

ANEXO AO PROCESSO Nº 319/99 - CM

DEFESA DE TESE/DOUTORADO EM: 26/03/2003

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FACULDADE DE FILOSOFIA E CIÊNCIAS

CÂMPUS DE MARÍLIA

**A representação espacial infanto-juvenil:
as relações entre a geometria axiomática e a
geometria vivida.**

Maria do Carmo Monteiro Kobayashi

MARÍLIA

2003



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE FILOSOFIA e CIÊNCIAS
CAMPUS DE MARÍLIA

A representação espacial infanto-juvenil:
as relações entre a geometria axiomática e a
geometria vivida.

Autora: Maria do Carmo Monteiro Kobayashi

Marília
2003



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
FACULDADE DE FILOSOFIA e CIÊNCIAS
CAMPUS DE MARÍLIA

A representação espacial infanto-juvenil:
as relações entre a geometria axiomática e a
geometria vivida.

1410001598



Autora: Maria do Carmo Monteiro Kobayashi

Orientador: Prof. Dr. Raul Aragão Martins

Coorientadora: Prof.^a Dr.^a Silvia Parrat-Dayan

Tese de Doutorado elaborada junto ao Programa de
Pós-Graduação em Educação: Ensino na Educação
Brasileira, para qualificação à obtenção do título de
Doutor.

Marília
2003



UN001138161

90201000

Nº cham 372.7
K755_m

Nº Tombo 1598

Aquisição 2

Preço CR\$ 5,00

Data 10/11/04

Proced. autor

- Geometria - estudo e ensino (650)
- Geometria espacial - crianças (650)
- Matemática - ensino (690)
- Psicologia genética (650)

K756r Kobayashi, Maria do Carmo

A representação espacial infanto-juvenil: as relações entre a geometria axiomática e a geometria vivida / Maria do Carmo Kobayashi. -- Marília, 2003.
232 fls. ; il.

Orientador: Prof. Dr. Raul Aragão Martins.

Coorientadora: Prof.^a Dr.^a Silvia Parrat-Dayana.

Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual Paulista.

1. Espaço. 2. Geometria topológica. 3. Projetiva e euclidiana. 4. Ensino da Geometria. 5. Psicologia genética. 6. Psicologia do desenvolvimento. I. Martins, Raul Aragão. II. Parrat-Dayana, Silvia. III. Título.

Maria do Carmo Monteiro Kobayashi

A representação espacial infanto-juvenil: as relações entre a geometria axiomática e a geometria vivida.

Comissão Julgadora

Nota

Presidente e Orientador _____

1º Examinador _____

2º Examinador _____

3º Examinador _____

4º Examinador _____

Data da realização Marília, 26 de março de 2003



AGRADECIMENTOS

A realização de uma pesquisa inédita, condição para uma tese de doutorado, pesa sobre nossos ombros, principalmente porque tal estudo envolve a vida de muitas pessoas e diversas instituições, os alunos entrevistados, atores principais, os orientadores, a universidade em que se realiza a pesquisa, a agência de financiamento e tantas outras vidas que aguardam o final de tal feito, como se a vida pudesse parar e como se tudo se resumisse em uma tese.

Começo agradecendo à CAPES pela bolsa concedida que me permitiu viver em Genebra por longos e maravilhosos meses, durante os quais pude desenvolver um projeto que havia idealizado desde o mestrado: estudar onde viveu e trabalhou Piaget.

Agradeço à Pós-Graduação da Universidade Paulista Júlio de Mesquita Filho – Campus Marília, instituição na qual estudei por oito anos, e, mais precisamente, a Dr.^a Lourdes Marcelino Machado.

Agradeço à Universidade do Sagrado Coração de Bauru, aos meus alunos e amigos de trabalho e, principalmente, à Pró-Reitoria Acadêmica, de modo especial à Dr.^a Ir. Jacinta Turolo Garcia, Reitora da universidade e à Prof.^a Dr.^a Regina Célia Baptista Belluzo, Pró-Reitora Acadêmica, que me deram força e coragem e permitiram minha ausência da universidade mesmo em semestre letivo.

Agradeço de maneira especialíssima à Dr.^a Ir. Alice Garcia de Moraes por sua amizade, seu carinho, suas mensagens de confiança e de afeto que tanto me ajudaram.

Agradeço aos pais, alunos e funcionários das escolas EEPG Lydia Sanselice e EE Victor Bastos, na cidade de São José do Rio Preto, local onde desenvolvi a coleta de dados, às minhas estagiárias sem as quais seria impossível realizar a pesquisa de campo: Lilia Helena Vidotto, Renata Silvia de Souza e a incansável Monica Soares, que me acompanhou durante todo o trabalho desta tese.

Agradeço aos professores Drs. Jacques Vonèche da Universite de Genève e Orfy Mantovani Z. de Assis da UNICAMP por suas mãos carinhosas me levaram à obra de Piaget.

Agradeço aos Professores José Benedito Pinto, amigo de todas as horas que, com carinho e dedicação, me acompanhou corrigindo esta tese, e à Mestra Léa Sílvia Braga de Castro Sá, companheira de todas as horas.

Agradeço o carinho e a dedicação dos meus orientadores e mestres queridos: Prof.^a Dr.^a Sílvia Parrat-Dayana dos Archives Jean Piaget e, de maneira especialíssima, ao Dr. Raul Aragão Martins da UNESP Marília, que me acompanharam em todos os momentos decisivos durante este trabalho. Para eles, a distância espacial nunca existiu, pois estavam sempre presentes a cada pedido, a cada grito de socorro. Sem eles, este trabalho não seria o mesmo, eles foram meu ponto de apoio científico e emocional.

Agradeço aos meus pais Fernando e Christina, aos meus irmãos Marcelo e Luciana.

Agradeço e ofereço este trabalho aos meus filhos amados pela compreensão em tantas ausências e porque souberam, em todos os momentos, respeitar a condição de estudante da mãe.

Agradeço a Deus que me deu a vida e o meu maior e mais amado presente, meu BEM querido, Mario Kazuo, que me ajudou, com seu carinho, a viver longe do meu país, dos nossos filhos e dele.



KOBAYASHI, M. C. M. *A representação espacial infanto-juvenil: as relações entre a geometria axiomática e a geometria vivida*. 2003. 232 fls. Tese (Doutorado em educação) - Faculdade de Filosofia e Ciências, UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA, Marília.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo averiguar as representações espaço-geométricas infanto-juvenil. Estudo que procurou entender como ocorre o ensino escolar da geometria e do espaço no decorrer da história da educação e principalmente a partir da década de 80 com as propostas do Estado de São Paulo e da educação nacional. As dificuldades apresentadas por alunos e professores em relação aos conhecimentos espaço-geométricos nos mostraram a necessidade de conhecer como ocorre o processo de construção do espaço e da geometria infanto-juvenil. Para tanto, tomamos como referencial teórico a psicologia genética de Piaget. O estudo seguiu com pesquisa bibliográfica do nascimento ao terceiro ciclo da educação fundamental (de zero a doze anos). Na tentativa de compreender melhor esse processo, entrevistamos um grupo de quinze alunos de duas escolas públicas de São José do Rio Preto, entre sete e doze anos, no ano de 2001, durante o qual pudemos acompanhar algumas situações da geometria vivida (percursos conhecidos e espaços interiores à escola e, portanto, situações comuns a todos os alunos) e da geometria axiomática (alguns entes geométricos, tais como: ponto, reta, formas planas e tridimensionais). As obras de Piaget mostram que as operações espaço-geométricas no período infanto-juvenil (operatório concreto), foco central desta pesquisa, estão subordinadas às estruturas infralógicas ou espaço-temporais. Essas estruturas são análogas às estruturas lógico-matemáticas responsáveis pelas classificações e seriações nas quais a síntese vai culminar com o número. As operações infralógicas guardam uma série de características que precisam ser conhecidas para que se compreenda como ocorre o desenvolvimento da geometria e do espaço, somente assim o processo de ensino-aprendizagem poderá ser viável. As características das representações utilizadas pelo grupo estudado no espaço vivido e nos entes geométricos são as mesmas. O grupo mais jovem utilizou predominantemente as relações topológicas, o grupo intermediário mostrou o uso sistemático das relações projetivas e euclidianas, apesar das dificuldades em coordenar os diversos pontos de vista – em utilizar as leis da perspectiva e em utilizar o espaço englobante no qual os objetos estão inseridos em coordenadas espaciais horizontais e verticais, com proporções, com paralelas, etc., próprio da geometria euclidiana. O terceiro grupo, de maior faixa etária, utilizou adequadamente as relações projetivas e euclidianas. As representações dos percursos e espaços conhecidos e dos entes geométricos mostraram que eles empregavam adequadamente as leis da geometria projetiva e euclidiana. Ao término desse estudo, podemos afirmar que, para o conhecimento do espaço e da geometria, **não é suficiente observar para compreender nem ver para saber.**

Palavras-chave: Espaço, geometria topológica, projetiva e euclidiana, ensino da geometria, psicologia genética.



KOBAYASHI, M. C.M. *La représentation spatiale infantile-juvénile: les relations entre la géométrie axiomatique et la géométrie vécue*. 2003. 232 f. Thèse (Doctorat en Éducation) - Faculdade de Filosofia e Ciências, UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA, Marília.

RÉSUMÉ

Le but de cette étude a été de rechercher les représentations espace-géométriques infantile-juvénile. C'est une recherche qui a envisagé de comprendre comment a lieu l'enseignement scolaire de la géométrie et de l'espace au cours de l'histoire de l'Éducation, surtout à partir de la décennie 80, appuyée sur les propositions de l'État de São Paulo et de l'Éducation nationale. Les difficultés présentées par les élèves et enseignants en ce qui concerne les connaissances espace-géométriques nous ont montré qu'il faut connaître comment se passe le processus de la construction de l'espace et de la géométrie infantile-juvénile, pour cela on s'est basé sur la psychologie génétique de Piaget. L'étude a compris une recherche bibliographique de la naissance de l'enfant jusqu'au troisième cycle de l'éducation fondamentale (de zéro à douze ans). A l'intention de comprendre mieux ce processus, on a interrogé un groupe de quinze élèves de deux écoles publiques de São José do Rio Preto, âgées de sept à douze ans, pendant l'année 2001, où on a pu suivre quelques situations de la géométrie vécue (parcours connus et espaces intérieurs de l'école, c'est-à-dire, situations connues de tous les élèves) et de la géométrie axiomatique (quelques êtres géométriques: point, droit, formes plates et tridimensionnelles). Les travaux de Piaget montrent que les opérations espace-géométriques dans la période infantile-juvénile (opérateur concret)- objectif central de cette recherche - sont subordonnées aux structures infralogiques ou espace-temporelles. Ces structures sont analogues à celles logiques-mathématiques responsables des classements et des sériations dont la synthèse va culminer dans le nombre. Les opérations infralogiques ont plusieurs caractéristiques qu'il faut connaître pour qu'on comprenne le développement de la géométrie et de l'espace dans l'étage de développement opératoire-concret, ce n'est que de cette manière que le processus enseignement-apprentissage pourra être viable. Les caractéristiques des représentations utilisées par le groupe analysé, dans l'espace vécu et dans les êtres géométriques, sont les mêmes. Le groupe plus jeune a employé avec prédominance les relations topologiques; celui intermédiaire a présenté l'utilisation systématique des relations projectives et euclidiennes, malgré les difficultés à coordonner les divers points de vue - à utiliser les lois de la perspective et à employer l'espace global où les objets sont insérés dans des coordonnées spatiales horizontales et verticales, avec des proportions, avec des parallèles, etc., propres à la géométrie euclidienne. Le troisième groupe, de tranche d'âge la plus élevée, a utilisé correctement les relations projectives et euclidiennes; les représentations des parcours, des espaces connus et des êtres géométriques ont montré qu'ils employaient adéquatement les lois de la géométrie projective et euclidienne. A la fin de cette étude, on a pu affirmer que, pour la connaissance de l'espace et de la géométrie, il ne suffit pas d'observer pour comprendre ni de voir pour savoir.

Mots clés : espace, géométrie topologique, projective et euclidienne, enseignement de la géométrie, psychologie génétique.



KOBAYASHI, M. C. M. *The juvenile spatial representation: relationships between axiomatic geometry and living geometry*. 2003. 232 f. Dissertation in Education - Faculdade de Filosofia e Ciências, UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA, Marília.

ABSTRACT

The aim of this research was to assess juvenile spatial/geometric representations. The way geometry and space have been taught especially from the 1980's according to the regulations issued by São Paulo government and federal authorities. Since the understanding of the process of construction of juvenile space and geometry resulted problematic for teachers and students, the theoretical referential was that of Piaget. In order to understand better this process, a bibliographical research was conducted about children 0-12 years old. Fifteen 7-12 year old students from state schools in the city of São José do Rio Preto were interviewed in the year 2001; living geometry (internal school spaces know to everyone) and axiomatic geometry (dots, lines, tridimensionals) were privileged in the interviews. Piaget's works show that spatial-geometric operations during one's childhood and juvenile life are subordinated to infralogic or spatial-temporal structures. Such structures are analogous to logico-mathematical structures responsible for the classification and series in which the synthesis will become a number. Infralogic operations keep several characteristics that need to be known if the development of geometry and space is to be understood, only after this will the learning-teaching process be possible. The characteristics of the representations used by the group in the living space and the geometrical objects are the same. The younger group gave preference to topological relations, and the intermediate group used systematically projective and euclidian relations, notwithstanding the difficulties in coordinating the several stand points – in using the laws of perspective and in using the global space in which the objects are inserted in horizontal and vertical spatial coordinates, with proportions, parallels, etc., proper to the euclidian geometry. The older group made adequate use of projective and euclidian relations, the representations of familiar spaces and geometric objects. The result was that for the knowledge of the space and geometry is not enough to observe in order to understand, nor to see in order to know.

Key words: space, topologic, projective and euclidian geometry, geometry teaching, genetic psychology.



LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Objetos que possuem genus 1.....	79
Figura 2 –	Série de cartões a serem identificados por percepção estereognóstica.....	80
Figura 3 –	Modelos desenhados para copiar (21 formas).....	83
Figura 5 –	Relações de interioridade e exterioridade a uma, duas e três dimensões. .	87
Figura 6 –	Desenhos de nós e falsos nós.....	88
Figura 7 –	Estágios de construção da reta projetiva pela conduta de mirar.....	91
Figura 8 –	Estágios de desenvolvimento da horizontal e da vertical.....	94
Figura 9 –	Desenhos realizados por crianças entre 2;06 e 4;00 anos, na fase da incapacidade sintética (garatuja e badamecos ou badamecos girinos).	97
Figura 10 –	Recipientes de mesma capacidade e formas diferentes.....	117
Figura 11 –	Coleção de formas geométricas para classificação.....	122
Figura 12 –	Coleções figurais.....	122
Figura 13 –	Coleções não-figurais.....	123
Figura 14 –	Classificação operatória.....	124
Figura 15 –	Experiências sobre a conservação de medida da superfície.....	134
Figura 16 –	Exemplo de deslocamento no sentido do movimento A 1 e deslocamento por rotação em A 2.....	135
Figura 17 –	Percursos a serem comparados pelas crianças e cartões para a medida. .	143
Figura 18 –	Objetos inseridos no espaço tridimensional, segundo relações de profundidade (z), de altura (y) e de largura (x).....	148
Figura 19 –	Planta da escola A.....	158
Figura 20 –	Pátio interno de circulação entre a quadra poliesportiva, o setor administrativo e as salas de aula da escola A.....	159
Figura 21 –	Área de circulação interna entre as salas de aula e o setor administrativo da escola A.....	159
Figura 22 –	Corredor interno das salas de aula da escola A.....	160
Figura 23 –	Pátio interno para refeições, ligando salas de aula, biblioteca, bebedouros de água, banheiros, cozinha e cantina.....	160
Figura 24 –	Pátio interno da escola A.....	161
Figura 25 –	Planta da escola B.....	161
Figura 26 –	Vista oblíqua da escola B, a partir do 11.o andar de um prédio vizinho.....	162
Figura 27 –	Vista oblíqua da escola B.....	162
Figura 28 –	Frente da escola B.....	163
Figura 29 –	Pátio interno de circulação da escola B entre o setor administrativo e as salas de aula.....	163
Figura 30 –	Pátio interno de circulação entre as salas de aula da escola B.....	164
Figura 31 –	Cristo Redentor localizado na rua lateral à escola B.....	164
Figura 32 –	Interior de sala de aula da escola B.....	165
Figura 33 –	Coleção de formas geométricas utilizadas nas entrevistas.....	168
Figura 34 –	Coleção de desenhos apresentados aos sujeitos nas provas das formas geométricas.....	168
Figura 35 –	Folha com a sequência de figuras a ser apresentada para os sujeitos no decorrer da entrevista.....	169



Figura 36 – Folha de múltipla escolha para correspondência nome-forma.	170
Figura 37 – Representação dos entes geométricos sob dois pontos de vista.....	174
Figura 38 – Desenho do grupo A BIA (7), percurso de casa para a escola.....	179
Figura 39 – Desenho do grupo A BIA (7), percurso da escola para casa.	179
Figura 40 – Desenho do grupo A BIA (7), a frente da escola.	180
Figura 41 – Desenho do grupo A BIA (7), a sala de aula dentro da escola, com o lixo no ar.	180
Figura 42 – Desenho do grupo A BIA (7), a sala de aula, o mobiliário e o seu lugar.	181
Figura 43 – Desenho do grupo A RAF (7), percurso de casa para a escola.....	181
Figura 44 – Desenho do grupo A ANN (8), percurso de casa para a escola.....	182
Figura 45 – Desenho do grupo A ANN (8), percurso de casa para a escola, após perguntas sobre os pontos referenciais intermediários.	182
Figura 46 – Desenho do grupo B ALE (10), percurso de casa para a escola.....	186
Figura 47 – Desenho do grupo B ALE (10), percurso da escola para casa.....	186
Figura 48 – Desenho do grupo B ALE (10) a frente da escola e a escada posicionada adequadamente com o uso de relações projetivas, as paralelas e as dimensões são proporcionais com o uso das relações euclidianas.	187
Figura 49 – Desenho do grupo B ALE (10), a sala de aula dentro da escola.....	187
Figura 50 – Desenho do grupo B ALE (10), a sala de aula, o mobiliário e o seu lugar.	188
Figura 51 – Desenho do grupo B MAR (11), percurso da casa para a escola.....	188
Figura 52 – Desenho do grupo C AND (10), percurso de casa para a escola.	191
Figura 53 – Desenho do grupo C AND (10), percurso da escola para casa.	191
Figura 54 – Desenho do grupo C AND (10), a escola no quarteirão.	192
Figura 55 – Desenho do grupo C AND (10), a sala de aula dentro escola.	192
Figura 56 – Desenho do grupo C AND (10), a sala de aula, o mobiliário e o seu lugar.	193
Figura 57 – Desenho do grupo C GLE (12), percurso da escola para casa.....	193
Figura 58 – Desenho do grupo I RAF (7), de memória e à vista das formas concretas.....	198
Figura 59 – Desenho do grupo IIA VAN (9), de memória e à vista das formas geométricas.....	202
Figura 60 – Desenho do grupo IIB MAY (11), de memória das formas geométricas.....	205
Figura 61 – Desenho do grupo IIB MAY (11), à vista das formas geométricas.....	206
Figura 62 – Desenho do grupo III AND (10), de memória e à vista das formas geométricas.....	208



LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Fragmento de conteúdos a serem desenvolvidos na 3.ª série	55
Tabela 2 – Relação entre períodos de desenvolvimento a ação e o pensamento.....	114
Tabela 3 – Comparação entre as operações lógico-aritméticas e infralógicas (espaço).	124
Tabela 4 – Possibilidades de ou composições das classificações forma x cor.	126
Tabela 6 – Classificação dos resultados obtidos na geometria vivida.....	194
Tabela 7 – Classificação dos resultados obtidos na geometria axiomática.	209
Tabela 8 – Tabela comparativa dos resultados entre a geometria vivida e a geometria axiomática.	209



SUMÁRIO

Introdução – A posição de uma estudante	14
Capítulo 1 – O ensino da geometria: das origens aos dias atuais	26
1.1 Uma breve história do espaço.....	27
1.2 Uma breve história do ensino da geometria.....	41
1.2.1 Das primeiras civilizações à descoberta da razão e da geometria abstrata.....	43
1.2.2 Do Renascimento ao século XIX.....	47
1.2.3 O século XX e XXI e o ensino da geometria.....	50
Capítulo 2 – Um estudo inicial sobre o espaço e a geometria infantil	62
2.1 A construção do espaço infantil.....	64
2.1.1 O espaço anterior à representação sensório-motora	67
2.1.2 As relações espaciais na criança pré-operatória	76
2.1.3 A representação das relações espaço-geométricas nas crianças de educação infantil de Bauru	95
Capítulo 3 – As relações espaço-geométricas infanto-juvenis	103
3.1 A representação e as relações espaço-geométricas.....	103
3.1.1 As condutas representativas.....	107
3.1.2 O universo concreto e as operações espaço-geométricas	115
3.2 As operações constitutivas do espaço e da geometria infanto-juvenil.....	118
3.3 As características do conhecimento do espaço e da geometria infanto – juvenil	138
3.3.1 O caminho percorrido	140
3.3.2 As representações dos entes geométricos	149
Capítulo 4 – Metodologia e levantamento dos dados.....	152
4.1 Método clínico	153
4.2 Construção dos dados	153
4.2.1 Grupo pesquisado	153
4.2.2 Abordagem ao grupo	155
4.3 A geometria vivida.....	156
4.4 A geometria axiomática.....	165
4.5 Recursos.....	171
4.5.1 Recursos humanos	171
4.5.2 Recursos materiais	171
Capítulo 5 – Procedimentos para a análise dos dados e resultados	173
5.1 Critério para classificação dos dados.....	173
5.1.1 A representação dos percursos e dos ambientes conhecidos	175
5.1.2 A representação dos entes geométricos	194
5.2 Análise dos dados e resultados	210
Considerações Finais	217
Referências.....	228



INTRODUÇÃO

A posição de uma instituição

Em 1993, quando a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) lançou o edital de seleção para a criação de uma nova instituição de ensino superior, a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) lançou o edital de seleção para a criação de uma nova instituição de ensino superior.

A criação de uma nova instituição de ensino superior é um processo complexo e envolve a definição de uma missão, a escolha de um local, a contratação de professores e funcionários, a criação de cursos e a implementação de um sistema de gestão. A Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) lançou o edital de seleção para a criação de uma nova instituição de ensino superior, e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) lançou o edital de seleção para a criação de uma nova instituição de ensino superior.

A criação de uma nova instituição de ensino superior é um processo complexo e envolve a definição de uma missão, a escolha de um local, a contratação de professores e funcionários, a criação de cursos e a implementação de um sistema de gestão.

INTRODUÇÃO

INTRODUÇÃO

A posição de uma estudante...

*Cavalar no Pégaso...*¹

Em 1998, apresentei a Dissertação: **A construção das relações espaço-geométricas em crianças de educação infantil: um estudo de epistemologia genética** – junto ao Programa de Pós-Graduação da UNESP, em Marília. O ponto de partida dessa pesquisa foi a gênese e o desenvolvimento das relações espaciais infantis. Que relações geométricas utilizam as crianças?

A beleza do tema me encantou e continuei a estudá-lo, pois a matemática, que é um recurso fundamental à vida do homem, foi transformada em um edifício inacessível e, muitas vezes, em um entrave à vida dos alunos. Assim, a continuação dos processos de aquisição da matemática e, mais precisamente, da geometria continuou a ser um objeto de meu estudo, pois acredito que, ao se desvendar o processo de aquisição de um conhecimento, estaremos mais aptos a proporcionar situações propícias a sua compreensão. A geometria, dessa vez, não estaria sozinha, pois orientar-se no espaço e utilizar relações espaço-geométricas envolve outras áreas de conhecimento e esse estudo tem como coadjuvante a geografia, mais precisamente a representação do espaço vivido. Este trabalho busca compreender como um grupo de alunos de educação pública de ensino fundamental das primeiras seis séries representa a geometria axiomática e o mundo onde está inserido. Em relação à geometria axiomática, esta representação está ligada ao conhecimento de alguns entes geométricos (ponto, reta, quadrado, etc.), quanto à geometria vivida, ou às experiências no espaço, são relativas à vivência do grupo em percursos diários entre lugares conhecidos, espaços utilizados diariamente (escola, pátio e a sala de aula).

As expressões “geometria vivida” e “geometria axiomática”, neste trabalho, são empregadas no seguinte sentido: a primeira, como a geometria dos conhecimentos do

¹ Pégaso é um cavalo alado que nasceu do sangue de Medusa, quando Perseu lhe cortou a cabeça. Com uma patada, Pégaso fez brotar Hélicon (monte na Grécia, na Beócia, consagrado às Musas) e a fonte de Hipocrene, local onde os poetas iam beber a inspiração. É o símbolo da inspiração poética, diz-se Cavalgar no Pégaso: fazer versos, ter inspiração.



espaço, que ocorrem no cotidiano, nas relações da criança com os objetos que a cercam e, portanto, assistemática; a segunda, entendemos como sendo fruto de ensinamentos sistemáticos, com objetivos específicos. Esses dois tipos de conhecimento parecem inicialmente necessitar dos mesmos requisitos. Entretanto apesar de os dois, espaço e geometria, estarem interligados, é preciso delimitar o que os diferencia e o que os aproxima.

Para conhecer as relações entre a geometria vivida e a geometria axiomática, utilizamos procedimentos por meio dos quais o grupo estudado foi confrontado com situações em que tiveram de representar, por desenhos, gestos, explicações verbais, percursos percorridos diariamente e algumas situações com a representação gráfica e a caracterização de um conjunto de entes geométricos.

O estudo da geometria parece algo restrito àqueles que têm formação em ciências exatas, como engenheiros e licenciados ou bacharéis em Matemática.

Na década de 70, fiz o curso de engenharia elétrica, no qual os dois primeiros anos de formação são comuns a engenheiro civil, eletricitista e mecânico e estavam restritos a cursos de: cálculo numérico, cálculo integral e diferencial, resistência dos materiais, geometria analítica, geometria descritiva, desenho técnico, mecânica dos fluidos e outros. A partir do terceiro ano, o curso se especializava e preparava o aluno para exercer suas futuras funções. Especificamente na formação do engenheiro eletricitista, o curso se especializava em disciplinas sobre circuitos elétricos, sistemas elétricos de potência, linhas de transmissão, máquinas e motores elétricos, projetos elétricos, etc.

O distanciamento entre a teoria e a sua utilização prática, em qualquer grau de ensino, ocorre igualmente e, não havendo uma relação entre a prática e a teoria, entre o conhecimento escolar e o seu uso na vida prática, há, muitas vezes o desencantamento do aluno que não consegue avaliar o porquê de tanta teoria e em que ela irá auxiliá-lo. Assim, os dois primeiros anos visaram dar fundamentação comum à formação dos engenheiros e os anos restantes ficavam mais próximos à visão técnica de utilização dos conceitos anteriormente trabalhados, mas ainda distantes da utilização prática, que se restringia aos que conseguiam estágio em empresas afins.

O ensino da geometria, como veremos, também está fadado a tais enganos, e as nossas crianças não têm acesso ao conhecimento geométrico de forma adequada à sua faixa etária. Na maioria das vezes, quando têm, é uma adaptação inadequada aos seus

interesses e à sua utilização, transformando-se em mais um conteúdo a ser memorizado. Os professores, por outro lado, por falta de preparo na sua formação e por julgarem a geometria menos relevante do que a aritmética e a álgebra deixam-na para o final do ano letivo, ou subordinada às aulas de educação artística. Assim a geometria passa a ser algo desconhecido, normalmente reduzida a fórmulas de perímetro, superfície, área e volume.

Jamais poderia imaginar que os estudos no curso de engenharia poderiam me auxiliar futuramente, não apenas pelos conhecimentos teóricos, mas para entender quais as bases que fundamentam o ensino da matemática e da geometria nos anos iniciais de escolarização.

Durante alguns anos, distanciei-me da engenharia e da matemática, pois tive a possibilidade de optar pela maternidade que por algum tempo ocupou-me completamente e mostrou-me um lado até então desconhecido: a criança e a infância.

O desconhecimento do mundo infantil no convívio com um bebê trouxe-me uma série de situações novas, às quais fui tentar entender mais profundamente, o que me levou a estudar o desenvolvimento infantil como mãe. Voltei a estudar, mas uma área até então por mim inexplorada: o magistério das séries iniciais de escolarização, mais precisamente, a educação infantil.

A experiência da maternidade e o término do curso de magistério deram-me condições para ingressar como professora, por concurso, na prefeitura de Bauru, onde trabalhei durante seis anos no cargo de professora de educação infantil (1985-1991) e três no de coordenadora da área de matemática (1992-1995), no ensino de educação infantil, educação de 1.º Grau (atual ensino fundamental), educação especial e educação de jovens e adultos.

O universo infantil era tão fascinante que, para compreendê-lo melhor, voltei à Universidade no ímpeto de conhecer as teorias que me explicassem como as crianças pensavam, o que as fazia ser tão diferentes e originais em relação aos adultos. Infelizmente ou felizmente, minhas dúvidas só cresceram, o curso muito me agradou e até me deu um título novo, de Pedagoga. Porém, não atendia às minhas preocupações em conhecer melhor o desenvolvimento infantil: cognitivo, afetivo, motor e social.

Nos anos de docência em educação infantil, tive a oportunidade de trabalhar com crianças de cinco a sete anos, período em que a cobrança da aquisição da leitura e da



escrita é muito grande por parte dos pais e da comunidade. Saber ler e escrever é, para eles, um presságio de como se projetará o futuro educacional de seus filhos. Assim, nesse período, comecei a estudar como ocorre o processo de aquisição da lecto-escrita. O trabalho mais relevante nesse período era a psicogênese da língua escrita realizada por Emília Ferreiro.

Foi quando comecei a estudar a teoria de Piaget, pois no magistério e na graduação, mostrou-se ora como a teoria dos estágios fixos, muito próxima ao inatismo ou apriorismo, ora muito próxima ao empirismo, em que as provas para a avaliação do desenvolvimento deveriam ser aplicadas e os seus conteúdos compostos por propostas de atividades.

Ao estudo da aquisição da linguagem, seguiram-se a educação matemática e os jogos de recreação, mas meu interesse maior era a representação gráfica (desenho) e a estruturação do espaço, ou seja, a maneira como as crianças desenhavam os passeios que fazíamos juntos, as atividades de recreação, as atividades diárias e comunitárias. As fases por que as crianças passavam ano a ano, na escrita e na aquisição da numeração, as perguntas que faziam eram muito parecidas e as respostas também.

Na época, também trabalhei com alunos do ensino fundamental de 5.^a a 8.^a séries, com a educação matemática, em que os conteúdos estavam restritos à álgebra, ramo da matemática que estuda as leis e os processos formais de operações com entidades abstratas. É fácil entender que parte é essa da matemática, a que mistura números e letras às incógnitas x , y e z . A geometria estava restrita aos professores de educação artística, relegada a algumas aulas no decorrer do ano letivo e se houvesse tempo.

Durante um curto espaço de tempo, a docência foi suficiente como forma de realização, entretanto compreender como a criança pensava era algo a ser mais bem averiguado, e por isso iniciei o curso de Pedagogia. O contato inicial com a Filosofia, a Sociologia, a História Geral e a História da Educação abriu-me caminhos que, até então, não faziam parte sistematicamente das minhas preocupações e, assim, os problemas da educação e da sociedade puderam ser mais bem compreendidos. Quanto à psicologia infantil, as dúvidas continuavam, e com maior preocupação.

A Psicologia Infantil era o material mais importante do meu dia-a-dia de trabalho e continuava sem uma base sólida que me desse condições de compreender e

interferir melhor no processo ensino-aprendizagem. A Pedagogia oferecera-me condições de entender melhor o mundo e as relações sociais, econômicas, históricas, etc., mas a criança ainda era um ponto obscuro. Foi quando optei por fazer o mestrado em educação².

Na escolha de um curso de Pós-Graduação, onde pudesse estudar Psicologia da Aprendizagem e do Desenvolvimento, optei pelos estudos de Epistemologia Genética, pois acreditava que era onde poderia encontrar as explicações mais fundamentadas, no entanto a dificuldade em se estudar os pesquisadores de Genebra é muito grande.

Iniciei meu mestrado na UNESP-Marília em 1995 e, durante seis anos, fiz parte de um grupo de estudos de Epistemologia Genética vinculado ao programa de Pós-Graduação, coordenado pelo então meu orientador. Nunca imaginei que meus estudos de física e geometria seriam tão importantes para minhas pesquisas, tanto que hoje a geometria e a psicologia infantil, são as áreas básicas que estudo.

O Mestrado me levou a estudar quais eram as relações geométricas mais primitivas usadas pelas crianças e, para tanto, consultei, atentamente, várias obras de Piaget e seus colaboradores. Foi um trabalho bibliográfico no qual resgatei a história da Ciência Geométrica e o desenvolvimento da geometria infantil. Para a melhor compreensão da geometria infantil fui a campo e, durante um ano, colhi dados em duas escolas municipais de educação infantil de Bauru, tal como presente na obra de Piaget intitulada *A representação do espaço na criança*. Cinquenta anos após suas pesquisas, encontrei, na representação gráfica (desenho infantil), as mesmas características e as mesmas fases de desenvolvimento.

Comecei a entender as crianças na escola, o porquê das suas indagações, as explicações dadas, a falta de dados e, muitas vezes, de coerência quando contavam um episódio. Podia então acompanhar o desenvolvimento das representações gráficas, das “falhas” na escrita e das explicações para os fatos que aconteciam na vida das crianças através dos trabalhos por elas realizados.

Terminado o Mestrado em dezembro de 1998, fui aceita no Doutorado no ano seguinte, objetivando continuar meus estudos, mas com enfoque sobre o desenvolvimento das estruturas espaciais.

² Iniciei a Pós-Graduação em 1995 e terminei-a em 1998. O objetivo da minha pesquisa era descobrir as fases de desenvolvimento das relações espaço-geométricas em crianças de dois anos e meio a sete anos,



Nessa época, iniciei a docência universitária trabalhando com a Didática da Matemática para alunos de licenciatura em Matemática, futuros professores e, logo em seguida, fui chamada para a Psicologia do Desenvolvimento e da Aprendizagem, área a que sempre aspirei, uma vez que teria o espaço onde pudesse tratar do desenvolvimento da inteligência humana, dando continuidade ao meu projeto de Doutorado.

O estudo da Didática da Matemática e o contato com os alunos na disciplina de Estágio Supervisionado no curso de licenciatura em Matemática deram-me a oportunidade de aproximação com professores de escolas de ensino fundamental e seus alunos.

Por outro lado, como professora de estágio supervisionado, era meu trabalho criar situações propícias para os alunos da graduação na fundamentação teórica e prática, mostrando como era o preparo de planos de ensino, de aula, os recursos didáticos, elaboração de materiais diversos, inclusive. Foi uma chance única, pois tinha o acompanhamento de todo o processo do ensino da Matemática: professores e alunos do ensino fundamental em situações reais de aula, alunos de graduação em processo de formação e que tinham a oportunidade de estar em situações de docência supervisionada. Quanto a mim, era a formação de uma professora do ensino superior em fase de estudos de pós-graduação, com uma particularidade, tinha como objeto de estudo o ensino-aprendizagem da matemática era a formação de alunos de graduação em situações reais de ensino-aprendizagem em sala de aula, professores e alunos do ensino fundamental em situação de ensino-aprendizagem, e professor de graduação estudando com alunos de licenciatura os problemas enfrentados em sala de aula onde eles eram estagiários.

Para quem estuda Piaget, conhecer Genebra, os *Archives*, a Universidade e os locais por onde Piaget viveu e produziu sua vasta obra é um grande sonho. Pude realizá-lo no ano de 2000, ano em que ocorreu o *Colloque Constructivisme: usages et perspectives em éducation*, quando pessoas de várias partes do mundo se reuniram para mostrar os rumos das pesquisas que dão continuidade ao trabalho de Piaget.

A participação no *Colloque* proporcionou-me a possibilidade de conhecer pessoas que trabalharam diretamente com Piaget e que continuam a pesquisar sobre o desenvolvimento da inteligência. Pelos corredores da Universidade de Genebra, foi

conforme detalhado no Capítulo 1 – Um estudo inicial de geometria infantil deste trabalho.



possível encontrar Magali Bovet, Silvia Parrat-Dayan, Jacques Vonèche, Constance Kamii e outros pesquisadores que dão continuidade aos trabalhos do *Patron*, como era chamado Piaget por seus discípulos.

Durante dois dias, no decorrer do *Colloque* pude conversar com Mme. Silvia Parrat-Dayan, Mme. Magali Bovet e M. Françoise Conne, apresentando meus planos de estudo. Foi uma experiência ímpar, contudo voltei ao Brasil sem perspectivas de terminar meu trabalho. As sugestões eram audaciosas; algo mais voltado às necessidades atuais da educação e o convite para permanecer em Genebra por um período com vistas a um aprofundamento da teoria psicogenética. Durante alguns meses, fiquei sem chão, o desequilíbrio foi bom no sentido de me permitir rever as bases nas quais eu trabalharia. A geometria era meu foco, todavia o direcionamento do projeto teria que ser refeito. O convite para estudar em Genebra por um tempo foi esquecido, na época era inviável.

Comecei a pensar nos conselhos recebidos em Genebra e, durante um ano, pude escrever um novo plano de trabalho. Algumas leituras foram mantidas, mas o levantamento bibliográfico que atendesse ao projeto recém-elaborado necessitava de um investimento e tanto.

A dissertação de Mestrado se transformou em livro e tem me possibilitado divulgar essa fase do meu trabalho aos professores, mostrando a eles que é condição primordial entender como a criança representa o mundo, para poder trabalhar com elas. Rousseau foi o primeiro a fazer tal afirmação: “é preciso conhecer a criança antes de ensiná-la”, mas no entanto, ainda hoje, os professores de educação infantil não conhecem o processo de desenvolvimento da criança.

Este trabalho, que agora apresento, tem por objetivo descobrir como um grupo de alunos de Ensino Fundamental representa seus deslocamentos realizados em um campo espacial conhecido - percursos rotineiros e locais familiares, de casa para a escola, dentro da escola, a sala de aula e a volta da escola para casa (geometria vivida) e as representações gráficas de alguns entes geométricos, tais como: ponto, reta e plano, quadrado, retângulo, triângulo, círculo, cubo, paralelepípedo, cone e esfera (geometria axiomática) e as possíveis relações entre essas duas formas de conhecimento. Somente se conhecermos como pensam e elaboram seus conhecimentos, poderemos ter mais clareza para auxiliá-los no processo de ensino-aprendizagem.

Durante a escrita dos capítulos, pude realizar uma retrospectiva do percurso que realizei durante esses anos de estudo acadêmico e profissional. Esta introdução deu-me oportunidade de avaliar o que já realizei e o que tenho ainda por fazer.

O primeiro capítulo, de retrospectiva histórica, “O ensino da geometria das origens aos dias atuais”, baseia-se em uma pesquisa bibliográfica sobre as concepções de espaço e da história do ensino da geometria.

A evolução na concepção histórica do espaço e da geometria passou e passará por diversas mudanças, do espaço como centro hierárquico dividido em sacro e profano - como na concepção dos homens da Antigüidade e da Idade Média - ao espaço como um todo absoluto e isótropo, infinito e contínuo - como a concepção clássica de Newton e Kant -, passando ainda pelo espaço relativista de Einstein, parece muito avanço? Nada, se comparado ao ciberespaço das viagens na *web*, no espaço imaterial, que não está subordinado às leis da física. Não é necessária retroagirmos ao período paleolítico para reconstruirmos ao desenvolvimento da geometria com a prática utilizada, podemos avançar a Grécia onde a geometria surge com uma criação abstrata que não requer a experimental

Quanto à evolução do ensino da geometria, veremos que começa como um saber prático utilitário e vai passar no mundo grego, com a descoberta da razão, para um saber erudito destinado a poucos.

A Grécia, no período áureo, no qual o homem mostrou todo o seu poder de genialidade, transformando a sabedoria prática do uso diário e cotidiano em conhecimentos científicos, racionais, abstratos e universais como no caso da própria geometria, que de utilizações práticas para medir terras passou a ser um conjunto organizado de conhecimentos que culminaram com *Os Elementos* de Euclides, e como modelo de conhecimento racional e manual durante séculos para o ensino da geometria escolar.

As bases clássicas da Grécia e de Roma, do conhecido geométrico nas quais a educação geométrica era restrita a poucos, na Idade Média e uso não ocorreu, pois a bruxa do conhecimento, estava na teologia.

No Renascimento, o conhecimento do passado, a alegria de viver e a natureza, somados à redescoberta dos clássicos gregos dão ao homem a liberdade de pensar e usar

o poder da razão, a modernidade e a ciência na busca da descoberta de como é este universo que habitamos e a geometria como um instrumento de descoberta do universo.

A aproximação de um novo milênio e o ensino da geometria as propostas atuais e os caminhos a serem traçados.

Apresento, no segundo capítulo, a construção da inteligência segundo a teoria de Piaget, utilizando para tanto a construção das noções espaciais. Assim como um bebê recém-nascido que possui funções biologicamente montadas, mas que precisam do desafio do meio para se transformar em um ser falante e pensante, a inteligência não começa na linguagem. Esta é uma das condutas da representação humana, importante para a nossa vida e para o desenvolvimento da inteligência, mas o período anterior a essa aquisição é um período comparável à revolução copernicana devido às conquistas realizadas.

Para finalizar o segundo capítulo, faço uma retomada da construção das relações espaciais na criança, primeiramente, apresentando a obra que me deu sustentação teórica para desenvolver meu trabalho de mestrado e doutorado: *A representação do espaço na criança* de Piaget e Inhelder (1993), na qual optei por escolher dentre as múltiplas experiências apresentadas uma de cada grupo de relações geométricas estudadas: topológicas, projetivas e euclidianas, para aplicá-las às crianças de educação infantil de Bauru.

Das relações topológicas analisadas: de vizinhança, de separação, de ordem, de circunscrição (ou envoltório) e de continuidade, foram utilizadas técnicas de estereognosia³, desenho de formas geométricas euclidianas e topológicas, ordem linear e cíclica, estudo dos nós – relação de circunscrição e do contínuo. Para as relações projetivas, a construção da reta projetiva e a conduta de mirar e, finalmente, para as relações euclidianas o nível dos líquidos.

Todavia, para tal avanço, foi necessário que o homem, com sua inteligência, evoluísse na ciência e criasse condições para tanto, só possíveis com o pensamento hipotético e dedutivo formalizado que lhe desse instrumento. É neste ponto que a psicologia do desenvolvimento dá a sua contribuição, ao mostrar como o homem passa

³ O objetivo de tal experiência era de “traduzir a percepção tátil-cinestésica do objeto invisível em uma imagem espacial de caráter visual”, a partir de desenhos de objetos que só eram apresentados pelo tato (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 33).

de um bebê indefeso a um adulto criativo e, às vezes destruidor, para o qual o desenvolvimento do espaço como categoria a ser desenvolvida é uma necessidade.

O terceiro capítulo foi a busca do novo, com a vinda da Dr^a. Parrat-Dayana ao Brasil em novembro de 2001, reiterando o convite para aprofundar os meus estudos na teoria piagetiana. Com o apoio do Dr. Raul Aragão Martins, orientador deste trabalho, pude ficar, durante quatro meses, como aluna livre da Universidade de Genebra.

A pesquisa bibliográfica e a base teórica, parte vital desta pesquisa, ocorreram na cidade de Genebra sob a orientação da Prof^a. Dr^a. Silvia Parrat-Dayana, com o auxílio da CAPES, sem o qual seria impossível realizar tal feito. Durante quatro meses, de maio a setembro de 2002, realizei pesquisas nos Archives Jean Piaget, Bibliothèques de l'Université de Genève e Bibliothèque Scientifique de la Ville de Genève.

As pesquisas desenvolvidas nesse período e a sua continuidade no Brasil levaram-me a compreender as características da inteligência dos alunos das séries iniciais do Ensino Fundamental, o período de passagem da infância à adolescência e, portanto, infanto-juvenil, no qual as dificuldades no relacionamento com os pais e professores são nítidas; pois, ora são tratados como crianças e ora, como adultos, este período esconde uma fase no qual se desenvolvem processos do pensamento lógico (as operações) que podem ser aplicadas a problemas reais e por isso operatório concreto.

A surpresa com o estudo desse período de desenvolvimento fizeram-me descobrir a riqueza das operações que se escondem sob o pensamento operacional concreto, pois é somente nesse período que os "Agrupamentos" – operações nascentes que se coordenam em estruturas de conjunto mais elementares, que possibilitam a resolução dos problemas de conservação - se subdividem em: operações lógico-aritméticas ou lógico-matemáticas e as infralógicas.

As primeiras versam sobre a lógica das classes ou relações simétricas (semelhanças), seriações ou relações assimétricas (diferenças) e número (síntese das duas anteriores). Tais operações lógicas ocorrem sobre os objetos discretos ou descontínuos do real, reunidos em conjuntos descontínuos e independentes de configurações espaço-temporais.

As operações infralógicas, físicas ou espaço-temporais são as que *formam o objeto como tal por oposição aos conjuntos de objetos das lógico-aritméticas* e, se formadoras da noção de objeto, são relativas às conservações físicas (quantidade de

matéria, peso e volume) e à constituição do tempo e do espaço (conservação do comprimento, superfície, perímetro, horizontalidade, verticalidade, etc.) e que vão implicar outras particularidades na construção do espaço e da geometria.

Os aspectos metodológicos desta pesquisa serão explicitados no capítulo quarto, utilizando-se, para tanto, o método clínico crítico, característico da Escola de Genebra, e as orientações de Bogdan e Biklén (1994) no que se refere à abordagem qualitativa. Nesse capítulo, explico o contexto da pesquisa, abordando aspectos das escolas que possibilitaram a coleta dos dados, os sujeitos e os procedimentos de abordagem.

Os dados coletados mostraram que há uma relação entre o desenvolvimento da geometria vivida e a geometria axiomática. O perfil dos grupos categorizados evidencia que as relações utilizadas pelos sujeitos nas representações dos percursos e espaços conhecidos e na representação dos entes geométricos são as mesmas: os sujeitos que se utilizam predominantemente das relações topológicas e iniciam o uso das projetivas e euclidianas nas representações dos percursos conhecidos (Grupo A). Também se utilizam dessas mesmas relações nas representações dos entes geométricos (Grupo I).

A passagem da supremacia das relações topológicas ao uso das projetivas e euclidianas fica evidente nas várias formas de representação: no gesto (imitação com o corpo), nas representações gráficas (desenhos) que fazem uma aproximação do modelo interno que o sujeito tem com o que ele está retratando no desenho e na linguagem. As confusões de pontos de vista (rebatimentos e transparências) refletem as dificuldades dos sujeitos em coordenar o que é visto do que é sabido do objeto a ser representado, sujeitos estes classificados nos grupos B e II (A e B).

A utilização adequada das relações projetivas e euclidianas surge com a representação quase que desligada do concreto, por formas de expressão que são verdadeiras representações abstratas do vivido e do imaginado. O terceiro grupo (C e III) mostra uma compreensão do espaço e da geometria, como poderá ser lido e analisado ao final deste trabalho.

Finalmente, apresento as conclusões deste trabalho e preparo-me para o início de uma nova fase de pesquisas - a procura de formas para viabilizar o ensino da geometria e do espaço, mas esse é um novo projeto, e tudo tem novo início...

CAPÍTULO 1

CAPÍTULO 1

O início da geometria nos tempos atuais

Não existem estradas reais para se chegar à geometria.

Euclides

Uma das histórias da matemática é a história da geometria. A geometria é uma das áreas da matemática que mais influenciou a cultura humana. A geometria é a ciência que estuda as propriedades das figuras geométricas e das relações entre elas. A geometria é a base da arquitetura, da engenharia, da arte e da ciência. A geometria é a linguagem da natureza.

A geometria é a ciência que estuda as propriedades das figuras geométricas e das relações entre elas. A geometria é a base da arquitetura, da engenharia, da arte e da ciência. A geometria é a linguagem da natureza. (BORGES, 1996, p. 57)

A grande dificuldade está em sintetizar, em poucas páginas, as histórias que a geometria humana construiu no decorrer de séculos. Isso quase não dá para fazer a não ser no mundo de alguns dias.

Antes é preciso saber: por que estudar o espaço? Por que estudar a Geometria?

Nossa concepção de espaço está influenciada pelas concepções de tempo em que vivemos. A geometria é a ciência que estuda as propriedades das figuras geométricas e das relações entre elas. A geometria é a base da arquitetura, da engenharia, da arte e da ciência. A geometria é a linguagem da natureza. (BORGES, 1996, p. 57)

CAPÍTULO 1

CAPÍTULO 1

O ensino da geometria: das origens aos dias atuais

Não existem estradas reais para se chegar à geometria.

EUCLIDES

Olhar a história do ensino da matemática e, principalmente, da geometria é tentar refazer um percurso cujos caminhos estão ainda por ser descobertos. A história, instrumento para a compreensão da realidade, “está sempre se construindo: o conhecimento que ela produz nunca é perfeito ou acabado”⁴.

Mas a história, hoje em dia, não visa a explicar este passado distante e morto. E é a contribuição que ela pode trazer para a explicação da realidade em que vivemos que nos leva a ver como fundamental sua divulgação fora das universidades e das escolas onde está prisioneira há longos anos. Essa divulgação se torna importante na medida em que acredita que a história, ajudando a explicar a realidade, pode ajudar, ao mesmo tempo, a transformá-la. (BORGES, 1996, p. 8)

1.1 Uma breve história do espaço

A grande dificuldade está em sintetizar, em poucas páginas, as maravilhas que a mente humana construiu no decorrer de séculos. Isso quase tão difícil como fazer a volta ao mundo em alguns dias...

Antes é preciso saber: por que estudar o espaço? Por que estudar a Geometria?

Nossa concepção de espaço está influenciada pelas concepções do tempo em que vivemos: estamos, irremediavelmente, incrustados no espaço. Essa afirmação não é atual, desde que o homem surgiu na Terra está preso a um corpo situado no espaço e no tempo, e suas concepções espaciais refletem o pensamento vigente em seu tempo, salvo, é claro, aqueles que ousaram mudar e tentaram apresentar uma outra visão, o que, em alguns casos, gerou mudanças de paradigmas, mas, na maioria das vezes, permaneceu

⁴ “História é uma palavra de origem grega, que significa investigação, informação.” (BORGES, 1996, p. 11).

inalterado ou até, em outros, casos terminou tragicamente como aconteceu com Bruno e Galileu.

De Aristóteles a Einstein, ocorreu uma transformação verdadeiramente revolucionária em nossa concepção do espaço. Para Aristóteles, o espaço não passava de uma categoria bem pouco importante da realidade. Newton, em contraposição, fez dele o pano de fundo formal de seu universo, a moldura de toda ação. O espaço newtoniano, porém, não possuía nenhuma qualidade intrínseca própria, sendo apenas um vazio sem forma e sem característica... Com a relatividade geral, no entanto, o espaço se torna, pela primeira vez, uma categoria **primária e ativa** da realidade. Segundos a relatividade, **não pode** haver objetos materiais sem uma membrana de espaço que os sustente. O espaço torna-se assim na concepção de Einstein um pilar capital da moderna visão científica do mundo. (WERTHEIM, 2001, p.130).

Quanto à Geometria, muitas são as razões para estudá-la: “A geometria, compreendida como modo de análise e apreensão do espaço, responde, sem dúvida, aos interesses fundamentais do homem” (DROZ; SENFT, 1971, p. 2). Se esses não fosse motivo suficiente para estudá-la, veremos que ela será o instrumento necessário a muitos cientistas, físicos, matemáticos, astrônomos e educadores, para a compreensão da criação e dinâmica do Universo onde vivemos, respondendo sobre a sua criação e dinâmica de funcionamento; portanto, o espaço e a geometria são o palco dos acontecimentos que nem nos sonhos mais férteis poderíamos imaginar.

1.1 Uma breve história do espaço.

Se retroagirmos no tempo, teremos em Aristóteles (384-322 a.C.) o pilar que vai sustentar a concepção de espaço que se manteve íntegra até o século XVII, ou, mais precisamente, até o *Principia* de Newton. Apesar dos abalos ocorridos com a apresentação de outras idéias em diversas épocas, será esse inglês fantástico que irá desestruturar a bolha de cristal que Aristóteles elaborou.

Para nós, hoje, é fácil pensar o espaço como um vazio tridimensional que a tudo envolve e é contínuo, ou mais precisamente:

...homogêneo (os elementos que nele se podem distinguir aí através do pensamento são qualitativamente indiscerníveis), isotrópico (todas as direções têm as mesmas propriedades), contínuo e ilimitado. Essas são as propriedades mais gerais: mas a geometria usual acrescenta-lhes duas determinações seguintes: 1.^a, tem três dimensões...; 2.^a, é homoloidal, quer dizer, nele se podem construir figuras semelhantes em qualquer escala. (LALANDE, 1996, p. 322).

Entretanto, Aristóteles concebia o espaço como a superfície que envolve os objetos, ele tinha pavor ao *vácuo*, ao vazio. O que conhecemos hoje como vazio, para ele era inconcebível, “A natureza abomina o vácuo”, “o vazio é nada e o que é nada não pode ser” (JAMMER in WERTHEIM, 2001, p. 73).

A visão aristotélica de espaço postulava que não havia volumes vazios, pois onde um corpo, uma substância termina, outra começa, a matéria preencheria cada diminuta fresta existente, o espaço⁵ seria o limite que separa alguma coisa material de outra. Podemos assim dizer que o universo de Aristóteles era pleno, cheio. Para ele, cada coisa tinha o seu lugar. E o espaço não tendo volume, conseqüentemente, não tinha profundidade, estando limitado à superfície das coisas. Somente os objetos concretos poderiam ter profundidade, o espaço *per si*, não.

As teses de Aristóteles vão ser estudadas, defendidas e contraditas durante muito tempo. Filósofos, astrônomos, físicos e matemáticos irão levar séculos no ímpeto de compreender melhor o universo, seus limites, sua dinâmica e suas origens. O espaço estará sempre no meio de tal disputa. Eis o motivo de conhecermos sobre ele.

Para Aristóteles, um espaço é uma região cercada por alguma coisa material (por exemplo, o espaço dentro de uma garrafa, que é cercado pelo material da garrafa). O espaço ou o lugar onde eu estou é determinado pelas coisas que estão a minha volta e que me cercam, envolvem e tocam: o ar, o assento de uma cadeira, etc. Ora, se o universo é tudo aquilo que existe, não há nada fora do universo que possa tocá-lo ou cercá-lo. Por isso ele não está em lugar nenhum, não está em nenhum espaço. Também não se pode falar sobre o espaço onde não existe nada. Por isso não se pode falar sobre o espaço fora do universo. (MARTINS, 1996, p. 77).

Na Antigüidade, num período anterior a Aristóteles, Leucipo de Mileto⁶ (500 - 430 a.C.) e seu discípulo Demócrito de Abdera (460-370 a.C.), considerados atomistas, tinham uma posição oposta a de Aristóteles. Para eles o mundo material era composto de partículas indivisíveis - *átomos* - e entre elas havia o vazio, como ensinado nas

⁵ Durante a elaboração do trabalho de mestrado, procurei as explicações sobre o que era o “espaço físico”. A resposta veio mais tarde, nos estudos deste trabalho, somente conhecendo as formas cambiantes da concepção de espaço é que pude entender o que tanto procurei, suas explicações estão em Crescas, como veremos à frente.

⁶ Os dados referentes a Leucipo e Demócrito são prováveis, Aristóteles considerava o primeiro como o criador da teoria atomista e o segundo como o quem a elaborou e a desenvolveu (PRÉ-SOCRÁTICOS, 1996, p. 243).

escolas atualmente. Mas, para chegarmos ao que conhecemos hoje, a visão atomista precisou superar as objeções ao espaço vazio de Aristóteles.

As críticas que abalaram o sistema aristotélico ocorreram no final do século XIII com Roger Bacon, em um tratado, escrito para Clemente, que tinha como ponto de discórdia a idéia de “verdade” e a quem competia determiná-la. Tal episódio foi um dos primeiros entraves entre a Ciência e o Cristianismo, e as críticas ao espaço aristotélico entraram no cenário da discussão.

A insatisfação gerada estava centralizada no fato de as Escrituras estarem subordinadas a um “pagão grego”, o que causava, nos teólogos de inclinação ortodoxa, claro desagrado. Múltiplos eram os pontos de discórdia, porém o espaço teve um papel central e a onipotência de Deus forçou os eruditos a rever suas idéias científicas sobre o espaço.

De uma perspectiva aristotélica, a imobilidade do espaço decorria diretamente da impossibilidade do espaço vazio. Caso o universo fosse movido, restaria o espaço vazio atrás; isso era considerado impossível, *ergo*, devia ser impossível mover o universo. De uma perspectiva cristã, a implicação era que nem mesmo Deus poderia fazer isso. (WERTHEIM, 2001, p. 76).

A onipotência de Deus foi uma aliada do pensamento científico. Foi quando, no século XIV, com o abalo do aristotelismo, houve uma explosão da atividade científica, o que guardava gratas surpresas em relação ao espaço.

A possibilidade do espaço vazio propiciou uma gama de indagações que deu início ao surgimento da ciência empírica do movimento e uma revolução nas artes.

Em relação à ciência empírica do movimento, dois grupos de sábios, um em Paris e outro em Oxford, *terministas* e *calculadores* respectivamente, iniciaram a formulação básica da ciência moderna da dinâmica. Quanto às artes, na literatura, Dante escrevia a *Divina Comédia* enquanto Giotto⁷ pintava os afrescos e murais que “cobriram, com histórias inspiradas na vida de Jesus e da Virgem, as paredes de uma pequena igreja... pintou personificações de virtudes e vícios...” (GOMBRICH, 1981, p.150). Na Capela Arena de Pádua, está registrada a genialidade de Giotto, bem como

⁷ Giotto (Angiollotto) di Bondone (1266-1337), pintor florentino, mosaicista e arquiteto italiano, fugiu à tradição da arte bizantina, abandonou as tradições rígidas, encheu de emoção e vida as figuras sacras. Giotto introduziu a perspectiva e a tridimensionalidade em cenas narrativas, como as pinturas na Capela Arena de Pádua (1303-1305), foi contemporâneo e amigo de Dante Alighieri. Dante (1265-1321), florentino, foi o mais genial escritor italiano. Na *Divina Comédia* (1300-1318), apresenta visão da religião e da ciência da Idade Média.

as mudanças por ele realizadas em relação à representação do espaço tridimensional em um fundo bidimensional.

As pinturas de Pádua e de Arezzo, feitas por Giotto, refletem um misto de pensamento medieval, inclinação aristotélica e das regras da perspectiva tridimensional ainda não estabelecidas. A cena da Anunciação é clara ao retratar o arauto do Senhor e a Virgem Maria. Apesar de comum ao visitante do século XIV, a maneira como o anjo e a Virgem aparecem são incomuns, as imagens são sólidas e tridimensionais, próprias do Renascimento, bem como o volume dos corpos, a expressão viva nos rostos, mas o espaço ao fundo da cena é próprio do estilo Gótico, da visão do homem medieval, chapado, há nele um misto de ilusão da profundidade detalhadamente construída que caracteriza a arte e a ciência Renascentista nos corpos e objetos. Contudo, no que tange ao espaço circundante, prevalece o espaço aristotélico, pleno.

Muitos séculos⁸ se passaram, do pensamento clássico ao Renascimento, até que o homem voltasse a ter interesse pela ciência natural e pelas questões do próprio homem. Da instauração e expansão do cristianismo primitivo até a redescoberta dos clássicos gregos reintroduzidos pelos árabes, pois foram eles os depositários da cultura clássica, a Europa esteve fechada a tudo o que não fosse ligado a Deus.

O estilo de pintura mostrado por Giotto revelava o interesse empírico pelo mundo físico, oposto ao gótico⁹ que estava hermético a Deus. Olhar para o mundo, para os seus habitantes estava sendo incorporado às artes visuais.

Os pintores góticos e bizantinos, segundo Damish (WERTHEIM, 2001, p. 63), não pintavam em estilo chapado por desconhecimento, mas por quererem retratar algo diferente evocavam o reino cristão do espírito e não o mundo concreto e físico.

Dante, outro florentino que marcou época na poesia e na literatura ao escrever a *Divina Comédia*, iria mostrar o espaço da religião, da alma e do corpo, pois viajou alternadamente com seu corpo e sem ele. Guiado por Virgílio, o célebre poeta latino (71-19 a.C.), atravessa os nove círculos do Inferno e percorre o Purgatório, onde encontra Beatriz, sua amada, que o leva ao Paraíso. Apesar da partida em plena forma física ao término da empreita se pergunta se havia mesmo viajado com seu corpo ou fora dele, o que vai caracterizar a visão do homem medieval para o qual o cosmo espiritual era considerado a realidade primeira.

⁸ Para Wertheim foram oitocentos anos (p. 62).

⁹ “As figuras eram chapadas contra o fundo, quase suprimindo a idéia de espaço. Uma arte estática, rústica, inalterável e sagrada, como a sociedade que ela representava” (SEVECENCO, 1994, p. 27).

Dante e Giotto apresentaram uma realidade dual, um universo com duas ordens: física e espiritual, a realidade física como alegoria para o espiritual, e a alma que não estava sujeita às leis da geometria euclidiana, tampouco às da física.

O interesse dos artistas e filósofos medievais era a “realidade última”. A diferença entre o espaço celeste e terrestre é evidente nas pinturas de Pádua. No *Juízo Final*, Giotto mostra nitidamente essas diferenças, o espaço espiritual não pode ser mostrado seguindo as regras do ilusionismo naturalista, o Céu está além das pinturas de representações pictóricas, pintura de representação metafóricas, a arte, jamais, nesse período, poderia captar, adequadamente, a verdadeira realidade do Céu, mas poderia aludir às representações. Ao Céu não se aplicavam as regras de verossimilhança tridimensional que pairam nas outras pinturas de Pádua.

Dante, assim como Giotto, teve muito mais dificuldade em representar o Céu do que a descida aos nove círculos do Inferno e a subida ao Monte Purgatório. A diferença entre o espaço terrestre e o celeste permitia aos cristãos da Idade Média olhar para a esfera celeste como uma metáfora da esfera espiritual, ao morrer ia para o Céu. A própria palavra céu remetia tanto ao domínio dos astros como ao de Deus. Não é sem razão que, em muitas línguas¹⁰, a palavra céu exprime essa dupla realidade física e divina (grego, hebraico, nas línguas germânicas e românicas).

Havia uma heterogeneidade entre o espaço celeste e terrestre, mas, e se o espaço celeste e o terrestre não fossem qualitativamente diferentes?

Essa era exatamente a questão implicitamente suscitada pela nova concepção de espaço antecipada pelos pintores perspectivistas... Surgiu então a questão; até que distância da Terra poderia se estender a visão euclidiana de espaço dos pintores perspectivistas? Poderia esse espaço não hierárquico alcançar até as próprias estrelas? Poderiam os espaços terrestre e celeste constituir um domínio homogêneo único? Essa questão, foi uma das mais importantes questões filosóficas dos séculos XVI e XVII. (WERTHEIM, 2001, p. 95).

No século XVI, novamente, a revolução visual criada pelos pintores abriu as portas para os cientistas, entre esses pintores; podemos destacar Rafael¹¹. Este era um aviso à revolução cosmológica que estava por ocorrer, assim como no século XIII com Giotto.

¹⁰ No inglês há, a diferença entre heaven (céu divino, paraíso) e sky (céu físico).

¹¹ Raffaello Sanzio, pintor e arquiteto italiano (1483-1520).

