

Solução Viscosa de um Modelo
de
Difusão não Linear
para
Processamento de Imagens

Valter Gallo Nascimento Reis

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP - 079

Solução Viscosa de um Modelo de Difusão não Linear para Processamento de Imagens

Valter Gallo Nascimento Reis

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” Campus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Maurílio Boaventura

**São José do Rio Preto
30 de Maio de 2003.**

Reis, Valter Gallo Nascimento.

Solução viscosa de um modelo de difusão não linear para
processamento de imagens / Valter Gallo Nascimento Reis – São José do
Rio Preto : [s.n.], 2003
117 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Maurílio Boaventura

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de
Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Equações diferenciais parciais não-lineares. 2. Diferenças finitas.
3. Análise numérica. 4. Equações diferenciais parciais não-lineares -
Solução de viscosidade. I. Boaventura, Maurílio. II. Universidade
Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III.
Título.

CDU – 517.95

À Deus.
Aos meus pais.
À Leila, minha esposa.
À Patrícia e à Paula, minhas filhas.
Dedico.

AGRADECIMENTOS

A **Deus**, por ter me dado tanta força e Saúde.

Ao professor **Dr. Maurílio Boaventura** pela orientação, incentivo, amizade e confiança na escolha deste trabalho.

Ao professor **Dr. Alagacone Sri Ranga** pela amizade, paciência, simplicidade e confiança depositadas em mim.

A todos os professores do DCCE que de uma maneira indireta contribuíram para a elaboração deste trabalho.

A todos os funcionários do DCCE e da secretaria da Pós-Graduação, particularmente a **Rosana** e o **Oscar**.

Aos amigos Pós-Graduandos do DCCE e do departamento de matemática do IBILCE.

Ao **Fábio Carvalho da Interball – O Point do Internauta – Catanduva-SP** e **Bruno da Microlins – Catanduva-SP**, pela digitação do trabalho.

Aos meus amigos e minha família que sempre me apoiaram.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar a prova do Teorema de Existência e Unicidade de Solução, no contexto de soluções Viscosas, de um novo Modelo de Difusão Anisotrópica proposto recentemente para eliminação de Ruídos e Segmentação de Imagens Digitalizadas.

Palavras-Chave: Espaço L^∞ envolvendo tempo, espaço de Sobolev, equação diferencial parcial, solução viscosa, estimativas, convolução, suavização.

Abstract

The objective of this work is to present the proof of the Theorem of Existence and Uniqueness of Solution in the context of Viscosity Solutions, of a new model of anisotropic diffusion recently proposed to noise elimination and segmentation of digitalized images.

Key Words: L^∞ space involving time, Sobolev space, partial differential equation, viscosity solution, estimates, convolution, smoothings.

Sumário

Introdução	01
<i>I – Definições e Fatos Básicos</i>	03
I.1 – Função Gaussiana	03
I.1.1 – Distribuição Normal (ou Gaussiana) Unidimensional	03
I.1.2 – Distribuição Normal (ou Gaussiana) Bidimensional	04
I.2 – Multi – Índice	05
I.2.1 – Definição	05
I.2.2 – $D^\alpha u(x)$	05
I.3 – Medida de Lebesgue	07
I.3.1 – Medida de Lebesgue no $\mathbb{R}^N$	07
I.3.2 – Medida de Lebesgue no $\mathbb{R}^2$	08
I.3.3 – Funções Mensuráveis e Integração	10
I.3.4 – Teorema de Convergência para Integrais	11
I.4 – Convolução e Suavização	12

I.5 – Espaços Funcionais	15
I.5.1 – Espaços das Funções Contínuas	15
I.5.2 – Espaços das Funções Mensuráveis L^p	15
I.5.3 – Espaço de Sobolev $W^{k,p}$	16
I.6 – Funções Lipchitz e $W^{1,\infty}$	19
I.7 – Espaços Abstratos Envolvendo Tempo	20
<i>II – Solução de Viscosidade</i>	22
II.1 – EDP de 1ª Ordem	22
II.1.1 – Motivação	22
II.1.2 – Teorema de Arzela – Ascoli	23
II.1.3 – Definição de Solução de Viscosidade da Equação de Hamilton – Jacobi	26
II.1.4 – Definição Alternativa de Solução de Viscosidade	26
II.2 – EDP de 2ª Ordem	29
II.2.1 – Semijet de 2ª Ordem	29

II.2.2 – Definição e Propriedades de Cobertura Semicontínua Superior e Inferior	32
II.2.3 – Definição de Soluções Viscosas para EDP de 2ª Ordem	32
II.2.4 – Princípio do Máximo para Funções Semicontínuas	35
II.2.5 – Problemas Parabólicos	41
<i>III – Modelo Matemático</i>	44
III.1 – Descrição do Modelo	44
III.2 – Estudo da Função g	45
III.3 – Estudo da Função $g^{1/2}$	48
III.4 – O Termo de Difusão	49
III.5 – Estimativas	53
<i>IV – Existência e Unicidade do Modelo</i>	57
IV.1 – Adequação do Modelo Proposto	57
IV.2 – Teorema de Existência e Unicidade	59
IV.3 – Demonstração do Teorema em Vários Passos	60
IV.3.1 – Passo 1:- u é Uniformemente Limitada	60

IV.3.2 – Passo 2:- u Suave é Equicontínua	61
IV.3.3 – Passo 3:- Existência de Solução Viscosa	76
IV.3.4 – Passo 4:- Unicidade da Solução Viscosa	79
<i>V – Implementação Numérica do Modelo e Exemplos</i>	102
V.1 – Método de Diferenças Finitas	102
V.2 – Discretização do Modelo	107
V.3 – Exemplos	112
<i>VI – Conclusões</i>	115
Referências Bibliográficas	116

Introdução

A evolução de vários modelos existentes na literatura nos processos de eliminação de ruídos e segmentação de imagens que seguiram a corrente teórica, baseada em equações de difusão, se deu a partir de uma estrutura única formulada a partir de MALIK e PERONA [17] e através de substituições e acréscimos de termos, exploraram as estruturas dessas equações diferenciais parciais com o objetivo de se obter resultados superiores.

Seguindo esta linha evolutiva, foi apresentado recentemente um novo Modelo de Equação de Difusão não Linear por Barcelos, Boaventura e Silva Jr. [3] dada pela expressão:

$$u_t = g(|u * \nabla G_\sigma|) |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \lambda (1 - g)(u - I) \quad (1)$$

onde

- $g = g(|u * \nabla G_\sigma|)$ é uma função decrescente satisfazendo $g(0) = 1$ e $0 \leq g \leq 1$;
- σ é o tamanho do filtro utilizado na função gaussiana;
- λ é um parâmetro, tomado neste modelo igual ao desvio padrão do ruído.

Descrevendo os termos componentes deste modelo, temos do lado direito da equação a primeira parcela representa o modelo proposto por Alvarez, Lions e Morel [2], composto de dois termos não lineares, i é, um quase linear $|\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$ e um outro termo não local $g(|u * \nabla G_\sigma|)$, motivando o objetivo deste trabalho que consiste na prova da existência e unicidade da solução, demonstrada no contexto de soluções viscosas. O conceito de soluções viscosas será tratado no capítulo III.

Na segunda parcela, do lado direito, foi introduzido o termo forçante $(u - I)$, sugerido por Nordström [15], multiplicado pelo termo regularizador $\lambda(1 - g)$, o qual foi

denominado seletor de moderação. O objetivo deste termo linear de (1) é agir de forma seletiva, recuperando as características iniciais da imagem com ruídos I mais intensamente nas regiões de fronteira do que em relação as regiões homogêneas.

Observamos que este modelo consiste em aplicar seletivamente o modelo de Alvarez, Lions e Morel nas regiões em que se existe maior suavização da imagem e fazer o termo forçante atuar mais incisivamente nas regiões de contorno, sendo nessas regiões $g \sim 0$ o que implica em $(1-g) \sim 1$. Ao contrário nas regiões homogêneas onde $g \sim 1$ de modo que $(1-g) \sim 0$, conseqüentemente, o termo forçante será inexpressivo, possibilitando uma melhor suavização na imagem.

Este trabalho vem a completar o trabalho apresentado por Silva Jr. [18]. Muitos conceitos apresentados em [18] não serão aqui repetidos.

Quanto a organização deste trabalho temos:

No Capítulo I teremos os resultados preliminares, principalmente os espaços que trabalharemos como os espaços L^p envolvendo tempo, espaço de Sobolev, e outros resultados importantes que serão muito comuns como Convolução e Suavização de funções, função Gaussiana, Multi-Índice, Medida de Lebesgue e funções Mensuráveis.

No Capítulo II descreveremos o necessário do nosso principal ferramental que são as Soluções Viscosas.

No Capítulo III apresentamos o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções Viscosas, enunciado e demonstração, o detalhamento da função g e uma outra forma para o termo quase linear da equação (1).

No Capítulo VI teremos a implementação numérica e finalmente no Capítulo V efetuaremos a conclusão do trabalho.

Capítulo I

Definições e Fatos Básicos

I.1 - Função Gaussiana (Meyer, P.L. [14])

O processo de eliminação de ruídos em imagens baseia-se na eliminação dessas interferências através de filtros. Uma função comumente usada para filtragem de altas frequências, isto é, filtros passa-baixa, é a Função Gaussiana.

I.1.1 – Distribuição Normal (ou Gaussiana) Unidimensional

Definição (I.1.1): A variável aleatória contínua unidimensional X , que assume todos os valores reais $-\infty < x < \infty$, tem uma distribuição normal (ou Gaussiana) se sua função densidade de probabilidade for da forma:

$$G_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < \infty. \quad (\text{I.1.1})$$

Os parâmetros média aritmética μ e desvio padrão σ satisfazem a condição $-\infty < \mu < \infty$ e $\sigma > 0$.

Notação: $N \sim (\mu, \sigma^2)$ onde μ é a média aritmética e σ^2 é a variância.

Propriedades da Função Gaussiana

a) $G_{\sigma}(x) \geq 0$ para $-\infty < x < \infty$ e $\int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma(x)} dx = 1$;

b) $G_{\sigma(x)}$ é simétrica em relação a μ .

I.1.1.1 – Expressão de $G_{\sigma(x)}$ para o caso de $\mu = 0$:

$$G_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}, \quad N \sim (0, \sigma^2). \quad (\text{I.1.2})$$

I.1.2 – Distribuição Normal (ou Gaussiana) Bidimensional

Definição (I.1.2): Seja $X = (X_1, X_2)$ uma variável aleatória contínua bidimensional, tomando todos os valores no plano euclidiano. Diremos que $X = (X_1, X_2)$ tem uma distribuição normal bidimensional se sua função densidade de probabilidade conjunta for dada pela expressão

$$G_{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_{x_1}}{\sigma_{x_1}}\right)^2 - 2\rho\frac{(x_1-\mu_{x_1})(x_2-\mu_{x_2})}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}} + \left(\frac{x_2-\mu_{x_2}}{\sigma_{x_2}}\right)^2\right]} \quad (\text{I.1.3})$$

para $-\infty < x_1 < \infty$ e $-\infty < x_2 < \infty$,

onde

- $-\infty < \mu_{x_1} < \infty$, $\sigma_{x_1} > 0$,
- $-\infty < \mu_{x_2} < \infty$, $\sigma_{x_2} > 0$,
- $-1 < \rho < 1$,
- $G_{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}}(x_1, x_2) \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$.

Propriedades:

- a) $z = G_{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}}(x_1, x_2)$ é uma superfície;
- b) $z = c$ (constante) corta a superfície em uma elipse;
- c) Se $\rho = 0$ e $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \sigma$ essa elipse se transformaria em uma circunferência.

Expressão de $G_{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}}(x_1, x_2)$ para o caso de $\mu_{x_1} = \mu_{x_2} = 0$, $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \sigma$ e $\rho = 0$:

$$G_{\sigma^2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{x_1^2 + x_2^2}{\sigma^2} \right]}. \quad (\text{I.1.4})$$

Nas EDP a função G_σ (ou G_{σ^2}) é conhecida como Núcleo de Poisson, sendo propícia para se criar filtros de sinais. O filtro Gaussiano é obtido através do produto de convolução (descrito no item I.4 a seguir) da função a ser filtrada u com a função Gaussiana G_σ denotado por $u * G_\sigma$.

I.2 – Multi-Índice (Evans, L.C.[9])

I.2.1 – Definição (I.2.1):

Seja $u: U \rightarrow \mathbb{R}$ $x \in U \subset \mathbb{R}^N$ e $u \in C^k(U)$.

Um vetor da forma $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$, onde cada componente α_i é um inteiro não negativo, é chamado um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$. (I.2.1)

I.2.2 – Dado um Multi-Índice α , define-se:

$$D^\alpha u(x) \equiv \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}. \quad (\text{I.2.2})$$

I.2.2.1 – Se k é um inteiro não negativo

$D^k u(x) \equiv \{D^\alpha u(x) \mid |\alpha| = k\}$ é a coleção de todas derivadas parciais de ordem k

e $|D^k u(x)| \equiv \left(\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$

Casos Especiais:

a) Se $k = 1$ então $|\alpha| = 1$.

$$\alpha = (1, 0, 0, \dots, 0) \quad D^\alpha u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_1}$$

$$\alpha = (0, 1, 0, \dots, 0) \quad D^\alpha u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_2}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\alpha = (0, 0, 0, \dots, 1) \quad D^\alpha u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_N}$$

$$Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) \equiv \nabla u \quad \text{é chamado vetor gradiente} \quad (I.2.2)$$

e

b) $k = 2$ então $|\alpha| = 2$.

$$\alpha = (2, 0, 0, \dots, 0) \quad D^\alpha u(x) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2}$$

$$\alpha = (1, 1, 0, \dots, 0) \quad D^\alpha u(x) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\alpha = (1, 0, 1, \dots, 0) \quad D^\alpha u(x) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_3}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$D^2 u(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_N \partial x_1} & \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_N \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_N^2} \end{pmatrix}_{N \times N} \quad \text{é chamada matriz Hessiana.} \quad (I.2.3)$$

I.3 – Medida de Lebesgue (Evans, L.C.[9])

I.3.1 – Medida de Lebesgue no $\mathbb{R}^N$

A medida de Lebesgue fornece uma maneira de descrever o tamanho ou volume de certos subconjuntos de $\mathbb{R}^N$.

Definição (I.3.1): Uma coleção $\mathfrak{M}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ é chamado uma σ – álgebra se

- i) $\emptyset, \mathbb{R}^N \in \mathfrak{M}$, onde $\emptyset$ denota o conjunto vazio,
- ii) Se $A \in \mathfrak{M}$ então $\mathbb{R}^N - A \in \mathfrak{M}$,
- iii) Se $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$, então $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{M}$.

Teorema (I.3.1) (Existência de medida de Lebesgue e conjuntos mensuráveis de Lebesgue)

Existe uma σ – álgebra $\mathfrak{M}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ e um mapeamento $|\cdot|: \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty[$ com as seguintes propriedades:

- i) todo subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e todo subconjunto fechado de $\mathbb{R}^N$ pertence a $\mathfrak{M}$;
- ii) se B é qualquer bola em $\mathbb{R}^N$, então $|B|$ é igual ao volume N – dimensional usual de B ;
- iii) se $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$ e os conjuntos $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ são dois a dois disjuntos,

$$\text{então } \left| \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right| = \sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \quad (\text{Aditivamente Contável}). \quad (\text{I.3.1})$$

Notação: Os conjuntos em $\mathfrak{M}$ são chamados conjuntos mensuráveis e $|\cdot|$ é chamada medida de Lebesgue.

Observações:

1) Um conjunto é chamado contável se, e somente se, é finito ou enumerável.

2) De ii e iii, observamos que $m(A)$ (medida do conjunto A) é igual ao volume de algum conjunto A com contorno suave por partes.

3) Deduzimos de (I.3.1) que

a) $|\phi| = 0$ e

b) $\left| \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |A_k|$ (subaditivamente contável),

para alguma coleção contável de conjuntos mensuráveis $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$.

Se uma propriedade vale em $\mathbb{R}^N$, exceto para um conjunto mensurável com medida zero, dizemos que a propriedade vale quase em toda parte, abreviadamente "a.e".

I.3.2 – Medida de Lebesgue dos Conjuntos Planos (Kolmogorov, A.N. e Formin, S.V. [11])

Definição (I.3.2):- Denomina-se medida exterior do conjunto A o número

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_k P_k} \sum_k m(P_k)$$
 onde o ínfimo toma-se sobre todos os recobrimentos de A mediante

sistemas enumeráveis de retângulos.

Observações:

1) Se na definição, tomássemos recobrimentos constituídos não somente de retângulos, mas de conjuntos elementares quaisquer (em quantidade enumerável) obteríamos o mesmo valor para $\mu^*(A)$, dado que qualquer conjunto elementar é uma reunião finita de retângulos disjuntos.

2) Qualquer que seja o conjunto elementar $\mu^*(A) = m'(A)$.

Definição (I.3.3): Um conjunto plano é elementar, se puder ser representado como a união de um número finito de retângulos disjuntos.

Definição (I.3.4): Definimos a medida $m'(A)$ para os conjuntos elementares mediante o seguinte procedimento. Se $A = \bigcup_k P_k$, onde P_k são retângulos disjuntos, então

$$m'(A) = \sum_k m(P_k).$$

Observações:

- 1) $m'(A)$ não depende do modo de decomposição de A na reunião de um número finito de retângulos $A = \bigcup_k P_k = \bigcup_j Q_j$.
- 2) Em particular a medida m' coincide com a medida originária m (pois A é um retângulo). Portanto a medida m' é positiva e aditiva.

Teorema (I.3.2) Seja A um conjunto elementar e $\{A_n\}$ um sistema enumerável de conjuntos elementares tal que $A \subset \bigcup_n A_n$ então $m'(A) \leq \sum_n m'(A_n)$.

Definição (I.3.5): A propriedade da medida m' , estabelecida pelo Teorema (I.3.1) (dizendo que a medida de um conjunto não excede a soma das medidas dos conjuntos que constituem um recobrimento enumerável deste) chama-se semi-aditiva.

OBSERVAÇÃO: Da semi-aditividade resulta a chamada aditividade seqüencial ou σ -aditividade que consiste no seguinte: se um conjunto elemental A puder ser representado como a reunião de um conjunto enumerável de conjuntos elementares disjuntos A_n ($n = 1, 2, \dots$)

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ então } m'(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m'(A_n).$$

Teorema (I.3.3) Se $A \subset \bigcup_n A_n$ onde $\{A_n\}$ é um sistema enumerável de conjuntos, então $\mu^*(A) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$.

Definição (I.3.6): Um conjunto A chama-se mensurável (no sentido de Lebesgue) se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existir um conjunto elementar B tal que $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$.

A função μ^* , considerada somente sobre os conjuntos mensuráveis denomina-se medida de Lebesgue. Denotamo-la μ .

Observações:

- 1) A noção de mensurabilidade que introduzimos tem um significado intuitivo bastante claro. Afirmar que um conjunto é mensurável equivale a dizer que este pode ser “aproximado com a precisão desejada” mediante conjuntos elementares assim introduzimos a classe $\mathfrak{M}$ de conjuntos mensuráveis e uma função μ , a medida de Lebesgue definida sobre esta classe.
- 2) A totalidade dos conjuntos mensuráveis $\mathfrak{M}$ é estável por reuniões e intersecções enumeráveis (isto é, constitui uma σ – álgebra).
- 3) A função μ é σ – aditiva sobre $\mathfrak{M}$.

I.3.3 – Funções Mensuráveis e Integração (EVANS, L.C.[9])

Definição (I.3.7): Seja $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma função mensurável se $f^{-1}(U) \in \mathfrak{M}$ para cada subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}$.

Note em particular que se f é contínua, então f é mensurável.

Agora se f é uma função mensurável não negativa, é possível, por uma aproximação de f por funções simples, para definir a integral de Lebesgue $\int_{\mathbb{R}^N} f dx$ (isto está de acordo com a integral se f é contínua).

Se f é mensurável, mas não é necessariamente não negativa, definimos $\int_{\mathbb{R}^N} f dx = \int_{\mathbb{R}^N} f^+ dx - \int_{\mathbb{R}^N} f^- dx$ com a condição de pelo menos um dos termos do lado direito ser finito. Para este caso dizemos que f é integrável.

Definição (I.3.8): Uma função mensurável f é integrável se $\int_{\mathbb{R}^N} |f| dx < \infty$.

Teorema (I.3.4) Para que uma função de uma variável real $f(x)$ seja mensurável é necessário e suficiente que, para todo número real c o subconjunto $\{x: f(x) < c\}$ seja mensurável.

I.3.4 – Teorema de Convergência para Integrais

A grande vantagem da Teoria de Lebesgue de integração é que os seguintes poderosos Teoremas de Convergência são disponíveis.

Teorema (I.3.5) (Lema de Fatou)

Suponha que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ são não negativas e mensuráveis. Então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \lim_{k \rightarrow \infty} \inf f_k(x) dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \inf \int_{\mathbb{R}^N} f_k(x) dx.$$

Teorema (I.3.6) (Teorema de Convergência)

Suponha que $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ são integráveis e $f_k \rightarrow f$ em quase toda parte.

Suponha também que $|f_k| \leq g$ em quase toda parte para alguma função integrável g . Então $\int_{\mathbb{R}^N} f_k(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx$.

I.4 – Convolução e Suavização (Evans, L.C.[9])

Se $U \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e $\varepsilon > 0$, colocamos $U_\varepsilon = \{x \in U \mid d(x, \partial U) > \varepsilon\}$.

Definição (I.4.1):

i) Vamos definir $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ por $\eta(x) \equiv \begin{cases} C e^{-\frac{1}{|x|^2+1}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$ onde a constante

$C > 0$ é selecionada tal que $\int_{\mathbb{R}^N} \eta(x) dx = 1$.

ii) Para cada $\varepsilon > 0$ colocamos $\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ chamamos η de suavizador

padrão.

Observação: As funções η_ε são $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e satisfazem

$$\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x) dx = 1 \quad (\eta_\varepsilon(x)) \subset B(0, \varepsilon),$$

onde $B(0, \varepsilon)$ é uma bola fechada com centro 0 e raio ε .

Definição (I.4.2): Se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável localmente, define-se sua suavização

$$f^\varepsilon = \eta_\varepsilon * f \text{ em } U_\varepsilon, \text{ isto é, } f^\varepsilon(x) = \int_{B(x, \varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) f(y) dy = \int_{B(0, \varepsilon)} \eta_\varepsilon(x) f(x-y) dy \text{ para}$$

$x \in U_\varepsilon$.

Teorema (I.4.1) (Propriedades de Suavizadores)

i) $f^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$.

ii) $f^\varepsilon \rightarrow f$ em quase toda parte.

iii) Se $f \in C(U)$, então $f^\varepsilon \rightarrow f$ uniformemente em subconjuntos compactos de U .

iv) Se $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p_{loc}(U)$, então $f^\varepsilon \rightarrow f$ em $L^p_{loc}(U)$.

Prova

i) Fixe $x \in U_\varepsilon$, $1 \leq i \leq N$ e h muito pequeno de modo que $x + he_i \in U_\varepsilon$.

Então

$$\begin{aligned} \frac{f^\varepsilon(x + he_i) - f^\varepsilon(x)}{h} &= \frac{1}{\varepsilon^N} \int_U \frac{1}{h} \left[\eta\left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right) \right] f(y) dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^N} \int_V \frac{1}{h} \left[\eta\left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right) \right] f(y) dy \text{ para algum conjunto aberto} \end{aligned}$$

$V \subset\subset U$ (V é compacto embutido em U) como

$$\frac{1}{h} \left[\eta\left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right) \right] \rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) \text{ uniformemente em } V, \frac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i}(x)$$

existe e é igual a $\int_U \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x - y) f(y) dy$.

Por um argumento similar mostramos que $D^\alpha f^\varepsilon(x)$ existe e é dado por

$$D^\alpha f^\varepsilon(x) = \int_U D^\alpha \eta_\varepsilon(x - y) f(y) dy \quad (x \in U_\varepsilon) \text{ para cada multi-índice } \alpha. \text{ Isto}$$

prova i.

ii) De acordo como Teorema de Diferenciação de Lebesgue

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy = 0, \text{ em quase toda parte } x \in U. \quad (\text{I.4.1})$$

$$\text{Notação: } \int_{B(x,r)} f(y) dy = \frac{1}{\alpha(N)r^N} \int_{B(x,r)} f(y) dy \quad (\text{média de } f \text{ sobre a bola}$$

$$B(x,r) \text{ e } \alpha(N) = \text{volume da bola unitária em } \mathbb{R}^N = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right)}.$$

Fixe deste modo um ponto x . Então

$$\begin{aligned} |f^\varepsilon(x) - f(x)| &= \left| \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x - y) [f(y) - f(x)] dy \right| \leq \\ &\frac{1}{\varepsilon^N} \int_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right) |f(y) - f(x)| dy \leq C \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy \rightarrow 0, \text{ quando} \end{aligned}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ por (I.4.1).

Portanto $f^\varepsilon \rightarrow f$ em quase toda parte.

iii) Suponha agora que $f \in C(U)$. Dado $V \subset\subset U$ escolhemos $V \subset\subset W \subset\subset U$ e note que f é uniformemente contínua em W . Assim, o limite (I.4.1) vale uniformemente para $x \in V$. Conseqüentemente o cálculo acima implica que $f^\varepsilon \rightarrow f$ uniformemente em V .

iv) Em seguida, suponha $1 \leq p < \infty$ e $f \in L^p_{loc}(U)$ (vide I.5.2) e escolha um conjunto aberto $V \subset\subset U$ e, como acima, W de modo que $V \subset\subset W \subset\subset U$. Afirmamos para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno que $\|f^\varepsilon\|_{L^p(V)} \leq \|f\|_{L^p(W)}$. (I.4.2)

Para provar isto, notamos que se $1 < p < \infty$ e $x \in V$,

$$\begin{aligned} |f^\varepsilon(x)| &= \left| \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) f(y) dy \right| \leq \int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon^{1-\frac{1}{p}}(x-y) \eta_\varepsilon^{\frac{1}{p}}(x-y) |f(y)| dy \\ &\leq \left(\int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) dy \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Como $\int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) dy = 1$, esta desigualdade implica

$$\begin{aligned} \int_V |f^\varepsilon(x)|^p dx &\leq \int_V \left(\int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) |f(y)|^p dy \right) dx \\ &\leq \int_W |f(y)|^p \left(\int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y) dx \right) dy = \int_W |f(y)|^p dy, \end{aligned}$$

desde que $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, então $\|f^\varepsilon\|_{L^p(V)} \leq \|f\|_{L^p(W)}$.

Agora fixe $V \subset\subset W \subset\subset U$, $\delta > 0$, e escolha $g \in C(W)$ de modo que $\|f - g\|_{L^p(W)} < \delta$.

Então

$$\begin{aligned} \|f^\varepsilon - f\|_{L^p(V)} &\leq \|f^\varepsilon - g^\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)} + \|g - f\|_{L^p(V)} \\ &\leq 2\|f - g\|_{L^p(W)} + \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)} \quad \text{por (I.4.2)} \\ &\leq 2\delta + \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)}. \end{aligned}$$

Como $g^\varepsilon \rightarrow g$ uniformemente em V , temos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup \|f^\varepsilon - f\|_{L^p(V)} \leq 2\delta, \text{ então } f^\varepsilon \rightarrow f \text{ em } L^p_{loc}(U).$$

I.5 – Espaços Funcionais (Brezis, H.[6] e Evans, L.C.[9])

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e seja $\partial\Omega$ sua fronteira:

I.5.1 – Com relação ao espaço das funções contínuas usaremos as seguintes notações:

- $C(\Omega)$ denomina-se espaços das funções contínuas sobre Ω .
- $C_c(\Omega)$ é o espaço das funções contínuas sobre Ω com suporte compacto.
$$C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega); f(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus K \text{ e } K \subset \Omega \text{ é um compacto}\}$$
- $C^k(\Omega)$ é o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis em Ω ($k \geq 0$).
$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega).$$

I.5.2 – Com relação aos espaços das funções mensuráveis utilizaremos as seguintes notações:

- $L^p(\Omega)$ denomina-se espaço das funções u mensuráveis sobre Ω e $\int_\Omega |u|^p dx < \infty$ para $1 \leq p < \infty$.
- $L^1(\Omega)$ é o espaço das funções u mensuráveis sobre Ω e $\int_\Omega |u| dx < \infty$, ou seja, das funções Lebesgue integráveis em Ω .
- $L^1_{loc}(\Omega)$ é o espaço das funções mensuráveis localmente integráveis.
- $L^\infty(\Omega)$ denomina-se espaço das funções u mensuráveis e limitadas em Ω , isto é, existe C tal que $|u(x)| \leq C$ para todo $x \in \Omega$.

A norma de u no espaço L^p é definida por:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \text{ para } 1 \leq p < \infty \text{ e } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}_\Omega |u|$$

ess $\sup_{\Omega} |u|$ é o ínfimo de $\sup g(x)$ como extensão sobre todas as funções as quais são iguais a u quase em toda parte.

$$\text{ess } \sup_{\Omega} |u| = \inf \{M : m\{x : u(x) > M\} = 0\}$$

Portanto, definimos $L^p(\Omega)$ como o espaço linear de todas funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ para as $\|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty$. Então $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banack (vide I.7), desde que identifiquemos duas funções as quais concordam quase em toda parte.

