num subconjunto de  $A$  que tem medida nula, dizemos que essa propriedade é válida em  $A$  quase toda parte (q.t.p.).

**Definição 3.30.** Um número real  $\lambda$  é marjorante essencial de uma função  $\varphi$  quando  $\varphi(t) \leq \lambda$  q.t.p., isto é, quando o conjunto dos pontos  $t$  para os quais  $\varphi(t) > \lambda$  tem medida nula (é claro que se  $\lambda$  é um marjorante essencial de  $\varphi$  qualquer número maior que  $\lambda$  também é).

Notação  $X = \mathbb{R}^n$  ou  $X = \mathbb{C}^n$ .

**Definição 3.31.**  $L(X)$  é o espaço das funções definidas em q.t.p. em  $J = [0, \infty)$  com valores em  $X$  localmente integráveis.

Nas definições envolvendo integral, esta é tomada no sentido de Lebesgue.

**Definição 3.32.** Seja  $A$  o conjunto de todos os marjorantes essenciais da função  $\varphi$  define-se o supremo essencial de  $\varphi$ , denota-se  $\text{supess}\varphi$  como sendo o ínfimo do conjunto  $A$

$$\text{supess}\varphi = \inf A$$

**Definição 3.33.** Diz-se que uma função  $\varphi$  é essencialmente limitada quando o

$$\text{supess} \|\varphi(t)\|$$

é finito.

**Exemplo 3.22.** Toda função limitada é essencialmente limitada.

**Definição 3.34.** O espaço  $L^p$ , ( $1 \leq p < \infty$ ) é o espaço das funções  $\varphi \in L(X)$  tais que

$$\int_0^\infty \|\varphi(t)\|_X^p dt < \infty$$

com norma

$$\|\varphi\|_p = \left[ \int_0^\infty \|\varphi(t)\|_X^p dt \right]^{\frac{1}{p}}$$

**Definição 3.35.** O espaço  $L^\infty$  é o espaço das funções  $\varphi \in L(X)$  essencialmente limitadas, com norma

$$\|\varphi\|_\infty = \text{supess} \|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \quad (t \in J)$$

onde  $\text{supess}$  denota supremo essencial.

**Definição 3.36.** O espaço  $L_0^\infty$  é um subespaço de  $L^\infty$  das funções  $\varphi$  que tendem essencialmente a 0, quando  $t \rightarrow \infty$  (isto é,  $\varphi(t)$  coincide q.t.p. com alguma função em  $L^\infty$  que tendem a 0, quando  $t \rightarrow \infty$ ) com norma induzida por  $L^\infty$ .

**Proposição 3.3.**  $L_0^\infty$  é subespaço de  $L^\infty$ .

*Demonstração.* De fato  $L_0^\infty$  é subespaço de  $L^\infty$ , pois

1.  $0 \in L_0^\infty$

2. Dados  $\varphi_1, \varphi_2 \in L_0^\infty$

$$\varphi_1 + \varphi_2 \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty \text{ q.t.p.}$$

pois,  $\varphi_1 \rightarrow 0$  e  $\varphi_2 \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow \infty$  q.t.p.

3. Dados  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\varphi_1 \in L_0^\infty$

$$\alpha\varphi_1 \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty \text{ q.t.p.}$$

pois,  $\varphi_1 \rightarrow 0$  q.t.p.

Portanto, pelos itens 1), 2) e 3) segue que  $L_0^\infty$  é um subespaço vetorial de  $L^\infty$ .  $\square$

**Definição 3.37.** Se  $B$  é um espaço de Banach de funções de  $J$  em  $X$ , diz-se que  $B$  é mais forte que  $L(X)$  quando  $B$  está contido algebricamente em  $L(X)$  e convergência em  $B$  implica convergência em  $L(X)$ .

O termo algebricamente contido é usado no sentido de  $B$  ser isomorfo a algum subespaço vetorial de  $L(X)$ , ou seja, existe uma transformação linear  $T : B \rightarrow W$  bijetora, onde  $W$  é um subespaço de  $L(X)$ .

**Exemplo 3.23.**  $L^p$ ,  $L^\infty$  e  $L_0^\infty$  são exemplos de espaços de Banach mais fortes que  $L(X)$ .

**Definição 3.38.** Se  $D$  é um espaço de Banach mais forte que  $L(X)$ , uma  $D$ -solução  $x(t)$  de  $x' = A(t)x$  ou  $x' = A(t)x + g(t)$  é uma solução  $x(t) \in D$ .

**Definição 3.39.** Uma sequência de funções  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  converge uniformemente para a função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  quando, para todo  $\epsilon > 0$  dado, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  (dependendo apenas de  $\epsilon$ ) tal que  $n > n_0 \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \epsilon$  seja qual for  $x \in X$ .

**Exemplo 3.24.**  $f_n(x) = x/n$  para  $x \in [0, 2]$  converge uniformemente para a função nula.

**Definição 3.40.** Um par  $(B, D)$  de espaços de Banach cada um mais forte que  $L(X)$  é chamado admissível para a matriz  $A(t)$  ou para  $x' = A(t)x + g(t)$ , se para cada  $g(t) \in B$ ,  $x' = A(t)x + g(t)$  tem pelo menos uma  $D$ -solução  $x(t)$ .

