UNESP
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá

Guaratinguetá
2001

1110000446

"Um Estudo Numérico do Efeito Dinâmico do Achatamento e do Arrasto na Estrutura e Estabilidade de Sistemas Coorbitais"

LUIS FERNANDO MOLLICA BORELLI

133

unesp

unesp Governo do Estado de São Paulo
Universidade Estadual Paulista

FACULDADE DE ENGENHARIA DE GUARATINGUETÁ

Um Estudo Numérico do Efeito Dinâmico do Achatamento e do Arrasto na Estrutura e Estabilidade de Sistemas Coorbitais

LUÍS FERNANDO MOLLICA BORELLI

PUBLICAÇÃO

446

GUARATINGUETÁ - SP
BRASIL

00446

UM ESTUDO NUMÉRICO DO EFEITO DINÂMICO DO ACHATAMENTO E DO ARRASTO NA ESTRUTURA E ESTABILIDADE DE SISTEMAS COORBITAIS

LUÍS FERNANDO MOLLICA BORELLI

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista para a obtenção do título de Mestre em Física.

Orientadores: Prof. Dr. Othon Cabo Winter
Prof. Dr. Tadashi Yokoyama

Guaratinguetá
2001

FACULDADE DE ENGENHARIA
DE GUARATINGUETÁ
BIBLIOTECA

Ficha catalográfica preparada na Seção de Aquisição e Tratamento da Informação da Biblioteca – FEG/UNESP

B731e

Borelli, Luís Fernando Mollica
Um Estudo Numérico do Efeito Dinâmico do Achatamento e do Arrasto na Estrutura e Estabilidade de Sistemas Coorbitais /Luís Fernando Mollica Borelli. Guaratinguetá, 2001
131f.: il.; 30cm

Bibliografia: f.131
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2001.
Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter
Co-orientador: Prof. Dr. Tadashi Yokoyama
1. Satélites coorbitais I. Título

CDU 5~~21.1(043)~~
629.783

unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

"UM ESTUDO NUMÉRICO DO EFEITO DINÂMICO DO ACHATAMENTO E DO ARRASTO NA ESTRUTURA E ESTABILIDADE DE SISTEMAS COORBITAIS"

LUIS FERNANDO MOLLICA BORELLI

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"MESTRE EM FÍSICA"

ESPECIALIDADE: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Prof. Dr. Othon Cabo Winter
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. OTHON CABO WINTER
Orientador / Unesp-Feg

Prof. Dr. CRISTIÁN BEAUGÉ
UNCórdoba - Argentina

Prof. Dr. RODNEY DA SILVA GOMES
ON/RJ

Fevereiro de 2001

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

DADOS CURRICULARES

LUÍS FERNANDO MOLLICA BORELLI

NASCIMENTO	22.12.1972 - CAMPINAS / SP
FILIAÇÃO	Sebastião Antonio Borelli Helenice Mollica
1994/1998	Curso de Graduação Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá - UNESP
1999/2001	Curso de Pós-Graduação em Física, nível de Mestrado na Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá - UNESP

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

À memória de meu avô, Raphael, que sempre foi um incentivador para os meus estudos e aos meus pais, que com seus esforços me deram a oportunidade de vencer mais esta etapa de minha vida.

unesp

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Prof. Dr. Othon C. Winter, cuja participação determinada e incentivo foram essencial para o término deste trabalho.

ao meu orientador Prof. Dr. Tadashi Yokoyama, que apesar da distância física, teve uma participação essencial para o término deste trabalho, contribuindo com sua vasta experiência na área para sanar as minhas dúvidas.

à Prof[a.] Dr[a.] Silvia M. G. Winter pelas conversas e disposição para esclarecer minhas dúvidas.

aos colegas da Pós-Graduação em Física por toda a ajuda nos momentos difíceis deste período, especialmente Regina, Áurea e Cláudia.

ao colega Ernesto Vieira Neto pelo auxílio na parte computacional utilizada neste trabalho.

a todo corpo docente e funcionários pelo apoio irrestrito que permitiram meu aprimoramento no desenvolvimento intelectual e social.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da PROPP-UNESP/CAPES

Este trabalho contou com o apoio financeiro da **PROPP-UNESP/CAPES**

"Uma coisa que aprendi numa longa vida:
Que toda a nossa ciência, confrontada com a
realidade, é primitiva e infantil – e no
entanto é o que temos de mais precioso."
Albert Einstein



"Uma coisa que aprendi numa longa vida: Que toda a nossa ciência, confrontada com a realidade, é primitiva e infantil – e no entanto é o que temos de mais precioso."

Albert Einstein

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

Resumo

Abstract

INTRODUÇÃO.....25

1 REVISÃO DE LITERATURA.....28

2 PROBLEMA PLANAR CIRCULAR RESTRITO DE TRÊS CORPOS.....31

2.1 Equações de movimento.....32

2.2 Pontos de equilíbrio Lagrangianos.....34

2.3 A constante de Jacobi e as curvas de velocidade zero.....35

3 PROBLEMA PLANAR CIRCULAR RESTRITO DE TRÊS CORPOS COM CHATAMENTO.....38

3.1 A órbita de um satélite ao redor de um planeta achatado.....38

3.2 Equações de movimento com o termo do achatamento.....39

3.3 Nova localização dos pontos de equilíbrio Lagrangianos.....40

3.3.1 Estudo da nova localização dos pontos triangulares de equilíbrio Lagrangianos.....43

3.4 Comparação da evolução das curvas de velocidade zero entre o sistema com e o sem achatamento.....46
3.5 Comportamento da excentricidade (e), da variação angular ($\Delta\theta$) e da variação radial (Δr).....49
3.5.1 Programa principal.....49
3.5.2 Análise dos gráficos.....50
3.5.2.1 Variação da excentricidade.....50
3.5.2.2 Excentricidade média.....51
3.5.2.3 Variação de θ.....52
3.5.2.4 Variação de r.....52
3.5.2.5 Dependência da excentricidade média com o parâmetro β.....52

4 PROBLEMA PLANAR CIRCULAR RESTRITO DE TRÊS CORPOS COM ARRASTO PROPORCIONAL A VELOCIDADE DA PARTÍCULA NO SISTEMA INERCIAL.....63

4.1 Equações de movimento com o termo do arrasto proporcional a velocidade no sistema inercial.....63
4.2 Evolução dos pontos de equilíbrio devido ao arrasto.....64
4.3 Evolução temporal das coordenadas polares da partícula e sua excentricidade orbital.....66
4.3.1 Programa principal.....66
4.3.2 Análise dos gráficos da evolução temporal das coordenadas polares da partícula, de suas órbitas e de sua excentricidade orbital.....66

5 ETAPAS FUTURAS.....127
CONCLUSÕES.....128
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....131

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 – Relação entre as coordenadas siderais (ξ , η) e as sinódicas (x , y). A origem O está localizada no centro de massa do sistema. (Reproduzido de Dermott & Murray (1999))....32

FIGURA 2.2 – Esquema mostrando a localização dos pontos de equilíbrio Lagrangianos triangulares (L_4 e L_5) e colineares (L_1, L_2 e L_3) em relação às duas massas μ_1 e μ_2 e o círculo centrado na massa μ_1....35

FIGURA 2.3 – Curvas de velocidade zero para dois valores da constante de Jacobi para o Caso quando μ_2 = 0.2. Os valores de C_j são (*a*) C_j = 3,9 e (*b*) C_j = 3,7. A área sombreada mostra a região proibida. (Reproduzido de Dermott & Murray (1999))....37

FIGURA 3.1 – Localização dos Pontos de equilíbrio triangulares em termos de r_1 e r_2, como uma função do parâmetro $\beta = 3/2J_2R^2$. As linhas tracejadas destacam os valores de β para os sistemas Saturno-Dione e Saturno Tétis....42

FIGURA 3.2 – Localização dos pontos de equilíbrio triangulares em termos de r_1 e r_2, como uma função de valores elevados do parâmetro β....43

FIGURA 3.3 – Esquema de localização de um ponto de equilíbrio triangular. O centro de massa do sistema está em O....44

FIGURA 3.4 – Curvas de velocidade zero com diferentes valores de C_j para um sistema com achatamento. A curva de C_j = 3.042 foi destacada em azul para efeito de comparação com a curva de C_j = 3.039 da Figura 3.5....47

FIGURA 3.5 – Curvas de velocidade zero com diferentes valores de C_j para um sistema com achatamento. A curva de C_j = 3.039 foi destacada em azul para efeito de comparação com a curva de C_j = 3.042 da Figura 3.4....48

FIGURA 3.6 – Diagrama esquematizado o Problema Circular Restrito de Três Corpos e a variável, θ, que determina a condição inicial para a simulação numérica.....50

FIGURA 3.7 – Gráficos de (θ x Δe) para $\mu = 10^{-2}$, 10^{-3}, 10^{-4} e 10^{-5}. Os pontos vermelhos são para $\beta = 0$ e os verdes para $\beta = 0.00102$ que é o valor do achatamento de Saturno.....54

FIGURA 3.8 – Gráficos de (θ x Δe) para $\mu = 10^{-6}$, 10^{-7} e 10^{-9}. Os pontos vermelhos são para $\beta = 0$ e os verdes para $\beta = 0.00102$ que é o valor do achatamento de Saturno.....55

FIGURA 3.9 – Gráficos de (θ x $\overline{em}$) para $\mu = 10^{-2}$, 10^{-3}, 10^{-4} e 10^{-5}. Os pontos vermelhos são para $\beta = 0$ e os verdes par a $\beta = 0.00102$ que é o valor do achatamento de Saturno.....56

FIGURA 3.10 – Gráficos de (θ x $\overline{em}$) para $\mu = 10^{-6}$, 10^{-7} e 10^{-9}. Os pontos vermelhos são para $\beta = 0$ e os verdes par a $\beta = 0.00102$ que é o valor do achatamento de Saturno.....57

FIGURA 3.11 – Gráficos de (θ x $\Delta\theta$) para $\mu = 10^{-2}$, 10^{-3}, 10^{-4} e 10^{-5}. Os pontos vermelhos são para $\beta = 0$ e os verdes para $\beta = 0.00102$ que é o valor do achatamento de Saturno.....58

FIGURA 3.12 – Gráficos de (θ x $\Delta\theta$) para $\mu = 10^{-6}$, 10^{-7} e 10^{-9}. Os pontos vermelhos são para $\beta = 0$ e os verdes para $\beta = 0.00102$ que é o valor do achatamento de Saturno.....59

FIGURA 3.13 – Gráficos de (θ x Δr) para $\mu = 10^{-2}$, 10^{-3}, 10^{-4} e 10^{-5}. Os pontos vermelhos são para $\beta = 0$ e os verdes para $\beta = 0.00102$ que é o valor do achatamento de Saturno.....60

FIGURA 3.14 – Gráficos de (θ x Δr) para $\mu = 10^{-6}$, 10^{-7} e 10^{-9}. Os pontos vermelhos são para $\beta = 0$ e os verdes para $\beta = 0.00102$ que é o valor do achatamento de Saturno.....61

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

FIGURA 3.15 – Gráficos de (θ x $\overline{em}$) para $\mu = 10^{-6}$ e β variável.....62

FIGURA 4.1 – Diagrama esquemático demonstrando a evolução dos pontos de equilíbrio Lagrangiano, para o caso onde $\mu_2 << 1$, com $k<0$ (linhas sólidas) e a linha tracejada para um hipotético $k>0$. (Reproduzido de Murray 1994).....64

FIGURA 4.2 – Relação entre o parâmetro ξ e o deslocamento angular dos pontos de equilíbrio L_3, L_4 e L_5, no caso de pequenas razões de massa para uma força de arrasto inercial. A linha sólida determina o caso onde $\xi<0$ e a linha tracejada o caso em que $\xi>0$. (modificado de Murray 1994).....65

FIGURA 4.3 – Evolução do semi-eixo maior (a) em função dos arrasto (k) no problema de 2 corpos.....70

FIGURA 4.4 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 10^{\circ}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1\text{x}10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 10^{\circ}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....71

FIGURA 4.5 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 50^{\circ}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1\text{x}10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 50^{\circ}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....72

FIGURA 4.6 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 90^{\circ}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1\text{x}10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 90^{\circ}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....73

FIGURA 4.7 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 130^{\circ}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1\text{x}10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 130^{\circ}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....74

FIGURA 4.8 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 170^{\circ}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1\text{x}10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 170^{\circ}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....75

FIGURA 4.9 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 250°$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1x10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 250°$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....76

FIGURA 4.10 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 290°$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1x10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 290°$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....77

FIGURA 4.11 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 330°$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1x10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 330°$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....78

FIGURA 4.12 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 340°$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1x10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 340°$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....79

FIGURA 4.13 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 350°$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1x10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 350°$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....80

FIGURA 4.14 – Evolução temporal para uma partícula com $k = -0.3x10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 10°$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -1x10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 10°$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....81

FIGURA 4.15 – Evolução temporal para uma partícula com $k = -0.3x10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 20°$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -1x10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 20°$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....82

unesp

FIGURA 4.16 – Evolução temporal para uma partícula com $k = -0.3\text{x}10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 30°$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -1\text{x}10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 30°$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....83

FIGURA 4.17 – Evolução temporal para uma partícula com $k = -0.3\text{x}10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 40°$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -1\text{x}10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 40°$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....84

FIGURA 4.18 – Evolução temporal para uma partícula com $k = -0.3\text{x}10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 90°$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -1\text{x}10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 90°$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....85

FIGURA 4.19 – Evolução temporal para uma partícula com $k = -0.3\text{x}10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 150°$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -1\text{x}10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 150°$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....86

FIGURA 4.20 – Evolução temporal para uma partícula com $k = -0.3\text{x}10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 160°$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -1\text{x}10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 160°$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....87

FIGURA 4.21 – Evolução temporal para uma partícula com $k = -0.3\text{x}10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 250°$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -1\text{x}10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 250°$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....88

FIGURA 4.22 – Evolução temporal para uma partícula com $k = -0.3\text{x}10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 300°$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -1\text{x}10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 300°$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....89

unesp

FIGURA 4.23 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 340° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 340° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....90

FIGURA 4.24 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 350° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 350° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....91

FIGURA 4.25 – Evolução temporal para uma partícula com k = -3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 10°. A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....92

FIGURA 4.26 – Evolução temporal para uma partícula com k = -3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 70°. A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....93

FIGURA 4.27 – Evolução temporal para uma partícula com k = -3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 140°. A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....94

FIGURA 4.28 – Evolução temporal para uma partícula com k = -3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 200°. A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....95

FIGURA 4.29 – Evolução temporal para uma partícula com k = -3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 270°. A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....96

FIGURA 4.30 – Evolução temporal para uma partícula com k = -3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 330°. A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....97

FIGURA 4.31 – Evolução temporal para uma partícula com k = -3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 350°. A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....98

FIGURA 4.32 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 30^{\circ}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 30^{\circ}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....99

FIGURA 4.33 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 60^{\circ}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 60^{\circ}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....100

FIGURA 4.34 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 120^{\circ}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 120^{\circ}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....101

FIGURA 4.35 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 150^{\circ}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 150^{\circ}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....102

FIGURA 4.36 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 160^{\circ}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 160^{\circ}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....103

FIGURA 4.37 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 200^{\circ}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 200^{\circ}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....104

FIGURA 4.38 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 210^{\circ}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 210^{\circ}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....105

FIGURA 4.39 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 220°$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1\text{x}10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 220°$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....106

FIGURA 4.40 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 230°$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1\text{x}10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 230°$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....107

FIGURA 4.41 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 300°$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1\text{x}10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 300°$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....108

FIGURA 4.42 – Evolução temporal para uma partícula com $k = -0.3\text{x}10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 40°$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -1\text{x}10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 40°$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....109

FIGURA 4.43 – Evolução temporal para uma partícula com $k = -0.3\text{x}10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 70°$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -1\text{x}10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 70°$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....110

FIGURA 4.44 – Evolução temporal para uma partícula com $k = -0.3\text{x}10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 150°$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -1\text{x}10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 150°$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....111

FIGURA 4.45 – Evolução temporal para uma partícula com $k = -0.3\text{x}10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 220°$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -1\text{x}10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 220°$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....112

FIGURA 4.46 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 230° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 230° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....113

FIGURA 4.47 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 240° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 240° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....114

FIGURA 4.48 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 260° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 260° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....115

FIGURA 4.49 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 300° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 300° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....116

FIGURA 4.50 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 330° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 330° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....117

FIGURA 4.51 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 340° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 340° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....118

FIGURA 4.52 – Evolução temporal para uma partícula com k = -3x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 310°. A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....119

FIGURA 4.53 – Evolução temporal para uma partícula com k = -3x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 320°. A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....120

FIGURA 4.54 – Evolução temporal para uma partícula com $k = -3x10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 330°$. A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....121

FIGURA 4.55 – Evolução temporal para uma partícula com $k = -3x10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 340°$. A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.....122

FIGURA 4.56 – Evolução do espaço físico para as órbitas de uma partícula sob o efeito de um arrasto de magnitude $k = 0,-0.1x10^{-6}$, $-0.3x10^{-6}$, $-1.0x10^{-6}$, $-3.0x10^{-6}$ e $\mu = 10^{-6}$ 123

FIGURA 4.57 – Evolução da amplitude radial das órbitas de uma partícula sob o efeito de um arrasto com magnitude de $k = 0$, $-0.1x10^{-6}$, $-0.3x10^{-6}$, $-1.0x10^{-6}$, $-3.0x10^{-6}$ e $\mu = 10^{-6}$ 124

FIGURA 4.58 – Órbita e parâmetros orbitais de uma partícula capturada em uma ressonância de movimento médio 8:7.....125

FIGURA 4.59 – Órbita e parâmetros orbitais de uma partícula capturada em uma ressonância de movimento médio 12:11.....126

unesp

LISTA DE SÍMBOLOS

m	massa
a	semi-eixo maior
e	excentricidade
C_j	constante de Jacobi
G	constante universal de gravitação
μ	razão de massa
ξ	coordenada da partícula no sistema inercial
η	coordenada da partícula no sistema inercial
x	coordenada da partícula no sistema girante
y	coordenada da partícula no sistema girante
i	inclinação
n	movimento médio
t	tempo
T	período orbital corpo secundário
β	$3/2\, J_2 R^2$
J_2	achatamento
R	raio do planeta
k	magnitude do arrasto
F	força de arrasto
r_1	posição da partícula em relação ao primário
r_2	posição da partícula em relação ao secundário
θ	posição angular da partícula
Δ	variação
ψ	k/μ

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

BORELLI, L.F.M. *Um Estudo Numérico do Efeito Dinâmico do Achatamento e do Arrasto na Estrutura e Estabilidade de Sistemas Coorbitais.* Guaratinguetá, 2001, 131p. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia, Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista.

RESUMO

Neste trabalho o sistema dinâmico adotado foi o Problema Plano, Circular, Restrito de Três Corpos, que é um sistema útil e aparentemente simples, mas que fornece subsídios para o entendimento de nosso Sistema Solar. Foi feito um estudo numérico da estrutura e estabilidade das órbitas do tipo girino de satélites coorbitais no sistema dinâmico em questão. Considerou-se separadamente os efeitos perturbativos devido ao achatamento, J_2, do corpo central e de uma força de arrasto proporcional à velocidade no sistema inercial. Assim, para a perturbação devido ao achatamento, simulou-se numericamente o sistema dinâmico para diversas razões de massa, μ, e para vários valores de um parâmetro, β, que corresponde à intensidade do termo de achatamento. Uma nova configuração dos pontos de equilíbrio Lagrangianos L_4 e L_5 é obtida, já que eles não mais apresentam a clássica configuração de triângulos eqüiláteros, passando a uma configuração de triângulos escalenos com os pontos L_4 e L_5 mais próximos do corpo secundário. Os resultados obtidos para o problema com achatamento são comparados com os resultados para o problema sem achatamento. Foi observado um aumento na excentricidade média da partícula no sistema com achatamento em relação ao sistema sem achatamento. Para os parâmetros orbitais, máxima variação radial, Δr, e máxima variação angular, $\Delta\theta$, não foram observadas diferenças significativas. Para o efeito do arrasto, simulou-se numericamente o sistema dinâmico para duas razões de massa, μ, 10^{-6} e 10^{-3}, e para quatro valores do parâmetro de proporcionalidade da força de arrasto em função da velocidade,

produzindo-se assim um conjunto de figuras que fornecem a evolução temporal das coordenadas polares da partícula, bem como, de sua excentricidade orbital. Os resultados encontrados revelam as condições físicas (massa do secundário e parâmetro de proporcionalidade do arrasto) e correspondentes condições iniciais que conduzem à estabilidade coorbital. Os efeitos dissipativos do arrasto também alteram a localização dos pontos de equilíbrio (e a própria existência deles em alguns casos). As trajetórias consideradas estáveis apresentam ao longo do tempo uma constante diminuição nas amplitudes de libração radial e angular convergindo para a nova localização de um dos pontos de equilíbrio, L_4 ou L_5.

PALAVRAS-CHAVE: Satélites coorbitais; Ressonância; Arrasto; Achatamento; Estabilidade.

BORELLI, L.F.M. *A Numerical Study of the Dynamical Effect Due to Oblatness and Drag in the Structure and Stability of Coorbital Systems*. Guaratinguetá, 2001, 131p. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia, Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista.

ABSTRACT

In the present work the dynamical system adopted was the Planar, Circular, Restricted Three-Body Problem, which is apparently simple but useful system, that provides relevant information for the understanding of our Solar System. It was performed a numerical study of the structure and stability of the tadpole orbits of coorbital satellites. The perturbative effects due to the oblatness, J_2, of the central body and due to a drag force proportional to the inertial velocity. Therefore, in the case of the oblatness perturbation, the dynamical system was simulated for several mass ratio, μ, and for a range of values for a parameter, β, that corresponds to the intensity of the oblatness term. A new configuration of the Lagrangian equilibrium points L_4 and L_5 appear, they form a scalene triangles with the primaries, instead of the classical equilateral configuration. The points are closer to the secondary than the primary. The results of the system with oblatness are compared with the system without oblatness. It was observed that the mean eccentricity is higher in the case with oblatness. The orbital parameters, maximum radial variation, Δr, and maximum angular variation, $\Delta\theta$, did not show any significant difference. In the case of the drag effect, it was performed a numerical simulation of the dynamical system for two different mass ratio, μ, 10^{-6} and 10^{-3}, and for four different values of the drag force proportionality parameter. A set of figures giving the temporal evolution of the particle's polar coordinates, as well as, its orbital eccentricity are generated. The results reveal the physical conditions (secondary mass and

drag proportionality parameter) and the corresponding initial conditions that lead to coorbital stability. The drag dissipative effects also change the location of the equilibrium points (and even the existence of them in same cases). The amplitudes of radial and angular libration of the trajectories considered stable decrease along the time. They converge to the new location of one of the equilibrium points, L_4 or L_5.

KEYWORDS: Coorbital Satellites; Resonance; Drag; Oblatness; Stability.

unesp

INTRODUÇÃO

O Problema Circular Restrito de Três Corpos tem sido extensivamente estudado por mais de duzentos anos e muito conhecimento sobre o assunto acumulou-se até os dias de hoje. Este problema apresenta cinco pontos de equilíbrio, chamados pontos Lagrangianos, pois foi Lagrange no século 18 quem primeiro demonstrou a existência destes pontos. Três destes são os pontos colineares, L_1, L_2 e L_3, instáveis, sendo que os outros dois pontos de equilíbrio são os pontos triangulares, L_4 e L_5, estáveis para $\mu_2 < 0.038$. Vários tipos de órbitas periódicas associadas às ressonâncias de movimento médio (ressonância 1:1) podem ser geradas a partir das oscilações ao redor dos pontos Lagrangianos, como por exemplo, órbitas do tipo girino, que ocorre quando os objetos libram ao redor dos pontos L_4 ou L_5, órbitas do tipo ferradura, que é possível quando o objeto oscila ao redor dos pontos L_4, L_3 e L_5, órbitas Halo e Lissajous ao redor dos pontos L_1, L_2 e L_3 , além de um conjunto de famílias de órbitas periódicas clássicas, do tipo Henon, Copenhagem, etc...

Muitos trabalhos deram grande ênfase ao estudo das órbitas do tipo girino devido ao sistema Sol-Júpiter, o qual possui um número significativo de asteróides que oscilam nessas órbitas ao redor dos pontos triangulares L_4 e L_5, denominados Troianos. Foi Max Wolf em 1906 que descobriu o primeiro Troiano chamado de Achilles, sendo que já são conhecidos agora mais de 400 objetos neste sistema.

Em 1980, foram observados objetos orbitando ao redor dos pontos triangulares de sistemas que envolvem o planeta Saturno e um de seus satélites. O sistema Saturno-Tétis tem dois satélites, de massa muito menor que Tétis, oscilando ao redor dos pontos triangulares. Um deles chamado Telesto oscila ao redor de L_4 e tem uma amplitude de libração de 2 graus, o outro chamado Calipso oscila ao redor do ponto L_5, com uma amplitude de libração de 4 graus. O sistema Saturno-Dione apresenta um satélite chamado

unesp

Helene de massa muito menor que Dione orbitando ao redor do ponto L_4, com uma amplitude de libração de –13 a +17 graus. Estes satélites são chamados de Coorbitais e diferentemente dos Troianos eles sofrem influência de perturbações devido ao achatamento do corpo central, Saturno.

Neste trabalho foi realizado um estudo numérico da estrutura e estabilidade das órbitas do tipo girino de satélites coorbitais considerando-se efeitos dinâmicos devido ao achatamento do corpo central (planeta) e separadamente os efeitos de uma força de arrasto proporcional à velocidade no sistema inercial.

No Capítulo 1 estão apresentados e comentados alguns trabalhos relacionados com os efeitos perturbativos do achatamento, J_2, e de uma força de arrasto proporcional a velocidade, k.

No Capítulo 2 introduzimos os tópicos básicos relacionados com o Problema Plano, Circular Restrito de Três Corpos, isto é, as equações do movimento, os pontos de equilíbrio Lagrangianos e as curvas de velocidade zero.

No Capítulo 3 tem-se o estudo do sistema dinâmico com o achatamento, onde são apresentadas as novas equações de movimento e a nova estrutura dos pontos de equilíbrio Lagrangianos que passam a apresentar uma configuração de triângulos escalenos com os pontos L_4 e L_5 mais próximos do corpo secundário. Ainda neste capítulo, apresentamos e analisamos os gráficos de parâmetros orbitais, como os da máxima variação da excentricidade, Δe, o da máxima variação radial, Δr, o da máxima variação angular, $\Delta\theta$, e o da excentricidade média, obtidos através das simulações numéricas para o Problema Restrito de Três Corpos com perturbações devido ao achatamento do corpo central, para diferentes razões de massa, μ, para alguns valores do parâmetro, β, definido como $\beta \equiv \frac{3}{2} J_2 R^2$, onde, J_2, é o achatamento e R é o raio do corpo central.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

No Capítulo 4 apresentamos o sistema dinâmico com a força de arrasto proporcional à velocidade no sistema inercial e analisamos as mudanças na localização dos pontos de equilíbrio. Neste capítulo são apresentados e analisados gráficos da órbita da partícula, de excentricidade em função do tempo, da posição angular em função do tempo e também da posição radial em função do tempo.

O capítulo final contém os comentários sobre possíveis etapas futuras a serem realizadas com base nos resultados obtidos neste trabalho.

unesp

Capítulo 1

REVISÃO DE LITERATURA

Dentre os trabalhos relacionados com o efeito perturbativo do achatamento do corpo central e da força de arrasto proporcional a velocidade, apresentaremos aqui aqueles que se relacionam com a abordagem a ser adotada neste trabalho.

No artigo Taylor (1981) foram apresentadas órbitas do tipo ferradura, que são possíveis quando o objeto oscila ao redor dos pontos L_4, L_3 e L_5, reproduzindo as órbitas deste artigo pudemos testar o integrador numérico, Bulirsch-Stoer, utilizado no trabalho.

A dinâmica dos dois tipos de órbitas citadas na introdução foi estudada e simuladas por Dermott & Murray (1981a,b), que discutiram analiticamente sua estrutura e estabilidade. Em particular, analisaram a amplitude de libração destas órbitas para razões de massa da ordem 10^{-9}, excentricidade menor que 0,01 e para um parâmetro de impacto (α) variável. Observaram que para estas condições o formato destas órbitas está relacionado com as curvas de velocidade zero.

Érdi (1981) desenvolveu expressões válidas para corpos na ressonância 1:1 com pequenas amplitudes de libração. Para órbitas do tipo ferradura, grande amplitude de libração, uma teoria secular foi desenvolvida por Namouni (1999).

Morais (1999) determinou um parâmetro *l*, que define a condição de mínima separação entre o objeto e o corpo secundário para que a órbita seja do tipo girino ou ferradura.

unesp

As perturbações nas órbitas dos satélites coorbitais de Saturno foram estudadas analiticamente em primeira aproximação por Sinclair (1984). Em seu trabalho foram estudados torques devido à maré, perturbações devido à excentricidade da órbita do satélite principal, perturbações devido a uma órbita ressonante do satélite principal com um outro satélite e o achatamento de Saturno. Sinclair observou que a maior perturbação dentro da região da órbita girino ocorreu devido a existência da ressonância 2:1 entre Encélado e Dione, estas perturbações são irregulares e impossibilitam a existência simultânea de órbitas girino e ferradura devido a colisões. A irregularidade natural das perturbações pode ser responsável pela não formação de quaisquer satélites coorbitais de Encélado.

Recentemente, Wiegert (1998) observou que um asteróide chamado Cruithne está atualmente preso em uma ressonância temporária 1:1 com a Terra, indicando que librações coorbitais podem ocorrer com grandes excentricidades e inclinações.

Subba Rao & Sharma (1997) determinaram uma expressão analítica aproximada para a localização dos pontos triangulares de equilíbrio Lagrangiano para o problema com achatamento.

Peale (1993) estudou os efeitos de uma nebulosa gasosa nas órbitas de objetos Troianos, analisando o deslocamento dos pontos L_4 que passa a estar a mais de 60^o na frente de Júpiter tendo uma máxima separação angular de 108^o na frente de Júpiter e o ponto L_5 que se localiza a menos de 60^o atrás de Júpiter podendo localizar-se a apenas poucos graus atrás de Júpiter. Cálculos numéricos e analíticos demonstraram que os pequenos objetos Troianos apresentam uma estabilidade de libração ao redor dos pontos L_4 e L_5 apesar da continua dissipação de energia devido ao arrasto gasoso na nebulosa solar primordial.

unesp

Murray (1994) estudou os efeitos dinâmicos do arrasto no Problema Circular, Restrito de Três Corpos determinando analiticamente a evolução dos cinco pontos de equilíbrio Lagrangianos para um arrasto proporcional a velocidade no sistema inercial, este estudo restringe-se a pequenos valores de k, ou situações onde $k << \mu$. Para outros valores de k Murray determina uma solução aproximada para a localização dos pontos de equilíbrio.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Capítulo 2

PROBLEMA PLANAR CIRCULAR RESTRITO DE TRÊS CORPOS

Se considerarmos três corpos de massas m_1, m_2 e m_3 movendo-se sob a interação gravitacional mútua, teremos o problema de três corpos. Mas ao considerarmos que o terceiro corpo, m_3, tem massa negligenciável comparado com os corpos de massa m_1 e m_2 de tal forma que seu movimento não afeta o movimento dos outros dois corpos, apesar de seu movimento ser afetado por eles, neste caso, estamos diante do problema restrito de três corpos.

Posteriormente, se impusermos a condição de que as duas massas tenham energia e momento angular tal que elas se movam em órbitas circulares ao redor de seu centro de massa comum, de modo que a distância entre elas, bem como, a velocidade angular sejam consideradas fixas e, além disso, que o movimento dos três corpos estejam num plano comum, isto é, num mesmo plano, teremos o problema plano, circular, restrito de três corpos.

De acordo com a escolha de unidades, o sistema pode ser considerado normalizado, sendo que, desta forma, a unidade de massa é tal que $G(m_1 + m_2) = 1$ onde G é a constante universal da Gravitação. A unidade de tempo é tal que o período orbital de m_1 e m_2 em torno do centro de massa do sistema vale 2π, a unidade de distância é a constante de separação das massas, $a = 1$. Como conseqüência da terceira lei de Kepler o movimento médio do sistema, m_1 e m_2, é unitário, ou seja, $n = 1$.

Em nossos estudos fizemos uso das seguintes razões de massa: $\mu = 10^{-\rho}$ com ρ inteiro $2 \le \rho \le 9$, sendo que $\mu = \dfrac{m_2}{(m_1 + m_2)}$, considerando m_1 como sendo o corpo central ou principal, m_2 como corpo perturbador ou secundário e m_3 como corpo perturbado ou partícula.

unesp

2.1 – Equações de movimento

Consideramos o movimento das duas massas m_1 e m_2 em órbita circular em torno do centro de massa do sistema, O, e o movimento da partícula teste m_3 que se move sob o efeito gravitacional das duas massas, sem afetar o movimento delas. Desta forma temos um conjunto de eixos ξ e η no sistema inercial referente ao centro de massa do sistema, mostrado na Figura 2.1. Considere o eixo ξ ao longo da linha de m_1 com m_2 para o tempo $t = 0$,no qual, o eixo η é perpendicular a ele. Considere as coordenadas das duas massas neste sistema de referência sendo (ξ_1, η_1) e (ξ_2, η_2). Ao considerarmos que para os corpos m_1 e m_2 a unidade de distância é $a = 1$, a unidade de massa $\mu = G(m_1 + m_2) = 1$ e que o movimento médio para este sistema é $n = 1$ podemos desta forma, admitir que a velocidade angular das massas ao redor do seu centro de massa comum é também unitária. Assumindo que $m_1 > m_2$ e definindo $\mu = \dfrac{m_2}{(m_1 + m_2)}$ o valor das duas massas no novo sistema será $\mu_1 = 1 - \mu$ e $\mu_2 = \mu$, sendo que $\mu_2 < \dfrac{1}{2}$ e sua soma é unitária, ou seja, $\mu_1 + \mu_2 = 1$

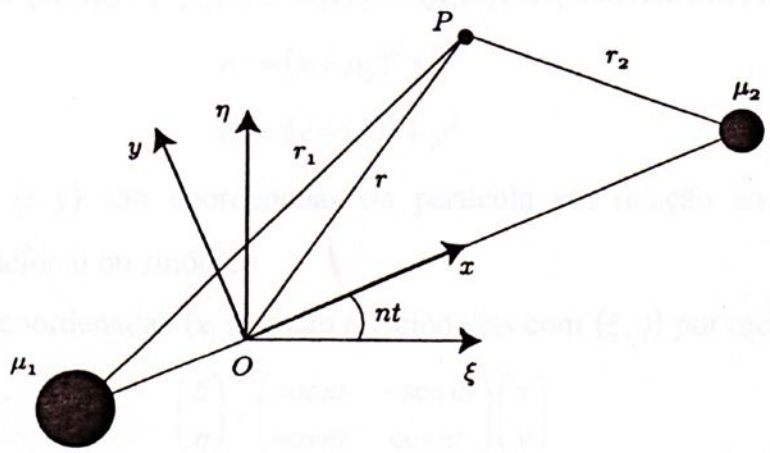


FIGURA 2.1 – Relação entre as coordenadas siderais (ξ , η) e as sinódicas (x , y). A origem O está localizada no centro de massa do sistema.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

O conjunto de coordenadas no sistema inercial ou sideral será (ξ,η), e as equações do movimento da partícula serão dadas por:

$$\ddot{\xi} = \mu_1\left(\frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3}\right) + \mu_2\left(\frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3}\right) \tag{2.1}$$

$$\ddot{\eta} = \mu_1\left(\frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3}\right) + \mu_2\left(\frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3}\right) \tag{2.2}$$

sendo:

$$r_1^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 \tag{2.3}$$

e

$$r_2^2 = (\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2 . \tag{2.4}$$

Como os corpos principal e secundário estão se movendo em órbitas circulares então a distância entre elas e a velocidade ao redor do centro de massa são fixas. Portanto podemos considerar o movimento da partícula em um sistema de coordenadas no qual as localizações de m_1 e m_2 também são fixas.

Seja o sistema de coordenadas girantes (x,y) com a mesma origem do sistema inercial de coordenadas (ξ,η), rotacionando no mesmo sentido que o movimento de m_1 e m_2 . A direção do eixo x é tal que as massas m_1 e m_2 têm coordenadas $(x_1, y_1) = (-\mu_2, 0)$ e $(x_2, y_2) = (\mu_1, 0)$, respectivamente, temos que:

$$r_1^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2 \tag{2.5}$$

$$r_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2 \tag{2.6}$$

sendo que (x,y) são coordenadas da partícula em relação ao sistema ao sistema rotacional ou sinódico.

As coordenadas (x,y) estão relacionadas com (ξ,η) por meio de

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\operatorname{sen} nt \\ \operatorname{sen} nt & \cos nt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

lembrando que $n = 1$ e t é o tempo . Diferenciando a equação (2.7) temos

unesp

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\operatorname{sen} nt \\ \operatorname{sen} nt & \cos nt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} - ny \\ \dot{y} + nx \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Diferenciando mais uma vez temos

$$\begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos nt & -\operatorname{sen} nt \\ \operatorname{sen} nt & \cos nt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x \\ \ddot{y} - 2n\dot{x} - n^2 y \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Substituindo $\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \xi$ e η nas equações (2.1) e (2.2) temos que as equações do movimento no sistema sinódico tornam-se:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x = -\mu_1 \left(\frac{x + \mu_2}{r_1^3} \right) - \mu_2 \left(\frac{x - \mu_1}{r_2^3} \right) \tag{2.10}$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y = -y \left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right) \tag{2.11}$$

2.2 – Pontos de equilíbrio Lagrangianos

Apesar do problema restrito de três corpos não ser um problema integrável, isto é, não se pode encontrar uma solução analítica geral sem aproximações para estas equações de movimento, pode-se encontrar um número de soluções especiais. Isto pode ser encontrado nos pontos onde a partícula permaneceria com velocidade e acelerações iguais à zero no sistema rotacional, ou seja, $\ddot{x} = \ddot{y} = \dot{x} = \dot{y} = 0$, que são pontos de equilíbrio do sistema.

Este sistema dinâmico possui cinco pontos de equilíbrio, sendo dois pontos estáveis, quando $\mu_2 \leq 0.038$..... e três instáveis. Os pontos instáveis são colineares e denotados por L_1, L_2 e L_3, enquanto que os pontos estáveis, L_4 e L_5, estão localizados de modo a formar triângulos eqüiláteros com a localização dos corpos μ_1 e μ_2. A localização dos pontos de equilíbrio Lagrangiano está representada na Figura 2.2.

unesp

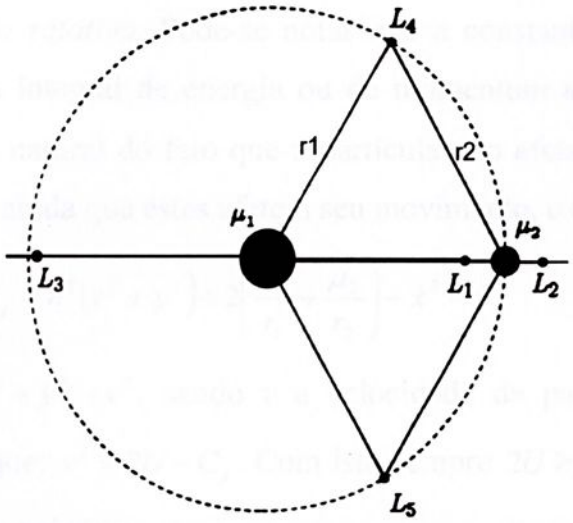


FIGURA 2.2 – Esquema mostrando a localização dos pontos de equilíbrio Lagrangianos triangulares (L_4 e L_5) e colineares (L_1, L_2 e L_3) em relação às duas massas μ_1 e μ_2 e o círculo centrado na massa μ_1.

2.3 – A constante de Jacobi e as curvas de velocidade zero

Dadas as equações de movimento (2.10) e (2.11) podemos reescrevê-las como:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \tag{2.12}$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \tag{2.13}$$

sendo $U = U(x, y)$ e é dado por:

$$U = \frac{n^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}. \tag{2.14}$$

Multiplicando (2.12) por $\dot{x}$, (2.13) por $\dot{y}$ e somando as duas equações temos:

$$\dot{y}\,\ddot{y} + \dot{x}\,\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} = \frac{dU}{dt}. \tag{2.15}$$

Integrando temos:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2U - C_j \tag{2.16}$$

onde C_j é a constante de integração e é chamada de constante de Jacobi, ou integral de *energia relativa*. Pode-se notar que a constante de Jacobi não é simplesmente uma integral de energia ou de momentum angular. Sendo isto uma conseqüência natural do fato que a partícula não afeta o movimento dos outros dois corpos ainda que estes afetem seu movimento, e é dada por

$$C_j = n^2\left(x^2 + y^2\right) + 2\left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 \qquad (2.17)$$

lembrando que $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2$, sendo v a velocidade da partícula no sistema rotacional, temos que: $v^2 = 2U - C_j$. Com isto sempre $2U \geq C_j$, caso contrário a velocidade será imaginária.

A importância da constante de Jacobi pode ser apreciada pela consideração de que a velocidade da partícula é nula, gerando as denominadas *curvas de velocidade zero*. Utilizando a equação (2.17) e admitindo a velocidade da partícula nula obtemos:

$$C_j = n^2\left(x^2 + y^2\right) + 2\left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) \qquad (2.18)$$

ou

$$2U = C_j . \qquad (2.19)$$

Através da equação (2.18) é possível definir um conjunto de curvas no plano xy para valores de constante de Jacobi. Pode-se notar que nesta equação temos uma dependência das razões de massa. Essas curvas fornecem informações sobre as regiões de movimento possível da partícula, não representando a órbita desta, porém em Dermott & Murray (1981a) foi analisada a amplitude de libração destas órbitas para razões de massa da ordem 10^{-9}, excentricidade menor que 0,01 e para um parâmetro de impacto (α) variável. Observaram que para estas condições o formato destas órbitas está relacionado com as curvas de velocidade zero

Na Figura 2.3 temos duas curvas de velocidade zero para o caso de uma massa igual a 0.2. Vemos que para o valor de constante de Jacobi igual a 3,9, situação (*a*) uma partícula pode apresentar três tipos movimento:

1) Mover-se apenas ao redor de μ_1, não podendo se aproximar do corpo perturbador μ_2, visto que sua região proibida delimitada pela área hachurada, isola μ_1 de μ_2;
2) orbitar apenas μ_2, não podendo se aproximar de μ_1, pelo mesmo motivo do item 1;
3) mover-se ao redor das duas massas sem poder se aproximar ou colidir com nenhuma das duas.

