

Bárbara Lopes Macedo

Propriedades Homológicas de Fibrados e
Grupos de Dualidade



1910001080



Propriedades Homológicas de Finitude e Grupos de Dualidade

Barbara Lopes Macedo

Orientadora: Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade



T1080/02

Dissertação apresentada ao Departamento de
Matemática - IBILCE - UNESP, como parte dos
requisitos para obtenção do título de Mestre em
Ciências Matemáticas - área de concentração:
Matemática.

São José do Rio Preto - SP

Abril - 2002

513.831
M141p

10103023

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"

unesp

Propriedades Homológicas de Finitude e Grupos de Dualidade

Macedo, Barbara Lopes.

Propriedades homológicas de finitude e grupos de dualidade /

Barbara Lopes Macedo. – São José do Rio Preto : [s.n.], 2002

146 p. : il. ; 30 cm.

Orientadora: Maria Gorete Carreira Andrade

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Topologia algébrica. 2. (Co)homologia de grupos. 3. Dualidade. 4. Grupos de tipo *FP* e *FL*. I. Andrade, Maria Gorete Carreira. II. Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 515.14

São José do Rio Preto – SP

Abil - 2002

“Os grandes momentos da vida
vêm por si mesmo. Não tem
sentido esperá-los.”

Turton Waldir



Agradecimentos

Quero agradecer especialmente:

Ao Dr. João Carlos de Almeida, por sua orientação, apoio e incentivo durante todo o curso de graduação.

Ao Dr. João Carlos de Almeida, por sua orientação, apoio e incentivo durante todo o curso de graduação.

Ao Dr. João Carlos de Almeida, por sua orientação, apoio e incentivo durante todo o curso de graduação.

Ao Dr. João Carlos de Almeida, por sua orientação, apoio e incentivo durante todo o curso de graduação.

Ao Dr. João Carlos de Almeida, por sua orientação, apoio e incentivo durante todo o curso de graduação.

Ao Dr. João Carlos de Almeida, por sua orientação, apoio e incentivo durante todo o curso de graduação.

Ao Dr. João Carlos de Almeida, por sua orientação, apoio e incentivo durante todo o curso de graduação.

Ao Dr. João Carlos de Almeida, por sua orientação, apoio e incentivo durante todo o curso de graduação.

Ao Dr. João Carlos de Almeida, por sua orientação, apoio e incentivo durante todo o curso de graduação.

Ao Dr. João Carlos de Almeida, por sua orientação, apoio e incentivo durante todo o curso de graduação.

Ao Dr. João Carlos de Almeida, por sua orientação, apoio e incentivo durante todo o curso de graduação.

Ao Dr. João Carlos de Almeida, por sua orientação, apoio e incentivo durante todo o curso de graduação.

Ao Dr. João Carlos de Almeida, por sua orientação, apoio e incentivo durante todo o curso de graduação.

Ao Dr. João Carlos de Almeida, por sua orientação, apoio e incentivo durante todo o curso de graduação.

Ao Dr. João Carlos de Almeida, por sua orientação, apoio e incentivo durante todo o curso de graduação.

Aos meus pais,
Marco e Gislene
dedico.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho, agradeço:

À Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade, pela valiosa orientação, pela disponibilidade no atendimento de minhas dúvidas, por toda dedicação, paciência e amizade.

À Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti, por ter participado de discussões muito importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

À Profa. Dra. Aparecida Francisco da Silva, pelos conselhos nos momentos de indecisão, e por todo apoio e incentivo desde o início de mais uma etapa vencida.

Aos demais professores do Departamento de Matemática, pela formação acadêmica.

À amiga Fernanda, por dividir alegrias e dificuldades durante essa caminhada.

Ao Márcio, pela disponibilidade dispensada à parte ilustrativa deste trabalho.

Aos companheiros Julio e Vânia, e aos demais alunos da pós-graduação, pelo agradável convívio.

Aos amigos João Carlos, Weber, Júnior e Oscar, pela amizade sincera e união.

Às queridas amigas Andrea, Milena e Sabrina, com as quais pude compartilhar risos e lágrimas durante todos esses anos.

Aos meus pais, minha eterna gratidão, pelo apoio incondicional, pela confiança, por todo amor, carinho e dedicação, por compreenderem minha ausência durante as horas de estudo, e pelo incentivo em tudo que busquei realizar.

À minha irmã Fernanda, pelos momentos de alegria e descontração.

À minha querida avó Geni, por toda preocupação que sempre teve comigo e, sobretudo por suas orações.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

A Deus, por tudo.



Resumo

Neste trabalho fizemos um estudo sobre as propriedades homológicas de finitude impostas sobre um grupo G . Além disso, estudamos os grupos de tipo FP e FL , e uma interpretação topológica para ambos.

Consideramos também o caso em que G é um grupo de dualidade, em especial, de dualidade de Poincaré de dimensão n (PD^n -grupo), apresentando uma interpretação topológica para o mesmo, através do conceito de variedades asféricas.

Palavras-chave: (co)homologia de grupos, dimensão cohomológica, grupos de tipo FP e FL , grupos de dualidade, grupos de dualidade de Poincaré.

Abstract

In this work we present finiteness homological properties of a group G . Furthermore, we studied groups of type FP and FL , and the special case where G is a n -dimensional Poincaré duality group (PD^n -group), giving to these groups a topological interpretation, using to the later one the concept of aspherical manifolds.

Keywords: (co)homology of groups, cohomological dimension, groups of type FP and FL , duality groups, Poincaré duality groups.

1	Introdução	1
1.1	Notação	1
1.2	Notação	1
1.3	Notação	1
1.4	Notação	1
1.5	Notação	1
1.6	Notação	1
1.7	Notação	1
1.8	Notação	1
1.9	Notação	1
1.10	Notação	1
1.11	Notação	1
1.12	Notação	1
1.13	Notação	1
1.14	Notação	1
1.15	Notação	1
1.16	Notação	1
1.17	Notação	1
1.18	Notação	1
1.19	Notação	1
1.20	Notação	1
1.21	Notação	1
1.22	Notação	1
1.23	Notação	1
1.24	Notação	1
1.25	Notação	1
1.26	Notação	1
1.27	Notação	1
1.28	Notação	1
1.29	Notação	1
1.30	Notação	1
1.31	Notação	1
1.32	Notação	1
1.33	Notação	1
1.34	Notação	1
1.35	Notação	1
1.36	Notação	1
1.37	Notação	1
1.38	Notação	1
1.39	Notação	1
1.40	Notação	1
1.41	Notação	1
1.42	Notação	1
1.43	Notação	1
1.44	Notação	1
1.45	Notação	1
1.46	Notação	1
1.47	Notação	1
1.48	Notação	1
1.49	Notação	1
1.50	Notação	1
1.51	Notação	1
1.52	Notação	1
1.53	Notação	1
1.54	Notação	1
1.55	Notação	1
1.56	Notação	1
1.57	Notação	1
1.58	Notação	1
1.59	Notação	1
1.60	Notação	1
1.61	Notação	1
1.62	Notação	1
1.63	Notação	1
1.64	Notação	1
1.65	Notação	1
1.66	Notação	1
1.67	Notação	1
1.68	Notação	1
1.69	Notação	1
1.70	Notação	1
1.71	Notação	1
1.72	Notação	1
1.73	Notação	1
1.74	Notação	1
1.75	Notação	1
1.76	Notação	1
1.77	Notação	1
1.78	Notação	1
1.79	Notação	1
1.80	Notação	1
1.81	Notação	1
1.82	Notação	1
1.83	Notação	1
1.84	Notação	1
1.85	Notação	1
1.86	Notação	1
1.87	Notação	1
1.88	Notação	1
1.89	Notação	1
1.90	Notação	1
1.91	Notação	1
1.92	Notação	1
1.93	Notação	1
1.94	Notação	1
1.95	Notação	1
1.96	Notação	1
1.97	Notação	1
1.98	Notação	1
1.99	Notação	1
1.100	Notação	1

Índice

Introdução	vii
1 Preliminares	1
1.1 Módulos Projetivos e RG -Módulos	1
1.2 Resoluções Livres e Projetivas	10
1.3 Resolução Padrão	12
1.4 CW-Complexos e Resoluções de R sobre RG via Topologia	15
1.5 Coinvariantes e Invariantes	30
1.6 Módulos Induzidos e Coinduzidos	32
2 (Co)homologia de Grupos - Tor e Ext	45
2.1 A (Co)homologia de um Grupo G	45
2.2 O Lema de Shapiro	56
2.3 H_* e H^* como Funtores	59
2.4 Interpretação Topológica para $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$	63
2.5 Os Grupos $H_1(G, M)$ e $H^1(G, M)$	70
2.6 Tor e Ext	74
3 Condições de Finitude - Grupos de Dualidade	82
3.1 Dimensão Cohomológica	82
3.2 Resoluções de Tipo Finito	94
3.3 Grupos de Tipo FP_n	105
3.4 Grupos de Tipo FP e FL	112
3.5 Grupos de Dualidade	120
3.6 Interpretação Topológica para Grupos de Dualidade de Poincaré	130
4 Apêndice	133
4.1 Resoluções e Complexos de Cadeia Homotopicamente Equivalentes	133
4.2 Sistemas de Grupos	138
4.3 Limite Direto	141
Bibliografia	144

Introdução

O objetivo deste trabalho é fazer um estudo a respeito das condições de finitude que possam ser impostas sobre um determinado grupo, a fim de garantir que a homologia tenha propriedades boas.

Consideremos R um anel comutativo com unidade, G um grupo, e M um RG -módulo. A definição de $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$ nos permite escolher uma resolução projetiva arbitrária $P = (P_i)_{i \in \mathbb{I}}$ de R sobre RG . Se pensarmos do ponto de vista topológico, podemos computar $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$ em termos de um $K(G, 1)$ -complexo arbitrário Y . Desde que tenhamos liberdade de escolha, é razoável tentarmos trabalhar com P (ou Y) sendo tão “pequenos” quanto possível, e isto nos leva à várias condições de finitude sobre o grupo G .

Por exemplo, se interpretarmos “pequeno” em termos do comprimento de P (ou da dimensão de Y), somos levados à noção de *dimensão cohomológica*. Agora, se “pequeno” significar que cada P_i é finitamente gerado (ou que Y deve ter somente finitas células), estaremos estudando as condições “ FP ” e “ FL ” do grupo G .

Na maior parte dos casos, consideramos $R = \mathbb{Z}$, e tomamos [6] como referência principal para o desenvolvimento deste trabalho.

A seguir, relatamos o objetivo de estudo em cada capítulo.

No Capítulo 1 apresentamos resultados de fundamental importância para os capítulos posteriores. Introduzimos, primeiramente, os conceitos de módulos projetivos e RG -módulos, onde R é um anel comutativo com unidade e G é um grupo denotado multiplicativamente. Posteriormente, é feito um estudo sobre resoluções livres (portanto projetivas) $\varepsilon : F \rightarrow R$ de R sobre RG , incluindo ainda neste assunto, a resolução padrão



e a notação bar.

Na seção seguinte, analisamos como obter resoluções livres de R sobre HG via topologia, por meio de espaços denominados CW -complexos, e apresentamos alguns exemplos do mesmo. Além disso, estudamos o complexo de Eilenberg-MacLane do tipo $(G, 1)$, ou $K(G, 1)$ -complexo, o qual trata-se de um CW -complexo Y conexo, tal que $\pi_1(Y) = G$, e cujo recobrimento universal $\tilde{Y}$ é contrátil.

Finalizando este capítulo, apresentamos os módulos coinvariantes e invariantes, bem como seus isomorfismos com $R \otimes_{RG} -$ e $\text{Hom}_{RG}(R, -)$, respectivamente, e um estudo sobre módulos induzidos e coinduzidos, onde é feita uma breve revisão sobre extensão e coextensão de escalares do anel R para o anel S , via o homomorfismo de anéis $\alpha : R \rightarrow S$.

No Capítulo 2 definimos os n -ésimos grupos de homologia e cohomologia do grupo G , com coeficientes no ZG -módulo M :

$$H_n(G, M) = H_n(F \otimes_{ZG} M)$$

$$H^n(G, M) = H^n(\text{Hom}_{ZG}(F, M))$$

onde $\varepsilon : F \rightarrow Z$ é uma resolução projetiva de Z sobre ZG . Como exemplos, calculamos $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$ para os casos em que G é um grupo cíclico infinito, e cíclico finito de ordem n com gerador t .

Na próxima seção, apresentamos o Lema de Shapiro, que relaciona a (co)homologia do grupo G com a (co)homologia de seu subgrupo H , e através de resultados sobre $\text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G M)$ e $\text{Coind}_H^G(\text{Res}_H^G M)$, enunciamos uma outra versão do mesmo lema.

Além disso, vendo H_* e H^* como funtores, observamos que $H_*(-, -)$ é um funtor covariante em uma determinada categoria $\mathcal{C}$, e $H^*(-, -)$ é um funtor contravariante em uma categoria $\mathcal{D}$.

Os grupos $H_1(G, M)$ e $H^1(G, M)$ também são estudados e, para isso, retomamos a resolução padrão, vista no primeiro capítulo.

Encerramos o capítulo fazendo um estudo sobre os funtores $\text{Tor}_*^G(-, -)$ e $\text{Ext}_G^*(-, -)$, destacando os isomorfismos:

$$\text{Tor}_*^G(M, N) \simeq H_*(G, M \otimes N) \quad (M: Z\text{-livre de torção})$$



$$Ext_G^*(M, N) \simeq H^*(G, Hom(M, N)) \quad (M: \mathbf{Z}\text{-livre})$$

onde M e N são $\mathbf{Z}G$ -módulos (ou G -módulos), e G atua diagonalmente em $M \otimes N$ e em $Hom(M, N)$.

No Capítulo 3, o qual trata-se das propriedades homológicas de finitude, apresentamos, inicialmente, o conceito de dimensão cohomológica de um grupo G ($cd\ G$), considerando o caso $R = \mathbf{Z}G$, $M = \mathbf{Z}$, além de exemplos e proposições importantes sobre esse assunto. Estudamos também, em que condições é válida a igualdade $cd\ H = cd\ G$, se considerarmos G um grupo e H um subgrupo de G de índice finito.

Na seção seguinte, apresentamos as resoluções de tipo finito, as quais exigem que cada módulo projetivo P_i da resolução P sobre um anel arbitrário R seja finitamente gerado. O último teorema desta seção trata das relações existentes entre os funtores $Tor_*^R(M, -)$ e $Ext_R^*(M, -)$ com limites diretos, assunto apresentado no Apêndice.

Em seguida, estudamos os grupos de tipo FP_n , restringindo a teoria da seção anterior ao caso $R = \mathbf{Z}G$, $M = \mathbf{Z}$. Apresentamos os grupos de tipo FP ($\mathbf{Z}$ admite uma resolução projetiva finita sobre $\mathbf{Z}G$) e FL ($\mathbf{Z}$ admite uma resolução livre finita sobre $\mathbf{Z}G$). Além disso, consideramos uma interpretação topológica para grupos de tipo FP , usando o conceito de espaço finitamente dominado, e relacionamos os grupos de tipo FL com o complexo finito $K(G, 1)$.

Finalizando o capítulo, apresentamos os grupos de dualidade, assunto principal deste trabalho. Nesta seção, temos demonstrado um importante teorema, o qual constitui-se da equivalência de quatro implicações, considerando-se, conforme [6], grupos de tipo FP . Dentre essas implicações, prova-se o isomorfismo

$$H^i(G, -) \simeq H_{n-i}(G, D \otimes_{\mathbf{Z}} -)$$

onde $D = H^n(G, \mathbf{Z}G)$ (módulo dualizante). Deste modo, G é um grupo de dualidade de dimensão n (D^n -grupo), se satisfaz as condições desse teorema.

Apresentamos também o caso em que G é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n (PD^n -grupo), e alguns exemplos desses grupos. Mais ainda, fazemos uma interpretação topológica para os mesmos, através do conceito de variedades asféricas e,



encerramos essa última seção com um exemplo envolvendo as possibilidades para uma superfície F , de acordo com o Teorema de Classificação de Superfícies, que pode ser encontrado em [18].

No final deste trabalho, apresentamos um Apêndice que trata de Resoluções e Complexos de Cadeia Homotopicamente Equivalentes, Sistema de Grupos e Limites Diretos. Para o primeiro assunto, temos lemas importantes envolvendo conceitos de aplicações e homotopia de cadeias, além de exemplos de categorias e funtores. Na parte referente à Sistemas de Grupos, apresentamos definições e observações a respeito de conjuntos dirigidos e quase ordenados. Sobre Limites Diretos, temos dois exemplos importantes, garantindo que qualquer grupo é o limite direto de seus subgrupos em bases finitas, e que uma soma direta é o limite direto de somas diretas finitas.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo relatamos alguns resultados de fundamental importância para o desenvolvimento dos capítulos posteriores.

1.1 Módulos Projetivos e RG -Módulos

Definição 1.1.1 *Seja R um anel comutativo com unidade. Um módulo P é chamado R -projetivo se existe solução para todo problema de aplicação do tipo:*

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow \psi & \downarrow \varphi & \searrow \theta & \\ M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{j} & M'' \end{array}$$

onde $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M''$ é uma seqüência exata de R -módulos ($\text{Im } i = \text{Ker } j$).

Uma solução para este problema consiste de uma aplicação $\psi : P \rightarrow M'$ tal que $i \circ \psi = \varphi$.

Lema 1.1.1 *São equivalentes as seguintes condições para um R -módulo P :*

- (i) P é projetivo.
- (ii) Toda seqüência exata $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$ cinde.
- (iii) P é somando direto de um módulo livre.

Demonstração: [6], I.8.2

■



Lema 1.1.2 *Todo módulo livre é projetivo.*

Demonstração: [6], 1.7.2

Exemplo 1.1.1 *Seja e um elemento idempotente de um anel R , ou seja, $e^2 = e$. Então, o ideal à esquerda Re é R -projetivo.*

De fato: Seja $\pi : R \rightarrow Re$ tal que $\pi(r) = re, \forall r \in R$.

Dado $r \in R$, temos $\pi(r - re) = (r - re)e = re - re^2 = re - re = 0$, ou seja, $r - re = a \in \text{Ker } \pi$. Assim, $r = a + re$, onde $a \in \text{Ker } \pi$ e $re \in Re$.

Agora, $\text{Ker } \pi \cap Re = \{0\}$, pois

$$x \in \text{Ker } \pi \cap Re \Rightarrow \pi(x) = 0 \text{ e } x = re \Rightarrow \pi(re) = 0 \Rightarrow (re)e = 0 \Rightarrow re^2 = 0 \stackrel{e^2=e}{\Rightarrow} x = 0.$$

Deste modo, $R = \text{Ker } \pi \oplus Re$. Além disso, como R é R -livre, temos pelo lema 1.1.1(iii) que Re é R -projetivo.

Observação 1.1.1 *A recíproca do lema 1.1.2 não é verdadeira. A seguir, um exemplo deste fato.*

Exemplo 1.1.2 *Sejam $R = \mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ e $e = \bar{3}$.*

Temos: $\bar{3}^2 = \bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{9} = \bar{3}$, ou seja, $\bar{3}$ é idempotente. Logo, pelo exemplo 1.1.1, $\mathbb{Z}_6\bar{3} = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ é $\mathbb{Z}_6$ -projetivo. Agora, se $\mathbb{Z}_6\bar{3}$ fosse $\mathbb{Z}_6$ -livre, teríamos $\mathbb{Z}_6\bar{3} \simeq \oplus \mathbb{Z}_6$, ou seja, teria no mínimo 6 elementos. Deste modo, $\mathbb{Z}_6\bar{3}$ não é $\mathbb{Z}_6$ -livre.

Definição 1.1.2 *Um R -módulo M é chamado **R-plano** se para qualquer seqüência exata curta de R -módulos $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, a seqüência*

$$0 \rightarrow A \otimes_R M \rightarrow B \otimes_R M \rightarrow C \otimes_R M \rightarrow 0$$

é exata.



Lema 1.1.3 *Todo módulo projetivo é plano.*

Demonstração: [14], pag.82. ■

O lema a seguir será bastante útil no Capítulo 3, quando tratarmos de grupos de dualidade.

Lema 1.1.4 *Seja P um R -módulo (à esquerda) projetivo finitamente gerado.*

(a) $P^* = \text{Hom}_R(P, R)$ é um R -módulo (à direita) projetivo finitamente gerado.

(b) Para qualquer R -módulo (à esquerda) M , existe um isomorfismo

$$\varphi : P^* \otimes_R M \rightarrow \text{Hom}_R(P, M)$$

de grupos abelianos, dado por $\varphi(u \otimes m)(x) = u(x) \cdot m$, para $u \in P^*$, $m \in M$ e $x \in P$.

(c) Para qualquer R -módulo (à direita) M , existe um isomorfismo

$$\varphi' : M \otimes_R P \rightarrow \text{Hom}_R(P^*, M),$$

dado por $\varphi'(m \otimes x)(u) = m \cdot u(x)$ para $m \in M$, $x \in P$, $u \in P^*$.

Demonstração: [6], I.8.3 ■

Vamos introduzir agora o conceito de anel grupo e ver, também, como se caracterizam os RG -módulos através de uma G -ação sobre um conjunto.

Anel Grupo

Definição 1.1.3 *Sejam R um anel comutativo com unidade 1 e G um grupo denotado multiplicativamente, com elemento neutro 1. Seja RG o R -módulo livre gerado pelos elementos de G . Assim, um elemento de RG é expresso unicamente na forma $\left(\sum_{g \in G} r_g g \right)$,*



onde $r_g \in R$ e $r_g = 0$, para quase todo g em G (isto é, exceto para um número finito de elementos g em G).

Em RG , as operações de adição e multiplicação são dadas por

$$\left(\sum_{g \in G} r_g g \right) + \left(\sum_{g \in G} s_g g \right) = \sum_{g \in G} (r_g + s_g) g$$

$$\left(\sum_{g \in G} r_g g \right) \cdot \left(\sum_{h \in G} s_h h \right) = \sum_{g, h \in G} (r_g s_h) (gh).$$

Tais operações fazem de RG um anel comutativo com unidade 1 (1 representa a multiplicação da unidade de R pelo elemento neutro de G), chamado **anel grupo** de G sobre R .

Ação de um grupo sobre um conjunto

Definição 1.1.4 Sejam G um grupo e X um conjunto não vazio. Uma **ação** (à esquerda) de G sobre X (ou uma **G-ação** sobre X) é uma aplicação:

$$\begin{aligned} \phi : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto \phi(g, x) = g \cdot x, \end{aligned}$$

satisfazendo, para todo x em X , as condições:

- (a) $1 \cdot x = x$ (1 : elemento neutro de G)
- (b) $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$, $\forall g_1, g_2 \in G$.

Equivalentemente, uma ação de G sobre X é um homomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow \text{Bij}(X) \\ g &\mapsto \varphi(g) = \varphi_g; \quad \varphi_g(x) = g \cdot x, \end{aligned}$$

onde $\text{Bij}(X)$ é o grupo das bijeções de X .

Nota: Para simplificar a notação, vamos escrever $g : X \rightarrow X$ no lugar de $\varphi_g : X \rightarrow X$.

Observação 1.1.2 Analogamente, define-se **G-ação** (à direita). É importante notar que, a partir de uma G -ação (à esquerda) sobre X , podemos sempre definir uma ação (à direita) sobre X por considerar: $x * g := g^{-1} \cdot x$.

Observação 1.1.3 Se X tiver estrutura de grupo (aditivo) e quisermos preservar esta estrutura através da G -ação, exigiremos que a aplicação $g : X \rightarrow X$ seja um homomorfismo de grupos, isto é, que ϕ satisfaça a condição adicional:

$$(c) \quad g \cdot (x_1 + x_2) = g \cdot x_1 + g \cdot x_2, \quad \forall g \in G \text{ e } x_1, x_2 \in X.$$

Assim, uma ação de G em um grupo aditivo é um homomorfismo

$$\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(X)$$

onde $\text{Aut}(X)$ denota o grupo dos automorfismos de X .

Observação 1.1.4 Se X é um espaço topológico, exigiremos que a aplicação $g : X \rightarrow X$ seja contínua, para todo g em G , a fim de que a estrutura topológica de X seja preservada.

Desta forma, uma ação de um grupo G em um espaço topológico X é um homomorfismo

$$\varphi : G \rightarrow \text{Homeo}(X)$$

onde $\text{Homeo}(X)$ denota o grupo dos homeomorfismos de X .

Neste caso, se considerarmos em G a topologia discreta, a ação $\phi : G \times X \rightarrow X$ é uma aplicação contínua.

Definição 1.1.5 Se um grupo G atua em um conjunto X , este é chamado **G-conjunto**.

Definição 1.1.6 Dizemos que X é um **G-conjunto livre** se a ação de G em X é livre, isto é, $g \cdot x = x$ para algum x em X se, e somente se, $g = 1$.

Definição 1.1.7 Dizemos que X é um **G-conjunto trivial** se a ação de G em X é trivial, isto é, $g \cdot x = x$ para todo x em X e para todo g em G .

Proposição 1.1.1 Consideremos $R = \mathbb{Z}$, G um grupo (multiplicativo) e A um conjunto não vazio. Então, A é um $\mathbb{Z}G$ -módulo (à esquerda) se, e somente se, A é um $\mathbb{Z}$ -módulo munido com uma ação de G sobre A .



Demonstração: Seja A um ZG -módulo. Então, por [6] I.3, A consiste de um grupo abeliano munido com um homomorfismo

$$\begin{aligned}\rho : ZG &\rightarrow \text{End}(A) \\ \alpha &\mapsto \rho(\alpha) = \varphi_\alpha\end{aligned}$$

onde $\varphi_\alpha(a) = \alpha \cdot a, \forall a \in A$.

Tal homomorfismo ρ induz uma aplicação:

$$\begin{aligned}\phi : G \times A &\rightarrow A \\ (g, a) &\mapsto \phi(g, a) := \rho(g)(a)\end{aligned}$$

Além disso, podemos definir o homomorfismo

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} : Z &\rightarrow \text{End}(A) \\ z &\mapsto \tilde{\rho}(z) = \rho(z1)\end{aligned}$$

onde 1 denota o elemento neutro de G , que faz de A um Z -módulo.

Reciprocamente, dado um Z -módulo A munido de uma ação $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(A)$, temos induzido um homomorfismo

$$\begin{aligned}\rho : ZG &\rightarrow \text{End}(A) \\ \sum_{g \in G} z_g g &\mapsto \rho \left(\sum_{g \in G} z_g g \right) = \sum_{g \in G} z_g \varphi(g)\end{aligned}$$

que, junto com a estrutura de grupo abeliano do Z -módulo A , faz deste um ZG -módulo. ■

Definição 1.1.8 O homomorfismo $\varepsilon : RG \rightarrow R$ definido por $\varepsilon(g) = 1, \forall g \in G$, e estendido linearmente, é denominado **aplicação aumentação** (note que ε é sobrejetor).

Definição 1.1.9 Consideremos a aplicação aumentação definida acima. O Kernel de tal aplicação é chamado **ideal aumentação** de RG , o qual denota-se por I ou IG .

Observações 1.1.1 (a) Sejam $\varepsilon : RG \rightarrow R$, a aplicação aumentação definida anteriormente, e $\alpha = \sum_{g \in G} r_g g \in RG$. Assim,

$$\varepsilon(\alpha) = \varepsilon \left(\sum_{g \in G} r_g g \right) = \sum_{g \in G} r_g \varepsilon(g) = \sum_{g \in G} r_g.$$

Se A é um RG -módulo trivial, temos

$$\alpha m = \left(\sum_{g \in G} r_g g \right) m = \sum_{g \in G} r_g (g \cdot m) = \sum_{g \in G} r_g m = \varepsilon(\alpha) m.$$

(b) Todo R -módulo M admite uma estrutura de RG -módulo trivial. Basta considerar a G -ação trivial $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(M)$ tal que $\varphi(g) = \text{id}_M$, $\forall g \in G$, isto é, $g \cdot m = m$, $\forall m \in M, \forall g \in G$. Neste caso:

$$(r_1 g_1 + r_2 g_2 + \dots + r_k g_k) m = (r_1 + r_2 + \dots + r_k) m, \quad r_i \in R, g_i \in G; i = 1, \dots, k \text{ e } m \in M.$$

Em particular, o anel R admite tal estrutura (é o que consideraremos neste trabalho, a menos que se especifique o contrário).

Lema 1.1.5 Sejam $\varepsilon : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}$ e $I = \text{Ker } \varepsilon$, o ideal aumentação. Temos que

- (a) Os elementos $g - 1$ ($g \in G, g \neq 1$) formam uma base para I como um $\mathbb{Z}$ -módulo.
- (b) Se S é um conjunto de geradores para G , então os elementos $s - 1$ ($s \in S$) geram I como um $\mathbb{Z}G$ -módulo (à esquerda).

Demonstração:

(a) Seja $\varepsilon : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}$. Vamos mostrar que $I = \text{Ker } \varepsilon = \langle g - 1; g \in G \rangle = A$.

• $I \subset A$.

De fato: Seja $\alpha \in \mathbb{Z}G$, então $\alpha = \sum_{g \in G} n_g g$, $n_g \in \mathbb{Z}$ e $n_g = 0$ para quase todo g .

Deste modo,

$$\alpha \in I = \text{Ker } \varepsilon \Rightarrow \varepsilon(\alpha) = 0 \Rightarrow \sum_{g \in G} n_g \varepsilon(g) = 0 \Rightarrow \sum_{g \in G} n_g = 0.$$

Assim,

$$\alpha = \sum_{g \in G} n_g g - \sum_{g \in G} n_g 1 = \sum_{g \in G} n_g (g - 1).$$

Portanto, $\alpha \in A$, ou seja, $I \subset A$.

Claramente $A \subset I$.

Logo, $I = \text{Ker } \varepsilon = \langle g - 1; g \in G \rangle = A$.

(b) Consideremos $G = \langle S \rangle$. Vamos mostrar que $I = \langle s - 1; s \in S \rangle$.

Seja $g \in G$, então $g - 1 = (s_1 s_2 \dots s_k) - 1$, $s_i \in S$.

Temos que provar que:

$$g - 1 = \sum_{i=1}^k \alpha_i (s_i - 1), \quad s_i \in S, \alpha_i \in \mathbb{Z}G.$$

Provemos por indução.

- Para um único gerador, temos $G = \langle s \rangle$, $g = s^k$, $\forall g \in G$. Assim,

$$g - 1 = s^k - 1 = (s - 1)(1 + s + \dots + s^{k-1}).$$

- Suponhamos o resultado válido para S com k elementos (hipótese de indução).
- Mostremos que vale para S com $(k + 1)$ elementos. Seja $g \in G$, então

$$g = s_1^{r_1} s_2^{r_2} \dots s_k^{r_k} s_{k+1}^{r_{k+1}}, \quad \text{com } s_i \in S, i = 1, \dots, k + 1.$$

Consideremos $H = \langle s_2, \dots, s_{k+1} \rangle$. Se $h \in H$, temos $h = s_2^{r_2} \dots s_{k+1}^{r_{k+1}}$. Assim,

$$h - 1 \stackrel{\text{hip.ind.}}{=} \sum_{i=2}^{k+1} \alpha_i (s_i - 1).$$

Logo,

$$g = s_1^{r_1} h = s_1^{r_1} (h - 1 + 1) = s_1^{r_1} (h - 1) + s_1^{r_1}.$$

Então,

$$g - 1 = s_1^{r_1} (h - 1) + (s_1^{r_1} - 1) = \sum_{i=2}^{k+1} s_1^{r_1} \alpha_i (s_i - 1) + (1 + s_1 + \dots + s_1^{r_1-1})(s_1 - 1).$$

Se $\beta_i = s_1^{r_1} \alpha_i$, $i = 2, \dots, k + 1$ e $\beta_1 = (1 + \dots + s_1^{r_1-1})$, então

$$g - 1 = \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i (s_i - 1), \quad \text{com } \beta_i \in \mathbb{Z}G, i = 1, \dots, k + 1.$$

o que prova o lema. ■



Definição 1.1.10 *Sejam X um G -conjunto e x um elemento de X . Definimos a G -órbita de x como sendo o conjunto $G(x) := \{g \cdot x; g \in G\}$.*

Nota: Pode-se mostrar que o conjunto de todas as órbitas de X formam uma partição de X , isto é, $X = \bigcup_{x_\lambda \in E} G(x_\lambda)$, onde E é um conjunto de representantes para as G -órbitas de X .

Proposição 1.1.2 *Sejam X um G -conjunto livre e E um conjunto de representantes para as G -órbitas em X . Então, RX é um RG -módulo livre com base E .*

Demonstração: Seja $E = \{x_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ um conjunto de representantes para as G -órbitas em X . Deste modo,

$$RX = R \left(\bigcup_{x_\lambda \in E} G(x_\lambda) \right) = \bigoplus_{x_\lambda \in E} R(G(x_\lambda)).$$

Agora, como a G -ação é livre, para cada x_λ temos que a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda: G &\rightarrow G(x_\lambda) \\ g &\mapsto \varphi_\lambda(g) = g \cdot x_\lambda \end{aligned}$$

é uma bijeção, ou seja, $G \leftrightarrow G(x_\lambda)$.

Logo, $R(G(x_\lambda)) \simeq RG$, o que prova a proposição. ■

Corolário 1.1.1 *Se H é um subgrupo de G , então RG é um RH -módulo livre com base num conjunto E de representantes para as H -órbitas em G (que são as classes laterais à esquerda de H em G), isto é, $RG = \bigoplus_{g \in E} gRH$.*

Demonstração: Temos que G é um H -conjunto com a ação dada pela multiplicação dos elementos de H pelos elementos de G , e esta ação é livre, pois $h \cdot g = g \Leftrightarrow h = 1$. Portanto, o resultado segue da proposição anterior. ■

1.2 Resoluções Livres e Projetivas

Definição 1.2.1 *Sejam R um anel comutativo com unidade 1 e M um R -módulo. Uma **resolução** de M sobre R , ou uma **R -resolução** de M , é uma seqüência exata de R -módulos:*

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

onde $\varepsilon : F_0 \rightarrow M$ é chamada *aplicação aumentação*.

Se cada F_i é R -módulo livre (projetivo), dizemos que a resolução é **livre (projetiva)**.

Notação: $\varepsilon : F \rightarrow M$ denotará uma resolução de M sobre R .

Observações 1.2.1 (a) *Toda resolução livre é projetiva, já que todo módulo livre é projetivo.*

(b) *Se considerarmos o complexo de cadeia não negativo $F = (F_i, \partial_i)_{i \geq 0}$, podemos ver $\varepsilon : F \rightarrow M$ como uma aplicação de cadeias, onde M é identificado com o complexo de cadeia tal que $C_0 = M$ e $C_i = 0$, se $i > 0$.*

(c) *No caso em que existir um inteiro n tal que $F_i = 0$, para $i > n$, dizemos que a resolução tem comprimento no máximo n . Neste caso, escrevemos simplesmente*

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Lema 1.2.1 *Dado um R -módulo M , sempre podemos construir uma resolução livre (e portanto, projetiva) de M sobre R .*

Demonstração: Como todo R -módulo M é o quociente de um R -módulo livre ([14], I.4.6), temos $M \simeq F_0/A_0$, onde F_0 é R -livre.

Seja $\varepsilon : F_0 \rightarrow F_0/A_0$ a projeção canônica tal que $\varepsilon(x_0) = \bar{x}_0$.

Como $\text{Ker } \varepsilon$ é submódulo de F_0 , temos que $\text{Ker } \varepsilon$ também é R -módulo, assim, $\text{Ker } \varepsilon \simeq F_1/A_1$, onde F_1 é R -livre.

Consideremos, agora, $\partial_1 : F_1 \rightarrow F_1/A_1$ a projeção canônica tal que $\partial_1(x_0) = \bar{x}_1$.

Procedendo sucessivamente deste modo, teremos a seqüência

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

com $\text{Ker } \varepsilon = \text{Im } \partial_1$ e $\text{Ker } \partial_i = \text{Im } \partial_{i+1}$, para $i \geq 1$.

Logo, essa seqüência é exata e, portanto, uma R -resolução livre de M .

■

Exemplo 1.2.1 Se M é um R -módulo livre, então

$$0 \longrightarrow F_0 = M \xrightarrow{id} M \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de M sobre R de comprimento zero.

Exemplo 1.2.2 Se R é um domínio de ideais principais, então todo R -módulo M admite uma R -resolução livre de comprimento 1.

De fato: Temos que $M \simeq F_0/F_1$, onde F_0 é R -livre. Como R é domínio de ideais principais, temos que qualquer submódulo de um R -módulo livre é livre ([14], pag.31). Assim, F_1 é R -livre, pois é submódulo de F_0 .

Portanto,

$$0 \longrightarrow F_1 \xrightarrow{i} F_0 \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0,$$

onde $i : F_1 \rightarrow F_0$ é a inclusão e $p : F_0 \rightarrow M$ é a projeção, é uma R -resolução livre de M .

Lema 1.2.2 Se F é uma resolução projetiva de R sobre RG , e H é um subgrupo de G , então F também é uma resolução projetiva de R sobre RH .

Demonstração: Consideremos a seguinte resolução projetiva de R sobre RG :

$$\cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow R \longrightarrow 0.$$

Como cada F_n é um RG -módulo projetivo, pelo lema 1.1.1(i), temos que F_n é um somando direto de um RG -módulo livre. Deste modo,

$$F_n \oplus Q_n \simeq \bigoplus_{i \in I} (RG)_i.$$

Agora, pelo corolário 1.1.1, temos que RG é RH -módulo livre, assim,

$$RG \simeq \bigoplus_{j \in J} (RH)_j.$$

Portanto,

$$F_n \oplus Q_n \simeq \bigoplus_{i,j} (RH)_{i,j}$$

e, novamente pelo lema 1.1.1(iii), temos que F_n é um RH -módulo projetivo.