Nas salas Rafael do Palácio do Vaticano com suas pinturas em perspectiva, mais precisamente, na obra a *Disputa*, o pintor tenta juntar o Céu e a Terra em um único espaço euclidiano. Os domínios de Deus e dos homens estão integrados, ou *quase* integrados. A pintura é feita a pedido do Papa Júlio II, que retrata a mesma cena de Giotto em o *Juízo Final*. Rafael, muito embora tenha separado o espaço da Terra e do Céu por um banco de nuvens, insere-os em um mesmo espaço euclidiano. Em oposição à afirmação de Dante de que as almas não projetavam sombras, ele marca os pés celestiais projetando suas sombras sobre as nuvens.

Rafael *quase* conseguiu unir o espaço físico com o celeste, pois, quando subimos os olhos para o topo da pintura, a homogeneidade espacial se esvai em um Deus no Empíreo, retroagindo ao simbolismo gótico; assim como Giotto, Rafael sucumbe e registra na sua obra a diferença entre o espaço terrestre e o celeste, o primeiro subordinado à geometria euclidiana e o segundo não submetido a tais regras. O corpo e a alma tinham espaços diferentes.

Rafael não foi, em absoluto, a primeira pessoa a lutar pela relação espacial entre Céu e Terra; a *Disputa* foi antes uma síntese de uma das questões mais absorventes da época: qual é exatamente a natureza do espaço “celeste”, tanto no sentido teológico quanto no domínio dos astros? Tentando responder a esta última pergunta, astrônomos e cientistas iriam gradualmente articular uma nova cosmologia radical. (WERTHEIM, 2000,p. 97).

A luta de Rafael já havia se iniciado anteriormente por Hasdai Crescas e por Nicolau de Cusa. Ambos estavam muito além da compreensão dos homens do seu tempo e não foram compreendidos.

Crescas (1340-1412?), filósofo judeu catalão, escreveu em espanhol a *Refutação dos princípios fundamentais do cristianismo*. Convencido da realidade dos espaços vazios, chegou à conclusão de que as afirmações de Aristóteles conduziam a absurdos, não se conteve somente em aceitar como princípio, mas demonstrou na prática sua falta de veracidade.

Em termos aristotélicos, o “espaço” da atmosfera terrestre é o seu limite circundante com a primeira das esferas celestes. Mas se é assim, disse Crescas, qual é o espaço de uma pequena parte da atmosfera? Segundo Aristóteles, seria preciso dizer que ele é também o limite com a primeira esfera celeste – em outras palavras, é o mesmo da atmosfera inteira. Mas isso é claramente absurdo. Como Crescas observou, esse é um problema endêmico na concepção aristotélica de espaço. (WERTHEIM, 2000,p. 77).

Nicolau de Cusa (c. 1401-1464), humanista e cardeal da Santa Sé, foi muito além do que ousou sonhar Nicolau Copérnico (1473-1543), utilizando-se de um argumento teológico: *somente Deus é absoluto*, reuniu o cosmo medieval, o mundo das esferas celestes estava agora ilimitado, o sistema geocêntrico estava irremediavelmente maculado.

Em *De douta ignorantia*, “seu universo não poderia ter centro, porque é impossível achar o centro perfeito... Cusa removeu a Terra, ou qualquer outro corpo celeste, do centro do Universo; como o centro era o ponto da perfeição absoluta, só Deus poderia ocupá-lo” (GLEISER, 1997, p. 98).

Cusa foi acuado por seus superiores, recorreu à Igreja e aos neoplatônicos em defesa de suas idéias apresentadas em *Apologia doctae ignorantiae*, “*Apologia da sábia ignorância*”, mas a marcha contra o sistema aristotélico estava em franco estabelecimento. Apesar de a utilização do argumento teológico ser uma saída diplomática, não surtiu o efeito desejado, a argumentação baseada nos dogmas religiosos não seria a marca de Copérnico, Kepler e Galileu, este último tomou a experimentação como uma nova maneira de estudar a natureza.

As idéias de Crescas e Cusa, apesar da genialidade, não atingiram seus contemporâneos, porém, em nós, desperta admiração, pois, muito antes da invenção dos instrumentos que possibilitaram experimentalmente olhar o espaço celeste, a mente criadora destes dois gênios já conseguia vislumbrar um mundo que seria mostrado por outros estudiosos.

Uma série de acontecimentos ocorreram na Europa nos idos de 1500. Navegadores espanhóis e portugueses redescobriram e redesenharam o mundo terrestre. Duas questões concretas instigavam Copérnico: o mapa celeste¹², para uma melhor orientação nas viagens marítimas, e a reformulação do calendário a pedido do papa Gregório XIII, em 1514, que era um projeto oficial da Igreja, porém recusou, pois, antes de tudo, era necessário conhecer os movimentos do Sol e da Lua, o que ocorreria somente em 1532, quando o trabalho de Copérnico seria apresentado nos jardins do Vaticano pelo secretário do Papa.

Os navegantes utilizavam o antigo sistema elaborado por Ptolomeu de Alexandria no século II, que era a única referência. Longe de ser preciso, previa as posições do Sol e da Lua para os navegantes, mas era pouco seguro e, de acordo com

¹² Copérnico iria dedicar a sua vida a tentar “descobrir como exatamente o Sol, a Lua e os planetas se movem através do céu?” (WERTHEIM, 2001, p.102).

Copérnico, era “feito”. Deus não poderia ter criado um sistema esteticamente daquela forma.

No *Commentariolus*, Copérnico postula que o Sol é o centro da órbita de todos os planetas e, portanto, do Universo; que a Lua, e apenas a Lua, gira em torno da Terra; que a Terra gira em torno de seu eixo; e que a Terra e os outros planetas giram em torno do Sol em órbitas circulares. Com esse arranjo, Copérnico literalmente destruiu o universo aristotélico, baseado na divisão do cosmo em sublunar e celeste. (GLEISER, 1997, p.103).

As inovações do sistema copernicano ainda não apresentavam uma que romperia totalmente com o sistema aristotélico. Estava limitado pelas esferas das estrelas fixas celestes, que seriam a “moldura do universo”, portanto era um sistema finito.

A teoria de Copérnico teve eco e fez efervescerem novas idéias em três de seus contemporâneos: Giordano Bruno (1548-1600), Thicho Brahe (1546-1601) e Johannes Kepler (1571-1630). Esses homens divulgaram e efetuaram correções necessárias às teses copernicanas e prepararam a vinda de dois outros que transformariam a mecânica do Céu e da Terra: Galileu Galilei e Isaac Newton.

O herético Bruno, um filósofo, era partidário da idéia do Universo infinito de Cusa. Em 1600 foi levado à fogueira, pois de nada adiantaram seus argumentos de um Universo interminável recorrendo a Deus. Defendia que se Deus era infinito, na sua abundância, só poderia estar satisfeito com um ato de criação infinito.

Brahe, com a ajuda do rei Frederico II da Dinamarca, montou o observatório de Haveen e, em 1572, notou a presença de uma nova estrela, o que contrariava a imutabilidade do céu aristotélico. Novamente em 1577, um cometa apareceu nos céus. A partir desses eventos e das observações realizadas, Brahe concluiu que as esferas celestes não existiam. Por consequência, o modelo copernicano também não se mostrou o melhor.

A morte de Frederico II, em 1588, acabou com o sonho de Brahe que vagou pela Europa com seus instrumentos e assistentes até que o imperador Rodolfo II ofertou-lhe o cargo de “*imperial mathematicus*”. A ida à corte de Benatek, perto de Praga, aproximou Brahe de Kepler.

Os dados coletados por Brahe eram os melhores até então. Com instrumentos adequados e pessoas que o ajudaram, fez um trabalho ímpar, mas, somente após a sua morte, Kepler teve acesso a tais informações. Assumindo o posto anteriormente ocupado por Brahe, Kepler pôde dar asas a todo o seu potencial. O pedido de Brahe para

o estudo da órbita de Marte se transformou no estudo das causas físicas dos movimentos planetários. Era a oportunidade de substituir a alma pelo magnetismo.

Kepler, segundo Wertheim (2000, p.104), foi o primeiro a ver o domínio celeste como um espaço de ação física concreta. Com suas três leis, explicou como se moviam os planetas e elaborou a visão moderna do espaço celeste como um domínio físico concreto.

Todavia, coube a Galileu Galilei (1564-1642), com seu telescópio, afirmar que a superfície da Lua era como a da Terra, possuía planícies e montanhas, que o Sol tinha manchas que se moviam. Portanto, o espaço celeste era como o terrestre, mudanças ocorriam nos dois.

Ao olhar o universo do seu telescópio, Galileu provou que a esfera celeste era um domínio físico, mas uma questão iria “endoidar” a mente humana: de que tamanho é o universo? É uma pergunta que ainda não foi respondida.

Se o cosmo medieval era finito, pequeno e limitado pela esfera celeste, teria Cusa razão quanto à infinitude, o Sol seria o centro do universo com os planetas e astros ao seu redor, conforme Copérnico havia descrito? Confirmando todas essas descobertas, Galileu lançou a última pá de terra sobre o espaço aristotélico.

A noção de espaço que Galileu transformou em fundamento da física moderna era exatamente aquela apresentada pelos pintores renascentistas: **um vazio tridimensional, homogêneo e contínuo**. ...em sua nova imagem de mundo o “espaço físico” tornou-se sinônimo de espaço **euclidiano**, um vasto vazio tridimensional sem traços característicos. Finalmente após dois mil anos, Aristóteles fora derrotado – o **vazio** passara a ser visto como a própria base da existência. (WERTHEIM, 2001, p. 88).

Por coincidência ou acaso, no ano em que morreu Galileu, nasceu Isaac Newton (1642-1727). Mas, para dar prosseguimento à história do espaço, é necessário mencionar um filósofo e matemático francês que foi partidário das idéias de Cusa e Bruno sobre o espaço infinito: Descartes. Apesar de rejeitar o espaço vazio *per si* e, retrocedendo à visão aristotélica do universo “*plenum*”, Descartes, ao elaborar uma teoria sobre a criação do mundo, versão mecanicista criticada por muitos do seu tempo por ser um perigoso “construto ateu”, no qual “o universo consistia de matéria em movimento através do **espaço infinito**”¹³ em conformidade com leis matemáticas estritas” (WERTHEIM, 2001, p. 108).

¹³ Grifo da autora.



O universo cartesiano, para Descartes era análogo a uma máquina, que funcionava com mecanismos precisos, competindo ao espaço um papel crítico. Ele foi o primeiro a afastar-se das explicações bíblicas sobre a origem do universo. Embora não tencionasse um ataque direto à religião, foi muito criticado e, segundo alguns autores, é o responsável pela visão mecanicista do mundo atual¹⁴.

Como no caso das antigas teorias atomistas, a proposta de Descartes praticamente ignora o papel de Deus no universo. Ele supõe que a única contribuição relevante de Deus ocorreria no começo, criando a matéria inicial, que preenche todo o espaço, quebrando-a e colocando-a em movimento. Todo o restante ocorreria sem intervenção divina, como consequência apenas das leis naturais. É, portanto, em última análise, uma teoria materialista da origem do universo e assim foi considerada em sua época. (MARTINS, 1996, p. 86).

As explicações de Descartes sobre a gênese do universo foram criticadas por Newton e, durante muito tempo, não surgiu nenhuma outra explicação relevante que merecesse destaque. Após o impacto do mecanicismo cartesiano, as explicações sobre a criação voltaram a ser puramente religiosas.

Isaac Newton concretizou o trabalho iniciado por Kepler unindo o espaço celeste e terrestre na lei da gravidade. A mesma força que atraía os corpos para a Terra explicava o movimento dos planetas ao redor do Sol. Uma força física era a explicação para o mecanismo do universo.

Para que as leis de Kepler e Newton pudessem ser aplicadas, os corpos envolvidos teriam que ser materiais e concretos como a Terra. Uma equação matemática selava a igualdade entre o espaço celeste e o terrestre.

Respalado por Deus, Newton afirmou que o espaço era o *sensorium* de Deus:

o meio através do qual Ele exercia Sua visão onisciente e Seu poder universal. Para Newton, a presença de Deus no seio do universo era realmente **assegurada** pela presença do espaço. E, como na sua concepção Deus estava em toda parte, o espaço também deveria estar **em toda parte** – e ser, portanto, **infinito**. (WERTHEIM, 2001, p. 111).

O *Gênesis* descreve a criação do Céu e da Terra por Deus. O relato poético explica como o criador, ao término de seis dias, fez, do nada, surgir tudo o que existe. Newton, ao descrever os movimentos dos planetas, dos sóis, das terras, não mencionava

¹⁴ Para Descartes, o universo material era uma máquina, nada além de uma máquina. Não havia propósito, vida ou espiritualidade na matéria... (CAPRA, 1999, p. 56).



nada sobre a criação. Os avanços nos telescópios permitiam olhar um universo aparentemente estático, sem início e sem fim. Os processos gerativos não estavam escritos nas estrelas. Até a segunda metade do século XVIII, a teoria newtoniana e as explicações do *Gênesis* conviveram em harmonia, uma explicava a origem do universo e a outra, o funcionamento.

Immanuel Kant, na segunda metade do século XVIII (1775), criou uma teoria para explicar a origem do universo em consonância com a teoria de Newton, como o próprio nome explica: “História geral da natureza e teoria do céu, ou ensaio sobre a constituição e a origem mecânica do universo e sua totalidade, de acordo com os princípios de Newton”.

[...] Kant descreveu um processo pelo qual, acreditava ele, sistemas solares inteiros podiam se condensar a partir de nuvens de poeira cósmica. Imaginou um enorme disco de poeira girando lentamente no espaço e depois condensando-se para formar a matéria luminosa do Sol e as massas escuras dos planetas. Muito à frente de seu tempo, Kant aventurou-se a propor que galáxias inteiras poderiam se formar por solidificação a partir de nuvens enormes, de escala galáctica. Mais tarde no século¹⁵ (XIX) essas idéias foram retomadas pelo astrônomo Pierre-Simon Laplace. Como Kant, ele acreditava que a ciência podia fazer um universo aparecer a partir de nada mais que matéria bruta e as leis newtonianas do movimento. (WERTHEIM, 2001, p. 116).

Os trabalhos de Kant e Laplace caíram no esquecimento. Com o avanço do telescópio, catalogar estrelas, sondar planetas e espiar o Sol com suas manchas era mais interessante do que especulações sobre a criação. Deus poderia continuar a ser a causa criadora. As leis de Newton mostravam um universo estático, com espaço e tempo absolutos, quase inalterados, atemporais que perdurariam para sempre.

Na teoria newtoniana, o espaço era um fundo fixo no qual os acontecimentos ocorriam, um manto absoluto, onde tudo estaria situado. Até 1920, não houve preocupação com a origem cósmica do universo.

Ao olhar para o céu, os astrônomos, no início do século XX, puderam medir as distâncias estelares, apoiados nas descobertas de Henrietta Levitt (1868-1921) que se baseavam no brilho de certas estrelas durante seu ciclo regular (1910). O brilho era característico de um grupo de estrelas que estavam sujeitas às variáveis cefeidas, que eram relacionadas ao tempo em que cada estrela levava para realizar um ciclo completo.

¹⁵ Mais precisamente no ano de 1796, mas não consta no texto.

Quanto mais distantes estavam, maior era a luz emitida. Essas estrelas poderiam ser utilizadas como padrões de medidas celestes.

Edwin Hubble (1889-1953), de posse do mais poderoso telescópio da época, visualizou a nebulosa de Andrômeda¹⁶ em 1923 e, apoiando-se nas descobertas de Levitt, pode medir sua distância da Terra. Essa era a prova de que outras galáxias existiam, o universo era muito maior do que se pensava. A idéia newtoniana de um espaço absoluto, rígido teria que ser substituída por uma visão mais próxima do real e que fosse fiel à nova concepção dinâmica do espaço.

Os feitos de Hubble não pararam na medida de distâncias intergalácticas. Em 1929, ele observou que a velocidade com que as galáxias se afastavam de nós dependia da distância em que elas se encontravam. Para distâncias maiores, velocidades maiores. Essa era a prova de que o Universo estava em expansão e, portanto, dinâmico.

Se o universo estava em expansão, em algum momento do passado ele já havia sido menor, as galáxias não estavam separadas pelas vastas distâncias constatadas pelos telescópios. Essa idéia, ao astrônomo Fred Hoyle (1915-), pareceu absurda e, ironicamente, em uma entrevista na BBC de Londres, ele a denominou de *Big-Bang*. A despeito do tom depreciativo, ficou assim conhecida a teoria que explica o início do universo.

A idéia de um início do Universo não compactuava com o aspecto científico, pois, se houve um início, houve uma criação, se houve uma criação, houve um criador. Contudo, uma teoria que seria do conhecimento de todos, formulada por um jovem alemão de vinte e seis anos, trouxe mais luz aos avanços da ciência astronômica. Albert Einstein mudaria totalmente a concepção de espaço.

Einstein publicou sua teoria da relatividade em 1905¹⁷ e 1915, Especial e Geral respectivamente. Essas teorias mudaram totalmente a visão do espaço e tocaram em um ponto vital da teoria de Newton: a gravidade não era uma força de atração entre os corpos, mas sim uma curvatura do espaço, uma distorção causada pela presença dos corpos, gravidade é espaço curvo. Como explicar tal afirmação nos espaços euclidianos?

¹⁶ “A galáxia de Andrômeda, uma galáxia espiral gigante, cujo formato é semelhante à nossa Via Láctea. Ela está a mais de 2 milhões de anos-luz, mas ainda é uma das mais próximas de nós” (SNEDEEN, 1996, p. 33).

¹⁷ Relatividade especial – “Teoria proposta por Albert Einstein em 1905, na qual ele começou por presumir que o conjunto de regras que regem o Universo é o mesmo para todos os observadores, onde quer que estejam, parados ou movendo-se a uma velocidade constante, e que a velocidade da luz é uma constante” (SNEDEEN, 1996, p. 45).

O interesse de Einstein não estava na origem cósmica, mas nas leis gerais da física, suas inquietações eram as mesmas de Newton. Na busca de respostas, encontrou um universo em expansão ou contração. Negando as evidências de suas equações, ele introduziu o que ficou conhecido como constante cosmológica; essa constante era “uma força misteriosa que contrabalançava a gravidade e impedia a expansão e a contração do Universo” (SENDDEN, 1996, p. 36).

As descobertas de Hubble sobre a expansão do universo fizeram Einstein admitir que a inclusão da constante cosmológica foi o maior erro por ele cometido. Mas se o universo estava se expandindo, como era evidente pela relatividade e por Hubble, qual era a causa de tal expansão?

Segundo a relatividade geral, nosso universo está se comportando como um balão quadridimensional em expansão. É o próprio espaço que está se expandindo como a pele de um balão. As galáxias em nosso universo não estão se afastando velozmente umas das outras rumo ao espaço já existente; o que ocorre é que o próprio espaço, à medida que expande seu alcance, leva as galáxias consigo. O espaço, em certo sentido, torna-se parecido com uma coisa viva – um fruto cósmico em contínua distensão. (WERTHEIM, 2001, p. 129).

Newton, nem em sonhos mais absurdos, poderia imaginar as mudanças na concepção do espaço e as suas repercussões. A oposição à sua teoria já havia sido objeto de críticas por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), que ia completamente contra tal idéia. Segundo esse, espaço e tempo eram fenômenos relativos, porém a autoridade de Newton prevaleceu e as oposições de seu arquiinimigo houve que esperar até as teorias relativistas do século XX. Kant foi o fiel escudeiro de Newton. Liderou a retaguarda em defesa do espaço e tempo absolutos, e chamou-os de “*categorias a priori*”¹⁸.

Para os objetivos deste estudo, é vital salientar as mudanças efetuadas às concepções de espaço e como repercutiram no desenvolvimento da ciência e do homem. Não podemos deixar de lembrar que hoje, em pleno século XXI, as concepções de espaço estão, mais uma vez, passando por uma transformação fundamental. Até aqui falamos do espaço pré-digital. O hiperespaço, criado pelos físicos com onze dimensões, traça a perspectiva de uma ótica na qual não haverá mais nada que não seja espaço; até mesmo a matéria seria espaço. O tipo de espaço é esse que se apresenta?

¹⁸ Veremos que Piaget irá contestar tal afirmação na construção da genética do espaço.

As fibras ópticas, os *microchips*, as comunicações por satélites tornam impossível ao homem locar, em um mapa, em um espaço físico, a posição de um “ciberastronauta”, mas este novo espaço digital está além daquele descrito pela física, não ocorre por transmissão de partículas físicas e, sim, em informações feitas por pacotes de dados: *bits*¹⁹ ou *bytes*. Ao participar de uma sala de discussão, um *chat*, deixamos para trás as leis de Newton e Einstein. As leis que regem a saída de um *site* a outro fogem a qualquer lei da física atual e não podem ser descritas por equações matemáticas. Embora subordinada às leis da física para seu funcionamento, para utilizarmos a Internet, precisamos, por exemplo, necessariamente da eletricidade, “o ciberespaço não está tampouco confinado à concepção puramente fisicalista do real” (WERTHEIM, 2001, p.167).

Mas nada disso seria possível sem que o homem se transformasse em um ser pensante para que pudesse refletir sobre as coisas ao seu redor, pensar sobre o dia e a noite, a origem do universo, o céu e a Terra e sobre ele próprio. Como se constitui a inteligência que lhe propiciou criar sistemas de linguagens que oportunizam torná-lo vivo mesmo após a morte? Criar máquinas e linguagens que fogem ao tempo e ao espaço. Para tanto, uma categoria é fundamental – o próprio espaço e sua constituição. Assim, passaremos ao estudo do seu desenvolvimento e do seu ensino.

¹⁹ *Bit* são unidades de memória ou de dados para estocar um caractere.



1.2 Uma breve história do ensino da geometria

Há mais de um milhão de anos, segundo Chassot (1995, p.11), a humanidade reina soberana sobre a face da Terra. A chave²⁰ para a compreensão da evolução do homem parece estar num ancestral comum entre os grandes símios e o homem. Conforme Davidoff (1983, p. 9): “Os seres humanos, como os conhecemos hoje (o **homo sapiens**, para ser preciso), apareceram na Terra há cerca de 100.000 anos”.

O ancestral comum entre o homem e os grandes símios, dadas as semelhanças da estrutura anatômica básica e a constituição genética similar, viveu há cerca de dez milhões de anos. As mudanças que diferenciaram os homens dos símios podem ter ocorrido entre cinco e oito milhões de anos.

Avançando no tempo e partindo do período paleolítico, sabe-se que o homem, quando vivia da caça, da pesca e da coleta de víveres, ficando à mercê da natureza, não dominava a produção dos alimentos. Essa total dependência, dada a falta de conhecimento que permitisse dominar as técnicas de plantio e colheita, podem ter sido a causa de o homem invocar os entes mágicos na sua proteção e no sucesso de suas caçadas.

As primeiras pinturas rupestres no Paleolítico ocorreram provavelmente por razões mágicas, para invocar uma caçada produtora. Com o desaparecimento das últimas camadas de gelo, por volta de 10.000 a.C., a agricultura torna-se uma atividade. O homem passa de caçador e coletor a pastor e agricultor, alcançando uma economia produtiva. A necessidade do cuidado com a terra para o plantio fez o homem criar instrumentos que pudessem auxiliá-lo a cavar, abater ou arrancar plantas, semeá-las, colher, etc., enfim, instrumentos que superassem o limite do uso das mãos em tais tarefas. Nesse período, entre 9.000 e 8.000 a.C. tem início o plantio de cereais.

Se no período anterior (Paleolítico), o homem era dependente da extração de víveres da natureza, portanto, um predador, no Neolítico, passa a ser dependente da natureza de outra forma. Se no período anterior andava errante em busca das manadas,

²⁰ A obra: “*The man who found the missing Link - Eugène Dubois and his lifelong quest to prove Darwin right*”, de Pat Shipman, Editora Simon & Schuster, conta a vida de Eugène Dubois cavando às margens do rio Solo em Java. Encontrou um crânio, um dente e um fêmur do que chamou de *Pithecanthropus erectus* (*pithekos* significa “macaco” em grego, e *anthropos*, “homem”). A análise feita por Dubois mostrou que os fósseis não pertenciam nem a um macaco nem tampouco ao homem moderno, o fêmur era pertencente a uma criatura que andava em pé, e o crânio tinha aspecto de ser de um símio. Esta era a chave, o elo perdido na origem do homem, era o que o público veio a conhecer como homem de Java e os

da coleta de frutas e raízes, no Neolítico, ele passa a ter a necessidade de observar as regularidades dos ciclos da natureza e, com isso, estabelecer quais os períodos mais propícios para determinadas tarefas, tais como: plantar, colher, armazenar...

As observações sobre a vida dos animais e plantas, sobre a periodicidade da chuva e do vento, são os primeiros ensaios da biologia, astronomia, matemática... A busca de melhora do rebanho e da produção agrícola impõe ao homem a resolução de problemas, como, por exemplo, tais como, o armazenamento para períodos estéreis e o confinamento dos animais nos períodos de inverno e de chuva.

O ambiente em que se vivia era um contexto permanente de formação, em que aprender era fazer, partindo da experiência dos outros e de si próprio, entretanto a educação primitiva tinha um traço que a caracterizou: imitativo, “a educação se apresenta sob a mais simples das suas formas: não há escolas propriamente ditas, nem programa de estudos; uma imitação servil é o único método empregado” (RIBOULET, 1951, p. 23). O homem primitivo aceitava a natureza tal como era, tinha pouca consciência do passado.

Segundo Engels e Marx, o trabalho humanizou o homem e foi a partir dele que se constituiu a necessidade da união do grupo para o sucesso nas caçadas dos animais de grande porte que obrigava a elaboração de estratégias diferenciadas.

Para o estudo do ensino da geometria, Engels, na obra *Dialética da Natureza*, afirma que as idéias de linhas, superfícies, ângulos, polígonos, cubos, esferas, etc. são todas derivadas da natureza. O homem põe a natureza ao seu sabor, e é justamente isso que o diferencia dos demais animais.

Não podemos negar que a geometria nasce como ciência empírica. A localização das manadas, os deslocamentos dos animais no instante da caçada, o cálculo de distância na busca de alimento, as formas presentes na natureza, as pinturas rupestres e as relações entre as partes dos objetos impunham ao homem uma experiência geométrica, mas, até constituir-se em ciência matemática, a geometria passou por um longo e demorado percurso. Talvez por isso, Gerdes (1992, p.18) afirme: “A relação dialética entre a vida ativa e o pensamento abstrato é o motor do desenvolvimento da Geometria”.

Com o desaparecimento das últimas camadas de gelo, por volta de 10.000 a.C., a agricultura tornou-se uma atividade. O homem passou de caçador e coletor a pastor e

paleontólogos agora chamam de *Homo erectus*. Folha de São Paulo, Mais, p. 26, 22 abr. 2001, Wilford, John Noble.



agricultor, alcançando uma economia produtiva. A necessidade do cuidado com a terra para o plantio fez o homem criar instrumentos que pudessem auxiliá-lo a cavar, abater ou arrancar plantas, semeá-las, colhê-las, etc., enfim, instrumentos que superassem o limite do uso das mãos em tais tarefas. Nesse período, entre 9.000 e 8.000 a.C. tem início o plantio de cereais, como já afirmamos anteriormente.

1.2.1 Das primeiras civilizações à descoberta da razão e da geometria abstrata

Por volta do 5.^o milênio, o surgimento de povoados nas encostas próximas aos rios que atravessavam as planícies e a utilização da irrigação em pequenos canais transversais, exigiam do homem noções básicas de agrimensura, envolvendo a geometria prática, para a contenção da água utilizada na irrigação.

A técnica de irrigação se estendeu às regiões áridas e inúmeros povoados aparecem às margens da planície fluvial da Mesopotâmia, o que levou a uma aproximação dos povoados vizinhos, oportunizando a aproximação das comunidades. A falta de matéria-prima era suprida pela busca nas áreas mais elevadas e distantes; a terra irrigada retribuída com abundância.

Quatro áreas de civilização surgiram aparentemente independentes, localizadas próximo aos grandes rios: baixo vale do Tigre e Eufrates; vale do Nilo; vale do Indus nas cercanias de Harappa e Mohengo Daro e rio Amarelo (Huang, nas proximidades de Anyang).

O ponto em comum dessas civilizações é a forma social de vida – a cidade, a complexa divisão do trabalho, o surgimento de postos nos quais havia pessoas que liam e escreviam, a diferenciação de edifícios públicos, o aparato político do Estado, hierarquias religiosas e políticas e a tentação ao domínio de governaria a todos. A educação ocorria no desempenho das tarefas. Somente uma classe privilegiada tinha acesso ao ensino, e a matemática era uma ciência nobre.

A escrita, desde seu início, gerou a diferenciação entre as classes. Aqueles que tinham o seu domínio galgavam posições diferenciadas na sociedade. Tanto os egípcios como os sumérios criaram um sistema de escrita, os hieróglifos pictóricos ou ideográficos inicialmente. Posteriormente, esses símbolos foram substituídos por letras, proporcionando maior flexibilidade à escrita.

Nessas sociedades, os progressos científicos, diferentes dos técnicos foram conseguidos pelos sacerdotes. Competia-lhes armazenar os dados pelo registro, a que somente essa classe privilegiada tinha acesso. Nessa época, a matemática começou a desenvolver-se assim como a astronomia e a medicina, consideradas como ciências nobres, visão que vai dominar toda a história da educação.

A matemática utilizada no Egito tinha como finalidade a resolução de problemas práticos do dia-a-dia, o que pode ser comprovado no papiro de Rhind, escrito em hierático, da direita para a esquerda, data de 1650 a.C. Especificamente em relação à geometria, os problemas são de volumes de contentores cilíndricos e paralelepípedicos para armazenamento de cereais, áreas de triângulos, retângulos, trapézios e círculos e divisão relacionada com área.

O ensino da matemática e da geometria, no Egito, era baseado na resolução de problemas práticos, de maneira mecânica e repetitiva, reservado a poucos. Entretanto, Grécia que a educação vai tomar um novo rumo, com a criação de uma nova classe, o cidadão da polis.

O litoral montanhoso, o solo pobre e as íngremes encostas divididas em regiões: Peloponeso, Ática e Tessália e a Macedônia, fizeram desse canto da Europa um local em que as invasões eram muito difíceis, a não ser por rotas previamente preparados e por mar.

A história da criação do homem e do universo grego pode ser acompanhada por Odisséia e Ilíada, a guerra de Tróia e os feitos de Aquiles, o sofrimento de Odisseu ou Ulisses nas desavenças com Zeus, deram o ideal da educação e do espírito grego, no período aproximado do século X ao VIII a.C.

Por volta do século VI a.C., Atenas, cidade com vocação cultural e permeável à revolução das ciências, como o mundo presenciou, começou a mudar o perfil de homem almejado pela sociedade. Como exemplo, podemos citar seus representantes mais ilustres: Tales de Mileto, Anaximandro, Anaxímenes e Heráclito. Esses filósofos lançaram a pedra inaugural dos problemas que seriam discutidos no Ocidente até nossos dias: a busca da verdade, a ética e a política. Mas este recorte é apenas um pequeno pedaço do que foi conhecido como milagre grego.

Para entendermos o que ocorreu no mundo grego e como a matemática foi um auxiliar para tais mudanças, devemos retornar a Crotona, Sul da Itália, local em que viveu o filósofo e matemático Pitágoras de Samos (580-500 a.C.). Ele foi o primeiro a

utilizar argumentos de forma dedutiva, puramente lógicos a princípios e axiomas. Essa mudança levaria ao que hoje conhecemos como o surgimento da matemática abstrata.

Nesse painel, surge a matemática destituída de função prático-utilitária. Como ocorria nas civilizações anteriores, ela ainda estava mais ligada à contemplação e à abstração do que ao seu uso.

A intensa vida política de Atenas, especialmente após a vitória sobre os persas, exigia a formação de um novo tipo de homem: o homem político. É esse tipo de homem que os sofistas se propõem a formar, oferecendo uma educação alternativa à educação existente, falha no aspecto então considerado fundamental a oratória. (MIORIM, 1998, p.15).

O ideal de educação grega, baseada em Homero (Iliada e Odisséia), do homem guerreiro e bom não atendia mais às necessidades da formação do cidadão, era necessário ensinar *a vencer em toda discussão possível*. Uma nova classe de professores surgiu para atender às necessidades educacionais: os sofistas (*sophós* – sábios).

Para Protágoras, o mais famoso dos sofistas, *o homem é a medida de todas as coisas*, essa relatividade da verdade possibilitava defender qualquer idéia desde que isso trouxesse alguma vantagem. Apesar das críticas recebidas em virtude da superficialidade da educação dada, alguns cursos eram mais completos, pois era necessário saber falar sobre qualquer assunto e, portanto, conhecer todos os assuntos.

As mudanças decorrentes da nova situação proposta pelos sofistas causaram grande reação da sociedade e do filósofo Sócrates. Essas divergências mudaram o rumo da educação e reconheceu-se, então, a importância da matemática que, apesar da superficialidade, foi o que fez com que houvesse a sua popularização.

Sócrates colocou em questão a importância da matemática em desenvolver a capacidade de pensar e não apenas de transmitir conhecimento, fato que será o seu diferencial. A matemática passaria a ser vista como a ciência que deveria desenvolver a capacidade de pensar e de raciocinar.

Platão, discípulo de Sócrates, no diálogo Fédon, recorrendo à memória de um escravo grego iletrado, mostra como as idéias foram despertadas, sendo o conhecimento o esforço da alma para se apropriar da verdade. Foi com Platão que a matemática apareceu como exemplo puramente intelectual e perfeito, distante das ilusões dos sentidos e não transformada em meras opiniões subjetivas.

A partir do século I a.C., as matemáticas foram estabelecidas como disciplinas básicas na formação geral dos estudantes e o ensino da geometria passou a ocorrer até a

modernidade, tendo como manual de ensino os *Elementos* de Euclides, que tinha como exigência básica a formalização e as demonstrações destituídas de qualquer relação com a experiência, o que vai repercutir até nossos dias, transformando a geometria árida e destituída de qualquer compreensão para as crianças e os jovens.

Euclides (323-285 a.C.) é considerado um dos nomes mais ilustres da ciência. Estudou na Academia de Platão e foi chamado por Ptolomeu I para lecionar geometria no início da escola de Alexandria. A obra *Os Elementos* que sintetiza toda a geometria grega até então conhecida, foi a base para o seu ensino até recentemente.

A importância de *Os Elementos* para o ensino da matemática está no fato de que essa obra é o coroar do pensamento dedutivo pela mais pura lógica. A partir de dez premissas, cinco postulados e cinco axiomas, Euclides produziu uma obra insuperável, uma cadeia dedutiva única de quatrocentos e sessenta e cinco proposições apresentadas de forma harmoniosa e clara, a geometria plana e espacial, teoria dos números e a álgebra geométrica. Para Bergamini (1964), produziu também boa parte de tudo o que a raça humana conhece sobre pontos, linhas, círculos, retângulos e figuras sólidas elementares.

Hypatia, sábia e bela, que viveu por volta de 400 a.C., lecionava em Alexandria, arrebatava multidões para suas aulas, era dirigente do museu de Alexandria e morreu tragicamente assassinada pelos seguidores de São Cirilo em 415, quando a biblioteca foi queimada por incitação dos monges cristãos, que a tinham como um centro herético. Isso segundo Bergamini (1964, p. 50), era presságio de que “[...] a agonizante matemática grega exalava seu último suspiro. Passar-se-iam mil anos antes que seu suspiro luzisse novamente”.

A educação romana era prática utilitária, diferente da educação grega. Os romanos nunca demonstraram qualquer interesse pela matemática abstrata, contentavam-se com os aspectos utilitários que visavam às construções de suas estradas e edifícios, os cálculos para o comércio, ficando, assim, a geometria praticamente esquecida.

A Europa, após a queda do Império Romano do Ocidente, viveu um período de precariedade; a Igreja foi o instrumento preponderante na formação do período medieval, imprimindo normas para a sociedade que se encontrava em estado de caos. O modelo de homem rompia com tudo o que até então havia sido esperado, o novo modelo estava balizado para o nascer para um novo espírito, na caridade e no amor cristão. A própria sociedade passou a ter no Evangelho escrito pelos apóstolos a obra a ser

seguida; é importante salientar que no Evangelho estão os princípios da psicologia humana, e a preocupação com o espírito infantil aparece pela primeira vez.

Com o cristianismo, a preocupação central da educação estava na formação do homem para a vida futura, já que o mundo terreno era fonte de todos os males. A única fonte segura de conhecimento era a Bíblia, tudo o que a criação humana havia produzido era fonte de desconfiança.

A criação das universidades, logo após o primeiro milênio (Bolonha em 1088, Paris em 1170 e outras), trouxe um alento à ciência e à educação, pois elas surgem como um espaço livre de debate de assuntos variados, as sete artes liberais, inicialmente, o *trivium* – gramática, retórica e a lógica e posteriormente também o *quadrivium* – aritmética, geometria (com os três primeiros livros de Euclides que tratam da geometria plana elementar), astronomia e a música.

1.2.2 Do Renascimento ao século XIX

Foi em Florença, na Itália, centro da vida política, religiosa e intelectual da época, no século XIV, que surgiu um movimento que mostrou ao homem as possibilidades de superação, favoreceu o individualismo, o pioneirismo e a aventura. Contra o atraso da filosofia escolástica assistiu-se à redescoberta da Antigüidade e à descoberta de Novos Mundos. A sociedade passava, então, do Teocentrismo ao Antropocentrismo.

O impacto das descobertas marítimas, o comércio e as navegações, os deslocamentos das atividades comerciais do conhecido Mediterrâneo para o grande Atlântico, requeriam a elaboração de cartas náuticas – os mapas e, a geometria era a peça fundamental...

As descobertas geográficas de novas terras além-mar trouxeram riqueza aos países colonizadores. A disputa acontecia palmo a palmo, as novas conquistas exigiam cuidados para com a metrópole, pois a cobiça dos invasores rodeava as novas terras.

No Brasil, a educação dos séculos iniciais (1549-1759) esteve a cargo dos jesuítas, a predileção dos humanistas recaía sobre o ensino das línguas e a história, as ciências físicas e biológicas, consideradas “*ciências vãs*”, não gozavam do mesmo prestígio. Os próprios jesuítas não aceitavam de bom grado “a busca das relações que parecem não caber, de modo algum, na escala das criaturas” (CHATEAU, 1978, p. 90),

nas palavras de Jean Bouhier (1673-1746), presidente do parlamento de Dijon, o retrato da geometria era:

o estudo das ciências especulativas, como a geometria, astronomia, física é diversão assaz vã; todos esses conhecimentos estéreis e infrutuosos são inúteis por si mesmos. Os homens não nasceram para medir linhas, examinar a relação de ângulos e empregar todo o tempo em considerar os diversos movimentos da matéria. (CHATEAU, 1978, p. 90)

As escassas informações sobre o ensino da matemática no Brasil podem ser consideradas indícios da pouca importância que lhe era atribuída. A expulsão dos jesuítas do Brasil trouxe o caos à educação que ficou reduzida a alguns “centros educacionais” dirigidos por outras ordens religiosas, que, na maioria, haviam sido formadas pelos próprios jesuítas.

Mas, para a geometria, o século XVII apresenta um avanço significativo: Desargues e Pascal dão os passos iniciais no desenvolvimento da geometria projetiva. Por outro lado, Descartes e Fermat elaboram as primeiras idéias sobre um novo método para o estudo da geometria, a geometria analítica.

No século XVIII, Jean Jacques Rousseau escreveu um romance intitulado *Emílio*, no qual ele apresenta como deveria ser a educação nas diferentes faixas etárias. A obra é o primeiro tratado sobre a psicologia do desenvolvimento e da aprendizagem. No livro II, ele escreveu especificamente sobre o ensino da geometria.

Rousseau, ao encaminhar suas idéias, apresenta os paradoxos que a educação coloca; ora apresenta uma visão espontaneísta para, em seguida, colocar-se imperiosamente nos cuidados com Emílio, como é o caso da geometria “... não pretendo ensinar geometria a Emílio, ele me ensinará. Procurarei relações, ele é que as encontrará: pois eu as procurarei de maneira que ele as encontre” (ROUSSEAU, 1968, p. 147).

O século XVIII ficou conhecido como o século das luzes ou do Iluminismo, as teorias procuravam explicar como a Terra se movia, não mais como centro, mas como um astro entre outros. Tal fato foi uma das descobertas do homem, o progresso alcançado lhe valeu autonomia para pensar sobre si mesmo sem a tutela da religião.

Um dos marcos do Iluminismo foi a Enciclopédia – Dicionário das ciências, das artes e os ofícios por uma sociedade letrada; dirigida por D’Alembert e Diderot, essa coletânea de trinta e três volumes, inspirada na *Chambres* inglesa (1729), materializava o espírito da época, é o resumo do seu tempo.

Os enciclopedistas buscavam as informações sobre o assunto de forma revolucionária, mostravam a validade prática do conhecimento e não ficavam restritos ao título da obra. Não havia separação entre as “artes liberais” e as “artes mecânicas”, para a matemática - a plêiade de colaboradores ilustres e, na maioria, franceses -, para o ensino da geometria, um nome é muito significativo: Aléxis Claude Clairaut (1713-1765).

A obra escrita por Clairaut *Éléments de géométrie*, em 1741, é um marco para o seu ensino, sua originalidade ainda inspira seus estudos, a insatisfação no ensino da geometria baseado no modelo dedutivo euclidiano que, segundo ele era o responsável pelas dificuldades que os alunos tinham ao estudar geometria tornando-a distante dos mesmos.

Ainda que a geometria seja uma ciência abstrata, é preciso admitir que as dificuldades experimentadas pelos que começam aprendê-la, procedem da maneira como ela é ensinada nos Elementos ordinários. Começa-se sempre por um grande número de definições, de postulados, de axiomas e princípios preliminares, que parecem anunciar um estudo árido ao leitor. As proposições que, em seguida, vêm, não fixando o espírito sobre os objetos mais interessantes, sendo além disso, difíceis de conceber, ocorre comumente que os principiantes se fatigam e se aborrecem antes de terem uma idéia clara do que se lhes queria ensinar (CLAIRAUT, 1920, p. 9, tradução da autora).

Clairaut, aproveitando a história da geometria como recurso e fio condutor, como nos últimos vinte anos, motiva e auxilia seus alunos a reconstituir as passagens específicas das descobertas geométricas com soluções que, provavelmente, eram aquelas encontradas por seus descobridores. Iniciando com situações-problema, Clairaut usava linguagem acessível e, à medida que os alunos iam aprendendo, o problema ia tornando-se mais fácil, ou seja, ia se afastando das situações abstratas. Segundo ele, a própria denominação da geometria, em si, já era um assunto a ser estudado – medida de terras, que já era um tema gerador de situações de aprendizagem.

Clairaut, no ímpeto de facilitar o ensino da geometria, recebeu várias críticas pela falta de rigor de provas e de demonstrações, as quais ele rebateu justificando que as definições e as proposições saíam das observações “evidentes” que eram apresentadas no decorrer das resoluções das situações-problema, e que no decorrer das apresentações tradicionais são omitidas.

Para o ensino da matemática e da geometria, sem dúvida foi a primeira tentativa de mudança, buscando uma pedagogia psicológica da matemática, mas que, como veremos, suas influências não ocorreram no século XVIII.

No Brasil Imperial, com um sistema educacional que não chegou a se organizar, ministrado por professores leigos, pois não havia escolas para formar os que se candidatassem ao magistério público, como se poderia pensar no ensino da geometria?

Somente a partir do século XIX, os Liceus e escolas em geral começaram a ser montados no Brasil. Isso evidencia como é recente o nosso sistema de ensino, se comparado aos países colonialistas. Um marco na educação brasileira foi a fundação do Colégio Pedro II no Rio de Janeiro (1837), montado nos moldes dos colégios gratuitos franceses.

O século XIX vai marcar mudanças profundas na geometria, a geometria não-euclidiana, os espaços curvos que incorporariam um conhecimento altamente produtor e novo e que deram as condições para a revolução da física relativística realizada por Einstein no século XX.

1.2.3 O século XX e XXI e o ensino da geometria

O grande desafio do século XX (e XXI): saber o que ensinar. Quais os conhecimentos necessários a uma sociedade em constante transformação e cujos meios de produção mudam rapidamente? O que deverá saber uma pessoa para entender e atender as necessidades do nosso tempo? Procuraremos responder a essas questões revendo as mudanças ocorridas na educação, através de suas incertezas, métodos e técnicas novas e teorias sobre como se adquire conhecimentos que permearam o século XX, para o ensino da matemática e da geometria e que foram incorporados, em nosso país, por meio de introdução ou de reformas na legislação.

A primeira grande mudança ocorre com a Lei de Diretrizes de Base de 1961, que tem seus objetivos de ensino pautados sobre a liberdade e solidariedade humana; em sua estrutura distinguia os diferentes níveis de educação: educação pré-escolar, primário, médio (ginásio com quatro anos e colegial com três, abrangendo distintas modalidades) e superior, abrangendo graduação e pós-graduação. No tocante ao conteúdo curricular, havia módulos de disciplinas obrigatórias indicadas pelo Conselho Federal de Educação (Português, Matemática, História, Geografia, Ciências e Educação Física). Aos

Conselhos Regionais de Educação, competia fixar disciplinas obrigatórias e peculiaridades do ensino industrial, agrícola e normal.

Para a matemática, segundo Batista (1991, p. 20), o quadro era inalterado após a LDB. O ensino continuava extremamente tradicional, e apesar do movimento da Escola Nova, que preconizava a liberdade para o aluno, o uso de material concreto ou figurativo, a matemática continuava compartimentada em partes estanques: álgebra, aritmética, geometria, etc. A memorização de nomenclatura, o treinamento em técnicas operatórias era enfatizado no ensino da matemática.

O movimento de renovação educacional após a instauração da escola pública burguesa, denominado de Escola Nova²¹; no Brasil, recebeu grande influência dos textos de Piaget²², cujas traduções tiveram seu auge entre o final dos anos 50 e meados dos anos 80 e influenciaram fortemente o movimento de Matemática Moderna e o domínio dos conjuntos.

A Matemática Moderna nasceu de um movimento educacional inscrito numa política de modernização econômica e foi posta na linha de frente por se considerar que, juntamente com as áreas de Ciências Naturais, ela se constituía via de acesso privilegiada para o pensamento científico e tecnológico... O ensino passou a ter preocupações excessivas com as abstrações internas à própria Matemática, mais voltadas às teorias do que à prática. A linguagem da teoria dos conjuntos, por exemplo, foi introduzida com tal ênfase que a aprendizagem de símbolos e de terminologia interminável comprometia o ensino do cálculo, da geometria e das medidas. (PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS, 2000, p. 21).

A década de 60, mais precisamente o ano de 1964, foi de espanto, perplexidade, falta de respeito aos direitos do povo. Com a deposição do presidente João Goulart, em razão de uma “revolução”, o direito de governar os rumos do país foi dado aos generais sem o respaldo popular – foram os anos de ditadura militar. A década seguinte começa com a nova LDB, Lei n.º 5.692, impondo uma reforma do 1.º e 2.º graus, bem como uma expansão quantitativa da educação para atender à industrialização tardia.

a) A experiência paulista

Em 1975, A Secretaria de Educação do Estado de São Paulo apresentou os Guias Curriculares de Matemática, que foram elaborados após a Lei n.º 5.692/71, Lei de Diretrizes e Bases para o ensino de 1.º e 2.º graus, na versão para o ensino da

²¹ A Escola Nova teve início com Vitório Feltre.

²² Um dos exemplos mais importantes são as obras de Hans Aebli – *Didática Psicológica*, de Amélia Domingues de Castro – *Piaget e a didática* e Lauro de Oliveira Lima – *A escola secundária moderna*.

Matemática e mais precisamente para as quatro séries iniciais, o curso deveria ser de geometria intuitiva, em que o estudo de medidas estaria melhor posicionado no curso de ciências. Na 5.^a série, a geometria deveria “ser veículo” para a introdução da Teoria dos Conjuntos e a partir da 7.^a série, o estudo da geometria deveria ser pelas transformações.

O enfoque “das transformações” por si já era demasiadamente complexo para os professores que, respaldados pela Lei²³ que lhes facultava a adoção de um programa compatível com a sua clientela, deixavam de apresentar os conteúdos da geometria, trabalhando ainda sob as orientações da Matemática Moderna com ênfase na álgebra (Teoria dos Conjuntos).

No ímpeto de auxiliar na implementação dos Guias Curriculares, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, pela Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (CENP), elaborou os Subsídios para a implementação do Guia Curricular de Matemática, nos quais álgebra e geometria eram abordadas de formas diferenciadas para o 1.^o Grau. O Projeto Ipê, por exemplo, tinha como objetivo a atualização e o aperfeiçoamento de professores e especialistas em educação por multimeios, apresentando um conjunto de textos que deveriam ser estudados e discutidos em telepostos que veiculariam a emissão de programas de TV/vídeo, os quais poderiam se tornar subsídios para os professores no trabalho com os alunos.

Experiências vivenciadas pela Equipe, como o trabalho com os “Subsídios para implantação do Guia Curricular de Matemática” (desde 1977), o acompanhamento do Projeto “Geometria Experimental” (desde de 1979) e a elaboração, testagem e implantação do “Atividades de Matemáticas” (desde 1981), ofereceram as idéias norteadoras do trabalho a ser executado, idéias estas sintetizadas em quatro programas de televisão (Projeto Ipê) e respectivos fascículos, operacionalizados, na medida do possível, nos 19 programas do Projeto 1.^o Grau. (SÃO PAULO SE/CENP, 1992, p. 2).

Em *Matemática: o currículo e a compreensão da realidade*²⁴ é o exemplo de esforço da equipe de trabalho para tornar os conhecimentos dos números, geometria e medidas acessíveis aos professores no trabalho com seus alunos. Os temas apresentados: números (reconstrução histórica do número e Números), geometria (Imagens) e mediadas (Sobre medidas) são apresentados de forma simplificada. Sobre geometria, era apresentado um pouco da sua história e uma citação sobre o espaço que se restringia o seguinte:

²³ Lei n.º 5.692/71 ao professor era dado o direito de adequar seu programa às necessidades da clientela.

²⁴ SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Matemática: currículo e compreensão da realidade*. São Paulo: SE/CENP, 1991. 88 p.il. (Projeto Ipê).



a necessidade e o interesse por estudar o **espaço** tem-se mostrado essencial, tanto do ponto de vista da história da humanidade, como do ponto de vista do desenvolvimento do indivíduo. As experiências do indivíduo com o **espaço** ocorrem freqüentemente, no ambiente em que vive, desde a idade mais precoce e dessas experiências vai se constituindo um referencial a partir do qual tal indivíduo passa a observar sistematicamente o **espaço**, localizando-se nele e adquirindo **conhecimento geométrico**. As crianças desde pequenas realizam experiências com o próprio corpo, analisam os objetos e suas formas, orientam-se, descobrem propriedades, estabelecem relações e gradativamente vão tomando posse do espaço. (SE/CENP, 1991, p. 33-34, grifo da autora).

Apesar dos esforços realizados no sentido de aproximar e facilitar a compreensão e o ensino da matemática e da geometria pelos professores, os Guias Curriculares e o Projeto Ipê não alcançaram os objetivos propostos. Os problemas no trato com a matemática e especialmente com a geometria persistiram.

Para os estudos desenvolvidos neste trabalho, sobre as relações espaço-geométricas, o texto acima mostra uma das primeiras menções ao espaço e à geometria. As dificuldades têm início com a falta de clareza entre o espaço e a geometria. O espaço aparece como uma construção espontânea o que será constatado nas propostas futuras que analisaremos e, como afirma Pavanello (1989, p.165):

a maioria dos alunos do 1.º grau deixa, assim, de aprender geometria, pois, em geral, os professores das quatro séries iniciais limitam-se a trabalhar somente aritmética – e as noções de conjunto. O estudo da geometria passa a ser feito, quando o é, apenas no 2.º grau. A substituição do Desenho geométrico pela Educação Artística nos dois graus de ensino vem, no entanto, tornar ainda maior a dificuldade dos alunos em trabalhar com as figuras geométricas e sua representação.

Na década de 80, houve a apresentação da Proposta Curricular para o Ensino da Matemática de 1.º Grau, com a primeira edição datada de 1986. O governo de São Paulo começava “a cumprir um compromisso assumido com a população: recuperação da escola Pública e da qualidade do ensino oferecido à população”, produto de debate e de reflexões dos professores da rede estadual de ensino e de especialistas da educação. Para Coordenação de Estudos e Normas Pedagógicas (CENP), a proposta era a busca de soluções para as dificuldades no ensino da matemática.

Acompanhada de uma série de inovações, a proposta apresentava: capacitação docente, implantação da Jornada Única no Ciclo Básico, instalação de oficinas pedagógicas e criação dos CEFAMs.

A primeira versão da proposta foi elaborada pela CENP e por alguns pesquisadores do ensino de matemática, alterada, depois, em virtude das sugestões

apresentadas nos relatórios oriundos das críticas feitas pelos monitores de matemática. Surgiu, assim, a segunda versão da proposta, discutida em julho de 1987 por professores da Rede Pública. Posteriormente, após novas discussões, surgiu a terceira versão, na qual os conteúdos eram apresentados de forma seriada, com metas a serem atingidas ao longo de um período, em que o professor teria autonomia para mudar a sequência, respeitando assim a aprendizagem do aluno. Dessa forma, um conteúdo é retomado em várias ocasiões, proporcionando ao aluno a elaboração e a reelaboração das idéias, favorecendo e estimulando a formalização e a sistematização dos conceitos envolvidos.

O lugar da Matemática, segundo a proposta, era de equilíbrio entre as necessidades da experiência concreta e a formalização dos conceitos. Não se podia exagerar nos aspectos prático-utilitários, tampouco no desenvolvimento das estruturas lógicas do pensamento. Esses dois aspectos não poderiam aparecer dissociados, devendo proporcionar um equilíbrio entre eles e buscando dar continuidade entre a vida e a escola, desenvolvendo a autonomia do aluno.

Os conteúdos eram apresentados em três temas geradores: números, medidas e geometria, que poderiam ser abordados de diferentes formas. A proposta seguia o fio condutor da história. A noção de número, por exemplo, surgia da contagem de medidas, assim a sistematização do conceito era substituída por uma abordagem rica de significados.

Para a geometria, propunha-se o início pela manipulação dos objetos, do reconhecimento das formas mais freqüentes, da caracterização de suas propriedades para, somente no final, sistematizar os conceitos.

Medidas era o conteúdo que fazia a união entre Números e Geometria. Os conteúdos da proposta eram esquematizados por séries em colunas nas quais deveriam ser seguidas concomitantes. Essa foi uma das dificuldades dos professores, que trabalhavam todo o conteúdo de uma coluna (números preferencialmente por ser a primeira coluna e um conteúdo de maior facilidade de domínio pelo professor), somente depois os conteúdos eram contemplados o que, em muitas vezes, não ocorria com a geometria, deixada para os últimos dias do ano letivo.

Tabela 1 - Fragmento de conteúdos a serem desenvolvidos na 3.^a série

Números	Medidas	Geometria
Sistemas de numeração decimal. Introdução da 4.^a ordem e, progressivamente, das subseqüentes. Adição: Utilização da adição na resolução de situações-problema, observação e utilização das propriedades desta operação.	Noção de medida. Medida de comprimento com utilização de unidades não padronizadas.	Planificação de sólidos geométricos.

A proposta tinha como auxiliar as AMs, atividades matemáticas, que foram elaboradas em 1981 com os subsídios para implementação dos Guias Curriculares, destinados às quatro primeiras séries do 1.^o Grau. Eram sugestões a serem realizadas com os alunos, nas quais situações concretas e experiências próximas a eles poderiam ser realizadas para facilitar sua compreensão. As atividades respeitavam a construção dos alunos e os desafiavam a pensar, não deixando somente uma forma de resolução para as situações colocadas.

Nas quatro últimas séries, os exercícios eram denominados de EMs, experiências matemáticas, com as mesmas características dos AMs. Apesar do esforço do Governo Estadual com cursos ministrados para a implementação da proposta, como professora de matemática do Ensino Fundamental e estágio supervisionado de alunos de licenciatura, pudemos presenciar as dificuldades dos professores na compreensão desse material didático-pedagógico que, salvo exceções, dificultou a implementação da Proposta Curricular para o Ensino de Matemática do Estado de São Paulo.

No que se refere às relações espaço-geométricas, na proposta para o Ensino de Matemática do Estado de São Paulo nada aparece referente ao espaço, como podemos constatar.

Pode-se estudar a GEOMETRIA tendo como meta primordialmente a aprendizagem lógica, da organização do conhecimento, partindo-se de pontos, retas e planos para somente ao final do percurso tratar de objetos tridimensionais. Pode-se ainda considerar o eixo para o ensino da GEOMETRIA o estudo de certas classes de transformações e das propriedades que elas reservam, desde as mais gerais que são as topológicas até as mais específicas que são as métricas, passando pelas propriedades projetivas. Ou pode-se partir da manipulação dos objetos, do reconhecimento das formas mais frequentes, de sua caracterização através das propriedades, da passagem dos relacionamentos entre objetos para o encadeamento de propriedades, para somente no final do percurso aproximar-se de uma sistematização. (SÃO PAULO, 1992, p.11).

b) A experiência nacional: PCN

A comprovação dos problemas no ensino da matemática ficou evidente nos dados apresentados nas PCNs – Proposta Curricular Nacional –, na sua versão preliminar de 1995, que apresentava dados alarmantes sobre a situação do ensino do Brasil que guarda a triste colocação de penúltimo lugar na taxa de eficiência na América Latina em 1990, sendo superado somente pela República Dominicana. Sobre o ensino de matemática, um dado do início da década de 90 era alarmante.

Resultados obtidos nos testes de rendimento em Matemática, aplicados em 1993 pelo Sistema Nacional de Avaliação Escolar da Educação Básica (SAEB), indicavam que, na primeira série do ensino fundamental, 67,7% dos alunos acertavam pelo menos metade dos testes. Esse índice caía para 17,7% na terceira série, tornava a cair para 3,1%, na quinta série, e subia para 5,9% na sétima série. (SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL, 2000, p. 23).

Os estudos iniciais sobre uma Proposta Curricular que pudesse atender a quesitos mínimos para o sistema de educação do país (sendo necessário assinalar a extensão continental do Brasil – suas particularidades regionais e toda espécie, diferenças em que socioeconômica a condição é a mais gritante e limitadora – nesse processo de reversão da situação educacional vigente) mobilizaram um número considerável de professores, estudiosos brasileiros e estrangeiros, em busca de caminhos para redirecionar a caótica educação brasileira. Os dados não deixavam dúvidas sobre as necessidades de mudança nos rumos da educação.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) são um instrumento para a qualidade do ensino, que permitirá concretizar uma proposta à sociedade, de modo que seja útil para orientar o trabalho educativo que os professores desenvolvem em diversas escolas do nosso país.[...] Os PCNs apresentam os princípios gerais para a educação e sua tradução operacional. Incluem fundamentos sobre a função da escola, o processo ensino e aprendizagem, experiências pedagógicas e áreas de conhecimento explicitando, em linhas gerais, “o quê”, “para quê”, “quando” e “como” ensinar e avaliar²⁵.

Os PCNs apresentaram um avanço em relação às propostas anteriores, primeiro por tentarem a integração das várias áreas de conhecimento utilizando para tanto os Temas Transversais²⁶. A Matemática, assim como as demais áreas, não poderia mais

²⁵ Ibid.; p. 2 e p. 8, grifo da autora.

²⁶ Os temas transversais são: ética, orientação sexual, meio ambiente, saúde, pluralidade cultural e, além desses apresentados, cada escola poderia desenvolver em seus projetos outras questões relevantes para a comunidade.

estar limitada à exploração de conteúdos estanques, isolados sem qualquer conexão entre seus próprios campos ou com as outras áreas de conhecimento, pois, da forma como estava sendo conduzida, pouco estava contribuindo para a formação integral do aluno que, no PCN, aparecia como a formação do cidadão.

O papel que a matemática desempenha na formação básica do cidadão brasileiro norteia esses Parâmetros. Falar de formação básica para a cidadania significa falar de inserção das pessoas no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura, no âmbito da sociedade brasileira. (SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL, 2000, p. 29).

A segunda inovação dos PCNs é a subdivisão em ciclos para as oito séries do ensino fundamental, cada ciclo englobava duas séries, portanto, a 1.^a e 2.^a séries formariam o primeiro ciclo e as demais, o segundo, o terceiro e o quarto ciclos. Para esse estudo, os PCNs trazem um tratamento diferenciado aos conteúdos a serem trabalhados: números e operações (no campo da Aritmética e Álgebra), **o estudo do espaço e das formas** (no campo da Geometria) e o estudo das grandezas e medidas (que proporcionaria a união entre os campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria).

As mudanças apresentadas pelos PCNs não se restringem ao descrito, porém outras se somam. Para efeito deste estudo optamos por destacar as mudanças anteriormente descritas (de integração das áreas). Passaremos ao levantamento dos conteúdos que são indicados²⁷ na geometria para os três ciclos iniciais (o que corresponde da 1.^a a 6.^a séries).

Para o **primeiro ciclo**, os conteúdos necessários à geometria – espaço e forma são:

- Localizar pessoas ou objetos no espaço, com base em um ponto de referência.
- Entender a movimentação de pessoas ou objetos, conforme indicações de direção.
- Observar as formas geométricas presentes em objetos naturais e criados pelo homem.
- Construir e representar formas geométricas.
- Comparar tamanhos e formas.
- Perceber semelhanças e diferenças entre cubos e quadrados, paralelepípedos e retângulos, pirâmides e triângulos, esferas e círculos. (NOVA ESCOLA, vol I, p. 56-57).

²⁷ A Proposta Curricular Nacional PCN, como o próprio nome indica é uma proposta de trabalho, seus criadores sugerem o trabalho baseado nas sugestões apresentadas.



Para o **segundo ciclo**, os conteúdos necessários à geometria – espaço e forma (NOVA ESCOLA, vol I, p. 61-62) são:

- Utilizar malhas quadriculadas para representar a posição de uma pessoa ou objeto.
- Descrever, interpretar e representar a movimentação de uma pessoa ou objeto no espaço e construir itinerários.
- Representar o espaço por meio de maquetes.
- Indicar semelhanças e diferenças existentes entre os corpos, como a esfera e o cilindro.
- Reconhecer semelhanças e diferenças entre poliedros, como prismas e pirâmides, e identificar elementos de faces, vértices e arestas.
- Analisar as faces, identificar simetrias, desmontar e montar figuras tridimensionais.
- Observar semelhanças e diferenças entre polígonos, usando critérios como número de lados, número de ângulos e eixos de simetria.
- Identificar características de algumas figuras como a rigidez de um triângulo bem como o paralelismo e o perpendicularismo que encontramos nos lados dos quadriláteros.
- Perceber que qualquer polígono pode ser composto a partir de figuras triangulares.
- Notar elementos geométricos nas formas da natureza e nas criações artísticas.

Para o **terceiro ciclo**, os conteúdos necessários à geometria – espaço e forma (NOVA ESCOLA, vol II, p. 53) são:

- **Espaço e forma** – É a localização no espaço e a identificação nas formas. Faça uso de plantas e mapas para os alunos localizarem pontos, interpretem deslocamentos no plano e desenvolvem a noção de coordenadas cartesianas. Exercite a observação, a representação e a construção de figuras geométricas. Trabalhe com o manuseio de instrumentos de medidas como régua, esquadro, transferidor, estabelecendo as diversas relações com as propriedades geométricas.

c) A geometria em nosso país

Os problemas do ensino da matemática não podem ser tratados, somente, no âmbito das dificuldades referentes às propostas de seu ensino, visto que outros fatores contribuem para tanto, entre eles o despreparo do professor. Estudos em diferentes países têm apresentado as possíveis causas das dificuldades. Duval e Salin (1991), Araújo (1994), Vergnaud (1994), Fainguelernt (1999), Pavanello (2000), Cornélio²⁸ (2001) e outros têm insistido sobre esse aspecto.

