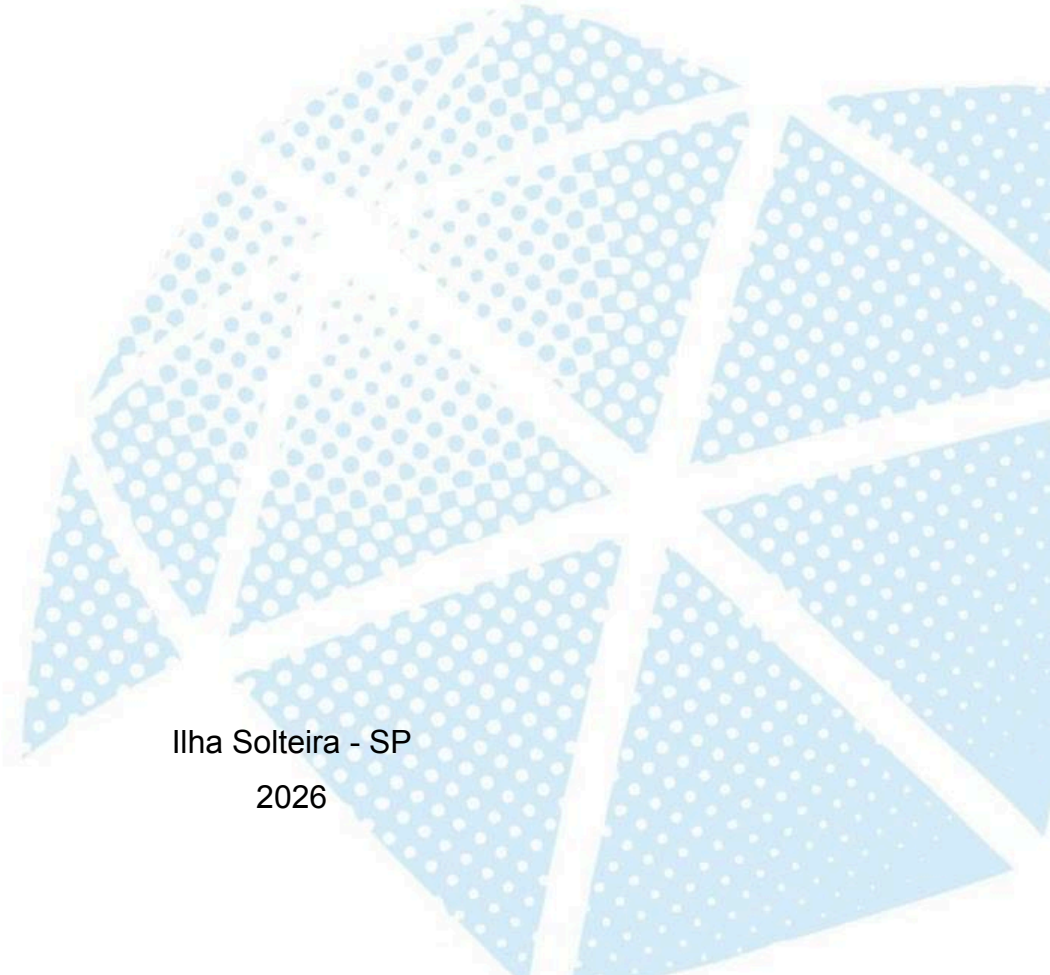
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

GABRIEL APARECIDO ZERBINATTI

DESENVOLVIMENTO DE ESTRUTURA DE DADOS OTIMIZADA PARA REPRESENTAÇÃO DE GRAFOS ORIENTADOS APLICADOS AO CÁLCULO DE FLUXO DE POTÊNCIA EM REDES DE DISTRIBUIÇÃO RADIAIS



Ilha Solteira - SP
2026

PROGRAMA DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

GABRIEL APARECIDO ZERBINATTI

DESENVOLVIMENTO DE ESTRUTURA DE DADOS OTIMIZADA PARA REPRESENTAÇÃO DE GRAFOS ORIENTADOS APLICADOS AO CÁLCULO DE FLUXO DE POTÊNCIA EM REDES DE DISTRIBUIÇÃO RADIAIS

Trabalho de Graduação apresentado à Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, para obtenção do título de Grau Acadêmico Bacharel em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Jonatas Boas Leite

Ilha Solteira - SP

2026

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

Z58d

Zerbinatti, Gabriel Aparecido.
Desenvolvimento de estrutura de dados otimizada para representação de grafos orientados aplicados ao cálculo de fluxo de potência em redes de distribuição radiais / Gabriel Aparecido Zerbinatti. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2026
84 f. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Elétrica) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia, Ilha Solteira, 2026

Orientador: Jonatas Boas Leite

Inclui bibliografia

1. Fluxo de potência. 2. Redes de distribuição. 3. Grafos orientados. 4. Varredura reversa e direta. 5. Estrutura de dados. 6. Algoritmos.

Sandra Montibeller - CRB-8/060/2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de Ilha Solteira

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE GRADUAÇÃO

Aos vinte e seis dias do mês de junho do ano de dois mil e vinte e seis, o discente ***Gabriel Aparecido Zerbinatti,*** matriculado sob o nº 211052043, tendo como banca examinadora o seu orientador, *o Prof. Dr. Jonatas Boas Leite, o Dr. Lucas do Carmo Yamaguti e o Doutorando Gabriel Victor de Oliveira Blanco,* apresentou o Trabalho de Graduação intitulado **"Desenvolvimento de estrutura de dados otimizada para representação de grafos orientados aplicada ao cálculo de fluxo de potência em redes de distribuição radiais"**, obtendo a nota 10,0 (DEZ) e conceito APROVADO.

Prof. Dr. Jonatas Boas Leite
- Orientador-

Gabriel Aparecido Zerbinatti
- Discente-

Dr. Lucas do Carmo Yamaguti
- Membro da Banca -

Doutorando Gabriel Victor de Oliveira Blanco
- Membro da Banca -

Faculdade de Engenharia – Departamento de Engenharia Elétrica
Avenida Professor José Carlos Rossi, 1370 - CEP 15.385-000, Ilha Solteira - SP - Brasil
Tel (18) 37431150 - Fax (18) 3742-2735 - www.feis.unesp.br

Dedico este trabalho ao meu irmão,
para que nunca desista de seus sonhos.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, ao meu irmão e à minha família, pelo apoio, incentivo e compreensão durante os momentos de dedicação exigidos pela minha formação e pela realização deste trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jonatas Boas Leite, registro meu especial agradecimento pela orientação, compreensão, disponibilidade e confiança depositada em meu trabalho. Sua parceria e suas contribuições foram fundamentais para o desenvolvimento desta pesquisa e para minha formação acadêmica.

Aos professores do curso de Engenharia Elétrica, que ao longo destes anos compartilharam conhecimentos, experiências e valores que contribuíram significativamente para minha formação profissional.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização deste trabalho e para minha formação pessoal e profissional.

“A perfeição é alcançada não quando não há mais nada a acrescentar, mas quando não há mais nada a retirar.”

Antoine de Saint-Exupéry

1900–1944

RESUMO

Este trabalho propõe o desenvolvimento de uma estrutura de dados otimizada para representação de grafos orientados aplicados ao algoritmo de varredura reversa e direta, com formulação por soma de correntes, para o cálculo de fluxo de potência trifásico em redes radiais desbalanceadas de distribuição de energia elétrica. O cálculo fornece as injeções de potência e as tensões nos barramentos, assim como as correntes e os fluxos de potência nos ramos da rede, em regime permanente, considerando a topologia da rede e os níveis de carga, constituindo uma ferramenta fundamental para análise, operação e planejamento das redes. Entretanto, o algoritmo deve percorrer a rede, representada por grafos orientados, por meio de múltiplas varreduras sobre a topologia durante o processo iterativo para convergir à solução. Assim, o seu desempenho depende da estrutura utilizada para a representação. A estrutura proposta fornece uma representação que reduz o tempo médio de execução em comparação com a representação por lista de adjacências, devido ao acesso sequencial aos elementos ordenados na memória, ao percorrer a rede. As duas representações foram implementadas na linguagem de programação *C++* e avaliadas por testes realizados no sistema operacional *Linux*, nos modos de energia balanceado e desempenho, para redes de 25 e 806 barramentos. Observou-se uma redução de 18,66% para 25 barramentos no modo balanceado, 4,39% para 25 barramentos no modo desempenho, 9,19% para 806 barramentos no modo balanceado e 10,68% para 806 barramentos no modo desempenho. Conclui-se, portanto, que a estrutura proposta é uma alternativa eficiente à lista de adjacências para a representação da rede de distribuição no método de varredura reversa e direta.

Palavras-chave: fluxo de potência; redes de distribuição; grafos orientados; varredura reversa e direta; sistemas trifásicos; algoritmos; estruturas de dados; *C++*; *Linux*.

ABSTRACT

This work proposes the development of an optimized data structure for representing directed graphs applied to the backward/forward sweep algorithm, using a current summation formulation, for three-phase power flow calculation in unbalanced radial electric power distribution networks. The calculation provides the power injections and the voltage magnitudes and angles at the buses, as well as the currents and power flows in the network branches, in steady state, for specific operating conditions, considering the network topology and load levels, thereby constituting a fundamental tool for network analysis, operation, and planning. However, the algorithm must traverse the network, represented by directed graphs, through multiple sweeps over the topology during the iterative process to converge to the solution. Thus, its performance depends on the data structure used for the representation. The proposed structure provides a representation method that reduces the average execution time compared to the adjacency list representation, due to the sequential access to the ordered elements in memory when traversing the network. Both representations were implemented in C++ and evaluated through tests performed in a Linux environment, in balanced and performance power modes, for 25- and 806-bus networks. A reduction of 18.66% was observed for 25 buses in balanced mode, 4.39% for 25 buses in performance mode, 9.19% for 806 buses in balanced mode, and 10.68% for 806 buses in performance mode. It is concluded, therefore, that the proposed data structure is an efficient alternative to the adjacency list for representing the distribution network in the backward/forward sweep method.

Keywords: power flow; distribution networks; directed graphs; backward/forward sweep; three-phase systems; algorithms; data structures; C++; Linux.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Estrutura básica do sistema elétrico de potência tradicional 21

Figura 2 – Sentido convencional do fluxo de potência no sistema elétrico de potência tradicional 23

Figura 3 – Identificação dos barramentos imediatamente a montante e a jusante 24

Figura 4 – Potências no barramento k: (a) gerada e consumida e (b) líquida 25

Figura 5 – Representação da corrente injetada em um barramento 27

Figura 6 – Exemplo de partida plana em um sistema de distribuição 39

Figura 7 – Exemplo da representação da impedância trifásica nas linhas de uma rede de distribuição 40

Figura 8 – Exemplo de percurso na rede de distribuição: (a) varredura reversa e (b) varredura direta 44

Figura 9 – Representação de uma rede de distribuição por grafo orientado 48

Figura 10 – Exemplo da representação da rede de distribuição por lista de adjacências 49

Figura 11 – Diagrama de classes do modelo de dados para redes de distribuição usando lista de adjacência 50

Figura 12 – Pseudocódigo simplificado do algoritmo para o cálculo de fluxo de potência utilizando lista de adjacências 51

Figura 13 – Representação de uma rede de distribuição pelo método da contagem de filhos 54

Figura 14 – Pseudocódigo do algoritmo de busca do último elemento a jusante 55

Figura 15 – Pseudocódigo do algoritmo de busca do elemento pai 56

Figura 16 – Representação simplificada do conteúdo da pilha para a varredura reversa 58

Figura 17 – Pseudocódigo do algoritmo de varredura reversa 58

Figura 18 – Representação simplificada do conteúdo da pilha para a varredura reversa 60

Figura 19 – Pseudocódigo do algoritmo de varredura direta 60

Figura 20 – Diagrama de classes do modelo de dados para redes de distribuição usando o método da contagem de filhos 61

Figura 21 – Rede de distribuição de 25 barramentos utilizada no experimento 63

Figura 22 – Especificação do *hardware* utilizado para os experimentos 64

Figura 23 – Comparação da tensão na fase A por barramento - 25 barras 66

Figura 24 – Comparação do ângulo de tensão na fase A por barramento - 25 barras 66

Figura 25 – Comparação da corrente na fase A por ramo - 25 barras 67

Figura 26 – Comparação do ângulo da corrente na fase A por ramo - 25 barras 67

Figura 27 – Comparação da tensão na fase A por barramento - 806 barras 68

Figura 28 – Comparação do ângulo de tensão na fase A por barramento - 806 barras 68

Figura 29 – Comparação da corrente na fase A por ramo - 806 barras 69

Figura 30 – Comparação do ângulo da corrente na fase A por ramo - 806 barras 69

Figura 31 – Comparação do tempo de execução para 25 barramentos - Modo balanceado e de desempenho 71

Figura 32 – Comparação do tempo de execução para 806 barramentos - Modo balanceado e de desempenho 71

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tempo médio de execução do método da lista de adjacências - Método de referência 72

Tabela 2 – Tempo médio de execução do método da contagem de filhos 72

Tabela 3 – Comparação do tempo de execução da contagem de filhos com o método de referência 72

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **16**
1.1 OBJETIVOS 17
1.1.1 Objetivos Específicos **18**
1.2 ESTRUTURA DO TEXTO 18
2 REVISÃO DE LITERATURA **20**
2.1 O SISTEMA ELÉTRICO DE POTÊNCIA 20
2.2 ANÁLISE DE FLUXO DE POTÊNCIA 22
2.3 ANÁLISE DE FLUXO DE POTÊNCIA EM SISTEMAS DE DISTRIBUIÇÃO 23
2.4 CLASSIFICAÇÃO DOS TIPOS DE BARRAMENTOS 25
2.5 MÉTODOS BASEADOS NA MATRIZ DE ADMITÂNCIA NODAL 26
2.5.1 Construção da Matriz de Admitâncias **26**
2.5.2 Método de Gauss-Seidel **29**
2.5.3 Método de Newton-Raphson **31**
2.5.4 Método Desacoplado Rápido **36**
2.6 MÉTODO DA VARREDURA DIRETA E REVERSA 38
2.6.1 Formulação por Soma de Potência **41**
2.6.2 Formulação por Soma de Correntes **43**
2.6.2.1 Cálculo das Correntes Nodais 43
2.6.2.2 Varredura Reversa (*Backward Sweep*) 44
2.6.2.3 Varredura Direta (*Forward Swee*p) 45
2.6.2.4 Critério de Convergência 45
3 METODOLOGIA **47**
3.1 REPRESENTAÇÃO DA REDE POR GRAFOS ORIENTADOS 47
3.2 MODELAGEM POR LISTA DE ADJACÊNCIA 49
3.3 MODELAGEM POR CONTAGEM DE FILHOS 52
3.3.1 Algoritmo de Busca do Último Elemento a Jusante **55**
3.3.2 Algoritmo de Busca do Elemento Imediatamente a Montante **56**
3.3.3 Algoritmo de Varredura Reversa **57**
3.3.4 Algoritmo de Varredura Direta **59**
3.3.5 Modelagem da Rede **61**
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES **63**
5 CONCLUSÕES **74**
REFERÊNCIAS **75**
APÊNDICE A - DERIVADAS PARCIAIS DA MATRIZ JACOBIANA **78**
APÊNDICE B - RESULTADO DO CÁLCULO DO FLUXO DE POTÊNCIA PARA A REDE DE 25 BARRAMENTOS **79**
B.1 MÉTODO DA LISTA DE ADJACÊNCIAS **79**
B.2 MÉTODO DA CONTAGEM DE FILHOS **81**
B.3 ERRO ABSOLUTO ENTRE MÉTODOS **83**

1 INTRODUÇÃO

Os sistemas elétricos de potência tradicionais são compostos pelas etapas de geração, transmissão e distribuição. Com exceção da geração distribuída, a maior parte da energia elétrica gerada nos centros de geração é transmitida por longas distâncias até os centros consumidores por meio dos sistemas de transmissão e distribuição (MOMOH, 2017), formando um complexo sistema interligado de grande importância para a sociedade moderna.

Nesse contexto, os sistemas de distribuição de energia elétrica apresentam elevada complexidade operacional devido à natureza diversificada das cargas conectadas, à estrutura predominantemente radial da rede, às variações temporais da demanda e à crescente inserção de cargas não lineares e geração distribuída. Além disso, variações nos níveis de tensão, desequilíbrios entre fases, perdas elétricas do processo e alterações dinâmicas no perfil de consumo dificultam a análise e a operação desses sistemas (MOHAN, 2016), exigindo modelos matemáticos e métodos computacionais robustos para sua representação.

A confiabilidade e a qualidade do fornecimento de energia elétrica nos sistemas de distribuição são perceptíveis para os consumidores finais e os custos de sua operação e manutenção são elevados para as concessionárias (MOMOH, 2017). Dessa forma, uma concessionária moderna deve fornecer estratégias adequadas de planejamento, operação e manutenção, a fim de minimizar o tempo de interrupção do fornecimento e garantir a estabilidade do sistema elétrico.

A análise do fluxo de potência constitui uma das principais ferramentas utilizadas na análise de sistemas elétricos de potência, tornando necessária a execução repetitiva de cálculos do fluxo de potência para o planejamento, operação e automação da distribuição (MOMOH, 2017). Dessa forma, ferramentas computacionais modernas devem implementar algoritmos eficientes capazes de reduzir o custo computacional do processo, a fim de diminuir o tempo de execução e a utilização de recursos disponíveis.

Os métodos para a solução do fluxo de potência em redes de distribuição são tradicionalmente classificados em duas categorias principais: métodos baseados na matriz de impedância nodal (CHEN et al., 1991) e métodos de varredura reversa e direta (*Backward/Forward Sweep*), os quais podem apresentar formulação baseada

em soma de correntes (CHENG; SHIRMOHAMMADI, 1995) ou em soma de potências (FALCÃO, 2003).

Além disso, a modelagem topológica dos sistemas elétricos pode ser realizada por meio da teoria dos grafos, em que os barramentos do sistema correspondem aos vértices do grafo e os ramos às arestas, permitindo a análise computacional da topologia da rede (DEO, 2017). Essa representação possibilita a estruturação dos dados utilizados nos algoritmos de varredura.

Devido à estrutura predominantemente radial das redes de distribuição, as relações elétricas entre barramentos e ramos podem ser organizadas hierarquicamente, tendo origem na subestação e se ramificando conforme a distribuição das cargas ao longo da rede. Assim, o sistema pode ser representado como um grafo orientado, no qual a orientação dos ramos é definida de acordo com o sentido do fluxo de potência, convencionalmente estabelecido da subestação para as cargas.

A estrutura de dados utilizada para a representação computacional de um grafo orientado influencia diretamente a eficiência dos algoritmos de varredura empregados na análise de sistemas de distribuição (GIRARDI; LEITE, 2021). Pois devem percorrer a rede por meio de múltiplas varreduras sobre a topologia durante o processo iterativo para convergir à solução.

Portanto, a definição de estruturas de dados adequadas para o armazenamento das relações topológicas entre barramentos e ramos de uma rede é fundamental para otimizar o processamento das etapas de varredura, contribuindo para a redução do custo computacional e aumentando a eficiência na solução do fluxo de potência.

1.1 OBJETIVOS

Assim, este trabalho propõe o desenvolvimento de uma estrutura de dados otimizada para a representação de grafos orientados aplicados ao algoritmo de varredura reversa e direta, com formulação por soma de correntes, para o cálculo de fluxo de potência trifásico em redes radiais desbalanceadas de distribuição de energia elétrica, visando à redução do tempo médio de execução.

1.1.1 Objetivos Específicos

- Realizar uma revisão bibliográfica dos métodos de cálculo de fluxo de potência baseados na matriz de admitância nodal e no algoritmo de varredura reversa e direta, contemplando as formulações por soma de correntes e por soma de potências;
- Estudar a modelagem de redes de distribuição por meio de grafos orientados e a estruturas de dados empregadas na representação de sua topologia elétrica por lista de adjacências;
- Desenvolver uma estrutura de dados otimizada para o armazenamento e o processamento da topologia da rede, explorando as características radiais dos sistemas de distribuição;
- Implementar o algoritmo de varredura reversa e direta, na formulação por soma de correntes, para o cálculo do fluxo de potência trifásico em redes de distribuição desbalanceadas utilizando a estrutura de dados proposta;
- Avaliar o desempenho computacional da metodologia desenvolvida em redes de distribuição de diferentes dimensões, comparando-a a uma implementação baseada em lista de adjacências.

1.2 ESTRUTURA DO TEXTO

Este trabalho está organizado em cinco capítulos, além desta introdução. O Capítulo 2 apresenta a revisão de literatura, abordando os fundamentos da análise de fluxo de potência em sistemas de distribuição, os métodos baseados na admitância nodal e o método de varredura reversa e direta, incluindo suas formulações por soma de potências e por soma de correntes.

O Capítulo 3 descreve a metodologia adotada no desenvolvimento do trabalho, apresentando a implementação baseada em lista de adjacências e a estrutura de dados proposta para a representação otimizada de grafos orientados em redes de distribuição. Também são descritos os procedimentos de implementação do algoritmo de fluxo de potência trifásico com formulação por soma de correntes utilizando a estrutura desenvolvida.

O Capítulo 4 apresenta os resultados obtidos com a metodologia proposta, incluindo a análise do desempenho computacional e de convergência da estrutura desenvolvida e sua comparação com a implementação baseada em lista de adjacências.

Por fim, o Capítulo 5 apresenta as conclusões do trabalho, destacando as principais contribuições alcançadas, as limitações identificadas e as perspectivas para trabalhos futuros.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Este capítulo apresenta a fundamentação teórica necessária para o desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente, o sistema elétrico de potência e seus elementos são apresentados, bem como o cálculo de fluxo de potência como ferramenta de análise do sistema elétrico.

Em seguida, são discutidas as principais características dos sistemas de distribuição de energia elétrica e suas implicações na análise de fluxo de potência. Então, apresenta-se inicialmente os métodos baseados na admitância nodal, amplamente utilizado na solução de problemas de fluxo de potência em sistemas elétricos, com o objetivo de evidenciar suas limitações quando aplicado a sistemas de distribuição.