Observação: Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ $1 \leq p \leq \infty$, então $(f * g) \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$.

I.5.3 - Espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$

I.5.3.1 – Derivadas Fracas

Seja $C_c^\infty(\Omega)$ denotamos o espaço de funções diferenciáveis infinitamente $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ com suporte compacto em Ω . Chamamos uma função $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ uma função teste.

Motivação para definição de Derivadas Fracas

Suponha que dado uma função $u \in C^1(\Omega)$, se $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, obtemos pela integração por partes, a fórmula $\int_{\Omega} u \phi_{x_i} dx = - \int_{\Omega} u_{x_i} \phi dx$ ($i=1,2,\dots,N$). (I.5.1)

Não existe condições de contorno desde que ϕ tenha suporte compacto em Ω e assim desaparece próximo a $\partial\Omega$. Generalizando, se k é um inteiro positivo, $u \in C^k(\Omega)$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ é um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N$, então

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u \phi dx. \quad (I.5.2)$$

Esta equação vale desde que $D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}} \phi$ e podemos aplicar a fórmula

(I.5.1) $|\alpha|$ vezes.

Em seguida examinando a formula (I.5.2), válida para $u \in C^k(\Omega)$, pergunta-se se alguma variante poderia ainda ser verdadeira se u não é k vezes continuamente diferenciável. Agora o lado esquerdo de (I.5.2) faz sentido se u é somente localmente integrável: O problema é que se u não é $C^k(\Omega)$, então a expressão $D^\alpha u$ do lado direito de (I.5.2) não tem obviamente sentido.

Resolvemos esta dificuldade se existir uma função integrável localmente v tal que a fórmula (I.5.2) é uma válida substituindo $D^\alpha u$ por v .

Definição (I.5.1): Suponha $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, e α é um multi índice. Dizemos que v é a α -ésima derivada parcial fraca de u , escrevemos $D^\alpha u = v$, se

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi dx \quad \text{para toda função teste } \phi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (\text{I.5.3})$$

Em outras palavras, dado uma função u , se existir uma função v tal que (I.5.3) se verifica para toda ϕ e agindo como $D^\alpha u$ na fórmula (I.5.2), dizemos que $D^\alpha u = v$ no sentido fraco.

Lema (I.5.1) Uma derivada parcial fraca α -ésima de u , se existir, é unicamente definida para um conjunto de medida zero.

Prova: Suponha que $v, \tilde{v} \in L^1_{loc}(\Omega)$ satisfaça $\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi dx$ e $\int_{\Omega} u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \tilde{v} \phi dx$ para todo $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Então $\int_{\Omega} (v - \tilde{v}) \phi dx = 0$ para $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ de onde $v - \tilde{v} = 0$ em quase toda parte.

Definição (I.5.2): O espaço Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ $1 \leq p \leq \infty$ e k inteiro não negativo, consiste de todas as funções localmente integráveis $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e pertencem a $L^p(\Omega)$.

Definição (I.5.3): Um espaço de Hilbert H é um espaço com produto interno completo.

Observações:-

1) Se $p=2$ usualmente escrevemos $H^k(\Omega) \equiv W^{k,2}(\Omega)$ $k=1,2,\dots$

A letra H é usada, porque $H^k(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

2) Doravante identifiquemos funções em $W^{k,2}(\Omega)$ as quais concordam quase em toda parte.

Definição (I.5.4): Se $u \in W^{k,p}(\Omega)$ definimos sua norma por

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \equiv \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} & p \neq \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \text{ess sup}_{\Omega} |D^\alpha u| & p = \infty \end{cases}$$

Teorema (I.5.1) (Propriedades de Derivadas Fracas)

Suponha $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$, $|\alpha| \leq k$, então:

$$i) \quad D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega) \text{ e } D^\beta (D^\alpha u) = D^\alpha (D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u$$

para todo multi índice α, β com $|\alpha| + |\beta| \leq k$.

$$ii) \quad \text{Para cada } \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega) \text{ e}$$

$$D^\alpha (\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v \quad |\alpha| \leq k.$$

$$iii) \quad \text{Se } V \subset \Omega \text{ então } u \in W^{k,p}(V)$$

iv) Se $\xi \in C_c^\infty(\Omega)$, então $\xi u \in W^{k,p}(\Omega)$ e

$$D^\alpha(\xi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \xi D^{\alpha-\beta} u.$$

v) $W^{k,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

I.6 – Funções Lipschitz e $W^{1,\infty}$ (Evans, L.C.[9])

Teorema (I.6.1) (Caracterização de $W^{1,\infty}$). Seja Ω aberto e limitado, com $\partial\Omega$ de classe C^1 . Então $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz contínua se, e somente se $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

Prova: ($\Leftarrow$)

- 1) Primeiro assuma $\Omega = \mathbb{R}^N$ e que u tem suporte compacto.
- 2) Suponha-se $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$. Então $u^\varepsilon \equiv \mu^\varepsilon * u$ onde μ^ε (o usual

suavizador) é suave e satisfaz $\begin{cases} u^\varepsilon \rightarrow u \text{ uniformemente quando } \varepsilon \rightarrow 0 \\ \|Du^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|Du\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}. \end{cases}$

Escolha dois pontos $x, y \in \mathbb{R}^N$, $x \neq y$, temos

$$u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u^\varepsilon(tx + (1-t)y) dt = \int_0^1 Du^\varepsilon(tx + (1-t)y) dt (x - y) \text{ e assim}$$

$$|u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y)| \leq \|Du^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} |x - y| \text{ fazendo } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ obtemos}$$

$$|u(x) - u(y)| \leq \|Du\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} |x - y|, \text{ então } u \text{ é Lipschitz.}$$

($\Rightarrow$) Por outro lado assuma que u é Lipschitz, podemos provar que u tem essencialmente derivada primeira fraca limitada $\|D_i^h u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq Lip(u)$ e assim existe uma

função $v^i \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e uma subsequência $h_k \rightarrow 0$ tal que $D_i^{h_k} u \rightarrow v^i$ fracamente* em

$$L^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{I.6.1}$$

Conseqüentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u \phi_{x_i} dx = \lim_{h_k \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} u D_i^{h_k} \phi dx = - \lim_{h_k \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} D_i^{-h_k} u \phi dx = - \int_{\mathbb{R}^N} v^i \phi dx \quad \text{por (I.6.1).}$$

A equação acima vale para todo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e assim $v^i = u_{x_i}$, no sentido fraco ($i=1,2,\dots,N$).

Conseqüentemente, $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$.

I.7 – Espaços Abstratos envolvendo Tempo (Evans, L.C.[9])

Estudaremos espaços de Sobolev compreendendo funções mapeando tempo dentro de espaços de Banack em Geral.

Estas definições serão úteis em construções de soluções fracas para EDP linear parabólica e hiperbólica.

Definição (I.7.1): Um espaço de Banack real X é um espaço linear normado completo

Seja X um espaço de Banack real com norma $\| \cdot \|$

Definição (I.7.2): O espaço $L^p(0,T;X)$ consiste de todas funções mensuráveis $u:[0,T] \rightarrow X$ com

$$\text{i) } \|u\|_{L^p(o,T;X)} \equiv \left(\int_0^T \|u(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \text{para } 1 \leq p < \infty \quad \text{e}$$

$$\text{ii) } \|u\|_{L^p(o,T;X)} = \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| < \infty.$$

Definição (I.7.3): O espaço $C([0,T];X)$ compreende todas as funções contínuas $u:[0,T] \rightarrow X$ com $\|u\|_{C([0,T];X)} \equiv \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| < \infty$.

Definição (I.7.4): Seja $u \in L^1(0, T; X)$. Dizemos que $v \in L^1(0, T; X)$ é a derivada fraca de u , $u' = v$, contanto que $\int_0^T \phi'(t)u(t) dt = -\int_0^T \phi(t)v(t) dt$ para toda função teste escalar $\phi \in C_c^\infty(0, T)$.

Definição (I.7.5):-

i) O espaço de Sobolev $W^{1,p}(0, T; X)$ consiste de todas funções $u \in L^p(0, T; X)$ tal que u' existe no sentido fraco e pertence a $L^p(0, T; X)$.

$$\text{ii) } \|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} \equiv \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|^p + \|u'(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} & 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} [\|u(t)\| + \|u'(t)\|] & p = \infty. \end{cases}$$

Capítulo II

Solução de Viscosidade

II.1 – EDP de 1ª Ordem (Lopes e Lopes Filho [13])

II.1.1 – Motivação

A definição de solução de viscosidade é inspirada no Princípio do Máximo para equações elípticas e parabólicas (ver [19]).

Antes de definir solução de viscosidade vamos apresentar, a título de motivação, uma situação em que a definição surge de maneira natural.

Uma estratégia comum para obter soluções da equação de Hamilton – Jacobi (II.1.1) consiste em regularizar a equação pela adição de um pequeno termo difusivo e obter soluções de (II.1.1) que sejam limites das soluções do problema regularizado quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Equação de Hamilton – Jacobi (EHJ)

$$\begin{cases} u_t + H(\nabla u, x) = 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \times]0, \infty[\\ u(x, 0) = g(x) & \text{em } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (\text{II.1.1})$$

onde

$H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e $u : \mathbb{R}^N \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1(\mathbb{R}^N \times]0, \infty[) \cap C^0(\mathbb{R}^N \times [0, \infty[)$ é uma solução clássica de (II.1.1), isto é, satisfaz o problema (II.1.1) em todos os pontos de $\mathbb{R}^N \times [0, \infty[$.

Seja

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon + H(\nabla u^\varepsilon, x) = \varepsilon \Delta u^\varepsilon & \text{em } \mathbb{R}^N \times]0, \infty[\\ u^\varepsilon = g & \text{em } \mathbb{R}^N \end{cases}$$

a equação regularizada, que é uma equação semilinear de natureza parabólica.

A dissipação introduzida pelo termo difusivo torna este problema muito mais tratável do ponto de vista analítico. A estratégia descrita acima é comum em EDP e se chama Método de Viscosidade Evanescente.

Espera-se que u^ε convirja a uma solução da equação original quando $\varepsilon \rightarrow 0$. No limite, contudo, perde-se controle sobre as derivadas da seqüência de soluções aproximadas. Não se espera obter uma solução clássica deste processo de aproximação. O que seria plausível esperar para a família de soluções aproximadas $\{u^\varepsilon\}$ seria limitação uniforme e equicontinuidade, o que implicaria a existência de uma subsequência $\{u^{\varepsilon_j}\}$ convergindo uniformemente em compactos de $\mathbb{R}^N \times [0, \infty[$ a um limite $u \in C^0(\mathbb{R}^N \times [0, \infty[)$, pelo Teorema de Arzela – Ascoli.

II.1.2 – Teorema (II.1.1) (Arzela – Ascoli)

Seja $F \subset C[a, b]^N$

Qualquer que seja a seqüência $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, $f_n \in F$ pode ser escolhida uma subsequência uniformemente convergente em $C[a, b]^N$ se, e somente se, F é uniformemente limitada e equicontínua.

Definição (II.1.1): $F \subset C[a, b]^N$ é uniformemente limitado se

$$\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \quad \forall x \in [a, b]^N \quad \forall f \in F.$$

Definição (II.1.2): $F \subset C[a, b]^N$, é equicontínuo se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$:
 $\forall x_1, x_2 \in [a, b]^N$ com $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \forall f \in F$.

Gostaria também de indicar um lema de análise real que desempenha um papel importante na teoria a ser desenvolvida.

Lema (II.1.1) Sejam φ e Ψ funções contínuas definidas em $\overline{B(x_0, R)}$, a bola fechada de centro $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e raio R . Suponha que φ possua um máximo (mínimo) estrito em x_0 . Seja

$$m = \varphi(x_0) - \max_{|x-x_0|=R} \varphi \quad \left(m = \min_{|x-x_0|=R} \varphi - \varphi(x_0) \right).$$

Se Ψ satisfaz a condição: $\max_{|x-x_0| \leq R} |\varphi - \Psi| < m/2$ então Ψ tem um máximo (mínimo) em $B(x_0, R)$.

Em outras palavras, se φ possui um extremo estrito em x_0 , então toda função contínua, suficientemente próxima de φ , na norma da convergência uniforme, também possui um extremo local próximo a x_0 .

Seja $\phi = \phi(x, t)$ uma função teste $C^\infty(\mathbb{R}^N \times]0, \infty[)$. Suponha que

$$z_0 \equiv (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^N \times]0, \infty[$$

seja um ponto de máximo local estrito de $u - \phi$. Vamos mostrar que nestas condições, ϕ é uma subsolução da equação de Hamilton – Jacobi em z_0 . Seja R_0 tal que $(u - \phi)(z) < (u - \phi)(z_0)$ para todo $z \equiv (x, t)$ na bola $B(z_0, R_0)$, $z \neq z_0$. Sejam

$$R_k = \frac{R_0}{k+1}, \quad k=1, 2, \dots \quad \text{e} \quad m_k = (u - \phi)(z_0) - \max_{|z-z_0|=R_k} (u - \phi).$$

Defina $\{j_k\}$ uma subsequência crescente de números naturais tal que, se $u^k \equiv u^{\varepsilon_{j_k}}$, então $\max_{|z-z_0|=R_k} |u^k - u| < m_k/2$.

Pelo Lema (II.1.1) existe uma seqüência $z_k \equiv (x_k, t_k)$ tal que $|z_k - z_0| < R_k$, isto é, $z_k \rightarrow z_0$ quando $k \rightarrow \infty$, e $u^k - \phi$, tem um máximo local em z_k .

Observe que $u^k - \phi$ é uma função suave, com máximo local em z_k , o que acarreta

$$\nabla u^k(z_k) = \nabla \phi(z_k) \text{ e } u_t^k(z_k) = \phi_t(z_k).$$

Além disso, $-\Delta u^k(z_k) \geq -\Delta \phi(z_k)$.

Portanto, temos que:

$$\phi_t(x_k, t_k) + H(\nabla \phi(x_k, t_k), x_k) = u_t^k(x_k, t_k) + H(\nabla u^k(x_k, t_k), x_k) = \varepsilon_{j_k} \Delta u^k(x_k, t_k) \leq \varepsilon_{j_k} \Delta \phi(x_k, t_k),$$

fazendo $k \rightarrow \infty$ temos que:

$$\phi_t(x_0, t_0) + H(\nabla \phi(x_0, t_0), x_0) \leq 0.$$

Se $(u - \phi)$ tiver apenas um máximo local (ao invés de um máximo local estrito), substituímos ϕ por $\hat{\phi} = \phi + \delta(|x - x_0|^2 + (t - t_0)^2)$, que agora é tal que $(u - \hat{\phi})$ tem um máximo estrito, e obtemos: $\hat{\phi}_t(x_0, t_0) + H(\nabla \hat{\phi}(x_0, t_0), x_0) \leq 0$.

Contudo, $\hat{\phi}_t(x_0, t_0) = \phi_t(x_0, t_0)$ e $\nabla \hat{\phi}(x_0, t_0) = \nabla \phi(x_0, t_0)$ já que a função quadrática que foi adicionada não afeta as derivadas de primeira ordem de ϕ em (x_0, t_0) . Desse modo, obtemos que ϕ ainda é uma subsolução da equação de Hamilton – Jacobi em (x_0, t_0) .

A mesma análise pode ser efetuada tomando-se as funções teste ϕ tais que $u - \phi$ tenha um mínimo local em (x_0, t_0) ; estas ϕ serão supersoluções das equações de Hamilton – Jacobi em (x_0, t_0) .

O que observamos é que limites uniformes de soluções das aproximações parabólicas da equação de Hamilton – Jacobi tem uma propriedade especial com respeito a função teste. A definição de solução de viscosidade incorpora precisamente esta propriedade.

II.1.3:- Definição de Solução de Viscosidade da EHJ.

Definição (II.1.3): Seja u uma função limitada, uniformemente contínua.

- 1) Diz-se que u é uma subsolução de viscosidade da EHJ (II.1.1) se:
 - a) $u \leq g$ em $\mathbb{R}^N \times \{t = 0\}$ e
 - b) para todo $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^N \times]0, \infty[$ e cada $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times]0, \infty[)$ tal que $(u - \phi)$ tem máximo local em (x_0, t_0) vale: $\phi_t(x_0, t_0) + H(\nabla \phi(x_0, t_0), x_0) \leq 0$.
- 2) Diz-se que u é uma supersolução de viscosidade da EHJ (II.1.1) se:
 - a) $u \geq g$ em $\mathbb{R}^N \times \{t = 0\}$ e
 - b) para todo $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^N \times]0, \infty[$ e cada $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times]0, \infty[)$ tal que $(u - \phi)$ tem um mínimo local em (x_0, t_0) vale: $\phi_t(x_0, t_0) + H(\nabla \phi(x_0, t_0), x_0) \geq 0$.
- 3) Diz-se que u é uma solução de viscosidade se u for ao mesmo tempo subsolução e supersolução de viscosidade.

Aqui um máximo (x_0, t_0) de $u - \phi$ é estrito se existe uma função não decrescente $h:]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ e $r_0 > 0$ tal que $u(x, t) - \phi(x, t) \leq u(x_0, t_0) - \phi(x_0, t_0) - h(r)$ para $r \leq |(x, t) - (x_0, t_0)| \leq r_0$ h é denominada função rigor.

Resultado de Consistência: Podemos demonstrar que uma solução de viscosidade diferenciável em um ponto (x_0, t_0) , satisfaz a equação no sentido clássico no ponto (x_0, t_0) .

II.1.4 – Definição alternativa de Solução de Viscosidade

Do ponto de vista prático, de estudar soluções de viscosidade, veremos que é útil estar de posse de uma definição alternativa, porém equivalente, de solução de viscosidade que prescinde do uso de funções teste. Contudo essa definição alternativa se apóia no conceito de semidiferencial de uma função contínua.

Seja u uma função contínua em um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^M$ e $x_0 \in \Omega$.

Definição (II.1.4): A superdiferencial de u em x_0 é definida por:

$$D^+u(x_0) \equiv \left\{ p \in \mathbb{R}^M \mid \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0) - p(x - x_0)}{|x - x_0|} \leq 0 \right\}$$

A subdiferencial de u em x_0 é definida por:

$$D^-u(x_0) \equiv \left\{ p \in \mathbb{R}^M \mid \liminf_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0) - p(x - x_0)}{|x - x_0|} \geq 0 \right\}$$

1) As semidiferenciais $D^+u(x_0)$ e $D^-u(x_0)$ são subconjuntos fechados e conexos de $\mathbb{R}^M$.

2) As seguintes afirmações são equivalentes

i) u é diferenciável em x_0

ii) $D^+u(x_0) = D^-u(x_0) = \{\nabla u(x_0)\}$

iii) $D^+u(x_0) \cap D^-u(x_0) \neq \emptyset$

3) Em um ponto de máximo (mínimo) local $\hat{x}$ de u temos que

$$0 \in D^+u(\hat{x}) \cap D^-u(\hat{x}).$$

Para efeitos da teoria a ser desenvolvida é conveniente tratar equações diferenciais parciais mais gerais do que a equação de Hamilton – Jacobi. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^M$ e $F: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Vamos definir solução de viscosidade para o problema de valor de fronteira:

$$\begin{cases} F(y, u, Du) = 0 & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{II.1.2})$$

Estaremos interessados em três contextos distintos para este problema: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio aberto e limitado, $\Omega = \mathbb{R}^N$, sem condição no infinito e $\Omega = \mathbb{R}^N \times]0, \infty[$ com a estrutura específica do problema de valor inicial da equação de Hamilton – Jacobi. Nos dois primeiros casos $Du \equiv \nabla u$ e no terceiro caso, $y = (x, t)$ e $Du \equiv (\nabla u, u_t)$.

Definição (II.1.5): Seja $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada, uniformemente contínua.

1) Diz-se que u é uma subsolução de viscosidade da equação (II.1.2) se:

a) $u \leq g$ em $\partial\Omega$ e

- b) para todo $y_0 \in \Omega$ e cada $\phi \in C^\infty(\Omega)$ tal que $(u - \phi)$ tem máximo local em y_0 vale: $F(y_0, u(y_0), D\phi(y_0)) \leq 0$.
- 2) Diz-se que u é uma supersolução de viscosidade da equação (II.1.2) se:
- a) $u \geq g$ em $\partial\Omega$ e
- b) para todo $y_0 \in \Omega$ e cada $\phi \in C^\infty(\Omega)$ tal que $(u - \phi)$ tem um mínimo local em y_0 vale: $F(y_0, u(y_0), D\phi(y_0)) \geq 0$.
- 3) Diz-se que u é uma solução de viscosidade se u for ao mesmo tempo subsolução e supersolução de viscosidade.

Proposição (II.1.1) Seja u uma função limitada e uniformemente contínua em $\bar{\Omega}$ tal que $u \leq (\geq) g$ em $\partial\Omega$. Então u é subsolução (supersolução) de viscosidade de (II.1.2) se, e somente se, para todo $y_0 \in \Omega$ e $p_0 \in D^+u(y_0)$ ($p_0 \in D^-u(y_0)$) temos $F(y_0, u(y_0), p_0) \leq (\geq) 0$.

Concluimos com a definição alternativa de solução de viscosidade, expressa em termos de semidiferenciais, que é equivalente à definição (II.1.5) pela proposição (II.1.1).

Definição (II.1.6): Seja $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada, uniformemente contínua.

- 1) Diz-se que u é uma subsolução de viscosidade da equação (II.1.2) se:
- a) $u \leq g$ em $\partial\Omega$ e
- b) para cada $y \in \Omega$ e $p \in D^+u(y)$ temos $F(y, u(y), p) \leq 0$.
- 2) Diz-se que u é uma supersolução de viscosidade da equação (II.1.2) se:
- a) $u \geq g$ em $\partial\Omega$ e
- b) para cada $y \in \Omega$ e $q \in D^-u(y)$ temos $F(y, u(y), q) \geq 0$.
- 3) Diz-se que u é uma solução de viscosidade se u for ao mesmo tempo subsolução e supersolução de viscosidade.

II.2 EDP de 2ª ordem (Crandall, Ishii e Lions [7])

II.2.1 Semijet de 2ª ordem

Seja a equação diferencial parcial da forma $F(x, u, \nabla u, D^2 u) = 0$, onde

$$F: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S(N) \rightarrow \mathbb{R}$$

e

- $S(N)$ são matrizes simétricas $N \times N$
- $u: \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$
- ∇u é gradiente de u
- $D^2 u$ é a matriz de derivadas segundas de u

Condição de Monotonicidade

$$F(x, r, p, X) \leq F(x, s, p, Y) \text{ quando } r \leq s \text{ e } Y \leq X. \quad (\text{II.2.1})$$

onde $r, s \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$, $p \in \mathbb{R}^N$, $X, Y \in S(N)$ e $S(N)$ é munido com sua ordem usual, isto é, $X \leq Y$ quando $\langle X\xi, \xi \rangle \leq \langle Y\xi, \xi \rangle$ (produto interno euclidiano) para $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Desigualdade (II.2.1) é a composição de duas condições.

$$F(x, r, p, X) \leq F(x, s, p, X) \text{ quando } r \leq s \quad (\text{II.2.2})$$

e

$$F(x, r, p, X) \leq F(x, r, p, Y) \text{ quando } Y \leq X. \quad (\text{II.2.3})$$

F é chamada elipticamente degenerada se satisfaz a condição (II.2.3), e quando também satisfaz a condição (II.2.2) (equivalentemente (II.2.1) é satisfeita), dizemos que F é exata.

Definição (II.2.1): Uma solução clássica de uma equação

$F(x, u(x), \nabla u(x), D^2 u(x)) = 0$ é uma função $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $C^2(\mathbb{R}^N)$ que satisfaz a equação $F(x, u(x), \nabla u(x), D^2 u(x)) = 0$ em todos os pontos de Ω .

Assume-se que F é exata e contínua, a menos que o contrário seja dito. Para motivar as noções de soluções viscosas, supomos que $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e $F(x, u(x), \nabla u(x), D^2 u(x)) \leq 0$ vale para todo $x \in \mathbb{R}^N$ (isto é, u é uma subsolução clássica de $F=0$ ou, equivalentemente, uma solução clássica de $F \leq 0$ em $\mathbb{R}^N$).

Suponha que $\phi \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e $\hat{x}$ é um máximo local de $(u - \phi)$, então

$$\nabla(u - \phi)(\hat{x}) = 0 \quad (\nabla u(\hat{x}) = \nabla \phi(\hat{x})) \quad \text{e} \quad D^2(u - \phi)(\hat{x}) \leq 0 \quad (D^2 u(\hat{x}) \leq D^2 \phi(\hat{x})),$$

então pela elipticidade degenerada

$$F(\hat{x}, u(\hat{x}), \nabla \phi(\hat{x}), D^2 \phi(\hat{x})) \leq F(\hat{x}, u(\hat{x}), \nabla u(\hat{x}), D^2 u(\hat{x})) \leq 0. \quad (\text{II.2.4})$$

Os Extremos desta desigualdade não dependem das derivadas de u , e deste modo podemos considerar a função arbitrária u como sendo (classe generalizada) subsolução de $F = 0$ se

$$F(\hat{x}, u(\hat{x}), \nabla \phi(\hat{x}), D^2 \phi(\hat{x})) \leq 0. \quad (\text{II.2.5})$$

Como $u(x) \leq u(\hat{x}) - \phi(\hat{x}) + \phi(x)$ para x próximo de $\hat{x}$, $\phi \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e pelo desenvolvimento de Taylor de ϕ em torno do ponto $\hat{x}$ segue que

$$u(x) \leq u(\hat{x}) + \langle p, x - \hat{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle X(x - \hat{x}), x - \hat{x} \rangle + 0(|x - \hat{x}|^2), \quad (\text{II.2.6})$$

quando $x \rightarrow \hat{x}$, onde $p = \nabla \phi(\hat{x})$ e $X = D^2 \phi(\hat{x})$.

Além disso, se (II.2.6) vale para algum $(p, X) \in \mathbb{R}^N \times S(N)$ e u é duas vezes diferenciável em $\hat{x}$, então $p = \nabla u(\hat{x})$ e $D^2 u(\hat{x}) \leq X$. Assim se u é uma solução clássica de $F \leq 0$ segue que $F(\hat{x}, u(\hat{x}), p, X) \leq 0$ sempre que (II.2.6) vale, podemos também basear uma definição em soluções não diferenciáveis u de $F \leq 0$. Se observarmos (II.2.5), seremos conduzidos para noções baseadas sobre funções de teste ϕ , mas observando (II.2.6) seremos conduzidos a definir $(\nabla u, D^2 u)$ para funções não diferenciáveis u . Por esta razão, começamos desenvolvendo a linha sugerida por (II.2.6).

Logo introduzimos um conjunto $\mathfrak{S} = \{x \in \mathbb{R}^N : F(x, u(x), p, X) \leq 0\}$ e com notação apropriada tratar com desigualdade semelhante a (II.2.6) sobre $\mathfrak{S}$. No momento, $\mathfrak{S}$ é

arbitrário, mais tarde vamos requerer ser localmente compacto. Partindo de (II.2.6) se $u : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}$, $\hat{x} \in \mathfrak{S}$, e (II.2.6) vale conforme $x \rightarrow \hat{x}$, $x \in \mathfrak{S}$, dizemos que $(p, X) \in J_{\mathfrak{S}}^{2,+} u(\hat{x})$ (superjet de segunda ordem de u em $\hat{x}$). Este define um mapeamento $J_{\mathfrak{S}}^{2,+} u$ de $\mathfrak{S}$ para subconjuntos de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N$.

Outra maneira de definirmos superjet de segunda ordem.

Definição (II.2.2): (Bardi, Crandall, Evans, Soner e Souganidis [5]).

A função quadrática que está no lado direito de

$$u(x) \leq u(\hat{x}) + \langle p, x - \hat{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle X(x - \hat{x}), x - \hat{x} \rangle + 0(|x - \hat{x}|^2),$$

quando $x \rightarrow \hat{x}$, $x \in \mathfrak{S}$, é definido por “JET” $(u(\hat{x}), p, X)$ e escrevemos

$(u(\hat{x}), p, X) \in J_{\mathfrak{S}}^{2,+} u(\hat{x})$ (superjet de segunda ordem de u em $\hat{x}$) quando (II.2.6) vale.

Poderíamos também ao invés de super “JET”, usar termo superdiferencial de segunda ordem.

Exemplo ilustrativo:

$$\text{Seja } u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ definido por } u(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq 0 \\ ax + \frac{b}{2}x^2 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Então } J_{[-1,0]}^{2,+} u(0) = (]-\infty, 0[\times \mathbb{R}) \cup (\{0\} \times [0, \infty[),$$

enquanto

$$J_{\mathbb{R}}^{2,+} u(0) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } a > 0 \\ \{0\} \times [\max\{0, b\}, \infty[& \text{se } a = 0 \\ ([a, 0[\times \mathbb{R}) \cup (\{0\} \times [0, \infty[) \cup (\{a\} \times [b, \infty[) & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Através deste exemplo podemos ver que $J_{\mathfrak{S}}^{2,+} u(x)$ varia com $\mathfrak{S}$, mas o

procedimento para sua realização é igual para todo conjunto $\mathfrak{S}$ para o qual x é um ponto interior, denotamos por $J^{2,+} u(x)$ este valor geral. Se repetirmos a discussão acima comutando o sinal da desigualdade em (II.2.6) obtemos a definição de $J_{\mathfrak{S}}^{2,-} u(x)$ (subject de 2ª ordem) onde $J_{\mathfrak{S}}^{2,-} u(x) = -J_{\mathfrak{S}}^{2,+} (-u)(x)$.

