IFT
Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORADO IFT–D.002/07

Pseudomecânica: partículas de *spins* inteiros, semi-inteiros e fracionários

Márcio Pazetti

Orientador

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar

Co-Orientador

Dr. Juan Segundo Valverde Salvador

Fevereiro de 2007

Agradecimentos

À minha família, base do meu crescimento.

Ao Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar, por sua orientação e por toda sua paciência com seus filhos acadêmicos.

Ao Dr. Juan Segundo Valverde Salvador, por sua amizade e humildade, por seus comentários, discussões e ensinamentos ao longo deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Manuel Simões Filho e ao Prof. Dr. Antônio Edson Gonçalves, que foram fundamentais em meus primeiros passos na Física Teórica.

Ao IFT, por sua estrutura, ambiente e qualidade de ensino e de pesquisas com as quais interagi.

Aos funcionários do IFT, pela presteza, gentileza e amizade ao longo desses anos.

À CAPES, pelo apoio financeiro e pelo ótimo programa de doutorado, os quais foram fundamentais para a realização desta tese.

A todos aqueles que, no anonimato de suas ações, contribuíram para a realização deste trabalho.

Enfim, ao universo, que esconde tantas surpresas que só são descobertas pelos insistentes.

Resumo

Utilizando a pseudomecânica, estudamos partículas não relativísticas e partículas relativísticas massivas e não massivas, todas com *spin*. Neste último caso não massivo, fizemos duas abordagens: Na primeira, construímos uma ação invariante por reparametrização, transformações de SUSY locais e transformações de $O(N)$. Após a quantização, para o caso especial $N = 2$, obtivemos uma ação que descreve ambos os setores da teoria de DKP sem massa. Na segunda abordagem, a ação, que é invariante por reparametrização e transformações de SUSY locais mesmo quando um campo de interação é incluído, foi obtida por meio da inclusão de variáveis *twistors*. As relações de comutação para essas variáveis nos revelam que o estado de partículas possui estatística e *spin* fracionários. Além disso, introduzimos um possível termo massivo para o modelo não interagente. Em todos os casos, o método de Dirac para sistemas vinculados foi utilizado.

Palavras Chaves:

Pseudomecânica; Supercampos; DKP.

Áreas do conhecimento:

Teoria de Campos

Abstract

We use the pseudomechanics to study non relativistic particles and massive and massless relativistic particles, all of them with spin. In this last case massless, we have two situations: in the first one, we built an invariant action of reparametrization, local transformations of SUSI and O(N) transformations. After the quantization, for the special case N=2, we obtain an action that describes both sectors of massless DKP theory. In a second situation, the action, which is constructed to be invariant under SUSY transformations and τ-reparametrizations even when an interaction field is including, was obtained by including twistor variables. The commutation relations for these variables show that the particle states have fractional statistics and spin. Furthermore, we introduced a possible massive term for the non-interacting model. In all of these cases, the method of Dirac for constraint systems was used.

Keywords:

Pseudomechanics; Superfields; DKP.

Knowledge areas :

Field Theory

À Fernanda Peres da Silva, que causou uma verdadeira revolução em minha forma de ver o mundo. *Te amo.*

Era...

Vivo num mundo onde não se pode esperar nada de ninguém
De ninguém!
De ninguém...
É...Talvez, nem de mim mesma
Sentir confiança faz parte da minha infância
Que vivi até pouco tempo atrás
Mais uma vez, a amargura corrói o meu espírito
Sinto dor, vinda de facas de todos os lados
Mas a pior delas é a que tenta me cegar
Se é que já não nasci assim
Indigno com fatos que, talvez, devesse aceitar
Ainda sonho um mundo sem exploração do homem pelo homem
Um mundo de seres humanos
O que vejo é que o abismo que separa as ilhas aumenta...
continuamente...
sim...
Explora-se tudo
Mas, o que acho mais sofredor é explorar o sonho de alguém
ideal
sentimento
crença em um mundo (melhor)...
Não tenho, nem nunca tive, voz
Sou, talvez, mais uma ilha
E, mesmo se não for
Não pretendo mais viver nesta hipocrisia
Despeço-me, assim, desse (mundo) agora
Sim, sou um barco
Que se afundou.

Fernanda Peres da Silva

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Nos próximos três parágrafos, comentaremos, respectivamente, sobre a pseudomecânica, a teoria de Duffin -Kemmer-Petiau e a teoria de supercampos. No quarto parágrafo, especificaremos a estrutura da tese.

Em 1953, Schwinger [1] introduziu a variável comutativa e a anticomutativa em uma única teoria, ao escrever uma Lagrangiana de primeira ordem com uma matriz que é formada por uma parte simétrica e outra antisimétrica. Já em 1959, Martin [2], ao analisar um sistema Hamiltoniano que não possuía uma formulação Lagrangiana, generalizou a dinâmica clássica canônica, partindo de um anel não comutativo, obtendo, assim, o análogo clássico de um oscilador Fermiônico. Entretanto, foi Casalbuoni [3] quem cunhou o termo "pseudomecânica"com todos os conceitos que usamos hoje: é um sistema descrito por variáveis canônicas usuais e por variáveis de Grassmann*. Ele estudou, com essa nova mecânica, o formalismo canônico e, em particular, a definição dos Parênteses de Poisson, que se mostraria possuir uma álgebra de Lie graduada. Usando esse fato como uma sugestão à quantização, mostrou também que a correspondente teoria quântica é a teoria quântica com operadores Fermiônicos; essa, por sua vez, é, no limite clássico ($\hbar \to 0$), a pseudomecânica. Na mesma época, Berezin e Marinov [4] também generalizaram a mecânica clássica: considerando que o espaço de fase continha ambos os geradores comutativos usuais e os anticomutativos, construíram uma mecânica Hamiltoniana

*Em suas próprias palavras: "we study a system described by usual canonical variables and by Grassmann variables; we will call such a system a pseudoclassical one, and its mechanics will be called pseudomechanics".

clássica para o *spin* de uma partícula pontual, cuja quantização conduz à teoria quântica de Pauli-Dirac. Além disso, introduziram uma interação, a de spin-órbita, nessa nova mecânica. Um ano depois [5], construíram um modelo para a descrição de *spin* 1/2, em que, para obter uma formulação da dinâmica da partícula relativística consistente, introduziram um novo vínculo. Isso porque a formulação do caso massivo possui cinco variáveis de Grassmann. Na mesma época, apareceu novamente Casalbuoni [6], estudando esses mesmos modelos: explorando o grupo interno de simetria e a invariância de *gauge*, conseguiu descrever partículas de *spins* um e zero. Além das interações dessas partículas de *spins* um e zero, descreveu também, com Barducci e Lusana [7, 8], interações entre sistemas de *spin* 1/2, e entre esses com campos de Yang-Mills e gravitação. Na referência [9], ele descreve campos eletromagnéticos na formulação de integral de trajetória. Muitos outros artigos sobre partículas com *spin* no contexto da pseudomecânica surgiram: por exemplo, a derivação das equações de movimento para partículas massivas e não massivas de *spin* é tratada nos trabalhos [10] e [11], onde a descrição de *spin* é feita por meio da inclusão de grupos internos de simetrias. Do mesmo modo, o caso da partícula de Dirac é discutido nos trabalhos [12], [13] e [14]. Uma representação de integral de trajetória, para obter um propagador de Dirac, foi também encontrada na referência [15]. Outros estudos, conectando a pseudomecânica com a teoria de cordas, foram realizados na referência [16] para o caso livre e o de interações com um campo externo.

Uma das teorias em que se aplica a pseudomecânica, como veremos, é a de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) [17], que descreve partículas massivas de *spins* zero e um em uma representação unificada no espaço tempo de Minkowski. A teoria de campos para a DKP sem massa possui uma simetria de *gauge* local que descreve o campo eletromagnético em seu setor de *spin* 1. É importante observar que o caso sem massa não pode ser obtido pelo limite $m \to 0$ do caso massivo: as projeções do campo de DKP nos setores de *spins* 1 e 0 envolvem a massa como um fator multiplicativo [18]. Entretanto, se simplesmente fizermos a massa igual a zero na Lagrangiana de DKP, obtemos uma Lagrangiana com simetria de *gauge* global. Estudos no espaço-tempo de Riemann-Cartan foram propostos nas referências [19] e [20]. Recentemente, uma supergeneralização da álgebra de DKP foi realizada por Okubo [21], que partiu do estudo de todas as representações irredutíveis por meio da álgebra de Lie SO (1,4)

[22], obtendo, assim, a super álgebra de DKP que contém as representações bosônica e fermiônica.

Paralelamente à pseudomecânica, a supersimetria, na década de setenta, emergiu como uma das mais elegantes criações da física teórica, sendo que as transformações de supersimetria associando bósons e férmions tornaram-se uma propriedade muito interessante para descrever as interações fundamentais da física de partículas [23]. Os trabalhos pioneiros foram os de Gol'fand e Likhtman [24], que propuseram e investigaram extensões *espinoriais* do grupo de Poincaré, álgebras supersimétricas e suas representações, e, também, os de Volkov e Akulov [25], que propuseram uma possível interpretação do neutrino como uma partícula de Goldstone [26]. O interesse em supersimetria aumentou bastante com o artigo de Wess e Zumino [27], que propuseram a renormalização de seu modelo e generalizaram a chamada simetria de *supergauge* que surge nos modelos duais [28, 29, 30]. Depois disso, o próximo passo foi o de Salam e Strathdee [31], que introduziram coordenadas *espinoriais* anticomutativas, um superespaço e o conceito de um supercampo. A possibilidade de estruturas *espinoriais* do espaço-tempo foi discutida por Arakai e Okubo [32], em conexão com o desejo de unificar as simetrias internas e as do espaço-tempo, e foi retomada por Penrose [33], em conexão com os prospectos para a quantização da teoria da gravitação. Uma possível inter-relação entre as supersimetrias e a teoria da gravitação foi acentuada por Volkov e Soroka [34]. Para finalizar, quando técnicas de *twistor* [35, 36] foram implementadas na estrutura de teorias supersimétricas, um novo ingrediente para estudos de diferentes modelos surgiu. Por exemplo, as consequências das flutuações do vácuo no modelo encontrado na referência [37] são estudadas na referência [38].

No capítulo 2, apresentamos os formalismos de *espinores* de Dirac e de Weyl e, com esses formalismos em mãos, estudamos as equações de Bargmann-Wigner, de Duffin- Kemmer-Petiau e de Rarita-Schwinger; fizemos este estudo para fixar a notação, para apresentar essas teorias aos possíveis leitores que não estejam familiarizados com elas, e, além disso, essas equações foram constantemente citadas na tese. No capítulo 3, estudamos as formulações Lagrangiana e Hamiltoniana para a pseudomecânica e construímos os parênteses de Dirac para teorias com vínculos; esse estudo foi feito porque, além de aplicá-lo no capítulo 5, não se encontra na literatura um trabalho relativamente detalhado dessas formulações, para a pseudomecânica, no que diz respeito às teorias de vínculos. No capítulo 4, fizemos uma rápida apresentação da teoria de supercampos, onde, após uma introdução histórica, estudamos as transformações supersimétricas infinitesimais, a extensão *espinorial* do grupo de Poincaré e os conceitos de supercampo e de superespaço; o presente estudo foi realizado para utilizá-lo no último exemplo da tese. No capítulo 5, aplicamos as teorias desenvolvidas nos capítulos anteriores da seguinte forma: primeiramente, apresentamos o método de construir lagrangianas com o formalismo da pseudomecânica; em seguida, aplicamos esse formalismo para partículas relativísticas e não relativísticas; logo após, analisamos um exemplo com condições de contorno, que é fundamental à pseudomecânica, para obtermos as corretas quantidades conservadas; depois, construímos uma ação invariante por reparametrização, transformações de SUSY locais e transformações de $O(N)$, que, após a quantização para o caso especial $N = 2$, descreve ambos os setores da teoria de DKP sem massa; por último, a ação, que é invariante por reparametrização e transformações de SUSY locais mesmo quando um campo de interação é incluído, foi obtida por meio da versão de supercampos para as variáveis $twistors$, onde suas relações de comutação nos revela que o estado de partículas possui estatística e *spin* fracionários. Além disso, introduzimos um possível termo massivo para o modelo não interagente. Finalmente, no último capítulo, comentamos os resultados obtidos e apresentamos nossas perspectivas.

Capítulo 2

Equações relativísticas

Na primeira seção, introduzimos representações do grupo $SL\,(2,\mathbb{C})$ para descrevermos *espinores* de Dirac, de Weyl e de Majorana. Além disso, listamos algumas expressões de combinações bilineares entre esses *espinores*. Na segunda seção, estudamos as equações de Bargmann-Wigner, Duffin- Kemmer-Petiau e Rarita-Schwinger.

2.1 *Espinores* de Dirac e de Weyl

De um ponto de vista matemático para a análise da estrutura do espaço-tempo, os princípios da relatividade restrita nos dizem que as coordenadas do espaço-tempo x^m e x'^m de dois sistemas inerciais arbitrários são relacionadas por uma transformação linear não homogênea:

$$x'^m = \Lambda^m_n x^n + b^m, \tag{2.1}$$

que deixa a métrica

$$ds^2 = \eta_{mn} dx^m dx^n \tag{2.2}$$

invariante quando $b^m = 0$ e

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \tag{2.3}$$

onde Λ^T é a matriz transposta de Λ. Usaremos as seguintes definições: $x^m = (x^0, \overrightarrow{x})$, $x^0 = ct$, $\overrightarrow{x} = (x^1, x^2, x^3)$, a métrica de Minkowski η_{mn} possui elementos nulos fora da diagonal e $\mathrm{diag}(\eta_{mn}) = (+, -, -, -)$.