Logo, F é uma resolução projetiva de R sobre RH .

1.3 Resolução Padrão

A resolução padrão é bastante útil no estudo da homologia e cohomologia de um grupo G .

Dado um grupo G , seja X_n o conjunto constituído das $(n+1)$ -uplas $(g_0, \dots, g_n)$ de elementos do grupo G .

Temos que X_n é um G -conjunto livre, com a ação de G dada por $g \cdot (g_0, \dots, g_n) = (g \cdot g_0, \dots, g \cdot g_n)$

Consideremos o complexo

$$\dots \longrightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0 \quad (1.1)$$

onde cada F_n é o R -módulo livre gerado pelo conjunto X_n .

As aplicações ∂_n e ε são definidas nos geradores (e estendidas por linearidade) por:

$$\begin{aligned} \partial_n : F_n &\longrightarrow F_{n-1} \\ (g_0, \dots, g_n) &\mapsto \partial_n(g_0, \dots, g_n) := \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i(g_0, \dots, g_n) \end{aligned}$$

com $d_i(g_0, \dots, g_n) := (g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_n)$



e

$$\varepsilon : F_0 \rightarrow R \quad (\text{aplicação aumentação})$$

$$(g_0) \mapsto 1$$

Em F_n , considere a G -ação, obtida da G -ação livre sobre X_n . Pela proposição 1.1.2, $F_n = RX_n$ é um RG -módulo livre com base E , onde E é um conjunto de representantes para as G -órbitas em X_n .

Mostremos que o complexo (1.1) é exato.

De fato: Vamos, primeiramente, mostrar que F é contrátil, construindo uma homotopia entre id_F e 0 ([6], I.0).

Consideremos $F = (F_i)$, onde $F_{-1} = R$ e $h_n : F_n \rightarrow F_{n+1}$ tal que

$$\begin{cases} h_n(g_0, \dots, g_n) = (1, g_0, \dots, g_n) & \text{se } n \geq 0 \\ h_n(1) = (1) & \text{se } n = -1. \end{cases}$$

(Lembrando que o elemento 1 representa tanto o elemento $1 \in R$, como o elemento neutro de G).

Efetuada os cálculos, temos

$$\varepsilon \circ h_{-1} = id_R$$

$$h_{-1} \circ \varepsilon + \partial_1 \circ h_0 = id_{F_0}$$

$$h_{n-1} \circ \partial_n + \partial_{n+1} \circ h_n = id_{F_n}$$

Deste modo, h é uma homotopia de cadeia entre id_F e 0, isto é, $id_F \simeq 0$. Logo, F é contrátil e, portanto, acíclico, ou seja $H_q(F) = 0$, para todo q ([6], I.0).

Assim, o complexo (1.1) é exato e, portanto

$$\cdots \rightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$$

é uma resolução livre de R sobre RG , chamada **Resolução Padrão**.

Resolução Bar: Podemos considerar, na resolução padrão, um conjunto E de representantes especiais. Tomemos como representante da G -órbita de $(g_0, \dots, g_n)$ o elemento



$(1, h_1, \dots, h_n)$, onde $h_i = g_0^{-1} g_i$. Tal elemento pode ser escrito da forma $(1, t_1, t_1 t_2, \dots, t_1 t_2 \dots t_n)$ onde $t_n = h_{n-1}^{-1} h_n$, com $h_0 = 1$.

Notação Bar: Vamos denotar o elemento $(1, g_1, g_1 g_2, \dots, g_1 g_2 \dots g_n)$ de F_n por $[g_1 | g_2 | \dots | g_n]$.

Assim, F_n é o RG -módulo livre gerado pelos símbolos $[g_1 | g_2 | \dots | g_n]$ e

$$\partial_n [g_1 | g_2 | \dots | g_n] = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i [g_1 | g_2 | \dots | g_n],$$

onde

$$d_i [g_1 | g_2 | \dots | g_n] = \begin{cases} g_1 [g_2 | \dots | g_n] & \text{se } i = 0 \\ [g_1 | \dots | g_{i-1} | g_i g_{i+1} | g_{i+2} | \dots | g_n] & \text{se } 0 < i < n \\ [g_1 | \dots | g_{n-1}] & \text{se } i = n. \end{cases}$$

Vejamos, por exemplo, o que ocorre com d_1 :

$$\begin{aligned} d_1 [g_1 | g_2 | \dots | g_n] &= d_1 (1, g_1, g_1 g_2, \dots, g_1 g_2 \dots g_n) \\ &= (1, (g_1 g_2), (g_1 g_2) g_3, \dots, (g_1 g_2) g_3 \dots g_n) \\ &= [g_1 g_2 | g_3 | \dots | g_n]. \end{aligned}$$

Observações 1.3.1 (a) Como F_0 é gerado pela 1-upla (1) temos, na notação bar, $F_0 = \langle [] \rangle$, onde $[] = 1$, com 1 denotando o elemento neutro de G .

(b) $F_0 \simeq RG$, via isomorfismo $\phi : F_0 \rightarrow RG$ tal que $\phi(\alpha []) = \alpha$, $\forall \alpha \in RG$.

(c) Em dimensões baixas, a resolução tem a forma:

$$F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0,$$

onde

$$\partial_2 [g | h] = g[h] - [gh] + [g]$$

$$\partial_1 [g] = g[] - [] = g - 1$$

$$\varepsilon(g) = 1.$$

Nota: Quando usamos a notação bar, a Resolução Padrão é muitas vezes denominada **Resolução Bar**.



1.4 CW-Complexos e Resoluções de R sobre RG via Topologia

Recordaremos, agora, a definição do espaço topológico denominado CW -complexo e alguns exemplos deste espaço. Além disso, vamos ver como obter resoluções livres de R sobre RG através do mesmo.

Definição 1.4.1 Dado um espaço X de Hausdorff, dizemos que X admite uma estrutura de **CW-complexo** se possui uma coleção de subconjuntos fechados σ_j^q (onde q representa dimensão ($q = 0, 1, 2, \dots$) e j varia sobre um conjunto de índices J_q), e uma família de subespaços fechados $X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^q \subset \dots$ com $X^q = \bigcup_{j \in J_q} \sigma_j^q$ (por definição

$X^{-1} = \emptyset$), e fronteira dada por $f_j^q = \sigma_j^q \cap X^{q-1}$, satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) $\sigma_i^p - f_i^p$ intercepta $\sigma_j^q - f_j^q$ somente quando $p = q$ e $i = j$.

(ii) $X = \bigcup_q X^q$.

(iii) Para cada σ_j^q , existe uma aplicação característica $\phi_j^q : D^q \rightarrow \sigma_j^q$ (onde D^q é o disco de dimensão q) que leva S^{q-1} (esfera de dimensão $q-1$) sobre f_j^q , e aplica $D^q - S^{q-1}$ homeomorficamente sobre $\sigma_j^q - f_j^q$ (S^{-1} é o conjunto vazio).

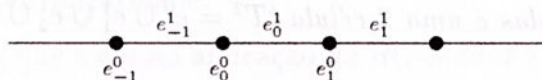
(iv) f_j^q intercepta um número finito de conjuntos $(\sigma_i^q - f_i^q)$, $i \in J_q$.

(v) Um subconjunto Y de X é fechado se $Y \cap \sigma_j^q$ é fechado em σ_j^q , $\forall q$ e $\forall j \in J_q$, onde σ_j^q possui a topologia quociente de D^q (via ϕ_j^q).

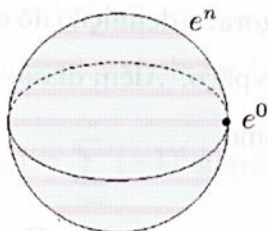
Notação: Em um CW -complexo X , e^q denotará a célula aberta de dimensão q :

$$e^q = \sigma^q - f^q.$$

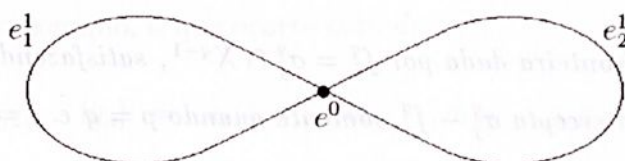
Exemplo 1.4.1 Seja $X = \mathbb{R}$. Podemos dar a $\mathbb{R}$ uma estrutura natural de CW -complexo, onde as 0-células e 1-células são dadas, respectivamente, por $e_n^0 = \{n\}$ e $e_n^1 = (n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.



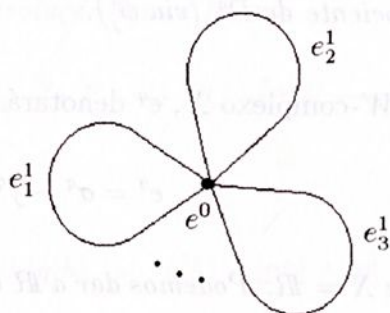
Exemplo 1.4.2 Seja $X = S^n$ (n -esfera). Uma estrutura de CW-complexo sobre S^n pode ser dada por uma 0-célula e uma n -célula ($S^n = e^0 \cup e^n$).



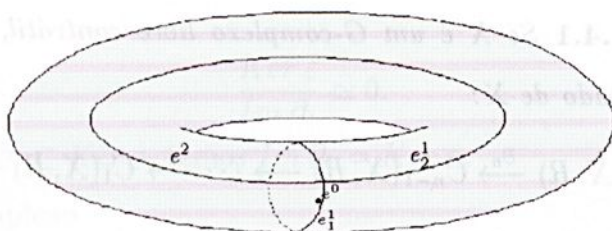
Exemplo 1.4.3 Consideremos X a figura oito. É possível dar a X uma estrutura de CW-complexo 1-dimensional, com uma única 0-célula e duas 1-células ($X = e^0 \cup e_1^1 \cup e_2^1$).



Exemplo 1.4.4 Como um caso mais geral, consideremos $X = \bigvee_{s \in S} S_s^1$, o bouquet de círculos indexado por um conjunto S . Podemos dar a X uma estrutura de CW-complexo 1-dimensional, com uma única 0-célula e uma 1-célula para cada elemento de S ($X = e^0 \cup \left(\bigcup_{s \in S} e_s^1 \right)$).



Exemplo 1.4.5 O toro (T^2) admite uma estrutura de CW-complexo 2-dimensional, com uma 0-célula, duas 1-células e uma 2-célula ($T^2 = e^0 \cup e_1^1 \cup e_2^1 \cup e^2$).



Observação 1.4.1 É também usual denotar uma n -célula por σ^n ou, simplesmente por σ , caso a dimensão esteja clara no contexto.

Definição 1.4.2 Um **G-complexo** é um CW-complexo X munido de uma ação de G em X que permuta as células, isto é, se S representa o conjunto das células de X , então $gS = S$, para todo g em G . Se a ação de G em X permuta livremente as células, dizemos que X é um **G-complexo livre**.

Nota: É importante notar que, pelo fato da ação de G em X induzir um homomorfismo dado por

$$\varphi : G \rightarrow \text{Homeo}(X)$$

$$g \mapsto \varphi_g : X \rightarrow X$$

tal que $\varphi_g(x) = g \cdot x$, temos que, se σ é uma célula de X , então $g \cdot \sigma$ também é uma célula de X cuja dimensão é a mesma de σ (ou seja, φ_g preserva dimensão).

Complexos de Cadeia de RG -Módulos

Seja X um G -complexo. Podemos formar o complexo de cadeias $C_*(X, R)$, onde $C_n(X, R)$ é o R -módulo livre gerado pelas n -células de X .

A ação de G em X induz uma ação em $C_*(X, R)$ da seguinte forma:

$$g \cdot (a_1\sigma_1 + \dots + a_n\sigma_n) := a_1g \cdot \sigma_1 + \dots + a_ng \cdot \sigma_n.$$

Assim, $C_*(X, R)$ torna-se um complexo de cadeias de RG -módulos.

Definimos a aplicação $\varepsilon : C_0(X, R) \rightarrow R$ por $\varepsilon(\sigma^0) = 1$, nas 0-células σ^0 de X , e a estendemos por linearidade.

Temos que ε é uma aplicação de RG -módulos, pois, $g \cdot \sigma^0$ também é 0-célula e, a ação de G em R é trivial.

Proposição 1.4.1 Se X é um G -complexo livre contrátil, então o complexo de cadeia celular aumentado de X :

$$\cdots \longrightarrow C_n(X, R) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, R) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(X, R) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X, R) \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de R sobre RG .

Demonstração: Seja $X_n = \{\sigma \in X; \sigma \text{ é uma } n\text{-célula}\}$.

Temos que $C_n(X, R) = RX_n$ (R -módulo livre gerado pelas n -células).

Agora, como $X_n \subset X$ e X é um G -complexo livre, temos que X_n é um G -conjunto livre, logo, pela proposição 1.1.2, $C_n(X, R)$ é um RG -módulo livre com base E , onde E é um conjunto de representantes para as G -órbitas em X_n .

Sabemos que, se X é contrátil, então tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto e, deste modo

$$H_n(X, R) \simeq H_n(\{x_0\}, R) = \begin{cases} R & \text{se } n = 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mas,

$$0 = H_n(X, R) = \frac{\text{Ker } \partial_n}{\text{Im } \partial_{n+1}} \Rightarrow \text{Ker } \partial_n = \text{Im } \partial_{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Resta mostrar que $\text{Im } \partial_1 = \text{Ker } \varepsilon$.

Consideremos

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_1(X, R) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(X, R) & \xrightarrow{\varepsilon} & R \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \partial_0 & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

Então,

$$R = H_0(X, R) = \frac{\text{Ker } \partial_0}{\text{Im } \partial_1} = \frac{C_0(X, R)}{\text{Im } \partial_1}$$

Como ε é sobrejetora, pelo teorema do homomorfismo, temos

$$\frac{C_0(X, R)}{\text{Ker } \varepsilon} \simeq \text{Im } \varepsilon = R.$$

Portanto,

$$R \simeq \frac{C_0(X, R)}{\text{Ker } \varepsilon} = \frac{\frac{C_0(X, R)}{\text{Im } \partial_1}}{\frac{\text{Ker } \varepsilon}{\text{Im } \partial_1}} \simeq \frac{R}{\frac{\text{Ker } \varepsilon}{\text{Im } \partial_1}}$$



Logo,

$$\frac{Ker \varepsilon}{Im \partial_1} \simeq 0.$$

E, como $Im \partial_1 \subset Ker \varepsilon$, temos $Im \partial_1 = Ker \varepsilon$.

Assim, o complexo

$$\cdots \longrightarrow C_n(X, R) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, R) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(X, R) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X, R) \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

é exato e, então, temos uma resolução livre de R sobre RG .

Vejamos uma aplicação deste fato no exemplo a seguir.

Exemplo 1.4.6 *Sejam $R = \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{R}^2$ e $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.*

Temos que X é contrátil e é um G -complexo livre, pois

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((n_1, n_2), (x, y)) &\mapsto (n_1 + x, n_2 + y) \end{aligned}$$

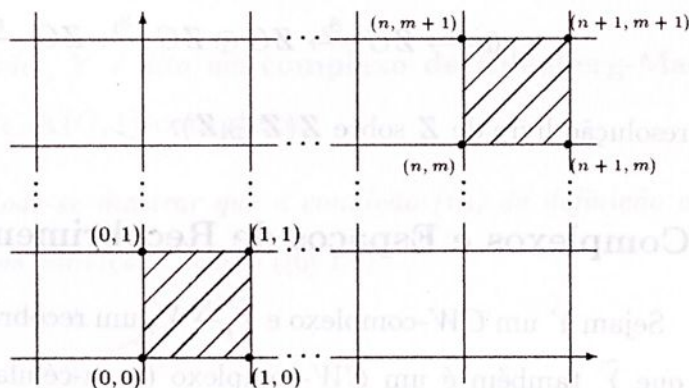
é uma ação de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}^2$, que leva célula em célula livremente. Assim, pela proposição anterior, temos que o complexo:

$$\cdots \longrightarrow C_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_2(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}) \longrightarrow C_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

Como $\mathbb{R}^2$ não tem células de dimensão maior que 2, temos que $C_n(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}) = 0$, para $n > 2$.

Vamos calcular as órbitas das células, a fim de determinarmos $C_i(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z})$, para $i = 0, 1, 2$.



$$\begin{aligned}
\bullet G(0,0) &:= \{(n_1, n_2) \cdot (0,0); (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\} \\
&= \{(n_1, n_2); (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

Logo, temos uma única G -órbita de 0-células. Deste modo, $C_0(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}G$.

$$\begin{aligned}
\bullet G([(0,0), (1,0)]) &:= \{(n_1, n_2) \cdot [(0,0), (1,0)]; (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\} \\
&= \{[(n_1, n_2), (n_1 + 1, n_2)]; (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet G([(0,0), (0,1)]) &:= \{(n_1, n_2) \cdot [(0,0), (0,1)]; (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\} \\
&= \{[(n_1, n_2), (n_1, n_2 + 1)]; (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

Assim, temos duas órbitas de 1-células: $G([(0,0), (1,0)])$ e $G([(0,0), (0,1)])$.

Portanto, $C_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}G \oplus \mathbb{Z}G$.

E, finalmente,

$$\begin{aligned}
\bullet G([(0,0), (1,0)] \times [(0,0), (0,1)]) &:= \{(n_1, n_2) \cdot ([[(0,0), (1,0)] \times [(0,0), (0,1)])]; \\
&\quad (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\} \\
&= \{[(n_1, n_2), (n_1 + 1, n_2)] \times [(n_1, n_2), (n_1, n_2 + 1)]; \\
&\quad (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\}.
\end{aligned}$$

Então, temos uma única órbita de 2-células. Daí, $C_2(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}G$.

Deste modo,

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}G \oplus \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$.

CW-Complexos e Espaços de Recobrimento

Sejam Y um CW -complexo e $\tilde{Y} \xrightarrow{p} Y$, um recobrimento de Y . Por [22], III.6.9.2, temos que $\tilde{Y}$ também é um CW -complexo (as n -células $\tilde{\sigma}$ de $\tilde{Y}$ são as componentes



conexas de $p^{-1}(\sigma)$, onde σ é uma n -célula de Y , e $p|_{\tilde{\sigma}} : \tilde{\sigma} \rightarrow \sigma$ é um homeomorfismo). Além disso, G permuta as células de $\tilde{Y}$.

Agora, G atua livremente em $\tilde{Y}$, pois $g \cdot \tilde{y} = \tilde{y}$ se, e somente se, $g = 1$ ([18], 5.3.2). Conseqüentemente, G atua livremente nas células de $\tilde{Y}$.

Deste modo, $\tilde{Y}$ é um G -complexo livre.

Observação 1.4.2 Podemos concluir, pela proposição 1.4.1 que, se $\tilde{Y}$ for contrátil, o complexo celular aumentado de $\tilde{Y}$ é uma resolução livre de R sobre RG , onde $C_n(\tilde{Y}, R)$ é um RG -módulo livre com um elemento básico para cada órbita de n -célula em $\tilde{Y}$.

Observação 1.4.3 Considerando o caso em que $\tilde{Y} \xrightarrow{p} Y$ é um recobrimento regular, temos, por definição, que G opera transitivamente em $p^{-1}(y)$, isto é, $G(\tilde{y}) = p^{-1}(y)$ para todo $\tilde{y}$ em $p^{-1}(y)$ ([6], pag.31). Daí, concluímos que cada n -célula de Y nos fornece uma órbita de n -células em $\tilde{Y}$. Desta forma, se $\tilde{Y} \xrightarrow{p} Y$ é um recobrimento regular contrátil, então $C_n(\tilde{Y}, R)$ é um RG -módulo livre com um elemento básico para cada n -célula de Y .

Será definido a seguir um CW -complexo particular que satisfaz todas as condições citadas anteriormente.

Definição 1.4.3 Seja Y um CW -complexo tal que:

- (i) Y é conexo.
- (ii) $\pi_1(Y) = G$.
- (iii) O recobrimento universal $\tilde{Y}$ de Y é contrátil (é fato conhecido que, para CW -complexos conexos, sempre existe tal recobrimento universal e este é regular) ([22], III.6.9.1 e [13], I.6.7).

Nestas condições, Y é dito um **complexo de Eilenberg-MacLane do tipo $(G, 1)$** ou simplesmente, **$K(G, 1)$ -complexo**.

Observação 1.4.4 Pode-se mostrar que a condição (iii) da definição anterior pode ser substituída por uma das condições abaixo ([6] 1.4):

- (iii)' $H_i(\tilde{Y}) = 0$ para $i \geq 2$.
- (iii)" $\pi_i(Y) = 0$ para $i \geq 2$.



Observação 1.4.5 Se $\tilde{Y}$ é recobrimento universal de um CW-complexo Y , temos que $\tilde{Y}$ é um G -complexo, onde $G = \pi_1(Y)$.

Nota: Neste trabalho, vamos admitir que, dado um grupo G , sempre existe um $K(G, 1)$ -complexo ([6], VIII.7.1).

Exemplo 1.4.7 Sejam $G = \langle \alpha \rangle \simeq \mathbb{Z}$ e $Y = S^1$.

Temos que Y é um $K(G, 1)$ -complexo, pois é um CW-complexo conexo, com $\pi_1(Y) = G$ e o recobrimento universal de Y é $\tilde{Y} = \mathbb{R}$, que é contrátil.

Exemplo 1.4.8 Sejam $G = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ (grupo abeliano livre de posto n) e $Y = T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ (toro n -dimensional).

Temos que Y é um CW-complexo conexo, $\pi_1(Y) = G$ e o recobrimento universal de Y é $\tilde{Y} = \mathbb{R}^n$, que é contrátil. Logo, Y é um $K(G, 1)$ -complexo.

Exemplo 1.4.9 Sejam $G = F(S)$ (grupo livre gerado por um conjunto S) e $Y = \bigvee_{s \in S} S^1_s$ (bouquet de círculos indexados por um conjunto S).

Temos que Y é um CW-complexo conexo de dimensão 1 (pelo exemplo 1.4.4), com exatamente um vértice e uma 1-célula para cada elemento de S e, $\pi_1(Y) = G$ ([18], IV.3.4).

Além disso, Y é conexo e, se $\tilde{Y}$ é recobrimento universal de Y , temos que $\tilde{Y}$ tem dimensão 1 (pois $\tilde{Y} \xrightarrow{p} Y$ é homeomorfismo local). Assim, $H_i(\tilde{Y}) = 0$ para $i \geq 2$.

Portanto, Y é um $K(G, 1)$ -complexo.

Lema 1.4.1 Se X é um G -complexo livre compacto, então G é finito.

Demonstração: Seja X/G o espaço das órbitas de X .

Temos que

$$\begin{aligned} p: X &\rightarrow X/G \\ x &\mapsto \bar{x} \end{aligned}$$

é recobrimento regular, e G atua livremente em X como o grupo das transformações de recobrimento ([13], pag.21 e [6], pag.17).

Agora, dado $\bar{x}_0 \in X/G$, temos

$$\begin{aligned} p^{-1}(\bar{x}_0) &= \{x \in X; p(x) = \bar{x}_0\} \\ &= \{x \in X; \bar{x} = \bar{x}_0\} \\ &= \{x \in X; x \in G(x_0)\}. \end{aligned}$$

Como a ação de G em X é livre, $p^{-1}(\bar{x}_0)$ está em correspondência 1-1 com G . Além disso, a fibra $p^{-1}(\bar{x}_0)$ é discreta e fechada ([18], pag.165).

Suponhamos que $p^{-1}(\bar{x}_0)$ seja infinita. Como esta é compacta, pela propriedade de Bolzano-Weierstrass, tal fibra possui um ponto de acumulação que está em $p^{-1}(\bar{x}_0)$, o que é um absurdo, pois $p^{-1}(\bar{x}_0)$ é discreta.

Deste modo, $p^{-1}(\bar{x}_0)$ é finita e, portanto, G é finito. ■

Exemplo 1.4.10 Sejam $G = \left\langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \right\rangle$ e g , um inteiro maior ou igual a 1.

Temos que G é o grupo com geradores $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$, e $\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1$ é a única relação, onde $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$. Além disso, G é infinito ([20], 6.4.3).

Temos ainda que G é o grupo fundamental da superfície orientada Y de genus g (soma conexa de g toros) ([18], IV.5. exemplo 5.3).

Agora, vamos mostrar que Y é um $K(G, 1)$ -complexo.

Seja $\tilde{Y} \xrightarrow{p} Y$ o recobrimento universal de Y . Como G é infinito, temos, pelo lema 1.4.1, que $\tilde{Y}$ não é compacto, assim, $\tilde{Y}$ é uma superfície não compacta e conexa. Daí, por [13], III.22.25, temos que $H_2(\tilde{Y}) = 0$. Como $H_k(\tilde{Y}) = 0$ para $k > 2$, pois $\tilde{Y}$ tem dimensão 2, temos que $H_k(\tilde{Y}) = 0$ para $k \geq 2$.

Portanto, Y é um $K(G, 1)$ -complexo.



Exemplo 1.4.11 Seja $G = \langle c_1, \dots, c_k; \prod_{i=1}^k c_i^2 \rangle$.

Temos que G é o grupo fundamental de uma superfície Y fechada não orientável de genus k , $k \geq 2$ (soma conexa de k planos projetivos).

Analogamente ao exemplo anterior, temos que Y é um $K(G, 1)$ -complexo.

Como consequência imediata desses resultados, temos a proposição a seguir.

Proposição 1.4.2 Se Y é um $K(G, 1)$ -complexo, então o complexo de cadeia celular aumentado do recobrimento universal $\tilde{Y}$ de Y :

$$\cdots \longrightarrow C_2(\tilde{Y}, R) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\tilde{Y}, R) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\tilde{Y}, R) \xrightarrow{\epsilon} R \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de R sobre RG .

Demonstração: Como Y é um $K(G, 1)$, então $\tilde{Y}$ é um G -complexo livre contrátil. Logo, pela proposição 1.4.1, temos que o complexo acima é uma resolução livre de R sobre RG . ■

Exemplo 1.4.12 Já vimos no exemplo 1.4.9 que $Y = \bigvee_{s \in S} S_s^1$ é um $K(F(S), 1)$ -complexo, onde $F(S)$ é o grupo livre gerado por S .

Sabemos que $C_n(\tilde{Y}, R)$ tem um elemento básico para cada n -célula de Y (pois, $\tilde{Y}$ é recobrimento universal de Y , logo, regular).

Tomemos um ponto base $\tilde{y}_0$ em $\tilde{Y}$ ($\tilde{y}_0$: vértice em $\tilde{Y}$). Temos que $\tilde{y}_0$ representa a única G -órbita de vértices de $\tilde{Y}$ (existe uma 0-órbita de vértices em $\tilde{Y}$ para cada vértice em Y). Daí, $\tilde{y}_0$ gera o RG -módulo livre $C_0(\tilde{Y}, R)$, e assim, $C_0(\tilde{Y}, R) \simeq RG$.

Como base para $C_1(\tilde{Y}, R)$, tomamos para cada $s \in S$ uma 1-célula orientada e_s de $\tilde{Y}$, que é projetada sobre S_s^1 (orientada no sentido positivo). Temos uma 1-órbita em $\tilde{Y}$ para cada 1-célula em Y .

Podemos supor que e_s tem $\tilde{y}_0$ como ponto inicial e, caso isto não ocorra, tomamos outro representante e_r com ponto inicial $\tilde{y}_0$ (isto é, se e_r tem um ponto inicial $\tilde{y}_0$, então,

existe g em G tal que $g \cdot e_s = e_r$, pois G atua livremente e transitivamente, permutando as células de $\tilde{Y}$), onde o ponto final de e_s será $s \cdot \tilde{y}_0$.

De fato: Note que podemos identificar o grupo das transformações de recobrimento $G(\tilde{Y})$ com $\pi_1(Y, y_0)$ da seguinte maneira: seja $\omega : I \rightarrow Y$ um laço em Y ($[\omega] \in \pi_1(Y, y_0)$). Temos que existe um único levantamento $\tilde{\omega}$ de ω , começando em $\tilde{y}_0$. Mais ainda, seja

$$\begin{aligned} \varphi : \pi_1(Y, y_0) &\rightarrow G(\tilde{Y}) \\ [\omega] &\mapsto f_\omega \end{aligned}$$

onde f_ω é a única transformação de recobrimento tal que $f_\omega(\tilde{y}_0) = \tilde{\omega}(1)$.

Temos que φ é isomorfismo e, daí, $G(\tilde{Y}) \simeq \pi_1(Y, y_0)$. Além disso, $G(\tilde{Y})$ atua livremente em $\tilde{Y}$, com ação:

$$\begin{aligned} G(\tilde{Y}) \times \tilde{Y} &\rightarrow \tilde{Y} \\ (f_\omega, \tilde{y}) &\mapsto f_\omega(\tilde{y}). \end{aligned}$$

Olhando esta ação como uma ação de $\pi_1(Y)$ em $\tilde{Y}$, temos $[\omega]\tilde{y} = f_\omega(\tilde{y}) = \tilde{\omega}(1)$.

Como cada S_s^1 representa um gerador em $\pi_1(Y, y_0) \simeq F(S)$, identificamos S_s^1 com s através deste isomorfismo. Assim, temos que existe um único levantamento $\tilde{s}$ de s , começando em $\tilde{y}_0$ e o ponto final deste levantamento é $\tilde{s}(1) = f_s(\tilde{y}_0) = s \cdot \tilde{y}_0$.

Tal levantamento é a 1-célula e_s , onde $p(e_s) = S_s^1 \equiv s$ (a célula e_s é aplicada homeomorficamente em S_s^1).

Note que $G = F(S) \simeq G(\tilde{Y})$, com $s \simeq f_s$.

Agora, voltando ao exemplo, temos $\partial(e_s) = s \cdot \tilde{y}_0 - \tilde{y}_0 = (s - 1) \cdot \tilde{y}_0$. Daí,

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{s \in S} (RG)_s \xrightarrow{\partial} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de R sobre RG , onde $\bigoplus_{s \in S} (RG)_s$ é um RG -módulo livre com base $(e_s)_{s \in S}$, $\partial(e_s) = s - 1$ e $\varepsilon(g) = 1$, para $g \in G$.

Exemplo 1.4.13 Se $S = \{t\}$, então, $G = F(S)$ é cíclico infinito. Nesse caso, a resolução do exemplo anterior se reduz à

$$0 \longrightarrow RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0.$$



Resoluções Periódicas via Ações Livres em Esferas

Nosso objetivo agora, é estudar como é possível obter uma resolução livre de R sobre RG , através de um G -complexo livre X homeomorfo à esfera de dimensão ímpar S^{2k-1} .

Primeiramente, vamos considerar, para $X \simeq S^{2k-1}$, dois lemas importantes.

Lema 1.4.2 *A ação de G sobre $H_{2k-1}(X, R) \simeq R$ é trivial.*

Demonstração: Consideremos, primeiramente, $R = \mathbb{Z}$.

A aplicação $\varphi_g : X \rightarrow X$, dada por $\varphi_g(x) = g \cdot x$, é um homeomorfismo sem pontos fixos se $g \neq 1$ (pois a G -ação sobre X é livre).

Seja $\Lambda_{\varphi_g} = \sum_{i=0}^{2k-1} (-1)^i \text{tr}(\varphi_g)_{*,i}$ o número de Lefschetz de φ_g , onde a aplicação

$$(\varphi_g)_{*,i} : H_i(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_i(X, \mathbb{Z})$$

é induzida de φ_g no nível i de homologia.

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz ([28], pag.174 ou [6], pag.21), temos que $\Lambda_{\varphi_g} = 0$, já que φ_g não tem pontos fixos se $g \neq 1$.

Por outro lado, como S^{2k-1} é composta por uma 0-célula e uma $(2k-1)$ -célula ($S^{2k-1} = e^0 \cup e^{2k-1}$), temos

$$\Lambda_{\varphi_g} = \sum_{i=0}^{2k-1} (-1)^i \text{tr}(\varphi_g)_{*,i} = \text{tr}(\varphi_g)_{*,0} - \text{tr}(\varphi_g)_{*,2k-1}$$

ou seja, $\text{tr}(\varphi_g)_{*,0} - \text{tr}(\varphi_g)_{*,2k-1} = 0$.

Além disso, X é conexo por caminhos, assim, $f_{*,0} \equiv id, \forall f : X \rightarrow X$. Daí, $\text{tr}(\varphi_g)_{*,0} = 1$, pois $H_0(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

Deste modo, $\text{tr}(\varphi_g)_{*,1} = 1$ e, então, $(\varphi_g)_{*,2k-1} = id$, já que $H_{2k-1}(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

Portanto, G atua trivialmente em $H_{2k-1}(X, \mathbb{Z})$.

Pelo teorema dos coeficientes universais ([13], IV.29.12), temos

$$H_{2k-1}(X, R) = H_{2k-1}(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R \simeq R.$$



Como R é um RG -módulo trivial,

$$g \cdot (\alpha \otimes r) = g \cdot \alpha \otimes g \cdot r = \alpha \otimes r, \quad \forall \alpha \otimes r \in H_{2k-1}(X, R).$$

Logo, $H_{2k-1}(X, R) \simeq R$ é um RG -módulo trivial. ■

Lema 1.4.3 *A seqüência*

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{n} C_{2k-1}(X, R) \xrightarrow{\partial_{2k-1}} \cdots \longrightarrow C_1(X, R) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X, R) \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

onde $n : R \rightarrow C_{2k-1}(X, R)$ é a inclusão, e $C_i(X, R)$ é o RG -módulo livre gerado pelas células de dimensão i (uma em cada órbita de células), é exata.

Demonstração: Consideremos a seqüência abaixo

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \partial_{2k-1} \xrightarrow{n} C_{2k-1}(X, R) \xrightarrow{\partial_{2k-1}} \cdots \longrightarrow C_1(X, R) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X, R) \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

Temos que $\partial_{2k} : C_{2k}(X, R) = \{0\} \rightarrow C_{2k-1}(X, R)$ é aplicação nula (pois a dimensão é $2k - 1$), e $H_{2k-1}(X, R) \simeq R$.

Agora,

$$H_{2k-1}(X, R) = \frac{\text{Ker } \partial_{2k-1}}{\text{Im } \partial_{2k}}$$

Assim, $\text{Ker } \partial_{2k-1} \simeq R$.

Como $H_i(X, R) = 0$, para $0 < i < 2k - 1$, temos $\text{Ker } \partial_i = \text{Im } \partial_{i+1}$, para $0 < i < 2k - 1$.

Mais ainda, $\frac{C_0(X, R)}{\text{Ker } \varepsilon} \simeq \text{Im } \varepsilon = R$ (ε : sobrejetora).

Consideremos, agora

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_1(X, R) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(X, R) & \xrightarrow{\varepsilon} & R \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \partial_0 & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

Temos

$$R \simeq H_0(X, R) = \frac{\text{Ker } \partial_0}{\text{Im } \partial_1} = \frac{C_0(X, R)}{\text{Im } \partial_1}.$$



Logo,

$$R \simeq \frac{C_0(X, R)}{\text{Ker } \varepsilon} \simeq \frac{C_0(X, R)}{\text{Im } \partial_1}.$$

Como $\text{Im } \partial_1 \subset \text{Ker } \varepsilon$, temos $\text{Im } \partial_1 = \text{Ker } \varepsilon$.

A partir da seqüência dada pelo lema anterior, obtemos uma resolução livre de R sobre RG , de período $2k$, do modo a seguir.

Vamos denotar $C_*(X, R)$ por C_* e considerar o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} & & R & & & & \\ & \nearrow \varepsilon & & \nwarrow n & & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_0 & \xrightarrow{n \circ \varepsilon} & C_{2k-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

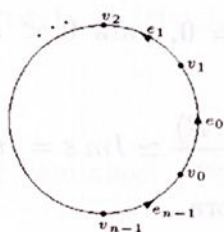
Assim, construímos a seguinte seqüência:

$$\cdots \longrightarrow C_{2k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{n \circ \varepsilon} C_{2k-1} \xrightarrow{\partial_{2k-1}} \cdots \longrightarrow C_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0 \quad (*)$$

Já vimos que $\text{Im } \partial_1 = \text{Ker } \varepsilon$, além disso, $\text{Ker } \varepsilon = \text{Ker } (n \circ \varepsilon)$ (n : injetora) e $\text{Im } (n \circ \varepsilon) = \text{Im } n = \text{Ker } \partial_{2k-1}$ (ε : sobrejetora).

Deste modo, $(*)$ é uma resolução livre de R sobre RG .

Exemplo 1.4.14 Seja G um grupo cíclico finito de ordem n com gerador t .



Consideremos S^1 vista como um CW -complexo com n vértices (que podem ser identificados com as raízes n -ésimas da unidade) e n 1-células. Vamos denotar por $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ os vértices e por $e_i = (v_i, v_{i+1})$ as 1-células de S^1 , e definir a ação de G em S^1 por $t^k \cdot v_i = v_{k+i}$ e $t^k \cdot e_i = e_{k+i}$, $k, i = 0, \dots, n-1$.

Temos que G atua em S^1 como o grupo de rotações e, tal ação permuta livremente as células. Além disso, $v_i = t^i \cdot v_0$ e $e_i = t^i \cdot e_0$, $i = 0, \dots, n$, assim, existe uma única órbita de 0-células e uma única órbita de 1-células. Portanto, $C_0(S^1, R) \simeq RG \simeq C_1(S^1, R)$.

Deste modo, temos a seqüência exata

$$0 \longrightarrow RG \xrightarrow{\partial_1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

Mas

$$R \simeq H_1(S^1, R) = \frac{\text{Ker } \partial_1}{\text{Im } \partial_2} = \text{Ker } \partial_1.$$

Então, obtemos a seqüência exata

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{n} RG \xrightarrow{\partial_1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

e, daí

$$\dots \longrightarrow RG \xrightarrow{n \circ \varepsilon} RG \xrightarrow{\partial_1} RG \xrightarrow{n \circ \varepsilon} RG \xrightarrow{\partial_1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de R sobre RG .