II.2.2 – Definição e Propriedades de Cobertura Semicontínua Superior e Inferior

(Bardi, Crandall, Evans, Sover e Souganidis [5])

Definição (II.2.3): Uma cobertura semicontínua superior u^* e uma cobertura semicontínua inferior u_* da função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, são definidas, respectivamente, por:

$$\begin{cases} u^*(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \{u(y) : y \in \Omega, |y - x| \leq r\} \\ u_*(x) = \liminf_{r \rightarrow 0} \{u(y) : y \in \Omega, |y - x| \leq r\}. \end{cases}$$

Dizemos que u é semicontínua superior se $u = u^*$ e semicontínua inferior se $u = u_*$; equivalentemente, u é semicontínua superior (inferior) se $x_k \rightarrow x$ implica que $u(x) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} u(x_k)$ ($u(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} u(x_k)$). Naturalmente, u^* é semicontínua superior e u_* é semicontínua inferior.

Propriedades:

- 1) u é semicontínua superior se, e somente se, $v = -u$ é semicontínua inferior.
- 2) Uma função semicontínua superior e inferior é contínua.
- 3) Se $\mathfrak{S}$ é compacto e u é semicontínua superior em $\mathfrak{S}$, então u tem um ponto máximo $\hat{x}$ tal que $u(x) \leq u(\hat{x})$ para $x \in \mathfrak{S}$.

II.2.3 – Definição de Soluções Viscosas para EDP de 2ª Ordem

(Crandall, Ishii e Lions [7])

Notação:

$USC(\mathfrak{S}) = \{\text{Funções semicontínuas superiores } u : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}\}$

$LSC(\mathfrak{S}) = \{\text{Funções semicontínuas inferiores } u : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}\}$

Definição (II.2.4): Sejam F uma EDP exata, $\mathfrak{S}$ um conjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e $u : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.

Uma subsolução de viscosidade de $F = 0$ (equivalentemente, uma solução de viscosidade de $F \leq 0$) em $\mathfrak{S}$ é uma função $u \in \text{USC}(\mathfrak{S})$ tal que:

$$F(x, u(x), p, X) \leq 0 \text{ para todo } x \in \mathfrak{S} \text{ e } (p, X) \in J_{\mathfrak{S}}^{2,+} u(x). \quad (\text{II.2.7})$$

Similarmente, a supersolução de viscosidade de $F = 0$ em $\mathfrak{S}$ é uma função $u \in \text{LSC}(\mathfrak{S})$ tal que:

$$F(x, u(x), p, X) \geq 0 \text{ para todo } x \in \mathfrak{S} \text{ e } (p, X) \in J_{\mathfrak{S}}^{2,-} u(x). \quad (\text{II.2.8})$$

Finalmente, u é solução de viscosidade de $F = 0$ em $\mathfrak{S}$ se é ao mesmo tempo uma subsolução de viscosidade e uma supersolução de viscosidade de $F = 0$ em $\mathfrak{S}$.

Visto que estas noções de viscosidades são as iniciais para a discussão corrente, imediatamente concordamos colocar o termo viscosidade e depois simplesmente referir a subsoluções, supersoluções e soluções. Esta é uma idéia feliz, como o termo viscosidade, é um artefato de origem da teoria no estudo de EDP de 1ª ordem e o nome estava então motivado pela consistência da noção com o método de viscosidade evanescente o qual é inaplicável para muitas EDP de 2ª ordem. Seguindo de acordo com a discussão precedente a definição que, por exemplo, se u é uma solução de $F \leq 0$ em $\mathfrak{S}$, ϕ é C^2 na vizinhança de $\mathfrak{S}$, e $(u - \phi)$ tem um máximo local (relativo a $\mathfrak{S}$) e $\hat{x} \in \mathfrak{S}$, então

$$F(\hat{x}, u(\hat{x}), \nabla \phi(\hat{x}), D^2 \phi(\hat{x})) \leq 0 \text{ vale. Analogamente, observações valem para}$$

supersolução. Estas observações motivaram a exigência que uma subsolução seja semicontínua superior, etc, no sentido que produzir máximos de funções semicontínuas superior é direto. Soluções, existindo ambas, semicontínua superior e inferior, são contínuas. A validade de (II.2.5) para todo $\phi \in C^2$ (com os máximos relativos a $\mathfrak{S}$) para uma função semicontínua superior u é equivalente para u existindo uma subsolução. De fato, se $\hat{x} \in \mathfrak{S}$ então

$$J_{\mathfrak{S}}^{2,+} u(\hat{x}) = \left\{ \left(\nabla \phi(\hat{x}), D^2 \phi(\hat{x}) \right) : \phi \in C^2 \text{ e } (u - \phi) \text{ tem um máximo local em } \hat{x} \right\}.$$

Registraremos em seguida as conclusões de conjunto validade dos mapeamentos necessários na secção seguinte.

Com a notação acima, para $x \in \mathfrak{S}$, colocamos

$$\bar{J}_{\mathfrak{S}}^{2,+}u(x) = \{(p, X) \in \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}(\mathbb{N}) : \exists (x_n, p_n, X_n) \in \mathfrak{S} \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}(\mathbb{N}) \text{ tal que } (p_n, X_n) \in J_{\mathfrak{S}}^{2,+}u(x_n) \text{ e } (x_n, u(x_n), p_n, X_n) \rightarrow (x, u(x), p, X)\} \quad (\text{II.2.9})$$

e

$$\bar{J}_{\mathfrak{S}}^{2,-}u(x) = \{(p, x) \in \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}(\mathbb{N}) : \exists (x_n, p_n, X_n) \in \mathfrak{S} \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}(\mathbb{N}) \text{ tal que } (p_n, X_n) \in J_{\mathfrak{S}}^{2,-}u(x_n) \text{ e } (x_n, u(x_n), p_n, X_n) \rightarrow (x, u(x), p, X)\} \quad (\text{II.2.10})$$

Abusamos do modelo usado, ao considerarmos o fecho do conjunto validade do mapeamento em que colocamos a condição extra $u(x_n) \rightarrow u(x)$ nas definições, enquanto os gráficos das multifunções $J_{\mathfrak{S}}^{2,+}u, J_{\mathfrak{S}}^{2,-}u$ elas mesmas não registram os valores de u . O leitor pode notar o uso de expressões como $x_n \rightarrow x$ como uma abreviação para a seqüência $\{x_n\}$ que satisfaz $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, etc. Se $x \in \text{interior}(\mathfrak{S})$, definimos

$\bar{J}^{2,+}u(x), \bar{J}^{2,-}u(x)$ de uma maneira óbvia.

Uma função semicontínua superior $u : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma subsolução de uma equação exata $F = 0$ se, e somente se $F(x, u(x), p, X) \leq 0$ para cada $x \in \mathfrak{S}$ e

$(u(x), p, X) \in J_{\mathfrak{S}}^{2,+}u(x)$. Se F é contínua (ou semicontínua inferior), a relação

$F(x, u(x), p, X) \leq 0$ persistir inferiormente tomando limites, nos conduzirá para definir o fecho $\bar{J}^{2,+}u$ de $J^{2,+}u$. Isto procede como segue:

$(r, p, X) \in \bar{J}^{2,+}u(x)$ se existir, $x_n \in \mathfrak{S}$, tal que $x_n \rightarrow x$ e

$(u(x_n), p_n, X_n) \in J^{2,+}u(x_n)$ tal que $(u(x_n), p_n, X_n) \rightarrow (r, p, X)$.

Temos então que uma função semicontínua superior $u : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma subsolução da equação exata $F = 0$ se, e somente se $F(x, r, p, X) \leq 0$ para cada $x \in \mathfrak{S}$ e

$(r, p, X) \in \bar{J}^{2,+}u(x)$. Note que semicontinuidade superior de u implica que $r \leq u(x)$, é possível que $F(x, u(x), p, X) > 0$.

Define-se $\bar{J}^{2-}u$ similarmente e então $u: \mathfrak{G} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma supersolução de uma equação exata $F = 0$ se, e somente se $F(x, r, p, X) \geq 0$ para cada $x \in \mathfrak{G}$ e $(r, p, X) \in \bar{J}^{2-}u(x)$.

Observação: O leitor pode notar que a quantidade $u(x)$ em $(u(x), p, X) \in J^{2+}u(x)$ aparece para ser redundante, mas é incorporado por razões técnicas de acordo com Crandall [5].

II.2.4 – Princípio do Máximo para Funções Semicontínuas

(Crandall, Ishii e Lions [7])

Seja Ω um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^N$, $\bar{\Omega}$ seu fecho e $\partial\Omega$ seu contorno. Vamos supor que $u \in \text{USC}(\bar{\Omega})$ é uma solução de $F \leq 0$ em Ω , $v \in \text{LSC}(\bar{\Omega})$ é uma solução de $F \geq 0$ e $u \leq v$ em $\partial\Omega$. Pretendemos mostrar que $u \leq v$ em $\bar{\Omega}$.

Primeiramente vamos supor que u e v são subsolução e supersolução clássica, empregaremos o clássico Princípio do Máximo. Recordemos alguns fatos elementares nesta consideração. Seja w definida em uma vizinhança de $\hat{x} \in \mathbb{R}^N$. Se existe

$(p, X) \in \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}(N)$ tal que

$$w(x) = w(\hat{x}) + \langle p, x - \hat{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle X(x - \hat{x}), x - \hat{x} \rangle + o(|x - \hat{x}|^2) \quad (\text{II.2.11})$$

quando $x \rightarrow \hat{x}$ dizemos que w é duas vezes diferenciável em $\hat{x}$ e

$\nabla w(\hat{x}) = p$ e $D^2w(\hat{x}) = X$ (obviamente p e X são únicos se existirem), é claro que w é duas vezes diferenciável em $\hat{x}$ se, e somente se, $J^2w(\hat{x}) \equiv J^{2+}w(\hat{x}) \cap J^{2-}w(\hat{x})$ é não vazio (caso que $J^2w(\hat{x}) = \{(\nabla w(\hat{x})), D^2w(\hat{x})\}$). Instrumentações clássicas do princípio do máximo são baseadas no fato, já usado acima, que se w é duas vezes diferenciável em um ponto de máximo local $\hat{x}$, então, $\nabla w(\hat{x}) = 0$ e $D^2w(\hat{x}) \leq 0$. Assim, se u e v são duas vezes diferenciáveis em Ω e $w = u - v$ tem um máximo local $\hat{x} \in \Omega$, teremos $\nabla u(\hat{x}) = \nabla v(\hat{x})$ e $D^2u(\hat{x}) \leq D^2v(\hat{x})$ e então, em vista de (II.2.1)

$$F(\hat{x}, u(\hat{x}), \nabla u(\hat{x}), D^2 u(\hat{x})) \leq 0 \leq F(\hat{x}, v(\hat{x}), \nabla v(\hat{x}), D^2 v(\hat{x})) \leq F(\hat{x}, v(\hat{x}), \nabla u(\hat{x}), D^2 u(\hat{x})).$$

Em caso que $F(x, r, p, X)$ é estritamente não decrescente em r (um simples mas ilustrativo caso), segue $u - v$ é não positivo em um máximo interior e assim, $u \leq v$ em Ω como $u \leq v$ vale em $\partial\Omega$ então $u \leq v$ em $\bar{\Omega}$.

Pretendemos estender esse argumento para o caso de $u \in USC(\bar{\Omega}), v \in LSC(\bar{\Omega})$. As expressões $(\nabla u(\hat{x}), D^2 u(\hat{x}))$ e $(\nabla v(\hat{x}), D^2 v(\hat{x}))$ em F devem ser substituídas pelo conjunto valor das funções $J^{2,+}u$ e $J^{2,-}v$ (esses conjuntos podem ser vazio em muitos pontos, incluindo pontos de máximo de $u(x) - v(x)$). Para usar $J^{2,+}u$ e $J^{2,-}v$, empregamos um expediente que dobra o número de variáveis.

Mais precisamente, maximizamos a função $u(x) - v(y) - \left(\frac{\alpha}{2}\right)|x - y|^2$ sobre $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$, onde $\alpha > 0$ é um parâmetro. Quando $\alpha \rightarrow \infty$, aproximamos juntos maximizado $u(x) - v(x)$ sobre $\bar{\Omega}$. Mais precisamente, temos:

Lema (II.2.1) Seja $\mathfrak{S}$ um conjunto de $\mathbb{R}^N$, $u \in USC(\mathfrak{S}), v \in LSC(\mathfrak{S})$ e

$$M_\alpha = \sup_{\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}} \left(u(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2}|x - y|^2 \right) \text{ para } \alpha > 0$$

Seja $M_\alpha < \infty$ para α grande e (x_α, y_α) tal que

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(M_\alpha - \left(u(x_\alpha) - v(y_\alpha) - \frac{\alpha}{2}|x_\alpha - y_\alpha|^2 \right) \right) = 0.$$

Então o seguinte vale

$$\begin{cases} \text{i) } \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha |x_\alpha - y_\alpha|^2 = 0 \\ \text{ii) } \lim_{\alpha \rightarrow \infty} M_\alpha = u(\hat{x}) - v(\hat{x}) = \sup_{\mathfrak{S}} (u(x) - v(x)) \end{cases} \quad (\text{II.2.12})$$

sempre que $\hat{x} \in \mathfrak{S}$ é um ponto limite de x_α quando $\alpha \rightarrow \infty$.

Adiando a elementar prova do Lema(II.2.1) e retornando para nossa subsolução e supersolução $u \in \text{USC}(\bar{\Omega}), v \in \text{LSC}(\bar{\Omega})$ satisfazendo $u \leq v$ em $\partial\Omega$, notamos que

$M_\alpha = \sup_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} \left(u(x) - v(y) - \frac{\alpha}{2} |x - y|^2 \right)$ é finito desde que $u(x) - v(y)$ é semicontínua superior e $\bar{\Omega}$ é compacto.

Desde que pretendemos provar que $u \leq v$, assumimos o contrário, ou seja, que $u(z) > v(z)$ para algum $z \in \Omega$.

$$\text{Isso segue que } M_\alpha \geq u(z) - v(z) \equiv \delta > 0 \text{ para } \alpha > 0, \quad (\text{II.2.13})$$

escolhendo (x_α, y_α) tal que $M_\alpha = u(x_\alpha) - v(y_\alpha) - \frac{\alpha}{2} |x_\alpha - y_\alpha|^2$ (o máximo é atingido em vista da semicontinuidade superior e compacidade), isto segue de (II.2.12), (i), (ii) e $u \leq v$ em $\partial\Omega$ que $(x_\alpha, y_\alpha) \in \Omega \times \Omega$ para α grande. O próximo passo é usar a equação para estimar e contradizer (II.2.13) para α grande. Isto exige produzir convenientes valores de $J^{2,+}u$ e $J^{2,-}u$ e voltamos para esta questão.

Para saber o que procurar, vamos proceder de forma geral e assumir que u, v são definidas em vizinhanças de $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^N$ e duas vezes diferenciável em $\hat{x}, \hat{y}$ respectivamente. Assuma, além disso, que $\phi \in C^2$ próximo $(\hat{x}, \hat{y})$ em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ e $(\hat{x}, \hat{y})$ é um máximo local de $u(x) - v(y) - \phi(x, y)$. Aplicando o clássico Princípio do Máximo para esta situação (nas $2N$ variáveis (x, y)); sabemos que

$$\begin{aligned} \nabla u(\hat{x}) &= D_x \phi(\hat{x}, \hat{y}), \quad \nabla v(\hat{y}) = -D_y \phi(\hat{x}, \hat{y}) \text{ e} \\ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} &\leq D^2 \phi(\hat{x}, \hat{y}) \text{ onde } X = D^2 u(\hat{x}) \text{ e } Y = D^2 v(\hat{y}) \end{aligned} \quad (\text{II.2.14})$$

Note que com a escolha $\phi(x, y) = \left(\frac{\alpha}{2} \right) |x - y|^2$, conduz a $\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq \alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$ (II.2.15) onde I é a matriz identidade em qualquer dimensão e, desde que o lado direito anule vetores da forma $Z = \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}$ (também escreve $Z' = (\xi, \xi)'$ onde Z' denota a transposta

da matriz Z), de (II.2.15) implica $X \leq Y$, fazendo mais adiante conexão com o máximo principal.

Isto é um notável fato que perturbações dos resultados acima podem ser obtidos na classe de funções semicontínuas. O resultado principal usado nesta direção é o seguinte teorema:

Teorema (II.2.1) Seja $\mathfrak{S}_i$ um subconjunto localmente compacto de $\mathbb{R}^{N_i}$ $i = 1, 2, \dots, k$
 $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2 \times \dots \times \mathfrak{S}_k$, $u_i \in \text{USC}(\mathfrak{S}_i)$ e ϕ duas vezes continuamente diferenciável em uma vizinhança de $\mathfrak{S}$. Seja $w(x) = u_1(x_1) + \dots + u_k(x_k)$ para $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathfrak{S}$, e suponha $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k) \in \mathfrak{S}$ é um máximo local de $w - \phi$ relativo a $\mathfrak{S}$. Então para cada $\varepsilon > 0$, existe $X_i \in S(N_i)$ tal que $(D_{x_i} \phi(\hat{x}), X_i) \in \bar{J}_{\mathfrak{S}_i}^{2,+} u_i(\hat{x})$ para $i = 1, 2, \dots, k$ e a matriz diagonal bloco com entradas X_i satisfazendo,

$$-\left(\frac{1}{\varepsilon} + \|A\|\right)I \leq \begin{pmatrix} X_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & X_k \end{pmatrix} \leq A + \varepsilon A^2, \quad (\text{II.2.16})$$

onde

$$A = D^2 \phi(\hat{x}) \in S(N) \quad N = N_1 + \dots + N_k.$$

A norma da matriz simétrica A é

$$\|A\| = \text{Sup} \left\{ \left| \langle A\xi, \xi \rangle \right| : |\xi| \leq 1 \right\} = \text{Sup} \left\{ |\lambda| : \lambda \text{ é um autovalor de } A \right\}.$$

Vamos aplicar o Teorema na situação abaixo:

colocamos $k = 2$, $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_2 = \Omega$, $u_1 = u$, $u_2 = -v$

$\phi(x, y) = \left(\frac{\alpha}{2}\right) |x - y|^2$ e lembrando que $\bar{J}_{\Omega}^{2,-} v = -\bar{J}_{\Omega}^{2,+}(-v)$. Neste caso

$$D_x \phi(\hat{x}, \hat{y}) = -D_y \phi(\hat{x}, \hat{y}) = \alpha(\hat{x} - \hat{y})$$

$$A = \alpha \begin{pmatrix} \text{I} & -\text{I} \\ -\text{I} & \text{I} \end{pmatrix} \quad A^2 = 2\alpha A \quad \|A\| = 2\alpha$$

e concluímos que para cada $\varepsilon > 0$, existe $X, Y \in S(N)$ tal que

$$(\alpha(\hat{x} - \hat{y}), X) \in \bar{J}_{\Omega}^{2,+} u(\hat{x}), (\alpha(\hat{x} - \hat{y}), Y) \in \bar{J}_{\Omega}^{2,-} v(\hat{y}) \quad (\text{II.2.17})$$

$$e - \left(\frac{1}{\varepsilon} + 2\alpha\right) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq \alpha(1 + 2\varepsilon\alpha) \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$$

Colocando $\varepsilon = \frac{1}{\alpha}$ vale a relação

$$-3\alpha \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq 3\alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.18})$$

em tudo, concluímos que em um máximo de $(\hat{x}, \hat{y})$ de $u(x) - v(y) - \left(\frac{\alpha}{2}\right)|x - y|^2$, existe $X, -Y \in S(N)$ tal que (II.2.17) e (II.2.18) valem. Observe que em comparação com (II.2.15), multiplicamos o limite superior por um fator de 3 (mas podemos ainda concluir de (II.2.18) que $X \leq Y$) e obtemos um limite inferior. Deveremos de fato não usar o limite inferior em que segue, mas sua presença corresponde a uma essencial compacidade na prova do teorema.

Terminamos escrevendo $(\hat{x}, \hat{y})$, no lugar de (x_α, y_α) para simplicidade, somente necessitamos assumir que $F(\hat{x}, u(\hat{x}), \alpha(\hat{x} - \hat{y}), X) \leq 0 \leq F(\hat{y}, v(\hat{y}), \alpha(\hat{x} - \hat{y}), Y)$ (II.2.19) é inconsistente com a outra informação que temos em mão, a qual inclui

$$\begin{cases} 0 \leq \delta \leq M_\alpha = u(\hat{x}) - v(\hat{y}) - \left(\frac{\alpha}{2}\right)|\hat{x} - \hat{y}|^2 \leq u(\hat{x}) - v(\hat{y}) \\ \text{e} \\ \alpha|\hat{x} - \hat{y}|^2 \rightarrow 0 \text{ quando } \alpha \rightarrow \infty \end{cases} \quad (\text{II.2.20})$$

(a segunda asserção segue de (II.2.12) (i) e (II.2.18).

Por exemplo, assuma que existe $\wp > 0$ tal que

$$\wp(r - s) \leq F(x, r, p, X) - F(x, s, p, X) \text{ para } r \geq s \quad (\text{II.2.21})$$

$(x, p, X) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N \times S(N)$ e existe uma função $\omega : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ que satisfaz

$\omega(O+) = 0$ tal que

$$F(y, r, \alpha(x - y), Y) - F(x, r, \alpha(x - y), X) \leq \omega(\alpha|x - y|^2 + |x - y|) \quad (\text{I.2.22})$$

quando $x, y \in \Omega, r \in \mathbb{R}, X, Y \in S(N)$ e (II.2.18) vale.

Prosseguindo, deduzimos de (II.2.20), (II.2.21) (II.2.19) e (II.2.22) que

$$\begin{aligned} \wp \delta &\leq \wp(u(\hat{x}) - v(\hat{y})) \leq F(\hat{x}, u(\hat{x}), \alpha(\hat{x} - \hat{y}), X) - F(\hat{x}, v(\hat{y}), \alpha(\hat{x} - \hat{y}), X) \\ &= \left(F(\hat{x}, u(\hat{x}), \alpha(\hat{x} - \hat{y}), X) - F(\hat{y}, v(\hat{y}), \alpha(\hat{x} - \hat{y}), Y) \right) + \left(F(\hat{y}, v(\hat{y}), \alpha(\hat{x} - \hat{y}), Y) \right. \\ &\quad \left. - F(\hat{x}, v(\hat{y}), \alpha(\hat{x} - \hat{y}), X) \right) \leq \omega(\alpha|\hat{x} - \hat{y}|^2 + |\hat{x} - \hat{y}|). \end{aligned} \quad (\text{II.2.23})$$

Aqui usamos (II.2.19) para estimar o primeiro termo na direita por 0 e (II.2.22) no segundo termo. Desde que $\omega(\alpha|\hat{x} - \hat{y}|^2 + |\hat{x} - \hat{y}|) \rightarrow 0$ quando $\alpha \rightarrow \infty$ por (II.2.20), então $\wp \delta \leq 0 \Rightarrow \delta \leq 0$ uma contradição, Portanto $u \leq v$.

Teorema (II.2.2). Seja Ω um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^N$,

$F \in C(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S(N))$ exata e satisfazer (II.2.21) e (II.2.22). Seja $u \in USC(\bar{\Omega})$ (respectivamente $v \in LSC(\bar{\Omega})$) uma subsolução (respectivamente, supersolução) de $F = 0$ em Ω e $u \leq v$ em $\partial\Omega$. Então $u \leq v$ em $\bar{\Omega}$.

Observação (II.2.1). Estamos indicando esta observação por (II.2.1) devido a sua importância para a demonstração da unicidade da solução viscosa.

Faremos algumas observações relativas a ponto de máximo de $u(x) - v(y) - \phi(x - y)$ sobre $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ para outras escolhas de ϕ além de $\phi(x, y) = \left(\frac{\alpha}{2}\right)|x - y|^2$ e as implicações do Teorema (II.2.1). Estamos assumindo que u é semicontínua superior e v é semicontínua inferior e $\phi \in C^2$. Nesta aplicação a matriz A do Teorema (II.2.1) tem a forma $A = \begin{pmatrix} Z & -Z \\ -Z & Z \end{pmatrix}$, onde $Z = D^2\phi(\hat{x} - \hat{y})$.

Deste modo,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2Z^2 & -2Z^2 \\ -2Z^2 & 2Z^2 \end{pmatrix} \text{ e } \|A\| = 2\|Z\|.$$

Escolhendo $\varepsilon = \frac{1}{\|A\|}$ na observação (II.2.1), concluímos que existem $X, Y \in S(N)$

tal que $(\nabla \phi(\hat{x} - \hat{y}), X) \in J_{\mathfrak{S}}^{2,+} u(\hat{x}), (\nabla \phi(\hat{x} - \hat{y}), Y) \in J_{\mathfrak{S}}^{2,-} v(\hat{y})$

e

$$-2\|A\| \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} Z + \frac{1}{\|A\|} Z^2 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} Z + \frac{1}{\|A\|} Z^2 \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} Z + \frac{1}{\|A\|} Z^2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} Z + \frac{1}{\|A\|} Z^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Em particular,

$$\|X\|, \|Y\| \leq 2\|A\| \text{ e } X \leq Y.$$

II.2.5 – Problemas Parabólicos (Crandall, Ishii e Lions [7])

Nesta secção indicamos como estender os resultados das secções precedentes para problemas envolvendo a equação parabólica $u_t + F(t, x, u, \nabla u, D^2 u) = 0$ onde agora u é uma função de (t, x) e $\nabla u, D^2 u$ significa $D_x u(t, x)$ e $D_x^2(t, x)$. Fazemos isto por similaridade discutindo para o problema de Cauchy-Dirichlet em um domínio limitado, queremos, então ser claro como modificar outras provas além disso. Seja $\mathfrak{S}$ um subconjunto compacto localmente de $\mathbb{R}^N, T > 0$, e $\mathfrak{S}_T = (0, T) \times \mathfrak{S}$. Denotamos por $\mathfrak{P}_{\mathfrak{S}}^{2,+} u, \mathfrak{P}_{\mathfrak{S}}^{2,-} u$ as variantes parabólicas dos semijets $J_{\mathfrak{S}}^{2,+}, J_{\mathfrak{S}}^{2,-}$; por exemplo, se $u : \mathfrak{S}_T \rightarrow \mathbb{R}$ então $\mathfrak{P}_{\mathfrak{S}}^{2,+} u$ é definido por $(a, p, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S(N)$ estando em $\mathfrak{P}_{\mathfrak{S}}^{2,+} u(s, z)$ se $(s, z) \in \mathfrak{S}_T$ e

$$u(t, x) \leq u(s, z) + a(t - s) + \langle p, x - z \rangle + \frac{1}{2} \langle X(x - z), x - z \rangle + 0(|t - s| + |x - z|)^2 \quad (\text{II.2.24})$$

quando $\mathfrak{S}_T \ni (t, x) \rightarrow (s, z)$.

Similarmente $\mathfrak{P}_{\mathfrak{S}}^{2,-} u = -\mathfrak{P}_{\mathfrak{S}}^{2,+}(-u)$. A correspondente definição de $\bar{\mathfrak{P}}_{\mathfrak{S}}^{2,+}, \bar{\mathfrak{P}}_{\mathfrak{S}}^{2,-}$ são então claras.

A subsolução de equações parabólicas em $\mathfrak{S}_T$ é uma função $u \in \text{USC}(\mathfrak{S}_T)$ tal que $a + F(t, x, u(t, x), p, X) \leq 0$ para $(t, x) \in \mathfrak{S}_T$ e $(a, p, X) \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{S}}^{2,+} u(t, x)$ (II.2.25)

igualmente, a supersolução é uma função $v \in \text{LSC}(\mathfrak{S}_T)$ tal que

$$a + F(t, x, v(t, x), p, X) \geq 0 \text{ para } (t, x) \in \mathfrak{S}_T \text{ e } (a, p, X) \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{S}}^{2,-} v(t, x) \quad (\text{II.2.26})$$

e a solução é uma função que é simultaneamente uma subsolução e uma supersolução.

Observação: Sejam $x_0 = t$ e $\tilde{x} = (x_0, x)$ então a equação parabólica é uma equação da forma $\tilde{F}(\tilde{x}, u, D_{\tilde{x}}u, D_{\tilde{x}}^2u) = u_{x_0} + \dots$, esta é exata se, e somente se, $F(t, x, u, \nabla u, D^2u)$ é exata quando t é mantido fixo. A definição de subsolução, etc... de equações parabólicas, a qual inclui calcular que somente a primeira derivada com respeito a t aparece, não faz coincidir com a definição de subsolução etc... de $\tilde{F} = 0$ sob esta correspondência. Contudo, não é difícil ver que as duas noções são equivalentes.