Trabalhando com a expressão (2.3), temos

$$\det\Lambda = \pm 1, \quad \left(\Lambda^0{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^1{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^2{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^3{}_0\right)^2 = 1. \tag{2.4}$$

Assim, para preservar a direção do tempo e a orientação espacial (paridade), deduzimos, respectivamente, que

$$\Lambda^0{}_0 \geq 1, \quad \det\Lambda = 1. \tag{2.5}$$

As transformações (2.1), com Λ^m_n sujeito às relações (2.3) e (2.5), são chamadas *transformações de Poincaré*. Para o caso homogêneo, $b^m = 0$, *transformações de Lorentz*.

O conjunto de todas as transformações homogêneas (2.1) sujeitas à condição (2.3) forma um grupo de Lie real, denotado por $O(3,1)$, que consiste em quatro partes desconexas da união de todas as transformações de Lorentz, as quais formam um grupo de Lie real denotadas por $SO(3,1)^{\uparrow}$:

$$O(3,1) = \left\{SO(3,1)^{\uparrow}, \Lambda_P SO(3,1)^{\uparrow}, \Lambda_T SO(3,1)^{\uparrow}, \Lambda_{PT} SO(3,1)^{\uparrow}\right\}, \tag{2.6}$$

onde Λ_P são as transformações de reflexão espacial, Λ_T são as de reversão temporal e Λ_{PT} são as transformações de reflexão e de reversão. Se adicionarmos a condição (2.5), as transformações de Lorentz formam um grupo de Lie $SO(3,1)$, que consiste em duas partes desconexas:

$$SO(3,1) = \left\{SO(3,1)^{\uparrow}, \Lambda_{PT} SO(3,1)^{\uparrow}\right\}. \tag{2.7}$$

2.1.1 Representações de $SL(2,\mathbb{C})$

Uma representação linear T de um grupo de Lie G em um espaço vetorial $\mathbf{V}_T$ de n dimensões é definida como um homomorfismo de G no grupo de Lie das transformações lineares não singulares atuando sobre esse espaço vetorial [45],

$$\begin{aligned} T \quad &: \quad g \rightarrow T(g) \qquad\qquad g \in G \\ T(g_1)\,T(g_2) \quad &= \quad T(g_1 g_2) \qquad\qquad g_1,\, g_2 \in G. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Seja T: $\Lambda \rightarrow T(\Lambda)$ uma representação do grupo de Lorentz $SO(3,1)^{\uparrow}$. Então, podemos obter uma representação $\tilde{T}$ de seu grupo de cobertura universal $SL(2,\mathbb{C})$ pela regra

$$\tilde{T} : N \rightarrow T(\pi(N)), \tag{2.9}$$

onde $SL(2,\mathbb{C})$ é o grupo de Lie de matrizes unimodulares complexas 2×2, $N \in SL(2,\mathbb{C})$ e π é o mapeamento de cobertura: $\pi(SL(2,\mathbb{C})) = SO(3,1)^{\uparrow}$ [23]. Por exemplo, a representação vetorial

$$\begin{aligned} T_V &: \Lambda \to \Lambda \\ V^m &\to V'^m = \Lambda^m{}_n V^n \end{aligned} \tag{2.10}$$

ou a representação covetorial

$$\begin{aligned} T_{CV} &: \Lambda \to \left(\Lambda^T\right)^{-1} \\ V_m &\to V'_m = \Lambda_m{}^n V_n \\ \Lambda_m{}^n &= \eta_{ml}\Lambda^l{}_k\eta^{kn} \qquad \eta_{mk}\eta^{kn} = \delta^n_m, \end{aligned} \tag{2.11}$$

do grupo de Lorentz geram as representações de $SL(2,\mathbb{C})$.

No que segue, representamos as componentes de $N \in SL(2,\mathbb{C})$ por $N_\alpha{}^\beta$, onde $\alpha,\beta = 1,2$ e de sua conjugada complexa N^* por $N^*_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}$. Para uma representação fundamental de $SL(2,\mathbb{C})$, temos

$$\begin{aligned} T_s &: N \to N \\ \psi_\alpha &\to \psi'_\alpha = N_\alpha{}^\beta\psi_\beta. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Um objeto ψ_α que se transforma de acordo com essa representação é chamado de *espinor de Weyl de mão esquerda de duas componentes* [46]. A representação T_s é chamada de representação *espinorial* de Weyl (de mão esquerda) do grupo de Lorentz, e é denotada por $(1/2,0)$. Para n produtos tensoriais de T_s, $n = 2,3,...$, $T_s \otimes T_s \otimes ...T_s$, obtemos novas representações de $SL(2,\mathbb{C})$ da forma

$$\psi_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n} \to \psi'_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n} = N_{\alpha_1}{}^{\beta_1}N_{\alpha_2}{}^{\beta_2}...N_{\alpha_n}{}^{\beta_n}\psi_{\beta_1\beta_2...\beta_n}. \tag{2.13}$$

Enquanto que, para a representação contravariante de T_s, temos

$$\begin{aligned} T_{cs} &: N \to \left(N^T\right)^{-1} \\ \psi^\alpha &\to \psi'^\alpha = \psi^\beta\left(N^{-1}\right)_\beta{}^\alpha, \end{aligned} \tag{2.14}$$

que é equivalente à T_s. De fato, a condição de unimodularidade para $N \in SL(2,\mathbb{C})$ pode ser escrita como [23]

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = N_\alpha{}^\gamma N_\beta{}^\delta\varepsilon_{\gamma\delta} \quad \text{ou} \quad \varepsilon^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\gamma\delta}\left(N^{-1}\right)_\gamma{}^\alpha\left(N^{-1}\right)_\delta{}^\beta, \tag{2.15}$$

onde $\varepsilon_{\alpha\beta}$ e $\varepsilon^{\alpha\beta}$ são tensores antisimétricos definidos por

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha}, \quad \varepsilon_{12} = -1, \quad \varepsilon^{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\beta\alpha}, \quad \varepsilon^{12} = 1, \quad \varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}. \tag{2.16}$$

A relação (2.15) implica que $\varepsilon_{\alpha\beta}$ e $\varepsilon^{\alpha\beta}$ são tensores invariantes do grupo de Lorentz e, portanto, podemos usá-los para baixar ou levantar índices *espinoriais*:

$$\psi^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_{\beta} \qquad \psi_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta}\psi^{\beta}. \tag{2.17}$$

Consideremos, agora, a representação da complexa conjugada da representação T_s:

$$\begin{aligned} T_{\bar{s}} \quad &: \quad N \rightarrow N^* \\ \psi_{\dot{\alpha}} \quad &\rightarrow \quad \psi'_{\dot{\alpha}} = N^{*\ \dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}\psi_{\dot{\beta}}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Um objeto $\psi_{\dot{\alpha}}$ que se transforma de acordo com essa representação é chamado de *espinor de Weyl de mão direita de duas componentes* [46]. A representação $T_{\bar{s}}$ é chamada de representação *espinorial* de Weyl (de mão direita) do grupo de Lorentz, e é denotada por $(0, 1/2)$. Para m produtos tensoriais de $T_{\bar{s}}$, $m = 2, 3, ..., T_{\bar{s}} \otimes T_{\bar{s}} \otimes ...T_{\bar{s}}$, obtemos novas representações de $SL\,(2, \mathbb{C})$ da forma

$$\psi_{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2...\dot{\alpha}_m} \rightarrow \psi'_{\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2...\dot{\alpha}_m} = N^{*\ \dot{\beta}_1}_{\dot{\alpha}_1} N^{*\ \dot{\beta}_2}_{\dot{\alpha}_2} ... N^{*\ \dot{\beta}_m}_{\dot{\alpha}_m} \psi_{\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2...\dot{\beta}_m}. \tag{2.19}$$

Enquanto que, para a representação contravariante de $T_{\bar{s}}$, temos

$$\begin{aligned} T_{c\bar{s}} \quad &: \quad N \rightarrow \left(N^{\dagger}\right)^{-1} \\ \psi^{\dot{\alpha}} \quad &\rightarrow \quad \psi'^{\dot{\alpha}} = \psi^{\dot{\beta}} \left(N^{-1}\right)^{*\ \dot{\alpha}}_{\dot{\beta}}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

que é equivalente à $T_{\bar{s}}$. De fato, como para o caso da relação (2.15), temos

$$\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}, \quad \varepsilon_{\dot{1}\dot{2}} = -1, \quad \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\alpha}}, \quad \varepsilon^{\dot{1}\dot{2}} = 1. \tag{2.21}$$

Assim, da mesma forma que na relação (2.17), podemos, também, usar $\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ e $\varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}$ para baixar ou levantar índices *espinoriais*:

$$\psi^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\psi_{\dot{\beta}} \qquad \psi_{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\psi^{\dot{\beta}}. \tag{2.22}$$

Para um produto tensorial mais geral $\underbrace{T_s \otimes T_s \otimes ...T_s}_{n} \otimes \underbrace{T_{\bar{s}} \otimes T_{\bar{s}} \otimes ...T_{\bar{s}}}_{m}$, obtemos o tensor *espinorial* de Lorentz para índices com ponto e sem ponto:

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2...\dot{\beta}_m} &\to \\ \psi'_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\dot{\beta}_1\dot{\beta}_2...\dot{\beta}_m} &= N_{\alpha_1}^{\ \gamma_1} N_{\alpha_2}^{\ \gamma_2} ... N_{\alpha_n}^{\ \gamma_n} N^{*\ \dot{\delta}_1}_{\dot{\beta}_1} N^{*\ \dot{\delta}_2}_{\dot{\beta}_2} ... N^{*\ \dot{\delta}_m}_{\dot{\beta}_m} \psi_{\gamma_1\gamma_2...\gamma_n\dot{\delta}_1\dot{\delta}_2...\dot{\delta}_m}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Introduzindo a matriz identidade, $\sigma_0 = \mathbf{1}$, e as matrizes de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.24}$$

em uma única notação, $\sigma_m = (+\mathbf{1}, \vec{\sigma})$, $m = 0, 1, 2, 3$, podemos fazer a seguinte definição:

$$(\tilde{\sigma}_m)^{\dot{\alpha}\alpha} \equiv \varepsilon^{\dot{\alpha}\beta} \varepsilon^{\alpha\beta} (\sigma_m)_{\beta\dot{\beta}} \quad \text{ou} \quad \tilde{\sigma}_m = (+\mathbf{1}, -\vec{\sigma}). \tag{2.25}$$

Com isso, usamos as matrizes σ para converter índices do espaço-tempo em índices *espinoriais* da seguinte forma: um índice vetorial é equivalente a um par de índices *espinoriais*, com ponto e sem ponto [23]:

$$V_{\alpha\dot{\alpha}} = (\sigma^a)_{\alpha\dot{\alpha}} V_a, \quad V_a = -\frac{1}{2} (\tilde{\sigma}_a)^{\alpha\dot{\alpha}} V_{\alpha\dot{\alpha}}. \tag{2.26}$$

Definimos, ainda, as seguintes relações:

$$\begin{aligned} (\sigma_{ab})_\alpha^{\ \beta} &= -\frac{1}{4} (\sigma_a \tilde{\sigma}_b - \sigma_b \tilde{\sigma}_a)_\alpha^{\ \beta} \\ (\tilde{\sigma}_{ab})^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}} &= -\frac{1}{4} (\tilde{\sigma}_a \sigma_b - \tilde{\sigma}_b \sigma_a)^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}} \\ (\sigma_{ab})_{\alpha\beta} &\equiv \varepsilon_{\beta\gamma} (\sigma_{ab})_\alpha^{\ \gamma} = (\sigma_{ab})_{\beta\alpha} \\ (\tilde{\sigma}_{ab})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} &\equiv \varepsilon_{\dot{\beta}\dot{\gamma}} (\tilde{\sigma}_{ab})^{\dot{\gamma}}_{\ \dot{\alpha}} = (\tilde{\sigma}_{ab})_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

2.1.2 *Espinores* de Dirac

Seguindo Dirac, partículas com *spin* 1/2 são usualmente descritas em termos de campos *espinoriais* de quatro componentes. Entretanto, quando trabalhamos com teorias de campos em um super-espaço, percebemos que todas as operações com *espinores* de duas componentes são mais simples do que com *espinores* de quatro componentes. Portanto, vejamos, a seguir, como são relacionados esses *espinores*. De acordo com o teorema de *spin-estatística*, vamos assumir que todos os *espinores* anti-comutam:

$$\psi_\alpha \chi_\beta = -\chi_\beta \psi_\alpha, \qquad \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}_{\dot{\beta}} = -\bar{\chi}_{\dot{\beta}} \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \qquad \psi_\alpha \bar{\chi}_{\dot{\beta}} = -\bar{\chi}_{\dot{\beta}} \psi_\alpha, \tag{2.28}$$

onde uma barra sobre o *espinor*, $\bar{V}$, designa o complexo conjugado de V. Definamos, também, combinações escalares e vetoriais bilineares de *espinores*:

$$\begin{aligned} \psi\chi &\equiv \psi^\alpha \chi_\alpha = -\psi_\alpha \chi^\alpha & \psi^2 \equiv \psi\psi \\ \bar{\psi}\bar{\chi} &\equiv \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} & \bar{\psi}^2 \equiv \bar{\psi}\bar{\psi} \\ \psi \sigma_a \bar{\chi} &\equiv (\sigma_a)_{\alpha\dot{\alpha}} \psi^\alpha \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} & \bar{\chi} \tilde{\sigma}_a \psi \equiv \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} (\tilde{\sigma}_a)^{\dot{\alpha}\alpha} \psi^\alpha. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Devido à (2.28), temos as seguintes identidades:

$$\psi\chi = \chi\psi \qquad \bar{\psi}\bar{\chi} = \bar{\chi}\bar{\psi} \qquad \psi\sigma_a\bar{\chi} = -\bar{\chi}\tilde{\sigma}_a\psi. \tag{2.30}$$

Consideremos dois *espinores* arbitrários ψ_α e $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$ sem ponto e com ponto, respectivamente. As transformações de Lorentz infinitesimais são dadas por:

$$\begin{aligned} \delta\psi_\alpha &= \frac{1}{2} K^{ab} (\sigma_{ab})_\alpha^{\ \beta} \psi_\beta = K_\alpha^{\ \beta} \psi_\beta \\ \delta\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} &= \frac{1}{2} K^{ab} (\tilde{\sigma}_{ab})^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}} \bar{\chi}^{\dot{\beta}} = -\bar{K}^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}} \psi^{\dot{\beta}}, \end{aligned} \tag{2.31}$$

onde $\left(K^{ab}\right)^* = K^{ab}$ e $K^{ab} = -K^{ba}$. Abaixando e subindo índices, temos

$$\begin{aligned} \delta\psi^\alpha &= -\psi^\beta \left(\frac{1}{2} K^{ab} \sigma_{ab}\right)_\beta^{\ \alpha} = -\psi^\beta K_\beta^{\ \alpha} = -K^\alpha_{\ \beta} \psi^\beta \\ \delta\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} &= -\bar{\chi}_{\dot{\beta}} \left(\frac{1}{2} K^{ab} \tilde{\sigma}_{ab}\right)^{\dot{\beta}}_{\ \dot{\alpha}} = -\bar{\chi}_{\dot{\beta}} \bar{K}^{\dot{\beta}}_{\ \dot{\alpha}} = \bar{K}_{\dot{\alpha}}^{\ \dot{\beta}}, \end{aligned} \tag{2.32}$$

onde usamos o fato de que $(\sigma_{ab})_{\alpha\beta}$ e $(\tilde{\sigma}_{ab})_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ são simétricas em seus índices *espinoriais*.