**Exemplo 3.25.** O caso  $A(t) \equiv 0$  é um simples exemplo em que o par  $(L^1, L_0^\infty)$  é admissível.

**Definição 3.41.** Um ponto  $a$  é aderente a um conjunto  $X$  quando

$$d(a, X) = 0.$$

---

**Definição 3.42.** *Fecho ou aderência de um conjunto  $X$  num espaço métrico  $M$  é o conjunto  $\overline{X}$  dos pontos de  $M$  que são aderentes a  $X$ .*

**Exemplo 3.26.** Seja  $X = (0, 1)$ . Segue que todos os pontos de  $[0, 1]$  são pontos aderentes a  $X$  e o fecho de  $X$  é  $[0, 1]$ .

**Exemplo 3.27.** Seja  $X = (0, 1) \cup \{2\}$ . Temos que 2 não é ponto aderente a  $X$ . Veja que  $d(2, X) = 1$ .

## 4 O Teorema de Hartman-Onuchic

Neste capítulo temos o enunciado do Teorema de Hartman-Onuchic o qual é apresentado no artigo *On the Asymptotic Integration of Ordinary Differential Equations* [9], bem como duas utilizações do mesmo por seus orientandos Hildebrando Munhoz Rodrigues e Adalberto Spezamiaglio, em seguida podemos ver algumas citações de uso do artigo, no qual temos tal resultado e também algumas citações de matemáticos que utilizaram trabalhos do professor Nelson Onuchic em seus estudos.

### 4.1 O Teorema de Hartman-Onuchic

Utilizaremos as notações introduzidas nas Preliminares.

Considere um sistema de equações diferenciais lineares, uma homogênea e uma não-homogênea

$$x' = A(t)x, \quad (4.1)$$

$$x' = A(t)x + g(t), \quad (4.2)$$

nas quais  $g(t) \in L(X)$ ,  $A(t)$  está definida q.t.p. em  $J$  e é localmente integrável em  $J$ . Se  $D$  é um espaço de Banach mais forte que  $L(X)$ , uma  $D$ -solução  $x(t)$  de (4.1) ou (4.2) é uma solução  $x(t) \in D$ , como já definido no capítulo Preliminares.  $X_{0D}$  denota o conjunto dos pontos iniciais  $x(0) \in X$  de  $D$ -soluções  $x(t)$  de (4.1). Então  $X_{0D}$  é um subespaço de  $X$ .

**Proposição 4.1.**  $X_{0D}$  é um subespaço de  $X$ .

*Demonstração.* Sabemos que,  $X_{0D} = \{x(0) \in X : x \text{ é } D\text{-solução de (4.1)}\}$ .

Mostremos que  $X_{0D}$  é subespaço:

1. Seja  $x(0) \in X_{0D}$ .

É fácil concluir a função nula pertence a  $X_{0D}$ , pois é uma  $D$ -solução e  $0 \in X$ .

2. Seja  $x_1$  e  $x_2$  duas  $D$ -soluções tais que  $x_1(0), x_2(0) \in X_{0D}$ . Temos que  $x_1(t) + x_2(t) \in D$ , pois  $D$  é um subespaço de  $X$ , e

$$(x_1(t) + x_2(t))' = x_1'(t) + x_2'(t)$$

por (4.1),

$$x_1'(t) + x_2'(t) = A(t)x_1(t) + A(t)x_2(t) = A(t)[x_1(t) + x_2(t)]$$

então,  $x_1(t) + x_2(t)$  é solução de (4.1) com condição inicial  $x_1(0) + x_2(0)$  e portanto,

$$x_1(0) + x_2(0) \in X_{0D}$$

3. Seja  $x$  uma D-solução com  $x(0) \in D$  e  $\mathbb{R}$ . Temos que  $\alpha x(t) \in D$ , pois  $D$  é um subespaço de  $X$ , e

$$(\alpha x_1(t))' = \alpha x_1'(t)$$

por (4.1),

$$\alpha x_1'(t) = \alpha A(t)x_1(t) = A(t)[\alpha x_1(t)]$$

então  $\alpha x_1(t)$  é solução de (4.1) com condição inicial  $\alpha x_1(0)$  e portanto,

$$\alpha x_1(0) \in X_{0D}$$

Portanto, pelos itens 1), 2) e 3) segue que  $X_{0D}$  é um subespaço de  $X$ .  $\square$

**Proposição 4.2.** *Seja  $X_{1D}$  um subespaço de  $X$  complementar em relação a  $X_{0D}$  (isto é,  $X$  é soma direta de  $X_{0D}$  e  $X_{1D}$ ) então,  $P_{0D}$ , a projeção de  $X$  em  $X_{0D}$  se anula em  $X_{1D}$ , ou seja,  $P_{0D}(X_{1D}) \equiv 0$ .*

*Demonstração.* Como  $X = X_{0D} \oplus X_{1D}$ , para cada  $v \in X$ ,  $\exists!$   $x_v(0) \in X_{0D}$  e  $u_v \in X_{1D}$  tal que

$$v = x_v(0) + u_v$$

Em particular, se  $v \in X_{1D}$  então a decomposição única é  $v = 0 + v$ , onde  $0 \in X_{0D}$  e  $v \in X_{1D}$  portanto,

$$P_{0D}(v) = 0$$

ou seja, a projeção se anula no subespaço  $X_{1D}$ ,

$$P_{0D}(v) = x_v(0), \forall v \in X$$

$\square$

Os resultados abaixo tratam de um sistema não-linear

$$x' = A(t)x + f(t, x) \tag{4.3}$$

Sejam  $B, D$  espaços de Banach mais fortes que  $L(X)$ . Seja  $\Sigma = \Sigma_{D\rho}$  a bola fechada  $\{x(t) : x(t) \in D, \|x(t)\|_D \leq \rho\}$  de raio  $\rho > 0$  em  $D$ . Sejam  $S = \Sigma \cap C(X)$  e  $\bar{S}$  o fecho de  $S$  em  $C(X)$ .