Agora, vamos determinar ∂_1 e $n \circ \varepsilon$.

- $\partial_1(e_0) = v_1 - v_0 = t \cdot v_0 - v_0 = (t - 1) \cdot v_0$.

Logo, ∂_1 é a multiplicação por $t - 1$.

Se $N = 1 + t + \dots + t^{n-1}$, então Ne_0 gera $H_1(S^1, R) \simeq R$.

De fato: Temos

$$R \simeq H_1(S^1, R) = \text{Ker } \partial_1.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \partial_1(e_0 + t \cdot e_0 + \dots + t^{n-1} \cdot e_0) &= (1 + t + \dots + t^{n-1})\partial_1(e_0) \\ &= (1 + t + \dots + t^{n-1})(t - 1) \cdot v_0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $e_0 + t \cdot e_0 + t^2 \cdot e_0 + \dots + t^{n-1} \cdot e_0 \in \text{Ker } \partial_1$.

Agora, se $x = a_0e_0 + a_1t \cdot e_0 + \dots + a_{n-1}t^{n-1} \cdot e_0 \in \text{Ker } \partial_1$, temos



$$\begin{aligned}\partial_1(a_0e_0 + a_1t \cdot e_0 + \dots + a_{n-1}t^{n-1} \cdot e_0) = 0 &\Rightarrow (a_0 + a_1t + \dots + a_{n-1}t^{n-1})\partial_1(e_0) = 0 \\ &\Rightarrow (a_0 + a_1t + \dots + a_{n-1}t^{n-1})(t-1) \cdot v_0 = 0\end{aligned}$$

o que nos dá:

$$(a_{n-1} - a_0)v_0 + \dots + (a_{n-2} - a_{n-1})t^{n-1} \cdot v_0 = 0.$$

Mas, como $C_0(X, R)$ é um R -módulo livre que tem como base as 0-células $\{v_0, t \cdot v_0, \dots, t^{n-1} \cdot v_0\}$, então, $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1}$. Assim,

$$x = a_0(e_0 + t \cdot e_0 + \dots + t^{n-1} \cdot e_0) = a_0 N e_0.$$

Portanto, $R \simeq H_1(S^1, R) = \text{Ker } \partial_1 = \langle N e_0 \rangle$.

Como $\text{Im}(n \circ \varepsilon) = \text{Ker } \partial_1$, temos que $(n \circ \varepsilon)(v_0) = N e_0$ e, deste modo, $(n \circ \varepsilon)(1_{RG}) = N$. Logo, $n \circ \varepsilon$ é a multiplicação por N .

Conseqüentemente, obtemos a seguinte resolução periódica, de período 2, de R sobre RG :

$$\dots \longrightarrow RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{N} RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0.$$

1.5 Coinvariantes e Invariantes

Consideremos o anel $R = \mathbb{Z}$.

Sejam G um grupo e M um $\mathbb{Z}G$ -módulo (à esquerda).

Definição 1.5.1 O grupo dos coinvariantes de M , o qual denotamos por M_G , é dado por $M_G = M/A$, onde A é o subgrupo aditivo tal que $A = \langle g \cdot m - m; g \in G \text{ e } m \in M \rangle$.

Nota: O nome *coinvariantes* vem do fato de M_G ser o maior quociente de M no qual G atua trivialmente.

Proposição 1.5.1 $M_G \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$, onde $\mathbb{Z}$ é visto como um $\mathbb{Z}G$ -módulo (à direita) com G -ação trivial.



Demonstração: Temos $1 \otimes g \cdot m = 1 \cdot g \otimes m = 1 \otimes m$.

Seja

$$\begin{aligned} \varphi: M_G &\rightarrow \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}G} M \\ \overline{m} &\mapsto \varphi(\overline{m}) = \varphi(m + A) = 1 \otimes m \end{aligned}$$

É fácil ver que φ está bem definida, e é homomorfismo de grupos.

Por outro lado, podemos considerar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z} \times M & \xrightarrow{f} & M_G \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}G} M & & \end{array}$$

onde $f: \mathbf{Z} \times M \rightarrow M_G$, definida por $f(z, m) := z\overline{m} = (\overline{m} + \dots + \overline{m})$ (z vezes), é bilinear.

Assim, pela propriedade universal do produto tensorial ([17], V.1.1), temos que existe um único homomorfismo

$$\begin{aligned} \psi: \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}G} M &\rightarrow M_G \\ z \otimes m &\mapsto \psi(z \otimes m) := f(z, m) = z\overline{m} \end{aligned}$$

As aplicações φ e ψ são tais que uma é inversa da outra.

Logo, $M_G \simeq \mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}G} M$.

■

Lema 1.5.1 Se F é um $\mathbf{Z}G$ módulo livre com base $\{e_i\}_{i \in I}$, então F_G é um $\mathbf{Z}$ -módulo livre com base $\{\overline{e}_i\}_{i \in I}$.

Demonstração: Basta usar a definição de módulo livre, e a caracterização de F_G dada pela proposição anterior.

■

Observação 1.5.1 Todo RG -módulo (à esquerda) M pode ser considerado como um RG -módulo (à direita), definindo a seguinte G -ação em M :

$$\begin{aligned} \varphi: M \times G &\rightarrow M \\ (m, g) &\mapsto m * g = g^{-1} \cdot m, \quad \forall g \in G, \forall m \in M. \end{aligned}$$

Nota: A partir de agora, podemos eventualmente tratar de conceitos e resultados envolvendo funtores covariantes e contravariantes, e categorias. Tais assuntos são comentados com mais detalhes no Apêndice.

Definição 1.5.2 O funtor $-_G = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} -$, definido da categoria dos $\mathbb{Z}G$ -módulos (à esquerda) para a categoria dos grupos abelianos é chamado **funtor de coinvariantes**.

Observação 1.5.2 Se $C : \cdots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$ é um complexo de cadeias, denotaremos por C_G o complexo $C_G : \cdots \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} C_1 \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} C_0 \rightarrow 0$.

Vimos que, para qualquer grupo G , podemos sempre tomar F como sendo a resolução padrão. Neste caso, denotaremos F_G por $C_*(G)$.

Para finalizar esta seção, vamos introduzir um conceito dual ao conceito de coinvariantes.

Definição 1.5.3 Seja M um $\mathbb{Z}G$ -módulo (à esquerda). O grupo dos invariantes de M , denotado por M^G , é dado por:

$$M^G = \{m \in M; g \cdot m = m, \forall g \in G\}.$$

Nota: M^G é o maior submódulo de M no qual G atua trivialmente.

Proposição 1.5.2 $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \simeq M^G$, onde $\mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}G$ -módulo com G -ação trivial.

Demonstração: Definindo $\psi : \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \rightarrow M^G$ por $\psi(f) := f(1)$, temos que ψ é um isomorfismo. ■

1.6 Módulos Induzidos e Coinduzidos

Começamos esta seção fazendo um estudo sobre extensão e coextensão de escalares.

Sejam R e S anéis e, $\alpha : R \rightarrow S$ um homomorfismo de anéis.

Consideremos M um S -módulo (à esquerda). Podemos ver M como um R -módulo (à esquerda), definindo em M a R -ação:

$$\begin{aligned} \mu : R \times M &\rightarrow M \\ (r, m) &\mapsto r \cdot m = \alpha(r)m \end{aligned}$$

Obtemos, desta forma, um funtor da categoria dos S -módulos (à esquerda) para a categoria dos R -módulos (à esquerda) denominado **restrição de escalares**. Neste caso, M é denotado por $\text{Res}_R^S M$.

Agora, estamos interessados em construir S -módulos a partir de R -módulos.

Seja M um R -módulo (à esquerda). Através do homomorfismo $\alpha : R \rightarrow S$, vamos obter, a partir de M , os S -módulos (à esquerda): $S \otimes_R M$ e $\text{Hom}_R(S, M)$, da forma a seguir.

O S -módulo $S \otimes_R M$

Podemos ver S como um R -módulo (à direita), por restrição de escalares, através da ação:

$$\begin{aligned} \eta : S \times R &\rightarrow S \\ (s, r) &\mapsto s \cdot r = s\alpha(r) \end{aligned}$$

onde $s\alpha(r)$ é a multiplicação do anel.

Assim, podemos considerar o produto tensorial $S \otimes_R M$.

Nosso objetivo é definir em $S \otimes_R M$ uma S -ação (à esquerda), para que este se torne um S -módulo.

Definimos, então

$$\begin{aligned} \psi : S \times (S \otimes_R M) &\rightarrow S \otimes_R M \\ (s, s' \otimes m) &\mapsto s \cdot (s' \otimes m) := ss' \otimes m. \end{aligned}$$

Pode-se provar que ψ está bem definida e é uma S -ação.

O S -módulo (à esquerda) $S \otimes_R M$ é dito ser obtido de M por **extensão de escalares** de R para S (via α).



Lema 1.6.1 Existe uma aplicação natural de R -módulos:

$$\begin{aligned} i: M &\rightarrow S \otimes_R M \\ m &\mapsto i(m) = 1 \otimes m \end{aligned}$$

Demonstração: Temos que i é aplicação de R -módulos, pois

$$\begin{aligned} i(r \cdot m) &= 1 \otimes r \cdot m = 1 \cdot r \otimes m = 1\alpha(r) \otimes m = \alpha(r) \otimes m \stackrel{\alpha(r) \in S}{=} \alpha(r) \cdot (1 \otimes m) \\ &= \alpha(r) \cdot i(m). \end{aligned}$$

Lema 1.6.2 Dados um R -módulo (à esquerda) M , um S -módulo (à esquerda) N , uma aplicação de R -módulos $f: M \rightarrow N$ e um homomorfismo de anéis $\alpha: R \rightarrow S$, existe uma única aplicação de S -módulos $h: S \otimes_R M \rightarrow N$, tal que $h \circ i = f$, ou seja, o diagrama a seguir é comutativo (onde i é a aplicação de R -módulos definida no lema anterior).

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{i} & S \otimes_R M \\ \downarrow f & \searrow h & \\ N & & \end{array}$$

Demonstração: Observemos que, se h existe, então deve satisfazer:

$$h(s \otimes m) = sh(1 \otimes m) = sh(i(m)) = sf(m).$$

Assim, definindo:

$$\begin{aligned} h: S \otimes_R M &\rightarrow N \\ s \otimes m &\mapsto h(s \otimes m) := sf(m), \end{aligned}$$

temos que h é única.

Observação 1.6.1 Se no lema anterior, $M = N$ e $f = id$, temos que a aplicação i é um R -monomorfismo.



Proposição 1.6.1 Dados um R -módulo (à esquerda) M , um S -módulo (à esquerda) N e um homomorfismo de anéis $\alpha : R \rightarrow S$, temos

$$\text{Hom}_R(M, N) \simeq \text{Hom}_S(S \otimes_R M, N).$$

Demonstração: Pelo lema 1.6.2, podemos definir

$$\begin{aligned} \phi : \text{Hom}_R(M, N) &\rightarrow \text{Hom}_S(S \otimes_R M, N) \\ f &\mapsto \phi(f) := h; \quad h(s \otimes m) = sf(m) \end{aligned}$$

Deste modo, ϕ é homomorfismo de grupos.

Além disso, o homomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Hom}_S(S \otimes_R M, N) &\rightarrow \text{Hom}_R(M, N) \\ h &\mapsto \varphi(h) := h \circ i \end{aligned}$$

é inverso de ϕ .

Logo,

$$\text{Hom}_R(M, N) \simeq \text{Hom}_S(S \otimes_R M, N).$$

O S -módulo $\text{Hom}_R(S, M)$

Consideremos, agora, uma construção dual, utilizando Hom ao invés de $\otimes$.

Dado um R -módulo M (à esquerda), vamos ver S como um R -módulo (à esquerda) por restrição de escalares, através da ação:

$$\begin{aligned} \xi : R \times S &\rightarrow S \\ (r, s) &\mapsto r \cdot s = \alpha(r)s \end{aligned}$$

onde $\alpha(r)s$ é a multiplicação do anel.

Assim, podemos considerar $\text{Hom}_R(S, M)$.

Nosso objetivo é definir em $\text{Hom}_R(S, M)$ uma S -ação (à esquerda), para que este se torne um S -módulo.

Definimos, então

$$\begin{aligned} \psi : S \times \text{Hom}_R(S, M) &\rightarrow \text{Hom}_R(S, M) \\ (s, f) &\mapsto s \cdot f; \quad (s \cdot f)(s') := f(s's) \end{aligned}$$



Pode-se provar que ψ está bem definida e é uma S -ação.

O S -módulo (à esquerda) $\text{Hom}_R(S, M)$ é dito ser obtido de M por **coextensão de escalares** de R para S (via α).

Lema 1.6.3 *Seja M um R -módulo e, consideremos o S -módulo $\text{Hom}_R(S, M)$ como um R -módulo por restrição de escalares. Existe uma aplicação natural de R -módulos:*

$$\begin{array}{ccc} \pi : \text{Hom}_R(S, M) & \rightarrow & M \\ f & \mapsto & \pi(f) := f(1). \end{array}$$

Demonstração: Temos que π é aplicação de R -módulos, pois

$$\pi(r \cdot f) = \pi(\alpha(r)f) = (\alpha(r)f)(1) = f(\alpha(r)) = f(r \cdot 1) = rf(1) = r\pi(f).$$

Lema 1.6.4 *Dados um R -módulo (à esquerda) M , um S -módulo (à esquerda) N , uma aplicação de R -módulos $f : N \rightarrow M$ e um homomorfismo de anéis $\alpha : R \rightarrow S$, existe uma única aplicação de S -módulos $g : N \rightarrow \text{Hom}_R(S, M)$, tal que $\pi \circ g = f$, ou seja, o diagrama a seguir é comutativo (onde π é a aplicação de R -módulos definida no lema anterior).*

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}_R(S, M) & \\ & \uparrow g & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Demonstração: Basta notar que, se g existe, deve satisfazer $g(sn) = s(gn)$, para $s \in S$ e $n \in N$. Daí,

$$(g(sn))(1) = (s(gn))(1) = g(n)(1s) = g(n)(s).$$

Assim,

$$g(n)(s) = (g(sn))(1) = \pi(g(sn)) = f(sn).$$

Portanto, definindo:



$$\begin{aligned} g : N &\rightarrow \text{Hom}_R(S, M) \\ n &\mapsto g(n); g(n)(s) := f(sn), \end{aligned}$$

temos a unicidade de g .

Proposição 1.6.2 *Dados um R -módulo (à esquerda) M , um S -módulo (à esquerda) N e um homomorfismo de anéis $\alpha : R \rightarrow S$, temos*

$$\text{Hom}_R(N, M) \simeq \text{Hom}_S(N, \text{Hom}_R(S, M)).$$

Demonstração: Pelo lema 1.6.4, podemos definir

$$\begin{aligned} \phi : \text{Hom}_R(N, M) &\rightarrow \text{Hom}_S(N, \text{Hom}_R(S, M)) \\ f &\mapsto \phi(f) := g; g(n)(s) := f(sn). \end{aligned}$$

Deste modo, ϕ é homomorfismo de grupos e, ϕ é bijetora, pois

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Hom}_S(N, \text{Hom}_R(S, M)) &\rightarrow \text{Hom}_R(N, M) \\ g &\mapsto \varphi(g) := \pi \circ g \end{aligned}$$

é o homomorfismo inverso de ϕ .

Logo,

$$\text{Hom}_R(N, M) \simeq \text{Hom}_S(N, \text{Hom}_R(S, M)).$$

Observação 1.6.2 *Sejam $\varepsilon : RG \rightarrow R$ a aplicação aumentação e M um RG -módulo. Então, o R -módulo $R \otimes_{RG} M$, obtido de M por extensão de escalares de RG para R , é simplesmente M_G e, o R -módulo $\text{Hom}_{RG}(R, M)$, obtido de M por coextensão de escalares de RG para R , é simplesmente M^G .*

$\text{Ind}_H^G M$ e $\text{Coind}_H^G M$

Sejam G um grupo e H um subgrupo de G .



Consideremos a aplicação inclusão $\alpha : RH \hookrightarrow RG$. Assim, se M é um RG -módulo, podemos vê-lo como um RH -módulo através da inclusão, neste caso, denotamos o RH -módulo M por $Res_H^G M$ (módulo restrição).

Seja M um RH -módulo. O RG -módulo obtido de M por extensão de escalares será denotado por $Ind_H^G M$, assim

$$Ind_H^G M = RG \otimes_{RH} M.$$

Neste caso, a extensão de escalares é chamada **indução**.

Da mesma forma, o RG -módulo obtido de M por coextensão de escalares será denotado por $Coind_H^G M$, então

$$Coind_H^G M = Hom_{RH}(RG, M).$$

Neste caso, a coextensão de escalares é chamada **coindução**.

Observação 1.6.3 Se $H = \{1\}$, temos $RH \simeq R$. Deste modo

$$Ind_{\{1\}}^G M = RG \otimes_R M \quad e \quad Coind_{\{1\}}^G M = Hom_R(RG, M).$$

Tais RG -módulos são chamados, respectivamente, **módulo induzido** e **módulo coinduzido**.

Observação 1.6.4 Segue imediatamente dos lemas 1.6.2 e 1.6.4, respectivamente, considerando $M = N$ e $f = Id_M$, que as aplicações:

$$\begin{aligned} i : M &\rightarrow Ind_H^G M = RG \otimes_{RH} M \\ m &\mapsto i(m) = 1 \otimes m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi : Coind_H^G M = Hom_{RH}(RG, M) &\rightarrow M \\ f &\mapsto \pi(f) = f(1) \end{aligned}$$

são, respectivamente, RH -monomorfismo e RH -epimorfismo.



Proposição 1.6.3 O RG -módulo $Ind_H^G M$ contém M como um RH -submódulo. Além disso, considerando E um conjunto de representantes para as classes laterais (à esquerda) de H em G , e denotando por gM o conjunto obtido de M (visto como RH -submódulo de $Ind_H^G M$) sob a ação de G , temos

$$Ind_H^G M = \bigoplus_{g \in E} gM.$$

Demonstração: Podemos definir uma ação (à direita) de H em G , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} G \times H &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto g \cdot h \end{aligned}$$

Tal ação é livre e, portanto, RG é um RH -módulo livre (à direita) cuja base pode ser tomada como sendo E .

Como $G = \bigcup_{g \in E} gH$, por [6], pag.13, temos

$$RG = R \left(\bigcup_{g \in E} gH \right) = \bigoplus_{g \in E} R(gH) = \bigoplus_{g \in E} g(RH)$$

Daí,

$$Ind_H^G M = RG \otimes_{RH} M = \left(\bigoplus_{g \in E} g(RH) \right) \otimes_{RH} M = \bigoplus_{g \in E} g \otimes_{RH} M, \quad (1.2)$$

onde $g \otimes_{RH} M = \{g \otimes m; m \in M\}$.

Temos que $g \otimes_{RH} M$ pode ser identificado com M , via bijeção $g \otimes m \leftrightarrow m$. Em particular, $1 \otimes_{RH} M \leftrightarrow M$, onde 1 denota o elemento neutro de G .

Consideremos o RH -monomorfismo:

$$\begin{aligned} i: M &\rightarrow Ind_H^G M = RG \otimes_{RH} M \\ m &\mapsto i(m) = 1 \otimes m \end{aligned}$$

dado na observação 1.6.4. Temos que i aplica M isomorficamente sobre $1 \otimes_{RH} M$. Assim, através da identificação $1 \otimes_{RH} M \leftrightarrow M$, podemos ver M como um RH -submódulo de $Ind_H^G M$.

Além disso, o somando $g \otimes_{RH} M$ de (1.2) é o conjunto obtido de $M \simeq 1 \otimes_{RH} M$ através da ação de G , pois $g \cdot (1 \otimes m) = g \otimes m$ (extensão de escalares).



Deste modo,

$$gM \simeq g(1 \otimes_{RH} M) = g \otimes_{RH} M.$$

Logo, voltando em (1.2), temos

$$Ind_H^G M = \bigoplus_{g \in E} gM.$$

■

Proposição 1.6.4 *De modo análogo à indução, se considerarmos o mergulho $\rho : M \rightarrow Coind_H^G M$, dado por*

$$\rho(m)(g) = \begin{cases} g \cdot m & \text{se } g \in H \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

temos que M é um RH -módulo de $Coind_H^G M$ e, além disso,

$$Coind_H^G M = \prod_{g \in E} gM.$$

■

Observação 1.6.5 *A aplicação ρ se estende a um RG -homomorfismo $\varphi : RG \otimes_{RH} M \rightarrow Hom_{RH}(RG, M)$ (pelo lema 1.6.2). Tal aplicação pode ser identificada com a inclusão canônica da soma direta no produto direto ([6], pag.70), e assim, podemos ver $Ind_H^G M$ como um RG -submódulo de $Coind_H^G M$.*

Proposição 1.6.5 *Se $(G : H) < \infty$, então $Ind_H^G M \simeq Coind_H^G M$.*

Demonstração: Se $(G : H) < \infty$, temos que a soma direta e o produto direto coincidem e, portanto, segue o resultado.

Podemos também, alternativamente, demonstrar essa proposição do modo a seguir.

Existe uma H -aplicação $\varphi_0 : M \rightarrow Hom_{ZH}(ZG, M)$, dada por

$$\varphi_0(m)(g) = \begin{cases} gm & g \in H \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$



Temos que φ_0 se estende a uma G -aplicação $\varphi : ZG \otimes_{ZH} M \rightarrow \text{Hom}_{ZH}(ZG, M)$ (lema 1.6.2). Como, por hipótese, $(G : H) < \infty$, temos que φ é isomorfismo, com inversa dada por $\psi(f) = \sum_{g \in G/H} g \otimes f(g^{-1})$. ■

Definição 1.6.1 *Sejam M e N RG -módulos. Então, M e N são naturalmente R -módulos. A G -ação diagonal, definida em $M \otimes_R N$, é dada por:*

$$g \cdot (m \otimes n) = g \cdot m \otimes g \cdot n$$

Proposição 1.6.6 *Seja M um RG -módulo. Existem RG -isomorfismos naturais:*

- (i) $\text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G M) \simeq R(G/H) \otimes_R M$ (com G -ação diagonal).
- (ii) $\text{Coind}_H^G(\text{Res}_H^G M) \simeq \text{Hom}_R(R(G/H), M)$ (com G -ação diagonal).

Demonstração:

(i) Vamos definir:

$$\begin{aligned} f : RG \times M &\rightarrow R(G/H) \otimes_R M \\ (g, m) &\mapsto f(g, m) = gH \otimes g \cdot m \end{aligned}$$

nos geradores, e estendê-la por linearidade.

Deste modo, temos que f está bem definida e é biaditiva. Logo, pela propriedade universal do produto tensorial, existe um homomorfismo

$$\begin{aligned} \psi : RG \otimes_{RH} M &\rightarrow R(G/H) \otimes_R M \\ g \otimes m &\mapsto \psi(g \otimes m) = gH \otimes g \cdot m \end{aligned}$$

Além disso, ψ é aplicação de RG -módulos.

Agora, vamos definir:

$$\begin{aligned} \tilde{g} : R(G/H) \times M &\rightarrow RG \otimes_{RH} M \\ (gH, m) &\mapsto \tilde{g} \cdot (gH, m) = g \otimes g^{-1} \cdot m \end{aligned}$$

nos geradores, e estendê-la por linearidade.

Verifica-se facilmente que $\tilde{g}$ está bem definida e é biaditiva. Novamente, pela propriedade universal do produto tensorial, existe um homomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : R(G/H) \otimes_R M &\rightarrow RG \otimes_{RH} M \\ gH \otimes m &\mapsto \phi(gH \otimes m) = g \otimes g^{-1} \cdot m \end{aligned}$$



Temos que ϕ também é aplicação de RG -módulos, e é inversa de ψ .

Logo,

$$\text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G M) \simeq R(G/H) \otimes_R M.$$

(ii) Vamos definir:

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Hom}_{RH}(RG, M) &\rightarrow \text{Hom}_R(R(G/H), M) \\ f &\mapsto \varphi(f); \quad \varphi(f)(gH) := gf(g^{-1}) \end{aligned}$$

Assim, φ é homomorfismo de grupos, e

$$\begin{aligned} \nu : \text{Hom}_R(R(G/H), M) &\rightarrow \text{Hom}_{RH}(RG, M) \\ f &\mapsto \nu(f); \quad \nu(f)(x) = xf(x^{-1}H) \end{aligned}$$

é inversa para φ .

Portanto,

$$\text{Coind}_H^G(\text{Res}_H^G M) \simeq \text{Hom}_R(R(G/H), M).$$

Corolário 1.6.1 $\text{Ind}_H^G R \simeq R(G/H)$.

Lema 1.6.5 Se G é infinito, então $(\text{Ind}_{\{1\}}^G \mathbb{Z})^G = 0$.

Demonstração: Pela proposição 1.6.3, temos:

$$\text{Ind}_{\{1\}}^G \mathbb{Z} = \bigoplus_{g \in E} g\mathbb{Z},$$

ou seja,

$$\mathbb{Z}G = \bigoplus_{g \in E} g\mathbb{Z} \tag{1.3}$$

Seja $\alpha \in (\mathbb{Z}G)^G$, $\alpha \neq 0$. Então, $g \cdot \alpha = \alpha$, $\forall g \in G$.

Temos:

$$\alpha = \sum_{g \in G} n_g g, \quad \text{com } n_g \text{ quase todos nulos.}$$



Vamos escrever:

$$\alpha = g_1 m_1 + \dots + g_k m_k, \quad g_i m_i \in g_i Z, \quad g_i m_i \neq 0, \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Como $g \cdot \alpha = \alpha$, temos

$$g \cdot g_1 m_1 + \dots + g \cdot g_k m_k = g_1 m_1 + \dots + g_k m_k, \quad \forall g \in G. \quad (1.4)$$

Afirmção: Se $I = \{g_1 m_1, \dots, g_k m_k\}$, então $gI = I$, $\forall g \in G$.

De fato: A aplicação:

$$\begin{aligned} \varphi_g : ZG &\rightarrow ZG \\ \alpha &\mapsto \varphi_g(\alpha) = g \cdot \alpha \end{aligned}$$

é isomorfismo, com inversa φ_g^{-1} .

Além disso,

$$g \cdot g_i m_i = g_j m_j, \quad 1 \leq i, j \leq k.$$

Isto segue do fato que $g \cdot g_i m_i \neq g \cdot g_j m_j$, $\forall i \neq j$, pois φ_g é injetora e $g_i m_i \neq g_j m_j$.

Se $g \cdot g_i m_i \neq g_j m_j$, $1 \leq j \leq k$, como a soma em (1.4) é direta, teríamos $g \cdot g_i m_i = 0$, o que nos dá $g_i m_i = 0$ (contradição, pois estamos considerando $g_i m_i \neq 0$).

Deste modo, $\varphi_g(I) \subset I$ e, como I é finito e φ_g é injetora, temos $\varphi_g(I) = I$, isto é, $gI = I$, o que prova a afirmação.

Consideremos, agora, o conjunto $X = \{g_i, i = 1, \dots, k\}$

Podemos definir uma ação de G em X da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \psi : G \times X &\rightarrow X \\ (g, g_i) &\mapsto g \cdot g_i \end{aligned}$$

Temos que ψ está bem definida, pois se $g_i \in X$, então $g \cdot g_i \in X$.

De fato: Seja $g_i m_i \in I$. Então, $g \cdot g_i m_i \in I$ ($gI = I$).

Temos que $g \cdot g_i m_i = g_j m_j \in I$ e $g_j \in X$. Para ver isso, vamos considerar $g_i m_i \in I$, assim, $g \cdot g_i m_i = g_j m_j \in I$ e $g_j \in X$.

Multiplicando ambos os membros da igualdade acima por g_j^{-1} , temos

$$\begin{aligned} g_j^{-1}(g \cdot g_i m_i) &= g_j^{-1}(g_j m_j) \\ g_j^{-1}(g \cdot g_i m_i) &= (g_j^{-1} g_j) m_j = 1 m_j \neq 0 \end{aligned}$$

onde $g_j^{-1}(g \cdot g_i m_i) \in xZ$ e $1 m_j \in 1Z$.

Se $x = g_j^{-1}(g \cdot g_i) \neq 1$, então $xZ \cap 1Z \neq \{0\}$ (o que é um absurdo, pois a soma em (1.3) é direta).

Portanto, $x = g_j^{-1}(g \cdot g_i) = 1$, ou seja, $g \cdot g_i = g_j \in X$.

Além disso, a ação de G em X é transitiva.

De fato: Se $g_i \in X$, então $G(g_i) = \{g \cdot g_i ; g \in G\} = X$, pois se $g_j \in X$, temos que $g_j = (g_j g_i^{-1})g_i \in G(g_i)$.

Consideremos o subgrupo de isotropia de g_i :

$$G_{g_i} = \{g \in G ; g \cdot g_i = g_i\} = \{1\}.$$

Sabemos que existe a correspondência biunívoca:

$$G(g_i) = X = G/G_{g_i} = G.$$

Assim, X está em correspondência 1 – 1 com G e, como X é finito, temos que G é finito, o que é um absurdo.

Logo, para todo $\alpha \in (Ind_{\{1\}}^G Z)^G$, temos $\alpha = 0$.

Portanto, $(Ind_{\{1\}}^G Z)^G = 0$.

■



Capítulo 2

(Co)homologia de Grupos - Tor e Ext

2.1 A (Co)homologia de um Grupo G

Seja R um anel comutativo com unidade.

Antes de definirmos (co)homologia, vamos considerar alguns resultados importantes sobre $\otimes_{RG}$ e Hom_{RG} .

Proposição 2.1.1 *Sejam M e N RG -módulos (à esquerda). Temos*

$$M \otimes_{RG} N = (M \otimes_R N)_G := \frac{M \otimes_R N}{A},$$

onde $A = \langle g \cdot m \otimes g \cdot n - m \otimes n; \forall m \otimes n \in M \otimes_R N, \forall g \in G \rangle$.

Demonstração: Vamos ver como obtemos $M \otimes_{RG} N$ de $M \otimes_R N$.

Consideremos a seguinte relação em $M \otimes_R N$:

$$(m * g) \otimes n \sim m \otimes g \cdot n, \quad \forall m \in M, \forall g \in G.$$

Mas, vendo M como um RG -módulo (à direita), temos pela observação 1.5.1, que

$$m * g = g^{-1} \cdot m, \quad \forall m \in M, \forall g \in G.$$

Assim,

$$(m * g) \otimes n = (g^{-1} \cdot m) \otimes n.$$



Logo,

$$\overline{(g^{-1} \cdot m) \otimes n} = \overline{m \otimes g \cdot n}. \quad (2.1)$$

Portanto,

$$M \otimes_{RG} N = \frac{M \otimes_R N}{\sim}.$$

Trocando m por $g \cdot m$ em (2.1), temos

$$\overline{m \otimes n} = \overline{g \cdot m \otimes g \cdot n}. \quad (2.2)$$

Definimos, então a G -ação diagonal de G em $M \otimes_R N$:

$$g \cdot (m \otimes n) = g \cdot m \otimes g \cdot n.$$

Consideremos em $M \otimes_R N$ tal ação e A o subgrupo aditivo gerado pelos elementos $g \cdot (m \otimes n) - m \otimes n$. Assim, em $(M \otimes_R N)_G := \frac{M \otimes_R N}{A}$, estamos identificando elementos da forma $g \cdot m \otimes g \cdot n$ com $m \otimes n$, $\forall m \in M, \forall n \in N, \forall g \in G$. Isto é o mesmo que identificar $(g^{-1} \cdot m) \otimes n = (m * g) \otimes n$ com $m \otimes n$ (por (2.1) e (2.2)).

Deste modo,

$$(M \otimes_R N)_G = \frac{M \otimes_R N}{\sim} = M \otimes_{RG} N.$$

Corolário 2.1.1 $M \otimes_{RG} N \simeq N \otimes_{RG} M$.

Demonstração:

$$M \otimes_{RG} N \simeq (M \otimes_R N)_G \simeq (N \otimes_R M)_G = N \otimes_{RG} M.$$

Sejam M e N RG -módulos (à esquerda), e consideremos $\text{Hom}_R(M, N)$.

A ação de G em M e N induz uma ação de G em $\text{Hom}_R(M, N)$, dada por

$$\begin{aligned} G \times \text{Hom}_R(M, N) &\rightarrow \text{Hom}_R(M, N) \\ (g, f) &\mapsto g \cdot f \end{aligned}$$



tal que $g \cdot f(x) = gf(g^{-1} \cdot x)$; $g \in G, f \in \text{Hom}_R(M, N)$ e $x \in M$.

Nota: O uso de g^{-1} para definir a ação é necessário devido à contravariância de Hom na primeira variável. Compensamos esta contravariância, convertendo M a um RG -módulo à direita, considerando $m * g = g^{-1} \cdot m$.

Deste modo, a ação fica:

$$g \cdot f(m) = gf(g^{-1} \cdot m) = gf(m * g).$$

Assim, $\text{Hom}_R(M, N)$ será um RG -módulo (à esquerda).

Proposição 2.1.2 $\text{Hom}_{RG}(M, N) = \text{Hom}_R(M, N)^G$.

Demonstração: Seja

$$\text{Hom}_{RG}(M, N) = \{f \in \text{Hom}_R(M, N); g \cdot f(x) = f(g \cdot x)\}$$

ou seja, f é equivariante.

Assim,

$$f \in \text{Hom}_{RG}(M, N) \Leftrightarrow g \cdot f(x) = f(g \cdot x), \forall g \in G, x \in M$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g^{-1}f(g \cdot x), \forall g \in G, x \in M$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g^{-1} \cdot f(x), \forall g^{-1} \in G, x \in M$$

$$\Leftrightarrow gf = f, \forall g \in G$$

$$\Leftrightarrow f \in \text{Hom}_R(M, N)^G.$$

Logo,

$$\text{Hom}_{RG}(M, N) = \text{Hom}_R(M, N)^G.$$

■

Veremos, agora, a definição de (co)homologia de um grupo G , considerando o caso $R = \mathbb{Z}$.

Definição 2.1.1 *Sejam*

$$\cdots \rightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} Z \rightarrow 0$$

uma resolução projetiva de Z sobre ZG e M um ZG -módulo (à esquerda).

Podemos formar os complexos de cadeia e cocadeia, respectivamente:

$$F \otimes_{ZG} M : \cdots \rightarrow F_n \otimes_{ZG} M \xrightarrow{\bar{\partial}_n} F_{n-1} \otimes_{ZG} M \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \otimes_{ZG} M \xrightarrow{\bar{\partial}_1} F_0 \otimes_{ZG} M \rightarrow 0$$

$$\text{Hom}_{ZG}(F, M) : 0 \rightarrow \text{Hom}_{ZG}(F_0, M) \xrightarrow{\delta^0} \text{Hom}_{ZG}(F_1, M) \xrightarrow{\delta^1} \cdots \rightarrow \text{Hom}_{ZG}(F_n, M) \rightarrow$$

O operador bordo é dado por $\bar{\partial}_n := \partial_n \otimes id$ e, o operador cobordo, por

$$\begin{aligned} \delta^n : \text{Hom}_{ZG}(F_n, M) &\rightarrow \text{Hom}_{ZG}(F_{n+1}, M) \\ f &\mapsto \delta^n(f) := f \circ \partial_{n+1} \end{aligned}$$

(a) O n -ésimo grupo de homologia de G com coeficientes em M é definido por

$$H_n(G, M) := H_n(F \otimes_{ZG} M).$$

(b) O n -ésimo grupo de cohomologia de G com coeficientes em M é definido por

$$H^n(G, M) := H^n(\text{Hom}_{ZG}(F, M)).$$

Nota: Poderíamos ter definido a cohomologia usando $\text{Hom}_{ZG}(F, M)^n := \text{Hom}_{ZG}(F_n, M)$ e $\delta^n(f) = (-1)^{n+1}(f \circ \partial_{n+1})$, conforme [6]. No entanto, isto não altera os grupos de cohomologia, pois a mudança de sinal não altera os cociclos ou cobordos.

Observação 2.1.1 *As definições de $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$ independem da resolução projetiva $\varepsilon : F \rightarrow Z$ escolhida (a menos de isomorfismo canônico).*

De fato: Consideremos $\varepsilon' : F' \rightarrow Z$ uma outra resolução projetiva de Z sobre ZG . Temos que os complexos $F \otimes_{ZG} M$ e $F' \otimes_{ZG} M$ são homotopicamente equivalentes (pois $- \otimes_{ZG} M$ é um funtor aditivo) (ver Apêndice).

Deste modo,

$$H_*(F \otimes_{ZG} M) \simeq H_*(F' \otimes_{ZG} M).$$

Analogamente, os complexos $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, M)$ e $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F', M)$ são homotopicamente equivalentes, assim,

$$H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, M)) \simeq H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F', M)).$$

Observação 2.1.2 Tomando $M = \mathbb{Z}$, com G -ação trivial, temos

$$H_*(G, \mathbb{Z}) = H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}) \stackrel{\text{prop. 2.1.1}}{=} H_*((F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z})_G) \simeq H_*(F_G).$$

Proposição 2.1.3 Dado um $\mathbb{Z}G$ -módulo M , temos o isomorfismo:

$$H_0(G, M) \simeq M_G.$$

Demonstração: Consideremos a resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$:

$$\cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Aplicando o funtor $- \otimes_{\mathbb{Z}G} M$, obtemos o complexo

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_1 \otimes_{\mathbb{Z}G} M & \xrightarrow{\bar{\partial}_1} & F_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} M & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \bar{\partial}_0 & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

Como tal funtor é exato à direita ([14], I.7.9), temos que $\text{Im } \bar{\partial}_1 = \text{Ker } \bar{\varepsilon}$ e $\bar{\varepsilon}$ é sobrejetora.