Devemos ilustrar as considerações adicionais que surge em procedimento com o problema de Cauchy-Dirichlet para equações parabólicas quando oposto para o puro problema de Dirichlet no caso elíptico. O problema de interesse tem a forma

$$\begin{cases} (E) & u_t + F(t, x, u, \nabla u, D^2u) = 0 \text{ em } (0, T) \times \Omega \\ (BC) & u(t, x) = 0 \text{ para } 0 \leq t \leq T \text{ e } x \in \partial\Omega \\ (IC) & u(0, x) = \psi(x) \text{ para } x \in \bar{\Omega} \end{cases} \quad (\text{II.2.27})$$

onde $\Omega \in \mathbb{R}^N$ é aberto e $T > 0$ e $\psi \in C(\bar{\Omega})$ são dadas. Por uma subsolução de (II.2.27) em $[0, T] \times \bar{\Omega}$ queremos dizer uma função $u \in USC[0, T] \times \bar{\Omega}$ tal que u é uma subsolução de (E) , $u(t, x) \leq 0$ para $0 \leq t < T$ e $x \in \partial\Omega$ e $u(0, x) \leq \psi(x)$ para $x \in \bar{\Omega}$, a apropriada noção de supersolução e solução são então óbvia.

Teorema(II.2.3). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado. Seja $F \in C([0, T] \times \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times S(N))$ contínua, exata e satisfaz (II.2.21) e (II.2.22) para cada fixado $t \in [0, T]$, com a mesma função w . Se u é subsolução de (II.2.27) e v uma supersolução de (II.2.27), então $u \leq v$ em $[0, T] \times \Omega$.

Para continuar, requeremos a parabólica análoga do Teorema (II.2.1), tomando a seguinte forma.

Teorema (II.2.4). Seja $u_i \in \text{USC}((0,T) \times \mathfrak{S}_i)$ para $i=1,2,\dots,k$ onde $\mathfrak{S}_i$ é um subconjunto localmente compacto de $\mathbb{R}^{N_i}$, seja ϕ definida em uma vizinhança aberta de $(0,T) \times \mathfrak{S}_1 \times \dots \times \mathfrak{S}_k$ e tal que $(t, x_1, \dots, x_k) \rightarrow \phi(t, x_1, \dots, x_k)$ é uma vez continuamente diferenciável em t e duas vezes continuamente diferenciável em $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathfrak{S}_1 \times \dots \times \mathfrak{S}_k$.

Suponha que $\hat{t} \in (0,T)$, $\hat{x}_i \in \mathfrak{S}_i$ para $i=1,2,\dots,k$ e

$$w(t, x_1, \dots, x_k) \equiv u_1(t, x_1) + \dots + u_k(t, x_k) - \phi(t, x_1, \dots, x_k) \leq w(\hat{t}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k)$$

para $0 < t < T$ e $x_i \in \mathfrak{S}$. Assuma, além disso, que há um $r > 0$ tal que cada $M > 0$ existe um C tal que para cada $i=1,2,\dots,k$

$$\begin{cases} b_i \leq C \text{ sempre que } (b_i, q_i, X_i) \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{S}}^{2,+} u_i(t, x_i) \text{ e} \\ |x_i - \hat{x}_i| + |t - \hat{t}| \leq r \text{ e } |u_i(t, x_i)| + |q_i| + \|X_i\| \leq M. \end{cases} \quad (\text{II.2.28})$$

Então para cada $\varepsilon > 0$. Há $X_i \in \mathcal{S}(N_i)$ tal que

$$\begin{cases} \text{i) } (b_i, Dx_i \phi(\hat{t}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k), X_i) \in \bar{\mathfrak{P}}_{\mathfrak{S}_i}^{2,+} u_i(\hat{t}, \hat{x}_i) \text{ para } i=1, \dots, k. \\ \text{ii) } -\left(\frac{1}{\varepsilon} + \|A\|\right)I \leq \begin{pmatrix} X_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & X_k \end{pmatrix} \leq A + \varepsilon A^2. \\ \text{iii) } (b_1 + \dots + b_k) = \phi_t(\hat{t}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k). \end{cases} \quad (\text{II.2.29})$$

Onde,

$$A = (D_x^2 \phi)(\hat{t}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k).$$

Observe que a condição (II.2.28) é garantida por ter cada u_i como uma subsolução de uma equação parabólica.

Capítulo III

Modelo Matemático

III.1. Descrição do Modelo

Em nosso trabalho vamos, então, considerar o seguinte modelo:

$$u_t = g|\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \lambda(1-g)(u-I), \quad x \in \Omega, t > 0$$
$$u(x, 0) = I(x), \quad x \in \Omega \quad (\text{III.1.1})$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{\partial \Omega \times \mathbb{R}_+} = 0, \quad x \in \partial \Omega, t > 0$$

onde,

$$u: \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

$$g(u * \nabla G_\sigma) = \frac{1}{1 + k|u * \nabla G_\sigma|^2} \quad k > 0$$

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}} \quad \sigma > 0$$

III.2. Estudo da Função g

A função g que aparece no modelo é não negativa, isto é, $g(x) \geq 0$, não crescente, e satisfaz $g(0) = 1$. Para $x \in \mathbb{R}^N$ e $t \in \mathbb{R}^+$ temos que sua expressão é dada por:

$$g((u * \nabla G)(x, t)) = \frac{1}{1 + |(u * \nabla G)(x, t)|^2}$$

sem perda de generalidade assumimos $\sigma = k = 1$.

$$\text{Seja } \frac{\partial}{\partial x_1}(u * G)(x, t) = s_1, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N}(u * G)(x, t) = s_N$$

então

$$\begin{aligned} \nabla(u * G)(x, t) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(u * G)(x, t), \dots, \frac{\partial}{\partial x_N}(u * G)(x, t) \right) \\ &= (s_1, \dots, s_N) = s \end{aligned}$$

e

$$|\nabla(u * G)(x, t)|^2 = |(u * \nabla G)(x, t)|^2 = s_1^2 + \dots + s_N^2 = |s|^2,$$

portanto,

$$g(s) = \frac{1}{1 + |s|^2} = \frac{1}{1 + s_1^2 + \dots + s_N^2}, \quad s \in \mathbb{R}^N$$

A seguir vamos analisar a função g mais detalhadamente.

1) Calculemos $\frac{\partial g(s)}{\partial x_k}$.

$$\frac{\partial g(s)}{\partial x_k} = \frac{\partial g(s)}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial x_k} + \frac{\partial g(s)}{\partial s_2} \frac{\partial s_2}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial g(s)}{\partial s_N} \frac{\partial s_N}{\partial x_k}$$

mas

$$\frac{\partial s_1}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (u * G)(x, t) \right) = (u * G_{x_1 x_k})(x, t)$$

$\vdots$

$$\frac{\partial s_N}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_N} (u * G)(x, t) \right) = (u * G_{x_N x_k})(x, t)$$

Notação $G_{x_l x_k} = \frac{\partial^2 G}{\partial x_k \partial x_l}$.

Fazendo a substituição temos,

$$\frac{\partial g(s)}{\partial x_k} = \frac{\partial g(s)}{\partial s_1} (u * G_{x_1 x_k})(x, t) + \dots + \frac{\partial g(s)}{\partial s_N} (u * G_{x_N x_k})(x, t)$$

portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(s)}{\partial x_k} &= \sum_{l=1}^N \frac{\partial g}{\partial s_l}(s) (u * G_{x_l x_k})(x, t) \\ &= \sum_{l=1}^N \frac{\partial g}{\partial s_l}((u * \nabla G)(x, t)) (u * G_{x_l x_k})(x, t). \end{aligned}$$

2) Calculemos $\nabla g(s)$.

$$\frac{\partial g(s)}{\partial s_1} = -\frac{2s_1}{(1+s_1^2+\dots+s_N^2)^2} = -\frac{2s_1}{(1+|s|^2)^2}$$

$\vdots$

$$\frac{\partial g(s)}{\partial s_N} = -\frac{2s_N}{(1+s_1^2+\dots+s_N^2)^2} = -\frac{2s_N}{(1+|s|^2)^2}$$

$$\nabla g(s) = \left(\frac{\partial g(s)}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial g(s)}{\partial s_N} \right)$$

3) $\nabla g(s) = 0 \Rightarrow s_1 = s_2 = \dots = s_N = 0$, então $g(s)$ tem um ponto de máximo em $s = (0, 0, \dots, 0)$, pois $g(s) \geq 0$ e é não crescente.

4) Para $s = (0, 0, \dots, 0)$ temos $g(0) = 1$

e

$$\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{1+|s|^2} = 0$$

concluimos que $0 \leq g(s) \leq 1$, $\forall s \in \mathbb{R}^N$.

5) Calculemos $|\nabla g(s)|$.

$$|\nabla g(s)|^2 = \left(\frac{\partial g(s)}{\partial s_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial g(s)}{\partial s_N} \right)^2$$

$$|\nabla g(s)|^2 = \frac{4s_1^2}{(1+|s|^2)^4} + \dots + \frac{4s_N^2}{(1+|s|^2)^4} = \frac{4|s|^2}{(1+|s|^2)^4}$$

portanto,

$$|\nabla g(s)| = \frac{2|s|}{(1+|s|^2)^2}, \quad \forall s \in \mathbb{R}^N.$$

Observando a função $|\nabla g(s)|$, verificamos que

$$|\nabla g(0)| = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} |\nabla g(s)| = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2|s|}{1+2|s|^2+|s|^4} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{1}{|s|}+2|s|+|s|^3} = 0$$

e, portanto,

$$0 \leq |\nabla g(s)| \leq L_g, \quad L_g < \infty, \quad \forall s \in \mathbb{R}^N.$$

6) g é uma função Lipschitz, pois $|\nabla g(s)| \leq L_g \quad L_g < \infty \quad \forall s \in \mathbb{R}^N$

III.3 Estudo da Função $g^{1/2}$

$$g(s) = \frac{1}{1+|s|^2} \rightarrow g^{1/2}(s) = \left(\frac{1}{1+|s|^2} \right)^{1/2}$$

Analisemos $g^{1/2}$.

$$1- 0 \leq g^{1/2}(s) \leq 1, \quad \forall s \in \mathbb{R}^N.$$

$$2- \nabla g^{1/2}(s) = \left(\frac{\partial g^{1/2}(s)}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial g^{1/2}(s)}{\partial s_N} \right)$$

$$\frac{\partial g^{1/2}(s)}{\partial s_1} = -\frac{s_1}{(1+|s|^2)^{3/2}}, \dots, \frac{\partial g^{1/2}(s)}{\partial s_N} = -\frac{s_N}{(1+|s|^2)^{3/2}}$$

$$3) \left| \nabla g^{1/2}(s) \right| = \frac{|s|}{(1+|s|^2)^{3/2}}, \quad \forall s \in \mathbb{R}^N.$$

Observando $\left| \nabla g^{1/2}(s) \right|$, temos

$$\left| \nabla g^{1/2}(0) \right| = 0$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left| \nabla g^{1/2}(s) \right| = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{|s|}{(1+|s|^2)^{3/2}} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{|s|^{2/3}} + |s|^{4/3} \right)^{3/2}} = 0$$

e, portanto,

$$0 \leq \left| \nabla g^{1/2}(s) \right| \leq L_{g^{1/2}}, \quad L_{g^{1/2}} < \infty, \quad \forall s \in \mathbb{R}^N.$$

Concluimos, então, que $g^{1/2}(s)$ é uma função Lipschitz.

III.4 O Termo de Difusão $|\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$

Seja

$$u_t = g |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \lambda (1-g)(u-I)$$

$$u: \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2, t) \rightarrow u(x_1, x_2, t)$$

então,

$$\frac{\nabla u}{|\nabla u|} = \frac{1}{|\nabla u|} (u_{x_1}, u_{x_2}) = \left(\frac{u_{x_1}}{\sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}}, \frac{u_{x_2}}{\sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}} \right)$$

$$\text{Notação: } u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$$

Assim,

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_{x_1}}{\sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u_{x_2}}{\sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_{x_1}}{\sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}} \right) = \frac{u_{x_1 x_1} \sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} - u_{x_1} \left(\frac{2u_{x_1} u_{x_1 x_1} + 2u_{x_2} u_{x_2 x_1}}{2\sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}} \right)}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}$$

$$= \frac{u_{x_1 x_1} |\nabla u| - u_{x_1} \left(\frac{u_{x_1} u_{x_1 x_1} + u_{x_2} u_{x_2 x_1}}{|\nabla u|} \right)}{|\nabla u|^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{u_{x_2}}{\sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}} \right) = \frac{u_{x_2 x_2} \sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} - u_{x_2} \left(\frac{2u_{x_1} u_{x_1 x_2} + 2u_{x_2} u_{x_2 x_2}}{2\sqrt{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}} \right)}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}$$

$$= \frac{u_{x_2 x_2} |\nabla u| - u_{x_2} \left(\frac{u_{x_1} u_{x_1 x_2} + u_{x_2} u_{x_2 x_2}}{|\nabla u|} \right)}{|\nabla u|^2}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) &= \frac{u_{x_1 x_1} |\nabla u| - u_{x_1} \left(\frac{u_{x_1} u_{x_1 x_1} + u_{x_2} u_{x_2 x_1}}{|\nabla u|} \right) + u_{x_2 x_2} |\nabla u| - u_{x_2} \left(\frac{u_{x_1} u_{x_1 x_2} + u_{x_2} u_{x_2 x_2}}{|\nabla u|} \right)}{|\nabla u|^2} \\ |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) &= \frac{u_{x_1 x_1} |\nabla u|^2 - u_{x_1} (u_{x_1} u_{x_1 x_1} + u_{x_2} u_{x_2 x_1}) + u_{x_2 x_2} |\nabla u|^2 - u_{x_2} (u_{x_1} u_{x_1 x_2} + u_{x_2} u_{x_2 x_2})}{|\nabla u|^2} \\ &= \frac{u_{x_1 x_1} u_{x_1}^2 + u_{x_1 x_1} u_{x_2}^2 - u_{x_1 x_1} u_{x_1}^2 - u_{x_1} u_{x_2} u_{x_2 x_1} + u_{x_2 x_2} u_{x_1}^2 + u_{x_2 x_2} u_{x_2}^2 - u_{x_2} u_{x_1} u_{x_1 x_2} - u_{x_2}^2 u_{x_2 x_2}}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} \\ |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) &= \frac{u_{x_1 x_1} u_{x_2}^2 - 2u_{x_1} u_{x_2} u_{x_1 x_2} + u_{x_2 x_2} u_{x_1}^2}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} \end{aligned} \quad (\text{III.4.1})$$

Por outro lado sendo $p = \nabla u = (u_{x_1}, u_{x_2})$ e $X = \begin{pmatrix} u_{x_1 x_1} & u_{x_1 x_2} \\ u_{x_2 x_1} & u_{x_2 x_2} \end{pmatrix}$,

temos que

$$\text{I} - \frac{p \otimes p}{|p|^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} \begin{pmatrix} u_{x_1}^2 & u_{x_1 x_2} \\ u_{x_2 x_1} & u_{x_2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_{x_2}^2}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} & -\frac{u_{x_1} u_{x_2}}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} \\ -\frac{u_{x_2} u_{x_1}}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} & \frac{u_{x_1}^2}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} \end{pmatrix}$$

$$\left(I - \frac{p \otimes p}{|p|^2} \right) X = \begin{pmatrix} \frac{u_{x_2}^2 u_{x_1 x_1}}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} - \frac{u_{x_1} u_{x_2} u_{x_2 x_1}}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} & \frac{u_{x_2}^2 u_{x_2 x_1}}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} - \frac{u_{x_2 x_2} u_{x_1} u_{x_2}}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} \\ -\frac{u_{x_1 x_1} u_{x_2} u_{x_1}}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} + \frac{u_{x_1}^2 u_{x_2 x_1}}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} & -\frac{u_{x_2 x_1} u_{x_1 x_2}}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} + \frac{u_{x_1}^2 u_{x_2 x_2}}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} \end{pmatrix}$$

$$tr \left(\left(I - \frac{p \otimes p}{|p|^2} \right) X \right) = \frac{1}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} (u_{x_2}^2 u_{x_1 x_1} - 2u_{x_1} u_{x_2} u_{x_1 x_2} + u_{x_1}^2 u_{x_2 x_2}).$$

Portanto,

$$|\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = tr \left(\left(I - \frac{p \otimes p}{|p|^2} \right) X \right)$$

Façamos:

$$a_{ij}(\nabla u) = a_{ij}(p) = \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{|p|^2}, \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

$$a_{11}(\nabla u) = a_{11}(p) = 1 - \frac{u_{x_1} u_{x_1}}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} = \frac{u_{x_2}^2}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}$$

$$a_{12}(\nabla u) = a_{12}(p) = 0 - \frac{u_{x_1} u_{x_2}}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} = -\frac{u_{x_1} u_{x_2}}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}$$

$$a_{21}(\nabla u) = a_{21}(p) = 0 - \frac{u_{x_2} u_{x_1}}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} = -\frac{u_{x_2} u_{x_1}}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}$$

$$a_{22}(\nabla u) = a_{22}(p) = 1 - \frac{u_{x_2} u_{x_2}}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2} = \frac{u_{x_1}^2}{u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2}$$

Concluimos, então, que:

$$\begin{aligned} |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) &= \sum_{i,j}^2 a_{ij} (\nabla u) u_{x_i x_j} \\ &= a_{11} (\nabla u) u_{x_1 x_1} + a_{12} (\nabla u) u_{x_1 x_2} + a_{21} (\nabla u) u_{x_2 x_1} + a_{22} (\nabla u) u_{x_2 x_2} \end{aligned}$$

Generalizando para o $\mathbb{R}^N$,

$$|\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \sum_{i,j}^N a_{ij} (\nabla u) u_{x_i x_j} \quad (\text{III.4.2})$$

Agora, calculemos a derivada de (III.4.2) em relação a x_k .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i,j}^N a_{ij} (\nabla u) \right) &= \sum_{i,j}^N \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_l}} (\nabla u) \frac{\partial u_{x_l}}{\partial x_k} + \dots + \sum_{i,j}^N \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_N}} \frac{\partial u_{x_N}}{\partial x_k} \\ &= \sum_l^N \left(\sum_{i,j}^N \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_l}} (\nabla u) \right) u_{x_l x_k}. \end{aligned}$$

III.5 Estimativas

A seguir faremos algumas estimativas que serão úteis na demonstração do Teorema de Existência e Unicidade.

$$1) \left| \omega * G_{x_l x_k} \right| \leq C, \quad (\text{III.5.1})$$

onde,

$$\omega \in L^\infty([0, +\infty[\times \mathbb{R}^N) \text{ e } D^\alpha G \in L^1(\mathbb{R}^N) \quad \forall |\alpha| \leq 2.$$

$$\left| (\omega * G_{x_l x_k})(x, t) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} \omega(x - z, t) G_{x_l x_k}(z) dz \right|$$

$$\leq \sup_{\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[} |\omega| \int_{\mathbb{R}^N} |G_{x_l x_k}(z)| dz \leq \sup_{\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[} C_{G_{x_l x_k}} \quad (\text{III.5.2})$$

$$\text{onde, } C_{G_{x_l x_k}} = \int_{\mathbb{R}^N} |G_{x_l x_k}(z)| dz < +\infty.$$

Portanto,

$$\left| (\omega * G_{x_l x_k})(x, t) \right| \leq C$$

$$2) \left| \frac{\partial g}{\partial x_k}(\omega * \nabla G) \right| \leq C (g(\omega * \nabla G))^{\frac{1}{2}} \quad \text{onde, } (g(\omega * \nabla G))^{\frac{1}{2}} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N), \quad (\text{III.5.3})$$

$$g(s) = \frac{1}{1+|s|^2} \quad \text{e} \quad (g(s))^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{(1+|s|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial g}{\partial x_k}(\omega * \nabla G)(x, t) \right| &= \left| \sum_{l=1}^N \frac{\partial g}{\partial s_l}((\omega * \nabla G)(x, t)) (\omega * G_{x_l x_k})(x, t) \right| \\ &\leq \sum_{l=1}^N \left| \frac{\partial g}{\partial s_l}(s) \right| \left| (\omega * G_{x_l x_k})(x, t) \right|. \end{aligned} \quad (\text{III.5.4})$$

$$\text{Calculemos} \quad \left| \frac{\partial g(s)}{\partial s_l} \right| = \left| \frac{-2s_l}{(1+|s|^2)^2} \right| = \left| \frac{-2s_l}{(1+|s|^2)^{\frac{3}{2}}} \right| \left| \frac{1}{(1+|s|^2)^{\frac{1}{2}}} \right|$$

então,

$$\left| \frac{\partial g(s)}{\partial s_l} \right| = 2 \frac{|s_l|}{(1+|s|^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{(1+|s|^2)^{1/2}} \quad (\text{III.5.5})$$

Sabemos que:

$$(g(s))^{1/2} = \frac{|s|}{(1+|s|^2)^{1/2}} \quad \text{e} \quad (g(s))^{1/2} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N),$$

então,

$$L_{g^{1/2}} \geq \left| \nabla g(s)^{1/2} \right| = \frac{|s|}{(1+|s|^2)^{3/2}} \geq \frac{|s_l|}{(1+|s|^2)^{3/2}} \quad \text{onde,}$$

$L_{g^{1/2}}$ é a constante Lipschitz de $g^{1/2}$.

Fazendo as substituições em (III.5.5), obtemos

$$\left| \frac{\partial g(s)}{\partial s_l} \right| \leq 2 \frac{|s|}{(1+|s|^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{(1+|s|^2)^{1/2}} \leq 2L_{g^{1/2}} \cdot (g(s))^{1/2}. \quad (\text{III.5.6})$$

De (III.5.4), (III.5.6) e (III.5.2) concluímos que

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x_k}(\omega * \nabla G)(x, t) \right| \leq \sum_{l=1}^N 2L_{g^{1/2}} (g(\omega * \nabla G)(x, t))^{1/2} \sup_{|\omega|_{\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[}} C_{G, x_l x_k}$$

$$\leq C \left(g(\omega * \nabla G)(x, t) \right)^{1/2}, \text{ ou seja,}$$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x_k}(\omega * \nabla G)(x, t) \right| \leq C \left(g((\omega * \nabla G)(x, t)) \right)^{1/2}.$$

$$3) \left| u_{x_k} \frac{\partial g}{\partial x_k}(\omega * \nabla G) \right| \leq C |\nabla u| \left(g(\omega * \nabla G) \right)^{1/2} \quad (\text{III.5.7})$$

Temos que:

$$\left| u_{x_k} \frac{\partial g}{\partial x_k}(\omega * \nabla G) \right| = \left| \frac{\partial g}{\partial x_k}(\omega * \nabla G) \right| |u_{x_k}|.$$

$$\text{Sendo } |\nabla u| = (u_1^2 + \dots + u_{x_N}^2)^{1/2} \Rightarrow |\nabla u| \geq (u_{x_k}^2)^{1/2} \Rightarrow$$

$$|\nabla u| \geq \left(|u_{x_k}|^2 \right)^{1/2} \Rightarrow |\nabla u| \geq |u_{x_k}| \quad (\text{III.5.6})$$

De (III.5.5) E (III.5.6), obtemos

$$\left| u_{x_k} \frac{\partial g}{\partial x_k}(\omega * \nabla G) \right| \leq C |\nabla u| \left(g(\omega * \nabla G) \right)^{1/2},$$

onde C depende somente de $\sup |\omega|$ e g .

Capítulo IV

Existência e Unicidade do Modelo

IV.1 Adequação do Modelo Proposto

Podemos observar que a equação (III.1.1) pode tomar a forma da equação (IV.1.1), a qual é uma equação parabólica de segunda ordem com possibilidades de degenerações e dois tipos de termos não lineares, isto é, um termo quase linear $\left(\sum_{i,j} a_{ij} (\nabla u) u_{x_i x_j} \right)$ e um termo não local $g(u * \nabla G)$, sendo este o motivo para trabalharmos com soluções de viscosidade [7]. Nesta seção, provaremos a existência, unicidade e estabilidade para a solução viscosa da equação (III.1.1).

Este modelo é bidimensional, matematicamente podemos estudar este problema para o caso n -dimensional, onde λ, σ e k são constantes. Para simplificar a apresentação, podemos considerar $\lambda = \sigma = k = 1$ e trabalhar com condições de fronteira periódicas. Então, para extensão periódica consideremos o seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = g \sum_{i,j} a_{ij} (\nabla u) u_{x_i x_j} - (1 - g)(u - I), x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R} + \\ u(x, 0) = I(x), x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (\text{IV.1.1})$$

onde

1) $I(x + h) = I(x), \forall x \in \mathbb{R}^N$ e $h \in \mathbb{Z}^N$; I é uma função periódica;

2) $g = g(s) = \frac{1}{1 + |s|^2}$, sendo $s = (s_1, \dots, s_N) = \nabla(u * G)(x, t)$ e

$g(s) \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^N$ é uma função não crescente satisfazendo $g(0) = 1$,

$g \in C^{1,1}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ é Lipschitz.

$$3) \quad G(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{|x|^2}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

$$D^\alpha G \in L^1(\mathbb{R}^N), \quad \forall |\alpha| \leq 2.$$

$$4) \quad \sum_{i,j} a_{ij}(p) = \sum_{i,j} \left(\delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{|p|^2} \right), \quad a_{ij} = a_{ji},$$

$$\sum_{i,j} a_{ij}(p) \xi_i \xi_j \geq 0, \quad \forall p \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\},$$

a_{ij} são contínuos e limitados em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

$$5- \quad u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$\frac{\partial g}{\partial l} = \frac{\partial g(s)}{\partial s_l}$$

Primeiro, vamos lembrar a definição de viscosidade de (IV.1.1). A função $u \in C(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ para algum $T > 0$ é uma subsolução de viscosidade de (IV.1.1), se para todo $\phi \in C^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$, a seguinte condição vale em algum ponto (x_o, t_o) em $\mathbb{R}^N \times]0, T]$ na qual $(u - \phi)$ atinge um máximo local.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x_o, t_o) - g((u * \nabla G)(x_o, t_o)) \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla \phi(x_o, t_o)) \phi_{x_i x_j}(x_o, t_o) + (1 - g((u * \nabla G)(x_o, t_o)))(u - \phi)(x_o, t_o) \leq 0 \\ \text{se } \nabla \phi(x_o, t_o) \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.1.2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x_o, t_o) - g((u * \nabla G)(x_o, t_o)) \limsup_{p \rightarrow o} \sum_{i,j} a_{ij}(p) \phi_{x_i x_j}(x_o, t_o) \leq 0 \quad (\text{Vide IV.3.16}) \\ \text{se } \nabla \phi(x_o, t_o) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.1.3})$$

Uma supersolução de viscosidade é definida similarmente substituindo máximo local por mínimo local, ≤ 0 por ≥ 0 , e $\limsup$ por $\liminf$ nas equações (IV.1.2) e (IV.1.3). Uma solução viscosa é uma função continua que é simultaneamente uma subsolução e uma supersolução.

Passemos, então ao Teorema de Existência e Unicidade de solução do modelo considerado.

IV.2 Teorema de Existência e Unicidade

A prova deste Teorema é o principal objetivo deste trabalho.

Teorema (IV.2.1). O problema de Cauchy (IV.1.1) tem uma única solução viscosa

$$u \in C\left(\mathbb{R}^N \times [0, T]\right) \cap L^\infty\left(0, T; W^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)\right) \text{ para algum } T \in [0, +\infty[\text{ e}$$

$$\inf_{\mathbb{R}^N} I \leq u(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} I \quad (\text{IV.2.1})$$

supondo que I é contínua Lipschitz em $\mathbb{R}^N$.

Além disso, se $v \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+)$ é uma solução viscosa de (IV.1.1) com I substituído por uma função continua I_1 , então para todo $T \in [0, +\infty[$, existe uma constante $k > 0$, dependendo somente de $\|I\|_{W^{1,\infty}}$, $\|I_1\|_{L^\infty}$ e da constante Lipschitz de u (e também de T), tal que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(x, t) - v(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq k \|I - I_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}. \quad (\text{IV.2.2})$$

A prova deste teorema segue o argumento desenvolvido em [2] para a equação.

$$u_t = g(u * \nabla G_\sigma) |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right).$$

Entretanto, como o modelo considerado tem um termo linear a mais, serão exigidas outras estimativas, especialmente tomando a estimativa na norma uniforme L^∞ para o gradiente das soluções aproximadas e em estabilidade a estimativa

$$\sup_{\Omega \times [0, T]} |u - v| \leq k \sup_{\Omega \times \{t=0\}} |u - v| \text{ onde } u \text{ e } v \text{ são duas soluções viscosas de (IV.1.1).}$$

IV.3 Demonstração do teorema

A demonstração do teorema (IV.2.1) será feita em vários passos.

IV.3.1 Passo 1:- Demonstração da desigualdade (IV.2.1).

Lema (IV.3.1) Se u é uma solução viscosa de (IV.1.1) em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$, então $\inf_{\mathbb{R}^N} I \leq u(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} I$ em $\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[$.

Prova: Observamos que a hipótese de periodicidade de u , garante que u tem um máximo em $[0, T] \times \mathbb{R}^N$.