Já para a constante de Jacobi 3,7, situação b), a partícula pode apresentar dois tipos de movimento:

1) Mover-se ao redor das duas massas sem poder se aproximar ou colidir com nenhuma das duas;
2) mover-se ao redor de uma ou das duas massas, porém podendo se aproximar e até colidir com uma das duas.

É importante observar que conforme o valor da constante de Jacobi aumenta a correspondente área proibida também aumenta.

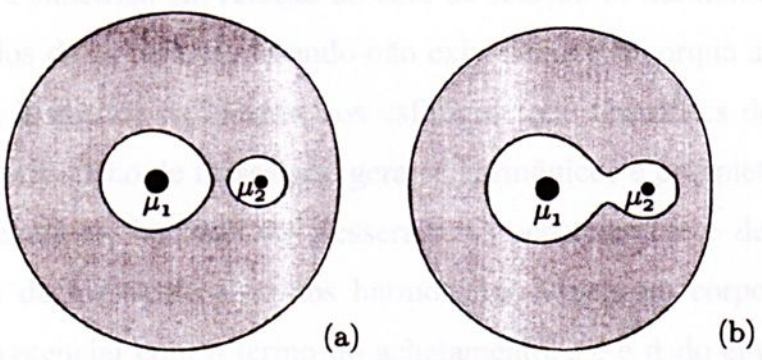


FIGURA 2.3 – Curvas de velocidade zero para dois valores da constante de Jacobi para o caso quando $\mu_2 = 0.2$. Os valores de C_j são (*a*) $C_j = 3{,}9$ e (*b*) $C_j = 3{,}7$. A área sombreada mostra a região proibida. (Reproduzido de Murray & Dermott (1999))

unesp

Capítulo 3

PROBLEMA PLANAR CIRCULAR RESTRITO DE TRÊS CORPOS COM ACHATAMENTO

Neste capítulo introduzimos as equações do movimento da partícula incluindo o termo do achatamento (J_2) e apresentaremos a nova configuração de triângulos escalenos que os pontos de equilíbrio Lagrangianos L_4 e L_5 passam a ter. Também apresentamos o comportamento da excentricidade (e), da variação angular ($\Delta\theta$) e da variação radial (Δr) quando é considerado o efeito perturbativo do achatamento. Como vemos, o estudo foi realizado comparando-se o caso com achatamento com o caso sem achatamento.

3.1 - A órbita de um satélite ao redor de um planeta achatado

A lei de atração gravitacional de Newton é válida apenas para corpos pontuais, quando temos um dos corpos com dimensões finitas e com distribuição arbitrária de massa, nós devemos fazer uso de um potencial gravitacional que considere a forma e a distribuição de massa deste corpo (Primário). Quando a distribuição de massa independe da longitude, ou seja, quando ela é simétrica em relação ao eixo de rotação os harmônicos esféricos são chamados de Zonais, J_n, quando não existe simetria porque a distribuição depende da longitude os harmônicos esféricos são chamados de Setoriais e quando a distribuição de massa que gera os harmônicos é completamente não-simétrica temos os harmônicos Tesserais. O achatamento é devido a uma distribuição de massa do tipo dos harmônicos Zonais no corpo principal e portanto o potencial com o termo do achatamento, J_2, é dado em Roy (1988) pela expressão

$$U = \mu_1 \left\{ \frac{1}{r_1} + \frac{3}{2} \frac{J_2 R^2}{r_1^3} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 i + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 i \cos 2(f + \omega) \right] \right\}, \qquad (3.1)$$

unesp

onde i é a inclinação do plano orbital ao equador, f é a anomalia verdadeira, ω é o argumento do pericentro e R é o raio do corpo central, os termos J_4, J_5, etc... são muito menores que o termo J_2 e portanto puderam ser desprezados. Como o problema estudado é o planar circular restrito a equação (3.1) se reduz a

$$U = \mu_1\left[\frac{1}{r_1} + \left(\frac{J_2 R^2}{2r_1^3}\right)\right] \tag{3.2}$$

3.2 – Equações de movimento com o termo do achatamento

Consideramos aqui o mesmo problema apresentado na seção 2.1, porém com o termo adicional do achatamento, J_2, incluído nas equações de movimento. Podemos ainda considerar que para os corpos m_1 e m_2 a unidade de distância é $a = 1$, a unidade de massa $\mu = G(m_1 + m_2) = 1$, mas como primeiro efeito do achatamento teremos agora o movimento médio para este sistema dado por $n = 1 + \frac{3}{2}J_2 R^2$, onde, para Saturno $J_2 = 0{,}016298$ e $R = 60.268\, km$, em função do parâmetro β o movimento médio é dado por $n = 1 + \beta$, com $\beta \equiv \frac{3}{2}J_2 R^2$ é . O conjunto de coordenadas inercial ou sideral será (ξ, η), como apresentado na Figura 2.1, e as equações de movimento da partícula passam a ser dadas por:

$$\ddot{\xi} = \mu_1\left[\left(\frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3}\right) + \beta\left(\frac{\xi_1 - \xi}{r_1^5}\right)\right] + \mu_2\left(\frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3}\right) \tag{3.3}$$

$$\ddot{\eta} = \mu_1\left[\left(\frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3}\right) + \beta\left(\frac{\eta_1 - \eta}{r_1^5}\right)\right] + \mu_2\left(\frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3}\right) \tag{3.4}$$

lembrando que:

$$r_1^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 \tag{3.5}$$

unesp

e

$$r_2^2 = (\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2 . \tag{3.6}$$

Escolhendo o sistema de coordenadas girantes (x, y) da seção 2.1, temos:

$$r_1^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2 \tag{3.7}$$

$$r_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2 \tag{3.8}$$

sendo que (x, y) são coordenadas da partícula em relação ao sistema rotacional ou sinódico. Das equações (2.9), (3.3) e (3.4), obtemos:

$$\ddot{x} - 2(1+\beta)\dot{y} - (1+\beta)^2 x = -\mu_1\left[\left(\frac{x+\mu_2}{r_1^3}\right) + \beta\left(\frac{x+\mu_2}{r_1^5}\right)\right] - \mu_2\left(\frac{x-\mu_1}{r_2^3}\right) \tag{3.9}$$

$$\ddot{y} + 2(1+\beta)\dot{x} - (1+\beta)^2 y = -y\left[\mu_1\left(\frac{1}{r_1^3} + \beta\frac{1}{r_1^5}\right) + \frac{\mu_2}{r_2^3}\right] . \tag{3.10}$$

As equações (3.9) e (3.10) são as novas equações de movimento do sistema com o termo do achatamento que podem ser reescritas em forma de um potencial U como:

$$\ddot{x} - 2(1+\beta)\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \tag{3.11}$$

$$\ddot{y} + 2(1+\beta)\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \tag{3.12}$$

onde U é definido como:

$$U = \mu_1\left(\frac{1}{r_1} + \frac{\beta}{3r_1^3} + \frac{(1+\beta)^2 r_1^2}{2}\right) + \mu_2\left(\frac{1}{r_2} + \frac{(1+\beta)^2 r_2^2}{2}\right) - \frac{1}{2}\mu_1\mu_2(1+\beta)^2 \tag{3.13}$$

3.3 – Nova localização dos pontos de equilíbrio L_4 e L_5

Como vimos na seção 3.2 o movimento médio do sistema sofre um aumento de β em relação ao movimento médio do problema sem

achatamento, ou seja, o sistema do problema perturbado gira ligeiramente mais rápido quando comparado com o problema sem perturbação. Esse aumento na velocidade angular causa um deslocamento dos pontos de equilíbrio triangulares $(L_4 \text{ e } L_5)$, que deixam de apresentar a clássica configuração de triângulos eqüiláteros, passando a apresentar uma configuração de triângulos escalenos, na qual o ponto de equilíbrio assume uma posição mais próxima do corpo secundário do que do primário, esse efeito é estudado em detalhes na seção 3.3.1. Esse deslocamento é devido ao novo equilíbrio entre as forças gravitacionais, que os corpos primário e secundário exercem sobre a partícula e a força centrífuga que esta experimenta por estar girando com o sistema. Como a velocidade angular do sistema é maior, implica em uma força centrífuga também maior, portanto a partícula deverá aproximar-se mais do centro de massa do sistema para que ocorra um aumento proporcional da força gravitacional e assim equilibrar novamente o sistema. Nós podemos obter a nova localização dos pontos de equilíbrio considerando as equações de movimento (3.11) e (3.12), com $\ddot{x} = \ddot{y} = \dot{x} = \dot{y} = 0$ e assim resolvendo simultaneamente as equações não-lineares,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r_2}\frac{\partial r_2}{\partial x} = 0 \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r_1}\frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial r_2}\frac{\partial r_2}{\partial y} = 0\,. \tag{3.15}$$

Usando o forma de $U = U(r_1, r_2)$ dada na equação (3.13). Calculando as derivadas parciais, a equação para a localização dos pontos de equilíbrio pode ser escrita como

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \mu_1\left(-\frac{1}{r_1^2} - \frac{\beta}{r_1^4} + (1+\beta)^2 r_1\right)\frac{x+\mu_2}{r_1} + \mu_2\left(-\frac{1}{r_2^2} + (1+\beta)^2 r_2\right)\frac{x-\mu_1}{r_2} = 0 \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \mu_1\left(-\frac{1}{r_1^2} - \frac{\beta}{r_1^4} + (1+\beta)^2 r_1\right)\frac{y}{r_1} + \mu_2\left(-\frac{1}{r_2^2} + (1+\beta)^2 r_2\right)\frac{y}{r_2} = 0\,. \tag{3.17}$$

unesp

Inspecionando as equações (3.16) e (3.17) vemos que uma maneira de resolvê-las é zerar as quantidades entre parênteses, portanto podemos obter a localização dos novos pontos de equilíbrio L_4 e L_5 resolvendo as seguintes equações,

$$(1+\beta)^2 r_1^5 - r_1^2 - \beta = 0 \tag{3.18}$$

$$r_2 = (1+\beta)^{-2/3}. \tag{3.19}$$

Das equações (3.18), que possui apenas uma solução real, e (3.19), podemos traçar a Figura 3.1 e a Figura 3.2, que mostram como as posições dos pontos de equilíbrio, dadas por r_1 e r_2, mudam conforme o valor de β varia, podemos notar pelas figuras que r_1 é sempre maior do que r_2, ainda na Figura 3.1 temos destacado os valores de r_1 e r_2 para os sistemas Saturno-Tétis e Saturno-Dione com seus respectivos valores do parâmetro β.

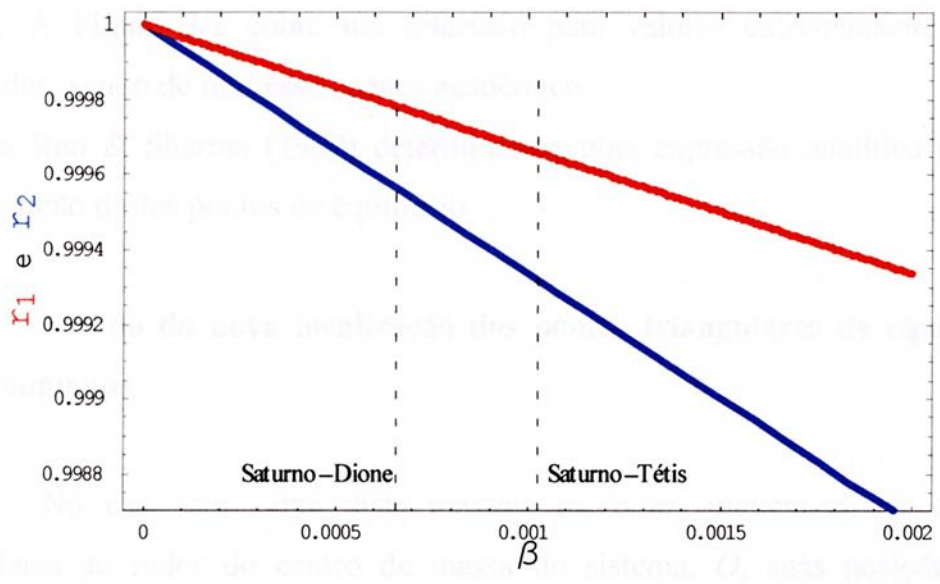


FIGURA 3.1 – Localização dos Pontos de equilíbrio triangulares em termos de r_1 e r_2, como uma função do parâmetro $\beta = 3/2J_2R^2$. As linhas tracejadas destacam os valores de β para os sistemas Saturno-Dione e Saturno Tétis.

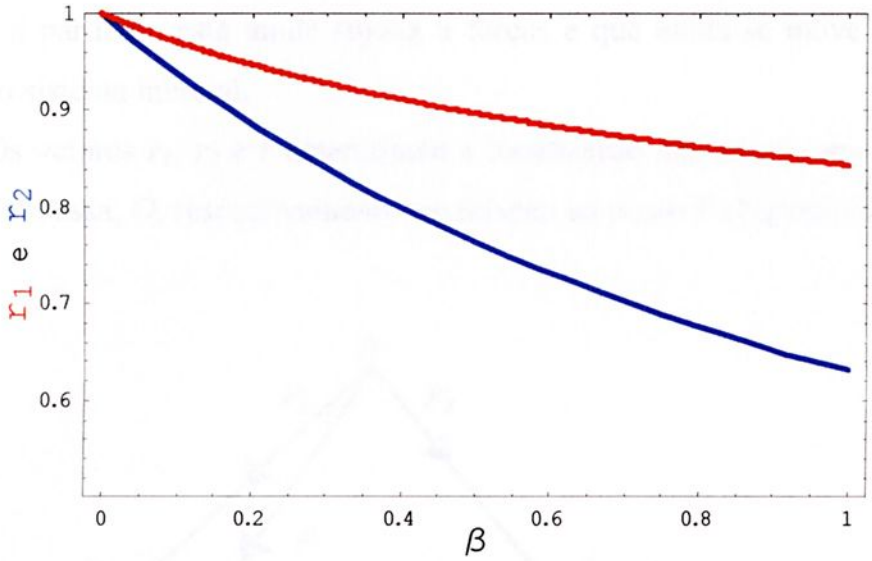


FIGURA 3.2 – Localização dos pontos de equilíbrio triangulares em termos de r_1 e r_2, como uma função de valores elevados do parâmetro β.

Na Figura 3.1 são utilizados valores de β próximos ao caso de satélites de Saturno, sendo que estão indicados os casos de Saturno-Dione e Saturno-Tétis. A Figura 3.2 cobre um intervalo para valores extremamente de β elevados, sendo de interesse apenas acadêmico.

Subba Rao & Sharma (1997) determinaram uma expressão analítica para a localização destes pontos de equilíbrio.

3.3.1 - Estudo da nova localização dos pontos triangulares de equilíbrio Lagrangianos

No caso em que duas massas, m_1 e m_2 movem-se em órbitas circulares ao redor do centro de massa do sistema, O, suas posições são estacionárias no sistema de referência rotacional com velocidade angular igual ao movimento médio, n, de ambas as massas. Para localizar os pontos de equilíbrio devemos determinar a posição onde a partícula, P, seria colocada,

com a velocidade apropriada no sistema de referência inercial, onde ela permanece estacionária no sistema rotacional. É importante lembrar que em tal posição a partícula está ainda sujeita a forças e que ainda se move em uma órbita no sistema inercial.

Os vetores $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ e $\boldsymbol{r}$ determinam a localização das massas m_1, m_2 e do centro de massa, O, respectivamente em relação ao ponto P (Figura 3.3).

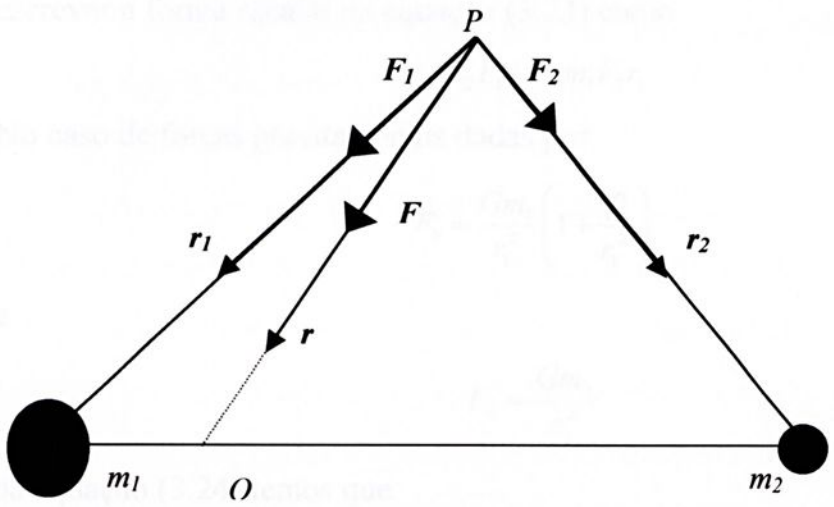


FIGURA 3.3 – Esquema de localização de um ponto de equilíbrio triangular. O centro de massa do sistema está em O.

As massas não podem ter forma arbitraria, devendo ter uma simetria de rotação, pois caso contrário surgiriam forças dependentes do tempo atuando sobre a partícula. As forças $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$ são forças por unidade de massa na direção que une a partícula e a massa m_1 e m_2, respectivamente. Para P estar em uma localização fixa no sistema rotacional, ele deve estar a uma distância fixa, $\boldsymbol{r}$, de O que é o único ponto fixo no sistema inercial. Portanto P está sujeito a uma aceleração centrífuga na direção $-\boldsymbol{r}$ e isto é balanceado pela soma vetorial

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \tag{3.20}$$

a qual repousa na direção de $\boldsymbol{r}$ e passa através do centro de massa.

A posição de O é dada por

$$\boldsymbol{r} = \frac{m_1 \boldsymbol{r}_1 + m_2 \boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{3.21}$$

ou, reescrevendo

$$m_1(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}) = m_2(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2) \tag{3.22}$$

Tomando o produto vetorial de $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ com a equação (3.22), resulta

$$m_2(\boldsymbol{F}_1 \times \boldsymbol{r}_2) + m_1(\boldsymbol{F}_2 \times \boldsymbol{r}_1) = 0 \tag{3.23}$$

Como o ângulo entre $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{r}_2$ é menos o ângulo entre $\boldsymbol{F}_2$ e $\boldsymbol{r}_1$, nós podemos escrever a forma escalar da equação (3.23) como

$$m_2 F_1 r_2 = m_1 F_2 r_1 \tag{3.24}$$

No caso de forças gravitacionais dadas por

$$F_1 = \frac{G m_1}{r_1^2}\left(1 + \frac{\beta}{r_1^2}\right) \tag{3.25}$$

e

$$F_2 = \frac{G m_2}{r_2^2} \tag{3.26}$$

da equação (3.24) temos que

$$r_2 = \left(\frac{r_1^5}{r_1^2 + \beta}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{3.27}$$

Isto implica que para a força $\boldsymbol{F}$ passar através do centro de massa o triângulo deverá ser escaleno com r_2 menor que r_1 como podemos observar da equação (3.28)

$$\frac{r_1}{r_2} = \left(1 + \frac{\beta}{r_1^2}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{3.28}$$

notar que a fração $\frac{\beta}{r_1^2}$ é sempre uma quantidade positiva e portanto $\frac{r_1}{r_2} > 1$.

Assim utilizando a lei dos cossenos podemos obter a expressão que fornece a relação do ângulo θ e a distância r_1

$$\theta = \arccos\left[\frac{1+r_1^2-\left(\frac{r_1^5}{r_1^2+\beta}\right)^{\frac{2}{3}}}{2r_1}\right] \tag{3.29}$$

3.4 – Comparação da evolução das curvas de velocidade zero entre o sistema com e sem o efeito do achatamento

As Figuras 3.4 e 3.5 mostram uma comparação da evolução entre as curvas de velocidade zero para o sistema com achatamento β = 0.00102 (curvas verdes) e sem achatamento $\beta = 0$ (curvas vermelhas) respectivamente, a razão de massa usada para gerar as curvas foi μ = 0.001. Podemos observar pelas curvas destacadas em azul que o achatamento provoca uma translação das curvas do sistema com a perturbação fazendo com que seja necessária uma constante de Jacob maior, C_J = 3.042, para se obter o mesmo tipo de curva do sistema sem achatamento, C_J = 3.039, por exemplo. Podemos notar ainda que as curvas não apresentam mudanças significativas em relação as suas formas.
As curvas de velocidade zero para o problema com achatamento foram traçadas utilizando-se a nova expressão da constante de Jacobi

$$C_J = \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2}{3}\beta\frac{(1-\mu)}{r_1^3} + \frac{2\mu}{r_2} + (1+\beta)^2\left(x^2+y^2\right) \tag{3.30}$$

unesp

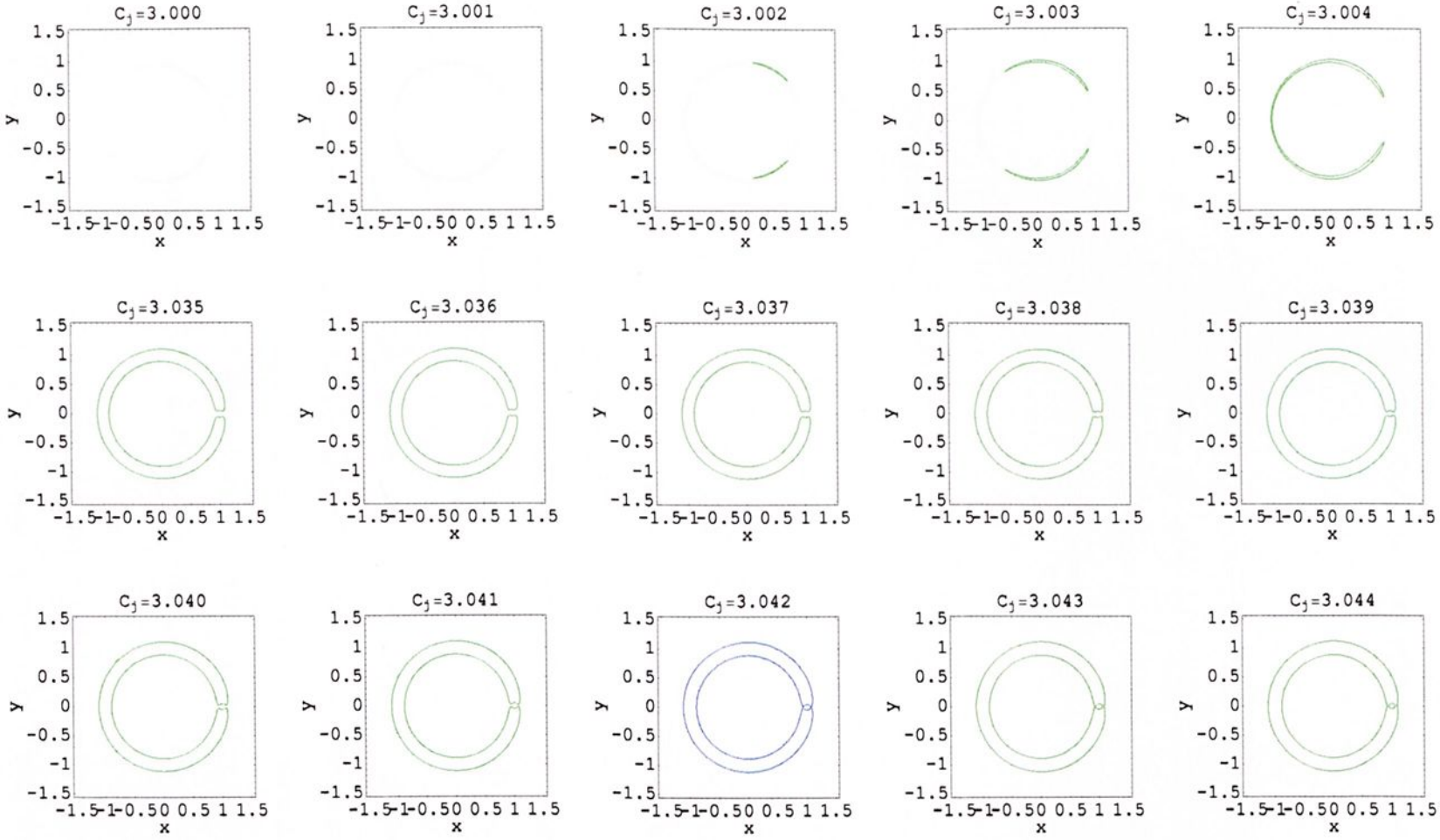


FIGURA 3.4 - Curvas de velocidade zero com diferentes valores de C_J para um sistema sem achatamento. A curva de C_J = 3.042 foi destacada em azul para efeito de comparação com a curva de C_J = 3.039 da Figura 3.5.

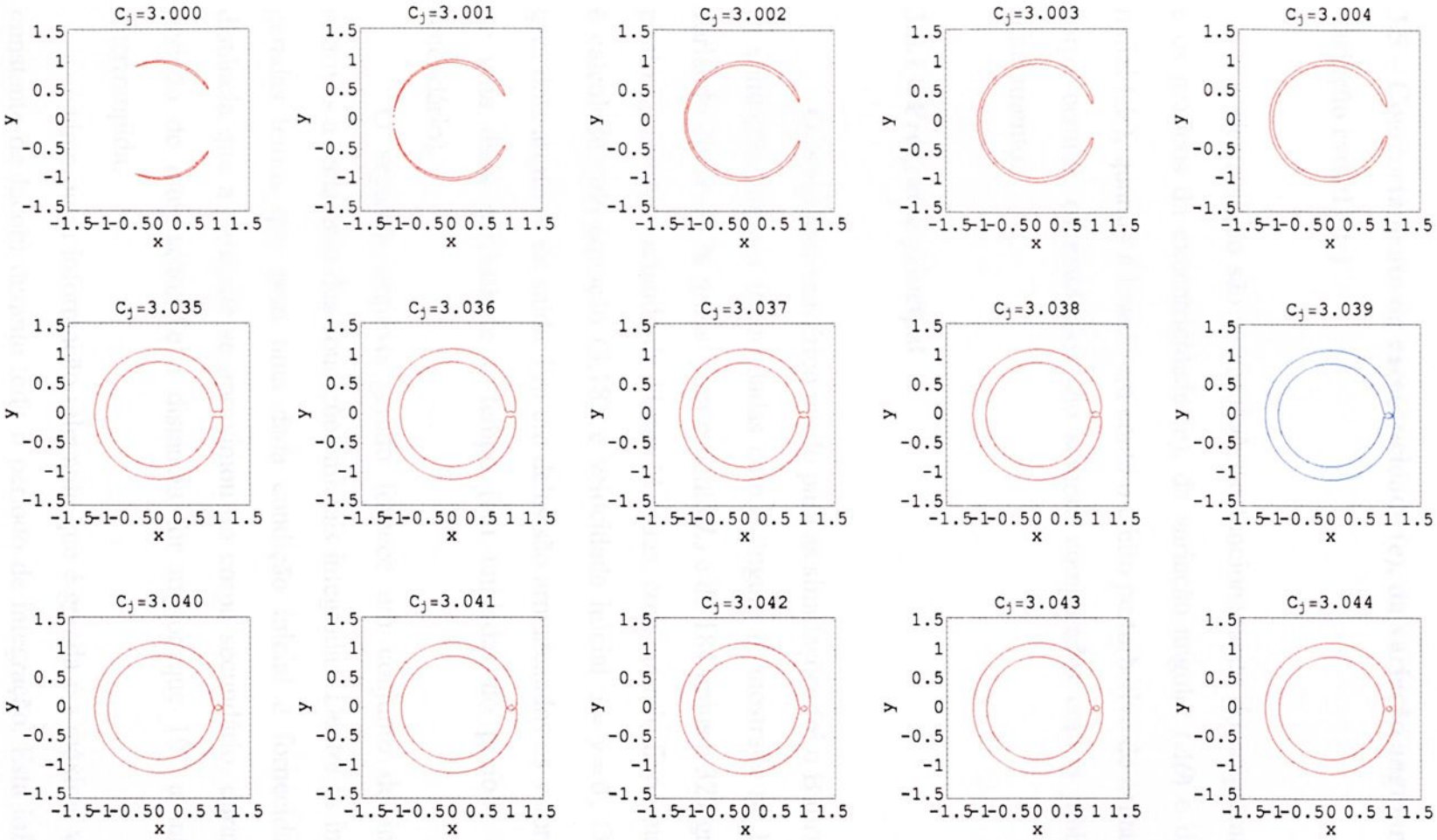


FIGURA 3.5 - Curvas de velocidade zero com diferentes valores de C_j para um sistema sem achatamento. A curva de C_j = 3.039 foi destacada em azul para efeito de comparação com a curva de C_j = 3.042 da Figura 3.4.

3.5 – Comportamento da excentricidade (e), da variação angular ($\Delta\theta$) e da variação radial (Δr)

Nesta seção são apresentados o funcionamento do programa principal e os gráficos da excentricidade (e), da variação angular ($\Delta\theta$) e da variação radial (Δr), quando é levado em conta o efeito perturbativo do achatamento do corpo central, os resultados são sempre comparados com o problema sem achatamento.

3.5.1 – Programa principal

O integrador numérico usado para as simulações foi o Bulirsch-Stoer e as condições iniciais foram dadas com o ângulo θ, mostrado na Figura 3.6, variando de 11 a 176 graus para o ponto L_4 e de 184 graus a 327 graus para o ponto L_5, sempre variando de 11 em 11 graus, com um raio fixo igual a r_1, que é calculado pela equação (3.18), e velocidade inicial $\dot{x} = \dot{y} = 0$. O programa gera dois arquivos de saída. Em um deles são armazenados os valores de x e y de uma dada partícula e o tempo (em unidades do período orbital do secundário).

O segundo arquivo gerado fornece um conjunto de informações relativas a cada uma das condições iniciais integradas. Dentre as informações geradas temos que para uma dada condição inicial é fornecida a menor distância que a partícula se aproximou do corpo secundário, durante todo o período de integração. Se a distância for menor que 10^{-4} a integração é interrompida.

Uma outra informação relevante que é gerada é a máxima variação da constante de Jacobi durante todo o período de integração. Esta informação é de suma importância, pois ela nos dá uma noção da precisão da rotina de

integração numérica. Para as simulações realizadas temos uma variação máxima da constante de Jacobi da ordem de 10^{-10}.

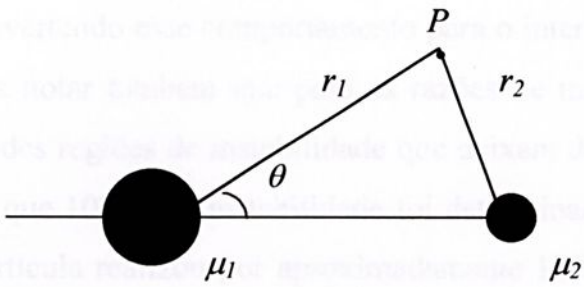


FIGURA 3.6 – Diagrama esquematizado o Problema Circular Restrito de Três Corpos e a variável, θ, que determina a condição inicial para a simulação numérica.

3.5.2 – Análise dos gráficos

As figuras foram montadas de modo a apresentar uma evolução dos elementos orbitais analisados em função da razão de massa μ.

3.5.2.1 – Variação da excentricidade

Para todas as razões de massa estudadas, Figuras 3.7 e 3.8, podemos notar que a variação da excentricidade, diferença entre o valor máximo e o valor mínimo, apresenta um comportamento semelhante sendo que tem um valor mínimo próximo aos pontos de equilíbrio Lagrangianos (L_4 e L_5) que estão respectivamente em $\theta = 60^{\circ}$ e $\theta = 300^{\circ}$. Quando comparado os casos com e sem achatamento, observamos que a variação da excentricidade sofre um aumento devido ao efeito do achatamento. Esse aumento é mais acentuado à medida que a razão de massa diminui, ou seja, para os casos de razão de massa igual a 10^{-9}, 10^{-7} e 10^{-6}, sendo praticamente desprezível para as razões de massa 10^{-3} e 10^{-2}. Esse aumento provocado pelo achatamento se torna menor próximo aos pontos de equilíbrio, nessa região, o caso com achatamento apresenta valores para a variação da excentricidade bem

próximos aos do caso sem achatamento. Analisando o gráfico para a razão de massa 10^{-5}, notamos que o caso com achatamento apresenta uma variação da excentricidade maior que para o caso sem achatamento para o intervalo de $\theta = 30^{\circ}$ e $\theta = 110^{\circ}$, invertendo esse comportamento para o intervalo de $\theta = 120^{\circ}$ e $\theta = 240^{\circ}$. Podemos notar também que para as razões de massa 10^{-2} e 10^{-3} são observadas grandes regiões de instabilidade que deixam de existir para razões de massa menor que 10^{-4}. Esta instabilidade foi determinada observando-se as órbitas que a partícula realizou por aproximadamente 1600 (mil e seiscentos) períodos orbitais do secundário, quando a órbita se tornou caótica admitiu-se que ela estava na região de instabilidade.

3.5.2.2 – Excentricidade média

Novamente o comportamento apresentado nas Figuras 3.9 e 3.10 para todas as razões de massa estudadas apresentam uma semelhança para os valores da excentricidade média. Em todos os casos observamos que a excentricidade média é varias ordens de grandeza maior para o caso com achatamento do que para o caso sem achatamento. Esse comportamento acentua-se à medida que a razão de massa diminui e não depende de teta, com exceção das razões de massa 10^{-2} e 10^{-3}, que apenas na região próxima aos pontos de equilíbrio Lagrangianos apresenta uma diferença entre os valores da excentricidade média com e sem achatamento. Podemos notar também que valor da excentricidade média parece alcançar um valor limite que praticamente não sofre alteração para as razões de massa 10^{-9}, 10^{-7}, 10^{-6} e 10^{-5}, ou seja, a excentricidade média passa a não depender da razão de massa e esse efeito na excentricidade média é devido apenas ao achatamento do corpo central. O corpo secundário contribui para o aumento da excentricidade media da partícula quando sua razão de massa é maior que 10^{-4}.

unesp

3.5.2.3 – Variação de θ

As Figuras 3.11 e 3.12 mostram nos gráficos que a amplitude de libração para as órbitas do tipo girino ao redor dos pontos de equilíbrio lagrangianos não dependem das razões de massa e nem do efeito perturbativo do achatamento, contudo a amplitude de libração apresenta um valor mínimo próximo aos pontos de equilíbrio, para todos os casos simulados a variação de teta permaneceu exatamente com o mesmo comportamento, com exceção das razões de massa 10^{-2} e 10^{-3} que apresentam uma região de instabilidade maior do que para as outras razões de massa simuladas.

3.5.2.4 – Variação de *r*

As Figuras 3.13 e 3.14 nos mostram que a largura das órbitas do tipo girino ao redor dos pontos de equilíbrio lagrangianos não dependem dos efeitos perturbativos devido ao achatamento, porém quanto maior a razão de massa, μ, maior essa largura, novamente existe uma região próxima aos pontos de equilíbrio, nas quais essa largura apresenta um valor mínimo. Esse comportamento é o mesmo para todas as razões de massa.

3.5.2.5 - Dependência da excentricidade média com o parâmetro β

O gráfico na Figura 3.15 mostra como a excentricidade média se comporta em função do parâmetro β. Os valores de β forma escolhidos variando J_2 e a distância do secundário em relação ao primário, assim obtemos β = 0.00102, 0.0051, 0.0102, quando o multiplicamos J_2 respectivamente por 1, 5 e 10 e os valores de β = 0.0061, 0.0027, 0.0015, 0.00068, 0.00038 quando variamos a distância respectivamente por 2, 3, 4, 6 e 8. Podemos notar que a

unesp

excentricidade média sofreu um aumento significativo diretamente proporcional ao aumento de β sendo sua constante de proporcionalidade igual a 1. Esse efeito também é observado nas Figuras 3.9 e 3.10 sempre que $\mu < 10^{-4}$, ou seja quando a massa do secundário atinge um valor em que seu efeito sobre a excentricidade da partícula é desprezível quando comparado com o efeito do achatamento do corpo principal.

unesp

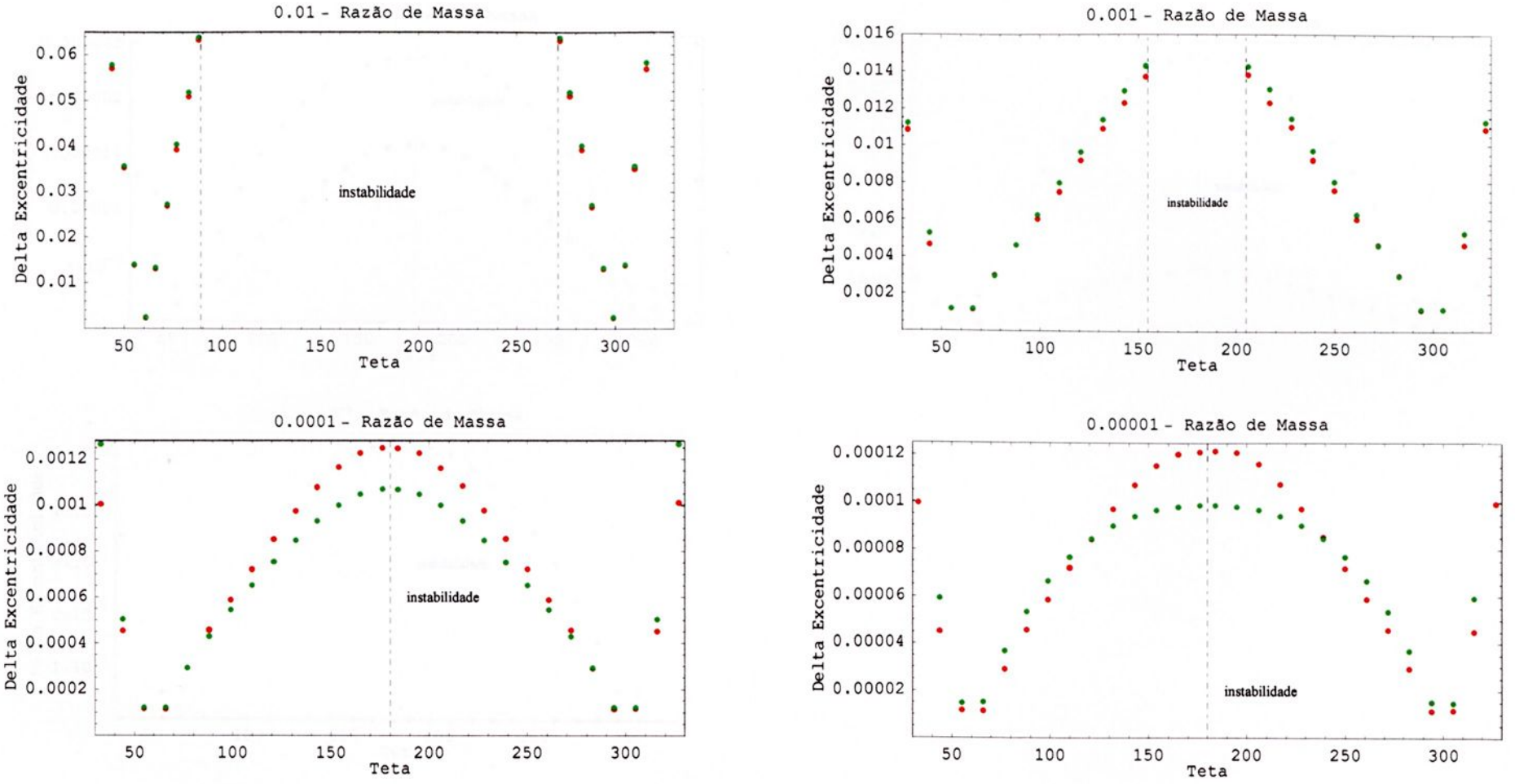
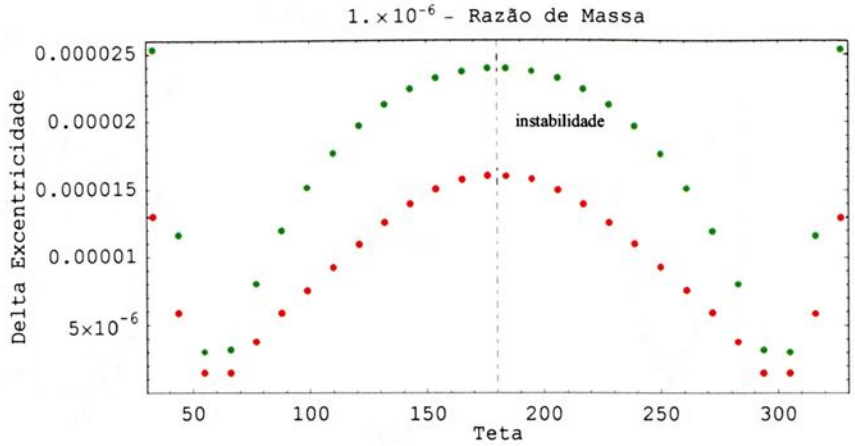
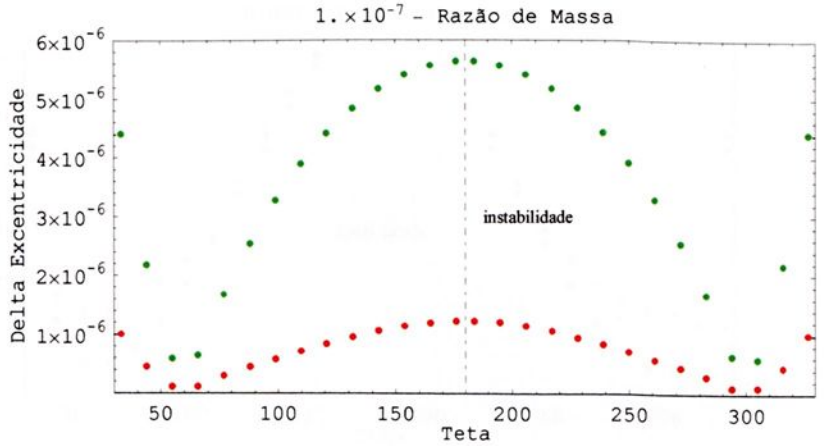


FIGURA 3.7 - Gráficos de (θ x Δe) para $\mu = 10^{-2}$, 10^{-3}, 10^{-4} e 10^{-5}.
Os pontos vermelhos são para $\beta = 0$ e os verdes para $\beta = 0.00102$ que é o valor do achatamento de Saturno.