Por fim, apresenta-se o método de varredura reversa e direta, abordando as formulações por soma de potências e por soma de correntes, cuja aplicação em redes de distribuição radiais constitui a base metodológica da estrutura proposta desenvolvida neste trabalho.

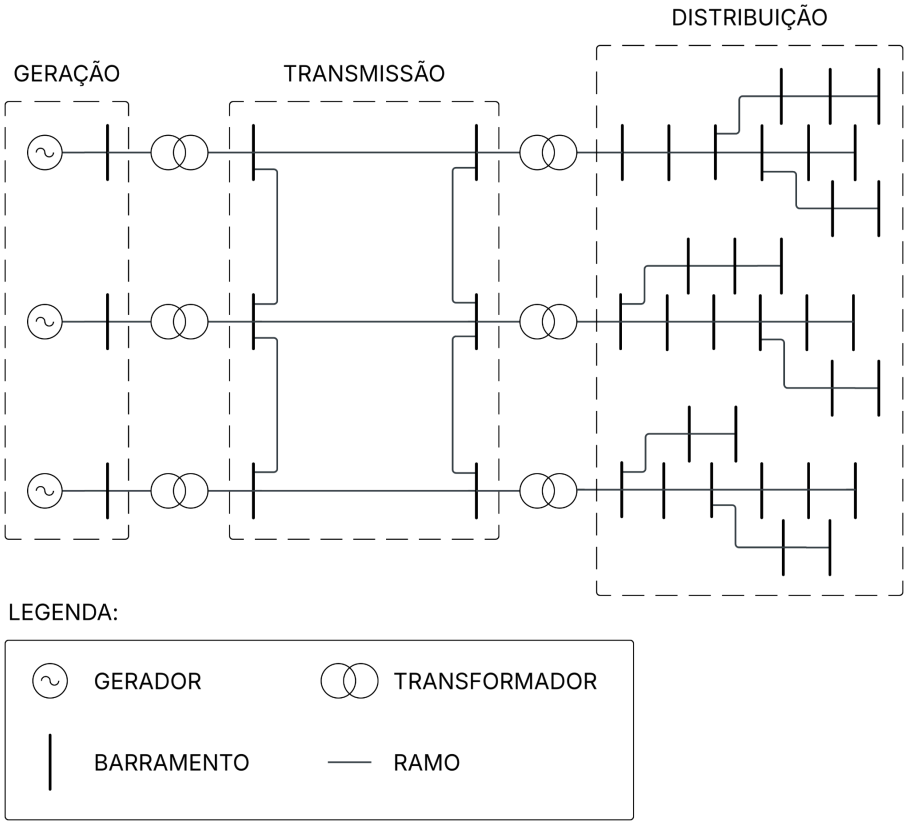
2.1 O SISTEMA ELÉTRICO DE POTÊNCIA

Os economistas modernos baseiam-se, frequentemente, no consumo *per capita* de energia elétrica e no índice de crescimento desse consumo ao analisarem o grau de desenvolvimento de um país, devido à relação direta com a produção industrial e o poder aquisitivo da população, em que o aumento da quantidade de energia tornou-se uma necessidade constante (FUCHS, 1977). Assim, é imprescindível a garantia de operação e da estabilidade dos sistemas elétricos de potência.

Os sistemas elétricos de potência tradicionais são compostos pelas etapas de geração, transmissão e distribuição (MOMOH, 2017). O transporte da energia elétrica pelas etapas diferencia-se pelas tensões empregadas e pela quantidade de energia transportada (FUCHS, 1977).

A energia elétrica gerada nos sistemas de geração é transportada pelos sistemas de transmissão e, posteriormente, distribuída aos consumidores pelos sistemas de distribuição (KAGAN, 2010). A figura 1 apresenta a estrutura básica do sistema elétrico de potência tradicional.

Figura 1 – Estrutura básica do sistema elétrico de potência tradicional



Fonte: Produção do próprio autor.

O transporte de energia elétrica pelos ramos é realizado por linhas aéreas ou cabos, subterrâneos ou submarinos, utilizados tanto nos sistemas de transmissão quanto nos sistemas de distribuição (FUCHS, 1977).

Com exceção da geração distribuída, a maior parte da energia elétrica gerada nos centros de geração é transmitida por longas distâncias até os centros consumidores por meio dos sistemas de transmissão e distribuição (MOMOH, 2017).

A tensão dos sistemas de geração, em geral 13,8 kV, é elevada nas subestações elevadoras por transformadores elevadores de tensão para os níveis utilizados nos sistemas de transmissão, usualmente 69 kV ou 138 kV (KAGAN, 2010).

Em seguida, nas subestações de distribuição, a tensão de transmissão é reduzida por transformadores abaixadores para os níveis utilizados na distribuição primária, geralmente 13,8 kV ou 34,5 kV. Posteriormente, nos transformadores de distribuição, a tensão é reduzida para os níveis da distribuição secundária, normalmente 127/220 V ou 220/380 V (KAGAN, 2010).

Em geral, os sistemas de transmissão apresentam estrutura de rede em malha, possuindo múltiplos ramos para o transporte de energia elétrica entre as unidades de geração e os consumidores, enquanto os sistemas de distribuição apresentam estrutura de rede radial, na qual há um único ramo entre a subestação e cada consumidor (KAGAN, 2010). Nota-se, portanto, uma diferença estrutural entre os dois sistemas.

2.2 ANÁLISE DE FLUXO DE POTÊNCIA

Para a operação e planejamento das redes de sistemas elétricos de potência, é importante conhecer a capacidade de transferência de potência e os níveis de fluxo de potência dos ramos, bem como os níveis de tensão nos barramentos, para o atendimento da demanda, em condições normais e de contingência (MOHAN, 2016).

A análise de fluxo de potência constitui uma das principais ferramentas utilizadas na análise de sistemas elétricos de potência (MOMOH, 2017). O cálculo de fluxo de potência fornece as tensões nos barramentos, as correntes e fluxos de potência nos ramos da rede, em regime permanente, considerando a topologia da rede e os níveis de carga (KAGAN, 2010).

Além disso, permite realizar o cálculo das perdas em termos de potência e energia, proporcionando uma condição de operação com melhor desempenho técnico e econômico (KAGAN, 2010).

A formulação das equações da rede do sistema elétrico de potência resulta em equações simultâneas complexas, expressas em termos das correntes nos barramentos. Quando as correntes injetadas nos barramentos são especificadas, esse conjunto de equações pode ser resolvido para determinar as tensões nos barramentos (SAADAT, 1999).

Entretanto, nos sistemas elétricos de potência são conhecidas as potências, e não as correntes, fazendo com que as equações resultantes, expressas em termos das potências, tornem-se não lineares e, portanto, devam ser resolvidas por técnicas iterativas (SAADAT, 1999). Essas equações são conhecidas como equações de fluxo de potência.

Dessa forma, o cálculo de fluxo de potência deve considerar a topologia da rede, as constantes elétricas de seus elementos, as potências absorvidas pelas

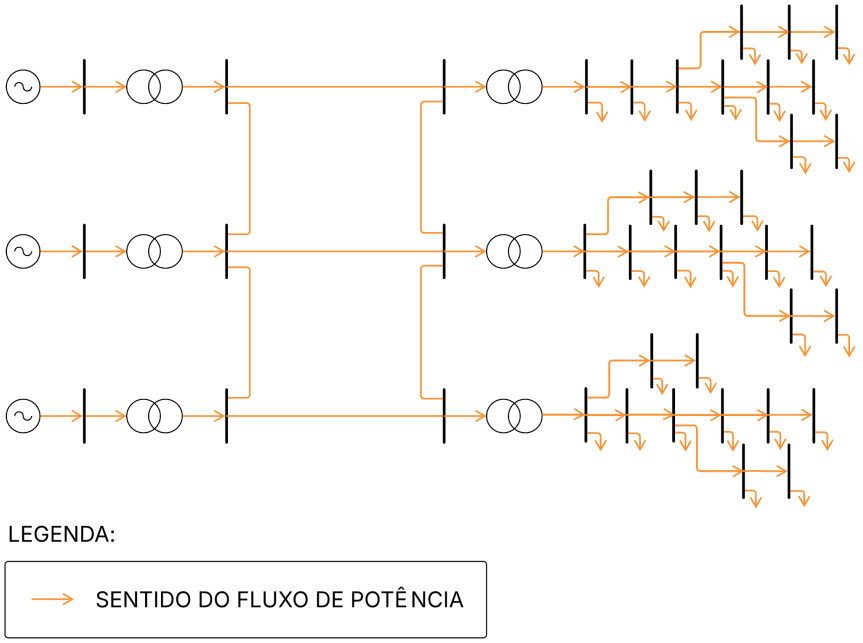
cargas, que representam a demanda das unidades consumidoras, podendo variar conforme a sua natureza, e as tensões dos geradores (KAGAN, 2010), o que aumenta a complexidade da análise.

2.3 ANÁLISE DE FLUXO DE POTÊNCIA EM SISTEMAS DE DISTRIBUIÇÃO

Os sistemas de distribuição são caracterizados pela existência de apenas um caminho para o fluxo de potência entre a fonte de suprimento, geralmente representada pela subestação de distribuição, e as cargas conectadas à rede (KERSTING, 2017).

Dessa forma, desconsiderando os casos de inserção de geração distribuída, assume-se o sentido convencional do fluxo de potência nos sistemas de distribuição, da subestação em direção às cargas, conforme apresentado na figura 2.

Figura 2 – Sentido convencional do fluxo de potência no sistema elétrico de potência tradicional



Fonte: Produção do próprio autor.

Devido ao elevado número de cargas monofásicas distribuídas de maneira não uniforme e às características construtivas das linhas de distribuição, principalmente determinadas pela disposição geométrica não simétrica dos

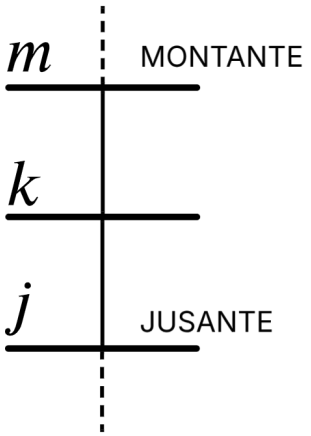
condutores em linhas aéreas e subterrâneas, os sistemas de distribuição apresentam desequilíbrios de corrente e tensão entre fases (KERSTING, 2017).

Além disso, em geral, os sistemas de distribuição apresentam maior resistência e menor reatância nas impedâncias dos ramos, estes ramificados na rede (MOMOH, 2017). As particularidades mencionadas diferem os sistemas de distribuição dos sistemas de transmissão na análise de fluxo de potência.

Para a análise de fluxo de potência, a rede de distribuição é modelada como um conjunto de barramentos interligados por ramos, ou chaves, e conectada ao barramento de referência (*slack bus*), normalmente localizado na subestação, cuja tensão é especificada e define a referência do sistema. As cargas e os geradores são modelados como elementos conectados aos barramentos da rede, de modo que cada barramento pode ser associado a um modelo equivalente que represente adequadamente o seu comportamento elétrico (MOMOH, 2017).

Para um barramento qualquer k em uma rede de distribuição radial, os barramentos localizados no caminho entre k e o barramento de referência são denominados barramentos a montante. Por outro lado, os barramentos alimentados por k são denominados barramentos a jusante. A figura 3 exemplifica a identificação do barramento imediatamente a montante, m, e do barramento imediatamente a jusante, j, de um barramento genérico k.

Figura 3 – Identificação dos barramentos imediatamente a montante e a jusante



Fonte: Produção do próprio autor.

A seção seguinte apresenta como os barramentos são classificados no contexto da análise de fluxo de potência.

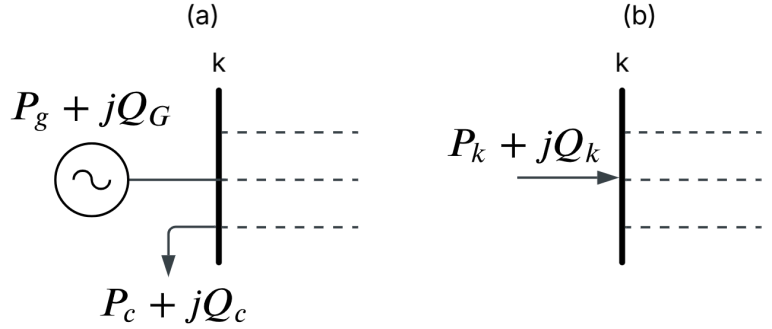
2.4 CLASSIFICAÇÃO DOS TIPOS DE BARRAMENTOS

Inicialmente, considera-se que a potência complexa em um barramento qualquer é definida como a diferença entre potência gerada, por geradores conectados, e a potência consumida, pela carga conectada ao respectivo barramento. Assim, a potência líquida $\widehat{S}_k$ no barramento k é dada por (MOMOH, 2017):

$$\widehat{S}_k = P_g + jQ_g - (P_c + jQ_c) = P_k + jQ_k \quad (1)$$

onde P_g e Q_g representam as potências ativa e reativa geradas no barramento, respectivamente, enquanto que P_c e Q_c representam as potências ativa e reativa demandadas pela carga.

Figura 4 – Potências no barramento k: (a) gerada e consumida e (b) líquida



Fonte: Adaptado de MELO, 2026.

Para a análise de fluxo de potência, os barramentos de um sistema elétrico são classificados de acordo com as variáveis especificadas para o modelo elétrico adotado. Os barramentos podem ser classificados como (MOHAN, 2016):

(a) Barramentos PQ, caracterizados por potências ativa e reativa definidas, tipicamente representam uma carga;

(b) Barramentos PV, caracterizados por potência ativa e magnitude de tensão definidas, tipicamente representam um gerador, podendo ser reclassificados como PQ quando os limites de potência reativa são atingidos;

(c) Barramentos de referência, caracterizados por magnitude de tensão e ângulo de tensão definidos, responsáveis por equilibrar as potências ativa e reativa do sistema e estabelecer a referência angular da rede;

(d) Barramentos sem injeção de potência especificada, geralmente associados à modelagem de transformadores, os quais podem ser tratados como barramentos PQ com injeções de potência ativa e reativa nulas.

A classificação definida é utilizada na análise de fluxo de potência e permanece válida tanto para sistemas de transmissão quanto para sistemas de distribuição. Entretanto, nos sistemas de distribuição, observa-se a predominância de barramentos de carga, uma vez que as cargas são, em geral, modeladas por meio de suas potências ativa e reativa especificadas, enquanto a magnitude e o ângulo de tensão permanecem como variáveis de estado a serem determinadas.

As próximas seções apresentam métodos empregados na análise de fluxo de potência em sistemas elétricos.

2.5 MÉTODOS BASEADOS NA MATRIZ DE ADMITÂNCIA NODAL

Os métodos *Gauss-Seidel*, *Newton-Raphson* e desacoplado rápido (*Fast-Decoupled Load Flow*), baseados na matriz de admitância nodal, constituem a abordagem clássica para a solução do problema de fluxo de potência em sistemas elétricos de potência (MOMOH, 2017).

Entretanto, as características típicas dos sistemas de distribuição, como a topologia radial, a elevada resistência e a baixa reatância dos ramos e o desbalanceamento entre fases, podem comprometer a eficiência desses métodos (MOMOH, 2017). Assim, a compreensão desses métodos evidencia suas limitações quando aplicados a redes de distribuição e a necessidade da adoção de métodos específicos, como o método da varredura reversa e direta.

2.5.1 Construção da Matriz de Admitâncias

Inicialmente, faz-se necessário compreender a matriz de admitâncias nodais e o procedimento utilizado para sua construção, uma vez que ela constitui a base dos métodos clássicos de análise de fluxo de potência. Em sistemas elétricos de

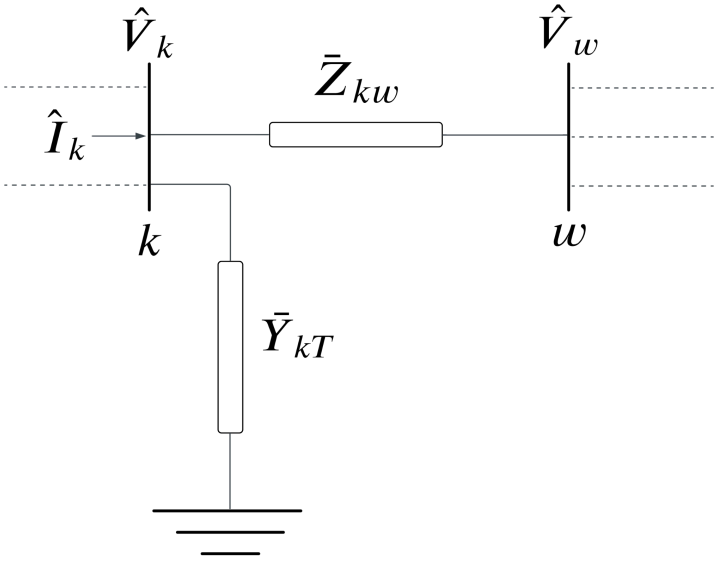
potência, a formulação nodal é geralmente mais conveniente do que a formulação por malhas, pois requer um número menor de equações e permite representar a rede de forma matricial (MOHAN, 2016).

Considere uma rede qualquer de um sistema elétrico composta por n barramentos interligados por ramos. Aplicando a Lei das Correntes de Kirchhoff, a corrente injetada $\hat{I}_k$ em qualquer barramento k pode ser escrita como a soma das correntes que fluem pelos ramos conectados ao barramento (MOHAN, 2016):

$$\hat{I}_k = \bar{Y}_{kT}\hat{V}_k + \sum_{w \neq k}^{n} \left(\frac{\hat{V}_k - \hat{V}_w}{\bar{Z}_{kw}}\right) \tag{2}$$

em que $\bar{Y}_{kT}$ representa a soma das admitâncias conectadas entre o barramento k e o terra (*ground*), $\hat{V}_k$ a tensão no barramento k, $\hat{V}_w$ a tensão no barramento w conectado ao barramento k através do ramo com impedância série $\bar{Z}_{kw}$.

Figura 5 – Representação da corrente injetada em um barramento



Fonte: Produção do próprio autor.

Considerando que admitância $\bar{y}_{kw}$ é definida por (MOHAN, 2016):

$$\bar{y}_{kw} = \bar{Z}_{kw}^{-1} \tag{3}$$

a equação (2) pode ser reescrita como:

$$\widehat{I}_k = \overline{Y}_{kT}\widehat{V}_k + \sum_{w \neq k}^{n} \overline{y}_{kw}(\widehat{V}_k - \widehat{V}_w) \tag{4}$$

que, reorganizando os termos, obtém-se:

$$\widehat{I}_k = (\overline{Y}_{kT} + \sum_{w \neq k}^{n} \overline{y}_{kw})\widehat{V}_k - \sum_{w \neq k}^{n} \overline{y}_{kw}\widehat{V}_w \tag{5}$$

O termo da equação (5) que multiplica a tensão $\widehat{V}_k$ do próprio barramento k é denominado autoadmitância $\overline{Y}_{kk}$ e é definida por (MOHAN, 2016):

$$\overline{Y}_{kk} = \overline{Y}_{kT} + \sum_{w \neq k}^{n} \overline{y}_{kw} \tag{6}$$

Os elementos que relacionam o barramento k aos demais barramentos conectados à rede, são denominados admitâncias mútuas e definidos por (MOHAN, 2016):

$$\overline{Y}_{kw} = -\overline{y}_{kw} \tag{7}$$

Portanto, a corrente injetada no barramento k pode ser expressa de forma compacta por:

$$\widehat{I}_k = \sum_{w}^{n} \overline{Y}_{kw}\widehat{V}_w \tag{8}$$

onde $\overline{Y}_{kw}$ representa um termo genérico. Em particular, para $w = k$, tem-se a autoadmitância $\overline{Y}_{kk}$, enquanto que, para $w \neq k$, o termo $\overline{Y}_{kw}$ corresponde à admitância mútua entre os barramentos k e w.

Dessa forma, escreve-se a equação (8) para todos os n barramentos da rede e organizando na forma matricial, obtém-se:

$$[\widehat{I}_{rede}] = [\overline{Y}_{rede}]\,[\widehat{V}_{rede}] \tag{9}$$

em que $\widehat{I}_{rede}$ representa o vetor das correntes injetadas nos barramentos da rede, $\widehat{V}_{rede}$ o vetor das tensões nodais, e $\overline{Y}_{rede}$ a matriz de admitâncias da rede (MOMOH, 2017). Assim, a equação (9) pode ser expandida na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \widehat{I}_1 \\ \widehat{I}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \widehat{I}_n \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \overline{Y}_{11} & \overline{Y}_{12} & \overline{Y}_{13} & \cdots & \overline{Y}_{1n} \\ \overline{Y}_{21} & \overline{Y}_{22} & \overline{Y}_{23} & \cdots & \overline{Y}_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \overline{Y}_{n1} & \overline{Y}_{n2} & \overline{Y}_{n3} & .. & \overline{Y}_{nn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \widehat{V}_1 \\ \widehat{V}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \widehat{V}_n \end{bmatrix} \tag{10}$$

Nota-se pela equação (10) que a matriz $\overline{Y}_{rede}$ proporciona uma representação matricial da topologia elétrica da rede, uma vez que seus elementos são determinados pelas conexões existentes entre os n barramentos e pelos parâmetros elétricos dos ramos.

2.5.2 Método de Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel é uma técnica iterativa utilizada na solução do problema de fluxo de potência. Sua formulação baseia-se na matriz de admitância nodal da rede e permite determinar iterativamente as tensões dos barramentos a partir das potências especificadas (MOMOH, 2017).