Vamos agora enunciar o Teorema de Hartman-Onuchic, não faremos aqui sua demonstração pois, o foco de nosso trabalho é mostrar a importância desse resultado, que foi utilizado por outros estudiosos e também mostrar as contribuições de Nelson para o início do estudo das Equações Diferenciais no Brasil e através desse teorema podemos ver que suas contribuições foram muito relevantes.

**Teorema 4.1.** *Se  $A(t), f(t, x)$  são funções satisfazendo:*

1.  $A(t)$  localmente integrável em  $J$ ;
2.  $(B, D)$  é admissível para  $A(t)$ ;
3.  $x(t) \mapsto f(t, x(t))$  é uma aplicação contínua do subconjunto  $\bar{S}$  do espaço  $C(X)$  em  $B$ ;
4. existe uma constante  $r > 0$  tal que  $\|f(t, x(t))\|_B \leq r$  para  $x(t) \in \bar{S}$ ;
5. existe uma  $\lambda(t) \in L$  tal que  $\|f(t, x(t))\| \leq \lambda(t)$  para  $x(t) \in \bar{S}$ ,

Então, para todo  $\xi_0 \in X_{0D}$ , existem constantes positivas  $C_0$  e  $K$ , dependendo somente de  $A(t), B, D, X_{1D}$  (mas não de  $f$  ou  $\xi_0$ ) tais que se

$$C_0 \|\xi_0\| + Kr \leq \rho \quad (4.4)$$

então (4.3) tem pelo menos uma solução  $x(t) \in S$  satisfazendo

$$P_{0D}x(0) = \xi_0. \quad (4.5)$$

Este é um teorema de existência. Dadas algumas condições, o teorema garante a existência de pelo menos uma solução para a equação diferencial (4.3).

A demonstração do Teorema 4.1, como muitas demonstrações na teoria de equações diferenciais ordinárias, utiliza um teorema de ponto fixo.

Apresentamos a construção da aplicação que auxilia na demonstração do Teorema 4.1. Dado  $y \in \bar{S}$  consideremos a equação

$$x' = A(t)x + f(t, y(t)).$$

Notemos que a equação é não-homogênea. Um resultado auxiliar demonstrado no trabalho de Hartman e Onuchic mostra que existe uma única  $D$ -solução  $x_y(t)$  satisfazendo

$$P_{0,D}x_y(0) = \xi_0$$

e

$$|x_y|_D \leq C_0 \|\xi_0\| + K|g|_B,$$

onde  $g(t) = f(t, y(t))$ . Com isso temos bem definida a aplicação

$$T_0: \bar{S} \rightarrow D \text{ por } T_0(y(t)) = x_y(t), \text{ para } y \in \bar{S}.$$

Estimativas relativamente simples implicam que  $T_0(\bar{S}) \subset S$  e que  $T_0: \bar{S} \rightarrow S$  é uma aplicação contínua. Foi utilizado o Teorema de Arzela-Ascoli para mostrar que  $T_0(\bar{S})$  possui fecho compacto em  $C(X)$ . Com isso as hipóteses do Teorema de Tychonoff estão satisfeitas e conclui-se que  $T_0$  possui pelo menos um ponto fixo. Este ponto fixo é uma solução da equação (4.3) que satisfaz as conclusões do teorema.

No artigo, os autores aplicam o Teorema 4.1 no estudo do comportamento assintótico de soluções de algumas equações diferenciais.

## 4.2 Utilização do Teorema

O professor Hildebrando Munhoz Rodrigues, nos seus trabalhos de Mestrado e Doutorado, foi orientado por Onuchic, e tanto nestes quanto nos trabalhos de Pós-Doutorado e Livre-Docência trabalhou com Equações Diferenciais e atualmente atua principalmente nos seguintes temas: Equivalência Assintótica, Equações Diferenciais Com Retardamento, Oscilação, Soluções Periódicas, Simetria.

Em 1973, Hildebrando Munhoz Rodrigues, em sua tese de doutorado intitulada *Equivalência Assintótica Relativa, com peso  $t^\mu$ , entre dois Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias* [10], generaliza problemas, usando o Teorema de Hartman-Onuchic, problemas esses que também foram alvo de estudo de Onuchic.

A tese de Rodrigues tinha como objetivo resolver os seguintes problemas:

1. Para cada solução  $y(t) \neq 0$  de  $y' = A(t)y$  existe pelo menos uma solução de  $x' = A(t)x + f(t, x)$  satisfazendo a propriedade:

$$t^\mu \frac{\|x(t) - y(t)\|}{\|y(t)\|} \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty? \quad (4.6)$$

Observamos que a condição (4.6), nesse caso  $\mu > 0$ , nos diz que a diferença relativa  $\frac{\|x(t)-y(t)\|}{\|y(t)\|}$  tende a zero mais rapidamente que  $\frac{1}{t^\mu}$ .