Incorporando dois *espinores* ψ_α e $\bar{\chi}^\alpha$ em uma coluna de quatro componentes,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\chi}^\alpha \end{pmatrix}, \tag{2.33}$$

temos que esse duplo *espinor* é chamado de *espinor* de Dirac. Devido à (2.31), uma transformação de Lorentz infinitesimal atua em Ψ pela seguinte forma:

$$\delta\Psi = \frac{1}{2}K^{ab}\begin{pmatrix} \sigma_{ab} & 0 \\ 0 & \tilde{\sigma}_{ab} \end{pmatrix}\Psi. \tag{2.34}$$

Escrevendo, explicitamente, a forma de σ_{ab} e $\tilde{\sigma}_{ab}$, dada pela (2.27), é natural introduzir as matrizes $\gamma's$ 4×4:

$$\gamma_a = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_a \\ \tilde{\sigma}_a & \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

Assim, a lei de transformação (2.34) assume a forma

$$\begin{aligned} \delta\Psi &= \frac{1}{2}K^{ab}\Sigma_{ab}\Psi, \\ \Sigma_{ab} &= -\frac{1}{4}\left[\gamma_a, \gamma_b\right]. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Observemos que as matrizes (2.35) satisfazem a álgebra

$$\{\gamma_a, \gamma_b\} = -2\eta_{ab}, \tag{2.37}$$

então γ_a são as matrizes de Dirac usuais (em uma representação especial). As equações (2.36) são as leis de transformação padrão dos *espinores* de Dirac.

Dado um *espinor* de Dirac (2.33), conjugamos ψ_α para obter $\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$, e conjugamos $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}$ para obter χ^α; combinando esse resultado em uma linha de quatro componentes, temos

$$\bar{\Psi} \equiv \left(\chi^\alpha, \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\right), \tag{2.38}$$

em que sua lei de transformação, usando (2.32), (2.35) e (2.36), é dada por

$$\delta\bar{\Psi} = -\bar{\Psi}\left(\frac{1}{2}K^{ab}\Sigma_{ab}\right). \tag{2.39}$$

Além disso, $\bar{\Psi}$ satisfaz a relação $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma_0$. Assim, $\bar{\Psi}$ é o *espinor* de Dirac conjugado a Ψ. Trocando ψ por χ na (2.33), temos

$$\Psi_C = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

Evidentemente, Ψ_C se transforma como um *espinor* de Dirac,

$$\delta\Psi_C = \frac{1}{2}K^{ab}\Sigma_{ab}\Psi_C, \tag{2.41}$$

e satisfaz a relação

$$\Psi_C = C\bar{\Psi}^T, \tag{2.42}$$

onde C e sua inversa C^{-1} possuem a forma

$$C = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\alpha\beta} \end{pmatrix}. \tag{2.43}$$

Podemos notar que C é uma matriz antisimétrica unitária obedecendo à identidade

$$C^{-1}\gamma_m C = -\gamma_m^T. \tag{2.44}$$

Portanto, C é a "matriz de conjugação de carga", e Ψ_C é o "*espinor* conjugado de carga"de Ψ.

2.1.3 *Espinores* de Weyl

Definamos dois operadores P_L e P_R da seguinte forma

$$P_L = \frac{1}{2}\left(\mathbf{1}_4 + \gamma_5\right), \qquad P_R = \frac{1}{2}\left(\mathbf{1}_4 - \gamma_5\right) m, \tag{2.45}$$

onde γ_5 $(= -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)$ é a matriz invariante de Lorentz,

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \qquad \gamma_5^2 = \mathbf{1}_4 \qquad \gamma_5\gamma_m + \gamma_m\gamma_5 = 0. \tag{2.46}$$

Devido à identidade

$$P_L^2 = P_L \qquad P_R^2 = P_R \quad P_L P_R = P_R P_L = 0, \tag{2.47}$$

esses operadores são projetores invariantes de Lorentz. Atuando P_L e P_R em um *espinor* de Dirac Ψ arbitrário, obtemos objetos de quatro componentes:

$$\Psi_L \equiv P_L\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Psi_R \equiv P_R\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \tag{2.48}$$

que se transformam como *espinores* de Dirac e satisfazem os vínculos covariantes de Lorentz:

$$\gamma_5\Psi_L = \Psi_L \qquad \gamma_5\Psi_R = -\Psi_R. \tag{2.49}$$

As relações (2.48) mostram que Ψ_L e Ψ_R são as formas de Dirac dos *espinores* de Weyl de mão esquerda e de mão direita de duas componentes ψ_α e $\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}$, respectivamente. Devido a isso, são freqüentemente chamados de *espinores* de Weyl.

2.1.4 *Espinores* de Majorana

Consideremos a possibilidade $\psi_\alpha = \chi_\alpha$; se ψ_α é um *espinor* de duas componentes sem ponto, então, o objeto de quatro componentes

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

se transforma conforme um *espinor* de Dirac,

$$\delta\Psi_M = \frac{1}{2}K^{ab}\Sigma_{ab}\Psi_M. \tag{2.51}$$

Sua principal propriedade é coincidir com seu *espinor* de conjugação de carga:

$$\Psi_M = C\bar{\Psi}_M^T. \tag{2.52}$$

Assim, Ψ_M é chamado de *espinor* de Majorana.

Qualquer *espinor* de Dirac (2.33) pode ser representado pela soma de dois *espinores* de Majorana Φ_M e Λ_M:

$$\Psi_M = \Phi_M + i\Lambda_M \Longrightarrow \psi_\alpha = \varphi_\alpha + i\lambda_\alpha \qquad \chi_\alpha = \varphi_\alpha - i\lambda_\alpha. \tag{2.53}$$

2.1.5 Combinações bilineares entre duas e quatro componentes

O conjunto de matrizes 4×4

$$\gamma_A = \{\mathbf{1}_4, \gamma_a, \Sigma_{ab}, \gamma_a\gamma_5, \gamma_5\}, \tag{2.54}$$

forma uma base no espaço linear de matrizes 4×4. Definindo o correspondente conjunto com índices contravariantes,

$$\gamma^A = \left\{\mathbf{1}_4, \gamma^a, \Sigma^{ab}, \gamma^a\gamma_5, \gamma^5\right\}, \tag{2.55}$$

temos a identidade

$$\frac{1}{4}Tr\left(\gamma^A\gamma_B\right) = \delta^A_B \qquad \gamma^A\gamma_A = \mathbf{1}_4 \quad (\textit{sem}\ \text{somar}). \tag{2.56}$$

De acordo com essas identidades, se Γ é uma matriz 4×4, então

$$\Gamma = \sum_A C^A\gamma_A \qquad C^A = \frac{1}{4}Tr\left(\gamma^A\Gamma\right), \tag{2.57}$$

ou, em componentes,

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{4} \sum_A \left(\gamma^A\right)_{kl} \Gamma_{lk} \left(\gamma_A\right)_{ij} . \tag{2.58}$$

Como Γ é arbitrário, obtemos a seguinte relação de completeza:

$$\delta_{il}\delta_{jk} = \frac{1}{4} \sum_A \left(\gamma^A\right)_{kl} \left(\gamma_A\right)_{ij} . \tag{2.59}$$

Consideremos *espinores* de Dirac arbitrários, Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 e Ψ_4; usando a relação (2.59), podemos verificar que

$$\bar{\Psi}_{1i}\Psi_{2j} = \frac{1}{4} \sum_A \bar{\Psi}_1 \gamma^A \Psi_2 \left(\gamma_A\right)_{ji} \tag{2.60}$$

$$\left(\bar{\Psi}_1\Psi_2\right)\left(\bar{\Psi}_3\Psi_4\right) = -\frac{1}{4} \sum_A \left(\bar{\Psi}_1 \gamma^A \Psi_4\right)\left(\bar{\Psi}_3 \gamma_A \Psi_2\right) . \tag{2.61}$$

Para concluirmos esta seção, vamos listar algumas conexões entre combinações bilineares de duas e de quatro componentes. Dados dois *espinores* de Dirac,

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} \psi_{1\alpha} \\ \bar{\chi}_1{}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \qquad \Psi_2 = \begin{pmatrix} \psi_{2\alpha} \\ \bar{\chi}_2{}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \tag{2.62}$$

temos

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}_1\Psi_2 &= \chi_1\psi_2 + \bar{\psi}_1\bar{\chi}_2, \\
\bar{\Psi}_1\gamma_5\Psi_2 &= \chi_1\psi_2 - \bar{\psi}_1\bar{\chi}_2, \\
\bar{\Psi}_1\gamma_a\Psi_2 &= \chi_1\sigma_a\bar{\chi}_2 - \psi_2\sigma_a\bar{\psi}_1, \\
\bar{\Psi}_1\gamma_a\gamma_5\Psi_2 &= -\chi_1\sigma_a\bar{\chi}_2 - \psi_2\sigma_a\bar{\psi}_1, \\
\bar{\Psi}_1\Sigma_{ab}\Psi_2 &= \chi_1\sigma_{ab}\psi_2 + \bar{\psi}_1\tilde{\sigma}_{ab}\bar{\chi}_{2,} \\
\bar{\Psi}_1\Sigma_{ab}\gamma_5\Psi_2 &= \chi_1\sigma_{ab}\psi_2 - \bar{\psi}_1\tilde{\sigma}_{ab}\bar{\chi}_2,
\end{aligned} \tag{2.63}$$

que nos mostram como expressar uma combinação arbitrária bilinear de *espinores* de Dirac em termos de combinações bilineares de *espinores* de duas componentes e vice-versa.

2.2 Equação de Dirac e de Weyl

Nesta seção, por meio das transformações de Lorentz, conseguimos identificar elementos específicos do grupo $SL\left(2,\mathbb{C}\right)$ e, depois de algumas manipulações matemáticas, reproduzimos as equações de Dirac e de Weyl.

Sabemos que as transformações de Lorentz, para o caso da (2.1), em que $b^m = 0$, de dois sistemas inerciais movimentando-se com velocidade relativa v ao longo do eixo comum x, podem ser dadas por

$$x' = \frac{x + vt}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}; \quad t' = \frac{t + vx/c^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}; \quad y' = y, \quad z' = z, \tag{2.64}$$

ou,

$$x'^0 = \gamma\left(x^0 + \beta x^1\right), \quad x'^1 = \gamma\left(\beta x^0 + x^1\right), \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3, \tag{2.65}$$

onde

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad \beta = v/c, \quad x^0 = ct, \quad x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z. \tag{2.66}$$

Observemos que, como $\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1$, podemos escrever:

$$\gamma = \cosh\phi, \quad \gamma\beta = senh\phi. \tag{2.67}$$

Assim, escrevendo (2.65) em termos do parâmetro ϕ, temos:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & senh\phi & 0 & 0 \\ senh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \tag{2.68}$$

Trocando v por $-v$, o único termo que muda é $senh\phi$:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -senh\phi & 0 & 0 \\ -senh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \tag{2.69}$$

Vamos analisar apenas os seguintes termos:

$$\begin{aligned} x' &\equiv \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & senh\phi \\ senh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}, \\ \tilde{x}' &\equiv \begin{pmatrix} \tilde{x}'^0 \\ \tilde{x}'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -senh\phi \\ -senh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Podemos escrevê-los como:

$$\begin{aligned} x' &= e^{\sigma_1\phi} = (\cosh\phi + \sigma_1 senh\phi)\, x \\ \tilde{x}' &= e^{-\sigma_1\phi} = (\cosh\phi - \sigma_1 senh\phi)\, x, \end{aligned} \tag{2.71}$$

onde $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Notemos que $Dete^{\pm\sigma_1\phi} = 1$; portanto, essas matrizes são elementos particulares (reais) do grupo $SL(2,\mathbb{C})$. Então, analisando dois vetores sobre suas atuações, temos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \zeta'^1 \\ \zeta'^2 \end{pmatrix} &= (\cosh\phi/2 + \vec{\sigma}.\hat{n} senh\phi/2) \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \eta'^1 \\ \eta'^2 \end{pmatrix} &= (\cosh\phi/2 - \vec{\sigma}.\hat{n} senh\phi/2) \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.72}$$

onde $\hat{n}$ é um vetor unitário na direção do *boost* de Lorentz, e $\phi \to \phi/2$ ficará claro no final dos cálculos. Escrevendo em termos de γ, temos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \zeta'^1 \\ \zeta'^2 \end{pmatrix} &= \left[\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{1/2} + \vec{\sigma}.\hat{n}\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^{1/2}\right] \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \eta'^1 \\ \eta'^2 \end{pmatrix} &= \left[\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{1/2} - \vec{\sigma}.\hat{n}\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^{1/2}\right] \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Multiplicando o lado direito por $\sqrt{E+m}/\sqrt{E+m}$, temos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \zeta'^1 \\ \zeta'^2 \end{pmatrix} &= \left(\frac{E+m+\vec{\sigma}.\vec{p}}{[2m(E+m)]^{1/2}}\right) \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \eta'^1 \\ \eta'^2 \end{pmatrix} &= \left(\frac{E+m-\vec{\sigma}.\vec{p}}{[2m(E+m)]^{1/2}}\right) \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.74}$$

onde usamos as relações relativísticas $E^2 = p^2 + m^2$, $\gamma = E/m$ e $c = 1$.