²⁸ Reportagem publicada com o título: *Tese: professores evitam a geometria. Pesquisas realizadas com professores da área de Matemática indicam que estes estão mal preparados para ensinar geometria.* O

Para Duval e Salin (1991), em artigo intitulado *Y a un malaise* (Há um mal-estar), os problemas referentes à geometria podem ser verificados quando os alunos estagiários (*les élèves maîtres*) constatarem, durante o tempo que estão em sala de aula da educação fundamental, com os professores, o desconforto, que é flagrante, quando estes são questionados sobre a geometria. Seguros e desenvoltos em relação aos domínios numéricos, eles reconhecem que suas respostas são evasivas quando questionados sobre os ensinamentos da geometria na escola elementar.

Ninguém questiona quão importante é saber fazer uma multiplicação, bem como a importância de seu ensino na escola. Se algum dia fosse retirada a multiplicação dos programas escolares, não passaria despercebido. Segundo esses autores, o mesmo não ocorreria com o ensino da geometria. É certo que o ensino da geometria não poderia ser justificado pelos mesmos motivos que os conhecimentos numéricos, mas a utilidade direta não é um motivo suficiente para a existência de um ensino.

Vergnaud fala da grave crise que se abate no ensino da matemática e aponta alguns fatores:

- A formação deficiente dos professores;
- A preparação insuficiente para a implantação de novas propostas para o seu ensino e a falta de acompanhamento dos reflexos dessas reformas;
- O excesso de formalismo que teve início com o movimento da matemática moderna nas décadas de 60 e 70, o qual cometeu vários equívocos como a formalização precoce dos conceitos e a ênfase no uso da linguagem dos conjuntos, por meio da qual o ensino de matemática privilegiou mais a teoria do que a prática e relegou a geometria a um segundo plano;
- A falta de adequação entre a atividade intelectual da criança e as atividades propostas pelos professores por desconhecimento do desenvolvimento intelectual das crianças.

Os fatores que dificultam o ensino da geometria podem ser resumidos, à primeira vista, na falta de conhecimento que os professores têm sobre a geometria, por falha na sua formação acadêmica e pelo desconhecimento do processo de construção da geometria pelos seus alunos, pela própria desarticulação do ensino da geometria nas propostas curriculares com outras áreas de conhecimento como a geografia e a história,

texto escrito por CORNÉLIO (2001, p. 8) é um resumo da tese de doutorado de Nelson Antonio PIROLA, na qual os alunos de licenciatura em matemática e, portanto, futuros professores não estão preparados adequadamente para desempenhar suas futuras atribuições.

tornando-o um conhecimento, quando ministrado, estanque e sem significação para os alunos.

Os fatores apontados por Vergnaud para a crise que assola o ensino da matemática, e portanto da geometria, chama-nos à atenção por sofrer de um mesmo mal: a ignorância do processo de conhecimento da criança, e do aluno. As pesquisas que visam mostrar como esse processo ocorre são de importância fundamental, pois somente quando compreendermos como se dá o processo de apropriação do conhecimento, poderemos agir com propriedade e ter nossos alunos como parceiros nesse processo.

Nossa grande preocupação se encontra na afirmação de Duval e Salin (1991, p. 87) quando esses estudiosos resumem que para os manuais de ensino da geometria: “é suficiente observar para compreender e ver para saber”. Como veremos nos capítulos posteriores, esse é um grave erro no que tange ao ensino-aprendizagem da geometria, que, para sua apropriação, é preciso muito mais do que observar e ver.

A geometria, no decorrer da história, teve um papel fundamental para os desenvolvimento da ciência: da prática de medição de terras, nas primeiras civilizações do Oriente, à geometria não-euclidiana ou dos espaços curvos que deu a Albert Einstein o instrumento necessário para a construção de uma teoria que iria abalar os alicerces da ciência.

O espaço evoluiu de “lugares diferenciados” heterogêneos, nos quais cada “coisa” tinha o seu lugar, como afirmava Aristóteles, ao ciberespaço, ao espaço interconectado na rede global de computadores. Poderíamos dizer que a expansão do ciberespaço é uma versão digital da expansão cósmica criada pelo Hubble. Mas, para que esse progresso ocorresse, o homem teve que, ele mesmo, passar por transformações de ordem similar àquelas por que passou a geometria e o espaço, e um bebê frágil, que nada sabe sobre o espaço e sobre a geometria, vai construir um mundo real inserido em espaços múltiplos que se coordenam e numa geometria que poderá localizar-se e localizar os objetos e pessoas mesmo sem vê-las, assim como um ser inserido num ciberespaço, ou mesmo como o que pode ser visto somente aos olhos do Hubble.

CAPÍTULO 2

CAPÍTULO 2

Um estudo inicial sobre o espaço e a geometria infantil

Não é sem tempo que os filósofos buscam a explicação para o conhecimento. Hoje, a sociedade contemporânea, em pleno início de século, ainda se pergunta de onde vêm os conhecimentos, quais suas fontes e possíveis explicações.

O pensamento ocidental iluminista da modernidade nos leva, ora para a vertente cartesiana – racionalista, que superestima o valor da razão ou do pensamento como fonte de conhecimento, ora para o empirismo inglês que considera o conhecimento como sendo algo externo ao sujeito que tem acesso a ele pelos sentidos e pela experiência.

Conhecido, também, como idealismo, inatismo, pré-formismo, apriorismo o racionalismo deixou suas marcas na psicologia, as quais podem ser sentidas ao estudarmos Willian James, Arnold Gesell, Alfred Binet e a Teoria da Gestalt. Isso sem colocarmos a Psicanálise e suas considerações sobre o inconsciente.

Por outro lado, os adeptos do empirismo, como J. B. Watson e B. F. Skinner, marcaram notadamente a Psicologia e a Educação. Na Psicologia, o empirismo ficou vinculado ao behaviorismo (comportamentalismo) e associacionismo, dadas as implicações teóricas dos condicionamentos e das associações S-R.

As duas explicações sobre o conhecimento priorizaram o sujeito e o objeto. A primeira tinha primado pela potencialidades individuais e a segunda, pelo determinismo ambiental.

No século XVIII, um filósofo chamado Immanuel Kant opõe-se ao reducionismo das explicações anteriores e passa a considerar o relativismo da relação sujeito-objeto.

Kant foi o primeiro a considerar a participação relativa entre os dois: sujeito e objeto. Assim, no conhecimento de qualquer coisa, entram em ação duas classes de elementos: os que dependem do próprio objeto – a matéria do conhecimento, e os que dependem do sujeito – a forma do conhecimento. O sujeito entra com a forma e o objeto com a matéria. A forma já está no sujeito; são as famosas “categorias a priori”²⁹ de Kant, e a matéria vem do objeto. (MATUI, 1996, p. 42).

²⁹ As categorias “a priori” são espaço e tempo.

Para a teoria kantiana, o espaço é uma forma *a priori* da sensibilidade que existe em nós (sendo assim uma forma subjetiva), não sendo encontrada fora do sujeito. Contrário ao empirismo inglês, Kant afirma que o espaço é uma forma de representação das coisas externas, uma intuição inerente à natureza subjetiva da nossa mente que possibilita dar predicados aos objetos.

O espaço não é um conceito empírico abstraído da experiência externa. Pois a representação de espaço já tem que estar subjacente para certas sensações se referirem a algo fora de mim (isto é, a algum lugar do espaço diverso daquele em que me encontro) e, igualmente, para eu representá-las fora de mim e uma ao lado da outra e por conseguinte não simplesmente como diferentes, mas situadas em lugares diferentes. Logo, a representação do espaço não pode ser tomada emprestada, mediante a experiência, das relações do fenômeno³⁰ externo, mas está na própria experiência externa é primeiramente possível só mediante referida representação. (KANT, 1987, p. 41).

Assim como Kant, opondo-se às duas explicações sobre o conhecimento, racionalismo e empirismo, Piaget vai, justamente, atribuir ao sujeito e ao objeto papéis singulares na sua construção. Se citamos anteriormente as vertentes racionalista e empirista, encontramos a epistemologia genética que nos apresenta a explicação da inteligência como sendo um processo dialético na relação sujeito-objeto. Os estudos da Escola de Genebra nos mostram o relativismo dialético. Goldmann (1978, p. 54) não deixa dúvidas sobre tal afirmação:

mas, quer o queira quer não (mais exactamente, sem que o queira), a síntese realizada por Piaget coloca-o na linha dos grandes pensadores dialéticos, Kant, Hegel e Marx. [...] Para Piaget (como Marx), não existe pensamento que não esteja ligado à acção; o mundo teórico no seu conjunto é uma tomada de consciência das condições da acção real ou virtual. Ora, qualquer acção é uma síntese de dois pólos, sujeito e objecto, homens e universo.

Na obra *A representação do espaço na criança* (1993), Piaget inicia o texto fazendo uma oposição a Kant e a Henri Poincaré, colocando-os como tendo feito uma simplificação inexata do processo de construção do espaço ao dizerem que seu desenvolvimento estaria subordinado aos mecanismos motores e perceptivos, fatos com que concordava, mas discordava quando “a representação figurada e a intuição

³⁰ Fenômeno na teoria kantiana é o que se apresenta à nossa forma humana de conhecer, de representar. Conhecemos o objeto segundo nossa sensibilidade, o que nos leva a ter a representação segundo o que atribuímos ao objeto, e não aquilo que realmente o é (a coisa em si), e que jamais teremos a possibilidade de conhecer.

geométrica se limitam a anotar tal construção sensório-motriz prévia” (PIAGET; INHELDER, 1993, p.17).

Kant e Poincaré falaram do espaço sem considerar a sua gênese nos processos de conhecimento e partiram do estudo do adulto já constituído, ao passo que Piaget considera o progresso evolutivo do desenvolvimento intelectual do homem do nascimento até a maturidade.

De um lado, o conhecimento não procede, em suas origens, nem de um sujeito consciente de si mesmo nem dos objetos já constituídos (do ponto de vista do sujeito) que se lhe imporiam: resultaria de interações que se produzem a meio caminho entre o sujeito e o objeto, e que dependem, portanto, dos dois ao mesmo tempo, mas em virtude de uma indiferenciação completa e não de trocas entre formas distintas. Por outro lado, e por consequência, se não existe no começo nem sujeito, no sentido epistêmico do termo, nem objetos concebidos como tais, nem, sobretudo, instrumentos invariantes de troca, o problema inicial do conhecimento será, portanto, o de construir tais mediadores; partindo da zona de contato entre o próprio corpo e as coisas, eles progredirão então, cada vez mais, nas duas direções complementares do exterior e do interior, e é dessa dupla construção progressiva que depende a elaboração do sujeito e dos objetos. (PIAGET, 1990, p. 7-8).

2.1 A construção do espaço infantil

Piaget traçou um paralelo entre a inteligência e as demais funções biológicas e, para compreendê-lo, é preciso definir as invariantes funcionais: adaptação e organização, pelas quais todo organismo como uma totalidade tende a um constante equilíbrio.

A adaptação “é caracterizada como um equilíbrio entre as ações do organismo sobre o meio e as ações inversas” (PIAGET, 1972, p. 28). As ações do organismo sobre o meio são: assimilação e acomodação. A assimilação para o organismo vivo é a tentativa de incorporar substâncias exteriores que lhe servem de sustento, mas, para a inteligência, a assimilação é a tentativa de incorporar informações perceptuais, motoras ou conceituais aos padrões já existentes. Assim, quando um bebê usa seus esquemas³¹ de preensão para pegar uma bolinha de gude, tendo utilizado tal esquema somente para bolas bem maiores, terá que subordinar seus esquemas de ação às qualidades da bola de gude, podendo, assim, incorporar ou não novos dados aos previamente existentes.

³¹ “Um esquema é a estrutura ou a organização das ações, as quais se transferem ou generalizam no momento da repetição da ação, em circunstâncias semelhantes ou análogas” (PIAGET, 1994, p. 15).

Eu gosto mais de chamar – adaptação – o equilíbrio entre assimilação e acomodação. Porque na adaptação você tem dois pólos: você tem o pólo indivíduo-assimilação e o pólo objeto-acomodação. Eu prefiro esses termos porque eles mostram melhor a dissociação do sujeito e do objeto. Há sempre dois pólos. Enquanto, se você diz simplesmente adaptação, sem comentário, isto dá impressão de ser dirigido ao objeto, determinado pelo objeto. Na realidade, a adaptação é um todo global com os dois pólos indissociáveis. Assimilação e acomodação. (BRINGUIER, 1993, p. 63).

As ações assimilativas não são isoladas, elas possibilitam a ampliação dos esquemas, porém não explicam suas transformações que estão subordinadas à acomodação. Quando o bebê pega a bola de gude, tenta incorporar suas informações aos seus conhecimentos anteriores, podendo ocorrer duas coisas: as informações anteriores são modificadas e o esquema se transforma – se acomoda, ou será necessário criar novo esquema para os dados recém-adquiridos, pois as informações novas não podem ser incorporadas – assimiladas aos esquemas anteriores por não terem a estrutura cognitiva que possibilite o encaixe das informações aos esquemas anteriores. Essas transformações são denominadas de acomodação.

Após o nascimento, o bebê³² inicia um processo de desenvolvimento que vai perdurar durante toda a sua vida, imerso num mundo de estímulos, caótico e de difícil organização, no qual não existem objetos permanentes, espaços objetivos, relações entre tempos contínuos que interliguem os acontecimentos nem tampouco causalidade independente de suas ações.

Será à medida que o lactente estruturar suas ações sobre o mundo ao seu redor que irá adaptar-se a ele. Como instrumento para a adaptação, o bebê possui um aparato biológico que se resume ao exercício de aparelhos reflexos, que são coordenações sensoriais e motoras de fundo hereditário.

Apesar da aparente mecanicidade dos reflexos, são eles o início da inteligência, uma montagem biológica que propiciará ao bebê começar seu relacionamento com o mundo. Será a partir dos reflexos de sugar, agarrar, chorar, movimentar braços, pernas, tronco e cabeça que ele iniciará a organização do seu próprio mundo e do mundo ao seu redor. A sucção, no recém-nascido, melhora com o seu exercício e tudo o que passar ao redor da sua boca é uma possível fonte de estímulo a ser sugada, ou seja, à medida que os reflexos começam a ser executados dando lugar a generalizações, o bebê passa a

³² O período anterior à linguagem está apresentado na trilogia da década de 30: Nascimento da inteligência na criança, A construção do real na criança e a Formação do símbolo.

assimilar novos objetos aos esquemas anteriores. No início da vida, os reflexos são um todo indiferenciado.

O princípio norteador da vida, para Piaget, é a adaptação – *A inteligência é uma adaptação*. (1975a, p. 15). O desenvolvimento intelectual consiste em uma adaptação, a vida é um contínuo processo de busca de equilíbrio entre os conhecimentos que o sujeito tem e as transformações por que ele passa, dadas as necessidades de resolver situações novas, de adquirir conhecimentos dos mais simples aos mais complexos.

O estudo do desenvolvimento das estruturas da inteligência por Piaget evidenciou um conjunto de características que possibilitou classificá-las em estágios ou períodos³³, termos utilizados como sinônimos e que podem ser constatados nas obras: *Problemas de psicologia Genética* (1983) e *Psicologia da criança* (1994). Esses estágios ou períodos são marcados por uma estrutura qualitativamente diferente da que a antecedeu e da que a irá suceder, ou seja, a estrutura anterior é mais simples, mas prepara o sujeito para estruturas futuras mais complexas, as quais podem ser, ainda, subdivididas em subestágios ou subperíodos. Piaget discorre sobre essas “estruturas sucessivas” tratando-as como períodos ou estágios.

É necessário ressaltar, ainda, que a nomenclatura utilizada para as subdivisões da inteligência sensório-motora em três obras da década de 30: o *nascimento da inteligência na criança* (1975a), *Construção do real na criança* (1975b) e *A formação do símbolo na criança*. Imitação, jogo, e sonho, imagem e representação (1990) são fases, como veremos no estudo das relações espaciais anteriores à representação.

Dolle (1995) apresenta critérios de definição e de delimitação escolhidos por Piaget para os estágios: a ordem de sucessão das aquisições deve ser constante, o caráter integrativo dos estágios no qual a estrutura construída vai se integrar às estruturas do nível posterior. Cada estágio não só comporta qualidades que possibilitam caracterizá-lo por suas leis de totalidade, como também representa uma fase de preparo para o posterior e término para o anterior.

Piaget resumiu os estágios ou períodos do desenvolvimento cognitivo em: sensório-motor, pensamento pré-operacional, operações concretas e operações formais, dentro dos quais estudaremos o desenvolvimento do espaço.

³³ DOLLE (1995, p. 43) afirma: “... a terminologia de Piaget tem essas flutuações porque o problema dos estágios é, de fato, mais complexo do que parece, apesar das definições. De todo modo, período ou estágio são uma só coisa, tal como subperíodo e subestágio.”

2.1.1 O espaço anterior à representação sensório-motora

O primeiro período de desenvolvimento da inteligência é marcado pelas ações reflexas. A ação constitui o motor da formação de todos os conhecimentos que vai culminar com a linguagem por volta dos dezoito aos vinte e quatro meses. As mudanças decorrentes desse período são tão importantes para a vida do ser humano que Piaget as compara à revolução Copernicana, de um ser adualista que não se diferenciava do mundo ao seu redor. O bebê que, ao nascer, está preso ao espaço e ao tempo momentâneo, no decorrer do desenvolvimento do período sensório-motor, torna-se capaz de estender as relações-temporais a intervalos maiores, não escravo do aqui e do agora. O início é marcado por dois reflexos o pupilar e o palpebral:

nada mais é dado do espaço senão a percepção da luz e a acomodação própria dessa percepção (reflexo pupilar à iluminação e reflexo palpebral ao deslumbramento luminoso). Tudo o mais, isto é, a percepção das formas, dimensões, distâncias, posições, etc., elabora-se pouco a pouco, simultaneamente com os próprios objetos. (PIAGET, 1975b, p. 94).

A revolução por que passa o bebê não ocorre por um processo de maturação, tampouco é fruto das experiências vividas, como apregoam o inatismo e o empirismo, é, sim, fruto do trabalho da inteligência por sucessivas assimilações e acomodações.

O período que vai do nascimento até a aquisição da linguagem é marcado por extraordinário desenvolvimento mental. Muitas vezes mal se suspeitou da importância desse período; e isto porque não é acompanhado de palavras que permitam seguir, passo a passo, o progresso da inteligência e dos sentimentos, como mais tarde. Mas, na verdade, é decisivo para todo o curso da evolução psíquica: representa a conquista, através da percepção e dos movimentos, de todo o universo prático que cerca a criança... Enquanto que, no ponto de partida deste desenvolvimento, o recém-nascido traz tudo para si ou, mais precisamente, para o seu corpo, no final, isto é, quando começam a linguagem e o pensamento, ele se coloca, praticamente, como um elemento ou um corpo entre os outros, em um universo que construiu pouco a pouco, e que sente depois como exterior a si próprio. (PIAGET, 1997, p. 17).

A construção do espaço vai ser a elaboração do espaço prático, egocêntrico das duas primeiras fases ao extremo oposto do espaço representativo da sexta fase e, para explicar tal avanço, Piaget toma o conceito de grupo de deslocamento de Poincaré.

Durante as seis fases de desenvolvimento, a inteligência espacial vai passar dos grupos práticos ou heterogêneos onde “o sujeito apenas confere às percepções aquelas qualidades espaciais cuja realidade é engendrada pela ação imediata” (PIAGET, 1975b,

p. 97), aos grupos subjetivos, objetivos e representativos, em que haverá a “representação das relações espaciais entre as coisas e a representação dos deslocamentos do próprio corpo” (PIAGET, 1975b, p. 189).

Grupo é um sistema ou uma estrutura abstrata que possui propriedades bem definidas, tais como: composição, associatividade, identidade e reversibilidade. Para Piaget, o grupo é imanente à própria inteligência:

constitui um “grupo” todo e qualquer sistema de operações fechado em si próprio, isto é, um sistema tal que possibilite retornar ao ponto de partida mediante uma operação que faça parte do sistema. Numa acepção genérica, pode-se afirmar que toda organização viva ou, especialmente, psicológica contém em germe as operações características do “grupo”, visto que a própria finalidade da organização é, precisamente, construir uma totalidade de processos interdependentes; assim, a noção de grupo constitui o princípio básico daquele sistema de operações que os lógicos deram o nome de “lógica das relações”, visto que o produto de duas relações é ainda sempre uma relação. (PIAGET, 1975b, p. 194).

O grupo prático ou heterogêneo³⁴, das duas primeiras fases, constitui-se, por exemplo, quando o bebê busca o mamilo que lhe escapa da boca ou quando a mão lhe toca a boca e deflagra a sucção: comportamento característico dos primeiros meses de vida, reação circular primária, que é a repetição de um ciclo adquirido. Ou, em vista de aquisição em relação ao seu corpo, quando há a sucção do polegar, por exemplo, que não comporta ainda qualquer forma de consciência, nem tampouco de coordenação intencional de levar a mão à boca, por isso grupo heterogêneo. O seio da mãe, a mão ou qualquer outro objeto não passam de impressões sensoriais pouco estáveis que prolongam o próprio esforço de acomodação.

De modo geral, todo conjunto coordenado de deslocamento suscetível de retorno ao seu ponto de partida e cujo estado final não dependa do caminho percorrido constitui um grupo; as acomodações simples da boca ao mamilo e as coordenações elementares da boca e das mãos encontram-se, pois, nesse caso. (PIAGET, 1975b, p. 102).

O estudo dos grupos heterogêneos nos mostra como a criança cria o espaço em função das ações realizadas, o que, para quem observa o bebê, satisfaz as exigências da definição de grupo, para ela, é um mero repetir de ações.

³⁴ “Sendo o grupo prático constituído por uma reversibilidade nos próprios atos da criança, sem que essa reversibilidade nem os seus resultados sejam percebidos ou representados” (PIAGET, 1975b, p. 141).

Piaget cita os grupos práticos graças às acomodações visuais, tais como: seguir o movimento de translação de um objeto, localizar um objeto após tê-lo perdido de vista, avaliar objetos em profundidade quando o bebê fixa a atenção em um objeto que está um pouco mais afastado, mas esses grupos ainda não são percebidos nas suas mútuas relações e a percepção do espaço pelo bebê não ultrapassa senão a mera percepção dos quadros sensoriais.

Quanto às relações geométricas utilizadas pelo bebê nesse primeiro período, no qual as percepções não atingem ainda nem a constância das formas nem das grandezas, características vitais à elaboração espacial (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 21), dado que nesse início não existe objeto material externo à ação do bebê, são denominadas relações topológicas.

Para a geometria, as relações topológicas são aquelas de caráter muito primitivo “estranhas às formas rígidas de distâncias, de retas, de ângulos, etc., bem como às relações projetivas e toda a medida” (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 23), que compreendem por ordem de complexidade a vizinhança, separação, ordem, circunscrição e continuidade.

As relações de vizinhança ou de proximidade são as mais elementares dentre as anteriormente citadas, ou seja, desde o nascimento, o bebê percebe os objetos que tocam seus lábios. Assim, quando a mão ou o mamilo tocam seus lábios, ele vira a boca em sua direção – reflexo de sucção, o mesmo ocorrendo com os objetos que esbarram em suas mãos os quais ele prontamente “prende” – reflexo de preensão.

As relações de separação estão ligadas diretamente às de vizinhança, dois objetos separados estão posicionados lado a lado e se, inicialmente, há uma percepção confusa em conjunto com a organização das relações espaciais, os objetos irão se diferenciar.

[...] introduzir entre eles (dois objetos) uma relação de separação consiste em dissociá-los ou, pelo menos, em fornecer um meio de distingui-los. Ora, aqui ainda, uma tal relação espacial corresponde a uma relação perceptiva muito primitiva: a que intervém na segregação das unidades ou, de modo geral, na análise dos elementos dentro de uma totalidade global ou sincrética. Numa percepção sincrética como a de um bebê vendo um objeto apoiado contra uma parede à maneira de uma mancha que apenas sobressai àquela, há vizinhança sem separação clara, ao passo que quanto mais a percepção é analítica, mais as relações de separação serão determinadas. (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 21).

As relações de ordem, mais complexas do que as anteriores, pois implicam uma sucessão espacial que requer ordenar os objetos vizinhos e separados ao mesmo tempo, e seguidos uns dos outros, não deixando de ser “a relação ‘entre’, que exprime envolvimento a uma dimensão, é ela mesma a relação de ordem (B está situado entre A e C na seqüência ABC)” (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 97). Tais relações são necessárias quando o bebê olha ou toca uma série de objetos sucessivamente que estão arrumados ao seu redor de maneira constante, como, por exemplo, as grades do seu berço, os brinquedos dispostos sobre uma estante.

As relações de envolvimento ou circunscrição, ou ainda de interioridade, necessitam de um grau maior de elaboração que as relações anteriormente mencionadas. A complexidade torna-se maior, quando se diferenciam a duas e a três dimensões, quando um bebê olha demoradamente o rosto da mãe percebe as partes, o nariz ou os olhos como enquadrados pelo rosto, um elemento circunscrito em outro. A três dimensões, as relações são de interioridade, colocar um objeto dentro de outro, como a constituição do espaço que é solidária a do objeto, e o bebê, ao desaparecer de um objeto atrás de um anteparo ou dentro de outro, age como se esse houvesse desaparecido.

Na obra *O nascimento da inteligência na criança*, Piaget apresenta experiências elucidativas quanto às relações de envolvimento, (Obs.174, p. 300-301). No livro, Lucienne com 1;01 (28)³⁵ deve introduzir um anel dentro de uma caixa de óculos. Para tanto, realiza uma série de ensaios, quando na quarta tentativa coloca o anel sobre a caixa, como se ele fosse entrar por si mesmo, até que, finalmente, descobre uma forma de deslizar o anel dos dedos diretamente para a caixa entreaberta.

Essa experiência mostra a dificuldade do bebê em colocar um objeto em relação de interioridade de outro a três dimensões. Situação semelhante ocorre quando Aos 1;1 (24) Lucienne tenta enfiar um anel numa vareta de madeira batendo contra ela, como se fosse possível resultar do contato direto em vez de enfiá-lo em uma das extremidades, o que demonstra a dificuldade de conceber as relações mesmo que primitivas na lógica das ações da relação de envolvimento.

A síntese das relações anteriores ocorre com o contínuo:

³⁵ Notação utilizada por Piaget para indicar a idade dos sujeitos nos protocolos, um ano, um mês e vinte e quatro dias.



resulta daí que o contínuo, que termina mais tardiamente sua elaboração do que todas essas outras relações, já que constitui a síntese delas, acaba a construção das noções topológicas [...] . (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 163).

A terceira e a quarta fases de desenvolvimento do espaço sensório-motor são marcadas pela coordenação da visão com a preensão, o que vai definir as reações circulares secundárias, na terceira fase, e a coordenação de ações, na quarta.

Na terceira fase, a coordenação visão-preensão vai proporcionar ao bebê a possibilidade de repetir comportamentos (reação circular secundária) que produzirão determinados efeitos relativos ao seu corpo e ele os repete intencionalmente. Por exemplo, na “preensão interrompida”, o grupo mais simples dessa fase, a criança perde um objeto, encontra-o e o traz para si novamente, mas o objeto não existe ainda materialmente, somente no prolongamento das ações.

A possibilidade de ver o que pega e pegar o que vê dá ao bebê uma nova composição entre os espaços, nos quais as coordenações dos grupos práticos serão a fonte para estruturação do real. Agindo com as mãos e vendo-se a agir – consequência das aquisições essenciais do progresso da preensão, o bebê irá, doravante, imprimir movimentos de rotação, de aproximação e afastamento dos objetos. Mediante seu olhar, a possibilidade de passar um objeto de uma mão a outra mão é uma ocasião sem precedentes onde os espaços visuais e táteis descoordenados na fase anterior passam assim a ser efetuados unindo dois espaços: o tátil e o visual, caracterizando os grupos subjetivos.

As rotações na terceira fase ainda não podem ser consideradas intencionais e o bebê, quando roda um objeto, o faz por acomodação motora a ele e não por escolher o melhor lado para chupá-lo, ou olhá-lo. O exemplo, dado por Piaget, da mamadeira que, quando apresentada ao bebê com o bico visível, é girada adequadamente para a sucção, mesmo sendo necessário realizar algum movimento de ajuste. Isso demonstra que o bebê não apresenta dificuldade motora para virar o objeto. Tal dificuldade ocorre pela falta de solidez dos objetos das primeiras fases. Quando o bico da mamadeira está fora do campo visual, o bebê não consegue dar significado ao objeto e será somente na quarta fase que o bebê irá girar a mamadeira mesmo sem ver o bico.

Este comportamento é típico da não-conservação do objeto. Leva, assim, a uma não - conservação das próprias partes da mamadeira, isto é, a uma não - conservação da forma. No estado seguinte, ao contrário, em correlação com a construção do objeto permanente, a mamadeira é, na primeira tentativa,

posta na posição normal, portanto percebida como uma forma que permanece constante, apesar das rotações que lhe damos. Ora, nesse mesmo nível vemos como a criança começa a interessar-se, meneando, lentamente, a cabeça, ao mudarmos a forma de um objeto, pois que se acha sob a influência da perspectiva. (PIAGET, 1972, p. 147).

A mudança que acarreta o agarrar do objeto, sacudi-lo, balançá-lo e levá-lo ao campo visual, viabiliza à criança conferir forma relativamente mais estável aos objetos, do que ao ver o objeto a distância sem tocá-lo, ou tocar o objeto sem poder vê-lo.

Na terceira fase, Piaget compara o espaço próximo no qual o bebê pode agir para alcançar o objeto ao espaço terrestre para o adulto e o espaço longínquo ao espaço celeste inacessível. Os objetos possíveis de serem pegos implicam relações projetivas e euclidianas de forma e grandeza e de profundidade e o pegar do objeto distante, mas ao alcance, leva a uma melhor avaliação das distâncias dos objetos próximos, enquanto os distantes e inacessíveis continuam distorcidos e sem formas e grandezas constantes.

[...] o espaço do período I³⁶ não comporta senão relações pré-perspectivas e pré-euclidianas, que se assemelham às relações topológicas elementares. ... Durante o período II, ao contrário, a descentralização progressiva do espaço sensório-motriz devida à coordenação crescente das ações do sujeito acaba simultaneamente na constituição de relações projetivas e de relações métricas, cuja síntese constitui as constâncias de forma e grandeza. (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 26-27).

A quarta fase de desenvolvimento do espaço é marcada por um início de permanência dos objetos e, por conseguinte, da aquisição da grandeza constante dos sólidos e da perspectiva de relações de profundidade. O bebê, doravante, passa a procurar objetos escondidos atrás de anteparos desde que tenha seguido os seus deslocamentos, o que caracteriza a transição dos grupos subjetivos aos objetivos da próxima fase.

Quanto às perspectivas, o bebê põe-se a aproximar e afastar os objetos do seu rosto e se, na fase anterior a uma mudança de posição, correspondia uma mudança de estado, nessa fase, há uma dissociação entre esses dois tipos de mudanças, graças à

³⁶ Na obra *A representação do espaço na criança*, Piaget apresenta a construção do espaço anterior à representação, ou espaço senso-motriz em três períodos que englobam as seis fases de outras obras: *A construção do real na criança* e *O Nascimento da inteligência na criança*: "O primeiro período compreenderia dois estádios: o dos puros reflexos e o das aquisições dos primeiros hábitos. O segundo período também seria caracterizado por dois estádios: o das 'reações circulares secundárias' (início da manipulação dos objetos, ao redor dos 4-5 meses) e o das primeiras condutas inteligentes, isto é, que se estenderia até mais ou menos o final do primeiro ano. Finalmente, o terceiro período compreenderia o estádio das 'reações circulares terciárias' (inícios de experimentação) e o das primeiras coordenações interiorizadas (compreensão rápida das situações novas)" (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 20).

permanência e à constância das formas e da atribuição de uma trajetória autônoma e independente da ação do sujeito aos movimentos do objeto. Tais características são dos grupos objetivos, mas nessa fase ainda estão reduzidas às operações reversíveis e por isso é período de transição entre grupos subjetivos³⁷ e objetivos³⁸.

O bebê, na quarta fase, esconde o objeto para, em seguida, reencontrá-lo na mesma trajetória. A esse procedimento, Piaget denominou de operações reversíveis. Na fase seguinte, quinta, o bebê não estará mais limitado à mesma trajetória: “Jaqueline, aos 1;3 (2), vê um objeto desaparecer atrás de sua mãe e busca-o pelo outro lado” (PIAGET, 1975b, 173).

A mamadeira que, na fase anterior, não podia ser virada a menos que o bico estivesse à vista, passa a ser virada para uma posição – “Durante a quarta fase, ao contrário, a criança aprende a revirar as coisas por si mesma e adquire, assim, a noção de ‘reverso’ do objeto e, por consequência, da sua forma constante” (PIAGET, 1975b, p. 153).

Apesar dos avanços realizados no espaço da quarta fase, o que ocorre aproximadamente entre os oito – nove meses e um ano de idade, ainda está limitado às ações da criança que ordena os objetos em relações práticas entre eles, mas essas relações ainda estão restritas aos grupos reversíveis, os únicos elaborados até então, e o passo decisivo da quinta fase será, justamente, levar em conta os deslocamentos das coisas que procura, posto que, na fase anterior, a criança situava corretamente tudo em relação a ela própria, mas sem inserir-se no espaço comum a todos os outros objetos. Há, portanto, um espaço privilegiado dos objetos e seus deslocamentos em relação à criança.

Como afirma Piaget, embora saia do solipsismo³⁹, o sujeito da quarta fase continua, geometricamente falando, egocêntrico e ele não consegue situar-se num campo imóvel que envolve os outros corpos e o seu próprio, situando tudo ao seu redor em relação a ele próprio, mas sem inserir-se num espaço comum.

³⁷ Grupo subjetivo: “o grupo subjetivo nada mais é do que um grupo de movimentos aparentes, o qual não dissocia ainda os deslocamentos do próprio sujeito e dos objetos. O grupo das operações reversíveis constitui, pelo contrário, um grupo objetivo, mas limitado às relações elementares entre o sujeito e o objeto” (PIAGET, 1975b, p. 170).

³⁸ Grupo objetivo: “Com efeito, consideramos necessárias determinadas condições para o estabelecimento dos grupos objetivos: existência de objetos substanciais, diferenciação dos deslocamentos exteriores e dos movimentos próprios, exteriorização das relações espaciais de modo que o sujeito seja capaz de situar-se ele próprio no espaço”. (PIAGET, 1975b, p. 142).

³⁹ “Doutrina filosófica segundo a qual a única realidade no mundo é o eu” (FERREIRA, 1995, p. 609).

[...] o espaço está longe de formar um meio homogêneo de tal natureza que os corpos possam nele deslocar-se em relação recíproca; consiste ainda em feixes qualitativos ordenados em função da ação e em quadros de conjunto objetivados como tais e não em seus elementos respectivos. O corpo do sujeito continua desempenhando, pois, um papel ilegítimo, visto que privilegiado. (PIAGET, 1975b, p. 163).

Os estudos realizados a respeito da sobreposição de objetos demonstram que a criança não percebe corretamente a relação sobre, ou “conduta suporte”, se um objeto é colocado sobre um outro muito maior ou quando é quase do mesmo tamanho. A criança é incapaz de puxar o suporte para alcançar o objeto que lhe interessa, o que demonstra que não concebe a independência entre o suporte e o objeto a ser pego. É preciso que um dos objetos se desloque e o outro se mexa ou caia para que seja percebida a relação estar um sobre o outro. Somente na quinta fase que a relação de um objeto perante os outros ou, mais precisamente, colocando uns sobre os outros numa série de situações variadas que será possível à criança pegar o objeto desejado.

A quinta fase apresenta como progresso a conquista do espaço experimental e a criança põe-se a realizar toda sorte de experiências, como, por exemplo, jogar os objetos atrás de suas costas para ir procurá-lo, deslocar objetos e acompanhar os seus deslocamentos.

Os grupos objetivos, característicos desta fase, nos quais a criança leva em consideração os deslocamentos sucessivos do que procura, desde que tenha visto esses deslocamentos, não estando mais ligada a situações privilegiadas e se anteriormente ela negligenciava a ordem de sucessão dos deslocamentos, mesmo quando os acompanhava visualmente para procurar os objetos no lugar onde os havia encontrado anteriormente, a partir de agora a criança passa a conceber o campo espacial como homogêneo⁴⁰, no sentido de que as propriedades espaciais não são mais privilégio das suas ações, uma vez que, nessa fase, os objetos se deslocam em relações recíprocas.

A criança transfere os objetos de um lugar para outro, coloca-os dentro de recipientes e retira-os, deixa-os cair para observar a trajetória, aproxima-os e afasta-os. Em suma, ela realiza experiências no espaço próximo e distante. Piaget denominou de “reações circulares terciárias” ou “descoberta de novos meios por explorações táteis dirigidas e aprendizagem” ou ainda “descoberta de novos meios por experimentação ativa”.

⁴⁰ “O espaço tal como considera a intuição é caracterizado pelo fato de ser homogêneo (os elementos que nele se podem distinguir aí através do pensamento são qualitativamente indiscerníveis), isotrópico (todas as direções têm as mesmas propriedades), contínuo e ilimitado” (LALANDE, 1996, p. 322).

Obs. 147. [...] Durante seu banho, Jacqueline entrega-se a numerosas experiências com os brinquedos de celulóide que flutuam à superfície da água. Ao 1; 1 (20) e dias seguintes, por exemplo, não só deixa cair do alto seus brinquedos, para ver a água espirrar, ou desloca-os com a mão para fazê-los nadar, mas também os obriga a afundar, a meia altura, para vê-los subir de novo à superfície. Ao 1; 7 (20), nota as gotas de água que caem do termômetro, quando segura esse instrumento no ar e o sacode. Experimenta então várias combinações para provocar esguichos de água a distancia: brande o termômetro e estaca bruscamente, ou imprime-lhe um movimento de catapulta. Entre um ano e ano e meio, Jacqueline diverte-se enchendo de água baldes, frascos, regadores, etc, e estuda a queda de água. Aprende igualmente a transportar a água com precaução, sem entorná-la, mantendo o recipiente na horizontal. (PIAGET, 1975a, p. 258).

Se a coordenação viso-motora das fases anteriores possibilitou à criança conhecer as relações entre ela e os objetos, ao agir com os braços e as mãos, nesta fase o corpo da criança como um todo estará agindo no espaço onde ocorrerá a descoberta das inter-relações objeto-criança-espaço.

As condutas de pesquisa dirigida e de experimentação ativa repercutem na elaboração do espaço sensório-motor, pois se, na quarta fase, as aquisições eram relativas à forma e à grandeza dos objetos, na quinta e sexta fase, são relativas a liberar as relações dos objetos entre si, o que vai se estender a um número crescente de posições sucessivas que vão culminar com a intervenção de movimentos não percebidos diretamente na sexta fase, momento em que ocorre a internalização dos esquemas e, com isso, a representação e os atos de completa inteligência mas, para tanto, é preciso estudar a formação dos grupos representativos próprios do final da sexta fase.

Segundo Piaget, duas conquistas marcam as aquisições da sexta fase, dos grupos representativos: a primeira capacita a criança a representar mentalmente seus próprios deslocamentos antes dos deslocamentos de outros corpos, a segunda é relativa à representação dos deslocamentos dos objetos que não estão no campo de percepção da criança. A conduta mais típica dessa fase é a de desvios de obstáculos quando se quer chegar a um determinado objetivo. Para alcançar um objeto que está oculto por um anteparo, a criança não precisa mais estar restrita a seguir a trajetória realizada pelo objeto, cria trajetórias diferentes, das traçadas pelo objeto o que demonstra que ele continua a existir mesmo sem ser alcançado visualmente e que a criança é capaz de referir-se aos deslocamentos invisíveis do objeto.

Obs. 123 [...] Ao 1;6 (11), Jacqueline perdeu a bola debaixo de uma grande cama. Debruça-se e vê que a bola rolou para um lugar bastante profundo. Jacqueline reergue-se e dá a volta à cama, contornando também a mesinha de cabeceira. No dia seguinte, no jardim, ela descobre um desvio análogo para juntar-se-me do outro lado de uma corda estendida (mas, neste último caso, todo o caminho era antecipadamente visível).

Nas semanas seguintes, noto numerosos desvios entre os móveis do meu gabinete de trabalho. O mais nítido foi este, a 1;10 (21): coloquei uma boneca no espaldar de um sofá situado no vão da janela; Jacqueline, verificando que terá dificuldade em alcançar o brinquedo pela frente, não procura sequer alcançá-lo, mas vai esgueirar-se penosamente, entre o sofá e a janela, depois levanta-se e agarra a boneca. (PIAGET, 1975b, p. 190).

Como pudemos conferir, a construção do espaço sensório-motor vai dos grupos práticos, pouco coordenados, em que a ação do bebê criava o espaço: espaço bucal, espaço tátil, espaço auditivo entre outros, no início ao outro extremo o espaço representativo; no decorrer dessa etapa, a criança passou de um universo egocêntrico adual a um universo no qual ela se constitui um corpo entre outros, mas, para tanto, foi necessário um longo processo de construção.

Segundo Poincaré (1995, p. 53-54), “Para um ser completamente imóvel, não haveria nem espaço nem geometria” e: “Localizar um objeto quer dizer simplesmente apresentar movimentos que seria preciso fazer para alcançá-lo”.

A importância epistemológica dos deslocamentos do próprio corpo, da ação para a organização do espaço é vital à sua construção; como vimos, o período de organização do espaço anterior à representação requer a aquisição de: “permanência dos objetos, diferenciação entre os movimentos próprios e os das coisas, representação dos deslocamentos do próprio sujeito” (PIAGET, 1975b, p. 101). Essa construção espacial será efetuada no decorrer da primeira etapa de estruturação da inteligência.

2.1.2 As relações espaciais na criança pré-operatória

No final da década de 40, mais precisamente em 1947, Piaget escreveu junto com Barbel Inhelder, sua colaboradora durante muitos anos, um estudo detalhado sobre o desenvolvimento do espaço representativo na criança: *A representação do espaço na criança*. Sua preocupação central, nessa obra, segundo Battro (1976), Flavell (1988), Montangero e Maurice-Naville (1998), é a intuição espacial e as noções espaciais mais fundamentais utilizadas pelas crianças.



A continuação desse estudo, dada a sua complexidade, aparece num segundo trabalho realizado por Piaget, Inhelder e Szeminska em *La géométrie spontanée de l'enfant*⁴¹, publicado em 1948, no qual estudaram as questões referentes à avaliação da capacidade das crianças em relação à medida do espaço uni, bi e tridimensional.

Os experimentos realizados tinham por objetivo descobrir como a criança conserva a medida colocando-a em situações-problema nas quais introduziam mudanças perceptivas, como, por exemplo, na medida de superfície, duas placas retangulares de papel simulando dois pastos onde duas vacas teriam que dividir seu campo de pastagem com casinhas de papelão. No primeiro campo, as casas iam sendo colocadas próximas e, no segundo, espaçadas e perguntava-se às crianças se as vacas teriam o mesmo espaço de pastagem. As respostas obtidas mostraram a distribuição de três grupos nos quais o primeiro estava sujeito às ilusões perceptivas, um grupo intermediário resistia à percepção. Porém, dadas as evidências perceptivas, à medida que se ia povoando o espaço, afirmavam que as vacas que estavam no campo onde as casas estavam próximas tinham mais espaço de pastagem e um terceiro grupo que, apesar dos dados perceptivos, contrabalanceavam racionalmente.

Nosso foco de estudo é referente à primeira obra. Piaget e Inhelder fazem, inicialmente, uma breve retrospectiva sobre as estruturas perceptivas ou sensório-motoras, que se constituem no ponto de partida de toda a construção representativa do espaço e mostram quais são as relações geométricas utilizadas⁴², mas, a parte central do texto está no período denominado de representativo, no qual haverá uma reconstrução do todo (já realizado no período sensório-motor) num novo plano. Para o espaço, esse período irá possibilitar a libertação do egocentrismo no qual a criança encontrava-se aprisionada. A construção do espaço ocorrerá pela organização de ações realizadas com os objetos no espaço, inicialmente, por ações motoras e, posteriormente, em ações interiorizadas que irão se transformar em estruturas.

Mas, apesar de todas essas diferenças⁴³, é preciso observar, por outro lado, que as duas construções, perceptiva e representativa, apresentam um fator comum e se repetem, pois, em parte, malgrado sua decalagem considerável. Esse fator comum, que apresenta, assim, uma importância essencial para a interpretação da intuição espacial em geral, é a motricidade, fonte das operações... (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 28).

⁴¹ A referida obra não foi traduzida para o português até a presente data.

⁴² Este estudo já está realizado no item 2.2.1.

⁴³ Da representação em oposição à percepção direta relativa ao período anterior à função semiótica ou simbólica.

O espaço representativo adulto é, portanto, fruto da organização das manipulações ativas realizadas no meio, opondo-se à forte tendência de acreditar que a representação espacial é fruto da leitura direta da experiência. Piaget, no decorrer dos seus experimentos, mostra como tal processo ocorre e como a criança passa de uma visão centralizadora a uma visão de totalidade na qual ela está inserida como um objeto entre outros.

Para o espaço, especificamente, o conceito de egocentrismo é de vital importância, pois, como veremos, implicará tirar dificuldades de coordenação dos diversos pontos de vista – relações projetivas. Nos *Comentários sobre as observações críticas de Vygotsky acerca de: a linguagem e o pensamento da criança*, Piaget acolhe os comentários de seu colega e retoma as explicações justificando tratar-se da primeira parte de sua obra e, quanto ao egocentrismo, as explicações dadas não deixam dúvidas:

elaborei o termo “egocentrismo cognitivo” (sem dúvida, uma péssima escolha) [...]

Uso o termo egocentrismo para designar a inabilidade inicial de descentralizar, isto é, mudar uma dada perspectiva cognitiva (manque de décentration). Seria preferível dizer simplesmente “centrismo”, mas, desde o início da perspectiva centralizada é sempre relativo à própria posição e ação da criança, propus o termo “egocentrismo”. Chamo a atenção para o fato de que o egocentrismo inconsciente do pensamento a que me refiro, quase não tem relação com o significado comum do termo, geralmente entendido como hipertrofia da consciência do eu. Egocentrismo cognitivo como tentei deixar claro, provém de uma falta de diferenciação entre o ponto de vista próprio e os outros possíveis, e não tem individualismo que precede à relação com os outros [...] (PIAGET, 1990/1991, p. 161).

Como o objetivo de estudo da obra é o espaço representativo, este está subdividido em três partes, nas quais se estuda o desenvolvimento do espaço segundo as relações topológicas, projetivas e a passagem do espaço projetivo ao euclidiano. Porém antes, é necessário diferenciar a inteligência sensório-motora e a inteligência representativa ou simbólica.

A geometria topológica, ou *Analysis Situs*, como foi conhecida durante certa época, é a geometria das múltiplas transformações que pode assumir a superfície de uma figura, de um corpo ao ser puxado, esticado, amassado, comprimido, desde que não ocorra o rompimento dos seus limites, podendo ser considerada como um tipo de geometria especial.

As relações utilizadas pela topologia constituem-se, paulatinamente, nos elementos de uma mesma figura ou das configurações estruturadas por elas, não sendo necessária a manutenção de distâncias, ângulos, medidas rígidas como no caso das relações empregadas pela geometria projetiva e euclidiana e, por isso, mais simples. Estando no início das construções espaciais, pois segundo Piaget, “são psicologicamente elementares: o espaço topológico inicial é interior a cada figura, da qual ele exprime as propriedades intrínsecas em oposição às relações espaciais que as situariam em relação às outras figuras”. (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 167).

Topologicamente falando, uma chave, uma vela com o número quatro e uma xícara com alça possuem as mesmas características, ou seja, as mesmas propriedades quanto ao seu *genus*⁴⁴ um, isto é, tem as mesmas quantidades de furos :



Figura 1 – Objetos que possuem *genus* 1.

As relações topológicas não levam à constituição de totalidades ou conjuntos onde se reúne um grande número de figuras, em face de um jogo de perspectivas, como é o caso da geometria projetiva, na qual se inserem as figuras sob diferentes pontos de vista, ou em eixos coordenados horizontais e verticais, como na geometria euclidiana.

As relações de vizinhança, de separação, de ordem, de envolvimento e de continuidade estão relacionadas a uma mesma figura ou a uma mesma configuração estruturada por elas. A diferença entre as relações topológicas, as projetivas e as euclidianas está no modo como coordenam as figuras entre si. As relações topológicas são internas às figuras. Já as projetivas e euclidianas inserem as figuras em totalidades, por isso não mais complexas e de construção mais tardia.

Ao contrário das relações topológicas elementares, que se apóiam no objeto e seus elementos são considerados gradualmente, vimos que as noções projetivas implicam coordenação de conjunto que liga as figuras umas às

⁴⁴ “[...] *genus* é definido conforme o número de buracos que tem um objeto ou, como dizem os topólogos, pelo número de cortes fechados ou completamente circulares, que não se interceptam e podem ser feitos na superfície sem dividi-las em dois pedaços” (BERGAMINI, 1969, p. 178).

outras em um sistema que repousa no relacionamento dos “pontos de vista”. Mas, correlativamente à construção desse sistema dos pontos de vista, constitui-se igualmente uma coordenação dos objetos como tal, conduzindo ao espaço euclidiano, à construção das paralelas, dos ângulos e das proporções ou semelhanças que fazem a transição dos dois sistemas. Essa coordenação dos objetos, que supõe a conservação das distâncias, bem como a elaboração da noção de deslocamento (ou transformação congruente das figuras no espaço), acaba na construção dos sistemas de referência ou de coordenadas. (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 393).

Apesar das diferenças entre os espaços topológicos projetivos e euclidianos, eles fazem parte das operações infralógicas⁴⁵.

As relações topológicas

Percepção estereognóstica

Para o estudo das relações topológicas no período representativo, Piaget e Inhelder realizam cinco séries de investigações, iniciando pela investigação da intuição das formas através da “percepção estereognóstica”. O objetivo de tal procedimento é avaliar o limite entre a percepção e a imagem. Para tanto, davam às crianças entre dois e sete anos, dois grupos de objetos: objetos familiares e diversas formas geométricas.

As formas familiares eram: uma bala, tesouras, lápis, chaves, colher, etc., e as formas geométricas, recortadas em forma de cartão, estavam subdivididas em: simétricas (círculos, triângulos, elipses, quadrados, retângulos...), formas simétricas mais complexas (cruzes de diversos formatos), formas assimétricas, mas de bordas retas como trapezóides e, finalmente, formas de caráter topológico, irregulares com furos, tiras e anéis de papelão abertos ou fechados.



Figura 2 – Série de cartões a serem identificados por percepção estereognóstica⁴⁶.

⁴⁵ As operações infralógicas são constitutivas do espaço e serão estudadas no Capítulo 3. As relações espaço-geométricas infanto-juvenis.

⁴⁶ Reproduzido da obra *La représentation de l'espace chez l'enfant* (PIAGET; INHELDER, 1977, p. 30).

A partir do manuseio das formas sem vê-las, as crianças deveriam nomeá-las, reconhecê-las num conjunto de desenhos previamente preparados e, finalmente, desenhar as formas percebidas pelo tato.

O estágio⁴⁷ I, o mais primitivo, pode ser dividido em dois subgrupos (IA e IB). Os sujeitos pertencentes ao primeiro subgrupo (IA) reconhecem somente os objetos familiares. Os sujeitos do subgrupo IB iniciam o reconhecimento das formas topológicas, diferenciando as formas abertas das fechadas, mas, quanto às euclidianas, não diferenciam o círculo do quadrado, pois ambos são formas fechadas e nesse estágio, os sujeitos não realizaram exploração tátil dos objetos que se encontram em suas mãos.

AND (3;5) Lápis: segura com as duas mãos, gira toca a ponta e diz: "*É de madeira.* (Mostra imediatamente o lápis)" Uma chave: apalpa, vira, pega com a mão direita e introduz o dedo no furo da argola e grita: "*Uma chave!*" Pente: certo. O círculo: gira, coloca o cartão diametralmente entre as duas palmas, depois a espessura entre os dois dedos: "*É uma caixa. – Olhe (círculo, quadrado e elipse). Qual é? – Este (oval)*". Mas para o quadrado a reação é a mesma; pega envolve com as duas mãos, sem exploração: "*Uma caixa também. – Qual? – (Mostra primeiro o círculo, depois apalpa novamente quando colocamos entre as suas mãos). – Aquele (oval). – Não será este? (quadrado). – Não.*" (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 38).

Por falta de exploração sistemática dos objetos que têm nas mãos, os sujeitos não conseguem organizar suas características num todo coerente e a abstração das formas conhecidas é diferente das formas euclidianas.

A exploração necessária às formas geométricas não é, com efeito, a mesma necessária ao reconhecimento dos objetos usuais. Este consiste essencialmente em gestos de apreensão e em movimentos apenas diferenciados destes gestos: segurar com as duas mãos ou passar de uma mão para outra... Ora, para reconhecer as formas geométricas, seria necessário explorar todo o contorno, ao passo que o sujeito se contenta igualmente em segurar os cartões, apalpar a superfície e tocar uma parte do somente do contorno: a forma geométrica não é assim, abstraída da forma atribuída pelos movimentos de apreensão ou de exploração global dos próprios objetos usuais. (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 39).

A falta de exploração dos sujeitos é decorrente da carência da atividade perceptiva que permanece passiva ou estática sem integrar-se num todo coerente. Não sabendo explorar o contorno dos corpos, os sujeitos não os reconheceram entre outros modelos, tampouco conseguiram desenhá-los, o que mostra a dificuldade do grupo I quanto ao reconhecimento das formas geométricas e dos seus desenhos.

⁴⁷ Na *Representação do espaço na criança* a tradução está estágio, e não estágio como em outras obras.

No estágio II, os progressos realizados podem ser subdivididos em três níveis sucessivos. Há o reconhecimento progressivo das formas euclidianas, primeiramente, a diferenciação entre formas curvilíneas e retilíneas (passagem de IB para IIA) apesar de a exploração tátil permanecer ainda global. O segundo nível é de distinção das formas dos seus ângulos e suas dimensões, o que fica evidente na diferenciação entre o círculo e a elipse e entre o quadrado e o retângulo. O estágio IIB finaliza com uma exploração mais ativa, mas ainda carente de sistematização e as cruces e as estrelas começam a ser diferenciadas.

MYR (5,6) reconhece as cruces e as estrelas de quatro e seis pontas, mas não consegue desenhar essas duas últimas figuras, por ausência de pontos de referência e de retorno ao ponto de ligação central dos braços: desenha, então, as estrelas como espécies de sol ou de círculos rodeados por um número indeterminado de pontas. (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 50).

A exploração metódica marca a passagem do subestágio IIB para o estágio III no qual a criança consegue realizar explorações organizadas dirigidas operatoriamente, isto é, agrupam os elementos percebidos em função de um plano exploratório organizado, apalpando os objetos partindo de um ponto de referência fixo ao qual é possível retornar a qualquer instante.

Os sujeitos que estão nesse estágio exploram os objetos desconhecidos, o que possibilita desenhá-los corretamente sem tê-los visto. O exame da percepção estereognóstica mostra que as primeiras relações utilizadas são as topológicas e que a imagem não é fruto apenas da percepção, pois, mesmo quando o objeto está fora do campo visual, mas é explorado pela função tátil, é possível desenhá-lo e reconhecê-lo entre outros.

TUS (7,9) desenha bem as cruces, a meia-cruz, etc. Para a estrela de seis pontas, explora sistematicamente essas seis pontas, voltando ao centro para coordená-las entre si; desenho correto pela verificação sucessiva de cada elemento a partir de um ponto de referência... A cruz gamada: "*Não sei o que é (exploração segundo o mesmo método). Isso tem contornos, mas já não me lembro mais como é (desenha inicialmente um traço horizontal com segmentos terminais que partem em ângulos retos nas duas direções, depois explora novamente). Não está errado. Eu senti: é sempre igual (recomeça outro desenho e chega pouco a pouco, a um desenho que seria inteiramente correto, não fosse um dos segmentos terminais estar orientado para o lado contrário)*". Apresentamos então um conjunto de modelos: reconhece todas as formas e mostra a cruz gamada rindo: "*Era isso*". (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 52).

O desenho e as relações elementares do espaço



Após o estudo da percepção estereognóstica, o desenho ou espaço gráfico foi utilizado para verificar se a construção do espaço representativo passa pelas mesmas fases do espaço perceptivo. Para tanto, era pedido às crianças que desenhassem um conjunto de formas compostas de vinte e uma figuras. Entre elas havia: formas topológicas (3), formas euclidianas simples, como círculo, quadrado, triângulo equilátero, retângulo e elipse (5), formas euclidianas compostas por mais de uma figura com relações de interioridade ou exterioridade, formas que tangenciam os lados (11) e, finalmente, duas cruzes.

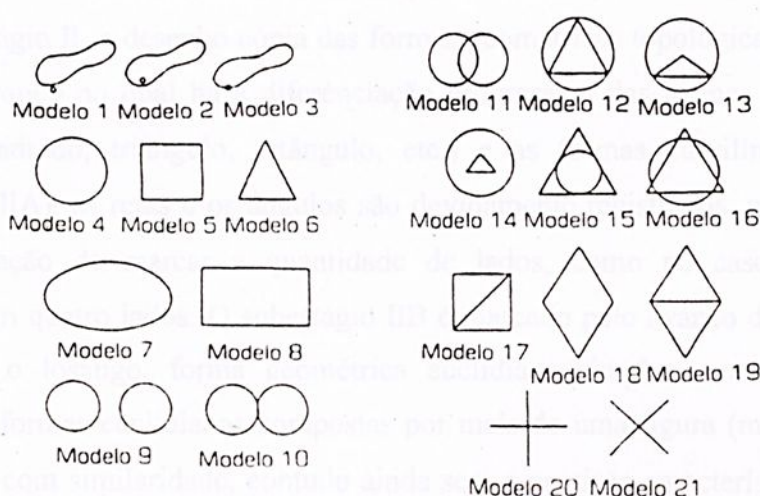


Figura 3 – Modelos desenhados para copiar (21 formas)⁴⁸.

Os desenhos resultantes da cópia dos modelos foram classificados em quatro grupos, segundo os estudos de Luquet⁴⁹. O primeiro, estágio 0, compreendia os sujeitos mais jovens da pesquisa, os quais estavam na fase da garatuja pura, ou seja, os desenhos por eles realizados não apresentavam qualquer semelhança entre as formas mostradas para a cópia. Os sujeitos não eram influenciados pelos modelos apresentados e, portanto, não havia uma relação entre os desenhos vistos e os efetuados. Tais características são peculiares ao que Luquet denominou de incapacidade sintética, quando as crianças ainda conseguem fechar as linhas que iniciam para formar um desenho.

⁴⁸ Reproduzido da obra *La représentation de l'espace chez l'enfant*, (PIAGET, INHELDER, 1948, p. 70).

⁴⁹ Os estudos de George Henri Luquet serão apresentados detalhadamente no capítulo sobre "Procedimento para análise dos dados".

O estágio I é marcado pelas modificações da garatuja característica do desenho anterior, com a diferenciação das formas abertas e fechadas. É possível distinguir entre as cópias das cruzes e do círculo, porém ainda sem precisão (IA). No nível IB, com avanço em relação ao IA, as cópias já possuem uma configuração de desenhos propriamente ditos e as únicas relações que aparecem com precisão são as topológicas. Os círculos são fechados, os quadrados se apresentam com filamentos para marcar os vértices, os modelos compostos por duas figuras geométricas são marcados por relações de interioridade e exterioridade, os círculos tangentes são retratados corretamente e as cruzes possuem os cruzamentos das retas distintas.

No estágio II, o desenho copia as formas geométricas topológicas e euclidianas mostra um avanço no qual há a diferenciação progressiva das formas euclidianas, as retilíneas (quadrado, triângulo, retângulo, etc.) e as formas curvilíneas (círculos). Inicialmente (IIA), as retas e os ângulos são devidamente registrados, mas, ainda, sem uma preocupação de marcar a quantidade de lados, como no caso do triângulo desenhado com quatro lados. O subestágio IIB é marcado pelo avanço dos sujeitos que já desenhavam o losango, forma geométrica euclidiana simples, mas difícil de ser realizada. As formas euclidianas compostas por mais de uma figura (modelos de 11 a 19) são feitas com similaridade, contudo ainda sem a precisão característica do estágio III, nível em que os sujeitos desenhavam sem dificuldade e com precisão todas as formas apresentadas.

A importância de acompanhar os estágios de desenvolvimento do desenho das figuras geométricas é de possibilitar seguir a construção da abstração das formas, mais do que na percepção tátil-cinestésica da estereognosia, pois, como afirmam Piaget e Inhelder (1993, p. 93):

...o espaço geométrico não é um puro decalque do espaço físico construído ao mesmo tempo que ele e ao qual corresponde, há muito, termo a termo: a abstração da forma é uma verdadeira reconstrução daquele, a partir de ações próprias e do espaço sensório-motor depois mental e representativo, determinado pelas coordenações dessas ações. Essa é a grande lição do estudo dos desenhos, quer se trate das relações topológicas de vizinhança, de separação, de ordem, de envolvimento e de contigüidade ou das relações euclidianas de distâncias, de retilinearidade, de ângulos, de inclinações e de paralelismo, etc., é do começo ao fim do desenvolvimento que acabamos de traçar, da coordenação das ações que procedem tais estruturas.

A ordem linear e a ordem cíclica

Após o estudo da abstração das formas e dos desenhos, o que se segue é a relação de ordem. As relações de vizinhança são básicas para a constituição do espaço, assim como as relações de semelhança e diferença são para a constituição das classes. Entretanto, podemos pensar nas classes lógicas independentes das relações espaço-temporais dos objetos classificados, o que não ocorre com o espaço, pois este é constituído de partes vizinhas. As ações constitutivas do espaço apóiam-se nos objetos como tais, e não em coleções separadas ou em séries descontínuas de objetos: é isto que caracteriza as operações espaciais ou operações infralógicas. Dois objetos vizinhos podem estar indissociáveis por estarem interpenetrados sem ser possível distingui-los. Para lhes conferir diferenciação é preciso que estejam separados.

Em uma sequência linear de elementos ABC, os elementos constituintes estão mantendo relações de vizinhança e de separação, a relação de ordem, ou seja, “estar antes ou após”, em que o elemento B está após A e o elemento C está ordenado após B. Para estudar essa terceira intuição do espaço topológico, Piaget e Inhelder utilizaram técnicas nas quais os sujeitos tinham que montar seqüências. Para tanto, no decorrer da experiência, eram realizadas cinco questões: reproduzir uma ordem linear direta, tradução de ordem cíclica em ordem linear, estabelecer a ordem inversa, ordem de empilhamento direto e cópia de um colar.

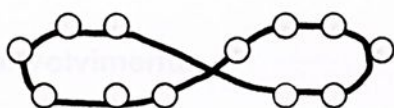


Figura 4 – Colar disposto em oito para a reprodução de ordem.⁵⁰

Os resultados encontrados foram distribuídos em três estágios. O primeiro caracterizado pelas correspondências intuitivas simples, isto é, os sujeitos montavam a seqüência por semelhanças de objetos não ordenados. Um primeiro grupo IA colocava qualquer objeto na seqüência, não se importando com o pedido realizado, como ocorreu nas garatujas. O outro grupo, subestágio IB, inicia uma tentativa de montar as seqüências, mas não conseguia ultrapassar a cópia de dois ou três elementos em bloco. Os sujeitos pegavam os elementos que compunham a seqüência, mas não se atinham em

⁵⁰ Reproduzido da obra *La représentation de l'espace chez l'enfant*, (PIAGET, INHELDER, 1948, p. 100).

seguir sua ordem apresentada pelo modelo considerado, por exemplo, a seqüência ABCDEF. Escolhiam os elementos correspondentes, mas colocam na seqüência sem seguir a ordem apresentada, ACDBEF ou ABFDEC.