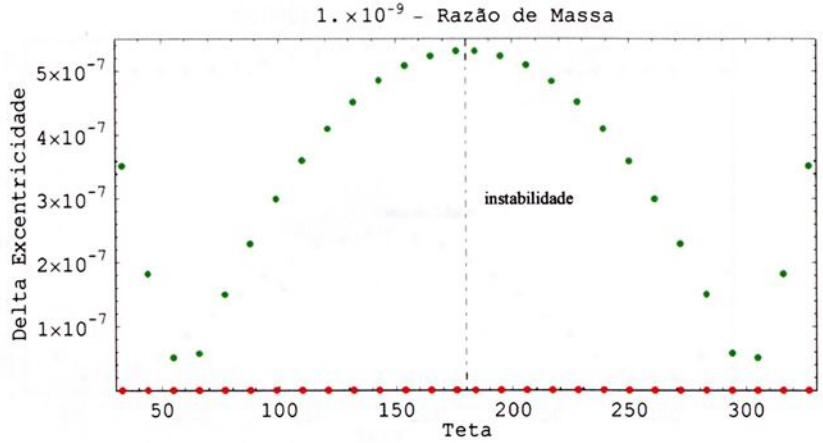


FIGURA 3.8 - Gráficos de (θ x Δe) para $\mu = 10^{-6}$, 10^{-7} e 10^{-9}.
Os pontos vermelhos são para β = 0 e os verdes para β = 0.00102 que é o valor do achatamento de Saturno.

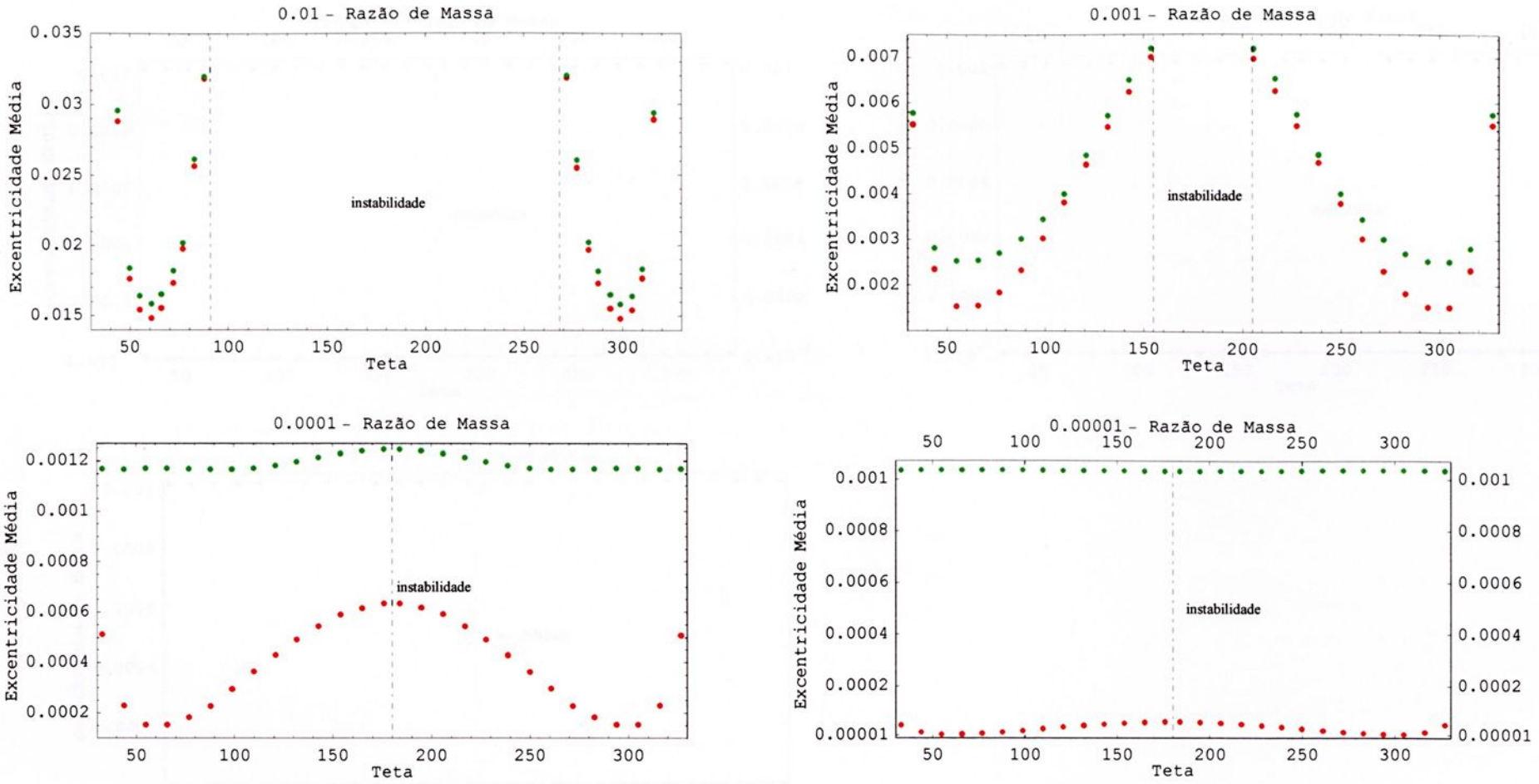
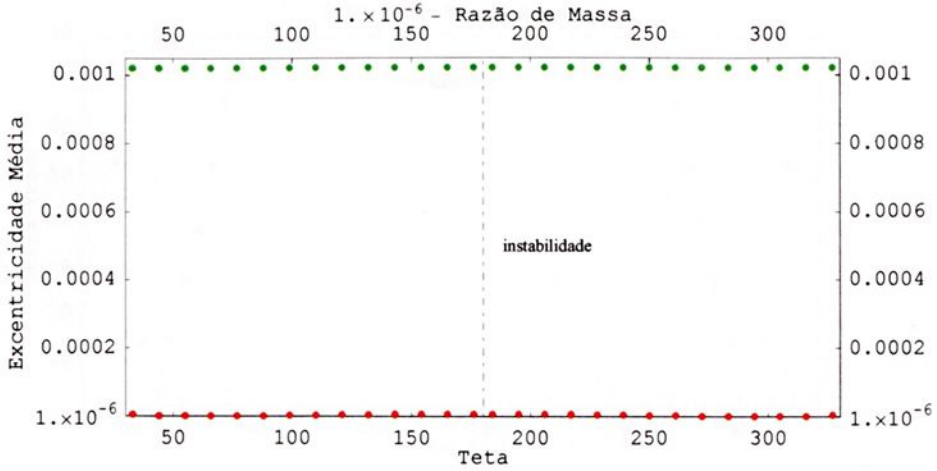
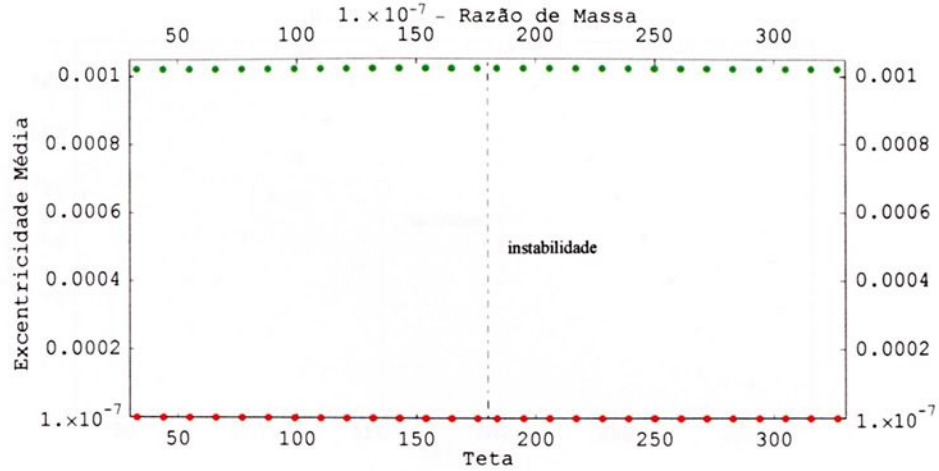


FIGURA 3.9 - Gráficos de (θ x $\overline{em}$) para $\mu = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ e 10^{-5}.
Os pontos vermelhos são para $\beta = 0$ e os verdes para $\beta = 0.00102$ que é o valor do achatamento de Saturno.





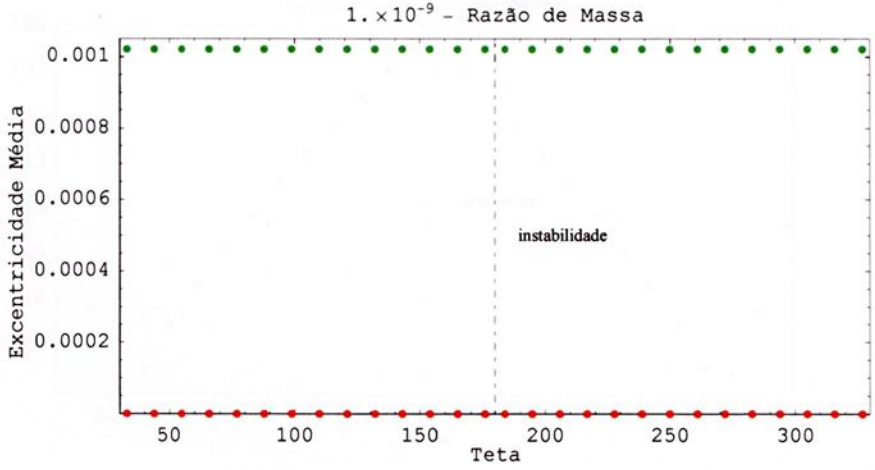


FIGURA 3.10 - Gráficos de (θ x $\overline{em}$) para μ = 10^{-6}, 10^{-7} e 10^{-9}.
Os pontos vermelhos são para β = 0 e os verdes para β = 0.00102 que é o valor do achatamento de Saturno.

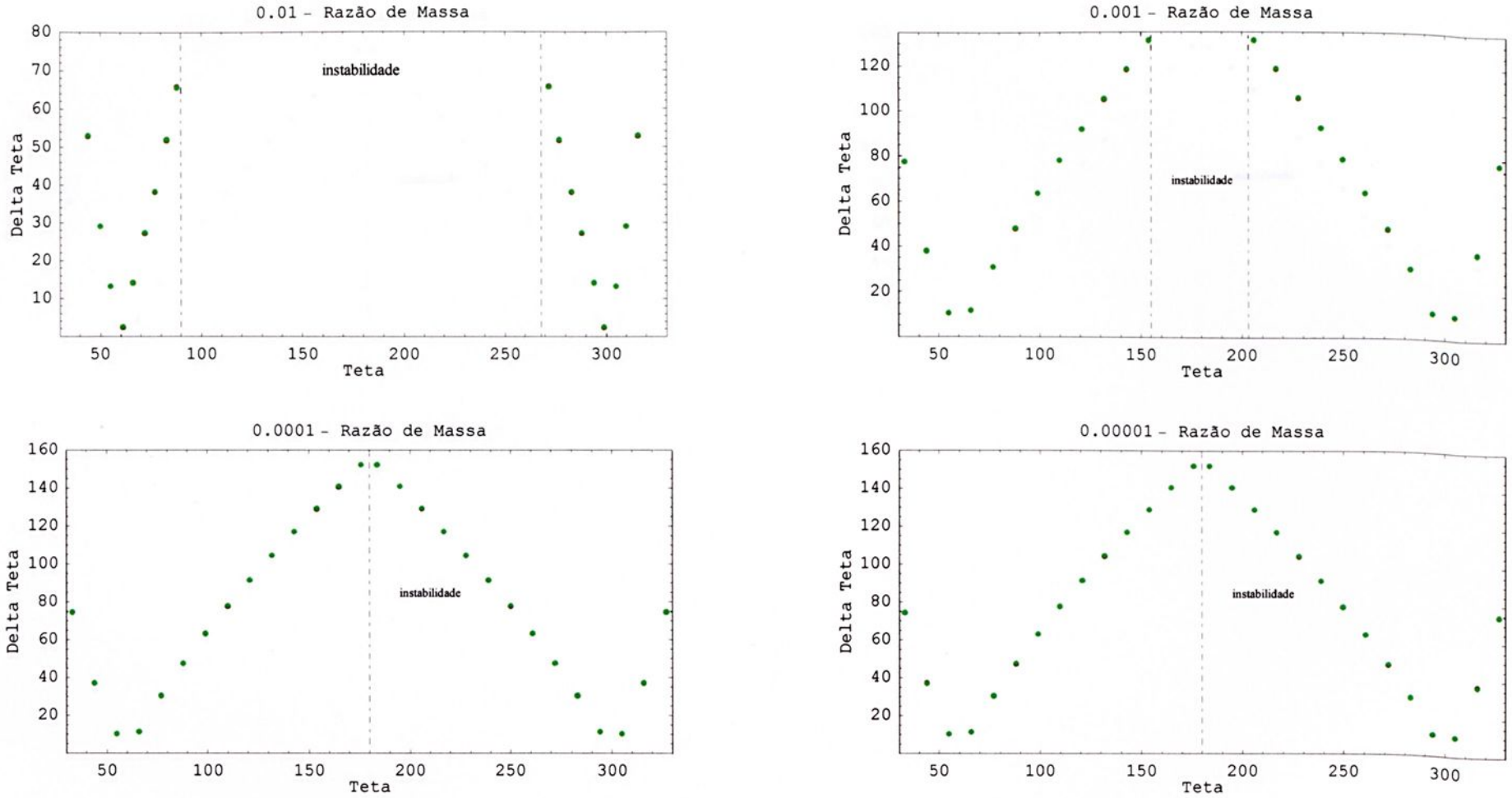
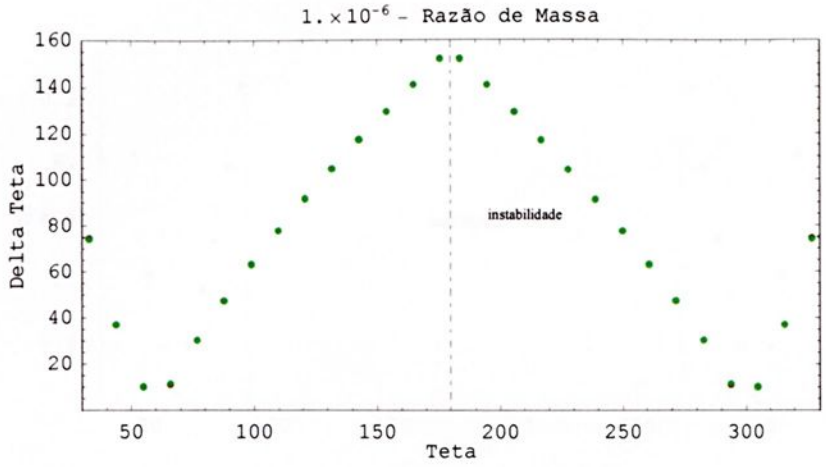
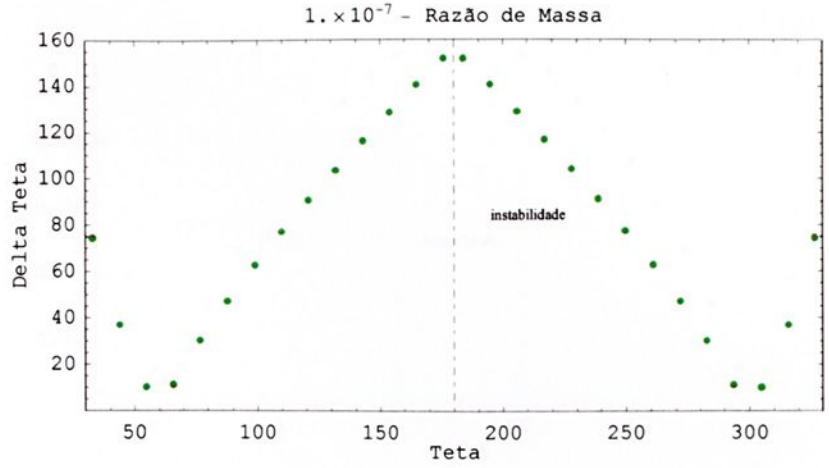


FIGURA 3.11 - Gráficos de (θ x $\Delta\theta$) para $\mu = 10^{-2}$, 10^{-3}, 10^{-4} e 10^{-5}.
Os pontos vermelhos são para $\beta = 0$ e os verdes para $\beta = 0.00102$ que é o valor do achatamento de Saturno.





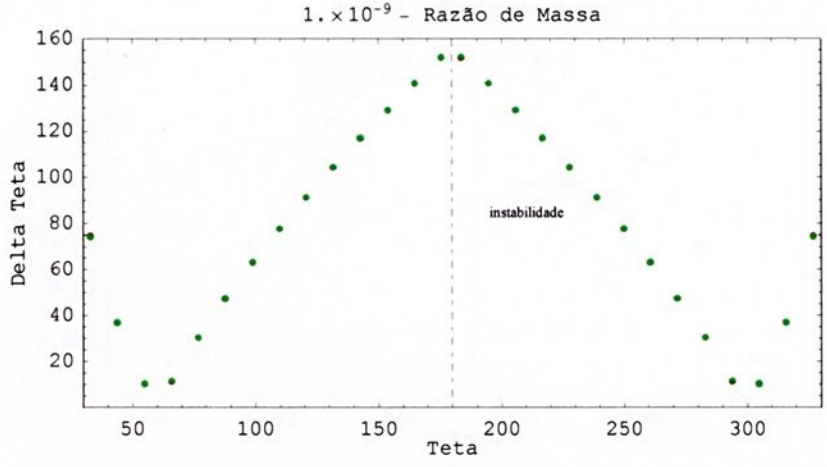


FIGURA 3.12 - Gráficos de (θ x $\Delta\theta$) para $\mu = 10^{-6}$, 10^{-7} e 10^{-9}.
Os pontos vermelhos são para $\beta = 0$ e os verdes para $\beta = 0.00102$ que é o valor do achatamento de Saturno.

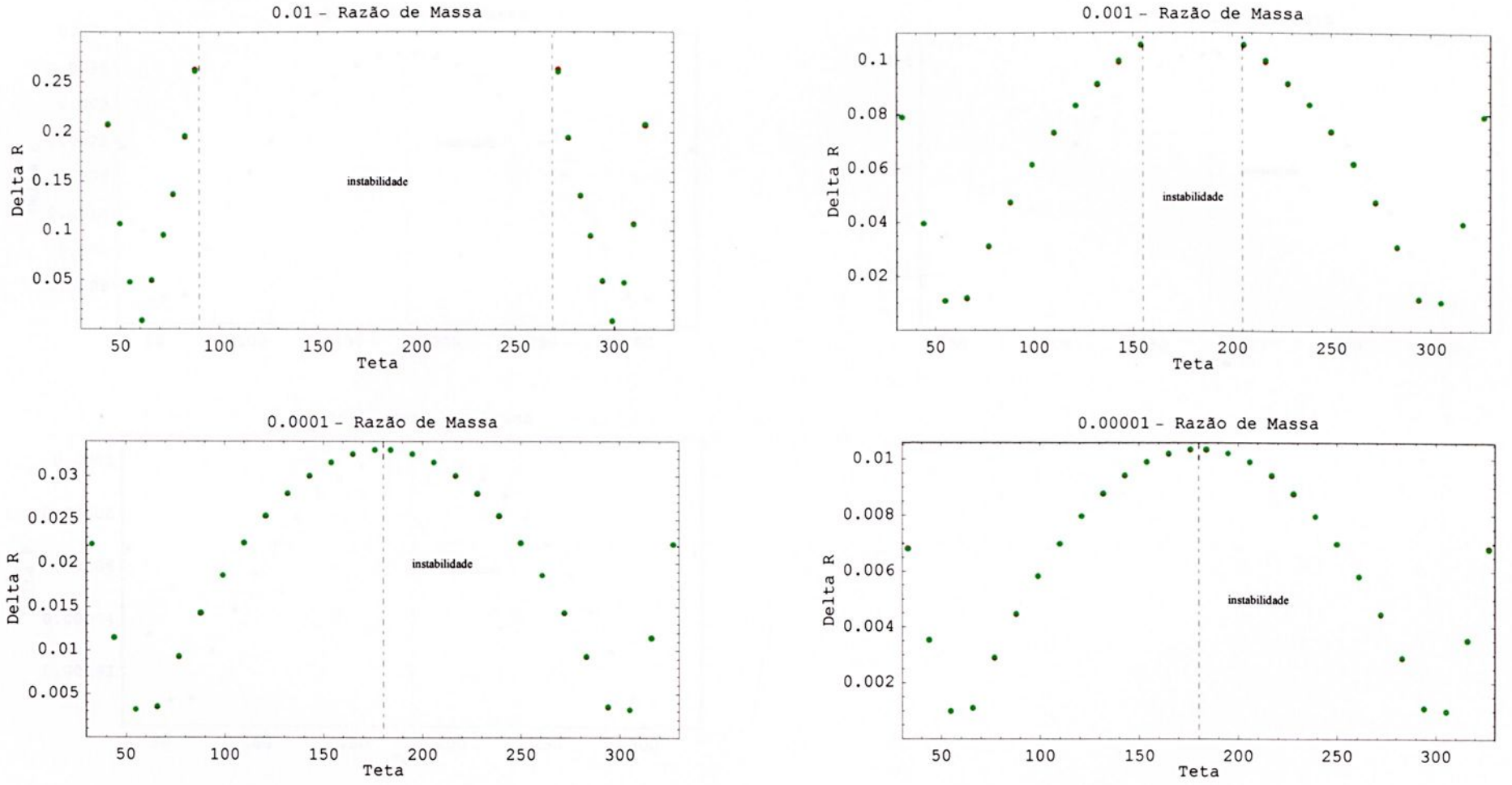
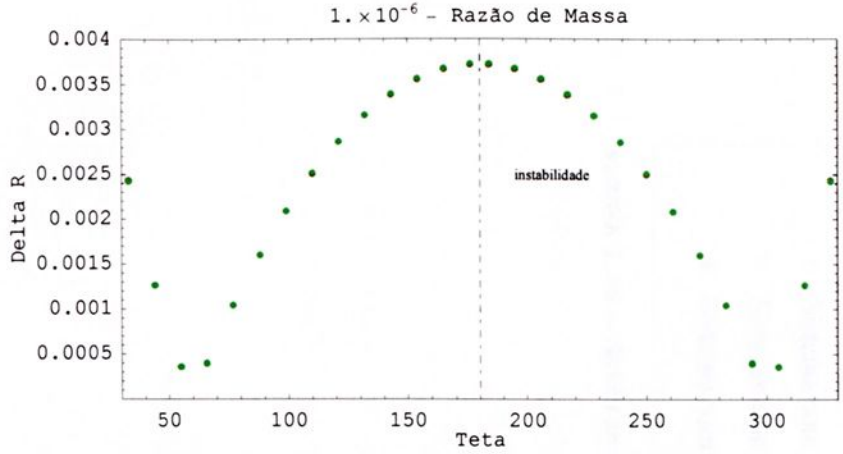
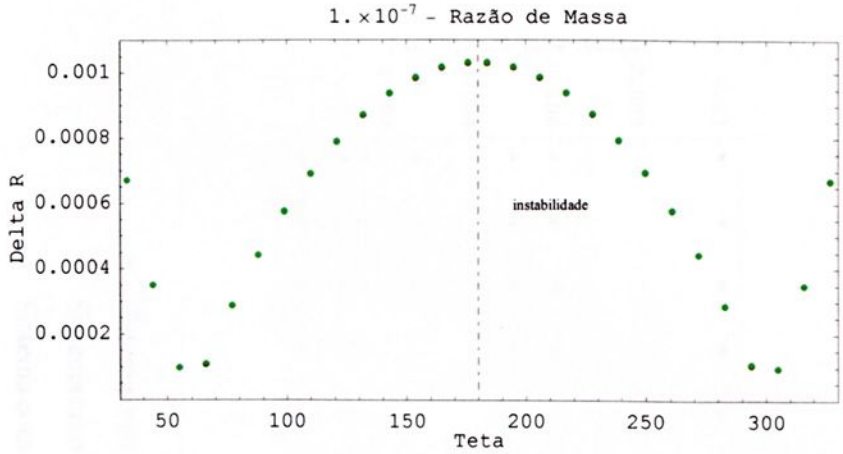


FIGURA 3.13 - Gráficos de (θ x Δr) para $\mu = 10^{-2}$, 10^{-3}, 10^{-4} e 10^{-5}.
Os pontos vermelhos são para $\beta = 0$ e os verdes para $\beta = 0.00102$ que é o valor do achatamento de Saturno.





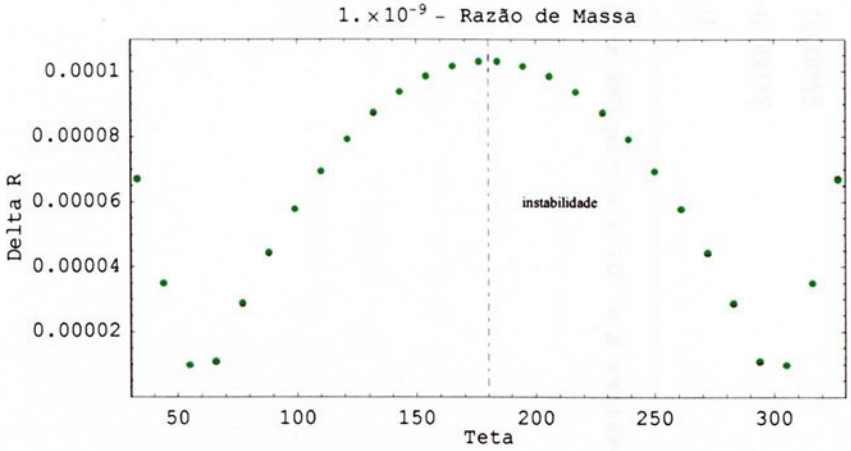


FIGURA 3.14 - Gráficos de (θ x Δr) para μ = 10^{-6}, 10^{-7} e 10^{-9}.
Os pontos vermelhos são para β = 0 e os verdes para β = 0.00102 que é o valor do achatamento de Saturno.

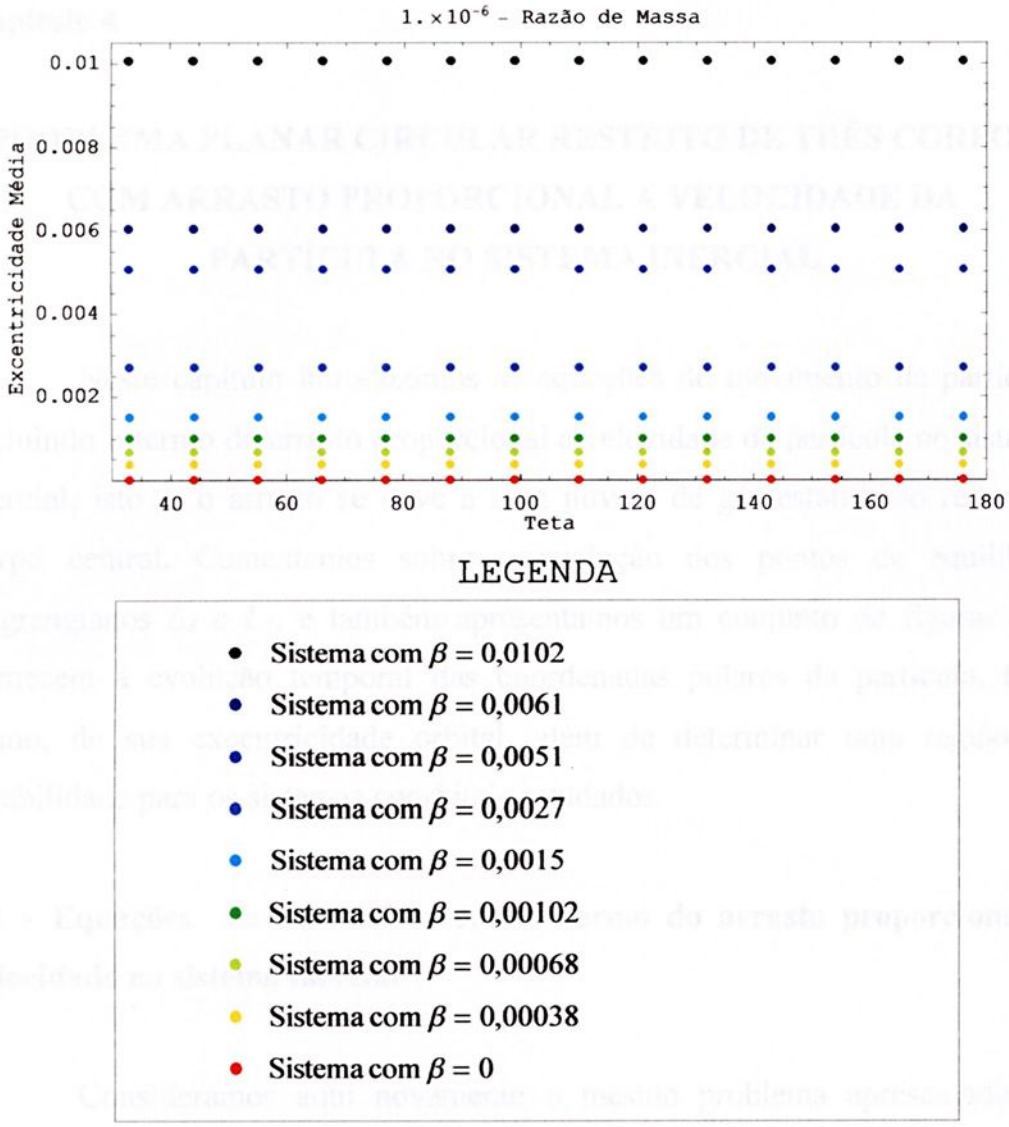


FIGURA 3.15 - Gráfico de (θ x $\overline{em}$) para $\mu = 10^{-6}$ e β variável.

Capítulo 4

PROBLEMA PLANAR CIRCULAR RESTRITO DE TRÊS CORPOS COM ARRASTO PROPORCIONAL A VELOCIDADE DA PARTÍCULA NO SISTEMA INERCIAL

Neste capítulo introduzimos as equações do movimento da partícula incluindo o termo do arrasto proporcional a velocidade da partícula no sistema inercial, isto é, o arrasto se deve a uma nuvem de gás estática ao redor do corpo central. Comentamos sobre a evolução dos pontos de equilíbrio Lagrangianos L_4 e L_5, e também apresentamos um conjunto de figuras que fornecem a evolução temporal das coordenadas polares da partícula, bem como, de sua excentricidade orbital, além de determinar uma região de estabilidade para os sistemas coorbitais estudados.

4.1 - Equações de movimento com o termo do arrasto proporcional a velocidade no sistema inercial

Consideramos aqui novamente o mesmo problema apresentado na seção 2.1, porém com a força de arrasto proporcional a velocidade da partícula no sistema inercial incluída nas equações de movimento. Podemos ainda considerar que para os corpos m_1 e m_2 a unidade de distância é $a=1$, a unidade de massa $\mu = G(m_1 + m_2) = 1$, como conseqüência da terceira lei de Kepler o movimento médio do sistema, m_1 e m_2, é unitário, ou seja, $n=1$.

Assim as equações de movimento da partícula no sistema rotacional passam dadas por:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = -\mu_1\left(\frac{x+\mu_2}{r_1^3}\right) - \mu_2\left(\frac{x-\mu_1}{r_2^3}\right) + x + F_x \qquad (4.1)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = -y\left(\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} - 1\right) + F_y \qquad (4.2)$$

unesp

lembrando que:

$$r_1^2 = (x+\mu_2)^2 + y^2 \tag{4.3}$$

$$r_2^2 = (x-\mu_1)^2 + y^2 \tag{4.4}$$

sendo que $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y)$ é a força de arrasto considerada no problema. Como o arrasto é proporcional a velocidade da partícula no sistema inercial, então

$$\boldsymbol{F} = k(\dot{x}-y, \dot{y}+x) \tag{4.5}$$

onde k é a magnitude do arrasto, sendo sempre uma quantidade negativa.

Em um Problema de dois corpos o arrasto espiraliza o semi-eixo maior, a, de uma partícula e mantém a excentricidade constante se a partícula não estiver em uma região de ressonância.

4.2 – Evolução dos pontos de equilíbrio devido ao arrasto

O arrasto produz uma modificação na estrutura do problema restrito de três corpos, deslocando os pontos de equilíbrio Lagrangianos, como ilustrado na Figura 4.1.

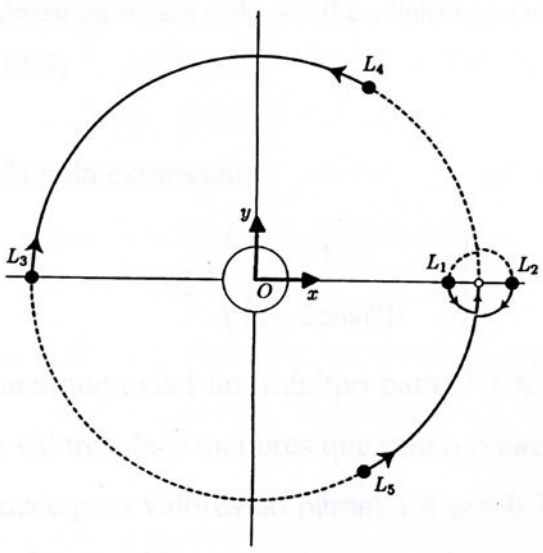


FIGURA 4.1 – Diagrama esquemático demonstrando a evolução dos pontos de equilíbrio Lagrangiano, para o caso onde $\mu_2 \ll 1$, com $k<0$ (linhas sólidas) e a linha tracejada para um hipotético $k>0$. (Reproduzido de Murray 1994)

Na Figura 4.1, vemos que o ponto L_4 caminha em direção ao ponto L_3 e para um determinado valor de k ele deixará de existir, já o ponto L_5 caminha em direção oposta ao L_4, evoluindo para uma junção com os pontos L_1 e L_2. Na Figura 4.2, temos uma evolução angular dos pontos em função da razão definida como $\psi \equiv \frac{k}{\mu_2}$.

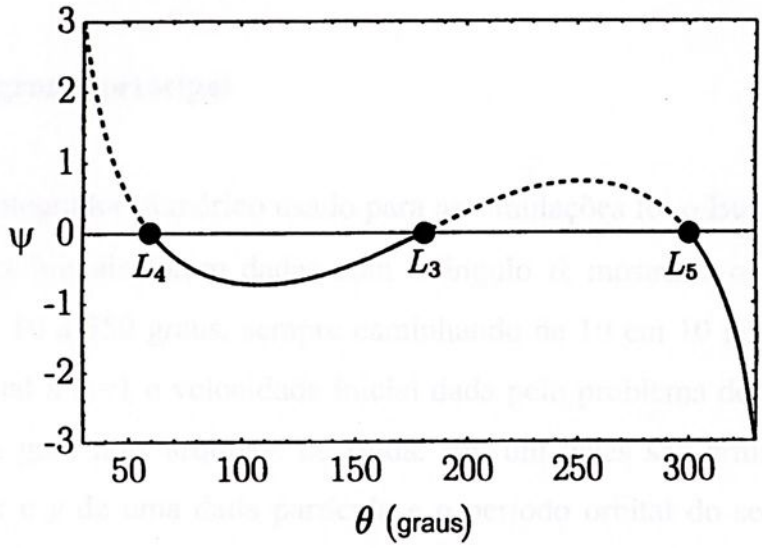


FIGURA 4.2 – Relação entre o parâmetro ψ e o deslocamento angular dos pontos de equilíbrio L_3, L_4 e L_5, no caso de pequenas razões de massa para uma força de arrasto inercial. A linha sólida determina o caso onde $\psi < 0$ e a linha tracejada o caso em que $\psi > 0$. (modificado de Murray 1994)

A Figura 4.2, é gerada pela expressão

$$\psi = \operatorname{sen}\theta\left(\frac{1}{(2-2\cos\theta)^{\frac{2}{3}}} - 1\right) \tag{4.6}$$

analisando (4.6) vemos que existi um mínimo para θ=108°.4 que corresponde a ψ= -0.7265, para valores de ψ menores que este o ponto L_4 deixa de existir, já o ponto L_5 permanece para valores do parâmetro ψ<-0.7265. Este resultado mostra que podem existem órbitas ao redor ponto L_5 mesmo quando o ponto L_4 deixa de existir.

4.3 – Evolução temporal das coordenadas polares da partícula e sua excentricidade orbital

Nesta seção são apresentados o funcionamento do programa principal e os gráficos da evolução temporal das coordenadas polares da partícula, bem como, de sua excentricidade orbital.

4.3.1 – Programa principal

O integrador numérico usado para as simulações foi o Bulirsch-Stoer e as condições iniciais foram dadas com o ângulo θ, mostrado na Figura 3.6, variando de 10 a 350 graus, sempre caminhando de 10 em 10 graus, com um raio fixo igual a r_1=1 e velocidade inicial dada pelo problema de dois corpos. O programa gera dois arquivos de saída. Em um deles são armazenados os valores de x e y de uma dada partícula e o período orbital do secundário. O segundo arquivo gerado fornece um conjunto de informações relativas a cada uma das condições iniciais integradas. Dentre as informações geradas temos que para uma dada condição inicial é fornecida a menor distância que a partícula se aproximou do corpo perturbador (secundário), durante todo o período de integração. Se a distância for menor que 10^{-4} a integração é interrompida, quando a distância entre a partícula e o primário é maior que 1.2 ou menor que 0.8 o programa também é interrompido.

4.3.2 – Análise dos gráficos da evolução temporal das coordenadas polares da partícula, de suas órbitas e de sua excentricidade orbital.

Nessa seção analisamos os gráficos gerados pela simulação numérica, determinando uma região de instabilidade em função da razão de massa, μ e do arrasto k. Todas as figuras para μ =10^{-6} foram integradas por aproximadamente $8x10^5$ períodos orbitais do secundário e para cinco valores



diferentes de k (k = 0, -0.1x10^{-6}, -0.3x10^{-6}, -1x10^{-6} e -3x10^{-6}) e as figuras para μ =10^{-3} foram integradas por aproximadamente 3x10^{4} períodos orbitais do secundário e também para cinco valores diferentes de k (k = 0, -0.1x10^{-3}, -0.3x10^{-3}, -1x10^{-3} e -3x10^{-3}), assim para as duas razões de massa estudadas o parâmetro ξ foi mesmo, variando de -0.1 a –3, portanto comportamento dos sistemas estudados puderam ser comparados com a Figura 4.2. Simulamos o problema de dois corpos com a influência do arrasto para determinar a evolução do semi-eixo maior, a, para os valores de k iguais a k =-10$^{-\zeta}$, como inteiro no intervalo de $2 \leq \zeta \leq 7$. Os resultados são apresentados na Figura 4.3.

Em todas as condições iniciais simuladas para o sistema μ=10^{-6}, não foram encontradas regiões de instabilidade para o tempo total de integração, mesmo para valores de k elevados, k=-3x10^{-6}, sendo essas órbitas bem estáveis, é importante lembrar que está é a razão de massa para os sistemas Saturno-Dione e Saturno-Tétis, já para aos sistemas com razão de massa μ=10^{-3}, as simulações mostraram várias regiões de instabilidades:

a) k = 0, instável de 0 a 20°, de 160° a 200° e de 340° a 360° ;
b) k = -0.1x10^{-3}, instável 0 a 20° e de 340° 360°;
c) k = -0.3x10^{-3}, instável 0 a 30°, de160° a 210° e de 340° a 360°;
d) k = -1x10^{-3}, instável de 0 a 250° e de 350° a 360°;
e) k = -3x10^{-3}, instável de 0 a 300° e de 350° a 360°.

da análise destas regiões de instabilidades, podemos notar que o sistema com e k = -0.1x10^{-3} tem maiores faixas de estabilidade quando comparado com o problema sem nenhuma perturbação, nesta situação o efeito dissipativo do arrasto contribuiu para a estabilidade do sistema.

Nas Figuras 4.4 a 4.11 não são observadas diferenças significativas na evolução temporal das coordenadas polares das partículas e em suas órbitas, mas mesmo assim podemos notar uma tendência a uma diminuição na libração angular e radial, na Figura 4.12, para k=-0.1x10^{-6}, e θ=340° podemos observar uma "captura" da partícula no ponto L_4, passando a oscilar em uma órbita tipo

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

girino, quando para o caso em que o k=0, ela ficaria oscilando em uma órbita ferradura para essa mesma condição inicial. Já na Figura 4.13 o mesmo valor de k da Figura 4.12, mas, com um θ=350° não observamos uma "captura", porém se integrarmos por um tempo maior ela também evoluirá para uma órbita do tipo girino em L_4 ou em L_5. O tempo para que ocorra essa evolução é diretamente proporcional a largura radial da órbita inicial da partícula. Quanto mais próxima a condição inicial da partícula estiver dos pontos de equilíbrio L_4 e L_5, menor será o tempo para que ocorra essa evolução, já que a largura radial diminui a medida que a partícula se aproxima do ponto de equilíbrio. Na Figura 4.14, k=-0.3x10^{-6} e θ=10°, novamente observamos uma "captura" no ponto L_4, ainda nessa figura, só que para um k=10^{-6} a partícula migrou para o ponto L_5, pois, de acordo com a Figura 4.2, para esse valor do parâmetro ψ, o ponto L_4 não existe mais. Podemos observar ainda nessa figura que a partícula tem sua oscilação angular diminuída com o tempo, o que produz a convergência sua órbita para o ponto de equilíbrio L_5, que claramente não está mais θ=330°. Na Figura 4.15 a partícula é "capturada" no ponto L_5 para um valor de k=-0.3x10^{-6}, mesmo ainda existindo neste sistema o outro ponto de equilíbrio L_4, já no sistema com o k=-10^{-6} a partícula converge para o ponto de equilíbrio L_5, como na Figura 4.14. Para a Figura 4.16 novamente a partícula é "capturada" no ponto L_5, e para o k=-10^{-6} ela converge rapidamente para o ponto de equilíbrio L_5 tento sua amplitude de libração angular convergindo para a nova posição do ponto de equilíbrio L_5, um observação importante é que para o valor de ψ = -1, como acontece para todos os casos com k=-10^{-6} o ponto L_4, não existe mais. As figuras seguintes para os valores de k=-0.3x10^{-6} e –10^{-6} apresentam o mesmo comportamento, ocorrendo apenas uma "captura" em L_5 quando θ=350°. As Figuras 4.25 a 4.31, apresentam exatamente o mesmo comportamento, todas convergem para um valor de θ=330°, que é o novo valor angular do ponto de equilíbrio, L_5, não havendo "capturas" para nenhuma condição inicial. As Figuras 4.32 a 4.39 apresentam o mesmo

comportamento para o sistema com k=-0.1x10^{-3}, mostrando claramente uma convergência de todas as partículas para o θ=62°.7, que é a nova posição angular do ponto de equilíbrio L_4. A Figura 4.33, mostra perfeitamente que o ponto de equilíbrio L_4 se deslocou dos 60°, pois a partícula para o sistema com k=0 permanece parada em 60° a posição clássica do ponto de equilíbrio, já a partícula do sistema com k=-0.1x10^{-3}, realiza uma órbita do tipo girino que acaba por convergir para ao nova posição do ponto de equilíbrio. As Figuras 4.36 e 4.37, ilustram como foi determinada uma órbita instável, nelas pode-se observar um espalhamento da órbita da partícula, que não mas realiza uma órbita do tipo girino. A Figura 4.39, apresenta uma órbita com gomos, neste caso, de alguma maneira a partícula ficou presa em um valor de excentricidade um pouco mais elevado que para o resto das condições iniciais. Nas Figuras 4.40 e 4.41, a partícula converge para o ponto de equilíbrio L_5, que passa a ter seu valor angular de –57°.6 diferentemente dos –60° tradicionais do sistema sem arrasto. Para as outras figuras o mesmo tipo de análise pode ser feito, por exemplo, o sistema com k= -0.3x10^{-3} apresenta o ponto L_4 em θ=69°.3 e o ponto L_5 em θ=-53°.5. Para valores de k=-3x10^{-3}, é observada uma grande faixa de instabilidade, e mesmo as órbitas que não foram destruídas por essa instabilidade, apresentam um comportamento que não se assemelha ao dos outros valores de k estudados. A Figura 4.56 mostra como o arrasto provoca um assimetria no espaço físico permitindo um número maior de órbitas ao redor do ponto L_5 do que ao redor do ponto L_4. Na Figura 4.57 podemos notar como as amplitude radial da partícula diminui para as órbitas ao redor do ponto L_5 quando o valor de arrasto aumenta e tem um efeito contrário para o ponto L_4. As Figuras 4.58 e 4.59 mostram como o arrasto funciona como um mecanismo de captura.