Para a dedução da equação iterativa, parte-se da equação (8), que relaciona as correntes injetadas às tensões nodais. Isolando-se o termo correspondente à autoadmitância do barramento k, obtém-se:

$$\widehat{I}_k = \overline{Y}_{kk}\widehat{V}_k + \sum_{w \neq k}^{n} \overline{Y}_{kw}\widehat{V}_w \tag{11}$$

Também, a partir da definição da potência complexa definida na equação (1), pode-se obter a corrente no barramento k:

$$\widehat{S}_k = \widehat{V}_k \widehat{I}_k^* \rightarrow \widehat{I}_k = \frac{P_k - jQ_k}{\widehat{V}_k^*} \tag{12}$$

Substituindo a equação (12) na equação (11) e rearranjando, obtém-se a tensão $\widehat{V}_k$ em termos das potências ativa e reativa, da autoadmitância e das admitâncias mútuas da rede (MOHAN, 2016):

$$\widehat{V}_k = \frac{1}{\overline{Y}_{kk}} \left(\frac{P_k - jQ_k}{\widehat{V}_k^*} - \sum_{w \neq k}^{n} \overline{Y}_{kw} \widehat{V}_w \right) \tag{13}$$

A equação (13) pode ser resolvida por meio de um método iterativo para determinar o valor das tensões nodais dos barramentos quando as potências P_k e Q_k do barramento são especificadas. Dessa forma, obtém-se a expressão iterativa dada pela equação (14) (MOMOH, 2017).

$$\widehat{V}_k^{(i+1)} = \frac{1}{\overline{Y}_{kk}} \left(\frac{P_k - jQ_k}{(\widehat{V}_k^{(i)})^*} - \sum_{w \neq k}^{n} \overline{Y}_{kw} \widehat{V}_w^{(i)} \right) \tag{14}$$

Após a atualização da tensão de um barramento, o novo valor é utilizado nas demais equações ainda não resolvidas da mesma iteração e nas iterações subsequentes. Em razão dessa característica, o método apresenta convergência linear quando os valores iniciais das tensões estão suficientemente próximos da solução real (MOMOH, 2017).

Nota-se que a correção da tensão decorrente da atualização de um barramento é propagada apenas para os barramentos adjacentes a cada iteração. Consequentemente, em sistemas radiais de distribuição, nos quais existem poucas conexões entre barramentos vizinhos, essa propagação ocorre de forma gradual ao longo da rede, resultando em um desempenho inferior do método quando comparado a sistemas mais fortemente interligados (MOMOH, 2017).

2.5.3 Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson é o método clássico mais utilizado para a solução de fluxo de potência (MOMOH, 2017). Assim como o método de Gauss-Seidel, seu objetivo é determinar as magnitudes e os ângulos das tensões nos barramentos a partir das potências ativa e reativa especificadas e da matriz de admitância nodal do sistema.

Substituindo a expressão da corrente em um barramento obtida na equação (8) na expressão da potência complexa injetada no barramento, apresentada na equação (12), obtém-se (MOHAN, 2016):

$$\widehat{S}_k = \widehat{V}_k \left(\sum_w^n \overline{Y}_{kw} \widehat{V}_w \right)^* \tag{15}$$

As tensões $\widehat{V}_k$ e $\widehat{V}_w$ podem ser representadas na forma polar:

$$\widehat{V}_k = \left|\widehat{V}_k\right| e^{j\theta_k} \; ; \; \widehat{V}_w = \left|\widehat{V}_w\right| e^{j\theta_w} \tag{16}$$

e a admitância $\overline{Y}_{kw}$ pode ser expressa em sua forma cartesiana, em função da condutância G_{kw} e susceptância B_{kw} (MOHAN, 2016):

$$\overline{Y}_{kw} = G_{kw} + jB_{kw} \tag{17}$$

Substituindo as equações (16) e (17) na equação (15) e aplicando a identidade de Euler, obtém-se:

$$\widehat{S}_k = \sum_w^n |\widehat{V}_k| \, |\widehat{V}_w| \left[(G_{kw} \cos\theta_{kw} + B_{kw} sen\,\theta_{kw}) + j(G_{kw} sen\,\theta_{kw} - B_{kw} \cos\theta_{kw}) \right] \tag{18}$$

em que a diferença angular, em radianos, entre os barramentos k e w é dada por:

$$\theta_{kw} = \theta_k - \theta_w \tag{19}$$

Separando a equação (18) nas partes real e imaginária, obtém-se as equações para a potência ativa e reativa injetadas no barramento k, respectivamente (MOHAN, 2016):

$$P_k = G_{kk}|\widehat{V}_k|^2 + |\widehat{V}_k| \sum_{w \neq k}^{n} [\, |\widehat{V}_w| \, (G_{kw} \cos \theta_{kw} + B_{kw} sen\, \theta_{kw}) \,] \tag{20}$$

$$Q_k = -B_{kk}|\widehat{V}_k|^2 + |\widehat{V}_k| \sum_{w \neq k}^{n} [\, |\widehat{V}_w| \, (G_{kw} sen\, \theta_{kw} - B_{kw} \cos \theta_{kw}) \,] \tag{21}$$

Observa-se que, para $w = k$, tem-se $\theta_{kk} = 0$, de modo que $\cos \theta_{kk} = 1$ e $sen\, \theta_{kk} = 0$.

As equações (20) e (21) mostram que as potências ativa e reativa são funções não lineares da magnitude $|\widehat{V}_k|$ e do ângulo θ_{kw} das tensões dos barramentos, denominadas variáveis de estado do sistema (MOHAN, 2016). Assim, as potências ativa e reativa dos barramentos podem ser representadas genericamente como funções não lineares das variáveis de estado do sistema.

Tem-se, portanto, um sistema de equações algébricas não lineares, no qual as incógnitas são os ângulos e as magnitudes das tensões dos barramentos. Como não existe uma solução analítica, torna-se necessário empregar métodos numéricos iterativos para determinar os valores das variáveis de estado que satisfaçam as potências especificadas.

Devido à natureza não linear das equações apresentadas, o método de Newton-Raphson emprega uma linearização em torno da solução estimada. Inicialmente, definem-se os desvios de potência ativa e reativa :

$$\Delta P_k^{(i)} = P_k^{esp} - P_k^{(i)} \tag{22}$$

$$\Delta Q_k^{(i)} = Q_k^{esp} - Q_k^{(i)} \tag{23}$$

em que P_k^{esp} e Q_k^{esp} representam as potências especificadas, enquanto $P_k^{(i)}$ e $Q_k^{(i)}$ correspondem às potências calculadas na iteração i para cada barramento (MOHAN, 2016).

Representando os desvios de potência na forma matricial e aplicando a linearização das equações de potência, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta|\widehat{V}| \end{bmatrix} \tag{24}$$

em que $\Delta\theta$ e $\Delta|\widehat{V}|$ correspondem às correções a serem aplicadas às variáveis de estado (MOHAN, 2016).

Para isso, define-se na equação (25) a matriz Jacobiana J, composta pelas derivadas parciais das potências ativa e reativa em relação às variáveis de estado do sistema (MOMOH, 2017).

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial\theta} & \frac{\partial P}{\partial|\widehat{V}|} \\ \frac{\partial Q}{\partial\theta} & \frac{\partial Q}{\partial|\widehat{V}|} \end{bmatrix} \tag{25}$$

A matriz Jacobiana representa a sensibilidade das equações de potência às variações das magnitudes e dos ângulos das tensões, sendo utilizada para determinar as correções necessárias durante o processo iterativo (MOMOH, 2017), porque cada elemento da Jacobiana é uma derivada parcial que mede a taxa de variação de uma grandeza em relação a outra. A determinação das derivadas parciais que compõem a matriz Jacobiana é apresentada no apêndice A.

A partir da linearização das equações de potência utilizando a matriz Jacobiana, pode-se estabelecer a base matemática do método de Newton-Raphson a partir da equação matricial:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial\theta} & \frac{\partial P}{\partial|\widehat{V}|} \\ \frac{\partial Q}{\partial\theta} & \frac{\partial Q}{\partial|\widehat{V}|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta|\widehat{V}| \end{bmatrix} \tag{26}$$

e reorganizando para encontrar as correções necessárias:

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta|\widehat{V}| \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} \tag{27}$$

Pois, no método iterativo de Newton-Raphson, as incógnitas do problema são os ângulos e as magnitudes das tensões dos barramentos. Então, em cada iteração, o algoritmo calcula o quanto essas variáveis precisam ser ajustadas para reduzir os erros de potência (MOMOH, 2017).

Primeiramente, são atribuídos valores iniciais especificados para as magnitudes e os ângulos das tensões dos barramentos. Inicia-se, para cada iteração, calculando-se as potências ativa e reativa por meio das equações (20) e (21) e determinam-se os desvios ΔP e ΔQ. Em seguida, calcula-se a matriz Jacobiana para a iteração e determina-se a solução da equação (27), fornecendo as correções necessárias para atualizar as variáveis de estado do sistema para a próxima iteração (MOHAN, 2016):

$$\theta_k^{(i+1)} = \theta_k^{(i)} + \Delta\theta_k^{(i)} \tag{28}$$

$$|\widehat{V}_k|^{(i+1)} = |\widehat{V}_k|^{(i)} + \Delta|\widehat{V}_k|^{(i)} \tag{29}$$

em que $|\widehat{V}_k|^{(i+1)}$ e $\theta_k^{(i+1)}$ representam a magnitude de tensão e o ângulo da próxima iteração, enquanto $|\widehat{V}_k|^{(i)}$ e $\theta_k^{(i)}$ correspondem à iteração i atual (MOHAN, 2016).

Como as derivadas parciais dependem dos valores das tensões, a matriz Jacobiana deve ser recalculada a cada iteração utilizando os valores atualizados das variáveis de estado.

Após a atualização das variáveis de estado, o processo é repetido até que os desvios de potência ativa e reativa sejam inferiores à tolerância estabelecida inicialmente, caracterizando a convergência do método. Nas proximidades da

solução, o método apresenta convergência quadrática, o que resulta em um número reduzido de iterações quando comparado a outros métodos clássicos de fluxo de potência (MOHAN, 2016).

De maneira geral, os desvios de potência medem o erro atual entre as potências especificadas e calculadas, enquanto que a jacobiana determina como as potências variam quando a magnitude e os ângulos das tensões mudam, portanto a solução do sistema linearizado fornece a correção necessária para ser aplicada nas variáveis de estado para diminuir o erro dos desvios e atingir a convergência no processo iterativo.

Embora o método de Newton-Raphson apresente elevada velocidade de convergência e seja amplamente utilizado em sistemas de transmissão, sua aplicação em sistemas de distribuição é menos eficiente. Isso ocorre porque o método não explora explicitamente a topologia radial da rede e depende da construção e da solução de uma matriz Jacobiana, que pode apresentar problemas de condicionamento em sistemas com elevada resistência e baixa reatância, característica típica das redes de distribuição (MOMOH, 2017).

As equações (20) e (21) foram derivadas assumindo que a potência ativa e reativa possuem um grau de desacoplamento significativo, considerando que P depende principalmente de θ, enquanto Q depende principalmente de $|\widehat{V}|$. Consequentemente, em casos de redes com maiores valores de resistência e menores valores de reatância, a potência ativa passa a depender fortemente da magnitude da tensão e a potência reativa passa a depender fortemente do ângulo.

Portanto, o desacoplamento diminui e as derivadas da Jacobiana tornam-se mais correlacionadas (MOHAN, 2016). Consequentemente, em redes de distribuição, o Newton-Raphson tende a apresentar desempenho inferior ao observado em sistemas de transmissão, pois a convergência do método pode se tornar lenta ou instável.

Além disso, trata-se de uma formulação baseada na solução simultânea das equações não lineares do sistema por meio da matriz Jacobiana, sem utilizar explicitamente as características topológicas da rede. Em sistemas de distribuição, geralmente estruturados de forma radial, existem algoritmos que exploram diretamente essa configuração em árvore para simplificar os cálculos de correntes e tensões. O método de Newton-Raphson, por sua vez, trata a rede como um sistema

matricial geral, não se beneficiando das simplificações proporcionadas pela topologia radial.

2.5.4 Método Desacoplado Rápido

Em sistemas de transmissão, as variações de potência ativa estão fortemente associadas às variações dos ângulos de fase das tensões, enquanto as variações de potência reativa estão principalmente associadas às magnitudes das tensões (MOMOH, 2017). Essa característica constitui a base das simplificações utilizadas no método desacoplado rápido.

Em geral, os sistemas de transmissão possuem elevada reatância e baixa resistência (MOHAN, 2016), de modo que:

$$X >> R \leftrightarrow B_{kw} >> G_{kw} \tag{30}$$

Além disso, esses sistemas operam próximos da condição normal, com tensões próximas de $1\,pu$, frequências sincronizadas e diferenças angulares θ_{kw} relativamente pequenas entre barramentos (SAADAT, 1999). Nessas condições, podem ser adotadas as aproximações trigonométricas para ângulos pequenos em radianos (MOHAN, 2016):

$$sen\,\theta_{kw} \approx \theta_{kw} \tag{31}$$

$$cos\,\theta_{kw} \approx 1 \tag{32}$$

Substituindo essas aproximações nas equações gerais de potência ativa e reativa, obtêm-se:

$$P_k \approx G_{kk}|\widehat{V}_k|^2 + |\widehat{V}_k| \sum_{w \neq k}^{n} |\widehat{V}_w| \, (G_{kw} + B_{kw}\theta_{kw}) \tag{33}$$

$$Q_k \approx -B_{kk}|\widehat{V}_k|^2 + |\widehat{V}_k| \sum_{w \neq k}^{n} |\widehat{V}_w| \, (G_{kw}\theta_{kw} - B_{kw}) \tag{34}$$

Observa-se que a potência ativa está fortemente associada às diferenças angulares entre os barramentos, enquanto a potência reativa está relacionada às magnitudes das tensões. Em termos matemáticos, significa que as derivadas

$\partial Q/\partial|\widehat{V}|$ e $\partial P/\partial\theta$ apresentam valores significativamente maiores que as derivadas cruzadas $\partial P/\partial|\widehat{V}|$ e $\partial Q/\partial\theta$, permitindo que estas últimas sejam desprezadas (SAADAT, 1999).

Dessa forma, a solução utilizando o método Newton-Raphson pode ser simplificada, utilizando apenas os acoplamentos entre $\partial Q/\partial|\widehat{V}|$ e $\partial P/\partial\theta$, ignorando os termos $\partial P/\partial|\widehat{V}|$ e $\partial Q/\partial\theta$ na matriz Jacobiana (MOHAN, 2016):

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial\theta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial Q}{\partial|\widehat{V}|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta|\widehat{V}| \end{bmatrix} \tag{35}$$

resultando no desacoplamento em dois sistemas independentes:

$$[\,\Delta P\,] = \left[\frac{\partial P}{\partial\theta}\right][\Delta\theta] \tag{36}$$

$$[\,\Delta Q\,] = \left[\frac{\partial Q}{\partial|\widehat{V}|}\right][\,\Delta|\widehat{V}|\,] \tag{37}$$

As equações (36) e (37) evidenciam a relação de sensibilidade entre variações de potência ativa e ângulo de fase, bem como entre variações de potência reativa e magnitude de tensão. Além disso, são mais rápidas de se obter uma solução, quando comparadas ao processo de resolução da equação (27) do método de Newton-Raphson (MOHAN, 2016).

Uma simplificação adicional leva ao método desacoplado rápido. Considerando que as magnitudes das tensões permanecem próximas de $1\,pu$ e aplicando as aproximações anteriores, as submatrizes Jacobianas podem ser ainda mais simplificadas:

$$\frac{\partial P_k}{\partial\theta_w} \approx -B_{kw} \tag{38}$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial |\widehat{V}_w|} \approx -B_{kw} \tag{39}$$

Dessa forma, as submatrizes Jacobianas $\partial Q/\partial|\widehat{V}|$ e $\partial P/\partial\theta$ podem ser aproximadas por matrizes constantes derivadas da parte imaginária da matriz de admitâncias nodal, denominadas B' e B'' (SAADAT, 1999). Assim, as equações (36) e (37) assumem a forma:

$$[\,\Delta P\,] = -B'\,[\Delta\theta] \tag{40}$$

$$[\,\Delta Q\,] = -B''\,[\Delta|\widehat{V}|] \tag{41}$$

A matriz B', utilizada no cálculo das correções dos ângulos de tensão, é formada principalmente pelas susceptâncias série da rede, enquanto que a matriz B'', empregada na correção das magnitudes de tensão, inclui também os efeitos das susceptâncias shunt e é reduzida pela eliminação dos barramentos PV (SAADAT, 1999). Assim, ambas representam aproximações das sensibilidades do sistema, permitindo que suas fatorações sejam realizadas apenas uma vez durante o processo iterativo.

Entretanto, o método desacoplado rápido requer um número maior de iterações do que o método de Newton-Raphson, mas cada iteração demanda um tempo computacional relativamente menor, assim a solução do fluxo de potência é obtida de forma mais rápida (SAADAT, 1999).

2.6 MÉTODO DA VARREDURA DIRETA E REVERSA

Os sistemas de distribuição de energia elétrica apresentam características singulares, como estrutura predominantemente radial, elevado número de barramentos e cargas distribuídas ao longo dos alimentadores, o que torna os métodos convencionais de fluxo de potência baseados na matriz de admitância nodal menos eficientes para sua análise.

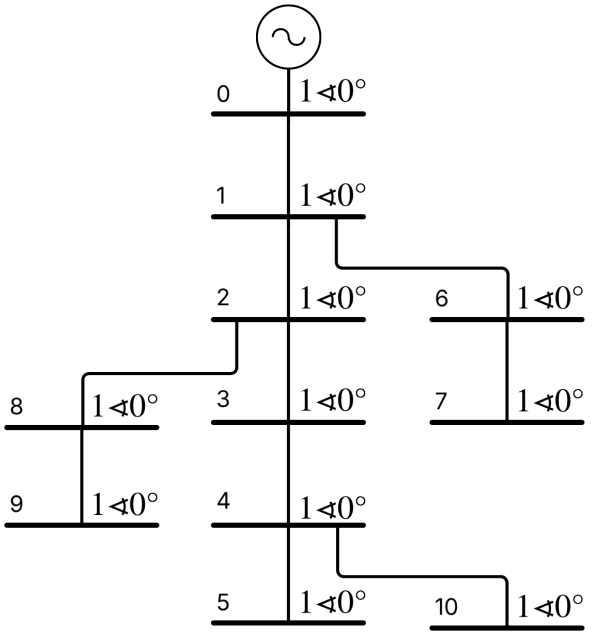
O método de varredura direta e reversa contorna esses desafios ao modelar a rede de distribuição como uma estrutura em forma de árvore. Nesse arranjo, o barramento de referência é representado como a raiz dessa árvore, enquanto os

demais barramentos e ramos do sistema são organizados em níveis hierárquicos afastados dessa raiz (MOMOH, 2017). Essa representação explora diretamente a natureza radial predominante dos sistemas de distribuição.

Como o método é baseado em varreduras radiais, a rede de distribuição é inicialmente convertida em um sistema puramente radial pela abertura (*breaking*) de todas as malhas (*loops*) existentes no circuito. As seções de linha dessa rede radial são, então, ordenadas hierarquicamente em camadas (*layers*), distanciando-se gradualmente do barramento de referência (CHENG; SHIRMOHAMMADI, 1995).

Para a inicialização do método, a tensão no barramento de referência possui valor conhecido, definindo-se a magnitude e o ângulo da tensão da subestação como a referência do sistema. As tensões dos demais barramentos são inicialmente assumidas como iguais à do barramento de referência, caracterizando uma partida plana (*flat start*) (MOMOH, 2017).

Figura 6 – Exemplo de partida plana em um sistema de distribuição



Fonte: Produção do próprio autor.

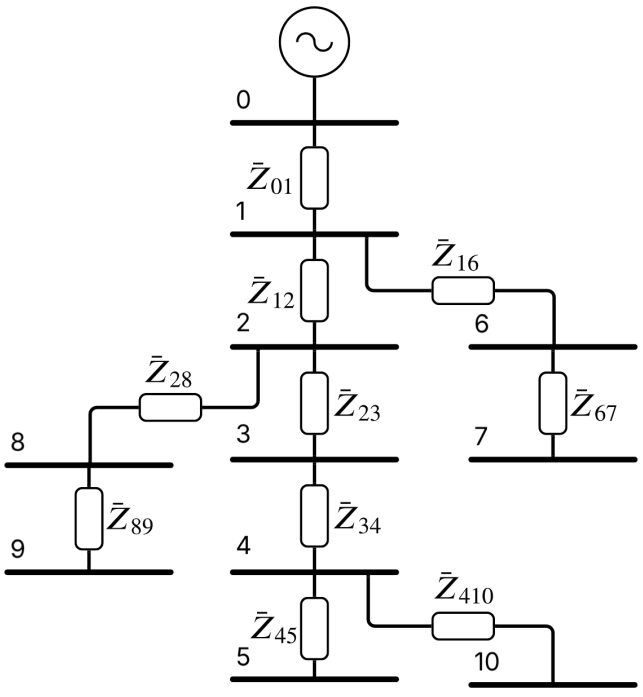
Fisicamente, o sistema de distribuição trifásico é representado por barramentos interligados por trechos de linha, em que cada trecho é modelado por uma matriz de impedância trifásica com dimensão $3x3$, responsável por incorporar os acoplamentos entre fases (CHENG; SHIRMOHAMMADI, 1995). Define-se,

portanto, a matriz de impedância trifásica $[\overline{Z}_{kw}]$ para a modelagem da impedância da linha que conecta o barramento k ao barramento w como:

$$[\overline{Z}_{kw}] = \begin{bmatrix} \overline{Z}_{kw,aa} & \overline{Z}_{kw,ab} & \overline{Z}_{kw,ac} \\ \overline{Z}_{kw,ba} & \overline{Z}_{kw,bb} & \overline{Z}_{kw,bc} \\ \overline{Z}_{kw,ca} & \overline{Z}_{kw,cb} & \overline{Z}_{kw,cc} \end{bmatrix} \tag{42}$$

As seções seguintes apresentam duas formulações distintas do método de varredura direta e reversa.

Figura 7 – Exemplo da representação da impedância trifásica nas linhas de uma rede de distribuição



Fonte: Produção do próprio autor.