No estágio II, inicialmente, os sujeitos realizavam a construção da ordem direta quando havia correspondência ótica, isto é, quando os sujeitos acompanhavam a montagem da seqüência seguindo, visualmente, o modelo, o que era peculiar do subestágio IIA. Se os sujeitos não pudessem seguir visualmente o modelo fracassavam; portanto a relação “entre” não era compreendida. No subestágio IIB, havia maior mobilidade nas correspondências de ordem, o que possibilitava a construção da ordem cíclica em linear, ou seja, era possível traduzir a seqüência de um colar em oito (Figura 4), ordem cíclica, em uma ordem linear.

O terceiro estágio era caracterizado pela construção da ordem inversa, montar uma seqüência fazendo sua construção na ordem contrária ao modelo, (ABCDEFGH – HGFEDCBA).

Não mais do que as relações topológicas elementares de vizinhança, separação, etc., que estudamos a propósito da estereognosia e do desenho, a representação da ordem não resulta, pois, de uma simples abstração a partir do objeto: é a coordenação crescente das ações que consistem em seguir, deslocar (transportar mentalmente) e recolocar aos poucos, que a ordem é abstraída. A ordem é, assim, o produto de uma reconstrução do objeto por meio das ações ordenadas e não uma qualidade diretamente extraída do objeto como tal, cuja ordem física é simplesmente reconstruída graças a uma acomodação dessas ações que são fonte da ordem geométrica. (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 119).

A relação de envolvimento

A relação de ordem estudada anteriormente supõe uma relação particular “estar entre” três objetos seguidos ABC, em que B se encontra entre A e C ou entre C e A. Se, para o adulto, essa relação é plenamente compreensível, para a criança é um processo demorado e que, como vimos anteriormente, vai ocorrer quando compreender e construir a ordem inversa.

A relação de “estar entre” é um caso particular das relações de envolvimento e que, segundo Piaget e Inhelder, junto com as relações de vizinhança, separação e de ordem “são mais importantes na construção do espaço porque são elas que conduzem a criança, segundo via psicologicamente mais simples, à distinção e à elaboração das três dimensões” (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 120).

Se considerarmos um ponto entre dois outros, ele está caracterizado pela relação de envolvimento a uma dimensão, que irá definir uma linha ou uma reta. Quando consideramos um ponto em relação a uma figura fechada, caracteriza-se a interioridade ou exterioridade a duas dimensões, definindo uma superfície, mas quando falamos em interioridade e exterioridade a três dimensões, estamos falando em movimento, definindo um espaço (Figura 5).

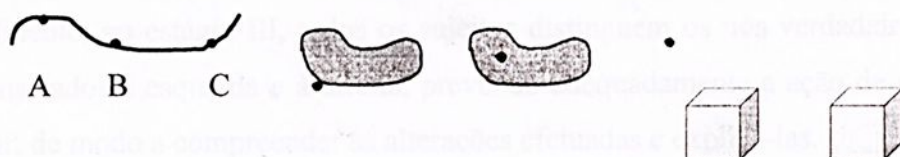


Figura 5 – Relações de interioridade e exterioridade a uma, duas e três dimensões.

Para estudar a relação de envolvimento ou enlaçamento, Piaget e Inhelder usaram os nós; já vimos no estudo do espaço no período sensório-motor as dificuldades da criança ao tentar colocar um anel numa vara, ou numa caixa (obs. 147). Nos dois casos, as relações de envolvimento ocorrem a duas e três dimensões. O nó usa as relações de envolver, de rodear, sendo uma experiência precoce para a criança.

A técnica empregada era simples: pedia-se à criança que fizesse um nó simples como o modelo apresentado. Após conseguir tal feito, transformava-se o modelo, deixando-o mais frouxo e perguntava-se era o mesmo nó que o anterior. Novamente era aumentado deixando-se seus *semibucles* bem soltos e perguntava-se se era o mesmo nó, como o modelo anterior. Seguiam-se situações nas quais se mostravam nós com o fio passado à direita e à esquerda e perguntava-se se eram iguais. Os sujeitos deveriam comparar nós falsos (dois *bucles* sobrepostos), um ∞ verdadeiro e outro falso (com um nó no meio) e um par de círculos enlaçados com outro par de círculos somente superpostos.

O resultado encontrado foi classificado em três estágios. O estágio I é marcado pelo aprendizado de como fazer um nó. Os sujeitos que estavam no primeiro subestágio IAM não conseguiam fazer um nó, mesmo com a explicação verbal e modelos. Os que se encontravam no subestágio IB aprendiam a fazer nós, mas ainda não conseguiam acompanhar com o dedo os segmentos de um nó distendido, tampouco diferenciavam um nó falso de um verdadeiro.

No estágio II, os sujeitos estavam aptos a refazer um nó que viam sem o auxílio do experimentador, mas bastava apertar ou afrouxar o nó para que não mais os reconhecessem e, freqüentemente, confundiam os nós verdadeiros com os falsos (sobreposição do barbante sem relação de envolvimento), o que caracterizava o subestágio IIA. Um segundo grupo, subestágio IIB, que não mais se iludia com as diferenças entre nós apertados e afrouxados, seguiam, perfeitamente, o contorno do nó com o dedo.

Finalmente, no estágio III, todos os sujeitos distinguem os nós verdadeiros dos falsos, os amarrados à esquerda e à direita, prevendo adequadamente a ação de apertar ou desapertar, de modo a compreender as alterações efetuadas e explicá-las.

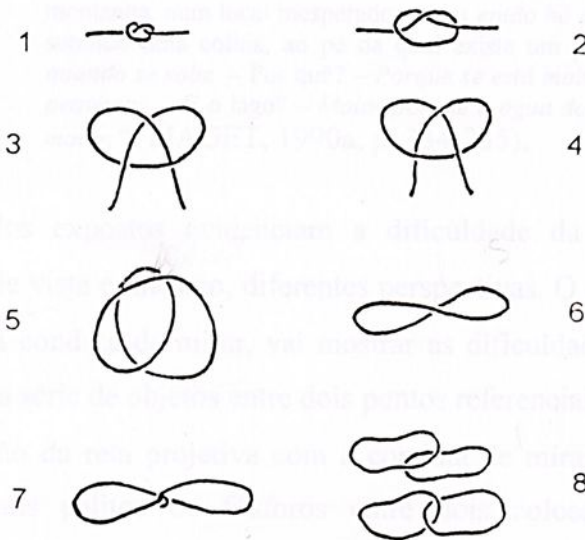


Figura 6 – Desenhos de nós e falsos nós⁵¹.

As relações projetivas

O estudo das relações projetivas, que estão ligadas às coordenações de objetos sob diferentes pontos de vista, diferem-se das relações topológicas, que são internas aos objetos e estão ligadas às relações de vizinhança, separação, ordem, envolvimento e

⁵¹ Reproduzido da obra *La représentation de l'espace chez l'enfant* (PIAGET; INHELDER, 1948, p. 129).

continuidade, o que leva a uma geometria do objeto, enquanto a geometria projetiva busca estabelecer como a geometria do espaço.

A coordenação mais elementar e primitiva utilizada pela criança é aquela na qual ela relaciona tudo a si mesma. Caracterizada por Piaget de egocentrismo infantil, tal relação, vai refletir numa deformação do espaço, como podemos constatar nos exemplos:

...em relação ao espaço distante ou nas reaparições de durações espaçadas é incompleta: assim é que durante uma excursão, a criança julga que a montanha se deforma aqui acolá (como anteriormente a mamadeira no curso de suas rotações),... (PIAGET, 1972, p. 167).

ou em:

Obs. 130 – Aos 3;3 (1), J. segue numa estrada e nos colocamos à direita por causa dos carros. Na volta, ela se põe à esquerda: “*Mas era ali a direita. – O que é direita? – É o lado da mão que segura a colhe*”. Ela mantém, no entanto, a direita total no caminho. Aos 3;7 (12) vendo um nascer do sol na montanha, num local inesperado: “*Mas então há dois sóis?*” [...]. Aos 4;11 (4), subindo uma colina, ao pé da qual existe um pequeno lago. “*Este é maior quando se sobe. – Por quê? – Porque se está mais longe. – E as casas? – Mais pequenas. – E o lago? – Maior porque a água do Ródano chegou e fez o lago maior.*” (PIAGET, 1990a, p. 334-335).

Os exemplos expostos evidenciam a dificuldade da criança em coordenar diferentes pontos de vista e, mesmo, diferentes perspectivas. O estudo da construção da reta projetiva, pela conduta de mirar, vai mostrar as dificuldades que as crianças têm para coordenar uma série de objetos entre dois pontos referenciais.

A construção da reta projetiva com a conduta de mirar exigia que os sujeitos intercalassem alguns palitos de fósforos entre dois colocados previamente, nos protocolos são apresentados nove, ou seja, as crianças tiveram que locar sete palitos de fósforos grudados à superfície com plasticilina, entre os dois pontos de referência: “A operação de ‘mirada’ não é, pois, uma ação simples, mas produto de uma diferenciação e, em consequência, de uma coordenação dos diversos pontos de vista em jogo” (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 179).

Para a construção da reta projetiva, duas formas de mesa eram usadas: retangular e circular. Os formatos são estrategicamente utilizados para se avaliar a influência das bordas na montagem da reta. Apesar da aparente facilidade da construção é somente por volta dos sete anos que as crianças obtinham sucesso na montagem das retas.

As experiências tinham início na mesa retangular onde os pontos referenciais eram locados de forma que a reta a ser construída fosse paralela à borda da mesa, mas sem que se fizesse qualquer menção ao fato.

Após a construção, os pontos referenciais eram colocados de tal sorte que a reta formasse um ângulo com a mesa, ou seja, que evitasse qualquer forma de paralelismo com as bordas. Depois dessas duas experiências passava-se à mesa redonda onde era realizada a construção de uma reta radial ou um trajeto que não tivesse apoio perceptivo da borda da mesa. Em seguida, era apresentada à criança uma reta montada com os palitos pouco alinhados para que fosse feita a correção e perguntava-se qual a melhor posição para as correções necessárias à retificação da reta, situação propícia para posicionar-se e descobrir a conduta de mirar.

Os resultados das experiências realizadas mostraram três estágios. O primeiro mostrou a total impossibilidade de os sujeitos construírem qualquer reta, e nem mesmo as bordas da mesa influenciar-nos. A construção realizada apresenta, nitidamente, as relações topológicas, nas quais os palitos são colocados em relações de proximidade, vizinhança e ordem.

O estágio II apresenta um avanço em relação ao anterior, dado que os sujeitos classificados como subestágio IIA são capazes de construir uma reta desde que esta esteja num fundo neutro e, com maior facilidade, quando a borda é paralela, porém o sugestionamento da borda inviabiliza qualquer construção que seja contrária, ou seja, quando a reta não é paralela à borda da mesa.

No subestágio IIB, há uma progressiva independência da influência da borda da mesa. Portanto, há uma gradual liberação da configuração perceptiva. Os sujeitos começam a descobrir que a visão não é a mesma de diferentes pontos de vista, a conduta de mirar só é descoberta a partir do momento em que os sujeitos percebem que é a coordenação de diversos pontos de vista, sendo a melhor maneira de ter os objetos alinhados; pois, para se ter uma reta, é necessário que todos os palitos estejam um atrás do outro, e que a conduta de mirar é um recurso para tanto, fato que vai marcar o próximo estágio.

O estágio III é marcado pela construção operatória da conduta de mirar.

[...] a descoberta de um ponto de vista particular, como a tomada de consciência do ponto de vista próprio, no momento ocupado pelo sujeito, é bem mais difícil do que poderia parecer à primeira vista, porque essa descoberta ou essa tomada de consciência supõe em realidade a coordenação de todos os pontos de vista possíveis. A operação de "mirada" não é, pois, uma ação simples, mas o produto de uma diferenciação e, em consequência, de uma coordenação dos diversos pontos de vista em jogo. (PIAGET; INHELDER, 1993. p. 179).

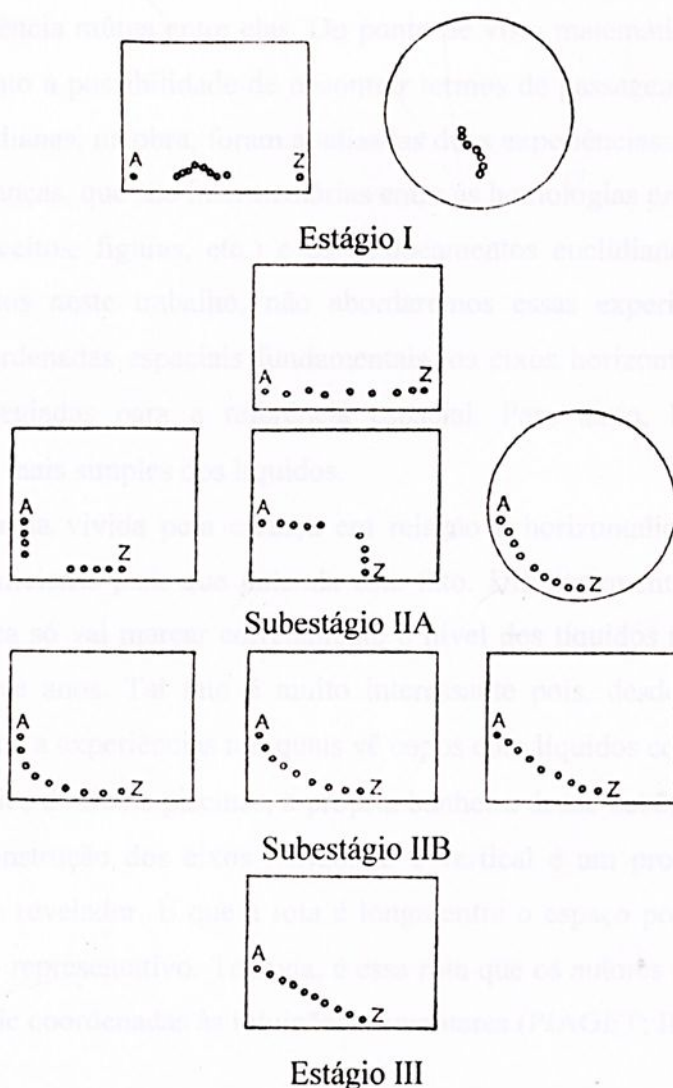


Figura 7 – Estágios de construção da reta projetiva pela conduta de mirar⁵².

Para Piaget e Inhelder, entre o espaço projetivo e o euclidiano, há duas espécies de relações: a primeira afirma que os dois derivam, e independentemente um do outro, do espaço topológico. ..., e uma segunda que afirma ser possível construir: pode-se construir entre o espaço projetivo e o euclidiano uma série de termos de passagem, constituídos pelas afinidades e semelhanças (PIAGET; INHELDER, 1993. p. 317-318).

As relações euclidianas

A obra que estamos analisando é pródiga, abundante em exemplos nos quais os autores mostram a filiação das relações projetivas e euclidianas às topológicas, bem

⁵² Reproduzido da obra *La représentation de l'espace chez l'enfant* (PIAGET; INHELDER, 1977, p. 183).

como a independência mútua entre elas. Do ponto de vista matemático, isso também é válido. Mas, quanto à possibilidade de encontrar termos de passagem entre as relações projetivas e euclidianas, na obra, foram analisadas duas experiências: as transformações afins e as semelhanças, que são intermediárias entre as homologias projetivas (repetição dos mesmos conceitos, figuras, etc.) e os deslocamentos euclidianos. Em razão dos objetivos propostos neste trabalho, não abordaremos essas experiências, e, sim, a evolução das coordenadas espaciais fundamentais, os eixos horizontal e vertical, pois são linhas privilegiadas para a referência espacial. Para tanto, Piaget e Inhelder utilizaram o nível mais simples dos líquidos.

A experiência vivida pela criança em relação à horizontalidade do nível dos líquidos não é suficiente para que entenda este fato. Diferentemente do que se pode imaginar, a criança só vai marcar corretamente o nível dos líquidos nos seus desenhos por volta dos nove anos. Tal fato é muito interessante pois, desde o nascimento, a criança está exposta a experiências nas quais vê copos com líquidos coloridos, o leite, os sucos, as superfícies de rios e piscinas, a própria banheira desde bebê, mas, diferente de tal hipótese, a construção dos eixos horizontal e vertical é um processo muito mais complexo, lento e revelador. É que a rota é longa entre o espaço postural ou sensorio-motor e o espaço representativo. Todavia, é essa rota que os autores saltam, atribuindo um sistema feito de coordenadas às intuições elementares (PIAGET; INHELDER, 1993. p. 397).

Poincaré afirmava que, para alguém imóvel, não haveria espaço nem geometria, e que, para a localização dos objetos no espaço, carecia de se conhecer quais os movimentos necessários para alcançá-los. As coordenadas do sistema euclidiano, inicialmente, podem ser comparáveis a uma extensa malha que reveste todos os objetos no espaço. Cada objeto nessa malha deve ser localizado segundo três espécies de relações simultâneas: esquerda-direita, acima-abaixo e frente-atrás⁵³. Mas, essa malha se aplica tanto aos objetos quanto ao espaço como um continente, que vai conter os objetos que se deslocam nele; para saber a posição dos objetos é necessário ter referências horizontais e verticais, que as crianças ainda não têm, o que é constatável nos desenhos

⁵³ Como veremos nos "Procedimentos para análise dos dados", os alunos de Ensino Fundamental (faixa etária de 7 a 12 anos) estão em fase de construção dessas relações, percebem-nas no espaço vivido, deslocam-se corretamente, em ações práticas, sabem ir e voltar de um lugar para outro, inclusive oferecendo caminhos alternativos, mas têm grande dificuldade em representá-las graficamente e, muitas vezes, em ordenar as informações para localizar determinado lugar. O mesmo ocorre quando há a exigência de abstração para entender simbologia abstrata, como no caso de mapas e plantas usadas pelos adultos.

infantis, nas chaminés inclinadas, como no caso de BIA (Figura 38 e 39), as casas rebatidas, nos desenhos de ruas de ALE (Figuras 46 e 47) e MAR (Figura 51).

Para determinar o desenvolvimento das coordenadas horizontal e vertical na criança, com o objetivo de saber como ela se utiliza de eixos externos, era utilizada a seguinte técnica: apresentava-se às crianças dois vidros, um de paredes paralelas e outro arredondado, com um pouco de água colorida. Pedia-se, então que previssem o nível do líquido conforme a mudança de inclinação da garrafa. Tal pedido tinha como objetivo saber quais eram as hipóteses dos sujeitos diante da mudança de posição da garrafa e, com isso, como ficaria o nível do líquido. Para o eixo vertical, utilizava-se o fio de prumo, o mastro de um barco e a maquete de uma montanha.

Analisaremos a horizontalidade dos líquidos; para tanto, Piaget e Inhelder utilizaram duas formas de garrafas, a primeira de bordas paralelas e a segunda arredondada, com água colorida para facilitar a visibilidade do nível do líquido quando a garrafa for inclinada, mudando conseqüentemente o seu nível. Para as crianças menores de cinco anos, a tarefa era mostrar o nível do líquido após a inclinação da garrafa e desenhá-lo à vista da experiência; para os maiores, a tarefa era um pouco mais extensa.

O segundo grupo teria que prever o nível do líquido anterior à realização da experiência, ou seja, com as garrafas vazias, desenhar como o nível se apresentaria depois da sua inclinação. Após o desenho antecipador, era realizado o desenho à vista da experiência. A essas duas tarefas, seguia-se o confronto entre o desenho anterior e o posterior. A essa técnica, eram acrescentados outros procedimentos, tais como: posicionar adequadamente as garrafas que já estavam com o nível da água marcado, marcar o nível do líquido em desenho de garrafas inclinadas. Em seguida, era mostrada uma série de cartões nos quais havia garrafas com o nível da água marcado correta e incorretamente e os sujeitos teriam que separá-los.

As técnicas utilizadas possibilitaram a classificação de três estágios. O primeiro daqueles sujeitos que não conseguiram abstrair da experiência o nível do líquido e desenhavam uma garatuja que às vezes ultrapassava os limites do recipiente.

O segundo grupo, que avançava por considerar um nível do líquido mesmo sem atribuir horizontalidade, mas que marcava o nível paralelo ao fundo da garrafa (subestágio IIA), o que demonstra que não considerava as evidências da experiência. O subestágio IIB, no qual os sujeitos faziam a previsão acertada do nível, mas que nos desenhos não registra o que falou, falhando ao desenhar por não ter uma “leitura

geométrica”, ficando preso às linhas oblíquas no canto da garrafa. Apesar da previsão acertada do líquido, a criança não procura um sistema externo de orientação e, por isso, prende-se ao canto da garrafa.

No estágio III, a descoberta da horizontalidade do líquido é devido ao relacionamento do líquido com sistemas externos à garrafa, se anteriormente ele estava restrito aos eixos particulares, primeiro o fundo da garrafa depois as suas bordas. Em IIB, algumas situações privilegiadas, como, por exemplo, a garrafa na horizontal ou posicionada de boca para baixo, nas quais os sujeitos só precisam considerar relações de paralelismo e de perpendicularidade, fracassando nas posições onde a garrafa está inclinada. As operações concretas é que possibilitam a generalização dos eixos vertical e horizontal.

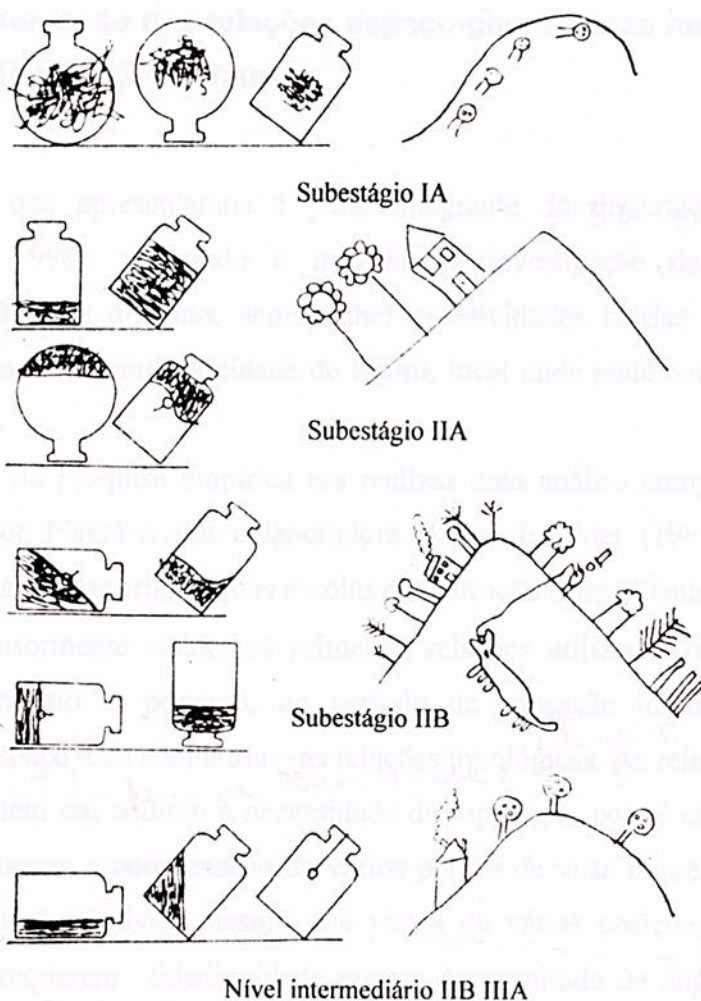


Figura 8 – Estágios de desenvolvimento da horizontal e da vertical⁵⁴.

⁵⁴ Reproduzido da obra *La représentation de l'espace chez l'enfant*, (PIAGET; INHELDER, 1977, p. 445).

Por mais simples e espontânea que possa parecer a construção do espaço, essa conquista pode ser comparada com a conquista do espaço sideral. Sem aquele, este não teria acontecido.

Olhando os objetos que nos rodeiam, nós os vemos dispostos no interior de um entrelaçado de retas paralelas, que se cortam a três dimensões. E se essa visão das coisas nos parece clara, é porque a experiência física parece nos impor tal estruturação, em função de todas as verticais que percebemos paralelas entre si e de todas as horizontais que reconhecemos igualmente paralelas e cortando as primeiras em ângulos que parecem retos. Em resumo, um sistema de coordenadas é comparável a uma tabela com dupla ou tripla entrada, na qual todos os objetos do espaço são ordenados em correspondência biunívoca uns com os outros segundo diversos compartimentos previstos, e nada parece mais elementar que tal concepção. (PIAGET; INHELDER, 1993. p. 434-435).

2.1.3 A representação das relações espaço-geométricas nas crianças de educação infantil de Bauru

Os dados que apresentamos é parte integrante da dissertação de mestrado (KOBAYASHI, 1998), utilizando o método de investigação de Piaget e seus colaboradores. Durante um ano, acompanhei as atividades diárias de duas escolas públicas de educação infantil da cidade de Bauru, local onde pude coletar os dados do referido trabalho.

O objetivo da pesquisa empírica era realizar uma análise comparativa entre os dados obtidos por Piaget e sua colaboradora Barbel Inhelder (1993) com crianças genebrinas e os dados das crianças das escolas de educação infantil bauruenses.

Como anteriormente citado, as primeiras relações utilizadas pelas crianças no período pré-operatório e, portanto, no período de educação infantil são as mais elementares do espaço e da geometria – as relações topológicas. As relações projetivas e euclidianas possuem em comum a necessidade da topologia, pois é ela a base para as relações que requerem a coordenação de vários pontos de vista e que vai conferir aos objetos sua forma (projetiva), mesmo que vistos de várias posições e das relações euclidianas que requerem fidedignidade quanto à magnitude de ângulos e de retas, permitindo poucas transformações no espaço, o que lhe dá o caráter de uma grandeza constante.



Diferentemente do espaço topológico, no qual as relações são relativas ao próprio objeto ou à configuração estruturada por ele⁵⁵, tais como: “é vizinho”, “tem outro objeto ao seu lado”, “está separado”, “está entre outros objetos” (ordem), “está dentro ou fora” “há envolvimento”. Ou seja, as relações topológicas são fundamentalmente diferentes das projetivas e euclidianas, que inserem as figuras em totalidades mais complexas.

As relações topológicas estão fadadas às ligações de uma mesma figura. Além do mais, não requerem um jogo de perspectivas, no qual os objetos podem estar na frente de outros, atrás, vistos frontalmente ou verticalmente. Também não são como as relações euclidianas, que inserem os objetos em eixos coordenados verticais e horizontais. Nas relações topológicas, o espaço é interior a cada figura e exprime suas propriedades intrínsecas, diferindo das projetivas e euclidianas que inserem os objetos em sistemas de conjunto.

Os procedimentos metodológicos adotados foram: aplicação de três grupos de provas que visavam a descobrir as relações geométricas utilizadas por um grupo de trinta crianças entre dois anos e meio e sete anos, as provas, réplicas das realizadas por Piaget e Inhelder (1993), nas quais os sujeitos tinham que explicar, durante o desenrolar dos experimentos, como e o porquê do que estavam realizando, assim como registrá-los em desenhos e, no caso do nível dos líquidos, registrar a superfície em desenhos de garrafas previamente feitos que se encontravam em várias posições, separar os cartões com figuras desenhadas, o nível de líquido que estava desenhado corretamente, de outros desenhados incorretamente.

Na primeira prova, foram utilizados o desenho da figura humana e a cópia de vinte e uma formas (Figura 3 – Modelos desenhados para cópias), entre as quais figuras com características topológicas e euclidianas, o que permitia avaliar as relações utilizadas pelas crianças.

Para o estudo do desenho, Piaget⁵⁶ foi buscar as pesquisas do início do século XX, porém extremamente atuais, de George Henri Luquet, que classifica o desenho infantil em quatro fases características, são elas: o desenho involuntário – realismo

⁵⁵ O último estudo de Piaget e Garcia (1980), *Psicogênese e história das ciências*, vai resgatar esse trabalho sobre a representação infantil do espaço (PIAGET; INHELDER, 1993) da década de 40, e realizar uma comparação entre o desenvolvimento da ciência geométrica e o desenvolvimento da geometria infantil, o intra, inter e trans que será objeto de estudo no Capítulo 3.

⁵⁶ Uma breve apresentação das fases de desenvolvimento do desenho está no Capítulo 3, item 3.1 A representação e as relações espaço-geométricas.



fortuito, o realismo voluntário – incapacidade sintética –, o apogeu do desenho infantil – realismo intelectual – e o realismo visual.

Os desenhos realizados pelas crianças possibilitaram classificá-los em grupos. No primeiro, estavam desenhos muito primitivos, que não se aproximavam nem da figura humana nem das formas apresentadas para a cópia. Nessas representações gráficas, as mais primitivas eram muito parecidas com novelos de lã, um emaranhado de fios que se cruzavam e riscavam o papel. Tais desenhos não tinham intencionalidade de reproduzir algo que se assemelhasse ao que fora pedido. Os desenhos com tais características foram realizados pelo grupo mais jovem que participou da pesquisa, entre dois anos e meio e quatro anos. As representações gráficas com essas características, segundo Luquet, são denominadas de incapacidade sintética, mais conhecidas por garatujas.

Os desenhos da figura humana menos primitivos que apresentavam um avanço em relação aos anteriormente feitos, eram um grande “círculo” com dois ou quatro riscos e alguns adendos internos ao “círculo”. Tais desenhos são conhecidos por badamecos, ou badamecos girinos; as formas geométricas dos desenhos seguiam o mesmo padrão, eram esboços circulares com riscos entrecortando os rabiscos circulares – exercícios motores.

Os desenhos realizados por esse primeiro grupo mostram que as relações geométricas utilizadas eram as topológicas.

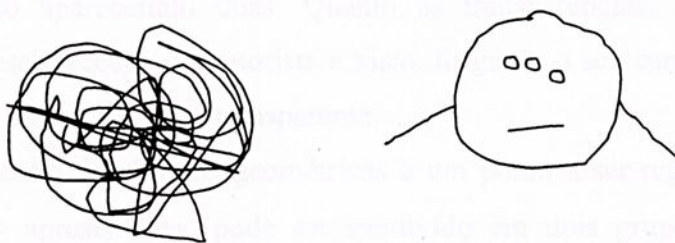


Figura 9 – Desenhos realizados por crianças entre 2;06 e 4;00 anos, na fase da incapacidade sintética (garatuja e badamecos ou badamecos girinos).

Num segundo grupo, os desenhos tendiam a apresentar um início de proximidade com a figura humana e com as formas geométricas. A marca diferencial em relação ao grupo anterior era a intencionalidade. As representações gráficas realizadas se diferenciavam da garatuja e mostravam a distinção entre formas abertas e

fechadas. Entretanto, ainda não havia sucesso, por exemplo, na cópia das cruzes ou mesmo de círculos precisos, mas as relações de interioridade e exterioridade, de envolvimento já se encontram presentes. As figuras compostas (um círculo inscrito em um triângulo isósceles), apesar da dificuldade em se querer identificá-las, em virtude da falta de exatidão do tangenciamento dos lados onde as figuras compostas se tocam, pois os desenhos apresentam-se como duas formas arredondadas provando o uso de relações primitivas, mas com as características topológicas.

O desenho da figura humana, nesse grupo bem mais facilmente reconhecível, ostentava várias características que permitiam reconhecer a cabeça, o tronco, os braços e as pernas.

O terceiro grupo, que em relação ao desenho da figura humana apresentava o que Luquet denominou de realismo intelectual, ou seja, as crianças colocavam no desenho as características que elas sabiam que tinha o que ia ser representado graficamente e não necessariamente o que era visto, com rebatimentos e transparências.

Os rebatimentos e as transparências são próprios das confusões realizadas no que tange à coordenação de pontos de vista sobre um mesmo objeto e à localização do objeto em relação aos eixos verticais e horizontais, como no caso das árvores perpendiculares à montanha e as chaminés perpendiculares ao telhado. Esse é um indicativo do início da utilização das relações projetivas e euclidianas. Nos rebatimentos, a confusão era relativa à escolha do ângulo a se ver o objeto. Assim, uma mesa vista frontalmente era desenhada com quatro pernas, onde, pelas leis da perspectiva só apareceriam duas. Quanto às transparências, o exemplo de várias crianças era esclarecedor: o motorista é visto dirigindo o seu carro com o corpo todo à mostra, como se a porta fosse transparente.

O desenho das formas geométricas é um ponto a ser registrado, pois dadas as características apresentadas, pode ser subdividido em dois grupos. O primeiro grupo relativo à diferenciação dos ângulos que aparecem bem demarcados nos quadrados e retângulos (diferente dos desenhos anteriores), bem como o ponto de tangência das cruzes. O diferencial do segundo subgrupo é a precisão no traçado e o ponto de tangência das figuras compostas. O losango, figura mais difícil para o grupo, aparece com a preocupação dos sujeitos em mostrar o vértice dos lados que se encontram na horizontal, ligeiramente marcado.

O quarto grupo, finalmente, foi o que utilizou as relações mais complexas, nas quais as formas geométricas apresentam precisão nos traçados e nos pontos de contato

das figuras compostas; fato a ser ressaltado é que os sujeitos utilizaram a folha de papel como um suporte de referência na distribuição dos desenhos (eixos horizontais e verticais), o que anteriormente não foi observado. Os fatos apresentados possibilitam acompanhar o desenvolvimento da inteligência infantil tendo como parâmetro as relações espaciais.

A segunda prova procurou avaliar o uso das relações projetivas. Para tanto, pedia-se a construção da reta projetiva conforme explicado anteriormente⁵⁷.

A construção da reta projetiva é facilmente realizada, utilizando-se a conduta de mirar. Nitidamente, tal procedimento, de característica projetiva só foi utilizado espontaneamente por uma criança, que descobriu a prática durante as explorações para verificar a “retidão” dos palitos que havia alinhado. Apesar de parecer um procedimento óbvio à construção de retas, ou de alinhamentos de objetos, sua explicação é altamente técnica, pois envolve o princípio básico das leis da perspectiva. Outras duas crianças, na montagem da reta, arrumaram os palitos posicionando os intermediários entre o primeiro e o último, por tentativas sucessivas, unindo as duas mãos, ou seja, de uma forma prática.

Os resultados obtidos deram origem a dois grupos: o primeiro grupo, montou uma fileira de palitos com características topológicas, prevalecendo a proximidade entre eles, sem se preocupar com o que havia sido pedido. Tal grupo tinha, inicialmente, dificuldade em entender o que era uma reta, mas compreendia o que era uma fila.

O segundo grupo pode ser subdividido em dois, a característica principal do primeiro subgrupo era a construção da reta projetiva, utilizando as bordas da mesa como referencial, fato que ficou comprovado na mesa redonda, a construção da reta onde os pontos iniciais e finais estavam localizados na quina da mesa e, portanto, a reta a ser construída não tinha o apoio das bordas, formava uma catenária. A utilização das bordas da mesa como apoio para a construção da reta projetiva demonstrava o início da utilização de coordenadas externas. Já o segundo subgrupo tinha como fator diferencial a utilização de procedimentos mais adequados. Apesar de ser uma construção por ensaio e erro, arrumavam os palitos um na continuidade do outro, e não na totalidade dos palitos. O sujeito que descobriu o procedimento da mirada acidentalmente e os demais, que arrumavam os palitos com as mãos, são pertencentes a esse subgrupo.

⁵⁷ Os procedimentos utilizados estão explícitos em: *As relações projetivas*, p. 77.

A terceira e última prova analisou as relações euclidianas, através da representação da horizontalidade do nível dos líquidos⁵⁸ e da possível utilização de referenciais externos. Os resultados encontrados foram classificados em três grupos. Os sujeitos classificados no primeiro eram os mais jovens da pesquisa, como ocorrido nas provas anteriores.

A horizontalidade do nível dos líquidos mostra como para a criança a compreensão da realidade demanda mais do que a simples observação, pois fato corriqueiro é a visualização da superfície dos líquidos⁵⁹. Desde muito cedo, a criança faz experiências com líquidos, banhos diários, visualização do leite na mamadeira e no copo, porém isso não é suficiente para a aquisição de tal conhecimento. Os dados que se seguem mostram como os sujeitos utilizam as relações geométricas na situação proposta.

Os resultados encontrados foram classificados em três grupos. No primeiro, os sujeitos somente utilizavam as relações topológicas, fato comprovável pelas explicações dadas que mostravam a ausência de abstração de horizontalidade no nível do líquido, afinal, verem o movimento das garrafas e a manutenção da posição do nível do líquido nenhuma influência exercia no comportamento dos sujeitos, pelos desenhos nos quais apareciam somente rabiscos dentro das garrafas, mostrando a interioridade do líquido e, finalmente, por não perceberem, nos cartões, os erros de posição do nível do líquido.

O grupo intermediário avançava em relação ao anterior por mostrar a superfície do líquido como algo plano, mostrando por gesto nas garrafas vazias e nos desenhos onde deveriam marcar a superfície, diferente do grupo anterior. Aqui as crianças iniciavam a apresentação gráfica do nível do líquido utilizando o fundo da garrafa como referência, como na construção da reta projetiva. Nesse mesmo grupo, alguns sujeitos avançavam no sentido de apresentar maior flexibilidade em relação ao nível do líquido, nos cartões acertavam em algumas situações. Por exemplo, percebiam que, quando a garrafa de bordas paralelas estava em posição horizontal, o nível do líquido estava coincidindo com as bordas da garrafa. Podemos conferir o início de uso de eixos externos com o uso do referencial do fundo da garrafa.

O terceiro grupo teve sucesso na maioria das previsões e desenhos para marcar o nível do líquido, antecipando-se às experiências e se utilizando delas para realizar a marcação. Também separavam adequadamente os cartões nos quais o nível era marcado

⁵⁸ Os procedimentos utilizados estão explícitos em: *As relações euclidianas*, p. 80.

⁵⁹ Como a superfície considerada tem apenas alguns centímetros, consideramo-la plana.



errado: na maioria dos casos, os sujeitos explicavam como seria a forma correta da superfície para corrigir o cartão.

Os resultados dessa pesquisa nos levaram a afirmar que as primeiras relações utilizadas por esse grupo de sujeitos foram as topológicas. Tais relações são necessárias para a construção das relações projetivas e euclidianas, que vão aparecer paulatinamente durante o processo de construção da inteligência; o grupo mais jovem usou, predominantemente, as relações topológicas. Esses sujeitos tinham entre dois anos e meio e quatro anos de idade.

No grupo intermediário, as relações projetivas e euclidianas começam a ser utilizadas, os desenhos da figura humana com as transparências e os rebatimentos, das formas geométricas com o aparecimento das formas simples, tais como o quadrado, o retângulo e os círculos atestam tal fato. O início de construção da reta projetiva tendo como referência as bordas da mesa e no nível dos líquidos, o paralelismo com o fundo da garrafa, mesmo que em oposição com as regras da física, demonstravam o início de uso de relações projetivas e euclidianas.

Piaget e Inhelder (1993) mostraram que a geometria infantil contraria a ordem apresentada pela ciência geométrica, assim como também pudemos constatar, no nosso estudo (KOBAYASHI, 1998), que as relações utilizadas pelas crianças são inicialmente as topológicas, seguidas das projetivas e euclidianas. Já a Ciência geométrica apresenta a geometria euclidiana como sendo a primeira, seguida, séculos depois, pela projetiva e, alguns séculos mais tarde, pela topológica.

A construção do espaço é um processo longo, não está em estruturas pré-formadas, nem ocorre pela experiência somente. Os dados apresentados mostram que os sujeitos entrevistados, crianças de educação infantil, apresentaram resultados muito semelhantes aos encontrados por Piaget e Inhelder (1993).

CAPÍTULO 3

CAPÍTULO 3

CAPÍTULO 3

As relações espaço-geométricas infanto-juvenis⁶⁰

[...] o espaço não é, de modo algum, a percepção de um continente, mas de conteúdos, isto é, dos próprios corpos; e se o espaço se torna, em certa acepção, em continente, isso ocorre apenas na medida em que as relações que constituem a própria objetivação desses corpos logram coordenar-se entre si até formarem um todo coerente, (PIAGET, 1976a, p. 94).

Apresentamos, nos capítulos anteriores, as razões que nos levaram ao estudo do espaço e da geometria (introdução), além de um breve histórico sobre o ensino da geometria escolar e dos programas utilizados para tanto (capítulo 1). Em seguida, foram mostrados os resultados dos estudos das relações espaciais do nascimento até os sete anos (capítulo 2). O texto que segue tem como objetivo principal mostrar o desenvolvimento da inteligência após a função representativa e, principalmente, no período denominado como das operações concretas, tendo como conteúdo as operações necessárias às relações espaço-geométricas.

3.1 A representação e as relações espaço-geométricas

O ser humano difere dos animais por inúmeros fatores, mas podemos destacar um: o poder de representar. Se tomarmos a definição de tal verbo e, portanto, da ação, teremos: **ser a imagem ou a reprodução de, tornar presente, reproduzir, descrever**, etc. Para a obra de Piaget, a representação marca uma fase do desenvolvimento humano na qual a inteligência passa a gozar da capacidade de evocar, de lembrar, de antecipar ou retroagir no tempo e no espaço. Essa capacidade nos torna livres do aprisionamento do presente, podemos comunicar nossos desejos, anseios, alegrias e tristezas pela linguagem, pela arte e por tantas outras formas.

[...] o próprio da representação é, ao contrário, ultrapassar o imediato, fazendo crescer as dimensões no espaço e no tempo do campo de adaptação e, portanto, evocar o que ultrapassa o domínio perceptivo e motor. Quem diz representação

⁶⁰ Denominamos o período do desenvolvimento do grupo estudado de Infanto-Juvenil por compreender uma faixa etária entre sete e doze anos. Segundo a teoria piagetiana é o período das operações concretas.

diz, conseqüentemente, reunião de um “significado” fornecido pelo pensamento. (PIAGET, 1990, p. 345)

Para os estudiosos do desenvolvimento e da aprendizagem humana – pedagogos, educadores, psicólogos e outros –, as condutas da função semiótica ou simbólica possibilitam aproximações que permitem conhecer como pensam, agem e o que conhecem do mundo, assim como abrem as possibilidades de troca com o meio.

Para conhecermos como ocorre a construção da inteligência, mais precisamente neste trabalho, do espaço e da geometria ou das relações espaço-geométricas no período operatório-concreto, é preciso que os sujeitos exteriorizem as suas concepções. Isso ocorre quando eles se utilizam das condutas representativas: a linguagem, o desenho, o gesto e outras formas de expressão.

Entendemos como relações espaço-geométricas aquelas que culminam com os conhecimentos nascidos do saber geométrico e que são utilizadas na resolução de problemas do espaço, como por exemplo, representar graficamente o deslocamento realizado no caminho de casa para a escola ou da escola para casa. Apesar da aparente simplicidade de tal conhecimento, há uma enorme diferença entre realizar um percurso e representá-lo graficamente.

Faz-se uma pergunta: o que nos faz ser diferentes dos demais seres vivos e o que nos habilita a compreender o que não está diretamente explícito, por exemplo, quando, por exemplo, lemos um mapa, utilizamos uma equação matemática do movimento e nos emocionamos com uma poesia, em que não há uma relação direta entre o que se “lê” e ao que nos remete? A posse da função representativa, semiótica ou simbólica é que nos permite diferenciar significantes de significados. Para entendermos como isso é possível, é necessário conhecer o desenvolvimento intelectual que nos transforma em seres de representações.

Piaget, nos seus estudos sobre a representação, teve na obra de Ferdinand Saussure (1857-1913), um grande lingüista genebrino, as referências necessárias para função geradora da representação. Os signos seriam representações arbitrárias enquanto o símbolo seria representação motivada; no signo, a relação entre significante e significado não é direta, é arbitrária, já no símbolo, há uma proximidade entre o significante e o significado (SAUSSAURE, 2000, p. 81-82).

O laço que une o significante ao significado é arbitrário ou então, visto que entendemos por signo o total resultante da associação de um significante com um significado, podemos dizer simplesmente: *o signo lingüístico é arbitrário.*

Utilizou-se a palavra *símbolo* para designar o signo lingüístico ou, mais exatamente, o que chamamos de significante. Há inconvenientes em admiti-lo, justamente por causa do nosso primeiro princípio (arbitrariedade do signo). O símbolo tem como característica não ser jamais completamente arbitrário; ele não está vazio, existe um rudimento de vínculo natural entre o significante e o significado. O símbolo da justiça, a balança, não poderia ser substituído por um objeto qualquer, um carro, por exemplo.

Segundo Becker (2002b, p. 11), para Piaget (1990), a criança, ao nascer, traz consigo uma possibilidade ilimitada de realizar projetos. Isto porque herda uma bagagem hereditária que lhe habilita para tanto. As estruturas que lhe propiciam tal progresso são três: as totalmente construídas, as parcialmente construídas e as nada construídas.

As primeiras são referentes aos aparelhos: digestivo, circulatório, respiratório, etc. que, apesar de as adaptações iniciais carecerem de cuidados, já se encontram prontos ao nascer. As estruturas parcialmente construídas são relativas ao sistema nervoso e as estruturas mentais ou da inteligência, que serão construídas no decorrer da vida, são aquelas responsáveis pela adaptação do homem ao mundo, incluem componentes afetivos, de necessidades, motivação e interesse. Tais estruturas têm início nos reflexos – ações reflexas constitutivas da inteligência sensório-motora e culminam com as estruturas da inteligência proposicional que utilizam as ações virtuais.

A função simbólica emerge justamente das coordenações do período sensório - motor. Sendo condição primordial de toda a socialização, a criança constrói um sistema lógico, de grande complexidade, graças às coordenações de suas ações: são elas que irão dar condições à criança para a conquista da linguagem.

Piaget (1983, p. 237) classificou o desenvolvimento intelectual ou das estruturas da inteligência em quatro períodos: sensório-motor, pré-operatório, das operações concretas e das operações formais. Cada um deles possui características próprias e preparam para o período posterior.

O desenvolvimento se faz por graduações sucessivas, por estágios e por etapas; distinguiremos as quatro grandes etapas de desenvolvimento nesse desenvolvimento que descreverei brevemente. Primeiramente, uma etapa que precede a linguagem e que chamaremos a da inteligência sensório-motora, antes dos 18 meses mais ou menos. Em segundo lugar, uma etapa que começa com a linguagem e que vai até 7 ou 8 anos, que chamaremos o período da representação, mas pré-operatória, no sentido que definirei mais adiante. Depois, entre os 7 e 12 anos, mais ou menos, distinguiremos um terceiro período que chamaremos de operações concretas, e, finalmente, depois de 12 anos, as operações proporcionais ou formais. (PIAGET, 1983, p.215).

O estudo da construção do espaço nos mostrou que, ao nascer, o bebê está munido de coordenações sensórias e motoras de fundo hereditário, além disso a inteligência, nesse período, não intenta a enunciados de verdade, mas à busca de resultados favoráveis, e o comportamento é basicamente motor, por isso mesmo período sensório-motor. A criança ainda não representa eventos internamente e não “pensa” conceitualmente e, sim utiliza-se de uma inteligência prática movida pela ação no instante em que ela ocorre sem passado nem futuro. É uma inteligência vivida e nada reflexiva, podendo ser comparada a um filme em câmara lenta no qual não há continuidade entre os quadros, assim sem visão de totalidade e sem a compreensão de conjunto. Apesar disso é visível o progresso que ela efetua nos dois primeiros anos de vida.

O espaço inicial é um somatório de espaços incoordenados, que existem somente quando entram em ação. Dessa forma, podemos dizer que há um espaço bucal, visual, auditivo, corporal, etc. São espaços heterogêneos, cada um centrado num foco de atividades corporais, a elaboração final do espaço objetivo é dependente da formação do objeto permanente que ocorrerá no final do sensório-motor.

No final do período sensório-motor, e início do pré-operatório, o que ocorre, aproximadamente, na metade do segundo ano de vida, a criança torna-se capaz de elaborar novos meios, agora não mais somente por diferenciação externa e combinação de novos meios por ensaio e erro, mas pela coordenação interna das ações que se manifesta em novos e súbitos *insights*. Tal fato pode ser constatado com o seguinte exemplo⁶¹: uma criança, no seu cercado de barras verticais, com espaço entre elas de 6cm, deseja pegar uma haste de 20cm, assim, maior que a passagem entre as barras e que se encontra externa a ela. Inicialmente, tenta pegá-la de modo transversal às ripas (horizontal), forma corriqueira e conveniente, mas, dado às dimensões do objeto para passar por entre os espaços das grades, fracassa. Alguns instantes se passam até que ela, sem hesitar, gira prontamente a haste que, na posição vertical, passa por entre as grades.

Essa conquista vai depender da formação de um objeto permanente que, segundo Piaget (1975b, p. 92) é, “[...] a primeira das formas de conservação, resulta, como todas as outras, da estreita união de um elemento racional ou dedutivo e de um elemento empírico [...]”, mas para que o objeto exista algumas condições devem ser atendidas:

⁶¹ Este protocolo (Obs. 162, p. 287-288) se encontra na obra: *O nascimento da inteligência na criança*.



para que um quadro conhecido se torne “objeto” é preciso que dissocie a própria ação e fique situado num contexto de relações espaciais e causais independentes da atividade imediata. (PIAGET, 1975b. p.14).

Os avanços realizados pela criança, ao organizar a realidade com suporte em esquemas gerais de ação que englobam o espaço e o tempo, a causalidade e, sobretudo, os objetos permanentes, entre os quais se encontra o “eu”, evidenciam um progresso muito grande em relação ao nascimento, momento no qual não havia nem sujeito nem mundo exterior. Inicialmente o espaço focado no corpo do bebê, somente por volta dos dezoito meses, com a interiorização dos esquemas de ação, é que ocorrerão as representações. Tal fato pode ser observado quando as crianças começam a se expressar por meio da imitação definida, do jogo simbólico, do desenho, da linguagem e dos primórdios da imagem mental.

3.1.1 As condutas representativas

O aparecimento da linguagem marca a efetiva inserção da criança na vida social, que passa a exteriorizar seus sentimentos e ações por meio de novas capacidades, de condutas representativas. A representação simbólica é a diferenciação entre significantes e significados. Conforme Lopez (p. 80), “o significante refere-se a um estímulo externo, enquanto o significado é a representação interna que a pessoa realiza do estímulo”.

A capacidade de evocação representativa de objetos e eventos ausentes é a principal característica da função simbólica, o que possibilita à criança armazenar fatos passados e imaginar acontecimentos futuros. Antes disso, a criança está limitada a espaços e tempos próximos.

Aparecimento da função semiótica. – No curso do segundo ano (em continuidade com o estágio VI...) surge, ao contrário, um conjunto de condutas que supõe a evocação representativa de um objeto ou de um acontecimento ausente e envolve, por conseguinte, a construção ou emprego de significantes diferenciados de significados, visto que devem poder referir-se não só a elementos não atualmente perceptíveis, mas também aos que se acham presentes. Distinguem, pelo menos, cinco condutas, de aparecimento mais ou menos simultâneo, e que vamos enumerar na ordem de complexidade: crescente: 1) [...] imitação diferida [...], 2) [...] jogo simbólico [...], 3) [...] desenho ou imagem gráfica [...], 4) [...] imagem mental. 5) Enfim, a linguagem [...].

A importância da função representativa ou semiótica é que vai permitir uma dilatação do espaço e do tempo, isso implica inserção de acontecimentos e objetos que podem estar agrupados no passado ou no futuro, pois até então só havia o presente.

Para este estudo, as condutas de imitação diferida, do desenho, da imagem mental (que, como veremos no estudo do espaço, têm importância singular) e da linguagem é que vão possibilitar-nos aproximar dos conhecimentos espaço-geométricos do grupo estudado.

A imitação

A imitação tem início no período sensório-motor com o funcionamento dos esquemas de ação que conduzem a uma forma rudimentar e esporádica de imitação, mas presa à percepção do modelo. Por volta dos quatro meses, as tentativas de imitação tornam-se mais sistemáticas. A coordenação dos esquemas de ação é que possibilita à criança reproduzir os gestos do modelo relativos às partes do seu corpo que estão visíveis.

No final do período sensório-motor, aparece a imitação diferida ou protelada, ou seja, aquela que ocorre na ausência do modelo, que capacita a criança a “copiar” objetos, pessoas, animais, eventos já decorridos. Assim, ao perguntarmos o que é uma bola à criança, ela pode unir as duas mãos num movimento esférico que, mesmo na falta de palavras ou da vista do objeto, há a compreensão do que foi perguntado. Plenamente compreensível, o gesto consiste na capacidade de recriar algo que pudesse ser identificado como uma bola. Para que a criança assim procedesse, foi necessário copiar fielmente algo que não estava presente.

Assim a importância da imitação está no fato de que ela é o elo da passagem da inteligência sensório-motora para a inteligência representativa. Assim a importância da imitação está no fato de ser simultaneamente a prefiguração sensório-motora da representação e, conseqüentemente, a passagem do nível sensório-motor para as condutas verdadeiramente representativas. Como prefiguração da representação, é uma representação em atos e não ainda em pensamento, mas a imitação é a base, ou, como falam Piaget e Inhelder (1994, p. 49), é onde “*repousam as quatro dessas cinco formas de condutas (condutas representativas)*”. Com a imitação diferida, a representação não mais requer a cópia perceptiva direta do modelo, pois suas imitações adquiriram virtuosidade, isto é, ganharam status de ocorrerem internamente em pensamento, no qual “o ato se desliga do contexto, torna-se significativo, diferenciado e, por conseguinte, já é em parte pensamento”. (PIAGET; INHELDER, 1994, p. 50).

O jogo simbólico

O jogo simbólico, assim como a imitação, tem início no sensório-motor, todavia ainda destituído de simbolismo, somente como um jogo de puro exercício, fazer pelo prazer de fazer uma ação. A partir da representação, a criança terá, nessa conduta, uma forma de adaptação ao convívio com os adultos, às regras sociais e às leis do mundo físico no qual ela “faz-de-conta” sendo, portanto, indispensável à sua adaptação, ao descolar-se da realidade, como quando a criança, a partir de um bloco de madeira, transforma-o em um avião, impregnando-o de atributos não diretamente existentes, mas atribuídos ao objeto representado por ela.

O jogo propicia à criança construir símbolos⁶², sem constrangimentos ou sanções. Ela cria para si mesma, segundo os seus desejos. Há a assimilação da realidade subordinada às suas necessidades, sendo que na imitação há a supremacia da acomodação da realidade aos modelos exteriores.

O jogo simbólico tem seu ápice entre 2-3 e 5-6 anos, portanto, na passagem da inteligência prática para a inteligência representativa. A natureza do jogo simbólico é imitativa, tornando-se numa forma de auto-expressão para a criança. Os jogos de regras que os sucedem como, por exemplo, jogos de gude e amarelinha - foram os instrumentos utilizados por Piaget para o estudo da internalização e prática das regras. Esses jogos, transmitidos socialmente na relação entre as crianças, evidenciam a importância da vida social. Os jogos de construção, que surgem após os de regras, mesmo que prenhes, inicialmente, de um simbolismo lúdico, no decorrer do tempo transformam-se em adaptações (construções mecânicas extremamente elaboradas como pode ser conferido nas montagens dos “legos”) e nas criações inteligentes de soluções de problemas.

O desenho

O desenho está a meio termo entre o jogo simbólico e a imagem mental, e, como afirmaram Piaget e Inhelder (1993, p. 63), “O desenho é uma representação, isto é, ele supõe uma construção de uma imagem bem diferente da percepção”. Quando a criança desenha, oferece-nos a possibilidade de explorar a invenção de um equivalente, ela constrói ativamente seus próprios pontos de vista sobre o mundo. Para Goodnow (p.31), os desenhos são equivalentes que contêm algumas das características do original a ser desenhado, sendo

⁶² Segundo Piaget (1990, p. 88), “[...] devemos reservar o termo “símbolo” para significantes “motivados”, isto é, que apresentam uma relação de semelhança com o significado, em contraste com os “signos” que são “arbitrários” (quer dizer, convencionais ou socialmente impostos)”.

a representação gráfica (desenho) uma área na qual podemos observar quais são as propriedades do objeto que a criança selecionou para retratar – para representar.

A importância de se estudar o desenho e o seu desenvolvimento, segundo Piaget, é dupla: é uma ótima introdução ao estudo da imagem mental e revela uma notável convergência com o desenvolvimento da geometria espontânea na criança⁶³. Para o estudo do desenho, Piaget tomou como referência a categorização de George Henri Luquet (1979), segundo o qual, o desenho, até os 8-9 anos, é essencialmente realista na intenção, o desenho infantil não é uma contemplação estética, mas uma tentativa inicial de conhecer os objetos e afirmar-se perante o mundo exterior.

O desenho passa por diferentes fases no seu desenvolvimento: realismo fortuito, realismo falhado, realismo intelectual e narração gráfica ou realismo visual. Na fase inicial do desenho infantil – realismo fortuito –, a criança risca o papel pelo gosto de rabiscá-lo, pelo movimento de tocar o papel com o lápis e deixar sua marca, sem intenção de representar qualquer coisa, objeto, lugar ou pessoa. Os rabiscos que marcam o papel ou a parede são como rolinhos de lã e denominados de garatuja.

A evolução do desenho infantil em relação à fase anterior começa com a capacidade da criança em representar, no desenho, objetos que podem ser nomeados, não ocorrendo mais a simples tarefa mecânica de riscar a superfície. Devido à dificuldade em se estabelecer relação entre o que a criança gostaria de desenhar e o que realmente aparece, dá-se o nome à fase de *incapacidade de síntese*, ou melhor, *incapacidade sintética ou realismo falhado*⁶⁴. “A criança não chega a sintetizar num conjunto coerente os diferentes pormenores que desenha com preocupação exclusiva de os representar cada um por si” (LUQUET, 1979, p. 211).

Os desenhos ou representações gráficas que anunciam uma relação entre o que se quer desenhar e o desenho propriamente surgem, segundo Luquet, sob duas formas: realismo intelectual e visual. Isto quer dizer que o desenho infantil pode ser considerado como uma representação dos objetos tanto pelo conhecimento que a criança tem sobre eles, quanto pela aparência oferecida aos olhos. O adulto, assim como a criança, quando desenha, usa como auxiliar esses dois recursos.

Se, para o adulto, o desenho é fiel, assim como uma fotografia, ao que se quer desenhar, quando é como uma fotografia e, são guardadas as leis da perspectiva projetiva com manutenção das formas e grandezas e das proporções, para a criança, o

⁶³ O que pode ser conferido na obra: *La représentation de l'espace chez l'enfant*.

⁶⁴ A tradução da obra de Piaget *La representation de l'espace chez l'enfant*, para o português traz a nomenclatura realismo gorado.

desenho parecido deve ter característica dos elementos reais do objeto, mesmo que eles sejam invisíveis. Assim, um desenho de uma mesa observadora de determinado ponto de vista, no qual somente duas de suas pernas são visíveis, necessariamente terá as quatro pernas retratadas, afinal, a criança põe no desenho não necessariamente o que vê, mas o que ela sabe que tem o que vai desenhar.

Essas características que fogem aos padrões da geometria projetiva e euclidiana são denominadas de rebatimentos e transparências e vão aparecer nas representações do grupo B e C dos desenhos da geometria vivida e I e II da geometria axiomática (Capítulo 5).

Este realismo intelectual pode ser levado até o ponto de reproduzir no desenho não só os elementos concretos invisíveis, mas mesmo os elementos abstratos que só têm existência no espírito do desenhador. (LUQUET, 1979, p.159-160).

Ao realismo intelectual segue-se o realismo visual ou narração gráfica, “às contradições flagrantes com a experiência e, se pode dizer, absurdos empíricos” a criança passa a “aplicar à sua obra a faculdade crítica que ela já possuía e não usava. Então, verificando por experiências repetidas a insuficiência irremediável do realismo intelectual, condena-o, como pode, à representação gráfica” (LUQUET, 1979, p.188), pois o desenho apresenta todos os elementos necessários à sua identificação, sem colocar o invisível ou deixar de colocar o visível e necessário. No caso dos protocolos apresentados no capítulo 5, veremos as representações gráficas dos percursos domésticos mostrados nos sujeitos pertencentes ao grupo III e dos entes geométricos do grupo C.

A imagem mental

Durante o período sensório-motor, há todo um preparo da função representativa, que é formada a partir da interiorização da imitação, fato que levará à diferenciação ativa entre significantes e significados. A criança a partir de então, poderá imaginar, fantasiar situações decorrentes de suas experiências. A imagem mental não é mais uma cópia fiel da experiência armazenada na mente da criança, sendo representação como o desenho, que mantém semelhança com o que ela quer representar. Assim a imagem

mental pode ser concebida como um símbolo, pois guarda uma aproximação entre o significante e o significado, diferentemente do signo⁶⁵, que é arbitrário.

Os estudos de Piaget e Inhelder (1977) sobre a imagem mental mostraram que, no período pré-operatório, as imagens são basicamente estáticas como estados que não estão em uma seqüência, as quais não reproduzem movimentos e transformações nem seus resultados. Assim, comparáveis às fotografias e aos desenhos, somente com as operações (operatório-concreto e formal) surgem os aspectos dinâmicos, que carecem das operações que possibilitam, simultaneamente, compreender e imaginar esses processos.

Para o estudo da representação espacial e da geometria, a imagem tem uma característica diferencial, pois desempenha um papel particular no domínio espacial por ser ela mesma de caráter espacial. Geralmente, a imagem não é mais do que um símbolo que representa concretamente os conceitos que simboliza. Entretanto, no caso das figuras espaciais, há uma homogeneidade entre o significante e o significado. Tal particularidade será estudada no próximo item.

A linguagem

A linguagem das condutas representativas é a mais complexa para a criança que, ao nascer, encontra um sistema lingüístico ao qual ela deve se submeter, que impõe no seu uso um conjunto de instrumentos cognitivos, tais como: relações, classes, implicações, etc. que serão construídas no decorrer das trocas sociais e dos processos de assimilação e acomodação.

A linguagem, para se tornar um elemento de troca, requer a subordinação do que se fala, das idéias que se quer transmitir às regras que vão torná-las possíveis de compreensão. De acordo com Piaget (1973), quando a criança começa a utilizar adequadamente nas frases os substantivos e os adjetivos é por que tem domínio adequado das classes e das relações.

⁶⁵ A terminologia utilizada por Piaget tem como fonte a obra de Saussure.



No período simbólico, as classes⁶⁶ são intuitivas e restritas, portanto inacabadas. A criança, nesse período, a partir da combinação de diversos esquemas de ação, como: olhar, pegar, jogar, manipular, etc., internaliza essas ações na forma de imagens ou esboços do real, as quais vão aferir qualidades a um determinado objeto. Por exemplo, quando disser “bola”, estará se referindo não a uma classe de objetos redondos (conceito), mas apenas à bola com a qual realizou exploração ativa. A imagem, como anteriormente citado, é específica e particular das experiências do sujeito e, portanto, traduz as experiências singulares, servindo para assimilar objetos ou uma “coleção” de objetos que mantêm semelhança com aquele que oportunizou a sua construção.

Ao evocar imagens de objetos ou acontecimentos, a criança dessa fase tem uma representação justaposta e sincrética, uma visão particular que não lhe possibilita apreender, simultaneamente, duas ou mais imagens para tentar acomodar e assimilar reciprocamente o todo.

Piaget (1967, p.159), sobre essa característica da inteligência infantil, mostra a diferença entre a construção conceitual do adulto e da criança. No adulto, os conceitos estão em estado de equilíbrio, pois são fruto de adições ou multiplicações lógicas. Já a criança não consegue, ainda realizar tais operações, quando se mostra a ela uma situação a ser resolvida na qual ela tem que realizar intersecções de classes.