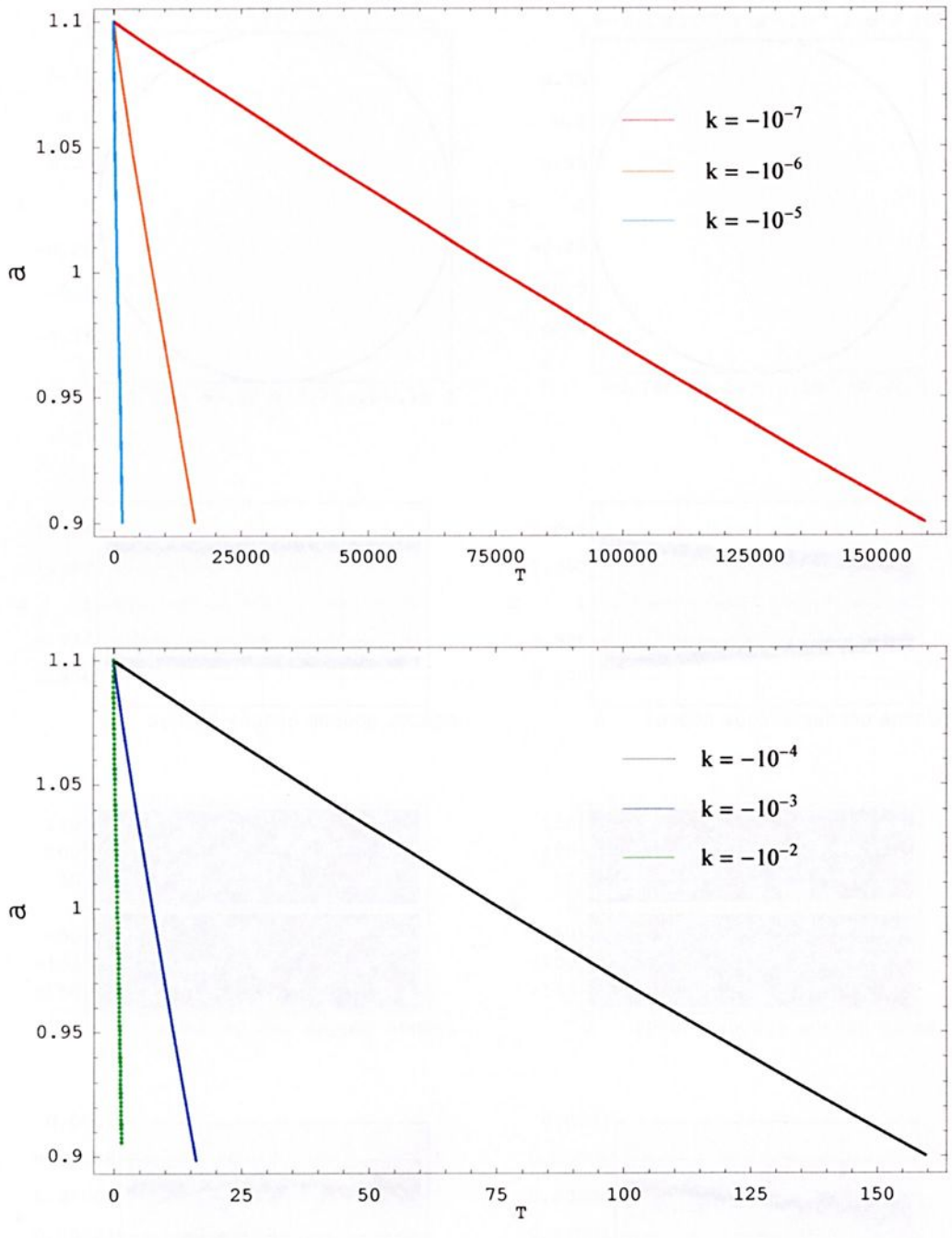


FIGURA 4.3 – Evolução do semi-eixo maior (a) em função dos arrasto (k) no problema de 2 corpos.

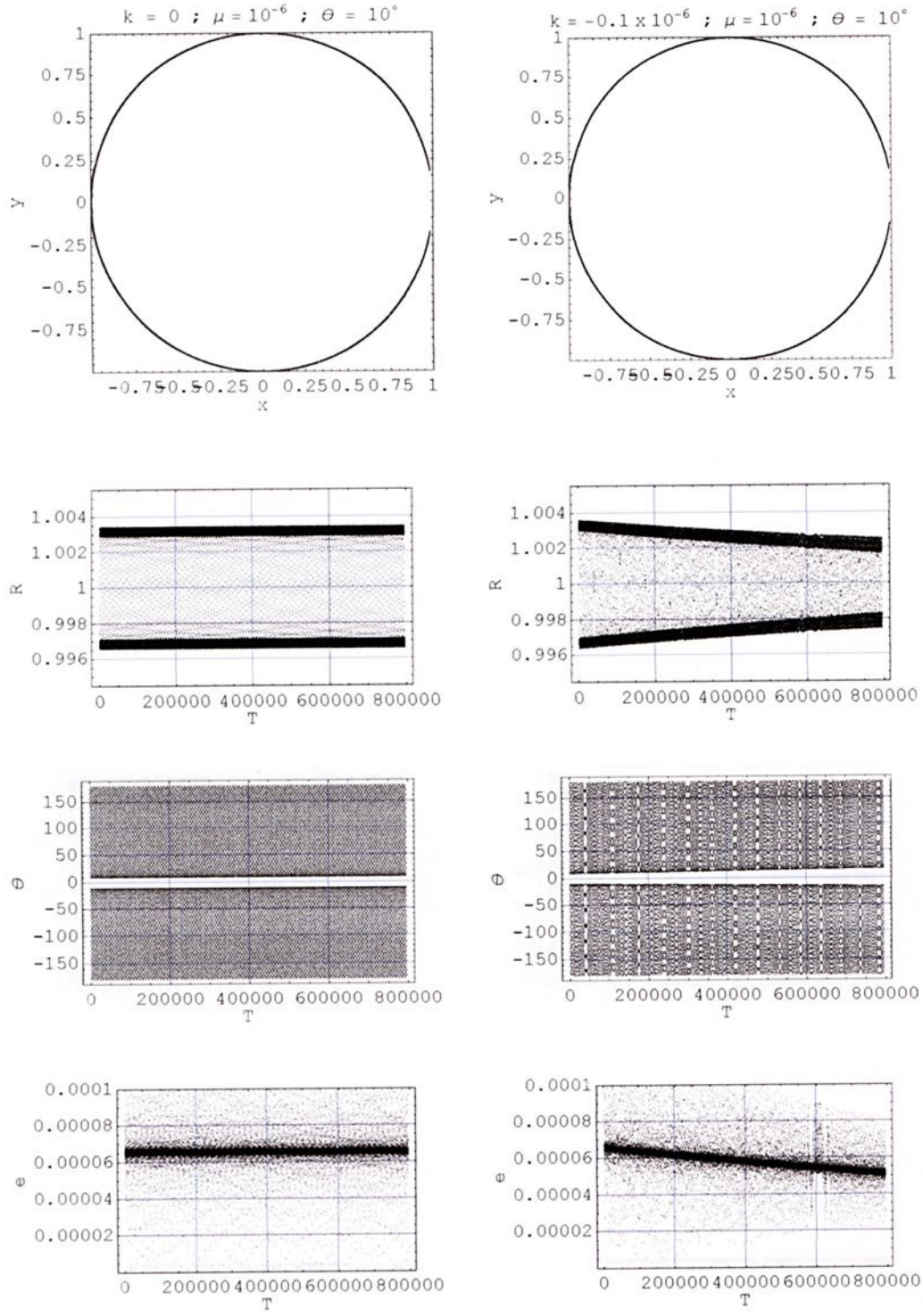


FIGURA 4.4 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 10^{o}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 10^{o}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

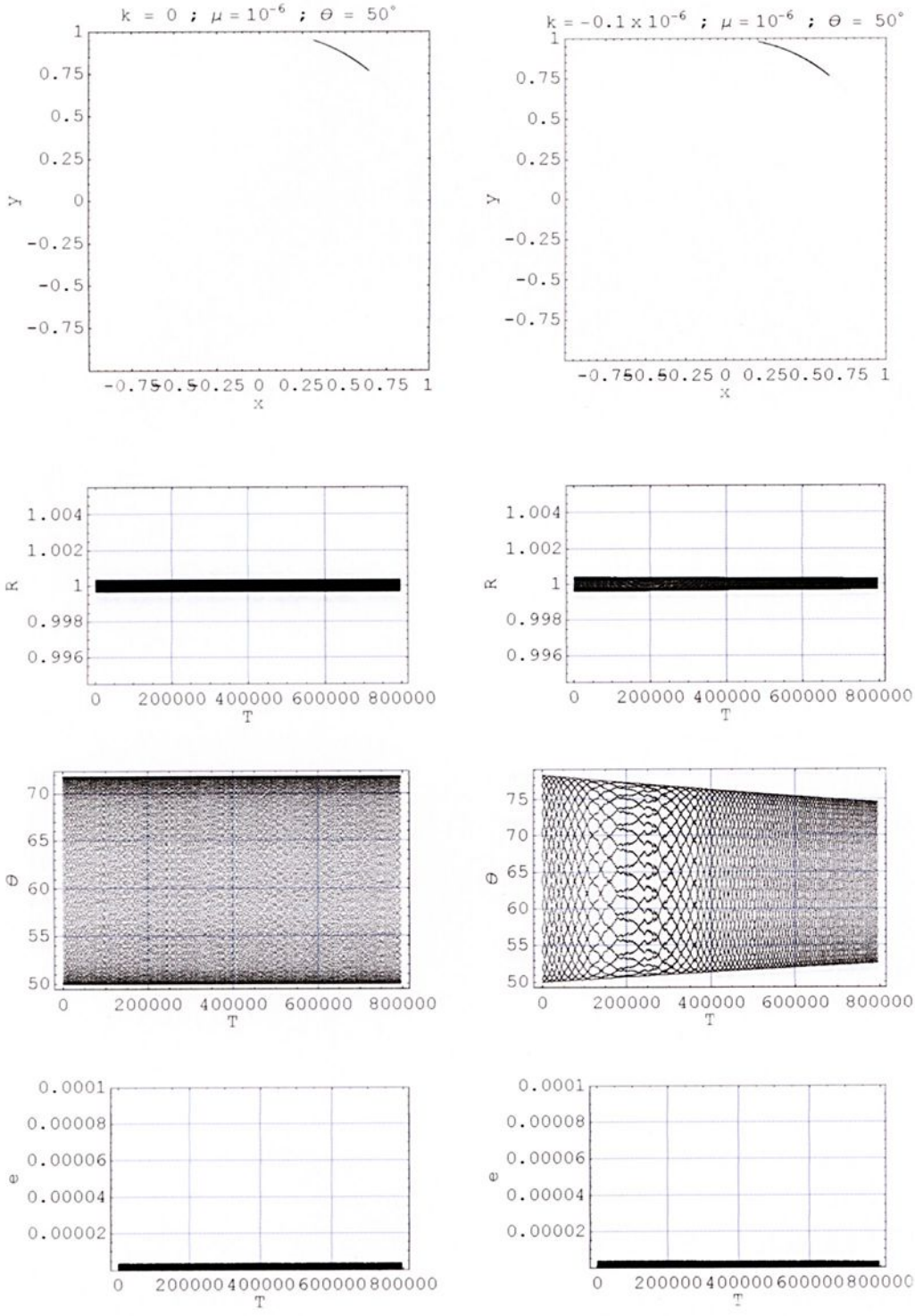


FIGURA 4.5 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 50^{\circ}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 50^{\circ}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

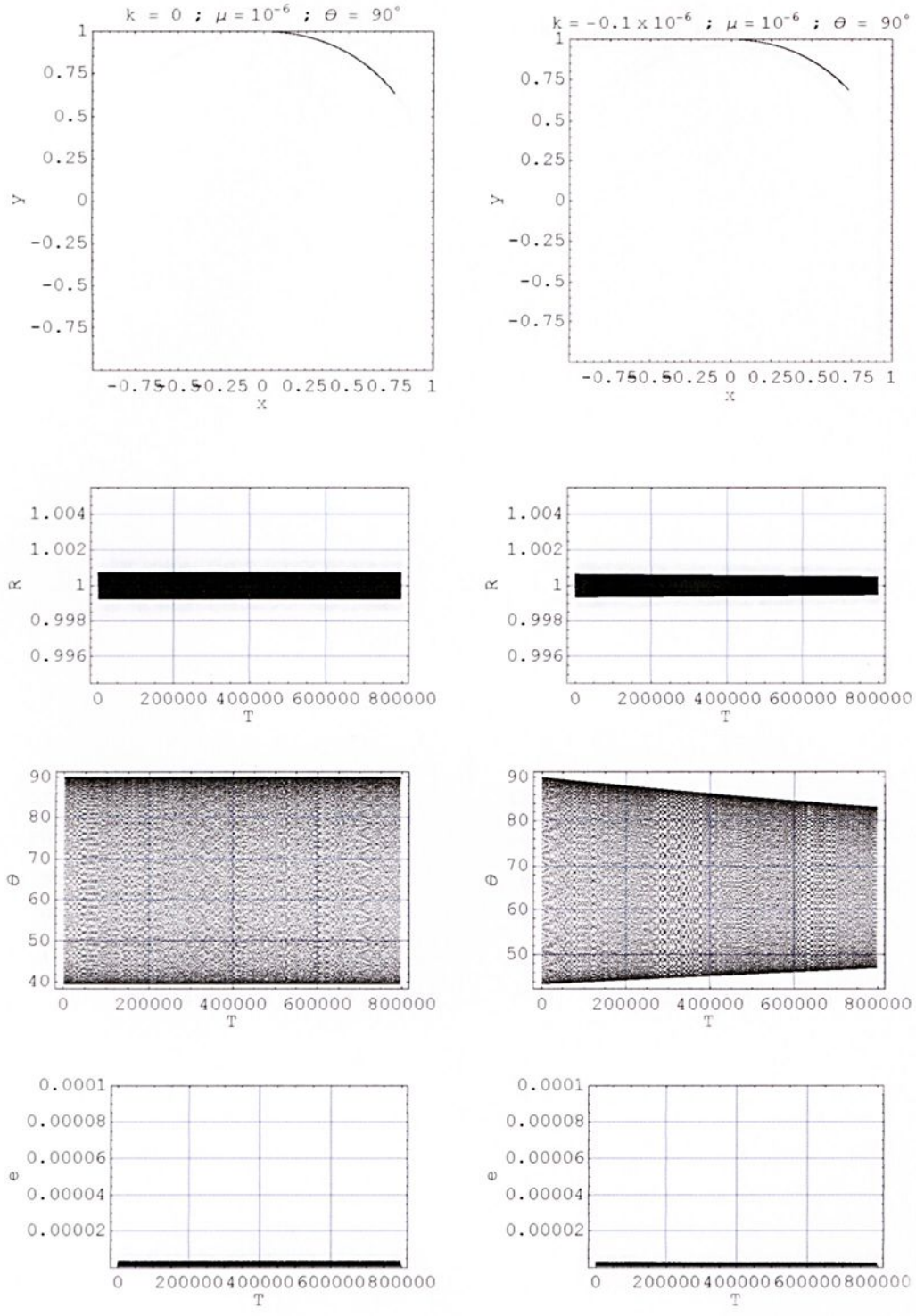


FIGURA 4.6 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 90^{\circ}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 90^{\circ}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

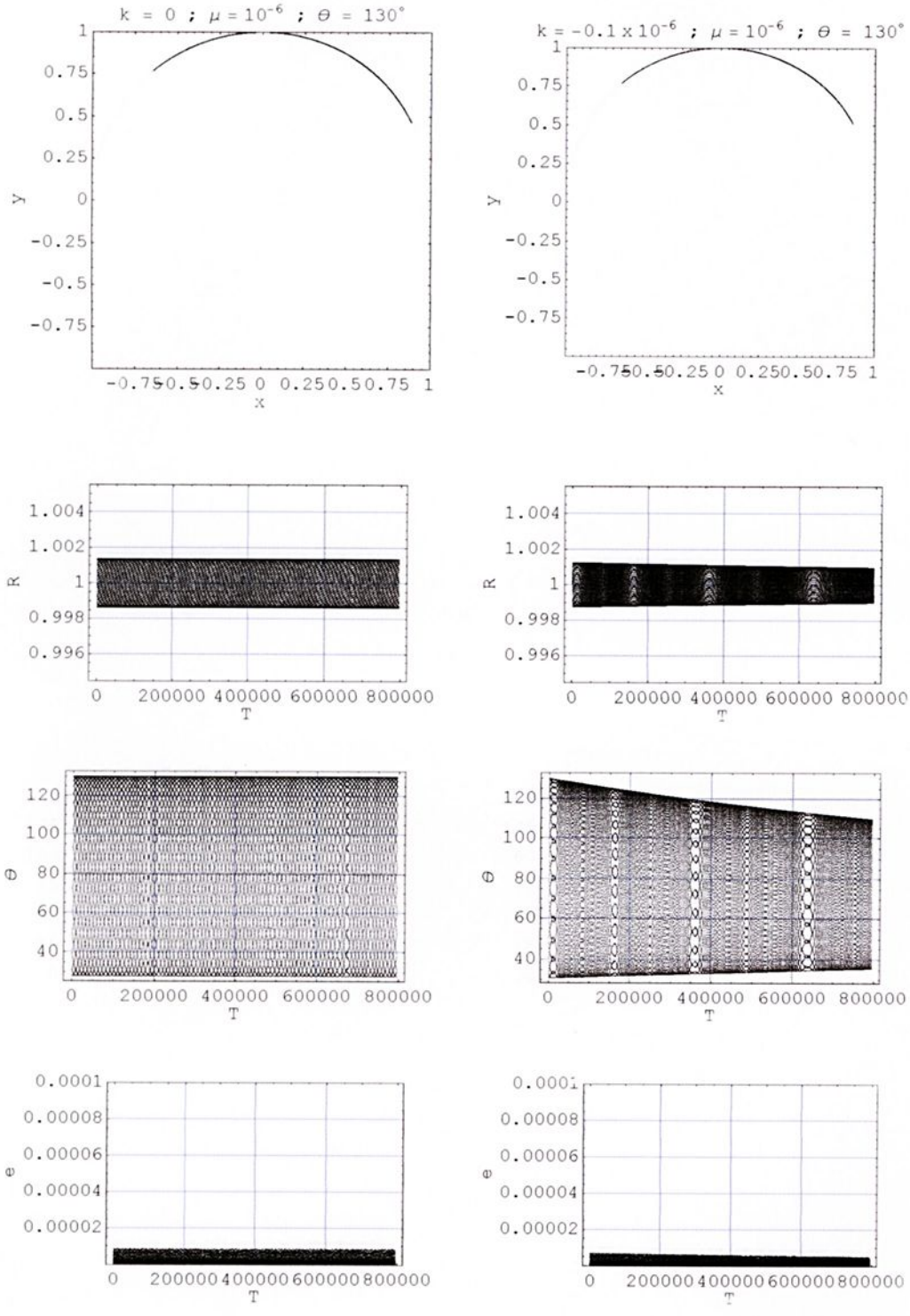


FIGURA 4.7 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 130^{\circ}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 130^{\circ}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

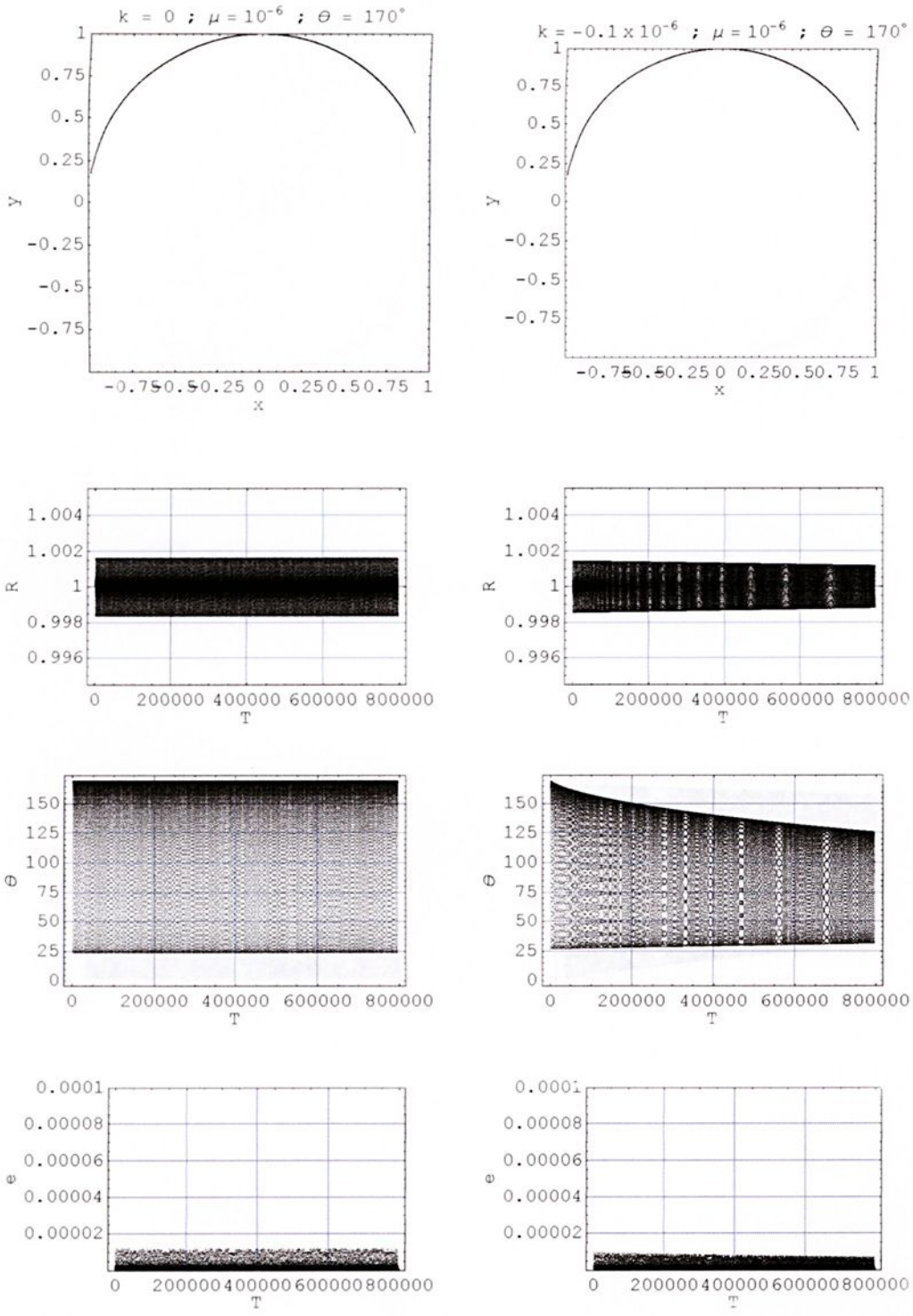


FIGURA 4.8 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 170^{o}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 170^{o}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

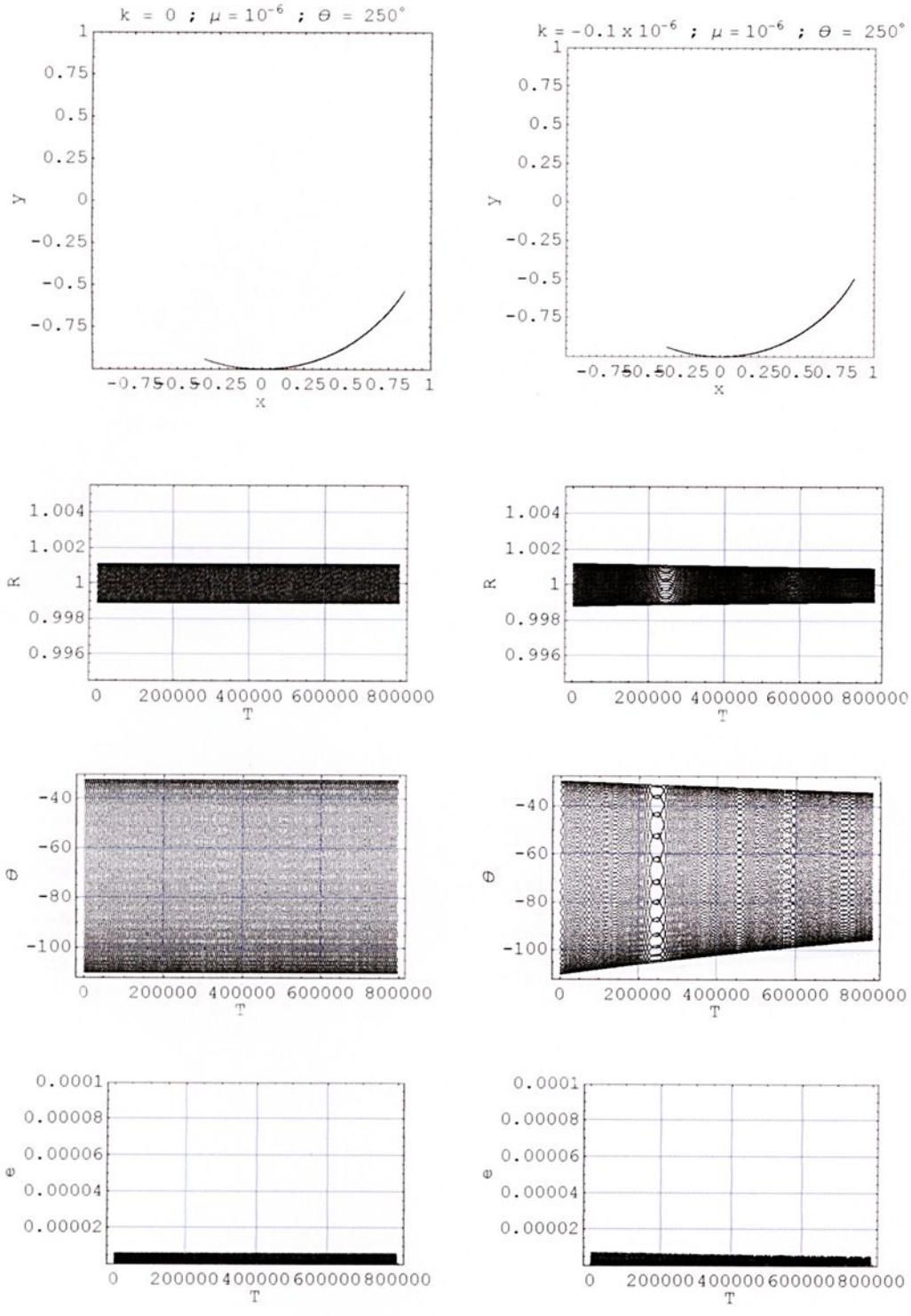


FIGURA 4.9 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 250^{\circ}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 250^{\circ}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

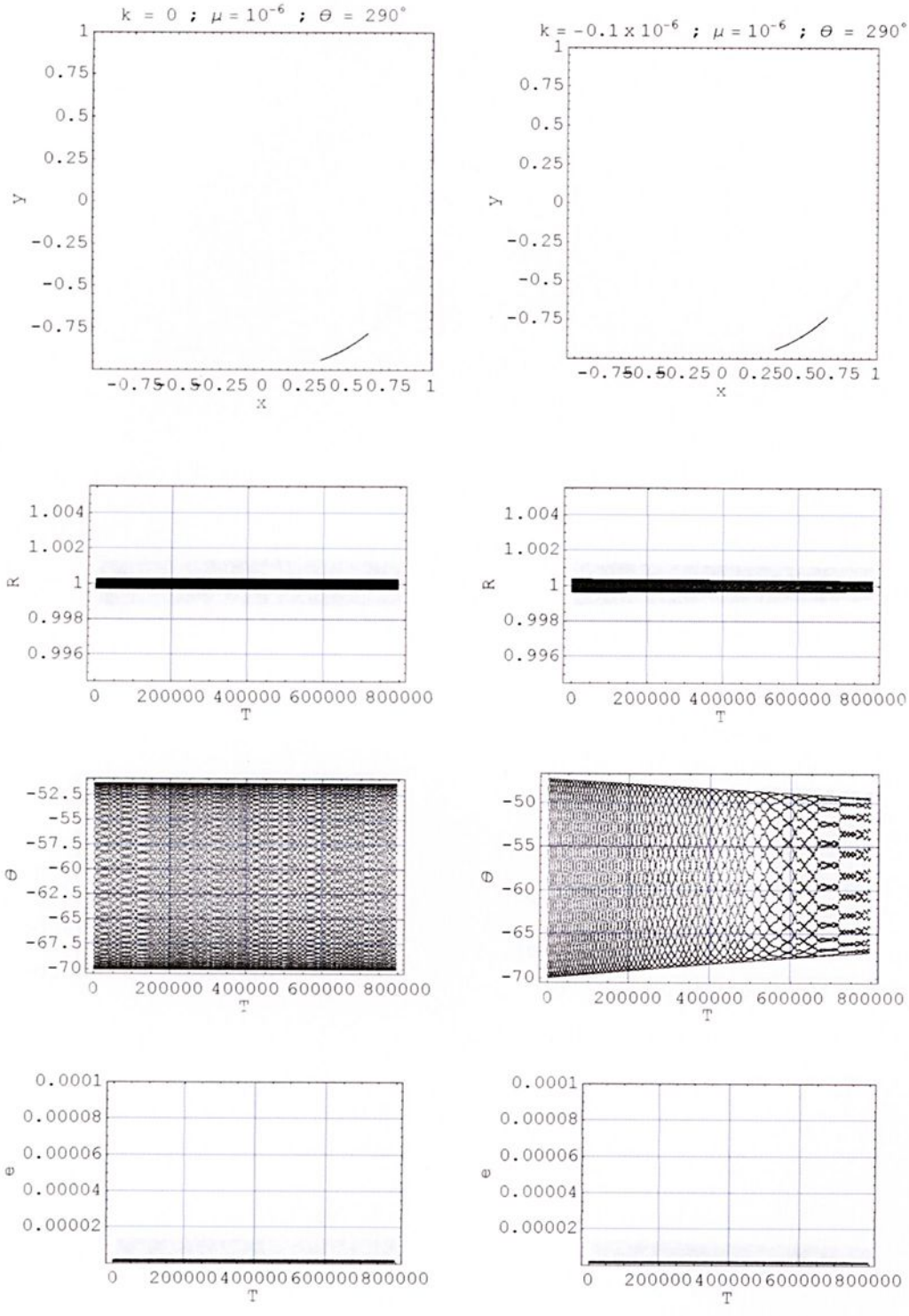


FIGURA 4.10 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 290^{\circ}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 290^{\circ}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

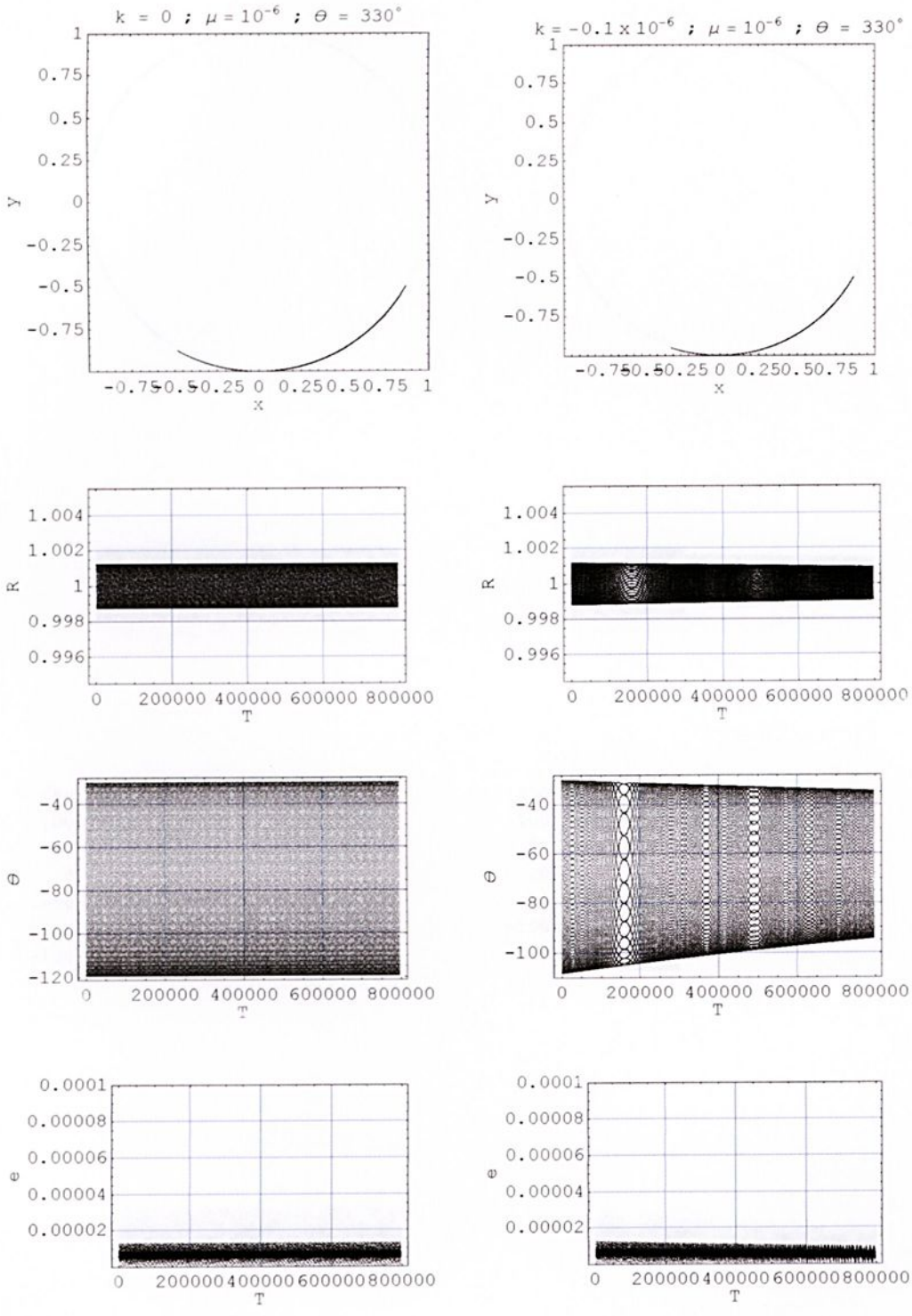


FIGURA 4.11 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 330^{o}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 330^{o}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

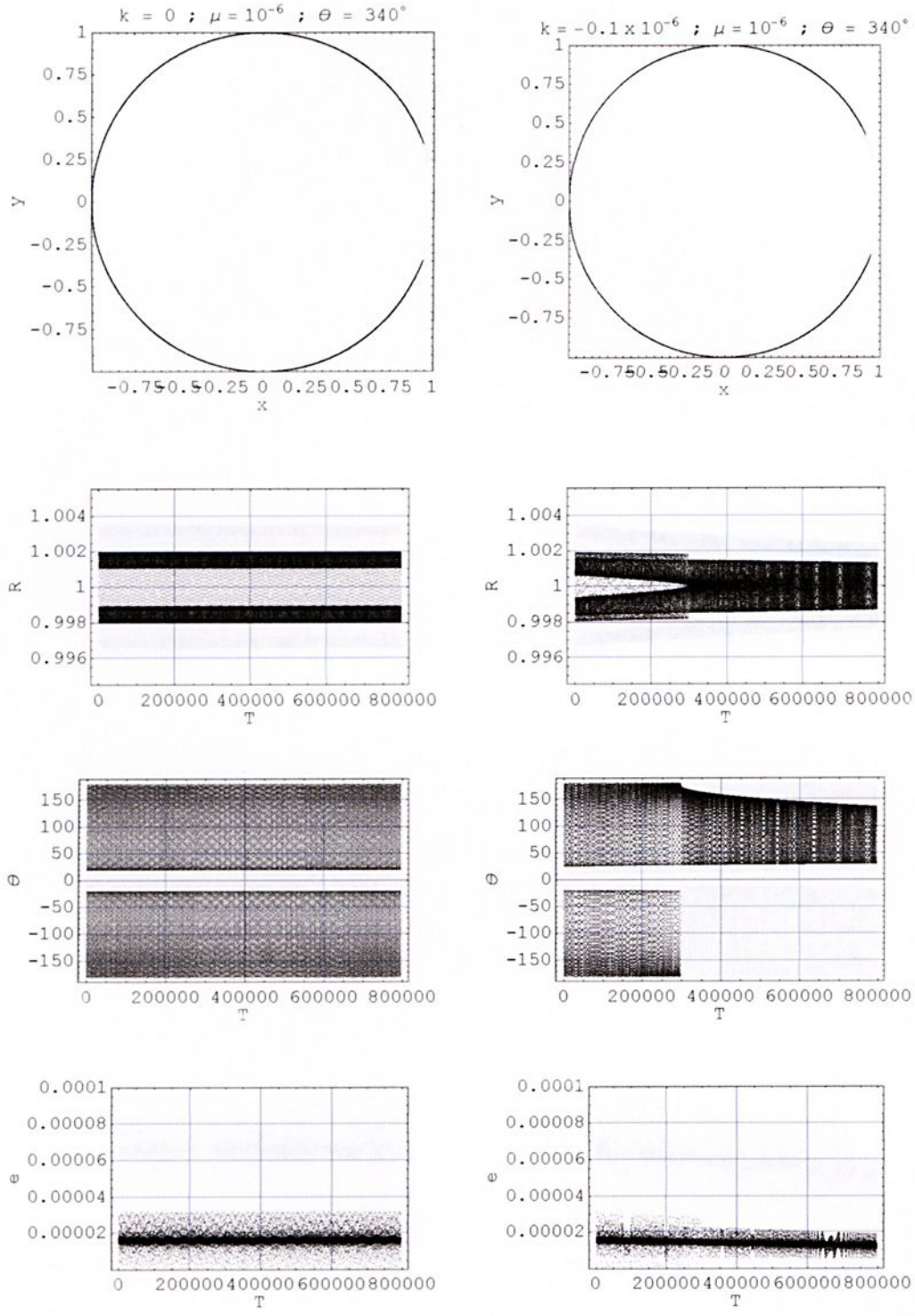


FIGURA 4.12 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 340^{o}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 340^{o}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

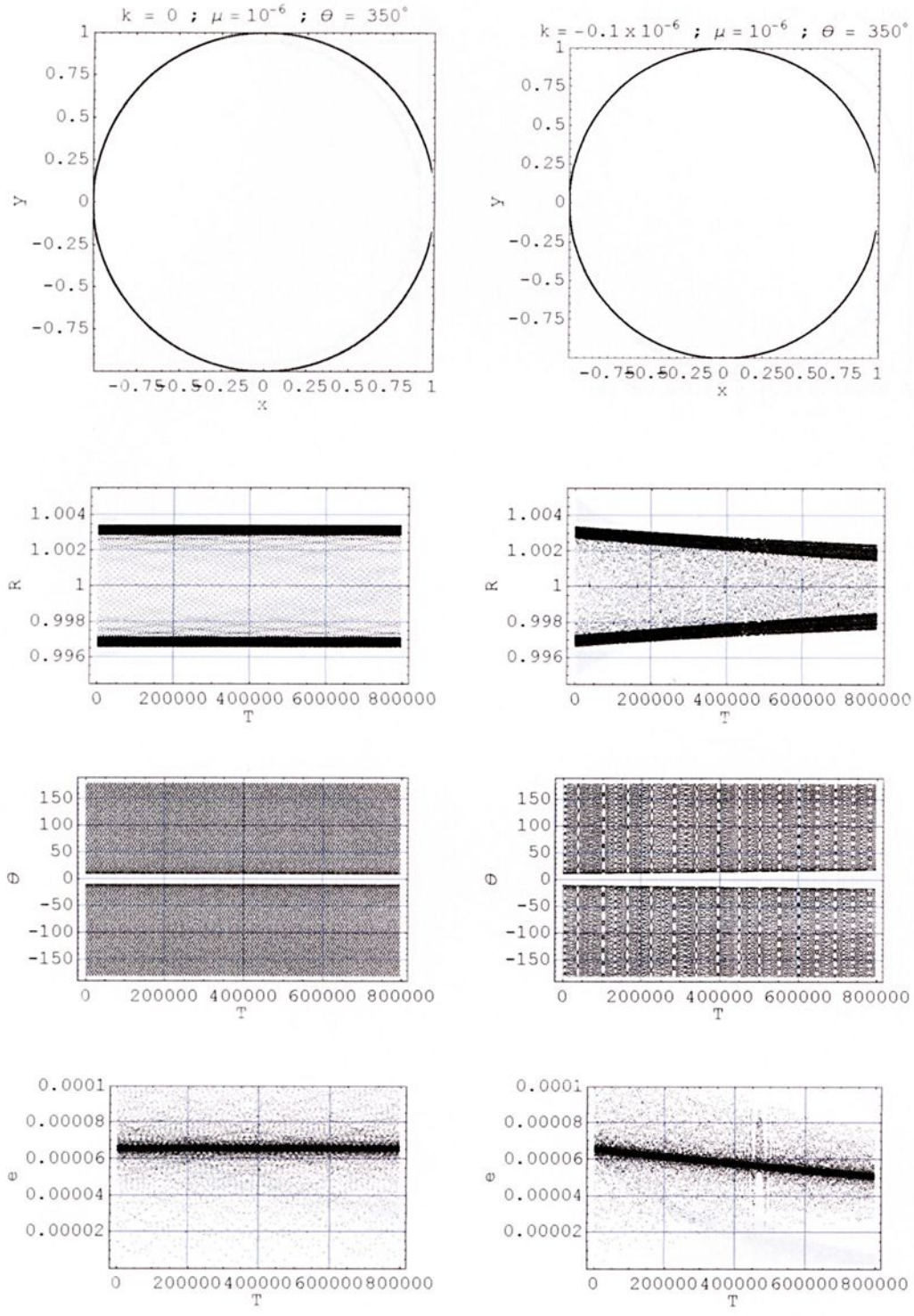


FIGURA 4.13 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 350^{\circ}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 350^{\circ}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