2.6.1 Formulação por Soma de Potência

A formulação por soma de potência é baseada na característica radial das redes de distribuição, na qual a potência que circula em cada trecho da rede corresponde à soma das cargas alimentadas a jusante acrescida das perdas elétricas associadas ao ramo (BLANCO, 2024).

Considerando um barramento k, as potências equivalentes ativa e reativa que flui entre o barramento imediatamente a montante m e o barramento k, é calculada por meio da agregação da potência consumida no próprio barramento com as potências equivalentes dos barramentos a jusante. Para cada fase p, as potências ativa e reativa equivalentes são obtidas por (BLANCO, 2024):

$$P_{k,p}^{EQ^{(i)}} = P_{k,p} \sum_{j} (P_{j,p}^{EQ^{(i)}} + P_{j,p}^{L\ (i)}) \quad p \in \{a,\ b,\ c\} \tag{43}$$

$$Q_{k,p}^{EQ^{(i)}} = Q_{k,p} \sum_{j} (Q_{j,p}^{EQ^{(i)}} + Q_{j,p}^{L\ (i)}) \quad p \in \{a,\ b,\ c\} \tag{44}$$

em que $P_{k,p}$ e $Q_{k,p}$ representam as potências ativa e reativa demandadas no barramento k, $P_{j,p}^{L\ (i)}$ e $Q_{j,p}^{L\ (i)}$ representam as perdas no trecho associado ao barramento jusante j na iteração i.

As perdas de potência em cada trecho são determinadas a partir das potências equivalentes e dos parâmetros elétricos da linha. Para sistemas trifásicos, as perdas são calculadas considerando as impedâncias próprias dos condutores e os efeitos de acoplamento mútuo entre as fases. Assim, as perdas ativa e reativa são dadas por (BLANCO, 2024):

$$P_{k,p}^{L\ (i)} = \sum_{q \in \{a,\ b,\ c\}} \frac{R_{k,pq}[(P_{k,q}^{EQ^{(i)}})^2 + ((Q_{k,q}^{EQ^{(i)}})^2]\delta_{pq}}{|\widehat{V}|_{k,q}^{(i-1)^2}} \quad p \in \{a,\ b,\ c\} \tag{45}$$

$$Q_{k,p}^{L\ (i)} = \sum_{q \in \{a,\ b,\ c\}} \frac{X_{k,pq}[(P_{k,q}^{EQ^{(i)}})^2 + (Q_{k,q}^{EQ^{(i)}})^2]\delta_{pq}}{|\widehat{V}|_{k,q}^{(i-1)^2}} \quad p \in \{a,\ b,\ c\} \tag{46}$$

onde $R_{k,pq}$ e $X_{k,pq}$ são os elementos das matrizes de resistência e reatância do trecho considerado, enquanto que δ_{pq} é o fator responsável por representar o acoplamento magnético entre as fases, definido por (BLANCO, 2024):

$$\delta_{pq} = cos[(p - q)\,\tfrac{2\pi}{3}] \quad p, q \in \{a, b, c\} \tag{47}$$

em que p e q representam os índices das fases, sendo adotada a correspondência $a = 0$, $b = 1$ e $c = 2$.

Determinadas as potências equivalentes e as perdas, a magnitude da tensão no barramento k pode ser obtida por meio de uma equação biquadrada. Para cada fase p, tem-se que (BLANCO, 2024):

$$|\widehat{V}|_{k,p}^{4} + A_{k,p}|\widehat{V}|_{k,p}^{2} + B_{k,p} = 0 \quad p \in \{a,\ b,\ c\} \tag{48}$$

sendo que:

$$A_{k,p} = 2\,(\sum_{q \in \{a,\,b,\,c\}} (P_{k,q}^{EQ} R_{k,pq} + Q_{k,q}^{EQ} X_{k,pq})\delta_{pq}) - |\widehat{V}|_{m,p}^{2} \quad p \in \{a,\ b,\ c\} \tag{49}$$

$$B_{k,p} = \sum_{q \in \{a,\,b,\,c\}} [(P_{k,q}^{EQ})^2 + (Q_{k,q}^{EQ})^2]\, Z_{k,pq}^{2} \quad p \in \{a,\ b,\ c\} \tag{50}$$

onde:

$$Z_{k,pq} = \sum_{t \in \{a,\,b,\,c\}} (R_{k,pt} R_{k,tq} + X_{k,pt} X_{k,tq}) \quad p, q \in \{a,\ b,\ c\} \tag{51}$$

A partir da solução fisicamente válida da equação biquadrada, é possível determinar diretamente a magnitude da tensão no barramento k (BLANCO, 2024):

$$\left|\widehat{V}\right|_{k,p} = \sqrt{-\frac{A_{k,p}}{2} + \sqrt{(\frac{A_{k,p}}{2})^2 - B_{k,p}}} \quad p \in \{a,\ b,\ c\} \tag{52}$$

A equação (52) representa a base da varredura direta, realizada do barramento raiz em direção aos barramentos terminais. Nessa etapa, as magnitudes de tensão são atualizadas sucessivamente utilizando os resultados obtidos na varredura reversa. O processo iterativo prossegue até que a máxima diferença entre

as tensões calculadas em duas iterações consecutivas seja inferior a uma tolerância ε previamente especificada.

Após a convergência, os ângulos das tensões são determinados a partir da abertura angular dos trechos da rede (BLANCO, 2024):

$$tg\ \theta_{k,m,p}^{(i)} = \frac{\sum_{q \in \{a,\,b,\,c\}} (P_{k,q}^{EQ^{(i)}} X_{k,pq} + Q_{k,q}^{EQ^{(i)}} R_{k,pq}) \delta_{pq}}{\sum_{q \in \{a,\,b,\,c\}} [(P_{k,q}^{EQ^{(i)}} R_{k,pq} + Q_{k,q}^{EQ^{(i)}} X_{k,pq}) \delta_{pq}\,] + \left|\widehat{V}\right|_{k,q}^{(i)^2}} \quad p \in \{a,\ b,\ c\} \qquad (53)$$

Trata-se de uma característica importante da formulação, pois o processo iterativo utiliza apenas as magnitudes de tensão no cálculo, dispensando a utilização dos ângulos durante as etapas de varredura, o que contribui para a simplicidade e eficiência computacional do método.

2.6.2 Formulação por Soma de Correntes

A formulação por soma de correntes do método de varredura direta e reversa é baseada na aplicação iterativa das Leis de Kirchhoff para Correntes e Tensões. Após a organização topológica da rede em camadas ou níveis hierárquicos, o algoritmo executa etapas operacionais sucessivas a cada iteração, até que um critério de tolerância seja satisfeito. (CHENG; SHIRMOHAMMADI, 1995).

As próximas seções detalham as etapas da rotina iterativa a serem executadas pelo método de varredura direta e reversa com formulação por soma de correntes.

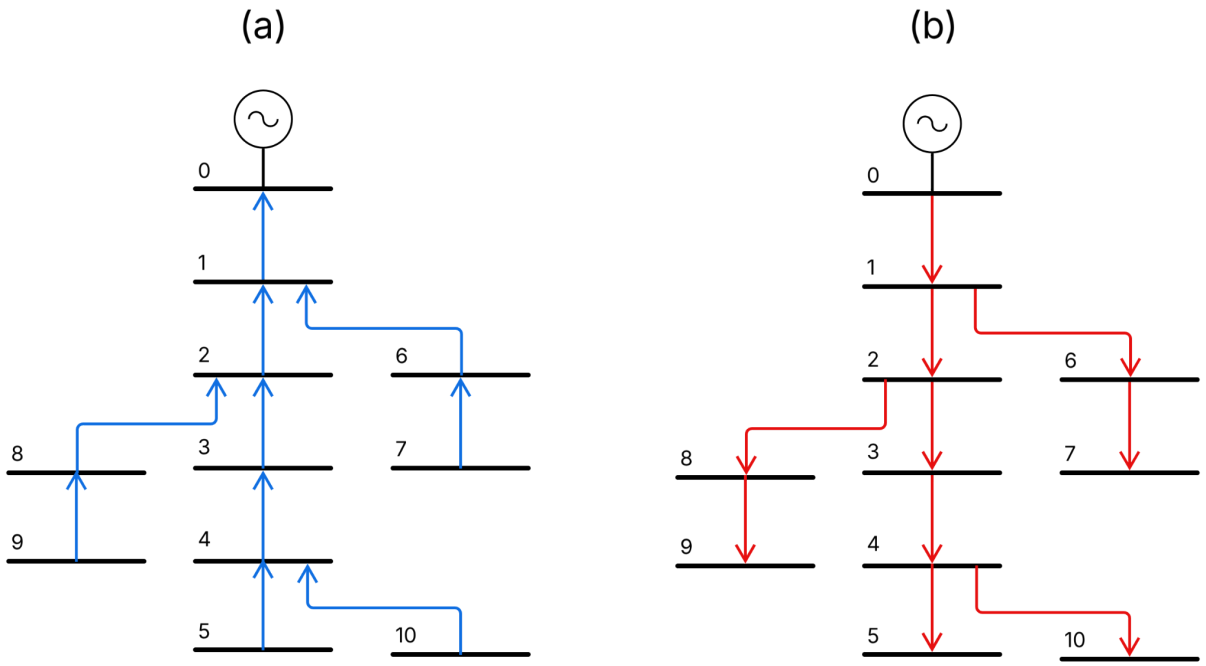
2.6.2.1 Cálculo das Correntes Nodais

A partir dos valores de tensões obtidos na iteração anterior, calculam-se as correntes equivalentes injetadas em cada barramento do sistema. Para cargas modeladas com potência constante, a corrente injetada em um barramento k durante uma iteração i é obtida a partir da potência complexa da carga S_k e da tensão nodal V_k correspondente. Caso elementos em derivação (*shunt*), como capacitores, estejam conectados no barramento, a corrente consumida por esses elementos deve ser subtraída (CHENG; SHIRMOHAMMADI, 1995):

$$\hat{I}_{k,p}^{(i)} = \left(\frac{\hat{S}_{k,p}^{esp}}{\hat{V}_{k,p}^{(i-1)}}\right)^{*} - \sum_{q \in \{a,\, b,\, c\}} \overline{Y}_{k,q}^{\,shunt}\, \hat{V}_{k,q}^{(i-1)} \qquad p \in \{a,\ b,\ c\} \tag{54}$$

onde $\hat{I}_{k,p}^{(i)}$ é a corrente injetada no barramento na iteração atual, $\hat{V}_{k,p}^{(i-1)}$ é a tensão no barramento na iteração anterior e $\overline{Y}_{k,q}^{\,shunt}$ representa a admitância dos elementos em derivação conectados ao barramento.

Figura 8 – Exemplo de percurso na rede de distribuição: (a) varredura reversa e (b) varredura direta



Fonte: Produção do próprio autor.

2.6.2.2 Varredura Reversa (*Backward Sweep*)

Nesta etapa, calcula-se a corrente que flui em cada ramo do sistema. O processo é uma varredura da rede de distribuição no sentido inverso ao fluxo de potência, ou seja, inicia-se nos barramentos terminais e avança de forma ascendente em direção à subestação (MOMOH, 2017).

Pela aplicação direta da Lei de Kirchhoff para Correntes, a corrente em um ramo a montante é obtida pelo somatório da corrente nodal injetada no barramento jusante com as correntes de todos os ramos que dela derivam (CHENG; SHIRMOHAMMADI, 1995)

$$\hat{J}_{l,p}^{(i)} = \hat{I}_{k,p}^{(i)} + \sum_{j} \hat{J}_{j,p}^{(i)} \quad p \in \{a,\ b,\ c\} \tag{55}$$

onde $\hat{J}_{l,p}^{(i)}$ é a corrente no ramo l na iteração atual, $\hat{I}_{k,p}^{(i)}$ é a corrente injetada no barramento k conectado ao ramo e $\hat{J}_{j,p}^{(i)}$ é a corrente no ramo imediatamente a jusante ao barramento k.

2.6.2.3 Varredura Direta (*Forward Sweep*)

Após o cálculo de todas as correntes nos ramos do sistema, realiza-se a varredura direta, partindo da subestação em direção aos barramentos terminais, para calcular e atualizar as tensões nos barramentos com base nas correntes calculadas (MOMOH, 2017).

Sabendo-se que a magnitude e o ângulo da tensão no barramento de referência são fixos e conhecidos, as tensões dos demais barramentos são atualizadas sequencialmente pela aplicação da Lei de Kirchhoff para Tensões.

A nova tensão em um barramento k, a jusante, é dada pela tensão de seu barramento m imediatamente a montante, descontada da respectiva queda de tensão no ramo que os conecta (CHENG; SHIRMOHAMMADI, 1995):

$$\hat{V}_{k,p}^{(i)} = \hat{V}_{m,p}^{(i)} - \overline{Z}_{mk}\ \hat{J}_{mk,p}^{(i)} \quad p \in \{a,\ b,\ c\} \tag{56}$$

2.6.2.4 Critério de Convergência

Ao final da varredura direta, a convergência do método deve ser avaliada para determinar se o processo iterativo deve continuar. O critério para garantir a solução matemática correta baseia-se no erro (*mismatch*) de potência em cada barramento (MOMOH, 2017).

O erro é quantificado comparando a potência inicial especificada no barramento com a potência calculada através das tensões e correntes da iteração atual. Se os desvios de potência ativa e reativa em todos os nós forem menores ou iguais a uma tolerância ε pré-estabelecida, o algoritmo alcança a convergência e o processo é encerrado. Caso contrário, as tensões atuais alimentam a próxima iteração (CHENG; SHIRMOHAMMADI, 1995).

$$\Delta\widehat{S}_{k,p}^{(i)} = \widehat{S}_{k,p}^{esp} - \widehat{V}_{k,p}^{(i)} \left(J_{l,p}^{(i)}\right)^{*} \quad p \in \{a,\ b,\ c\} \tag{57}$$

$$max_{k,p}\left(|\Delta\widehat{S}_{k,p}^{(i)}|\right) \leq \varepsilon \qquad p \in \{a,\ b,\ c\} \tag{58}$$

Com isso, consolida-se a fundamentação teórica necessária para o desenvolvimento do presente trabalho. A seção subsequente descreve duas abordagens para a modelagem da rede de distribuição trifásica, baseadas em listas de adjacência e na contagem de filhos, ambas estruturadas para a aplicação do método de varredura direta e reversa.

3 METODOLOGIA

O método de varredura direta e reversa para o cálculo do fluxo de potência em redes de distribuição trifásicas explora diretamente a característica radial dessas redes. Essa propriedade permite que o processo de cálculo seja realizado de acordo com a hierarquia natural existente entre os barramentos, possibilitando a execução ordenada das etapas de varredura sequencial ao longo da rede

Dessa forma, a modelagem da rede utilizada pelo algoritmo deve representar adequadamente sua topologia por meio de uma estrutura de dados capaz de armazenar as relações de conectividade entre os elementos do sistema, garantindo eficiência computacional durante os processos iterativos de solução.

Os métodos apresentados neste trabalho baseiam-se na representação da rede de distribuição por meio de grafos orientados. Essa abordagem permite descrever de forma estruturada as relações hierárquicas da rede radial. A Seção 3.1 apresenta os conceitos fundamentais dessa representação.

3.1 REPRESENTAÇÃO DA REDE POR GRAFOS ORIENTADOS

A topologia de redes elétricas de distribuição pode ser modelada por meio da teoria dos grafos, em que os barramentos são representados por vértices e os ramos por arestas orientadas. Essa modelagem possibilita a análise computacional da conectividade e da estrutura hierárquica da rede mediante grafos orientados (DEO, 2017). Um grafo orientado pode ser definido pelo par ordenado:

$$G = (V, E) \tag{59}$$

em que V representa o conjunto de vértices e E o conjunto de arestas orientadas do grafo (DEO, 2017). Tratando-se de sistemas de distribuição, os vértices correspondem aos barramentos da rede, enquanto as arestas representam os ramos que interligam esses barramentos. O conjunto de vértices é dado por:

$$V = \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n\} \tag{60}$$

onde n é o número total de barramentos da rede.

Já o conjunto de arestas orientadas é dado por:

$$E = \{(v_m, v_k) \mid v_m, v_k \in V\} \tag{61}$$

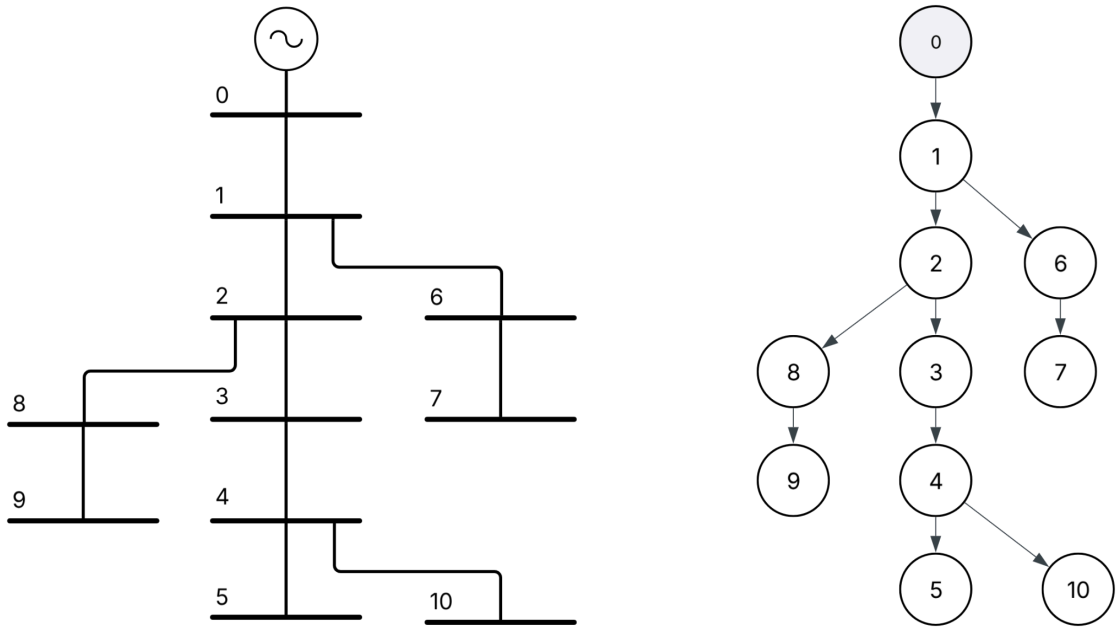
em que cada aresta (v_m, v_k) estabelece uma conexão orientada do vértice v_m para o vértice v_k. Em redes de distribuição radiais, essa orientação é normalmente definida do barramento de referência em direção aos barramentos a jusante, refletindo a hierarquia topológica da rede.

Assim, um ramo que conecta o barramento m ao barramento k, com m sendo o barramento pai, a montante, e k o barramento filho, a jusante, a aresta correspondente é dada por:

$$e_{mk} = (v_m, v_k) \tag{62}$$

Dessa forma, a topologia da rede radial é completamente descrita pelos conjuntos V e E, permitindo a identificação dos ramos montantes e dos ramos jusantes utilizados nos processos de varredura direta e reversa.

Figura 9 – Representação de uma rede de distribuição por grafo orientado



Fonte: Produção do próprio autor.

3.2 MODELAGEM POR LISTA DE ADJACÊNCIA

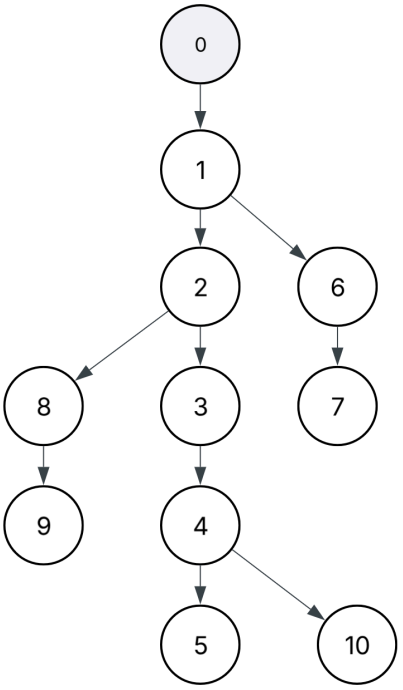
Na modelagem por lista de adjacência, a topologia da rede de distribuição é representada por uma estrutura de dados derivada do grafo orientado G. Para cada vértice v_k pertencente ao conjunto de vértices V, define-se uma lista de adjacência, dada por:

$$Adj(v_k) = \{v_j \in V \mid (v_k, v_j) \in E\} \tag{63}$$

em que $Adj(v_k)$ contém todos os vértices diretamente conectados ao vértice v_k por meio de arestas orientadas de saída. Em sistemas radiais de distribuição, esses vértices representam os barramentos jusantes j ao barramento v_k.

Dessa forma, a topologia radial da rede de distribuição é armazenada por relações de adjacência entre os vértices, em que cada barramento possui a relação de barramentos localizados imediatamente a jusante.