Assim,

$$H_0(G, M) = \frac{\text{Ker } \bar{\partial}_0}{\text{Im } \bar{\partial}_1} = \frac{F_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} M}{\text{Ker } \bar{\varepsilon}} \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \stackrel{\text{prop. 1.5.1}}{\simeq} M_G.$$

Logo,

$$H_0(G, M) \simeq M_G.$$

Proposição 2.1.4 Dado um $\mathbb{Z}G$ -módulo M , temos o isomorfismo:

$$H^0(G, M) \simeq M^G.$$



Demonstração: Consideremos a resolução projetiva de Z sobre ZG :

$$\cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} Z \longrightarrow 0.$$

Aplicando o funtor $\text{Hom}_{ZG}(-, M)$, obtemos o complexo

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{ZG}(Z, M) \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}} \text{Hom}_{ZG}(F_0, M) \xrightarrow{\delta^0} \text{Hom}_{ZG}(F_1, M) \longrightarrow \cdots$$

$$\uparrow_{\delta^{-1}}$$

$$0$$

Como tal funtor é exato à esquerda ([14], I.8.7), temos que $\text{Im } \tilde{\varepsilon} = \text{Ker } \delta^0$ e $\tilde{\varepsilon}$ é injetora.

Assim,

$$H^0(G, M) = \frac{\text{Ker } \delta^0}{\text{Im } \delta^{-1}} = \text{Ker } \delta^0 = \text{Im } \tilde{\varepsilon} \simeq \text{Hom}_{ZG}(Z, M) \stackrel{\text{prop. 1.5.2}}{\simeq} M^G.$$

Logo,

$$H^0(G, M) \simeq M^G.$$

Exemplo 2.1.1 Vamos calcular $H_*(G, Z)$, onde $G = F(S)$ é o grupo livre gerado por um conjunto S .

O exemplo 1.4.12 nos fornece uma resolução livre (portanto, projetiva) de R sobre RG . Para o caso $R = Z$, temos

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{s \in S} (ZG)_s \xrightarrow{\partial} ZG \xrightarrow{\varepsilon} Z \longrightarrow 0,$$

onde $\bigoplus_{s \in S} (ZG)_s$ é o ZG -módulo livre com base $(e_s)_{s \in S}$, $\partial(e_s) = s - 1$ e $\varepsilon(g) = 1, \forall g \in G$.

Pela definição 2.1.1, temos que a homologia do grupo G é a homologia do complexo

$$0 \longrightarrow Z \otimes_{ZG} \bigoplus_{s \in S} (ZG)_s \xrightarrow{id \otimes \partial} Z \otimes_{ZG} ZG \longrightarrow 0$$

Além disso,

$$\bullet \quad Z \otimes_{ZG} \bigoplus_{s \in S} (ZG)_s = Z \otimes_{ZG} \left(\bigoplus_{s \in S} (ZG)_s \right) = \bigoplus_{s \in S} (Z \otimes_{ZG} (ZG)_s) = \bigoplus_{s \in S} Z.$$

- $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}$.

Vamos calcular $id \otimes \partial$, lembrando que $\mathbb{Z}$ é visto como $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial:

$$\begin{aligned}
 (id \otimes \partial)(z \otimes \sum \alpha_{s_i} e_{s_i}) &= z \otimes \sum \alpha_{s_i} \partial(e_{s_i}) = z \otimes \sum \alpha_{s_i} (s_i - 1) \\
 &= \sum z \alpha_{s_i} \otimes (s_i - 1) \\
 &= \sum z \alpha_{s_i} \otimes s_i - \sum z \alpha_{s_i} \otimes 1 \\
 &= \sum z \alpha_{s_i} \cdot s_i \otimes 1 - \sum z \alpha_{s_i} \otimes 1 \\
 &= \sum z \alpha_{s_i} \otimes 1 - \sum z \alpha_{s_i} \otimes 1 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Assim, $id \otimes \partial$ é a função nula e, deste modo, temos o complexo:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0$$

Logo,

$$\begin{cases} H_0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \\ H_1(G, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z} \\ H_i(G, \mathbb{Z}) = 0 \text{ para } i \geq 2. \end{cases}$$

Exemplo 2.1.2 Sejam M um $\mathbb{Z}G$ -módulo e G o grupo cíclico infinito com gerador t . Vamos calcular $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$.

Vimos no exemplo 1.4.13 que

$$0 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

onde $\partial_1 = t - 1$, é uma resolução livre (portanto, projetiva) de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

- Calculemos $H_*(G, M)$

Aplicando o funtor $- \otimes_{\mathbb{Z}G} M$, obtemos

$$0 \xrightarrow{\bar{\partial}_2=0} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\bar{\partial}_1} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\bar{\partial}_0=0} 0$$

onde $\bar{\partial}_1 = \partial_1 \otimes id$.

Agora, temos os seguintes isomorfismos:

$$\begin{array}{ccccccc} M & \simeq & ZG \otimes_{ZG} M & \xrightarrow{\bar{\partial}_1} & ZG \otimes_{ZG} M & \simeq & M \\ m & \mapsto & 1 \otimes m & \mapsto & (t-1) \otimes m & \mapsto & (t-1) \cdot m \end{array}$$

Deste modo, podemos considerar

$$\bar{\partial}_1 : \begin{array}{ccc} M & \rightarrow & M \\ m & \mapsto & (t-1) \cdot m \end{array}$$

Portanto, $H_*(G, M)$ é a homologia do complexo:

$$0 \xrightarrow{0} M \xrightarrow{\partial_1} M \xrightarrow{0} 0$$

Assim,

$$H_1(G, M) = \frac{Ker \partial_1}{\{0\}} = Ker \partial_1.$$

Mas,

$$Ker \partial_1 = Ker(t-1) = \{m \in M; (t-1) \cdot m = 0\} = \{m \in M; t \cdot m = m\} = M^G$$

Portanto,

$$\begin{cases} H_0(G, M) = M_G \\ H_1(G, M) = M^G \\ H_i(G, M) = 0 \text{ para } i \geq 2. \end{cases}$$

Note que

$$H_1(G, M) = M^G \stackrel{\text{prop. 2.1.4}}{=} H^0(G, M).$$

- Calculemos $H^*(G, M)$

Aplicando o funtor $Hom_{ZG}(-, M)$, obtemos

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}=0} Hom_{ZG}(ZG, M) \xrightarrow{\delta^0} Hom_{ZG}(ZG, M) \xrightarrow{\delta^1=0} 0,$$

onde

$$\delta^0(f)(x) = (f \circ \partial_1)(x) = (f \circ (t-1))(x) = f((t-1) \cdot (x)) = (t-1)f(x).$$

Logo, δ^0 é a multiplicação por $(t-1)$.

E, ainda

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) & \simeq & M \\ f & \mapsto & f(1). \end{array}$$

Assim, $H^*(G, M)$ é a cohomologia do complexo:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{0} 0$$

Agora,

$$H^1(G, M) = \frac{\text{Ker } \delta^1}{\text{Im } \delta^0} = \frac{M}{(t-1)M} = M_G.$$

Portanto,

$$\begin{cases} H^0(G, M) = M^G \\ H^1(G, M) = M_G \\ H^i(G, M) = 0 \text{ para } i \geq 2. \end{cases}$$

Note que

$$H^1(G, M) = M_G \stackrel{\text{prop. 2.1.3}}{=} H_0(G, M).$$

Exemplo 2.1.3 Seja G um grupo cíclico finito de ordem n com gerador t . Vamos calcular $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$.

Pelo exemplo 1.4.14, temos a seguinte resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$:

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

onde $N = \sum_{i=0}^{n-1} t^i$.

- Calculemos $H_*(G, M)$

Aplicando o funtor $- \otimes_{\mathbb{Z}G} M$, obtemos o complexo:

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\overline{t-1}} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\overline{N}} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\overline{t-1}} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \longrightarrow 0$$

Como $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq M$, temos

$$\cdots \longrightarrow M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{0} 0.$$

Portanto,

$$H_i(G, M) = \begin{cases} M_G & \text{se } i = 0 \\ \frac{\text{Ker}(t-1)}{\text{Im } N} = \frac{M^G}{NM} & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ \frac{\text{Ker } N}{\text{Im}(t-1)} = \frac{\text{Ker } N}{(t-1)M} & \text{se } i \text{ é par.} \end{cases}$$

- Calculemos $H^*(G, M)$

Aplicando o funtor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(-, M)$, obtemos

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\delta^0} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\delta^1} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\delta^2} \dots$$

onde $\delta^n(f)(x) := (f \circ \partial_{n+1})(x)$.

Via o isomorfismo $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \simeq M$, temos

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} M \xrightarrow{\delta^0} M \xrightarrow{\delta^1} M \xrightarrow{\delta^2} \dots$$

onde $\delta^{2k} = t-1$ e $\delta^{2k+1} = N$, $k \geq 0$.

Logo,

$$H^i(G, M) = \begin{cases} M^G & \text{se } i = 0 \\ \frac{\text{Ker } N}{\text{Im}(t-1)} = \frac{\text{Ker } N}{(t-1)M} & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ \frac{\text{Ker}(t-1)}{\text{Im } N} = \frac{M^G}{NM} & \text{se } i \text{ é par.} \end{cases}$$

Em particular, para o caso $M = \mathbb{Z}$ (com G -ação trivial), temos que $t-1$ é a função nula, pois

$$(t-1) \cdot m = t \cdot m - m = 0, \quad \forall m \in M,$$

e N é a multiplicação por n , pois

$$(1 + t + \dots + t^{n-1}) \cdot m = m + t \cdot m + \dots + t^{n-1} \cdot m = nm$$



Assim, $\text{Ker}(t-1) = \mathbf{Z}$, $\text{Im}(t-1) = \{0\} = \text{Ker } N$ e $\text{Im } N = n\mathbf{Z}$.

Deste modo,

$$H_i(G, \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{se } i = 0 \\ \mathbf{Z}_n & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se } i \text{ é par.} \end{cases}$$

$$H^i(G, \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ \mathbf{Z}_n & \text{se } i \text{ é par.} \end{cases}$$

Proposição 2.1.5 *Se G é um grupo cíclico finito não trivial, então $\mathbf{Z}$ não admite resolução projetiva sobre $\mathbf{Z}G$ de comprimento finito.*

Demonstração: Suponhamos que

$$F' : 0 \longrightarrow F'_n \longrightarrow F'_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F'_1 \longrightarrow F'_0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

seja uma resolução projetiva de $\mathbf{Z}$ sobre $\mathbf{Z}G$ de comprimento finito.

Pelo exemplo 1.4.14, temos que

$$F : \cdots \longrightarrow \mathbf{Z}G \longrightarrow \mathbf{Z}G \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbf{Z}G \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

também é resolução projetiva de $\mathbf{Z}$ sobre $\mathbf{Z}G$.

Assim,

$$H_*(G, \mathbf{Z}) = H_*(F' \otimes_{\mathbf{Z}G} \mathbf{Z}) \stackrel{\text{prop. 2.1.1}}{=} H_*((F' \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z})_G) \simeq H_*(F'_G) \simeq H_*(F_G).$$

Mas, $H_*(F'_G) = 0$, para $i > n$ e $H_*(F_G)$ não são todos nulos para $i > n$, conforme vimos no exemplo anterior, o que nos dá uma contradição.

Deste modo, não podemos ter resolução projetiva de $\mathbf{Z}$ sobre $\mathbf{Z}G$ de comprimento finito. ■

Corolário 2.1.2 *Se G tem torção, então $\mathbf{Z}$ não admite resolução projetiva sobre $\mathbf{Z}G$ de comprimento finito.*



Demonstração: Suponhamos que $\varepsilon : F \rightarrow Z$ seja uma resolução projetiva de Z sobre ZG de comprimento finito.

Tomemos x , um elemento de torção de G , e consideremos $H = \langle x \rangle$. Assim, H é um subgrupo cíclico finito. Além disso, $\varepsilon : F \rightarrow Z$ é uma resolução projetiva de Z sobre ZH , pois pela proposição 1.1.2, ZG é um ZH -módulo livre, e como F_k é ZG -projetivo, pelo lema 1.1.1(i), temos

$$F_k \oplus Q_k = \bigoplus_{i \in I} (ZG)_i = \bigoplus_{i \in I, j \in J} (ZH)_{i,j}$$

ou seja, F_k é ZH -projetivo.

Dessa forma, temos uma resolução projetiva de comprimento finito de Z sobre ZH , onde H é um grupo cíclico finito, o que é uma contradição, pela proposição anterior. ■

2.2 O Lema de Shapiro

Nesta seção, vamos relacionar a (co)homologia de um grupo G com a (co)homologia de seu subgrupo H .

Proposição 2.2.1 (Lema de Shapiro) *Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e M um ZH -módulo. Temos os seguintes isomorfismos:*

- (a) $H_*(H, M) \simeq H_*(G, \text{Ind}_H^G M)$
- (b) $H^*(H, M) \simeq H^*(G, \text{Coind}_H^G M)$.

Demonstração: Seja $\varepsilon : F \rightarrow Z$ uma resolução projetiva de Z sobre ZG .

Pelo lema 1.2.2, esta também é uma resolução projetiva de Z sobre ZH .

(a) Temos:

$$F \otimes_{ZH} M \simeq (F \otimes_{ZG} ZG) \otimes_{ZH} M = F \otimes_{ZG} (ZG \otimes_{ZH} M) = F \otimes_{ZG} \text{Ind}_H^G M.$$

Assim,

$$H_*(H, M) = H_*(F \otimes_{ZH} M) \simeq H_*(F \otimes_{ZG} \text{Ind}_H^G M) = H_*(G, \text{Ind}_H^G M).$$

Logo,

$$H_*(H, M) \simeq H_*(G, \text{Ind}_H^G M).$$

(b) Pela proposição 1.6.2:

$$\text{Hom}_{ZH}(F_n, M) \simeq \text{Hom}_{ZG}(F_n, \text{Hom}_{ZH}(ZG, M)), \forall n.$$

Deste modo,

$$\text{Hom}_{ZH}(F, M) \simeq \text{Hom}_{ZG}(F, \text{Coind}_H^G M).$$

Assim,

$$H^*(H, M) = H^*(\text{Hom}_{ZH}(F, M)) \simeq H^*(\text{Hom}_{ZG}(F, \text{Coind}_H^G M)) = H^*(G, \text{Coind}_H^G M).$$

Portanto,

$$H^*(H, M) \simeq H^*(G, \text{Coind}_H^G M).$$

Exemplo 2.2.1 Se $M = Z$, então $H_*(H, Z) \simeq H_*(G, Z(G/H))$.

De fato:

$$H_*(H, Z) \stackrel{\text{Shapiro}}{\simeq} H_*(G, \text{Ind}_H^G Z) \stackrel{\text{corol.1.6.1}}{\simeq} H_*(G, Z(G/H)).$$

Logo,

$$H_*(H, Z) \simeq H_*(G, Z(G/H)).$$

Exemplo 2.2.2 Sejam G um grupo e H um subgrupo de G , com $(G : H) < \infty$. Então,

$$(i) H^*(H, Z) \simeq H^*(G, Z(G/H))$$

$$(ii) H^*(H, ZH) \simeq H^*(G, ZG).$$

De fato:

$$(i) H^*(H, Z) \stackrel{\text{Shapiro}}{\simeq} H^*(G, \text{Coind}_H^G Z) \stackrel{\text{prop.1.6.5}}{\simeq} H^*(G, \text{Ind}_H^G Z) \stackrel{\text{corol.1.6.1}}{\simeq} H^*(G, Z(G/H)).$$



Logo,

$$H^*(H, \mathbb{Z}) \simeq H^*(G, \mathbb{Z}(G/H)).$$

$$(ii) \quad H^*(H, \mathbb{Z}H) \stackrel{\text{Shapiro}}{\simeq} H^*(G, \text{Coind}_H^G \mathbb{Z}H) \stackrel{\text{prop.1.6.5}}{\simeq} H^*(G, \text{Ind}_H^G \mathbb{Z}H) \simeq H^*(G, \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z}H) \\ \simeq H^*(G, \mathbb{Z}G).$$

Portanto,

$$H^*(H, \mathbb{Z}H) \simeq H^*(G, \mathbb{Z}G).$$

Nota: Usando a proposição 1.6.6, podemos enunciar o Lema de Shapiro da forma a seguir.

Proposição 2.2.2 (Lema de Shapiro - outra versão) *Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e M um $\mathbb{Z}G$ -módulo. Temos os seguintes isomorfismos:*

$$(i) \quad H_*(H, \text{Res}_H^G M) \simeq H_*(G, \mathbb{Z}(G/H) \otimes_{\mathbb{Z}} M)$$

$$(ii) \quad H^*(H, \text{Res}_H^G M) \simeq H^*(G, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(G/H), M)).$$

Demonstração:

(i) Pela proposição 2.2.1(a):

$$H_*(H, \text{Res}_H^G M) \simeq H_*(G, \text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G M)).$$

Da proposição 1.6.6(i), temos

$$\text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G M) \simeq \mathbb{Z}(G/H) \otimes_{\mathbb{Z}} M.$$

Assim,

$$H_*(G, \text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G M)) \simeq H_*(G, \mathbb{Z}(G/H) \otimes_{\mathbb{Z}} M).$$

Logo,

$$H_*(H, \text{Res}_H^G M) \simeq H_*(G, \mathbb{Z}(G/H) \otimes_{\mathbb{Z}} M).$$

(ii) Pela proposição 2.2.1(b):

$$H^*(H, \text{Res}_H^G M) \simeq H^*(G, \text{Coind}_H^G(\text{Res}_H^G M)).$$

Da proposição 1.6.6(ii), temos

$$\text{Coind}_H^G(\text{Res}_H^G M) \simeq \text{Hom}_Z(\mathbf{Z}(G/H), M).$$

Assim,

$$H^*(G, \text{Coind}_H^G(\text{Res}_H^G M)) \simeq H^*(G, \text{Hom}_Z(\mathbf{Z}(G/H), M)).$$

Logo,

$$H^*(H, \text{Res}_H^G M) \simeq H^*(G, \text{Hom}_Z(\mathbf{Z}(G/H), M)).$$

■

2.3 H_* e H^* como Funtores

Como Funtores do Módulo Coeficiente

Consideremos $\mathcal{M}$ a categoria dos $\mathbf{Z}G$ -módulos (à esquerda).

Como $F \otimes_{\mathbf{Z}G} -$ e $\text{Hom}_{\mathbf{Z}G}(F, -)$ são funtores covariantes em $\mathcal{M}$, temos que $H_*(G, -)$ e $H^*(G, -)$ também são funtores covariantes em $\mathcal{M}$.

Proposição 2.3.1 *Seja $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \rightarrow 0$ uma seqüência exata de $\mathbf{Z}G$ -módulos. Temos:*

(i) *Para todo inteiro n , existe uma aplicação natural $\partial_n : H_n(G, M'') \rightarrow H_{n-1}(G, M')$, tal que a seqüência:*

$$\cdots \rightarrow H_1(G, M) \xrightarrow{j_1} H_1(G, M'') \xrightarrow{\partial_1} H_0(G, M') \xrightarrow{i_0} H_0(G, M) \xrightarrow{j_0} H_0(G, M'') \rightarrow 0$$

é exata, onde as aplicações i_k e j_k são as induzidas em homologia, isto é,

$$i_k = H_k(G, i) : H_k(G, M') \rightarrow H_k(G, M)$$

$$j_k = H_k(G, j) : H_k(G, M) \rightarrow H_k(G, M'').$$

(ii) Para todo inteiro n , existe uma aplicação natural $\delta^n : H^n(G, M'') \rightarrow H^{n+1}(G, M')$, tal que a seqüência:

$$0 \rightarrow H^0(G, M') \xrightarrow{i^0} H^0(G, M) \xrightarrow{j^0} H^0(G, M'') \xrightarrow{\delta^0} H^1(G, M') \xrightarrow{i^1} H^1(G, M) \xrightarrow{j^1} \dots$$

é exata, onde as aplicações i^k e j^k são as induzidas em cohomologia, isto é,

$$i^k = H^k(G, i) : H^k(G, M') \rightarrow H^k(G, M)$$

$$j^k = H^k(G, j) : H^k(G, M) \rightarrow H^k(G, M'').$$

Demonstração: Seja

$$\dots \rightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow Z \rightarrow 0$$

uma resolução projetiva de Z sobre ZG .

(i) Como cada F_n é ZG -projetivo, temos que

$$0 \rightarrow F_n \otimes_{ZG} M' \xrightarrow{id \otimes i} F_n \otimes_{ZG} M \xrightarrow{id \otimes j} F_n \otimes_{ZG} M'' \rightarrow 0$$

é exata para todo n ([14], I.9.E). Assim, temos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & \rightarrow & F_n \otimes_{ZG} M' & \xrightarrow{id \otimes i} & F_n \otimes_{ZG} M & \xrightarrow{id \otimes j} & F_n \otimes_{ZG} M'' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & F_{n-1} \otimes_{ZG} M' & \xrightarrow{id \otimes i} & F_{n-1} \otimes_{ZG} M & \xrightarrow{id \otimes j} & F_{n-1} \otimes_{ZG} M'' \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

com cada linha exata, isto é, temos a seqüência exata de complexos de cadeias:

$$0 \rightarrow F \otimes_{ZG} M' \rightarrow F \otimes_{ZG} M \rightarrow F \otimes_{ZG} M'' \rightarrow 0.$$

Portanto, por [6], I.0.4, temos a seqüência exata longa em homologia:

$$\begin{aligned} \dots & \rightarrow H_1(F \otimes_{ZG} M') \xrightarrow{i_1} H_1(F \otimes_{ZG} M) \xrightarrow{j_1} H_1(F \otimes_{ZG} M'') \xrightarrow{\partial_1} H_0(F \otimes_{ZG} M') \xrightarrow{i_0} \\ & \rightarrow H_0(F \otimes_{ZG} M) \xrightarrow{j_0} H_0(F \otimes_{ZG} M'') \rightarrow 0 \end{aligned}$$

ou seja, nos dá a seqüência exata longa desejada:

$$\cdots \longrightarrow H_1(G, M) \xrightarrow{j_1} H_1(G, M'') \xrightarrow{\partial_1} H_0(G, M') \xrightarrow{i_0} H_0(G, M) \xrightarrow{j_0} H_0(G, M'') \longrightarrow 0.$$

(ii) Analogamente, como cada F_n é ZG -projetivo, temos que

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{ZG}(F_n, M') \longrightarrow \text{Hom}_{ZG}(F_n, M) \longrightarrow \text{Hom}_{ZG}(F_n, M'') \longrightarrow 0$$

é exata para todo n ([14], I.9.4(e)). Daí, temos uma seqüência exata curta de complexos de cocadeias:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{ZG}(F, M') \longrightarrow \text{Hom}_{ZG}(F, M) \longrightarrow \text{Hom}_{ZG}(F, M'') \longrightarrow 0$$

que nos dá a seqüência exata longa em cohomologia:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(\text{Hom}_{ZG}(F, M')) \xrightarrow{i^0} H^0(\text{Hom}_{ZG}(F, M)) \xrightarrow{j^0} H^0(\text{Hom}_{ZG}(F, M'')) \xrightarrow{\delta^0} \\ &\longrightarrow H^1(\text{Hom}_{ZG}(F, M')) \xrightarrow{i^1} H^1(\text{Hom}_{ZG}(F, M)) \longrightarrow \cdots \end{aligned}$$

ou seja, a seqüência exata longa desejada:

$$0 \longrightarrow H^0(G, M') \xrightarrow{i^0} H^0(G, M) \xrightarrow{j^0} H^0(G, M'') \xrightarrow{\delta^0} H^1(G, M') \xrightarrow{i^1} H^1(G, M) \xrightarrow{j^1} \cdots$$

■

Como Funtores de Duas Variáveis

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria cujos objetos são pares (G, M) , onde G é um grupo e M um ZG -módulo. Um morfismo em $\mathcal{C}$ de (G, M) em (G', M') é um par (α, f) , onde $\alpha : G \rightarrow G'$ é um homomorfismo de grupos, e $f : M \rightarrow M'$ é um homomorfismo de ZG -módulos, considerando M' como um ZG -módulo via α , isto é, um homomorfismo de ZG -módulos satisfazendo: $f(g * m) = \alpha(g) \cdot f(m)$.

Consideremos $(\alpha, f) : (G, M) \rightarrow (G', M')$, F uma resolução projetiva de Z sobre ZG e F' uma resolução projetiva de Z sobre ZG' (podemos ver F' como uma resolução de Z sobre ZG via α , pois cada F_n pode ser visto como um ZG -módulo, definindo a ação: $g * x' = \alpha(g) \cdot x'$).

Como F é ZG -projetivo e F' é acíclico para $i \geq 1$ (pois F' é ZG' -resolução), temos pelo lema 4.1.1 (ver Apêndice), que existe uma aplicação de cadeia $\tau : F \rightarrow F'$, estendendo a identidade de Z , única a menos de homotopia.

Temos que $\tau(g \cdot x) = g * \tau(x) = \alpha(g) \cdot \tau(x)$, pois τ é homomorfismo de ZG -módulos.

Consideremos, agora:

$$\begin{aligned} \tau \otimes f : F \otimes_{ZG} M &\rightarrow F' \otimes_{ZG'} M' \\ x \otimes m &\mapsto \tau(x) \otimes f(m) \end{aligned}$$

Tal aplicação é uma aplicação de cadeia entre os complexos $F \otimes_{ZG} M$ e $F' \otimes_{ZG'} M'$, daí, $\tau \otimes f$ induz uma aplicação bem definida:

$$\begin{aligned} H_*(\alpha, f) &\stackrel{\text{not.}}{=} (\alpha, f)_* : H_*(G, M) \rightarrow H_*(G', M') \\ [x \otimes m] &\mapsto [(\tau \otimes f)(x \otimes m)] = [\tau(x) \otimes f(m)]. \end{aligned}$$

Verifica-se facilmente que:

(a) Se $M = M'$, $G = G'$, $\alpha = id_G$ e $f = id_M$, então

$$(\alpha, f)_* = id_{H_*(G, M)}.$$

(b) Se $(\alpha, f) : (G, M) \rightarrow (G', M')$ e $(\alpha', f') : (G', M') \rightarrow (G'', M'')$, então

$$(\alpha', f')_* \circ (\alpha, f)_* = (\alpha' \circ \alpha, f' \circ f)_* \stackrel{\text{not.}}{=} ((\alpha', f') \circ (\alpha, f))_*.$$

Logo, $H_*(-, -)$ é um funtor covariante em $\mathcal{C}$.

Para a cohomologia, vamos considerar uma categoria $\mathcal{D}$ cujos objetos são os mesmos que em $\mathcal{C}$, e os morfismos são pares (α, f) , onde $\alpha : G \rightarrow G'$ e $f : M' \rightarrow M$ (f é dessa forma pois Hom é contravariante na primeira variável).

Sejam F e F' resoluções projetivas de Z sobre ZG e ZG' , respectivamente. Pelos mesmos argumentos usados anteriormente, temos que existe uma aplicação de cadeia $\tau : F \rightarrow F'$, única a menos de homotopia. Temos que $\tau(g \cdot x) = g * \tau(x)$ (pois τ é aplicação de ZG -módulos).

Consideremos a aplicação de cocadeias:

$$\begin{aligned} Hom(\tau, f) : Hom_{ZG'}(F', M') &\rightarrow Hom_{ZG}(F, M) \\ \phi &\mapsto f \circ \phi \circ \tau \end{aligned}$$

Tal aplicação é uma aplicação de cadeia entre os complexos $\text{Hom}_{ZG'}(F', M')$ e $\text{Hom}_{ZG}(F, M)$, daí, $\text{Hom}(\tau, f)$ induz uma aplicação bem definida:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\tau, f)^* &\stackrel{\text{not}}{=} (\alpha, f)^* : H^*(G', M') \rightarrow H^*(G, M) \\ &[\phi] \mapsto [f \circ \phi \circ \tau]. \end{aligned}$$

Verifica-se facilmente que:

(a) Se $\alpha = \text{id}_G : G \rightarrow G$ e $f = \text{id}_M : M \rightarrow M$, então

$$(\alpha, f)^* = \text{id}_{H^*(G, M)}.$$

(b) Se $(\alpha, f) : (G, M') \rightarrow (G', M)$ e $(\beta, g) : (G', M'') \rightarrow (G'', M')$, então

$$((\beta, g) \circ (\alpha, f))^* = (\alpha, f)^* \circ (\beta, g)^*.$$

Logo, $H^*(-, -)$ é um funtor contravariante em $\mathcal{D}$.

Observação 2.3.1 *Sejam $R = \mathbb{Z}$, G um grupo e H um subgrupo de G . Consideremos $\alpha : H \hookrightarrow G$ a inclusão e as ZH -aplicações canônicas já vistas na observação 1.6.4: $i : M \rightarrow \text{Ind}_H^G M$ e $\pi : \text{Coind}_H^G M \rightarrow M$. É fácil ver que os isomorfismos da proposição 2.2.1 (Lema de Shapiro), são dados, respectivamente, por*

$$(\alpha, i)_* : H_*(H, M) \rightarrow H_*(G, \text{Ind}_H^G M)$$

$$(\alpha, \pi)^* : H^*(G, \text{Coind}_H^G M) \rightarrow H^*(H, M).$$

Tais isomorfismos são chamados **isomorfismos de Shapiro**.

2.4 Interpretação Topológica para $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$

Nesta seção, vamos relacionar a (co)homologia de um grupo G com a (co)homologia do espaço $K(G, 1)$, definido anteriormente.

Vamos denotar $C_*(-, \mathbb{Z})$ por $C_*(-)$, e proceder do mesmo modo para a (co)homologia.

Proposição 2.4.1 *Sejam X um G -complexo livre e Y o complexo de órbitas X/G . Então $C_*(Y) \simeq C_*(X)_G$.*

Demonstração: Consideremos a projeção canônica

$$\begin{aligned} p: X &\rightarrow X/G \\ x &\mapsto p(x) = G(x) = \{g \cdot x; g \in G\} \end{aligned}$$

Em nível de complexo de cadeias, temos a aplicação induzida

$$\begin{aligned} p_{\#}: C_n(X) &\rightarrow C_n(X/G) \\ \sum a_i \sigma_i &\mapsto \sum a_i G(\sigma_i) \end{aligned}$$

onde σ_i são n -células de X .

Agora, seja

$$\begin{aligned} \gamma: C_n(X) &\rightarrow C_n(X)_G = C_n(X)/A \\ \alpha &\mapsto \bar{\alpha} = \alpha + A \end{aligned}$$

onde $A = \langle g \cdot \alpha - \alpha; g \in G, \alpha \in C_n(X) \rangle$.

Vamos definir

$$\begin{aligned} \varphi: C_n(X)_G &\rightarrow C_n(X/G) \\ \bar{\alpha} &\mapsto \varphi(\bar{\alpha}) = \varphi(\overline{\sum a_i \sigma_i}) = p_{\#}(\alpha) = \sum a_i G(\sigma_i) \end{aligned}$$

• φ está bem definida.

De fato: $A \subset \text{Ker } p_{\#}$, pois, se σ_i é uma n -célula e $g \in G$, temos

$$p_{\#}(g \cdot \sigma_i - \sigma_i) = p_{\#}(g \cdot \sigma_i) - p_{\#}(\sigma_i) = G(g \cdot \sigma_i) - G(\sigma_i) = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x = \sum_i (g_i \cdot \alpha_i - \alpha_i), \alpha_i \in C_n(X) \\ &\Rightarrow x = \sum_i \left(g_i \sum_j \sigma_j^i - \sum_j \sigma_j^i \right) = \sum_{i,j} (g_i \cdot \sigma_j^i - \sigma_j^i). \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } p_{\#}(x) = p_{\#} \left(\sum_{i,j} (g_i \cdot \sigma_j^i - \sigma_j^i) \right) = 0.$$

Deste modo,

$$\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 \Rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2) \in A \subset \text{Ker } p_{\#} \Rightarrow p_{\#}(\alpha_1) = p_{\#}(\alpha_2) \Rightarrow \varphi(\bar{\alpha}_1) = \varphi(\bar{\alpha}_2).$$

É fácil ver que φ é homomorfismo de grupos.

Além disso,



- φ é sobrejetora.

De fato:

$$\forall x = \sum a_i G(\sigma_i) \in C_n(X/G), \exists y = \sum a_i \bar{\sigma}_i \in C_n(X)_G \text{ tal que } \varphi(y) = x.$$

- φ é injetora.

De fato:

$$\varphi\left(\sum a_i \sigma_i\right) = 0 \Rightarrow \sum a_i G(\sigma_i) = 0 \Rightarrow a_i = 0.$$

Logo,

$$\sum a_i \sigma_i = 0 \Rightarrow \sum a_i \bar{\sigma}_i = 0.$$

Portanto, φ é isomorfismo. ■

Proposição 2.4.2 Se Y é um $K(G, 1)$ -complexo, então $H_*(G) \simeq H_*(Y)$.

Demonstração: Como Y é um $K(G, 1)$, pela proposição 1.4.2, temos que o complexo celular aumentado do recobrimento universal $\tilde{Y}$ de Y , $\varepsilon : C_*(\tilde{Y}) \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

Deste modo, $H_*(G) \simeq H_*(C_*(\tilde{Y})_G)$.

Além disso, $\tilde{Y}$ é um G -complexo livre, e por [16], 5.5.14, temos que o complexo de órbitas é dado por $\tilde{Y}/G \simeq Y$.

Assim, pela proposição 2.4.1, $C_*(\tilde{Y})_G \simeq C_*(Y)$.

Logo,

$$H_*(G) \simeq H_*(C_*(\tilde{Y})_G) \simeq H_*(C_*(Y)) \simeq H_*(Y). \quad \blacksquare$$

Exemplo 2.4.1 Consideremos o bouquet de círculos $Y = \bigvee_{s \in S} S_s^1$.



Pelo exemplo 1.4.9, temos que Y é um $K(F(S), 1)$, onde $F(S)$ é o grupo livre gerado pelo conjunto S .

Assim, pela proposição anterior

$$H_i(Y) = H_i(F(S)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z} & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Exemplo 2.4.2 Seja Y a soma conexa de n toros.

Pelo exemplo 1.4.10, Y é um $K(G, 1)$, onde $G = \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \rangle$

Portanto, pela proposição anterior

$$H_i(Y) = H_i(G) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} & (2g \text{ vezes}) \text{ se } i = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } i = 2 \\ 0 & \text{se } i \geq 3. \end{cases}$$

Exemplo 2.4.3 Sejam $G \simeq \mathbb{Z}^{(n)} \simeq \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ e $Y = T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ (toro n -dimensional).

Pelo exemplo 1.4.8, T^n é um $K(G, 1)$.

Logo,

$$H_i(G) = H_i(T^n) = \mathbb{Z}^{k_i}, \quad k_i = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Proposição 2.4.3 Se G tem torção, então não existe $K(G, 1)$ -complexo de dimensão finita. Em particular, $K(G, 1)$ não pode ser variedade.

Demonstração: Seja t um elemento de torção de G .

Consideremos $H = \langle t \rangle$ o grupo cíclico finito de ordem n .

Suponhamos que exista um $K(G, 1)$ -complexo de dimensão finita m , e consideremos $\tilde{Y}$ o recobrimento universal de Y . Então, pela proposição 1.4.2:

$$0 \rightarrow C_m(\tilde{Y}) \rightarrow C_{m-1}(\tilde{Y}) \rightarrow \dots \rightarrow C_1(\tilde{Y}) \rightarrow C_0(\tilde{Y}) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

é uma resolução projetiva de $\mathbf{Z}$ sobre $\mathbf{Z}G$.

Além disso, pelo lema 1.2.2, tal resolução também é resolução projetiva de $\mathbf{Z}$ sobre $\mathbf{Z}H$.

Deste modo, temos $H_i(H) = 0, \forall i > m$, o que é um absurdo, pelo exemplo 2.1.3.

Logo, não existe $K(G, 1)$ de dimensão finita.

Agora, se $K(G, 1) = M^n$ (variedade de dimensão n), $K(G, 1)$ seria um complexo de dimensão finita, portanto não pode ser variedade.

■

Proposição 2.4.4 *Se Y é um $K(G, 1)$ -complexo, então $H^*(G) \simeq H^*(Y)$.*

Demonstração: Seja $X \xrightarrow{p} Y$ recobrimento universal de Y .

Já vimos que $\varepsilon : C_*(X) \rightarrow \mathbf{Z}$ é uma resolução livre de $\mathbf{Z}$ sobre $\mathbf{Z}G$.

Vamos mostrar que $\text{Hom}_{\mathbf{Z}G}(C_*(X), \mathbf{Z}) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(C_*(X)_G, \mathbf{Z})$.

De fato: Consideremos as aplicações:

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Hom}_{\mathbf{Z}G}(C_*(X), \mathbf{Z}) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(C_*(X)_G, \mathbf{Z}) \\ f &\mapsto \varphi(f); \varphi(f)(1 \otimes u) = f(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi : \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(C_*(X)_G, \mathbf{Z}) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Z}G}(C_*(X), \mathbf{Z}) \\ g &\mapsto \psi(g); \psi(g)(u) = g(1 \otimes u) \end{aligned}$$

Temos que φ e ψ são homomorfismos e $\varphi^{-1} = \psi$.

Assim, φ é isomorfismo.

Deste modo, temos

$$\begin{aligned} H^*(G) &\stackrel{\text{not.}}{=} H^*(G, \mathbf{Z}) = H^*(\text{Hom}_{\mathbf{Z}G}(C_*(X), \mathbf{Z})) \stackrel{\text{prop.2.1.1}}{\simeq} H^*(\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(C_*(X)_G, \mathbf{Z})) \\ &\stackrel{\text{prop.2.4.1}}{\simeq} H^*(\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(C_*(X/G), \mathbf{Z})) \\ &\simeq H^*(\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(C_*(Y), \mathbf{Z})) \\ &= H^*(Y, \mathbf{Z}) \\ &\stackrel{\text{not.}}{=} H^*(Y). \end{aligned}$$

Logo, $H_*(G) \simeq H^*(Y)$.