2. Para cada solução  $x(t)$  de  $x' = A(t)x + f(t, x)$ ,  $x(t) \neq 0$  para todo  $t$  suficientemente grande, existe solução  $y(t)$  de  $y' = A(t)y$  satisfazendo (4.6)?
3. Para cada solução  $y(t) \neq 0$  de  $y' = A(t)y$  [ $x(t) \neq 0$  de  $x' = A(t)x + f(t, x)$ ], de quantos parâmetros depende a família de soluções  $x(t)$  de  $x' = A(t)x + f(t, x)$  [ $y(t)$  de  $y' = A(t)y$ ], satisfazendo a propriedade (4.6)?

Para resolver seu primeiro problema, Rodrigues prova os Teoremas 4.2 e 4.3 que estão enunciados abaixo. Não apresentaremos aqui suas demonstrações uma vez que o foco deste trabalho é que o leitor tenha conhecimento dos resultados que foram obtidos a partir do importante Teorema de Hartman-Onuchic. Antes de apresentar os enunciados dos dois teoremas demonstrados por Rodrigues, listamos os dois lemas auxiliares que foram utilizados por ele para obter as provas de seus resultados.

**Lema 4.1.** *Seja  $A(t) = (a_{i,j}(t))$  matriz  $q \times q$ , contínua em  $J$ , satisfazendo:*

1.  $a_{i,j}(t) = 0, \forall t \in J$  para  $i < j$
2.  $a_{i,i}(t) = \alpha + \lambda(t)$ ,  $i = 1, \dots, q$  onde  $\int_{t_0}^t R(\lambda(s))ds$  é limitada em  $J$  (se  $z$  é um número complexo  $R(z)$  indica a parte real de  $z$ ).
3.  $a_{i,j}(t)$  é limitada em  $J$  para  $i > j$ .

4. para  $m = 2, \dots, q$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left| \int_{t_0}^t a_{m,m-1}(t_{m-2}) dt_{m-2} \int_{t_0}^{t_{m-2}} a_{m-1,m-2}(t_{m-3}) dt_{m-3} \dots \int_{t_0}^{t_1} a_{2,1}(s) ds \right|}{t^{m-1}} > 0.$$

Então para cada solução  $y(t) \neq 0$  de  $y' = A(t)y$  existe inteiro  $\ell$ ,  $0 \leq \ell \leq q-1$ , tal que

$$0 < \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|y(t)\|}{t^\ell e^{R(\alpha)t}} \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\|y(t)\|}{t^\ell e^{R(\alpha)t}} < \infty.$$

**Lema 4.2.** Seja  $A(t) = \text{diag}(A^1(t), \dots, A^N(t))$  onde  $A^k(t)$ ,  $k = 1, \dots, N$  são matrizes  $n_k \times n_k$  satisfazendo às hipóteses do Lema 4.1. Indiquemos por  $\alpha_k$  o elemento constante da diagonal de  $A^k(t)$ . Seja  $R(\alpha_1) \geq \dots \geq R(\alpha_N)$

Então para cada solução  $y(t) \neq 0$  de  $y' = A(t)y$  existem inteiros  $i, \ell$ ,  $1 \leq i \leq N$ ,  $0 \leq \ell \leq n_i - 1$ , de modo que:

$$0 < \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|y(t)\|}{t^\ell e^{R(\alpha_i)t}} \leq \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\|y(t)\|}{t^\ell e^{R(\alpha_i)t}} < \infty.$$

Seguem os teoremas:

**Teorema 4.2.** Seja  $A(t)$   $n \times n$  satisfazendo às hipóteses do Lema 4.2. Seja  $f(t, x)$  contínua satisfazendo

$$\|f(t, x)\| \leq h(t) \|x\|, \forall t \geq t_0, \forall x \in X$$

e  $h$  contínua com

$$\int_{t_0}^{\infty} h(t) t^{s+\mu} dt < \infty,$$

onde  $\mu$  é um número inteiro não negativo e  $s+1$  é a maior ordem dos blocos de  $A(t)$ .

Seja  $y(t) \neq 0$  solução de  $y' = A(t)y$ .

Então existe uma família de soluções  $x(t)$  de  $y' = A(t)x + f(t, x)$ , dependendo de pelo menos  $p$  parâmetros, satisfazendo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\mu \frac{\|x(t) - y(t)\|}{\|y(t)\|} = 0$$

Segundo Rodrigues [10], o número  $p$  é dado pelo teorema abaixo, o qual é utilizado durante a prova do teorema acima.

**Teorema 4.3.** Seja  $A(t)$   $n \times n$  satisfazendo às hipóteses do Lema 4.2. Seja  $f(t, x)$  contínua, tal que

$$\|f(t, x)\| \leq h(t) \|x\|, \text{ para } t \geq t_0 \geq 1 \text{ e } x \in \mathbb{R}^n,$$

onde  $h$  é contínua e satisfaz

$$\int_{t_0}^{\infty} h(t)t^{s+\mu}dt < \infty$$

sendo  $\mu \geq 0$  um número inteiro fixado e  $s+1$  a maior ordem dos blocos de  $A(t)$ .