Seja $\phi = \sup_{\mathbb{R}^N} I + \delta t$, $\delta > 0$ em (IV.1.2), e assumamos que $u - \phi$ alcança um máximo local

em (x_o, t_o) com $t_o > 0$, então $\nabla \phi(x_o, t_o) = 0$, e da equação (IV.1.3) $\frac{\partial \phi}{\partial t}(x_o, t_o) \leq 0$.

Isto contradiz $\frac{\partial \phi}{\partial t} \equiv \delta > 0$ em $\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[$. Por isso, $u - \phi$ deve alcançar seu

máximo em $t_o = 0$. Assim $u - \phi = I - \sup_{\mathbb{R}^N} I \Rightarrow u - \phi \leq \sup_{\mathbb{R}^N} \left(I - \sup_{\mathbb{R}^N} I \right) \Rightarrow u - \phi \leq 0$

$\Rightarrow u \leq \phi \Rightarrow u \leq \sup_{\mathbb{R}^N} I + \delta t$.

Similarmente, temos (da definição de supersolução) $u \geq \inf_{\mathbb{R}^N} I - \delta t$.

Então, $\inf_{\mathbb{R}^N} I - \delta t \leq u \leq \sup_{\mathbb{R}^N} I + \delta t$ para $\delta \rightarrow 0$.

Temos, portanto, que:

$$\inf_{\mathbb{R}^N} I \leq u \leq \sup_{\mathbb{R}^N} I.$$

IV.3.2 Passo 2: Demonstração da equicontinuidade de u suave.

Para a prova da existência de soluções viscosas da equação (IV.1.1), usaremos a seguinte aproximação.

Considere uma família de funções $I^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que:

1) $I^\varepsilon \rightarrow I$ uniformemente em $\mathbb{R}^N$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

2) $\|\nabla I^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|\nabla I\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ e $\|I^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \|I\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$,

onde $0 < \varepsilon < 1$.

Introduzimos

1) $g^\varepsilon = g(u^\varepsilon * \nabla G) + \varepsilon$

2) $a_{ij}^\varepsilon(p) = \varepsilon \delta_{ij} + \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{|p|^2 + \varepsilon^2} = \varepsilon \delta_{ij} + \alpha_{ij}^\varepsilon$

onde,

i) $\alpha_{ij}^\varepsilon \rightarrow a_{ij}$ uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$;

ii) $\sup_{i,j,\varepsilon} \sup_{\mathbb{R}^N \setminus \{0\}} |\alpha_{ij}^\varepsilon| < \infty$ uniformemente limitada;

iii) $\sum_{i,j} \alpha_{ij}^\varepsilon(p) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \quad \xi \in \mathbb{R}^N$;

iv) α_{ij}^ε tem suporte compacto em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

Em seguida, provaremos a estimativa do gradiente para a solução aproximada, onde necessitamos do seguinte Lema:

Lema (IV.3.2) Sejam $A = (a_{ij})$ e $U = (u_{x_i x_j})$ matrizes simétricas com $A \geq 0$; então

$$\left| \sum_{i,j} a_{ij} u_{x_i x_j} \right| \leq C \left(\sum_{i,j} a_{ij} \sum_k u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} \right)^{1/2}.$$

Prova: Como

$$\sum_{i,j} a_{ij} u_{x_i x_j} = \text{tr} AU \quad \text{e} \quad \sum_{i,j} a_{ij} \sum_k u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} = \text{tr} AU^2$$

para a prova do Lema, escolha B que diagonalize U (e não A), isto é, $B^t B = I$, $U = B^t D B$.

Então escrevendo $(c_{ij}) = BAB^t$ e $D = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N \}$, calculamos:

$$|\text{tr} AU|^2 = |\text{tr} (AB^t D B)|^2 = |\text{tr} (BAB^t) D|^2 = \left(\sum_i c_{ii} \lambda_i \right)^2 =$$

$$\sum_i c_{ii}^2 \lambda_i^2 + 2 \sum_{i < j} c_{ii} \lambda_i c_{jj} \lambda_j \leq \sum_i c_{ii}^2 \lambda_i^2 + \sum_{i < j} c_{ii} c_{jj} (\lambda_i^2 + \lambda_j^2)$$

* Aplicando a desigualdade de Cauchy

$$= \sum_i c_{ii}^2 \lambda_i^2 + \sum_{i < j} c_{ii} c_{jj} \lambda_j^2 + \sum_{i < j} c_{ii} c_{jj} \lambda_i^2 = c_{11} \lambda_1^2 \sum_i c_{ii} + \dots + c_{NN} \lambda_N^2 \sum_i c_{ii} = \sum_i c_{ii} \sum_i c_{ii} \lambda_i^2$$

Então:

$$|tr AU|^2 \leq tr(BAB^t) tr(BAB^t D^2) = tr A. tr(AU^2)$$

colocando $C = (tr A)^{1/2}$, obtemos

$$|tr AU| \leq C (tr AU^2)^{1/2} \Rightarrow \left| \sum_{i,j} a_{ij} u_{x_i x_j} \right| \leq C \left(\sum_{i,j} a_{ij} \sum_k u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} \right)^{1/2}.$$

Observação: 1) Desigualdade de Cauchy

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$2) \quad U^2 = (B^t DB)(B^t DB) = B^t DBB^t DB = B^t D I D B = B^t D^2 B$$

$$3) \quad tr(AB^t DB) = tr(BAB^t D)$$

Lema (IV.3.3) (Estimativa de Gradiente). Seja u uma solução suave de

$$\frac{\partial u}{\partial t} - g(\omega * \nabla G) \sum_{i,j} a_{ij} (\nabla u)_{x_i x_j} + (1 - g(\omega * \nabla G))(u - I) = 0 \quad (\text{IV.3.1})$$

$$\text{em } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[$$

onde a_{ij} são suaves em $\mathbb{R}^N$ e $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[)$.

Então,

$$\left\| \nabla u(., t) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq e^{Ct} \left\| \nabla I \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},$$

onde C depende de $\sup_p |a_{ij}(p)|, \sup_{p \leq R} |D^2 g(p)|$

com $R = \left\| \omega \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \times \left\| \nabla G \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \text{ e } \sup_x |I(x)|$.

Prova: Para provar a desigualdade usaremos o clássico **Método de Bernstein** [12]

Diferenciando (IV.3.1) com respeito a x_k , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{x_k}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(g(\omega * \nabla G) \right) \sum_{i,j} a_{ij} (\nabla u) u_{x_i x_j} + g(\omega * \nabla G) \sum_{i,j} a_{ij} (\nabla u) u_{x_i x_j x_k} \\ &+ g(\omega * \nabla G) \sum_l \left(\sum_{i,j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_l}} \right) u_{x_l x_k} u_{x_i x_j} - (u_{x_k} - I_{x_k}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_k} \left(g(\omega * \nabla G) (u - I) + g(\omega * \nabla G) (u_{x_k} - I_{x_k}) \right) \end{aligned}$$

Multiplicamos por $2u_{x_k}$, obtemos

$$\begin{aligned}
2u_{x_k} \frac{\partial u_{x_k}}{\partial t} &= 2 \frac{\partial}{\partial x_k} (g(\omega * \nabla G)) \sum_{i,j} a_{ij} (\nabla u) u_{x_i x_j} u_{x_k} \\
&+ 2g(\omega * \nabla G) \sum_l \left(\sum_{i,j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_l}} \right) u_{x_l x_k} u_{x_i x_j} u_{x_k} \\
&- 2(I_{x_k} - u_{x_k}) u_{x_k} + 2 \frac{\partial}{\partial x_k} (g(\omega * \nabla G)) (I - u) u_{x_k} \\
&+ 2g(\omega * \nabla G) (I_{x_k} - u_{x_k}) u_{x_k} \\
&+ 2g(\omega * \nabla G) \sum_{i,j} a_{ij} (\nabla u) u_{x_i x_j x_k} u_{x_k}
\end{aligned} \tag{IV.3.2}$$

como

$$\begin{aligned}
1) \quad \frac{\partial^2 u_{x_k}^2}{\partial x_j \partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_j} (2u_{x_k x_i} u_{x_k}) = 2u_{x_i x_j x_k} u_{x_k} + 2u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} \\
\Rightarrow 2u_{x_i x_j x_k} u_{x_k} &= \frac{\partial^2 u_{x_k}^2}{\partial x_j \partial x_i} - 2u_{x_k x_i} u_{x_k x_j}
\end{aligned}$$

somando em k , obtemos

$$2 \sum_k u_{x_i x_j x_k} u_{x_k} = \frac{\partial^2 |\nabla u|^2}{\partial x_j \partial x_i} - 2 \sum_k u_{x_k x_i} u_{x_k x_j}. \tag{IV.3.3}$$

$$2) \quad 2 \frac{\partial u_{x_k}}{\partial x_l} u_{x_k} = \frac{\partial}{\partial x_l} u_{x_k}^2$$

$$\text{somando em } k, \text{ obtemos } 2 \sum_k \frac{\partial u_{x_k}}{\partial x_l} u_{x_k} = \frac{\partial}{\partial x_l} |\nabla u|^2 \tag{IV.3.4}$$

Somando (IV.3.2) em k e usando as substituições (IV.3.3) e (IV.3.4), obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} |\nabla u|^2 - g(\omega * \nabla G) \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u) \frac{\partial^2 |\nabla u|^2}{\partial x_j \partial x_i} - g(\omega * \nabla G) \sum_l \sum_{i,j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_l}} u_{x_i x_j} \frac{\partial}{\partial x_l} |\nabla u|^2 \\
&= 2 \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (g(\omega * \nabla G)) \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u) u_{x_i x_j} u_{x_k} - 2 g(\omega * \nabla G) \sum_k \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u) u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} \\
&- 2 \sum_k (u_{x_k} - I_{x_k}) u_{x_k} + 2 \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (g(\omega * \nabla G)) (u - I) u_{x_k} + 2 g(\omega * \nabla G) \sum_k (u_{x_k} - I_{x_k}) u_{x_k}.
\end{aligned}$$

Se introduzirmos

$$l(v) = g(\omega * \nabla G) \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u) \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i} + g(\omega * \nabla G) \sum_l \sum_{i,j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_l}} u_{x_i x_j} \frac{\partial v}{\partial x_l}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} - l \right) |\nabla u|^2 &= 2 \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (g(\omega * \nabla G)) \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u) u_{x_i x_j} u_{x_k} \\
&- 2 g(\omega * \nabla G) \sum_k \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u) u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} - 2 \sum_k (u_{x_k} - I_{x_k}) u_{x_k} \\
&+ 2 g(\omega * \nabla G) \sum_k (u_{x_k} - I_{x_k}) u_{x_k} + 2 \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (g(\omega * \nabla G)) (u - I) u_{x_k} \\
&= \text{I} + \text{II} + \text{III}
\end{aligned}$$

como

$$1) \left| \omega * G_{x_l x_k} \right| \leq C$$

$$2) \left| \frac{\partial g}{\partial x_k}(\omega * \nabla G) \right| \leq C(g(\omega * \nabla G))^{1/2} \quad (g(\omega * \nabla G))^{1/2} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N) \quad (\text{IV.3.5})$$

$$3) \left| u_{x_k} \frac{\partial g}{\partial x_k}(\omega * \nabla G) \right| \leq C |\nabla u| (g(\omega * \nabla G))^{1/2}$$

onde C depende somente de $\sup |\omega|$ e g , então temos

$$I = -2g(\omega * \nabla G) \sum_k \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u) u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} + 2 \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (g(\omega * \nabla G)) \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u) u_{x_i x_j} u_{x_k} \leq$$

$$I \leq -2g(\omega * \nabla G) \sum_k \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u) u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} + 2C \sum_k (g(\omega * \nabla G))^{1/2} \sum_{i,j} |a_{ij}(\nabla u) u_{x_i x_j}| |u_{x_k}|$$

aplicando o Lema (IV.3.2), obtemos

$$I \leq -2g(\omega * \nabla G) \sum_k \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u) u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} + 2C \sum_k (g(\omega * \nabla G))^{1/2} \left(\sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u) u_{x_i x_j} \right)^{1/2} |u_{x_k}|$$

e pela desigualdade de Cauchy

$$I \leq -2g(\omega * \nabla G) \sum_k \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u) u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} + g(\omega * \nabla G) \sum_k \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u) u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} + C^2 |\nabla u|^2$$

Devido a $\sum_k \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u) u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} \geq 0$ teremos

$$I \leq C^2 |\nabla u|^2 \leq C |\nabla u|^2 + C = C(|\nabla u|^2 + 1).$$

Vamos agora considerar a expressão II

$$II = -2 \sum_k (u_{x_k} - I_{x_k}) u_{x_k} + 2g(\omega * \nabla G) \sum_k (u_{x_k} - I_{x_k}) u_{x_k}$$

$$\text{II} = -2 \sum_k u_{x_k}^2 + 2 \sum_k u_{x_k} \text{I}_{x_k} + 2g(\omega * \nabla G) \sum_k u_{x_k}^2 - 2g(\omega * \nabla G) \sum_k u_{x_k} \text{I}_{x_k}$$

$$\text{II} = -(1 - g(\omega * \nabla G)) 2 \sum_k u_{x_k}^2 + (1 - g(\omega * \nabla G)) 2 \sum_k u_{x_k} \text{I}_{x_k}$$

$$\text{II} \leq -(1 - g(\omega * \nabla G)) 2 |\nabla u|^2 + (1 - g(\omega * \nabla G)) 2 \left| \sum_k u_{x_k} \text{I}_{x_k} \right|$$

$\text{II} \leq -2(1 - g(\omega * \nabla G)) |\nabla u|^2 + 2(1 - g(\omega * \nabla G)) |\langle \nabla \text{I}, \nabla u \rangle|$ pela desigualdade Cauchy – Schwarz

$\text{II} \leq -2(1 - g(\omega * \nabla G)) |\nabla u|^2 + 2(1 - g(\omega * \nabla G)) |\nabla \text{I}| |\nabla u|$ I é Lipschitz, então $|\nabla \text{I}| \leq C$ onde C depende somente de I .

$$\text{II} \leq -2(1 - g(\omega * \nabla G)) |\nabla u|^2 + (1 - g(\omega * \nabla G)) 2C |\nabla u|$$

aplicando a desigualdade de Cauchy

$$\text{II} \leq -2(1 - g(\omega * \nabla G)) |\nabla u|^2 + (1 - g(\omega * \nabla G))^2 C |\nabla u|^2 + C \leq C |\nabla u|^2 + C.$$

Portanto,

$$\text{II} \leq C(|\nabla u|^2 + 1)$$

Vamos aqui considerar a expressão III.

$$\text{III} = 2 \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (g(\omega * \nabla G)(u - \text{I})) u_{x_k} \leq 2 |u - \text{I}| \sum_k \left| \frac{\partial}{\partial x_k} (g(\omega * \nabla G)) u_{x_k} \right|$$

pelo **Lema (IV.3.1)** $(u - \text{I})$ é limitada e (IV.3.5), temos

$$\text{III} \leq 2C |\nabla u| (g(\omega * \nabla G))^{\frac{1}{2}}, \text{ pela desigualdade de Cauchy.}$$

Então,

$$\text{III} \leq C|\nabla u|^2 + Cg(\omega * \nabla G) \leq C|\nabla u|^2 + C.$$

Logo

$$\text{III} \leq C(|\nabla u|^2 + 1)$$

Considerando I, II e III, concluímos que

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - l\right)|\nabla u|^2 \leq C(|\nabla u|^2 + 1) \text{ em } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[. \quad (\text{IV.3.6})$$

Substituindo $|\nabla u|^2$ por v em (III.6.11), escrevemos $\left(\frac{\partial}{\partial t} - l\right)v \leq C(v + 1)$.

Façamos $\tilde{v} = e^{-Ct}v \Rightarrow v = e^{Ct}\tilde{v}$, então

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - l\right)(e^{Ct}\tilde{v}) \leq C(e^{Ct}\tilde{v} + 1) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(e^{Ct}\tilde{v}) - g(\omega * \nabla G) \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u) \frac{\partial^2(e^{Ct}\tilde{v})}{\partial x_j \partial x_i}$$

$$-g(\omega * \nabla G) \sum_l \sum_{i,j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_l}} u_{x_i x_j} \frac{\partial}{\partial x_l}(e^{Ct}\tilde{v}) \leq C(e^{Ct}\tilde{v} + 1) \Rightarrow$$

$$Ce^{Ct}\tilde{v} + e^{Ct} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} - g(\omega * \nabla G) \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u) e^{Ct} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x_j \partial x_i} - g(\omega * \nabla G) \sum_l \sum_{i,j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_l}} u_{x_i x_j} e^{Ct} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_l} \leq Ce^{Ct}\tilde{v} + C \Rightarrow$$

$$e^{Ct} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} - g(\omega * \nabla G) \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u) \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x_j \partial x_i} - g(\omega * \nabla G) \sum_l \sum_{i,j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_{x_l}} u_{x_i x_j} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_l} \right) \leq C \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} - g(\omega * \nabla G) \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u) \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x_j \partial x_i} - g(\omega * \nabla G) \sum_l \sum_{i,j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l} u_{x_i x_j} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_l} - \frac{C}{e^{Ct}} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} - l(\tilde{v}) \leq 0$$

$l(\tilde{v})$ é um operador elíptico, aplicando o princípio do máximo [6], $\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[} \tilde{v}(x, t)$ é atingido em $t = 0$, então

$$\tilde{v}(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[} \tilde{v}(x, t) \Rightarrow \tilde{v}(x, t) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \tilde{v}(x, 0) \Rightarrow$$

$$\tilde{v}(x, t) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} v(x, 0) \Rightarrow \tilde{v}(x, t) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\nabla I|^2 \Rightarrow$$

$$e^{-Ct} v(x, t) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\nabla I|^2 \Rightarrow v(x, t) \leq e^{Ct} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\nabla I|^2 \Rightarrow$$

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[} v(x, t) \leq e^{Ct} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\nabla I|^2 \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[} |\nabla u(x, t)|^2 \leq (e^{Ct})^2 \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |\nabla I|^2$$

$$\Rightarrow \|\nabla u(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq e^{Ct} \|\nabla I\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

Obs: $e^{Ct} \geq 1$ pois $t \geq 0$.

Agora para a prova da existência de soluções viscosas da equação (IV.1.1), resta-nos mostrar que as soluções aproximadas são equicontínuas, pois de acordo com o Lema (IV.3.1) são uniformemente limitadas, para aplicarmos o teorema (II.1.1) (Arzela – Ascoli)

Lema (IV.3.4) Seja u^ε uma solução suave de

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - g^\varepsilon(u^\varepsilon * \nabla G) \sum_{i,j} a_{ij}^\varepsilon (\nabla u^\varepsilon) u_{x_i x_j}^\varepsilon + (1 - g(u^\varepsilon * \nabla G))(u^\varepsilon - I^\varepsilon) = 0 \quad (\text{IV.3.7})$$

Então para todo $\delta > 0$ existe $u_\delta^\varepsilon \in \mathcal{W}^{2,\infty}(\mathbb{R}^N)$ tal que para $0 < s \leq t \leq T$, temos

$$1) \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |u^\varepsilon(s, x) - u_\delta^\varepsilon(x)| \leq C_T \delta$$

$$2) \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |D^2 u_\delta^\varepsilon(x)| \leq \frac{C_T}{\delta}$$

$$3) \|u^\varepsilon(.,t) - u_\delta^\varepsilon(.,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \left(M + \frac{C_T}{\delta}\right)(t-s) + C_T \delta$$

4) $u^\varepsilon(x,t)$ é equicontínua com respeito a x e t e C_T não depende de δ .

Obs: De acordo com o Lema (IV.3.3), temos

$$\|\nabla u^\varepsilon(x,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq e^{Ct} \|\nabla I^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq e^{Ct} \|\nabla I\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq C_T$$

Prova: Para provar 1 e 2, usamos a suavização proposta por Paiva [16], seja

$u_\delta^\varepsilon = j_\delta u^\varepsilon(s)$, onde j_δ é

$$(j_\delta u^\varepsilon)(x) = \frac{1}{\delta^N} \int_{|x-y| < \delta} \rho\left(\frac{x-y}{\delta}\right) u^\varepsilon(y,s) dy$$

onde $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+)$ é uma função com as propriedades

$$\begin{cases} \rho(x) \geq 0 \\ \rho(x) = 0 \end{cases} \quad \text{se} \quad \begin{cases} |x| \leq 1 \\ |x| > 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \int_{|x| \leq 1} \rho(x) dx = 1.$$

Derivando $(j_\delta u^\varepsilon)(x)$ duas vezes em relação a x , temos

$$\begin{aligned}
D_x^2 u_\delta^\varepsilon(x) &= D_x^2 \frac{1}{\delta^N} \int_{|x-y|<\delta} \rho\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right) u^\varepsilon(y, s) dy = \frac{1}{\delta^N} \int_{|x-y|<\delta} D_x^2 \rho\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right) u^\varepsilon(y, s) dy \\
&= (-1)^1 \frac{1}{\delta^N} \int_{|x-y|<\delta} D_y \left(D_x \rho\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right) \right) u^\varepsilon(y, s) dy = (-1)^2 \frac{1}{\delta^N} \int_{|x-y|<\delta} D_x \rho\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right) D_y u^\varepsilon(y, s) dy \\
|D_x^2 u_\delta^\varepsilon(x)| &\leq \frac{1}{\delta^N} \int_{|x-y|<\delta} \left| D_x \rho\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right) \right| |D_y u^\varepsilon(y, s)| dy \leq \sup |D_y u^\varepsilon(y, s)| \frac{1}{\delta} \int_{|x|<1} |D_x \rho(x)| dx.
\end{aligned}$$

E assim uma constante $C_T \geq \sup |D_y u^\varepsilon(y, s)| \int_{|x|<1} |D_x \rho(x)| dx$,

existe tal que $\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |D^2 u_\delta^\varepsilon(x)| \leq \frac{C_T}{\delta}$.

Podemos escrever

$$\begin{aligned}
|u^\varepsilon(x, s) - u_\delta^\varepsilon(x)| &= \left| \frac{1}{\delta^N} \int_{|x-y|<\delta} \left(\frac{|x-y|}{\delta} \right) u^\varepsilon(x, s) dy - u^\varepsilon(x, s) \frac{1}{\delta^N} \int_{|x-y|<\delta} \rho\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right) dy \right| = \\
&= \left| \frac{1}{\delta^N} \int_{|x-y|<\delta} \rho\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right) [u^\varepsilon(y, s) - u^\varepsilon(x, s)] dy \right| \leq \frac{1}{\delta^N} \int_{|x-y|<\delta} \rho\left(\frac{|x-y|}{\delta}\right) |u^\varepsilon(x, s)| dy.
\end{aligned}$$

Pelo Lema (IV.3.3)

$$|u^\varepsilon(y, s) - u^\varepsilon(x, s)| \leq C_T |x - y|, \text{ então}$$

$$|u^\varepsilon(y, s) - u^\varepsilon(x, s)| \leq C_T \delta \Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |u^\varepsilon(s, x) - u_\delta^\varepsilon(x)| \leq C_T \delta.$$

Para provar que $u^\varepsilon(t, x)$ é equicontínua é suficiente provar

$$\begin{cases} |u^\varepsilon(y, t) - u^\varepsilon(x, t)| \leq C_T |x - y| \\ |u^\varepsilon(x, s) - u^\varepsilon(x, t)| \leq M |t - s| + 2C_T |t - s|^{1/2} \end{cases}$$

A primeira desigualdade já está provada pelo Lema (IV.3.3), basta provar a segunda desigualdade.

Coloquemos $v(x, t) = u^\varepsilon(x, t) - u_\delta^\varepsilon(x)$, então

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x, t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i}(x, t) = \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_j \partial x_i}(x, t) - \frac{\partial^2 u_\delta^\varepsilon}{\partial x_j \partial x_i}(x).$$

Portanto, substituindo na equação (IV.3.7), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} - g(u^\varepsilon * \nabla G) \sum_{i,j} a_{ij}^\varepsilon (\nabla u^\varepsilon) v_{x_i x_j} &= g(u^\varepsilon * \nabla G) \sum_{i,j} a_{ij}^\varepsilon (\nabla u^\varepsilon) u_{\delta_{x_i x_j}}^\varepsilon - (1 - g(u^\varepsilon * \nabla G))(u^\varepsilon - I^\varepsilon) \\ \frac{\partial v}{\partial t} - g(u^\varepsilon * \nabla G) \sum_{i,j} a_{ij}^\varepsilon (\nabla u^\varepsilon) v_{x_i x_j} &\leq \left| g(u^\varepsilon * \nabla G) \sum_{i,j} a_{ij}^\varepsilon (\nabla u^\varepsilon) u_{\delta_{x_i x_j}}^\varepsilon \right| + \left| -(1 - g(u^\varepsilon * \nabla G))(u^\varepsilon - I^\varepsilon) \right| \\ &\leq \frac{C_T}{\delta} + M = M_T'. \end{aligned}$$

Se denotarmos

$$l_1(v) = g(u^\varepsilon * \nabla G) \sum_{i,j} a_{ij}^\varepsilon (\nabla u^\varepsilon) v_{x_i x_j} \quad \text{e fazendo a substituição}$$

$$\tilde{v}^1(x, t) = v(x, t) - M_T'(t - s) \quad \text{onde}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) - M_T' \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \tilde{v}^1}{\partial x_j \partial x_i}(x, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_i}(x, t), \quad \text{então,}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial t} + M'_T - g(u^\varepsilon * \nabla G) \sum_{i,j} a_{ij}^\varepsilon (\nabla u^\varepsilon) \tilde{v}^1_{x_i x_j} \leq M'_T \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \tilde{v}^1}{\partial t} - l_1(\tilde{v}^1) \leq 0 \text{ e sendo } l_1(\tilde{v}^1) \text{ um operador elíptico, aplicando o princípio do máximo}$$

obtemos que $\sup_{\mathbb{R}^N \times (s,t)} \tilde{v}^1(x,t)$ é atingido em $t = s$. Então,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \tilde{v}^1(x,s) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} v(x,s) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |u^\varepsilon(x,s) - u_\delta^\varepsilon(x)| \leq C_T \delta.$$

portanto,

$$v(x,t) \leq M'_T(t-s) + \sup_{x \in \mathbb{R}^N} v(x,s) \leq M'_T(t-s) + C_T \delta. \quad (\text{IV.3.8})$$

Escrevendo $\tilde{v}^2(x,t) = -v(x,t) - M'_T(t-s)$ onde,

$$\frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(-v(x,t)) - M'_T \text{ e } \frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial x_j \partial x_i}(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}(-v(x,t)) \text{ então}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(-v) - g(u^\varepsilon * \nabla G) \sum_{i,j} a_{ij}^\varepsilon (\nabla u^\varepsilon) (-v_{x_i x_j}) \leq M'_T$$

$$\frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial t} + M'_T - g(u^\varepsilon * \nabla G) \sum_{i,j} a_{ij}^\varepsilon (\nabla u^\varepsilon) \tilde{v}^2_{x_i x_j} \leq M'_T \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \tilde{v}^2}{\partial t} - l_2(\tilde{v}^2) \leq 0 \text{ e sendo } l_2(\tilde{v}^2) \text{ um operador elíptico, aplicando o princípio do}$$

máximo, obtemos que $\sup_{\mathbb{R}^N \times (s,t)} \tilde{v}^2(x,s)$ é atingido em $t=s$. Então,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} \tilde{v}^2(x,s) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (-v(x,s)) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |u^\varepsilon(x,s) - u_\delta^\varepsilon(x)| \leq C_T \delta$$

portanto,

$$-v(x, t) \leq M'_T(t-s) + \sup_{x \in \mathbb{R}^N} (-v(x, s)) \leq M'_T + C_T \delta \quad (\text{IV.3.9})$$

De (IV.3.8) e (IV.3.9) concluimos que

$$|v(x, t)| \leq M'_T(t-s) + C_T \delta, \text{ então temos}$$

$$|u^\varepsilon(x, s) - u^\varepsilon(x, t)| \leq |u^\varepsilon(x, t) - u_\delta^\varepsilon(x)| + |u^\varepsilon(x, s) - u_\delta^\varepsilon(x)| \leq$$

$$|u^\varepsilon(x, t) - u_\delta^\varepsilon(x)| + \|u^\varepsilon(x, s) - u_\delta^\varepsilon(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M'_T(t-s) C_T \delta + C_T \delta.$$

Substituindo $M'_T = \frac{C_T}{\delta} + M$ e $\delta = |t-s|^{1/2}$ temos

$$|u^\varepsilon(x, s) - u^\varepsilon(x, t)| \leq M(t-s) + \frac{C_T}{\delta}(t-s) + 2C_T \delta.$$

Portanto,

$|u^\varepsilon(x, s) - u^\varepsilon(x, t)| \leq M(t-s) + 2C_T |t-s|^{1/2}$, concluimos então que $u^\varepsilon(x, t)$ é equicontínua.

Da teoria de equações parabólicas uniformemente quase linear [6], [10], [12], o problema de Cauchy:

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - g^\varepsilon(u^\varepsilon * \nabla G) \sum_{i,j} a_{ij}(\nabla u^\varepsilon) u_{x_i x_j}^\varepsilon + (1 - g^\varepsilon(u^\varepsilon * \nabla G))(u^\varepsilon - I^\varepsilon) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}_+$$

(IV.3.10)

$$u^\varepsilon(x, 0) = I^\varepsilon(x), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

admite uma solução suave $u^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$.