Figura 10 – Exemplo da representação da rede de distribuição por lista de adjacências



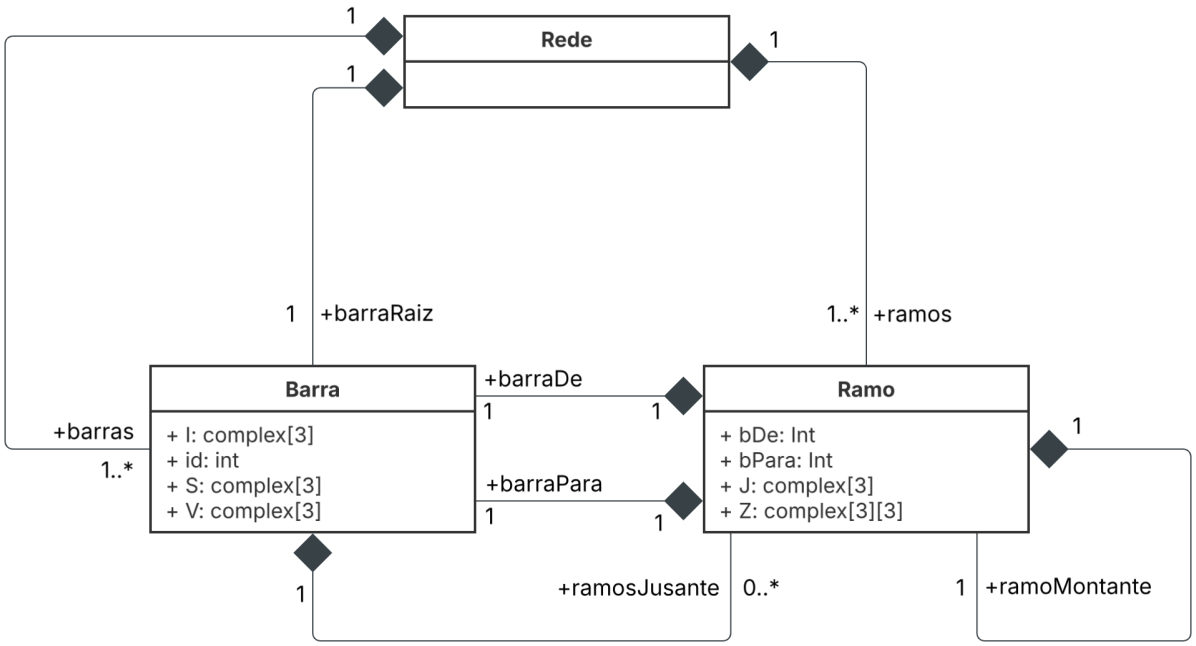
v_k	$Adj(v_k)$	
0	1	
1	2	6
2	3	8
3	4	
4	5	10
5		
6	7	
7		
8	9	
9		
10		

Fonte: Produção do próprio autor.

Assim, ao percorrer a lista a partir do barramento raiz em direção aos barramentos terminais, realiza-se a etapa de varredura direta. Em contrapartida, o percurso no sentido inverso, dos barramentos terminais em direção à subestação, corresponde à etapa de varredura reversa (FERREIRA, 2021).

A travessia pelo grafo construído a partir da rede de distribuição é determinada pela lista de adjacências e sua implementação algorítmica é realizada a partir da modelagem da rede de distribuição por UML (*Unified Modeling Language*):

Figura 11 – Diagrama de classes do modelo de dados para redes de distribuição usando lista de adjacência



Fonte: Adaptado de FERREIRA, 2021.

O modelo de dados é constituído por três classes principais: Rede, Barra e Ramo. A classe Rede agrega todos os barramentos e ramos que compõem o sistema elétrico. Cada Ramo estabelece uma conexão orientada entre dois barramentos, sendo definido por um barramento de origem (*barraDe*) e um barramento de destino (*barraPara*). Além disso, cada Barra armazena uma lista de ramos a jusante (*ramosJusante*), que corresponde à sua lista de adjacência no grafo orientado da rede (FERREIRA, 2021).

Essa estrutura permite representar as relações de conectividade e hierarquia entre os elementos do sistema, fornecendo suporte às etapas de varredura direta e reversa do algoritmo de fluxo de potência.

A utilização do modelo de dados da rede de distribuição representado em UML permite a implementação do algoritmo, simplificado na figura 12, para calcular o fluxo de potência utilizando lista de adjacências.

Figura 12 – Pseudocódigo simplificado do algoritmo para o cálculo de fluxo de potência utilizando lista de adjacências

```
1   // Varredura Direta (Forward Sweep)
2   Para cada ramo em ListaAdj (do início ao fim) faça
3       V(barraPara) = V(barraDe) - Z(ramo) * J(ramo)
4       I(barraPara) = conj(S(barraPara) / V(barraPara))
5   Fim Para
6
7   // Varredura Reversa (Backward Sweep)
8   Para cada ramo em ListaAdj (do fim ao início) faça
9       J(ramo) = I(barraPara)
10      Para cada ramoJusante conectado à barraPara faça
11          J(ramo) = J(ramo) + J(ramoJusante)
12      Fim Para
13  Fim Para
```

Fonte: Produção do próprio autor.

Como a topologia da rede de distribuição é radial, a partir do barramento de referência, que corresponde ao nó raiz do grafo, o algoritmo garante que todos os barramentos e ramos sejam visitados exatamente uma vez, assegurando o percurso completo da rede durante o cálculo do fluxo de potência (FERREIRA, 2021).

Embora a modelagem apresentada seja capaz de representar a rede de distribuição para o algoritmo de varredura direta e reversa, ela depende da construção prévia da lista de adjacência a cada inicialização do programa responsável pela execução do fluxo de potência, a partir da fonte de dados que descreve a estrutura da rede, usualmente em formato XML.

Adicionalmente, deve-se considerar o custo de acesso à lista de adjacência. Embora a representação seja adequada para redes esparsas, o desempenho depende diretamente da localidade de memória e da organização sequencial dos dados (ZHIRKOV, 2018). Quando os ramos não estão armazenados de forma contígua, podem ocorrer padrões de acesso menos eficientes, com degradação do aproveitamento de cache e, consequentemente, do tempo de execução. Na etapa de varredura reversa, por exemplo, observa-se um ponto sensível relacionado à agregação das correntes provenientes dos ramos jusantes (linhas 10–12) devido à

realização de somatórios repetitivos em estruturas com elevado grau de ramificação, o que pode impactar significativamente o desempenho em redes de maior porte.

Na seção seguinte, apresenta-se a modelagem proposta neste trabalho, a qual permite a execução sequencial do algoritmo, eliminando a necessidade de lista de adjacências para o percurso da rede no método de varredura direta e reversa.

3.3 MODELAGEM POR CONTAGEM DE FILHOS

A modelagem por contagem de filhos consiste em explorar a eficiência do processamento computacional por meio da previsibilidade temporal e espacial do acesso à memória, favorecendo um padrão de execução sequencial.

Essa característica contribui para um melhor aproveitamento da hierarquia de memória do sistema, reduzindo acessos dispersos e, consequentemente, ineficiências associadas ao processamento não sequencial (ZHIRKOV, 2018).

Para tanto, explora-se a característica radial das redes de distribuição associada à teoria de grafos orientados. Assume-se que cada vértice possui apenas um único vértice predecessor, caracterizando uma estrutura de árvore enraizada. Essa topologia implica uma relação unidirecional no sentido do fluxo de potência, na qual um barramento pode alimentar múltiplos barramentos a jusante e ser alimentado apenas por um único barramento a montante.

Dessa forma, cada vértice pode armazenar a informação referente ao número de vértices jusantes diretamente conectados. Assim, para o grafo orientado G, define-se o atributo estrutural da contagem de filhos:

$$to(v_k) \;=\; deg^{+}(v_k) \;=\; |\{\,(v_k,\, v_j) \in E\,\}| \tag{64}$$

onde $to(v_k)$ determina a contagem de ramos a jusante v_j conectados ao barramento v_k a partir da função grau de saída (***out-degree***) $deg^{+}(v_k)$.

Com base nessa definição, os vértices com grau de saída nulo $(deg^{+}(v_k) = 0)$ representam os barramentos terminais do sistema, pois não possuem nenhum barramento conectado. Enquanto que a condição $deg^{+}(v_k) > 0$ indica que o barramento correspondente possui ramificações.

Dessa forma, é possível representar a topologia grafo orientado na memória de forma linear, utilizando o atributo estrutural $to(v_k)$ e a posição do elemento no conjunto para o controle das camadas que estão ordenadas hierarquicamente, sem depender da lista de adjacência. Para tanto, define-se o conjunto de conexões C a ser representado na memória:

$$C = \{ (v_k, to(v_k)) \in V \times N \mid k \in n\} \tag{65}$$

Assim, um barramento k, conectado a um barramento m a montante, é representado formalmente pela conexão c_k:

$$c_k = (v_k, to(v_k)) \ , \ k > m \tag{66}$$

Tem-se, portanto, a seguinte representação linear na memória:

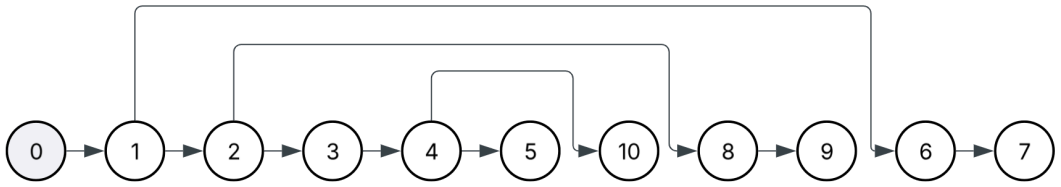
$$C = \{c_0, c_1, c_2, ..., c_n\} \tag{67}$$

A relação hierárquica de cada conexão é estritamente dependente das posições dos elementos no conjunto de conexões C e do atributo estrutural $to(v_k)$ de cada elemento. De forma que a posição dos elementos no conjunto de conexões determina a topologia da rede. Assim, cada conexão deve ser posicionada imediatamente após o elemento montante ou após o último elemento a jusante do elemento montante:

$$\forall (c_m, c_k) \in C \ , \ k > m \tag{68}$$

Como exemplo, a rede de distribuição apresentada na figura 9 pode ser estruturada por meio da abordagem de contagem de filhos, conforme ilustrado na figura 13.

Figura 13 – Representação de uma rede de distribuição pelo método da contagem de filhos



c_k	0	1	2	3	4	5	10	8	9	6	7
$to(v_k)$	1	2	2	1	2	0	0	1	0	1	0

Fonte: Produção do próprio autor.

Não há uma única organização possível, desde que as posições dos elementos do conjunto de conexões C e o atributo estrutural $to(v_k)$ de cada elemento sejam coerentes com a topologia desejada. Por convenção, tratando-se de um problema de movimentação de dados na memória, estabelece-se a inserção de novas conexões na posição de menor custo computacional, a qual ocorre imediatamente após o último elemento a jusante.

Essa planificação garante o acesso contínuo aos elementos do conjunto de conexões C na sequência necessária para a execução das etapas de varredura direta e reversa. A leitura direta do conjunto de conexões permite percorrer a rede da raiz em direção aos barramentos terminais, executando a varredura direta. Analogamente, a leitura do conjunto no sentido oposto realiza o percurso inverso, dos terminais para o barramento de referência, executando a varredura reversa.

A representação pelo método da contagem de filhos proporciona o acesso sequencial aos dados na memória, característica que favorece a localidade de referência e reduz a ocorrência de falhas de *cache*, reduzindo a sobrecarga de execução (ZHIRKOV, 2018).

A navegação pelo conjunto de conexões é controlada pela posição dos elementos no conjunto de conexões e pelo atributo estrutural $to(v_k)$ de cada conexão. Nas seções seguintes, esse mecanismo é detalhado por meio de algoritmos, ilustrando sua aplicação nas etapas de varredura direta e reversa.

3.3.1 Algoritmo de Busca do Último Elemento a Jusante

Dada uma conexão c_k pertencente ao conjunto de conexões C, o último elemento a jusante c_J é dado por:

$$to(v_k) + \sum_{j=k+1}^{D} (to(v_j) - 1) = 0 \quad (69)$$

onde D é o menor índice limite tal que a soma acumulada seja igual a zero.

Para o caso em que $D = k$, o barramento k não apresenta derivações. Isso significa que o seu grau de saída é nulo $(deg^{+}(v_k) = 0)$ representando, portanto, um barramento terminal do sistema. Essa definição pode ser implementada através do pseudocódigo da figura 14.

A conexão $c_D$obtida pela equação (69) fornece o último elemento a jusante da conexão c_k. Portanto, a posição $D + 1$ é a posição para o caso de inserção com menor movimentação de elementos na memória, respeitando a topologia da rede.

Figura 14 – Pseudocódigo do algoritmo de busca do último elemento a jusante

```
1   Função ultimo_filho_de(conexão, conexões)
2       contador = To(conexão)
3
4       Se (contador == 0)
5           Retorne Nulo
6       Fim Se
7
8       posição = posição(conexão)
9       limite = tamanho_máximo(conexões)
10
11      Enquanto (contador > 0) E (posição + 1 < limite)
12          posição = posição + 1
13          contador = contador + To(conexões[posição])
14          contador = contador - 1
15      Fim Enquanto
16
17      Se (contador < 0) Ou (posição == limite)
18          Retorne Erro
19      Senão
20          Retorne posição
21      Fim Se
22  Fim Função
```

Fonte: Produção do próprio autor.

3.3.2 Algoritmo de Busca do Elemento Imediatamente a Montante

Dada uma conexão c_k pertencente ao conjunto de conexões C, o elemento pai c_H imediatamente conectado a montante da conexão é dado:

$$\sum_{0 \leq m \leq k-1}^{H} (\, to(v_m) \, - \, 1) \, \geq \, 0 \tag{70}$$

onde H é o menor índice limite tal que a soma acumulada seja igual ou maior que zero. Essa definição pode ser implementada através do pseudocódigo da figura 15.

Figura 15 – Pseudocódigo do algoritmo de busca do elemento pai

```
1   Função elemento_pai_de(conexão, conexões)
2       contador = 0
3
4       posição = posição(conexão)
5
6       Enquanto (posição > 0) E (contador < 0)
7           posição = posição - 1
8           contador = contador + To(conexões[posição])
9           contador = contador - 1
10      Fim Enquanto
11
12      Retorne posição
13
14  Fim Função
```

Fonte: Produção do próprio autor.

A partir dos algoritmos apresentados é possível observar que posição dos elementos no conjunto de conexões e o atributo estrutural $to(v_k)$ de cada conexão representam completamente a topologia da rede.

O emprego de uma estrutura do tipo pilha permite percorrer hierarquicamente a rede de distribuição representada pelo método da contagem de filhos, identificando as relações topológicas e armazenando os valores necessários para a execução da varredura reversa e direta.

O conteúdo armazenado na pilha depende da necessidade de cada varredura. A varredura reversa deve armazenar as correntes dos ramos que conectam os barramentos a jusante de um determinado barramento que está sendo

acessado pelo algoritmo, ou que será acessado em algum momento posterior da varredura.

Enquanto que varredura direta deve armazenar a tensão do barramento imediatamente a montante de um determinado barramento que está sendo acessado pelo algoritmo, ou que será acessado em algum momento posterior da varredura.

A dinâmica do acesso utilizando a pilha está representada de maneira simplificada nas figuras 16 e 18, que indicam quais conexões possuem informações armazenadas no conteúdo da pilha no momento em que determinada conexão c_k é acessada.

As seções seguintes apresentam a implementação das etapas de varredura reversa e direta utilizando o método da contagem de filhos.

3.3.3 Algoritmo de Varredura Reversa

A organização dos elementos no conjunto de conexões C estabelece, naturalmente, a sequência correta de iteração para a varredura reversa quando o conjunto é percorrido no sentido reverso.

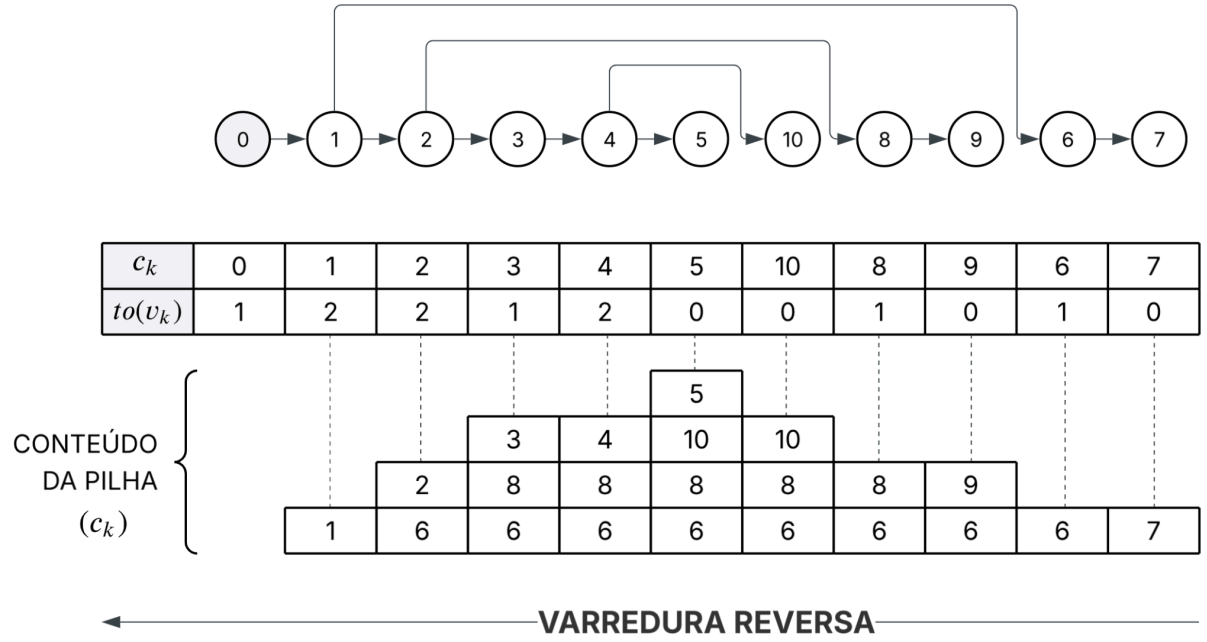
Independentemente da quantidade de ramificações e da ordenação dos elementos na memória, desde que haja coerência com a topologia desejada, o método da contagem de filhos fornece o acesso sequencial aos elementos armazenados na memória.

Contudo, uma estrutura do tipo pilha deve ser usada para armazenar as correntes dos ramos a jusante, cujo valor será utilizado no ramo pai, imediatamente a montante, de cada trecho da rede.

Dessa forma, a varredura reversa armazena as correntes $\hat{J}_{mk}$ do ramo que conecta os barramentos v_k, das conexões c_k, com o seu barramento pai v_m, da conexão c_m.

Cada conexão empilha a corrente do ramo que a conecta ao barramento pai. Essa corrente é utilizada e desempilhada ao acessar a conexão do barramento pai, definindo o ciclo de vida do conteúdo da pilha.

Figura 16 – Representação simplificada do conteúdo da pilha para a varredura reversa



Fonte: Produção do próprio autor.

O pseudocódigo da figura 17 demonstra a implementação do método no algoritmo de varredura reversa.

Figura 17 – Pseudocódigo do algoritmo de varredura reversa

```
1   Função varredura_reversa(conexões)
2        Para cada conexão em conexões (do fim ao início) faça
3            I(conexão) = conj( S(conexão) / V(conexão) )
4            J(conexão) = I(conexão)
5
6            número_de_filhos = To(conexão)
7
8            Repita número_de_filhos vezes
9                J(conexão) = topo(pilha_I)
10
11                desempilhar(pilha_I)
12            Fim Repita
13
14            empilhar(pilha_I, J(conexão))
15
16       Fim Para Cada
17
18       desempilhar(pilha_I)
19
20    Fim Função
```

Fonte: Produção do próprio autor.

De acordo com o pseudocódigo, a execução da varredura reversa não requer a lista de adjacências. Apenas a ordenação prévia do conjunto de conexões permite que o processamento seja realizado por meio de uma simples iteração sequencial em ordem inversa, garantindo que os barramentos a jusante sejam processados antes de seus respectivos ancestrais.

Dessa forma, a sequência de operações necessária ao algoritmo é obtida diretamente a partir da estrutura dos dados, dispensando percursos adicionais na rede e simplificando sua implementação.

3.3.4 Algoritmo de Varredura Direta

A organização dos elementos no conjunto de conexões C estabelece, naturalmente, a sequência correta de iteração para a varredura direta quando o conjunto é percorrido no sentido direto.

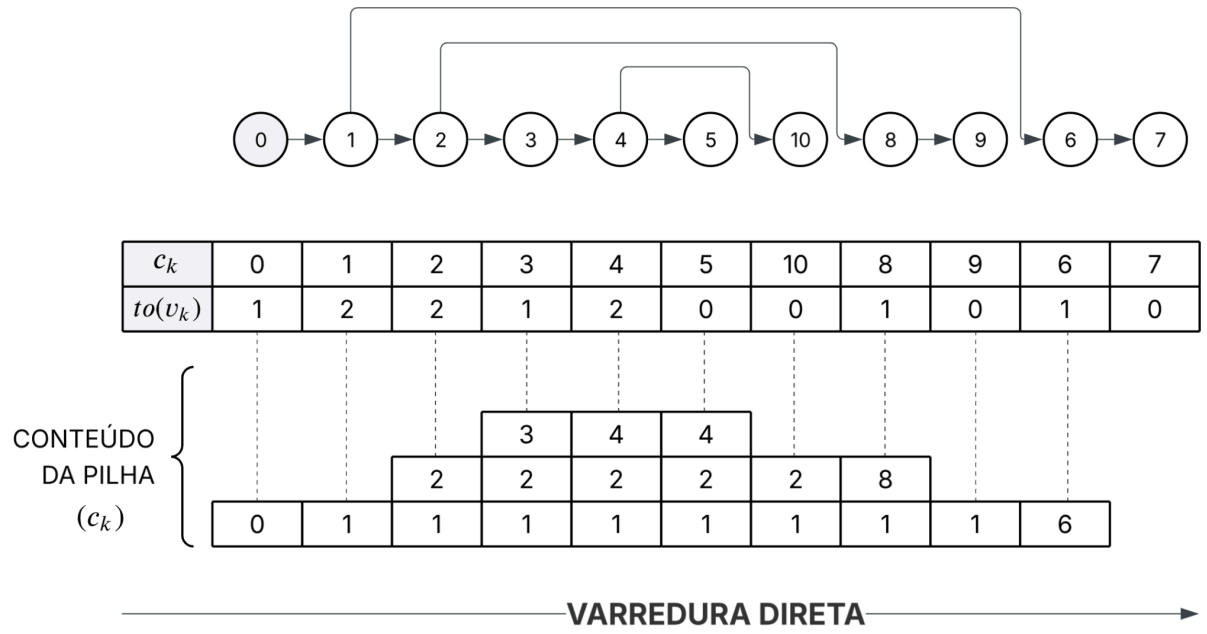
Contudo, emprega-se uma pilha para armazenar a tensão das camadas dos barramentos a montante, cujo valor será utilizado nos barramentos filhos, a jusante, de cada trecho da rede.