Se este animal tem orelhas compridas é um mulo ou um burro. Se este animal tem cauda grossa é um cavalo ou um mulo. Ora, se este animal tem orelhas compridas e uma cauda grossa. Que animal é?” Ora, a experiência tem mostrado que, entre os menores [...] (até os 8 anos, o que chamávamos em nosso artigo de estágio irrefletido), a criança não chega a dar conta, simultaneamente, das duas condições ao mesmo tempo, nem mesmo reuni-las em um só ‘apanhado’ da consciência.

As condutas nascentes apresentadas no período denominado de pré-operatório ou simbólico, portanto, de preparo e organização das operações concretas tendo uma estrutura pré-operatória, como apresentado no exemplo anterior, mostram como o pensamento da criança evoluiu de um ser cujo “pensamento” se dava por ações (sensório-motor) a um ser que passa a ter capacidade de representar, paulatinamente, eventos internamente, tornando – se menos dependente das ações sensório-motoras.

⁶⁶ Classes são conjuntos de elementos que guardam semelhanças, tornando-os partidários de qualidades comuns que os agregam fazendo-os pertencer a um mesmo universo.

3.1.2 No início do período pré-operatório, a criança é fortemente influenciada pela percepção. Apesar da função representativa, é incapaz de reverter ações que presencia, como, por exemplo, ao comparar duas fileiras de fichas que inicialmente se encontram em correspondência biunívoca, se aumentarmos os espaços de uma das fileiras, a quantidade de fichas não é mantida, a criança afirma que fileira de maior comprimento tem mais elementos.

Isso comprova a sua dificuldade em raciocinar sobre as transformações, focalizando o momento inicial e final, não conseguindo integrar uma série de eventos intermediários acentuar e revertê-los, o que atesta a falta de reversibilidade e centração do pensamento infantil nessa fase. As características descritas tornam o pensamento relativamente mais lento, concreto e restrito.

Tabela 2 – Relação entre períodos de desenvolvimento a ação e o pensamento.

Período	Idade aproximada (anos)	Espaço ⁶⁷	Ação	Pensamento
Sensório-motor	0 – 2	Prático	Direta sobre o meio	Esquemas sensório-motores dependendo da ação sobre o meio
Pré-operacional	2 – 7	Intuitivo com representações de imagens estáticas	Ações internalizadas, mas presas à percepção	Pensamento preso à percepção
Operatório concreto	6/7 – 11/12	Composições reversíveis e coerentes dependentes de manipulações concretas	Ações internalizadas que necessitam da ação concreta	Pensamento lógico não dependente da percepção imediata e das ações motoras
Formal	11/12	Composições reversíveis e coerentes independentes de manipulações concretas	Ações virtuais	Pensamento proposicional

Por volta dos 7-8 anos, há uma transformação na maneira com que a criança aborda o mundo. A representação dos objetos deixa de ser constituída por imagens e passa a ser elaborada por formas abstratas como os conceitos de animal, flor, caderno, etc. Essa transformação ocorre de forma gradual, e levando anos para ocorrer.

⁶⁷ PIAGET, J. *Introduction a l'épistémologie génétique*, p. 202.

3.1.2 O universo concreto e as operações espaço-geométricas

Se perguntássemos a Piaget o que é o conhecimento, segundo Hans Furth (1974, p.75), a resposta seria a definição de operação. Em várias obras, Piaget define o que é operação:

uma operação é então, psicologicamente, uma ação qualquer (reunir indivíduos ou unidades numéricas, deslocar, etc.), cuja origem é sempre motora, perceptiva ou intuitiva. Essas ações, que são, no ponto de partida, operações, têm, assim elas próprias, por raízes, esquemas sensório-motores, experiências afetivas ou mentais (intuitivas), constituindo, antes de se tornarem operatórias, matéria mesma da inteligência senso-motora e, depois, da intuição. (PIAGET; INHELDER, 1997, p. 48).

Ou ainda:

uma operação é uma ação suscetível de voltar ao seu ponto de partida e de fazer composições com outras segundo esse duplo modo direto e inverso [...], ao redor de 7-8 anos (isto é, na idade normal das primeiras operações concretas) há uma tal coordenação reversível, a qual se mostra precisamente que ela permanecia inacessível até esse nível: a do retorno sistemático ao ponto de partida, de modo a agrupar todos os elementos de uma figura em torno de um ou muitos pontos estáveis de referência. (PIAGET, 1993, p. 51).

As operações apresentam as seguintes características: são ações internalizadas ou realizadas em pensamento tão bem quanto se fossem realizadas materialmente, são reversíveis; mantêm sempre alguma conservação; estão sempre relacionadas a um sistema de operações, nunca existindo isoladamente, e, como citado; constituem-se por volta dos 7-8 anos.

Contrariamente às ações simples de juntar ou separar objetos, as operações são ações internalizadas. Por exemplo, na conservação do líquido, a criança operatória concreta dirá que: “no copo mais alto e mais estreito há a mesma quantidade de água que no copo mais baixo e mais largo, porque se despejarmos novamente a água de um em outro terá a mesma quantidade de líquido”. Para que a criança faça tal afirmação, foi necessário que ela realizasse internamente ações reversíveis relacionadas a um sistema de operações.

Para conhecermos o desenvolvimento do espaço e da geometria, optamos pelo estudo das operações como fio condutor. O grupo alvo desta pesquisa encontra-se no período denominado por Piaget de operatório concreto, dadas as características da inteligência.

O período das operações concretas tem características marcantes, sendo uma fase de transição entre o pensamento pré-operacional e o pensamento formalizado. Nesse período, a criança vai atingir o pleno uso das operações completamente lógicas pela primeira vez. As operações utilizadas nesse período estão apoiadas diretamente nos objetos e não ainda em hipóteses enunciadas verbalmente, como ocorrerá no período posterior – das operações proposicionais, por isso mesmo concretas.

Piaget sugeriu que as crianças do período operatório concreto atingiram determinadas operações mentais mais flexíveis e caracterizadas pela *reversibilidade*. Esta característica vai possibilitar à criança maior mobilidade no seu pensamento, o que acarreta em seu benefício uma descentração progressiva mais rápida que possibilita a resolução de problemas de conservação⁶⁸, além de permitir-lhe apresentar argumentos corretos para suas respostas. Entre a razão e a percepção imediata, vai optar por decisões cognitivas em detrimento das decisões perceptivas. Não mais aprisionada às percepções, será capaz de resolver a maioria dos problemas de conservação até então inacessíveis às suas estruturas cognitivas.

A essência de uma operação neste nível (operações concretas) é que ela é interiorização das coordenações que já existem no plano das ações, só que agora, como elas são internalizadas, há a possibilidade de *reversibilidade* – pode-se voltar ao passado, em pensamento. E, além disso, as operações são sempre coordenadas em estruturas totais, por exemplo, o sistema de classificação, uma série ordenada, a série de números naturais, as correspondências biunívocas e assim por diante. Estruturas totais como essas constituem um campo muito novo e são instrumentos muito, poderosos do que os instrumentos sensório-motores. Porém, aqui há uma forma de limitação, no fato desses instrumentos se aplicarem só a objetos. Nós ainda não temos operações que se apliquem a hipóteses, como encontramos numa criança mais velha. (EVANS, 1972, p. 76, grifo da autora).

Retornemos ao exemplo anteriormente citado da conservação dos líquidos⁶⁹. Para evidenciar as diferenças entre o pensamento pré-operacional e o operatório concreto, tomando-se dois copos idênticos A e B, despeja-se, sob o olhar da criança, a mesma quantidade de líquido em ambos. Mediante a afirmação da igualdade do nível do

⁶⁸ A primeira conservação é a do objeto permanente, que se constitui no final do período sensório-motor. Durante o período das operações concretas, serão elaboradas as conservações físicas, as conservações numéricas e as espaciais, que são o nosso objeto de estudo. É necessário salientar que há defasagens nas conservações.

⁶⁹ Assim como a experiência da conservação de quantidades contínuas – transvasamento dos líquidos, Piaget e seus colaboradores realizaram experimentos semelhantes realizados em relação à massa e ao peso.

líquido nos copos por ela, transfere-se a um terceiro copo C, de mesma capacidade, mas de forma diferente, mais baixo e largo, porém de mesmo conteúdo de um dos copos.

Após o acompanhamento da experiência, a criança, quando questionada se o conteúdo do copo C é igual ao B, responde negativamente, justificando que o copo B contém mais líquido, porque é mais alto, ou o contrário. Tal explicação evidencia as características do pensamento pré-operatório: a criança é incapaz de realizar, mesmo que em face da experiência concreta, a igualdade $A=B$, $B=C$ e $A=C$, pois está centrada no aspecto perceptível da experiência.

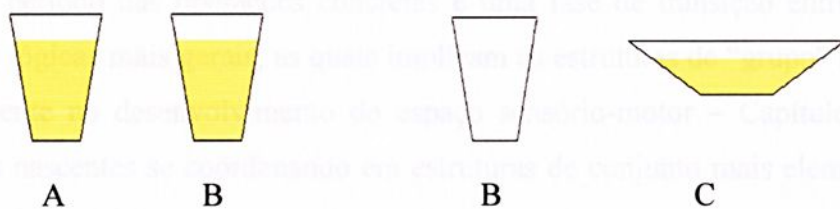


Figura 10 – Recipientes de mesma capacidade e formas diferentes.

Mesmo que exigente da vivência concreta para a resolução dos problemas de conservação que lhe são postos, no período operatório concreto o domínio do pensamento difere do pré-operatório que está subordinado às percepções e no qual a criança é incapaz de reverter as operações, de acompanhar as transformações por que passam os objetos ou eventos, pois a percepção tende a estar centrada numa característica única devido à sua incapacidade de reconstruir uma cadeia de raciocínios que acaba de acompanhar para resolver um problema.

Essas crianças tendem a centralizar sua atenção em configurações estáticas, em estados, e não nas transformações por que passam os objetos. Assim, tais estados são quadros isolados que não estão inseridos em totalidades, ou seja, a criança não consegue ligar os estados e as transformações por que passa o objeto (no caso anterior, a mudança dos recipientes), por isso não atinge a conservação.

O pensamento operatório concreto pode acompanhar as transformações ocorridas e, o que é mais importante, pode realizar operações inversas, ou seja, na experiência do transvasamento dos líquidos, os estados se subordinam às transformações e estas, descentralizadas da ação, tornam-se reversíveis. As crianças explicam as modificações em suas variações compensadas pela invariância do líquido,

que implica reversibilidade, o que as leva a justificar a igualdade da quantidade de líquido pela identidade simples ou aditiva (*a água é a mesma, ou não aumentou nem diminuiu nada*), pela reversibilidade por inversão (*se voltar a água no copo é a mesma água*) e reversibilidade por compensação ou por reciprocidade de relação (*a taça é mais baixa, mas é mais larga; o copo é mais estreito, mas é mais alto, por isso é a mesma coisa*).

3.2 As operações constitutivas do espaço e da geometria infanto-juvenil

O período das operações concretas é uma fase de transição entre a ação e as estruturas lógicas mais gerais, as quais implicam as estruturas de “grupo” (mencionadas anteriormente no desenvolvimento do espaço sensório-motor – Capítulo 2). Com as operações nascentes se coordenando em estruturas de conjunto mais elementares, estas receberão o nome de agrupamentos.

[...] Estrutura que concilia a reversibilidade própria ao grupo e o sistema de encaixes limitados próprios à rede. É esta dupla exigência que realiza a noção de “agrupamento”. Pode-se, com efeito, conceber o “agrupamento” ou como uma rede tornada reversível graças a um jogo de dicotomias hierárquicas (A e A' , B e B' , etc.) ou como um grupo cuja mobilidade é restrita pela intervenção de encaixes, que implicam as identidades especiais $A+A=A$ e $A+B=B$, assim como um princípio de contigüidade. O “agrupamento” é, portanto, uma estrutura intermediária entre o grupo e a rede e, como tal, exprime a natureza própria das totalidades lógicas [...] (PIAGET apud MONTANGERRO, 1998, p.108).

O estudo do pensamento infantil em evolução levou Piaget a concluir não somente a existência dos agrupamentos, mas, devido às suas conexões mútuas, a possibilidade de classificá-los em sistemas formados pelas operações lógicas que partem dos objetos individuais e que se limitam em classificá-las, seriá-las ou numerá-las, etc. e, em operações cuja ação recai na construção do objeto como tal. Decompor um objeto⁷⁰ e recompô-lo é a função própria do segundo conjunto de agrupamentos. Nesse segundo grupo, há operações, denominadas infralógicas: “As operações infralógicas são tão importantes quanto as noções lógicas, porquanto são constituintes das noções de

⁷⁰ O espaço é considerado como uma totalidade única, um contínuo, por isso mesmo ele deve ser composto e decomposto em seus elementos constitutivos.

espaço e de tempo, cuja elaboração se faz em quase toda a infância” (PIAGET, 1972, p. 74).

Nas pesquisas sobre a representação do espaço infantil (1993, p. 470), Piaget e Inhelder afirmaram que o interesse do estudo das operações constitutivas do espaço no nível operatório concreto é triplo. Primeiro, por sua ordem de sucessão genética ser paralela à ordem de construção axiomática da geometria, já que as relações topológicas precedem às projetivas e euclidianas, “pois as relações topológicas precedem nos dois casos as estruturas projetivas e euclidianas e estas últimas encontram-se, nos dois casos, em uma situação de equivalência do ponto de vista da complexidade de suas noções iniciais”.

Em segundo lugar, por:

...introduzir um fato novo no debate clássico que atice a intuição e a lógica: é que, na medida em que as ações se interiorizam em operações, as intuições perceptivas e práticas no início tornam-se coerentes e racionais antes mesmo de serem formalizadas. O sistema de operações concretas ultrapassa, portanto, em rigor, o nível intuitivo elementar, sem atingir as operações formais, fontes das proposições hipotético-dedutivas. (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 470)

Para nós, o interesse maior está no que ele colocou como “um outro fato novo”, o terceiro, referente às operações constitutivas do espaço ou infralógicas:

...o sistema das operações concretas permite evidenciar um outro fato novo que interessa às relações entre a intuição e a lógica: é que, em paralelo exato com as operações concretas de caráter lógico-aritmético [...] existem operações concretas de caráter infralógico ou espaço-temporal que são precisamente constitutivas do espaço. (PIAGET; INHELDER, 1993, p.470).

A importância desse “fato novo” é tão grande que continuou a ser objeto de estudo em obras posteriores: *Introduction a l'épistémilogie génétique* (1950), *La epistemologia del espacio* (1971), *Psicologia da inteligência* (1972), *Psicogênese e história da ciência* (1987) e outras. As operações lógico-aritméticas ou lógico-matemáticas e as infralógicas são isomorfas ou análogas: as primeiras tratam da construção das classes simétricas, assimétricas e dos números, ao passo que a segunda é referente à construção do espaço e das conservações físicas.

As operações lógico-aritméticas, assim como as infralógicas possuem em comum o fato de que suas raízes encontram-se nas coordenações mais primitivas da ação. Piaget constatou que a construção genética do espaço é, em realidade, exatamente paralela ao número, nos diferentes planos: perceptivo, sensorio-motor, intuitivo e

operatório. Porém, com uma diferença que o esquematismo lógico-aritmético procede de ações sobre os elementos descontínuos ou discretos do real e o esquematismo espacial ocorre sobre o contínuo (Piaget, 1950 p.144).

Existem, com efeito, duas espécies de operações intelectuais: as operações lógico-aritméticas, que consistem em ligar os objetos entre si sob a forma de classes, de relações e números, de conformidade com os "agrupamentos" e os "grupos" que a elas se ligam, e as operações infralógicas ou espaço-temporais, que consistem em ligar não os objetos, mas os elementos de objetos totais: ao imbricamento das classes corresponde, portanto, na infralógica, a divisão ou imbricamento das partes; às relações assimétricas correspondem as operações de colocação (ordem) e de deslocamento e ao número corresponde a medida. Ao mesmo tempo que os objetos únicos, o espaço e o tempo são, portanto, sistemas de operações que correspondem univocamente às operações lógico-aritméticas, distintas, porém, por sua escala. (PIAGET, 1990, p. 343).

A terminologia "operações infralógicas", não faz referência a uma subclasse de operações de menor importância ou inferiores. Tais operações, antes de tudo, diferenciam-se das operações lógico-aritméticas ou lógico-matemáticas por serem aquelas as formadoras da noção dos objetos enquanto estas versam sobre formação de classes ou conjuntos de objetos, baseadas na noção de semelhanças ou diferenças, já as infralógicas estão apoiadas nos encaixes de um mesmo objeto.

No estudo das operações constitutivas do espaço, é necessário fazer uma ressalva: "as operações espaciais constituem ações propriamente ditas, e, nesse nível concreto, elas diferem notavelmente das ações ou operações que se apóiam nos seres lógicos (classes ou relações entre objetos descontínuos) e nos números" (PIAGET; INHELDER, 1993, p. 478).

A originalidade das afirmações de Piaget no que se refere às operações infralógicas apresentadas na década de 40 (*O desenvolvimento das quantidades físicas e A representação do espaço na criança*) é objeto de estudo na última fase de sua obra (1995, p. 249).

Ora, no domínio do espaço, as relações entre o sujeito conceptual, isto é, elaborado pelo sujeito (geômetra ou criança) e objeto real, exterior, pois, ao sujeito, são diferentes do que são no plano do conhecimento físico e lógico-aritmético.

Mas, como explicar o fato de que, no operatório concreto, as operações infralógicas ou espaciais se diferenciam das lógico-matemáticas, se as operações realizadas são análogas ou isomorfas, e quais são essas operações?

Para chegarmos a essas respostas, é necessário reconstruir a passagem de um plano a outro, isto é, do sensório-motor ao reflexivo. Essa passagem se reveste de três características essenciais, que são: o aumento das velocidades que possibilitam unir os conhecimentos num todo simultâneo e coerente, ou seja, unir as fases sucessivas por que passa a ação de um fato ou acontecimento; a tomada de consciência das ações realizadas e não somente dos resultados desejados e, finalmente; a expansão das distâncias para prolongar as ações relativas às próprias realidades transformadas em ações simbólicas que incorrem nas representações, o que vai permitir ultrapassar os espaços e tempos próximos.

No período sensório-motor, há uma indiferenciação total entre o lógico e o espacial, pois os conhecimentos necessários nesse período estão restritos ao “saber-fazer”. Além disso, a inteligência prática coordena esquemas de ação cujos instrumentos necessários são as percepções e os movimentos. Portanto, ações realizadas materialmente, mesmo apresentando estruturas coordenadas em ações gerais, permanecem espaciais na ausência de qualquer representação conceitual ou de pensamento. Logo, não há diferenciação entre o infralógico e o lógico-matemático. (PIAGET, 1987, p. 130).

Assim é que a inteligência sensório-motora tende como vimos, para uma espécie de agrupamento empírico dos movimentos, caracterizado, psicologicamente, pelo comportamento dos retornos e rodeios. [...] Poderíamos dizer que neste nível os agrupamentos práticos (meios e fins), formam um todo global e que, na falta de diferenciação, este sistema de conjunto não poderia constituir um mecanismo operatório. (PIAGET, 1972, p. 196, grifo da autora).

O período pré-operatório pode ser subdividido em: simbólico (de 2-3 aos 4-5 anos) e intuitivo (4-5 aos 6-7 anos). Em cada um deles, poderemos acompanhar o que ocorre entre o lógico e o espacial, e poderemos verificar durante quanto tempo as classes conservam o caráter espacial. Tomaremos a classificação para verificar tal fato.

A classificação ou encaixe hierárquico das classes é o agrupamento lógico mais simples. Tem suas origens nas assimilações do período sensório-motor: a própria criança tende, ao brincar, a classificar os objetos, separá-los por terem algo em “comum”, por serem semelhantes ou porque são “parecidos”. Para tal estudo, tomaremos um conjunto de formas geométricas coloridas e planas compostas por dois triângulos, dois quadrados e dois círculos. As duplas compostas têm cores diferentes: amarelo e vermelho.

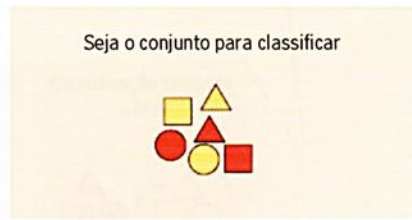


Figura 11 – Coleção de formas geométricas para classificação.

As etapas encontradas por Piaget e Inhelder (1981), nas quais se pedia para a criança colocar juntos os objetos que são semelhantes, foram:

Coleções figuras em que as crianças de 4-5 anos apresentavam as classificações com os objetos colocados segundo **configurações espaciais** independentes de semelhanças, pois as diferenças entre os objetos eram ignoradas. Não havia um plano de ação para a classificação dos objetos, que poderiam mudar de critérios classificatórios a qualquer momento, segundo a escolha da criança.

No fim deste período (sensório-motor) e início do pensamento representativo, a aparição do símbolo permite, ao contrário, uma primeira diferenciação: por um lado, temos os agrupamentos práticos (meio e fins) e, por outro, a representação. Mas esta última ainda é indiferenciada, não podendo as operações lógico-aritméticas se dissociarem das espaço-temporais. (PIAGET, 1972, p. 196).

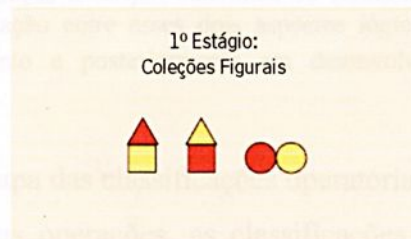


Figura 12 – Coleções figurais.

Coleções não figurais, nas quais por volta dos 7 anos, os objetos são reunidos em pequenas coleções nas quais fica evidente a formação de pequenos conjuntos, não mais dependentes de configurações espaciais, mas ainda limitados a uma dimensão. Falta a inclusão desses objetos em classes menores ou subclasses mais abrangentes. No caso do exemplo dado, apesar da aparente racionalidade, as classificações carecem de extensão e ao comparar os triângulos deixa-se de incluir as cores, ou se faz a classificação pela

cor e se deixa a forma. Falta a essa classificação a hierarquia inclusiva ou encaixe hierárquico.

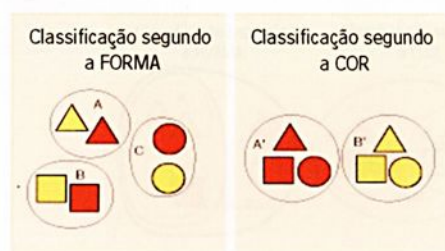


Figura 13 – Coleções não-figurais.

As “classificações” figurais e não-figurais realizadas no período pré-operatório (simbólico e intuitivo) evidenciam o caráter espacial, não ocorrendo ainda a diferenciação entre os agrupamentos lógico-aritméticos e espaço-temporais.

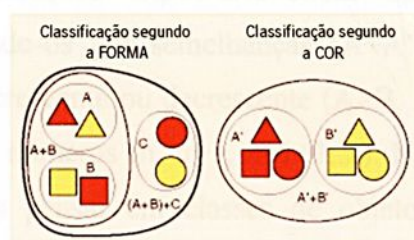
“No nível intuitivo, com efeito, não há classes ou relações propriamente ditas, pois ambas permanecem ao mesmo tempo coleções espaciais ou relações espacio-temporais: daí o caráter intuitivo e pré-operatório.”⁷¹

Será somente no final do período pré-operatório que haverá o início da separação entre o espacial e o lógico.

Quando este esquematismo indissociavelmente lógico e espacial se completa entre dois e sete anos mediante sistemas de conceitos, cuja formação se tornou graças à função simbólica ou semiótica, existe então um início de diferenciação entre esses dois aspectos lógico-aritmético e geométrico do pensamento e posteriormente em desenvolvimento. (PIAGET, 1987, p. 130).

Finalizando tem-se a etapa das classificações operatórias, em que por volta dos 8 anos, e, portanto, de posse das operações, as classificações vão se caracterizar pela inclusão de classes. As combinações ocorrem de forma móvel, as classificações realizadas mostram que a criança compreendeu como ocorre o encaixe hierárquico das subclasses nas classes, os quantificadores *alguns*, *todos* e *nenhum* mostram os progressos realizados pela inteligência operatória, e há a possibilidade de realizar o encaixe hierárquico das subclasses nas classes (alguns são amarelos, por exemplo). Os esquemas antecipadores aos quais as classes estão ligadas são necessários à reversibilidade, com o triângulo, quadrado e o círculo fazendo parte de uma classe maior dos amarelos.

⁷¹ Ibid.; p. 196.



ou

Classificação segundo a FORMA e COR

COR	FORMA		
	quadrado	triângulo	círculo
amarelo			
vermelho			

Figura 14 – Classificação operatória.

No nível de 7 - 8 anos, ao contrário, a aparição dos agrupamentos operatórios é precisamente caracterizada pela diferenciação nítida das operações lógico-aritméticas que se tornam independentes (classes, relações e números despacializados) e das operações espaço-temporais ou infralógicas. (PIAGET, 1972, p. 196).

Tabela 3 – Comparação entre as operações lógico-aritméticas e infralógicas (espaço).

Pensamento	Lógico-aritméticas (Classes)	Infralógicas
Simbólico	Coleções figurais	
Intuitivo	Coleções não-figurais	
Operatório concreto	Ligam objetos entre si.	Ligam elementos de objetos totais.
	Encaixamento dos objetos em classes e das classes entre si (por semelhanças)	Encaixamento de partes ou pedaços no todo (por vizinhanças)
	Seriação – ordenarão as diferenças em ordem crescente ou decrescente	Ordem e deslocamento – ordenarão os deslocamentos realizados em relações espaço-temporais.
	Número	Medida
Reflexivo	Classificações, seriações, trajetos cada vez mais complexos	

Os agrupamentos das classes (como o exemplo anterior), da seriação e dos números – das operações lógico-aritméticas operam em objetos discretos ou descontínuos, reunindo-os por semelhanças ($A+A'=B$) nas classes, ordenando suas grandezas de forma crescente ou decrescente ($A>B$, $B>C$, $C>D...$ ou $D<C$, $C<B$, $B<A$) nas seriações ou nos números (n , $n+1$, $n+1+1,...$). Não necessitam das relações espaço-temporais. Podemos pensar em classes de objetos, abstraindo as relações espaço-temporais, não esgotando todas as possibilidades dos agrupamentos.

Por outro lado, os agrupamentos compostos pelas operações infralógicas, que vão constituir o espaço e o tempo, repetirão as etapas de evolução das primeiras e terão operações isomorfas.

A título de exemplo análogo às coleções figurais, nas quais a criança não consegue chegar aos encaixes hierárquicos ou imbricações das subclasses nas classes, segue-se um exemplo relativo ao fracasso nos encaixes hierárquicos dos deslocamentos ocorridos, no qual a criança não chega ainda a incluir um elemento dentro de uma classe de elementos. Assim, a casa da avó - *le Crêt*, não chega a ser uma parte do espaço total que é Lausanne, ou no segundo exemplo, no qual a criança não reconhece as transformações do Salève ou do Ródano como mudanças de posição devido ao deslocamento do observador e as confunde com mudanças de estado, as transformações por que passam perceptivamente não são organizadas como deslocamentos reversíveis nas diversas trajetórias.

As características do pensamento infantil, nessa fase (simbólica), estão presas às configurações sucessivas de um fato do que às transformações através das quais um estado se transforma em outro, devido ao pensamento estático e pouco móvel. Concentram-se em certos aspectos momentâneos não ligando adequadamente uma sucessão de condições numa totalidade mais abrangente, que levasse a unir as sucessivas transformações organizando-as coerentemente.

O pensamento dessa fase se desenvolve preso às imagens estáticas, o que impede a criança de organizar os fatos tendendo a justapô-los como *flashes*, e não como um filme que se passa continuamente.

Obs.108 - J., não consegue compreender que Lausanne seja "todas essas casas juntas", porque reserva à casa da avó, "Le Crêt", a expressão "*a casa de Lausanne*". Por exemplo, diz de um lagarto que sobe a parede: "*Está subindo na casa de Lausanne*". No dia seguinte, quero ver se a minha explicação foi compreendida: "Que é Lausanne? – São todas essas casas (mostra todo o quarteirão). Todas essas casas são le Crêt. – Que é le Crêt? –

É a casa da vovó, é Lausanne. “Todas essas casas” constitui um objeto complexo, que depende de um só deles, concebido como representativo do conjunto. [...] Obs. 130 aos 4;6 (3), L. vê o Salève desde Archange não mais dos lugares habituais: *“Ele mudou tudo. – Mas de verdade ou somente parece? – Mudou de verdade. – E as pessoas que estavam aqui ontem já o viram assim? – Não, de outro modo. – Mas ontem não era assim aqui? – Não diferente.” Um momento depois do mesmo ponto: “Mas por que não se vê o Pequeno Salève? – O que é que tu achas? – Não sei. – Não está mais lá ou se esconde? Por quê? Não sei. Deveria estar ali (mostra o lugar ao pé do Salève.” Na volta (de carro): O Salève está nos seguindo.” Depois “Ele se deforma, como o sol quando entra nas nuvens; depois se ajeita de novo.” Aos 4;11 (4), subindo uma colina, ao pé da qual existe um pequeno lago. *“Este é maior quando se sobe. – Por quê? – Porque se está mais longe. – E as casas? – Mais pequenas. – E o lago? – Maior, porque a água do Ródano chegou e fez o lago maior.”* (PIAGET, 1990, p. 289 e p. 335).*

As classificações e seriações operatórias ou multiplicativas (agrupamentos multiplicativos, que têm por objeto várias classificações e seriações simultâneas sobre os objetos concretos) ocorrem por volta dos oito anos, mostrando que o sujeito consegue coordenar pontos de vista distintos, num sistema de reciprocidades objetivas. A tabela abaixo mostra as classificações operatórias numa matriz multiplicativa ou num quadro de dupla entrada, no qual temos a forma *versus* a cor. As crianças, ao conseguirem classificar multiplicativamente, vão estabelecer $FXC = Qa + Qv + Ta + Tv + Ca + Cv$.

Tabela 4 – Possibilidades de ou composições das classificações forma x cor.

Forma(F) / Cor(C)	Quadrado (Q)	Triângulo (T)	Círculo (C)
Amarelo (a)	Qa	Ta	Ca
Vermelho (v)	Qv	Tv	Cv

As operações lógico-matemáticas ou lógico-aritméticas são isomorfas às infralógicas. Nas primeiras, as classificações e seriações são abstraídas das qualidades que as fazem ser semelhantes (classificações) ou ordenadas sem necessidade de considerar as relações espaço-temporais, por exemplo, um grupo de laranja, banana, maçã, ameixa, etc. tem em comum que todas são comestíveis, são frutas. Para realizar tal classificação, não é necessário inseri-las em espaços e tempos.

Quanto às operações infralógicas, “se aplicam ao objeto como tal e às suas partes ou a suas relações espaço-temporais internas” (1983, p. 302). Isso quer dizer que às coleções multiplicativas das classificações correspondem, nas infralógicas, os espaços encaixados (por vizinhança) numa totalidade maior. O espaço é uma totalidade,

o sujeito ordena os seus deslocamentos no espaço em relações espaço-temporais (seriação). Para tanto, precisa utilizar adequadamente, para se localizar, pontos de referência colocando-os (*placement*⁷²) em uma ordem de sucessão.

Como exemplo, apresentaremos um protocolo no qual o sujeito de memória reconstrói um trecho do seu deslocamento entre a escola e a casa, coordenando um conjunto de referências com a representação completa e coerente do grupo de deslocamento realizado:

POR (9;11) enumera e desenha o trajeto da escola à praça Neuve: “a rua Victor Hugo-de-Serge, o boulevard ponte d’Arve, a rua de Carouge, a rua do Conselho General vem após a praça. – Você colocou tudo? – A os Bastions aqui, e o teatro e o museu Rath. Onde é o Plaine? – Aqui. Tem um caminho que passa por aqui, que vai ao Sagrado Coração. Passa-se por aqui e chega-se a praça Neuve”, etc. Ela estende progressivamente seu desenho até o Arve o qual indica o sentido da correnteza e transforma o esquema do itinerário em um plano geral do bairro. (PIAGET, 1973, p. 29, tradução da autora).

As analogias (seriações lógico-aritméticas – ordenação das diferenças em ordem crescente ou decrescente dos objetos e infralógicas – ordenação dos deslocamentos segundo séries espaço-temporais) e diferenças (lógico-aritméticas não dependem das relações espaço-temporais, ocorrem sobre objetos descontínuos; as infralógicas dependem das relações espaço-temporais e ocorrem sobre o contínuo) apresentadas entre os agrupamentos lógico-aritmético e infralógico levam a outras implicações quanto aos fatores a serem estudados nas relações espaço-geométricas. Dois são cruciais: o papel da imagem mental e as relações entre o espaço físico e o lógico-matemático.

Ora, como todas as operações, essas operações espaço-temporais não passam de esquemas sensório-motores que se tornaram intuitivos e depois reversíveis ao término de um desenvolvimento definido pelo equilíbrio progressivo da assimilação e da acomodação. Somente, à diferença dos esquemas lógico-aritméticos, trata-se aqui de esquemas relativos aos objetos e não aos seus conjuntos. Por consequência, as imagens que resultam da acomodação a esses objetos se encontram numa situação **inteiramente diferente**, em relação a essas operações, que no tocante visam às classes, às relações lógicas e aos números. Nos casos das operações espaço-temporais, ao contrário, a imagem fica na escala da operação, pois que esta visa ao próprio objeto: a imagem é então, a expressão de uma acomodação cujo equilíbrio com a assimilação constitui precisamente a operação. (PIAGET, 1990, p. 344, grifo da autora).

⁷² Piaget (1972, p. 260), na obra *Movement et vitesse chez l’enfant*, escreve: Un point est encore à noter. Par le fait que le groupement des opérations de placement est constitué par des relations asymétriques (“précède” ou “sucède à”) transitives, reliées entre elles à la manière d’une” seriation qualitative, on peut en tirer un autre groupement: celui de l’emboîtement des intervalles compris entre les termes ordonnés.

No que tange às imagens, a particularidade relativa ao espaço ocorre devido à relativa adequação entre a imagem mental e o objeto representado, “a imagem não é mais que um símbolo, que representa concretamente os conceitos que simboliza” (1971, p. 3). No domínio espacial, as imagens mantêm um caráter espacializado. Como pensar em um quadrado que não seja quadrado? A representação espacial mantém uma homogeneidade entre significante e significado e pode ser traduzida por representações figuradas, “porque o que é próprio das operações espaciais (o que as distingue das operações lógico-aritméticas) é poder traduzir-se, detalhadamente, em imagens e representações figurativas” (PIAGET, 1995, p. 245). Apesar do caráter espacializado dessas imagens, elas não são o motor do desenvolvimento, como dito anteriormente elas são um símbolo elaborado por imitações interiorizadas particular a cada sujeito.

conforme Piaget, a imagem de uma classe ou de uma série de números inteiros não é nem um número nem uma classe, bem como não mantém a homogeneidade das imagens espaciais. Por isso mesmo a imagem tem um papel diferencial na construção do espaço e durante as fases de desenvolvimento desempenha diferentes papéis, variando de importância segundo o grau de estruturação das ações que simboliza.

A imagem não é, em sua origem, senão o prolongamento da ação. Toda ação, em se aplicando a objetos, acomoda-se a eles, isto é, suporta um negativo a marca das coisas sobre a qual se molda. O essencial da ação não está naturalmente nessa marca: está na modificação imposta ao objeto, isto é, a assimilação daquela aos esquemas do sujeito. (PIAGET, 1993, p. 476).

No plano sensório-motor, destituído de imagens propriamente ditas, a atividade sensório-motora está ligada à percepção do objeto (percepção imediata) a ação tem uma importância fundamental. Com o surgimento da função representativa ou simbólica, a imagem mental é um auxiliar necessário. A ação é evocada em imaginação, mas somente após ter sido executada materialmente, nessa fase simbólica (até mais ou menos 4-5 anos), a imagem é estática e incapaz de representar as transformações ocorridas (conforme exemplo Obs.108, PIAGET, 1990, p. 289). Na fase intuitiva (4-5 aos 7-8 anos), com a crescente coordenação exterior das ações traduzidas por uma coordenação interna de seus esquemas, a imagem é um símbolo necessário, mas ainda destituída de operações e por isso mesmo pouco reversível.

Com as operações concretas, a imagem adquire certa mobilidade, graças às combinações reversíveis que caracterizam essa fase e tornam-se mais coerentes com o

real. No pensamento formalizado, a ação é ultrapassada pelo pensamento e a imagem de um ponto ou de uma reta é inadequada à inteligência operatória.

Um outro ponto correlato ao papel da imagem nas operações infralógicas espaciais é o fato de que “as estruturas espaciais dependem de dois tipos de experiências: física e lógico-matemática (o que explica, mais uma vez, por que a imagem visual desempenha um papel privilegiado na intuição geométrica) e de duas abstrações⁷³: simples e refletidora” (DOLLE, 1991, p. 51).

Para falarmos das experiências física e lógico-matemática, é preciso anteriormente falar de conhecimento físico e conhecimento lógico-matemático, sem nos adiantarmos em relação às implicações educacionais. A distinção entre esses dois tipos de conhecimento é de suma importância para a educação escolar, pois dela vai depender a escolha adequada das situações e condições escolares mais propícias ao processo de ensino-aprendizagem.

Quando uma criança comprova que o peso de um objeto mais volumoso pode ser menor que outro menos volumoso, ela estará descobrindo as relações entre esses dois objetos. A ação física de sopesar (tomar com a mão o peso de) nada mais é do que a tomada de consciência de uma propriedade pertencente ao objeto. O peso é uma propriedade dos objetos, não é a criança de lhe dá esse atributo, ela o descobre. A experiência física se apóia nos objetos e procede por abstração simples.

[...] Quando Piaget fala sobre abstração, está referindo-se ao processo de estrutura do conhecimento da criança, não na sua habilidade em usar imagens e palavras. Ele distingue duas espécies de “abstração simples” e “abstração reflexivante”. A abstração simples é a abstração das propriedades observáveis “no objeto” ou, mais amplamente, na realidade externa. Na abstração reflexivante, pelo contrário, o que é abstrato não é o observável e a natureza da abstração é bem diferente. Na abstração reflexivante, a criança introduz relações entre os objetos. (KAMII e DEVRIES, 1991, p. 24).

Peso, cor, textura, forma, espessura são características dos objetos. Essas informações são alcançadas pela criança quando age sobre os objetos e percebe como eles reagem. Por exemplo: uma bola que é solta de uma rampa. A fonte do conhecimento está na observação de como o objeto se porta diante de determinadas

⁷³ A abstração empírica ou *empirique*, como no original, já a reflexionante e refletida (PIAGET, 1995, p. 274) é, nas obras de Kamii e Devries (1991 e 1992), reflexivante e reflexiva, no original *réfléchissante* e *réfléchie*.

situações. O objeto proporciona situações para que a criança observe o desenrolar dos fatos.

O conhecimento lógico-matemático é decorrente das relações que a criança estabelece entre os objetos que manipula e que eles não possuem por si mesmos, mas é o sujeito quem as determina, como por exemplo, quando a criança organiza objetos em classes segundo critérios que ela estabelece (coleções não-figurais), unir todas as figuras amarelas e todas as vermelhas ou nas classificações operatórias com vários critérios sendo utilizados simultaneamente, situações nas quais é a criança que inseriu uma organização à coleção de formas geométricas amarelas e vermelhas.

Segundo Kamii e Devries (1991, p. 33), experiência física está relacionada diretamente com os objetos. Sua fonte são os objetos externos e as informações são obtidas por abstrações empíricas ou simples. Na abstração simples um aspecto é considerado do objeto em questão. Quando a criança realiza experiência sobre o peso de um objeto, outras características, tais como cor, forma, nesse momento, não são consideradas.

No caso das experiências lógico-matemáticas, o conhecimento adquirido deve-se às relações provenientes da ação do sujeito em relação aos objetos. É ele (o sujeito) que introduz relações entre os ou nos objetos e não perceptíveis diretamente nos objetos. "As propriedades físicas dos objetos específicos envolvidos são irrelevantes para as experiências lógico-matemáticas. ... $6+2=2+6$ com seixos assim como com bolas de gude ou cubos".(KAMII; DEVRIES, 1991, p. 33). O conhecimento lógico-matemático é construído por "abstração reflexiva". É o sujeito que introduz as relações de igualdade entre a adição das bolas de gude ou dos cubos.

Se formos às raízes da palavra latina abstração teremos *ab-trahere* ou *abstrahere* que significa retirar, extrair, arrancar algo de algo, o processo de conhecimento está justamente no ato do que o sujeito pode assimilar, ou seja, incorporar nas suas estruturas do que lhe é externo.

Todo novo conhecimento supõe uma abstração, porque, malgrado a parte de reorganização que ele comporta, não constitui jamais um início absoluto e tira seus elementos de alguma realidade anterior. Pode-se, então, distinguir dois tipos de abstração segundo suas fontes endógenas e exógenas [...]. Existe, primeiramente, um tipo de abstração que chamaremos de 'empírica' [...] porque retira suas informações dos próprios objetos [...]. Porém [...] existe uma segunda que é fundamental, porque recobre todos os casos de abstração lógico-matemática: nós a chamaremos de "abstração reflexionante"

porque é retirada não dos objetos, mas das coordenações de ações (ou de operações), portanto, das atividades do sujeito [...] (PIAGET apud MONTANGERRO e MAURICE-NAVILLE, 1998, p. 89).

O conhecimento lógico-matemático e o conhecimento físico não são duas instâncias separadas, pelo contrário, são interdependentes; para que haja conhecimento físico é necessário um quadro lógico-matemático, não pode haver abstração simples sem abstração reflexionante, “Um quadro lógico-matemático é necessário para a abstração simples porque nenhum fato do mundo exterior pode ser ‘exteriorizado’ se cada fato é um incidente isolado, sem relação com o conhecimento prévio” (KAMII e DEVRIES, 1992, p. 25).

Apresentamos as peculiaridades do conhecimento físico e lógico-matemático, as fontes, a forma de retirar as informações e a experiência. O espaço, mais uma vez, foge às características de ambos e as pesquisas genebrinas apontam para o fato de que suas estruturas dependem de dois tipos de experiência: a física e a lógico-matemática.

Em sua dupla natureza, de extensão dos objetos e de geometria do sujeito, o espaço constitui, portanto, desde o nível sensório-motor, o **ponto de junção ou zona de intersecção entre a realidade exterior e as operações do sujeito**: de onde, a união particular que existe entre a abstração reflexionante e a abstração empírica, a primeira, conferindo às propriedades espaciais um caráter de necessidade e a segunda, apoiando-se sobre o fato de que essas propriedades existiam no objeto, antes de sua tomada de conhecimento. A existência dessa zona de intersecção manifesta-se particularmente de duas maneiras. (PIAGET, 1995, p. 270, grifo da autora).

Tudo indica que o conhecimento espacial é a zona de intersecção entre o conhecimento lógico-matemático e o conhecimento físico, “as estruturas espaciais dependem de dois tipos de experiência, física e lógico-matemática (por essa razão, sem dúvida, a imagem visual desempenha um papel privilegiado na intuição geométrica) e dois tipos de abstração, simples e reflexiva”(PIAGET, 1971, p. 6).

O exemplo da experiência física no espaço e da ocorrência da abstração simples é a leitura perceptiva que a criança realiza quando necessita da constatação concreta para comprovar que $2 \times 3 = 6 \times 1$, nesse caso, especificamente, pode-se falar em experiência física porque não ocorre a necessidade de reconstrução no plano do pensamento para comparar as duas composições.

Como exemplo de experiência lógico-matemática do espaço com abstração reflexiva, recordemos, pelo contrário, a passagem do 'grupo' sensório-motor de deslocamento para o grupo representativo (PIAGET, 1971, p. 6).

Como exemplo de experiência lógico-matemática e de abstração reflexionante, podemos citar os deslocamentos realizados pela criança que faz o caminho de casa para a escola. A criança do período pré-operatório realiza tais deslocamentos por indícios pouco a pouco, conhecendo-os de modo totalmente prático. Se for pedido um desenho ou a explicação dos deslocamentos que ela realiza, as dificuldades serão intransponíveis. A abstração reflexionante que ocorrerá posteriormente consiste em tirar desse saber prático sua organização e projetá-lo para o plano representativo. A criança, a partir dessa passagem, poderá representar para si mesma o trajeto de casa para a escola, o que não era possível anteriormente.

A representação infantil após o processo de "reflexionamento" mostra-se mais rica que o conhecimento do qual foi abstraída, pois trata-se de uma visão de conjunto simultânea. Quando ocorrer uma nova projeção, no plano do pensamento lógico, por abstração reflexionante, o processo se repetirá tornando a representação mais rica e móvel. O mesmo trajeto comportará retornos e desvios. Com o pensamento formal, a abstração reflexionante extrairá do conjunto de possibilidades de trajetos concretos seu arranjo e projetá-lo-á no plano formal, momento em que os trajetos realizados poderão ser representados por retas, ângulos com proporção de distâncias entre os diversos pontos de referência que orientam a organização dos deslocamentos, possibilitando a orientação dos deslocamentos no espaço percorrido. O sujeito poderá apresentar uma multiplicidade de opções para realização do mesmo trajeto.

Intra – , inter – e trans–

Após explorarmos as diferenças e semelhanças entre o conhecimento físico, lógico-matemático e as operações necessárias infralógicas espaciais e lógico-matemáticas, resta-nos mencionar as últimas pesquisas realizadas por Piaget e Garcia (1987). Esses trabalhos resgatam as pesquisas realizadas na década de 40 sobre a representação espacial na criança e o desenvolvimento histórico da geometria. Os autores colocaram em evidência um fato relevante sobre paralelismo entre os caminhos percorridos pelo pensamento espacial na passagem do período pré-operatório ao período de domínio das operações espaciais ou formais e da ciência geométrica no período compreendido desde os gregos até o século XX.



As pesquisas genebrinas e outras realizadas posteriormente, como por exemplo, Kobayashi (1998 e 2001)⁷⁴, as quais versaram sobre percepções estereo.*..etc., revelam que as primeiras representações das crianças – estereognósticas, gráficas, construção da reta projetiva, nível dos líquidos, etc. – são as topológicas. Esse período inicial da geometria representativa na criança, no período simbólico, (entre 3-4 e 5 anos), é marcado pelo predomínio de relações muito simples: interioridade, exterioridade, vizinhança, ordem, etc., como apresentado anteriormente (Cap. 2).

As representações gráficas realizadas nesse período pelas crianças mostram que elas diferenciam as formas abertas e fechadas, curvilíneas e retilíneas, com ângulos retos ou não. As características apresentadas mostram que esse grupo se ocupa das relações interiores a cada figura, fracassando nas figuras compostas.

O desenho do nível dos líquidos⁷⁵ é esclarecedor, pois mostra que as crianças somente consideram as relações de interioridade do líquido dentro do recipiente, ou seja, relações intrafigurais não considerando a horizontalidade do nível do líquido que requer a utilização de referências ou eixos externos de coordenadas horizontais, os quais elas poderiam utilizar como parâmetro externo de referência. O mesmo ocorrendo quando as crianças desenhavam árvores em encostas, colocando-as perpendicular em relação à superfície, dado impossível de ser visto na realidade.

Os fatos apresentados mostram o caráter **intrafigural** das representações realizadas pelas crianças nesse período inicial de desenvolvimento, entretanto, para que ocorra a passagem do intra para o interfigural, alguns fatores devem ser alcançados.

A passagem das relações intrafigurais para as interfigurais é devida, no decurso da psicogênese, aos três fatores principais da homogeneização dos espaços vazios e plenos, de coordenação das direções ou das distâncias a duas e três dimensões, e de localização dos móveis no caso dos deslocamentos. (PIAGET; GARCIA, 1987, p. 115).

Em relação à homogeneização dos espaços vazios e plenos (PIAGET, INHELDER; SZEMINSKA, 1973), quando se apresentam à criança duas folhas de papel do mesmo tamanho verdes e duas vacas e diz-se a elas que o proprietário do “pasto” quer colocar duas casas, uma em cada pasto, a questão colocada inicialmente é

⁷⁴ As afirmações feitas foram comprovadas em trabalho realizado anteriormente por KOBAYASHI, M.C. M. “A construção das relações espaço-geométricas em crianças de educação infantil: um estudo de epistemologia genética”. Marília, 1998. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho, Campus Marília.

⁷⁵ Figura 8 – Estádio de desenvolvimento da horizontal e vertical (Subestádio IA).



se as duas vacas terão a mesma quantidade para comer. Após a igualdade, passa-se à segunda situação na qual são colocadas duas casas, mas em posições diferentes.

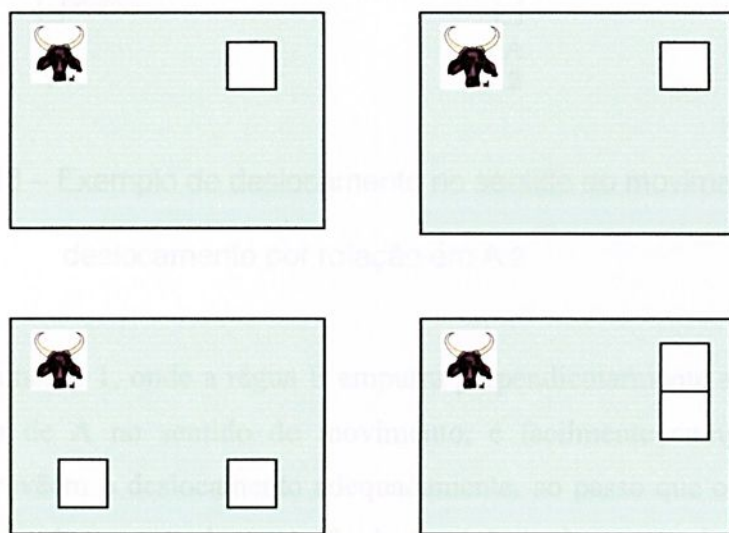


Figura 15 – Experiências sobre a conservação de medida da superfície.

Os resultados apresentados mostram que as dificuldades que a criança pré-operatória tem em comparar os espaços pela diferença de posição das casas, é decorrente do fato de que cada nova disposição é independente da anterior. Somente no início do operatório concreto é que as áreas se tornam iguais independentemente das posições das casas.

Piaget e Garcia (1987, p. 116), para avaliar a coordenação das direções ou das distâncias a duas e três dimensões, propuseram o seguinte procedimento que consiste em:

...apresentar aos sujeitos uma paisagem ou uma aldeia (pequenos edifícios colocados na mesa de acordo com diversas relações de distância entre posições) e de fazer reproduzir numa outra mesa: obtém-se assim toda a hierarquia de condutas que vão dos alinhamentos simples às estruturas corretas, sendo essas tardias quando se trata de elementos múltiplos e não só de um ponto como há pouco.

Outro fator para que ocorra a passagem do intra para o interfigural é relativo à localização dos móveis no caso dos deslocamentos. A conduta utilizada era de apresentar duas pequenas régua A e B em duas situações:

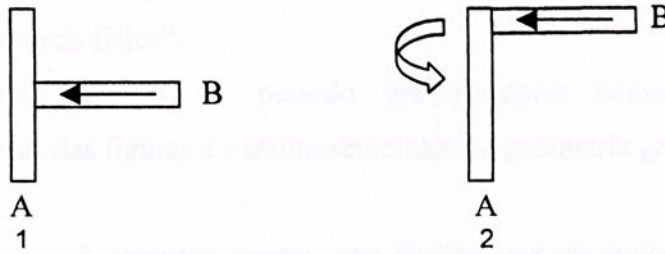


Figura 16 – Exemplo de deslocamento no sentido do movimento A 1 e
deslocamento por rotação em A 2

O experimento 1, onde a régua B empurra perpendicularmente a A, provocando o deslocamento de A no sentido do movimento, é facilmente compreendido pelas crianças, que prevêem o deslocamento adequadamente, ao passo que o experimento 2, em que B empurra A provocando a rotação de A, só é previsto por volta dos sete anos e de maneira muito global, uma vez que falta a coordenação do sistema interno e externo de referências. O interno, pela falta de composição dos movimentos de translação com os movimentos de rotação das extremidades das régua. Quanto ao externo, não é considerada a referência da superfície suporte onde se encontram as duas régua, que poderiam servir de referencial externo para orientar a previsão das rotações que ocorrem quando B empurra A numa extremidade.

Os fatos apresentados mostram que, para poder efetuar-se, as relações interfigurais devem ser acompanhadas de transformações interdependentes que se transformam assim em transfigurais (terceiro nível da psicogênese)” (PIAGET; GARCIA, 1987, p. 117).

As matemáticas não começam com os gregos, mas, segundo Piaget e Garcia, foram eles que deram mostra da perfeição do pensamento humano, tornando-se um paradigma para a ciência. Tal é a importância da geometria grega que se tornou fonte de inspiração para Newton na construção dos *Principia*, como já vimos.

A geometria grega ou geometria ordinária, segundo Poncelet⁷⁶ (apud. PIAGET e GARCIA, p. 94), limitava as figuras aprisionando-as, pois uma vez descritas não “mais se perdia de vista, raciocinava-se sempre sobre formas reais existentes e nunca se retiravam conseqüências que não pudessem descrever na imaginação ou vista mediante

⁷⁶ Jean Vitor PONCELET, matemático e general francês (1788-1876), autor de trabalhos sobre as propriedades projetivas das figuras e da mecânica aplicada.

objetos sensíveis; paramos quando esses objetos deixam de ter existência positiva e absoluta, uma existência física”.

A geometria infantil no período pré-operatório considera somente as propriedades internas das figuras e é muito semelhante à geometria grega.

A geometria começa, com Euclides, por um período durante o qual se estudam as propriedades das figuras e dos corpos geométricos *enquanto relações internas* entre os elementos destas figuras e destes corpos. Não se toma em consideração o espaço enquanto tal, nem, por conseqüência, as transformações das figuras no interior de um *espaço* que as compreenderia todas. Chamaremos esta fase *intrafigural*, utilizando uma expressão já utilizada em psicologia genética para dar conta do desenvolvimento das noções geométricas. Vem em seguida uma etapa caracterizada por um estabelecimento de relação das figuras entre elas, cuja manifestação específica é a procura das transformações ligando figuras segundo múltiplas formas de correspondência, mas sem chegar à subordinação das transformações e às estruturas de conjunto. É o período durante o qual a geometria dominante é a geometria **projetiva**. Chamaremos esta fase de *interfigural*. (PIAGET; GARCIA, 1987, p.110, grifo da autora).

Em oposição à geometria fechada às figuras rígidas e singulares, Descartes⁷⁷, no século XVII cria a geometria analítica que possibilitava localizar um ponto segundo coordenadas (x, y) nas quais as curvas podiam ser substituídas por equações.

No século XVIII o francês Gaspard Monge criou a geometria descritiva, uma geometria que poderia representar e analisar objetos tridimensionais por meio de projeções sobre certos planos. Professor de estudiosos brilhantes, entre eles Lazare Canort, Charles Brianchon e Jean Poncelet, este o responsável pelo ressurgimento da geometria projetiva, que teve início no “quatrocento” italiano, momento histórico para a arte e para as ciências.

No ímpeto das criações artísticas mais fiéis à realidade, no “quatrocento” italiano, muitos arquitetos e artistas italianos, interessaram-se por descobrir as leis formais que regiam a construção da projeção de objetos tridimensionais sobre uma tela. Muitos desses artistas criaram os elementos para uma teoria geométrica subjacente à perspectiva. Essa teoria tinha que considerar as relações entre vários objetos: os que estavam mais à frente, ou mais ao fundo, para projetá-los no plano. Para isso, eram necessárias leis que imprimissem proporcionalidades às formas e às grandezas dos objetos, organizando-os em um espaço único.

⁷⁷ Renné Descartes (1596-1650), filósofo e matemático, criador da geometria analítica.



A geometria projetiva, assim como a geometria do período operatório concreto, insere relações interfigurais que são estabelecidas entre os objetos e que permitem a construção progressiva de um espaço único – as crianças, nessa fase do desenvolvimento, começam a locar objetos em relações com outros objetos, considerando seus deslocamentos, como o exemplo anteriormente citado nas representações espaciais de POR (9;11), que consegue representar os deslocamentos realizados pontuando acertadamente, em relações simultâneas, vários pontos de referência.

As relações interfigurais são estabelecidas entre os objetos. São relações que permitem a construção de um espaço único e os relaciona com as propriedades euclidianas, segundo as quais a criança loca os objetos, relaciona-os uns com os outros e considera seus deslocamentos.

Finalmente, a última etapa surge graças à aquisição da capacidade de colocar em relação, não somente os objetos no espaço, mas de colocá-los em diversos espaços representados. A esse período, denominado de *transfigural* – momento no qual as estruturas estão coordenadas umas às outras, o que vai requerer a lógica das proposições formais ou combinatórias, próprias do último período de desenvolvimento da inteligência humana –, Piaget e Garcia compararam, na geometria, o programa das transformações elaborado por Félix Klein.

A aula inaugural de Klein, na Faculdade de Filosofia da Universidade de Erlangen (1872), baseada na teoria dos grupos feita por ele e Sophus Lie, apresentava uma idéia inovadora: a classificação das diversas geometrias segundo a investigação das propriedades das figuras que se mantêm inalteradas quando são submetidas a um grupo de transformações⁷⁸.

Em seguida começa uma terceira etapa, que chamaremos de *transfigural*, caracterizada pela preeminência das estruturas. A expressão mais

⁷⁸ Segundo Eves (1992, p. 24), “Exposto de maneira simplificada, o *Programa de Erlanger* sustenta que a geometria é a investigação das propriedades das figuras que se mantêm inalteradas quando as figuras são sujeitas a um grupo de transformações. Para a geometria métrica euclidiana plana, o grupo de transformações é o conjunto das rotações e translações do plano; para a geometria projetiva plana, o grupo de transformações é o conjunto das transformações projetivas planas; para a topologia, o grupo de transformações é o conjunto de todas as transformações topológicas. Cada geometria tem seu grupo de transformações de controle subjacente. Na construção de uma geometria tem-se, então, a liberdade de escolher, antes de tudo, o elemento fundamental da geometria (ponto, reta, círculo, esfera, etc.); depois a totalidade ou espaços desses elementos (plano de pontos, espaço usual de pontos, superfície esférica de pontos, plano de retas, feixe de círculos, etc.); e finalmente o grupo de transformações ao qual o espaço de elementos está sujeito”.

caracterizada dessa etapa é o *Programa de Erlangen*, de Félix Klein. (PIAGET e GARCIA, 1987, p. 110).

A última etapa de construção da geometria humana, a transfigural, manifesta-se quando há a aquisição da capacidade de colocar em relação não mais somente os objetos dentro de um espaço, mas em diversos espaços representados. Essa última etapa de desenvolvimento ocorre somente quando as estruturas estão coordenadas, o que vai necessitar das competências combinatórias próprias da inteligência formal.

É apenas ao nível hipotético dedutivo (a partir de onze - doze anos) que as estruturas lógico-aritméticas se libertam inteiramente do geométrico: mas é precisamente nessa altura que se instaura a fase "transfigural" da geometria do sujeito, quer dizer, o início de uma algebrização, por mais modesta que ela seja. (PIAGET e GARCIA, 1987, p. 130).

3.3 As características do conhecimento do espaço e da geometria infanto – juvenil

No capítulo 2, apresentamos as dificuldades pertinentes ao ensino da geometria, o crescente descaso em relação a esse conhecimento, o despreparo dos professores, a falta de clareza entre o que é referente ao espaço e à geometria.

O estudo das propostas educacionais relativas ao ensino da geometria nos mostrou a indiferenciação entre: o que é conhecimento do espaço e da geometria, com os objetivos para tal ensino, com os conteúdos a serem trabalhados no qual o espaço aparece como um conhecimento a ser "aprendido" espontaneamente, como se a criança já viesse para a escola conhecedora de tal assunto.

Se prestarmos atenção, veremos que o ensino escolar da geometria fica restrito a perímetros, áreas, volumes e medidas. São conteúdos que se aproximam do conhecimento aritmético e algébrico, são próximos das contas, dos cálculos, enfim, são conteúdos que os professores e pais esperam do ensino da matemática escolar, mas que deixam de lado o fato de que os conhecimentos espaciais são necessários à compreensão do mundo e que não são conhecimentos lógico-matemáticos que ele aprende sozinho. A dificuldade do ensino começa com a falta de definição referente aos conteúdos peculiares ao espaço e à geometria.



Os trabalhos de Berthelot e Salin⁷⁹ (1999-2000, p. 38) mostram as confusões que ocorrem por total desconhecimento das especificidades de cada um desses ramos da matemática. Para eles, os conhecimentos espaciais são aqueles que permitem ao sujeito um controle conveniente das relações do espaço sensível, que podem ser traduzidas por:

- Reconhecer, descrever, fabricar ou transportar objetos;
- Deslocar, encontrar, comunicar a posição de um objeto;
- Reconhecer, descrever, construir ou transformar um espaço de vida ou de deslocamento.

O domínio do espaço ocorre bem antes da entrada da criança na escola e continua durante toda a vida. Apóia-se numa multiplicidade de interações diversas com o meio que o cerca: humano e material.

Na sociedade em que vivemos, os conhecimentos do espaço estão atrelados aos da geometria, diferentemente de em outras sociedades, como os esquimós, cujos conhecimentos para a sobrevivência no branco da neve inviabilizam qualquer marcação métrica, por exemplo, e onde o meio de identificação do lugar e dos deslocamentos ocorre por sutilezas, como os diferentes tons e espessuras da neve, a direção das correntes, o soprar do vento, etc.

O conhecimento da geometria é diferente do conhecimento do espaço, pois, para que ele ocorra, é preciso ser ensinado. As relações do triângulo retângulo, por exemplo, não são descobertas ao acaso, como o fato de uma criança pedir ao adulto que pegue um objeto em determinado lugar que ela não alcança (localização de um objeto).

As diferenças entre o conhecimento espacial e o geométrico não param na sua gênese, eles continuam no vocabulário, nos problemas a serem resolvidos, nas relações a serem estabelecidas.

Quando um marceneiro precisa consertar uma peça entalhada de um cliente, no qual ele devendo substituir um pedaço dos entalhes em forma de hexágono, defronta-se com situações costumeiras: ele precisa medir o tamanho do pedaço a ser reconstruído, montar a peça separada e recolocá-la no lugar onde está danificado. Seu problema é tomar as medidas adequadamente para recortar, na madeira, a peça. Ele pode montar um gabarito em papel, para fazer um molde do modelo desejado, pode também utilizar um conjunto de propriedades características do hexágono. Para isso, ele precisaria de uma série de conhecimentos de geometria.

⁷⁹ *L'enseignement de l'espace a l'école primaire.*



Para que o marceneiro conhecesse as propriedades do hexágono, ele precisaria ter feito um curso sobre geometria, que para ele é plenamente dispensável. Isso nos leva a afirmar que as propriedades interessantes para a geometria não o são para o espaço. Poderíamos dar outros exemplos, como a incomensurabilidade do lado do quadrado, a sua diagonal, etc.

Os problemas do espaço e da geometria, para Berthelot e Salin⁸⁰ (1993-1994, p. 41, tradução da autora), de maneira geral, podem ser resumidos em duas categorias: para o espaço – sua finalidade diz respeito ao espaço sensível, podem levar a realização de ações como fabricar, se deslocar, deslocar, desenhar e de comunicação – a linguagem e a representação espacial permitem comunicar informações que substituem a percepção (no caso dos esquemas gráficos, dos mapas, das plantas, etc.) e o sucesso ou fracasso são determinados pelo sujeito por comparação entre o que ele desejava e o resultado obtido.