Seja  $y(t) \neq 0$  solução de  $y' = A(t)y$  satisfazendo:

$$\overline{\lim_{t \rightarrow \infty}} \frac{\|y(t)\|}{t^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}} < \infty$$

Então existe uma família de soluções  $x(t)$  de  $x' = A(t)x + f(t, x)$ , dependendo de pelo menos  $p$  parâmetros satisfazendo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{\mu} \|x(t) - y(t)\|}{t^{\ell} e^{R(\alpha_q)t}} = 0$$

Para provar o Teorema 4.3, Rodrigues faz uso do Teorema de Hartman-Onuchic no sistema

$$x' = [B(t) - \frac{\ell}{t}I]x + g(t, x)$$

garantindo assim uma D-solução do sistema e com isso pôde através do Teorema 4.2 resolver o problema 1 de sua tese.

Segundo Rodrigues [10], neste trabalho através do Teorema de Hartman-Onuchic é generalizado os problemas propostos considerando a matriz  $A(t)$  não necessariamente constante e  $\mu \geq 0$  inteiro qualquer.

Observamos a importância do Teorema de Hartman-Onuchic, que foi utilizado por Rodrigues para atacar seu problema, temos aqui uma mostra da continuidade da pesquisa iniciada por Onuchic.

O professor Adalberto Spezamiglio foi orientado por Nelson Onuchic nos trabalhos de Mestrado e Doutorado. Atualmente sua linha de pesquisa é em Equações Diferenciais Ordinárias ou Funcionais.

Inspirado no Teorema de Hartman-Onuchic e em Rodrigues [10], Adalberto Spezamiglio tem como finalidade em sua tese de doutorado, intitulada *Aplicações da Teoria de Admissibilidade ao Estudo de Equivalência Assintótica Relativa em Equações Diferenciais Ordinárias* de 1978 [11], a generalização dos resultados de Rodrigues, para o caso  $\mu \geq 0$  inteiro e agora também  $\rho \geq 0$  real arbitrários, observando que em Rodrigues [10] os resultados obtidos foram para o caso  $\rho = 0$ .

Desta forma, os problemas considerados por Spezamiglio foram os seguintes:

1. Se  $y(t) \neq 0$  é uma solução de  $y' = A(t)y$ , determinar uma família de soluções  $x(t)$  satisfazendo à propriedade:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\mu} e^{\rho t} \frac{\|x(t) - y(t)\|}{\|y(t)\|} = 0$$

2. Se  $x(t)$  é uma solução de  $x' = A(t)x + f(t, x)$  com  $x(t) \neq 0$  para todo  $t$  suficientemente grande, determinar uma família de soluções  $y(t)$  de  $y' = A(t)y$  satisfazendo à propriedade:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\mu e^{\rho t} \frac{\|x(t) - y(t)\|}{\|y(t)\|} = 0$$

3. Em cada um dos problemas acima, dizer de quantos parâmetros depende a família de soluções encontrada.

Para resolver o primeiro problema, Spezamiglio prova o seguinte teorema:

**Teorema 4.4.** *Seja  $A(t)$  matriz  $n \times n$  satisfazendo às hipóteses do Lema 4.2, e seja  $s + 1$  a ordem máxima dos blocos de  $A(t)$ . Seja  $f(t, x)$  contínua satisfazendo*

$$\|f(t, x)\| \leq h(t) \|x\| \quad (t \geq t_0) \quad (x \in E)$$

onde  $h(t)$  é contínua, positiva, com

$$\int_{t_0}^{\infty} h(t) t^{\mu+s} e^{\rho t} dt < \infty$$

Seja  $y(t) \neq 0$  uma solução de  $y' = A(t)y$ . Então, existe uma família de soluções  $x(t)$  de  $x' = A(t)x + f(t, x)$  dependendo de pelo menos  $p$  parâmetros, satisfazendo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\mu e^{\rho t} \frac{\|x(t) - y(t)\|}{\|y(t)\|} = 0$$

Para provar tal teorema, Spezamiglio utiliza-se do seguinte teorema,

**Teorema 4.5.** *Seja  $A(t)$  matriz  $n \times n$  satisfazendo às hipóteses do Lema 4.2 e seja  $s + 1$  a ordem máxima dos blocos de  $A(t)$ . Seja  $f(t, x)$  contínua, satisfazendo*

$$\|f(t, x)\| \leq h(t) \|x\| \quad (t \geq t_0) \quad (x \in E)$$

onde  $h(t)$  é uma função contínua, positiva, com

$$\int_{t_0}^{\infty} h(t) t^{\mu+s} e^{\rho t} dt < \infty$$

Seja  $y(t) \neq 0$  solução de  $y' = A(t)y$  satisfazendo

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\|y(t)\|}{t^\ell e^{R(\alpha_q)t}} < \infty$$

onde  $\ell$  é um número inteiro,  $0 \leq \ell \leq s$ . Então, existe uma família de soluções  $x(t)$  de  $x' = A(t)x + f(t, x)$  dependendo de pelo menos  $p$  parâmetros, satisfazendo,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\mu e^{\rho t} \frac{\|x(t) - y(t)\|}{t^\ell e^{R(\alpha_q)t}} = 0$$

Para provar o teorema acima, Spezamiglio faz uso do Teorema de Hartman-Onuchic no sistema abaixo,

$$z' = [B(t) - \frac{\ell}{t}I]z + g(t, z)$$

concluindo assim que existe pelo menos uma solução  $z(t)$  do sistema acima, concluindo a prova do Teorema 4.5 e utilizando o mesmo para provar o Teorema 4.4 o qual resolve o problema 1 de sua tese.