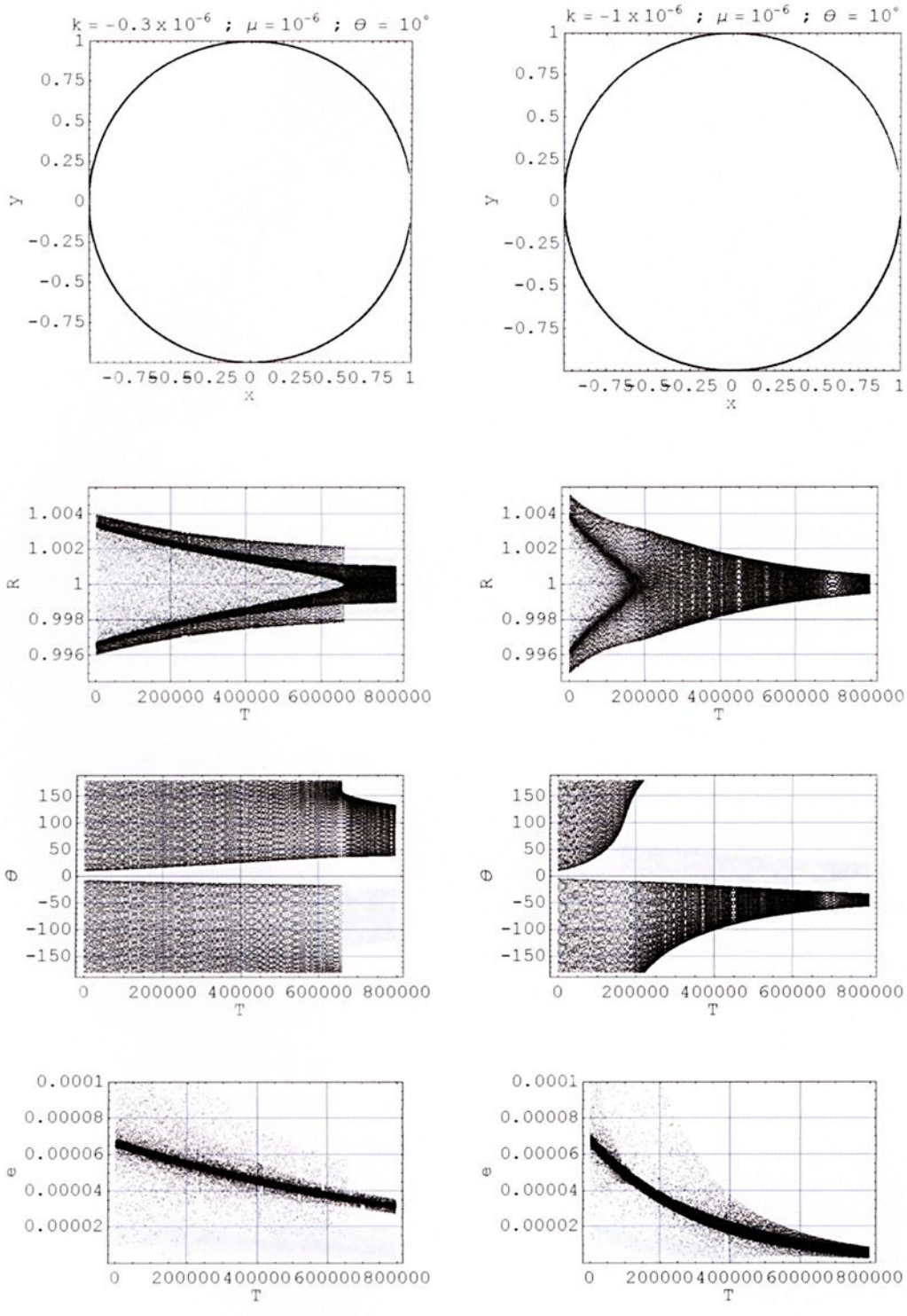


FIGURA 4.14 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 10° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 10° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

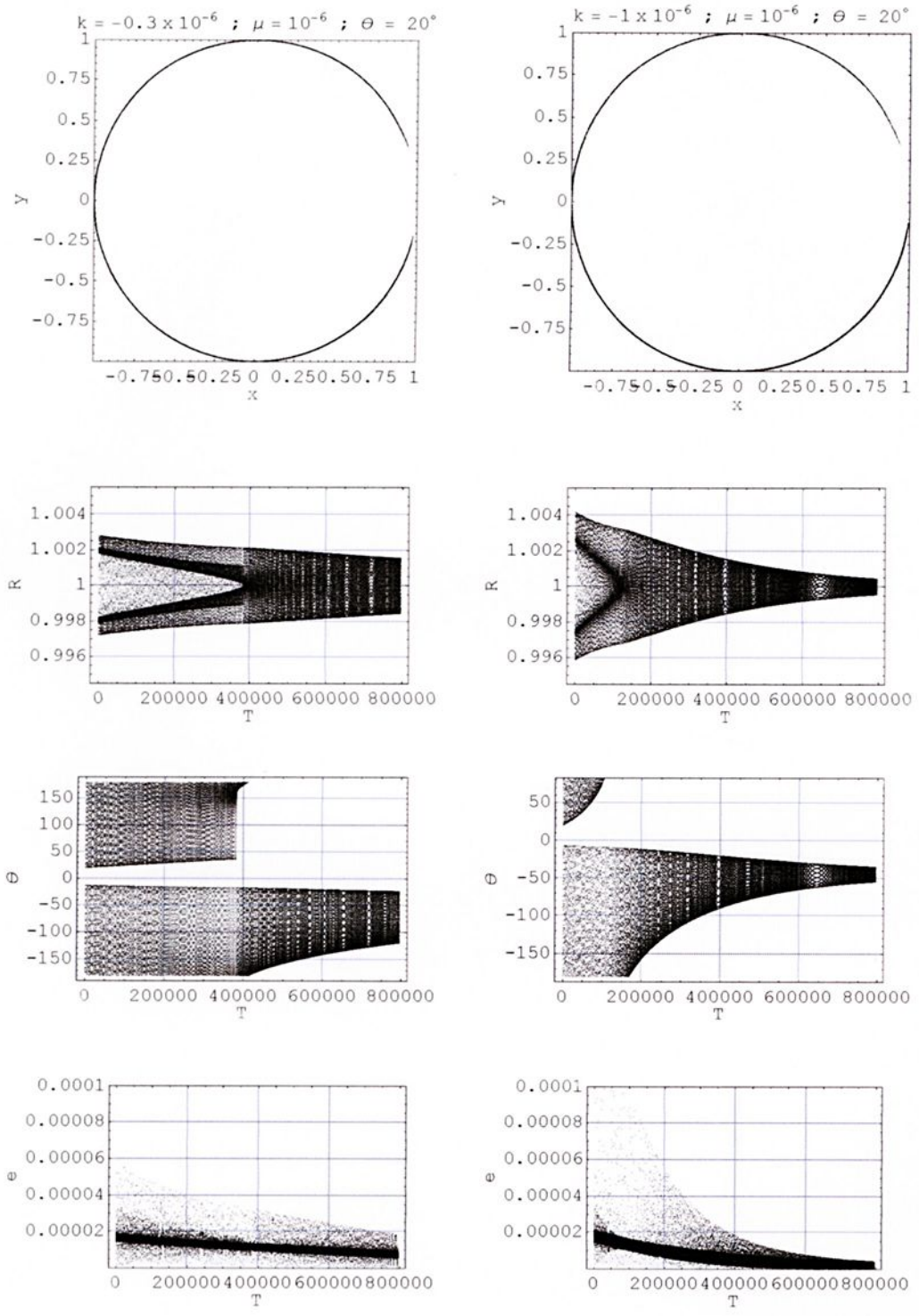


FIGURA 4.15 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 20° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 20° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

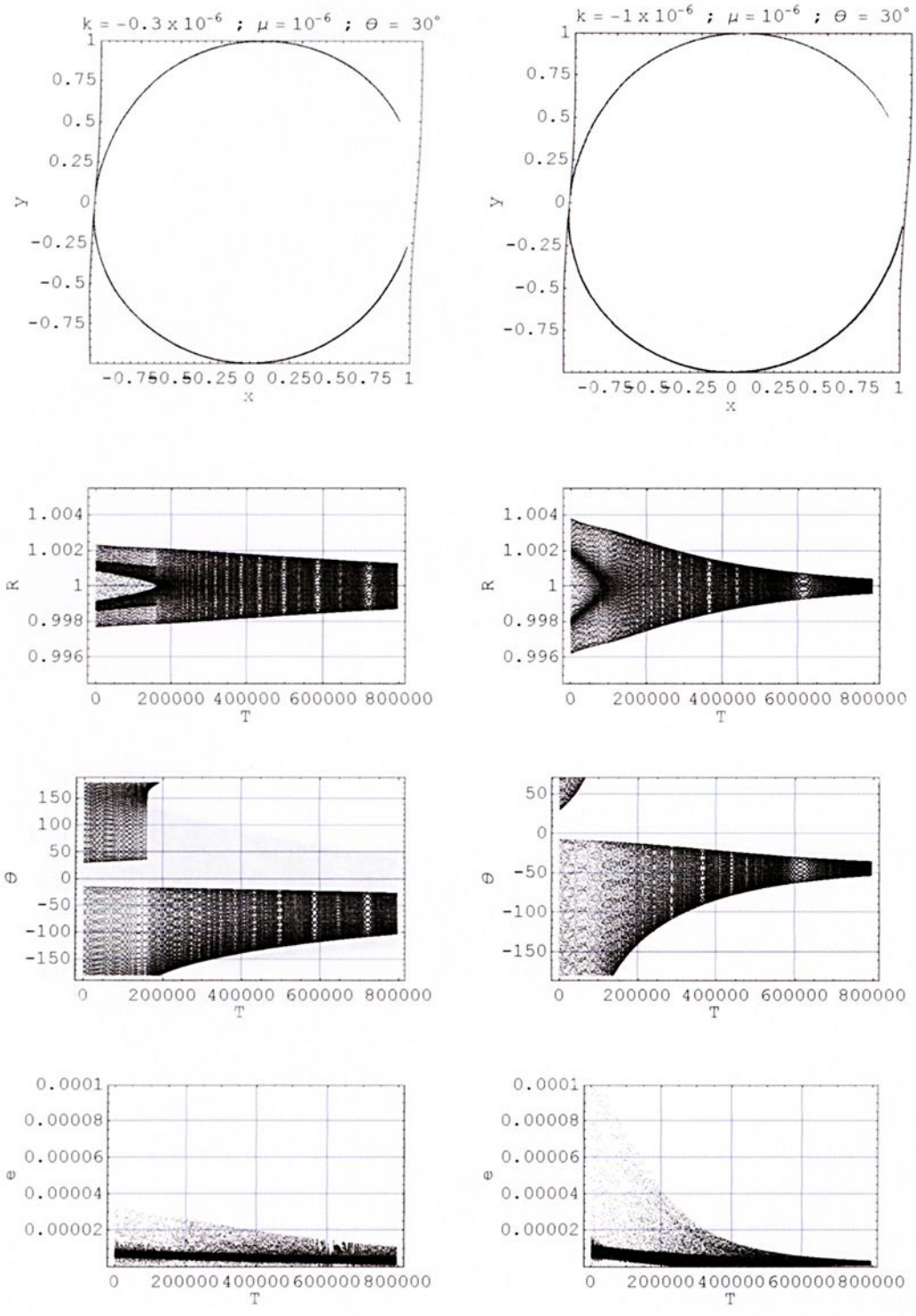


FIGURA 4.16 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 30° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 30° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

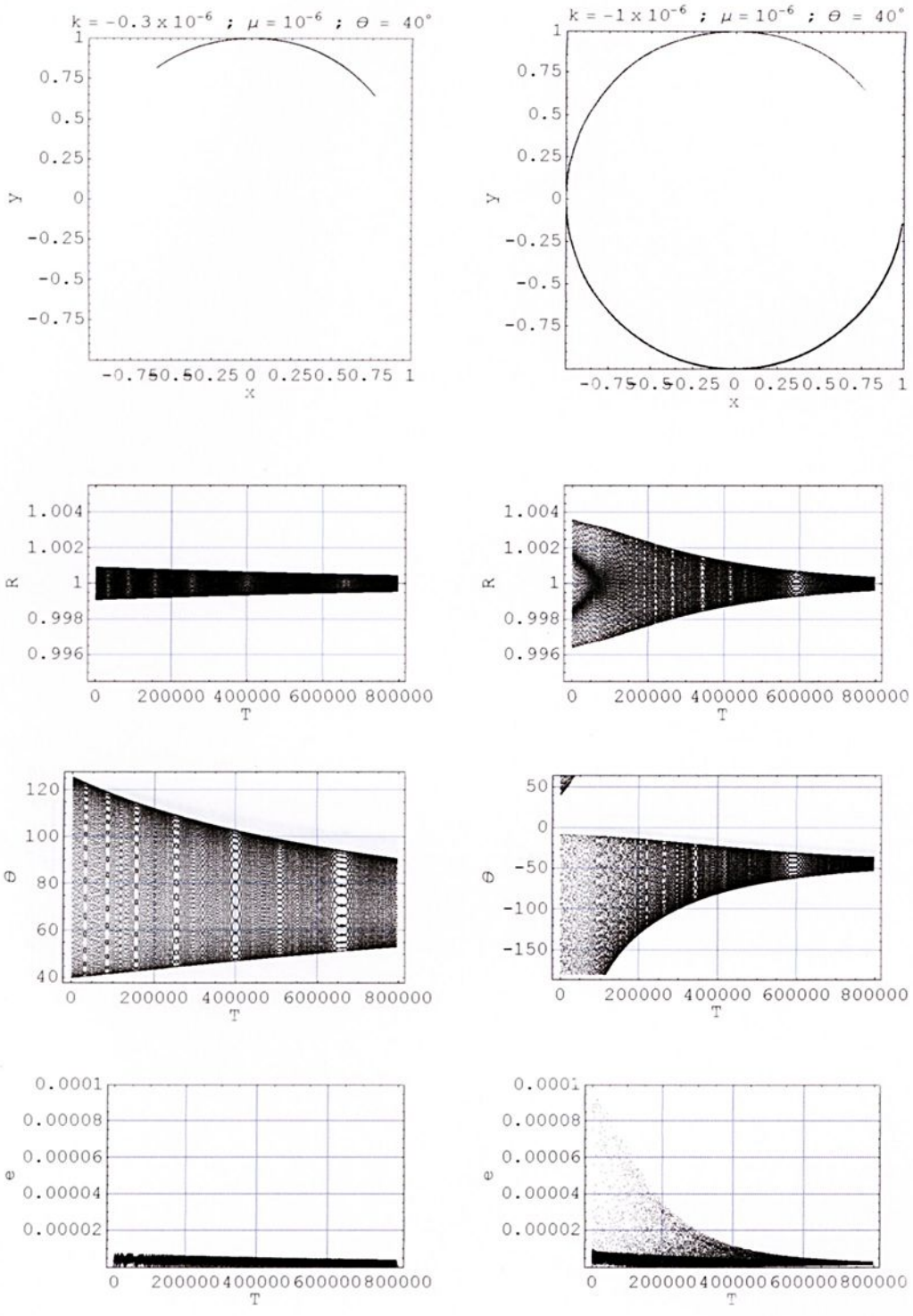


FIGURA 4.17 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 40° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 40° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

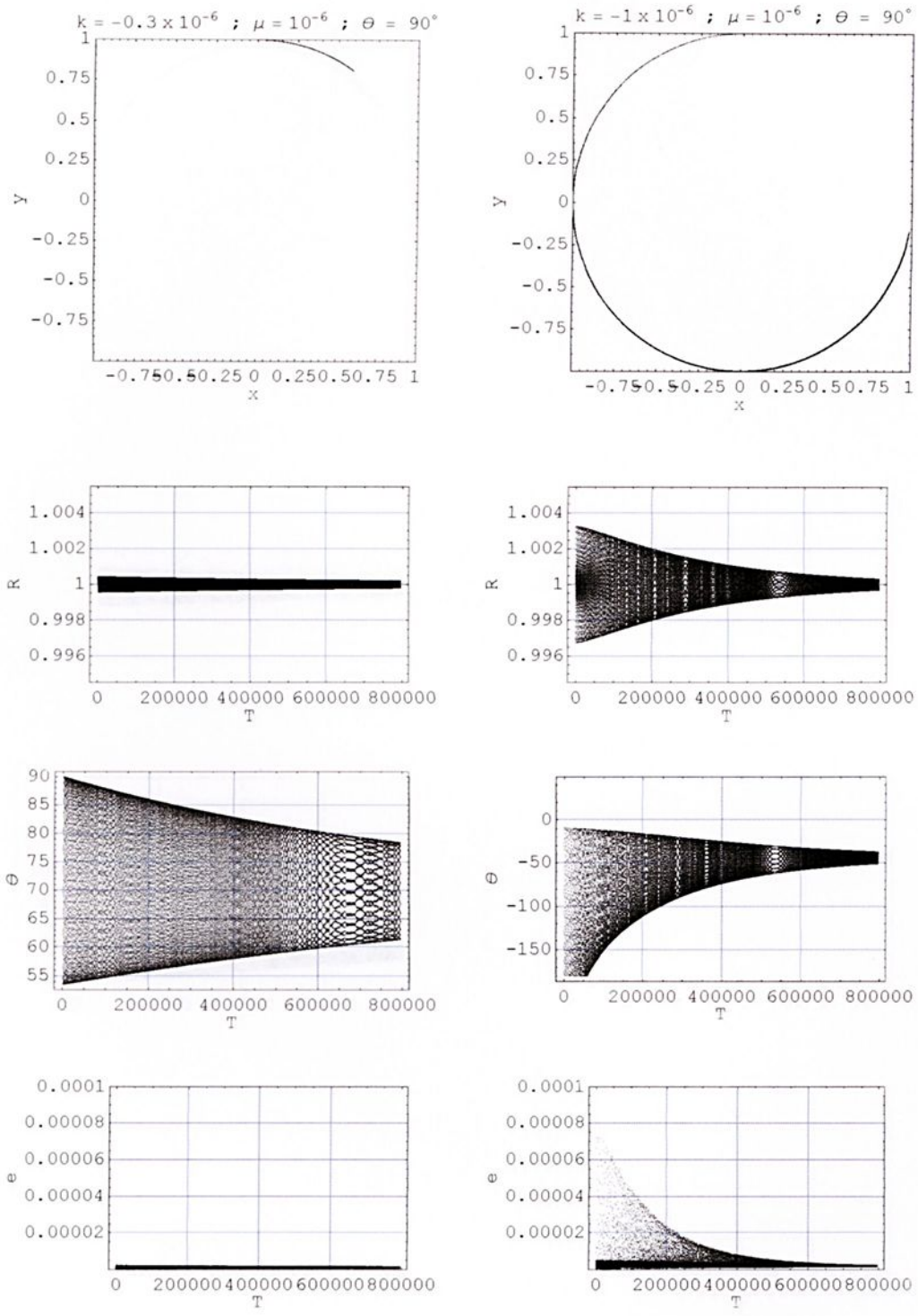


FIGURA 4.18 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 90° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 90° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

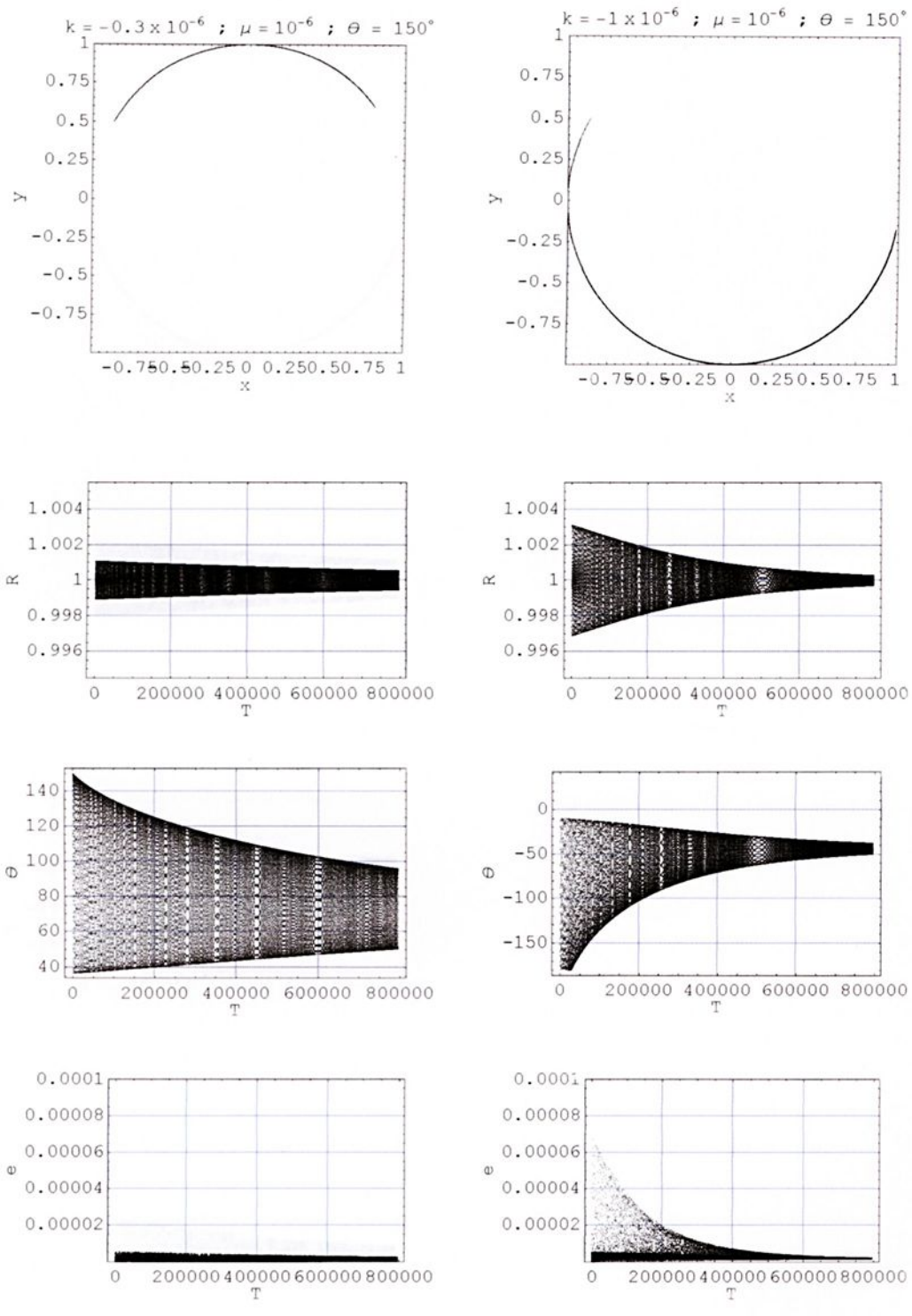


FIGURA 4.19 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 150° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 150° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

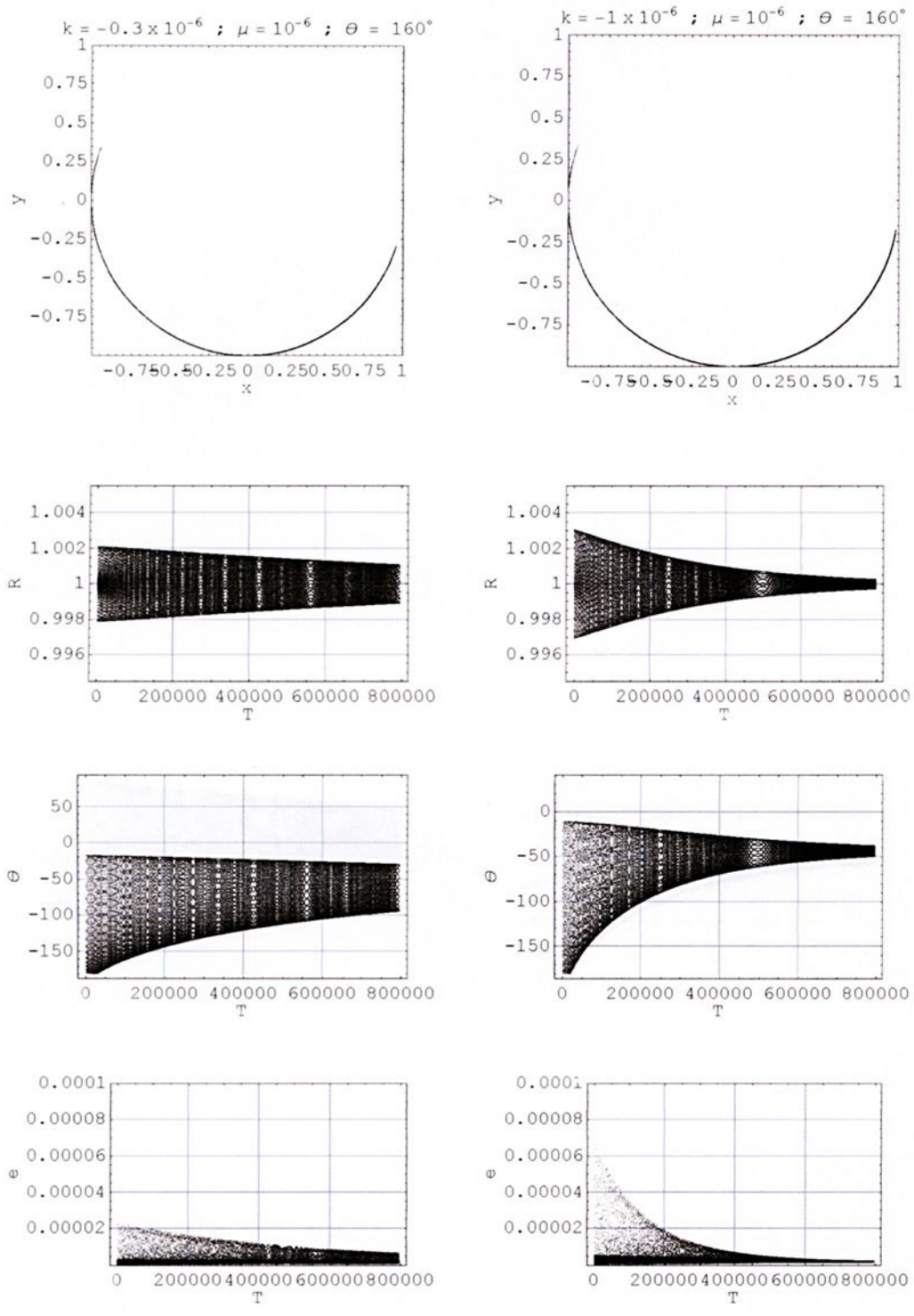


FIGURA 4.20 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 160° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 160° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

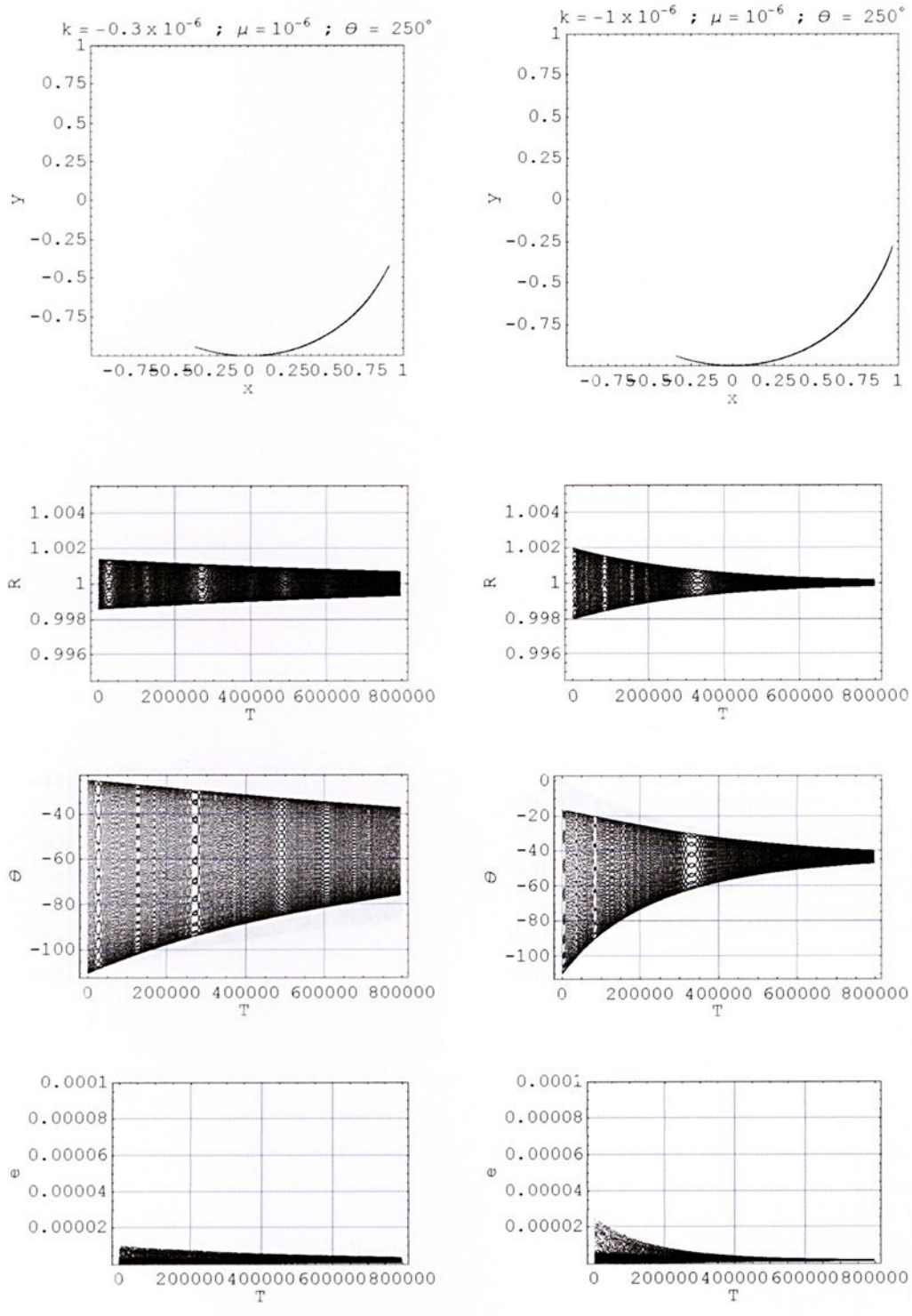


FIGURA 4.21 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 250° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 250° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

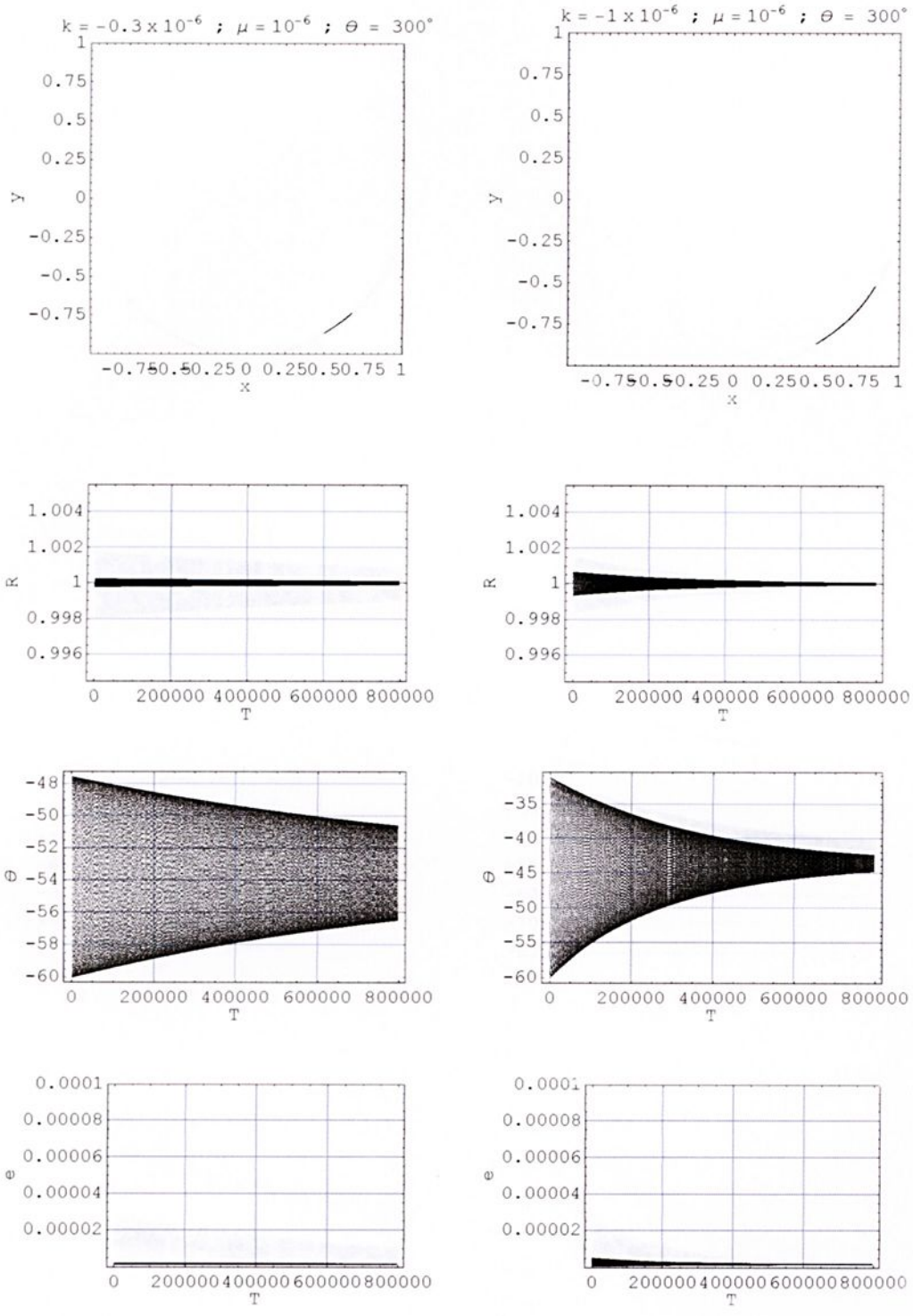


FIGURA 4.22 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 300° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 300° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

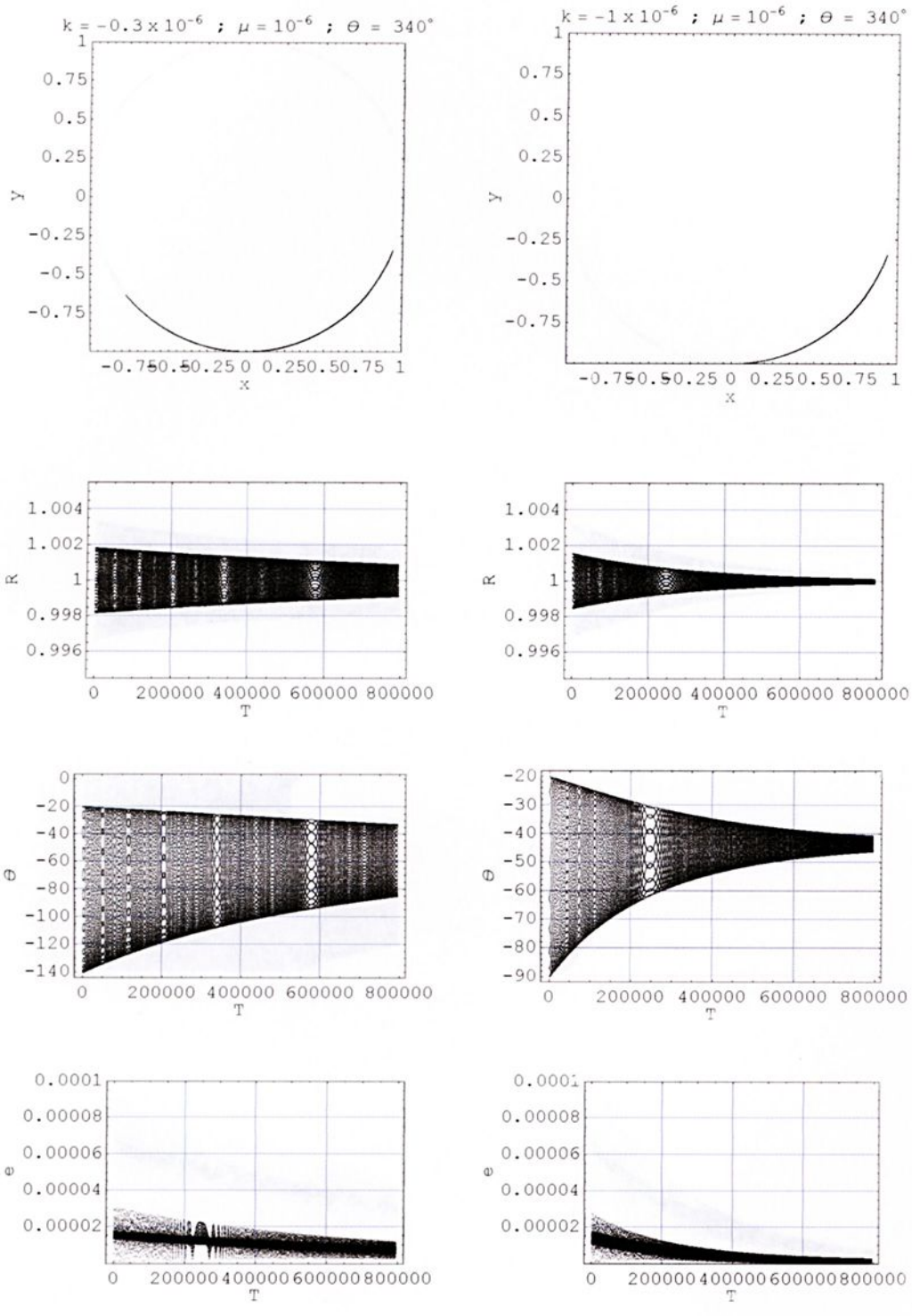


FIGURA 4.23 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 340° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 340° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

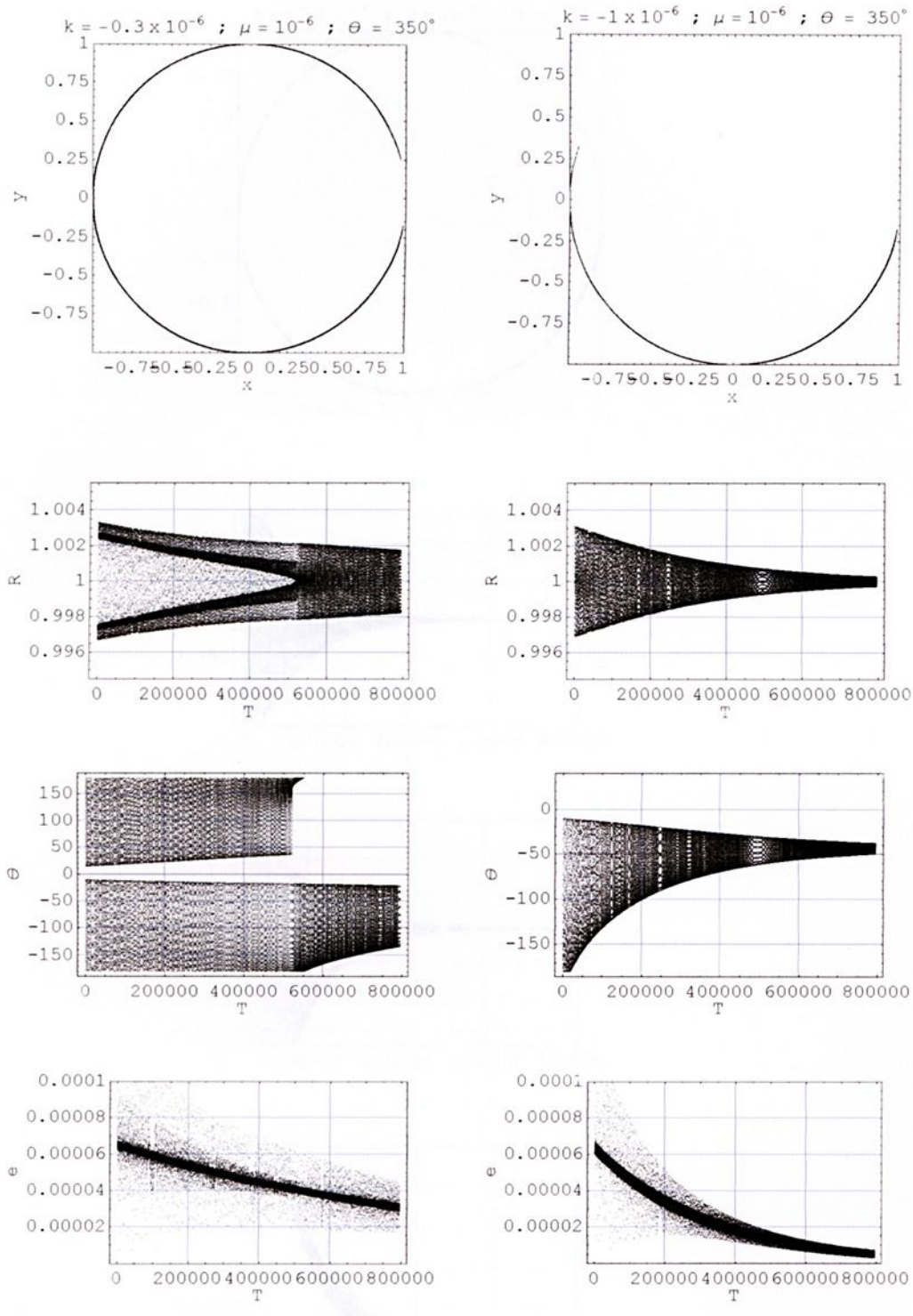


FIGURA 4.24 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 350° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 350° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