Definindo

$$\begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix}, \tag{2.75}$$

temos que

$$\begin{pmatrix} \zeta'^1 \\ \zeta'^2 \end{pmatrix} = \left(\frac{E + \vec{\sigma}.\vec{p}}{m}\right) \begin{pmatrix} \eta'^1 \\ \eta'^2 \end{pmatrix} \tag{2.76}$$

$$\begin{pmatrix} \eta'^1 \\ \eta'^2 \end{pmatrix} = \left(\frac{E - \vec{\sigma}.\vec{p}}{m}\right) \begin{pmatrix} \zeta'^1 \\ \zeta'^2 \end{pmatrix}. \tag{2.77}$$

Podemos escrever as relações (2.76) e (2.77) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} -m\vec{\zeta} + (p_0 + \vec{\sigma}.\vec{p})\,\vec{\eta} &= 0 \\ (p_0 - \vec{\sigma}.\vec{p})\,\vec{\zeta} - m\vec{\eta} &= 0, \end{aligned} \tag{2.78}$$

ou, em forma matricial,

$$\begin{pmatrix} -m & p_0 + \vec{\sigma}.\vec{p} \\ p_0 - \vec{\sigma}.\vec{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\zeta} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} = 0, \tag{2.79}$$

onde $\vec{\zeta} \equiv \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix}$, $\vec{\eta} \equiv \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix}$ e $p_0 \equiv E$. Definindo o *quadriespinor*

$$\psi = \begin{pmatrix} \vec{\zeta} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} \tag{2.80}$$

e as matrizes 4×4

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.81}$$

podemos escrever (2.79) da seguinte forma:

$$\left(\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i - m\right) \psi = 0, \tag{2.82}$$

ou

$$\left(\gamma^\mu p_\mu - m\right) \psi = 0, \tag{2.83}$$

onde $p_\mu = (E, -\vec{p})$ e $\gamma^0 p_0 + \gamma^i p_i = \gamma^0 p_0 - \vec{\gamma}\vec{p}$, que é a equação de Dirac para uma partícula massiva de *spin* 1/2. Para o caso de uma partícula sem massa, temos as seguintes duas equações:

$$\begin{aligned} (p_0 + \vec{\sigma}\vec{p})\,\vec{\eta} &= 0 \\ (p_0 - \vec{\sigma}\vec{p})\,\vec{\zeta} &= 0, \end{aligned} \tag{2.84}$$

que são conhecidas como equações de Weyl. Além disso, $p_0 = |\vec{p}|$ para a partícula sem massa. Então,

$$\vec{\sigma}\vec{p}\vec{\eta} = -\vec{\eta}, \quad \vec{\sigma}\vec{p}\vec{\zeta} = \vec{\zeta}. \tag{2.85}$$

Portanto, o operador $\vec{\sigma}\vec{p}$ mede a componente de *spin* na direção do momento, e essa quantidade é chamada de helicidade. Assim, os *espinores* de Weyl são autoestados da helicidade.

2.3 Equação de Bargmann-Wigner

A derivação das equações de campos com *spins* 1 e 3/2, como caso particular de um sistema de equações de onda relativísticas para um *spin* arbitrário, é bem conhecida [48]. Portanto, faremos um breve comentário para fixar a notação. Esse sistema foi primeiramente descrito por Dirac [49]; no entanto, seguiremos a formulação de Bargmann-Wigner [50], que consiste em escrever a seguinte equação de onda:

$$\left(\gamma_\mu^{(n)} p^\mu + mc\right)\psi_{\alpha\beta\ldots\tau} = 0, \tag{2.86}$$

onde p^μ é o momento da partícula. A quantidade $\psi_{\alpha\beta\ldots\tau}(x)$, composta de campos idênticos de *spin* 1/2, é interpretada como as componentes da função de onda de uma partícula com massa m e *spin* s, e $\gamma_\mu^{(n)}$ são as matrizes de Dirac ($\mu = 0, 1, 2, 3$; $n = 1, 2, 3, ..., 2s$) que atuam sob um determinado índice:

$$\gamma_\mu^{(n)}\gamma_\nu^{(n)} + \gamma_\nu^{(n)}\gamma_\mu^{(n)} = 2\eta_{\mu\nu}. \tag{2.87}$$

Os geradores das transformações de Lorentz para a equação (2.86) são dados por

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{2s}\left(\gamma_\mu^{(n)}\gamma_\nu^{(n)} - \gamma_\nu^{(n)}\gamma_\mu^{(n)}\right), \tag{2.88}$$

que é uma generalização para os geradores da equação de Dirac.

2.4 Equação de Duffin- Kemmer-Petiau

Para $s = 1$, temos uma partícula descrita por um *espinor* de dois índices, $\psi_{\alpha_1\alpha_2}$, que, devido à simetria $\psi_{\alpha_1\alpha_2} = \psi_{\alpha_2\alpha_1}$, possui apenas dez componentes independentes. Assim, a equação (2.86) é escrita como:

$$\begin{aligned} \left(\gamma_\mu^{(1)} p^\mu + m\right)\psi_{\alpha_1\alpha_2} &= 0 \\ \left(\gamma_\mu^{(2)} p^\mu + m\right)\psi_{\alpha_1\alpha_2} &= 0. \end{aligned} \tag{2.89}$$

Introduzindo uma nova matriz

$$\beta_\mu = \frac{1}{2}\left(\gamma_\mu^{(1)} + \gamma_\mu^{(2)}\right), \tag{2.90}$$

podemos escrever (2.89) como:

$$\left(\beta_\mu p^\mu + m\right)\psi_{\alpha_1\alpha_2} = 0, \tag{2.91}$$

onde as matrizes β_μ satisfazem a seguinte álgebra:

$$\beta_\mu\beta_\lambda\beta_\nu + \beta_\nu\beta_\lambda\beta_\mu = \eta_{\mu\lambda}\beta_\nu + \eta_{\nu\lambda}\beta_\mu. \tag{2.92}$$

Podemos, também, escrever (2.90) da seguinte forma:

$$\beta_\mu = \frac{1}{2}\left(\gamma_\mu \otimes 1 + 1 \otimes \gamma_\mu\right), \tag{2.93}$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma_\mu^{(1)} &= \gamma_\mu \otimes 1 \\ \gamma_\mu^{(2)} &= 1 \otimes \gamma_\mu. \end{aligned} \tag{2.94}$$

Vemos, portanto, que as matrizes $\gamma_\mu^{(1)}$ e $\gamma_\mu^{(2)}$ atuam sobre índices diferentes do *espinor* $\psi_{\alpha_1\alpha_2}$. Notemos, ainda, que as matrizes (2.90) são 4×4, enquanto as (2.93) são matrizes 16×16 e, portanto, a função de onda é um vetor coluna 16×1.

A equação (2.91), que é conhecida como equação de Duffin- Kemmer-Petiau (DKP) [17], é uma equação linear e de primeira ordem nas derivadas, e pode ser escrita em termos de componentes:

$$(i\beta^\mu\partial_\mu - m)_{AB}\,\psi_B = 0 \tag{2.95}$$

$$i\beta^\mu_{AB}\partial_\mu\psi_B = m\psi_A, \tag{2.96}$$

onde $A, B = 1, 2, ...16$. Notemos que, dessa forma, o campo ψ_A é um vetor coluna de 16×1, cuja representação é redutível. Além disso, sabemos que as representações redutíveis de β^μ podem ser decompostas em três representações irredutíveis: *spin* 1 (10×10), *spin* 0 (5×5) e uma representação trivial, $16 = 10 \oplus 5 \oplus 1$ [51].

Por outro lado, segundo o formalismo de Bargmann-Wigner, partículas de *spin* mais elevado podem ser representadas por *espinores* (*biespinores*) de Dirac, $\psi \equiv \psi_{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{2s}}$. Para o caso de *spin* 1, o *espinor* é de segunda ordem, ψ_{ik}. Assim, podemos escrever (2.91) em termos dos índices de Dirac:

$$\left(i\beta^\mu_{ij,kl}\partial_\mu - m\delta_{ij}\delta_{kl}\right)\psi_{jl} = 0, \tag{2.97}$$

onde ψ_{ik} é uma matriz 4×4, que pode ser decomposta em uma base formada pelas matrizes γ^μ [52]:

$$\psi_{ik} = (\gamma^\mu C)_{ik}\,\psi_\mu + (\Sigma^{\mu\nu} C)_{ik}\,\psi_{\mu\nu} + \left(\gamma^5 C\right)_{ik}\psi_5 + \left(\gamma^5\gamma^\mu C\right)_{ik}\psi_{5\mu} + C_{ik}\psi, \tag{2.98}$$

em que C é a matriz de conjugação de carga. Devido às propriedades de sua antisimetria, temos

$$\begin{aligned} \psi_{\{ik\}} &= (\gamma^\mu C)_{ik}\,\psi_\mu + (\Sigma^{\mu\nu} C)_{ik}\,\psi_{\mu\nu} && (2.99) \\ \psi_{[ik]} &= \left(\gamma^5 C\right)_{ik}\psi_5 + \left(\gamma^5\gamma^\mu C\right)_{ik}\psi_{5\mu} && (2.100) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \Sigma^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right) && (2.101) \\ \gamma^5 &= i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3. \end{aligned}$$

Segundo (2.93), podemos escrever β^μ em componentes:

$$\beta^\mu_{ij,kl} = \frac{1}{2}\left(\gamma^\mu_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ij}\gamma^\mu_{kl}\right), \tag{2.102}$$

que é simétrica nos índices $i \leftrightarrow k$ e $j \leftrightarrow l$:

$$\beta^\mu_{ij,kl} = \beta^\mu_{kl,ij}. \tag{2.103}$$

A matriz

$$\beta^\mu = \frac{1}{2}\left(\gamma^\mu \otimes 1 - 1 \otimes \gamma^\mu\right), \tag{2.104}$$

ou em componentes

$$\beta^{\mu}_{ij,kl} = \frac{1}{2}\left(\gamma^{\mu}_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ij}\gamma^{\mu}_{kl}\right), \tag{2.105}$$

também satisfaz a álgebra DKP (2.92). Porém, a diferença da relação (2.93) é que essa matriz é antisimétrica nos índices $i \leftrightarrow k$ e $j \leftrightarrow l$,

$$\beta^{\mu}_{ij,kl} = -\beta^{\mu}_{kl,ij} \tag{2.106}$$

Assim, as duas representações, (2.93) e (2.104),

$$\begin{aligned} \beta^{\mu} &= \frac{1}{2}\left(\gamma^{\mu}\otimes 1 \pm 1\otimes\gamma^{\mu}\right), && (2.107)\\ \beta^{\mu}_{ij,kl} &= \frac{1}{2}\left(\gamma^{\mu}_{ij}\delta_{kl} \pm \delta_{ij}\gamma^{\mu}_{kl}\right), && (2.108)\end{aligned}$$

fornecem os seguintes resultados: quando o operador $(i\beta^{\mu}\partial_{\mu} - m)$, com a matriz β^{μ} (simétrica) dada pela (2.93), é aplicado na função ψ_{ik}, o termo $\psi_{[ik]}$, dado pela (2.100), é cancelado, separando, portanto, a única representação irredutível $\psi_{\{ik\}}$, que dará lugar às equações de Proca para ψ_{μ} e $\psi_{\mu\nu}$. O uso da matriz β^{μ} (antisimétrica) dada pela (2.104) cancela o termo $\psi_{\{ik\}}$, dado pela (2.99), separando a representação irredutível $\psi_{[ik]}$, dando lugar às equações de ψ_5 e de $\psi_{5\mu}$, que, posteriormente, nos levam às equações de Klein-Gordon.

Sabemos [19, 44] que a teoria de campos para a teoria de DKP sem massa possui uma simetria de *gauge* local que descreve o campo eletromagnético em seu setor de *spin* 1. Entretanto, é importante observar que o caso sem massa não pode ser obtido pelo limite $m \to 0$ do caso massivo: as projeções do campo de DKP nos setores de *spins* 1 e 0 envolvem a massa como um fator multiplicativo [18, 53]. Entretanto, se simplesmente fizermos a massa igual a zero na Lagrangiana de DKP, obtemos uma Lagrangiana com simetria de *gauge* global. Maiores detalhes da teoria de DKP sem massa serão apresentados à frente, no penúltimo exemplo do capítulo *Aplicações.*

2.5 Equações de Rarita-Schwinger

Para $s = 3/2$, teremos um *espinor* de terceira ordem $\psi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ e, portanto, as equações de Bargmann-Wigner serão escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \left(\gamma_\mu^{(1)} p^\mu + m\right)\psi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} &= 0, \\ \left(\gamma_\mu^{(2)} p^\mu + m\right)\psi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} &= 0, \\ \left(\gamma_\mu^{(3)} p^\mu + m\right)\psi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} &= 0, \end{aligned} \tag{2.109}$$

onde $\psi \equiv \psi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ são totalmente simétricos.