Os problemas de geometria estão, muitas vezes, desligados do espaço sensível e portam sobre as representações, segundo Berthelot e Salin (1993-1994, p. 41, tradução da autora).

As situações da geometria põem em interação um sujeito “matemático” com o meio que não é mais o espaço físico e os objetos, mas um espaço conceptualizado que as “figuras-desenhos” traçadas por um sujeito não fazem mais do que representar. A validade dessas declarações não são mais estabelecidas empiricamente, mas se apóiam sobre os raciocínios que obedecem às regras do debate matemático.

Quanto ao vocabulário, geometricamente falando, um quadrado é um retângulo que tem uma característica única: todos os lados com as mesmas medidas. Para uma pessoa de fora da matemática, a mesma consideração seria um erro, um quadrado é um quadrado e um retângulo é um retângulo.

3.3.1 O caminho percorrido

Segundo Piaget (1950, p. 212, tradução da autora), “o espaço não é outra coisa que um conjunto de relações determinadas pelas transformações de posição dos elementos considerados (abstração feita das velocidades dos deslocamentos, que determina o tempo) [...]”.

⁸⁰ *L'enseignement de géométrie a l' école primaire.*

Os trajetos diários em espaços conhecidos podem parecer, à primeira vista, que não nos impõem grandes dificuldades, mas os estudos desenvolvidos com as crianças genebrinas apontaram quão tardias e elaboradas são as operações necessárias para realizar tal feito.

Quando nos deslocamos diariamente de um lugar a outro, normalmente, não paramos para pensar qual será o itinerário a ser realizado. Somente quando temos que realizar desvios por interdição do caminho rotineiro, ou pela necessidade de realizar paradas intermediárias em lugares que pouco conhecemos é que nos atemos a elaborar anteriormente um plano de ação para o nosso deslocamento.

Se fôssemos levantar o que é necessário para sairmos do lugar onde nos encontramos e nos deslocar para outro lugar, poderíamos pensar em antecipar o trajeto mentalmente numa sucessão de lugares – pontos de referências entre onde estamos e para onde vamos. No trecho intermediário, estaríamos ordenando uma série de espaços.

Se nos fosse pedida uma representação gráfica de um percurso a ser realizado, as dificuldades seriam ainda maiores, pois teríamos que memorizar a sucessão de pontos de referência, inserindo-os em séries nas quais, cada ponto de referência, estaria localizado entre outros. Teríamos, ainda, que transpor do macro espaço (real) para o micro espaço (da folha de papel). Para isso, seria necessário inserir tais trajetos em escalas de proporcionalidade em eixos coordenados.

A aparente facilidade em nos deslocarmos e em saber onde estamos – nossa posição – envolve, na verdade, uma série de operações mentais, que não precisamos necessariamente conhecer para utilizar, mas sua importância é de tal grandeza que Pierre Janet (1859-1947), médico e psicólogo francês, na obra *Les débuts de l'intelligence*, mostra como a medicina e a sociedade se valem da noção de posição, ou de localização para habilitar a saúde mental ou a integridade moral de uma pessoa.

Quando um doente chega ao consultório médico e responde adequadamente seu nome, seu endereço, onde ele está, que dia é hoje, essas informações muitas vezes são suficientes para que todos ao seu redor fiquem contentes. Ao contrário, quando ele está confuso e se embaraça, quando hesita nas respostas e parece não saber onde está, que país, que cidade, seu endereço, a data, etc., o médico escreve “doente desorientado no espaço e no tempo”, e essas características se tornam um sintoma inquietante.

O mesmo ocorre com a sociedade e a polícia que, segundo Janet, apesar da indiscrição, perguntam a cada instante nosso nome, endereço e nos fazem responder

onde estamos e para onde vamos. Essa noção de posição é muito mais complicada do que pensamos.

Dar-se conta exatamente de sua posição é reunir no espírito não somente a percepção da situação presente, mas a representação da viagem⁸¹ que é necessário fazer para ir a outros lugares determinados. Eu estou aqui bem longe da minha casa, mas não estou perdido [...] (JANET, p. 162 tradução da autora).

Pierre Janet dá o exemplo de um capitão ferido em batalha, na cabeça, por uma bala. Embora fale, com desenvoltura, onde está, o dia, com quem está conversando, sente-se extremamente infeliz, pois não sabe como retornar a sua casa. Ele perdeu a representação de direção e não sabe como fazer para retornar a outros lugares.

Para Janet, a noção de posição assim como a de direção são essencialmente sociais, pois surgiram quando o homem teve necessidade de mostrar onde ele estava para ser encontrado. Para ir e voltar, um ser isolado poderia encontrar seu alimento, seu recuo sem necessitar conhecer onde se encontrava e sem que os demais soubessem onde encontrá-lo. Foi somente quando o homem teve necessidade de fazer com que os outros soubessem onde encontrá-lo, sem se mostrar efetivamente, que ele teve necessidade das condutas relacionais.

As obras de Piaget e seus colaboradores sobre o movimento e a velocidade (1972), sobre as representações no espaço (1993) e sobre a medida (1973) na criança apresentam capítulos que se relacionam e estão no foco da nossa pesquisa. São eles: caminho percorrido⁸², situar um homem numa paisagem⁸³ e representar alguns itinerários conhecidos para saber como eles coordenam os pontos de referência⁸⁴. Tais conteúdos estão intimamente ligados às relações espaço-geométricas, portanto estão diretamente relacionados com a pesquisa empírica desta tese. Assim, faremos uma síntese desses estudos.

Para as investigações sobre o caminho percorrido (*chemin parcouru*), a técnica empregada consistia em pedir para que crianças genebrinas, entre quatro e nove anos,

⁸¹ O termo "viagem", utilizado por Janet, pode ser traduzido por caminho.

⁸² *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant*. (PIAGET), Chapitre III - *Le chemin parcouru*, (primeira edição em 1946).

⁸³ *A representação do espaço na criança*. (PIAGET; INHELDER), Capítulo XIV. *Os esquemas topográficos e o mapa da aldeia*. (primeira edição em 1948).

⁸⁴ *La géométrie spontanée de l'enfant*, (PIAGET; INHELDER; SZEMINSKA) Chapitre III - *La représentation des déplacements*. (primeira edição em 1948, sendo considerada como um segundo volume, uma continuidade da obra *A representação do espaço na criança*).

comparassem os caminhos percorridos (dois pares de pedaços de barbantes de tamanhos diferentes sobre duas pranchas A_1 , A_2 e B_1 e B_2 , com início e final coincidentes) por um “trem” (contas cúbicas – vermelha e azul). Na prancha, com os barbantes A_1 e A_2 eram formados segmentos de ângulos retos (motivo grego) de mesmo tamanho; na prancha B, os segmentos em ziguezague tinham tamanhos diferentes.

À disposição da criança havia um único cartão de tamanho do segmento unitário para os percursos A.. No caso dos percursos B, eram cinco cartões, cada um deles correspondente ao tamanho de cada segmento. As questões iniciais referiam-se à prancha com os segmentos A. Pedia-se à criança se ela podia fazer o trem caminhar em A_1 tanto quanto o trem do experimetador em A_2 . Se ela percebesse que seu trem chega antes do outro no final do percurso, cabia uma segunda questão: *você está certa da igualdade dos caminhos*, e era oferecida cartolina como auxiliar para medir tal percurso.

Se a criança compreendia a medida dos trajetos na prancha A, as questões anteriores eram retomadas sobre a prancha B, oferecendo os cinco cartões ao mesmo tempo.

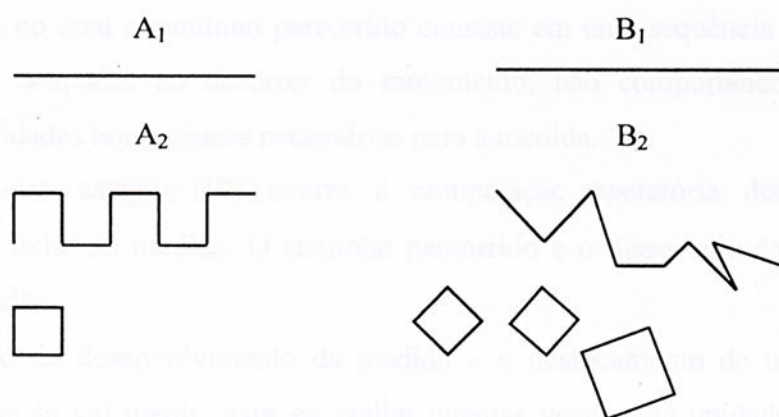


Figura 17 – Percursos a serem comparados pelas crianças e cartões para a medida.

Os resultados obtidos mostraram que, inicialmente (estágio I), o comprimento do caminho percorrido é avaliado em função da ordem intuitiva dos pontos de chegada. Além disso, mesmo acompanhando o deslocamento desigual dos dois percursos, as crianças mais jovens do grupo consideram somente como parâmetros os pontos de chegadas. Também, os deslocamentos são vistos por elas como mudança de lugar, dois

deslocamentos são considerados iguais quando levam ao mesmo ponto de chegada, a um mesmo lugar.

O caráter incompleto da intuição inicial de ordem e, em particular, a incompreensão das relações de intervalo (relação “entre”) levam aos resultados anteriormente citados: dois caminhos são iguais quando os pontos de chegada são iguais, independentemente das distâncias do intervalo linear. Caminho percorrido, para esse grupo, é mudança de posição ou de lugar, o que evidencia a característica finalista⁸⁵ da inteligência dessa etapa de desenvolvimento.

Nesse estágio em que a criança não distingue as diferenças nos comprimentos dos trajetos, encontram-se também alguns sujeitos que avançam um pouco em relação aos demais. Eles começam com as características anteriormente expostas e só consideram os pontos de chegada. Em seguida, tentam corrigir o engano nos pequenos trajetos, mas sucumbem e voltam a se posicionar como se a única relação utilizada fosse a ordem de chegada.

O segundo estágio (II) tem como principal característica a dissociação dos caminhos percorridos, mas fracasso na medida. Para esse grupo, o movimento é um todo indivisível no qual o caminho percorrido consiste em uma sequência de posições sucessivamente ocupadas no decorrer do movimento, não comportando, ainda, as partições em unidades homogêneas necessárias para a medida.

No terceiro estágio (III) ocorre a comparação operatória dos caminhos percorridos e o êxito na medida. O caminho percorrido e o dissociado da ordem dos pontos de chegada.

O estudo do desenvolvimento da medida – o deslocamento de uma unidade arbitrária no que se vai medir, para se avaliar quantas vezes essa unidade “cabe” no objeto a ser medido (*La géométrie spontanée de l'enfant*) – traz como capítulo inicial *A representação dos deslocamentos*. O título é bastante sugestivo, pois o objetivo era saber como crianças, entre quatro e dez anos, representavam seus deslocamentos em locais conhecidos.

Os pedidos realizados eram de três ordens: reconstituição dos prédios da escola e dos principais elementos do bairro, representação dos itinerários que conduziam da

⁸⁵ O finalismo é uma das características do pensamento infantil, o mundo infantil se confunde com o mundo-objeto, os fenômenos não existem isolados, mas existem, por exemplo, quando as crianças genebrinas afirmam que o lago de Le Man não vai a Berna porque cada cidade deve ter o seu lago.



escola a um ponto de referência conhecido e a inversão das posições no caso de rotação de lugares conhecidos (180°).

Para atender os objetivos propostos, as crianças iniciavam a experiência sendo colocadas frente à janela da escola, para que localizassem os prédios ou endereços característicos e para que se soubessem que conhecimentos tinham do espaço circundante. Após esse conhecimento prévio, eram colocadas em uma mesa na qual havia uma bandeja com areia úmida e plana, bem como e uma porção de casinhas de madeira de vários tamanhos, prédios, tabuinhas que representavam pátios e gramados, as praças públicas e o Arve⁸⁶ (rio que passava ao lado da École des Petites), a fim de que elas situassem sobre a bandeja os trajetos realizados, assim como, pedidos de localização de construções próximas à escola. Para os maiores, as representações eram realizadas em desenhos.

Piaget e suas colaboradoras (1973, p. 13) comparam os resultados encontrados que vão da falta de coordenação dos pontos de referência e da representação dos deslocamentos (nível I e II), à coordenação parcial dos deslocamentos (IIIA) e, finalmente, à coordenação de conjunto das referências e representação completa dos grupos de deslocamento (IIIB). Vale lembrar que a noção de grupos de deslocamento é usada por Piaget para apresentar como ocorre o desenvolvimento do espaço no período sensório-motor⁸⁷, no qual ele usa a noção de grupos de deslocamento.

Ao estágio I e II (até mais ou menos 7 anos) vão corresponder os grupos práticos com a coordenação egocêntrica. O estágio II refere-se à passagem ao grupo subjetivo (PIAGET, INHELDER e SZEMINSKA, 1973, p. 21) e o estágio III ao grupo objetivo ou coordenação objetiva ou descentrada.

A marca do estágio I é que os itinerários são reconstituições da ação própria da criança, na qual os pontos de referência não obedecem a um sistema organizado de conjunto, mas são unidos conforme certas relações conhecidas do sujeito e independentes do real.

A despeito das dificuldades apresentadas pelas crianças no estágio II, elas começam a traduzir o plano da cidade em alinhamentos lineares com pares de elementos

⁸⁶ A obra de Piaget apresenta uma grande dificuldade para seu estudo, dada a complexidade dos conceitos e a maneira como o autor apresenta suas idéias, este capítulo (I da obra de 1948), oferece um fator complicador, a necessidade de familiaridade com a cidade de Genebra e as cercanias de onde foi realizada a pesquisa, como por exemplo, a localização do Arve, de Bastions, de Place Neve, Plaine Plainpalais, rua de Carouge, os pontos de ônibus, etc.

⁸⁷ Estudamos anteriormente no Capítulo 2 – Um estudo inicial sobre o espaço, mais precisamente no item 2.1 A construção do espaço infantil.

vizinhos, ainda que as relações utilizadas não ultrapassem o nível das vizinhanças e, portanto o das relações topológicas. As distâncias são deformadas pelas ilusões egocêntricas, bem como suprimidas ou ampliadas entre certos elementos, porque há interesse subjetivo em ligá-las ou afastá-las; uma das crianças entrevistadas, GEI (5;11), loca ao lado da escola “casa das surpresas”⁸⁸ a quitanda, por outro lado, LUC (4;2) separa a escola dos pequenos da dos grandes, o que não ocorre realmente.

As características do estágio II estão relacionadas às mencionadas anteriormente (caminho percorrido), pois os deslocamentos eram ações espaciais em função das ações da criança, o espaço era separado em ponto de partida e de chegada, mas sem se ligar em sistemas de conjunto. Só a mudança de lugar os interessava, porém sem lugares sucessivos e sem localização estável.

Quanto às rotações, os retornos nos percursos (viradas em 180°), nesse estágio, não são possíveis, o que evidencia a analogia com os grupos subjetivos do período sensório-motor. O bebê não conseguia virar a mamadeira em 180° quando ela lhe era mostrada em posição reversa (mostrasse o fundo da mamadeira com leite), o mesmo ocorre com as crianças nesse estágio, ao descreverem a rotação, repetem as referências mencionadas antes da rotação.

O estágio III começa com relações objetivas entre os pontos de referência. Os itinerários são representados, mas ainda não estão inseridos em um espaço total, falta a coordenação de conjunto. Um dos protocolos apresentados mostra como isso é possível:

CHU (8;7) se contenta com dois conjuntos incoordenados entre eles: de um lado os prédios da escola (corretamente produzidos com todas as casas vizinhas até o Arve), do outro lado o Plaine, a rua de Carouge, o salão do automóvel, etc. sem relação com o Arve, nem com a escola. (PIAGET; INHELDER e SZEMINSKA, 1973, p. 24 tradução da autora).

Os dois conjuntos de CHU são relativos à chegada à escola e ao caminho que leva ao Plaine⁸⁹ onde ele ama se divertir. Como vemos, os esquemas apresentados nesse subestágio IIIA são bem mais complexos que os do estágio II. Quanto aos desenhos temos:

⁸⁸ La “*maison avec des surprises*” (*l'épicerie!*) Ibid.; p.18.

⁸⁹ Plaine é uma grande praça (Plaine Palais) de Genebra, rodeada por árvores, parque infantil, local onde os circos se instalam, próximo ao rio Arve e à escola das crianças entrevistadas.

PAT (9;4) começa a desenhar esquematicamente, mas corretamente o seguinte itinerário (indicando os nomes): a escola, a rua Dizerens (perpendicular à fachada), a rua de Carouge, a Rond-Point, os Bastions e a praça Neuve. Mas em seguida, para precisar onde é o Plaine de Plainpalais, ele constrói um grande losango e insere uma série de ruas, mas sem relação com o conjunto precedente (somente por inserção de uma grande rua conduzindo do Plaine aos Bastions). (PIAGET; INHELDER e SZEMINSKA, 1973, p. 26 tradução da autora).

Os relatos anteriores mostram que, apesar da localização adequada dos pontos de referência, falta a essas crianças representar, numa totalidade integrada, todos os itinerários. Quanto à rotação (inversão dos trajetos) o mesmo se passa: elas realizam a inversão das relações, mas falta inseri-las num conjunto, misturam o ponto de vista atual com o inverso ou se esquecem de uma parte das relações inversas.

O subestágio IIIB é marcado pela coordenação de conjunto das referências e representação completa do grupo de deslocamento. As representações são marcadas pela construção de esquemas topográficos de conjunto de acordo com um sistema de coordenadas retangulares (relações euclidianas), com distâncias proporcionais (relações projetivas). Os desenhos dos itinerários são coerentes e inseridos em um único conjunto. Quanto às rotações, são realizadas corretamente sem dificuldades.

A obra *A representação do espaço na criança* aparece freqüentemente citada nos textos como sendo o primeiro volume das pesquisas sobre o espaço e a geometria. Os resultados obtidos com *os esquemas topográficos e o mapa da aldeia* tinham como objetivo verificar a interdependência entre as construções projetivas e euclidianas no desenvolvimento do espaço infantil.

Para atender os objetivos citados, eram utilizados procedimentos nos quais as crianças (entre 4 e 10 anos) tinham que representar uma pequena aldeia, algumas casas, igreja, árvores, etc., montadas no chão ou sobre uma mesa. Inicialmente, elas tinham que desenhar sobre uma folha de papel o modelo previamente montado, após o que as crianças deveriam montar a aldeia recolocando os objetos, mas a partir dos seus próprios desenhos.

Para finalizar, era apresentado um papelão (40X60cm) com oito objetos, representando uma pequena aldeia por letras. As crianças deveriam reproduzir em outro papelão de mesmo tamanho, porém sem marcações que pudessem auxiliar na colocação de objetos iguais aos do modelo. Os objetos oferecidos às crianças poderiam ser em um número maior que os colocados sobre o modelo da aldeia.

Os resultados encontrados com as técnicas descritas mostram três grupos com características distintas, indo desde a ausência de correspondência espacial (I) às coordenações parciais (II) e, finalmente, a uma construção progressiva do sistema de coordenadas.

As representações efetuadas pelo grupo (até mais ou menos 4 anos), classificadas como estágio I, vão dos arranjos arbitrários dos objetos (casas, igreja, árvores, etc.) até correspondências que não ultrapassam as relações de vizinhança, são classes de objetos colocadas lado a lado, o que nos permite resgatar as diferenças entre as correspondências lógico-matemáticas e as infralógicas.

Os desenhos e os arranjos efetuados pelo grupo dos objetos podem ser classificados como um conjunto lógico-matemático (objetos reunidos por semelhanças mesmo que afastados no espaço) e não como um conjunto infralógico, pois, para que isso ocorra, duas condições são imprescindíveis: reproduzir os mesmos objetos (correspondência lógico-matemática) e respeitar a mesma configuração espacial (correspondência infralógica). No entanto nenhuma dessas duas condições são alcançadas pelo grupo.

O estágio II (de 4 a 7 anos) apresenta coordenações parciais dos objetos. Os sujeitos escolhem os objetos e procuram situá-los no desenho e nas montagens, porém não conseguem localizá-los em um sistema de coordenadas, “por não saber ‘multiplicar’ as relações de ordem e distâncias entre si segundo três dimensões” (1993, p. 447), aparecendo, assim, pequenos conjuntos de objetos ordenados em pares linearmente. Esse estágio aparece subdividido em IIA e IIB, e anuncia a transição entre as coordenações parciais e as coordenações multiplicativas do terceiro estágio (III).

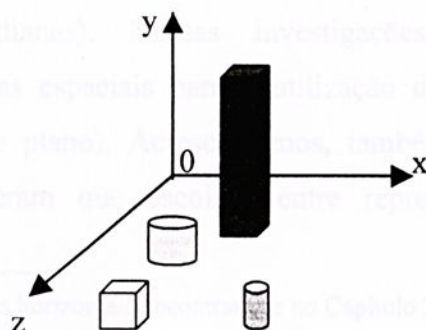


Figura 18 – Objetos inseridos no espaço tridimensional, segundo relações de profundidade (z), de altura (y) e de largura (x).

Piaget e Inhelder (1993, p. 455) apresentam uma síntese das limitações desse estágio:

em outras palavras, da mesma forma que no nível IIA, ela só conhece intuitivamente paralelas e perpendiculares⁹⁰ ligadas às figuras particulares, mas não sabe encontrar horizontais e verticais, também em presença dos objetos do modelo a serem traduzidos num esquema topográfico, ela não consegue levar em conta ao mesmo tempo a largura e a profundidade do conjunto, limita-se, inicialmente, a reduzir tudo a uma única dimensão. O sujeito KRA sabe bem que esse alinhamento⁹¹ não está conforme o modelo a duas dimensões, mas não consegue “desenhar assim”. Quanto à PAC, sua linha encurvada marca um início de bidimensionalidade, isto é, um ajuste entre a reta de CRI e CRA e uma colocação de profundidade.

A construção progressiva dos sistemas de coordenadas, as multiplicações das relações de ordem, inicialmente, conforme esquerda e direita, frente e atrás, mesmo que ainda sem a consideração suficiente das distâncias, marcam o estágio III (entre 7 e 10 anos). Essas características mostram o início das coordenações de conjunto; os objetos são colocados segundo relações interdependentes (IIIA). Ao final do subestágio IIIB, as construções e os desenhos aparecem plenos em relação às posições, às distâncias (coordenadas), às perspectivas e às proporções, entretanto falta uma conquista que somente será completada no nível das operações formais: a substituição dos objetos concretos pelo desenho da superfície ocupada, apresentando somente as medidas, o que Piaget e Inhelder chamam de passagem do natural ao convencional, a partir do que, representar os objetos no espaço passa a ser uma convenção e não mais o desenho de objetos particulares.

3.3.2 As representações dos entes geométricos

Em capítulo anterior (Capítulo 2), já mencionamos uma das obras na qual Piaget e seus colaboradores investigaram as representações de algumas formas geométricas (topológicas e euclidianas). Nossas investigações, apesar das semelhanças, acrescentaram as formas espaciais para a utilização das relações projetivas e entes abstratos (ponto, reta e plano). Acrescentamos, também, alguns procedimentos, nos quais os sujeitos tiveram que escolher entre representações gráficas, para nos

⁹⁰ Os estudos sobre a reta e as horizontais encontram-se no Capítulo 2 – Um estudo inicial sobre o espaço e a geometria infantil.

⁹¹ O mesmo vai ocorrer com os sujeitos do Capítulo 5 – Procedimentos para análise dos dados e resultados, ao desenharem as formas geométricas espaciais, principalmente a esfera, eles sabem que não está correta a forma como eles desenharam (MAR, 11 – *Mas vai ficar igual ao círculo*), mas não conseguem representá-la adequadamente.

certificarmos das suas afirmações. Nossa pesquisa, já citada anteriormente (KOBAYASHI, 1998), investigou, também, a representação gráfica das mesmas formas geométricas (topológicas e euclidianas). O capítulo que se segue vai apresentar como um grupo de alunos de Ensino Fundamental representa o caminho percorrido entre a casa e a escola, bem como seus deslocamentos na escola e a representação de alguns entes geométricos. Esses dados analisados podem dar a dimensão do que os nossos alunos sabem e utilizam dos conhecimentos espaço-geométricos.

CAPÍTULO 4



CAPÍTULO 4

Metodologia é levantando as questões

Este capítulo tem como objetivo apresentar a metodologia de pesquisa, abordando os aspectos teóricos e práticos da pesquisa científica.

A metodologia de pesquisa é o conjunto de procedimentos e técnicas utilizadas para a coleta, organização e análise dos dados.

O capítulo é dividido em duas partes: a primeira aborda os aspectos teóricos da metodologia de pesquisa, e a segunda aborda os aspectos práticos.

Na primeira parte, são abordados os conceitos básicos de metodologia de pesquisa, como a definição de problema de pesquisa, a formulação de hipóteses e a escolha dos métodos de pesquisa.

Na segunda parte, são abordados os procedimentos práticos da metodologia de pesquisa, como a coleta de dados, a organização dos dados e a análise dos dados.

Este capítulo é fundamental para a compreensão da metodologia de pesquisa e para a realização de pesquisas científicas.

Como resultado, espera-se que o leitor tenha uma compreensão clara dos conceitos e procedimentos da metodologia de pesquisa.

Este capítulo é dividido em duas partes: a primeira aborda os aspectos teóricos da metodologia de pesquisa, e a segunda aborda os aspectos práticos.

Na primeira parte, são abordados os conceitos básicos de metodologia de pesquisa, como a definição de problema de pesquisa, a formulação de hipóteses e a escolha dos métodos de pesquisa.

Na segunda parte, são abordados os procedimentos práticos da metodologia de pesquisa, como a coleta de dados, a organização dos dados e a análise dos dados.

Este capítulo é fundamental para a compreensão da metodologia de pesquisa e para a realização de pesquisas científicas.

Como resultado, espera-se que o leitor tenha uma compreensão clara dos conceitos e procedimentos da metodologia de pesquisa.

Este capítulo é dividido em duas partes: a primeira aborda os aspectos teóricos da metodologia de pesquisa, e a segunda aborda os aspectos práticos.

Na primeira parte, são abordados os conceitos básicos de metodologia de pesquisa, como a definição de problema de pesquisa, a formulação de hipóteses e a escolha dos métodos de pesquisa.

Na segunda parte, são abordados os procedimentos práticos da metodologia de pesquisa, como a coleta de dados, a organização dos dados e a análise dos dados.

Este capítulo é fundamental para a compreensão da metodologia de pesquisa e para a realização de pesquisas científicas.

Como resultado, espera-se que o leitor tenha uma compreensão clara dos conceitos e procedimentos da metodologia de pesquisa.

CAPÍTULO 4

O capítulo é dividido em duas partes: a primeira aborda os aspectos teóricos da metodologia de pesquisa, e a segunda aborda os aspectos práticos.

CAPÍTULO 4

Metodologia e levantamento dos dados

O capítulo a seguir tem por objetivo apresentar a metodologia empregada para levantar as representações espaço-geométricas de um grupo de alunos das séries iniciais do Ensino Fundamental⁹². Mais especificamente, queremos descobrir como esses sujeitos representam seus deslocamentos realizados em um campo espacial conhecido – percursos rotineiros e locais familiares (geometria vivida) – as representações gráficas de alguns entes geométricos (geometria axiomática) conhecidos e as possíveis relações entre essas duas formas de conhecimento.

Como geometria vivida, entendemos a das experiências diárias pelas quais nos situamos no espaço, situamos os objetos, coordenamos vários pontos de referência para organizarmos nossos deslocamentos, segundo nossas necessidades momentâneas e futuras. Mas, em face da necessidade de nos deslocarmos em espaços desconhecidos, ou quando somos abordados por um visitante que nos pede informações de como chegar a um outro local é que tomamos consciência das dificuldades para reconstruirmos em representações gráficas, verbais e gestuais uma situação vivida na prática diária.

As afirmações anteriores podem ser comprovadas com a dificuldade que as pessoas encontram ao terem que dar informações de como chegar a um determinado lugar, de “ler” uma planta ou um mapa, enfim, de imaginar um esquema gráfico no qual possamos vislumbrar onde estamos e para onde vamos, de coordenar os diferentes deslocamentos a serem realizados para chegar a um determinado lugar, escolhendo entre as múltiplas possibilidades de atingirmos os objetivos esperados.

Por geometria axiomática entendemos a formalizada pelas definições de seus entes (ponto, reta, plano, figuras planas e tridimensionais ou espacializadas). Um axioma, por exemplo, é uma *“premissa imediatamente evidente que se admite como universalmente verdadeira sem exigência de demonstração”* (FERREIRA, 1995, p. 77).

⁹² O grupo estudado teoricamente está compreendido no período entre as operações concretas e início das operações formais.



4.1 Método clínico

Tomamos como quadro de referência a teoria interacionista construtivista de Piaget. Interessa-nos, neste quadro teórico, a construção de um conteúdo específico e, para alcançar o objetivo descrito, o método mais adequado é o método clínico crítico ou de exploração crítica (INHELDER; BOVET e SINCLAIR, 1977, p. 29).

Não mencionaremos o histórico e as modificações sofridas pelo método no decorrer da obra de Piaget e seus colaboradores, mas achamos importante salientar os benefícios de tal escolha.

Interrogamos os sujeitos, segundo os conselhos dos pesquisadores de Genebra. Deixamos os sujeitos à vontade para que apresentassem suas condutas espontâneas sobre o assunto em questão. Nossa análise visa ao estudo epistemológico – estamos interessados em descobrir como se constrói a noção e que tipo de operações são utilizadas.

De acordo com o próprio Piaget (sd, p. 11), duas são as qualidades que deve ter um bom experimentador: “saber observar, ou seja, deixar a criança falar, não desviar nada, não esgotar nada e, ao mesmo tempo, saber buscar algo de preciso, ter a cada momento uma hipótese de trabalho...”.

4.2 Construção dos dados

4.2.1 Grupo pesquisado

A coleta de dados foi realizada na cidade de São José do Rio Preto, interior do Estado de São Paulo. Essa escolha deveu-se às facilidades encontradas para o acesso aos alunos, graças à indicação do orientador e – a conveniência para a autora do trabalho, visto que as duas escolas oportunizam aos alunos das universidades locais campo para desenvolvimento de projetos e estágios.

Os alunos entrevistados pertenciam ao sistema escolar público municipal (de 1.^a a 4.^a séries ou 1.^o e 2.^o ciclos) e estadual (de 5.^a e 6.^a série ou 3.^o ciclo). As escolas serão identificadas como A, séries iniciais e escola B, séries intermediárias do Ensino Fundamental. Localizam-se nos bairros Jardim Primavera e Vila Anchieta.

O grupo pesquisado compunha-se de **quinze** (15) alunos entre 7 e 12 anos, sendo sete (7) pertencentes ao 1.^o e 2.^o ciclos (1.^a a 4.^a séries) e oito (8) ao 3.^o ciclo (5.^a e 6.^a séries). A escolha dos sujeitos foi por sorteio, realizado pela coordenadora pedagógica na escola A e pela inspetora de alunos na escola B.

Tabela 5 – Participantes da pesquisa de campo.

NOME	IDADE	SEXO	SÉRIE	ESCOLA
BIA	7	F	1. ^a	A
RAF	7	F	1. ^a	A
ANN	8	F	2. ^a	A
LAR	8	F	2. ^a	A
VAN	9	F	3. ^a	A
REN	9	M	3. ^a	A
AND	10	M	4. ^a	A
DEM	10	M	5. ^a	B
ALE	10	M	5. ^a	B
BIB	11	F	5. ^a	B
MAR	11	F	5. ^a	B
JUL	11	M	5. ^a	B
MAY	11	F	5. ^a	B
GLE	12	M	6. ^a	B
INA	12	F	6. ^a	B

Durante o período de um ano letivo, em que convivemos com a rotina dessas escolas, pudemos presenciar o desenvolvimento das atividades.

As escolas citadas estão localizadas em bairros vizinhos, freqüentadas por filhos de operários, pequenos comerciantes e comerciários habitantes das proximidades. Possuem um traço comum e diferencial: gozam do respeito da comunidade onde os pais querem que os filhos estudem desde o ensino de educação infantil ao final do ensino fundamental em escolas próximas, criando, assim, uma concorrência por vagas.

Os dados coletados junto à direção da escola A, apresentaram uma clientela oriunda de vários bairros próximos, com renda média entre cinco e dez salários mínimos. O analfabetismo entre os pais é quase inexistente e, apesar de constar no plano escolar anual a participação da APM, não encontramos pais participando da administração da escola. É necessário salientar as ótimas condições de higiene e ordem vigentes na unidade, onde todas as dependências estão equipadas devidamente e oferecem conforto e segurança aos usuários.

Na escola B, a administração do dinheiro da APM é gerenciada pelos pais que têm presença constante na escola. Todos os dias participam ativamente realizando levantamento das necessidades, desde os pequenos concertos, tais como: torneiras quebradas até a pintura anual da escola. Toda a manutenção é comunicada ao grupo que administra a APM, que se encarrega de tomar providências.

Não vimos, na escola, nada que estivesse quebrado, os consertos são imediatos e o fato que chamou-nos à atenção foi a presença de dois funcionários, que foram contratados pelos pais, para o controle dos alunos, auxiliando, inclusive, na parte de organização da escola. Fato diferencial das duas escolas é a continuidade dos alunos da escola A para a escola B. Ao término do 2.º ciclo, na escola A, correspondendo à 4.ª série do Ensino Fundamental, os alunos passam para a escola B para cursarem o 3.º e 4.º ciclos.

A pesquisa de campo teve início em março e término em novembro de 2001, com os estudos realizados pela pesquisadora e o apoio de três estagiárias o 4.º ano de Psicologia. Competia às estagiárias auxiliarem no controle das gravações, entrega dos formulários de registro, ordenação das figuras planas e tridimensionais durante a entrevista, na ordem previamente estabelecida, o mesmo ocorrendo com os cartões e folha de múltipla escolha, (Figuras 33, 34, 35 e 36).

Os alunos entrevistados na escola A estão na faixa de 7 a 11 anos, cursavam as séries iniciais do Ensino Fundamental, assim distribuídos: 2 na 1.ª série, 2 na 2.ª série, 2 na 3.ª série e 1 na 4.ª série.

Os alunos entrevistados na escola B estão na faixa de 10 a 12 anos, assim distribuídos: 6 na 5.ª série e 2 na 6.ª série.

4.2.2 Abordagem ao grupo

As entrevistas ocorreram na própria escola durante o horário de aula. A biblioteca, nas duas escolas, foi o local indicado para tanto. O espaço era reservado, permitindo realizar a coleta de dados com tranquilidade e com disponibilidade de tempo.

Foi realizadas, durante o mês de março de 2001, pesquisa inicial em todas as faixas etárias (7, 8, 9, 10, 11 e 12 anos) com o objetivo de sanar possíveis problemas na abordagem aos sujeitos, tais como: contradição entre os objetivos propostos e os dados coletados, apresentação do material concreto, recursos utilizados na abordagem,

registros, ordem de apresentação das perguntas, linguagem a ser utilizada, para que os sujeitos compreendessem o que era pedido, enfim possíveis falhas no decorrer da coleta e análise de dados. Após o término das sessões e análise dos dados, é que a teve início a pesquisa definitiva. Foram selecionados dois sujeitos em cada faixa etária (totalizando 12 sujeitos), escolhidos por sorteio pela administração das escolas. Os resultados do pré-teste não foram utilizados na pesquisa, servindo como referencial de auxílio na elaboração da metodologia.

As sessões ocorriam dois dias na semana. A cada sessão, em média, duas entrevistas, que duravam de uma hora e meia a duas horas. A escola A de Ensino Fundamental séries iniciais (1.^a a 4.^a séries) funcionava nos dois turnos, manhã e tarde; a escola B, somente no período da tarde (5.^a e 6.^a séries).

As entrevistas eram individuais e transcorreram em duas sessões. Na primeira, interrogamos os sujeitos sobre as representações dos deslocamentos no espaço vivido. A segunda, relativa às representações sobre os entes geométricos, ocorria na semana seguinte. Eram marcadas antecipadamente pelo coordenador pedagógico (escola A) e pelo inspetor de alunos (escola B), sendo o termo de consentimento assistido assinado pelos pais ou responsáveis anteriormente às entrevistas.

Essa opção nos parecia interessante por dois motivos:

- 1) o interrogatório em duas sessões nos permitia uma eventual reflexão sobre os dados apresentados pelos sujeitos. Ao término de cada dia, era feita a transcrição dos dados a partir das gravações em k7 e da filmagem, e, caso persistisse alguma dúvida sobre as respostas dos sujeitos, a entrevista era retomada na semana posterior.
- 2) O tempo de espera entre uma sessão e outra permitia ao experimentador refletir sobre os dados coletados e comparar os possíveis desvios, para rever a metodologia.

4.3 A geometria vivida

Técnica 1 – Os deslocamentos no espaço conhecido

Objetivo: As questões colocadas aos sujeitos tinham como objetivo descobrir como eles representavam os deslocamentos realizados em espaços conhecidos, quais

eram as relações espaciais utilizadas: topológicas (vizinhanças, ordem, envolvimento e contínuo); projetivas (coordenação dos pontos de referência, coordenação de múltiplos espaços, a coordenação dos diversos pontos de vista) e euclidianas (as proporções e semelhanças, utilização de sistemas de referência e as coordenadas horizontal e vertical).

O início da entrevista era de esclarecimento sobre quais os objetivos da nossa pesquisa, como seria o andamento das entrevistas, o que ocorreria nos dois encontros, se o sujeito gostaria de participar.

As entrevistas seguiam um esquema predeterminado, mas, como peculiar da abordagem do método clínico, no desenrolar dos fatos, o pesquisador poderia alterar o previsto no sentido de retornar a um assunto, se houvesse desconcentração dos sujeitos, ou, ainda, se a apresentação dos dados pelos sujeitos deixasse dúvidas sobre suas crenças.

- Eu me chamo, esta é a, e você? Que idade você tem? Qual é o nome da sua escola? Que turma é a sua? Qual é a coisa de que você mais gosta? Me disseram que você gosta muito de desenhar, é verdade? Estou aqui para realizar um estudo sobre geometria, você poderia me ajudar?...
- Você mora perto da escola? Como vem para cá? Demora muito tempo? O que você vê pelo caminho? Você sabe o nome da rua da sua casa? E da escola? Quais são os lugares mais bonitos por onde você passa? Por quê? E os mais feios? Por quê? Tem alguma coisa que você gostaria de falar que vê no caminho de casa para a escola?
- Você pode desenhar o caminho que faz de casa para a escola? (No decorrer do desenho, muitos dos sujeitos relatavam lugares, fatos que se passam no percurso, davam nomes às ruas, às praças e aos monumentos, dando chance para que fizéssemos outras perguntas que auxiliassem na compreensão do que eles estavam colocando no papel).
- Você pode desenhar a frente da sua escola no quarteirão onde ela está localizada (vista frontal)?
- Você pode desenhar como é por dentro a sua escola, e me mostrar no desenho onde fica a sua sala de aula?



Figura 20 – Pátio interno de circulação entre a quadra poliesportiva, o setor administrativo e as salas de aula da escola A.



Figura 21 – Área de circulação interna entre as salas de aula e o setor administrativo da escola A.



Figura 22 – Corredor interno das salas de aula da escola A.



Figura 23 – Pátio interno para refeições, ligando salas de aula, biblioteca, bebedouros de água, banheiros, cozinha e cantina.

Figura 24 – Pátio da escola B.

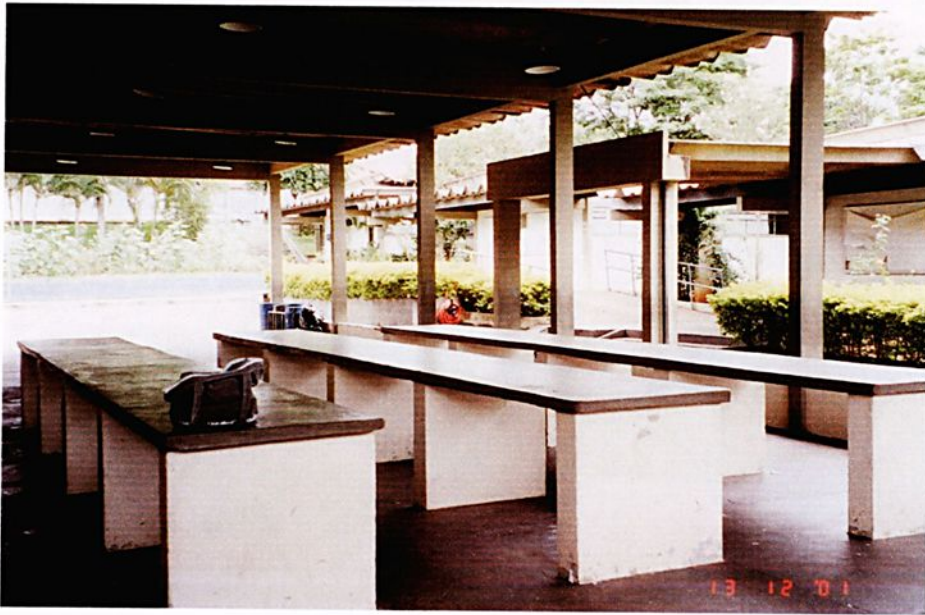


Figura 24 – Pátio interno da escola A.

Escola B

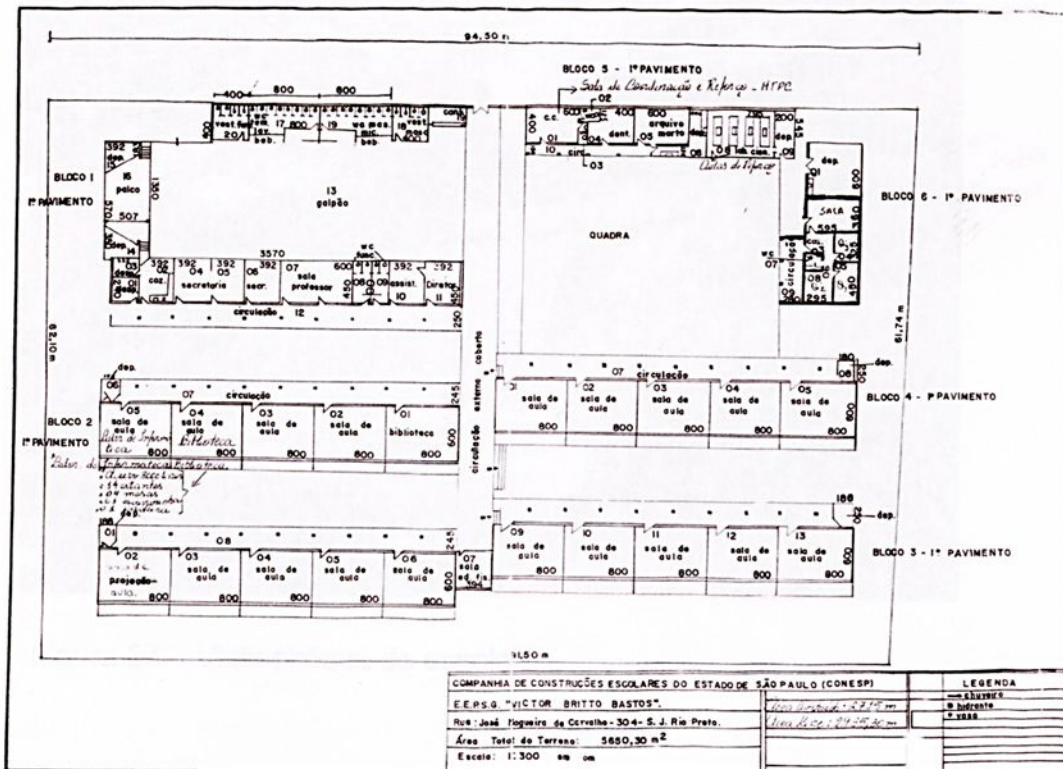


Figura 25 – Planta da escola B.



Figura 26 – Vista oblíqua da escola B, a partir do 11.º andar de um prédio vizinho.



Figura 27 – Vista oblíqua da escola B.



Figura 28 – Frente da escola B.



Figura 29 – Pátio interno de circulação da escola B entre o setor administrativo e as salas de aula.



Figura 30 – Pátio interno de circulação entre as salas de aula da escola B.



Figura 31 – Cristo Redentor localizado na rua lateral à escola B.



Figura 32 – Interior de sala de aula da escola B.

4.4 A geometria axiomática

A coleta dos dados ocorreu, como descrito anteriormente, em sessões individuais, na biblioteca das escolas.

Objetivo: As situações propostas tinham por objetivo investigar que conhecimentos os sujeitos tinham sobre a geometria abstrata ou axiomática, quais eram as relações espaço-geométricas usadas, utilizadas nas suas representações imitativas (gestos), orais (que vocabulários utilizavam), gráficas (desenhos) e na escolha de modelos previamente preparados (cartões com desenhos).

Para atender aos objetivos propostos, o levantamento de dados tinha início com perguntas em cujas respostas os sujeitos definiam os entes geométricos que são objetos de estudo nas escolas de Ensino Fundamental, tais como: ponto, reta, plano; formas espaciais planas e tridimensionais (sólidos geométricos). As formas estudadas eram: quadrado, retângulo, triângulo, esfera, cubo, paralelepípedo, cone e esfera.

Técnica 2 – Os entes geométricos

1.^a Parte – Relatos verbais e imitação

A entrevista tinha início com perguntas preestabelecidas, como dito anteriormente. Se necessário, no decorrer dos relatos, outras perguntas se somariam para esclarecer possíveis dúvidas quanto às definições e explicações realizadas pelos sujeitos. Essas perguntas iniciais deveriam ser respondidas verbalmente, pois tínhamos por objetivo descobrir como os sujeitos se expressavam nos gestos (imitação), de que ações físicas se valeriam para explicar o que era pedido. A importância do gesto foi confirmada nos pré-testes, sendo este um dos fatores determinantes por termos optado pelo registro em vídeo.

- Você pode me dizer o que é um ponto?
- Você pode me dizer o que é uma reta?
- Você pode me dizer o que é um plano?
- Você pode me dizer o que é um quadrado?
- Você pode me dizer o que é um retângulo? ... triângulo? ... círculo?
- Você pode me dizer o que o que é um cubo? ... um paralelepípedo? ... uma esfera? ... um cone?

2.^a Parte – Desenho

Aos relatos verbais e gestuais, seguiam-se pedidos para que os sujeitos desenhasssem de memória os entes anteriormente representados, na mesma ordem, pedidos um de cada vez. Era entregue uma folha de papel sulfite em tamanho A4 e lápis preto, não havia borracha e, caso houvesse necessidade, outras folhas em branco poderiam ser dadas no decorrer dos desenhos. Os pedidos para o desenho seguiam a mesma ordem anteriormente apresentada, do ponto às formas tridimensionais.

- Você pode desenhar um ponto?
- Você pode desenhar uma reta?
- Você pode desenhar um plano, um quadrado, um retângulo, um círculo, um triângulo, um cubo, um paralelepípedo, uma esfera, um cone?

3.^a Parte – Reconhecimento e desenho à vista dos entes geométricos

Aos pedidos de definições e de desenhos de memória, seguiam-se o reconhecimento e o desenho das formas planas e tridimensionais⁹³, as quais eram entregues ao sujeito, uma de cada vez, para que as nomeasse, desenhasse e exemplificasse com objetos existentes ao seu redor.

As formas geométricas eram entregues ao sujeito individualmente para o manuseio, o experimentador esperava que o sujeito, ao vê-las, fizesse o reconhecimento, caso contrário era perguntado textualmente.

Os desenhos das formas tridimensionais, impunham aos sujeitos, assim como o desenho dos percursos e locais conhecidos, uma dificuldade adicional que é a utilização da representação da terceira dimensão, momento no qual as perguntas eram feitas para que se descobrisse se o sujeito conseguia perceber as semelhanças e diferenças entre as formas planas e tridimensionais, e suas respectivas representações gráficas⁹⁴, a fim de avaliar como transpunham o tridimensional para a representação plana, e para que explicasse, quando percebia tal diferença, como registrá-la no papel.

Ao término de cada desenho, pedia-se que o sujeito desse exemplo de objeto semelhante à forma desenhada.

- Você pode me dizer o nome desta forma geométrica? Pode desenhá-la para mim?
- Você pode me dizer alguma coisa que se parece com esta forma geométrica?

⁹³ As formas aqui denominadas de bidimensionais: quadrado, retângulo, triângulo e círculo, eram de madeira com espessuras desprezíveis. Já as formas tridimensionais eram feitas do mesmo material, todas das mesmas cores e cada forma tridimensional era proporcional às bidimensionais, por exemplo, o cubo tinha seus lados do tamanho do quadrado, a esfera tinha o diâmetro igual ao do círculo, o paralelepípedo tinha seus lados iguais ao tamanho dos lados do retângulo e do quadrado, já a projeção plana do cone era do tamanho do triângulo.

⁹⁴ Como será apresentado no Capítulo 5 **Procedimentos para análise dos dados e resultados**, os sujeitos estudados apresentaram muita dificuldade em perceber que a representação gráfica de formas planas e tridimensionais é diferente. Somente quando se põe a forma plana e a tridimensional concretamente é que eles percebem as diferenças, mas têm dificuldades para passá-la ao papel.

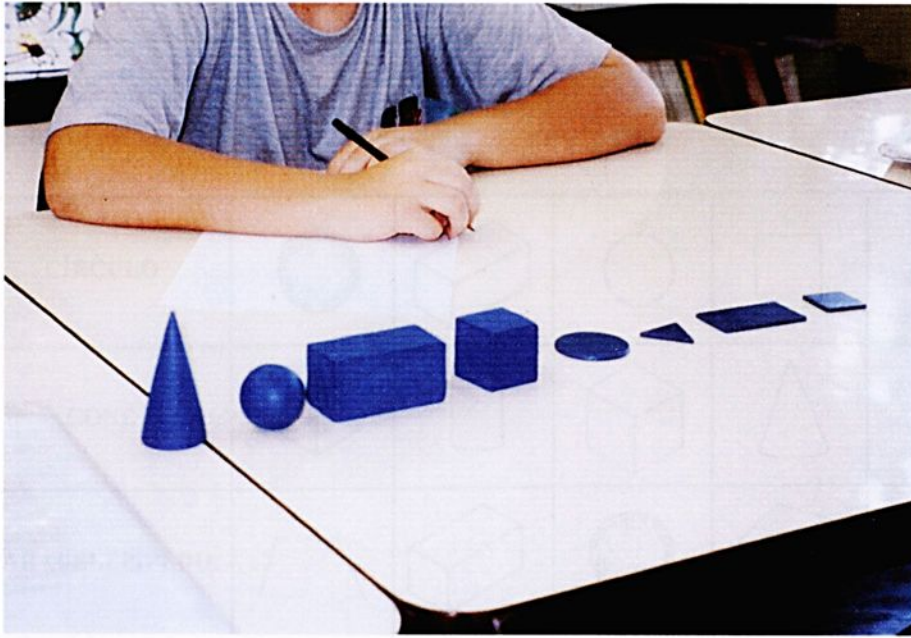


Figura 33 – Coleção de formas geométricas utilizadas nas entrevistas.

4.^a Parte – reconhecimento das formas geométricas

Foram acrescentados mais dois procedimentos nos quais os sujeitos deveriam reconhecer, mediante o nome, a forma, em um rol de cinco opções.

O primeiro desses procedimentos era o reconhecimento do desenho que melhor representasse a forma geométrica pedida. Para tanto, eram mostrados ao sujeito cinco cartões quadrados (5,5cm X 5,5cm), dentre os quais, somente um correspondia à forma pedida. A sequência dos cartões apresentados era a mesma para todos os sujeitos.

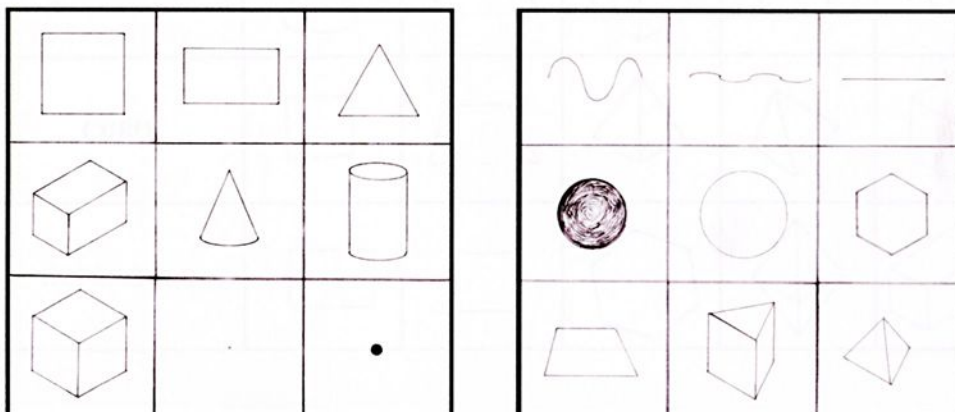


Figura 34 – Coleção de desenhos apresentados aos sujeitos nas provas das formas geométricas.

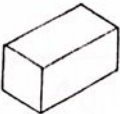
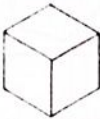
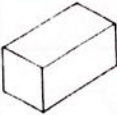
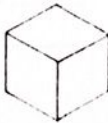
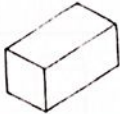
CÍRCULO					
CONE					
PARALELEPÍPEDO					
PONTO					
TRIÂNGULO					
ESFERA					
RETA					
QUADRADO					
CUBO					
RETÂNGULO					

Figura 35 – Folha com a seqüência de figuras a ser apresentada para os sujeitos no decorrer da entrevista.

Como último recurso utilizado para obter informações sobre a geometria axiomática, apresentávamos uma folha com desenhos das formas anteriormente citadas acrescidos de outras, nas quais os sujeitos deveriam ler o nome e identificar qual era a sua correspondente.

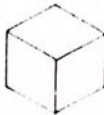
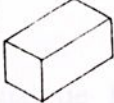
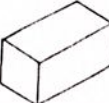
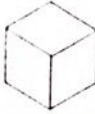
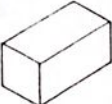
ESFERA					
RETA					
QUADRADO					
CUBO					
RETÂNGULO					
CÍRCULO					
CONE					
PARALELEPÍPEDO					
PONTO					
TRIÂNGULO					

Figura 36 – Folha de múltipla escolha para correspondência nome-forma.

4.5 Recursos

Destacamos dois tipos de recursos utilizados na pesquisa, aqueles que viabilizaram as descobertas de um universo único, o da construção do conhecimento espaço-geométrico, ou seja, dos sujeitos alvos da pesquisa e das estudantes de psicologia e dos recursos materiais.

Optamos por realizar o registro vídeo-gráfico (Filmadora Panasonic NV-R500EN VHS-C), fônico (gravador minicassete) e registro gráfico pela riqueza dos dados durante as sessões de entrevistas. Nesse sentido, as estudantes de psicologia ajudavam ora gravando, ora entregando o material a ser manuseado, a ser desenhado, pelos sujeitos.

A opção por múltiplas formas de registros foi feita após os pré-testes, pois era impossível captar o movimento de mãos e corpos nas explicações.

4.5.1 Recursos humanos

- Alunas de 4.º ano de Psicologia
- Alunos de Escola Municipal (escola A) e Escola Estadual de Ensino Fundamental (escola B) da cidade de São José do Rio Preto

4.5.2 Recursos materiais

- Papel sulfite A4
- Lápis preto HB
- Jogo de formas geométricas
- Gravador minicassete
- Máquina fotográfica
- Filmadora Panasonic NV-R500EN VHS-C

CAPÍTULO 5

CARÍTELLO 5

CAPÍTULO 5

CAPÍTULO 5

Procedimentos para a análise dos dados e resultados

O capítulo que segue tem por objetivo apresentar os procedimentos de classificação dos dados coletados e os seus resultados. As informações iniciais são referentes às representações dos percursos conhecidos, como os sujeitos representam seus deslocamentos realizados em um campo espacial conhecido – percursos rotineiros e locais familiares (geometria vivida). Após os resultados da geometria vivida, segue o resultado das representações gráficas de alguns entes geométricos (geometria axiomática), ponto, reta, plano, figuras geométricas planas (quadrado, retângulo, triângulo, círculo) e tridimensionais (cubo, paralelepípedo, cone e esfera) conhecidos dos sujeitos. Finalmente, as possíveis relações entre essas duas formas de conhecimento.

5.1 Critério para classificação dos dados

Classificamos os dados coletados de acordo com as relações geométricas utilizadas pelos sujeitos. As mais elementares são as topológicas. Essas relações são interiores aos objetos ou ligam partes de um mesmo objeto, elas compreendem as vizinhanças (ligada às proximidades), as separações (dois objetos podem estar próximos, mas não serem vizinhos), a ordem (sucessão espacial), a circunscrição (envolvimento) e o contínuo (que é a síntese das relações anteriores).

As relações topológicas não levam à construção de um sistema de figuras estáveis ou de relações entre figuras, sem referência a objetos à esquerda e à direita, frente e atrás, em cima e embaixo, constância de forma, espaços coordenados sob um ponto de vista (projetiva), nem de objetos com constância de grandeza, distância, paralelas, ângulos, etc. (euclidiana).

A diferença entre as relações topológicas e as relações projetivas e euclidianas está na forma como coordenam as figuras entre si. As relações topológicas, como anteriormente citadas, são construídas pouco a pouco entre os elementos de uma mesma



figura ou de uma mesma configuração estruturada por ela, diferentemente das projetivas e euclidianas que levam à construção de sistemas de conjunto, os quais reúnem, em um único espaço, um conjunto de objetos, quer sob o jogo de perspectivas – coordenação de diferentes pontos de vista, quer sob a coordenação de eixos de coordenadas.

A coordenação em conjunto dos objetos, quer pelas relações projetivas quer pelas euclidianas, necessita inserir os objetos em relações múltiplas. Por isso as relações topológicas são muito mais simples, pois consideram somente o que é interior ao objeto. Mas, para se inserir um objeto em coordenadas projetivas e/ou euclidianas, é preciso que o objeto exista como tal, portanto as relações topológicas são necessárias à formação das projetivas e euclidianas.

O espaço projetivo vai se constituir pela coordenação dos pontos de vista dos objetos reais ou possíveis. Já o espaço euclidiano, pela coordenação dos objetos inseridos em coordenadas horizontais e verticais, nas quais, mesmo se deslocando no espaço, mantêm a mesma dimensão. Para se desenhar um objeto em perspectiva, é necessário se fazer uma escolha e, de acordo com a escolha feita, o objeto ou os objetos irão aparecer no papel com um aspecto. Na geometria euclidiana, as dimensões e os ângulos não se alteram, bem como as paralelas.

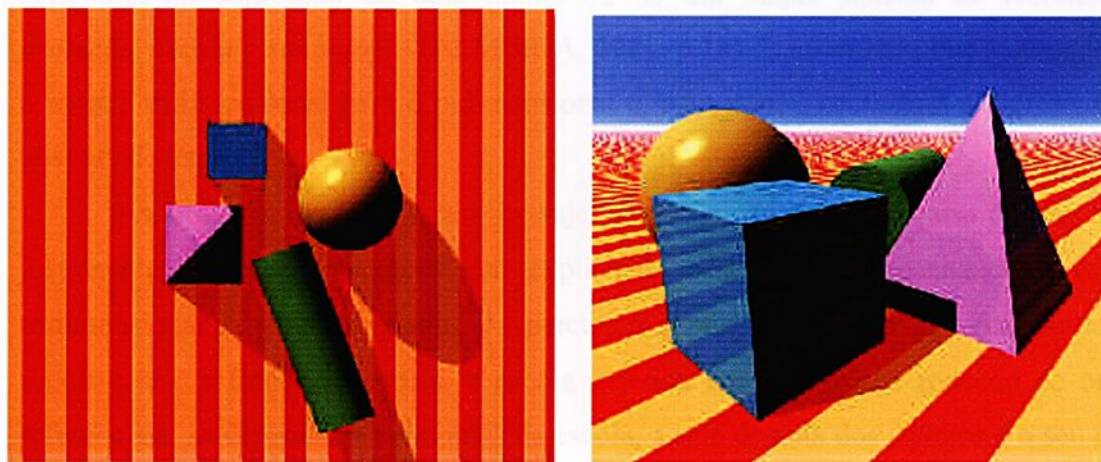


Figura 37 – Representação dos entes geométricos sob dois pontos de vista⁹⁵.

A partir das considerações feitas, classificaremos os dados. As representações estarão agrupadas, segundo a similaridade, nas características apresentadas. Em cada

⁹⁵ Fonte: Disponível em: <<http://www.ac-grenoble.fr/lycee/LAB/jr2000/espace/pages/repres3d.htm>, > Acesso em: 31 jan. 2003.

grupo, haverá as explicações sobre as características consideradas e em que relações estão enquadradas.

5.1.1 A representação dos percursos e dos ambientes conhecidos

O mapa é uma representação codificada de um determinado espaço real. Podemos até chamá-lo de um modelo de comunicação, que se vale de um sistema semiótico complexo. A informação é transmitida por meio de uma linguagem cartográfica que se utiliza de três elementos: sistemas de signos, redução e projeção⁹⁶. (ALMEIDA; PASSINI, 1998, p. 15).

A necessidade de expandir a memória humana, que estava restrita às experiências vividas – as imagens das recordações, fez com que o homem criasse instrumentos que representassem o espaço vivido e que lhe possibilitassem inserir localidades ainda não conhecidas. A arte da guerra, a expansão e conservação dos territórios e as viagens marítimas fizeram com que o homem tivesse que criar formas de ir além do imediato. Hoje, a necessidade de conhecer o mundo onde vivemos nos faz leitores de representações dos mais distantes lugares da Terra.

As situações de conflito que se colocam a um sujeito, quando se pede que ele registre no papel o espaço percorrido, são muito próximas àquelas colocadas para os geógrafos na confecção de uma planta ou de um mapa: *sistema de localização, projeção, escala e simbologia* (ALMEIDA, 2001, p.18). É necessário que se transforme o espaço tridimensional para o bidimensional e, para isso, é necessária a representação abstrata do espaço.

As situações propostas para os sujeitos participantes da pesquisa demandavam justamente que eles representassem explicando oralmente e desenhando o espaço tridimensional em bidimensional, os percursos realizados diariamente (casa-escola e escola-casa), a frente da escola, a escola inserida em um espaço rodeado de outros referenciais, as dependências internas da escola, a sala de aula dos sujeitos e o seu lugar na sala de aula. Diante disso, estudaremos de que relações espaciais se valem os sujeitos para tanto .

Os resultados coletados possibilitaram a classificação dos sujeitos em três grupos que passaremos a descrever.

⁹⁶ Grifo da autora.



Grupo A

Os sujeitos classificados nesse grupo⁹⁷, no decorrer das experiências realizadas, utilizaram representações predominantemente marcadas pelas relações topológicas, pois apareceram nitidamente as relações de: vizinhança, separação, ordem, circunscrição ou envolvimento e continuidade (BIA 7⁹⁸, ANN 8, RAF 7, INA12 e LAR 8). Surge, aqui, o uso das relações projetivas e euclidianas, porém com distorções que podem ser constatadas pelas seguintes características:

Relações topológicas:

- Espaços vazios com caminho unindo os pontos referenciais, ou linhas de base;
- Pontos de referências particulares com troca de referências na inversão do trajeto;
- Visão sincrética e justaposta – os objetos ocupam lugares únicos e indissociáveis, sendo o sujeito o referencial principal (centralizado), não havendo relatividade de posições em relação a referências que se alternam, torna-se inviável um sistema de localização.

Relações projetivas:

- Casa tradicional geométrica com desenho marcado pelo realismo visual – desenhos infantilizados e, em alguns casos, com rebatimentos e transparências, o que mostra a tentativa de utilização das leis da perspectiva;
- Aparecimento de dois ou mais planos de profundidade marcados pela linha de terra (como BIA e RAF), com os prédios inseridos mais à frente que outros;
- Os desenhos das dependências da escola se resumem a espaços privilegiados com a apresentação da professora e de alguns alunos, não havendo a projeção frontal nem vertical dos espaços;
- O percurso de casa à escola se resume à mudança de lugar, com poucos termos intermediários.