Dessa forma, varredura direta armazena as tensões $\widehat{V}_k$ do barramento v_k da conexão c_k, para determinar a tensão nos barramentos a jusante v_j, dados pelas conexões c_j. Entretanto, o atributo estrutural $to(v_k)$ do barramento v_k também deve ser armazenado na pilha para o controle das relações hierárquicas durante a varredura direta.

Caso um determinado barramento possua barramentos conectados imediatamente a jusante, sua tensão e o seu atributo estrutural são armazenados na pilha. Conforme a varredura avança, o algoritmo utiliza o conteúdo da pilha para obter a tensão referente ao barramento imediatamente a montante e realiza o controle do percurso nas ramificações, decrementando o atributo estrutural correspondente. Caso o atributo estrutural seja reduzido a zero, o barramento armazenado anteriormente não possuirá mais conexões pendentes.

Dessa forma, a pilha é responsável por armazenar a tensão utilizada pelo algoritmo para calcular a tensão no barramento imediatamente a jusante, bem como por identificar novas ramificações.

Figura 18 – Representação simplificada do conteúdo da pilha para a varredura reversa



Fonte: Produção do próprio autor.

O pseudocódigo da figura 19 demonstra a aplicação do método para o algoritmo de varredura direta.

Figura 19 – Pseudocódigo do algoritmo de varredura direta

```
1   Início varredura_direta(conexões)
2
3       empilhar(pilha_V, (V(conexões[0]), To(conexões[0])))
4
5       Para cada conexão em conexões (do início ao fim) faça
6
7           V(conexão) = V(topo(pilha_V)) - Z(conexão) * J(conexão)
8
9          To(topo(pilha_V)) = To(topo(pilha_V)) - 1
10
11          Se (To(topo(pilha_V)) == 0) Então
12              desempilhar(pilha_V)
13          Fim Se
14
15          Se (To(conexão) > 0) Então
16              empilhar(pilha_V, (V(conexão), To(conexão)))
17          Fim Se
18      Fim Para Cada
19   Fim Função
```

Fonte: Produção do próprio autor.

A ordenação prévia do conjunto de conexões permite que o processamento seja realizado por meio de uma simples iteração sequencial em ordem direta, garantindo que os barramentos a montante sejam processados antes de seus respectivos ancestrais.

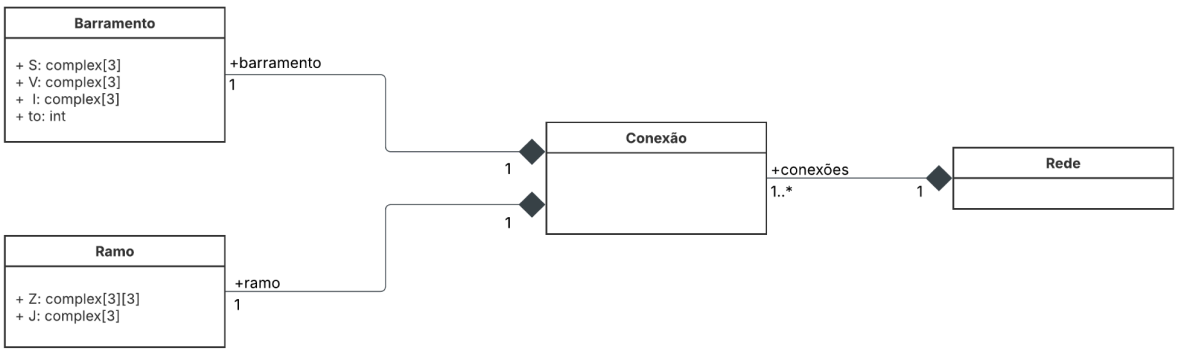
3.3.5 Modelagem da Rede

Até o momento, a estrutura proposta foi apresentada sob uma perspectiva abstrata, enfatizando sua formulação matemática e as propriedades que fundamentam o método da contagem de filhos. Essa abordagem permitiu estabelecer os conceitos teóricos necessários para representar a topologia radial da rede de distribuição.

Entretanto, a aplicação prática do algoritmo requer que essas abstrações sejam traduzidas para uma estrutura computacional capaz de armazenar e manipular as informações da rede. Nesse contexto, a modelagem por UML fornece os elementos necessários para representar os dados utilizados pelo método de varredura direta e reversa, definindo os atributos e relacionamentos que permitem a execução do algoritmo.

Assim, o diagrama de classes do modelo de dados apresentado na figura 20 detalha os componentes da modelagem responsáveis por armazenar as informações topológicas e elétricas para o cálculo do fluxo de potência.

Figura 20 – Diagrama de classes do modelo de dados para redes de distribuição usando o método da contagem de filhos



Fonte: Produção do próprio autor.

O diagrama UML apresenta uma modelagem para uma rede de distribuição elétrica na forma de um grafo utilizando o método proposto.

A classe Barramento representa os vértices da rede e contém os atributos S, correspondente ao vetor trifásico de potência complexa; V, correspondente ao vetor trifásico de tensões; I, correspondente ao vetor trifásico de correntes; e to, utilizado para armazenar atributo estrutural $to(v_k)$ do barramento.

A classe Ramo representa as arestas do grafo e possui os atributos Z, correspondente à matriz de impedâncias trifásica da linha, e J, correspondente ao vetor trifásico de correntes do ramo.

As classes Barramento e Ramo são agregadas pela classe Conexão, que estabelece a relação entre os elementos elétricos da rede.

Por sua vez, o conjunto de conexões compõe a classe Rede, responsável por representar integralmente a topologia da rede de distribuição e suas características elétricas, permitindo sua utilização em algoritmos de fluxo de potência e análise estrutural. Essa modelagem em blocos aninhados garante que as propriedades topológicas e elétricas coexistam de forma contínua na memória.

Nota-se que, embora o método da contagem de filhos proporcione uma representação sequencial na memória, sua execução no contexto do método de varredura direta e reversa depende do uso de uma estrutura de dados do tipo pilha. Nesse cenário, as operações fundamentais associadas à pilha apresentam complexidade computacional constante $O(1)$ (SZWARCFITER; MARKENZON, 2010), garantindo eficiência operacional independentemente do tamanho da rede.

Dessa forma, ainda que a organização estrutural dos dados influencie a modelagem do problema, o desempenho das operações auxiliares permanece assintoticamente estável, o que é essencial para a escalabilidade do algoritmo em sistemas de maior porte. Além disso, de maneira análoga ao método da lista de adjacências, o método da contagem de filhos também requer a construção prévia da rede a partir dos dados de entrada.

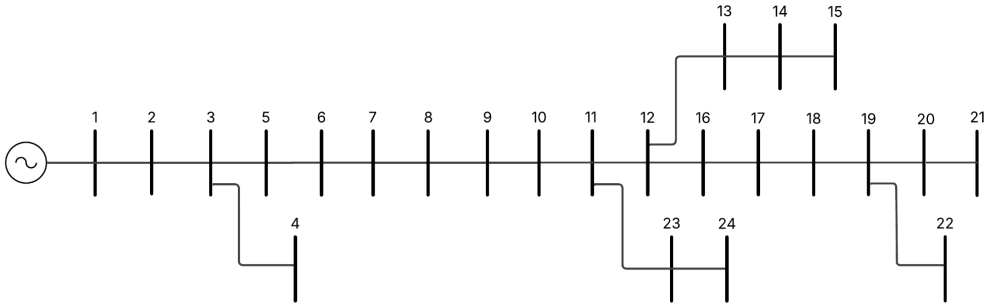
Estabelecida a metodologia proposta e definidos os procedimentos de modelagem e cálculo, apresentam-se na próxima seção os resultados obtidos com a aplicação dos dois métodos em duas redes de distribuição com diferentes dimensões.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A fim de verificar a eficiência do método proposto, foram realizados experimentos computacionais cujos resultados são apresentados nesta seção. As análises baseiam-se na comparação do tempo de execução entre o método da contagem de filhos e o método da lista de adjacências, uma vez que ambos executam a mesma tarefa algorítmica, diferindo principalmente na forma de representação da rede. Dessa maneira, o tempo de execução constitui uma métrica para avaliar o custo computacional de cada abordagem e, consequentemente, sua eficiência prática.

Os experimentos foram realizados em duas redes de distribuição distintas, compostas por 25 e 806 barramentos, com o objetivo de avaliar o desempenho e a escalabilidade dos métodos em diferentes níveis de complexidade. A utilização de sistemas de diferentes portes permite analisar o impacto do aumento do número de barramentos sobre o esforço computacional requerido pelos algoritmos.

Figura 21 – Rede de distribuição de 25 barramentos utilizada no experimento



Fonte: Produção do próprio autor.

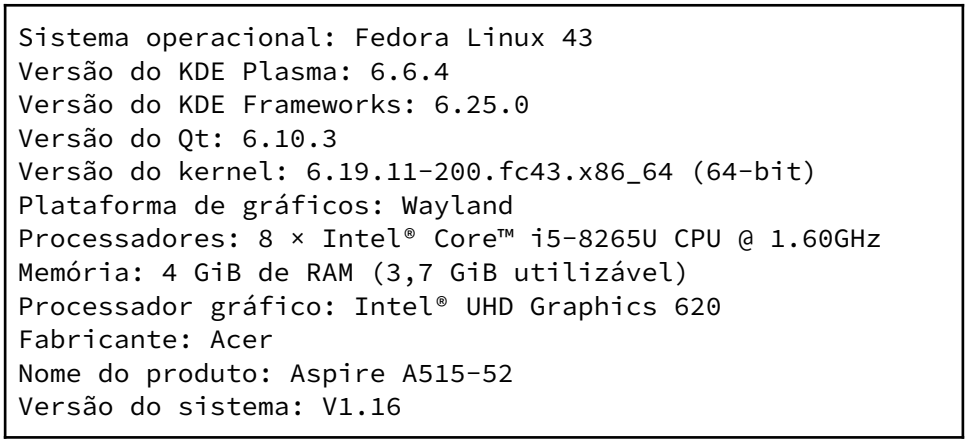
Cada conjunto de testes de cada algoritmo, sob cada configuração de rede específica, foi submetida a um ciclo de 10.000 repetições consecutivas, cada qual com uma etapa de aquecimento (*warmup)* com 200 repetições com o objetivo de mitigar a inércia do sistema, estabilizando os caches e garantindo que as medições principais refletissem o desempenho do algoritmo em regime permanente de execução.

Adicionalmente, para cada rede e método avaliados, os testes foram executados nos modos balanceado e desempenho do sistema operacional *Linux* do

hardware especificado na figura 22. Essa análise tem como objetivo investigar a influência das políticas de gerenciamento de energia sobre o tempo de processamento e a estabilidade dos resultados obtidos.

A diferença principal entre os dois perfis está no foco dado ao consumo de energia e ao desempenho: o perfil Balanceado (*balanced-battery*) é projetado para dispositivos portáteis, buscando equilibrar um nível adequado de desempenho com a conservação de energia para estender a autonomia da bateria. Por outro lado, o perfil desempenho (*throughput-performance*) é focado em obter a máxima taxa de transferência de dados, desativando completamente qualquer mecanismo de economia de energia e forçando o regulador (*CPU governor*) a operar permanentemente em modo de alta performance (TUNED PROJECT, 2026).

Figura 22 – Especificação do *hardware* utilizado para os experimentos



Fonte: Produção do próprio autor.

Cada método foi implementado separadamente em dois *softwares* desenvolvidos em *C++*, explorando as particularidades de cada abordagem. Ambos os programas foram compilados utilizando as *flags* de compilação "-O3", *"-march=native"*, *"-mtune=native"* e *"-flto"*.

A *flag "-O3"* habilita um conjunto de otimizações voltadas ao desempenho, incluindo otimizações de laços, vetorização e expansão de funções (*inlining*). A *flag "-march=native"* permite que o compilador gere código específico para a arquitetura do processador utilizado na compilação, explorando instruções e recursos de *hardware* disponíveis. A *flag "-mtune=native"* ajusta a organização e o agendamento das instruções para a microarquitetura do processador, visando melhorar a eficiência

de execução. Por fim, a *flag "-flto" (Link Time Optimization)* possibilita otimizações globais durante a etapa de ligação (FREE SOFTWARE FOUNDATION, 2026).

Sendo que cada *software* foi executado utilizando a sequência de comandos *"sudo chrt -f 99 taskset -c 0"*, com o objetivo de reduzir interferências do sistema operacional nas medições de desempenho. O comando *"chrt -f 99"* executa o processo sob a política de escalonamento em tempo real, atribuindo-lhe a prioridade máxima disponível para processos de usuário, reduzindo a frequência de interferências externas durante a execução. Já o comando *"taskset -c 0"* restringe a execução do processo ao núcleo lógico 0 do processador, evitando migrações entre núcleos e reduzindo variações decorrentes de diferenças no estado dos *caches* e do escalonamento da *CPU* (*Central Processing Unit*).

Além disso, utilizou-se o comando *“sync; echo 3 > /proc/sys/vm/drop_caches”* para liberar os caches de memória acumulados pelo sistema *Linux*, onde a primeira parte força a gravação de todos os dados pendentes da memória para o disco, e a segunda limpa os *page caches*, *dentries* e *inodes*, redefinindo o estado dos *caches* gerenciados pelo sistema operacional e reduzindo possíveis interferências decorrentes de dados previamente armazenados em memória que, por sua vez, contribuem para a repetibilidade das medições. (LINUX KERNEL ORGANIZATION, 2026).

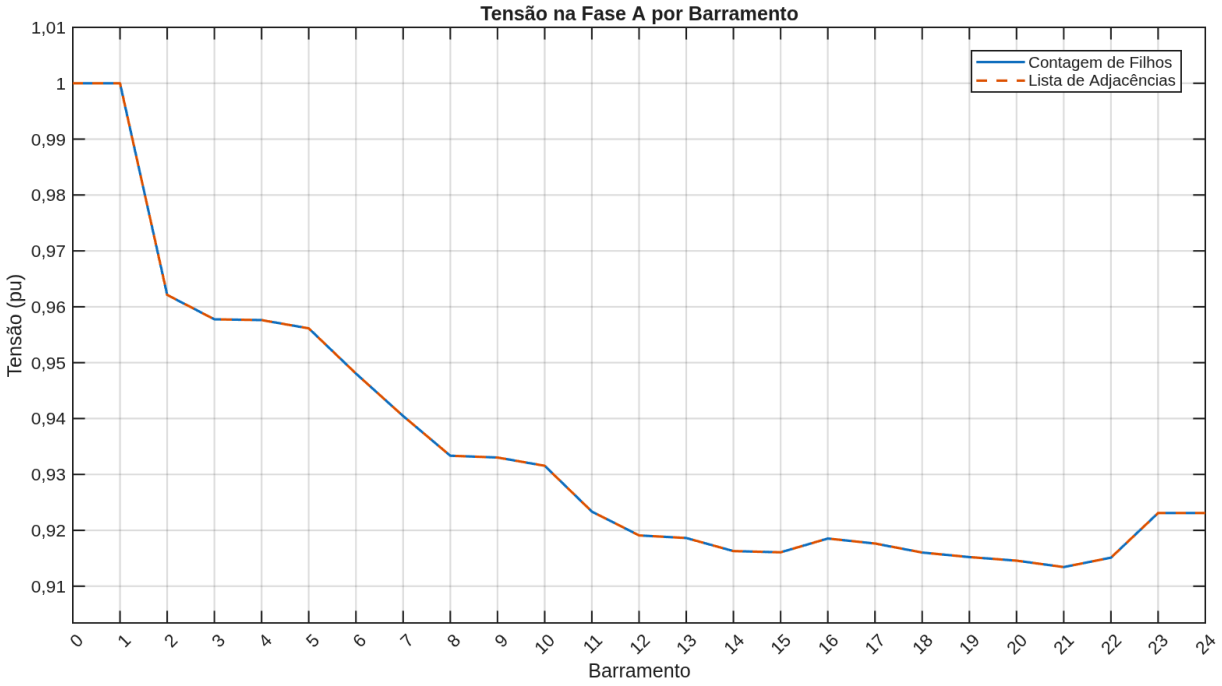
As seções seguintes apresentam os resultados da solução do problema de fluxo de potência para cada rede de distribuição, seguidos da comparação de desempenho entre os dois métodos.

4.1 SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE FLUXO DE POTÊNCIA

Após a execução de cada algoritmo, são obtidos os valores das tensões nos barramentos e das correntes nos ramos que satisfazem o critério de convergência, caracterizando a solução do problema de fluxo de potência.

Com o objetivo de comparar a precisão e a estabilidade numérica dos métodos, as figuras 23 a 30 apresentam a comparação entre os resultados obtidos no cálculo do fluxo de potência para a fase A, adotando-se como referência os valores produzidos pelo método da lista de adjacências.

Figura 23 – Comparação da tensão na fase A por barramento - 25 barras



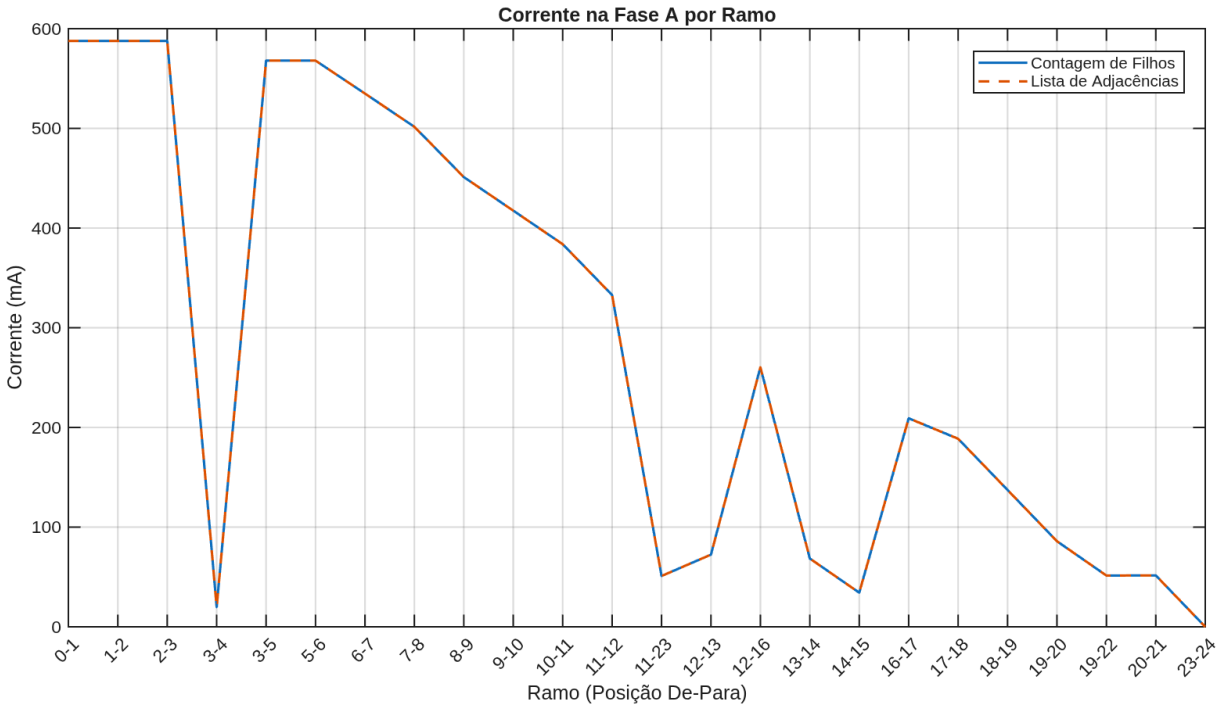
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 24 – Comparação do ângulo de tensão na fase A por barramento - 25 barras



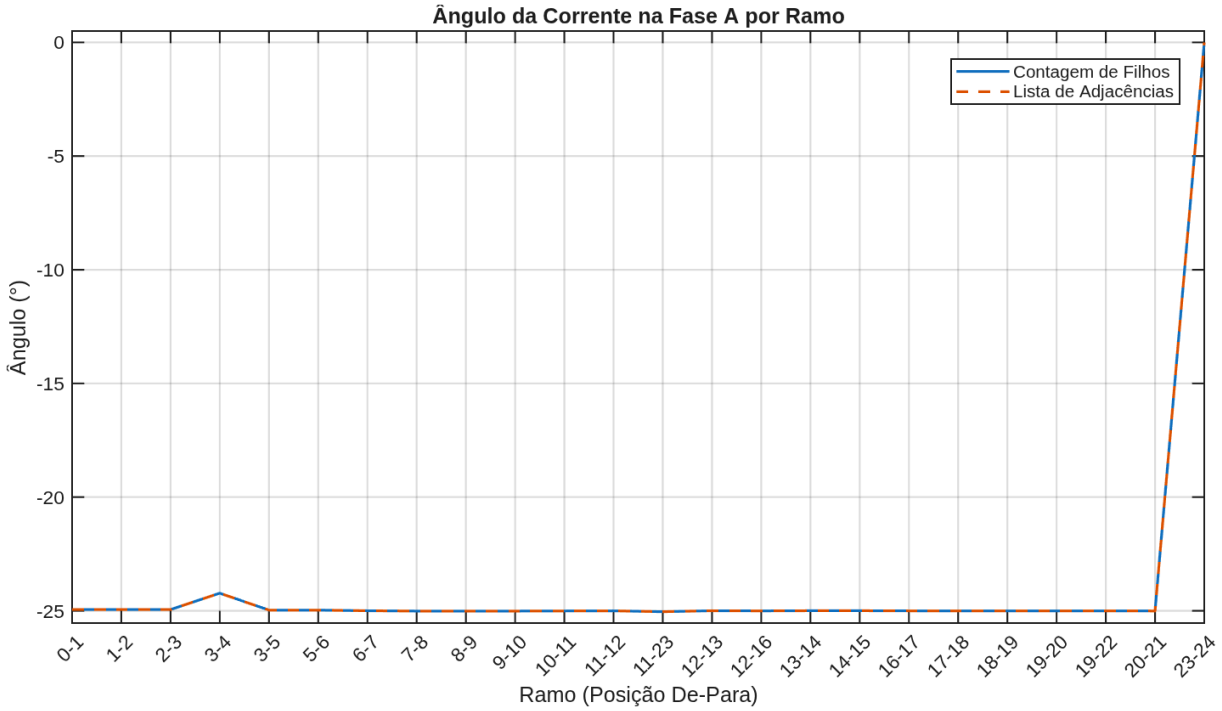
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 25 – Comparação da corrente na fase A por ramo - 25 barras