Como vimos no início do capítulo, podemos expressar um índice de Lorentz μ por meio de dois índices de Dirac $\alpha_1\alpha_2$:

$$\psi_{\alpha_3}^\lambda = \psi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\left(C\gamma^\lambda\right)_{\alpha_1\alpha_2}. \tag{2.110}$$

Como C é a conjugação de carga, a expressão $(C\gamma^\mu)$ é simétrica em seus índices. Se multiplicarmos a terceira relação de (2.109) por $(C\gamma^\mu)$, temos

$$\begin{aligned} \left(\gamma_\mu^{(3)} p^\mu + m\right)\psi_{\alpha_3}^\lambda &= 0, \\ \left(\gamma_\mu p^\mu + m\right)\psi^\lambda &= 0. \end{aligned} \tag{2.111}$$

Notemos que as duas primeiras equações de (2.109) não fornecem nada de novo, pois as matrizes $\gamma_\mu^{(1,2)}$ atuam sobre índices diferentes de $\psi_{\alpha_3}^\mu$. Ao multiplicarmos (2.110) por $(\gamma^\mu)_{\alpha\alpha_3}$, temos

$$\left(\gamma_\mu\right)_{\alpha\alpha_3}\psi_{\alpha_3}^\mu = \psi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\left(\gamma_\mu\right)_{\alpha\alpha_3}\left(C\gamma^\mu\right)_{\alpha_1\alpha_2} = 0, \tag{2.112}$$

onde (2.111) e (2.112) são as equações de Rarita-Schwinger [54].

Como fizemos nas seções precedentes, podemos, também, introduzir a matriz β_μ como:

$$\beta_\mu = \frac{1}{3}\left(\gamma_\mu^{(1)} + \gamma_\mu^{(2)} + \gamma_\mu^{(3)}\right), \tag{2.113}$$

ou, ainda,

$$\beta_\mu = \frac{1}{3}\left(\gamma_\mu \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \gamma_\mu \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes \gamma_\mu\right), \tag{2.114}$$

onde

$$\begin{aligned}\gamma_\mu^{(1)} &= \gamma_\mu \otimes 1 \otimes 1, \\ \gamma_\mu^{(2)} &= 1 \otimes \gamma_\mu \otimes 1, \\ \gamma_\mu^{(3)} &= 1 \otimes 1 \otimes \gamma_\mu.\end{aligned} \tag{2.115}$$

Com isso, considerações de simetria sobre a função $\psi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ deve nos levar à condição (2.112).

Em geral, a matriz β_μ pode ser escrita como:

$$\beta_\mu = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{2J-1} 1^{\otimes k} \otimes \gamma_\mu \otimes 1^{\otimes(2J-1-k)} \tag{2.116}$$

onde J é o *spin* mais alto do campo e N é o número de índices do *espinor*.

A diferença relevante entre a equação de DKP e as equações de Bargmann-Wigner reside no fato de que, naquela, no processo de simetrização ou antisimetrização, são levados em conta os índices do operador $\gamma^\mu_{ij}\delta_{kl}$:

$$i\gamma^\mu_{\{ij}\delta_{kl\}}\partial_\mu\psi_{jl} = m\psi_{ik} \tag{2.117}$$

para o sinal $(+)$, e

$$i\gamma^\mu_{[ij}\delta_{kl]}\partial_\mu\psi_{jl} = m\psi_{ik} \tag{2.118}$$

para o sinal $(-)$. Assim, esse processo separa as partes simétricas $\{\}$ (representação de *spin* 1) e as antisimétricas $[\,]$ (representação de *spin* 0) de ψ_{ik}. Por isso, podemos escrever:

$$i\gamma^\mu_{\{ij}\delta_{kl\}}\partial_\mu\psi_{\{il\}} = m\psi_{\{jk\}}, \tag{2.119}$$

$$i\gamma^\mu_{[ij}\delta_{kl]}\partial_\mu\psi_{[il]} = m\psi_{[jk]}. \tag{2.120}$$

Já na equação de Bargmann-Wigner, a simetrização sobre os índices do *espinor* é assumida desde o início, deixando a representação do *spin* 1 separada.

Usamos a representação de Dirac para a matriz γ^μ, dada pelas relações:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \widetilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right) = i\begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \widetilde{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix}, \tag{2.121}$$

em que a matriz C possui a forma:

$$C = -i\gamma^0\gamma^2 = i\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix} \tag{2.122}$$

e γ^5

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.123}$$

Se introduzirmos a conjugacão de carga sobre o *spinor* ψ_{ik} como

$$\psi^C = \mathbf{C}\overline{\psi}^T, \tag{2.124}$$
$$\psi^C_A = \mathbf{C}_{AB}\overline{\psi}^T_B, \tag{2.125}$$
$$\psi^C_{ij} = \mathbf{C}_{ij,kl}\overline{\psi}^T_{kl}, \tag{2.126}$$

teremos que a condição do campo "real" na teoria DKP será dada por

$$\psi^C_M = \psi_M, \tag{2.127}$$

onde o índice M denota apenas um *espinor* de Majorana. Notemos que em $\mathbf{C}$ há quatro índices de Dirac e possui a forma

$$\mathbf{C} = C \otimes C, \tag{2.128}$$
$$\mathbf{C}_{ij,kl} = C_{ij}C_{kl}, \tag{2.129}$$

Se considerarmos

$$\mathbf{C}^{-1} = C^{-1} \otimes C^{-1}, \tag{2.130}$$

podemos provar que

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1} = 1 \tag{2.131}$$

Assim, a matriz $\mathbf{C}$ assume a forma:

$$\mathbf{C}^T = C^T \otimes C^T = \mathbf{C}, \tag{2.132}$$

ou seja, é uma matriz simétrica. Usando a representação (2.122) para a matriz C, temos

$$\mathbf{C} = -\gamma^0\gamma^2 \otimes \gamma^0\gamma^2 \tag{2.133}$$

Podemos escrever todos os resultados anteriores via índice de Weyl: com γ^μ na forma

$$\gamma^\mu = \sigma_+ \otimes \sigma^\mu + \sigma_- \otimes \widetilde{\sigma}^\mu, \tag{2.134}$$

onde σ^μ são as matrizes de Pauli (2.24) mais a identidade e

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.135}$$

são matrizes triangulares. Notemos que

$$\sigma_\pm = \frac{1}{2}\left(\sigma^1 \pm i\sigma^2\right). \tag{2.136}$$

Com isso, a matriz β^μ, (2.93), passa a ser:

$$\beta^\mu = \frac{1}{2}\left(\sigma_+ \otimes \sigma^\mu \otimes 1 \otimes 1 + \sigma_- \otimes \widetilde{\sigma}^\mu \otimes 1 \otimes 1 \pm 1 \otimes 1 \otimes \sigma_+ \otimes \sigma^\mu \pm 1 \otimes 1 \otimes \sigma_- \otimes \widetilde{\sigma}^\mu\right), \tag{2.137}$$

mesma forma para as seguintes matrizes:

$$C = i\sigma^3 \otimes \sigma^2, \tag{2.138}$$

$$\mathbf{C} = C \otimes C = -\sigma^3 \otimes \sigma^2 \otimes \sigma^3 \otimes \sigma^2, \tag{2.139}$$

$$\gamma^5 = -\sigma^3 \otimes 1. \tag{2.140}$$

Por outro lado, as matrizes ψ_{ik} (4×4) podem ser expressas por *quadriespinores* de Weyl: para (2.117) e (2.118), temos:

$$\psi_{\{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}\}} = \begin{pmatrix} \zeta & \chi \\ \eta & \varphi \end{pmatrix} \sigma^2 \tag{2.141}$$

$$\psi_{[\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}]} = \begin{pmatrix} \Phi & \Theta^* \\ \Theta & \Phi \end{pmatrix} \sigma^2, \tag{2.142}$$

onde

$$\zeta \equiv \zeta_{\alpha\beta}, \quad \varphi \equiv \varphi^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \quad \chi \equiv \chi_\alpha{}^{\dot{\beta}}, \quad \eta \equiv \eta^{\dot{\alpha}}{}_\beta, \tag{2.143}$$

$$\Theta \equiv \Theta_{\alpha\dot{\beta}}, \quad \Theta^* \equiv \Theta^{*\dot{\alpha}\beta}, \tag{2.144}$$

e Φ é um escalar.

Fazendo a notação:

$$\begin{aligned}
\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}}\psi_{\mu} &= i\chi_{\alpha\dot{\beta}}, \quad i\widetilde{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}\psi_{\mu} = \eta^{\dot{\alpha}\beta}, \\
2\left(\sigma^{\mu\nu}\right)_{\alpha}^{\ \ \beta} &= -\zeta_{\alpha}^{\ \ \beta}, \quad 2\left(\widetilde{\sigma}^{\mu\nu}\right)^{\dot{\alpha}}_{\ \ \dot{\beta}} = \varphi^{\dot{\alpha}}_{\ \ \dot{\beta}}, \\
-i\psi_5 &= \Phi, \quad i\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}}\psi_{5\mu} = \Theta_{\alpha\dot{\beta}}, \quad i\widetilde{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}\psi_{5\mu} = \Theta^{*\dot{\alpha}\beta},
\end{aligned} \tag{2.145}$$

a solução de (2.122), usando (2.133), é dada por

$$p_{\alpha\dot{\alpha}}\eta^{\dot{\alpha}}_{\ \ \beta} = m\zeta_{\alpha\beta}, \quad p^{\dot{\alpha}\alpha}\chi_{\alpha}^{\ \ \dot{\beta}} = m\varphi^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \tag{2.146}$$

$$p_{\alpha\dot{\alpha}}\varphi^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = m\chi_{\alpha}^{\ \ \dot{\beta}}, \quad p^{\dot{\alpha}\alpha}\zeta_{\alpha\beta} = m\eta^{\dot{\alpha}}_{\ \ \beta}. \tag{2.147}$$

Ou seja, são as equações de movimento para partículas massivas de *spin* 1. A solução de (2.123), usando (2.142), será

$$p_{\alpha\dot{\alpha}}\Theta^{\dot{\alpha}\alpha} = m\Phi, \quad p^{\dot{\alpha}\alpha}\Theta^{*}_{\alpha\dot{\alpha}} = m\Phi, \tag{2.148}$$

$$p_{\alpha\dot{\alpha}}\Phi = m\Theta^{*}_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad p^{\dot{\alpha}\alpha}\Phi = m\Theta^{\dot{\alpha}\alpha}, \tag{2.149}$$

onde podemos concluir que: $\Theta = \Theta^*$.

Quando consideramos a condição do campo "real" (2.127), obtemos (2.117) na forma

$$\psi_{\{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}\}} = \begin{pmatrix} \zeta & \chi \\ \overline{\chi} & \overline{\zeta} \end{pmatrix}\sigma^2, \tag{2.150}$$

ou seja,

$$\zeta^{+} \equiv \overline{\zeta} \equiv \varphi, \quad \left(\zeta_{\alpha\beta}\right)^{+} \equiv \zeta_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \equiv \varphi^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}, \tag{2.151}$$

$$\eta^{+} \equiv \overline{\eta} \equiv \chi, \quad \left(\eta^{\dot{\alpha}}_{\ \ \beta}\right)^{+} \equiv \eta^{\alpha}_{\ \ \dot{\beta}} \equiv \chi_{\alpha}^{\ \ \dot{\beta}}, \tag{2.152}$$

com (2.118), da forma

$$\psi_{[\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}]} = \begin{pmatrix} \Phi & \Theta \\ \Theta & \Phi \end{pmatrix}\sigma^2. \tag{2.153}$$

Capítulo 3

Pseudomecânica

Apresentamos um pouco da história da pseudomecânica e, logo após, introduzimos as álgebras de Grassmann e de Clifford. Uma vez estabelecida a definição de supervariedade, desenvolvemos o formalismo canônico no superespaço, com ênfase nas equações de movimento, nos Parênteses de Poisson e nos Parênteses de Dirac.

3.1 Introdução

Em 1976, Casalbuoni [3] analisou sistemas, os quais chamou de pseudomecânicos, descritos por variáveis canônicas usuais e por variáveis de Grassmann*, notando, assim, que esse sistema podia ser o análogo clássico de sistemas fermiônicos no limite $\hbar \to 0$.

Entretanto, a primeira idéia de analisar sistemas clássicos que incluíam no espaço de fase variáveis comutativas e anticomutativas foi proposta por Schwinger em 1953 [1]. Embora interessado em mostrar que relações de (anti)comutação são derivadas do princípio da dinâmica quântica para sistemas obedecendo a primeira ordem das equações de movimento, não desenvolveu as idéias contidas na pseudomecânica: estas são diferentes daquelas, como percebemos ao analisar o artigo de Schwinger. Assim, podemos dizer que a pseudomecânica começou a ser desenvolvida em 1959 por Martin [2], que tomou como ponto de partida um anel não comutativo, gene-

*Uma breve biografia de Hermann Guther Grassmann e as idéias centrais comentadas do seu livro "Ausdehnungslehve "(Teoria da Extensão), publicado pela primeira vez em 1844, podem ser encontradas nas referências [55] e [56].

ralizando, assim, a dinâmica canônica clássica. Além de construir o análogo clássico de um oscilador fermiônico, mostrou, também, que nem todos os possíveis análogos clássicos possuíam uma formulação Lagrangiana.