Percebemos a grande importância do resultado desenvolvido por Hartman-Onuchic, o qual possibilitou generalizações de resultados mostrando-nos a sequência da pesquisa iniciada por Onuchic e também a formação da escola de equações diferenciais.

### 4.3 Citações de alguns trabalhos de Nelson Onuchic

Nelson Onuchic teve um grande trabalho na orientação de alunos de Mestrado e Doutorado. Analisando as teses de alguns de seus primeiros orientandos percebemos a continuidade do trabalho iniciado por Onuchic nas Equações Diferenciais, e até mesmo citações de orientandos de Nelson dentro de trabalhos de outros orientandos.

Luiz Carlos Pavlu, em 1978, orientado também por Onuchic em seu trabalho de doutorado, intitulado *Funções de Liapunov e Propriedades de Invariança para Sistemas não Autônomos: Estabilidade e Instabilidade*[12], segundo Badin [1], tinha como um dos objetivos uma aplicação das técnicas clássicas de Invariança, aliadas a uma generalização do Teorema de Yoshizawa obtida por Onuchic e outros autores em 1976, onde um deles é Táboas, também orientado por Nelson, e como objetivo maior, "obter critérios que caracterizem a instabilidade da origem, como ponto de equilíbrio de sistemas essencialmente não autônomos de equações diferenciais ordinárias."([12], pg 1)

Pavlu [12], diz ter por inspiração para trabalhar esse objetivo um critério de instabilidade para sistemas autônomos de equações diferenciais com retardamento, obtido por Onuchic em 1970, e usando como ferramenta básica os resultados relativos a Invariança obtidos por Rodrigues também em 1970.

Temos um exemplo da continuidade além de Nelson Onuchic, o trabalho desenvolvido por Pavlu além de se inspirar em Onuchic utiliza o trabalho desenvolvido por Rodrigues.

Encontramos também cinco citações de "reviewed" no MathSciNet, que citaram o artigo *On the Asymptotic Integration of Ordinary Differential Equations* [9] no qual temos o Teorema de Hartman-Onuchic. São elas:

1. Švec, Marko. Asymptotic Relationship Between Solutions of Two Systems of Differential Equations. Czechoslovak Math. J. 24(99) (1974), 44–58. (Reviewer: J. Kato) 34D05.

2. Šaripov, S. R. The Topological Equivalence of Singular Points of Higher Order. (Russian) Proceedings of the International Symposium on Topology and its Applications (Budva, 1972), pp. 233–234. Savez Društava Mat. Fiz. i Astronom., Belgrade, 1973. (Reviewer: A. Somolinos) 34C05.
3. Gutowski, R.; Radziszewski, B. Asymptotic Behaviour and Properties of Solutions of Nonlinear Ordinary Differential Equations of First Order Describing the Motion of a Mechanical System. Arch. Mech. (Arch. Mech. Stos.) 23 (1971), 17–25. (Reviewer: T. G. Hallam) 34D05 (70.34).
4. Massera, José Luis; Schäffer, Juan Jorge. Linear Differential Equations and Function Spaces. Pure and Applied Mathematics, Vol. 21 Academic Press, New York-London 1966 xx+404 pp. (Reviewer: C. Corduneanu) 34.00 (46.00)
5. Corduneanu, C. Problèmes Globaux Dans la Théorie des Équations Intégrales de Volterra. (French) Ann. Mat. Pura Appl. (4) 67 1965 349–363. (Reviewer: J. J. Schäffer) 45.13.

Pesquisando também no MathSciNet encontramos dois artigos recentes que tem em suas referências bibliográficas o artigo *On the Asymptotic Integration of Ordinary Differential Equations* [9].

Os dois artigos são de Octavian G. Mustafa matemático dos departamentos de matemática University of Craiova, Romania e University of Lund, Sweden. Os artigos são intitulados *Positive Solutions of Nonlinear Differential Equations with Prescribed Decay of the First Derivative* e *On the Existence of Solutions with Prescribed Asymptotic Behaviour for Perturbed Nonlinear Differential Equations of Second Order* o primeiro de agosto de 2004 e o segundo de setembro de 2004.

É interessante ver que após anos da publicação do artigo de Hartman e Onuchic temos ainda matemáticos utilizando os resultados apresentados por eles, o que nos mostra a importância da matemática desenvolvida por Nelson Onuchic e a grande pesquisa em Equações Diferenciais que iniciou-se no Brasil com Onuchic.

## 5 Publicações de Nelson Onuchic

Neste capítulo apresentamos uma lista com as publicações de Nelson Onuchic. Para confecção de tal lista, tomei como referência Badin [1].