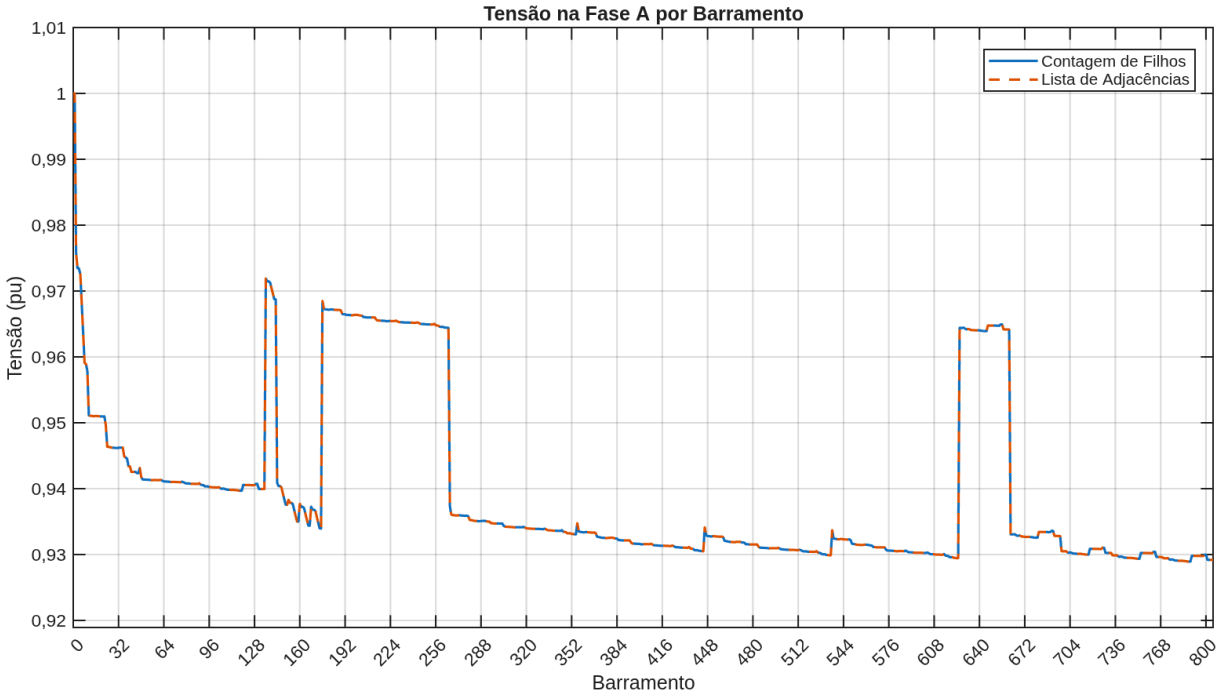
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 26 – Comparação do ângulo da corrente na fase A por ramo - 25 barras



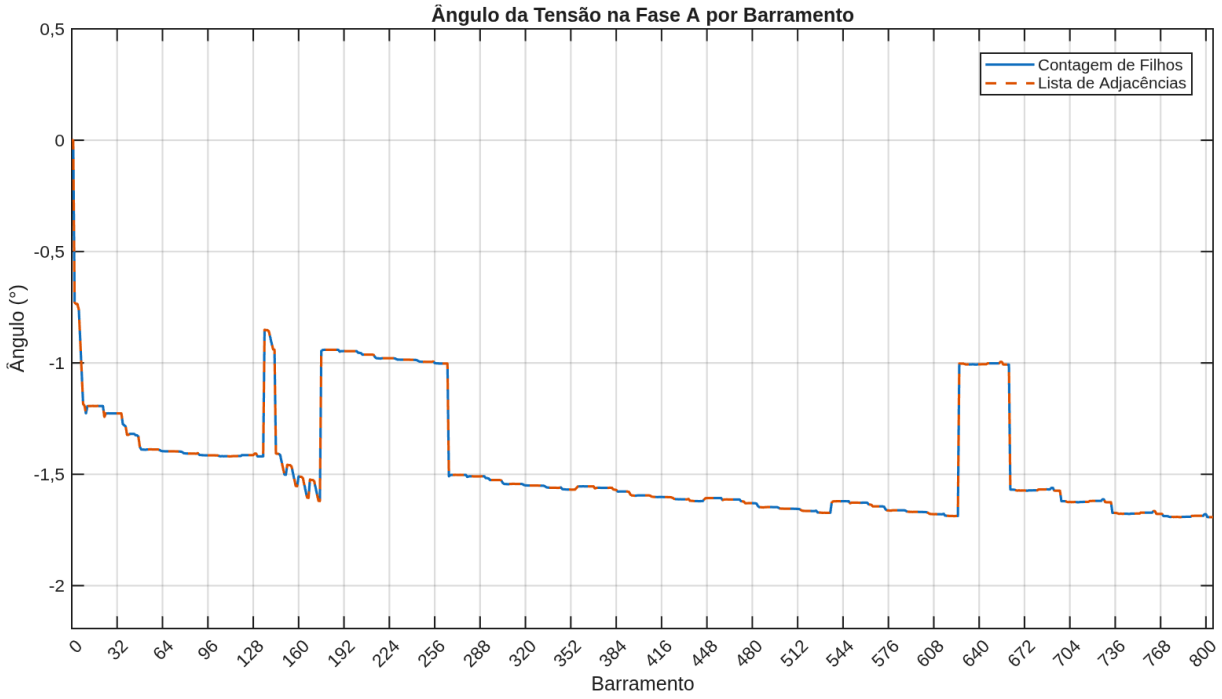
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 27 – Comparação da tensão na fase A por barramento - 806 barras



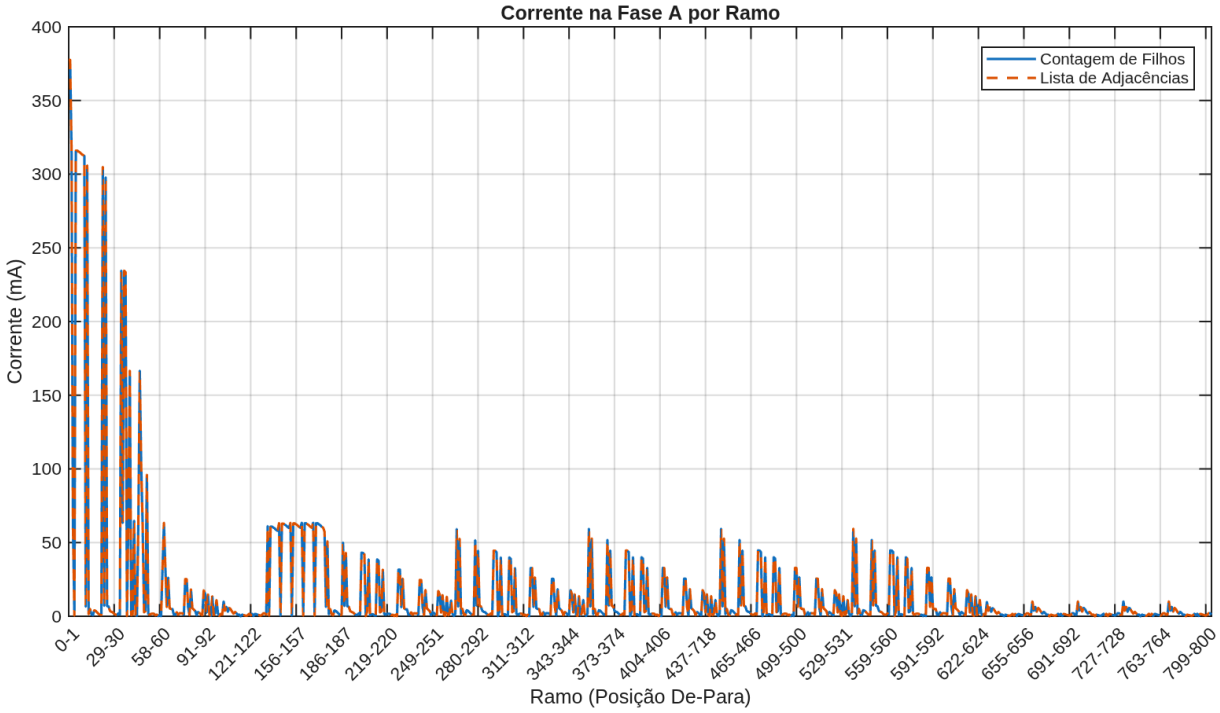
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 28 – Comparação do ângulo de tensão na fase A por barramento - 806 barras



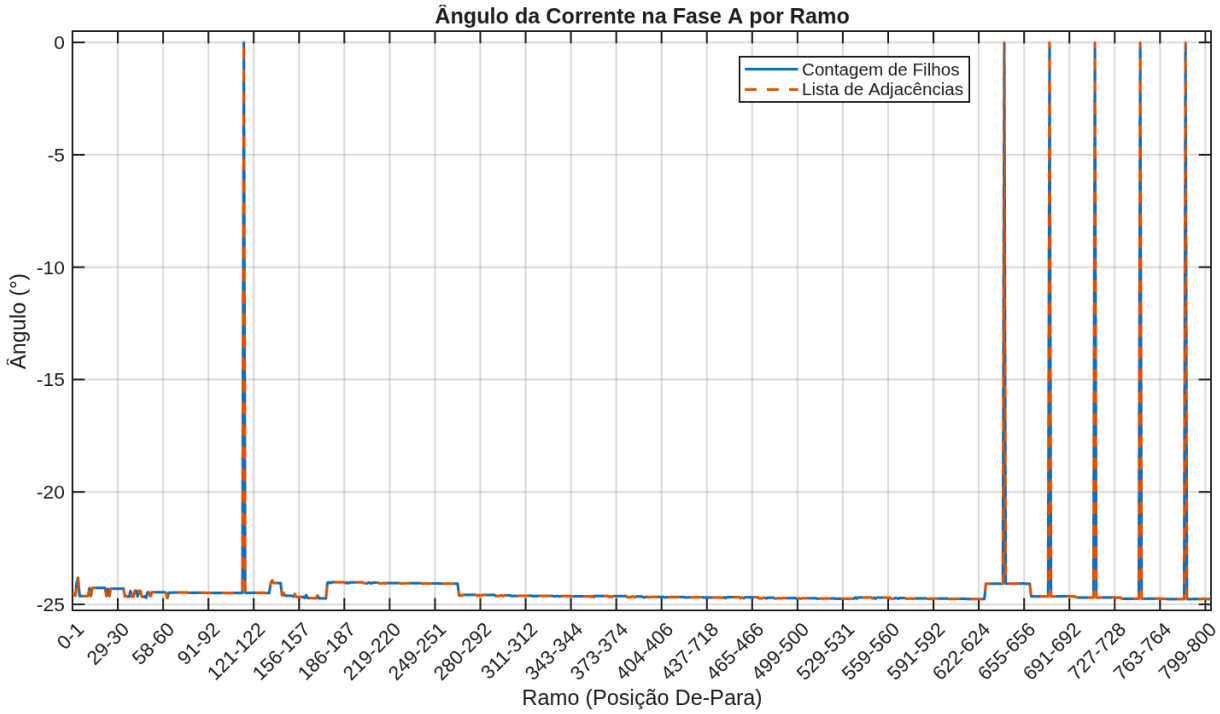
Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 29 – Comparação da corrente na fase A por ramo - 806 barras



Fonte: Produção do próprio autor.

Figura 30 – Comparação do ângulo da corrente na fase A por ramo - 806 barras



Fonte: Produção do próprio autor.

A partir dos resultados obtidos, verifica-se a confiabilidade e a robustez do método da contagem de filhos na solução do fluxo de potência em sistemas de distribuição. A sobreposição das curvas de magnitude e fase, tanto para o sistema reduzido de 25 barras quanto para o modelo de 806 barras, evidencia a acurácia do método proposto em relação à metodologia de referência baseada na lista de adjacências.

Além disso, a convergência estável e a manutenção de erro percentual nulo na magnitude das tensões reforçacm que o aumento da escala da rede não acarreta degradação da precisão dos resultados. Os desvios residuais identificados decorrem das limitações intrínsecas da representação computacional em ponto flutuante e dos erros de arredondamento acumulados ao longo das operações algébricas iterativas.

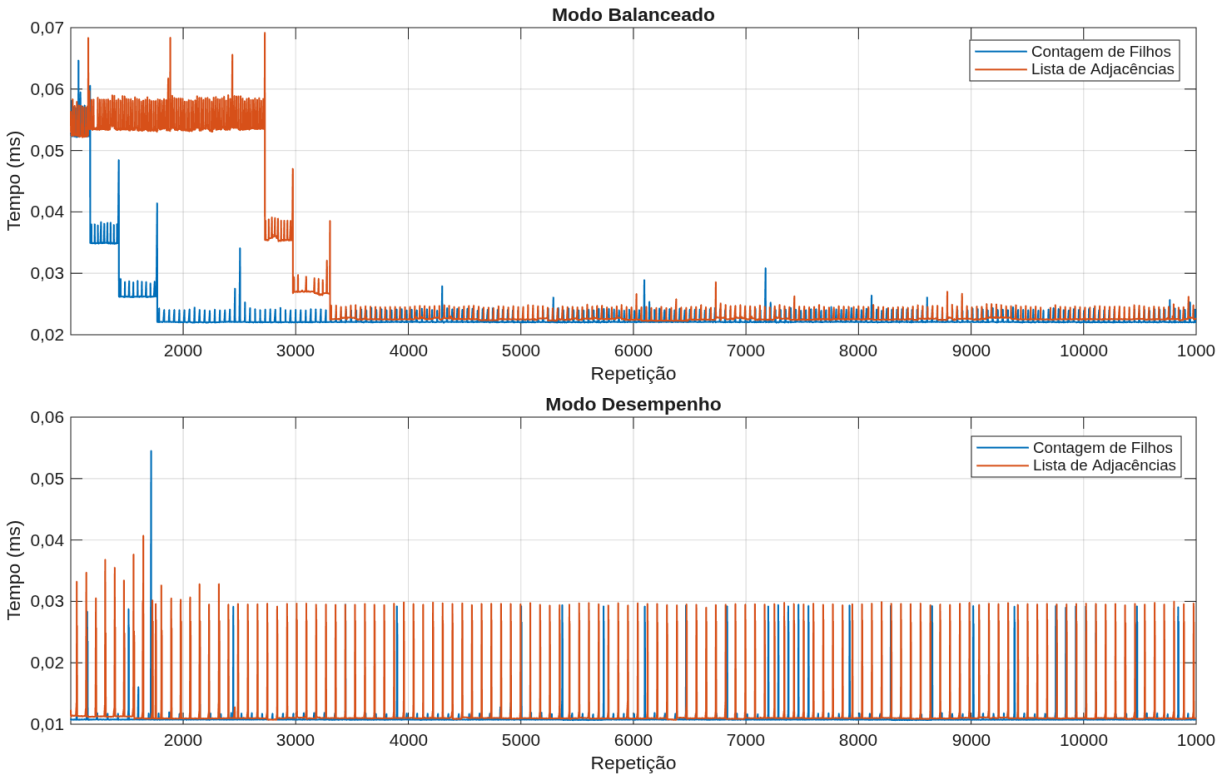
Observa-se que os erros absolutos máximos se limitam a ordens de grandeza de 10^{-4} grau para os ângulos e mA para as correntes. Consequentemente, essas divergências podem ser consideradas desprezíveis para fins práticos de engenharia, uma vez que não exercem influência significativa sobre a análise operativa ou o planejamento da rede elétrica estudada. As soluções completas do problema de fluxo de potência para a rede de 25 barramentos, obtidas por ambos os métodos, são apresentadas no apêndice B.

Após a validação do modelo proposto quanto à precisão e à estabilidade numérica, a próxima seção apresenta a comparação do desempenho computacional entre as metodologias avaliadas.

4.2 DESEMPENHO COMPUTACIONAL DOS MÉTODOS

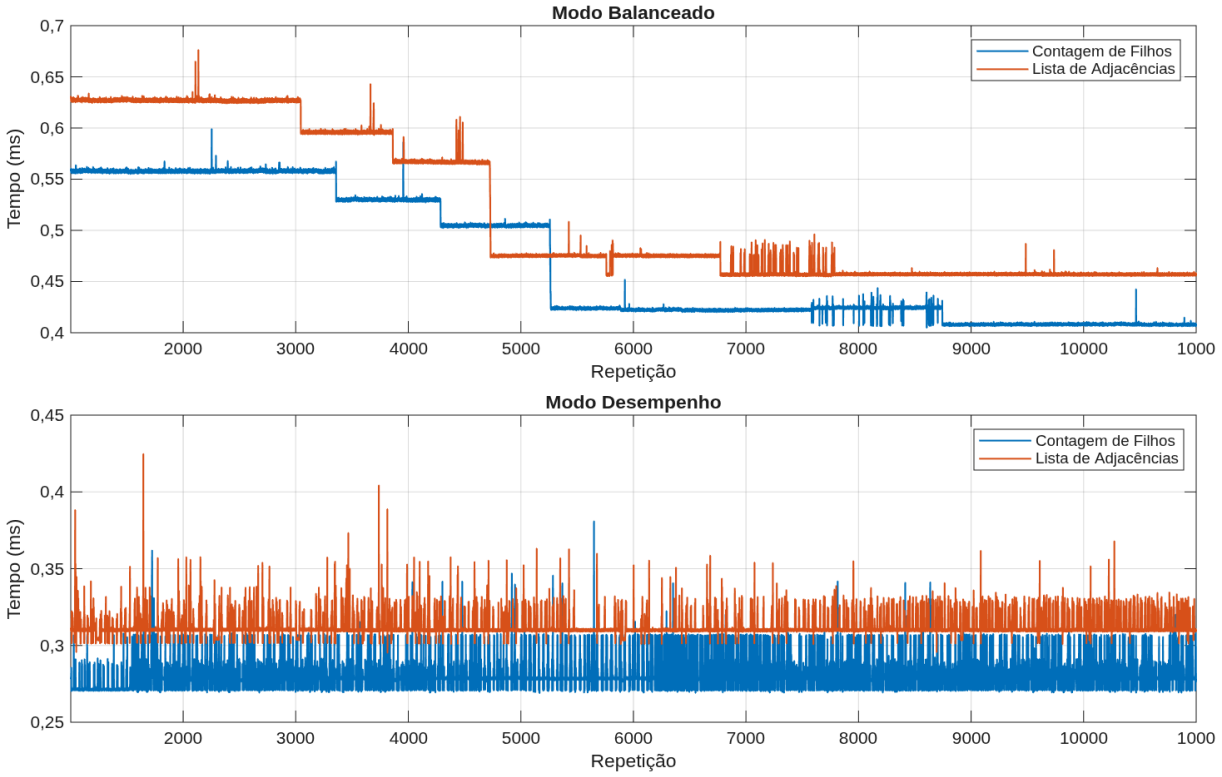
Os resultados cronométricos dos experimentos são apresentados nas figuras 31 e 32, que comparam os tempos de execução dos métodos de contagem de filhos e de lista de adjacências nos modos balanceado e desempenho, permitindo uma análise comparativa da eficiência computacional e da escalabilidade de ambos os métodos.

Figura 31 – Comparação do tempo de execução para 25 barramentos - Modo balanceado e de desempenho



Fonte: Produção do próprio autor

Figura 32 – Comparação do tempo de execução para 806 barramentos - Modo balanceado e de desempenho



Fonte: Produção do próprio autor.

Os tempos médios de execução dos métodos são apresentados nas tabelas 1 e 2, enquanto a análise comparativa, incluindo o tempo reduzido e o ganho percentual, é apresentada na tabela 3.

Tabela 1 – Tempo médio de execução do método da lista de adjacências - Método de referência

Quantidade de Barramentos	Modo	Tempo Médio $[ms]$
25	Balanceado	0,0284
25	Desempenho	0,0114
806	Balanceado	0,5168
806	Desempenho	0,3117

Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 2 – Tempo médio de execução do método da contagem de filhos

Quantidade de Barramentos	Modo	Tempo Médio $[ms]$
25	Balanceado	0,0231
25	Desempenho	0,0109
806	Balanceado	0,4693
806	Desempenho	0,2784

Fonte: Produção do próprio autor.

Tabela 3 – Comparação do tempo de execução da contagem de filhos com o método de referência

Quantidade de Barramentos	Modo	Redução $[ms]$	Ganho (%)
25	Balanceado	0,0053	18,66
25	Desempenho	0,0005	4,39
806	Balanceado	0,0475	9,19
806	Desempenho	0,0333	10,68

Fonte: Produção do próprio autor.

Os resultados experimentais evidenciam que o algoritmo de contagem de filhos apresentou desempenho computacional superior ao método da lista de adjacências, adotado como referência, em todos os cenários analisados.

Na rede de 25 barramentos, o método baseado em contagem apresentou ganhos de 18,66% no modo balanceado e 4,39% no modo desempenho. Esse comportamento é explicado pelo tamanho reduzido da rede, o que minimiza diferenças relacionadas ao acesso à memória entre as abordagens em alto desempenho, pois no modo desempenho o tempo de execução atinge valores relativamente baixos, passando a ser mais influenciado por limitações do próprio hardware e por custos fixos de execução, o que reduz a distinção entre os métodos. Enquanto que, no modo balanceado, esses efeitos são menos pronunciados, permitindo que a eficiência da abordagem seja mais evidente.