Mais tarde, nos trabalhos de Berezin e Marinov [4, 5], um modelo para a descrição de partículas não relativísticas e relativísticas de *spin* 1/2 foi proposto. No caso relativístico, para obter uma formulação consistente para a dinâmica da partícula, um novo vínculo foi introduzido; isso porque essa formulação possui cinco variáveis de Grassmann para o caso massivo. Na mesma época, esses modelos também foram estudados por Casalbuoni [6], que explorou o grupo interno de simetria e a invariância de *gauge* da ação obtida; desse modo, usando essa simetria interna, foi possível a descrição de partículas de *spin* zero e de *spin* um.

Muitos outros artigos surgiram como conseqüência dos estudos de partículas com *spin*. Por exemplo, no contexto da pseudomecânica, temos a derivação das equações de movimento, para partículas massivas e não massivas com *spin* [10, 11], em que a descrição do *spin* é conseguida por meio da inclusão de grupos internos de simetria. Similarmente, o caso da partícula de Dirac é discutido nos trabalhos [12], [13] e [14]; uma representação com a integral de trajetória, para obter o propagador de Dirac, foi também obtida na [15]; outros estudos, conectando a pseudomecânica com a teoria de cordas, foram realizados para o caso livre e o de interação com um campo externo [16].

3.2 Álgebras

3.2.1 Introdução

Uma Álgebra é um espaço vetorial em que, além das operações de adição e multiplicação por números, um produto de elementos é definido com a seguinte lei de distribuição:

$$a\,(\alpha b + \beta c) = \alpha ab + \beta ac \tag{3.1}$$

e

$$(\alpha b + \beta c)\,a = \alpha ba + \beta ca, \tag{3.2}$$

onde α e β são números e a, b e c são elementos da álgebra. Além disso, uma álgebra é comutativa se

$$ab = ba, \tag{3.3}$$

para quaisquer dois de seus elementos a e b; caso contrário é anticomutativa e, também, será chamada de dimensão finita ou infinita, assim como o é para um espaço vetorial. Além disso, uma álgebra é chamada associativa, se para qualquer de seus três elementos a, b e c, tivermos que

$$a\,(bc) = (ab)\,c. \tag{3.4}$$

Denotemos por U uma álgebra e por K um conjunto de números em que os elementos de U podem ser multiplicados. Nesse caso, U será chamado de uma álgebra sobre K. Dependendo do fato de K ser real, $\mathbb{R}$, ou complexo, $\mathbb{C}$, a álgebra U será chamada de real ou complexa, respectivamente.

Se existe um elemento na álgebra U com a propriedade da unidade:

$$e.a = a.e = a, \text{ para qualquer } a \in U, \tag{3.5}$$

então, a álgebra é chamada de uma álgebra com unidade, e e é chamado de unidade da álgebra. Existem, entretanto, álgebras sem unidades com importantes aplicações: álgebras de Lie, em particular, nunca contém uma unidade. Álgebras de Lie são não associativas; entretanto, existem álgebras associativas sem unidade, por exemplo, as álgebras das matrizes triangulares com elementos da diagonal nulos [58].

3.2.2 Álgebras de Grassmann

Seja ξ^A, $A = 1, ..., N$, um conjunto de geradores, para uma álgebra associativa contendo a unidade, que anticomutam:

$$\xi^A\xi^B + \xi^B\xi^A = 0, \qquad \left(\xi^A\xi^B = 0, \quad para \ \ A = B\right). \tag{3.6}$$

Ela é chamada de Álgebra de Grassmann ou Exterior, e será denotada por Λ. No caso em que $N \to +\infty$, denotaremos por $\Lambda_{+\infty}$.

Os elementos 1, ξ^A, $\xi^A\xi^B, ...$, onde os índices em cada produto são todos diferentes, formam uma infinita base para $\Lambda_{+\infty}$. Quando N é finito, a sequência termina em $1...\xi^N$, e existem unicamente 2^N elementos distintos da base. Sob adição e multiplicação por um número complexo, os elementos de Λ_N formam um espaço vetorial linear de 2^N dimensões; os elementos de $\Lambda_{+\infty}$ formam um espaço vetorial de dimensão infinita. As álgebras Λ_N e $\Lambda_{+\infty}$ sobre os números complexos são associativas, como já dissemos, porém não são comutativas - excluindo os casos triviais $N = 0, 1$.

Como conseqüência da relação (3.6), vemos que qualquer elemento de Λ_N é uma combinação linear dos monômios,

$$1,\ \xi^A,\ \xi^A\xi^B,\ \xi^A\xi^B\xi^C,\ ...\ ,\ \xi^1\xi^2...\xi^N, \tag{3.7}$$

onde $A < B < C < ...$, e $\xi^1\xi^2...\xi^N$ será chamado de monômio de grau N. Observemos que, como todas as relações entre os $\xi\prime s$ seguem da (3.6), os monômios (3.7) são linearmentes independentes. Conseqüentemente, eles formam uma base de Λ_N como um espaço linear.

Não introduziremos um símbolo especial para a unidade de Λ_N, pois ela coincide com a unidade de $\mathbb{R}$. Assim, qualquer elemento de Λ_N pode ser escrito na forma:

$$f = f(\xi) = \sum_{k\geq 1} \sum_{i_1,...,i_k} C_{i_1,...,i_k}\xi_{i_1}...\xi_{i_k}. \tag{3.8}$$

O termo correspondente a $k = 0$ é proporcional à unidade. A relação $f = f(\xi)$ significa que f é explicitada na forma de um polinômio em ξ_i. A expressão em elementos de Λ_N na forma (3.8) não é única em geral: ela se tornará única se condições suplementares forem impostas sobre os coeficientes $C_{i_1,...,i_k}$. Por exemplo, podemos requerer que $C_{i_1,...,i_k} = 0$, a não ser que tenhamos $i_1 < i_2 < ... < i_k$, ou que $C_{i_1,...,i_k}$ seja antisimétrico com respeito aos índices $i_1, ..., i_k$ ($i_1, ..., i_k$ muda de sinal sob permutação de quaisquer dois índices). Essa última condição é mais prática, e será usada de agora em diante.

Os elementos de $\Lambda_{+\infty}$ são chamados de supernúmeros, os quais são expressados da seguinte forma:

$$f = f_b + f_s, \tag{3.9}$$

onde f_b é um número complexo ordinário e

$$f_s = \sum_{n=1} \frac{1}{n!} f_{a_1,...,a_n} \xi^{a_n} ... \xi^{a_1}, \tag{3.10}$$

em que os f's são, como dissemos, completamente antisimétricos em seus índices. O número f_b é chamado de corpo, e os restantes f_s são chamados de parte essencial dos supernúmeros f.

Qualquer supernúmero f^i pode ser escrito em suas partes pares (setor bosônico) e ímpares (setor fermiônico):

$$f^i = q^i + \theta^i, \tag{3.11}$$

em que

$$q^i = f^i_b + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n!} f^i_{a_1,...,a_{2n}} \xi^{a_{2n}} ... \xi^{a_1} \tag{3.12}$$

e

$$\theta^i = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} f^i_{a_1,...,a_{2n+1}} \xi^{a_{2n+1}} ... \xi^{a_1}. \tag{3.13}$$

Ou seja, a álgebra Λ_N é dividida em dois setores, Λ_N^+ e Λ_N^- $\left(\Lambda_N = \Lambda_N^+ \oplus \Lambda_N^-\right)$, onde os elementos de $q^i \in \Lambda_N^+$ e $\theta^i \in \Lambda_N^-$ são representados por combinações lineares apenas de monômios de grau par e ímpar, respectivamente. Vejamos que os elementos pares, os quais são, às vezes, chamados de " $c - numbers$", comutam com todos os elementos de Λ_N e, portanto, Λ_N^+ constitui uma subálgebra de Λ_N. Já os elementos ímpares, os quais são chamados as vezes de "$a - numbers$", anticomutam entre si e comutam com todos os elementos de Λ_N^+; portanto, Λ_N^- não constitui uma subálgebra de Λ_N por não ser um conjunto fechado sob o produto. Em resumo, tem-se, então:

$$\begin{aligned} \theta^i\theta^j + \theta^j\theta^i &= 0, \\ q^iq^j - q^jq^i &= 0, \\ \theta^iq^j - q^j\theta^i &= 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Outro conceito é o da involução, que é o análogo clássico do conjugado Hermitiano para operadores, que possui as propriedades [61]:

$$(AB)^* = B^*A^*, \tag{3.15}$$

$$(A^*)^* = A. \tag{3.16}$$

Uma variável é real se

$$A^* = A \tag{3.17}$$

e imaginária pura se

$$A^* = -A. \tag{3.18}$$

Notemos que, para variáveis ímpares, o produto $\theta^\alpha\theta^\beta$ será imaginário puro se θ^α e θ^β forem reais.

Antes de analisarmos a derivada dos elementos de Λ_N, definamos a paridade de Grassmann ϵ_f de uma função $f(q,\theta)$ como sendo igual a zero se f for par, e um se f for ímpar. Temos, portanto, que para qualquer par de funções f e g,

$$fg = (-)^{\epsilon_f\epsilon_g}\, gf. \tag{3.19}$$

Suponhamos uma variação $\delta f(\theta)$ em primeira ordem em $\delta\theta^\alpha$:

$$\theta^\alpha \to \theta^\alpha + \delta\theta^\alpha. \tag{3.20}$$

Assim,

$$\delta f(\theta) = \delta\theta^\alpha \left.\frac{\partial f}{\partial\theta^\alpha}\right|_E = \left.\frac{\partial f}{\partial\theta^\alpha}\right|_D \delta\theta^\alpha, \tag{3.21}$$

a qual nos define as derivadas à esquerda (E) e à direita (D) da função f com relação a θ^α. Permutando uma das expressões da (3.21), temos, de forma geral:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial\theta^\alpha}\right|_E = -(-)^{\epsilon_f}\left.\frac{\partial f}{\partial\theta^\alpha}\right|_D. \tag{3.22}$$

Por livre arbítrio, vamos escolher a derivada à esquerda, e qualquer propriedade que demonstrarmos com essa escolha pode ser encontrada de forma análoga para a derivada à direita.

Consideremos a derivada segunda:

$$\delta^2 f(\theta) = \delta^2\theta^\alpha\frac{\partial f}{\partial\theta^\alpha} + \delta\theta^\alpha\delta\theta^\beta\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^\beta\partial\theta^\alpha}. \tag{3.23}$$

Aplicando-a no lado direito da (3.21) e trocando α por β, temos

$$\delta^2 f(\theta) = \delta^2\theta^\beta \frac{\partial f}{\partial\theta^\beta} + \delta\theta^\beta\delta\theta^\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^\alpha\partial\theta^\beta}. \tag{3.24}$$

Igualando (3.23) com (3.24):

$$\begin{aligned} \delta\theta^\beta\delta\theta^\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^\alpha\partial\theta^\beta} - \delta\theta^\alpha\delta\theta^\beta \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^\beta\partial\theta^\alpha} &= \\ \delta\theta^\beta\delta\theta^\alpha \left(\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^\alpha\partial\theta^\beta} + \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^\beta\partial\theta^\alpha} \right) &= 0, \end{aligned} \tag{3.25}$$

temos, portanto,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^\alpha\partial\theta^\beta} = -\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^\beta\partial\theta^\alpha}, \tag{3.26}$$

que resulta, para o caso das variáveis θ's, a seguinte expressão:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\right)^2 = 0. \tag{3.27}$$

Aplicando a variação δ no produto $f(\theta)\, g(\theta)$, temos:

$$\delta(fg) = \delta f g + f\delta g. \tag{3.28}$$

Usando derivada à esquerda:

$$\delta(fg) = \delta\theta^\alpha \frac{\partial f}{\partial\theta^\alpha} g + f\delta\theta^\alpha \frac{\partial g}{\partial\theta^\alpha}, \tag{3.29}$$

ou

$$\delta(fg) = \delta\theta^\alpha \left(\frac{\partial f}{\partial\theta^\alpha} g + (-)^{\epsilon_f} f \frac{\partial g}{\partial\theta^\alpha} \right). \tag{3.30}$$

Como podemos definir $h = fg$, a variação δ de h é escrita da forma:

$$\delta h = \delta\theta^\alpha \frac{\partial h}{\partial\theta^\alpha} = \delta\theta^\alpha \frac{\partial(fg)}{\partial\theta^\alpha} \tag{3.31}$$

Comparando (3.31) com (3.30), temos:

$$\frac{\partial(fg)}{\partial\theta^\alpha} = \frac{\partial f}{\partial\theta^\alpha} g + (-)^{\epsilon_f} f \frac{\partial g}{\partial\theta^\alpha}. \tag{3.32}$$

Vemos que, se usarmos derivada à direita, temos:

$$\left.\frac{\partial(fg)}{\partial\theta^\alpha}\right|_D = (-)^{\epsilon_g} \left.\frac{\partial f}{\partial\theta^\alpha}\right|_D g + f \left.\frac{\partial g}{\partial\theta^\alpha}\right|_D. \tag{3.33}$$

Consideremos a regra da cadeia da seguinte forma:

$$f = f\left[\zeta\left(\theta\left(t\right)\right)\right], \tag{3.34}$$

onde θ e ζ são ímpares e t é um parâmetro par e real. Usando a derivada à esquerda, temos:

$$\delta f = \delta\zeta^{\alpha}\frac{\partial f}{\partial\zeta^{\alpha}}. \tag{3.35}$$

Como $\zeta^{\alpha} = \zeta^{\alpha}\left(\theta\right)$, temos:

$$\delta\zeta^{\alpha} = \delta\theta^{\beta}\frac{\partial\zeta^{\alpha}}{\partial\theta^{\beta}}, \tag{3.36}$$

e, também, $\theta^{\beta} = \theta^{\beta}\left(t\right)$, então:

$$\delta\theta^{\beta} = \delta t\frac{d\theta^{\beta}}{dt}. \tag{3.37}$$

Substituindo (3.37) em (3.36) e, esta, por sua vez, na (3.35), temos:

$$\delta f = \delta t\frac{d\theta^{\beta}}{dt}\frac{\partial\zeta^{\alpha}}{\partial\theta^{\beta}}\frac{\partial f}{\partial\zeta^{\alpha}}. \tag{3.38}$$

Complementando, se usarmos derivada à direita, teremos:

$$\delta f = \left.\frac{\partial f}{\partial\zeta^{\alpha}}\right|_{D}\left.\frac{\partial\zeta^{\alpha}}{\partial\theta^{\beta}}\right|_{D}\frac{d\theta^{\beta}}{dt}\delta t. \tag{3.39}$$

3.2.3 Álgebras de Clifford

Como, para variáveis fermiônicas, o processo de quantização canônico consiste em identificá-las com operadores, obedecendo a uma álgebra de Clifford, vejamos sua definição.