Desde que uma solução suave é uma solução viscosa, por um argumento similar que no **Lema (IV.3.1)** sabemos que $|u^\varepsilon| \leq F$ para $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, +\infty[$ onde $F > 0$ é uma constante dependendo de I .

Em vista das propriedades de consistência – estabilidade de soluções viscosas, resta apenas mostrar que a sequência $\{u^\varepsilon\}$ ou uma subsequência $\{u^{\varepsilon_k}\}$ converge

localmente uniformemente em $\mathbb{R}^N \times [0, T]$ para uma função

$$u \in C\left(\left(\mathbb{R}^N \times [0, T]\right)\right) \cap L^\infty\left(0, T; W^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)\right) \text{ para todo } T < \infty. \quad (\text{IV.3.11})$$

Como as funções u^ε são uniformemente limitadas e equicontínuas, usando o teorema (II.1.1) (Arzela – Ascoli), a sequência $\{u^\varepsilon\}$ ou uma subsequência

$\{u^{\varepsilon_k}\}$ converge uniformemente em compactos de $\mathbb{R}^N \times [0, T]$ a um limite

$$u \in C\left(\left(\mathbb{R}^N \times [0, T]\right)\right) \cap L^\infty\left(0, T; W^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)\right).$$

IV.3.3 Passo 3: Existência de Solução Viscosa

Afirmamos agora que u obtido em (IV.3.11) é uma solução viscosa do problema de Cauchy (IV.1.1) no sentido de (IV.1.2) e (IV.1.3).

Seja $\phi \in C^2(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ e assumamos que $(u - \phi)$ tem um máximo local estrito em um ponto

$$(x_o, t_o) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+.$$

Como $u^{\varepsilon_k} \rightarrow u$ uniformemente próximo a $(x_o, t_o), (u^{\varepsilon_k} - \phi)$ tem um máximo local em (x_k, t_k) , com $(x_k, t_k) \rightarrow (x_o, t_o)$, quando $k \rightarrow \infty$ (IV.3.12) e em (x_k, t_k)

$$\begin{cases} \nabla u^{\varepsilon_k} = \nabla \phi \\ u_t^{\varepsilon_k} = \phi_t \\ a_{ij}^{\varepsilon_k} (\nabla u^{\varepsilon_k}) u_{x_i x_j}^{\varepsilon_k} \leq a_{ij}^{\varepsilon_k} (\nabla \phi) \phi_{x_i x_j} \end{cases} \quad (\text{IV.3.13})$$

Portanto (IV.3.10) implica que em (x_k, t_k) ,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - g^{\varepsilon_k} \sum_{i,j} a_{ij}^{\varepsilon_k} (\nabla \phi) \phi_{x_i x_j} + (1 - g^{\varepsilon_k}) (u^{\varepsilon_k} - I^{\varepsilon_k}) \leq 0, \quad (\text{IV.3.14})$$

onde $g^{\varepsilon_k} = g^{\varepsilon_k} (u^{\varepsilon_k} * \nabla G)$.

Se $\nabla \phi(x_o, t_o) \neq 0$ de (IV.3.12), para k suficientemente grande $\nabla \phi(x_k, t_k) \neq 0$. Aplicando o limite em (IV.3.14) (recordando as definições de a_{ij}^{ε} , g^{ε} e (IV.3.11) e (IV.3.12) obtemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - g \sum_{i,j} a_{ij} (\nabla \phi) \phi_{x_i x_j} + (1 - g) (u - I) \leq 0 \quad \text{em } (x_o, t_o),$$

onde $g = g(u * \nabla G)$. Isto dá (IV.1.2).

$$\text{Se } \nabla \phi(x_o, t_o) = 0, \text{ seja } h^k = \frac{\nabla \phi(x_k, t_k)}{\sqrt{|\nabla \phi(x_k, t_k)|^2 + \varepsilon_k^2}}$$

onde $\sum_{i,j} a_{ij}(\nabla \phi(x_o, t_o)) = \sum_{i,j} (\delta_{ij} - h_i h_j)$ em (x_o, t_o) , para algum $|h| \leq 1$ e $h = \lim_{k \rightarrow \infty} h^k$ quando $(x_k, t_k) \rightarrow (x_o, t_o)$.

Então (IV.3.14) transforma-se em:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - g^{\varepsilon_k} \sum_{i,j} ((\varepsilon_k + 1) \delta_{ij} - h_i^k h_j^k) \phi_{x_i x_j} + (1 - g^{\varepsilon_k})(u^{\varepsilon_k} - I^{\varepsilon_k}) \leq 0 \text{ em } (x_k, t_k). \quad (\text{IV.3.15})$$

Desde que $\nabla \phi(x_k, t_k) \rightarrow 0$, $\varepsilon_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, conseqüentemente $g^{\varepsilon_k}(u^{\varepsilon_k} * \nabla G)(x_k, t_k) \rightarrow g(u * \nabla G)(x_o, t_o)$, como em (x_o, t_o) $\nabla \phi(x_o, t_o) = 0$, então $g(u * \nabla G)(x_o, t_o) = 1$ portanto $g^{\varepsilon_k}(u^{\varepsilon_k} * \nabla G)(x_k, t_k) \rightarrow 1$ quando $\nabla \phi(x_o, t_o) = 0$.

Além disso, como $|h^k| \leq 1$, existe uma subsequência h^k , também denotada por h^k , tal que quando $k \rightarrow \infty$, $h^k \rightarrow h$ em $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$ com $|h| \leq 1$. Aplicando o Limite para (IV.3.15) obtemos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - g(u * \nabla G) \sum_{i,j} (\delta_{ij} - h_i h_j) \phi_{x_i x_j} \leq 0 \text{ em } (x_o, t_o), \quad (\text{IV.3.16})$$

que é o mesmo que (IV.1.3), isto é,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - g(u * \nabla G) \limsup_{p \rightarrow o} \sum_{i,j} a_{ij}(p) \leq 0 \text{ se } \nabla \phi(x_o, t_o) = 0.$$

Se $u - \phi$ tem um máximo local, mas não necessariamente um máximo local estrito em (x_o, t_o) , apenas precisamos repetir o argumento acima com $\phi(x, t)$ substituindo por $\tilde{\phi}(x, t) = \phi(x, t) + |x - x_o|^4 + (t - t_o)^4$. Portanto u é uma subsolução de (IV.1.1). Similarmente, podemos mostrar que u é uma supersolução. Conseqüentemente, u é uma solução viscosa de (IV.1.1).

IV.3.4 Passo 4: Unicidade da Solução Viscosa

Agora provaremos a unicidade e estabilidade para a solução viscosa de (IV.1.1). Esta prova é baseada no teorema (8.3) em [7] (Vide Teorema (II.2.4)). Seja u uma solução viscosa de (IV.1.1), com a condição inicial Lipschitz contínua I e v uma solução viscosa de (IV.1.1) com I substituída por uma função contínua I_1 .

Seja

$$\omega(x, y, t) = u(x, t) - v(y, t) - (4\varepsilon)^{-1} |x - y|^4 - \lambda t, \quad (\text{IV.3.17})$$

para $t \in [0, T]$; $x, y \in \mathbb{R}^N$; $T, \varepsilon, \lambda \in]0, +\infty[$.

Note que desde que $u, v \in C(\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[)$ são funções periódicas, desta maneira um ponto de máximo (x_o, y_o, t_o) é sempre alcançado, vamos então demonstrar alguns Lemas que utilizaremos na prova da estabilidade e unicidade.

Lema (IV.3.5) Seja (x_o, y_o, t_o) um ponto de máximo de (IV.3.17) e L_u a constante Lipschitz de u . Então $|x_o - y_o| \leq (4\varepsilon L_u)^{1/3}$.

Prova:

Temos que:

$$\begin{aligned} u(x_o, t_o) - v(y_o, t_o) - \frac{|x_o - y_o|^4}{4\varepsilon} - \lambda t_o &\geq u(y_o, t_o) - v(y_o, t_o) - \lambda t_o \\ \Rightarrow \frac{|x_o - y_o|^4}{4\varepsilon} &\leq |u(x_o, t_o) - u(y_o, t_o)| \leq L_u |x_o - y_o| \Rightarrow |x_o - y_o| \leq (4\varepsilon L_u)^{1/3}. \end{aligned}$$

Lema (IV.3.6) Seja (x_o, y_o, t_o) ponto de máximo de (IV.3.17). Para todo $\delta > 0$, existe

$M > 0$ tal que se $\varepsilon = \left(\delta \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| \right)^3$ e $\lambda = M \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v|$, então o ponto de máximo de

(IV.3.17) é obtido para $t_o = 0$.

Prova: De fato se $\omega(x, y, t)$ atinge seu máximo em algum ponto (x_o, y_o, t_o) com $t_o > 0$, pelo teorema (8.3) e, pela observação (3.8) em [7] (Vide Teorema (II.2.4) e pela observação (II.2.1), para cada $\mu > 0$, existe X e Y , matrizes simétricas $N \times N$ e $c, d \in \mathbb{R}$ tal que:

$$c - d = \lambda,$$

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} A + \mu A^2 & -A - \mu A^2 \\ -A - \mu A^2 & A + \mu A^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.3.18})$$

e

$$\begin{cases} c - g((u * \nabla G)(x_o, t_o)) \sum_{i,j} a_{ij} \left(\varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 (x_o - y_o) \right) X_{ij} \\ + (1 - g((u * \nabla G)(x_o, t_o))) (u(x_o, t_o) - I(x_o)) \leq 0 \\ d - g((v * \nabla G)(y_o, t_o)) \sum_{i,j} a_{ij} \left(\varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 (x_o - y_o) \right) Y_{ij} \\ + (1 - g((v * \nabla G)(y_o, t_o))) (v(y_o, t_o) - I(y_o)) \geq 0 \end{cases} \quad (\text{IV.3.19})$$

onde,

$$A = (A_{ij})_{N \times N} \text{ e } A_{ij} = \varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 \delta_{ij} + 2\varepsilon^{-1} (x_o - y_o)_i (x_o - y_o)_j. \quad (\text{IV.3.20})$$

Aqui $(x_o - y_o)_i$ significa a i -ésima componente de $(x_o - y_o)$.

Ou

$$A = \frac{1}{\varepsilon} |x_o - y_o|^2 I_N + \frac{2}{\varepsilon} (x_o - y_o) \otimes (x_o - y_o)$$

e

$$A^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} |x_o - y_o|^4 I_N + \frac{8}{\varepsilon^2} |x_o - y_o|^2 (x_o - y_o) \otimes (x_o - y_o)$$

Antes de fazer a prova do **Lema (IV.3.6)** vamos obter as matrizes A e A^2 .

Seja a função $\omega(x, y, t) = u(x, t) - v(y, t) - (4\varepsilon)^{-1} |x - y|^4 - \lambda t$, com

$\varepsilon > 0, \lambda > 0, t \in [0, T]$ e $x, y \in \mathbb{R}^N$.

Seja a função de teste

$$\phi(x - y, t) = \frac{1}{4\varepsilon} |x - y|^4 + \lambda t,$$

e seja (x_o, y_o, t_o) um ponto de máximo de $\omega(x, y, t)$ com $t_o > 0$ e sejam ainda

$c = D_t u(x_o, t_o)$ e $d = D_t v(y_o, t_o)$. Então

$$1) \quad c - d = \lambda$$

$$2) \quad A = D_{x-y}^2 \phi(x_o - y_o, t_o)$$

Prova:

$$1) \quad D_t \omega(x_o, y_o, t_o) = D_t u(x_o, t_o) - D_t v(y_o, t_o) - \lambda = 0$$

$$\Rightarrow D_t u(x_o, t_o) - D_t v(y_o, t_o) - \lambda \Rightarrow c - d = \lambda.$$

$$2) \quad A = D_{x-y}^2 \phi(x_o - y_o, t_o)$$

Sejam $x_o = (x_{o_1}, \dots, x_{o_N})$, $y_o = (y_{o_1}, \dots, y_{o_N})$ e

$(x_o - y_o) = ((x_o - y_o)_1, \dots, (x_o - y_o)_N)$ onde $(x_o - y_o)_i = (x_{o_i} - y_{o_i})$ para $i = 1, 2, \dots, N$.

$$\phi(x_o - y_o, t_o) = \frac{1}{4\varepsilon} |x_o - y_o|^4 + \lambda t_o \text{ onde } |x_o - y_o|^4 = \left((x_o - y_o)_1^2 + \dots + (x_o - y_o)_N^2 \right)^2$$

$$D\phi_{(x-y)_1} = \frac{1}{4\varepsilon} 2 \left((x_o - y_o)_1^2 + \dots + (x_o - y_o)_N^2 \right)^2 \cdot 2(x_o - y_o)_1 = \varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 (x_o - y_o)_1$$

$\vdots$

$$D\phi_{(x-y)_N} = \frac{1}{4\varepsilon} 2 \left((x_o - y_o)_1^2 + \dots + (x_o - y_o)_N^2 \right)^2 \cdot 2(x_o - y_o)_N = \varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 (x_o - y_o)_N$$

$$\nabla \phi(x_o - y_o, t_o) = \varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 ((x_o - y_o)_1, \dots, (x_o - y_o)_N),$$

portanto, $\nabla \phi(x_o - y_o, t_o) = \varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 (x_o - y_o)$.

Calculemos agora $A = (A_{ij})_{N \times N}$.

$$A_{11} = D^2 \phi_{(x-y)_1(x-y)_1} = 2\varepsilon^{-1} (x_o - y_o)_1 (x_o - y_o)_1 + \varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 \delta_{11}$$

$\vdots$

$$A_{1N} = D^2 \phi_{(x-y)_1(x-y)_N} = 2\varepsilon^{-1} (x_o - y_o)_1 (x_o - y_o)_N = 2\varepsilon^{-1} (x_o - y_o)_1 (x_o - y_o)_N + \varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 \delta_{1N}$$

$\vdots$

$$A_{N1} = D^2 \phi_{(x-y)_N(x-y)_1} = 2\varepsilon^{-1} (x_o - y_o)_N (x_o - y_o)_1 = 2\varepsilon^{-1} (x_o - y_o)_N (x_o - y_o)_1 + \varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 \delta_{N1}$$

$\vdots$

$$A_{NN} = D^2 \phi_{(x-y)_N(x-y)_N} = 2\varepsilon^{-1} (x_o - y_o)_N (x_o - y_o)_N + \varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 \delta_{NN},$$

portanto,

$$A = (A_{ij})_{N \times N} \text{ onde } A_{ij} = \varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 \delta_{ij} + 2\varepsilon^{-1} (x_o - y_o)_i (x_o - y_o)_j$$

$$A = \varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{N \times N} + 2\varepsilon^{-1} \begin{pmatrix} (x_o - y_o)_1 (x_o - y_o)_1 & (x_o - y_o)_1 (x_o - y_o)_2 \cdots (x_o - y_o)_1 (x_o - y_o)_N \\ (x_o - y_o)_2 (x_o - y_o)_1 & (x_o - y_o)_2 (x_o - y_o)_2 \cdots (x_o - y_o)_2 (x_o - y_o)_N \\ \cdots & \cdots \\ (x_o - y_o)_N (x_o - y_o)_1 & (x_o - y_o)_N (x_o - y_o)_2 \cdots (x_o - y_o)_N (x_o - y_o)_N \end{pmatrix}$$

Notação:- Indicaremos a segunda matriz acima por $(x_o - y_o) \otimes (x_o - y_o)$.

Então podemos escrever:

$$A = \varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 I_N + 2\varepsilon^{-1} (x_o - y_o) \otimes (x_o - y_o)$$

Calculemos em seguida $A^2 = A \times A$ e indiquemos $R = \varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 I_N$ e

$$S = 2\varepsilon^{-1} (x_o - y_o) \otimes (x_o - y_o).$$

Temos que:

$$A^2 = A \times A = (R + S)(R + S) = R^2 + RS + SR + S^2$$

$$R^2 = R \times R = \varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 I_N \times \varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 I_N = \varepsilon^{-2} |x_o - y_o|^4 I_N$$

$$RS = \varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 I_N \times 2\varepsilon^{-1} (x_o - y_o) \otimes (x_o - y_o) = 2\varepsilon^{-2} |x_o - y_o|^2 (x_o - y_o) \otimes (x_o - y_o)$$

$$SR = 2\varepsilon^{-1} (x_o - y_o) \otimes (x_o - y_o) \times \varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 I_N = 2\varepsilon^{-2} |x_o - y_o|^2 (x_o - y_o) \otimes (x_o - y_o)$$

$$S^2 = S \times S = 2\varepsilon^{-1} (x_o - y_o) \otimes (x_o - y_o) \times 2\varepsilon^{-1} (x_o - y_o) \otimes (x_o - y_o) =$$

$$= 4\mathcal{E}^{-2} \begin{pmatrix} (x_o - y_o)_1^4 + \dots + (x_o - y_o)_1^2 (x_o - y_o)_N^2 \\ \dots \\ (x_o - y_o)_N (x_o - y_o)_1 (x_o - y_o)_1^2 + \dots + (x_o - y_o)_N^2 (x_o - y_o)_N (x_o - y_o)_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & (x_o - y_o)_1^2 (x_o - y_o)_1 (x_o - y_o)_2 + \dots + (x_o - y_o)_1 (x_o - y_o)_2 (x_o - y_o)_N^2 \\ & \dots \dots \dots \\ & (x_o - y_o)_1^2 (x_o - y_o)_2 (x_o - y_o)_N + \dots + (x_o - y_o)_N^2 (x_o - y_o)_N (x_o - y_o)_2 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & \dots (x_o - y_o)_1^2 (x_o - y_o)_1 (x_o - y_o)_N + \dots + (x_o - y_o)_N^2 (x_o - y_o)_1 (x_o - y_o)_N \\ & \dots \\ & \dots (x_o - y_o)_1^2 (x_o - y_o)_N^2 + \dots + (x_o - y_o)^4 \end{aligned} \right\}$$

$$= 4\mathcal{E}^{-2} \left[(x_o - y_o)_1^2 \begin{pmatrix} (x_o - y_o)_1^2 \dots (x_o - y_o)_1 (x_o - y_o)_N \\ \vdots \\ (x_o - y_o)_N (x_o - y_o)_1 \dots (x_o - y_o)_N^2 \end{pmatrix} \right] + \dots + (x_o - y_o)_N^2 \begin{pmatrix} (x_o - y_o)_1^2 \dots (x_o - y_o)_1 (x_o - y_o)_N \\ \vdots \\ (x_o - y_o)_N (x_o - y_o)_1 \dots (x_o - y_o)_N^2 \end{pmatrix}$$

Então,

$$S^2 = 4\varepsilon^{-2} \left((x_o - y_o)_1^2 + \dots + (x_o - y_o)_N^2 \right) \begin{pmatrix} (x_o - y_o)_1^2 \dots (x_o - y_o)_1 (x_o - y_o)_N \\ \dots \\ \dots \\ (x_o - y_o)_N (x_o - y_o)_1 \dots (x_o - y_o)_N^2 \end{pmatrix}$$

$$S^2 = 4\varepsilon^{-2} |x_o - y_o|^2 (x_o - y_o) \otimes (x_o - y_o)$$

concluimos que

$$A^2 = \varepsilon^{-2} |x_o - y_o|^4 I_N + 4\varepsilon^{-2} |x_o - y_o|^2 (x_o - y_o) \otimes (x_o - y_o) + 4\varepsilon^{-2} |x_o - y_o|^2 (x_o - y_o) \otimes (x_o - y_o)$$

$$A^2 = \varepsilon^{-2} |x_o - y_o|^4 I_N + 8\varepsilon^{-2} |x_o - y_o|^2 (x_o - y_o) \otimes (x_o - y_o).$$

Façamos agora a prova do **Lema (IV.3.6)**, primeiramente vamos supor que se

$$\lambda > C_{x_o=y_o} \sup_{\mathbb{R}^N \times [0,T]} |u - v| \text{ então } x_o \neq y_o.$$

Se $x_o = y_o$ então de (IV.3.20) $A \equiv 0$, conseqüentemente, $X \leq 0$ e $Y \geq 0$ de (IV.3.18).

Então para (IV.3.19) obtemos.

$$c + (1 - g((u * \nabla G)(x_o, t_o)))(u(x_o, t_o) - I(x_o)) \leq 0$$

$$d + (1 - g((v * \nabla G)(x_o, t_o)))(v(x_o, t_o) - I_1(x_o)) \geq 0$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \lambda = c - d &\leq - (1 - g((u * \nabla G)(x_o, t_o)))(u(x_o, t_o) - I(x_o)) \\ &+ (1 - g((v * \nabla G)(x_o, t_o)))(v(x_o, t_o) - I_1(x_o)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda &\leq - (u(x_o, t_o) - I(x_o)) + (v(x_o, t_o) - I_1(x_o)) + g((u * \nabla G)(x_o, t_o)) \\ &(u(x_o, t_o) - I(x_o)) - g((v * \nabla G)(x_o, t_o))(v(x_o, t_o) - I_1(x_o)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda &\leq -\left(u(x_o, t_o) - v(x_o, t_o)\right) + \left(I(x_o) - I_1(x_o)\right) + \left(g(u * \nabla G)(x_o, t_o)\right) u(x_o, t_o) \\
&\quad - g\left((v * \nabla G)(x_o, t_o)\right) v(x_o, t_o) - \left(g\left((u * \nabla G)(x_o, t_o)\right) I(x_o) - g\left((v * \nabla G)(x_o, t_o)\right) I_1(x_o)\right) \\
\lambda &\leq -\left(u(x_o, t_o) - v(x_o, t_o)\right) + \left(I(x_o) - I_1(x_o)\right) + \left[\left(g\left((u * \nabla G)(x_o, t_o)\right) - g\left((v * \nabla G)(x_o, t_o)\right)\right)\right. \\
&\quad \left.u(x_o, t_o) + g\left((v * \nabla G)(x_o, t_o)\right)\left(u(x_o, t_o) - v(x_o, t_o)\right)\right] \\
&\quad - \left[\left(g(u * \nabla G)(x_o, t_o) - g(v * \nabla G)(x_o, t_o)\right) I(x_o) + g(v * \nabla G)(x_o, t_o) \left(I(x_o) - I_1(x_o)\right)\right] \\
\lambda &\leq \left|u(x_o, t_o) - v(x_o, t_o)\right| + \left|I(x_o) - I_1(x_o)\right| + \left|g\left((u * \nabla G)(x_o, t_o)\right) - g\left((v * \nabla G)(x_o, t_o)\right)\right| \left|u(x_o, t_o)\right| \\
&\quad + \left|g\left((v * \nabla G)(x_o, t_o)\right)\right| \left|u(x_o, t_o) - v(x_o, t_o)\right| + \left|g\left((u * \nabla G)(x_o, t_o)\right) - g\left((v * \nabla G)(x_o, t_o)\right)\right| \\
&\quad \left|I(x_o)\right| + \left|g\left((v * \nabla G)(x_o, t_o)\right)\right| \left|I(x_o) - I_1(x_o)\right|,
\end{aligned}$$

onde,

$$1) \quad \left|u(x_o, t_o) - v(x_o, t_o)\right| \leq \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v|$$

$$2) \quad \left|I(x_o) - I_1(x_o)\right| \leq \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v|$$

$$3) \quad \left|g\left((u * \nabla G)(x_o, t_o)\right) - g\left((v * \nabla G)(x_o, t_o)\right)\right| \leq L_g \left|(u * \nabla G)(x_o, t_o) - (v * \nabla G)(x_o, t_o)\right|$$

$$= L_g \left| \int_{\mathbb{R}^N} (u(x_o - z, t_o) - v(x_o - z, t_o)) (\nabla G)(z) dz \right| \leq L_g \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla G(z)| dz \leq L_g C_G \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v|$$

onde L_g é a constante Lipschitz de g (depende de g , $\sup |u|$ e $\sup |v|$) e

$$C_G = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla G(z)| dz < \infty.$$

$$4) \quad \left|u(x_o, t_o)\right| \leq \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u|$$

$$5) \quad 0 \leq g(v * \nabla G)(x_o, t_o) \leq 1 \Rightarrow |g(v * \nabla G)(x_o, t_o)| \leq 1$$

$$6) \quad |I(x_o)| \leq \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u|$$

Utilizando estas estimativas, temos

$$\lambda \leq \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| + \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| + L_g C_G \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u| \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| + \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| + L_g C_G \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u| \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| + \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v|$$

$$\lambda \leq C_{x_o=y_o} \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| \text{ onde } C_{x_o=y_o} \text{ depende de } g, \sup |u|, \sup |v| \text{ e } G.$$

Conseqüentemente, se $\lambda > C_{x_o=y_o} \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v|$ então $x_o \neq y_o$.

Continuemos a prova do **Lema (IV.3.6)**, se colocarmos $\mu = \varepsilon |x_o - y_o|^{-2}$ em (IV.3.18), temos,

$$A + \mu A^2 = \varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 I_N + 2\varepsilon^{-1} (x_o, t_o) \otimes (x_o, t_o) + \varepsilon |x_o - y_o|^{-2} (\varepsilon^{-2} |x_o - y_o|^4 I_N + 8\varepsilon^{-2} |x_o - y_o|^2 (x_o, t_o) \otimes (x_o, t_o))$$

$$A + \mu A^2 = 2\varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 I_N + 10\varepsilon^{-1} (x_o, t_o) \otimes (x_o, t_o)$$

$$A + \mu A^2 = 2\varepsilon^{-1} (|x_o - y_o|^2 I_N + 5(x_o, t_o) \otimes (x_o, t_o)) = 2\varepsilon^{-1} B$$

onde,

$$B = (B_{ij})_{N \times N}, B_{ij} = |x_o - y_o|^2 \delta_{ij} + 5(x_o - y_o)_i (x_o - y_o)_j \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

Portanto;

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq \frac{2}{\varepsilon} \begin{pmatrix} B & -B \\ -B & B \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.3.21})$$

Seja $D = (D_{ij})$, $1 \leq i, j \leq N$, onde $D_{ij} = a_{ij} \left(\varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 (x_o - y_o) \right)$, então $D \geq 0$ (F é elipticamente degenerada) e $g_1 = g(u * \nabla G)(x_o, t_o)$ e $g_2 = g(v * \nabla G)(y_o, t_o)$.