A avaliação sob diferentes políticas de gerenciamento de energia também confirmou a robustez da metodologia empregada. Observou-se uma redução significativa nos tempos de execução ao se utilizar o modo desempenho em comparação ao modo balanceado de cada método para ambas as redes estudadas.

No modo balanceado, verificou-se um comportamento inicial caracterizado por sucessivos patamares de redução do tempo de execução, refletindo o período de adaptação do regulador de frequência da CPU até o estabelecimento do regime permanente de operação. Em contrapartida, no modo desempenho, os algoritmos operaram próximos de sua menor latência desde as primeiras iterações. Ressalta-se que os picos transitórios observados nesse modo são inerentes ao ruído de fundo do sistema operacional, ocorrendo mesmo sob condições rigorosas de isolamento de núcleo e escalonamento com prioridade.

Na rede de 806 barramentos, o método baseado na contagem de filhos apresentou ganhos de 9,19% no modo balanceado e 10,68% no modo desempenho. Esse comportamento é explicado pelo aumento da complexidade da rede, uma vez que o desempenho superior do método proposto está diretamente associado ao acesso sequencial às conexões do sistema, o que favorece a localidade espacial dos dados em memória e reduz a quantidade de acessos indiretos necessários durante a execução do algoritmo.

Em contraste, a representação por lista de adjacências demanda um número de acessos a estruturas de dados, geralmente, não contíguas, resultando em maior sobrecarga computacional. Dessa forma, a diferença de desempenho torna-se mais evidente à medida que o número de barramentos da rede de distribuição aumenta, justificando o aumento do ganho observado para o método da contagem de filhos em sistemas de maior porte.

5 CONCLUSÕES

As redes de distribuição de energia elétrica apresentam, em sua maioria, topologia predominantemente radial e elevada resistência e baixa reatância, características que comprometem a eficiência de métodos clássicos de fluxo de potência baseados na inversão de matrizes Jacobianas, devido ao elevado custo computacional e à sensibilidade numérica associada à convergência.

Nesse contexto, o método de varredura direta e reversa destaca-se por explorar diretamente a estrutura em árvore da rede, viabilizando a atualização iterativa desacoplada de correntes e tensões com eficiência computacional e maior robustez numérica. Entretanto, seu desempenho permanece fortemente dependente da estratégia de representação topológica da rede e do padrão de acesso à memória, fatores que impactam diretamente o custo das operações de travessia da rede.

A partir dessa dependência estrutural, os resultados obtidos indicam que a representação baseada no método de contagem de filhos supera a representação em lista de adjacências na execução do cálculo de fluxo de potência por varredura direta e reversa para redes de distribuição.

Observou-se um ganho na redução do tempo de execução de 18,66% para 25 barramentos no modo balanceado, 4,39% para 25 barramentos no modo desempenho, 9,19% para 806 barramentos no modo balanceado e 10,68% para 806 barramentos no modo desempenho, mantendo-se a equivalência numérica da solução do problema de fluxo de potência, com relação ao método de referência.

Esse desempenho superior decorre de um padrão de acesso mais ordenado e previsível aos dados, que favorece a localidade espacial e reduz acessos indiretos à memória. Em contrapartida, a representação por lista de adjacências impõe maior irregularidade de acesso, resultando em maior sobrecarga computacional.

Dessa forma, conclui-se que o método da contagem de filhos constitui uma estratégia eficiente de representação estrutural para algoritmos de varredura em redes de distribuição, reduzindo o custo computacional sem comprometer a acurácia e apresentando potencial de escalabilidade para sistemas de grande porte.

REFERÊNCIAS

BLANCO, Gabriel Victor de Oliveira. **Análise do estimador de estados para redes de distribuição de energia elétrica**. 2024. 97 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" , Ilha Solteira, 2024.

C. REIZ and J. B. LEITE, **"Hardware-In-the-Loop Simulation to Test Advanced Automation Devices in Power Distribution Networks,"** in IEEE Trans. on Power Del., vol. 36, no. 4, pp. 2194-2203, Aug. 2021.

C. S. CHENG e D. SHIRMOHAMMADI, **"A three-phase power flow method for real-time distribution system analysis,"** em IEEE Trans. on Power Syst., vol. 10, no. 2, pp. 671-679, Maio 1995.

D. M. FALCÃO, **"Fluxo de Potência em Redes de Distribuição Radiais,"** COPPE-UFRJ, 2003.

FERREIRA, Diego Santana. **Análise do algoritmo de fluxo de potência e da extensão do modelo de informação comum para redes de distribuição de energia elétrica**. 2021. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira, 2021.

FREE SOFTWARE FOUNDATION. **Using the GNU Compiler Collection (GCC): for GCC version 16.1.0**. Boston: Free Software Foundation, 2026. Disponível em: https://gcc.gnu.org/onlinedocs/gcc-16.1.0/gcc.pdf. Acesso em: 9 jul. 2026.

FUCHS, Rubens Dario. **Transmissão de energia elétrica: linhas aéreas: teoria das linhas em regime permanente**. v. 1. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos; Itajubá: Escola Federal de Engenharia, 1977.

M. F. GIRARDI AND J. B. LEITE, **"Performance Analysis of Three-Phase Power Flow Algorithms in Power Distribution Networks,"** 2021 IEEE URUCON, 2021, pp. 12-15.

J. MOMOH, **“Electric Power Distribution, Automation, Protection and Control”**, Estados Unidos: CRC Press, 2017.

K. P. SCHNEIDER et al., **"Analytic Considerations and Design Basis for the IEEE Distribution Test Feeders,"** in IEEE Trans. Power Syst., vol. 33, no. 3, pp. 3181-3188, May 2018.

LINUX KERNEL ORGANIZATION. **The Linux Kernel documentation: drop_caches**. Disponível em: https://www.kernel.org/doc/Documentation/admin-guide/sysctl/vm.rst. Acesso em: 20 jun. 2026.

MELO, Igor Delgado de. **Fluxo de potência**. São Paulo: Editora Blucher, 2026.

N. DEO, **“Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science,”** USA: Dover Publications, 2017.

SAADAT, Hadi. **Power System Analysis**. Estados Unidos: McGraw-Hill, 1999.

SZWARCFITER, Jayme L.; MARKENZON, Lilian. **Estruturas de Dados e Seus Algoritmos**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

T. -H. CHEN, M. -S. CHEN, K. -J. HWANG, P. KOTAS e E. A. CHEBLI, **"Distribution system power flow analysis-a rigid approach,"** em IEEE Trans. on Power Del., vol. 6, no. 3, pp. 1146-1152, Julho 1991.

TUNED PROJECT. **TuneD documentation: Optimizing system throughput, latency, and power consumption**. Versão 2.27.0., 2026. Disponível em: https://tuned-project.org/docs/manual.html. Acesso em: 20 jun. 2026.

ZHIRKOV, Igor. **Programação em Baixo Nível: C, Assembly e execução de programas na arquitetura Intel 64**. São Paulo: Editora Novatec, 2018.

APÊNDICE A - DERIVADAS PARCIAIS DA MATRIZ JACOBIANA

Sendo as derivadas parciais necessárias para a determinação da matriz Jacobiana do sistema (MELO, 2023):

$$\frac{\partial P_k}{\partial \theta_k} = \sum_{w \neq k}^{n} [\, |\widehat{V}_k|\, |\widehat{V}_w|\, (-\, G_{kw}\, sen\, \theta_{kw} \;+\; B_{kw} cos\, \theta_{kw})\,] \;-\; |\widehat{V}_k|^{\,2} B_{kk} \tag{A.1}$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial \theta_w} = |\widehat{V}_k|\, |\widehat{V}_w|\, (G_{kw}\, sen\, \theta_{kw} \;-\; B_{kw} cos\, \theta_{kw}) \tag{A.2}$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial \theta_k} = \sum_{w \neq k}^{n} [\; |\widehat{V}_k|\, |\widehat{V}_w|\, (G_{kw} cos\, \theta_{kw} \;+\; B_{kw} sen\, \theta_{kw})\,] \;-\; |\widehat{V}_k|^{\,2} G_{kk} \tag{A.3}$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial \theta_w} = |\widehat{V}_k|\, |\widehat{V}_w|\, (-\, G_{kw} cos\, \theta_{kw} \;-\; B_{kw} sen\, \theta_{kw}) \tag{A.4}$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial |V_k|} = \sum_{w \neq k}^{n} [\, |\widehat{V}_w|\, (G_{kw} cos\, \theta_{kw} \;+\; B_{kw} sen\, \theta_{kw})\,] \;+\; |\widehat{V}_k|\, G_{kk} \tag{A.5}$$

$$\frac{\partial P_k}{\partial V_w} = |\widehat{V}_k|\, (G_{kw} cos\, \theta_{kw} \;+\; B_{kw} sen\, \theta_{kw}) \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial |V_k|} = \sum_{w \neq k}^{n} [\, |\widehat{V}_w|\, (G_{kw}\, sen\, \theta_{kw} -\; B_{kw} cos\, \theta_{kw})\,] \;-\; |\widehat{V}_k|\, B_{kk} \tag{A.7}$$

$$\frac{\partial Q_k}{\partial V_w} = |\widehat{V}_k|\, (G_{kw}\, sen\, \theta_{kw} \;-\; B_{kw} cos\, \theta_{kw}) \tag{A.8}$$

APÊNDICE B - RESULTADO DO CÁLCULO DO FLUXO DE POTÊNCIA PARA A REDE DE 25 BARRAMENTOS

B.1 MÉTODO DA LISTA DE ADJACÊNCIAS

TENSÕES NOS BARRAMENTOS DA REDE						
BUS	$V_A\,(pu)$	δ_A	$V_B\,(pu)$	δ_B	$V_C\,(pu)$	δ_C
0	1,0000	0,0000	1,0000	-120,0000	1,0000	120,0000
1	1,0000	0,0000	1,0000	-120,0000	1,0000	120,0000
2	0,9621	-1,1335	0,9629	-120,9720	0,9703	118,8730
3	0,9578	-1,1483	0,9585	-120,9780	0,9664	118,8580
4	0,9576	-1,1528	0,9584	-120,9820	0,9663	118,8530
5	0,9561	-1,1992	0,9570	-121,0210	0,9651	118,8080
6	0,9481	-1,4563	0,9490	-121,2420	0,9588	118,5550
7	0,9405	-1,7024	0,9416	-121,4520	0,9528	118,3140
8	0,9333	-1,9366	0,9346	-121,6530	0,9473	118,0860
9	0,9330	-1,9472	0,9343	-121,6620	0,9470	118,0760
10	0,9315	-1,9964	0,9328	-121,7040	0,9459	118,0280
11	0,9234	-1,9581	0,9247	-121,6540	0,9384	118,0650
12	0,9191	-1,9379	0,9205	-121,6270	0,9345	118,0850
13	0,9186	-1,9357	0,9200	-121,6240	0,9340	118,0870
14	0,9163	-1,9246	0,9177	-121,6090	0,9319	118,0970
15	0,9161	-1,9235	0,9174	-121,6080	0,9317	118,0980
16	0,9185	-1,9353	0,9199	-121,6230	0,9339	118,0870
17	0,9176	-1,9310	0,9190	-121,6180	0,9331	118,0910
18	0,9160	-1,9233	0,9174	-121,6080	0,9317	118,0990
19	0,9152	-1,9269	0,9166	-121,6090	0,9309	118,0950
20	0,9146	-1,9296	0,9160	-121,6110	0,9304	118,0930
21	0,9134	-1,9346	0,9148	-121,6130	0,9294	118,0880
22	0,9151	-1,9306	0,9165	-121,6120	0,9308	118,0920
23	0,9231	-1,9666	0,9244	-121,6610	0,9382	118,0570
24	0,9231	-1,9666	0,9244	-121,6610	0,9382	118,0570

CORRENTES NOS RAMOS DA REDE							
FROM	TO	$J_A\,(mA)$	δ_A	$J_B\,(mA)$	δ_B	$J_C\,(mA)$	δ_C
0	1	587,6700	-24,9465	586,8460	-144,6510	578,5260	95,0749
1	2	587,6700	-24,9465	586,8460	-144,6510	578,5260	95,0749
2	3	587,6700	-24,9465	586,8460	-144,6510	578,5260	95,0749
3	4	19,6598	-24,2268	19,6437	-144,0560	19,4838	95,7792
3	5	568,0110	-24,9715	567,2040	-144,6720	559,0440	95,0503
5	6	568,0110	-24,9715	567,2040	-144,6720	559,0440	95,0503
6	7	534,9150	-24,9987	534,1410	-144,6940	526,3180	95,0235
7	8	501,5510	-25,0135	500,8160	-144,7050	493,3870	95,0091
8	9	451,1240	-25,0139	450,4560	-144,7030	443,7010	95,0087
9	10	417,4940	-25,0133	416,8700	-144,7000	410,5680	95,0092
10	11	383,8100	-25,0083	383,2330	-144,6930	377,3950	95,0141
11	12	332,8230	-25,0034	332,3190	-144,6870	327,2260	95,0188
12	13	72,4144	-24,9986	72,3053	-144,6830	71,2018	95,0234
13	14	68,4974	-24,9981	68,3942	-144,6820	67,3495	95,0239
14	15	34,2528	-24,9975	34,2011	-144,6820	33,6784	95,0244
12	16	260,4080	-25,0047	260,0140	-144,6880	256,0240	95,0175
16	17	209,1670	-25,0036	208,8490	-144,6850	205,6290	95,0186
17	18	188,6510	-25,0034	188,3630	-144,6850	185,4530	95,0187
18	19	137,2690	-25,0058	137,0590	-144,6860	134,9340	95,0165
19	20	85,8362	-25,0066	85,7044	-144,6860	84,3708	95,0157
20	21	51,5276	-25,0085	51,4481	-144,6870	50,6446	95,0138
19	22	51,4332	-25,0044	51,3549	-144,6860	50,5632	95,0178
11	23	50,9875	-25,0405	50,9139	-144,7350	50,1687	94,9830
23	24	0,0000	0,0000	0,0000	180,0000	0,0000	0,0000

B.2 MÉTODO DA CONTAGEM DE FILHOS

TENSÕES NOS BARRAMENTOS DA REDE						
BUS	$V_A\,(pu)$	δ_A	$V_B\,(pu)$	δ_B	$V_C\,(pu)$	δ_C
0	1,0000	0,0000	1,0000	-120,0000	1,0000	120,0000
1	1,0000	0,0000	1,0000	-120,0000	1,0000	120,0000
2	0,9621	-1,1335	0,9629	-120,9720	0,9703	118,8728
3	0,9578	-1,1483	0,9585	-120,9777	0,9664	118,8577
4	0,9576	-1,1528	0,9584	-120,9815	0,9663	118,8532
5	0,9561	-1,1992	0,9570	-121,0213	0,9651	118,8076
6	0,9481	-1,4563	0,9490	-121,2417	0,9588	118,5550
7	0,9405	-1,7024	0,9416	-121,4525	0,9528	118,3144
8	0,9333	-1,9366	0,9346	-121,6532	0,9473	118,0863
9	0,9330	-1,9472	0,9343	-121,6623	0,9470	118,0760
10	0,9315	-1,9964	0,9328	-121,7045	0,9459	118,0282
11	0,9234	-1,9581	0,9247	-121,6536	0,9384	118,0652
12	0,9191	-1,9379	0,9205	-121,6269	0,9345	118,0846
13	0,9186	-1,9357	0,9200	-121,6240	0,9340	118,0867
14	0,9163	-1,9246	0,9177	-121,6092	0,9319	118,0974
15	0,9161	-1,9235	0,9174	-121,6078	0,9317	118,0985
16	0,9185	-1,9353	0,9199	-121,6234	0,9339	118,0871
17	0,9176	-1,9310	0,9190	-121,6177	0,9331	118,0912
18	0,9160	-1,9233	0,9174	-121,6075	0,9317	118,0986
19	0,9152	-1,9269	0,9166	-121,6092	0,9309	118,0952
20	0,9146	-1,9296	0,9160	-121,6105	0,9304	118,0925
21	0,9134	-1,9346	0,9148	-121,6129	0,9294	118,0877
22	0,9151	-1,9306	0,9165	-121,6124	0,9308	118,0916
23	0,9231	-1,9666	0,9244	-121,6609	0,9382	118,0569
24	0,9231	-1,9666	0,9244	-121,6609	0,9382	118,0569

CORRENTES NOS RAMOS DA REDE							
FROM	TO	$J_A\,(mA)$	δ_A	$J_B\,(mA)$	δ_B	$J_C\,(mA)$	δ_C
0	1	587,6695	-24,9465	586,8464	-144,6513	578,5260	95,0749
1	2	587,6695	-24,9465	586,8464	-144,6513	578,5260	95,0749
2	3	587,6695	-24,9465	586,8464	-144,6513	578,5260	95,0749
3	4	19,6598	-24,2268	19,6437	-144,0555	19,4838	95,7792
3	5	568,0113	-24,9715	567,2038	-144,6720	559,0436	95,0503
5	6	568,0113	-24,9715	567,2038	-144,6720	559,0436	95,0503
6	7	534,9154	-24,9987	534,1413	-144,6940	526,3179	95,0235
7	8	501,5513	-25,0135	500,8164	-144,7052	493,3871	95,0091
8	9	451,1236	-25,0139	450,4556	-144,7027	443,7009	95,0087
9	10	417,4935	-25,0133	416,8704	-144,7000	410,5680	95,0092
10	11	383,8102	-25,0083	383,2329	-144,6931	377,3947	95,0141
11	12	332,8226	-25,0034	332,3191	-144,6868	327,2261	95,0188
12	13	72,4144	-24,9986	72,3053	-144,6832	71,2018	95,0234
13	14	68,4974	-24,9981	68,3942	-144,6825	67,3495	95,0239
14	15	34,2528	-24,9975	34,2011	-144,6818	33,6784	95,0244
12	16	260,4083	-25,0047	260,0138	-144,6878	256,0243	95,0175
16	17	209,1671	-25,0036	208,8488	-144,6854	205,6291	95,0186
17	18	188,6507	-25,0034	188,3630	-144,6848	185,4533	95,0187
18	19	137,2694	-25,0058	137,0593	-144,6860	134,9340	95,0165
19	20	85,8362	-25,0066	85,7044	-144,6859	84,3708	95,0157
20	21	51,5276	-25,0085	51,4481	-144,6868	50,6446	95,0138
19	22	51,4332	-25,0044	51,3549	-144,6862	50,5632	95,0178
11	23	50,9875	-25,0405	50,9139	-144,7348	50,1687	94,9830
23	24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

B.3 ERRO ABSOLUTO ENTRE MÉTODOS

Considera-se como valores de referência os fornecidos pelo método da lista de adjacências.

ERRO ABSOLUTO DAS TENSÕES NOS BARRAMENTOS DA REDE						
BUS	$V_A\,(pu)$	δ_A	$V_B\,(pu)$	δ_B	$V_C\,(pu)$	δ_C
0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
3	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0003	0,0000	0,0003
4	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0005	0,0000	-0,0002
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0000	0,0004
6	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0003	0,0000	0,0000
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0000	-0,0004
8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0000	-0,0003
9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0000	0,0000
10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0000	-0,0002
11	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0004	0,0000	-0,0002
12	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	0,0000	0,0004
13	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	0,0000	0,0003
14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0000	-0,0004
15	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0002	0,0000	-0,0005
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0000	-0,0001
17	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0003	0,0000	-0,0002
18	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0005	0,0000	0,0004
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0000	-0,0002
20	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0005	0,0000	0,0005
21	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	0,0000	0,0003
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0004	0,0000	0,0004
23	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	0,0000	0,0001
24	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	0,0000	0,0001

ERRO ABSOLUTO DAS CORRENTES DOS RAMOS DA REDE							
FROM	TO	$J_A\,(mA)$	δ_A	$J_B\,(mA)$	δ_B	$J_C\,(mA)$	δ_C
0	1	0,0005	0,0000	-0,0004	0,0003	0,0000	0,0000
1	2	0,0005	0,0000	-0,0004	0,0003	0,0000	0,0000
2	3	0,0005	0,0000	-0,0004	0,0003	0,0000	0,0000
3	4	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0005	0,0000	0,0000
3	5	-0,0003	0,0000	0,0002	0,0000	0,0004	0,0000
5	6	-0,0003	0,0000	0,0002	0,0000	0,0004	0,0000
6	7	-0,0004	0,0000	-0,0003	0,0000	0,0001	0,0000
7	8	-0,0003	0,0000	-0,0004	0,0002	-0,0001	0,0000
8	9	0,0004	0,0000	0,0004	-0,0003	0,0001	0,0000
9	10	0,0005	0,0000	-0,0004	0,0000	0,0000	0,0000
10	11	-0,0002	0,0000	0,0001	0,0001	0,0003	0,0000
11	12	0,0004	0,0000	-0,0001	-0,0002	-0,0001	0,0000
12	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0000	0,0000
13	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0000	0,0000
14	15	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0002	0,0000	0,0000
12	16	-0,0003	0,0000	0,0002	-0,0002	-0,0003	0,0000
16	17	-0,0001	0,0000	0,0002	0,0004	-0,0001	0,0000
17	18	0,0003	0,0000	0,0000	-0,0002	-0,0003	0,0000
18	19	-0,0004	0,0000	-0,0003	0,0000	0,0000	0,0000
19	20	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	0,0000	0,0000
20	21	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0002	0,0000	0,0000
19	22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0000	0,0000
11	23	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0002	0,0000	0,0000
23	24	0,0000	0,0000	0,0000	180,0000	0,0000	0,0000

A divergência no ângulo do fluxo de potência no ramo 23-24 trata-se de um artefato computacional inerente ao tratamento de fasores nulos, e não de um erro de convergência.

Como o barramento 24 opera como um nó terminal sem carga, a magnitude da corrente e do fluxo de potência nesse trecho é nula. Matematicamente, o ângulo de um vetor com magnitude zero é indefinido.

Fisicamente, ambos os métodos convergem de forma bem-sucedida, atestando a ausência de fluxo no ramo e apresentando valores idênticos para as tensões nodais.