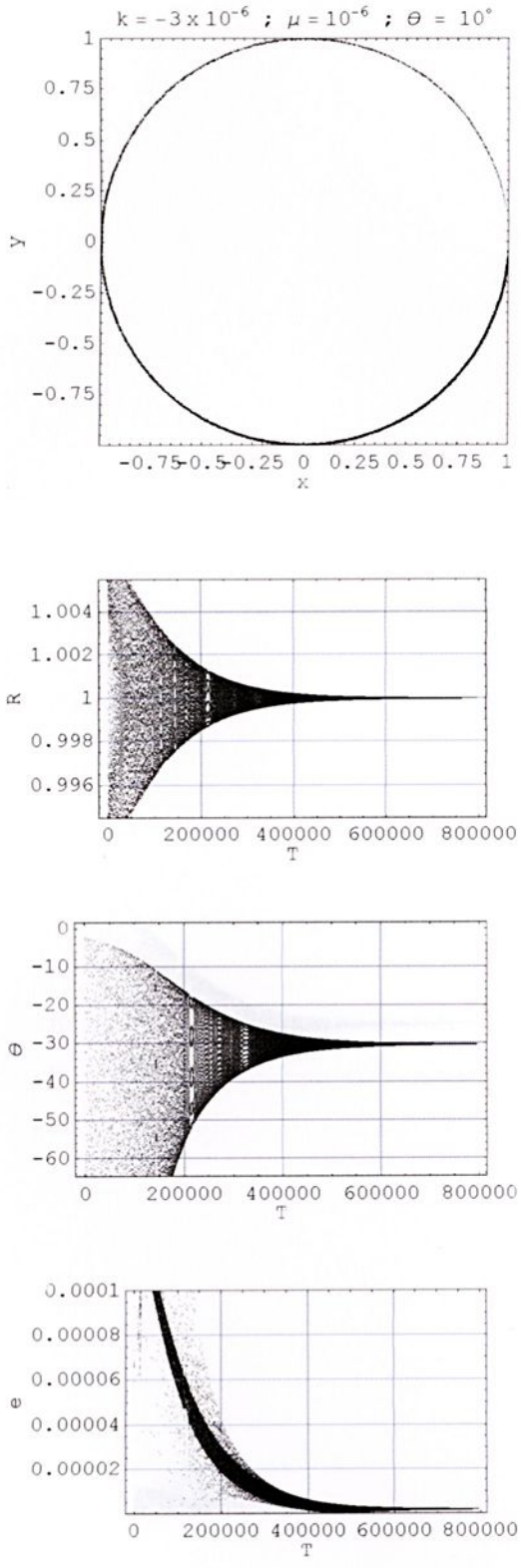


FIGURA 4.25 – Evolução temporal para uma partícula com k = -3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 10°. A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

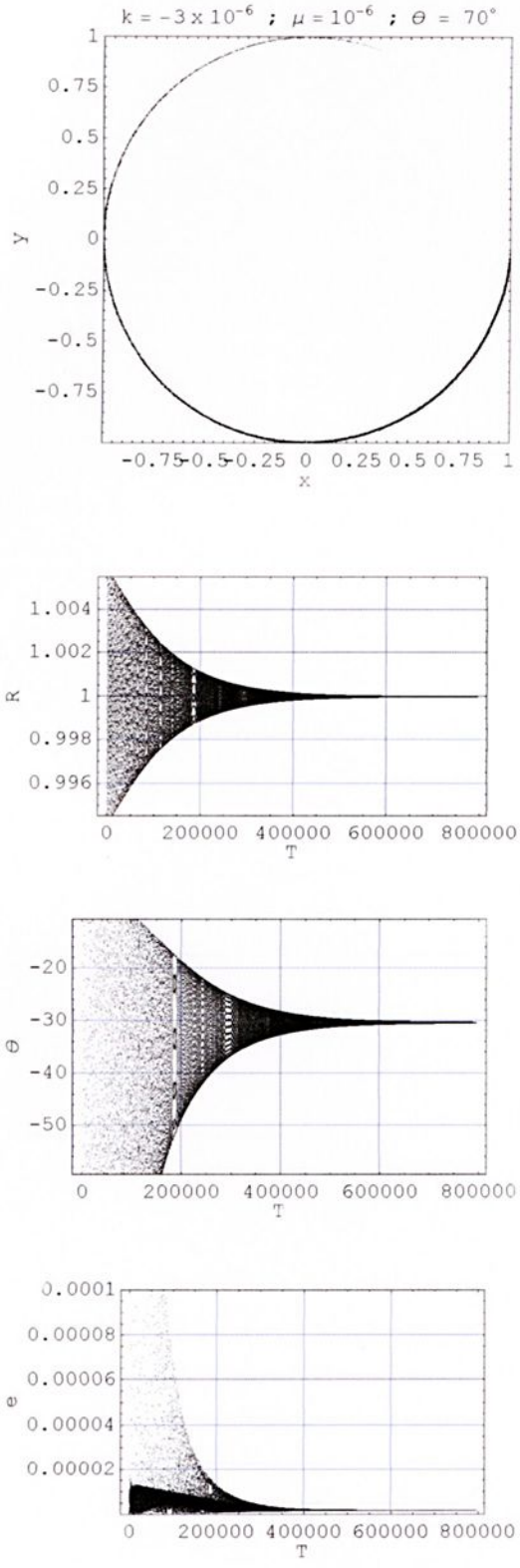


FIGURA 4.26 – Evolução temporal para uma partícula com k = -3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 70°. A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

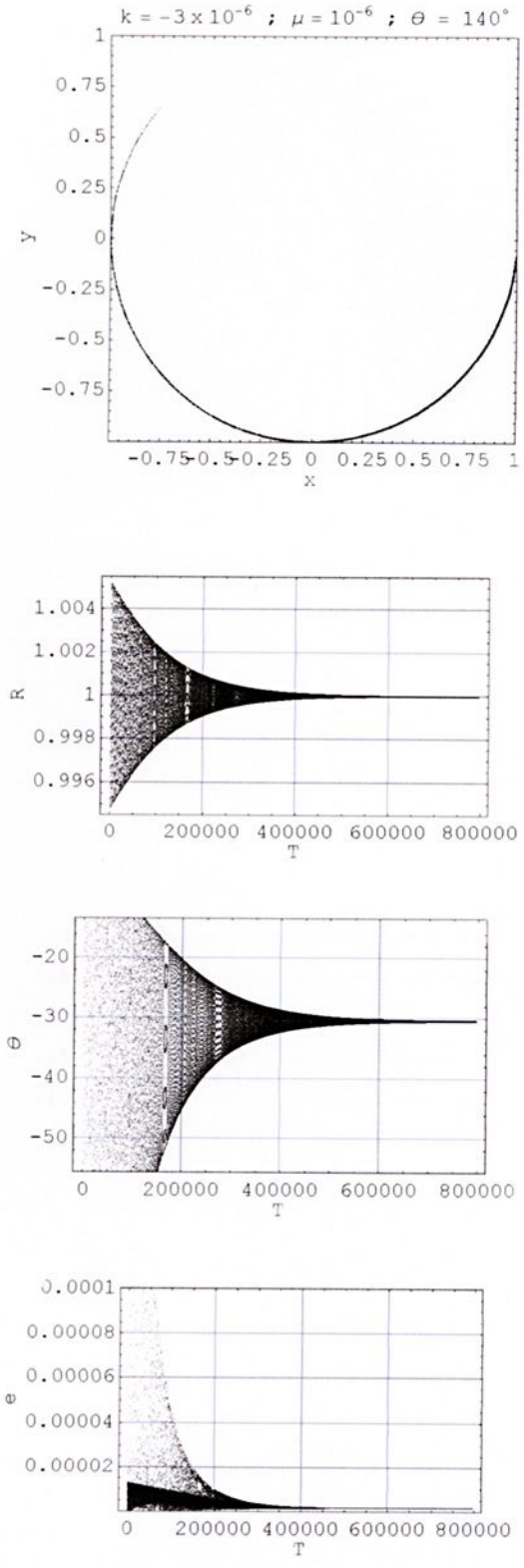


FIGURA 4.27 – Evolução temporal para uma partícula com k = -3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 140°. A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

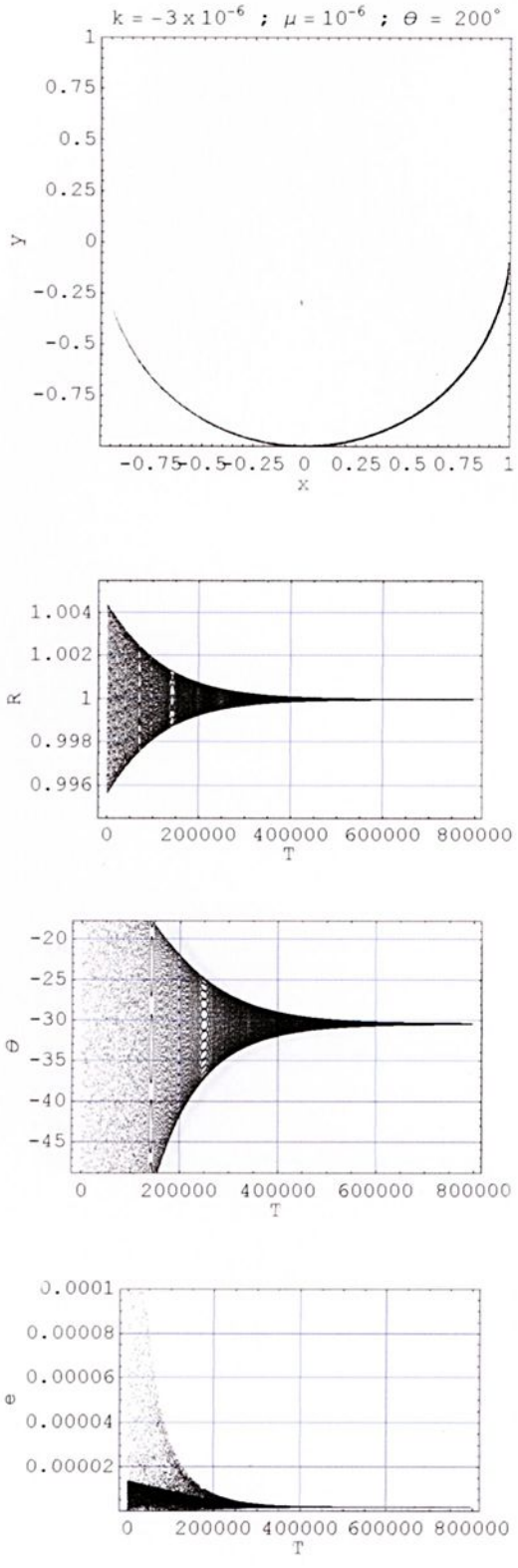


FIGURA 4.28 – Evolução temporal para uma partícula com k = -3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 200°. A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

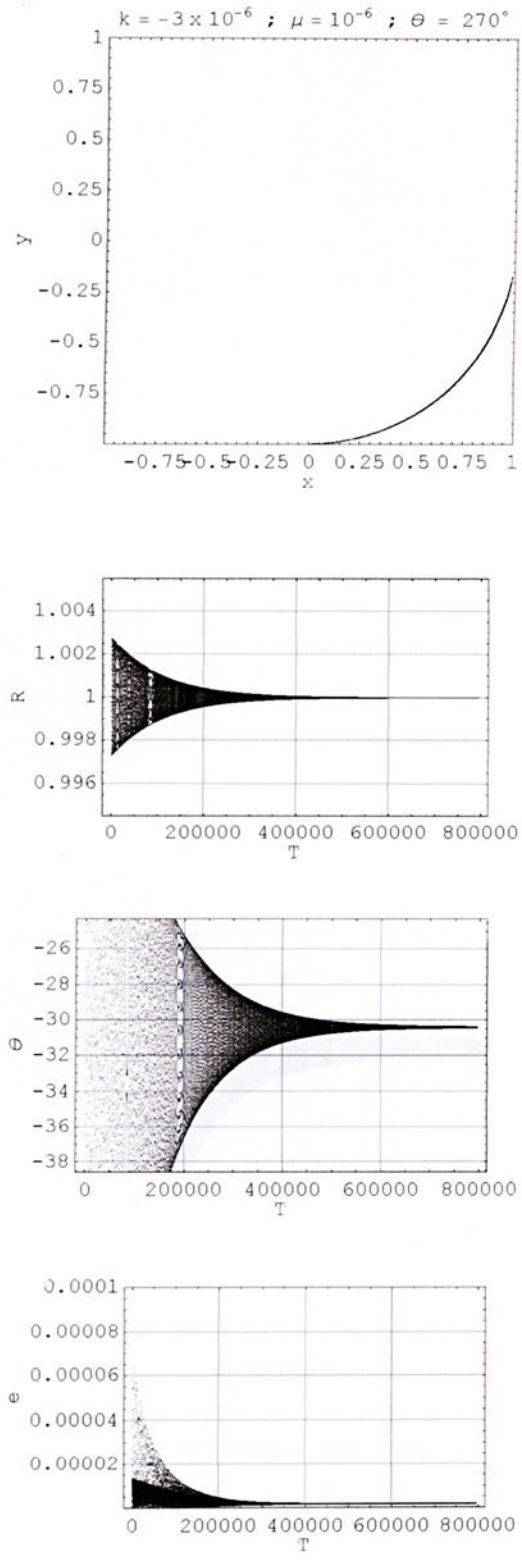


FIGURA 4.29 – Evolução temporal para uma partícula com k = -3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 270°. A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

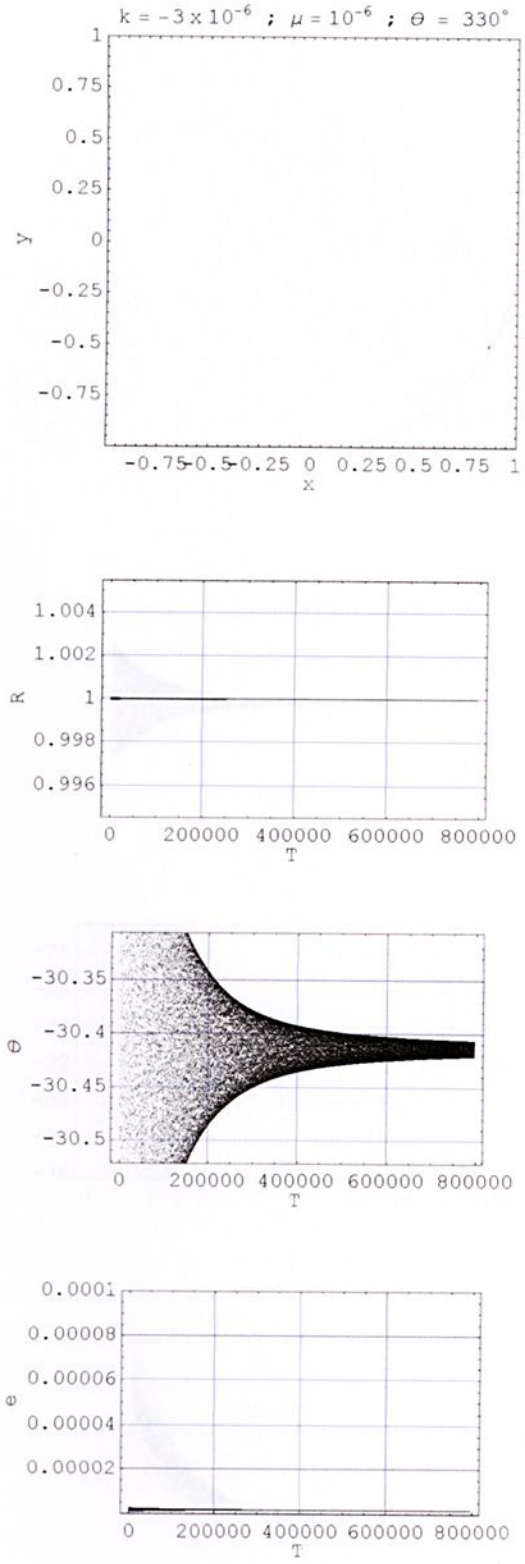


FIGURA 4.30 – Evolução temporal para uma partícula com $k = -3\text{x}10^{-6}$, $\mu = 10^{-6}$ e $\theta = 330^{\circ}$. A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

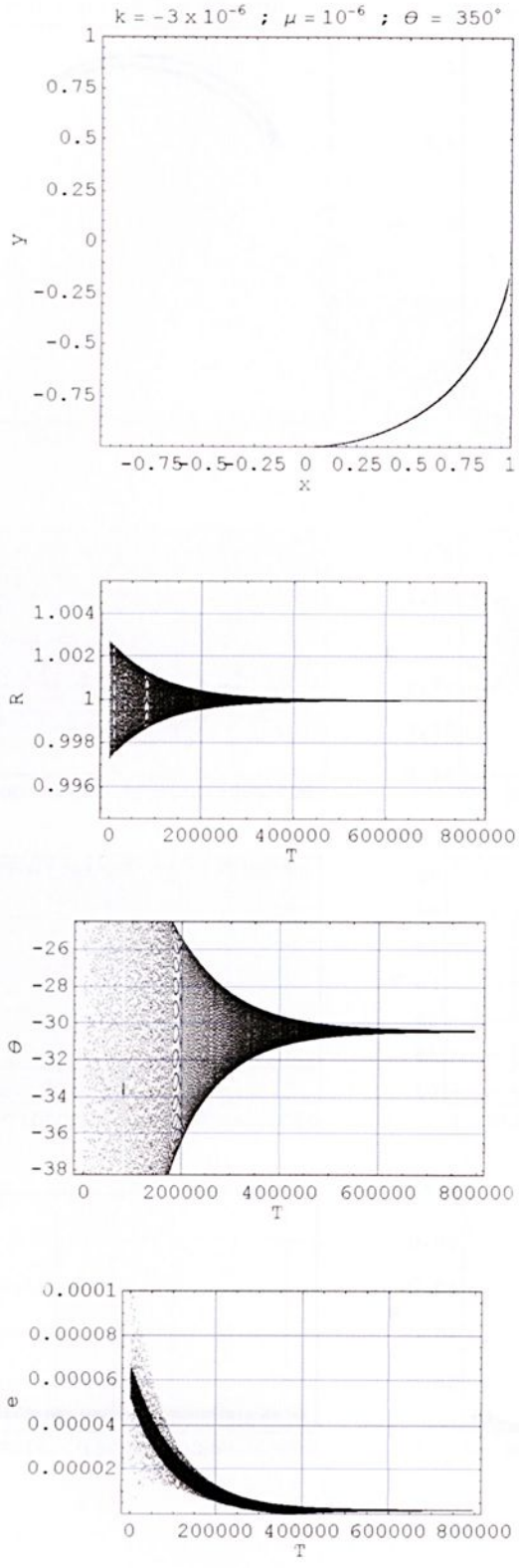


FIGURA 4.31 – Evolução temporal para uma partícula com k = -3x10^{-6}, μ = 10^{-6} e θ = 350°. A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

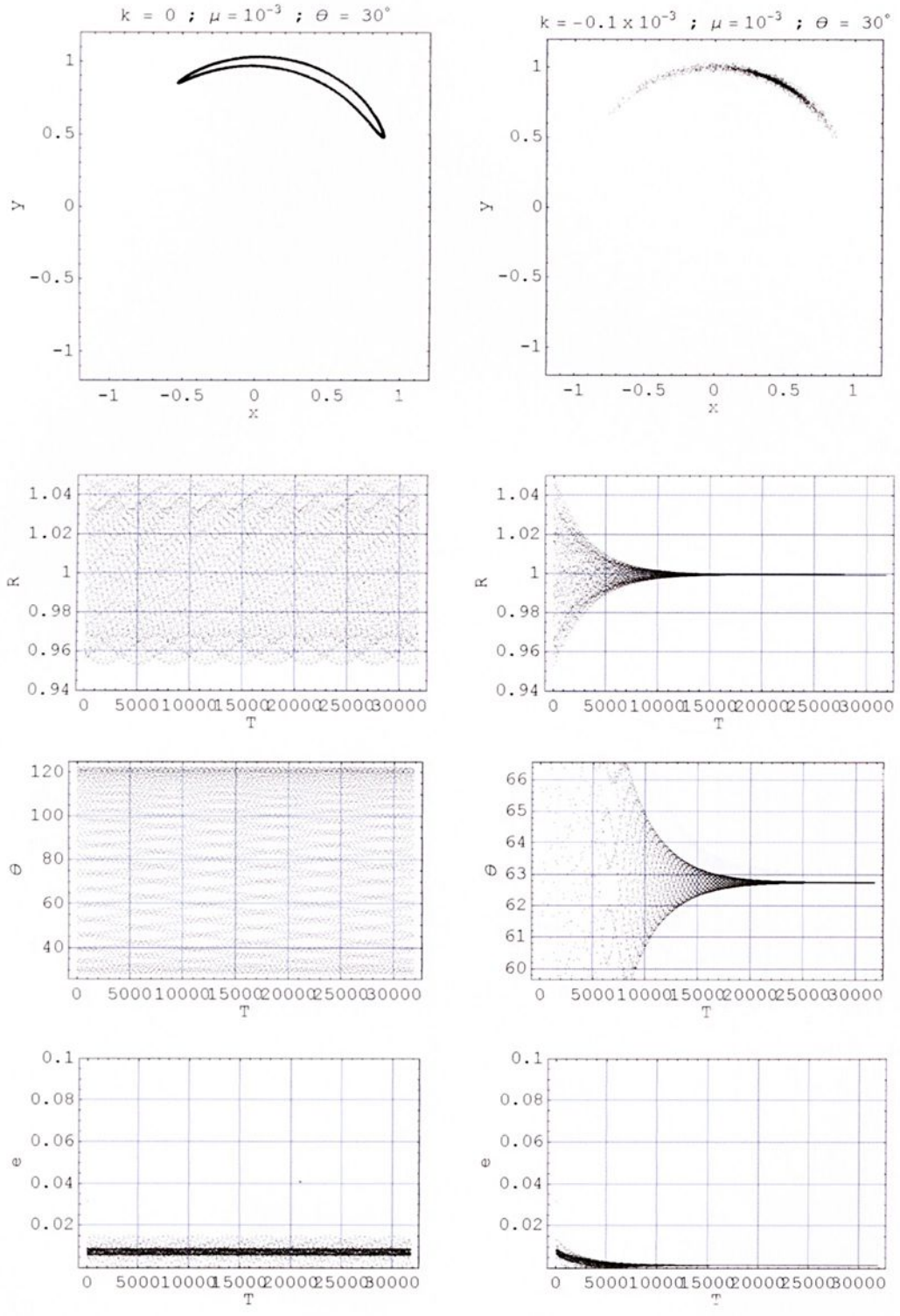


FIGURA 4.32 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 30^{\circ}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 30^{\circ}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

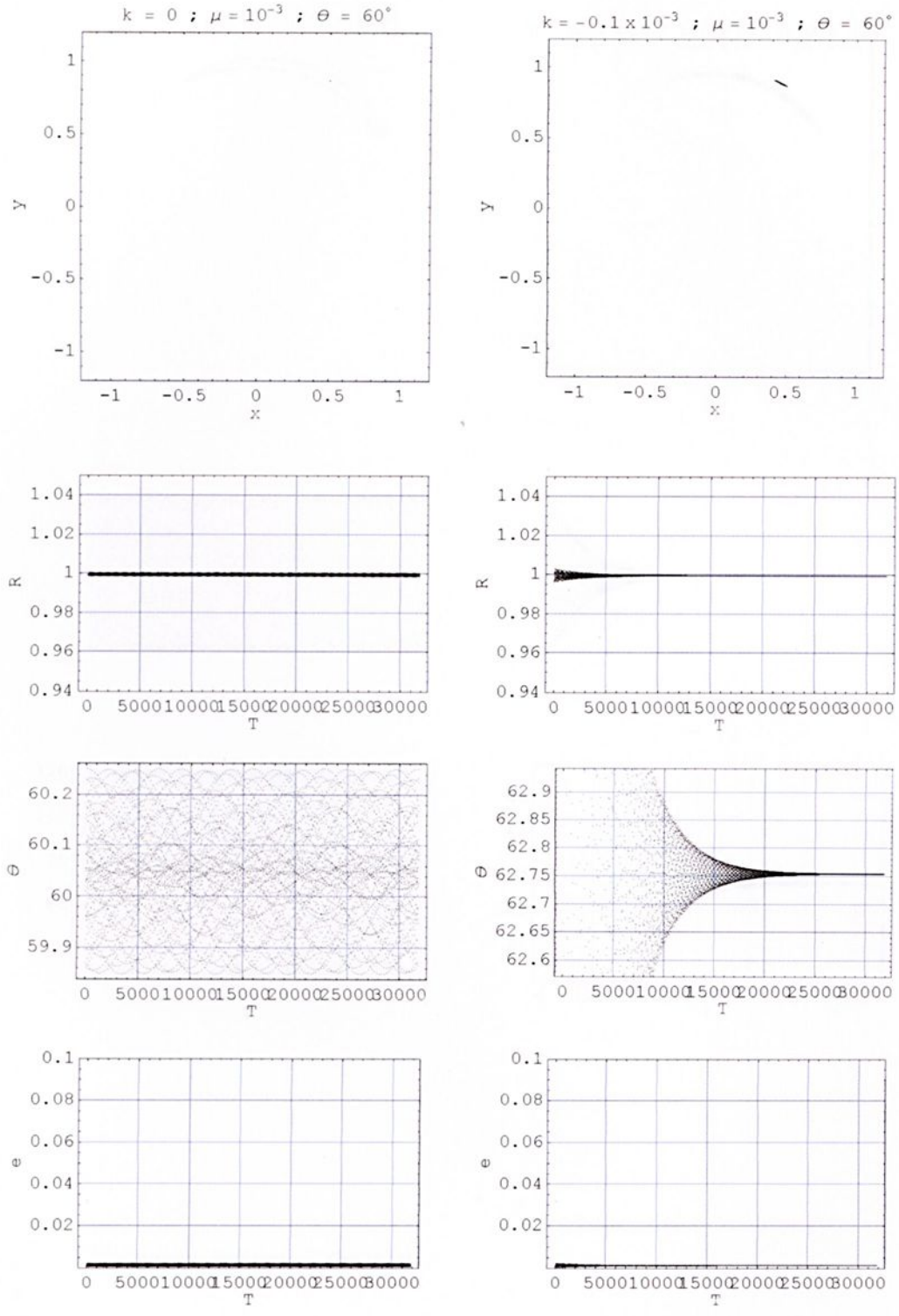


FIGURA 4.33 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 60^{\circ}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 60^{\circ}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

FACULDADE DE ENGENHARIA
DE GUARATINGUETÁ
BIBLIOTECA
00446

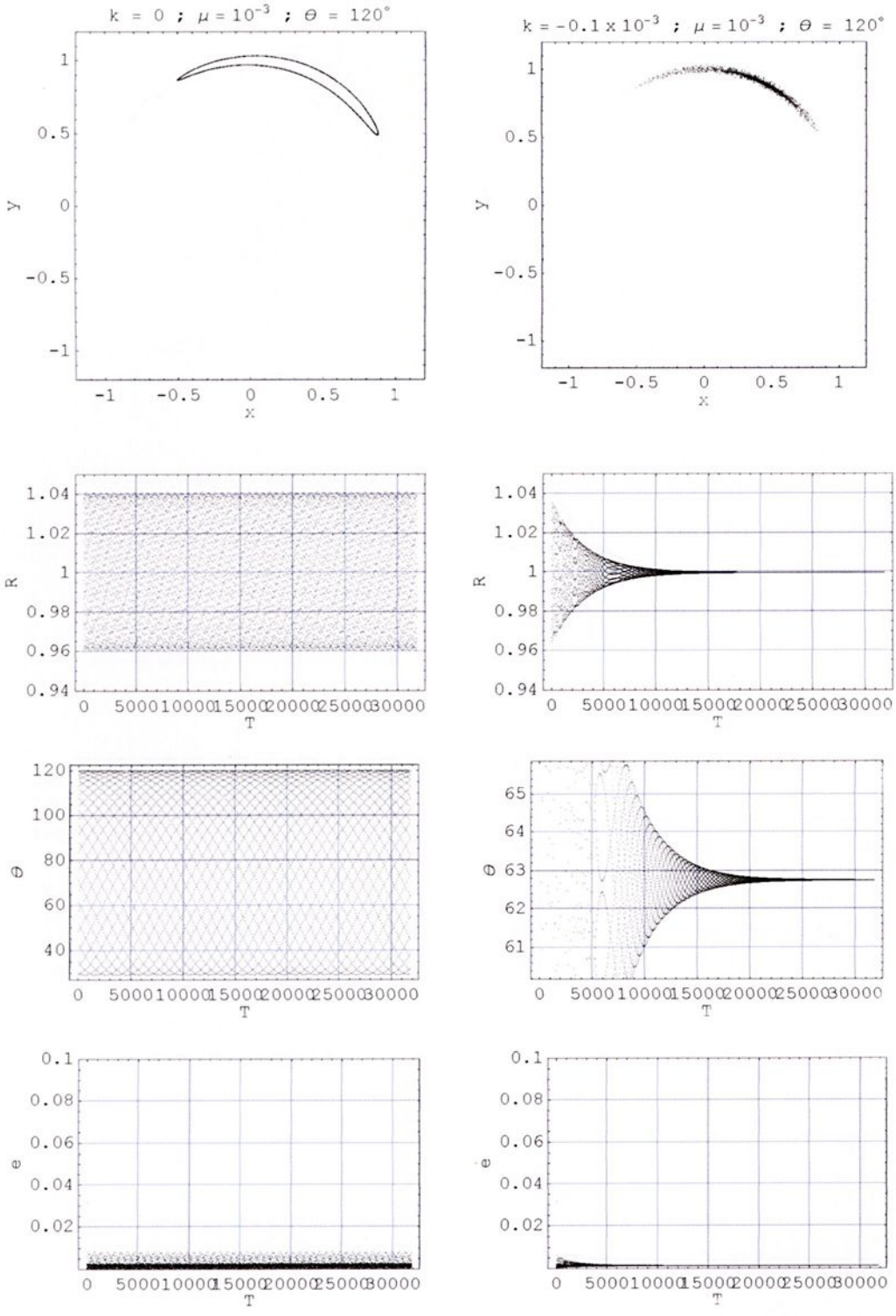


FIGURA 4.34 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 120^{\circ}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 120^{\circ}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

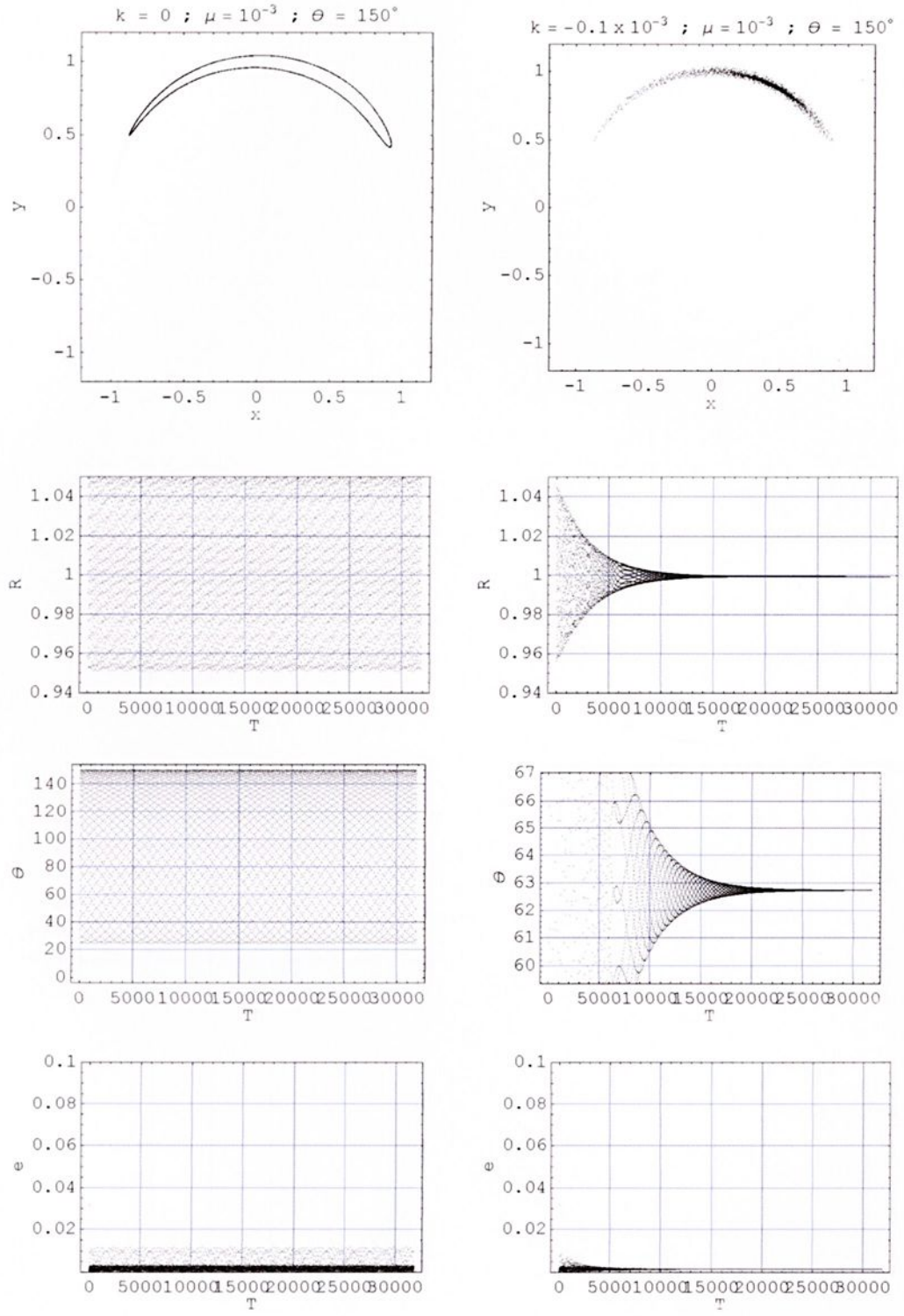


FIGURA 4.35 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 150^{\circ}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 150^{\circ}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

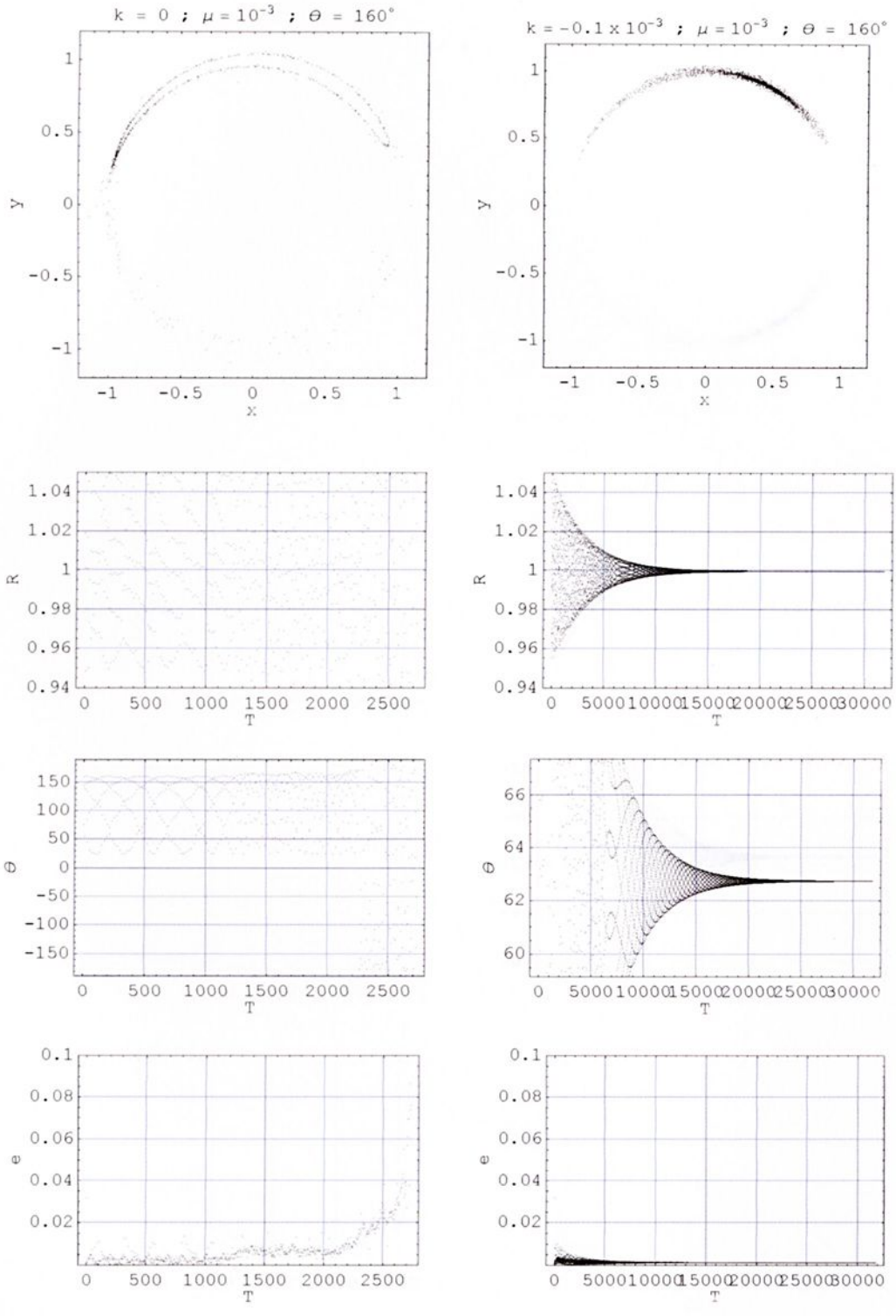


FIGURA 4.36 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 160^{o}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 160^{o}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

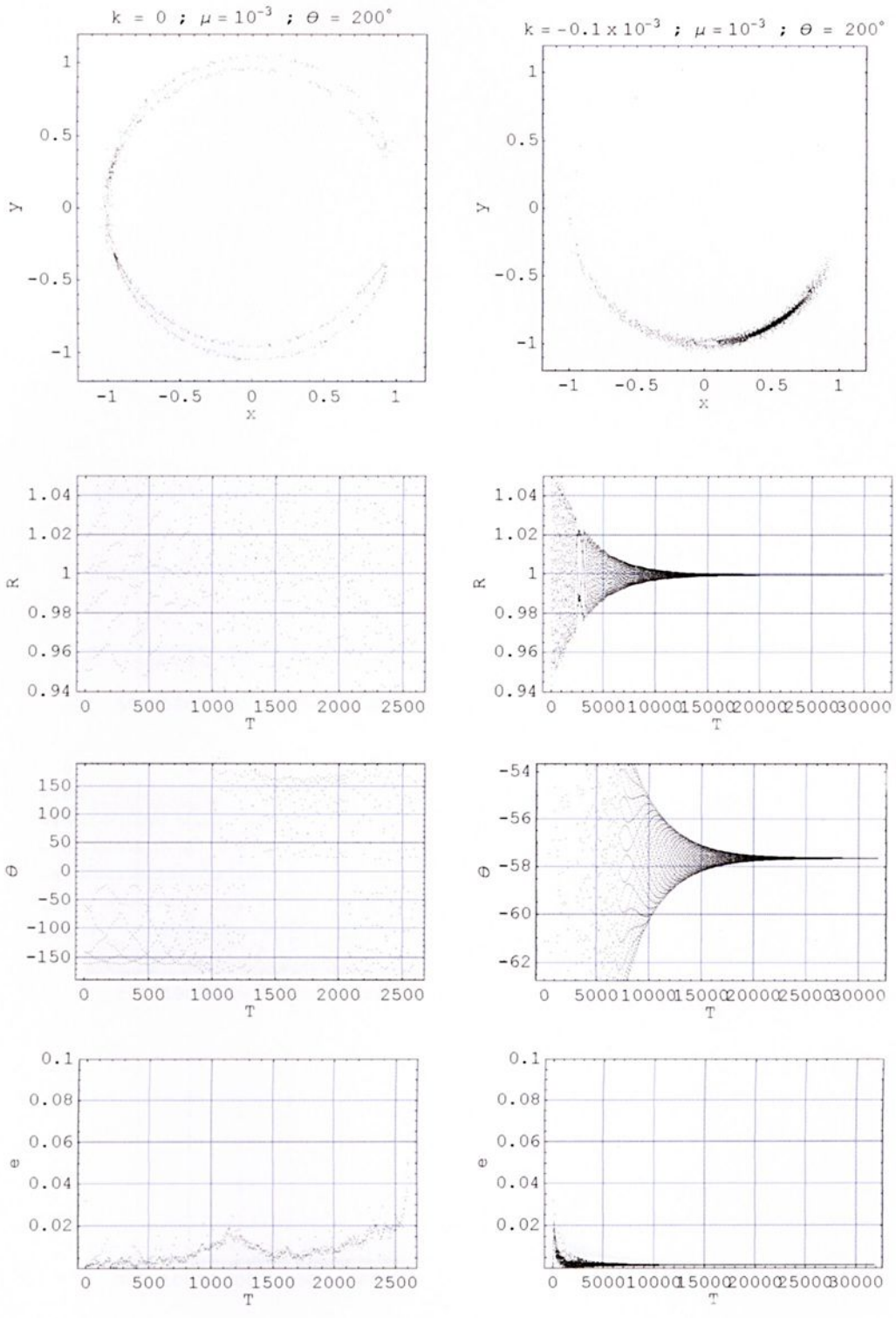


FIGURA 4.37 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 200^{\circ}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 200^{\circ}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