1. Entre outros, o artigo *Seqüências de Matrizes  $n \times 1$* , revista Notas de Matemática e Física da Faculdade de Filosofia Ciências e Letras da USP, número 2, outubro-dezembro de 1953.
2. *Estruturas Uniformes sobre  $P$ -Espaços e Aplicações da Teoria destes Espaços em Topologia Geral*, tese de doutorado apresentada na F.F.C.L. da USP em 12 de junho de 1957.
3. *Espaços de Banach e de Hilbert*, capítulo do 1º Colóquio Brasileiro de Matemática da publicação Análise Funcional.
4. *On two properties of  $P$ -spaces*, revista Portugaliae Mathematica, vol. 16, fasc. 1, 1957.
5.  *$P$ -Spaces and the Stone-Cech Compactification*, anais da Academia Brasileira de Ciências, Vol. 30, 1, 1958.
6.  *$P$ -Espaços e Estrutura Uniforme de Nachbin*, atas do 2º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1959.
7. *On the Nachbin uniform structure*, (Proceedings of the American Mathematical Society, 1960.
8.  *$P$ -espaços e compactificado de Stone-Cech*, Separata do Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo), vol. 12, 1960.
9. *Equações Diferenciais Ordinárias: Estabilidade em Sistemas Lineares, Equivalência Assintótica e Método Topológico de T. Wazewski*, no 3º Colóquio Brasileiro de Matemática, em Fortaleza, 1961.
10. *Applications of the topological method of Wazewski of certain problems of asymptotic behavior in ordinary differential equations*, Pacific Journal of Mathematics, vol. 11, 1961.

11. *The existence of solutions bounded in the future of systems of ordinary differential equations*, Portugaliae Mathematica, vol. 21, fasc. 1, 1962.
12. *On the comparison between the solutions of ordinary differential equations*, Research Institute for Advanced Studies - RIAS, Martin Co., USA, Technical Report, vol. 63, fasc. 1, 1963, em parceria com V. Lakshmikantham.  
O artigo acima foi publicado também em separata do Boletim da Sociedade de Matemática de São Paulo, vol. 15, fasc 1º e 2º, 1963.
13. *Relationships among the solutions of two systems of ordinary differential equations*, Michigan Mathematical Journal, vol. 10, 1963.
14. *On the uniform stability of a perturbed linear system*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol.6, 1963.
15. *On the Asymptotic Integration of Ordinary Differential Equations*, Pacific Journal of Mathematics, vol. 13, 1963, em parceria com Philip Hartman.
16. *Integração Assintótica de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias*, registrada na Separata das Atas do 4º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1963, impresso em 1965.
17. *On the Asymptotic Integration of Ordinary Differential Equations*, Contributions to Differential Equations, Interscience, 1964, em parceria com Jack Hale.
18. *Nonlinear Perturbation of a Linear System of Ordinary Differential Equations*, publicado no Michigan Mathematical Journal.
19. *Nonlinear perturbation of a linear system of ordinary differential equations of order  $m$* , Anais da Academia Brasileira de Ciências, vol. 37, nº 2, 1965, em parceria com Ayrton Badelucci.
20. *Equações Diferenciais Funcionais*, Instituto de Pesquisas Matemáticas da USP e F.F.C.L de Rio Claro, 1965, com colaboração dos professores Odelar Leite Linhares e Lourdes de la Rosa Onuchic.
21. *Comportamento Assintótico das Soluções de um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias*, tese de livre-docência apresentada na F.F.C.L. da Usp, 1965.
22. *Comportamento no futuro das soluções limitadas das equações diferenciais funcionais de segunda ordem com forças repulsivas*, atas do 5º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1965.
23. *On the Asymptotic Behavior of the Solutions of Functional Differential Equations*, Differential Equations and Dynamical Systems, Academic Press Inc., New York, 1967.

- 
24. *Asymptotic relationships at infinity between the solutions of two systems of ordinary differential equations*, Journal of Differential Equations, vol. 3, nº 1, 1967.
  25. *On the uniform stability of a perturbed linear functional differential equations*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 19, 1968.
  26. *Estabilidade de Sistemas Perturbados e Comportamento no Infinito de Sistemas de Equações Diferenciais com Retardamento no Tempo*, tese para o concurso de Professor Titular da Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 1968.
  27. *Stability Properties of a Second Order Differential Equation*, Separata da Revista Mexicana de Ciencia y Tecnología, vol. III, nº 1, Enero/Abril de 1969.
  28. *Propriedade de invariância na teoria das equações diferenciais ordinárias com aplicações a problemas de estabilidade*, Terceira Quinzena de Análise Funcional, ITA, 1970.
  29. *On a Criterion of Instability for Differential Equations with Time Delay - Periodic Orbits Stability and Resonances*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1970.
  30. *Uniform Stability and Asymptotic behavior of a perturbed linear differential equations with time lag on a product space*, Annali di Matematica Pura ed Applicata(IV), Bolonha, Itália, 1970.
  31. *Invariance properties in the theory of ordinary differential equations with applications to stability problems*, Journal of Control, SIAM, 1971.
  32. *Asymptotic equivalence between two systems of ordinary differential equations*, Portugaliae Mathematica, vol. 30, fasc. 2, 1971.
  33. *Equações Diferenciais com Retardamento*, material didático publicado pelo ICMC-USP, 1971, escrito por Nelson com a colaboração de Hildebrando Munhoz Rodrigues, Lourdes Onuchic e Plácido Zoega Táboas.
  34. *Invariance, Stability and Applications*, apresentação de seminários no México com colaboração dos professores Plácido Zoega Táboas, Hildebrando Munhoz Rodrigues e Lourdes de la Rosa Onuchic, 1972.
  35. *Asymptotic relations between perturbed linear systems of ordinary differential equations*, Pacific Journal of Mathematics, vol. 45, nº 1, 1973, em parceria com Thomas Guy Hallam.
  36. *Invariance properties in the theory of stability for ordinary differential systems and applications*, Applicable Analysis, Vol. 5, 1975, em parceria com Lourdes Onuchic e Plácido Táboas.