Uma álgebra K_N com geradores $K_1, ..., K_N$ é chamada de álgebra de Clifford ou de *espinor*, se satisfaz as relações:

$$k_i k_j + k_j k_i \equiv \{k_i, k_j\} = 0 \qquad \text{para } i \neq j \tag{3.40}$$

e

$$k_i^2 = 1. \tag{3.41}$$

Para cada álgebra de Grassmann Λ_N, existe uma conectada álgebra de Clifford K_{2n}, com duplicado número de operadores. Considerando em Λ_N o gerador $\widehat{x}_k$, multiplicado pela esquerda por x_k e $\partial/\partial x_k$, derivando pela esquerda por x_k, verificamos que eles satisfazem a regra:

$$\{\widehat{x}_k, \partial/\partial x_j\} = \delta_{kj}. \tag{3.42}$$

Agora, como exemplo, para operadores da forma $Q_k = \widehat{x}_k + \partial/\partial x_k$ e $P_k = \frac{1}{i}\left(\widehat{x}_k - \partial/\partial x_k\right)$, podemos mostrar que esses operadores satisfazem as relações:

$$\{P_i, Q_j\} = 0 \tag{3.43}$$

e

$$\{P_i, P_j\} = \{Q_i, Q_j\} = 2\delta_{ij}. \tag{3.44}$$

Assim, os operadores P_i e Q_j são geradores da álgebra de Clifford.

O tratamento da seção álgebras pode ser encontrado de uma forma mais geral e detalhada nas referências [58], [61] e [72].

3.3 Supervariedade

Um espaço topológico M é uma variedade se para cada um de seus pontos existe uma vizinhança que admite um homeomorfismo[†] na superfície de uma bola contida no espaço Euclidiano R^n de dimensão n. A dimensão do espaço Euclidiano é chamada de dimensão de M, $n = \dim M$.

Se estamos assumindo um homeomorfismo entre a vizinhança e a bola, isso significa que, também, podemos parametrizar a vizinhança pelas coordenadas Euclidianas da bola. As vizinhanças são chamadas de mapas, e as coordenadas obtidas dessa forma são chamadas de coordenadas locais.

Consideremos dois mapas U e V, e suas respectivas coordenadas locais x^i e y^i (parametrização dos mapas U e V pelas coordenadas euclidianas nas coordenadas da bola), na intersecção, $U \cap V$, podemos escrever uma em função da outra:

$$y^i = f^i\left(x^1, ..., x^n\right). \tag{3.45}$$

[†]Mapeamento contínuo um a um com a inversa também contínua.

Se a função é infinitamente diferenciável, dizemos que a variedade é infinitamente diferenciável ou suave. Uma supervariedade é uma generalização do conceito de uma variedade infinitamente diferenciável. No que segue, usaremos o termo variedade para uma variedade infinitamente diferenciável.

No mapa ou subespaço V, não temos apenas a função f^i, e, sim, um conjunto delas. Se essas funções são infinitamente diferenciáveis e admitem as operações usuais de adição e multiplicação, denotaremos o conjunto delas por $A\left(V\right)$, o qual será chamado de álgebra comutativa.

Consideremos dois conjuntos U e V, e suas respectivas álgebras $A\left(U\right)$ e $A\left(V\right)$. Podemos construir um operador $\hat{O}$ que mapeia cada função $f\in A\left(V\right)$ no conjunto $A\left(U\right)$, e escrevemos

$$\hat{O}:A\left(V\right)\rightarrow A\left(U\right). \tag{3.46}$$

Quando assumimos que $U\subset V$, denotamos o operador por ρ_U^V, e dizemos que ele mapeia cada função $f\in A\left(V\right)$ na sua restrição U:

$$\rho_U^V:A\left(V\right)\rightarrow A\left(U\right). \tag{3.47}$$

Se o operador ρ_U^V admite as propriedades

$$\rho_U^V\left(f+g\right)=\rho_U^Vf+\rho_U^Vg \quad \text{e} \quad \rho_U^V\left(fg\right)=\rho_U^Vf\rho_U^Vg, \tag{3.48}$$

dizemos que ele é um homeomorfismo da álgebra.

Usemos, agora, o fato de que podemos ter uma família de álgebras de um conjunto, U: $A\left(U\right)=\left\{A'\left(U\right),\ A''\left(U\right),...,\ A^n\left(U\right)\right\}$. As funções $f\in A\left(U\right)$ são chamadas de seções sobre U e, em particular, funções definidas sobre toda a variedade M são chamadas seções globais.

Consideremos a álgebra $A\left(M\right)$, da variedade M, que possua funções reais (ou complexas) como sendo seus elementos. Para cada $x\in M$, existe associado um homeomorfismo ρ_x da álgebra $A\left(M\right)$ de funções reais (ou complexas) na álgebra K de números reais (ou complexos):

$$\rho_xf=f\left(x\right). \tag{3.49}$$

O homeomorfismo ρ_x é contínuo: se $f(x) = \lim f_n(x)$, então $\rho_x f = \lim \rho_x f$. Além disso, se $f \in A(M)$ e $z \subset K$ é um conjunto aberto, então, o conjunto $U(z,f)$ de pontos, tais que

$$\rho_x f \in z \tag{3.50}$$

é um conjunto aberto em M. Por outro lado, cada conjunto aberto U em M pode ser dado como uma união $\mathbb{U} = \cup_\alpha U(z_\alpha, f_\alpha)$ de uma família finita ou infinita de conjuntos da forma (3.50). A família de conjuntos abertos com essa propriedade é chamada de base dos conjuntos abertos.

Podemos recuperar a variedade M da álgebra $A(M)$: conhecendo $A(M)$, conhecemos, também, o conjunto de homeomorfismo de $A(M)$ em K e, assim, podemos recuperar M como um conjunto, e, usando o subconjunto $U(z,f)$, recuperamos M também como um espaço topológico.

Definamos, agora, uma supervariedade. Seja M_0 uma variedade, onde $\dim M_0 = \rho$, e que a cada subconjunto aberto $U \subset M_0$ existe uma álgebra $\mathbb{U}(U)$ associada. Suponhamos, ainda, que U e V sejam abertos, que $V \subset U$, e que existe um homeomorfismo $\rho_V^U : \mathbb{U}(U) \to \mathbb{U}(V)$ tal que

(1) $\rho_V^U = id$, a identidade isomórfica;

(2) se $W \subset V \subset U$, então $\rho_V^U = \rho_W^V \rho_V^U$;

(3) se $U = \cup U_\alpha$, f_1, $f_2 \in \mathbb{U}(U)$, e $\rho_{U_\alpha}^U f_1 = \rho_{U_\alpha}^U f_2$ para cada α, então $f_1 = f_2$;

(4) se $U = \cup U_\alpha$, $f_\alpha \in \mathbb{U}(U)$, e além disso $\rho_{U_\alpha \cap U_\beta}^U f_\alpha = \rho_{U_\alpha^\beta \cap U_\beta}^U f_\beta$, então existe um elemento $f \in \mathbb{U}(U)$ tal que $f_\alpha = \rho_{U_\alpha}^U f$.

Se admitirmos que U seja um mapa e que a álgebra $\mathbb{U}(U)$ contenha funções sobre U com valores na álgebra de Grassmann G_q, que será denotada por $\mathbb{U}_{pq}(U)$, teremos, portanto, que os elementos de $\mathbb{U}_{pq}(U)$ são escritos por:

$$f(x,\zeta) = \sum_{k \geq 0} \sum_{i_1,\ldots,i_k} f_{i_1,\ldots,i_k}(x_1,\ldots,x_p)\, \zeta_{i_1} \ldots \zeta_{i_k}, \tag{3.51}$$

onde x_i é uma coordenada em U e ζ_j os geradores de G_q.

Uma variedade M_0, juntamente com a família de álgebra $\mathbb{U}(U)$, satisfazendo os ítens de (1) a (4), e com a condição adicional (3.51), é chamada de supervariedade, denotada por $M = (M_0, \mathbb{U})$.

3.4 Formalismo canônico no superespaço

Nesta seção, assumimos uma função arbitrária L, a qual depende tanto de variáveis pares quanto ímpares; estas, por sua vez, definem uma supervariedade, que, em física, é comum ser chamada superespaço. Obtemos, também, as equações de Euler-Lagrange e as de Hamilton. Definimos uma teoria par e real para obter os Parênteses de Poisson (PP).

3.4.1 Equações de movimento

Consideremos a seguinte função, sem especificar se ela é par ou ímpar:

$$L = L(q^i, \dot{q}^i, \theta^\alpha, \dot{\theta}^\alpha), \tag{3.52}$$

onde $q^i, \dot{q}^i$ e $\theta^\alpha, \dot{\theta}^\alpha$ são variáveis pares e ímpares, respectivamente. Portanto,

$$\delta L = \delta q^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + \delta \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \delta \theta^\alpha \frac{\partial L}{\partial \theta^\alpha} + \delta \dot{\theta}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^\alpha}, \tag{3.53}$$

onde, por comodidade, não estamos colocando a barra na vertical com a letra E - a qual designa derivada à esquerda, como já mencionamos.

Escrevendo uma expressão análoga à da ação (análoga, porque ainda não definimos a paridade da função (3.52)) como sendo

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \tag{3.54}$$

temos:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} (\delta q^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + \delta \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \delta \theta^\alpha \frac{\partial L}{\partial \theta^\alpha} + \delta \dot{\theta}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^\alpha}) dt. \tag{3.55}$$

Usando regras simples de derivada:

$$\frac{d}{dt}(\delta q^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}) = \delta \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \delta q^i \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}) \tag{3.56}$$

e

$$\frac{d}{dt}(\delta \theta^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^\alpha}) = \delta \dot{\theta}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^\alpha} + \delta \theta^\alpha \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^\alpha}), \tag{3.57}$$

temos:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [\delta q^i (\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}) + \delta\theta^\alpha (\frac{\partial L}{\partial \theta^\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^\alpha})] + \int_{t_1}^{t_2} dt[\frac{d}{dt}(\delta q^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \delta\theta^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^\alpha})]. \tag{3.58}$$

Impondo que

$$\delta S = 0, \tag{3.59}$$

$$\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0 \tag{3.60}$$

e‡

$$\delta\theta^\alpha(t_1) = \delta\theta^\alpha(t_2) = 0, \tag{3.61}$$

temos, finalmente, as equações de Euler - Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = 0 \tag{3.62}$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \theta^\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^\alpha} = 0. \tag{3.63}$$

Essas equações não dependem da paridade da função (3.52), fato esse que não se verifica nas equações de Hamilton, o que veremos a seguir.

Derivando a Lagrangiana (3.52) em relação ao tempo, temos:

$$\frac{dL}{dt} = \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + \ddot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} + \dot{\theta}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \theta^\alpha} + \ddot{\theta}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^\alpha} + \dot{\theta}^\alpha \frac{\partial L}{\partial \theta^\alpha}. \tag{3.64}$$

Utilizando as equações (3.62) e (3.63), podemos escrever (3.64) da seguinte forma:

$$\frac{dH_c}{dt} = 0, \tag{3.65}$$

onde

‡Como veremos no capítulo *aplicações*, não é a condição (3.61) que devemos usar. Ela foi usada aqui por simplicidade, pois o que iremos desenvolver não ficará prejudicado (apenas de um ponto de vista didático) com essa condição.

$$H_c = \dot{q}^i p_i + \dot{\theta}^\alpha \pi_\alpha - L, \tag{3.66}$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{3.67}$$

e

$$\pi_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^\alpha}. \tag{3.68}$$

Quando utilizamos derivada à esquerda, as velocidades $\dot{q}^i$ e $\dot{\theta}^\alpha$ ficam à esquerda de seus respectivos momentos canônicos p_i e π_α.

Como sabemos, a variação de H_c pode ser obtida apenas com as variações das posições e dos momentos. Disso, portanto, podemos escrever, usando a (3.66) e as equações (3.62) e (3.63), que

$$\delta q^i \frac{\partial H_c}{\partial q^i} + \delta p^i \frac{\partial H_c}{\partial p^i} + \delta \theta^\alpha \frac{\partial H_c}{\partial \theta^\alpha} + \delta \pi^\alpha \frac{\partial H_c}{\partial \pi^\alpha} = \dot{q}^i \delta p_i + \dot{\theta}^\alpha \delta \pi_\alpha - \delta q^i \dot{p}_i - \delta \theta^\alpha \dot{\pi}_\alpha, \tag{3.69}$$

onde o termo

$$\dot{\theta}^\alpha \delta \pi_\alpha = (-1)^{\epsilon_\pi} \delta \pi_\alpha \dot{\theta}^\alpha \tag{3.70}$$

é o único que precisa ser permutado para pô-lo em evidência, e ϵ_π assume os valores “0"ou “1"se o momento π for par ou ímpar, respectivamente. Substituindo, então, (3.70) na (3.69), temos:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \tag{3.71}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \tag{3.72}$$

$$\dot{\pi}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial \theta^\alpha}, \tag{3.73}$$

$$(-)^{\epsilon_\pi} \dot{\theta}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial \pi_\alpha}. \tag{3.74}$$

Portanto, enquanto as equações de Euler-Lagrange, (3.62) e (3.63), não dependem da paridade da teoria usada, as equações de Hamilton dependem. Essa dependência se dá na (3.74), onde o sinal depende da paridade do momento π_α e esse, por sua vez, depende da paridade da Lagrangiana:

$$\pi_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_\alpha}, \tag{3.75}$$

pois $\dot{\theta}_\alpha$ é ímpar; assim, resta definir se L é par ou ímpar: se L for par, a paridade de π_α é ímpar, pois a derivada de uma função par em relação a uma função ímpar é ímpar; se L for ímpar, a paridade de π_α é par, pois a derivada de uma função ímpar em relação a uma variável ímpar é par.