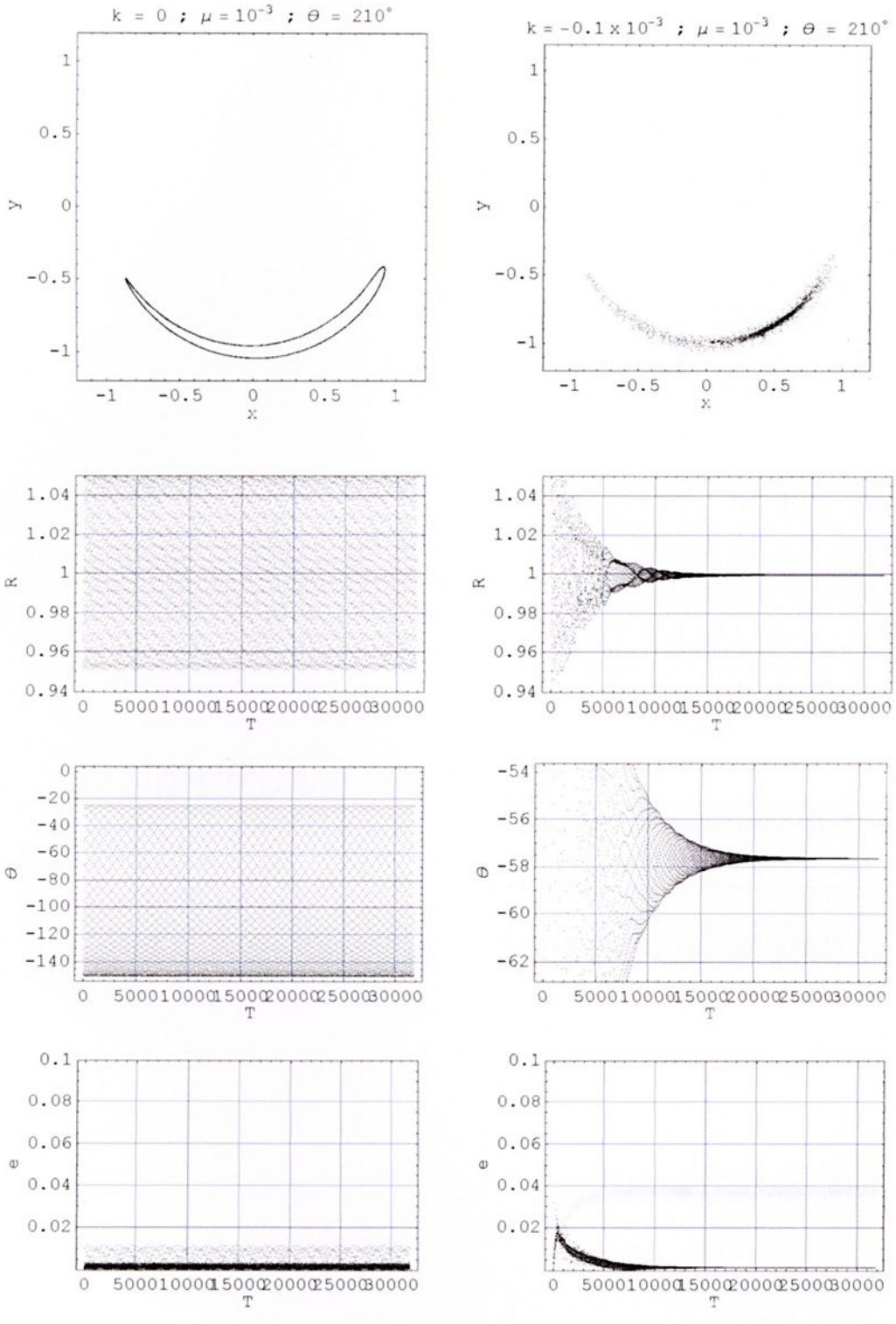


FIGURA 4.38 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 210^{o}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 210^{o}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

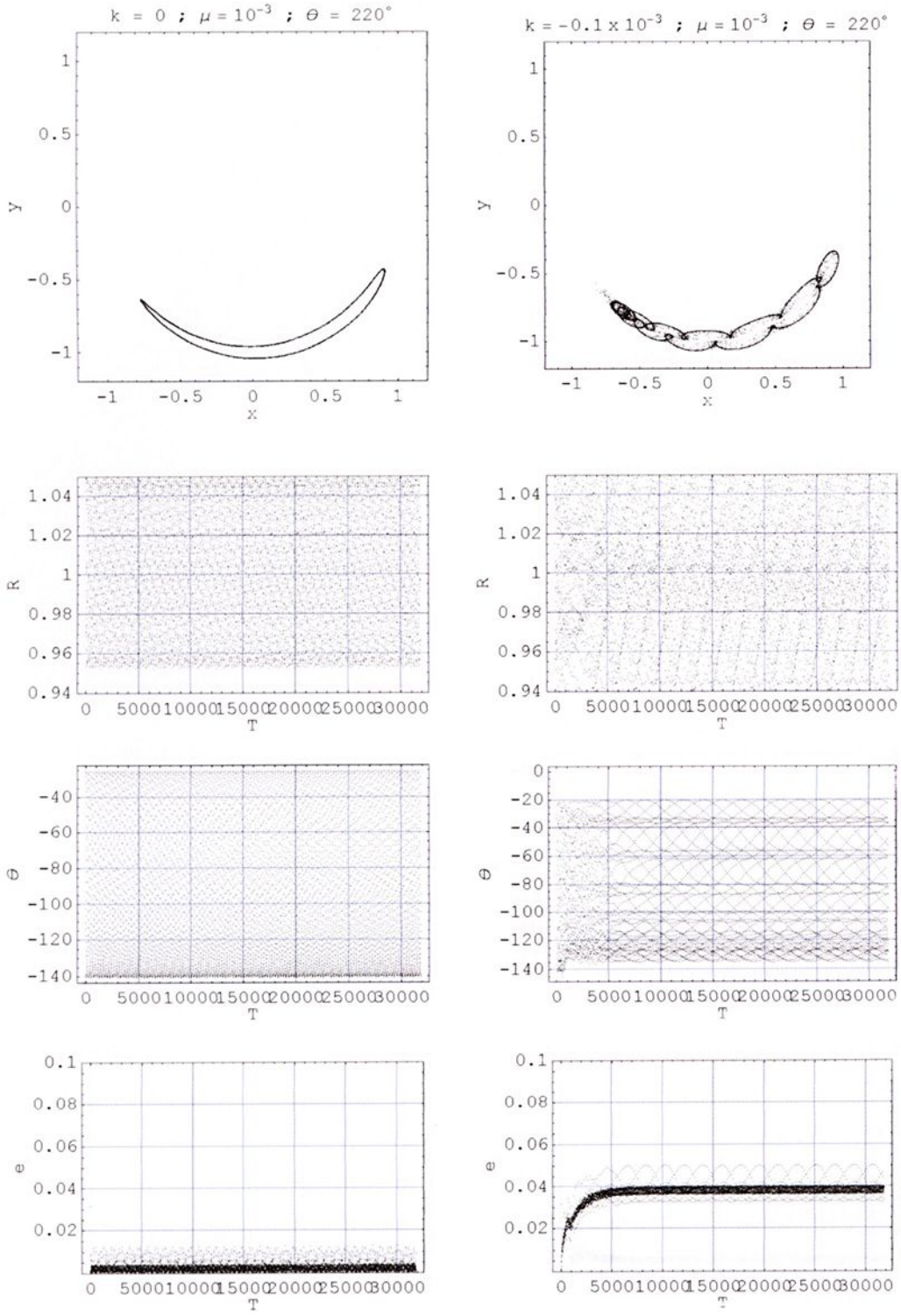


FIGURA 4.39 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 220^{\circ}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 220^{\circ}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

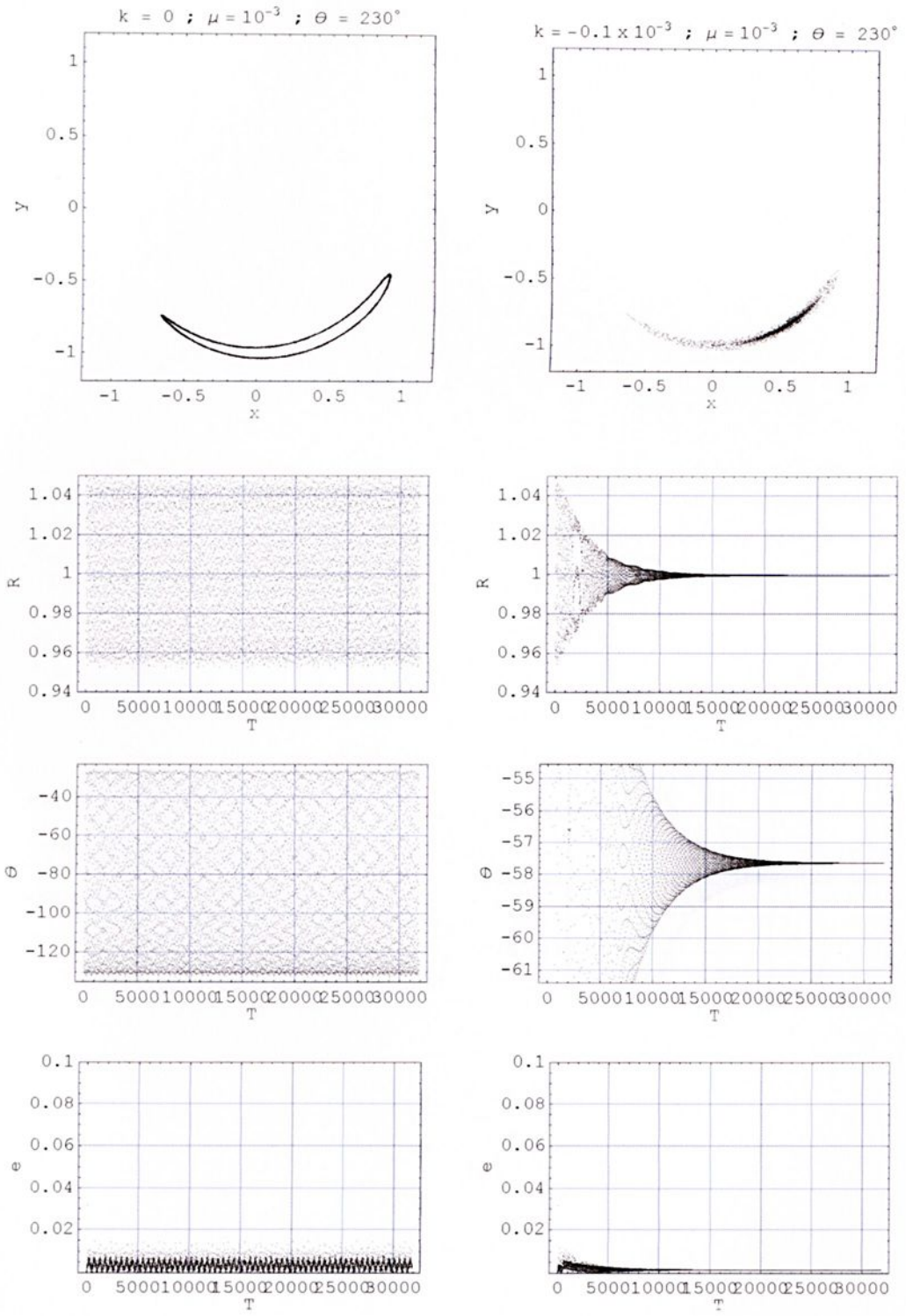


FIGURA 4.40 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 230°$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 230°$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

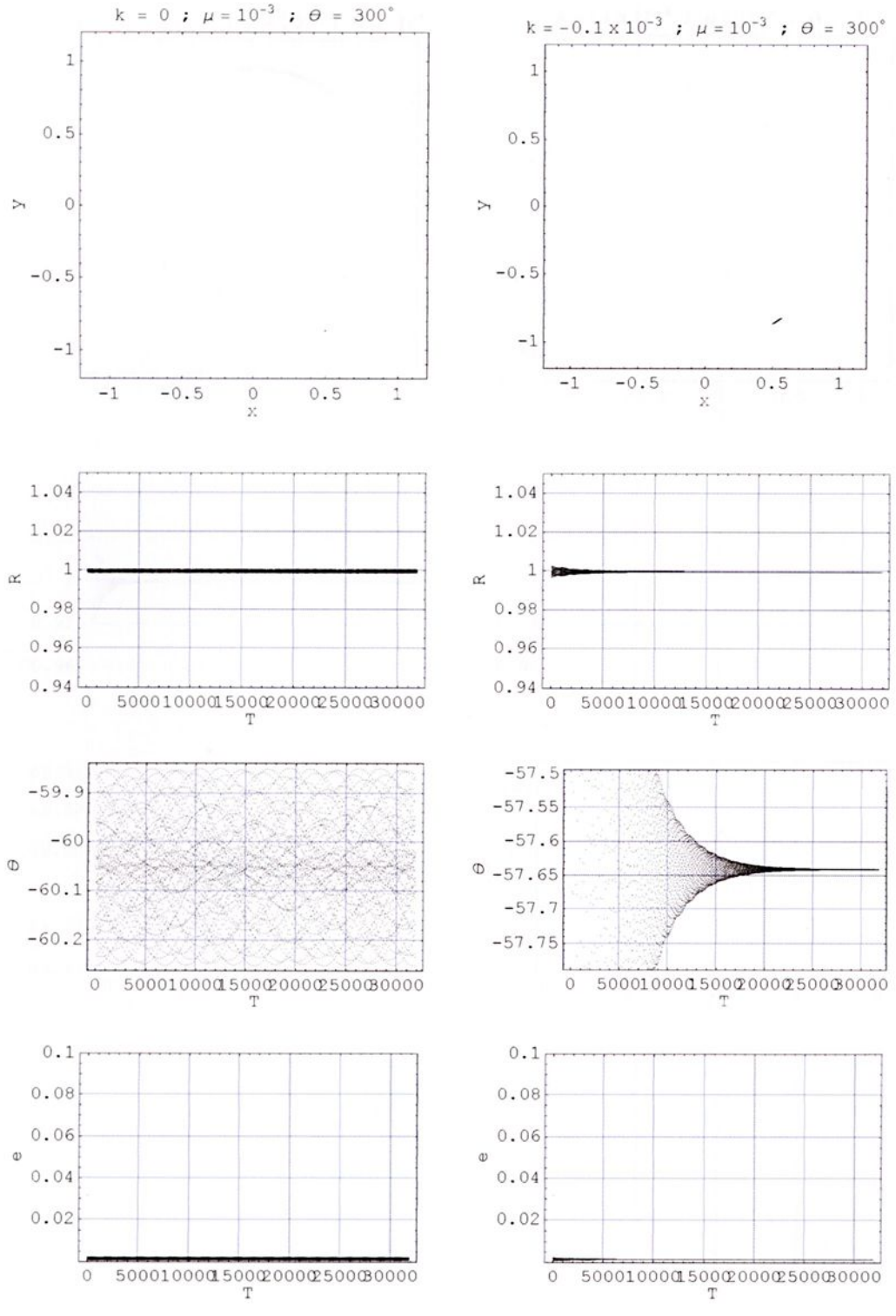


FIGURA 4.41 – Evolução temporal para uma partícula com $k = 0$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 300^{\circ}$ (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com $k = -0.1 \times 10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 300^{\circ}$ (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

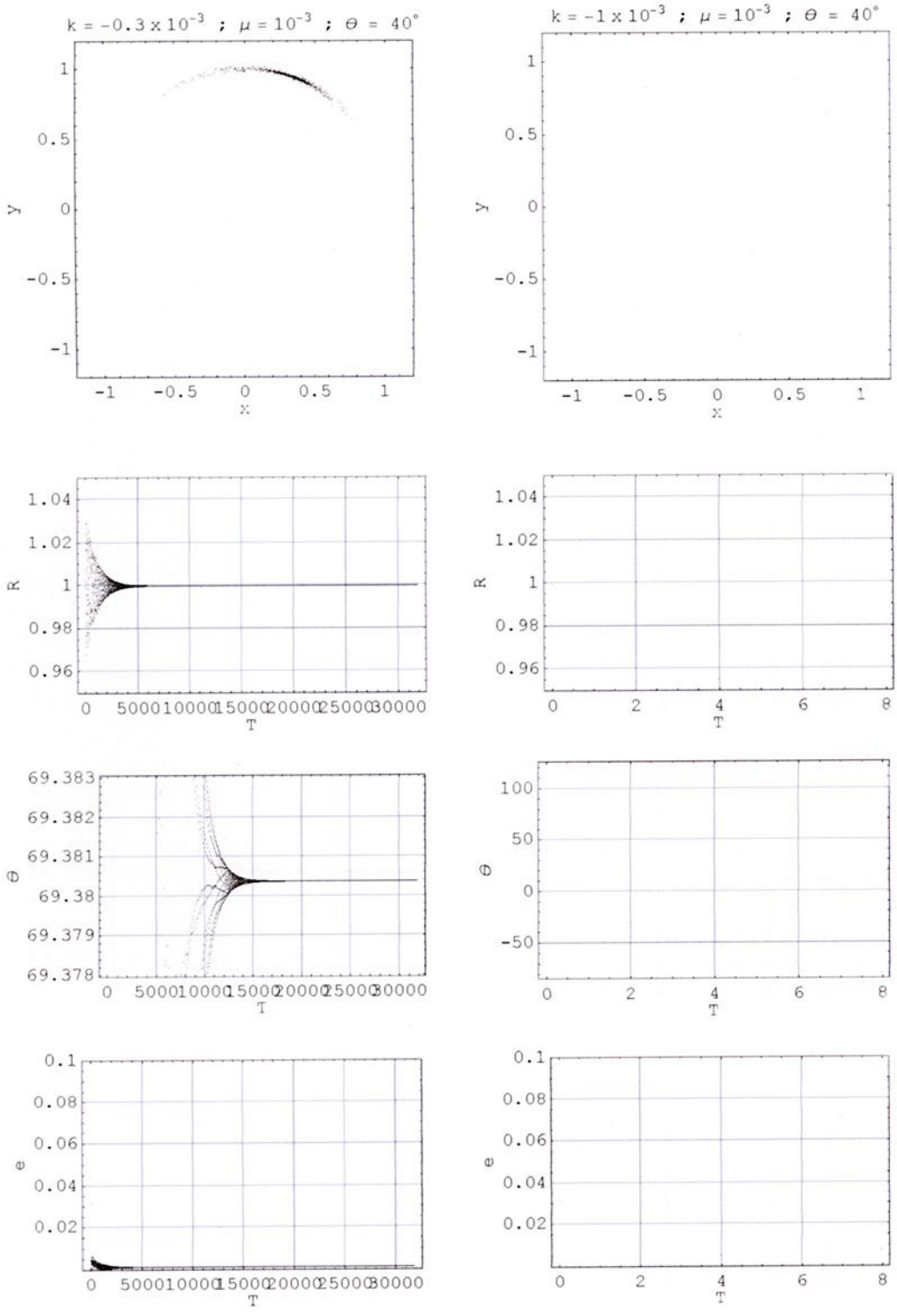


FIGURA 4.42 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 40° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 40° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

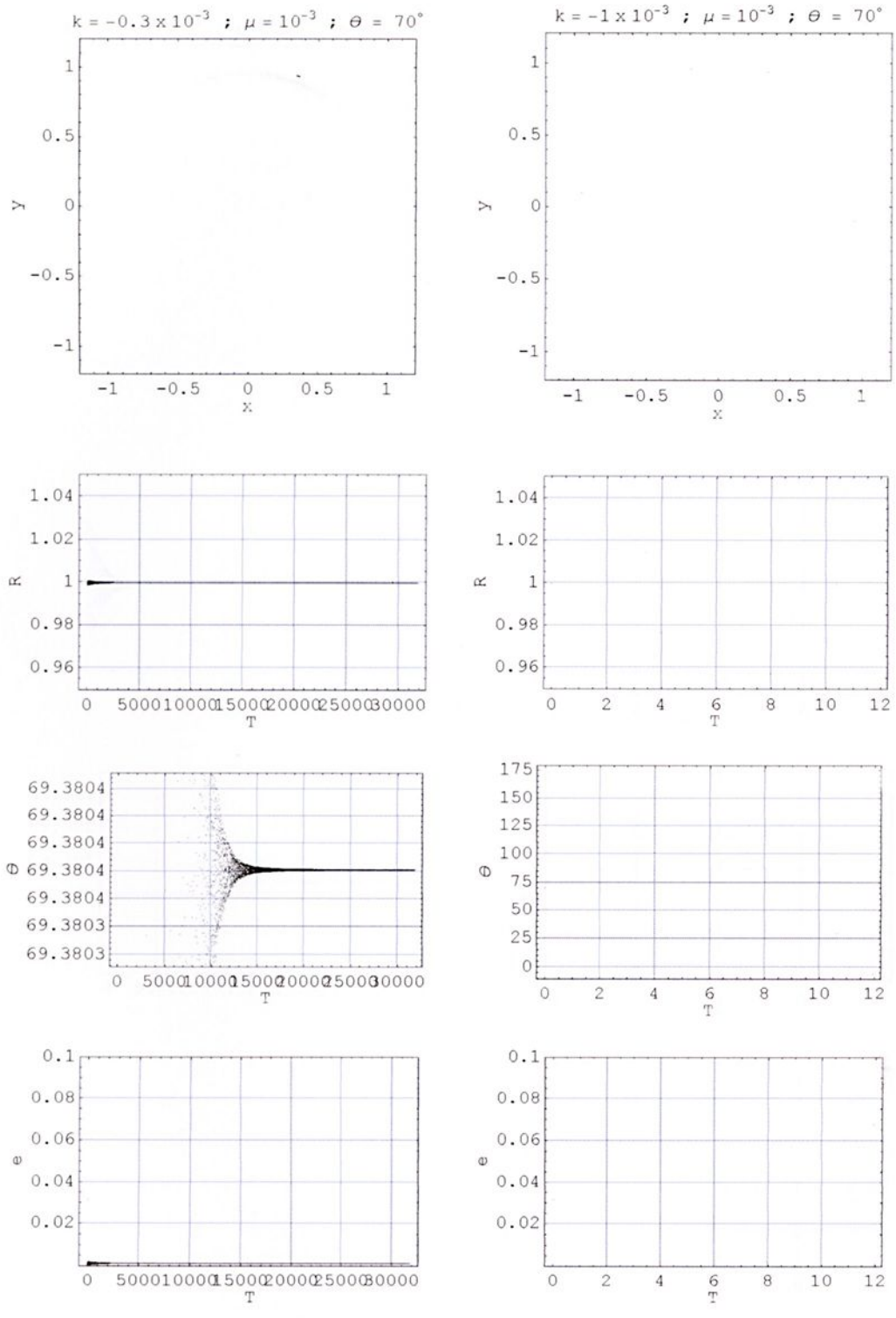


FIGURA 4.43 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 70° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 70° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

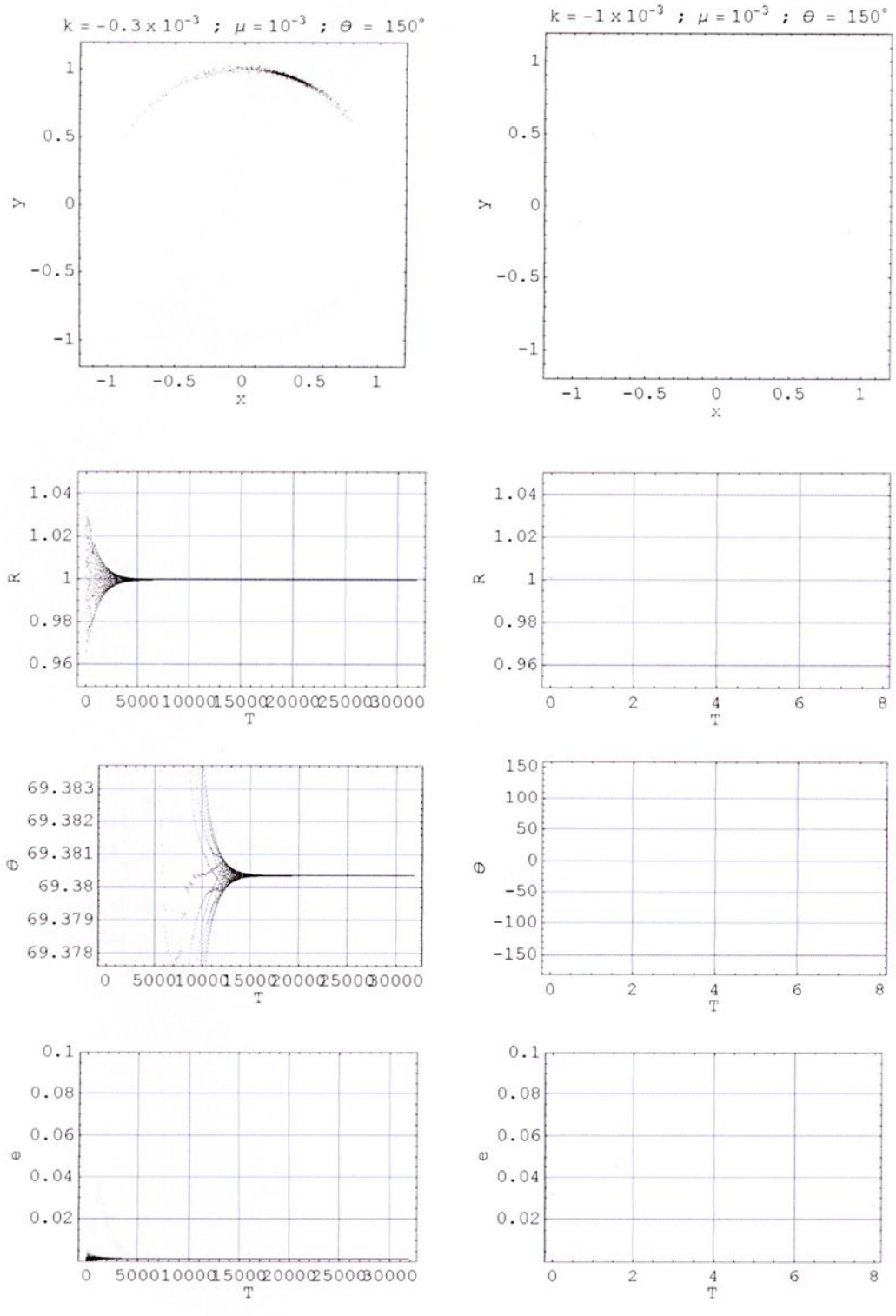


FIGURA 4.44 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 150° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 150° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

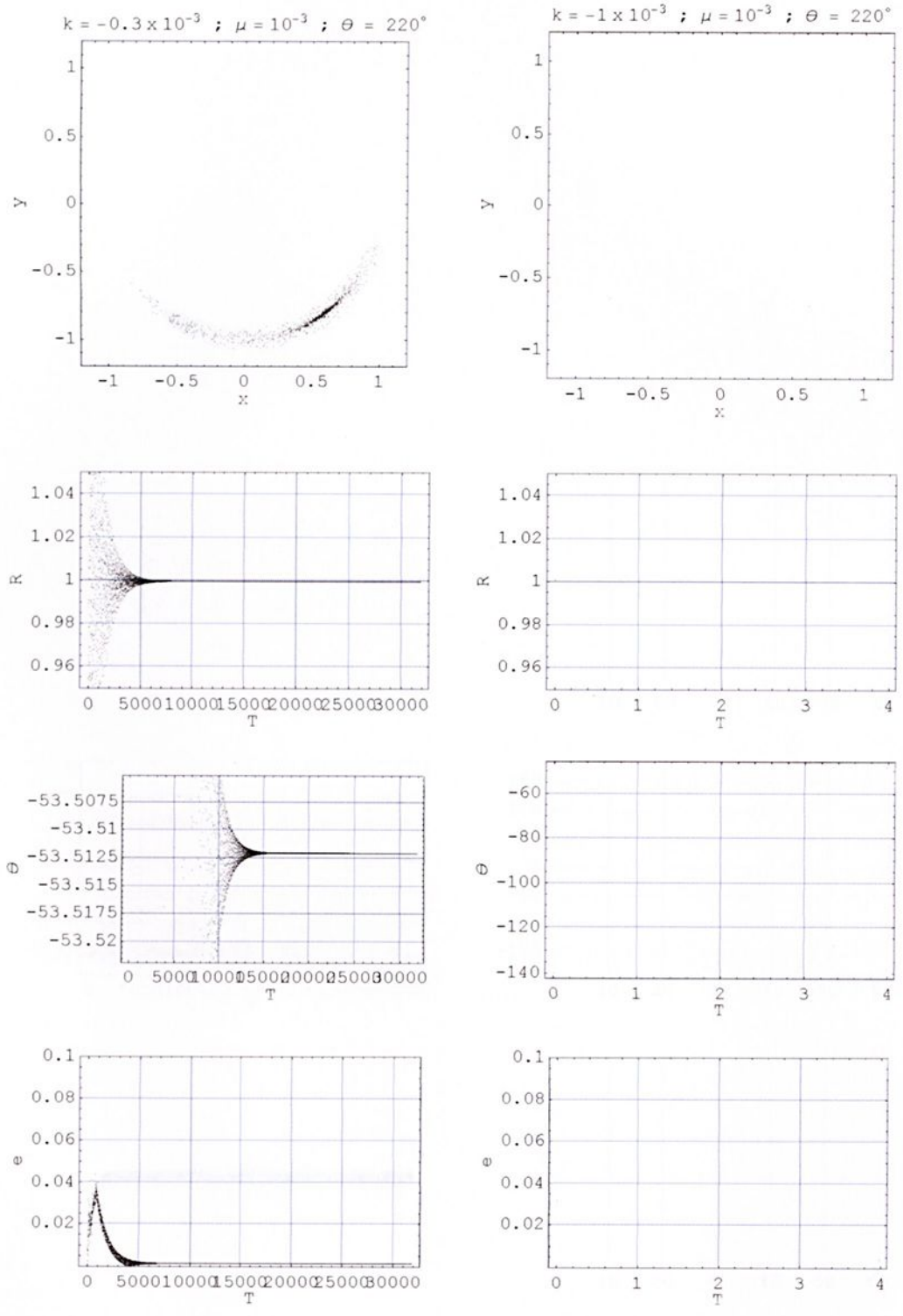


FIGURA 4.45 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 220° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 220° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

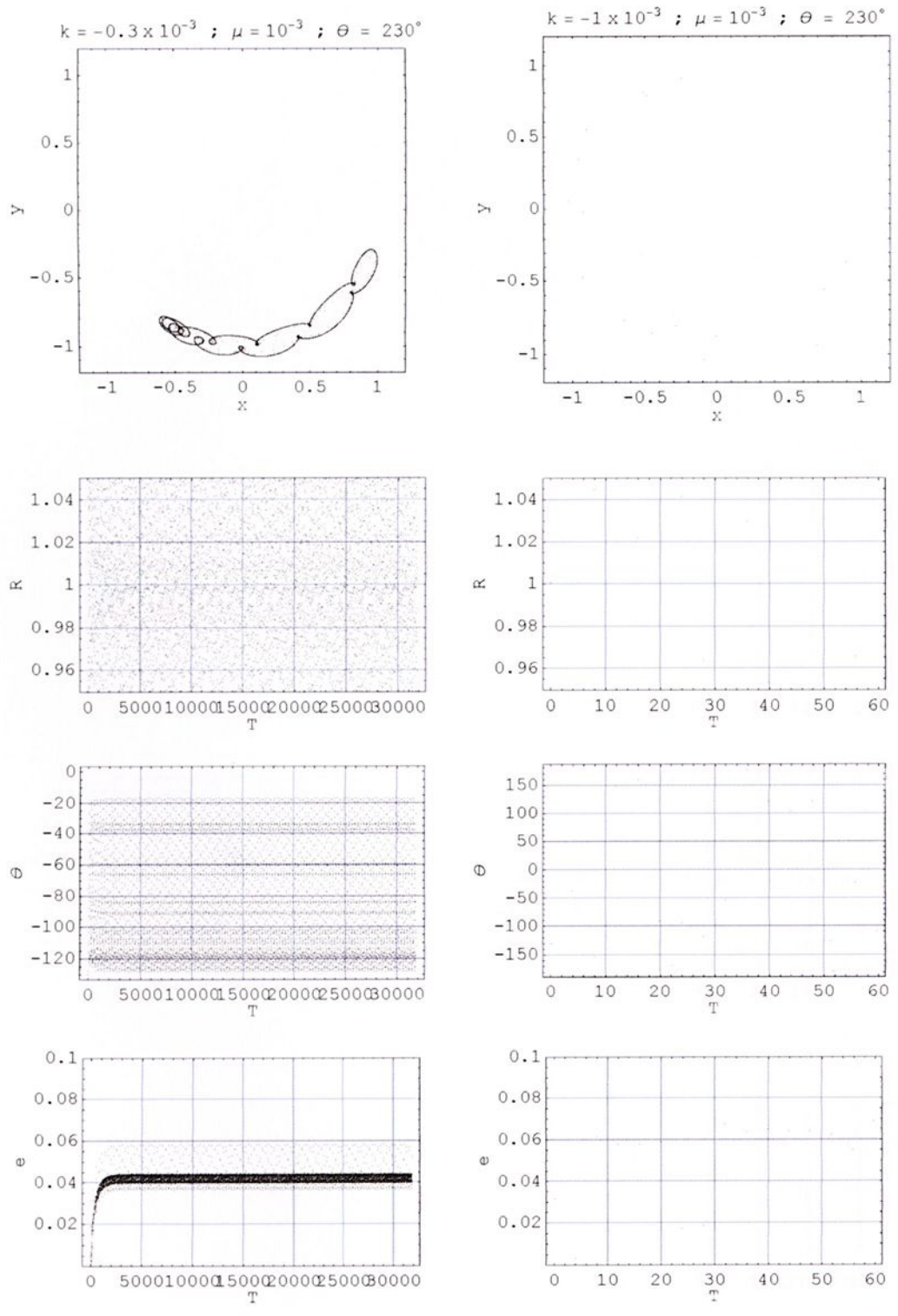


FIGURA 4.46 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 230° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 230° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

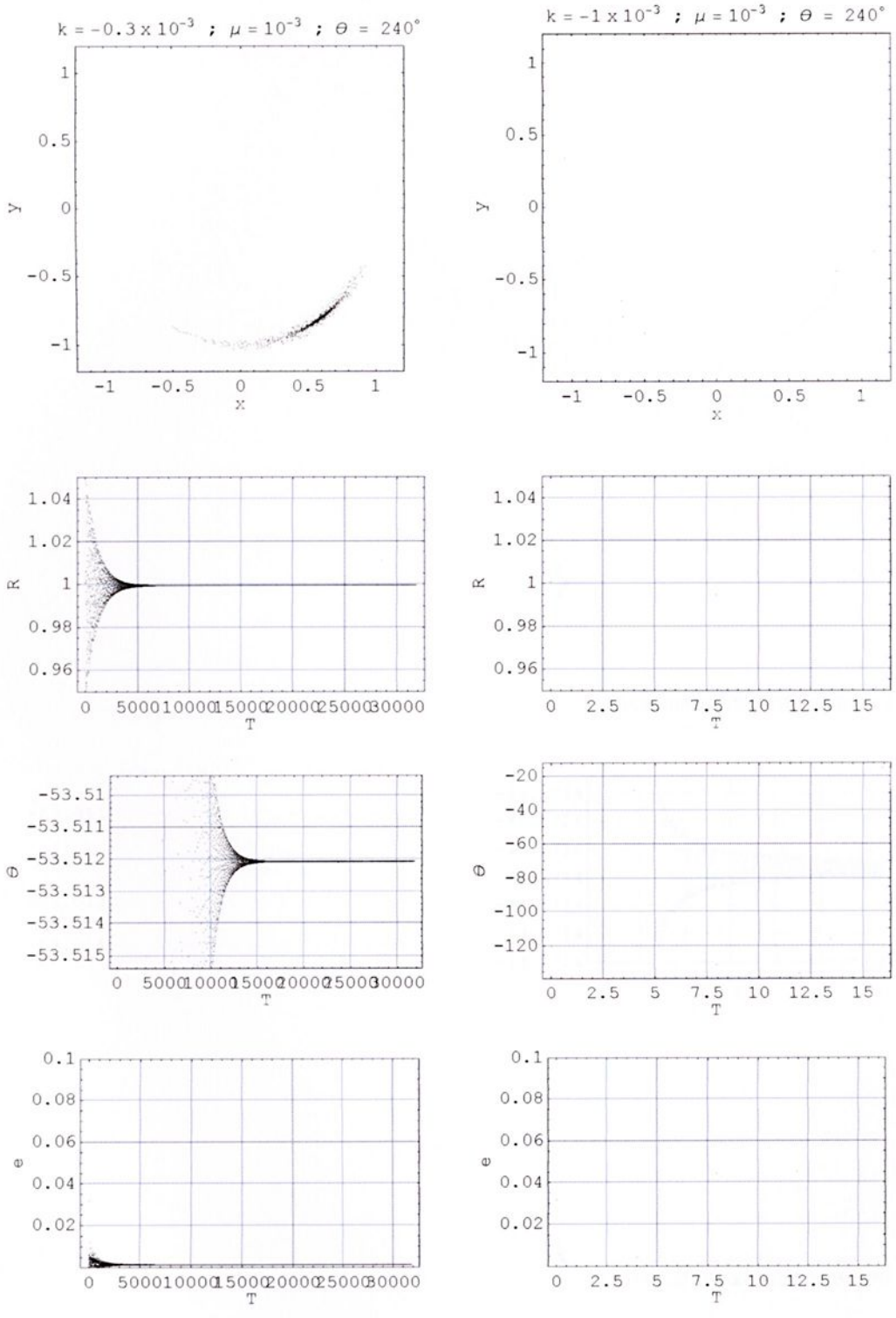


FIGURA 4.47 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 240° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 240° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

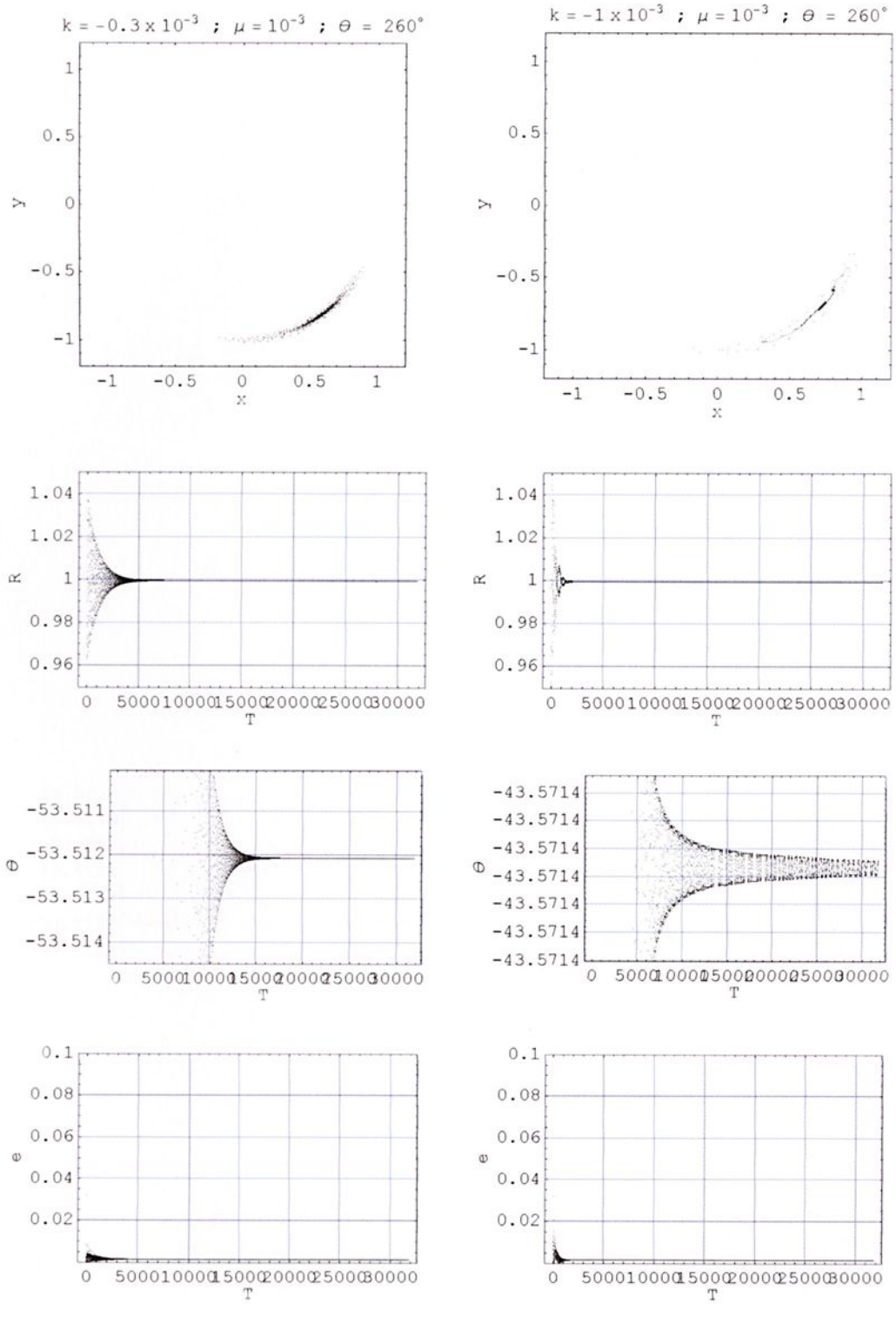


FIGURA 4.48 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 260° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 260° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