Agora provaremos que a matriz simétrica (2Nx2N)

$$Q = \begin{pmatrix} g_1 D & (g_1 g_2)^{1/2} D \\ (g_1 g_2)^{1/2} D & g_2 D \end{pmatrix}_{2N \times 2N} \text{ é não negativa } (Q \geq 0).$$

Sejam $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ e calculemos o produto $\langle Q(\xi, \eta), (\xi, \eta) \rangle$:

$$\begin{aligned} (\xi, \eta)^t Q(\xi, \eta) &= g_1 \xi^t D \xi + (g_1 g_2)^{1/2} \eta^t D \xi + (g_1 g_2)^{1/2} \xi^t D \eta + g_2 \eta^t D \eta = \\ &= g_1 \xi^t D \xi + 2(g_1 g_2)^{1/2} \xi^t D \eta + g_2 \eta^t D \eta = \left(g_1^{1/2} \xi + g_2^{1/2} \eta \right)^t D \left(g_1^{1/2} \xi + g_2^{1/2} \eta \right). \end{aligned}$$

Portanto, como $D \geq 0$, temos que $Q \geq 0$. Se multiplicarmos (IV.3.21) por Q temos:

$$\begin{aligned} Q \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} &\leq \frac{2}{\varepsilon} Q \begin{pmatrix} B & -B \\ -B & B \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} g_1 DX & -(g_1 g_2)^{1/2} DY \\ (g_1 g_2)^{1/2} DX & -g_2 DY \end{pmatrix} \\ &\leq \frac{2}{\varepsilon} \begin{pmatrix} g_1 DB - (g_1 g_2)^{1/2} DB & -g_1 DB + (g_1 g_2)^{1/2} DB \\ -g_2 DB + (g_1 g_2)^{1/2} DB & g_2 DB - (g_1 g_2)^{1/2} DB \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tomando o traço, obtemos

$$g_1 tr(DX) - g_2 tr(DY) \leq 2\varepsilon^{-1} \left(g_1 - 2(g_1 g_2)^{1/2} + g_2 \right) trDB$$

$$g_1 \sum_{i,j} D_{ij} X_{ij} - g_2 \sum_{i,j} D_{ij} Y_{ij} \leq 2\varepsilon^{-1} \left(g_1^{1/2} - g_2^{1/2} \right)^2 \sum_{i,j} D_{ij} B_{ij} \quad (IV.3.22)$$

Calculemos o $trDB = \sum_{i,j} D_{ij} B_{ij}$, onde

$$D = (D_{ij})_{1 \leq i, j \leq N},$$

$$D_{ij} = a_{ij} \left(\varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 (x_o - y_o) \right)_i,$$

$$B = (B_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} \text{ e}$$

$$B_{ij} = |x_o - y_o|^2 \delta_{ij} + 5(x_o - y_o)_i (x_o - y_o)_j.$$

Portanto,

$$trDB = \sum_{i,j} a_{ij} B_{ij} = a_{11} B_{11} + \dots + a_{N1} B_{N1} + a_{12} B_{12} + a_{22} B_{22} + \dots + a_{N2} B_{N2} + \dots + a_{1N} B_{1N} + a_{2N} B_{2N} + \dots + a_{NN} B_{NN},$$

onde

$$a_{ij} \left(\varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 (x_o - y_o) \right)_i = \delta_{ij} - \frac{\varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 (x_o - y_o)_i \varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 (x_o - y_o)_j}{\left| \varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 (x_o - y_o) \right|^2},$$

então

$$a_{ij} = \frac{\sum_{j \neq i}^N (x_o - y_o)_j^2}{|x_o - y_o|^2} \quad \text{para } i = j,$$

$$a_{ij} = -\frac{(x_o - y_o)_i^2 (x_o - y_o)_j^2}{|x_o - y_o|^2} \quad \text{para } i \neq j$$

e

$$B_{ij} = |x_o - y_o|^2 + 5(x_o - y_o)_i^2 \quad \text{para } i = j,$$

$$B_{ij} = 5(x_o - y_o)_i (x_o - y_o)_j \quad \text{para } i \neq j.$$

Reorganizando os termos no traço de DB, obtemos

$$\begin{aligned} trDB &= a_{11}B_{11} + a_{12}B_{12} + \dots + a_{1N}B_{1N} + a_{21}B_{21} + a_{22}B_{22} \\ &+ \dots + a_{2N}B_{2N} + \dots + a_{N1}B_{N1} + a_{N2}B_{N2} + \dots + a_{NN}B_{NN} \end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} a_{11}B_{11} &= \frac{(x_o - y_o)_2^2 + (x_o - y_o)_3^2 + \dots + (x_o - y_o)_N^2}{|x_o - y_o|^2} (|x_o - y_o|^2 + 5(x_o - y_o)_1^2) \\ &= (x_o - y_o)_2^2 + (x_o - y_o)_3^2 + \dots + (x_o - y_o)_N^2 + 5 \frac{(x_o - y_o)_1^2 + (x_o - y_o)_2^2}{|x_o - y_o|^2} + \\ &5 \frac{(x_o - y_o)_1^2 + (x_o - y_o)_3^2}{|x_o - y_o|^2} + \dots + 5 \frac{(x_o - y_o)_1^2 + (x_o - y_o)_N^2}{|x_o - y_o|^2} \\ a_{12}B_{12} &= -\frac{5(x_o - y_o)_1^2 (x_o - y_o)_2^2}{|x_o - y_o|^2} \\ &\vdots \\ a_{1N}B_{1N} &= -\frac{5(x_o - y_o)_1^2 (x_o - y_o)_N^2}{|x_o - y_o|^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
a_{11}\mathbf{B}_{11} + a_{12}\mathbf{B}_{12} + \dots + a_{1N}\mathbf{B}_{1N} &= (x_o - y_o)_2^2 + (x_o - y_o)_3^2 + \dots + (x_o - y_o)_N^2 \\
a_{21}\mathbf{B}_{21} + a_{22}\mathbf{B}_{22} + \dots + a_{2N}\mathbf{B}_{2N} &= (x_o - y_o)_1^2 + (x_o - y_o)_3^2 + \dots + (x_o - y_o)_N^2 \\
&\vdots \\
a_{N1}\mathbf{B}_{N1} + a_{N2}\mathbf{B}_{N2} + \dots + a_{NN}\mathbf{B}_{NN} &= (x_o - y_o)_1^2 + (x_o - y_o)_2^2 + \dots + (x_o - y_o)_{N-1}^2 \\
trDB &= (N-1) \left((x_o - y_o)_1^2 + (x_o - y_o)_2^2 + \dots + (x_o - y_o)_{N-1}^2 + (x_o - y_o)_N^2 \right) \\
trDB &= (N-1) |x_o - y_o|^2.
\end{aligned}$$

Substituindo na desigualdade (IV.3.22), obtemos

$$g_1 \sum_{i,j} a_{ij} X_{ij} - g_2 \sum_{i,j} a_{ij} Y_{ij} \leq 2\varepsilon^{-1} \left(g_1^{1/2} - g_2^{1/2} \right)^2 (N-1) |x_o - y_o|^2$$

$$g_1 \sum_{i,j} a_{ij} X_{ij} - g_2 \sum_{i,j} a_{ij} Y_{ij} \leq C_o \varepsilon^{-1} \left(g_1^{1/2} - g_2^{1/2} \right)^2 |x_o - y_o|^2$$

onde C_o depende de (a_{ij}) , $1 \leq i, j \leq N$.

Então de (IV.3.18) e (IV.3.19) temos

$$\begin{aligned}
\lambda = c - d &\leq g \left((u * \nabla G)(x_o, t_o) \right) \sum_{i,j} a_{ij} \left(\varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 (x_o - y_o) \right) X_{ij} \\
&- g \left((v * \nabla G)(y_o, t_o) \right) \sum_{i,j} a_{ij} \left(\varepsilon^{-1} |x_o - y_o|^2 (x_o - y_o) \right) Y_{ij} \\
&- \left(1 - g \left((u * \nabla G)(x_o, t_o) \right) \right) \left(u(x_o, t_o) - I(x_o) \right) \\
&+ \left(1 - g \left((v * \nabla G)(y_o, t_o) \right) \right) \left(v(y_o, t_o) - I_1(y_o) \right).
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\lambda = c - d \leq I + II$$

onde

$$I = g_1 \sum_{i,j} a_{ij} X_{ij} - g_2 \sum_{i,j} a_{ij} Y_{ij}, \quad (IV.3.23)$$

e

$$II = (1 - g_2)(v(y_o, t_o) - I_1(y_o)) - I_1(y_o) - (1 - g_1)(u(x_o, t_o) - I(x_o)). \quad (IV.3.24)$$

Vamos estimar (IV.3.23):

$$g_1 \sum_{i,j} a_{ij} X_{ij} - g_2 \sum_{i,j} a_{ij} Y_{ij} \leq C_o \varepsilon^{-1} \left(g_1^{1/2} - g_2^{1/2} \right)^2 |x_o - y_o|^2, \quad (IV.3.25)$$

como $g^{1/2}$ é Lipschitz podemos escrever

$$\left| g_1^{1/2} - g_2^{1/2} \right| = \left| g_1^{1/2} (u * \nabla G)(x_o, t_o) - g_2^{1/2} (v * \nabla G)(y_o, t_o) \right| \leq L_{g^{1/2}} \left| (u * \nabla G)(x_o, t_o) - (v * \nabla G)(y_o, t_o) \right|,$$

onde $L_{g^{1/2}}$ é a constante Lipschitz de $g^{1/2}$ (depende de $g^{1/2}$, $\sup|u|$ e $\sup|v|$).

Como

$$\begin{aligned} \left| (u * \nabla G)(x_o, t_o) - (v * \nabla G)(y_o, t_o) \right| &\leq \left| (u * \nabla G)(x_o, t_o) - (u * \nabla G)(y_o, t_o) \right| \\ &+ \left| (u * \nabla G)(y_o, t_o) - (v * \nabla G)(y_o, t_o) \right|. \end{aligned}$$

Vemos que

$$\begin{aligned} \left| (u * \nabla G)(x_o, t_o) - (u * \nabla G)(y_o, t_o) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (u(x_o - z, t_o) - u(y_o - z, t_o)) (\nabla G)(z) dz \right| \\ &\leq L_u |x_o - y_o| \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla G(z)| dz \leq L_u C_G |x_o - y_o| \end{aligned}$$

onde L_u é constante Lipschitz de u (depende de $\sup|u|$ e $\sup|v|$)

e

$$\begin{aligned}
& \left| (u * \nabla G)(y_o, t_o) - (v * \nabla G)(y_o, t_o) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} (u(y_o - z, t_o) - v(y_o - z, t_o)) (\nabla G)(z) dz \right| \\
& \leq \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla G(z)| dz \leq C_G \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v|.
\end{aligned}$$

Onde $C_G = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla G(z)| dz < +\infty$.

Portanto, $(g_1^{1/2} - g_2^{1/2})$ é estimado por

$$\left| g_1^{1/2} - g_2^{1/2} \right| \leq L_{g^{1/2}} \left(C_G \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| + L_u C_G |x_o - y_o| \right) \leq L_{g^{1/2}} C_1 \left(\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| + |x_o - y_o| \right),$$

onde C_1 depende da constante Lipschitz de u e $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla G(z)| dz$ (i é, depende de G , $\sup |u|$ e $\sup |v|$).

De (IV.3.25) concluimos que:

$$\begin{aligned}
g_1 \sum_{i,j} a_{ij} X_{ij} - g_2 \sum_{i,j} a_{ij} Y_{ij} & \leq C_o \varepsilon^{-1} L_{g^{1/2}}^2 C_1^2 \left(\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| + |x_o - y_o| \right)^2 |x_o - y_o|^2 \\
g_1 \sum_{i,j} a_{ij} X_{ij} - g_2 \sum_{i,j} a_{ij} Y_{ij} & \leq C_o \varepsilon^{-1} L_{g^{1/2}}^2 C_1^2 \left(\left(\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| \right)^2 \frac{|x_o - y_o|^2}{\varepsilon} + 2 \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| \frac{|x_o - y_o|^3}{\varepsilon} + \frac{|x_o - y_o|^4}{\varepsilon} \right).
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy, temos

$$g_1 \sum_{i,j} a_{ij} X_{ij} - g_2 \sum_{i,j} a_{ij} Y_{ij} \leq C \left(\left(\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| \right)^2 \frac{|x_o - y_o|^2}{\varepsilon} + \frac{|x_o - y_o|^4}{\varepsilon} \right), \quad (\text{IV.3.26})$$

onde $C = 2C_o L_{g^{1/2}}^2 C_1^2$ (depende de (a_{ij}) , $g^{1/2}$, G , $\sup|u|$ e $\sup|v|$).

Agora estimaremos (IV.3.24).

Temos que:

$$\Pi = (1 - g_2)(v(y_o, t_o) - I_1(y_o)) - (1 - g_1)(u(x_o, t_o) - I(x_o))$$

Logo,

$$\Pi \leq \left| (1 - g((v * \nabla G)(y_o, t_o)))(v(y_o, t_o) - I_1(y_o)) - (1 - g((u * \nabla G)(x_o, t_o)))(u(x_o, t_o) - I(x_o)) \right|$$

$$\begin{aligned} \Pi \leq & \left| v(y_o, t_o) - I_1(y_o) - u(x_o, t_o) + I(x_o) - g((v * \nabla G)(y_o, t_o))v(y_o, t_o) + g((v * \nabla G)(y_o, t_o))I_1(y_o) \right. \\ & \left. + g((u * \nabla G)(x_o, t_o))u(x_o, t_o) - g((u * \nabla G)(x_o, t_o))I(x_o) \right| \end{aligned}$$

$$\Pi \leq |u(x_o, t_o) - v(y_o, t_o)| + |I(x_o) - I_1(y_o)| + g((u * \nabla G)(x_o, t_o))u(x_o, t_o) - g((v * \nabla G)(y_o, t_o))u(x_o, t_o)$$

$$+ g((v * \nabla G)(y_o, t_o))u(x_o, t_o) - g(v * \nabla G)(y_o, t_o)v(y_o, t_o) + |g((u * \nabla G)(x_o, t_o))I(x_o)$$

$$- g((v * \nabla G)(y_o, t_o))I(x_o) + g(v * \nabla G)(y_o, t_o))I(x_o) - g((v * \nabla G)(y_o, t_o))I_1(y_o)|$$

$$\Pi \leq |u(x_o, t_o) - v(y_o, t_o)| + |I(x_o) - I_1(y_o)| + |g((v * \nabla G)(x_o, t_o) - g(v * \nabla G)(y_o, t_o))||u(x_o, t_o)|$$

$$+ |g((v * \nabla G)(y_o, t_o))||u(x_o, t_o) - v(y_o, t_o)| + |g((u * \nabla G)(x_o, t_o)) - g((v * \nabla G)(y_o, t_o))||I(x_o)|$$

$$+ |g((v * \nabla G)(y_o, t_o))||I(x_o) - I_1(y_o)|.$$

Vamos as estimativas:

$$1) \quad |u(x_o, t_o) - v(y_o, t_o)| \leq |u(x_o, t_o) - u(y_o, t_o)|$$

$$+ |u(y_o, t_o) - v(y_o, t_o)| \leq L_u |x_o - y_o| + \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v|, \text{ onde } L_u \text{ é a constante Lipschitz de } u,$$

$$L_u = \sup_{\substack{\mathbb{R}^N \times [0, T] \\ x_o \neq y_o}} \left\{ \frac{|u(x_o, t_o) - u(y_o, t_o)|}{|x_o - y_o|} \right\} < \infty.$$

$$2) \quad |I(x_o) - I(y_o)| \leq L_u |x_o - y_o| + \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v|.$$

$$3) \quad |g((u * \nabla G)(x_o, t_o) - g((v * \nabla G)(y_o, t_o))| \leq L_g |(u * \nabla G)(x_o, t_o) - g(v * \nabla G)(y_o, t_o)|$$

$$\leq L_g C_1 \left(\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| + |x_o - y_o| \right) \leq C_2 \left(\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| + |x_o - y_o| \right),$$

$$\text{onde } C_2 = L_g C_1.$$

$$4) \quad |u(x_o, t_o)| \leq \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u|.$$

$$5) \quad |g((v * \nabla G)(y_o, t_o))| \leq 1.$$

$$6) \quad |I(x_o)| \leq \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u|.$$

Assim,

$$II \leq L_u |x_o - y_o| + \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| + L_u |x_o - y_o| + \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| + C_2 \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u| \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| +$$

$$C_2 \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u| |x_o - y_o| + L_u |x_o - y_o| + \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| + C_2 \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u| \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| +$$

$$C_2 \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u| |x_o - y_o| + L_u |x_o - y_o| + \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v|$$

$$\Pi \leq C_{x_o \neq y_o} \left(\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| + |x_o - y_o| \right). \quad (\text{IV.3.27})$$

De (IV.3.26) e (IV.3.27), obtemos

$$\lambda \leq C \left(\left(\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| \right)^2 \frac{|x_o - y_o|^2}{\varepsilon} + \frac{|x_o - y_o|^4}{\varepsilon} \right) + C_{x_o \neq y_o} \left(\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| + |x_o - y_o| \right). \quad (\text{IV.3.28})$$

Pelo **Lema (IV.3.5)** $|x_o - y_o| \leq (4\varepsilon L_u)^{1/3}$, substituindo em (IV.3.28), temos

$$\lambda \leq C \left(\left(\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| \right)^2 \frac{(4\varepsilon L_u)^{2/3}}{\varepsilon} + \frac{(4\varepsilon L_u)^{4/3}}{\varepsilon} \right) + C_{x_o \neq y_o} \left(\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| + |4\varepsilon L_u|^{1/3} \right)$$

$$\lambda \leq C \left(\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| \right)^2 (4L_u)^{2/3} \varepsilon^{-1/3} + C (4L_u)^{4/3} \varepsilon^{1/3} + C_{x_o \neq y_o} \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| + C_{x_o \neq y_o} |4L_u|^{1/3} \varepsilon^{1/3}$$

$$\lambda \leq (4L_u)^{2/3} C \left(\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| \right)^2 \varepsilon^{-1/3} + \left(C (4L_u)^{4/3} + C_{x_o \neq y_o} (4L_u)^{1/3} \right) \varepsilon^{1/3} + C_{x_o \neq y_o} \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v|.$$

Tornando $C_3 = \max \left\{ (4L_u)^{2/3} C; (4L_u)^{4/3} C + (4L_u)^{1/3} C_{x_o \neq y_o}; C_{x_o \neq y_o} \right\}$, temos que

$$\lambda \leq C_3 \left\{ \left(\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| \right)^2 \varepsilon^{-1/3} + \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| + \varepsilon^{1/3} \right\}.$$

Sem perda de generalidade, supondo que $\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| > 0$ e colocando

$$\varepsilon = \delta^3 \left(\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| \right)^3, \text{ obtemos:}$$

$$\lambda \leq C_3 \left(\frac{1}{\delta} + \delta + 1 \right) \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| \quad (\text{IV.3.29})$$

Portanto, tornando $M = C_3 \left(\frac{1}{\delta} + \delta + 2 \right)$ e $\lambda = M \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v|$, temos uma

contradição e assim $t_o = 0$.

Ainda para a prova da estabilidade e unicidade, necessitamos do seguinte Lema:

Lema (IV.3.7) Se a função $\omega(x, y, t) = u(x, t) - v(y, t) - \frac{|x - y|^4}{4\varepsilon} - \lambda t$

$t \in [0, T], x, y \in \mathbb{R}^N, T, \varepsilon, \lambda \in]0, +\infty[$ alcança um máximo em um ponto (x_o, y_o, t_o) com $t_o = 0$, então

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} (u - v) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} |I - I_1| + \frac{3}{4} L_u^{4/3} \varepsilon^{1/3} + \lambda T \text{ onde } L_u \text{ é a constante Lipschitz de } u$$

Observação:- O caso de $\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} (v - u)$ pode ser tratado similarmente, permutando u e v .

$$u(x, t) - v(y, t) - (4\varepsilon)^{-1} |x - y|^4 - \lambda t \leq \sup_{x, y \in \mathbb{R}^N} \left(u(x, 0) - v(y, 0) - (4\varepsilon)^{-1} |x - y|^4 \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{x,y \in \mathbb{R}^N} \left(I(y) - I_1(y) + I(x) - I(y) - (4\varepsilon)^{-1} |x-y|^4 \right) \\
&\leq \sup_{\mathbb{R}^N} |I - I_1| + \sup_{|x-y| \geq 0} \left(I(x) - I(y) - (4\varepsilon)^{-1} |x-y|^4 \right) \\
&\leq \sup_{\mathbb{R}^N} |I - I_1| + \sup_{|x-y| \geq 0} \left(L_u |x-y| - (4\varepsilon)^{-1} |x-y|^4 \right). \tag{IV.3.30}
\end{aligned}$$

Notando que $\sup_{r \geq 0} \left(L_u r - (4\varepsilon)^{-1} r^4 \right)$ é atingido em $r = (\varepsilon L_u)^{1/3}$, pois

$$f(r) = L_u r - (4\varepsilon)^{-1} r^4$$

$$f'(r) = L_u - \frac{4}{4\varepsilon} r^3 = L_u - \frac{r^3}{\varepsilon}$$

$$f'(r) = 0 \Rightarrow L_u - \frac{r^3}{\varepsilon} = 0 \Rightarrow r = (\varepsilon L_u)^{1/3}.$$

Portanto, temos

$$\sup_{r \geq 0} \left(L_u r - (4\varepsilon)^{-1} r^4 \right) = L_u (\varepsilon L_u)^{1/3} - (4\varepsilon)^{-1} (\varepsilon L_u)^{4/3}$$

$$= L_u^{4/3} \varepsilon^{1/3} - \frac{L_u^{4/3} \varepsilon^{1/3}}{4} = \frac{3}{4} L_u^{4/3} \varepsilon^{1/3}.$$

Fazendo $x = y$ em (IV.3.30),

$$u(x, t) - v(x, t) - \lambda t \leq \sup_{\mathbb{R}^N} |I - I_1| + \frac{3}{4} L_u^{4/3} \varepsilon^{1/3}$$

$$u(x, t) - v(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} |I - I_1| + \frac{3}{4} L_u^{4/3} \varepsilon^{1/3} + \lambda T$$

Logo,

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} (u - v) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} |I - I_1| + \frac{3}{4} L_u^{4/3} \varepsilon^{1/3} + \lambda T. \quad (\text{IV.3.31})$$

Similarmente temos

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} (v - u) \leq \sup_{\mathbb{R}^N} |I - I_1| + \frac{3}{4} L_u^{4/3} \varepsilon^{1/3} + \lambda T. \quad (\text{IV.3.32})$$

De (IV.3.31) e (IV.3.32) temos:

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| \leq \sup_{\mathbb{R}^N} |I - I_1| + \frac{3}{4} L_u^{4/3} \varepsilon^{1/3} + \lambda T. \quad (\text{IV.3.33})$$

Prova da Estabilidade e Unicidade

Se temos duas soluções viscosas do problema (IV.1.1), pela desigualdade (IV.3.33), temos

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| \leq \sup_{\mathbb{R}^N} |I - I_1| + \frac{3}{4} L_u^{4/3} \varepsilon^{1/3} + \lambda t.$$

Fazendo $\varepsilon^{1/3} = \delta \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v|$, onde $\delta = L_u^{-4/3}$, obtemos

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| \leq \sup_{\mathbb{R}^N} |I - I_1| + \frac{3}{4} \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| + \lambda T$$

e, assim,

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| \leq 4 \sup_{\mathbb{R}^N} |I - I_1| + 4\lambda T.$$

Seja $T \leq t_1$ definido pela relação $4Mt_1 = \frac{1}{2}$ (suficientemente pequeno) onde

$$M = C_3 \left(\frac{1}{\delta} + \delta + 2 \right) \text{ para um } \delta \text{ fixo. Então, fazendo}$$

$$\lambda = M \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v|, \text{ obtemos}$$

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, t_1]} |u - v| \leq 4 \sup_{\mathbb{R}^N} |I - I_1| + 4t_1 \lambda \Rightarrow$$

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, t_1]} |u - v| \leq 4 \sup_{\mathbb{R}^N} |I - I_1| + 4 \frac{1}{8M} M \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, t_1]} |u - v|.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, t_1]} |u - v| \leq 4 \sup_{\mathbb{R}^N} |I - I_1| \Rightarrow$$

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, t_1]} |u - v| \leq 8 \sup_{\mathbb{R}^N} |I - I_1|.$$

Agora seja um intervalo $(t_1, 2t_1)$. Aplicando o mesmo argumento obtemos

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times [t_1, t_2]} |u - v| \leq 8 \sup_{\mathbb{R}^N \times [0, t_1]} |u_1 - v_1| \leq 8 \cdot 8 \sup_{\mathbb{R}^N} |I - I_1|,$$

onde $u_1 = u(x, t_1)$ e $v_1 = v(x, t_1)$.

Generalizando obtemos no intervalo (t_1, nt_1)

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times [t_1, t_n]} |u - v| \leq 8^n \sup_{\mathbb{R}^N} |I - I_1|,$$

onde n é tal que $T \leq nt_1$ (suficientemente grande) e portanto temos

$$\sup_{\mathbb{R}^N \times [0, T]} |u - v| \leq C_T \sup_{\mathbb{R}^N} |I - I_1|.$$

Se ambas as soluções tem a mesma imagem inicial I , elas coincidem. Isto conclui a demonstração da unicidade do teorema.

Capítulo V

Implementação Numérica do Modelo e Exemplos

O modelo abordado neste trabalho consiste na seguinte equação:

$$u_t = g |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \lambda (1 - g)(u - I), \quad x \in \Omega, t > 0$$

$$u(x, 0) = I(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \eta} \right|_{\partial \Omega \times \mathbb{R}_+} = 0, \quad x \in \partial \Omega, t > 0$$

Esta equação foi discretizada utilizando técnica de diferenças finitas. A discretização aqui apresentada foi desenvolvida por Silva Jr. e pode ser encontrada em [18].

V.1 Método de diferenças finitas

Como trabalhamos com imagens que são representadas pela função $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ($N=2$ ou $N=3$) procuramos a solução $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$ da EDP.

Dessa forma, para $N = 2$ devemos discretizar o domínio de $u(x, y)$, isto é, a região Ω , em uma malha bidimensional de pontos, onde construiremos a malha de passos h e k associada a (x_i, y_i) dada por

$$(x_i, y_i) = (x_o \pm ih, y_o \pm jk), i, j = 1, 2, \dots$$

onde (x_o, y_o) é um ponto de referência e h e k são números positivos.

Particularmente, consideramos $h = k$ o que torna a nossa malha regular em (x, y)

Como estamos trabalhando com imagens de dimensão $m \times n$, vamos discretizar a região Ω em uma malha de $m \times n$ pontos igualmente espaçados, isto é, de passo constante e igual a 1 (Figura (V.1.1)).

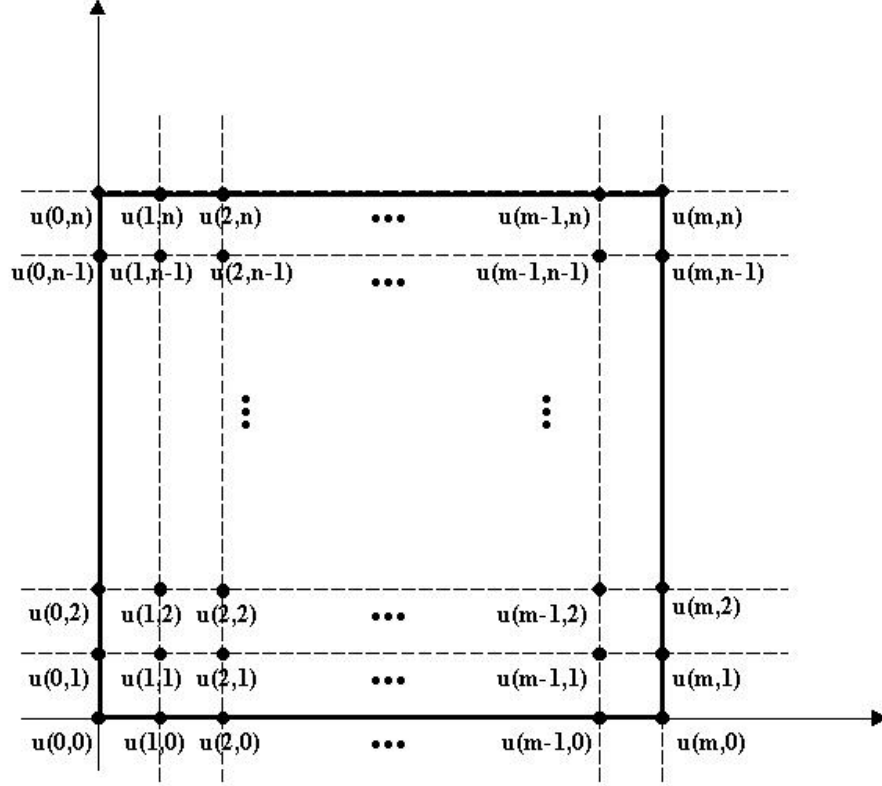


Figura (V.1.1) malha de $m \times n$ pontos

Para o caso bidimensional, podemos obter as seguintes equações de diferenças relativas às derivadas parciais da função $u(x, y)$, onde admitimos $h = 1$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x \cong u(x+1, y) - u(x, y) = u_{i+1,j} - u_{ij} \quad \text{Fórmula Avançada}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x \cong u(x, y) - u(x-1, y) = u_{ij} - u_{i-1,j} \quad \text{Fórmula Atrasada}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x \cong \frac{u(x+1, y) - u(x-1, y)}{2} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2} \quad \text{Fórmula Centrada}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_y \cong u(x, y+1) - u(x, y) = u_{i,j+1} - u_{ij} \quad \text{Fórmula Avançada}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_y \cong u(x, y) - u(x, y-1) = u_{ij} - u_{i,j-1} \quad \text{Fórmula Atrasada}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_y \cong \frac{u(x, y+1) - u(x, y-1)}{2} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2} \quad \text{Fórmula Centrada}$$

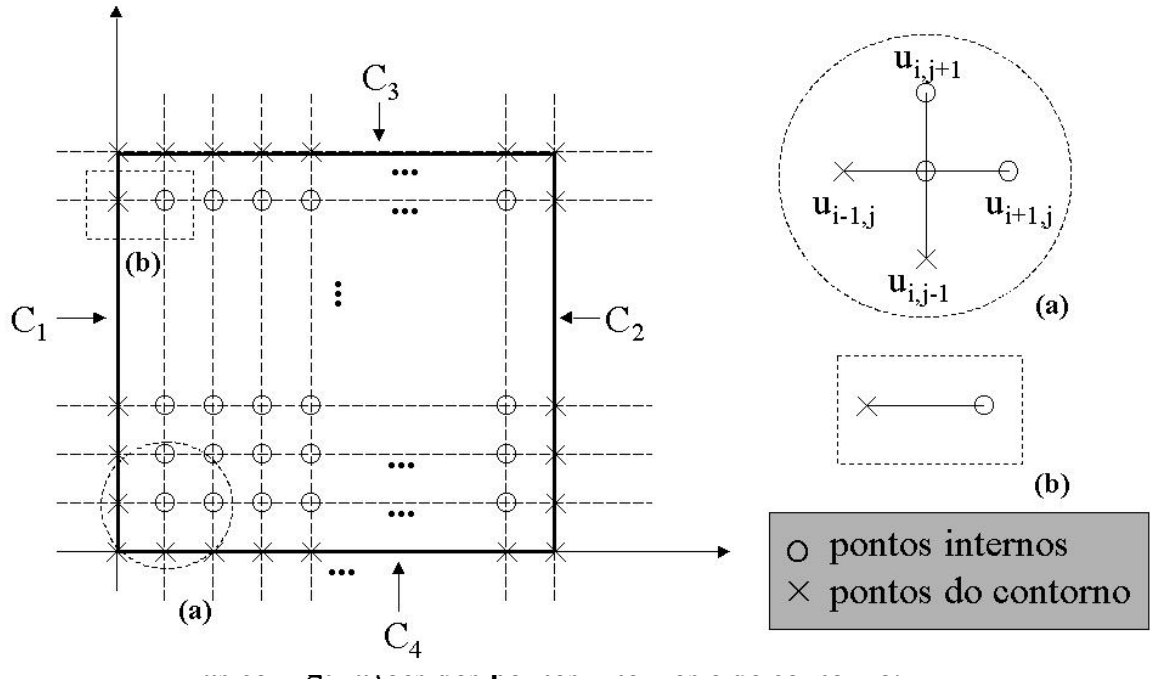
$$\frac{\partial u}{\partial x \partial y} = u_{xy} = (u_x)_y \cong \frac{(u_x)_{j+1} - (u_x)_{j-1}}{2}$$

$$\begin{aligned} & \cong \frac{\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1}}{2} - \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2}}{2} \\ & = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4} \\ & = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1}}{4} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx} \cong u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy} \cong u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}$$

De acordo com a regularidade da malha relativa a discretização da região Ω , devemos notar que para os pontos interiores, isto é, os delimitados pelos contornos, usamos em nossas aproximações para a primeira derivada os operadores de diferenças centradas (Figura V.1.2).