O exemplo a seguir nos mostra que, em geral, a homologia do espaço X é diferente da homologia do grupo X .

Exemplo 2.4.4 Seja $X = \mathbb{R}$. Temos que $\mathbb{R}$ é um CW-complexo de dimensão 1 e $(\mathbb{R}, +)$ é um grupo. Consideremos dois casos:

- $\mathbb{R}$ como um espaço:

$$H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Z}) = \pi_1(\mathbb{R})_{ab} = \{0\}_{ab} = \{0\}.$$

- $\mathbb{R}$ como um grupo:

$$H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Z}) = H_1(K(\mathbb{R}, 1), \mathbb{Z}) = \pi_1(K(\mathbb{R}, 1))_{ab} = \mathbb{R}_{ab} = \mathbb{R}.$$

Assim, a homologia do CW-complexo $\mathbb{R}$ é diferente da homologia do grupo $\mathbb{R}$.

Lema 2.4.1 Seja A um grupo abeliano com G -ação trivial. Temos

- $F \otimes_{ZG} A \simeq F_G \otimes_Z A$.
- $\text{Hom}_{ZG}(F, A) \simeq \text{Hom}_Z(F_G, A)$.

Demonstração:

- Vamos definir:

$$\begin{aligned} f: F \times A &\rightarrow F_G \otimes_Z A \\ (x, a) &\mapsto f(x, a) := \bar{x} \otimes a. \end{aligned}$$

Verifica-se facilmente que f é biaditiva e, assim, pela propriedade universal do produto tensorial ([17], V.1.1), existe um homomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi: F \otimes_{ZG} A &\rightarrow F_G \otimes_Z A \\ x \otimes a &\mapsto \varphi(x \otimes a) = \bar{x} \otimes a. \end{aligned}$$

Consideremos, agora

$$\begin{aligned} g: F_G \times A &\rightarrow F \otimes_{ZG} A \\ (\bar{x}, a) &\mapsto g(\bar{x}, a) := x \otimes a. \end{aligned}$$



Mostra-se facilmente que g está bem definida e é biaditiva. Novamente por [17],

V.1.1, temos um homomorfismo bem definido:

$$\begin{aligned}\psi: F_G \otimes_Z A &\rightarrow F \otimes_{ZG} A \\ \bar{x} \otimes a &\mapsto \psi(\bar{x} \otimes a) = x \otimes a.\end{aligned}$$

As aplicações φ e ψ são tais que uma é inversa da outra.

Logo,

$$F \otimes_{ZG} A \simeq F_G \otimes_Z A.$$

(b) Consideremos as aplicações:

$$\begin{aligned}\theta: \text{Hom}_{ZG}(F, A) &\rightarrow \text{Hom}_Z(F_G, A) \\ f &\mapsto \theta(f); \theta(f)(\bar{x}) = f(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho: \text{Hom}_Z(F_G, A) &\rightarrow \text{Hom}_{ZG}(F, A) \\ g &\mapsto \rho(g); \rho(g)(x) = g(\bar{x}).\end{aligned}$$

Tais aplicações são homomorfismos e, $\theta = \rho^{-1}$.

Portanto,

$$\text{Hom}_{ZG}(F, A) \simeq \text{Hom}_Z(F_G, A).$$

Proposição 2.4.5 *Se M é um ZG -módulo trivial, então*

$$(a) H_*(G, M) \simeq H_*(K(G, 1), M)$$

$$(b) H^*(G, M) \simeq H^*(K(G, 1), M).$$

Demonstração: Seja $Y = K(G, 1)$ e X o recobrimento universal de Y . Temos

$$\begin{aligned}(a) H_*(G, M) &= H_*(C_*(X, \mathbf{Z}) \otimes_{ZG} M) \stackrel{\text{lema 2.4.1(a)}}{\simeq} H_*(C_*(X, \mathbf{Z})_G \otimes_Z M) \\ &\stackrel{\text{not.}}{=} H_*(C_*(X)_G \otimes_Z M) \\ &\stackrel{\text{prop. 2.4.1}}{\simeq} H_*(C_*(Y) \otimes_Z M) \\ &= H_*(Y, M).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \ H^*(G, M) &= H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C_*(X, \mathbb{Z}), M)) \stackrel{\text{lema 2.4.1(b)}}{\simeq} H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X, \mathbb{Z})_G, M)) \\
 &\stackrel{\text{not.}}{=} H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X)_G, M)) \\
 &\stackrel{\text{prop. 2.4.1}}{\simeq} H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(Y), M)) \\
 &= H^*(Y, M).
 \end{aligned}$$

Observação 2.4.1 Existe, também, uma interpretação topológica para $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$ considerando-se M como um $\mathbb{Z}G$ -módulo não trivial:

- $H_*(G, M) \simeq H_*(K(G, 1), \mathcal{M})$
- $H^*(G, M) \simeq H^*(K(G, 1), \mathcal{M})$

onde $\mathcal{M}$ é o sistema de coeficientes locais associado ao RG -módulo M ([11]).

2.5 Os Grupos $H_1(G, M)$ e $H^1(G, M)$

Sabemos que, dado um grupo G , sempre podemos tomar a resolução projetiva $\varepsilon : F \rightarrow \mathbb{Z}$ como sendo a resolução padrão:

$$\cdots \longrightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

onde cada F_n é o $\mathbb{Z}G$ -módulo livre gerado pelos símbolos $[g_1] \dots [g_n]$ e

$$\partial_n([g_1] \dots [g_n]) = g_1[g_2] \dots [g_n] + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [g_1] \dots [g_i g_{i+1}] \dots [g_n] + (-1)^n ([g_1] \dots [g_{n-1}]).$$

Denotaremos $C_*(G, M)$ para o complexo $F \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ e $C^*(G, M)$ para $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, M)$. Assim, temos $C_n(G, M) = F_n \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ e $C^n(G, M) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_n, M)$.

Um elemento de $C_n(G, M)$ pode ser expresso unicamente como uma soma finita de elementos da forma $m \otimes [g_1] \dots [g_n]$.

O operador bordo $\bar{\partial}_n : C_n(G, M) \rightarrow C_{n-1}(G, M)$ é dado por:

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_n(m \otimes [g_1 | \dots | g_n]) &= m \otimes \partial_n[g_1 | \dots | g_n] \\ &= m \otimes g_1[g_2 | \dots | g_n] + m \otimes \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [g_1 | \dots | g_i g_{i+1} | g_{i+2} | \dots | g_n] \\ &\quad + (-1)^n m \otimes [g_1 | \dots | g_{n-1}].\end{aligned}$$

Agora, um elemento $f \in C^n(G, M)$ é um homomorfismo:

$$\begin{aligned}f : F_n &\rightarrow M \\ [g_1 | \dots | g_n] &\mapsto f([g_1 | \dots | g_n]).\end{aligned}$$

Deste modo, identificando $(g_1, \dots, g_n)$ com $[g_1 | \dots | g_n]$, f pode ser vista como uma função de n variáveis $f : G^n \rightarrow M$. Se $n = 0$, então, por convenção, G^0 é um conjunto com um elemento (por exemplo, $[]$), de forma que $C^0(G, M) \simeq M$.

O operador cobordo $\delta^{n-1} : C^{n-1}(G, M) \rightarrow C^n(G, M)$ é dado por:

$$\begin{aligned}(\delta^{n-1}(f))(g_1, \dots, g_n) &:= f(\partial_n(g_1, \dots, g_n)) \\ &= g_1 f(g_2, \dots, g_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n) \\ &\quad + (-1)^n f(g_1, \dots, g_{n-1}).\end{aligned}$$

Vejamos dois exemplos:

- $n = 1$: $\delta^0(f)(g_1) = f(\partial_1(g_1)) = g_1 f([]) - f([])$.
- $n = 2$: $\delta^1(f)(g_1, g_2) = g_1 f(g_2) - f(g_1 g_2) + f(g_1)$.

Proposição 2.5.1 Para todo grupo G , temos

$$H_1(G, \mathbb{Z}) \simeq G/[G, G] = G_{ab}.$$

Demonstração:

$$H_1(G, \mathbb{Z}) \simeq H_1(K(G, 1), \mathbb{Z}) = \pi_1(K(G, 1))_{ab} = G_{ab}.$$

■



Corolário 2.5.1 Se M é um ZG -módulo trivial, então

$$H_1(G, M) \simeq G_{ab} \otimes M.$$

Demonstração: Por [6], pag.60, temos

$$H_1(G, M) \simeq H_1(G, \mathbb{Z}) \otimes M \oplus \text{Tor}(H_0(G, \mathbb{Z}), M).$$

Além disso, pela proposição 2.1.3, $H_0(G, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_G$.

Mas, considerando a G -ação trivial, temos $\mathbb{Z}_G = \mathbb{Z}$, e pela proposição anterior, $H_1(G, \mathbb{Z}) \simeq G_{ab}$.

Assim,

$$H_1(G, M) \simeq G_{ab} \otimes M \oplus \text{Tor}(\mathbb{Z}, M).$$

Agora, por [28], pag.80, temos $\text{Tor}(\mathbb{Z}, M) = 0$, daí,

$$H_1(G, M) \simeq G_{ab} \otimes M.$$

■

Lema 2.5.1 $\text{Hom}(G, M) \simeq \text{Hom}(G_{ab}, M)$.

Demonstração: Vamos definir:

$$\begin{aligned} \psi : \text{Hom}(G, M) &\rightarrow \text{Hom}(G_{ab}, M) \\ f &\mapsto \psi(f); \quad \psi(f)(\bar{x}) := f(x) \end{aligned}$$

onde $x \in G$ e $\bar{x}$ denota um elemento de G_{ab} .

É fácil ver que ψ está bem definida e é homomorfismo de grupos.

Agora, consideremos a aplicação:

$$\begin{aligned} \theta : \text{Hom}(G_{ab}, M) &\rightarrow \text{Hom}(G, M) \\ g &\mapsto \theta(g) := g \circ p \end{aligned}$$

onde $p : G \rightarrow G_{ab}$ é a projeção canônica ($p(x) = \bar{x}$).

Pode-se verificar que θ está bem definida. As aplicações ψ e θ são tais que uma é inversa da outra, pois:

- $(\theta \circ \psi)(f)(\bar{x}) = \theta(f(x)) = (f \circ p)(x) = f(p(x)) = f(\bar{x})$.
- $(\psi \circ \theta)(g)(x) = \psi(g \circ p)(x) = \psi(g(p(x))) = \psi(g(\bar{x})) = g(x)$.

Portanto ψ é isomorfismo. ■

Definição 2.5.1 *Sejam G um grupo e M um ZG -módulo. O grupo das derivações de G em M é definido por:*

$$D = \{d : G \rightarrow M; d(gh) = d(g) + gd(h)\}$$

e, o subgrupo das derivações principais, por:

$$D_p = \{d \in D; d(g) = g \cdot m - m, m \in M \text{ fixo}\}.$$

Proposição 2.5.2 *Se G é um grupo e M um ZG -módulo, então temos um isomorfismo:*

$$H^1(G, M) \simeq \frac{D}{D_p}.$$

Em particular, se G atua trivialmente em M , então

$$H^1(G, M) \simeq \text{Hom}(H_1(G), M).$$

Demonstração: Consideremos o complexo de cocadeias $C^*(G, M)$:

$$0 \longrightarrow C^0(G, M) \xrightarrow{\delta^0} C^1(G, M) \xrightarrow{\delta^1} C^2(G, M) \longrightarrow \dots$$

$$\text{Temos } H^1(G, M) = \frac{\text{Ker } \delta^1}{\text{Im } \delta^0}.$$

Mostremos que $\text{Ker } \delta^1 = D$ e $\text{Im } \delta^0 = D_p$.

De fato: Seja $f \in C^1(G, M)$. Assim, $f : G \rightarrow M$ e $\delta^1(f) : G^2 \rightarrow M$, onde

$$\delta^1(f)(g, h) = gf(h) - f(gh) + f(g).$$

Deste modo,

$$f \in \text{Ker } \delta^1 \Leftrightarrow \delta^1(f) = 0 \Leftrightarrow \delta^1(f)(g, h) = 0 \Leftrightarrow f(gh) = f(g) + gf(h) \Leftrightarrow f \in D.$$

Logo, $\text{Ker } \delta^1 = D$.



Consideremos, agora, $v \in \text{Im } \delta^0$. Então, existe $f : G^0 \rightarrow M$ tal que $v = \delta^0(f)$.

Daí, $v(g) = \delta^0(f)(g) = gf([]) - f([])$.

Como $f([]) \in M$, temos $f([]) = m \in M$, assim, $v(g) = g \cdot m - m$, e consequentemente, $v \in D_p$.

Reciprocamente,

$$v \in D_p \Rightarrow v(g) = g \cdot m - m = \delta^0(f)(g),$$

onde $f : G^0 \rightarrow M$ é tal que $f([]) := m$ e, portanto, $v = \delta^0(f) \in \text{Im } \delta^0$.

Logo, $\text{Im } \delta^0 = D_p$.

Então,

$$H^1(G, M) \simeq \frac{D}{D_p}.$$

Agora, se G atua trivialmente em M , temos

$$\begin{aligned} D &= \{d : G \rightarrow M; d(gh) = d(g) + gd(h)\} \\ &= \{d : G \rightarrow M; d(gh) = d(g) + d(h)\} \\ &= \text{Hom}(G, M) \end{aligned}$$

$$D_p = \{d \in D; d(g) = g \cdot m - m\} = \{0\}.$$

Deste modo,

$$H^1(G, M) = \text{Hom}(G, M) \stackrel{\text{lema 2.5.1}}{\simeq} \text{Hom}(G_{ab}, M) \stackrel{\text{prop. 2.5.1}}{\simeq} \text{Hom}(H_1(G), M).$$

2.6 Tor e Ext

Existem generalizações de $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$ dadas, respectivamente, por

$$\text{Tor}_*^G(-, -) \quad \text{e} \quad \text{Ext}_G^*(-, -)$$

obtidas da definição 2.1.1, sem a exigência de que $\varepsilon : F \rightarrow M$ seja uma resolução do módulo particular Z .

Nesta seção, vamos estudar tais generalizações, e considerar alguns resultados importantes sobre as mesmas.

Nota: Vamos considerar $R = \mathbb{Z}$, e tratar $\mathbb{Z}G$ -módulos por G -módulos.

Definição 2.6.1 *Sejam $\varepsilon : F \rightarrow M$ e $\eta : P \rightarrow N$ resoluções projetivas dos G -módulos M e N . Definimos*

$$\mathrm{Tor}_*^G(M, N) := H_*(F \otimes_G N) \stackrel{(I)}{=} H_*(F \otimes_G P) \stackrel{(II)}{=} H_*(M \otimes_G P),$$

onde as igualdades (I) e (II) seguem, respectivamente, do fato das aplicações $F \otimes \eta : F \otimes_G P \rightarrow F \otimes_G N$ e $\varepsilon \otimes P : F \otimes_G P \rightarrow M \otimes_G P$ serem equivalências fracas ([6], I.8.6).

Observação 2.6.1 *Segue da definição que $H_*(G, -) = \mathrm{Tor}_*^G(\mathbb{Z}, -)$.*

De fato: Seja $\varepsilon : F \rightarrow \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva.

Temos:

$$\mathrm{Tor}_*^G(\mathbb{Z}, N) = H_*(F \otimes_G N) = H_*(G, N).$$

Definição 2.6.2 *Seja $\varepsilon : F \rightarrow M$ uma resolução projetiva de M sobre $\mathbb{Z}G$. Definimos*

$$\mathrm{Ext}_G^*(M, N) := H^*(\mathrm{Hom}_G(F, N)).$$

Observação 2.6.2 *Segue que $H^*(G, -) = \mathrm{Ext}_G^*(\mathbb{Z}, -)$.*

De fato: Seja $\varepsilon : F \rightarrow \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva.

Temos:

$$\mathrm{Ext}_G^*(\mathbb{Z}, N) = H^*(\mathrm{Hom}_G(F, N)) = H^*(G, N).$$

Definição 2.6.3 *Um R -módulo Q é injetivo se o funtor $\mathrm{Hom}_R(-, Q)$ é exato.*



Observação 2.6.3 Se $\eta : N \rightarrow Q$ é uma resolução injetiva de N e $\varepsilon : F \rightarrow Z$ é uma resolução projetiva de Z , então η e ε induzem equivalências fracas ([6], pag.60):

$$\text{Hom}_G(F, N) \rightarrow \text{Hom}_G(F, Q) \leftarrow \text{Hom}_G(Z, Q)$$

Logo,

$$H^*(G, N) = H^*(\text{Hom}_G(F, N)) \simeq H^*(\text{Hom}_G(F, Q)) \simeq H^*(\text{Hom}_G(Z, Q)) \stackrel{\text{prop.1.5.2}}{\simeq} H^*(Q^G).$$

Assim, se tivermos $\varepsilon : F \rightarrow M$ e $\eta : N \rightarrow Q$:

$$\text{Ext}_G^*(M, N) = H^*(\text{Hom}_G(F, N)) \simeq H^*(\text{Hom}_G(F, Q)) \simeq H^*(\text{Hom}_G(M, Q)).$$

Proposição 2.6.1 Sejam $\varepsilon : F \rightarrow M$ e $\eta : P \rightarrow N$ resoluções, não necessariamente projetivas. Se F ou P é um complexo de módulos planos, então

$$\text{Tor}_*^G(M, N) \simeq H_*(F \otimes_G P).$$

Demonstração: Suponhamos que F seja plano.

Consideremos $\tilde{\eta} : \tilde{P} \rightarrow N$ uma resolução projetiva.

$$\begin{array}{ccccccccccc} \tilde{P} : & \longrightarrow & \tilde{P}_n & \longrightarrow & \tilde{P}_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \tilde{P}_0 & \xrightarrow{\tilde{\eta}} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & & & \downarrow f_0 & & \downarrow id & & \\ P : & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & P_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Como $\tilde{P}$ é projetivo e P é acíclico temos, pelo lema 4.1.1 (ver Apêndice), que existe uma aplicação de cadeia $f : \tilde{P} \rightarrow P$, preservando aumentação, única a menos de homotopia.

Temos que f é equivalência fraca, pois $f_* : H_*(\tilde{P}) \rightarrow H_*(P)$ é isomorfismo.

Deste modo, por [6], I.8.6, temos que

$$F \otimes f : F \otimes_G \tilde{P} \rightarrow F \otimes_G P$$

é equivalência fraca.

Portanto, $H_*(F \otimes_G \tilde{P}) \simeq H_*(F \otimes_G P)$.

Agora, $\varepsilon : F \rightarrow M$ também é equivalência fraca, e $\tilde{P}$ é plano (pois é projetivo).

Assim, novamente por [6], I.8.6, temos que:

$$\varepsilon \otimes \tilde{P} : F \otimes_G \tilde{P} \rightarrow M \otimes_G \tilde{P}$$

é equivalência fraca.

Portanto, $H_*(F \otimes_G \tilde{P}) \simeq H_*(M \otimes_G \tilde{P})$.

Logo,

$$Tor_*^G(M, N) = H_*(M \otimes_G \tilde{P}) \simeq H_*(F \otimes_G \tilde{P}) \simeq H_*(F \otimes_G P).$$

■

Uma maneira de se construir uma resolução de um módulo M é começar com uma resolução $\varepsilon : F \rightarrow Z$, e tensorizá-la com M , obtendo:

$$\varepsilon \otimes M : F \otimes M \rightarrow Z \otimes M \simeq M.$$

Esta será uma resolução sob algumas hipóteses em F e/ou M .

Vejamos um exemplo deste fato.

Exemplo 2.6.1 Suponhamos que F seja Z -livre. Por [6], I.7.6, temos que ε é uma equivalência de homotopia, se ignorarmos a G -ação. Então, o mesmo vale para $\varepsilon \otimes M : F \otimes M \rightarrow M$.

De fato: Como ε é uma equivalência de homotopia, existe $n : Z \rightarrow F$, tal que $n \circ \varepsilon \sim id_F$ e $\varepsilon \circ n \sim id_Z$.

Além disso, existem $h : F \rightarrow F$ e $H : Z \rightarrow Z$, tais que:

$$h_{n-1} \circ \partial_n + \partial_{n+1} \circ h_n = n \circ \varepsilon - id_F$$

$$H_{n-1} \circ \partial'_n + \partial'_{n+1} \circ H_n = id_Z.$$

Consideremos $\bar{h} = h \otimes id_M$ e $\bar{H} = H \otimes id_M$.

Assim, temos que $\bar{h}$ é uma homotopia de cadeia entre $\bar{n} \circ \bar{\varepsilon}$ e $\bar{id}_{F \otimes M}$, e $\bar{H}$ é uma homotopia de cadeia entre $\bar{\varepsilon} \circ \bar{n}$ e $\bar{id}_{Z \otimes M}$.

Logo, $\bar{\varepsilon} = \varepsilon \otimes id_M = \varepsilon \otimes M$ é uma equivalência de homotopia.

Queremos mostrar que o complexo:

$$\longrightarrow F_1 \otimes M \xrightarrow{\bar{\partial}_1} F_0 \otimes M \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} M \longrightarrow 0 \quad (*)$$

é exato e, portanto, uma resolução de M .

Temos que $F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow Z \longrightarrow 0$ é exato, e como o produto tensorial é exato à direita, temos que o complexo $(*)$ é exato. Deste modo, $Im \bar{\partial}_1 = Ker \bar{\varepsilon}$.

Como $\varepsilon \otimes M$ é equivalência de homotopia, temos:

$$H_i(F \otimes M) = H_i(M) = \begin{cases} 0 & \text{se } i > 0 \\ M & \text{se } i = 0. \end{cases}$$

onde M é visto como um complexo.

Portanto, $\bar{\varepsilon} : F \otimes M \rightarrow M$ é uma resolução de M .

Alternativamente, podemos usar o teorema dos coeficientes universais ([6], I.0.8), pois F é livre e Z é domínio de ideais principais.

Dessa forma,

$$0 \longrightarrow H_n(F) \otimes M \longrightarrow H_n(F \otimes M) \longrightarrow Tor_1^R(H_{n-1}(F), M) \longrightarrow 0$$

cinde e, portanto,

$$H_n(F \otimes M) = H_n(F) \otimes M \oplus Tor(H_{n-1}(F), M) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \geq 1 \\ M & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

onde $H_0(F) = Z$ e $H_n(F) = 0$, para $n > 0$.

Logo,

$$H_*(F \otimes M) = H_*(F) \otimes M = M$$

onde M é visto como um complexo.

Este método será usado para mostrar que Tor_*^G e Ext_G^* podem ser computados em termos de $H_*(G, -)$ e $H^*(G, -)$.

Lema 2.6.1 $Hom(F_n \otimes M, N) \simeq Hom(F_n, Hom(M, N))$.



Demonstração: Vamos definir:

$$\begin{array}{ccc} \psi : \operatorname{Hom}(F_n \otimes M, N) & \rightarrow & \operatorname{Hom}(F_n, \operatorname{Hom}(M, N)) \\ f & \mapsto & \psi(f) \end{array}$$

onde $f : F_n \otimes M \rightarrow N$ é tal que:

$$\begin{array}{ccc} \psi(f) : F_n & \rightarrow & \operatorname{Hom}(M, N) \\ x & \mapsto & \psi(f)(x); \psi(f)(x)(m) = f(x \otimes m). \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \operatorname{Hom}(F_n, \operatorname{Hom}(M, N)) & \rightarrow & \operatorname{Hom}(F_n \otimes M, N) \\ g & \mapsto & \varphi(g) \end{array}$$

onde $g : F_n \rightarrow \operatorname{Hom}(M, N)$ é tal que:

$$\begin{array}{ccc} \varphi(g) : F_n \otimes M & \rightarrow & N \\ x \otimes m & \mapsto & \varphi(g)(x \otimes m) = g(x)(m). \end{array}$$

Verifica-se facilmente que ψ e φ são homomorfismos, e $\varphi = \psi^{-1}$.

Logo,

$$\operatorname{Hom}(F_n \otimes M, N) \simeq \operatorname{Hom}(F_n, \operatorname{Hom}(M, N)).$$

Proposição 2.6.2 *Sejam M e N G -módulos. Se M é $\mathbb{Z}$ -livre de torção, então*

$$\operatorname{Tor}_*^G(M, N) \simeq H_*(G, M \otimes N),$$

onde G atua diagonalmente em $M \otimes N$.

Se M é $\mathbb{Z}$ -livre, então

$$\operatorname{Ext}_G^*(M, N) \simeq H^*(G, \operatorname{Hom}(M, N)),$$

onde G atua diagonalmente em $\operatorname{Hom}(M, N)$.

Demonstração: Consideremos $\varepsilon : F \rightarrow \mathbb{Z}$ uma $\mathbb{Z}G$ -resolução projetiva. Assim, cada F_i é plano (pois é projetivo).

Como M é $\mathbb{Z}$ -livre de torção (isto é, $\mathbb{Z}$ -plano), temos por [6], pag.56, que $F_i \otimes M$ é $\mathbb{Z}G$ -plano, onde $F_i \otimes M$ é um G -módulo com ação diagonal.

Deste modo, $\varepsilon \otimes M : F \otimes M \rightarrow M$ é resolução plana (como M é $\mathbf{Z}$ -plano, temos que o funtor $F \otimes -$ é exato).

Assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{Tor}_*^G(M, N) &\stackrel{\text{prop.2.6.1}}{\simeq} H_*((F \otimes M) \otimes_G N) \stackrel{\text{prop.2.1.1}}{=} H_*((F \otimes M \otimes N)_G) \\ &\stackrel{\text{prop.2.1.1}}{=} H_*(F \otimes_G (M \otimes N)) \\ &= H_*(G, M \otimes N). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{Tor}_*^G(M, N) \simeq H_*(G, M \otimes N).$$

Agora, como cada F_i é projetivo e M é $\mathbf{Z}$ -livre, por [6], pag.56, temos que $F_i \otimes M$ é projetivo (com G -ação diagonal).

Logo, $\varepsilon \otimes M : F \otimes M \rightarrow M$ é uma resolução projetiva de M (como M é $\mathbf{Z}$ -livre, é também $\mathbf{Z}$ -plano, e assim, o funtor $F \otimes -$ é exato).

Então,

$$\begin{aligned} \operatorname{Ext}_G^*(M, N) &\stackrel{\text{def.}}{=} H^*(\operatorname{Hom}_G(F \otimes M, N)) \stackrel{\text{prop.2.1.2}}{=} H^*(\operatorname{Hom}(F \otimes M, N)^G) \\ &\stackrel{\text{lema2.6.1}}{\simeq} H^*((\operatorname{Hom}(F, \operatorname{Hom}(M, N)))^G) \\ &\stackrel{\text{prop.2.1.2}}{=} H^*(\operatorname{Hom}_G(F, \operatorname{Hom}(M, N))) \\ &= H^*(G, \operatorname{Hom}(M, N)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\operatorname{Ext}_G^*(M, N) \simeq H^*(G, \operatorname{Hom}(M, N)).$$

Observação 2.6.4 É importante notar que Tor e Ext podem ser definidos sobre um anel arbitrário R , usando as mesmas definições que são dadas para G -módulos. Necessitamos somente ter o cuidado sobre quais módulos são à esquerda e quais são à direita.

Assim,

$$\operatorname{Tor}_*^R(M, N) = H_*(F \otimes_R N) = H_*(M \otimes_R P)$$

é definido quando M é um R -módulo (à direita) e P é um R -módulo (à esquerda), e

$$\text{Ext}_R^*(M, N) = H^*(\text{Hom}_R(F, N)), \quad \varepsilon : F \rightarrow M$$

é definido quando ambos, M e N , são R -módulos (à direita), ou ambos (à esquerda).



Capítulo 3

Condições de Finitude - Grupos de Dualidade

No estudo da homologia e cohomologia de espaços topológicos (que pode ser, por exemplo, a homologia singular), alguns espaços se destacam por terem homologias “boas”. Por exemplo, se M for uma variedade n -dimensional ou se X for um CW -complexo finito com células de dimensão n , só haverá (co)homologia não nula até no máximo índice n .

Ainda no estudo de variedades, a homologia e a cohomologia podem satisfazer, sob certas hipóteses, algumas condições de dualidade. Por exemplo, se X é uma variedade fechada orientável n -dimensional, então

$$H^k(M, \mathbb{Z}) \simeq H_{n-k}(M, \mathbb{Z}) \quad (\text{Dualidade de Poincaré}).$$

Neste capítulo, em analogia com a teoria de variedades e CW -complexos, estudaremos sob quais hipóteses a (co)homologia de um grupo G satisfaz certas propriedades de finitude. Por exemplo, veremos sob que condições G tem homologia não nula até um certo índice n , e satisfaz certas propriedades de dualidade.

3.1 Dimensão Cohomológica

Consideremos G um grupo típico abstrato.

Definição 3.1.1 *Sejam R um anel e M um R -módulo. A dimensão projetiva de M , denotada por $\text{proj dim } M$ ou $\text{proj dim}_R M$, é definida como sendo o ínfimo do conjunto*

de inteiros n , tal que M admite uma resolução projetiva:

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

de comprimento n .

Em particular, se M não admite uma resolução projetiva de comprimento finito, $\text{proj dim } M = \infty$.

Lema 3.1.1 Se M é um R -módulo, então são equivalentes as seguintes condições:

(i) $\text{proj dim } M \leq n$.

(ii) $\text{Ext}_R^i(M, -) = 0$ para $i > n$.

(iii) $\text{Ext}_R^{n+1}(M, -) = 0$.

(iv) Se $0 \longrightarrow K \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ é qualquer seqüência exata de R -módulos com cada P_i projetivo, então K é projetivo.

Demonstração: É imediato, em vista das definições 2.6.2 e 3.1.1, as implicações $(iv) \Rightarrow (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.

Resta mostrar que $(iii) \Rightarrow (iv)$.

Consideremos a seqüência exata:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

É possível completá-la arbitrariamente a uma resolução projetiva do modo a seguir.

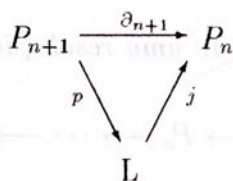
Seja P_n o R -módulo livre gerado por K . Temos, então o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} P_n & \xrightarrow{\partial_n} & P_{n-1} \\ & \searrow q & \nearrow i \\ & K & \end{array}$$

onde q é a sobrejeção natural de P_n em K , i é a inclusão e $\partial_n = i \circ q$.

Sejam $L = \text{Ker } \partial_n$ e P_{n+1} o R -módulo livre gerado por L . Novamente temos um diagrama:





onde p é sobrejeção, j é inclusão e $\partial_{n+1} = j \circ p$.

É claro que $\text{Im } \partial_{n+1} = L = \text{Ker } \partial_n$.

Procedendo deste modo, obtemos a resolução projetiva:

$$\cdots \longrightarrow P_{n+2} \xrightarrow{\partial_{n+2}} P_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

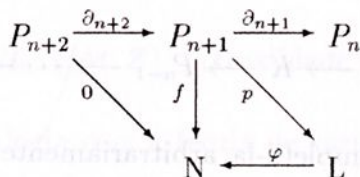
Aplicando o funtor $\text{Hom}_R(-, N)$, onde N é um R -módulo, a esta resolução, obtemos:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \text{Hom}_R(P_0, N) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \text{Hom}_R(P_n, N) \xrightarrow{\delta^n} \text{Hom}_R(P_{n+1}, N) \xrightarrow{\delta^{n+1}}$$

Por hipótese, $\text{Ext}_R^{n+1}(M, -) = H^{n+1}(\text{Hom}_R(P, -)) = 0$. Assim, $\frac{\text{Ker } \delta^{n+1}}{\text{Im } \delta^n} = 0$, isto é, todo cociclo em $\text{Hom}_R(P_{n+1}, N)$ é também um cobordo.

Agora, $f \in \text{Ker } \delta^{n+1} \Leftrightarrow \delta^{n+1}(f) = 0 \Leftrightarrow f \circ \partial_{n+2} = 0$.

Consideremos o seguinte diagrama:



A partir do cociclo f , podemos definir uma aplicação $\varphi : L \rightarrow N$, da seguinte forma:

Como p é sobrejetora, temos que :

$$\forall u \in L, \exists x \in P_{n+1} \text{ tal que } p(x) = u.$$

Deste modo, definimos $\varphi(u) := f(x)$. Provemos que φ está bem definida.

De fato: Se existir outro elemento $x' \in P_{n+1}$ tal que $p(x') = u$, então $p(x - x') = u - u = 0$.

Logo, $x - x' \in \text{Ker } p = \text{Im } \partial_{n+2}$. Assim, existe $v \in P_{n+2}$, tal que $\partial_{n+2}(v) = x - x'$.



Daí,

$$f(x - x') = f(\partial_{n+2}(v)) = 0 \Rightarrow f(x) = f(x').$$

Note também que $f = \varphi \circ p$.

Afirmção 1: f é um cobordo se, e somente se, a aplicação $\varphi : L \rightarrow N$ se estende a uma aplicação $\tilde{\varphi} : P_n \rightarrow N$.

De fato: Se f é cobordo, então $f \in \text{Im } \delta^n$. Logo, existe $\tilde{\varphi} : P_n \rightarrow N$, tal que

$$f = \delta^n(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi} \circ \partial_{n+1}.$$

Provemos que $\tilde{\varphi}$ estende φ , isto é, $\varphi(l) = \tilde{\varphi}(l)$, $\forall l \in L$.

Seja $l \in L$. Como $L = \text{Ker } \partial_n = \text{Im } \partial_{n+1}$, temos que existe $x \in P_{n+1}$ tal que $l = \partial_{n+1}(x)$.

Assim,

$$\tilde{\varphi}(l) = \tilde{\varphi}(\partial_{n+1}(x)) = (\tilde{\varphi} \circ \partial_{n+1})(x) = \delta^n(\tilde{\varphi})(x) = f(x) \stackrel{\text{def. } \varphi}{=} \varphi(l).$$

Reciprocamente, se $\varphi : L \rightarrow N$ se estende a uma aplicação $\tilde{\varphi} : P_n \rightarrow N$, consideremos $p(x) = l \in L = \text{Im } \partial_{n+1}$, $\forall x \in P_{n+1}$.

Deste modo,

$$f(x) = \varphi(l) = \tilde{\varphi}(l) = \tilde{\varphi}(p(x)) = \tilde{\varphi}((j \circ p)(x)) = \tilde{\varphi}(\partial_{n+1}(x)) = (\tilde{\varphi} \circ \partial_{n+1})(x) = \delta^n(\tilde{\varphi})(x).$$

Portanto, $f = \delta^n(\tilde{\varphi})$, ou seja, f é um cobordo.

Afirmção 2: Toda aplicação $\varphi : L \rightarrow N$ se estende a uma aplicação $\tilde{\varphi} : P_{n+1} \rightarrow N$.

De fato: Para provar isso, basta construir um cociclo $f : P_{n+1} \rightarrow N$, usar a hipótese (todo cociclo é um cobordo), e aplicar a afirmação 1.

Seja $\varphi : L \rightarrow N$ uma aplicação qualquer.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_{n+2} & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & P_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & P_n \longrightarrow \cdots \\ & & & & \downarrow f & \searrow p & \\ & & & & N & \xleftarrow{\varphi} & L \end{array}$$

Consideremos $f : P_{n+1} \rightarrow N$ dada por $f = \varphi \circ p$. Mostremos que f é um cociclo.

$$\delta^{n+1}(f)(x) = (f \circ \partial_{n+2})(x) = (\varphi \circ p \circ \partial_{n+2})(x) = \varphi(p(\partial_{n+2}(x))) = 0,$$

pois, $\partial_{n+2}(x) \in \text{Ker } \partial_{n+1} = \text{Ker } p$.

Como f também é um cobordo, por hipótese, temos pela afirmação 1, que φ se estende a uma aplicação $\tilde{\varphi}$, o que demonstra a afirmação 2.

Aplicando tal afirmação para $N = L$ e $\varphi = id$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{j} & P_n & \xrightarrow{q} & K \quad (*) \\ & & \downarrow \varphi = id & \nearrow \tilde{\varphi} & & & \\ & & L & & & & \end{array}$$

temos que existe $\tilde{\varphi} : P_n \rightarrow N$ tal que $\tilde{\varphi} \circ j = id$, isto é, a seqüência exata $(*)$ cinde.

Logo, $P_n = L \oplus K$.

Como P_n é livre, temos pelo lema 1.1.1(iii) que K é projetivo.

■

A partir de agora, nesta seção, a menos que se especifique o contrário, vamos considerar o caso $R = \mathbb{Z}G$, $M = \mathbb{Z}$, e tratar $\mathbb{Z}G$ -módulos por G -módulos.

Definição 3.1.2 A dimensão cohomológica do grupo G sobre R , denotada por $cd G$ ou $cd_R G$, é definida como sendo o menor inteiro n tal que as condições do lema 3.1.1 são válidas. Caso contrário, temos $cd G = \infty$.

Deste modo,

$$\begin{aligned} cd G &= \text{proj dim}_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \\ &= \inf\{n : \mathbb{Z} \text{ admite uma resolução projetiva de comprimento } n\} \\ &= \inf\{n : H^i(G, -) = 0 \text{ para } i > n\} \\ &= \sup\{n : H^n(G, M) \neq 0 \text{ para algum } G\text{-módulo } M\}. \end{aligned}$$



Observação 3.1.1 Se Z admite uma resolução projetiva sobre ZG de comprimento finito, isto é,

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

então, $cd\ G \leq n$.

Observação 3.1.2 Temos $cd\ G \geq 0$, pois

$$H^0(G, Z) \stackrel{\text{prop.2.1.4}}{\simeq} Z^G \simeq Z \neq 0.$$

Existe um análogo topológico da dimensão cohomológica de G dada pela dimensão geométrica, definida a seguir.