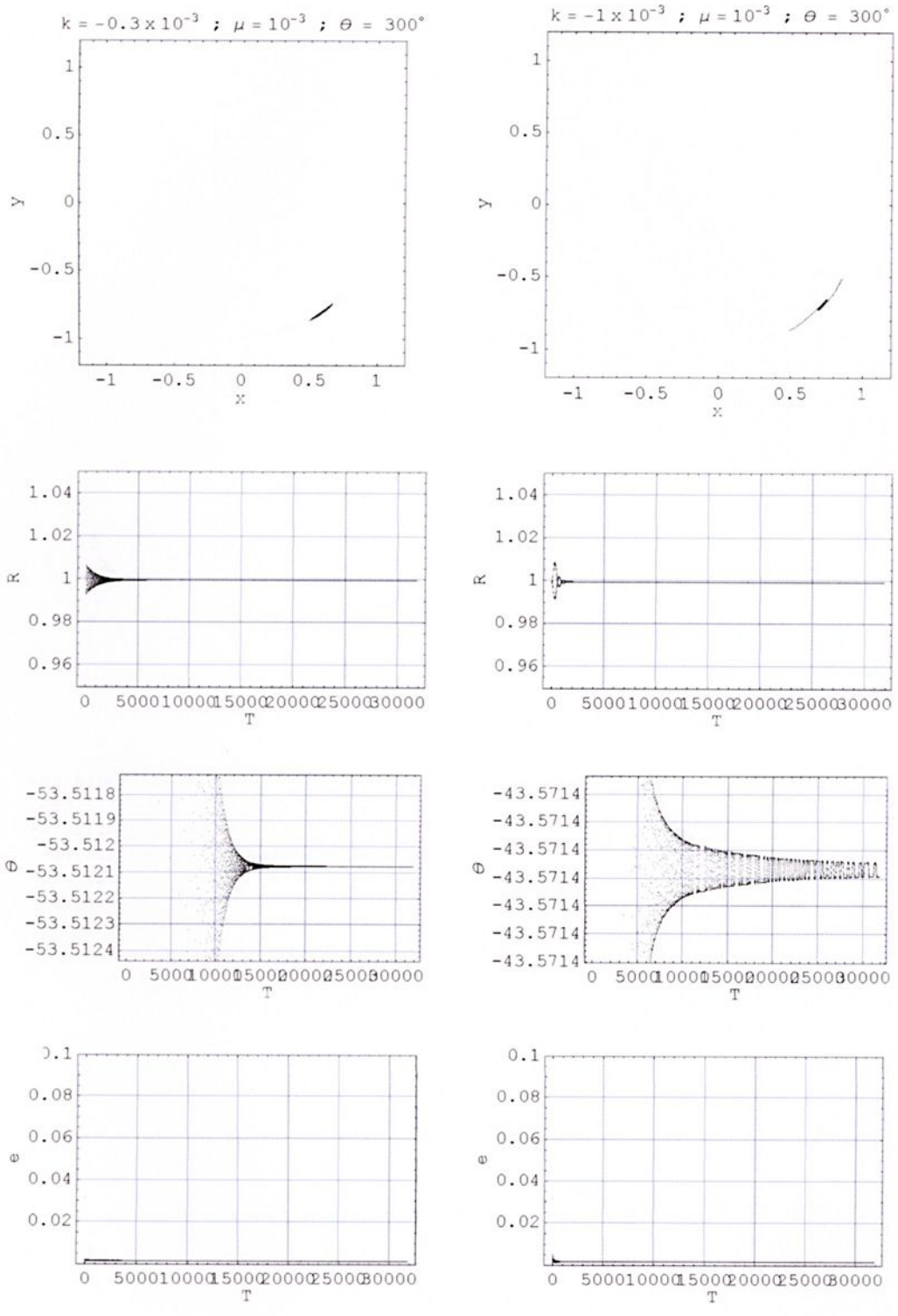


FIGURA 4.49 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 300° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 300° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

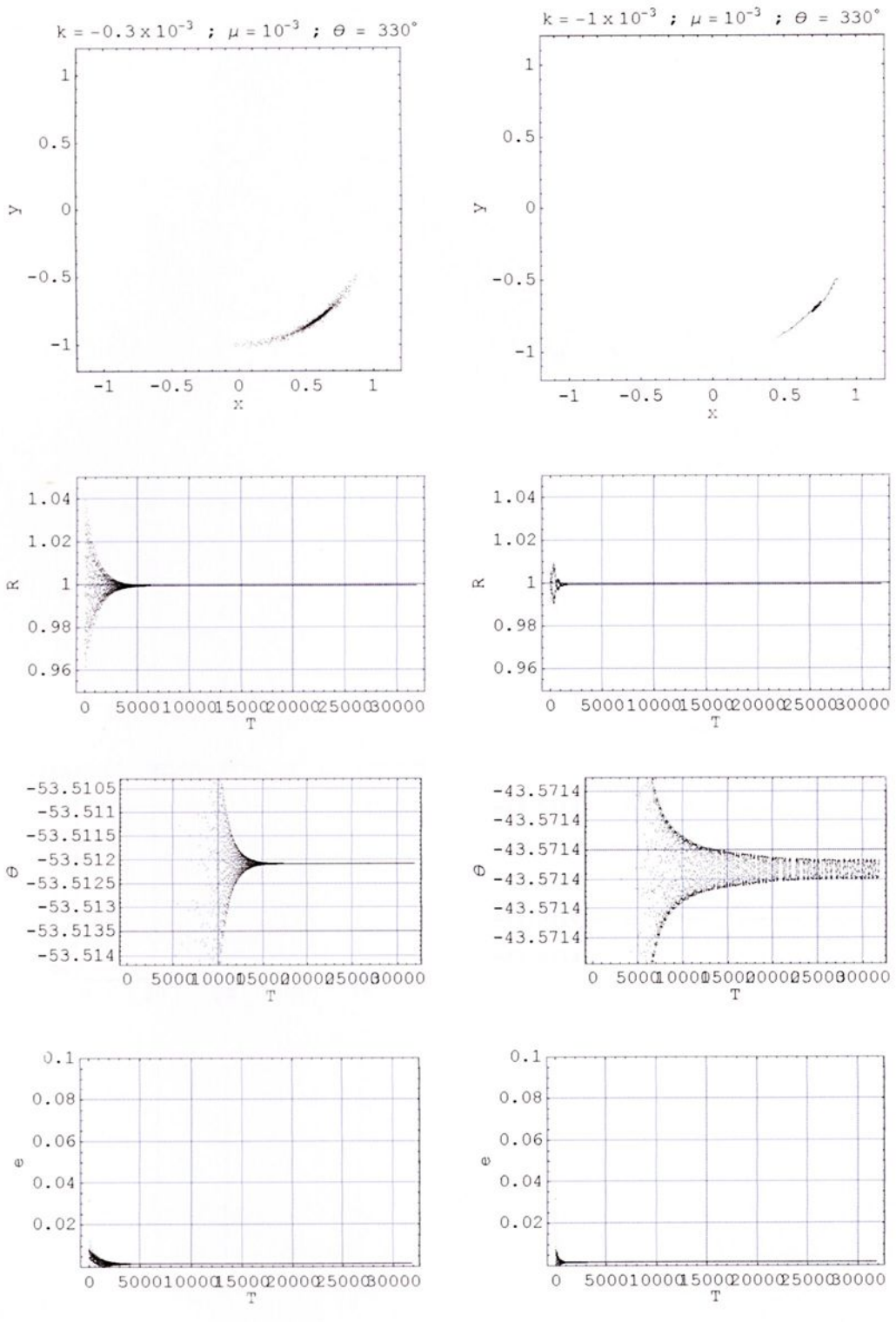


FIGURA 4.50 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 330° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 330° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

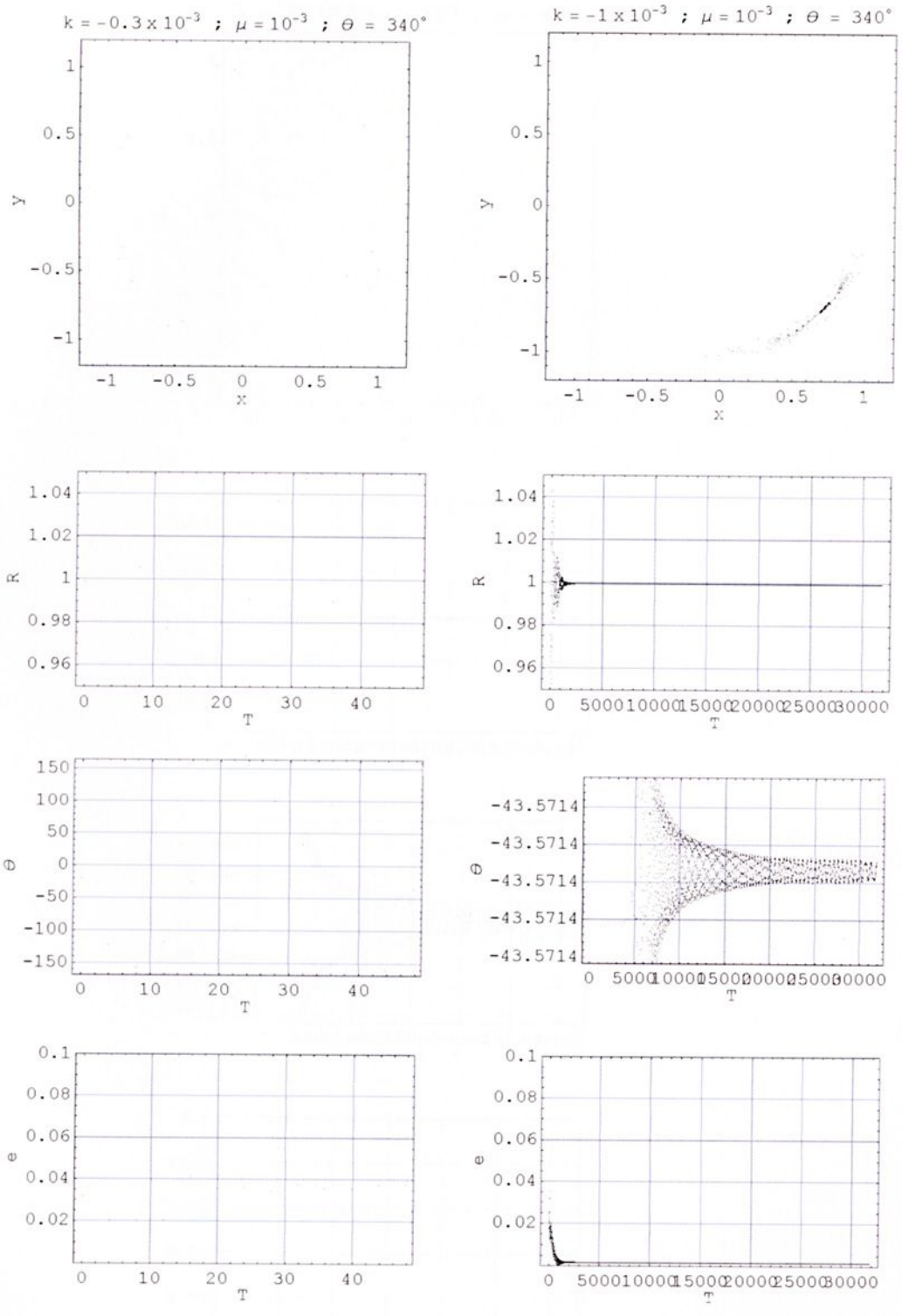


FIGURA 4.51 – Evolução temporal para uma partícula com k = -0.3x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 340° (coluna da esquerda) e a evolução temporal para uma partícula com k = -1x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 340° (coluna da direita). A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

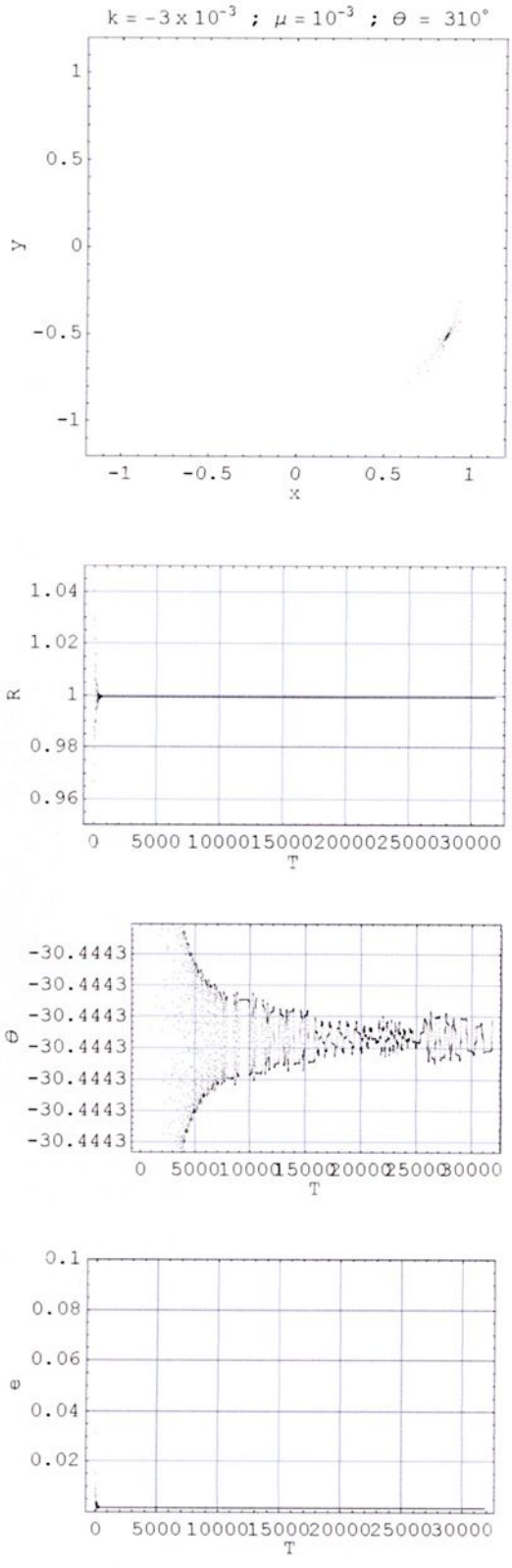


FIGURA 4.52 – Evolução temporal para uma partícula com k = -3x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 310º. A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

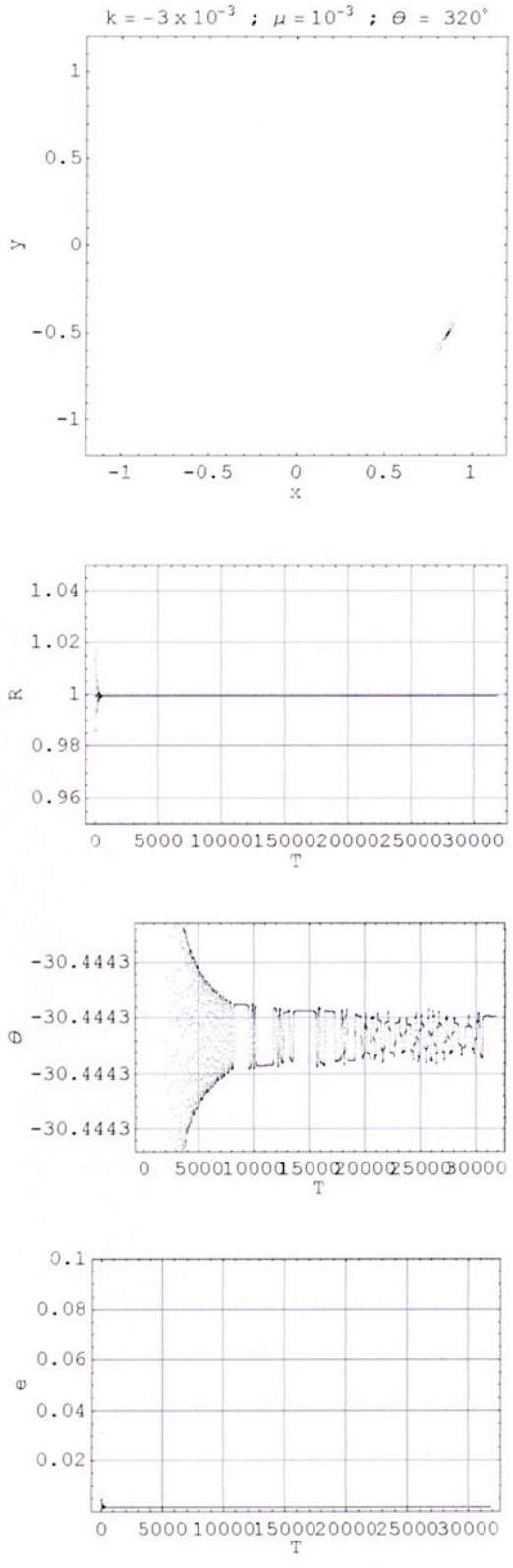


FIGURA 4.53 – Evolução temporal para uma partícula com k = -3x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 320°. A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

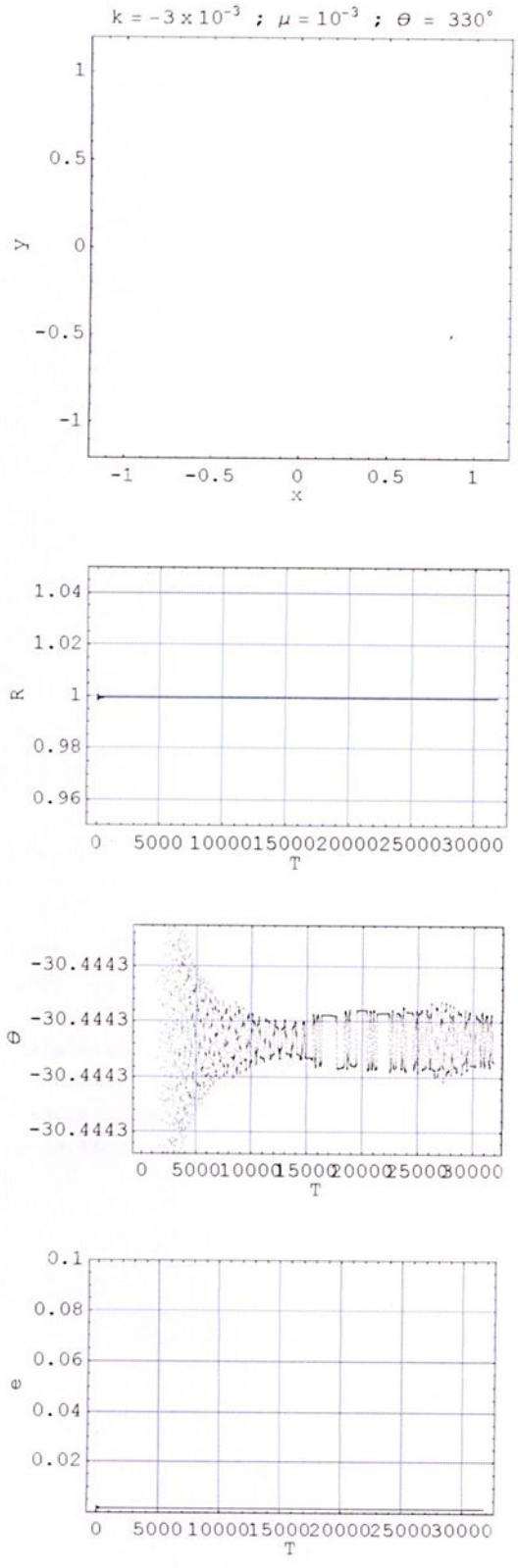


FIGURA 4.54 – Evolução temporal para uma partícula com $k = -3x10^{-3}$, $\mu = 10^{-3}$ e $\theta = 330°$. A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

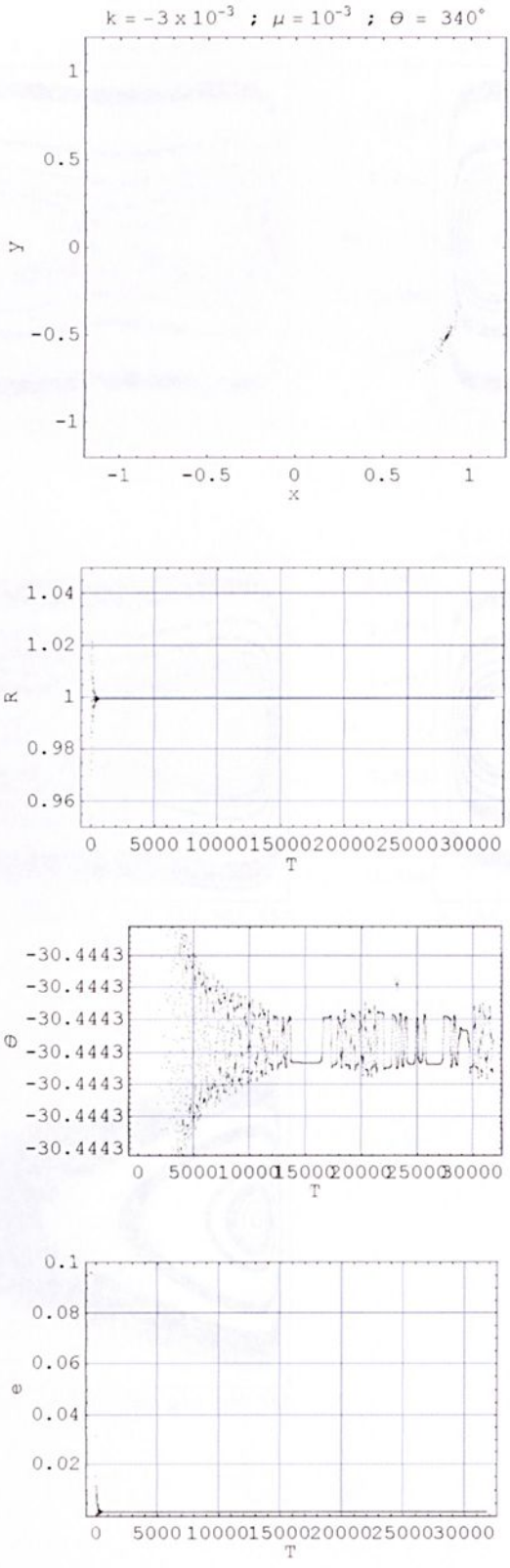


FIGURA 4.55 – Evolução temporal para uma partícula com k = -3x10^{-3}, μ = 10^{-3} e θ = 340°. A unidade de tempo é dada em períodos orbitais do secundário.

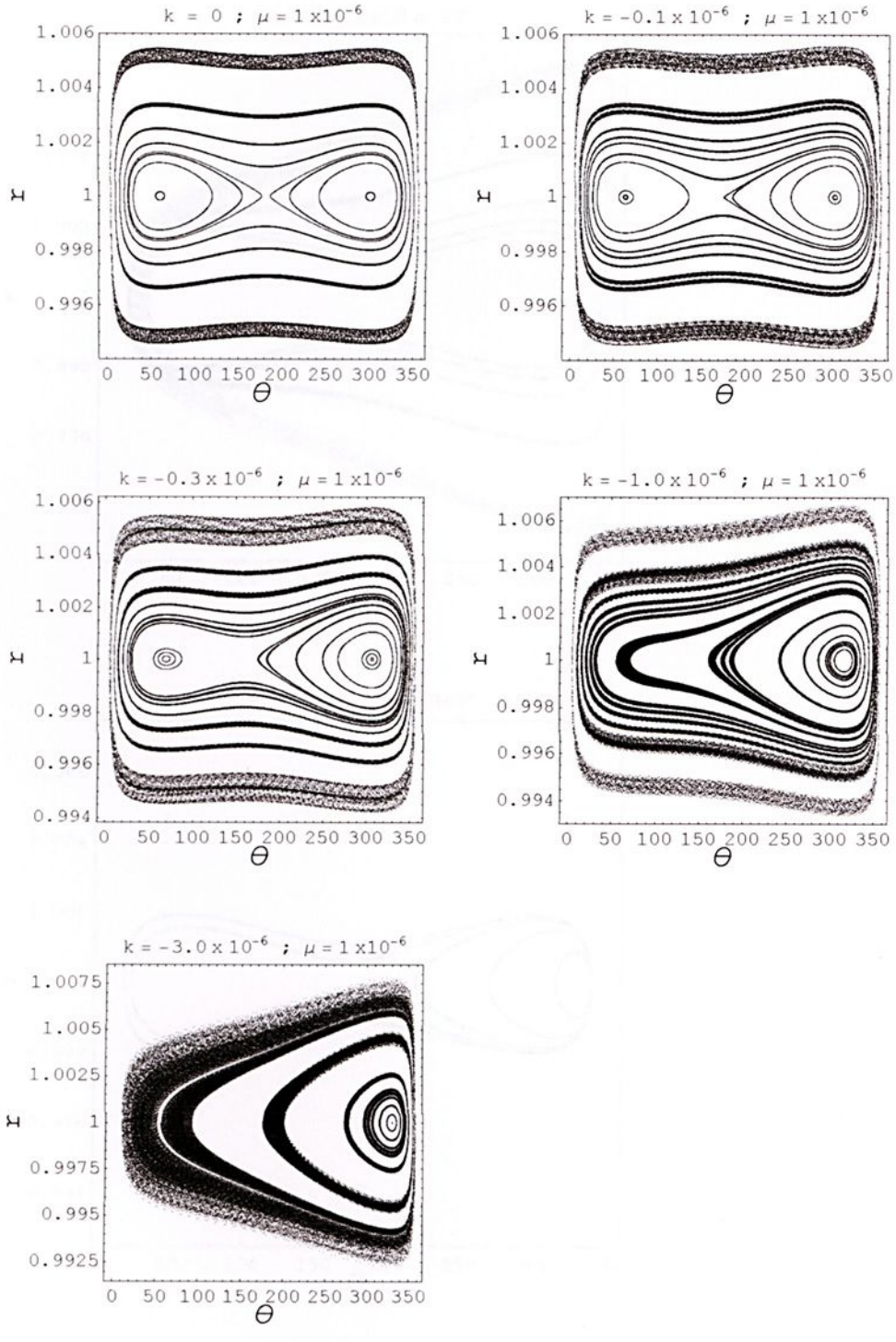


FIGURA 4.56 – Evolução do espaço físico para as órbitas de uma partícula sob o efeito de um arrasto de magnitude k = 0,-0.1x10^{-6}, -0.3x10^{-6}, -1.0x10^{-6}, -3.0x10^{-6} e $\mu = 10^{-6}$.

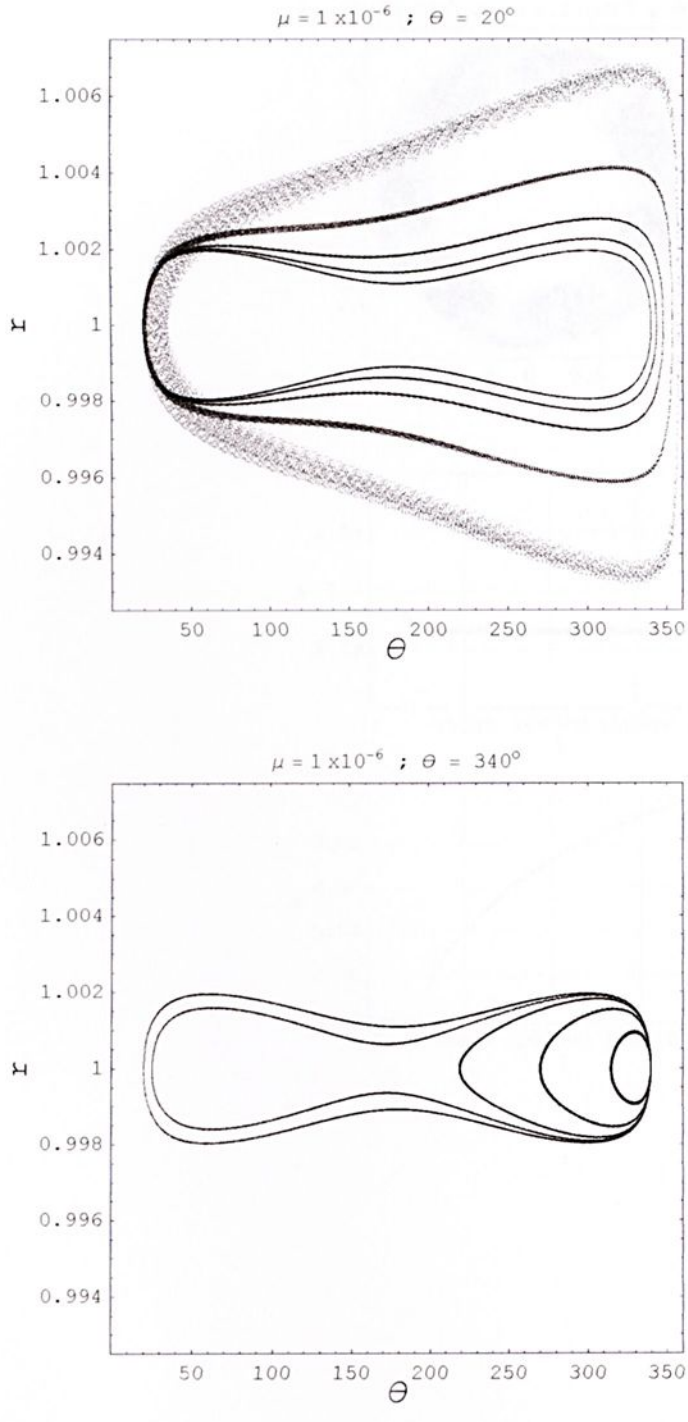


FIGURA 4.57 – Evolução da amplitude radial das órbitas de uma partícula sob o efeito de um arrasto com magnitude de $k = 0$, $-0.1\text{x}10^{-6}$, $-0.3\text{x}10^{-6}$, $-1.0\text{x}10^{-6}$, $-3.0\text{x}10^{-6}$ e $\mu = 10^{-6}$.

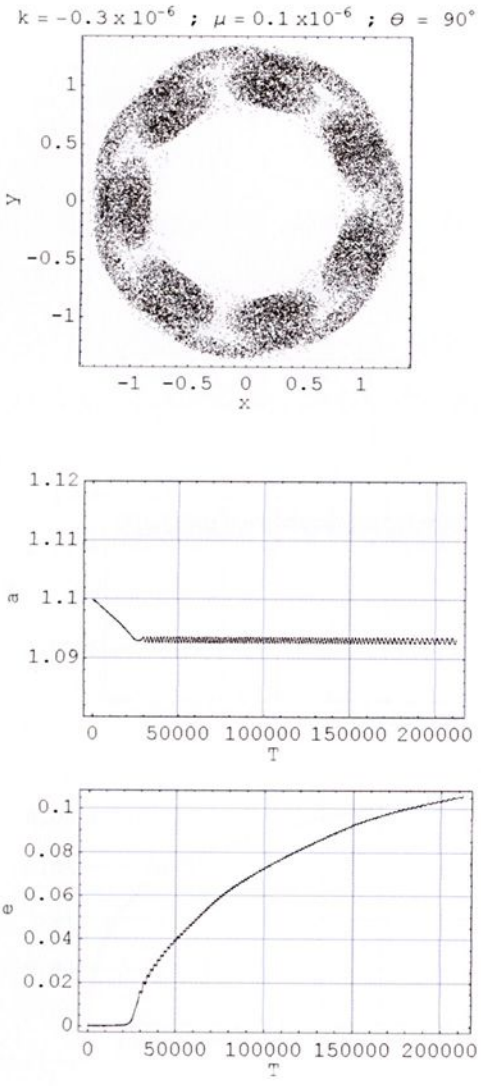


FIGURA 4.58 – Órbita e parâmetros orbitais de uma partícula capturada em uma ressonância de movimento médio 8:7.

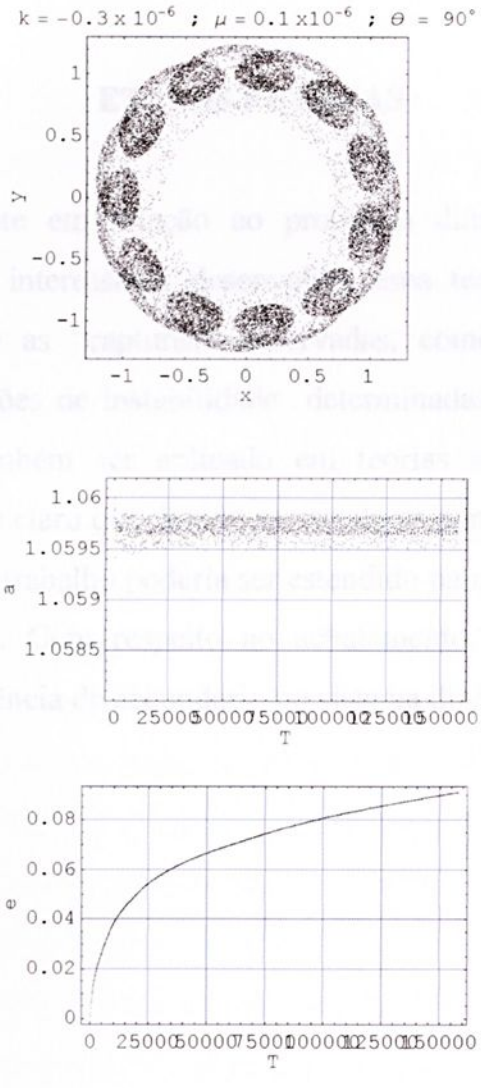


FIGURA 4.59 – Órbita e parâmetros orbitais de uma partícula capturada em uma ressonância de movimento médio 12:11.

Capítulo 5

ETAPAS FUTURAS

Principalmente em relação ao problema dinâmico que envolve o arrasto, seria muito interessante desenvolver uma teoria para uma melhor compreensão sobre as "capturas" observadas, como também um estudo teórico sobre as regiões de instabilidade determinadas numericamente. Esse trabalho poderia também ser aplicado em teorias sobre agrupamento de matérias, já que ficou claro que devido ao arrasto as partículas convergem para o mesmo ponto. Este trabalho poderia ser estendido para estudos das partículas de anéis planetários. Com respeito ao achatamento, seria útil um estudo teórico sobre a influência do secundário no sistema dinâmico estudado.

unesp

CONCLUSÕES

Uma primeira conclusão que pode ser tirada deste trabalho é o deslocamento dos pontos de equilíbrio triangulares, L_4 e L_5, devido a um aumento de β no movimento médio causado pelo achatamento do corpo central. Como foi visto na seção 3.3, os pontos triangulares deixam de apresentar a clássica configuração de triângulos eqüiláteros, passando a apresentar uma configuração de triângulos escalenos, na qual o ponto de equilíbrio assume uma posição mais próxima do corpo secundário do que do primário. Esse deslocamento é devido ao novo equilíbrio entre as forças gravitacionais, que os corpos primário e secundário exercem sobre a partícula, e a força centrífuga que esta experimenta por estar girando com o sistema. Como a velocidade angular do sistema é maior, implica em uma força centrífuga também maior, portanto a partícula deverá aproximar-se mais do centro de massa do sistema para que ocorra um aumento proporcional da força gravitacional e assim equilibrar novamente o sistema.

Podemos concluir ao analisar as Figuras 3.9 e 3.10, que a excentricidade média da partícula no problema de três corpos e causada pela presença da massa secundária como podemos ver para os casos em que $\mu > 10^{-4}$, quando a razão de massa apresenta valores menores que 10^{-4} a excentricidade média da partícula tende a zero, ou seja, nesta situação a massa do secundário é tão pequena que não provoca uma excentricidade na partícula. Quando colocamos o efeito do achatamento observamos uma excentricidade média na partícula causada agora por um efeito conjunto da massa do secundário e o achatamento do corpo central, que provoca uma velocidade de giro maior no sistema. Quando analisamos o problema perturbado com razões de massa maiores que 10^{-4}, vemos que o efeito predominante e o da presença da massa, porém, para razões de massa menores que 10^{-4} temos o efeito predominante causado pelo achatamento e para razões de massa menores que 10^{-5}, a excentricidade

média da partícula é igual ao valor de β, como podemos ver na Figura 3.15. Das Figuras 3.11 e 3.12, podemos concluir que o achatamento não afeta significativamente a amplitude de libração angular, já que os pontos vermelhos (caso sem achatamento) e os pontos verdes (caso com achatamento) estão sobrepostos. Das Figuras 3.13 e 3.14 pode-se concluir que o achatamento não afeta significativamente a amplitude de libração radial, pois também nestas figuras os pontos verdes e vermelhos se sobrepõem. Podemos observar que as regiões de instabilidade aparecem para razões de massa grande como por exemplo 10^{-2} e 10^{-3} que também apresentam uma grande variação radial , ou seja, são órbitas girino de grande amplitude radial e essa característica pode justificar o por que das regiões de instabilidade.

Na Figura 4.1 e 4.2 obtida por Murray (1994) são consideradas aproximações e restrições com relação a μ e k, mas para as razões de massa estudadas neste trabalho, foram importantes para as interpretações das figuras apresentadas, porém, como no método numérico não temos aproximações, foi possível obter as novas posições dos pontos de equilíbrios L_4 e L_5, com muita precisão, além de determinar as regiões de instabilidades para a razão de massa 10^{-3} e mostras que para a razão de massa 10^{-6}, praticamente não existe instabilidade para os valores de k estudados, sendo que os sistemas foram integrados por um tempo, $8x10^5$ períodos orbitais do secundário.

Pode-se também presenciar a evolução de órbitas do tipo ferradura para órbitas do tipo giro, essa evolução é importante, pois, se a partícula tiver uma origem de captura muito provavelmente ela no passado tinha uma órbita ferradura que evoluiu para um órbita girino, já que as órbitas ferraduras são mais largas que as órbitas girino. Na Figura 3.56 podemos observar como o arrasto torna o espaço físico assimétrico permitindo um número maior de órbitas ao redor do ponto L_5 em relação ao ponto L_4, já na Figura 3.57 podemos notar que a amplitude radial, para as órbitas ao redor de L_5, diminui a medida que o arrasto aumenta e para as órbitas ao redor de L_4 a amplitude radial aumenta a medita que o arrasto aumenta.

unesp

Podemos ainda concluir das Figuras 3.58 e 3.59, que o arrasto funciona como um mecanismo de captura.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Dermott, S. F. & C. D. Murray (1981a). The Dynamics of Tadpole and Horseshoe Orbits. I. Theory. Icarus, **48**, 1-11.

Dermott, S. F. & C. D. Murray (1981b). The Dynamics of Tadpole and Horseshoe Orbits. II. The Coorbital Satellites of Saturn. Icarus, **48**, 12-22.

Érdi, B. (1981). The perturbations of the orbital elements of Trojan asteroids. Celest. Mech., **24**, 337-390.

Morais, M. H. M. (1999). A secular theory for Trojan-type motion. Astron. Astrophys., **350**, 318-326.

Murray, C. D. (1994). Dynamical effects of drag in the circular restricted three-body problem 1: Location and stability of the Lagrangian equilibrium points. Icarus **112**, 465-484

Murray, C. D. *Solar System Dynamics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999. 592p.

Namouni, F. (1999). Secular interactions of coorbiting objects. Icarus, **137**, 293-314.

Peale, S. J. (1993). The effect of the nebula on the Trojan precursors. Icarus **106**, 308-322.

ROY, A. E. *Orbital Motion*. London: IOP, 1988. 532 p.

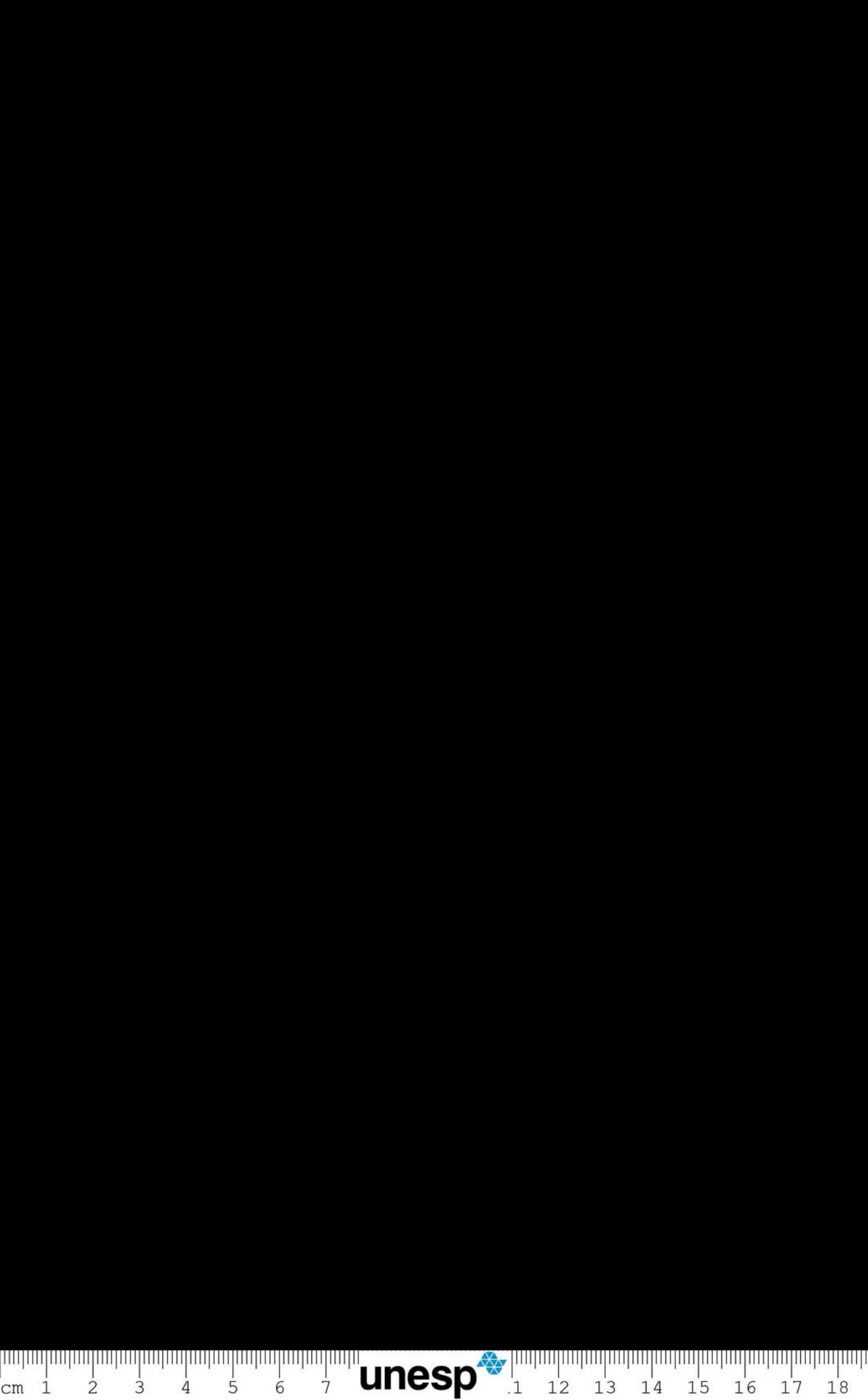
Sinclair, A. T. (1984). Perturbations on the orbits of companions of the satellites of Saturn. Astron. Astrophys., **136**, 161-166.

Subba Rao, P. V. and R. K. Sharma. (1997). Effect of oblateness on the non-linear stability of L_4 in the restricted three-body problem. Celest. Mech., **65**, 291-312.

Taylor, D. B. (1981). Horseshoe Periodic Orbits in the Restricted Problem of Three Bodies for a Sun-Jupiter Mass Ratio. Astron. Astrophys., **103**, 288-294.

Wiegert, P. A., K. A. Innanen. and S. Mikkola (1998). The orbital evolution of near-Earth asteroid 3753. Astron. J., **115**, 2604-2613.

unesp


cm 1 2 3 4 5 6 7
unesp
11 12 13 14 15 16 17 18