Como podemos observar no detalhe (a) da figura (V.1.2) os pontos necessários para o uso de diferenças centradas estão presentes e bem definidos na malha de discretização.

Por outro lado, para as regiões de contorno não temos pontos suficientes para aplicarmos diferenças centradas (figura V.1.2), detalhe (b), assim devemos utilizar em nossas aproximações para a primeira derivada o operador de diferenças avançadas (figura V.1.2), regiões C_1 e C_4) e o de diferenças atrasadas (figura V.1.2), regiões C_2 e C_3).

Então, considerando as condições de contorno de Newmann, isto é.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

temos para as regiões de contorno C_1, C_2, C_3, C_4 (figura V.1.3).

$$C_1 \Rightarrow u'_{i,j} = u_{i+1,j} - u_{i,j} \Rightarrow 0 = u_{i+1,j} - u_{i,j} \Rightarrow u_{i,j} = u_{i+1,j}$$

$$C_2 \Rightarrow u'_{i,j} = u_{i,j} - u_{i-1,j} \Rightarrow 0 = u_{i,j} - u_{i-1,j} \Rightarrow u_{i,j} = u_{i-1,j}$$

$$C_3 \Rightarrow u'_{i,j} = u_{i,j} - u_{i,j-1} \Rightarrow 0 = u_{i,j} - u_{i,j-1} \Rightarrow u_{i,j} = u_{i,j-1}$$

$$C_4 \Rightarrow u'_{i,j} = u_{i,j+1} - u_{i,j} \Rightarrow u_{i,j+1} - u_{i,j} \Rightarrow u_{i,j} = u_{i,j+1}$$

Assim, podemos observar que as regiões de contorno referente a discretização considerada juntamente com a condição de contorno especificada anteriormente, representa uma absorção dos pontos mais próximos da malha, ou seja, os pontos internos vizinhos aos contornos (figura V.1.3).

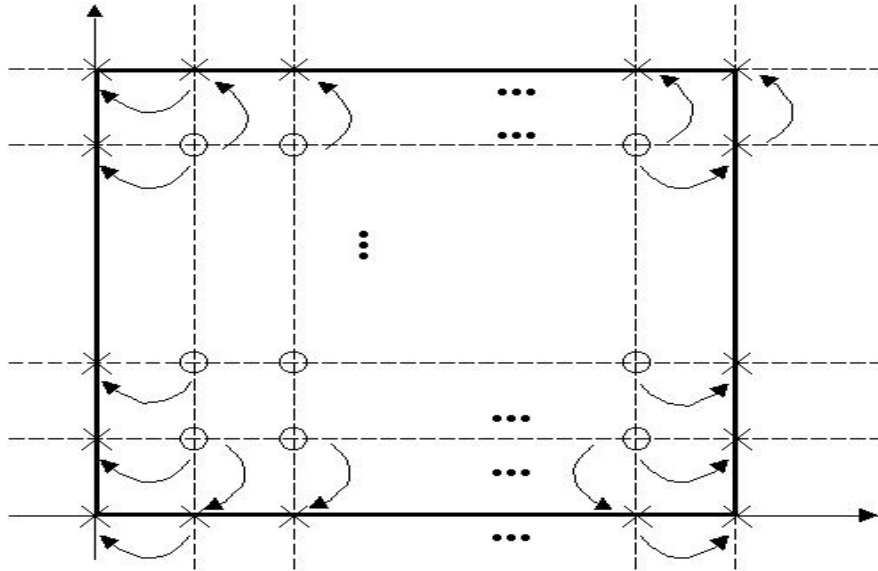


Figura (V.1.3) – Derivadas parciais de primeira ordem nas regiões de contorno.

Apresentaremos mais adiante a discretização de cada um dos termos presentes na equação. Entretanto, devemos salientar que o processo evolutivo na escala temporal desses modelos, baseia-se fundamentalmente em um processo iterativo.

Tal processo é obtido da seguinte forma:

Seja $u_t = L(u)$ a equação não linear de difusão relativa ao modelo apresentado.

A solução para essa EDP deve ser encontrada para todos os pontos discretos da malha (x_i, y_j) no tempo t_n , ou seja, no estágio n .

Utilizando o operador de diferenças avançadas no tempo temos:

Como $u_t \cong \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t}$ e $u_t = L(u_{i,j}^n)$, então,

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{\Delta t} = L(u_{i,j}^n) \Rightarrow u_{i,j}^{n+1} = \Delta t L(u_{i,j}^n) + u_{ij}^n. \quad (\text{V.1.1})$$

Logo, através da equação (V.1.1) obtemos um processo iterativo para a evolução temporal do nosso modelo onde a equação numérica é estruturada a partir das discretizações que descrevemos a seguir.

V.2 Discretização do Modelo

V.2.1 Produto de Convolução

Na EDP temos a presença da função.

$$g(|\nabla G_j * u|) = \frac{1}{1 + k |\nabla G_\sigma * u|^2} \text{ com } k \text{ constante} \quad (\text{V.2.1})$$

a qual devemos avaliar numericamente nos pontos da malha.

Neste trabalho, estamos propondo uma forma alternativa de implementar numericamente o produto de convolução, o qual nos proporcionou resultados satisfatórios, porém, com um custo computacional bastante reduzido, o que favorece grandemente o processo digital de imagens.

Definimos a convolução das funções f e g através do operador:

$$F(x) = \frac{1}{2l} \int_{-e}^e f(t) g(x-t) dt.$$

Na malha de pontos das nossas discretizações temos $l = 1$, uma vez que nossa malha é definida sobre os números naturais com $h = \Delta x = \Delta y = 1$. Assim devemos calcular o produto de convolução entre as funções f e g , em uma vizinhança do ponto $u_{i,j}$. Vamos considerar essa vizinhança como sendo a região dada pelo retângulo:

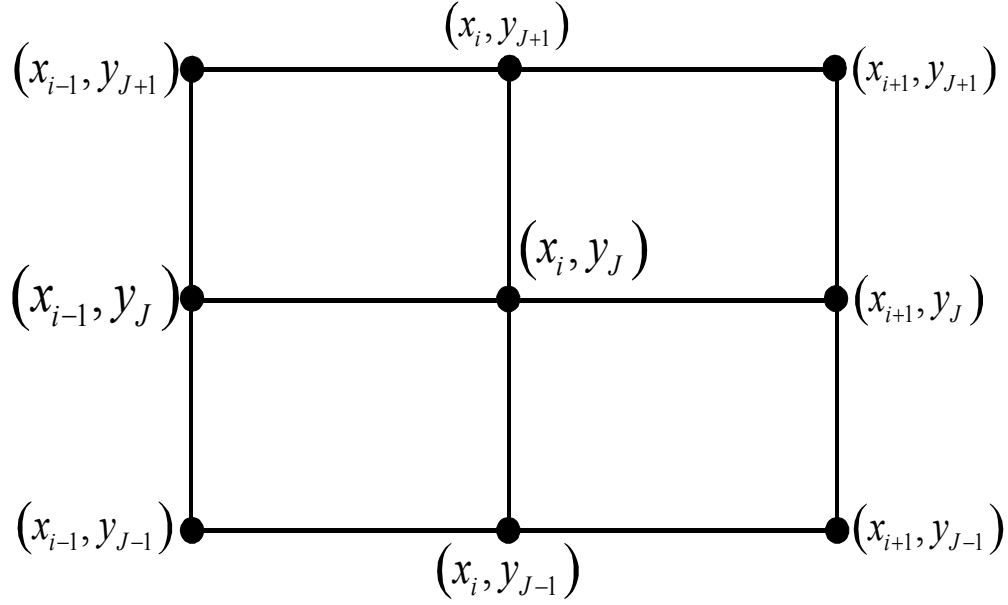


Figura (V.2.1) – Conjunto de pontos utilizados na convolução de $(f * g)(x_i, x_j)$.

Assim, para calcular o produto de convolução relativo ao ponto (x_i, y_j) devemos calcular a seguinte integral:

$$(f * g)(x_i, y_j) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x_i - x, y_j - y) g(x, y) dx dy. \quad (V.2.2)$$

Dessa forma, o cálculo do produto de convolução resume-se ao cálculo numérico de integrais. A regra de Simpson foi utilizada para o cálculo dessas integrais, isto é:

Regra de Simpson: Seja $f(x)$ uma função e tomemos no intervalo $[a, b]$ os pontos $x_o = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ e $x_2 = b$, onde $f(x_o)$, $f(x_1)$ e $f(x_2)$ são conhecidos.

Então a regra de Simpson para a aproximação da integral $\int_a^b f(x) dx$ é dada por:

$$\int_{x_o}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_o) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \left(\frac{h^5}{90} \right) f^{(4)}(\beta) \quad x_o < \beta < x_2$$

$h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$ e $-\left(\frac{h^5}{90}\right)f^{(4)}(\beta)$ é a expressão do erro cometido na aproximação.

Tomemos em (V.2.2):

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x_i - x, y_j - y) g(x, y) dx \text{ e } I_2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_1 dy.$$

Utilizando a regra de Simpson para calcular o valor dessas integrais temos:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} \left[f(x_i - x_{i-1}, y_j - y) g(x_{i-1}, y) + 4f(x_i - x_i, y_j - y) g(x_i, y) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f(x_i - x_{i+1}, y_j - y) g(x_{i+1}, y) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{6} \left[f(1, y_j - y) g(x_{i-1}, y) + 4f(0, y_j - y) g(x_i, y) + f(-1, y_j - y) g(x_{i+1}, y) \right], \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{12} \int_{-1}^1 \left[f(1, y_j - y) g(x_{i-1}, y) + 4f(0, y_j - y) g(x_i, y) + f(-1, y_j - y) g(x_{i+1}, y) \right] dy \\ &= \frac{1}{12} \int_{-1}^1 f(1, y_j - y) g(x_{i-1}, y) dy + \frac{1}{12} \int_{-1}^1 4f(0, y_j - y) g(x_i, y) dy \\ &\quad + \frac{1}{12} \int_{-1}^1 f(-1, y_j - y) g(x_{i+1}, y) dy. \end{aligned}$$

Novamente utilizando a regra de Simpson:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{12} \left\{ \frac{1}{3} \left[f(1, y_j - y_{j-1}) g(x_{i-1}, y_{j-1}) + 4f(1, y_j - y_j) g(x_{i-1}, y_j) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f(1, y_j - y_{j+1}) g(x_{i-1}, y_{j+1}) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{3} \left[f(0, y_j, y_{j-1}) g(x_i, y_{j-1}) + 4f(0, y_j - y_j) g(x_i, y_j) \right. \\
& \left. + f(0, y_j, y_{j+1}) g(x_i, y_{j+1}) \right] \\
& + \frac{1}{3} \left[f(-1, y_j - y_{j-1}) g(x_{i+1}, y_{j-1}) + 4f(-1, y_j - y_j) g(x_{i+1}, y_j) \right. \\
& \left. + f(-1, y_j - y_{j+1}) g(x_{i+1}, y_{j+1}) \right] \Big\},
\end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned}
I_2 = \frac{1}{36} & \left[f(1, 1) g(x_{i-1}, y_{j-1}) + 4f(0, 1) g(x_i, y_{j-1}) + f(-1, 1) g(x_{i+1}, y_{j-1}) \right. \\
& + 4f(1, 0) g(x_{i-1}, y_j) + 16f(0, 0) g(x_i, y_j) + 4f(-1, 0) g(x_{i+1}, y_j) \\
& \left. + f(1, -1) g(x_{i-1}, y_{j+1}) + 4f(0, -1) g(x_i, y_{j+1}) + f(-1, -1) g(x_{i+1}, y_{j+1}) \right].
\end{aligned}$$

Assim, uma expressão numérica para o cálculo de $G_\sigma * u$ é dada por:

$$(f * g)(x_i, y_j) = I_2.$$

De posse desse resultado e considerando

$$\begin{aligned}
f(x_i, y_j) &= G_\sigma(x_i, y_j) \text{ e} \\
g(x_i, y_j) &= u(x_i, y_j) = u_{i,j}.
\end{aligned}$$

temos:

$$\begin{aligned}
(G_\sigma * u)(i, j) &= \frac{1}{36} \left\{ G_\sigma(1, 1) u_{i-1, j-1} + G_\sigma(-1, 1) u_{i+1, j-1} + G_\sigma(1, -1) u_{i-1, j+1} \right. \\
& + G_\sigma(-1, -1) u_{i+1, j+1} + 16G_\sigma(0, 0) u_{i,j} \\
& \left. + 4[G_\sigma(0, 1) u_{i, j-1} + G_\sigma(1, 0) u_{i-1, j} + G_\sigma(-1, 0) u_{i+1, j} + G_\sigma(0, -1) u_{i, j+1}] \right\}
\end{aligned} \tag{V.2.3}$$

Dessa forma utilizando $CV(x, y) = (G_\sigma * u)(x, y)$ dado por (V.2.3) e utilizando o operador de diferenças centradas para o cálculo das derivadas parciais de primeira ordem de CV temos:

$$\frac{\partial CV(x, y)}{\partial x} \cong \frac{CV(x+1, y) - CV(x-1, y)}{2} = d_1$$

e

$$\frac{\partial CV(x, y)}{\partial y} \cong \frac{CV(x, y+1) - CV(x, y-1)}{2} = d_2.$$

Assim, temos $\nabla(G_\sigma * u) = \left(\frac{\partial CV}{\partial x}, \frac{\partial CV}{\partial y} \right)$. Logo

$$|\nabla(G_\sigma * u)| = \left[\left(\frac{\partial G_\sigma * u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial G_\sigma * u}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} \Rightarrow |\nabla(G_\sigma * u)|^2 = d_1^2 + d_2^2.$$

Portanto, para a função definida em (V.2.1) temos:

$$g(|\nabla(G_\sigma * u)|) = \frac{1}{1 + k(d_1^2 + d_2^2)}, \text{ com } k \text{ constante.}$$

V.2.2 Discretização do termo de difusão

O termo de difusão da EDP é dado pela expressão:

$$|\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right),$$

onde $u(x, y)$ é a função que representa a imagem da equação (III.4.1). Fazendo $x_1 = x$ e $x_2 = y$ temos

$$|\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = \frac{u_x^2 u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{xx}}{u_x^2 + u_y^2}. \quad (\text{V.2.4})$$

Usando os operadores de diferenças finitas introduzidas anteriormente, obtemos uma expressão numérica do cálculo do termo (V.2.4).

V.3 Exemplos

A seguir mostramos alguns exemplos de imagens reconstruídas com o modelo considerado.

O primeiro exemplo (figura V.3.1) trata-se de uma figura constituída por objetivos geométricos. A seguir temos a figura original e com ruído.

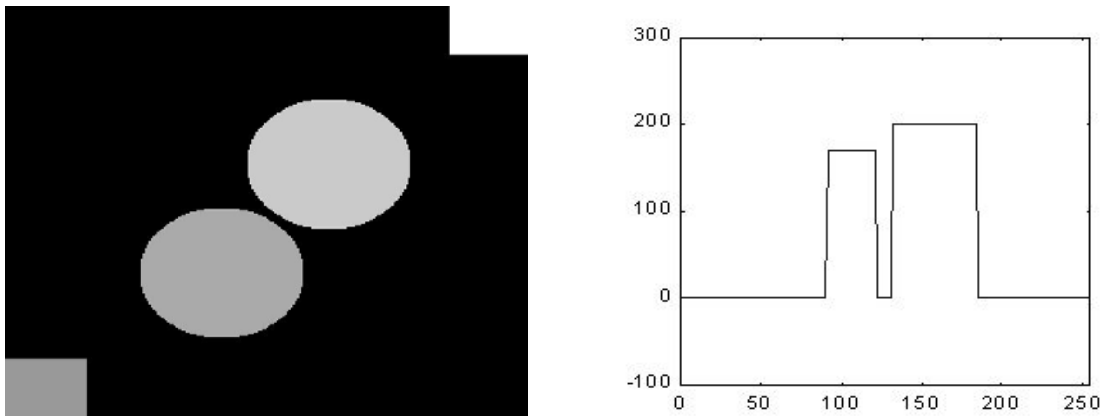


Figura V.3.1 (a) Imagem original e gráfico correspondente a linha 128

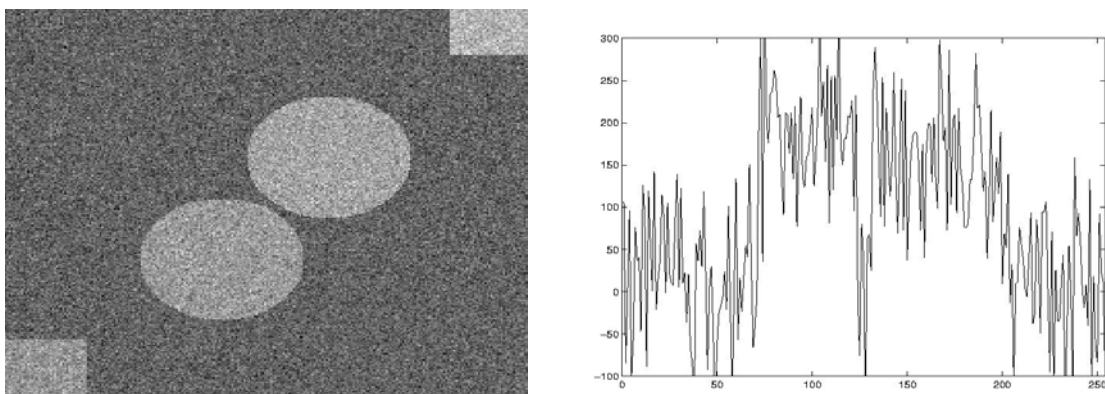


Figura V.3.1 (b) Imagem com ruído SNR=0 db e gráfico correspondente a linha 128

SNR (Signal to Noise Ratio) significa nível de ruído.

A linha tracejada refere-se à figura original enquanto que a linha contínua refere-se à figura suavizada.

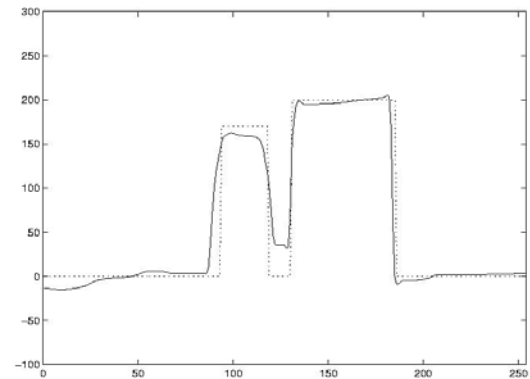


Figura V.3.1 (c) e (d) Reconstrução pelo modelo e gráfico da linha 128

A seguir consideramos a mesma imagem, porém com uma intensidade maior no nível de ruído.

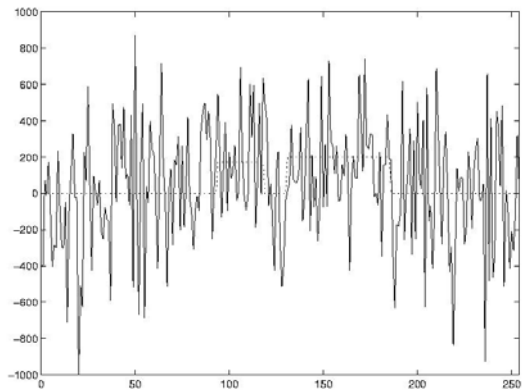
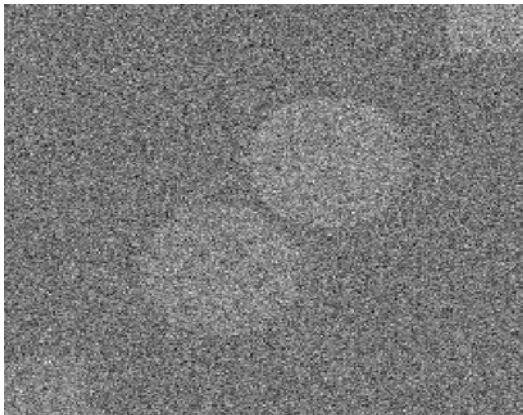


Figura V.3.1 (e) e (f) Imagem com ruído SNR=-12 db e gráfico da linha 128



Figura V.3.1 (g) e (h) Reconstrução pelo modelo e sua segmentação

Na próxima figura destacamos a eficiência do modelo na preservação de bordas e quinas.



Figura V.3.2 (a) e (b) Figura original e zoom do centro

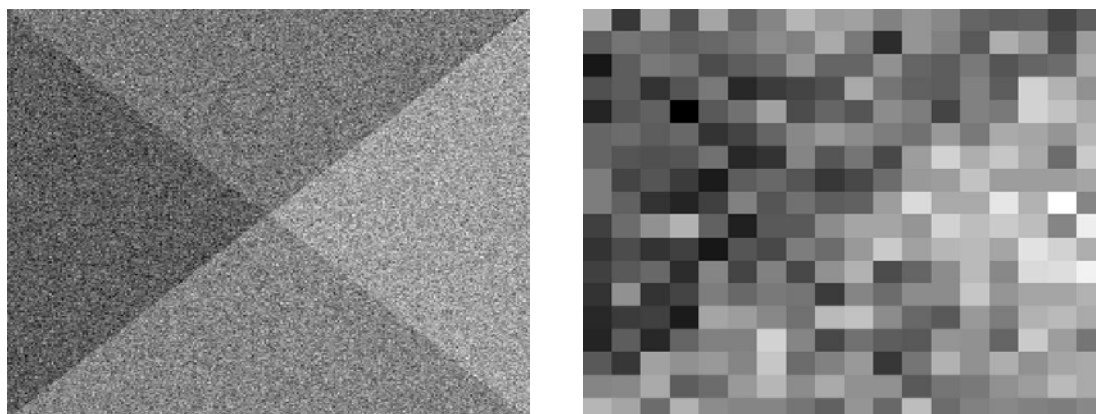


Figura V.3.2 (c) e (d) Figura com ruído SNR= 0 db e zoom do centro

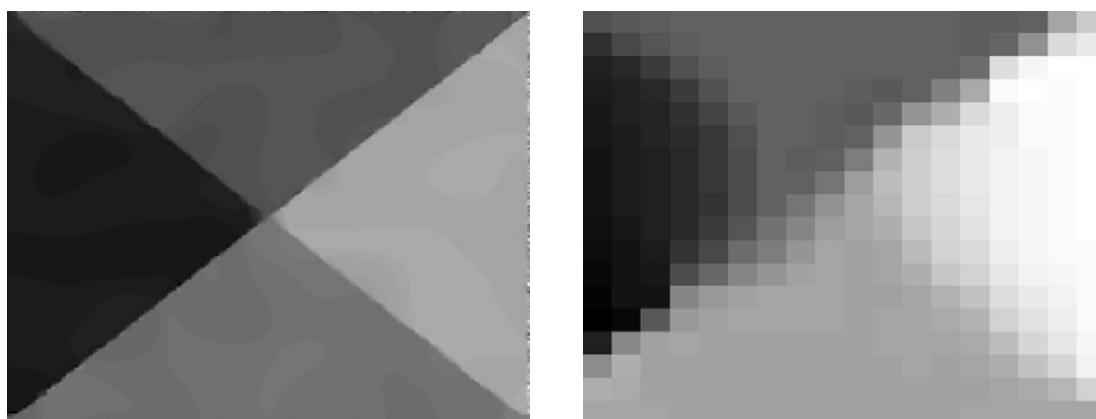


Figura V.3.2 (e) e (f) Reconstrução pelo modelo e zoom do centro

Capítulo VI

Conclusões

Do ponto de vista computacional, o uso de EDP, no tratamento Digital de Imagens, é favorecido pela extensa quantidade de métodos numéricos encontrados na literatura. Os métodos numéricos utilizados em tais equações são bastante simples e computacionalmente são também simples de serem implementados devido à característica explícita das equações.

Outro fato importante no uso de EDPs no processamento de imagens, é que esta teoria nos permite obter resultados relativos à existência e unicidade de soluções viscosas para esses modelos, ou seja, podemos fazer uma conceituação formal do ponto de vista matemático para essa forma de modelagem do problema.

Continuando, ainda temos que a teoria de soluções de viscosidade para equações é uma exceção notável, vemos que é possível desenvolver uma teoria completa e poderosa fazendo uso de técnicas elementares de análise real. Neste contexto específico é possível desenvolver uma teoria sofisticada do ponto de vista de EDPs não lineares sem depender de um pesado arcabouço analítico desenvolvido previamente ou concorrentemente.

Observamos também que a definição de solução de viscosidade é uma elaboração da definição introduzida por M. Crandall e P.L. Lions [8], em 1983 para equações de Hamilton- Jacobi e posteriormente estendida a uma vasta classe de equações diferenciais parciais fortemente não lineares, particularmente de natureza elíptica ou parabólica. Esta é uma área de pesquisa ativa e de importância crescente em EDP.

Referências Bibliográficas

- [1] Alvarez, L. e Esclarin, J. , Image quantization using reaction – diffusion equations, SIAM J. Appl. Math. 57, pp. 153-175, 1997
- [2] Alvarez, L., Lions P.L. e Morel, J.M., Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion II , SIAM J. Numer. Anal. 29(3) , pp. 845-866 , 1992.
- [3] Barcelos, C.A.Z., Boaventura,M.e Silva Jr., E.C., Um modelo de difusão não linear para eliminação de ruídos com preservação de bordas em imagens, Anais, 54º Seminário Brasileiro de Análise ,pp. 221-235 ,2001.
- [4] Barcelos, C.A.Z.,e Chen, Y., Heat flows and related minimization problem in image restoration, Computers and Mathematics with Applications 39, p.p 81-97, 2000.
- [5] Bardi M., Crandall, M.G., Evans L.C., Soner, H.M. e Souganidis, P.E., Viscosity solutions and applications, Lectures given at the 2nd session of the C. I.M.E. held in Montecatini Terme, Springer, Italy, June 12-20, 1995.
- [6] Brezis ,H., Analyse fonctionnelle, Masson, Paris,1987
- [7] Crandall,M.C., Ishii, H.e Lions,P.L., User's guide to viscosity solution of second order partial differential equation, Bull. Amer. Math. Soc. 27, pp. 1-67 , 1992.
- [8] Crandall, M.C. e Lions, P.L., Viscosity solutions of Hamilton- Jacobi equations, Trans. Amer. Math. Soc. 277, pp. 1-42, 1983
- [9] Evans, L.C., Partial differential equations, Berkeley Mathematics Lecture Notes 3A, Department of Mathematics, University of California, Berkeley, CA 94720, pp. 207-257 and 549-577, 1993.

- [10] Friedman, A., Partial differential equations of parabolic type, Prentice- Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1964
- [11] Kolmogorov, A.N. e Forming, S.V., Elementos da teoria das funções e de análise funcional, Editora Mir- Moscou-1982.
- [12] Ladyzhenskaja, O.A., Solonnikov, V.A. e Ural'Tseva, N.N., Linear and Quasilinear equations of parabolic type, American Mathematical Society , Providence , RI, 1968 .
- [13] Lopes, H.J.N. e Lopes Filho, M.C., Uma introdução a soluções de viscosidade para equações de Hamilton- Jacobi , IMPA, Rio de Janeiro, 1997
- [14] Meyer, P.L, Probabilidade Aplicações à estatística, Ao Livro Técnico SA, Rio de Janeiro, 1972
- [15] Nordström, K.N., Biased anisotropic diffusion: a unified regularization and diffusion approach to edge detection, Image and Vision Computing, (8); pp. 318-327, 1990
- [16] Paiva, F., Personal communication, 1994
- [17] Perona, P.E Malik, J., Scale-space and edge de tections using diffusion, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., 12 (1990), pp. 429-439.
- [18] Silva Jr., E.C., Um novo modelo de difusão não linear com preservação de bordas para segmentação e eliminação de ruídos em imagens e análise comparativa com modelos correlatos, Dissertação de Mestrado , Departamento de Ciências de Computação e Estatística, Unesp, São José do Rio Preto, 2002.
- [19] John, F., Partial diferencial equations, 4th ed., Springer – Verlag 1984.