Definição 3.1.3 A dimensão geométrica do grupo G , denotada por $geom\ dim\ G$, é definida como sendo a dimensão mínima de um $K(G, 1)$ -complexo.

Proposição 3.1.1 $cd\ G \leq geom\ dim\ G$.

Demonstração: Desde que, pela proposição 1.4.2, o complexo de cadeia celular do recobrimento universal de um $K(G, 1)$ -complexo Y dá origem a uma resolução de Z sobre ZG (de comprimento igual a dimensão de Y), segue o resultado. ■

Exemplo 3.1.1 $cd\ G = 0$ se, e somente se, G é o grupo trivial.

De fato:

($\Leftarrow$) Se $G = \{1\}$, temos

$$H^i(G, M) = \begin{cases} M^G & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{se } i \neq 0. \end{cases}$$

Como

$$H^0(G, Z) \stackrel{\text{prop.2.1.4}}{\simeq} Z^G = Z \quad (\text{pois a } G\text{-ação é trivial})$$

temos $cd\ G = 0$.

($\Rightarrow$) Suponhamos $cd\ G = 0$. Deste modo, G não tem torção, pois caso contrário, teríamos $cd\ G = \infty$ (pelo corolário 2.1.2).

Afirmção: Se $cd\ G = 0$, então Z é ZG -projetivo.

De fato: Como $cd\ G = 0$, temos por definição, $proj\ dim_{ZG} Z = 0$, ou seja, Z admite uma resolução projetiva:

$$0 \longrightarrow P_0 \longrightarrow Z \longrightarrow 0.$$

Assim, $Z \simeq P_0$. Como P_0 é ZG -projetivo, temos que Z é ZG -projetivo.

Consideremos $\varepsilon : ZG \rightarrow Z$ a aplicação aumentação:

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \varphi \swarrow & \downarrow id & \\ ZG & \xrightarrow{\varepsilon} & Z \end{array}$$

Como Z é ZG -projetivo, temos por definição, que existe uma ZG -aplicação $\varphi : Z \rightarrow ZG$ tal que $\varepsilon \circ \varphi = id$.

Temos: $\varphi(Z) \subset ZG$ e $\varphi(Z) \neq \{0\}$.

Seja $\alpha \in \varphi(Z)$, $\alpha \neq 0$. Então, $\alpha = \varphi(n)$, para algum $n \in Z$.

Agora, $g \cdot \alpha = g \cdot \varphi(n) = \varphi(gn) = \varphi(n) = \alpha$.

Assim, $\alpha \in (ZG)^G$, ou seja, $\varphi(Z) \subset (ZG)^G$.

Logo,

$$0 \neq (ZG)^G = (Ind_{\{1\}}^G Z)^G.$$

Pelo lema 1.6.5, G é finito. Como G não tem torção, temos $G = \{1\}$.

Exemplo 3.1.2 G é livre não trivial se, e somente se, $cd\ G = 1$

De fato: Se G é livre, temos $G = F(S)$ (grupo livre gerado por um conjunto S).

Pelo exemplo 1.4.9,

$$0 \longrightarrow ZG^{(S)} \longrightarrow ZG \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de Z sobre ZG de comprimento 1. Assim, pela observação 3.1.1 temos $cd\ G \leq 1$.



Se $cd\ G = 0$ teríamos, pelo exemplo anterior, $G = \{1\}$.

Portanto, $cd\ G = 1$.

Reciprocamente, um teorema de Stallings e Swan garante que todo grupo cuja dimensão cohomológica é igual a 1 é livre ([25] e [26]).

Exemplo 3.1.3 *Seja G o grupo fundamental de uma superfície conexa fechada (exceto S^2 ou P^2). Então, $cd\ G = 2$.*

De fato: Pelo exemplo 1.4.10, temos que Y é um $K(G, 1)$ 2-dimensional, e assim, $cd\ G \leq 2$.

Pela proposição 2.4.5, temos que $H^2(G, \mathbb{Z}_2) \simeq H^2(Y, \mathbb{Z}_2)$.

Além disso, por [13], III.22.30, $H^2(Y, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$.

Logo, $cd\ G = 2$.

Exemplo 3.1.4 *Seja $Y = T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ (toro n -dimensional).*

Vimos no exemplo 1.4.8 que Y é um $K(G, 1)$ -complexo n -dimensional, e temos que $H^n(Y, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \neq 0$ ([13], III.22.28).

Portanto, $cd\ G = n$.

Exemplo 3.1.5 *Seja G um grupo cíclico infinito.*

Pelo exemplo 2.1.2, temos

$$\begin{cases} H^0(G, M) = M^G \\ H^1(G, M) = M_G \\ H^i(G, M) = 0 \text{ para } i \geq 2. \end{cases}$$

Assim, $cd\ G \leq 1$. Como $H^1(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, segue que $cd\ G = 1$.

Exemplo 3.1.6 *Consideremos G o grupo finito de ordem n .*

Pelo exemplo 2.1.3, temos

$$H^i(G, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ \mathbb{Z}_n & \text{se } i \text{ é par.} \end{cases}$$

Logo, $cd\ G = \infty$.



Proposição 3.1.2 Se $cd\ G < \infty$, então

$$cd\ G = \sup\{k : H^k(G, F) \neq 0, \text{ para algum } \mathbb{Z}G\text{-módulo livre } F\}.$$

Demonstração: Seja $n = cd\ G$. Então, por definição, $H^n(G, M) \neq 0$, para algum $\mathbb{Z}G$ -módulo M .

Tomemos $M \simeq F/F'$, onde F é livre. Daí, temos a sequência exata curta:

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Aplicando a sequência exata longa de cohomologia, dada pela proposição 2.3.1(ii):

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(G, F') \longrightarrow H^0(G, F) \longrightarrow H^0(G, M) \longrightarrow \cdots \longrightarrow H^n(G, F') \longrightarrow H^n(G, F) \longrightarrow \\ &\longrightarrow H^n(G, M) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

observamos que o funtor $H^n(G, -)$ é exato à direita.

Como, por hipótese, $H^n(G, M) \neq 0$, para algum M , segue que $H^n(G, F) \neq 0$, para algum módulo livre F aplicado sobre M . Do fato de

$$\{k : H^k(G, F) \neq 0, \text{ para algum } F \text{ livre}\} \subset \{k : H^k(G, M) \neq 0, \text{ para algum } M\}$$

temos o resultado desejado. ■

Proposição 3.1.3 Seja H um subgrupo de G . Então,

$$cd\ H \leq cd\ G.$$

A igualdade é válida se $cd\ G < \infty$ e $(G : H) < \infty$.

Demonstração: Seja $cd\ H = n$. Então, por definição, existe M tal que $H^n(H, M) \neq 0$ e $H^k(H, M) = 0$, $k > n$.

Mas,

$$H^n(H, M) \stackrel{\text{Shapiro}}{\simeq} H^n(G, \text{Coind}_H^G M).$$

Deste modo, $H^n(G, \text{Coind}_H^G M) \neq 0$, ou seja, existe $N = \text{Coind}_H^G M$, tal que $H^n(G, N) \neq 0$. Assim, $\text{cd } G \geq n$.

Logo, $\text{cd } H \leq \text{cd } G$.

Alternativamente, o resultado segue do fato de que uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ pode também ser considerada como uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$.

Consideremos, agora, as hipóteses $\text{cd } G < \infty$ e $(G : H) < \infty$.

Seja $\text{cd } G = n$. Pela proposição 3.1.2, existe um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre F , com $H^n(G, F) \neq 0$.

Seja F' um $\mathbb{Z}H$ -módulo de mesmo posto que F . Assim, podemos escrever

$$F = \bigoplus_{j \in J} (\mathbb{Z}G)_j \quad \text{e} \quad F' = \bigoplus_{j \in J} (\mathbb{Z}H)_j$$

Temos:

$$\text{Ind}_H^G F' = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} F' = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} \left(\bigoplus_{j \in J} \mathbb{Z}H \right)_j = \bigoplus_{j \in J} (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z}H)_j \simeq \bigoplus_{j \in J} (\mathbb{Z}G)_j = F.$$

Deste modo,

$$H^n(G, F) = H^n(G, \text{Ind}_H^G F') \stackrel{\text{prop. 1.6.5}}{\simeq} H^n(G, \text{Coind}_H^G F') \stackrel{\text{Shapiro}}{\simeq} H^n(H, F').$$

Visto que $H^n(G, F) \neq 0$, temos $H^n(H, F') \neq 0$. Como, pela primeira parte da proposição, $\text{cd } H \leq \text{cd } G$, devemos ter necessariamente, $\text{cd } H = n$.

■

Corolário 3.1.1 Se $\text{cd } G < \infty$, então G é livre de torção.

Demonstração: Suponhamos que G não seja livre de torção. Dessa forma, G contém um subgrupo H cíclico finito não trivial.

Pelo exemplo 2.1.3, temos $\text{cd } H = \infty$. Então, pela proposição anterior, $\text{cd } G = \infty$, o que nos dá uma contradição. Logo, G é livre de torção.

■

Observação 3.1.3 Se H é um subgrupo de G tal que $(G : H) < \infty$, então a proposição 3.1.3 garante a igualdade $cd H = cd G$, a menos que ocorra o seguinte:

$$cd G = \infty \quad e \quad cd H < \infty \quad (*)$$

A seguir, dois exemplos do caso (*).

Exemplo 3.1.7 Seja $G = \mathbb{Z}_2$ e $H = \{1\}$.

Temos: $(G : H) = 2$, $cd G = \infty$ e $cd H = 0$.

Exemplo 3.1.8 Mais geralmente, se G é qualquer grupo com torção, então pelo corolário 3.1.1, temos $cd G = \infty$. No entanto, G pode ter vários subgrupos H livres de torção de índice finito, com $cd H < \infty$. Considerando, por exemplo, $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ e $H = \mathbb{Z}$, temos $cd H = 1$ e $cd G = \infty$.

Nos dois exemplos anteriores, o grupo G sempre tem torção, e assim, $cd G = \infty$. E se G for livre de torção, pode ocorrer o caso (*)? O próximo teorema, devido a Serre, o qual enunciaremos sem demonstração, responde essa questão.

Teorema 3.1.1 (Teorema de Serre [23]) Se G é um grupo livre de torção e H um subgrupo de índice finito, então $cd H = cd G$.

Demonstração: [6], VIII.3.1

Lema 3.1.2 ("Truque de Eilenberg") Se P é um módulo projetivo sobre um anel arbitrário R , então existe um módulo livre F tal que $P \oplus F \simeq F$.

Demonstração: Primeiramente, é importante destacar que F será de posto infinito, em geral, mesmo que P seja finitamente gerado.

Como P é projetivo, temos pelo lema 1.1.1(i) que existe um módulo Q tal que $P \oplus Q$ é livre.



Seja F a soma direta enumerável:

$$F = (P \oplus Q) \oplus (P \oplus Q) \oplus \dots$$

Assim, F é livre, pois é soma direta de módulos livres. Além disso, F pode ser escrito como a soma direta enumerável de cópias de P e Q , da seguinte forma:

$$F \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} P \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} Q \right).$$

Acrescentando-se mais uma cópia de P , não causamos nenhuma alteração.

Deste modo, $P \oplus F \simeq F$.

■

Proposição 3.1.4 *Para qualquer grupo G , existe uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento igual a $cd\ G$.*

Demonstração: Seja $n = cd\ G$. Podemos supor $0 < n < \infty$.

Vamos escolher uma resolução livre parcial:

$$F_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} F_{n-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

de comprimento $(n-1)$, e considerar $P = Ker\ \partial_{n-1}$ (para $n=1$, temos $F_{-1} = \mathbb{Z}$).

Pelo lema 3.1.1(iv), temos que P é projetivo. Consequentemente, o lema 3.1.2 nos dá um módulo livre F , tal que $P \oplus F$ é livre.

Agora, se trocarmos F_{n-1} por $F_{n-1} \oplus F$, e colocarmos $\partial_{n-1}|_F = 0$, obtemos uma resolução livre parcial de comprimento $(n-1)$, com $Ker\ \partial_{n-1}$ livre:

$$0 \longrightarrow P \oplus F \simeq F \xrightarrow{(i, id)} F_{n-1} \oplus F \xrightarrow{\partial_{n-1}} F_{n-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Portanto, segue o resultado.

■

3.2 Resoluções de Tipo Finito

Nesta seção, vamos estudar um tipo diferente de condição de finitude, exigindo que P seja uma resolução projetiva com cada P_i finitamente gerado. Consideramos aqui alguns fatos gerais a respeito de tais resoluções sobre um anel arbitrário R .

Lema 3.2.1 (Lema de Schanuel) *Sejam*

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad 0 \longrightarrow K' \xrightarrow{i'} P' \xrightarrow{\pi'} M \longrightarrow 0$$

seqüências exatas, com P e P' projetivos. Então, $P \oplus K' \simeq P' \oplus K$.

Demonstração: Seja Q o submódulo de $P \times P'$, consistindo dos pares (p, p') tais que $\pi(p) = \pi'(p')$.

Temos que o diagrama abaixo é comutativo, com linhas e colunas exatas:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & 0 & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & K' & \xrightarrow{id} & K' & \\ & & & \downarrow_{x'} & & \downarrow_{i'} & \\ 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{x} & Q & \xrightarrow{p_2} & P' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow_{id} & & \downarrow_{p_1} & & \downarrow_{\pi'} \\ 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{\pi} & M \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

onde $x'(k') = (0, i(k'))$, $x(k) = (i(k), 0)$, $p_1(p, p') = p$ e $p_2(p, p') = p'$.

De fato: Usando a hipótese, basta provar que as seqüências:

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{x} Q \xrightarrow{p_2} P' \longrightarrow 0 \quad (\text{I}) \quad \text{e} \quad 0 \longrightarrow K' \xrightarrow{x'} Q \xrightarrow{p_1} P \longrightarrow 0 \quad (\text{II})$$

são exatas.

Provemos que (I) é exata.

Temos que a aplicação:

$$\begin{aligned} i: K &\rightarrow P \\ k &\mapsto i(k) \end{aligned}$$



é injetora. Deste modo,

$$x(k) = (i(k), 0) = (0, 0) \Leftrightarrow i(k) = 0 \Leftrightarrow k = 0.$$

Logo, x é injetora.

Agora,

$$Im\ x = Im\ i \times \{0\} \stackrel{\text{hip.}}{=} Ker\ \pi \times \{0\}.$$

$$\begin{aligned} Ker\ p_2 &= \{(p, p') \in Q; p' = 0\} = \{(p, 0); \pi(p) = \pi'(0)\} = \{(p, 0); \pi(p) = 0\} \\ &= \{(p, 0); p \in Ker\ \pi\} \\ &= Ker\ \pi \times \{0\}. \end{aligned}$$

Portanto, $Im\ x = Ker\ p_2$. Assim, (I) é exata.

Por raciocínio análogo, prova-se que (II) é exata.

Como, por hipótese P é projetivo, temos por definição que existe uma aplicação $\varphi : P \rightarrow Q$ tal que $p_1 \circ \varphi = id$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & P & & & \\ & & & \downarrow id & & & \\ 0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{p_1} & P \longrightarrow 0 \quad (*) \\ & & & \nearrow \varphi & & & \end{array}$$

Assim, pelo lema 1.1.1(i), a seqüência (*) cinde, ou seja, $Q = P \oplus K'$.

Da mesma forma, como P' é projetivo, existe $\psi : P' \rightarrow Q$ tal que $p_2 \circ \psi = id$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & P' & & & \\ & & & \downarrow id & & & \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & Q & \xrightarrow{p_2} & P' \longrightarrow 0 \quad (**) \\ & & & \nearrow \psi & & & \end{array}$$

Portanto, pelo lema 1.1.1(i), a seqüência (**) cinde, ou seja, $Q = P' \oplus K$.

Logo, $P \oplus K' \simeq P' \oplus K$.

■

Proposição 3.2.1 *As seguintes condições sobre um R -módulo M são equivalentes:*

- (i) *Existe uma seqüência exata $R^m \rightarrow R^n \rightarrow M \rightarrow 0$, para m, n inteiros.*
- (ii) *Existe uma seqüência exata $P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, para módulos projetivos finitamente gerados P_0, P_1 .*
- (iii) *M é finitamente gerado e, para toda sobrejeção $\varepsilon : P \rightarrow M$, com P finitamente gerado e projetivo, $\text{Ker } \varepsilon$ é finitamente gerado.*

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Imediato.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Por hipótese, temos a seqüência exata:

$$P_1 \xrightarrow{x} P_0 \xrightarrow{p} M \rightarrow 0$$

onde P_0 e P_1 são módulos projetivos finitamente gerados.

Consideremos a sobrejeção $\varepsilon : P \rightarrow M$, com P projetivo e finitamente gerado.

Como P_1 é finitamente gerado, temos que $\text{Im } x$ é finitamente gerado.

Seja $P_0 = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle$, assim, $M = \langle p(\alpha_1), \dots, p(\alpha_r) \rangle$.

Consideremos as seqüências exatas:

$$0 \rightarrow \text{Ker } p \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \text{Ker } \varepsilon \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Aplicando o lema 3.2.1 a estas seqüências, obtemos

$$P_0 \oplus \text{Ker } \varepsilon \simeq P \oplus \text{Ker } p$$

Como P_0 , P e $\text{Ker } p = \text{Im } x$ são finitamente gerados, temos que $\text{Ker } \varepsilon$ é finitamente gerado.

Logo, (ii) $\Rightarrow$ (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i) Consideremos $M = \langle S \rangle$, onde S é um conjunto finito de geradores para M , e F_1 o R -módulo livre gerado por S . Assim $F_1 \simeq R^n$.

Seja $\varepsilon : F_1 \rightarrow M$ a sobrejeção natural. Temos que $\text{Ker } \varepsilon$ é finitamente gerado.



Consideremos agora, $\text{Ker } \varepsilon = \langle S' \rangle$, onde S' é finito e F_2 o R -módulo livre gerado por S' . Daí, $F_2 \simeq R^m$.

Dessa forma, temos a seqüência exata:

$$R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Logo, (iii) $\Rightarrow$ (i).

■

Definição 3.2.1 O R -módulo M é dito **finitamente apresentado** se as condições da proposição 3.2.1 são válidas. Uma seqüência exata como em (i), fornece uma **apresentação finita** de M , com n geradores e m relações.

Nota: Note que a implicação (i) $\Rightarrow$ (iii), da proposição 3.2.1 aplicada quando P é livre, se reduz ao seguinte fato: se M admite alguma apresentação finita, então todo conjunto finito $x_1, \dots, x_k$ de geradores de M tem a propriedade que, as relações entre eles, isto é, as k -uplas $(r_1, \dots, r_k)$ tais que $\sum r_i x_i = 0$, formam um submódulo finitamente gerado de R^k .

Definição 3.2.2 Uma resolução ou resolução parcial (P_i) é de **tipo finito** se cada P_i é finitamente gerado.

Definição 3.2.3 Um módulo M é de **tipo FP_n** ($n \geq 0$), se existe uma resolução projetiva parcial:

$$P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

de tipo finito.

Podemos concluir que, para a condição FP_0 temos: $P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$, e daí, M é finitamente gerado como ZG -módulo. A condição FP_1 é uma apresentação finita: $P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ de M , e as condições $FP_2, FP_3, \dots$, são sucessivos “reforços” da definição de apresentação finita.

O próximo resultado é uma generalização do lema 3.2.1.

Lema 3.2.2 *Sejam*

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow P'_n \xrightarrow{\partial'_n} P'_{n-1} \xrightarrow{\partial'_{n-1}} \cdots \longrightarrow P'_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

seqüências exatas com P_i e P'_i projetivos para $i \leq n-1$. Então

$$P_0 \oplus P'_1 \oplus P_2 \oplus P'_3 \oplus \cdots \simeq P'_0 \oplus P_1 \oplus P'_2 \oplus P_3 \oplus \cdots$$

Conseqüentemente, se P_i e P'_i são finitamente gerados para $i \leq n-1$, então P_n é finitamente gerado se, e somente se, P'_n é finitamente gerado.

Demonstração: Vamos provar por indução.

- Para $n = 1$, temos o lema 3.2.1.
- Suponhamos o lema válido para seqüências exatas com até $(n-1)$ termos (hipótese de indução).
- Provemos que o resultado vale para seqüências de n termos.

$$\text{Sejam } K = \text{Ker } \partial_{n-2} : P_{n-2} \rightarrow P_{n-3} \text{ e } K' = \text{Ker } \partial'_{n-2} : P'_{n-2} \rightarrow P'_{n-3}.$$

Consideremos as seqüências:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} P_{n-3} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow P'_{n-2} \xrightarrow{\partial'_{n-2}} P'_{n-3} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P'_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Pela hipótese de indução, temos

$$K \oplus \overbrace{P'_{n-2} \oplus P_{n-3} \oplus \cdots}^Q \simeq K' \oplus \overbrace{P_{n-2} \oplus P'_{n-3} \oplus \cdots}^{Q'}$$

ou seja, $K \oplus Q \simeq K' \oplus Q'$.

Por outro lado, as seqüências:

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \oplus Q \longrightarrow K \oplus Q \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow P'_n \longrightarrow P'_{n-1} \oplus Q' \longrightarrow K' \oplus Q' \longrightarrow 0$$

são exatas.

De fato: Consideremos

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{j} P_{n-1} \oplus Q \xrightarrow{\alpha} K \oplus Q \longrightarrow 0$$

onde as aplicações j e α são dadas por

$$\begin{aligned} j: P_n &\rightarrow P_{n-1} \oplus Q \\ x &\mapsto j(x) = (\partial_n(x), 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha: P_{n-1} \oplus Q &\rightarrow K \oplus Q \\ (y, q) &\mapsto (\partial_{n-1}(y), q). \end{aligned}$$

Por hipótese, temos $\text{Im } \partial_n = \text{Ker } \partial_{n-1}$ e $\text{Im } \partial'_n = \text{Ker } \partial'_{n-1}$.

Além disso, $\text{Ker } \partial_n = 0$, assim, ∂_n é monomorfismo e portanto, j é monomorfismo.

Agora,

$$\begin{aligned} \text{Im } \alpha &= \{(\partial_{n-1}(y), q); y \in P_{n-1} \text{ e } q \in Q\} = \text{Im } \partial_{n-1} \times Q \stackrel{\text{hip.}}{=} \text{Ker } \partial_{n-2} \times Q \\ &= K \times Q. \end{aligned}$$

Logo, α é sobrejetora.

Mais ainda,

$$\text{Im } j = \text{Im } \partial_n \times \{0\} \stackrel{\text{hip.}}{=} \text{Ker } \partial_{n-1} \times \{0\},$$

e

$$\begin{aligned} \text{Ker } \alpha &= \{(y, q); \alpha(y, q) = (0, 0)\} = \{(y, q); \partial_{n-1}(y) = 0 \text{ e } q = 0\} \\ &= \text{Ker } \partial_{n-1} \times \{0\}. \end{aligned}$$

Logo, $\text{Im } j = \text{Ker } \alpha$.

De modo análogo, prova-se que

$$0 \longrightarrow P'_n \longrightarrow P'_{n-1} \oplus Q' \longrightarrow K' \oplus Q' \longrightarrow 0$$

é exata.

Como $P_{n-1} \oplus Q$ e $P'_{n-1} \oplus Q'$ são projetivos, o lema 3.2.1 nos dá

$$P_n \oplus P'_{n-1} \oplus Q' \simeq P'_n \oplus P_{n-1} \oplus Q$$

ou seja,

$$P_n \oplus P'_{n-1} \oplus P_{n-2} \oplus P'_{n-3} \oplus \dots \simeq P'_n \oplus P_{n-1} \oplus P'_{n-2} \oplus P_{n-3} \oplus \dots$$

O resultado a seguir é uma generalização da proposição 3.2.1.

Proposição 3.2.2 *Para qualquer R -módulo M e qualquer inteiro $n \geq 0$, as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) *Existe uma resolução parcial $F_n \rightarrow \dots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, com cada F_i livre de posto finito.*
- (ii) *M é de tipo FP_n .*
- (iii) *M é finitamente gerado e, para toda resolução projetiva parcial*

$$P_k \xrightarrow{\partial_k} P_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

de tipo finito com $k < n$, $\text{Ker } \partial_k$ é finitamente gerado.

Demonstração:

- (i) $\Rightarrow$ (ii) Imediato.
- (ii) $\Rightarrow$ (iii) Por hipótese, M é de tipo FP_n . Então, existe uma resolução projetiva parcial:

$$P'_n \xrightarrow{\partial'_n} P'_{n-1} \xrightarrow{\partial'_{n-1}} \dots \rightarrow P'_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

de tipo finito (cada P'_i é finitamente gerado).

Como P'_0 é finitamente gerado, temos que M é finitamente gerado.

Temos que $K' = \text{Ker } \partial'_n : P'_n \rightarrow P'_{n-1}$ é finitamente gerado, pois $K' = \text{Im } \partial'_{n+1}$, que é finitamente gerado.



Sejam $P_k \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ uma resolução projetiva parcial e $K = \text{Ker } \partial_k$.

Temos as seqüências exatas

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} P_k \xrightarrow{\partial_k} P_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K' \xrightarrow{i'} P'_n \xrightarrow{\partial'_n} P'_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P'_0 \longrightarrow 0$$

Pelo lema 3.2.2, temos

$$K \oplus P'_n \oplus P_{k-1} \oplus \cdots \simeq K' \oplus P_k \oplus P'_{n-1} \oplus \cdots$$

e K' é finitamente gerado se, e somente se, K é finitamente gerado.

Portanto, K é finitamente gerado.

Logo, (ii) $\Rightarrow$ (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i) Seja $M = \langle S_0 \rangle = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_r \rangle$

Como, por hipótese, M é finitamente gerado, temos que M é de tipo FP_0 .

Tomemos $F_0 = F(S_0)$ (livre gerado por S_0).

Deste modo, existe a sobrejeção

$$F_0 \xrightarrow{\partial_0} M \longrightarrow 0$$

Assim, $\text{Ker } \partial_0$ é finitamente gerado por um conjunto S_1 .

Tomemos $F_1 = F(S_1)$ (livre gerado por S_1).

Logo, temos a seqüência

$$F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\partial_0} M \longrightarrow 0.$$

Procedendo desse modo, sucessivamente até n , obtemos a seguinte resolução parcial:

$$F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

com cada F_i livre de posto finito.

Logo, (iii) $\Rightarrow$ (i).

■

Observação 3.2.1 Segue do isomorfismo dado pelo lema 3.2.2, que P_n é projetivo se, e somente se, P'_n é projetivo. Assim, tal lema nos fornece uma demonstração alternativa da implicação (i) $\Rightarrow$ (iv), dada no lema 3.1.1.

Proposição 3.2.3 As seguintes condições sobre um módulo M são equivalentes:

- (i) M admite uma resolução livre de tipo finito.
- (ii) M admite uma resolução projetiva de tipo finito.
- (iii) M é de tipo FP_n para todo inteiro $n \geq 0$.

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) Imediato.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Por hipótese, M é de tipo FP_n . Logo, M é finitamente gerado. Vamos usar a proposição 3.2.2(iii) para obter uma resolução livre de M de tipo finito. Sejam $M = \langle S \rangle$, onde S é um conjunto finito de geradores de M , e $F(S)$ o grupo livre gerado por S .

Assim, considerando α_0 uma sobrejeção, temos que

$$F(S) \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

é resolução parcial de tipo finito.

Agora, como M é de tipo FP_1 , pela proposição 3.2.2(iii), temos que $\text{Ker } \alpha_0$ é finitamente gerado por S_1 .

Portanto,

$$F(S_1) \xrightarrow{\alpha_1} F(S) \xrightarrow{\alpha_0} M \longrightarrow 0$$

é resolução parcial de tipo finito.

Novamente, como M é de tipo $FP_2, FP_3, \dots, FP_n, \dots$, usando a proposição 3.2.2(iii), procedemos sucessivamente e obtemos uma resolução livre de M de tipo finito.

Logo, (iii) $\Rightarrow$ (i).

■

Definição 3.2.4 Dizemos que M é de tipo FP_∞ se as condições da proposição anterior são válidas.

Fecharemos essa seção mencionando algumas propriedades úteis que os funtores $Tor_*^R(M, -)$ e $Ext_R^*(M, -)$ satisfazem quando M é de tipo FP_∞ , em relação a comutatividade com produtos e limites diretos, respectivamente (para a definição de limite direto, ver Apêndice).

O funtor homológico $Tor_*^R(M, -)$ sempre comuta com limite direto, isto é, se $\{N_i\}_{i \in I}$ é um sistema direto de R -módulos, onde I é um conjunto dirigido, então $Tor_*^R(M, \lim_{\rightarrow i \in I} N_i) = \lim_{\rightarrow i \in I} Tor_*^R(M, N_i)$. Este resultado segue do lema a seguir.

Lema 3.2.3 (a) $P \otimes_R -$ comuta com limites diretos ([24], 5.1.9).

(b) $H_*(-)$ comuta com limites diretos ([24], 4.1.7).

Entretanto, funtores da forma $Hom_R(P, -)$, em geral, não comutam com limites diretos. Assim, não podemos esperar que $Ext_R^*(M, -)$ comute com limites diretos. Mas, podemos provar que isso vale se M é de tipo FP_∞ .

Lema 3.2.4 Se P é um R -módulo projetivo finitamente gerado, então $Hom_R(P, -)$ comuta com limites diretos.

Demonstração: O isomorfismo de dualidade dado pelo lema 1.1.4(b) mostra que, quando P é projetivo finitamente gerado, o funtor $Hom_R(P, -)$ é equivalente ao funtor $P^* \otimes_R -$. Agora, pelo lema 3.2.3(a), temos que o último comuta com limites diretos. Deste modo, segue o resultado. ■

Temos, então a seguinte proposição:

Proposição 3.2.4 Se M é de tipo FP_∞ , então $Ext_R^*(M, -)$ comuta com limites diretos.

Demonstração: Como M é de tipo FP_∞ , temos que existe uma resolução projetiva

$$P : \cdots \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

onde cada P_i é finitamente gerado.

Temos, por definição, que $Ext_R^*(M, -) = H^*(Hom_R(P, -))$.

Seja $N = \varinjlim_{i \in I} N_i$. O complexo

$$0 \rightarrow Hom_R(P_0, N) \rightarrow Hom_R(P_1, N) \rightarrow \cdots \quad (I)$$

nos fornece $Ext_R^*(M, N)$. Mas, pelo lema 3.2.4, $Hom_R(P_n, N) = \varinjlim_{i \in I} Hom_R(P_n, N_i)$. Assim, o complexo (I) é equivalente ao complexo

$$0 \rightarrow \varinjlim_{i \in I} Hom_R(P_0, N_i) \rightarrow \varinjlim_{i \in I} Hom_R(P_1, N_i) \rightarrow \cdots$$

o que nos dá $\varinjlim_{i \in I} Ext_R^*(M, N_i)$.

Logo, $Ext_R^*(M, N) = \varinjlim_{i \in I} Ext_R^*(M, N_i)$. ■

Quando trabalhamos com o funtor $Tor_*^R(M, -)$, temos propriedades similares com relação ao produto direto de módulos. Em geral, $Tor_*^R(M, -)$ não comuta com produtos diretos, mas $Ext_R^*(M, -)$ comuta, isto é,

$$Ext_R^*(M, \prod_{i \in I} N_i) = \prod_{i \in I} Ext_R^*(M, N_i).$$

Isto segue do seguinte lema:

Lema 3.2.5 (a) $Hom_R(P, -)$ comuta com produtos diretos ([14], I.8.4).

(b) $H^*(-)$ comuta com produtos diretos ([21], 7.7.14).

Lema 3.2.6 Se P é finitamente gerado, então $P \otimes_R -$ comuta com produto direto.

Demonstração: O isomorfismo de dualidade dado pelo lema 1.1.4(c), mostra que $P \otimes_R -$ é equivalente a $Hom_R(P^*, -)$.



Pelo lema anterior, este último comuta com produto direto. ■

Podemos, então, mostrar de forma análoga à proposição 3.2.4 o resultado a seguir.

Proposição 3.2.5 *Se M é de tipo FP_∞ , então $Tor_R^*(M, -)$ comuta com produto direto.* ■

Na verdade, estas propriedades de Tor e Ext dadas pelas proposições 3.2.4 e 3.2.5 caracterizam a propriedade FP_∞ , como mostra o seguinte teorema:

Teorema 3.2.1 *As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) M é de tipo FP_∞ .
- (ii) $Ext_R^*(M, -)$ comuta com limites diretos.
- (iii) $Tor_*^R(M, -)$ comuta com produtos diretos.

Omitiremos a demonstração, mas as implicações $(i) \Rightarrow (ii)$ e $(i) \Rightarrow (iii)$ seguem, respectivamente, das proposições 3.2.4 e 3.2.5.

A implicação $(iii) \Rightarrow (ii)$ foi provada por Bieri e Eckmann ([4]), e Brown ([5]) provou a implicação $(ii) \Rightarrow (i)$.

3.3 Grupos de Tipo FP_n

Vamos considerar a teoria da seção 3.2 para o caso $R = ZG$ e $M = Z$.

Definição 3.3.1 *Dizemos que G é de tipo FP_n ($0 \leq n \leq \infty$) se Z é de tipo FP_n como um ZG -módulo.*

Exemplo 3.3.1 *Todo grupo é de tipo FP_0 , pois $ZG \xrightarrow{\varepsilon} Z \rightarrow 0$, onde ε é a aplicação aumentação, é uma resolução parcial de Z sobre ZG de comprimento zero.*

Proposição 3.3.1 *G é de tipo FP_1 se, e somente se, G é finitamente gerado.*



Demonstração:

($\Leftarrow$) Por hipótese, temos $G = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$.

Pelo lema 1.1.5(b), o ideal aumentação I é finitamente gerado, e assim, $I = F/Q$,
com $F = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}G$.

Através da sequência exata de $\mathbb{Z}G$ -módulos:

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

podemos construir uma outra sequência exata de $\mathbb{Z}G$ -módulos:

$$\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}G \xrightarrow{p} I \xrightarrow{i} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

onde $p: F \rightarrow I$ é a projeção.

Sejam $P_1 = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}G$ e $P_0 = \mathbb{Z}G$. Temos a sequência desejada:

$$P_1 \xrightarrow{i \circ p} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Como $\text{Im } i \circ p = \text{Ker } \varepsilon$, temos que essa sequência é uma resolução parcial finita de comprimento 1 de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

Portanto, G é de tipo FP_1 .

($\Rightarrow$) Por hipótese, G é de tipo FP_1 . Então, $\mathbb{Z}$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}G$ -módulo.

Além disso, existe a resolução livre parcial de comprimento finito:

$$F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Pela proposição 3.2.1(iii) temos que, para toda sobrejeção $\varepsilon: P \rightarrow \mathbb{Z}$, $\text{Ker } \varepsilon$ é finitamente gerado. Em particular, se $P = \mathbb{Z}G$ e ε é a aplicação aumentação, temos que $\text{Ker } \varepsilon = I$ é finitamente gerado como $\mathbb{Z}G$ -módulo.

Dessa forma, $I = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$.

Mas, pelo lema 1.1.5(a), temos

$$I = \langle g - 1; g \in G \rangle.$$

Logo, para todo i , existe $g_i \in G$ tal que $s_i = g_i - 1$ e, portanto

$$I = \langle g_i - 1; i = 1, \dots, n \rangle$$

como $\mathbb{Z}G$ -módulo.

Sejam $H = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$ um subgrupo de G e $\varepsilon_H : \mathbb{Z}H \rightarrow \mathbb{Z}$ a aplicação aumentação. Deste modo, $I_H = \text{Ker } \varepsilon_H$.

Afirmção: $(\mathbb{Z}G)(I_H) = I$.

De fato: Mostremos que $(\mathbb{Z}G)(I_H) \subset I$.

Temos, pelo lema 1.1.5(a)

$$I_H = \langle g_i - 1; i = 1, \dots, n \rangle$$

como $\mathbb{Z}H$ -módulo.

Além disso, se E é um conjunto de representantes para as classes laterais gH de H em G , então $G = \bigcup_{g \in E} gH$ e, pela proposição 1.1.2, $\mathbb{Z}G = \bigoplus_{g \in E} (\mathbb{Z}H)$.

Sejam $\alpha \in \mathbb{Z}G$ e $\beta \in I_H$. Então

$$\alpha = \sum_{i=1}^n a_i, \text{ com } a_i \in (\mathbb{Z}H) \text{ e } \beta = \sum_{j=1}^r \beta_j(g_j - 1), \text{ com } \beta_j \in (\mathbb{Z}H).$$

Deste modo,

$$\alpha\beta = \sum_{i,j} \overbrace{a_i \beta_j}^{\in \mathbb{Z}H} (g_j - 1) \in I$$

Portanto, $(\mathbb{Z}G)(I_H) \subset I$.

Mostremos, agora, que $I \subset (\mathbb{Z}G)(I_H)$.

Seja $\alpha \in I$, então

$$\alpha = \sum_{i=1}^r \overbrace{\alpha_i}^{\in \mathbb{Z}G} \overbrace{(g_i - 1)}^{\in I_H}, \alpha_i \in \mathbb{Z}G.$$

Assim, $\alpha \in (\mathbb{Z}G)(I_H)$.

Logo, $(\mathbb{Z}G)(I_H) = I$.