- 
37. *Systems with repulsive forces*, Anais da Academia Brasileira de Ciências, 1975, em parceria com Lourdes Onuchic.
  38. *Qualitative properties of nonlinear ordinary differential equations*, Proceedings of the Royal Society of Edinburg, 1977, em parceria com Plácido Táboas.
  39. *On the conditional asymptotic stability for a nonlinear ordinary differential equations*, Anais da Academia Brasileira de Ciências, 1979, em parceria com Plácido Táboas.
  40. *Invariance and stability for ordinary differential equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1978.
  41. *Invariance properties for ordinary differential equations: stability and instability*, Journal of Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 1978.
  42. *Qualitative Properties of Certain Ordinary Differential Systems*, Proceedings of the Conference of Functional Differential Equations and Bifurcation, Springer-Verlag, 1980, em parceria com Adalberto Spezamiglio.
  43. *Invariance, asymptotic behavior and stability properties for ordinary differential equations*, Tôhoku Mathematical Journal, em parceria com Luiz Carlos Pavlu, 1980.
  44. *On a criterion of instability for nonautonomous ordinary differential equations*, American Journal of Mathematics, 1982, em parceria com Luiz Carlos Pavlu.
  45. *Teoria da Estabilidade: Invariança, Funções de Liapunov*, texto didático Notas do ICMSC-USP, nº 7, 1980.
  46. *Asymptotic behavior at infinity between the solutions of ordinary differential equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1984, em parceria com Hermínio Cassago Júnior.

## 6 Considerações Finais

O trabalho do professor Nelson Onuchic dentro da Matemática foi extenso e de grande importância, com muitas publicações. Focamos em um, pois nossa ideia era mostrar um exemplo de como iniciou os estudos das Equações Diferenciais em São Carlos e a escola formada por Nelson.

A partir de seu contato com matemáticos como José Luís Massera e principalmente Jack K. Hale, Onuchic aumentou seu interesse pelas Equações Diferenciais e a partir daí começava a formar-se um grupo de pesquisa nesta área na Usp campus de São Carlos.

Nelson orientou vários alunos e estes seguiram estudando e orientando outros em Equações Diferenciais e com isso o grupo de pesquisa na área foi se consolidando e também crescendo, grupo este que está com pesquisas ativas até os dias de hoje.

Dentre muitos trabalhos produzidos por Nelson Onuchic, apresentamos aqui o resultado que leva seu nome, o Teorema de Hartman-Onuchic, o qual vimos duas utilizações em duas teses de seus alunos, cinco citações em "reviewed" e também duas citações do matemático Mustafa em dois de seus artigos do ano de 2004. O que é muito relevante é ver que depois de tantos anos, já que o resultado de Nelson data de 1963, ainda seu trabalho é utilizado e citado, o que nos mostra como Onuchic foi e é um matemático de grande importância e que seu nome e contribuições não serão esquecidos.

Primeiramente Hildebrando M. Rodrigues e depois Adalberto Spezamiglio, utilizam o Teorema de Hartman-Onuchic para resolver um dos problemas por eles propostos em suas teses, o que permitiu novos resultados. Podemos ver a importância de seu resultado, que possibilitou o estudo e a formação de outros.

O professor Nelson Onuchic contribuiu muito para a Matemática, em especial para a pesquisa em Equações Diferenciais, com suas publicações, como a que foi apresentada nesse trabalho, orientações de alunos e também com sua postura ética tanto na vida profissional quanto na pessoal, contribuindo para, além da formação matemática de seus alunos, a formação como pessoas.

# Referências

- [1] BADIN, M. G. *Um Olhar Sobre as Contribuições do Professor Nelson Onuchic para o Desenvolvimento da Matemática no Brasil*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Unesp, 2006.
- [2] RUDIN, W. *Princípios de Análise Matemática*. Rio de Janeiro: Livro Técnico S.A., 1971.
- [3] COELHO, F. U.; LOURENCO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear*. São Paulo: Edusp, 2001.
- [4] ZANI, S. L. *Álgebra Linear*. [S.l.], 2004.
- [5] ROYDEN, H. L. *Real Analysis*. 3. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1988.
- [6] HALANAY, A. *Differential Equations*. [S.l.: s.n.], 1966.
- [7] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. [S.l.]: Projeto Euclides, 2009.
- [8] WHEEDEN, R. L. *Measure and Integral an Introduction to Real Analysis*. [S.l.]: Editora Marcel Dekker, 1977.
- [9] HARTMAN, P.; ONUCHIC, N. On asymptotic integration of ordinary differential equations. *Pacific Journal of Mathematics*, v. 13, p. 1193–1207, 1963.
- [10] RODRIGUES, H. M. *Equivalência Assintótica Relativa, com peso  $t^\mu$ , entre dois Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias*. Tese (Doutorado) — Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1973.
- [11] SPEZAMIGLIO, A. *Aplicações da Teoria de Admissibilidade ao Estudo de Equivalência Assintótica Relativa em Equações Diferenciais Ordinárias*. Tese (Doutorado) — Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1978.
- [12] PAVLU, L. C. *Funções de Liapunov e Propriedades de Invariança para Sistemas não Autônomos: Estabilidade e Instabilidade*. Tese (Doutorado) — Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1978.

- 
- [13] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. [S.l.]: Editora Wiley, 1989.
- [14] MOURA, C. A. *Análise Funcional para Aplicações - posologia*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2002.