⁹⁷ Os sujeitos pertencentes ao grupo A são: BIA 7, ANN 8, RAF 7, INA12 e LAR 8. A média etária é de 8 anos e 4 meses.

⁹⁸ Idade em anos dos sujeitos participantes da pesquisa de campo.



Relações euclidianas:

- Não é possível identificar o trajeto pela representação, pois estão retratados somente desenhos particulares sem o uso de signos que permitissem a identificação do trajeto desenhado;
- Não há redução adequada do macro espaço real para o micro espaço da folha de papel, conservação das distâncias, constância das dimensões e nem organização dos deslocamentos.

Relatos dos sujeitos pertencentes ao Grupo A

Os sujeitos BIA (Figura 38 e 39), RAF (Figura 43), ANN (Figura 44 e 45) e INA realizaram desenhos e deram explicações muito parecidas durante sua execução. No **percurso casa-escola e escola-casa**, os pontos de referência mudam, conforme se inverte o sentido do percurso. O sujeito desenha o ponto de partida tendo a si próprio como referência principal. A casa e a escola são representadas com o mesmo símbolo, ou seja, a casa de formas geométricas, sendo o diferencial a palavra “escola” sobre a porta, nos três casos. Os desenhos ficam caracterizados pelos espaços vazios e c que os une é um caminho.

No caso de ANN (Figura 44), foi pedido intencionalmente que ela registrasse, no caminho da escola para casa, pontos referenciais. O que a da apresentou foram espaços isolados inseridos sem ordem de sucessão espacial. Conforme surgiam as lembranças, ela procurava um espaço particular para inseri-las, sem que o lugar ocupado fosse realmente o lugar ocupado no real, o que denota a falta de organização dos deslocamentos dos sujeitos no espaço.

O desenho da **frente da escola** de três sujeitos (BIA, RAF e ANN) é caracterizado por uma visão particularizada. BIA (Figura 40) desenha a escola tal qual nos desenhos dos percursos quotidianos, ou seja, a casa geométrica, alterando algum detalhe como uma árvore. RAF (fig) desenha o portão da escola e ela própria adentrando as suas dependências. ANN (fig) desenha a casa geométrica com uma grande porta na qual vê-se o inspetor de alunos e ela própria. Podemos constatar, nos três desenhos, formas antropomórficas de sol com rosto.

Os desenhos da sala de aula dentro da escola, apesar da particularidade de cada um, refletem as características vividas nessa fase de desenvolvimento, em que os espaços apresentados são aqueles importantes para a criança.

BIA desenha um grupo de cinco alunos e a professora (Figura 41), não se preocupando com o espaço a ser representado, mas com as pessoas que estão nele. Outros sujeitos (RAF e ANN) apresentam algumas carteiras e a mesa da professora com rebatimentos e transparências. As mochilas aparecem dentro das carteiras, que são de fórmica e possuem espaço fechado abaixo do tampo para o material, mas nos desenhos apresentam as laterais como se fossem de material transparente.

ANN delimita o espaço na folha de papel onde aparece uma casa geométrica identificando a sala da professora Áurea. Ao lado, uma estante com os produtos vendidos na cantina.

RAF avança, ao desenhar, três planos diferentes com portas numeradas para mostrar dois pavilhões onde se localizam as salas de aula, e um terceiro onde estão localizadas a porta da cozinha, a biblioteca, os banheiros e o bebedouro de água, que na realidade se encontram em um mesmo espaço. A caixa d'água da escola aparece solta no ar.

LAR e INA desenhavam as portas das suas salas e das laterais.



Figura 38 – Desenho do grupo A BIA (7), percurso da escola para casa

As ideias dos sujeitos estão registradas no texto.

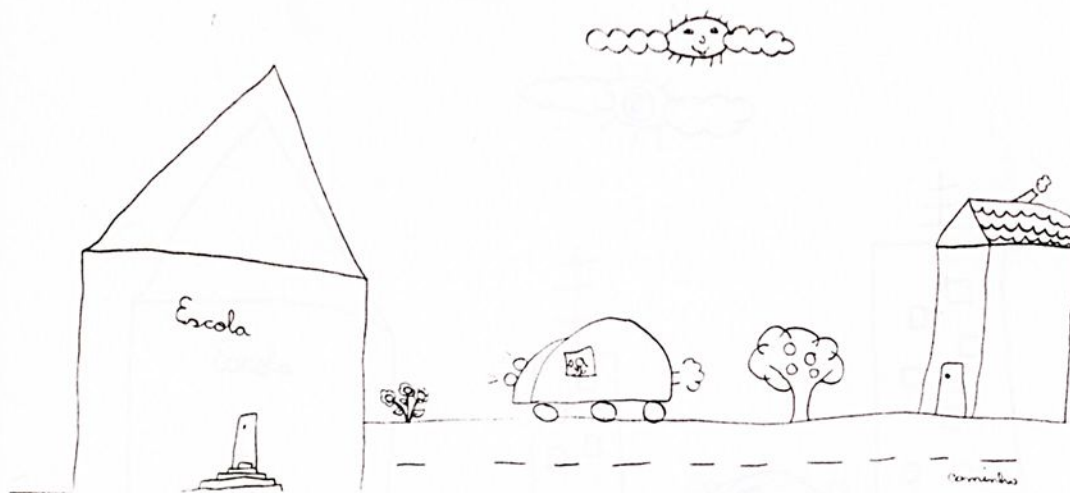


Figura 38 – Desenho do grupo A BIA (7)⁹⁹, percurso de casa para a escola.

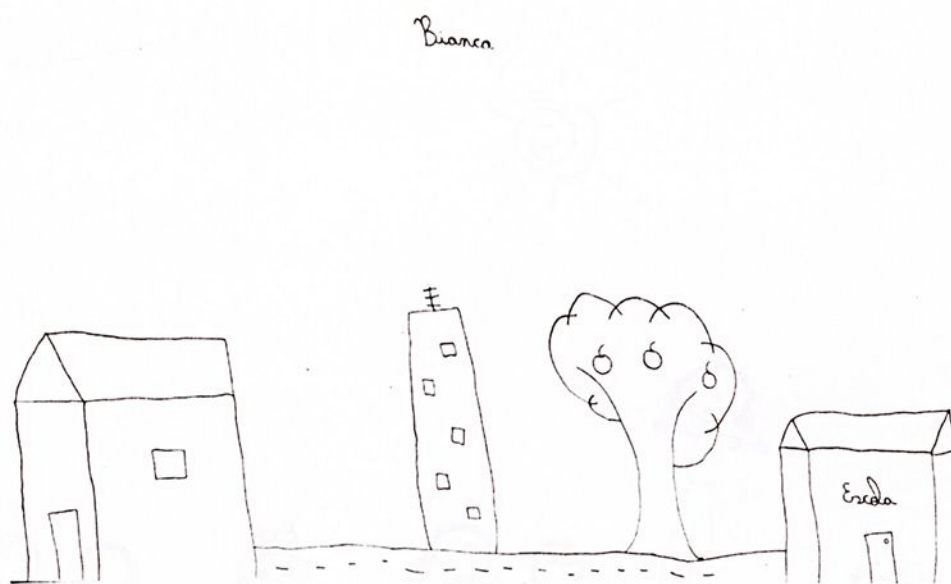


Figura 39 – Desenho do grupo A BIA (7), percurso da escola para casa.

⁹⁹ As idades dos sujeitos estão registradas em anos.



Figura 40 – Desenho do grupo A BIA (7), a frente da escola.



Figura 41 – Desenho do grupo A BIA (7), a sala de aula dentro da escola, com o lixo no ar.



Figura 42 – Desenho do grupo A BIA (7), a sala de aula, o mobiliário e o seu lugar.

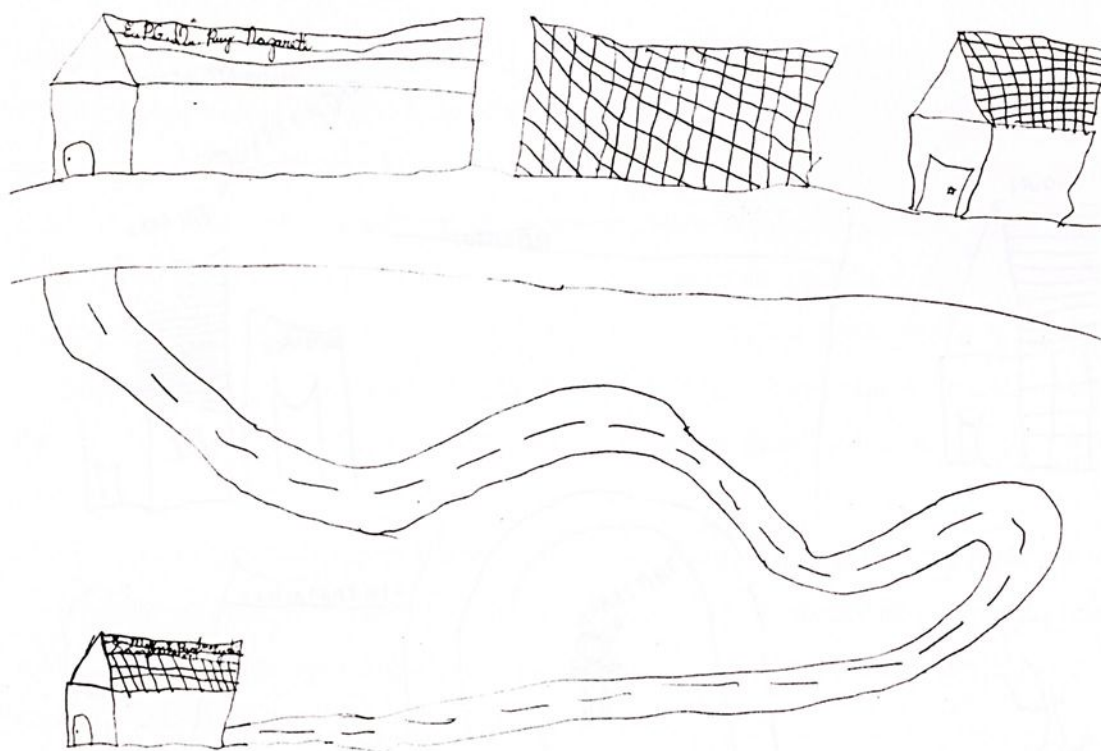


Figura 43 – Desenho do grupo A RAF (7), percurso de casa para a escola.

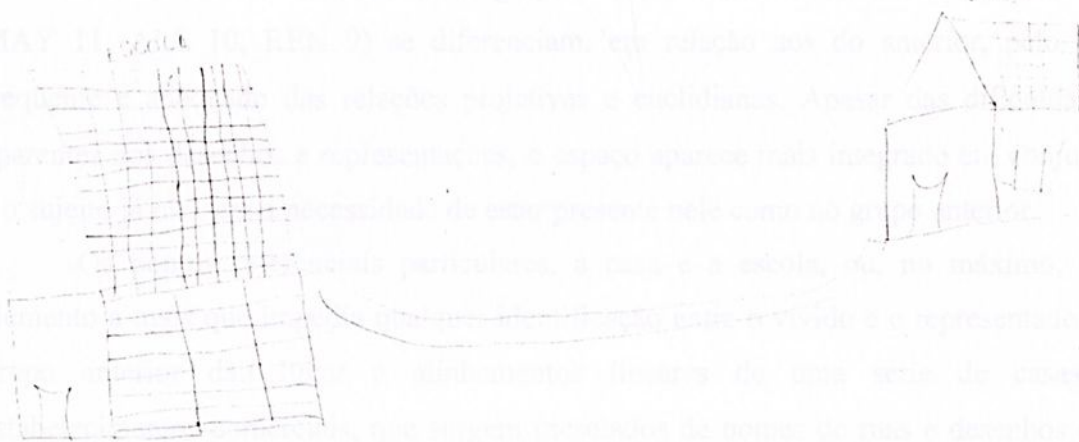


Figura 44 – Desenho do grupo A ANN (8), percurso de casa para a escola.

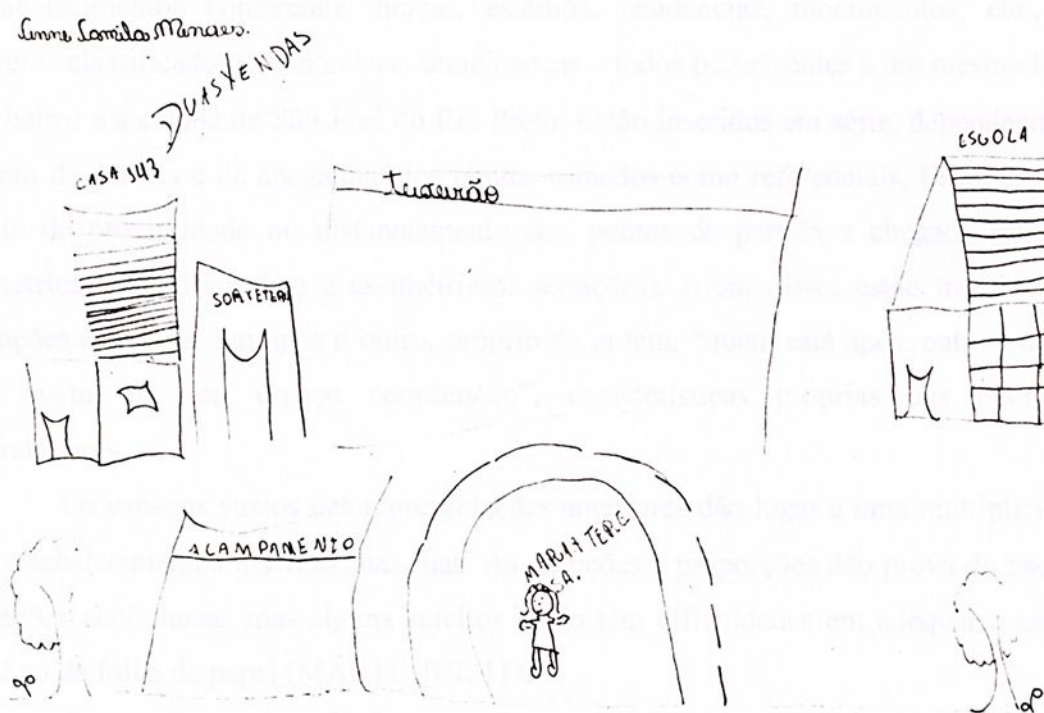


Figura 45 – Desenho do grupo A ANN (8), percurso de casa para a escola, após perguntas sobre os pontos referenciais intermediários.

Grupo B

Os sujeitos classificados nesse grupo¹⁰⁰ (JUL 11, VAN 9, DEM 10, MAR 11, MAY 11, ALE 10, REN 9) se diferenciam, em relação aos do anterior, pelo uso freqüente e adequado das relações projetivas e euclidianas. Apesar das dificuldades aparentes nos desenhos e representações, o espaço aparece mais integrado em conjunto e o sujeito já não tem a necessidade de estar presente nele como no grupo anterior.

Os pontos referenciais particulares, a casa e a escola, ou, no máximo, um elemento a mais que impedia qualquer identificação entre o vivido e o representado do grupo anterior dão lugar a alinhamentos lineares de uma série de casas e estabelecimentos comerciais, que surgem mesclados de nomes de ruas e desenhos das casas geométricas umas ao lado das outras. Pontos de identificação conhecidos da cidade surgem, possibilitando a orientação do bairro e das cercanias.

Os alinhamentos das casas e estabelecimentos comerciais, fato novo em relação às características do grupo anterior, mostram como esses alinhamentos reproduzem o uso das operações lógico-matemáticas e infralógicas nos registros dos sujeitos. Os estabelecimentos comerciais, praças, estádios, residências, monumentos, etc., são objetos classificados segundo suas semelhanças – todos pertencentes a um mesmo lugar, ao bairro e à cidade de São José do Rio Preto. Estão inseridos em série, dependendo do ponto de partida e de chegada e dos pontos tomados como referenciais. Estão em uma série de proximidade ou distanciamento dos pontos de partida e chegada (relações simétricas: classificações) e assimétricas: seriações). Além disso, estão inseridos em relações espaciais, um após o outro, próprio da ordem, “quem está após, entre e depois de quem em um espaço coordenado”, características próprias das operações infralógicas.

Os espaços vazios das representações anteriores dão lugar a uma multiplicidade de estabelecimentos inseridos nas ruas. As reduções e proporções dão prova do uso das relações euclidianas, mas alguns sujeitos ainda têm dificuldades em adequar o espaço real ao da folha de papel (MAR11, JUL 11).

As representações da frente e dos espaços internos da escola trazem uma novidade: a transposição para o papel de vistas verticais¹⁰¹ (Figura 49) ou oblíquas¹⁰²

¹⁰⁰ Os sujeitos pertencentes ao grupo B são: JUL 11, VAN 9, DEM 10, MAR 11, MAY 11, ALE 10, REN 9. A média etária é de 10 anos.

¹⁰¹ A vista vertical é relativa à visão que temos de um objeto ou de um lugar quando olhamos do alto, de cima para baixo, como ocorre nos desenhos da sala de aula na escola dentro da escola e da sala de aula com o mobiliário de ALE.

(Figura 48), que vem carregada dos rebatimentos, ou seja, da confusão na escolha da perspectiva.

Relações projetivas:

- Manutenção, por alguns sujeitos, dos pontos referencias inicial e final do trajeto, quando o sujeito desenha o percurso de ida e volta para a escola (MAR, DEM e ALE);
- Utilização de pontos referenciais externos como praças, estabelecimentos comerciais e públicos, etc;
- Utilização de relações projetivas, apesar de algumas confusões na escolha dos pontos de vista a serem considerados, o que acarreta rebatimentos, falhas de perspectiva, de ponto de vista, num mesmo desenho com alguns objetos vistos verticalmente e outros obliquamente;
- Os espaços interiores da escola apresentam vista frontal (Figura 48) e vertical (Figura 49);
- Início de coordenação geral do espaço com ruas que se cruzam (MAR).

Relações euclidianas:

- Início do uso de símbolos abstratos, tais como: nome de ruas, número dos estabelecimentos comerciais e das casas, quadrados representando a escola em meio a desenhos infantilizados de casas geométricas, como no grupo A;
- Início de reduções com proporção dos espaços, móveis e locais desenhados, conservação de paralelas, dos ângulos e das distâncias. Um dos sujeitos (MAR), no primeiro desenho, (percurso casa-escola), teve a necessidade de utilizar outra folha de papel para o término do desenho;
- As representações gráficas mostram a coordenação entre ruas, prédios em espaços que começam a se integrar; as representações gráficas eram realizadas enquadrando os espaços a serem projetados no papel, distribuídos em toda a sua extensão ou centralizando o desenho no meio da folha, o que mostra o transporte do espaço real às dimensões da folha de papel.

¹⁰² A vista oblíqua é relativa à visão que temos de um objeto ou de um lugar quando olhamos de cima e um pouco inclinado.



Relatos dos sujeitos pertencentes ao Grupo B

Os desenhos dos percursos **casa-escola** e **escola-casa** apresentados pelo grupo têm uma característica: a utilização de nomes de ruas que se misturam a desenhos de casas geométricas, apesar da dificuldade no uso das leis da perspectiva, o que fica evidente com a quadra esportiva do América¹⁰³, vista verticalmente, e os estabelecimentos comerciais, vistos de frente, bem como as árvores que margeiam os quarteirões (Figura 46 e 47) e MAR (Figura 51).

O desenho da **frente da escola** é rico em detalhes que possibilitam reconhecer as características do prédio, diferentemente do grupo anterior que apresentava a casa geométrica e ou o próprio sujeito. Para exemplificar, temos ALE (Figura 48) e a frente da escola (Figura 28), com profundidade, proporções, paralelas bem demarcadas.

Apesar da dificuldade apresentada pelo grupo no desenho da sala de aula no interior da escola, fica evidente o início das relações projetivas e euclidianas, nas quais os sujeitos têm que inserir um espaço menor (a sala de aula) dentro de outro (a escola ou a ala onde está localizada sua sala), o que ocorreu com todos os sujeitos do grupo B, que apresentam um início de esquema de projeção ALE (Figura 49).

Os desenhos da **sala de aula** e seu mobiliário foram realizados por todos o sujeitos verticalmente, ou seja, projetando no plano o que era visto de cima, o que demonstra o início do uso de pensamento abstrato, nos quais aparecem as carteiras, a lousa e, em alguns casos, a porta (JUL, VAN, DEM, MAR, MAY, (fig) ALE, REN). Um dos sujeitos, REN, (fig) registrou em todas as carteiras seus ocupantes e a professora numa profusão de pontos de vista. ALE (fig)retrata bem os desenhos do grupo mostrando o mobiliário o espaço disponível na sala.

¹⁰³ O América é o time de futebol de São José do Rio Preto. Seu campo está localizado nas proximidades das escolas A e B, sendo um ponto de referência para alguns dos alunos entrevistados.

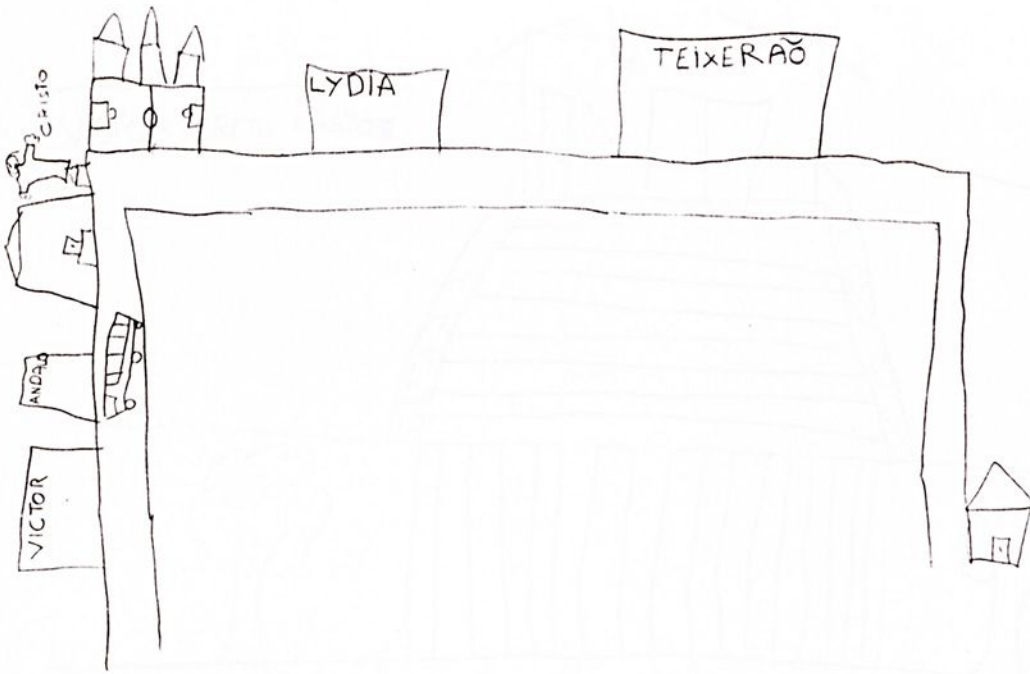


Figura 46 – Desenho do grupo B ALE (10), percurso de casa para a escola.

Class. Magali dos Santos, 07/11/01

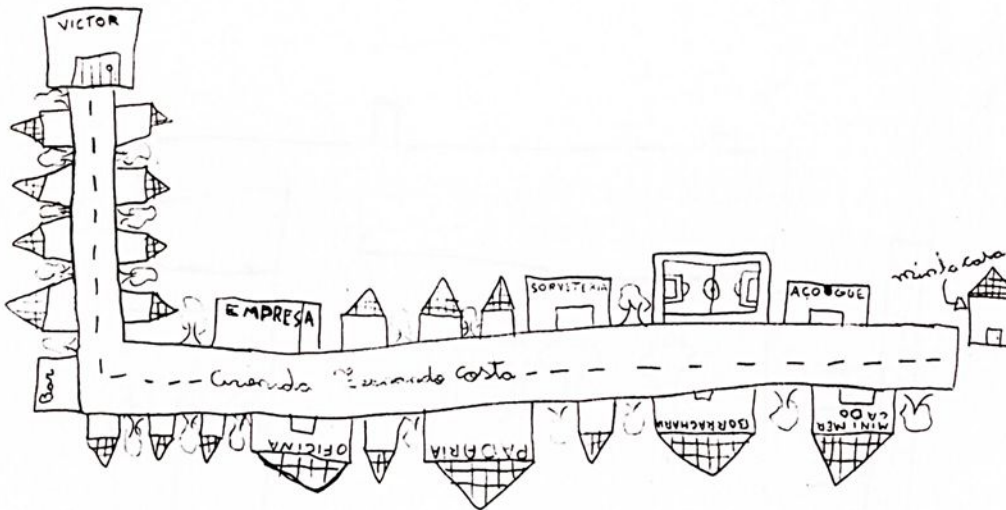


Figura 47 – Desenho do grupo B ALE (10), percurso da escola para casa.

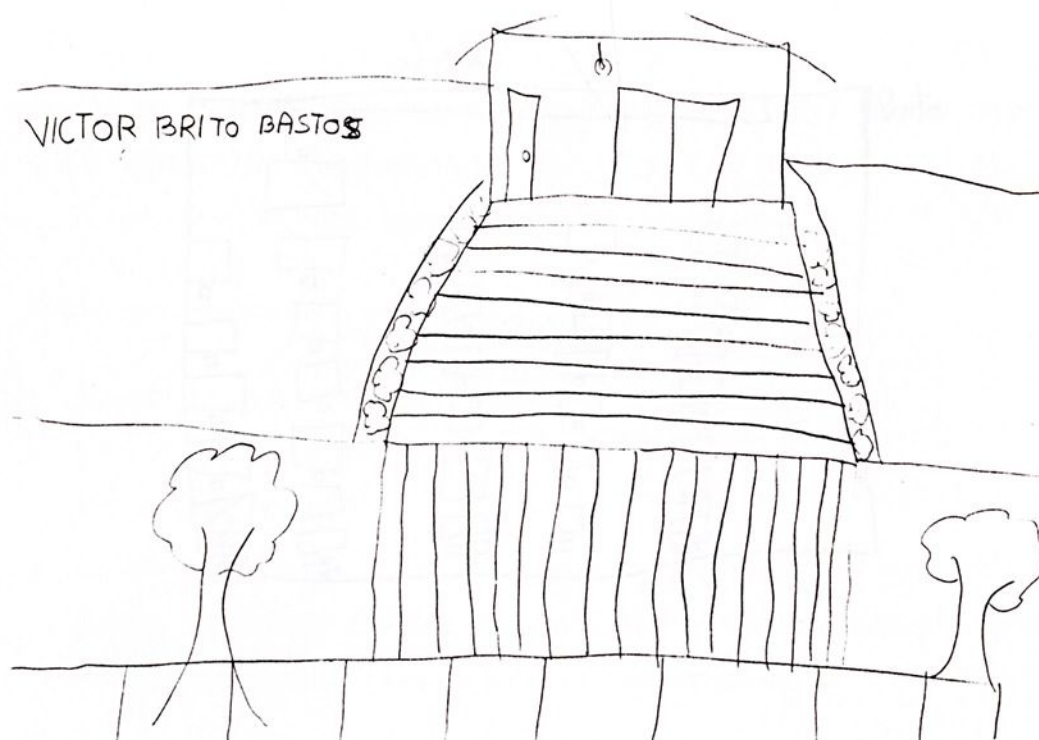


Figura 48 – Desenho do grupo B ALE (10) a frente da escola e a escada posicionada adequadamente com o uso de relações projetivas, as paralelas e as dimensões são proporcionais com o uso das relações euclidianas.

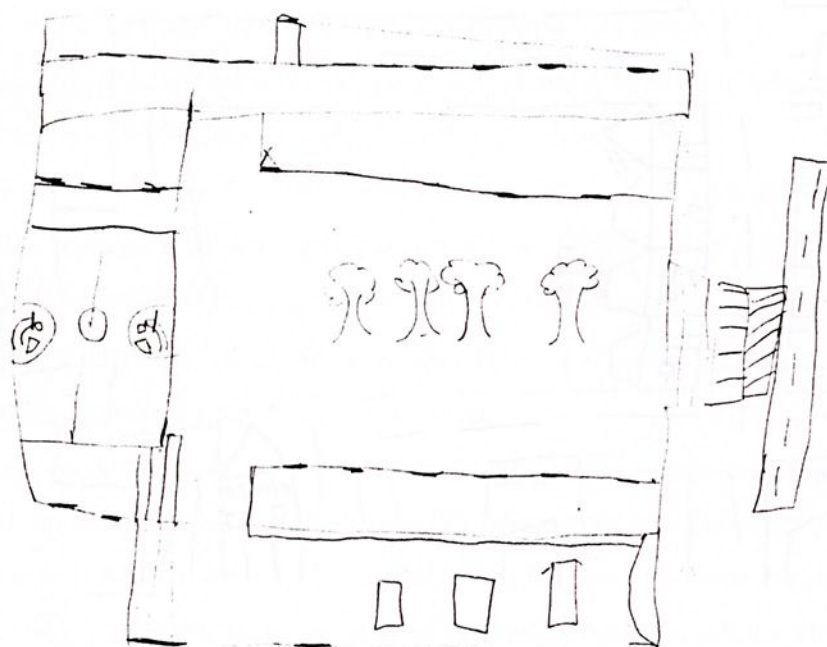


Figura 49 – Desenho do grupo B ALE (10), a sala de aula dentro da escola.

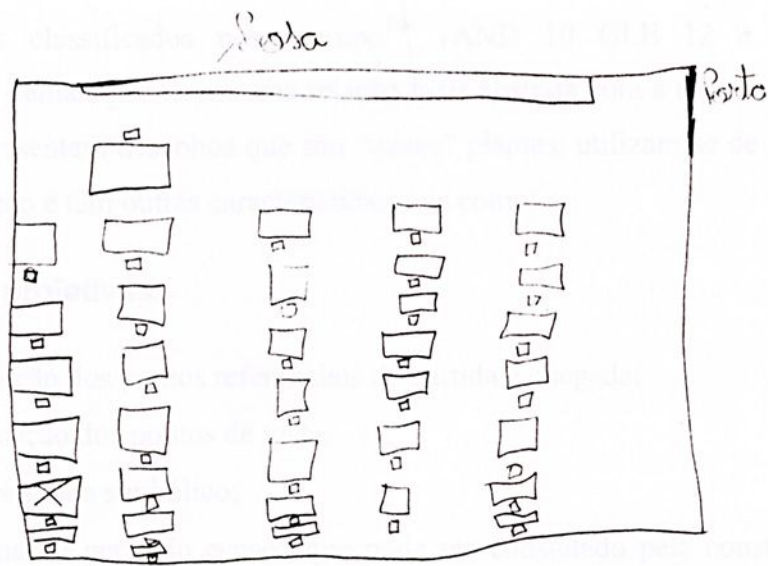


Figura 50 – Desenho do grupo B ALE (10), a sala de aula, o mobiliário e o seu lugar.

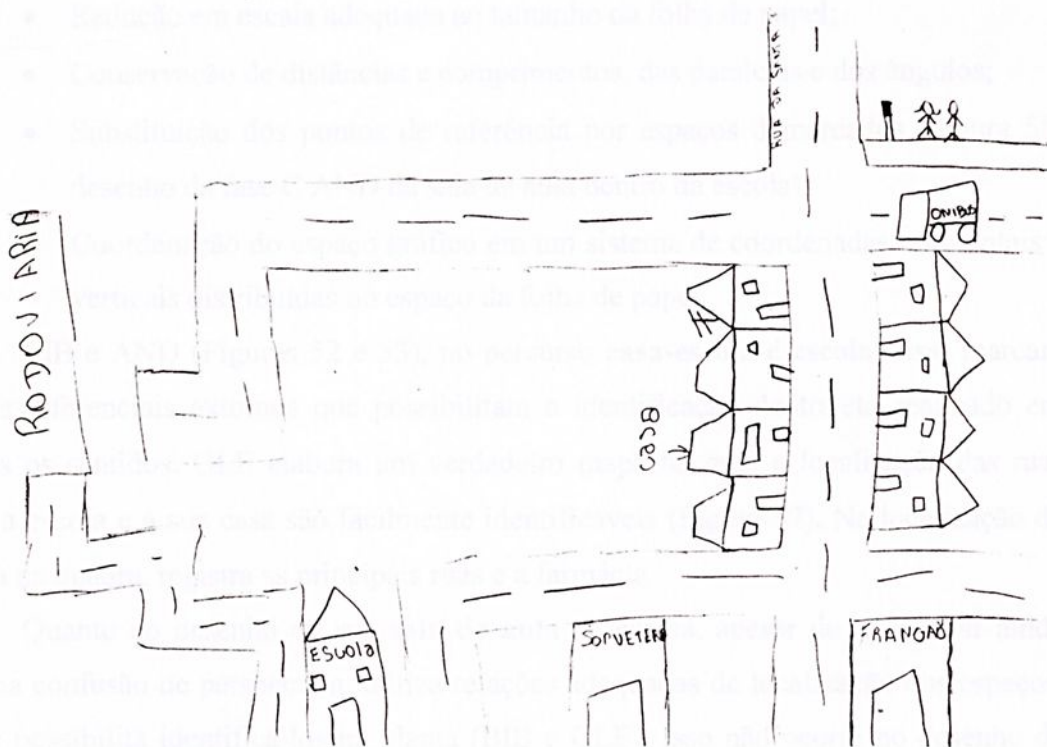


Figura 51 – Desenho do grupo B MAR (11), percurso da casa para a escola.

Grupo C

Os sujeitos classificados nesse grupo¹⁰⁴ (AND 10 GLE 12 e BIB 11) diferenciam-se dos demais por terem uma relação mais abstrata com a representação do espaço vivido. Apresentam desenhos que são “quase” plantas, utilizam-se de símbolos, de projeção e redução e têm outras características, tais como:

Relações projetivas:

- Manutenção dos pontos referenciais de partida e chegada;
- Coordenação dos pontos de vista;
- Uso de sistema simbólico;
- Coordenação geral do espaço que pode ser constatado pela constância das formas, representações marcadas pela vista vertical, em que os sujeitos têm que imaginar a posição de cada local a ser representado.

Relações euclidianas:

- Os desenhos possibilitam a localização dos pontos referenciais;
- Redução em escala adequada ao tamanho da folha de papel;
- Conservação de distâncias e comprimentos, das paralelas e dos ângulos;
- Substituição dos pontos de referência por espaços demarcados (Figura 55, desenho da fase C AND da sala de aula dentro da escola);
- Coordenação do espaço gráfico em um sistema de coordenadas horizontais e verticais distribuídas no espaço da folha de papel.

BIB e AND (Figuras 52 e 53), no percurso **casa-escola** e **escola-casa**, marcam pontos referenciais externos que possibilitam a identificação do trajeto realizado em ambos os sentidos. GLE elabora um verdadeiro mapa no qual a localização das ruas entre a escola e a sua casa são facilmente identificáveis (Figura 57). Na localização da escola na quadra, registra as principais ruas e a farmácia.

Quanto ao desenho da sua **sala de aula** na escola, apesar de apresentar ainda alguma confusão de perspectiva, utiliza relações adequadas de localização dos espaços, o que possibilita identificá-los na planta (BIB e GLE). Isso não ocorre no desenho de AND (Figura 55) que retrata com exatidão as dependências da escola muito próximas a

¹⁰⁴ Os sujeitos pertencentes ao grupo C são: BIB 11, GLE 12, AND 10. A média etária é de 11 anos.



uma planta, com riqueza de detalhes, como o jardim, quadra, alas com as salas de aula distribuídas tal como é na realidade. A sala de aula reproduz, em visão vertical, a distribuição do mobiliário, sem rebatimentos ou transparências características dos grupos anteriores.

BIB, GLE, assim como AND, retratam nos desenhos o que Luquet denominou de realismo visual, ou seja, uma aproximação do real estampada no papel, sem acrescentar o que se sabe que existe do objeto retratado e sem omitir-se os detalhes que lhe possibilitam a sua identificação. O desenho do trajeto casa-escola e escola-casa são esquemas topográficos nos quais pode-se identificar a localização exata dos pontos referenciais externos no decorrer do percurso, sem inversão dos pontos de partida e chegada. Há uma redução das dimensões do espaço percorrido para a delimitação do tamanho do papel com proporção das distâncias. Os desenhos da escola na quadra, da sala de aula na escola e da sala de aula e mobiliário são feitos verticalmente sem confusão de pontos de vista (Figuras 54, 55 e 56).

Os sujeitos pertencentes ao grupo C coordenam os diferentes espaços e os seus deslocamentos em função dos pontos de referenciais, o que demonstra o domínio do espaço e tirar implica a representação gráfica em domínio no uso das relações projetivas e euclidianas. Eles se deslocam “indo e vindo” livremente no espaço sem estarem presos a pontos referenciais privilegiados de acordo com a importância que o sujeito atribui ao referencial.

No decorrer das entrevistas, os sujeitos desse grupo faziam inferências das distâncias entre os diversos pontos referenciais, realizavam retornos, inserindo relações de distâncias adequadas entre eles, sugeriam trajetos alternativos com possibilidades de estar num veículo ou a pé: “*se você vem a pé pode voltar pela Fernando Costa*”¹⁰⁵, *se vem de ônibus ou de carro não tem que ir pela...*” o que demonstra o domínio das regras de trânsito, de direção e do sentido de fluxo de veículos.

¹⁰⁵ Fernando Costa é a rua lateral à escola B, de grande circulação e de mão única.



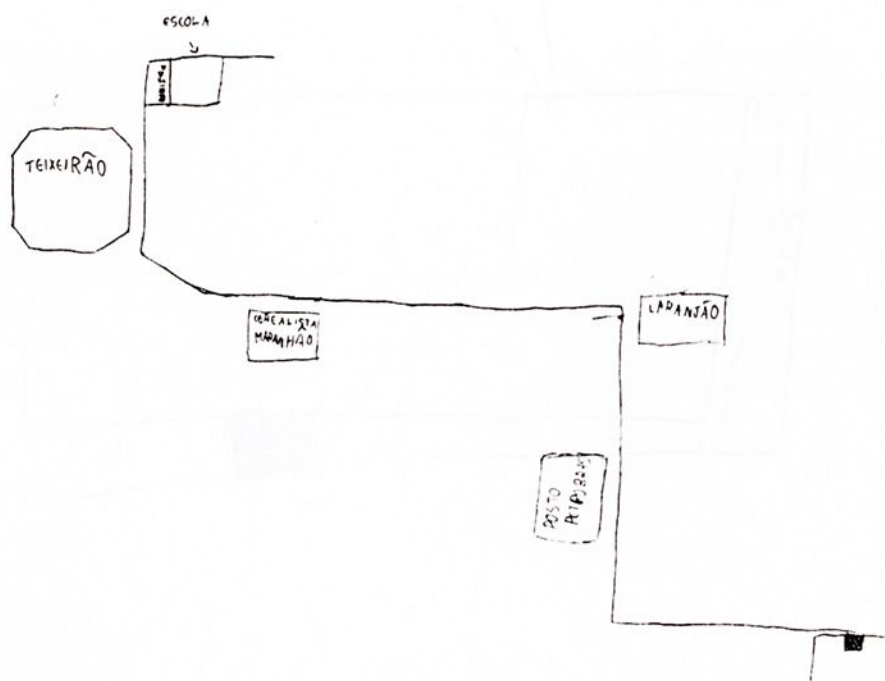


Figura 52 – Desenho do grupo C AND (10), percurso de casa para a escola.

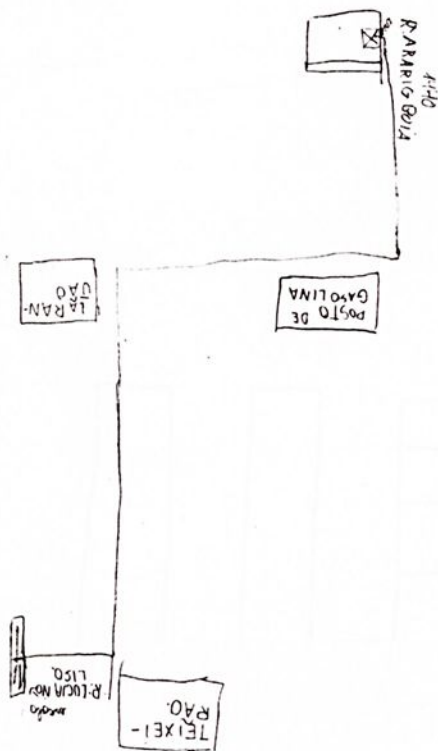


Figura 53 – Desenho do grupo C AND (10), percurso da escola para casa.

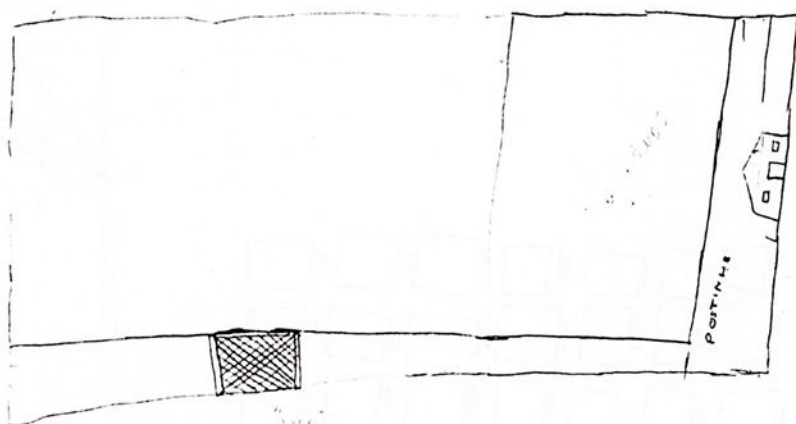


Figura 54 – Desenho do grupo C AND (10), a escola no quarteirão.



Figura 55 – Desenho do grupo C AND (10), a sala de aula dentro escola.

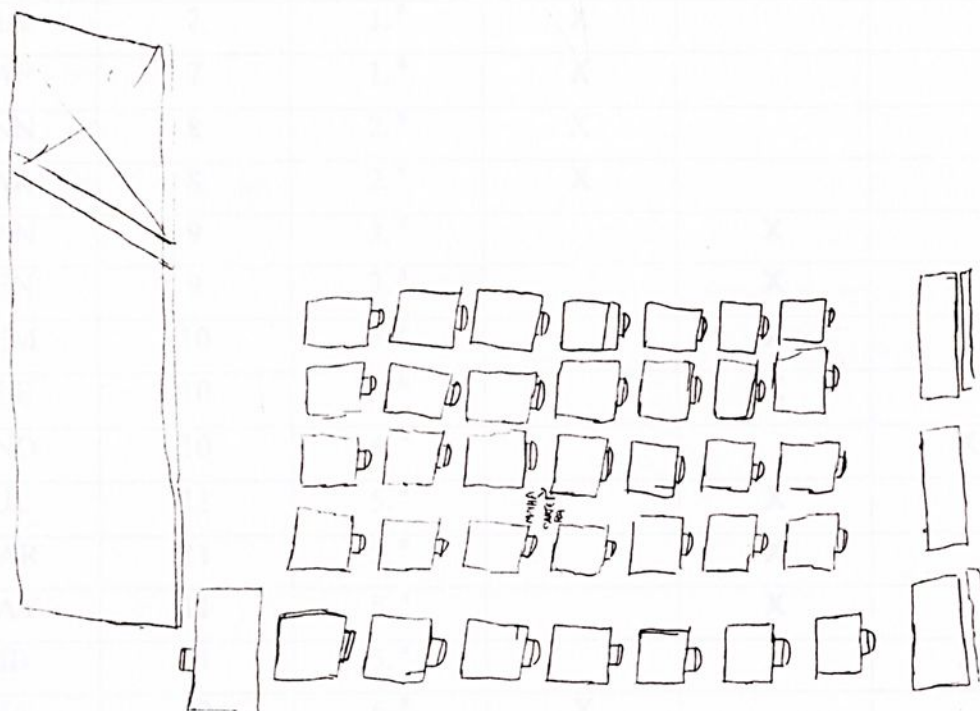


Figura 56 – Desenho do grupo C AND (10), a sala de aula, o mobiliário e o seu lugar.

NOME: *Gláucia* data: *01/11/11*

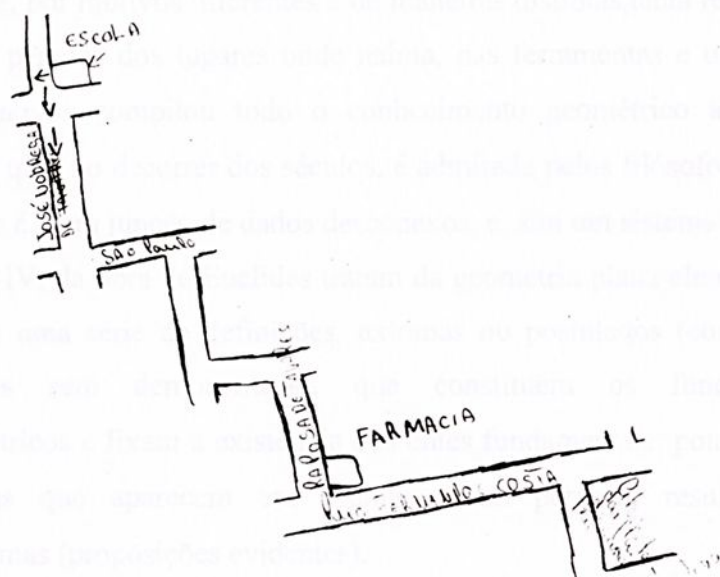


Figura 57 – Desenho do grupo C GLE (12), percurso da escola para casa.

Tabela 6 – Classificação dos resultados obtidos na geometria vivida.

Nome	Idade	Série	Grupo A	Grupo B	Grupo C
BIA	7	1. ^a	X		
RAF	7	1. ^a	X		
ANN	8	2. ^a	X		
LAR	8	2. ^a	X		
VAN	9	3. ^a		X	
REN	9	3. ^a		X	
DEM	10	5. ^a		X	
ALE	10	5. ^a		X	
AND	10	4. ^a			X
JUL	11	5. ^a		X	
MAR	11	5. ^a		X	
MAY	11	5. ^a		X	
BIB	11	5. ^a			X
INA	12	6. ^a	X		
GLE	12	6. ^a			X

5.1.2 A representação dos entes geométricos

As formas e os entes geométricos existem na natureza: a “redondez” do sol, a “curvatura” do arco-íris, a forma hexagonal de um flor de cera, etc. O homem observa as formas geométricas e, por motivos diferentes e de maneiras distintas, tenta reproduzi-las, no seu corpo, nas paredes dos lugares onde habita, nas ferramentas e utensílios. Euclides em *Os Elementos* compilou todo o conhecimento geométrico até então produzido. É uma obra que, no decorrer dos séculos, é admirada pelos filósofos, físicos e matemáticos, pois não é mera junção de dados desconexos, e, sim um sistema lógico.

Os livros de I a IV, da obra de Euclides tratam da geometria plana elementar. O livro I tem início com uma série de definições, axiomas ou postulados (conceitos e proposições admitidos sem demonstração, que constituem os fundamentos especificamente geométricos e fixam a existência dos entes fundamentais: ponto, reta e plano) e os teoremas que aparecem em uma ordem perfeita, resultado de demonstrações, os axiomas (proposições evidentes).

A perfeição nas definições, postulados e axiomas é de tal importância que se transformaram em uma receita a ser seguida como manual de ensino da geometria, sendo pouco questionada sua validade no ensino dos anos iniciais de escolarização.

O objetivo das investigações realizadas é saber sobre alguns entes geométricos abstratos, planos e tridimensionais.

A análise dos dados produzidos pelos sujeitos entrevistados no decorrer da pesquisa possibilitou classificá-los em três grupos. Na coleta dos dados foram consideradas as representações oral, gráfica (desenho) e gestual, os argumentos e as explicações apresentadas, as escolhas dos cartões desenhados (baralho) e o desempenho na folha de múltipla escolha, utilizados no decorrer das entrevistas.

Grupo I

O grupo I tem os sujeitos mais jovens da pesquisa, todos estão na 1.^a e 2.^a séries e têm a menor faixa etária¹⁰⁶ (BIA 7, ANN 8, RAF 7 e LAR 8). A análise dos dados mostrou que há um predomínio das relações topológicas que se apresentam nas seguintes características:

- Por gestos, só conseguem representar o ponto, a reta e as formas planas (quadrado, retângulo, triângulo e círculo);
- Desenharam de memória o ponto, a reta e as formas planas (quadrado, retângulo, triângulo e círculo). Das tridimensionais, somente o dado e o cone, por analogia ao dado e ao chapéu de palhaço (ações vividas) ou sinalizador de trânsito, entremeado de desenhos infantis para explicar as formas pedidas (Figura 58);
- No desenho do jogo de formas concretas, não diferenciam as formas planas das tridimensionais e tampouco justificam corretamente as diferenças entre formas planas e espaciais;
- Esses sujeitos não percebem a diferença entre as formas planas e tridimensionais nos desenhos efetuados. Somente após a comparação entre as formas concretas é que dois dos sujeitos percebem a diferença (RAF e LAR). Apesar de todos os sujeitos terem desenhado o cubo e o cone, eles não entendem e não reconhecem as diferenças na representação gráfica entre

¹⁰⁶ Os sujeitos pertencentes ao Grupo I BIA 7, ANN 8, RAF 7 e LAR 8, a média etária 7;06.



formas planas e formas tridimensionais e, portanto, não conseguem utilizar as relações de perspectiva e profundidade no desenho;

- Nos cartões para reconhecimento das formas, somente conseguem identificar as planas. A forma tridimensional cubo, chamam de dado, desenhando-o inclusive como tal e ao paralelepípedo, chamam-no de caixa, mas não conseguem desenhá-lo;
- O cone é desenhado com analogia a objetos conhecidos, tais como: o chapéu de aniversário e o sinalizador de rua (Figura 58).

As relações espaço-geométricas utilizadas são de caráter particular internas às figuras sem compará-las com as demais. Assim os sujeitos não percebem as semelhanças e as diferenças entre as formas planas e tridimensionais, o que mostra a subordinação às relações topológicas.

BIA 7 (1.^a série E)

- Representa, em gestos, somente as formas planas: quadrado, retângulo, triângulo e círculo.
- Desenha de memória as formas planas: quadrado, retângulo, triângulo e círculo. Acompanha a representação gestual, ou seja, desenha com precisão as formas planas elementares e quando lhe é entregue o cubo para desenhá-lo, ela o faz com exatidão. Foi um susto, pois, pelas características apresentadas anteriormente, tal situação não deveria ocorrer, mas é o único desenho da forma tridimensional que consegue desenhá-lo.
- Nas fichas e folha de múltipla escolha, reconhece somente as formas planas.

Uma semana após o fato ocorrido houve a continuação da entrevista. Quando BIA fez, novamente a pedido, o desenho do cubo, repetindo a mesma técnica utilizada, pedimos que nos explicasse como havia aprendido e como fazia o tal desenho: “– Foi minha mãe que me ensinou, põe um quadrado na frente outro atrás e depois liga os pontos”, ou seja, ela havia aprendido uma técnica que não foi generalizada às demais figuras, ficando restrito seu uso a uma situação particular. Na escolha dos desenhos, elas somente consegue reconhecer as formas planas, o mesmo se configurando na múltipla escolha.

ANN 8 (2.^a série E)

- Representa, em gestos, somente as formas planas: quadrado, retângulo, triângulo e círculo.
- Reconhece por nome e desenha de memória somente as formas planas e não consegue explicar as diferenças entre as planas e tridimensionais.
- Frente às formas concretas, desenha as planas e as tridimensionais igualmente. Mesmo após compará-las e reconhecer as diferenças, não obtém sucesso, transformando o cubo em quatro retângulos contíguos e o paralelepípedo em três. O cone é desenhado como um triângulo.
- Nas fichas e folha de múltipla escolha, destaca e reconhece o ponto, a reta e somente as formas planas.

RAF 7 (1.^a série A) (Figura 45)

- Representa, em gestos, as formas planas, esquecendo-se temporariamente do retângulo, fato que ocorreu também com o desenho de memória. Ao ver as formas concretas, logo identifica e nomeia o retângulo fazendo, sobre a mesa, o seu contorno.
- No desenho de memória, RAF faz o ponto, a reta, as formas planas, fabulando em relação ao paralelepípedo que desenha como uma faixa entre duas árvores e, durante muito tempo, tenta convencer-me de que a faixa é um paralelepípedo (fabulação¹⁰⁷), para no final reduzir sua explicação a: — “*Eu esqueci...*”, o cone sai quase como um cone de sinalização urbana.
- Nos desenhos à vista das formas, nomeia todas as planas; das tridimensionais, desenha o cubo como um dado, inclusive com a marcação dos valores. Ao pedido de explicação para tanto, questionando se o que foi visto era tal qual o desenhado, RAF diz que não, mas mesmo assim, para ela o cubo é um dado. Quanto ao paralelepípedo, desenha-o como um retângulo e, somente após comparar os desenhos e as formas concretas, faz a projeção lateral como do

¹⁰⁷ Piaget na obra *A representação do mundo na criança* mostra a evolução do método clínico, e classifica as respostas das crianças por ele entrevistadas em cinco categorias: não-importismo, fabulação, crença sugerida, crença espontânea e crença desencadeada. O não-importismo é quando a questão não provoca nenhum esforço da criança em tentar respondê-la, ou a questão provoca irritação, sendo assim a criança responde qualquer coisa de qualquer maneira. Quanto à segunda: “*a criança, sem mais refletir, responde à pergunta inventando uma história em que não acredita, ou na qual crê por simples exercício verbal, dizemos que ocorre fabulação*”. (Piaget, s.d., p. 12).

cubo. A esfera é uma dificuldade intransponível: – “Quando você desenhou essa (aponto para o círculo), você desenhou como esta (aponto para a esfera), elas são iguais? – *Não, essa é baixinha e essa é mais grossa.* Tem jeito de mostrar que elas são diferentes? *Não.* Responde, volto a insistir: E quando nós desenhamos as duas formas, podemos desenhar iguais? – *Não.* Como então você poderia desenhá-la? *Se eu tivesse uma borracha.* Sugiro que desenhe no espaço abaixo na folha. RAF faz um semicírculo com um bico, agora você acha que está diferente? – *Está.* Por quê? – *Por que está mais bicuda.*

- A esfera é incompreensível para o grupo e o cone começa a ter as beiradas inferiores arredondadas.
- Nas fichas e na folha de múltipla escolha, o sujeito confirma o que foi anteriormente levantado, reconhece somente as formas planas básicas.

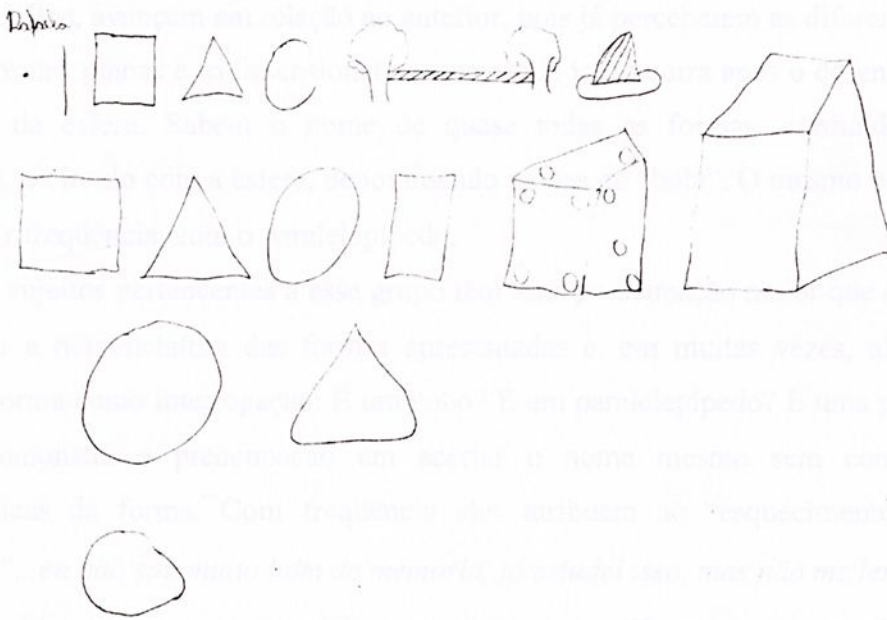


Figura 58 – Desenho do grupo I RAF (7), de memória e à vista das formas concretas.

LAR 8 (2.^a série B)

- Representa, em gestos, somente as formas planas: quadrado, retângulo, triângulo e círculo.

- Desenha de memória somente as formas planas e não consegue explicar as diferenças entre planas e tridimensionais.
- Frente às formas concretas, desenha e reconhece as planas. Inicia uma tentativa de desenho do cubo e do paralelepípedo, projetando as laterais dos dois lados. O cone tem sua base exageradamente arredondada, a esfera é desenhada como o círculo. LAR percebe a diferença, mas afirma que não é possível desenhar de outro modo.
- Nas fichas e na folha de múltipla escolha, reconhece todas as formas, exceto o paralelepípedo e a esfera.

Grupo II

Os sujeitos classificados no Grupo II¹⁰⁸ (VAN 9, INA 12, ALE 10, JUL 11, MAR 11, DEM 10, REN 9, MAY 11, GLE 12), de acordo com as características dos dados coletados, avançam em relação ao anterior, pois já perceberam as diferenças entre todas as formas planas e tridimensionais, mesmo que isso ocorra após o desenho, como é o caso da esfera. Sabem o nome de quase todas as formas, confundem, com frequência, o círculo com a esfera, denominando ambas de “bola”. O mesmo ocorrendo, com menor frequência, com o paralelepípedo.

Os sujeitos pertencentes a esse grupo têm uma preocupação maior que o anterior em acertar a nomenclatura das formas apresentadas e, em muitas vezes, afirmam o nome da forma como interrogação: É um cubo? É um paralelepípedo? É uma pirâmide? O que demonstra a preocupação em acertar o nome mesmo sem conhecer as características da forma. Com frequência eles atribuem ao “esquecimento”, DEM afirma: — “...eu não sou muito bom de memória, já estudei isso, mas não me lembro”.

As dificuldades para os sujeitos expressarem as diferenças entre o círculo e a esfera, bem como para a sua representação, possibilitaram a subdivisão do Grupo II em A e B.

O grupo II, as diferenças no uso das relações projetivas e euclidianas permitem fazer uma análise separada das relações utilizadas:

¹⁰⁸ Os sujeitos pertencentes ao grupo B são: VAN 9, INA 12, ALE 10, JUL 11, MAR 11, DEM 10, REN 9, MAY 11 e GLE 12. A média etária é de 10 anos e 5 meses.



Relações projetivas:

- Início de diferenciação entre formas planas e tridimensionais, com acerto no quadrado e cubo;
- Utilização de transparências na representação das formas espaciais, as formas ainda necessitam de características marcantes para dar um diferencial da profundidade, como no caso do cone com a base superdimensionada.

Relações euclidianas:

- Paralelas e ângulos distintos e precisos;
- Proporcionalidade nas reduções e dimensões das formas e entre elas;
- Preocupação com o uso adequado da nomenclatura pelos sujeitos;
- Os desenhos são realizados com adequação do espaço disponível na folha de papel, como se os sujeitos utilizassem quadrantes para dispor formas representadas no papel.

Grupo II.A (INA, JUL, ALE e VAN)

- Em gestos, conseguem representar quase todas as formas pedidas, com exceção do paralelepípedo e da esfera.
- Desenharam de memória todas as formas planas. O cone, o paralelepípedo e a esfera são os problemas para o grupo. O quanto à esfera, nenhum sujeito do grupo tem sucesso.
- No desenho à vista das formas, todos os sujeitos avançam desenhando o paralelepípedo, mas a dificuldade está na esfera, pois nenhum sujeito consegue perceber sozinho a diferença entre a forma plana (círculo) e a tridimensional (esfera).
- Após perceberem as diferenças entre o círculo e a esfera, não conseguem propor uma solução adequada para o desenho, tampouco conseguem explicar o porquê do fato.

INA 12 (6.^a série)

- Representa corretamente por gestos e no desenho de memória o ponto, a reta e as formas planas; quanto às formas tridimensionais, desenha de memória o cubo, que aparece como dois quadrados sobrepostos.



- No desenho à vista do jogo de formas concretas, desenha todas as formas planas e o cubo, novamente, como uma sobreposição de quadrados. Faz o paralelepípedo e o cone corretamente.
- Reconhece as diferenças entre círculo e esfera após o desenho, mas não entende porque elas deveriam ser desenhadas diferentemente: – “Você desenhou essas duas formas iguais, elas têm diferença? *Têm*. Qual é a diferença? *Essa aqui é tipo uma bola e essa aqui não, essa aqui é redonda*. No desenho elas são iguais. Teria que desenhar algo diferente? *Não*”.
- Nas fichas e na folha de múltipla escolha, não reconhece a esfera e o paralelepípedo.

JUL 11 (5.^a série B)

- Representa, por gestos, todas as formas planas e tridimensionais, exceto a esfera e o paralelepípedo.
- Desenha de memória o ponto, a reta, todas as formas planas; das formas tridimensionais, o cubo e o paralelepípedo se parecem com uma caixa aberta. A esfera é desenhada como o círculo e o cone tem uma aba generosa na base que, segundo JUL, – “*É para mostrar o redondo*”.
- No desenho à vista do jogo de formas concretas, repete o que havia feito anteriormente. Quando pergunto a diferença entre o paralelepípedo e o cubo, responde: – “*O cubo é pequeno e o paralelepípedo é grande, como se fosse o quadrado e o retângulo. O paralelepípedo é igual ao retângulo só que tem seis lados... A esfera é igual ao círculo só que é pequena*”. O cone é desenhado, mais uma vez, com uma grande aba.
- Nas fichas e na folha de múltipla escolha, volta a aparecer a dificuldade em relação ao círculo e à esfera, que o sujeito confunde novamente.

VAN 9 (3.^a série E)

- Representa em gestos e desenha de memória todas as formas planas, o ponto e a reta.
- À vista das formas concretas, desenha-as e nomeia-as corretamente, com exceção da esfera. Exagera a parte inferior do cone, desenhando-o por duas vezes. A esfera é o desafio intransponível no momento, que o sujeito não consegue explicar, peço que descreva as duas formas que estão em suas mãos: – “*Esta é fininha (círculo) e esta é*

cheinha (esfera)". Em seguida, peço a comparação entre os dois desenhos realizados que são iguais e as duas formas concretas (círculo e esfera): – “Quem olhar o seu desenho vai saber que eles são diferentes? – *Não*. Como poderia desenhá-la para parecer *cheinha* e *fininha*? – *Não tem jeito*". VAN fecha o questionamento, inviabilizando qualquer outra possibilidade.

- Nas fichas e na folha de múltipla escolha, não reconhece o círculo e a esfera.