Consideremos a seqüência exata curta:

$$0 \longrightarrow I_H \longrightarrow ZH \xrightarrow{\epsilon} Z \longrightarrow 0.$$

Temos que ZG é ZH -livre, e como todo módulo livre é plano (pelo lema 1.1.3), temos a seqüência exata:

$$0 \longrightarrow ZG \otimes_{ZH} I_H \longrightarrow ZG \otimes_{ZH} ZH \longrightarrow ZG \otimes_{ZH} Z \longrightarrow 0.$$

Através dos isomorfismos:

$$ZG \otimes_{ZH} ZH \simeq ZG \quad \text{e} \quad ZG \otimes_{ZH} Z = \text{Ind}_H^G Z \stackrel{\text{corol.1.6.1}}{\simeq} Z(G/H)$$

obtemos a seqüência exata

$$0 \longrightarrow ZG \otimes_{ZH} I_H \longrightarrow ZG \longrightarrow Z(G/H) \longrightarrow 0.$$

Além disso,

$$I = (ZG)(I_H) = \bigoplus_{g \in E} (gZH)I_H = \bigoplus_{g \in E} gI_H \stackrel{\text{prop.1.6.3}}{\simeq} \text{Ind}_H^G I_H = ZG \otimes_{ZH} I_H.$$

Deste modo, temos a seqüência exata:

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow ZG \longrightarrow Z(G/H) \longrightarrow 0$$

Mais ainda,

$$Z(G/H) \simeq ZG/I \simeq Z.$$

Logo, $G/H = \{\bar{1}\}$, ou seja, $G = H$.

Portanto, G é finitamente gerado.

A condição FP_2 é menos conhecida, mas temos o seguinte resultado:

Proposição 3.3.2 *Se G é finitamente apresentado, então G é de tipo FP_2 .*

Demonstração: Para G finitamente apresentado, é possível construir um CW -complexo finito Y de dimensão 2, com $\pi_1(Y) = G$ ([6], pag.44).

Pela proposição 1.4.2, temos que o complexo de cadeia celular aumentado do recobrimento universal $\tilde{Y}$ de Y é uma resolução livre parcial de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento 2 e de tipo finito. Logo, G é de tipo FP_2 . ■

Observação 3.3.1 Não é conhecido se a recíproca da proposição anterior é verdadeira.

A próxima proposição relaciona a condição FP_n de um grupo G com a de um subgrupo H de índice finito.

Proposição 3.3.3 *Seja H um subgrupo de G de índice finito. Então, G é de tipo FP_n ($0 \leq n \leq \infty$) se, e somente se, H é de tipo FP_n .*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Como G é de tipo FP_n , temos que

$$P : P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva parcial de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, onde cada P_i é finitamente gerado como $\mathbb{Z}G$ -módulo.

Tal resolução parcial também pode ser considerada uma resolução projetiva parcial de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$.

Como $(G : H) < \infty$, esta resolução é também de tipo finito sobre $\mathbb{Z}H$.

De fato: Como H atua livremente em G , pela proposição 1.1.2, temos que $\mathbb{Z}G = \bigoplus_E \mathbb{Z}H$, onde E é um conjunto de representantes para as classes gH , é uma soma finita, pois G/H é finito.

Como cada P_i é projetivo finitamente gerado como $\mathbb{Z}G$ -módulo, temos que existem um $\mathbb{Z}G$ -módulo Q_i e um módulo livre finitamente gerado $F = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}G$, tais que

$$P_i \oplus Q_i = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}G.$$

Mas,

$$\bigoplus_{i=1}^r \mathbf{Z}G = \bigoplus_{i=1}^r \bigoplus_E \mathbf{Z}H.$$

Logo,

$$P_i \oplus Q_i = \bigoplus_{i=1}^r \bigoplus_E \mathbf{Z}H.$$

Portanto, P_i é projetivo finitamente gerado como $\mathbf{Z}H$ -módulo e, conseqüentemente, H é de tipo FP_n .

($\Leftarrow$) Como H é de tipo FP_n , então $\mathbf{Z}$ é FP_n como $\mathbf{Z}H$ -módulo.

Pela proposição 3.2.2(iii), temos que $\mathbf{Z}$ é finitamente gerado como $\mathbf{Z}H$ -módulo, logo, $\mathbf{Z}$ é finitamente gerado também como $\mathbf{Z}G$ -módulo.

Seja

$$P: P_n \longrightarrow P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva parcial de $\mathbf{Z}$ sobre $\mathbf{Z}G$ de tipo finito.

Vendo P como uma resolução parcial de tipo finito de $\mathbf{Z}$ sobre $\mathbf{Z}H$, podemos aplicar a proposição 3.2.2(iii) novamente, e concluir que $\text{Ker } \partial_{n-1}$ é finitamente gerado como $\mathbf{Z}H$ -módulo.

Logo, $\text{Ker } \partial_{n-1}$ é finitamente gerado como $\mathbf{Z}G$ -módulo, pois $\mathbf{Z}H \subset \mathbf{Z}G$.

Assim, temos que $\mathbf{Z}$ e $\text{Ker } \partial_{n-1}$ são finitamente gerados como $\mathbf{Z}G$ -módulos.

Aplicando a proposição 3.2.2(iii) novamente, temos que G é de tipo FP_n .

Nota: Tomando-se $n = 1$ na proposição anterior, temos que G é finitamente gerado se, e somente se, H é finitamente gerado.

Vamos agora reenunciar o teorema 3.2.1 para o caso $M = \mathbf{Z}$ e $R = \mathbf{Z}G$.

Teorema 3.3.1 *As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) G é de tipo FP_∞ .
- (ii) $H^*(G, -)$ comuta com limites diretos.
- (iii) $H_*(G, -)$ comuta com produtos diretos.



O resultado a seguir é consequência da implicação (i) $\Rightarrow$ (ii) do teorema anterior (veja também a proposição 3.2.4).

Proposição 3.3.4 *Sejam G um grupo de tipo FP_∞ e n um inteiro tal que $H^n(G, \mathbb{Z}G) = 0$. Então, $H^n(G, F) = 0$ para todo $\mathbb{Z}G$ -módulo livre F .*

Demonstração: Como F é um $\mathbb{Z}G$ -módulo livre, temos:

$$F = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}G.$$

Para o caso em que o conjunto I é finito, temos que a soma direta e o produto direto coincidem, assim

$$\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}G = \prod_{i \in I} \mathbb{Z}G$$

$$\text{Agora, } H^n(G, F) = H^n(G, \prod_{i \in I} \mathbb{Z}G).$$

Como $H^n(G, -)$ comuta com produtos diretos (lema 3.2.5(b)), temos:

$$H^n(G, \prod_{i \in I} \mathbb{Z}G) = \prod_{i \in I} H^n(G, \mathbb{Z}G) \stackrel{\text{hip.}}{=} 0.$$

Para o caso em que I é infinito, consideremos $(e_i)_{i \in I}$ uma base de F , assim

$$F = \bigoplus_{i \in I} (\mathbb{Z}G)_i \quad (\mathbb{Z}G)_i = \langle e_i \rangle, \text{ para cada } i \in I.$$

Consideremos $M = \{J \subset I; J \text{ é finito}\}$ e, seja

$$F_J = \bigoplus_{j \in J} (\mathbb{Z}G)_j \quad \text{com } (\mathbb{Z}G)_j = \langle e_j \rangle, j \in J.$$

Deste modo, F_J é livre de posto finito.

Pelo exemplo 4.3.2 (ver Apêndice), temos $\varinjlim F_J = F$.

Portanto,

$$H^n(G, F) = H^n(G, \varinjlim F_J) \stackrel{\text{prop. 3.2.4}}{=} \varinjlim H^n(G, F_J) = 0.$$

■

3.4 Grupos de Tipo FP e FL

Nesta seção, combinaremos as duas condições de finitude vistas até agora neste capítulo (dimensão cohomológica e FP_n).

Definição 3.4.1 Uma resolução projetiva é **finita** se é de tipo finito e de comprimento finito.

Definição 3.4.2 Um grupo G é de **tipo FP** se $\mathbb{Z}$ admite uma resolução projetiva finita de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

Proposição 3.4.1 G é de tipo FP se, e somente se,

(i) $cd\ G < \infty$ e (ii) G é de tipo FP_∞ .

Demonstração:

($\Rightarrow$) Imediata.

($\Leftarrow$) Se $cd\ G < \infty$ e G é de tipo FP_∞ , podemos construir uma resolução finita da forma a seguir.

Tomemos uma resolução parcial:

$$P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

de tipo finito, onde $n = cd\ G$ e, consideremos $P_n = \text{Ker } \partial_{n-1}$.

Pelo lema 3.1.1(iv), P_n é projetivo e, pela proposição 3.2.2(iii), temos que P_n é finitamente gerado. Deste modo, temos a resolução projetiva finita:

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Assim, G é de tipo FP .

Observação 3.4.1 É importante notar que, na demonstração anterior, seria suficiente assumir G de tipo FP_n no lugar de FP_∞ , onde $n = cd\ G$.

Além disso, a resolução parcial $(P_i)_{i \leq n-1}$ poderia ter sido tomada livre (pela proposição 3.2.2). Portanto, se G é de tipo FP , existe uma resolução projetiva finita:

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow Z \longrightarrow 0 \quad (3.1)$$

com cada F_i livre (veja também [6], pag.203). No entanto, não há razão para esperar que P seja livre.

Exemplo 3.4.1 Seja G um grupo finitamente apresentado, com $cd\ G = 2$. Então, G é de tipo FP .

De fato: Pela proposição 3.3.2, temos que G é de tipo FP_2 . Assim, pela proposição e observação anteriores, G é de tipo FP .

Definição 3.4.3 Dizemos que G é de tipo FL se Z admite uma resolução livre finita sobre ZG .

Observação 3.4.2 É claro que, se G é de tipo FL , então G é de tipo FP .

Interpretação Topológica para Grupos de Tipo FP e FL

Veremos agora alguns resultados que relacionam grupos de tipo FL e FP , com a teoria de CW -complexos. Com exceção da proposição 3.4.2, os resultados não serão demonstrados, pois as demonstrações requerem ferramentas específicas de Teoria de Homotopia, que fogem aos objetivos deste trabalho.

Proposição 3.4.2 Se existe um complexo $K(G, 1)$ finito, então G é de tipo FL .

Demonstração: Seja Y um $K(G, 1)$ (complexo finito). Pela proposição 1.4.2, o complexo de cadeia celular aumentado do recobrimento universal $\tilde{Y}$ de Y é uma resolução livre de Z sobre ZG . Assim, G é de tipo FL .

■

Em vista da proposição anterior, temos os seguintes exemplos de grupos de tipo *FL*:

Exemplo 3.4.2 Grupos livres de posto finito: $G = F(S)$, S : finito (grupo livre gerado por um conjunto S).

Exemplo 3.4.3 Grupos de superfície: Y = soma conexa de g toros ou g planos projetivos, ($Y \neq S^2$, $Y \neq P^2$).

Exemplo 3.4.4 Grupos abelianos livres de posto finito: $Y = S^1 \times \dots \times S^1$ (toro n -dimensional).

Observação 3.4.3 Pode-se mostrar também um grupos livres de torção, finitamente gerados e nilpotentes são de tipo *FL* ([6], VIII.9).

A propriedade *FP* também admite uma interpretação topológica e, para isso, precisamos da definição a seguir.

Definição 3.4.4 Um espaço topológico Y é **finitamente dominado** se existe um *CW* complexo finito K , tal que Y é um retrato de K , isto é, existem aplicações contínuas $i : Y \rightarrow K$ e $r : K \rightarrow Y$, com $r \circ i = id_Y$.

Proposição 3.4.3 Se existe um $K(G,1)$ finitamente dominado, então G é de tipo *FP*.

Demonstração: [6], VIII.6.4

As recíprocas das proposições 3.4.2 e 3.4.3 são verdadeiras e foram demonstradas por Eilenberg-Ganea ([12]) e Wall ([29] e [30]).

Teorema 3.4.1 Seja G um grupo finitamente presentado. Se G é de tipo *FL* (respec. *FP*), então existe um complexo $K(G,1)$ finito (respec. finitamente dominado).



Demonstração: [6], VIII.7.1

■

Observação 3.4.4 *As proposições 3.4.2 e 3.4.3, e suas recíprocas, são casos especiais do seguinte resultado devido a Wall ([29] e [30]): Seja Y um CW -complexo conexo, cujo grupo fundamental π_1 é finitamente apresentado, e seja C o complexo de cadeia do recobrimento universal de Y , considerado como um complexo de π_1 -módulos. Então*

- (a) *Y é homotopicamente equivalente a um CW -complexo finito se, e somente se, C é homotopicamente equivalente a um complexo de cadeia livre finito.*
- (b) *Y é finitamente dominado se, e somente se, C é homotopicamente equivalente a um complexo de cadeia projetivo finito.*

Tendo explicado cuidadosamente a diferença entre as condições FP e FL , a pergunta que surge é se existem grupos de tipo FP que não são de tipo FL . Na verdade, não se conhece exemplos de tais grupos.

Do ponto de vista topológico, temos a seguinte situação: embora existam muitos exemplos de espaços finitamente dominados que não têm o mesmo tipo de homotopia de um complexo finito, nenhum desses exemplos conhecidos são $K(G, 1)$'s.

A fim de apreciar o problema, vamos ver qual é a obstrução para que um grupo de tipo FP seja de tipo FL .

Suponhamos G de tipo FP . Vamos escolher uma resolução projetiva finita como em (3.1) que é livre, exceto na dimensão topo. O módulo projetivo P que ocorre em tal dimensão poderia ter a propriedade que $P \oplus F$ fosse livre para algum módulo livre F de posto finito. Neste caso, P é dito **estavelmente livre** e, podemos modificar (3.1) exatamente como na demonstração da proposição 3.1.4 para obter uma resolução livre finita. Reciprocamente, se existe uma resolução livre finita, então podemos compará-la a (3.1) via o lema 3.2.2 para deduzir que P é estavelmente livre (note que as duas resoluções poderiam não ter o mesmo comprimento, mas o lema 3.2.2 é ainda aplicável, pois podemos completar as resoluções curtas com zero).

Devido a esses resultados, temos a proposição a seguir.



Proposição 3.4.4 *Sejam G um grupo de tipo FP e*

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow \mathbb{Z}$$

uma resolução projetiva finita de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ com cada F_i livre. Então, G é de tipo FL se, e somente se, P é estavelmente livre.

Assim, a questão sobre a existência de grupos de tipo FP que não são de tipo FL nos leva a questão fundamental: Existem módulos projetivos finitamente gerados que não são estavelmente livres? Sobre um anel geral, a resposta é sim, e existem exemplos conhecidos sobre anéis grupos $\mathbb{Z}G$, com G finito. Entretanto, não existem exemplos conhecidos com G livre de torção; e um grupo de tipo FP é necessariamente livre de torção.

No entanto, existem resultados cujas demonstrações requerem a propriedade FP , e não somente a FL do grupo. O resultado a seguir vale para grupos de tipo FP , e sua recíproca para grupos de tipo FL não é conhecida.

Proposição 3.4.5 *Sejam G um grupo livre de torção e H um subgrupo de índice finito. Então, G é de tipo FP se, e somente se, H é de tipo FP .*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seguem, respectivamente, das proposições 3.4.1, 3.1.3(a) e 3.3.3, e 3.4.1 as implicações:

$$G \text{ é de tipo } FP \Rightarrow cd G = n < \infty \text{ e } G \text{ é de tipo } FP_{\infty} (FP_n, \forall n)$$

$$\Rightarrow cd H = cd G \text{ e } H \text{ é de tipo } FP_n, \forall n$$

$$\Rightarrow H \text{ é de tipo } FP.$$

($\Leftarrow$) Seguem, respectivamente, da proposição 3.4.1, do teorema 3.1.1 (Serre), proposição 3.3.3 e da proposição 3.4.1, as implicações:



H é de tipo $FP \Rightarrow cd H = n < \infty$ e H é de tipo FP_∞ ($FP_n, \forall n$)

$\Rightarrow cd G = n$ e G é de tipo $FP_n, \forall n$

$\Rightarrow G$ é de tipo FP .

■

Nota: Em particular, se G é um grupo livre de torção que contém um subgrupo de índice finito que é de tipo FL , então sabemos da proposição anterior que G é de tipo FP , apesar de não sabermos se G é de tipo FL .

Fechamos esta seção discutindo alguns aspectos especiais da cohomologia topodimensional de um grupo de tipo FP , dada pela proposição a seguir.

Proposição 3.4.6 *Se G é de tipo FP , então $cd G = \max\{n : H^n(G, \mathbb{Z}G) \neq 0\}$.*

Demonstração: Se G é de tipo FP , então pela proposição 3.4.1, $cd G < \infty$.

Pela proposição 3.1.2, temos

$$cd G = \max\{k : H^k(G, F) \neq 0, \text{ para algum } \mathbb{Z}G\text{-módulo livre } F\}.$$

Consideremos

$$A = \{n : H^n(G, \mathbb{Z}G) \neq 0\}$$

$$B = \{k : H^k(G, F) \neq 0, \text{ para algum } \mathbb{Z}G\text{-módulo livre } F\}.$$

Temos $A \subset B$. Então, $r = \max A \leq \max B = s$.

Suponhamos $r < s$. Deste modo, existe algum módulo livre F , com $H^s(G, F) \neq 0$ e $H^s(G, \mathbb{Z}G) = 0$, o que é um absurdo, pela proposição 3.3.4. Portanto, $r = s$.

Logo, $cd G = \max\{n : H^n(G, \mathbb{Z}G) \neq 0\}$.

■

Temos, para efeito da definição de cohomologia, que ZG é considerado como um ZG -módulo (à esquerda). Mas, ZG também admite uma ação (à direita), dada por

$$\begin{aligned} ZG \times G &\rightarrow ZG \\ (\alpha, g) &\mapsto \alpha \cdot g \end{aligned}$$

Esta ação induz uma ação (à direita) em $H^i(F_i, ZG)$. Em nível de cocadeias, temos

$$\begin{aligned} \text{Hom}(F_i, ZG) \times G &\rightarrow \text{Hom}(F_i, ZG) \\ (f, g) &\mapsto f \cdot g \end{aligned}$$

com $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g$.

Se f é um cociclo representando a classe $[f]$ em $H^i(G, ZG)$, então temos que $f \cdot g$ também é um cociclo, e definimos a ação $[f] \cdot g := [f \cdot g]$, para todo $g \in G$.

Assim, $H^i(G, ZG)$ é um G -módulo (à direita).

Sejam P uma resolução projetiva de Z sobre ZG , e $u \in \text{Hom}_G(P, ZG)$.

Consideremos $m \in M$. Temos a aplicação

$$\begin{aligned} \text{Hom}_G(P, ZG) \otimes_{ZG} M &\rightarrow \text{Hom}_G(P, M) \\ u \otimes m &\mapsto f; f(x) = u(x)m. \end{aligned}$$

Em cohomologia, temos $\varphi([u] \otimes m) := [f]$.

Vamos provar agora o “teorema dos coeficientes universais” para a cohomologia topo-dimensional de um grupo de tipo FP .

Proposição 3.4.7 *Se G é de tipo FP e $n = \text{cd } G$, então*

$$\varphi : H^n(G, ZG) \otimes_{ZG} M \rightarrow H^n(G, M)$$

é um isomorfismo para todo G -módulo M .

Demonstração: Sejam P uma resolução projetiva de Z sobre ZG de comprimento n :

$$P : 0 \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow Z \rightarrow 0$$

e P^* o complexo dual $\text{Hom}_{ZG}(P, ZG)$ de G -módulos (à direita):

$$P^* : 0 \rightarrow \text{Hom}_{ZG}(Z, ZG) \rightarrow \overbrace{\text{Hom}_{ZG}(P_0, ZG)}^{P_0^*} \rightarrow \cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \overbrace{\text{Hom}_{ZG}(P_n, ZG)}^{P_n^*} \xrightarrow{\delta^n} 0$$

Temos

$$H^*(G, \mathbb{Z}G) = H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P, \mathbb{Z}G)) = H^*(P^*).$$

Em particular

$$H^n(G, \mathbb{Z}G) = \frac{\text{Ker } \delta^n}{\text{Im } \delta^{n-1}} = \frac{P_n^*}{\text{Im } \delta^{n-1}}$$

e, temos a sequência exata:

$$P_{n-1}^* \xrightarrow{\delta^{n-1}} P_n^* \xrightarrow{\pi} H^n(G, \mathbb{Z}G) \xrightarrow{0} 0$$

para o módulo de cohomologia topo-dimensional.

Tensorizando tal sequência por M e aplicando o isomorfismo de dualidade dado pelo lema 1.1.4(b), obtemos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccc} P_{n-1}^* \otimes_{\mathbb{Z}G} M & \longrightarrow & P_n^* \otimes_{\mathbb{Z}G} M & \longrightarrow & H^n(G, \mathbb{Z}G) \otimes_{\mathbb{Z}G} M & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \varphi & & \\ \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_{n-1}, M) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(P_n, M) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(G, M) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Pelo “lema dos cinco” ([14], pag.38), temos que φ é isomorfismo.

■

Nota: O isomorfismo dado na proposição anterior pode ser descrito da seguinte maneira: Consideremos D o G -módulo $H^n(G, \mathbb{Z}G)$, assim

$$H^n(G, \mathbb{Z}G) \otimes_{\mathbb{Z}G} M = D \otimes_{\mathbb{Z}G} M \stackrel{\text{prop.2.1.1}}{=} (D \otimes_{\mathbb{Z}} M)_G \stackrel{\text{prop.2.1.3}}{\simeq} H_0(G, D \otimes_{\mathbb{Z}} M)$$

onde a G -ação é diagonal.

Note que, se D é um módulo (à direita) e M um módulo (à esquerda), a ação diagonal é definida por:

$$g \cdot (d \otimes m) = dg^{-1} \otimes g \cdot m, \quad g \in G, d \in D \text{ e } m \in M.$$

Consequentemente, o isomorfismo φ da proposição anterior pode ser dado por

$$H^n(G, M) \simeq H_0(G, D \otimes_{\mathbb{Z}} M). \quad (3.2)$$

3.5 Grupos de Dualidade

Para qualquer grupo G de tipo FP , já vimos em (3.2) que existe um isomorfismo

$$H^n(G, M) \simeq H_0(G, D \otimes M)$$

para qualquer G -módulo M , onde $n = cd\ G$, D é o G -módulo (à direita) $H^n(G, \mathbb{Z}G)$, e $D \otimes M = D \otimes_{\mathbb{Z}} M$ com a G -ação diagonal.

Nesta seção, vamos estudar os grupos G , para os quais o isomorfismo anterior se estende aos isomorfismos

$$H^i(G, M) \simeq H_{n-i}(G, D \otimes M), \quad \forall i.$$

O estudo desses grupos foi iniciado por Johnson e Wall ([15]), e Bieri e Eckmann ([3]). Vamos demonstrar um teorema que caracteriza tais grupos.

Teorema 3.5.1 *As seguintes condições são equivalentes para um grupo G de tipo FP :*

(i) *Existem um inteiro n e um G -módulo D tais que*

$$H^i(G, M) \simeq H_{n-i}(G, D \otimes M)$$

para todo G -módulo M e todo inteiro i .

(ii) *Existe um inteiro n tal que $H^i(G, \mathbb{Z}G \otimes A) = 0$, para todo $i \neq n$ e todo grupo abeliano A .*

(iii) *Existe um inteiro n tal que $H^i(G, \mathbb{Z}G) = 0$, para todo $i \neq n$ e $H^n(G, \mathbb{Z}G)$ é livre de torção (como grupo abeliano).*

(iv) *Existem isomorfismos naturais*

$$H^i(G, -) \simeq H_{n-i}(G, D \otimes -),$$

onde $n = cd\ G$ e $D = H^n(G, \mathbb{Z}G)$.

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) Por hipótese, $H^i(G, M) \simeq H_{n-i}(G, D \otimes M)$.

Consideremos o módulo induzido $M = \mathbb{Z}G \otimes A = \text{Ind}_{\{1\}}^G A$, onde A é um grupo abeliano.



Então,

$$H^i(G, ZG \otimes A) \simeq H_{n-i}(G, D \otimes (ZG \otimes A)).$$

Temos que

$$D \otimes \text{Ind}_{\{1\}}^G A \simeq \text{Ind}_{\{1\}}^G (D \otimes A)$$

isto é,

$$D \otimes (ZG \otimes A) \simeq ZG \otimes (D \otimes A)$$

ou seja, $D \otimes M$ também é módulo induzido.

De fato: Temos o isomorfismo

$$\begin{aligned} \psi : D \otimes (ZG \otimes A) &\rightarrow ZG \otimes (D \otimes A) \\ d \otimes (\alpha \otimes a) &\mapsto \alpha \otimes (d\alpha \otimes a) \end{aligned}$$

com inversa $\psi^{-1} : ZG \otimes (D \otimes A) \rightarrow D \otimes (ZG \otimes A)$, definida nos geradores por $\psi^{-1}(g \otimes (d \otimes a)) = dg^{-1} \otimes g \otimes a$, e estendida por linearidade.

Agora, a G -ação em $D \otimes (ZG \otimes A)$ é dada por $g \cdot (d \otimes (\alpha \otimes a)) = dg^{-1} \otimes g \cdot \alpha \otimes a$, e em $ZG \otimes (D \otimes A)$ é dada por $g \cdot (\alpha \otimes (d \otimes a)) = g \cdot \alpha \otimes (d \otimes a)$.

Assim,

$$\begin{aligned} \psi(g \cdot (d \otimes (\alpha \otimes a))) &= \psi(dg^{-1} \otimes g \cdot \alpha \otimes a) = g \cdot \alpha \otimes dg^{-1} g \cdot \alpha \otimes a = g \cdot \alpha \otimes d\alpha \otimes a. \\ g \cdot (\psi(d \otimes (\alpha \otimes a))) &= g \cdot (\alpha \otimes d\alpha \otimes a) = g \cdot \alpha \otimes d\alpha \otimes a. \end{aligned}$$

Logo, ψ é aplicação de G -módulos.

Deste modo, para $L = D \otimes A$, temos

$$H_{n-i}(G, ZG \otimes L) = H_{n-i}(G, \text{Ind}_{\{1\}}^G L) \stackrel{\text{Shapiro}}{\simeq} H_{n-i}(\{1\}, L) = 0, \text{ para } i \neq n \quad (*)$$

Por (i), temos

$$\begin{aligned} H^i(G, ZG \otimes A) &\simeq H_{n-i}(G, D \otimes (ZG \otimes A)) \simeq H_{n-i}(G, ZG \otimes (D \otimes A)) \\ &= H_{n-i}(G, ZG \otimes L) \\ &\stackrel{(*)}{=} 0. \end{aligned}$$

Portanto, $H^i(G, ZG \otimes A) = 0$, para $i \neq n$.



Logo, $(i) \Rightarrow (ii)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Por hipótese, $H^i(G, \mathbf{Z}G \otimes A) = 0$, para $i \neq n$, onde A é um grupo abeliano.

Tomando $A = \mathbf{Z}$, temos

$$H^i(G, \mathbf{Z}G \otimes \mathbf{Z}) \simeq H^i(G, \mathbf{Z}G) = 0, \quad i \neq n.$$

Consideremos, agora, $A = \mathbf{Z}_k$, $k > 0$. Assim, $H^i(G, \mathbf{Z}G \otimes \mathbf{Z}_k) = 0$, $i \neq n$.

Temos a seqüência exata curta:

$$0 \longrightarrow ZG \xrightarrow{k} ZG \xrightarrow{j} ZG \otimes Z_k \longrightarrow 0$$

onde as aplicações k e j são dadas por

$$\begin{array}{ccc} k : & \mathbf{Z}G & \rightarrow \mathbf{Z}G \\ & \alpha & \mapsto k\alpha \end{array}$$

$$\begin{aligned} j: \quad \mathbf{Z}G &\rightarrow \mathbf{Z}G \otimes \mathbf{Z}_k \\ \alpha = \sum n_i g_i &\mapsto \sum (g_i \otimes \bar{n}_i) = \alpha \otimes \bar{1} \end{aligned}$$

Aplicando a seqüência exata de cohomologia, temos

$$0 \stackrel{(ii)}{=} H^{n-1}(G, \mathbf{Z}G \otimes \mathbf{Z}_k) \longrightarrow H^n(G, \mathbf{Z}G) \xrightarrow{k_*} H^n(G, \mathbf{Z}G).$$

Assim, k_* é injetora para todo k e $k_*x = kx$.

Deste modo, se $x \in H^n(G, \mathbb{Z}G)$, com $kx = 0$, temos $x = 0$, para todo x .

Portanto, $H^n(G, \mathbb{Z}G)$ é um grupo abeliano livre de torção.

Logo, $(ii) \Rightarrow (iii)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Seja $D = H^n(G, \mathbf{Z}G)$. Como $H^i(G, \mathbf{Z}G) = 0$, para $i > n$ e $H^n(G, \mathbf{Z}G) \neq 0$ temos, pela proposição 3.4.6, $cd\ G = n$.

Como, por hipótese, G é de tipo FP , temos que

$$P: \quad 0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\epsilon} Z \longrightarrow 0$$
$$\qquad\qquad\qquad \downarrow$$
$$\qquad\qquad\qquad 0$$

é resolução projetiva de comprimento n .

Aplicando $\text{Hom}_{ZG}(-, ZG)$ a esta seqüência, obtemos

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow & \text{Hom}_{ZG}(Z, ZG) & \longrightarrow & \text{Hom}_{ZG}(P_0, ZG) & \xrightarrow{\delta^0} & \cdots & \longrightarrow \text{Hom}_{ZG}(P_n, ZG) \xrightarrow{\delta^n} 0 \\ & & & \uparrow_{\delta^{-1}} & & & \\ & & & 0 & & & \end{array}$$

Como

$$H^i(G, ZG) = H^i(\text{Hom}_{ZG}(P, ZG)) = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq n \\ D & \text{para } i = n \end{cases}$$

obtemos a resolução projetiva

$$0 \longrightarrow (P^0)^* \longrightarrow \cdots \longrightarrow (P^{n-1})^* \longrightarrow (P^n)^* \longrightarrow D \longrightarrow 0 \quad (*)$$

de Z sobre ZG , onde $(P^k)^* = \text{Hom}_{ZG}(P_k, ZG)$.

Mais precisamente, através da suspensão $\Sigma^n P^*$, onde $(\Sigma^n P)_j^* = (P^{n-j})^*$, a resolução $(*)$ pode ser escrita da seguinte forma:

$$0 \longrightarrow (\Sigma^n P)_n^* \longrightarrow \cdots \longrightarrow (\Sigma^n P)_2^* \longrightarrow (\Sigma^n P)_1^* \longrightarrow (\Sigma^n P)_0^* \longrightarrow D \longrightarrow 0 \quad (**)$$

Agora, se P é projetivo finitamente gerado, então P^* também é projetivo finitamente gerado.

De fato: Como P é projetivo, temos $F = P \oplus Q$, onde F é livre.

Deste modo,

$$\text{Hom}_{ZG}(F, ZG) = \text{Hom}_{ZG}(P, ZG) \oplus \text{Hom}_{ZG}(Q, ZG).$$

Além disso, como por hipótese, P é finitamente gerado, temos $F = \bigoplus_{i=1}^n ZG$.

Portanto,

$$\text{Hom}_{ZG}\left(\bigoplus_{i=1}^n ZG, ZG\right) \simeq \bigoplus_{i=1}^n \text{Hom}_{ZG}(ZG, ZG) \simeq \bigoplus_{i=1}^n ZG \text{ (livre).}$$

Logo, P^* é projetivo finitamente gerado.

Daí, pelo lema 1.1.4(b), temos o seguinte isomorfismo de dualidade:

$$\text{Hom}_{ZG}(P, M) \simeq P^* \otimes_{ZG} M.$$



Tensorizando (**) por M , obtemos o complexo de cadeias

$$\Sigma^n P^* \otimes_{ZG} M : \cdots \longrightarrow (\Sigma^n P)_1^* \otimes_{ZG} M \longrightarrow (\Sigma^n P)_0^* \otimes_{ZG} M \longrightarrow D \otimes_{ZG} M \longrightarrow 0$$

com $(\Sigma^n P)_{n-i} \otimes_{ZG} M \simeq \text{Hom}_{ZG}(P_i, M)$.

Assim,

$$H^i(G, M) \stackrel{\text{def.}}{=} H^i(\text{Hom}_{ZG}(P, M)) \simeq H_{n-i}(\Sigma^n P^* \otimes_{ZG} M) \stackrel{\text{def. Tor}}{=} \text{Tor}_{n-i}^G(D, M)$$

para qualquer G -módulo M .

Como D é livre de torção, pela proposição 2.6.2, temos

$$\text{Tor}_{n-i}^G(D, M) \simeq H_{n-i}(G, D \otimes M).$$

Portanto,

$$H^i(G, M) \simeq H_{n-i}(G, D \otimes M)$$

para qualquer G -módulo M .

Logo, (iii) $\Rightarrow$ (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (i) Imediato.

■

Se G satisfaz as condições do teorema 3.5.1, então G é dito um **grupo de dualidade** de dimensão n (sobre Z) ou D^n -**grupo** (sobre Z), e o G -módulo $D = H^n(G, ZG)$ é chamado **módulo dualizante** de G .

Se D é cíclico infinito (como um grupo abeliano), então G é dito um **grupo de dualidade de Poincaré** de dimensão n (sobre Z) ou PD^n -**grupo** (sobre Z), e neste caso, G é **orientável** se atua trivialmente em D , e **não orientável**, caso contrário.

É importante notar que, se G é um grupo de dualidade de Poincaré, então a afirmação (iv) do teorema 3.5.1 toma a forma familiar

$$H^i(G, M) \simeq H_{n-i}(G, M),$$

da dualidade de Poincaré para variedades orientáveis fechadas.



Observação 3.5.1 *Bieri e Eckmann definiram, originalmente, um grupo de dualidade como sendo um grupo G , não necessariamente de tipo FP, tal que existam isomorfismos dados pelo produto cap ([6], V.3):*

$$\cap z : H^i(G, M) \xrightarrow{\cong} H_{n-i}(G, D \otimes M)$$

para todo i e todo M , onde n é um inteiro fixo, D um G -módulo fixo, e z um elemento fixo de $H_n(G, D)$. Como estes isomorfismos são naturais, segue do item (iv) do teorema que, um grupo de dualidade, do modo em que estamos considerando, é também um grupo de dualidade no sentido em que foram definidos por esses autores. Reciprocamente, se G é um grupo de dualidade, no sentido dos mesmos, então o produto cap implica que existem isomorfismos naturais

$$H^i(G, -) \simeq H_{n-i}(G, D \otimes -).$$

Como $D \otimes -$ e $H_(G, -)$ comutam com limites diretos (lema 3.2.3), segue que $H^*(G, -)$ comuta com limites diretos. Segue também que $cd G \leq n < \infty$. Assim, pelo teorema 3.2.1, temos que G é de tipo FP, e portanto, G é um grupo de dualidade, no sentido em que estamos considerando.*

É importante notar também, que o inteiro n que ocorre na definição dada por Bieri-Eckmann é necessariamente igual a $cd G$ (tal fato pode ser observado na demonstração do teorema 3.5.1), e o módulo D é necessariamente isomorfo a $H^n(G, \mathbb{Z}G)$. De fato, o isomorfismo de dualidade dado com $i = n$ e $M = \mathbb{Z}G$ nos dá:

$$H^n(G, \mathbb{Z}G) \simeq H_0(G, D \otimes \mathbb{Z}G) \stackrel{\text{prop. 2.1.3}}{\simeq} (D \otimes \mathbb{Z}G)_G \stackrel{\text{prop. 2.1.1}}{=} D \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G \simeq D$$

e isto é compatível com a G -ação, pela naturalidade dos isomorfismos de dualidade.

Veremos agora uma propriedade bastante útil de grupos de dualidade.

Proposição 3.5.1 *Sejam G um grupo livre de torção e H um subgrupo de índice finito. Então, G é um grupo de dualidade se, e somente se, H é um grupo de dualidade. Mais ainda, se G e H são grupos de dualidade, então eles têm o mesmo módulo dualizante.*



(Mais precisamente, se D é o módulo dualizante para G , então o módulo dualizante para H é isomorfo ao módulo $\text{Res}_H^G D$, obtido pela restrição da ação de G para H).

Demonstração: Pela proposição 3.4.5, temos que G é de tipo FP se, e somente se, H é de tipo FP . Além disso, como $(G : H) < \infty$, temos

$$H^*(H, \mathbb{Z}H) \stackrel{\text{Shapiro}}{\simeq} H^*(G, \text{Coind}_H^G \mathbb{Z}H) \stackrel{\text{prop. 1.6.5}}{\simeq} H^*(G, \text{Ind}_H^G \mathbb{Z}H) = H^*(G, \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z}H) \simeq H^*(G, \mathbb{Z}G).$$

Deste modo,

$$H^*(H, \mathbb{Z}H) \simeq H^*(G, \mathbb{Z}G) \quad (*)$$

Suponhamos que G seja um grupo de dualidade. Assim, pelo teorema 3.5.1(iii), temos que $H^n(G, \mathbb{Z}G)$ é livre de torção (como grupo abeliano) e $H^i(G, \mathbb{Z}G) = 0$, para $i \neq n$.

Assim, por (*), $H^n(H, \mathbb{Z}H)$ é livre de torção (como grupo abeliano) e $H^i(H, \mathbb{Z}H) = 0$, para $i \neq n$. Novamente por 3.5.1(iii), temos que H é um grupo de dualidade.

Para provar a segunda parte da proposição, consideremos G e H dois grupos de dualidade. Deste modo, temos os isomorfismos

$$H^i(G, M) \simeq H_{n-i}(G, D \otimes M)$$

$$H^i(H, M) \simeq H_{n-i}(H, D' \otimes M)$$

onde $D = H^n(G, \mathbb{Z}G)$ e $D' = H^n(H, \mathbb{Z}H)$ são os módulos dualizantes de G e H , respectivamente.

Temos que mostrar que $H^n(G, \mathbb{Z}G) \simeq H^n(H, \mathbb{Z}H)$ é um isomorfismo de H -módulos (à direita).

Já vimos na observação 2.3.1, que os isomorfismos dados pelo Lema de Shapiro:

$$H_*(H, M) \simeq H_*(G, \text{Ind}_H^G M)$$

$$H^*(H, M) \simeq H^*(G, \text{Coind}_H^G M)$$



são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned}(\alpha, i)_* : H_*(H, M) &\rightarrow H_*(G, \text{Ind}_H^G M) \\ (\alpha, \pi)^* : H^*(G, \text{Coind}_H^G M) &\rightarrow H^*(H, M)\end{aligned}$$

onde $\alpha : H \hookrightarrow G$ é a inclusão, e $i : M \rightarrow \text{Ind}_H^G M$ e $\pi : \text{Coind}_H^G M \rightarrow M$ são as aplicações vistas na observação 1.6.4.

O isomorfismo $H^n(G, \mathbb{Z}G) \simeq H^n(H, \mathbb{Z}H)$ é dado pela composição:

$$H^n(G, \mathbb{Z}G) \xrightarrow{\text{res}} H^n(H, \mathbb{Z}G) \xrightarrow{\psi^*} H^n(H, \mathbb{Z}H)$$

onde res é induzida por α e a aplicação $\psi^* : H^n(H, \mathbb{Z}G) \rightarrow H^n(H, \mathbb{Z}H)$ é induzida por

$$\mathbb{Z}G \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z}H = \text{Ind}_H^G \mathbb{Z}H \xrightarrow{\cong} \text{Coind}_H^G \mathbb{Z}H = \text{Hom}_H(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}H) \xrightarrow{\chi} \mathbb{Z}H.$$

As aplicações ϕ e χ são tais que

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{Z}G &\rightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z}H \\ \gamma &\mapsto \phi(\gamma) = \gamma \otimes 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi : \text{Hom}_H(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}H) &\rightarrow \mathbb{Z}H \\ f &\mapsto \chi(f) = f(1)\end{aligned}$$

e a aplicação φ , dada pela proposição 1.6.5, é definida por

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z}H &\rightarrow \text{Hom}_H(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}H) \\ g \otimes h &\mapsto \varphi(g \otimes h) = g \cdot \varphi_0(h)\end{aligned}$$

com

$$\varphi_0(m)(\alpha) = \begin{cases} \alpha m & \alpha \in H \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Consideremos, então a composição:

$$\begin{aligned}(\chi \circ \varphi \circ \phi)(\gamma) &= \chi \circ \varphi(\gamma \otimes 1) = \chi(\gamma \cdot \varphi_0(1)) = (\gamma \cdot \varphi_0(1))(1) = \gamma \cdot (\varphi_0(1))(1) \\ &= \varphi_0(\gamma)(1) \\ &= \begin{cases} \gamma & \text{se } \gamma \in H \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}\end{aligned}$$

Seja $\psi = \chi \circ \varphi \circ \phi$. Assim, $\psi : \mathbf{Z}G \rightarrow \mathbf{Z}H$ é tal que, para $\gamma \in G$,

$$\psi(\gamma) = \begin{cases} \gamma & \text{se } \gamma \in H \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

e é estendida por linearidade.

Considere a H -ação (à direita) em $\mathbf{Z}G$ e $\mathbf{Z}H$. Temos, para $\gamma \in G$ e $h \in H$, que $\psi(\gamma \cdot h) = \psi(\gamma) \cdot h$. Assim, ψ é compatível com a H -ação (à direita), e temos

$$\psi^*([f] \cdot h) = \psi^*([f]) \cdot h, \quad \forall h \in H \text{ e } \forall [f] \in H^n(H, \mathbf{Z}H).$$

Temos também que $\text{res} = \alpha^*$ é definida, em nível de cocadeia, por

$$\begin{aligned} \alpha^\# : \text{Hom}_G(F, \mathbf{Z}G) &\rightarrow \text{Hom}_H(F, \mathbf{Z}G) \\ f &\mapsto \alpha^\#(f) = f \quad (\text{vista como aplicação de } H\text{-módulos}) \end{aligned}$$

onde F é uma resolução projetiva de $\mathbf{Z}$ sobre $\mathbf{Z}G$ (portanto, de $\mathbf{Z}$ sobre $\mathbf{Z}H$), e claramente, $\text{res}([f] \cdot h) = (\text{res}[f]) \cdot h$, $\forall h \in H$.

Logo, $\psi^* \circ \text{res} : H^n(G, \mathbf{Z}G) \rightarrow H^n(H, \mathbf{Z}H)$ é um isomorfismo de H -módulos.

■

A seguir, dois exemplos de grupos de dualidade.

Exemplo 3.5.1 Se G é cíclico infinito, então G é um PD^1 -grupo.

De fato: Temos que G é de tipo FP . Além disso, já vimos no exemplo 2.1.2 que

$$H_1(G, M) = M^G \stackrel{\text{prop.2.1.4}}{\cong} H^0(G, M).$$

$$H^1(G, M) = M_G \stackrel{\text{prop.2.1.3}}{\cong} H_0(G, M).$$

$$H^n(G, M) = 0 = H_{1-n}(G, M), \quad \forall n \geq 2.$$

Logo, G é um PD^1 -grupo.

Exemplo 3.5.2 Seja $G = F(S)$ o grupo livre com k geradores, $1 \leq k < \infty$. Temos que G é um D^1 -grupo, e não é um PD^1 -grupo se $k > 1$.



De fato: Já vimos que G é de tipo FP sobre $\mathbb{Z}$ e que $cd\ G = 1$ (exemplo 3.1.2).

Vamos mostrar que a condição (ii) do teorema 3.5.1 é verdadeira, isto é, que $H^i(G, \mathbb{Z}G \otimes A) = 0$, para todo grupo abeliano A e $i \neq 1$.

De fato:

$$H^0(G, \mathbb{Z}G \otimes A) = H^0(G, \text{Ind}_{\{1\}}^G A) \stackrel{\text{prop.2.1.4}}{\simeq} (\text{Ind}_{\{1\}}^G A)^G \stackrel{\text{lema 1.6.5}}{=} 0$$

e $H^i(G, \mathbb{Z}G \otimes A) = 0$, para $i > 1$ ($cd\ G = 1$).

Logo, G é um D^1 -grupo.

Consideremos $k > 1$. Temos

$$H^1(G, \mathbb{Z}) \stackrel{\text{prop.2.5.2}}{\simeq} \text{Hom}(\mathbb{Z}^k, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^k.$$

Por outro lado, como G é um D^1 -grupo:

$$H^1(G, \mathbb{Z}) \simeq H_0(G, D \otimes \mathbb{Z}) \simeq H_0(G, D).$$

Se $D \simeq \mathbb{Z}$, com G -ação trivial, temos

$$H_0(G, D) \simeq H_0(G, \mathbb{Z}) \stackrel{\text{ex.2.1.1}}{\simeq} \mathbb{Z}.$$

Mas, $H_0(G, D) \simeq H^1(G, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^k$.

Portanto, $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}^k$, o que é um absurdo, pois $k > 1$.

Se $D \simeq \mathbb{Z}$, com G -ação não trivial, temos que $g \cdot n = -n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ e $\forall g \in G$.

Deste modo,

$$B = \langle g \cdot n - n; n \in \mathbb{Z} \text{ e } g \in G \rangle \simeq 2\mathbb{Z}.$$

Dai,

$$D_G = D/B \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_2.$$

Portanto,

$$H_0(G, D) \stackrel{\text{prop.2.1.3}}{\simeq} D_G \simeq \mathbb{Z}_2.$$

Como $H_0(G, D) \simeq \mathbb{Z}^k$, temos $\mathbb{Z}^k \simeq \mathbb{Z}_2$, o que é um absurdo.

Assim, $D \neq \mathbb{Z}$.

Logo, G não é um PD^1 -grupo.

A proposição a seguir caracteriza os grupos de dualidade em dimensões baixas.

Proposição 3.5.2 (i) G é um D^0 -grupo se, e somente se, $G = \{1\}$.

(ii) G é um D^1 -grupo sobre $\mathbb{Z}$ se, e somente se, G é finitamente gerado e $cd G = 1$.

Demonstração:

(i) $(\Rightarrow)$ Se G é um D^0 -grupo, temos $cd G = 0$. Portanto, pelo exemplo 3.1.1, temos $G = \{1\}$.

$(\Leftarrow)$ Se $G = \{1\}$, temos que G é de tipo FP , além disso,

$$H^i(G, \mathbb{Z}G) = 0, \quad i \neq 0 \quad (G\text{-ação trivial}).$$

$$H^0(G, \mathbb{Z}G) = H^0(\{1\}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}.$$

Pelo teorema 3.5.1 (iii), temos que G é um D^0 -grupo.

(ii) $(\Rightarrow)$ Se G é um D^1 -grupo, temos $cd G = 1$. Como G é de tipo FP , temos que G é de tipo FP_1 , logo, é finitamente gerado.

Deste modo, $cd G = 1$ e G é finitamente gerado.

É importante notar que, pelo exemplo 3.1.2, G é livre de posto finito.

$(\Leftarrow)$ Se G é finitamente gerado e $cd G = 1$, temos pelo exemplo 3.1.2 que G é livre de posto finito. Portanto, pelo exemplo 3.5.2, G é um D^1 -grupo. ■

3.6 Interpretação Topológica para Grupos de Dualidade de Poincaré

A teoria de grupos de dualidade de Poincaré está relacionada com a teoria de variedades asféricas, ou seja, variedades X que têm o mesmo tipo de homotopia de um complexo $K(G, 1)$, onde $G = \pi_1(X)$, que chamaremos de $K(G, 1)$ -variedades.

Para uma $K(G, 1)$ -variedade n -dimensional fechada (compacta e sem bordo), são válidos os seguintes resultados:

(I) G é de tipo FL e $cd\ G = n$ ([6], VIII. 8.1).

(II) $H^i(G, \mathbb{Z}G) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq n \\ \Omega & \text{se } i = n \end{cases}$ ([6], VIII. 8.2)

onde Ω é o módulo de orientação do recobrimento universal X de $Y = K(G, 1)$.

Observação 3.6.1 Ω é um grupo cíclico infinito com dois geradores, correspondendo as duas orientações de X .

A ação de G em X induz uma ação de G em Ω , com um elemento $\gamma \in G$ atuando como ± 1 , ou seja, para $\omega \in \Omega$, temos

$$\gamma \cdot \omega = \omega \quad \text{se a ação preserva orientação}$$

$$\gamma \cdot \omega = -\omega \quad \text{caso contrário.}$$

Além disso, G atua trivialmente em $\Omega \Leftrightarrow Y$ é orientável.

Teorema 3.6.1 Se G é um grupo tal que existe uma variedade esférica X fechada de dimensão n , com $\pi_1(X) = G$, então G é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n .

Demonstração: Seja X uma variedade esférica n -dimensional fechada, isto é, uma $K(G, 1)$ -variedade fechada. Por (I), G é de tipo FL (logo, é FP) e $cd\ G = n$.

Além disso, por (II), $H^i(G, \mathbb{Z}G) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq n \\ \Omega & \text{se } i = n \end{cases}$

onde $\Omega \simeq \mathbb{Z}$ como grupo abeliano.

Pelo teorema 3.5.1(iii), G é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n (orientável $\Leftrightarrow Y$ for orientável).

Exemplo 3.6.1 O toro $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ é uma variedade esférica fechada de dimensão n . Logo, $\pi_1(T^n) = G$ é um PD^n -grupo.

Exemplo 3.6.2 Seja F uma superfície fechada.

Pelo Teorema de Classificação de Superfícies ([18], I.5.1), temos as seguintes possibilidades para F :

- $F = S^2$
- $F = T^2$
- $F = P^2$ (plano projetivo)
- $F = T^2 \# \dots \# T^2$ (soma conexa de n toros)
- $F = P^2 \# \dots \# P^2$ (soma conexa de n planos projetivos).

Destas, somente S^2 e P^2 não são asféricas.

Portanto,

$$\pi_1(T^2) = \langle a, b; [a, b] = 1 \rangle$$

$$\pi_1(T^2 \# \dots \# T^2) = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n; \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = 1 \rangle$$

$$\pi_1(P^2 \# \dots \# P^2) = \langle a_1, \dots, a_n; \prod_{i=1}^n a_i^2 = 1 \rangle \quad (n \geq 2)$$

são grupos de dualidade de Poincaré de dimensão 2 sobre $\mathbf{Z}$.

Não é conhecido se todo grupo de dualidade de Poincaré G de dimensão n , $n > 2$, sobre $\mathbf{Z}$ admite uma variedade asférica fechada X , com $\pi_1(X) = G$.

O caso $n = 2$ foi provado por Eckmann-Müller e Linell em [9] e [10]. Daí, G é um grupo de dualidade de dimensão 2 sobre $\mathbf{Z}$ se, e somente se, G é um grupo superfície infinito (isto é, G é o grupo fundamental de uma superfície fechada diferente de S^2 e P^2).

Em [8] Dicks e Dunwood estenderam este resultado para PD^2 -grupos livres de torção sobre qualquer anel comutativo de característica zero.

Se G é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão 3, que é solúvel, então Thomas provou em [27] que a conjectura é verdadeira. No entanto, o caso geral $n \geq 3$ está ainda em aberto.

Apêndice

4.1 Resoluções e Complexos de Cadeia Homotopicamente Equivalentes

Sabemos que um R -módulo M admite várias resoluções projetivas. Vamos ver que tais resoluções são homotopicamente equivalentes. Os conceitos usados nesta seção, tais como: aplicações de cadeia, homotopia de cadeia, complexos de cadeia homotopicamente equivalentes, e outros, podem ser encontrados em [6], I.0.

Além disso, faremos uma recordação sobre funtores e, veremos as relações entre os mesmos e as resoluções projetivas.

Lema 4.1.1 *Sejam (C, ∂) e (C', ∂') complexos de cadeias, e r um inteiro.*

Consideremos $(f_i : C_i \rightarrow C'_i)_{i \leq r}$ uma família de aplicações tais que $\partial'_i f_i = f_{i-1} \partial_i$ para $i \leq r$. Se C_i é projetivo para $i > r$ e $H_i(C') = 0$ para $i \geq r$, então $(f_i)_{i \leq r}$ se estende a uma aplicação de cadeia $f : C \rightarrow C'$, e f é única a menos de homotopia, isto é, quaisquer duas extensões são homotópicas por uma homotopia h , tal que $h_i = 0$ para $i \leq r$.

Demonstração: [6], I.7.4

■

Teorema 4.1.1 *Se $\varepsilon : F \rightarrow M$ e $\varepsilon' : F' \rightarrow M$ são resoluções projetivas de um R -módulo M , então existe uma aplicação de cadeia $f : F \rightarrow F'$, preservando aumentação (isto é, $\varepsilon' \circ f = \varepsilon$), única a menos de homotopia, e f é uma equivalência de homotopia.*

Demonstração: Dadas as resoluções projetivas de M , $\varepsilon : F \rightarrow M$ e $\varepsilon' : F' \rightarrow M$, consideremos os complexos de cadeia aumentados com M na dimensão -1 , e com 0 (módulo nulo), nas dimensões menores que -1 , e a família $(f_i : F_i \rightarrow F'_i)_{i \leq -1}$, onde $f_{-1} = id : M \rightarrow M$ e $f_i = 0 : 0 \rightarrow 0$ para $i < -1$:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} C : & \cdots & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{\partial_1} & F_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & M & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow id & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \\ C' : & \cdots & \longrightarrow & F'_1 & \xrightarrow{\partial'_1} & F'_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & M & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Temos que $\partial'_i \circ f_i = f_{i-1} \partial_i$ para $i \leq -1$ (pois $\partial'_i = \partial_i = 0$ para $i \leq -1$).

Além disso, F_i é projetivo para $i > -1$ e $H_i(C') = 0$ para $i \geq -1$ (pois $F' \rightarrow M$ é exata).

Logo, pelo lema 4.1.1, a família de aplicações acima se estende a uma aplicação de cadeia $f : F_i \rightarrow F'_i$, única a menos de homotopia. Notemos que f preserva aumentação, pois $\varepsilon' \circ f_0 = id \circ \varepsilon = \varepsilon$.

Resta mostrar que f é uma equivalência de homotopia.

Por raciocínio análogo ao anterior, existe uma aplicação de cadeia $f' : F' \rightarrow F$, preservando aumentação:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow id & & \downarrow 0 & & \\ \cdots & \longrightarrow & F'_1 & \longrightarrow & F'_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f'_1 & & \downarrow f'_0 & & \downarrow id & & \downarrow 0 & & \\ \cdots & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Assim, $f' \circ f : F \rightarrow F$ estende id_M . Mas, $id_F : F \rightarrow F$ também estende id_M .

Logo, pela unicidade do lema 4.1.1, temos que $f' \circ f \sim id_F$.

Analogamente, $f \circ f' \sim id_{F'}$ e, portanto, f é uma equivalência de homotopia. ■

Definição 4.1.1 Um funtor covariante T (respec. contravariante) da categoria dos R -módulos na categoria dos grupos abelianos é uma função que a cada R -módulo M

associa um grupo abeliano $T(M)$, e a cada homomorfismo de R -módulos $f : M \rightarrow N$ associa um homomorfismo de grupos abelianos $T(f) : T(M) \rightarrow T(N)$ (respec. $T(f) : T(N) \rightarrow T(M)$) tal que

- $T(id_M) = id_{T(M)}$
- $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$ (respec. $T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$).

Se $T(f + g) = T(f) + T(g)$, dizemos que T é **aditivo**.

Exemplo 4.1.1 Sejam $\mathcal{M}$ a categoria dos R -módulos (à direita), $\mathcal{G}$ a categoria dos grupos abelianos e F um R -módulo (à esquerda). Temos que $T_F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{G}$ é um funtor covariante aditivo.

De fato: Definindo $T_F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{G}$ por:

$$T_F(M) := M \otimes_R F$$

$$\begin{aligned} T_F(f) &:= M \otimes_R F \rightarrow N \otimes_R F \\ m \otimes x &\mapsto T_F(f)(m \otimes x) := f(m) \otimes x \end{aligned}$$

para todo R -módulo (à direita) M e todo homomorfismo de R -módulos $f : M \rightarrow N$, temos que T_F é um funtor covariante aditivo.

Exemplo 4.1.2 Analogamente, se F é um R -módulo (à direita) e $\mathcal{N}$ denota a categoria dos R -módulos (à esquerda), temos que $S_F : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{G}$ é um funtor covariante aditivo.

De fato: Definindo $S_F : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{G}$ por:

$$S_F(M) := F \otimes_R M$$

$$\begin{aligned} S_F(f) &:= F \otimes_R M \rightarrow F \otimes_R N \\ x \otimes m &\mapsto S_F(f)(x \otimes m) := x \otimes f(m) \end{aligned}$$

para todo R -módulo (à esquerda) M e todo homomorfismo de R -módulos $f : M \rightarrow N$, temos que S_F é um funtor covariante aditivo.



Exemplo 4.1.3 Utilizando as mesmas notações do exemplo anterior, temos que se F é um R -módulo (à esquerda), a aplicação $H_F : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{G}$ é um funtor covariante aditivo.

De fato: Definindo $H_F : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{G}$ por:

$$H_F(M) := \text{Hom}_R(F, M)$$

$$\begin{aligned} H_F(f) &:= \text{Hom}_R(F, M) \rightarrow \text{Hom}_R(F, N) \\ \varphi &\mapsto H_F(f)(\varphi) := f \circ \varphi \end{aligned}$$

para todo R -módulo (à esquerda) M e todo homomorfismo de R -módulos $f : M \rightarrow N$, temos que H_F é um funtor covariante aditivo.

Da mesma forma, $L_F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{G}$, definido por $L_F(M) := \text{Hom}_R(M, F)$ tal que $L_F(f)(\varphi) := \varphi \circ f$ é um funtor contravariante aditivo.

Proposição 4.1.1 Sejam (C, ∂) e (C', ∂') dois complexos de cadeia (de R -módulos) e T um funtor aditivo (na categoria correspondente). Se f e g são duas aplicações de cadeia de C em C' e h é uma homotopia de cadeia entre f e g , então $T(h)$ é uma homotopia de cadeia entre $T(f)$ e $T(g)$, isto é, T preserva homotopia de cadeias.

Demonstração: Temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_2 & \xrightarrow{\partial_2} & C_1 & \xrightarrow{\partial_1} & C_0 \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow g_2 & \nearrow f_2 & \downarrow g_1 & \nearrow f_1 & \downarrow g_0 & \nearrow f_0 \\ \cdots & \longrightarrow & C'_2 & \xrightarrow{\partial'_2} & C'_1 & \xrightarrow{\partial'_1} & C'_0 \longrightarrow \cdots \end{array}$$

com $f \sim_h g$.

Como h é uma homotopia entre f e g , temos por [6], I.0:

$$h \circ \partial + \partial' \circ h = f - g.$$

Daí, como T é aditivo:

$$T(h \circ \partial) + T(\partial' \circ h) = T(f) - T(g)$$

- Se T é covariante:

$$T(h) \circ T(\partial) + T(\partial') \circ T(h) = T(f) - T(g).$$

Assim, $T(h)$ é uma homotopia de cadeia entre $T(f)$ e $T(g)$.

- Se T é contravariante:

$$T(\partial) \circ T(h) + T(h) \circ T(\partial') = T(f) - T(g).$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & T(C_0) & \xrightarrow{T(\partial_1)} & T(C_1) & \xrightarrow{T(\partial_2)} & T(C_2) \longrightarrow \cdots \\ & & \uparrow T(g_0) & \nearrow T(f_0) & \uparrow T(g_1) & \nearrow T(f_1) & \uparrow T(g_2) \\ & & T(h_0) & & T(h_1) & & \\ \cdots & \longrightarrow & T(C'_0) & \xrightarrow{T(\partial'_1)} & T(C'_1) & \xrightarrow{T(\partial'_2)} & T(C'_2) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Deste modo, $T(h)$ é uma homotopia entre $T(f)$ e $T(g)$. ■

Corolário 4.1.1 Se $\varepsilon : F \rightarrow M$ e $\varepsilon' : F' \rightarrow M$ são resoluções projetivas de M , e T é um funtor aditivo, então os complexos $T(F)$ e $T(F')$ são homotópicos.

Demonstração: Como $\varepsilon : F \rightarrow M$ e $\varepsilon' : F' \rightarrow M$ são resoluções projetivas de M temos, pelo teorema 4.1.1, que existe uma equivalência de homotopia entre F e F' , ou seja, existem aplicações de cadeia $f : F \rightarrow F'$ e $f' : F' \rightarrow F$, com $f \circ f' \sim_{h'} id_{F'}$ e $f' \circ f \sim_h id_F$, onde h e h' são homotopias de cadeia.

Deste modo, pela proposição anterior, $T(h)$ é uma homotopia de cadeia entre $T(f' \circ f)$ e $T(id_F) = id_{T(F)}$ e, $T(h')$ é uma homotopia de cadeia entre $T(f \circ f')$ e $T(id_{F'}) = id_{T(F')}$.

Logo, $T(h)$ é uma equivalência de homotopia entre $T(F)$ e $T(F')$. ■

Observação 4.1.1 Pelo fato de complexos de cadeia homotópicos possuírem homologias isomorfas ([6], 1.0), temos que $H_n(T(F))$ (homologia no nível n do complexo de cadeia $T(F)$) depende somente de T e M , a menos de um isomorfismo canônico.

Definição 4.1.2 Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Consideremos os funtores T_1 e T_2 de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$. Uma **transformação natural** $h : T_1 \rightarrow T_2$ é uma função que associa a cada objeto C em $\mathcal{C}$ um morfismo $h(C) : T_1(C) \rightarrow T_2(C)$ em $\mathcal{D}$, de forma que para cada morfismo $\gamma : C \rightarrow C'$, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_1(C) & \xrightarrow{h(C)} & T_2(C) \\ \downarrow T_1(\gamma) & & \downarrow T_2(\gamma) \\ T_1(C') & \xrightarrow{h(C')} & T_2(C') \end{array}$$

Além disso, se $h(C) : T_1(C) \rightarrow T_2(C)$ possuir inversa, dizemos que h é um **isomorfismo natural**.

4.2 Sistemas de Grupos

Definição 4.2.1 Uma relação $\alpha < \beta$ em um conjunto M é chamada uma **quase ordem** se é reflexiva e transitiva, isto é,

- Reflexiva: $\alpha < \alpha, \forall \alpha \in M$.
- Transitiva: Se $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$, então $\alpha < \gamma$.

Dizemos, então que M é **quase ordenado**.

Definição 4.2.2 Um conjunto dirigido M é um conjunto quase ordenado tal que

$$\forall \alpha, \beta \in M, \exists \gamma \in M \text{ tal que } \alpha < \gamma \text{ e } \beta < \gamma.$$

Definição 4.2.3 Um conjunto dirigido M' é um **subconjunto** de M ($M' \subset M$) se:

- $\alpha \in M'$, então $\alpha \in M$.
- $\alpha < \beta$ em M' , então $\alpha < \beta$ em M .

Definição 4.2.4 Um subconjunto M' é **cofinal** em M se

$$\forall \alpha \in M, \exists \beta \in M' \text{ tal que } \alpha < \beta.$$

Definição 4.2.5 Se M e N são conjuntos dirigidos, uma **aplicação** $\phi : M \rightarrow N$ é uma função preservando ordem de M em N , isto é, se $\alpha < \beta$ em M , então $\phi(\alpha) < \phi(\beta)$ em N .



Definição 4.2.6 Um sistema direto de conjuntos $\{X, \pi\}$ sobre um conjunto dirigido M é uma função que associa, para cada $\alpha \in M$, um conjunto X^α e, para cada par α, β tal que $\alpha < \beta$ em M , uma aplicação:

$$\pi_\alpha^\beta : X^\alpha \rightarrow X^\beta$$

chamada **projeção**, satisfazendo:

- $\pi_\alpha^\alpha = id, \forall \alpha \in M$.
- Se $\alpha < \beta < \gamma$ em M , então $\pi_\beta^\gamma \circ \pi_\alpha^\beta = \pi_\alpha^\gamma$.

Nota: M é visto como um conjunto de índices.

Observações 4.2.1 (a) Se cada X^α é um espaço topológico, ou um R -módulo, ou grupo topológico e, cada projeção é, respectivamente, contínua, R -homomorfismo, homomorfismo contínuo, então $\{X, \pi\}$ é chamado um sistema direto de, respectivamente, espaços, R -módulos, ou grupos topológicos.

(b) Um conjunto dirigido M vem a ser uma categoria se, cada relação $\alpha < \beta$ é vista como uma aplicação $\alpha \rightarrow \beta$.

(c) Um sistema direto sobre M é simplesmente um funtor covariante de M na categoria de conjuntos e aplicações, ou na categoria de R -módulos e homomorfismos, entre outras.

Definição 4.2.7 Sejam $\{X, \pi\}$ e $\{X', \pi'\}$ sistemas diretos sobre M e M' , respectivamente. Então, uma aplicação:

$$\Phi : \{X, \pi\} \rightarrow \{X', \pi'\}$$

consiste de uma aplicação $\phi : M \rightarrow M'$ e, para cada $\alpha \in M$, uma aplicação $\phi^\alpha : X^\alpha \rightarrow X'^{\phi(\alpha)}$ tal que, se $\alpha < \beta$ em M , então o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} X^\alpha & \xrightarrow{\pi_\alpha^\beta} & X^\beta \\ \downarrow \phi^\alpha & & \downarrow \phi^\beta \\ X'^{\phi(\alpha)} & \xrightarrow{\pi'_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)}} & X'^{\phi(\beta)} \end{array}$$

Observação 4.2.1 Sejam

$$\begin{aligned}\Phi : \{X, \pi\} &\rightarrow \{X', \pi'\} \\ \Phi' : \{X', \pi'\} &\rightarrow \{X'', \pi''\}\end{aligned}$$

duas aplicações entre sistemas diretos.

Sua composição:

$$\Phi' \circ \Phi : \{X, \pi\} \rightarrow \{X'', \pi''\}$$

é definida e consiste das composições $\phi' \circ \phi$ e $\phi^{\phi\alpha} \circ \phi^\alpha$, $\alpha \in M$.

Observação 4.2.2 Sistemas diretos de qualquer tipo específico e suas aplicações formam uma categoria.

Definição 4.2.8 Se M e M' são conjuntos dirigidos, $M' \subset M$ e $\{X, \pi\}$ um sistema direto sobre M , então os conjuntos e aplicações de $\{X, \pi\}$ que correspondem aos elementos e relações em M' formam um sistema direto sobre M' , chamado **subsistema** de $\{X, \pi\}$ sobre M' .

Se M' é cofinal em M , o subsistema é chamado **cofinal**.

As inclusões:

$$\begin{aligned}\phi : M' &\rightarrow M \\ \phi^\alpha : X'^\alpha &\rightarrow X^\alpha\end{aligned}$$

formam uma aplicação:

$$\Phi : \{X', \pi'\} \rightarrow \{X, \pi\}$$

chamada **injeção** do subsistema no sistema.

Nota: É claro que a aplicação identidade de $\{X, \pi\}$ é uma injeção. Além disso, a composição de duas injeções é uma injeção.

Observação 4.2.3 Se o conjunto de índices M se reduz a um único ponto, então o sistema direto indexado por M se reduz a um único conjunto.



Reciprocamente, todo conjunto pode ser visto como um sistema direto indexado por um conjunto M , consistindo de um único elemento.

Em particular, se na definição 4.2.7 tomarmos M' reduzido a um único elemento, observamos que uma aplicação

$$\Phi : \{X, \pi\} \rightarrow X'$$

de um sistema direto $\{X, \pi\}$ indexado por M no conjunto X' é uma família de aplicações $\phi^\alpha : X^\alpha \rightarrow X'$, tal que $\phi^\beta \circ \pi_\alpha^\beta = \phi^\alpha$.

4.3 Limite Direto

Definição 4.3.1 Seja $\{G, \pi\}$ um sistema direto sobre o conjunto dirigido M , onde cada G^α é um R -módulo, e cada π_α^β é homomorfismo.

Denotemos a soma direta dos R -módulos de $\{G, \pi\}$ por $\sum G$.

Se $g \in G^\alpha$, vamos identificar g com sua imagem em $\sum G$, sob a aplicação i_α , isto é, $g \equiv i_\alpha(g)$.

Para cada $\alpha < \beta$ em M e cada g^α em G^α , o elemento:

$$\pi_\alpha^\beta g^\alpha - g^\alpha$$

de $\sum G$ é chamado uma **relação**.

Seja Q o subgrupo de $\sum G$ gerado por todas as relações:

$$Q = \langle \pi_\alpha^\beta g^\alpha - g^\alpha; \alpha < \beta \text{ e } g^\alpha \in G^\alpha \rangle.$$

O limite direto de $\{G, \pi\}$ é o grupo quociente:

$$\lim_{\rightarrow} G^\alpha = (\sum G)/Q.$$

A aplicação natural $\pi : \sum G \rightarrow \lim_{\rightarrow} G^\alpha$ define homomorfismos:

$$\pi \circ i_\alpha = \pi_\alpha : \lim_{\rightarrow} G^\alpha$$

chamados **projeções**.

Observação 4.3.1 O fato de M ser um conjunto dirigido não foi usado na definição de limite direto.

O teorema a seguir fornece uma definição alternativa de $\varinjlim G^\alpha$, usando o fato de M ser dirigido.

Teorema 4.3.1 Seja $\{G, \pi\}$ um sistema direto de R -módulos. Dizemos que $g^\alpha \in G^\alpha$ é equivalente a $g^\beta \in G^\beta$ se existe $\gamma > \alpha, \beta$ tal que $\pi_\alpha^\gamma g^\alpha = \pi_\beta^\gamma g^\beta$.

Esta relação divide os elementos $g^\alpha \in G^\alpha$, para todo α , em classes de equivalência disjuntas.

A soma $\bar{g}_1 + \bar{g}_2 = \bar{g}$ de duas classes de equivalência é obtida escolhendo um G^α , no qual $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ têm representantes g_1^α, g_2^α e definindo $\bar{g}$ como a classe de $g_1^\alpha + g_2^\alpha$.

O produto $r\bar{g}$ é definido como sendo a classe de rg^α , onde g^α está na classe $\bar{g}$.

Então, as classes de equivalência formam um R -módulo isomorfo a $\varinjlim G^\alpha$ sob a correspondência que associa a cada classe a imagem em $\varinjlim G^\alpha$ de seus representantes.

Exemplo 4.3.1 Sejam G um grupo e M a coleção de todos os subconjuntos finitos de G .

Para cada $\alpha \in M$, seja G^α o subgrupo de G gerado pelos elementos de α :

$$G^\alpha = \langle a; a \in \alpha \rangle.$$

Defina $\alpha < \beta$, significando que $G^\alpha \subset G^\beta$.

Seja $\pi_\alpha^\beta: G^\alpha \rightarrow G^\beta$ a inclusão.

É facilmente provado que M é dirigido, $\{G, \pi\}$ é um sistema direto e $\varinjlim G^\alpha \simeq G$.

Assim, qualquer grupo é o limite direto de seus subgrupos em bases finitas (subgrupos finitamente gerados).

Exemplo 4.3.2 Seja $\{H_j\}$ uma família de grupos indexados por um conjunto J .

Sejam H a soma direta e M a coleção de subconjuntos finitos de J , ordenados por inclusão.

Se $\alpha \in M$, definimos:

$$G^\alpha = \sum_{j \in \alpha} H_j.$$

Se $\alpha \subset \beta$, definimos $\pi_\alpha^\beta : G^\alpha \rightarrow G^\beta$ de modo óbvio: as coordenadas de $\pi_\alpha^\beta(g)$ são as mesmas de j para $j \in \alpha$ e zero, para $j \in \beta - \alpha$.

Deste modo, segue que $\varinjlim G^\alpha \simeq H$.

Daí, uma soma direta é um limite direto de somas diretas finitas.

Bibliografia

- [1] Andrade, M.G.C.; *Invariantes Relativos e Dualidade*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, Campinas, 1992.
- [2] Bieri, R.; *Homological Dimension of Discrete Groups*, Queen Mary College Math. Notes, Queen Mary College, London, 1976.
- [3] Bieri, R.; Eckmann, B.; *Groups with homological duality generalizing Poincaré duality*, Invent. Math. 20, pp. 103-124, 1973.
- [4] Bieri, R.; Eckmann B.; *Finiteness properties of duality groups*, Comment. Math. Helv. 49, pp. 74-83, 1974.
- [5] Brown, K. S.; *Homological criteria for finiteness*, Comment. Math. Helv. 50, pp. 129-135, 1975.
- [6] Brown, K. S.; *Cohomology of Groups*, G.T.M. 87 Springer-Verlag, New York, 1982.
- [7] Cioca, D. M.; *Cohomologia e Ends de Grupos*, Dissertação de Mestrado, IBILCE-UNESP, 1997.
- [8] Dicks, W.; Dunwood, M.; *Groups acting on graphs*, Cambridge University Press, 1988.
- [9] Eckmann, B.; Müller, H.; *Poincaré Duality Groups of Dimension Two*, Comm. Math. Helvetici 55, pp. 510-520, 1980.
- [10] Eckmann, B.; Linell, P.A.; *Poincaré Duality Groups of Dimension Two II*, Comm. Math. Helv. 58, pp. 111-114, 1983.



- [11] Eilenberg, S.; *Homology of Spaces with Operators I*, Transl. Amer. Math. Soc. 61, pp. 378-417, 1947; errata 62 (1947) 548.
- [12] Eilenberg, S.; Ganea, T.; *On the Lusternik-Schnirelmann category of abstract groups*, Ann. of Maths. 65, pp. 517-518, 1957.
- [13] Greenberg, M.J.; *Lectures on Algebraic Topology*, W.A., Benjamin, Inc., 1966.
- [14] Hu, S.T.; *Introduction to Homological Algebra*, Holden-Day Series in Mathematics, Holden-Day Inc. São Francisco, 1968.
- [15] Johnson, F.E.A.; Wall, C.T.C.; *On groups satisfying Poincaré duality*, Annals of Math. 96, pp. 592-598, 1972.
- [16] Lima, E.L.; *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977.
- [17] MacLane, S.; *Homology*, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [18] Massey, W.S.; *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, Inc., 1967.
- [19] Papani, F.M.G.; *Cohomologia de Grupos, Dualidade e Aplicações ao estudo do Invariante Algébrico $E(G, S, M)$* , Dissertação de Mestrado, IBILCE-UNESP, 1997.
- [20] Robinson, D.J.S.; *A Course in the Theory of Groups*, G.T.M. 80, Springer, Berlin, 1982.
- [21] Rotman, J.J.; *An Introduction to Homological Algebra* Academic Press, Inc., 1979.
- [22] Schubert, H.; *Topology*, MacDonald & Co. (Publishers) LTD, 1968.
- [23] Serre, J. P.; *Cohomologie des groupes discrets*, Ann of Math. Studies 70, pp. 77-169, 1971.
- [24] Spanier, E.H.; *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, Inc., 1966.



- [25] Stallings, J.R.; *On torsion free groups with infinitely many ends*, Ann. of Math. 88, pp. 312-334, 1968.
- [26] Swan, R.; *Groups of cohomological dimension one*, J. of Algebra 12, pp. 585-610, 1969.
- [27] Thomas, C.B.; *Splittings theorems for certain PD^3 -groups*, Math. Z. 186, pp.201-209, 1984.
- [28] Vick, J.W.; *Homology Theory*, Academic Press, Inc., 1973.
- [29] Wall, C.T.C.; *Finiteness conditions for CW-complexes*, Ann. of Maths. 81, pp. 56-69, 1965.
- [30] Wall, C.T.C.; *Finiteness conditions for CW-complexes II*, Proc. Royal Soc. A. 295, pp. 129-139, 1966.
- [31] Whitehead, G.W.; *Elements of Homotopy Theory*, G.T.M. 61, Springer-Verlag, New York, 1978.

DOAÇÃO

Data 26 / 06 2002

Procedência Autora

R\$ 27,00 ND 151/02