Vanessa, Sybil Braga dos Santos

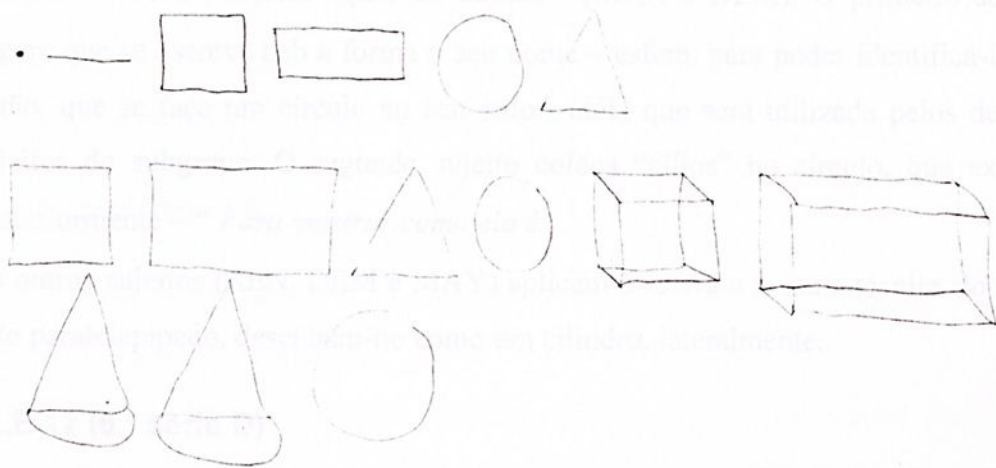


Figura 59 – Desenho do grupo IIA VAN (9), de memória e à vista das formas geométricas.

ALE 10 (5.^a série A)

- Representa, por gestos, todas as formas planas e das tridimensionais, o cubo.
- Desenha de memória as formas que já havia representado por gestos.
- Frente ao jogo de formas concretas, nomeia todas as formas planas desenhando-as; quanto ao cubo e ao paralelepípedo, pergunta seus nomes: – “*É o cubo? É o paralelepípedo? Eu já estudei, mas não lembro o nome dela*”. Com exceção da esfera que desenha como o círculo, percebendo o equívoco: – “*No papel não fica diferente... tem forma de círculo, mas é retinha, essa é redonda inteira*”. Faz tal afirmação com as formas entre as mãos. Pergunto como poderia ser desenhada e ALE afirma que não sabe.

- Nas fichas e na folha de múltipla escolha, vai descobrindo seus nomes, o mesmo ocorre na folha de múltipla escolha.

Grupo II.B (REN, MAR, DEM, GLE e MAY)

- Os sujeitos pertencentes a esse subgrupo desenharam o paralelepípedo somente à vista da forma tridimensional. Não é possível, ainda, o desenho de memória. Dois dos sujeitos (MAR e MAY) desenharam o paralelepípedo como um retângulo.
- Dois sujeitos, antes mesmo de desenharem a esfera, já prevêm a igualdade com o círculo: — *“Mas vai ficar igual ao círculo”* (MAR e DEM). O primeiro sujeito sugere que se escreva sob a forma o seu nome — esfera, para poder identificá-la ou, então, que se faça um círculo ao seu redor, idéia que será utilizada pelos demais sujeitos do subgrupo. O segundo sujeito coloca “cílios” no círculo, que explica posteriormente — *“Para mostrar como ela é”*.
- Os outros sujeitos (REN, DEM e MAY) aplicam à esfera a mesma técnica do cubo e do paralelepípedo, desenharam-no como um cilindro, lateralmente.

GLE 12 (6.ª série D)

- Em gestos, representa; o ponto, a reta e as formas planas, o mesmo ocorrendo no desenho de memória o cone é desenhado como o triângulo.
- À vista das formas concretas, repete as já citadas anteriormente, acrescentando o cubo que desenha como dois quadrados sobrepostos, mas corrige em seguida, rindo dele mesmo.
- Nas fichas e na folha de múltipla escolha, reconhece todas as formas.

MAR 11 (5.ª série C)

- Representa em gestos e desenha de memória todas as formas planas, como característica do grupo, não tem sucesso com o paralelepípedo e a esfera, mas o cone é explicado: — *“Esfera eu não sei...Um cone deixa eu lembrar...Um não lembro. Ah, eu acho que é um tipo uma pirâmide redonda”*. A diferença entre o quadrado e o retângulo: — *“A diferença do retângulo e do quadrado é que no quadrado, as formas são iguais, têm todos os mesmos centímetros, e o retângulo a parte lateral e a parte de cima são diferentes”*.

- A surpresa está no desenho da esfera à vista das formas concretas, pois as demais, MAR desenha e nomeia com facilidade: “Você sabe qual é essa aqui? – *Ai, isso para mim é uma bola. Você pode desenhá-la? Mas a bola vai sair praticamente que nem um o círculo.* Como tem que fazer para sair diferente? *Ah, eu não sei.* Qual a diferença entre os dois? *Esse aqui é tipo uma moeda e essa aqui é circular* (indicando a esfera). Uma pessoa que olhar o desenho que você fez vai saber que eles são diferentes? *Não.* E o que teria que fazer para que ela soubesse que é diferente? – *Ah! Eu não sei, talvez escrever.* E se não pudesse escrever? *Ah, eu faria um círculo em volta dela. A sei lá... fazer uma bola de futebol, vôlei ou basquete.*” E encerra a discussão.
- Nas fichas, denomina a esfera de bola, mas quando vai à folha de múltipla escolha, descobre o nome da esfera.

REN 9 (3.^a série E)

- Representa em gestos e desenha-as de memória todas as formas, exceto o paralelepípedo e a esfera.
- À vista das formas concretas, desenha e as nomeia de modo correto, inclusive a esfera, o paralelepípedo o círculo são desenhados igualmente, “Você desenhou esse (círculo) e essa (esfera) iguais, quem olhar os dois desenhos vai saber qual é o círculo e qual é a esfera? *Não.* Como deveria ser então?” O sujeito aplica à esfera a mesma técnica do cubo e do paralelepípedo.
- Nas fichas e na folha de múltipla escolha, o sujeito reconhece todas as formas.

DEM 10 (5.^a série E)

- Representa em gestos e desenha de memória todas as formas, exceto o cubo e o paralelepípedo que depois à vista irá fazer. O quando peço o desenho da esfera, ele desenha colocando como se fossem cílios, pergunto o porquê do fato e ele me responde que: “*É para ver que ela é assim*”. Faz o gesto no ar do volume ocupado pelo sólido.
- O desenho das formas à vista transcorre com facilidade para DEM que faz todas sem vacilar. A esfera ele desenha como um círculo, quando pergunto sobre a igualdade com o círculo, o sujeito aplica a técnica utilizada no cubo e no

paralelepípedo, projetando as laterais e marcando quatro lados, os exemplos dados pelo sujeito não deixam dúvidas: *“Um planeta, uma bola”*.

- Nas fichas e na folha de múltipla escolha, acerta todas as figuras.

MAY 11 (5.^a série D)

- MAY representa, em gestos, todas as formas pedidas, exemplificando todas com objetos comuns. No desenho de memória, faz o paralelepípedo como um retângulo, fato que corrigirá no desenho à vista das formas concretas, mas a prova da tridimensionalidade aparece já no desenho de memória da esfera pois, imediatamente após ser pedido o seu desenho já esclarece: – *“Tem quatro lados redondos”*. Pergunto o porquê do fato e ela me afirma mostrando a diferença entre a forma plana e a tridimensional, – *“Esta é a bola”*. Esse é o indício de que diferencia a esfera do círculo, já anteriormente traçado.
- Ao desenhar o paralelepípedo frente às formas concretas, peço que justifique o porquê de desenhá-lo assim (com profundidade). Ela argumenta que: – *“É como o quadrado, tem dois lados e o cubo que tem em cima, embaixo e dos lados”*. A esfera é desenhada como se fosse um cilindro visto lateralmente que é feito sem a necessidade de comparação entre as formas planas e tridimensionais.
- Nas fichas e na folha de múltipla escolha, acerta todas as figuras.

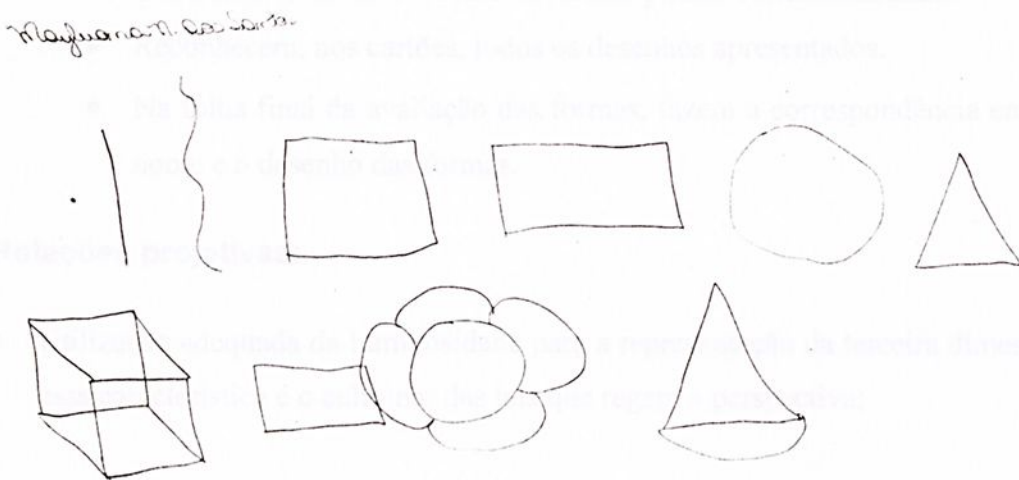


Figura 60 – Desenho do grupo IIB MAY (11), de memória das formas geométricas.

M. P. Gomes - 11 Q. Santos

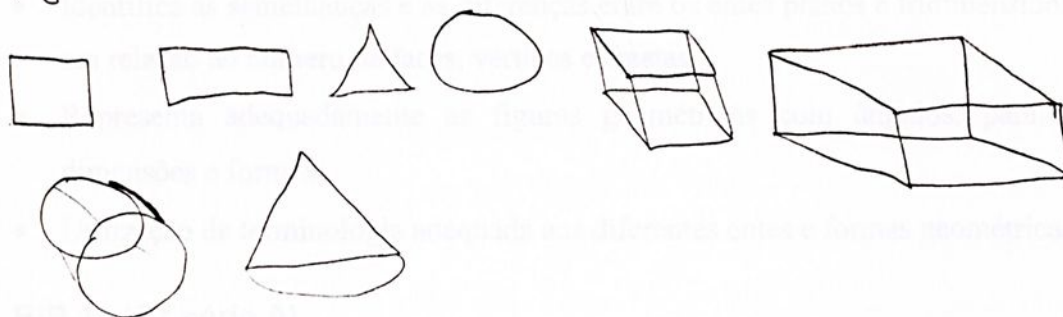


Figura 61 – Desenho do grupo IIB MAY (11), à vista das formas geométricas.

Grupo III

As características desse grupo¹⁰⁹ não deixam dúvidas quanto à sua classificação (BIB 11 e AND 10). Os dois sujeitos realizaram a entrevista de maneira muito segura. Registravam no papel as características das formas, no decorrer das representações explicavam o que, como e por que dos traços no papel, projetando as próximas ações e rememorando as diferenças e as semelhanças com os desenhos anteriores:

- Apresentam as diferenças entre as formas planas e tridimensionais, expressando por gestos suas características.
- Desenhavam de memória todas as formas planas e tridimensionais.
- Reconhecem, nos cartões, todos os desenhos apresentados.
- Na folha final da avaliação das formas, fazem a correspondência entre o nome e o desenho das formas.

Relações projetivas:

- Utilização adequada da luminosidade para a representação da terceira dimensão, essa característica é o culminar das leis que regem a perspectiva;

¹⁰⁹ Os sujeitos pertencentes ao grupo C são: BIB 11 GLE 12 e AND 10. A média etária é de 10 anos e 6 meses.

Relações euclidianas:

- Identifica as semelhanças e as diferenças entre os entes planos e tridimensionais, em relação ao número de faces, vértices e arestas;
- Representa adequadamente as figuras geométricas com ângulos, paralelas, dimensões e formas;
- Utilização de terminologia adequada aos diferentes entes e formas geométricas.

BIB 11 (5.^a série A)

- Reconhece todas as formas planas e tridimensionais por gestos e nomes, explicando as diferenças entre elas, como no caso do cubo e do quadrado, do círculo e da esfera, do triângulo e do cone, exceto o paralelepípedo ao qual denomina de “*cubo grande*”, o que demonstra dificuldade na nomenclatura, mas com explicações corretas do número de faces, inclusive argumentando corretamente na diferença entre a forma plana e a tridimensional, o mesmo se confirmando no baralho e na folha de múltipla escolha. Quanto à esfera, que é o diferencial desse grupo, BIB a desenha de memória com sombreado para dar a idéia de volume, o que se repetiu no desenho à vista das formas concretas.
- O desenho à vista das formas concretas segue o mesmo que de memória, todas as figuras são feitas com exatidão.
- No decorrer da escolha dos baralhos, peço a diferença entre o círculo e a esfera: – “*A esfera é tipo uma bola (que ela faz com as mãos em forma de bola no ar) e (com o círculo nas mãos) é como se tivesse cortado a bola no meio*”. BIB dá exemplo das diversas formas.
- Nas fichas e na folha de múltipla escolha, acerta todas as figuras.

AND 10 (4.^a série A)

- Na primeira parte da entrevista, o sujeito explica, detalhadamente, as propriedades de cada forma de memória, reproduzindo suas formas espacialmente com as mãos – “*Figura geométrica com quatro lados, dois lados maiores e dois menores (retângulo)... – Figura geométrica com três lados, pode ter três lados iguais, três diferentes (triângulo)... – Figura geométrica redonda e plana (círculo)... – Figura geométrica sólida com seis lados iguais (cubo). – Figura geométrica sólida com seis lados também só que quatro lados maior e*

dois menor (paralelepípedo). – *Uma bola (esfera)...*” Já na descrição de memória, peço a diferença entre as formas planas e tridimensionais ao que AND responde com convicção. Quanto ao círculo e à esfera ele é direto: – “*O círculo é plano e a esfera é maciça*”. No decorrer das explicações, o sujeito faz com as mãos os gestos que não deixam dúvidas. Aos pedidos de representação gestual e das explicações sobre as características das formas e dos entes geométricos, seguem os desenhos que não deixam margem de dúvidas. AND reconhece todas, inclusive as duas pirâmides de base triangular e quadrada, o hexágono e o trapézio.

- O desenho à vista das formas tridimensionais é a repetição do desenho de memória. AND surpreende ao explicar o cone, pois faz o movimento de rotação de uma reta inclinada no ar, explica gesticulando, pega o lápis e narra o que está sendo desenhado, mostra o eixo central no qual um triângulo roda para formar um cone, diferentemente dos sujeitos do grupo I e II que se utilizam dos exemplos práticos, que, no caso do cone, é o chapéu de aniversário ou de palhaço.
- No baralho, o sujeito volta a repetir as diferenças entre formas planas e tridimensionais. O mesmo na folha de múltipla escolha.

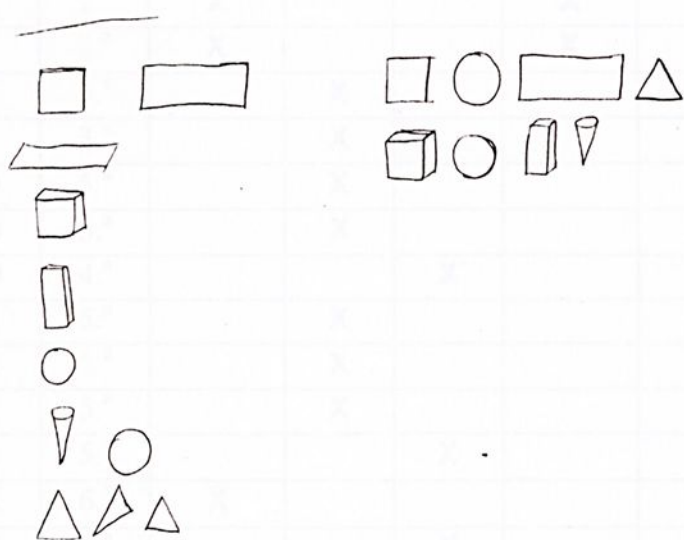


Figura 62 – Desenho do grupo III AND (10), de memória e à vista das formas geométricas.

Tabela 7 – Classificação dos resultados obtidos na geometria axiomática.

Nome	Idade	Série	Grupo I	Grupo IIA	Grupo IIB	Grupo III
BIA	7	1. ^a	X			
RAF	7	1. ^a	X			
ANN	8	2. ^a	X			
LAR	8	2. ^a	X			
VAN	9	3. ^a		X		
REN	9	3. ^a			X	
ALE	10	5. ^a		X		
DEM	10	5. ^a			X	
AND	10	4. ^a				X
JUL	11	5. ^a		X		
MAR	11	5. ^a			X	
MAY	11	5. ^a			X	
BIB	11	5. ^a				X
INA	12	6. ^a		X		
GLE	12	6. ^a			X	

Tabela 8 – Tabela comparativa dos resultados entre a geometria vivida e a geometria axiomática.

Nome	Idade (anos)	Série	Geometria Vivida			Geometria Axiomática			
			A	B	C	I	IIA	IIB	III
BIA	7	1. ^a	X			X			
RAF	7	1. ^a	X			X			
ANN	8	2. ^a	X			X			
LAR	8	2. ^a	X			X			
VAN	9	3. ^a		X			X		
REN	9	3. ^a		X				X	
DEM	10	5. ^a		X				X	
ALE	10	5. ^a		X			X		
AND	10	4. ^a			X				X
JUL	11	5. ^a		X			X		
MAR	11	5. ^a		X				X	
MAY	11	5. ^a		X				X	
BIB	11	5. ^a			X				X
INA	12	6. ^a	X				X		
GLE	12	6. ^a			X			X	

5.2 Análise dos dados e resultados

As tabelas anteriores mostram o desenvolvimento da geometria vivida e da geometria axiomática (Tabelas 6 e 7). Nelas, reconhecemos a distribuição dos sujeitos nos critérios de classificação. A última tabela apresenta (tabela 8) uma síntese que permite a comparação dos dados referentes às geometria vivida e à axiomática.

Os dados evidenciam que os sujeitos analisados tiveram o mesmo desempenho nas duas geometrias. Apesar das especificidades de cada representação, elas têm em comum a utilização das operações espaço-geométricas, ou seja, utilizam conhecimentos resultantes dos saberes geométricos e, no caso do espaço, colocam em jogo, para a resolução de problemas, os conhecimentos resultantes da geometria, mas ambos estão ligados às operações infralógicas ou espaço-temporais e, portanto portam sobre os objetos contínuos.

Os dados nos mostram que os indivíduos utilizam as mesmas operações para a geometria e para o espaço. No grupo estudado, os sujeitos representaram a geometria vivida e a axiomática com as mesmas características.

Os sujeitos que utilizaram predominantemente as relações topológicas foram classificados nos grupos **Grupo A** na geometria vivida e no **Grupo I** na geometria axiomática. As características dessas representações são os espaços vazios e privilegiados, pouco coordenados, sem redução adequada dos caminhos e dos imóveis. Alguns sujeitos, como por exemplo, ANN 8 (Figura 44), após questionada sobre os pontos intermediários inseriram a sorveteria, *a casa da Dona Maria Tereza*, *A velhinha lá perto de casa*, o Texeirão, o acampamento.

Os sujeitos põem no desenho a coordenação de poucos objetos que se encontram “unidos” por um caminho que os liga sem a preocupação de distâncias, pontos intermediários, proporções. Os desenhos são unidimensionais ou no máximo em dois planos, não chegando à coordenação de conjunto por falta de enquadramento e simultaneidade no espaço.

As representações dos entes geométricos gozam, apesar da diferença, das mesmas relações espaço-geométricas. As formas são entes particulares, tais como: o dado, o chapéu de palhaço, pois há a falta de projeção que registre e diferencie os corpos planos dos espaciais, que fica evidente no paralelepípedo e na esfera; o “dado” se apresenta como um ente particular e não como uma forma de seis faces, com espessura, mas simplesmente como um dado, muito semelhante à “escola” e à “minha

casa”, o que nos leva a confirmar o que já estava explícito anteriormente nos dados agrupados nas tabelas.

Segundo Piaget (1971, p. 11) e Piaget e Garcia (1987, p. 110), as relações utilizadas no desenvolvimento das noções geométricas na criança são muito semelhantes às usadas por Euclides quando estudava as propriedades das figuras e dos corpos geométricos como relações internas entre os elementos dela mesma. O espaço ao redor dessas figuras não é considerado nem as relações com os outros corpos. Os deslocamentos e as transformações por que passam essas figuras também não são considerados. Com esses predicados, essa fase foi denominada de intrafigural e nela, prevalecem as relações topológicas, “las estructuras topológicas se apoyan, por el contrario, em sus actividades intrafigurales”.

Para o segundo grupo, as características marcantes foram as utilizações das relações projetivas e euclidianas. Essa afirmação pode ser confirmada com a diferenciação entre formas planas e espaciais. Os entes geométricos passam a ser integrantes de classes de objetos: quadrado, cubo, cone, etc. o que equivale no espaço vivido, à utilização de pontos de referenciais não mais particularizados. As ruas aparecem como um aglomerado de construções, o espaço passa a estar mais integrado, não aparece mais somente a escola e a casa. Os espaços vazios característicos do grupo anterior são substituídos, paulatinamente, por um conjunto marcado por relações de vizinhança, ordem e proximidade. Ao desenhar as ruas, já se notam as tentativas de convenções – podendo ser reconhecidos seus nomes, assim como os nomes dos estabelecimentos comerciais.

As confusões no uso das relações euclidianas – com alguns enganos nas proporções das reduções e ampliações atribuídas a determinados espaços e na perspectiva –, ficam perceptíveis nos desenhos das ruas, como por exemplo, no caso do “campo do América” visto de cima e dos estabelecimentos comerciais de frente (Figura 47), o que correspondente nos entes geométricos às transparências as quais nos cubos e paralelepípedos (Figura 59), a esfera é um desafio ainda impossível.

O uso das relações projetivas e euclidianas no grupo II fica bem definido com a representação gráfica, gestual e verbal da esfera que, apesar das dificuldades impostas, mostra que os sujeitos percebem as diferenças entre os objetos planos e espaciais, diferentemente do grupo mais jovem (grupo I e A), mas não têm sucesso em organizar as informações retiradas da experiência e transportá-las para o papel, por isso transferem o método empregado no desenho do cubo e do paralelepípedo, ou ainda

desenham um cilindro. Os sujeitos reconhecem as diferenças, mas não sabem como fazer para representá-las adequadamente.

Os fatos anteriores estão de acordo com as descrições de Piaget e de Garcia (1987, p. 115) na passagem das relações intra para as interfigurais:

A passagem das relações intrafigurais às interfigurais é devida, no decurso da psicogênese, aos três factores principais das exigências de homogeneização dos espaços vazios e plenos, de coordenação das direcções ou das distâncias a duas e três dimensões, e de localização dos móveis no caso dos deslocamentos.

O terceiro grupo (III e C) mostrou em suas representações a utilização das relações projetivas e euclidianas. Podemos afirmar tal fato pelas representações efetuadas na geometria vivida e axiomática. Nas representações da geometria vivida, os sujeitos apresentaram a organização dos deslocamentos efetuados no espaço, que possibilitavam compreender os percursos efetuados. Os pontos referenciais indicavam as suas localizações no espaço, mostrando o espaço urbano como uma malha de ruas que se cruzavam, como eixos coordenados.

A compreensão dos deslocamentos possibilitava a esses sujeitos ir e voltar com desenvoltura nos trajetos realizados, os retornos com inversão de direção e de sentido davam provas da noção de fluxo e de leis de trânsito. Os sujeitos sugeriam possibilidades de caminhos alternativos no caso de ir-se a pé ou de veículo, portanto, de convenções na utilização de sentido e direção nos quais as distâncias eram muito próximas às dimensões reais. Eles ofereciam rotas alternativas para o percurso de ida e vinda entre a escola e a casa.

Os espaços internos da escola são desenhados como se os sujeitos os vissem por um “vôo aéreo”, o que requer deles um pensamento abstrato de se desprender do visível e imaginar esse espaço projetado no papel (Figuras 55, 56 e 57). Mostram a compreensão do espaço como a coordenação de múltiplos lugares que se relacionam. Não mais apresentam nos desenhos as confusões de perspectiva, com vistas frontais e verticais, o mesmo ocorrendo nas relações euclidianas com ângulos bem marcados. As paralelas retratadas adequadamente podem ser conferidas nos exemplos contidos no texto.

Quanto às representações da geometria axiomática, o mesmo ocorre. Os sujeitos têm conhecimento da profundidade e das diferenças entre as figuras planas e espaciais,

isso aparece nas projeções da terceira dimensão para a segunda, quando desenhavam as formas espacializadas e suas representações no papel as quais requerem “algo” que as façam ser diferentes das planas. O jogo de luzes que diferencia a esfera do círculo demonstra o conhecimento dos sujeitos, no caso do cubo, do paralelepípedo e do cone, as transparências não mais estão presentes. Os sujeitos conhecem todas as formas pelo nome e dão explicações para as diferenças entre as planas e as espaciais. O ponto, a reta e o plano são do conhecimento desses sujeitos.

As representações realizadas pelos sujeitos do grupo III e C estão relacionadas às características descritas por Piaget e Garcia, próprias das relações transfigurais. Os sujeitos em questão encontram-se no limiar entre o pensamento operatório concreto e o formal, no qual as estruturas espaciais estão coordenadas umas com as outras. Assim, o espaço começa a ser representado por esquemas mais gerais, diferentemente das representações anteriores, restritas aos espaços singulares heterogêneos. O espaço dos sujeitos em questão é um espaço homogêneo, no sentido de estar representado por esquemas mais abstratos e coordenados, que lhes permitem perceber as transformações sucessivas por que passa o espaço numa totalidade. Tais características, segundo esses autores, têm sua expressão mais característica no *Programa de Erlangen*, de Félix Klein.

[...] o que é próprio do transfigural é substituir a descrição das figuras pelo cálculo, e mesmo quando a resultante dessas composições pode traduzir-se numa figura, esta é nova e deve ser construída dedutivamente antes de dar lugar a sua representação. (PIAGET e GARCIA, 1973, p. 127).

Ao término da apresentação e da discussão dos dados coletados, podemos afirmar que, no grupo estudado, de quinze alunos de ensino fundamental, há uma analogia entre as relações utilizadas nas representações espaço-geométricas, tanto nas situações da geometria vivida como nas da geometria axiomática.

CONSIDERAÇÕES
FINAIS

CONSIDERAÇÕES FINAIS

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A geometria, que surgiu diretamente ligada às necessidades práticas impostas pela mensuração das terras, passou por muitas transformações no decorrer dos tempos. Das práticas primitivas dos esticadores de corda às margens do Nilo, que a cada enchente requeria uma nova demarcação, o homem passou à utilizá-la para cálculos de novos quares.

No mundo grego, surgiu o texto, provavelmente, mais influente de todos os tempos, escrito por Euclides, os *Elementos*, modelo de racionalidade e de organização do conhecimento humano. A obra é admirada pelos matemáticos e filósofos de todos os países e de todos os tempos pela pureza do estilo geométrico e pela concisão com que são colocadas as bases da geometria.

A geometria euclidiana reinou suprema até o século XIX. O postulado das paralelas ou quinto postulado, como conhecido durante séculos, enfureceu os geômetras e os matemáticos, e, somente a partir de Gauss, Lobachevsky e Reimann é que surgem as geometrias não – euclidianas. Entretanto, os *Elementos* se mantiveram, mesmo após essas criações, como o manual a qualquer ensino de geometria.

Os problemas com o ensino da geometria, atualmente, são de diversas ordens e não são restritos à educação brasileira. Nossas pesquisas mostram que, já no século XVIII, Aléxis Claude Clairaut, matemático reconhecido e ligado a Diderot e D'Alembert – os enciclopedistas – e ao Iluminismo, escreveu, provavelmente em alusão a Euclides, os *Éléments de géométrie*, uma crítica ao modo de se ensinar a geometria baseada nos *Elementos*, que considerava muito formal e distanciado do aluno, o que inviabilizava e tornava árido o seu ensino.

Os dados das avaliações nacionais (SAEB) têm mostrado que o ensino e a aprendizagem da geometria entre nós devam ser os mesmos da época de Clairaut e mereçam estudos mais aprofundados. Para responder a essa situação, foram propostas mudanças, que ocorreram por força da lei ou a pedido dos professores, mas não atenderam, ainda, às necessidades dos nossos alunos.

As soluções apresentadas no Estado de São Paulo com os Guias Curriculares e a Proposta para o Ensino de Matemática foram experiências com que muitos professores



se beneficiaram, mas restritas ao nosso Estado. Na década de 90, a preocupação com os rumos da educação se estende a toda a nação e são elaborados os PCNs – Parâmetro Curricular Nacional, ainda em fase de aceitação pelos professores. Apresentam inovações que podem auxiliar a educação nacional mas, como afirma Vergnaud (1994), não adianta criar propostas sem acompanhar sua implantação, sem o preparo adequado dos professores, sem seguir os reflexos dessas propostas.

O PCN, em relação às propostas anteriores, apresenta alguns avanços no que tange à geometria, para nós que estudamos as relações espaço-geométricas, ou seja, as relações que recorrem aos conhecimentos nascidos do saber geométrico e utilizados na resolução de certos problemas no espaço, como, por exemplo: “Localizar pessoas ou objetos no espaço, com base em um ponto de referência. Entender a movimentação de pessoas ou objetos, conforme indicações de direção” (NOVA ESCOLA, p. 56).

Outro avanço é relativo à inserção de conteúdos conceituais e procedimentais para o ensino de geometria. Desse modo, a cada ciclo estão contemplados o espaço e a geometria plana e espacial de maneira vinculada aos conhecimentos dos alunos e, portanto com significado, o que mostra uma geometria que pode estar aplicada à vida, e de que o aluno pode se utilizar no dia-a-dia.

Por outro lado, uma proposta precisa de ações outras que não se restringem à publicação e à entrega a todos os professores que vão utilizá-la e, no que se refere à geometria, é necessário conhecer mais do que o conteúdo a ser apresentado aos alunos, é preciso conhecer como ocorre o processo de construção da geometria como ciência (sociogênese) e como ocorre a construção na criança (ontogênese). Esses conhecimentos é que vão permitir aos professores compreender que essa área do conhecimento tem algumas particularidades que diferenciam-na das demais. É sobre as particularidades da construção da geometria que passaremos a discutir.

Nossos estudos evidenciaram quão complexa é a construção das relações espaço-geométricas, mais específico ainda é esse conhecimento no período das operações concretas. As características dessa construção têm início no nascimento, com a coordenação das ações baseadas na evolução da percepção e da motricidade e, por isso mesmo sensório-motora. Essa fase é muito rápida para as construções que a criança realiza, vai do nascimento à aquisição da linguagem, conduta mais evidente da função simbólica, mas não única.

Esse período, origem do comportamento inteligente, e essencialmente prático, apresenta a coordenação dos movimentos e deslocamentos que, inicialmente, estão

centrados no corpo do bebê, mais que vão se descentralizando gradualmente por coordenação de ações, graças às assimilações e às acomodações sucessivas até o estágio em que a criança vai perceber-se como um elemento inserido entre outros.

No que se refere ao espaço, a criança passa dos grupos práticos aos grupos representativos, realizando o que Piaget chamou de revolução copernicana, pois deixa de ser o centro para tornar-se um objeto entre tantos outros.

A criança que esteve centrada nela mesma durante o período sensório-motor, após a aquisição da função simbólica, volta-se para o mundo ao seu redor. Inicialmente presa ao colo ou ao carrinho, ganha a liberdade do ir e vir sozinha, de deslocar-se por todo o espaço ao seu redor, mesmo que essas ações ainda estejam restritas a curtos espaços e tempos e submetidas às percepções particulares da criança.

Nesse período, que vai da aquisição da função simbólica até as operações e, por isso mesmo, pré-operatório, as relações com o mundo sofrem de uma subjetividade austera, dentro da qual o mundo funciona, segundo leis pouco físicas e mais particulares. Assim, uma montanha vista de perto tem uma forma e uma dimensão, à distância muda a forma e a dimensão. Os fatos e objetos são prisioneiros da percepção particular da criança, ainda que guardados na memória.

O espaço, nesse período (entre os 2 e 5 anos), é comparável aos grupos práticos e subjetivos do sensório-motor, presos à presença da criança que vai determinar as características que ela atribui a ele. As relações topológicas, nesse período, predominam, por serem as menos complexas. A criança ainda não consegue trabalhar com coordenações de vários objetos, nem inseri-los em sistemas coordenados (euclidianos) com proporções de formas e grandezas. O mesmo ocorre com as perspectivas – provas cabais das distorções na maneira como a criança representa o mundo.

A partir dos cinco anos, aparecem as organizações representativas baseadas nas configurações estáticas. Os rebatimentos e as transparências evidenciam a necessidade de retratar o que existe e não o que é visto e as confusões na escolha do ponto de vista a ser adotado para se representar um objeto são marcas de que as relações projetivas e euclidianas começam a integrar o universo das representações espaciais e geométricas. O espaço, apesar de estar mais coordenado, carece ainda da inserção dos objetos em um espaço globalizante e homogêneo¹¹⁰.

¹¹⁰ Homogêneo no sentido de não haver posições privilegiadas, em que todos os objetos estão subordinados às mesmas leis projetivas e euclidianas.



O processo de construção das relações projetivas e euclidianas mostra a passagem do espaço topológico interior aos objetos ao espaço coordenado. Tal fato é próprio das relações projetivas e euclidianas, mas essa passagem não é brusca e ocorre gradativamente, é a passagem do intra para o interfigural.

A estas relações intrafigurais podemos ligar as que resultam de uma comparação entre as propriedades internas de duas ou mais figuras, o que é muito diferente do interfigural enquanto posição das figuras num espaço englobante, cuja estruturação é então necessária na medida em que apresenta características de totalidade. (PIAGET e GARCIA, 1983, p. 114).

A conquista das operações concretas vai descortinar um mundo novo no qual as ações interiorizadas vão se constituir em operações. Pensar passa a ser agrupar em sistemas coerentes e reversíveis as ações, que fluem no espaço e no tempo. Conhecer o real passa a ser pensar sobre ele. A forma de perceber a realidade, subordinada às percepções, anteriormente necessitava da manipulação e do contato direto com os objetos, como por exemplo, à visualização do nível mais alto de líquido era indício suficiente para se afirmar que havia mais líquido que em outro vidro mais largo e mais baixo.

O progresso desse período está em poder solucionar problemas de conservação e na apresentação de argumentos corretos para suas respostas. Se anteriormente havia distorções na forma como a criança via o mundo e o representava preso às percepções, a partir do pensamento operatório concreto entre a percepção e a razão, a criança toma decisões cognitivas e lógicas em oposição às decisões influenciadas pela percepção.

Embora de posse das operações concretas, que apesar dos avanços estão limitadas por se basearem diretamente nos objetos e não ainda em hipóteses enunciadas verbalmente, por isso mesmo operatórias concretas, esse período guarda algumas particularidades. Segundo Piaget, duas são as operações que se constituem: as de caráter lógico-aritmético e as infralógicas. Entre essas duas formas de operações, há uma estreita relação e uma interdependência.

Ao nível das operações concretas (sete, oito a dez, onze anos), a diferenciação das estruturas lógico-aritméticas e geométricas parece terminada na medida em que dá lugar a dois sistemas isomorfos, mas distintos, de operações, umas lógicas, fundamentadas em semelhanças e diferenças e as outras infralógicas, fundadas nas vizinhanças e no contínuo. Só que enquanto as primeiras permanecem "concretas", quer dizer sua utilização exige a manipulação de objectos, essas operações comportam ainda deslocamentos no espaço, portanto, um resíduo importante de aspectos espaciais. É apenas ao nível hipotético-dedutivo (a partir de onze, doze anos)

que as estruturas lógico-aritméticas se libertam inteiramente do geométrico: mas é precisamente nessa altura que se instaura a fase “transfigural” da geometria do sujeito... (PIAGET e GARCIA, 1983, p. 130).

As operações lógico-aritméticas ou lógico-matemáticas tratam dos objetos discretos reunidos em classes e nas séries. Nas classes, organizando pelas semelhanças, entes pertencentes à mesma classe precisam, necessariamente, ter algo em comum – serem semelhantes para estarem na mesma classe. As séries, ou coleções assimétricas tratam da organização das diferenças de uma classe. Assim seriar por altura, cor, peso, etc., organizar os objetos em ordem crescente ou decrescente, segundo o atributo que está sendo abstraído.

As operações infralógicas e constitutivas do objeto estão relacionadas às conservações físicas – conservação de matéria, peso e volume e à constituição do espaço – conservação do comprimento, superfície, perímetro, das horizontais e verticais, etc.

Nas operações infralógicas e constitutivas do espaço no período operatório concreto, alguns aspectos são relevantes e diferenciais: a singularidade da imagem mental que desempenha um papel particular no domínio do espaço e da geometria, por ser ela mesma de caráter espacial, de forma geral a imagem tem somente o caráter de significante simbólico. Mas, no caso da geometria, não há como se imaginar um triângulo que não seja triangular, há assim, uma certa homogeneidade entre o significante e o significado, entre o objeto e a representação do objeto. Assim, segundo Piaget (1971, p. 5), a imagem vai ter uma papel privilegiado no domínio espacial, não sendo o seu motor, mas sendo inicialmente um ponto de apoio para se tornar desnecessária ao pensamento formal.

Outro ponto diferencial é sobre as relações entre a experiência física e lógico-matemática, que será analisado em seguida.

Nossos estudos junto aos alunos de educação fundamental mostraram que as representações da geometria vivida e da geometria axiomática se entrecruzam. Dos quinze sujeitos entrevistados, treze utilizam as mesmas relações nas duas formas de representações. Apenas dois sujeitos (INA 12 e GLE 12) estão em categorias limiares: o primeiro sujeito, na geometria vivida, está no grupo A e, na geometria axiomática, no grupo IIA, e o segundo sujeito encontra-se, na geometria vivida, no grupo C e, na geometria axiomática, no grupo IIB, o que mostra a proximidade nas representações e as possíveis distorções no momento que o sujeito estava realizando a entrevista.

Os sujeitos que estão no grupo I e no grupo A utilizam as mesmas relações espaço-geométricas, marcadas pelo predomínio da topologia. Os trajetos desenhados e os entes geométricos eram visões particulares intra-objetais.

Os sujeitos do grupo II (IIA e IIB) e B utilizam as relações projetivas e euclidianas, mas ainda estão numa fase de transição entre considerar os objetos inseridos em totalidades, com relações interdependentes, e as visões particulares da etapa anterior. As leis da perspectiva mostram a descentração dos próprios pontos de vista, a descoberta da espacialidade das formas – diferenças entre a esfera e o círculo, que dão mostra desse fato.

O domínio das relações espaço-geométricas, apresentadas pelos sujeitos dos grupos C e III, marca a passagem do espaço inter para o transfigural, da inserção dos objetos em sistemas coordenados e esquematizados (Figura 57). As representações gráficas parecem desgarradas da realidade, pois não há nada que tenha uma ligação que não de signos, onde o desenho é um modelo da realidade sem ligação direta, o que mostra quão abstrato se tornou o pensamento dos sujeitos, se comparados ao grupo A e I.

As práticas referentes ao ensino da geometria e do espaço apresentam-se de maneiras opostas. Há aquelas que deixam o conhecimento do espaço ocorrer espontaneamente, como se fosse adquirido no decorrer do desenvolvimento sem a necessidade de ser um conteúdo a ser aprendido como os demais, o que pode ser constatado nas propostas de ensino da matemática do Estado de São Paulo (Guias curriculares e a Proposta para a Matemática do Estado de São Paulo), pois nelas os objetivos e conteúdos referentes ao espaço não são incluídos. Outras práticas evidenciam o conhecimento como algo a ser apreendido por memorização, como no caso da geometria, que aparece nos manuais e na prática de alguns professores que utilizam os métodos tradicionais, subordinando o conhecimento à transferência verbalista, por mera exposição oral a ser memorizada atenciosamente sem que o aluno tenha visto um paralelepípedo ou uma pirâmide de base quadrada ou triangular e tenha que imaginá-los havendo nesse caso, somente um apelo à reprodução mecânica do conhecimento geométrico.

As afirmações anteriores não são restritas à nossa realidade. Bertholet e Salin (1993) já afirmavam que uma das maiores características do ensino da geometria na escola elementar era subestimar a dificuldade de aquisição dos conhecimentos espaciais que os alunos tinham e deixá-los à mercê da própria sorte para estabelecer as relações

adequadas entre o espaço e os conceitos geométricos que lhes eram ensinados, e que lhes dariam o domínio da realidade. Esses conhecimentos são considerados como sendo da própria realidade sem a necessidade de serem ensinados. O espaço de trabalho na escola fundamental é aquele da folha de papel, do micro-espaço.

Para Brousseau¹¹¹ (1983, p. 212-215), o espaço pode ser subdividido em três, de acordo com o tamanho dos objetos que estão relacionados a ele, o micro-espaço é o da manipulação de pequenos objetos, o meso-espaço é dos deslocamentos do sujeito num domínio controlado pela vista, onde os objetos fixos estão entre 0,5 e 50 vezes o tamanho do sujeito, e finalmente o macro-espaço é aquele dos mapas, dos planos da cidade (*cartes – espace granuleux*).

Uma das conclusões apresentadas na tese de Berthelot e Salin (1992) é relativa à necessidade de se introduzir, no ensino da matemática, na escolaridade obrigatória, objetivos relativos a certos conhecimentos espaciais úteis, e de modo particular do macro-espaço e do domínio das representações materiais dos objetos.

Nosso trabalho de campo mostrou como um grupo de estudantes de educação pública representa o micro, meso e o macro-espaço, o espaço dos objetos (entes geométricos) na folha de papel, o desenho dos espaços interiores à escola e o macro-espaço (dos deslocamentos nos percursos domésticos). De acordo com as análises dos dados, pudemos verificar que as duas formas de representação se encontram no mesmo nível de evolução.

Um fato, deve ser sublinhado, relativo ao grupo estudado: todos os sujeitos que entrevistamos afirmavam que não haviam, até então, realizado representações gráficas “*dos caminhos*” e que não haviam visto “*de verdade*” ou “*pegar na mão*” as formas geométricas (os modelos da figura 33). Alguns deles, como os exemplos citados, só conheciam “*os nomes*”, mas que “*sempre se esqueciam*”, como é o caso de ALE 10, – “*É o cubo? É o paralelepípedo? Eu já estudei, mas não lembro o nome dela*”, ou DEM 10 que afirma: – “*... eu não sou muito bom de memória, já estudei isso, mas não me lembro*”.

Assim, o ensino da geometria fica restrito ao traçado pelo professor de linhas, retas e curvas pouco significativas para os alunos, e não atinge o conhecimento dos alunos, deixando-os à mercê da memorização. O aluno de educação fundamental não é

¹¹¹ BROUSSEAU, G. Etudes de questions d'enseignement. Une exemple: la géométrie, *Séminaire de didactique des mathématiques et l'informatique*, LSDIMAG, Université J. Fourier, Grenoble (1982-1983).

instigado a desenhar um objeto sólido, uma lata de refrigerante, por exemplo, nem a compará-la com uma figura geométrica semelhante – o cilindro, estando fechado às copias na folha de papel, de desenhos realizados pelo adulto.

Assim nos conteúdos referentes ao desenho dos sólidos geométricos (cubo, paralelepípedo, esfera, cone, pirâmide, etc.), por exemplo, os professores parecem supor, quando o fazem, que os alunos dominam espontaneamente as diferenças entre os objetos planos e espaciais, assim como as leis da perspectiva, sendo esses conteúdos trabalhados, somente, nos cursos de formação técnica profissional de ensino médio ou superior, pois são os utensílios mínimos necessários ao trabalho desses profissionais: um torneiro mecânico precisa conhecer o funcionamento e a representação gráfica de uma torneira.

Porém, nossos estudos, baseados na teoria de Piaget (1995, p. 272) e seus colaboradores, mostraram um outro fato, “o espaço constitui assim, de saída, um ponto de junção entre as propriedades do objeto e as operações do sujeito”, o conhecimento do espaço e da geometria requer uma construção que versa sobre a experiência lógico-matemática – as *operações do sujeito* e pela experiência física – as *propriedades do objeto*. Isso implica, necessariamente, o aluno ter que realizar experiências com os objetos no espaço.

A experiência física está ligada diretamente aos objetos e leva ao conhecimento que é derivado dos próprios objetos, saber que eles são redondos, rolam no chão, possuem pontas (vértices), que ocorre por abstrações simples na qual o sujeito abstrai dos objetos as suas características. A experiência lógico-matemática ocorre pela experiência derivada das ações do sujeito em relação aos objetos e não dos objetos. Quando o sujeito descobre que ir e vir pelo mesmo caminho tem a mesma distância, ele atribui significado às suas ações e dela tira proveito de uma informação que não está nem no ir nem no vir, mas nas conclusões que ele tira das suas próprias ações sobre o espaço.

Nosso trabalho não teve como objetivo dar diretrizes sobre o ensino do espaço e sobre a geometria, mas chamar à atenção sobre a sua singularidade. Para o trabalho educacional com a geometria e o espaço, não é suficiente ao professor conhecer a geometria euclidiana e projetiva – conteúdo a ser trabalhado – nem só conhecer como é o desenvolvimento cognitivo dos alunos – psicologia da aprendizagem e do desenvolvimento. É preciso que os educadores conheçam o desenvolvimento cognitivo

dos seus alunos e os conhecimentos da ciência geométrica e espacial, a psicogênese e a sociogênese de um conhecimento.

Na obra *Psicogênese e história das ciências*, Piaget e Garcia (1987) fizeram tal acompanhamento, como ocorre a construção histórica da geometria e do espaço e a construção do conhecimento da criança, bem como as fases por que esses conhecimentos passam.

Não basta para os professores conhecerem um rol de ações a serem realizadas pelos alunos como: utilizar, descrever, representar, observar, etc. é preciso considerar as representações que esses alunos têm sobre o que se quer que eles aprendam, que hipóteses eles têm dos conhecimentos em jogo. É somente a partir do que eles conhecem que poderemos saber que desafios são necessários para transformarmos o seu conhecimento. Somente assim poderemos transformá-los em pessoas críticas e não simplesmente em pessoas que receberam e armazenaram informações.

No rol de conteúdos para o segundo ciclo (NOVA ESCOLA, p. 56, vol I) consta:

- **Utilizar** malhas quadriculadas para representar a posição de uma pessoa ou objeto.
- **Descrever, interpretar e representar** a movimentação de uma pessoa ou objeto no espaço e construir itinerários.
- **Representar** o espaço por meio de maquetes.
- **Indicar** semelhanças e diferenças existentes entre os corpos, como a esfera e o cilindro.
- **Reconhecer** semelhanças e diferenças entre poliedros, como prismas e pirâmides, e identificar elementos de faces, vértices e arestas.
- **Analisar** as faces, identificar simetrias, desmontar e montar figuras tridimensionais.
- **Observar** semelhanças e diferenças entre polígonos, usando critérios como número de lados, número de ângulos e eixos de simetria.

Se tomarmos um conteúdo: *Utilizar malhas quadriculadas para representar a posição de uma pessoa ou objeto*, não basta o professor apresentar a lousa dividida em quadrantes, ou entregar um papel quadriculado com a representação de nomes de ruas ou pontos referenciais. Será preciso desenvolver todo um trabalho anterior sobre o que o sujeito sabe sobre o espaço a ser representado. Não poderemos excluir do processo de “descoberta” a presença do seu ator principal – o aluno que sabe ir e vir da escola para casa, sabe se deslocar no espaço, se o espaço é como afirma Piaget (1997, p. 75) *a coordenação dos deslocamentos (= movimentos independentes das velocidades)*, ele sabe coordenar seus deslocamentos o que falta é fazer com que ele “tome consciência”

dos seus conhecimentos práticos e transforme-os em conhecimentos organizados dentro de estruturas cognitivas.

Ao término deste estudo, e preparo-me para o início de uma nova fase de pesquisas – a procura de formas de viabilizar o ensino da geometria e do espaço, mas esse é um novo projeto, e tudo terá início novamente...

REFERÊNCIAS



REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, R. D. *Do desenho ao mapa: iniciação cartográfica na escola*. São Paulo: Contexto, 2000.
- ALMEIDA, R. D.; PASSINI, B. *O espaço geográfico escolar e representação*. São Paulo: Contexto, 1998.
- ARAÚJO, M. A. S. Por que ensinar Geometria nas séries iniciais do 1º Grau? *A educação matemática em revista*, v.2, n.2, p.12-16, 1994.
- BAILLY, AL. ROQUES, H. *Introduction à la géographie humaine*. Paris: Masson, 1982.
- BATISTA, L. E. O ensino de matemática no Brasil, uma perspectiva histórica. *Colônias e Letras*, n. 11, Jan-Jun, 1991.
- BATTRO, A. M. *O pensamento de Jean Piaget*. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1976.
- BECKER, F. *Educação e construção do conhecimento*. Porto Alegre: ARTMED, 2001.
- _____. (coord.) *Aprendizagem e conhecimento escolar*. Pelotas: EDUCAT, 2002a.
- _____. (coord.) *Processos simbólicos de aprendizagem*. Porto Alegre: EDUCAT, 2002b.
- BERGAMINI, D. *de matemática*. Rio de Janeiro: José Olympio, 1969.
- BORGES, V. P. *O que é história*. São Paulo: Brasiliense, 1996.
- BERTHELOT R., SALIN M. H. L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans le premier degré. Thèse d'Université, Paris em 1.438 L 1992.
- BERTHELOT R., SALIN, M. H. L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Genève* N. n. 53, p. 37-56, 1994.
- BERTHELOT, R.; SALIN, M. H. L'enseignement de l'espace et de la géométrie à l'école primaire. *Genève* N. n. 53, p. 37-59, 2005.
- BLANCHET, R. Ensinar a geometria: porquê? *Repères*, no 1, p. 92-102, 1993.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S.-K. *Investigações qualitativas em educação*. Porto: Porto Editora, 1994.
- BOYER, K. *História da matemática*. São Paulo: Ed. da UNESP, 1974.
- BRUNQUIER, J.-C. *Geometria*. São Paulo: Ed. da UNESP, 1992.

REFERÊNCIAS

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, R. D. *Do desenho ao mapa: iniciação cartográfica na escola*. São Paulo: Contexto, 2001.
- ALMEIDA, R. D.; PASSINI, E. *O espaço geográfico ensino e representação*. São Paulo: Contexto, 1998.
- ARAUJO, M. A.S. Porque ensinar Geometria nas séries iniciais de 1º Grau. *A educação matemática em revista*, v.2, n.3, p.12-16, 1994.
- BAILLY, A.; BEGUIN, H. *Introduction à la géographie humaine*. Paris: Masson, 1982.
- BATISTA, J. B. O ensino de matemática no Brasil, numa perspectiva histórica. *Ciências e Letras*, n. 11, jan-jun, 1991.
- BATTRO, A. M. *O pensamento de Jean Piaget*. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1976.
- BECKER, F. *Educação e construção do conhecimento*. Porto Alegre: ARTMED, 2001.
- _____. (coord.) *Aprendizagem e conhecimento escolar*. Pelotas: EDUCAT, 2002a.
- _____. (coord.) *Função simbólica & aprendizagem*. Porto Alegre: EDUCAT, 2002b.
- BERGAMINI, D. *As matemáticas*. Rio de Janeiro: José Olympio, 1969.
- BORGES, V. P. *O que é história*. São Paulo: Brasiliense, 1996.
- BERTHELOT R., SALIN M. H. *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse d'Université, Bordeau 1, 438 f. 1992.
- BERTHELOT R.; SALIN, M. H. L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N*, n. 53, p. 39-56, 1994.
- BERTHELOT, R.; SALIN, M. H. L'enseignement de l'espace et de la géométrie à l'école primaire. *Grand N*, n.65, p.37-59, 2000.
- BKOUICHE, R. Enseigner la géométrie, pourquoi? *Réperes*, no 1, p. 92-102, 1990.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora, 1994.
- BOYER, K. *História da matemática*. São Paulo: Edgard Bücher/UNESP, 1974.
- BRINGUIER, J-C. *Conversando com Jean Piaget*. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1993.



- BROUSSEAU, G. Études des questions d'enseignement. Une exemple: la géométrie, *Séminaire de didactique des mathématiques et l'informatique*, LSDIMAG, Université J. Fourier, Grenoble 1982-1983, p. 183-266.
- CAMBI, F. *História da pedagogia*. São Paulo: UNESP, 1999.
- CAPRA, F. *O ponto de mutação*. São Paulo: Cultrix, 1999.
- CASTRO, A. D. *Piaget e a didática*. São Paulo: Saraiva, 1974.
- CHARNAY, R. et al. Propositions pour un texte d'accompagnements des programmes. *Grand N*, n.67, p.41-61, 2000.
- CHASSOT, A. *A ciência através dos tempos*. São Paulo: Moderna, 1994.
- CHÂTEAU, J. *Os grandes pedagogistas*. São Paulo: Nacional, 1978.
- CHAUÍ, M. *Convite à filosofia*. São Paulo: Ática, 1995.
- CLAIRAUT, A. C. *Éléments de géométrie*. Paris: Gauthier-Villars, 1920.
- CLAVAL, P. *Epistémologie de la géographie*. Paris: Nathan, 2001.
- CORNÉLIO, R. C. Tese: professores evitam a geometria. *Jornal da Cidade*, Bauru, 22 de abr. 2001, p.8.
- DAVIDOFF, L. L. *Introdução à psicologia*. São Paulo: McGraw-Hill, 1983.
- D'AMBROSIO, U. *Educação matemática: da teoria à prática*. Campinas: Papirus, 1997.
- DOLLE, J-M. *Para compreender Jean Piaget*. Rio de Janeiro: Koogan, 1995.
- DROZ, R. Le point de vue du psychologue. *Math Ecole*, v.38, p.10-16, mai 1969.
- DROZ, R.; SENFT, W. Genèse des notions spatiales et enseignement élémentaire de la géométrie. *Math Ecole*, v.47, p.1-20, 1971.
- DROZ, R.; RAHMY, M. *Lire Piaget*. Hayen: Mardaga, 1997.
- DUHARTCOURT, E-P. *J-J Rousseau. Émile (extraits)*. Paris: Librairie Larousse, [19__].
- EBY, F. *História da educação moderna*. Porto Alegre: Globo, 1976.
- EINSTEIN, A.; INFELD, L. *A evolução da física*. Rio de Janeiro: Guanabara, 1988.
- EVANS, R. *Construtores da psicologia*. São Paulo: Summus, 1979.
- EVES, H. *Geometria*. São Paulo: Atual, 1992.
- FAINGUELERNT, E. K. *Educação matemática. Representação e construção em geometria*. Porto Alegre: ArtMed, 1999.



FERREIRA, A. B. H. *Dicionário Aurélio básico da língua portuguesa*. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1995.

FERREIRA, M. C. *A ciência brasileira*. São Paulo: EDICON, 1992.

FLAVELL, J. H. *A psicologia do desenvolvimento de Jean Piaget*. São Paulo: Livraria Pioneira Editora, 1988.

FRAISSE, P.; PIAGET, J. *Lenguaje, comunicación y decisión*. Buenos Aires: Paidós, 1974.

FURTH, H. G. *Piaget e o conhecimento*. Rio de Janeiro: Forense, 1974.

GADOTTI, M. *História das idéias pedagógicas*. São Paulo: Ática, 1993.

GERDES, P. *Sobre o despertar do pensamento geométrico*. Curitiba: UFPR, 1992.

GLEISER, M. *A dança do universo*. Dos mitos da criação ao Big-Bang. São Paulo: Cia.das Letras, 1997.

GOMBRICH, E. H. *A história da arte*. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.

GOODNOW, J. *Desenho de crianças*. Lisboa: Salamandra, [1990?]

GOLDMAN, L. *Epistemologia e filosofia política*. Lisboa: Editorial Provençal, 1978.

HARPER, B. et al. *Cuidado, escola!* São Paulo: Brasiliense, 1980.

HOUEMENT, H.; KUZNIAK, A. Formation de maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique de mathématiques*. v.20, n. 1, p.89-106, 2000.

INHELDER, B., et al. *Aprendizagem e estruturas do conhecimento*. São Paulo: Saraiva, 1977.

JANET, P. *Les debuts de l'intelligence*. Paris: Flammarion, 1935.

_____. *L'intelligence avant le langage*. Paris: Flammarion, 1936.

KAMII, C.; DEVRIES, R. *O conhecimento físico na educação pré-escolar*. Implicações da teoria de Piaget. Porto Alegre: Artes Médicas, 1991.

_____. *Piaget para a educação pré-escolar*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992.

KANT, I. *Crítica da razão pura*. São Paulo: Nova Cultural, 1987.

KELLER, O. La construction des savoirs mathématiques. *Actes de l'Université d'Été 95: Épistémologie et Histoire des Mathématiques* (Besançon).

KOBAYASHI, M. C. M. *A construção das relações espaço-geométricas em crianças de educação infantil: um estudo de epistemologia genética*. 1998. 216 f. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho – UNESP – Marília. 1998.

KOBAYASHI, M. C. M. *A construção da geometria pela criança*. Bauru: EDUSC, 2001.



- KOYRÉ, A. *Do mundo fechado ao universo infinito*. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1979.
- LALANDE, A. *Vocabulário técnico crítico da filosofia*. São Paulo: Martins Fontes, 1996.
- LABORDE, C. L'enseignement de la géométrie em tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.9, no. 3, p.337-364, 1988.
- LARROYO, F. *História geral da pedagogia*. São Paulo: Mestre Jou, 1982.
- LEITE, L. B. (Org.) *Piaget e a escola de Genebra*. São Paulo: Cortez, 1995.
- LOCKE, J. *Ensaio acerca do entendimento humano*. São Paulo: Nova Cultural, 1997.
- LOPEZ, R. E. *Introdução à psicologia evolutiva de Jean Piaget*. São Paulo: Cultrix, [198_].
- LOWENFELD, V.; BRITTAIN, W. L. *Desenvolvimento da capacidade criadora*. São Paulo: Mestre Jou, 1970.
- LUQUET, G. H. *O desenho infantil*. Porto: Civilização, 1979.
- MACEDO, L. *Ensaaios construtivistas*. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1994.
- MARCHAL, M. *Histoire de la géométrie*. Paris: PUF, [19_]
- MARROU, H-I. *História da educação na antigüidade*. São Paulo: Herder, 1966.
- MARTINS, R. A. *O universo: teorias sobre sua origem e evolução*. São Paulo: Moderna, 1996.
- MATUI, J. *Construtivismo: teoria construtivista sócio-histórica aplicada ao ensino*. São Paulo: Moderna, 1996.
- MERCIER, A.; TONNELE, J. Autour de l'enseignement de la géométrie au college. *Petit X*, no. 29, p.15-56, 1992.
- MEREDIEU, F. *O desenho infantil*. São Paulo: Cultrix, 1999.
- MIGUEL, A. M. et al. *Representações do espaço*. Campinas: Editores Associados, 1996.
- MIORIM, M. A. *Introdução à história da educação matemática*. São Paulo: Atual, 1998.
- _____. *O ensino de matemática: evolução e modernização*. 1995. 218 f. Tese de Doutorado (Educação) UNICAMP, Campinas.
- MONROE, P. *História da educação*. São Paulo: Cia. Nacional, 1972.
- MONTANGERO, J.; MAURICE-NAVILLE, D. *Piaget ou a inteligência em evolução*. Porto Alegre: ArtMed, 1998.



NOVA enciclopédia ilustrada da folha. São Paulo: Folha de São Paulo, 1996.

NOVA ESCOLA. *Parâmetros Curriculares Nacionais*, v.1, 2001. pg. Edição Especial.

NOVA ESCOLA. *Parâmetros Curriculares Nacionais*, v.2, 2001. pg. Edição especial.

PARRA, C. et al. *Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

PAVANELLO, R. M. *O abandono do ensino de geometria: uma visão histórica*. 1989. 196 f. Dissertação (Mestrado em Educação) UNICAMP, Campinas.

_____. Geometria: atuação de professores e aprendizagem nas séries iniciais. In: *I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática*. Anais. Curitiba: UTP, 2002.

PIAGET, J. *Introduction a l'épistémologie génétique*. Paris: PUF, 1950.

_____. *A representação do mundo na criança*. Rio de Janeiro: Record Cultural, [19__].

_____. *O raciocínio na criança*. Rio de Janeiro: Record, 1967

_____. *A epistemologia genética*. Petrópolis: Vozes, 1971.

_____. *Psicologia da inteligência*. Rio de Janeiro: Fundo de Cultura, 1972.

_____. *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant*. Paris: PUF, 1972.

_____. *O nascimento da inteligência na criança*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1975a.

_____. *A construção do real na criança*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1975b.

_____. *Problemas de psicologia genética*. São Paulo: Abril Cultural, 1983. (Coleção Os pensadores).

_____. *A formação do símbolo na criança. Imitação, jogo, e sonho, imagem e representação*. Rio de Janeiro: LTC, 1990a.

_____. *Epistemologia genética*. São Paulo: Martins Fontes, 1990.

_____. Comentários sobre as observações críticas de Vygotsky acerca de: linguagem e pensamento da criança. *Didática*, São Paulo, v.26/27, p.159-171, 1990/1991. (Trad. Odair Sass e Sonia Corrêa Marques).

_____. *A linguagem e o pensamento da criança*. São Paulo: Martins Fontes, 1993.

_____. *Abstração reflexionante. Relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais*. Porto Alegre, 1995.

_____. *Seis estudos de psicologia*. Rio de Janeiro: Forense, 1997.

PIAGET, J; INHELDER, B *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Paris: PUF, 1948.

_____. *A imagem mental na criança*. Porto: Livraria Civilização, 1977.

- _____. *A gênese do número na criança*. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.
- _____. *As quantidades físicas na criança*. Rio de Janeiro: Zahar, 1983.
- _____. *A representação do espaço na criança*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.
- _____. *A psicologia da criança*. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 1994.
- PIAGET, J.; GARCIA, R. *Las explicaciones causales*. Barcelona: Barral Editores, 1973.
- _____. *Psicogênese e história das ciências*. Lisboa: Dom Quixote, 1987.
- PIAGET, J. et al. *La epistemologia del espacio*. Buenos Aires: El ateneo, 1971.
- PIAGET, J., INHELDER, B.; SZEMINSKA, A. *La géométrie spontanée de l'enfant*. Paris: PUF, 1973.
- POINCARÉ, H. *O valor da ciência*. Rio de Janeiro: Contra Ponto, 1995.
- PONCE, A. *Educação e luta de classes*. São Paulo: Cortez, 1982.
- PRÉ-SOCRÁTICOS. *Os pré-socráticos*. São Paulo: Nova Cultural, 1996. (Coleção Pensadores).
- PROFESSORES não entendem parâmetros de ensino do MEC. *Folha de São Paulo*, 1 nov. 1999. Cotidiano, p.4.
- REYNES, F. Géométrie ou traison des dessines? *Petit X*, n 26, p. 73-75, 1990-1991.
- RIBOULET, L. *História da pedagogia*. São Paulo: Francisco Alves, 1951.
- ROBERTS, J.M. *O livro de ouro da história do mundo*. Rio de Janeiro: Ediouro, 2001.
- ROLLER, S. S. L'enseignement moderne de la mathématique. *Math-école*, n. 173/août, p.20-34, 1996.
- ROUSSEAU, J-J. *Emílio o da educação*. São Paulo: Difel, 1968.
- SAUSSURE, F. *Curso de lingüística geral*. São Paulo: Cultrix, 2000.
- SECRETARIA CURRICULARES NACIONAIS. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Rio de Janeiro: DP&A, 2000.
- SEVCENKO, N. *O renascimento*. São Paulo: Atual, 1994.
- SNEEDEN, R. *Espaço*. São Paulo: Moderna, 1996.
- _____. *Tempo*. São Paulo: Moderna, 1997.
- VERGNAUD, G. *L' enfant, la mathématique et la réalite*. Berne: Peter Lang, 1994.
- WADSWORTH, B.J. *Inteligência e afetividade da criança: na teoria de Jean Piaget*. São Paulo: Pioneira, 1997.



WERTHEIM, M. Uma história do espaço. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.