3.4.2 Parênteses de Poisson

Consideremos uma função qualquer, no sentido de não definir sua paridade:

$$A = A(q_i, p^i; \theta_\alpha, \pi^\alpha). \tag{3.76}$$

Usando derivada à esquerda em relação ao tempo, temos:

$$\dot{A} = \dot{q}_i \frac{\partial A}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial A}{\partial p_i} + \dot{\theta}_\alpha \frac{\partial A}{\partial \theta_\alpha} + \dot{\pi}_\alpha \frac{\partial A}{\partial \pi_\alpha}. \tag{3.77}$$

Das equações de Hamilton, (3.71), (3.72), (3.73) e (3.74), temos, então, que

$$\dot{A} = \{A, H_c\}, \tag{3.78}$$

onde

$$\{A, H_c\} = \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\frac{\partial A}{\partial q^i} - \frac{\partial H_c}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p^i} + (-)^{\epsilon_\pi}\frac{\partial H_c}{\partial \pi_\alpha}\frac{\partial A}{\partial \theta^\alpha} - \frac{\partial H_c}{\partial \theta^\alpha}\frac{\partial A}{\partial \pi_\alpha}. \tag{3.79}$$

Não definimos a paridade da “ação"(3.54) antes, porque, ali, tivemos o interesse em mostrar as peculiaridades de uma teoria puramente matemática. No entanto, como o objetivo é quanto à Teoria Quântica e, conseqüentemente, ao princípio de correspondência existente entre os parênteses de Poisson e os (anti)comutadores de operadores, é na (3.79) que será definida uma teoria par.

As grandezas físicas são definidas partindo-se de uma Lagrangiana par [5]; portanto, iniciaremos com uma teoria par, e chegaremos nos (PP), os quais se definem, como veremos abaixo, em termos de grandezas pares, ímpares, pares com ímpares e ímpares com pares.

Definindo, então, uma teoria par (L par), temos:

$$\epsilon_\pi = 1, \tag{3.80}$$

portanto,

$$\{A, H_c\} = \frac{\partial H_c}{\partial p_i}\frac{\partial A}{\partial q^i} - \frac{\partial H_c}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p^i} - (\frac{\partial H_c}{\partial \pi_\alpha}\frac{\partial A}{\partial \theta^\alpha} + \frac{\partial H_c}{\partial \theta^\alpha}\frac{\partial A}{\partial \pi_\alpha}). \tag{3.81}$$

Devemos notar que, uma vez definida uma teoria como sendo par, não podemos mais mudar a paridade de H_c; ou seja, toda função que for posta no lugar de H_c deve levar com ela essa paridade. Por outro lado, é importante observar que, em nenhum momento, foi preciso definir a paridade de A. Isso significa que se pode construir o (PP), tanto para A ímpar quanto para A par. Por exemplo, se A for par, denotado por P_1, a (3.81) pode ser escrita como

$$\{P_1, P_2\} = \frac{\partial P_2}{\partial p_i}\frac{\partial P_1}{\partial q^i} - \frac{\partial P_2}{\partial q_i}\frac{\partial P_1}{\partial p^i} - (\frac{\partial P_2}{\partial \pi_\alpha}\frac{\partial P_1}{\partial \theta^\alpha} + \frac{\partial P_2}{\partial \theta^\alpha}\frac{\partial P_1}{\partial \pi_\alpha}), \tag{3.82}$$

onde definimos $H_c = P_2$, sendo P_2 uma função par. Portanto, ao permutarmos os dois primeiros termos da (3.82), não temos mudança de sinal; não é o que acontece com a permutação dos dois últimos termos:

$$\{P_1, P_2\} = \frac{\partial P_1}{\partial q_i}\frac{\partial P_2}{\partial p^i} - \frac{\partial P_1}{\partial p_i}\frac{\partial P_2}{\partial q^i} + (\frac{\partial P_1}{\partial \theta^\alpha}\frac{\partial P_2}{\partial \pi_\alpha} + \frac{\partial P_1}{\partial \pi_\alpha}\frac{\partial P_2}{\partial \theta^\alpha}). \tag{3.83}$$

Usaremos a seguinte notação compacta:

$$\{P_1, P_2\}^{qp+\theta\pi} = \{P_1, P_2\}_{qp} + \{P_1, P_2\}_{\theta\pi}, \tag{3.84}$$

onde

$$\{P_1, P_2\}_{qp} \equiv \frac{\partial P_1}{\partial q_i}\frac{\partial P_2}{\partial p^i} - \frac{\partial P_1}{\partial p_i}\frac{\partial P_2}{\partial q^i} \tag{3.85}$$

e

$$\{P_1, P_2\}_{\theta\pi} \equiv \frac{\partial P_1}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial P_2}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial P_1}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial P_2}{\partial \theta_\alpha} \tag{3.86}$$

Assim, para A ímpar, I, o que muda é o sinal de soma na (3.84):

$$\{I, P\}^{qp-\theta\pi} = \{I, P\}_{qp} - \{I, P\}_{\theta\pi}, \tag{3.87}$$

onde se definiu $P_2 = P$.

Resumindo: não se pode, então, simplesmente substituir uma função ímpar no lugar de H_c na (3.81), pois estaríamos, dessa forma, mudando uma teoria par para uma outra ímpar. Quando se têm os (PP) sem variáveis ímpares, não existe o conceito de par ou ímpar e, portanto, não se fala em uma teoria par. Aqui, isso se faz necessário.

Como o objetivo é a quantização, a propriedade mais importante dos (PP) é a sua álgebra. Assim, definiremos os outros (PP) de tal forma que a seguinte propriedade seja mantida [3]:

$$\varepsilon\{P, I\} = \{\varepsilon P, I\} = \{P, \varepsilon I\}, \tag{3.88}$$

onde ε é uma constante ímpar.

Partindo-se da (3.81), vimos que na (3.82) podemos substituir H_c por uma função par P:

$$\{A, P\} = \frac{\partial P}{\partial p_i}\frac{\partial A}{\partial q^i} - \frac{\partial P}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial p^i} - (\frac{\partial P}{\partial \pi_\alpha}\frac{\partial A}{\partial \theta^\alpha} + \frac{\partial P}{\partial \theta^\alpha}\frac{\partial A}{\partial \pi_\alpha}). \tag{3.89}$$

Consideremos, então, que P seja o produto de uma função ímpar I_2 pela constante ε:

$$P = \varepsilon I_2, \tag{3.90}$$

e que A seja uma função par:

$$A = P_1. \tag{3.91}$$

Substituindo, assim, essas igualdades (3.91) e (3.90) na (3.89), temos

$$\{P_1, \varepsilon I_1\} = \frac{\partial(\varepsilon I_1)}{\partial p_i}\frac{\partial P_1}{\partial q^i} - \frac{\partial(\varepsilon I_1)}{\partial q_i}\frac{\partial P_1}{\partial p^i} - (\frac{\partial(\varepsilon I_1)}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial P_1}{\partial \theta_\alpha} + \frac{\partial(\varepsilon I_1)}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial P_1}{\partial \pi^\alpha}). \tag{3.92}$$

Permutando-os:

$$\{P_1, \varepsilon I_1\} = \frac{\partial P_1}{\partial q_i}\frac{\partial(\varepsilon I_1)}{\partial p^i} - \frac{\partial P_1}{\partial p^i}\frac{\partial(\varepsilon I_1)}{\partial q_i} + (\frac{\partial P_1}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial(\varepsilon I_1)}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial P_1}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial(\varepsilon I_1)}{\partial \theta_\alpha}). \tag{3.93}$$

Considerando a (3.88), podemos escrever (3.93) como sendo

$$\{P_1, \varepsilon I_1\} = \{\varepsilon P_1, I_1\}, \tag{3.94}$$

ou seja, usando-se a forma permutada (3.93), temos que

$$\{\varepsilon P_1, I_1\} = \frac{\partial(\varepsilon P_1)}{\partial q_i}\frac{\partial I_1}{\partial p^i} - \frac{\partial(\varepsilon P_1)}{\partial p_i}\frac{\partial I_1}{\partial q^i} + (\frac{\partial(\varepsilon P_1)}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial I_1}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial(\varepsilon P_1)}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial I_1}{\partial \theta_\alpha}). \tag{3.95}$$

Derivando-a:

$$\{\varepsilon P_1, I_1\} = \varepsilon[\frac{\partial P_1}{\partial q_i}\frac{\partial I_1}{\partial p^i} - \frac{\partial P_1}{\partial p_i}\frac{\partial I_1}{\partial q^i} + (\frac{\partial P_1}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial I_1}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial P_1}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial I_1}{\partial \theta_\alpha})] \tag{3.96}$$

Da (3.88):

$$\varepsilon\{P_1, I_1\} = \{\varepsilon P_1, I_1\}, \tag{3.97}$$

temos, finalmente,

$$\{P_1, I_1\}^{qp+\theta\pi} = \{P_1, I_1\}_{qp} + \{P_1, I_1\}_{\theta\pi} = \frac{\partial P_1}{\partial q_i}\frac{\partial I_1}{\partial p^i} - \frac{\partial P_1}{\partial p_i}\frac{\partial I_1}{\partial q^i} + (\frac{\partial P_1}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial I_1}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial P_1}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial I_1}{\partial \theta_\alpha}). \tag{3.98}$$

O (PP) para duas variáveis ímpares é obtido partindo dessas duas últimas expressões, e, usado o raciocínio análogo ao usado para obter (3.98), o resultado que obtemos é o seguinte:

$$\{I_1, I_2\}^{qp-\theta\pi} = \{I_1, I_2\}_{qp} - \{I_1, I_2\}_{\theta\pi}. \tag{3.99}$$

De forma geral, portanto, observando a (3.86), (3.87), (3.98) e a (3.99), podemos escrever, para duas funções F e G quaisquer, a seguinte relação:

$$\{F, G\} = \{F, G\}_{qp} + (-)^{\epsilon_F}\{F, G\}_{\theta\pi}. \tag{3.100}$$

No caso particular, em que usamos os momentos e as coordenadas, temos:

$$\begin{aligned} \left\{q_i, p^j\right\} &= -\left\{p^j, q_i\right\} = \delta_i^j, \\ \left\{\theta_\alpha, \pi^\beta\right\} &= \left\{\pi^\beta, \theta_\alpha\right\} = -\delta_\beta^\alpha. \end{aligned} \tag{3.101}$$

Com isso, temos o ferramental matemático para trabalharmos com os (PP), ou, como é usado, os Parênteses de Poisson Generalizados, ou ainda, os Parênteses de Berezin.

3.4.3 Parênteses de Poisson utilizando a Hamiltoniana primária

Utilizemos, agora, a teoria de vínculos (veja [64, 13, 62, 63, 65]) para escrevermos as equações de Hamilton em termos dos Parênteses de Poisson, obtidos na seção anterior.

Equações de Hamilton generalizadas

Denotaremos o vínculo ímpar e o par pelas seguintes funções, respectivamente:

$$I_k \equiv \pi_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^k} \approx 0 \tag{3.102}$$

$$P_k \equiv p_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} \approx 0. \tag{3.103}$$

A Hamiltoniana primária será dada por

$$H_p = H_c + I_k(x, p, \theta, \pi)\lambda^k(x, p, \theta, \pi) + P_k(x, p, \theta, \pi)l^k(x, p, \theta, \pi), \tag{3.104}$$

onde λ^k e l^k são multiplicadores de Lagrange ímpar e par, respectivamente, e H_c é a Hamiltoniana canônica:

$$H_c = \dot{x}^i p_i + \dot{\theta}^\alpha \pi_\alpha - L. \tag{3.105}$$

Inicialmente, calcularemos os (PP) entre a Hamiltoniana primária H_p e uma função par, P, qualquer. Usando (3.84), com

$$P_1 = P \tag{3.106}$$

e

$$P_2 = H_p, \tag{3.107}$$

temos

$$\{P, H_p\}^{qp+\theta\pi} = \frac{\partial P}{\partial q_i}\frac{\partial H_p}{\partial p^i} - \frac{\partial P}{\partial p^i}\frac{\partial H_p}{\partial x_i} + \frac{\partial P}{\partial \theta_\alpha}\frac{\partial H_p}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial P}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial H_p}{\partial \theta_\alpha}. \tag{3.108}$$

Substituindo (3.104), temos

$$\begin{aligned} \{P, H_p\}^{qp+\theta\pi} \;\; = \;\; & \{P, H_c\}^{qp+\theta\pi} + \{P, I_k\}^{qp+\theta\pi}\lambda^k + I_k\{P, \lambda^k\}^{qp+\theta\pi} \\ & + \{P, P_k\}^{qp+\theta\pi} l^k + P_k\{P, l^k\}^{qp+\theta\pi}. \end{aligned} \tag{3.109}$$

Impondo que I_k e P_k sejam fracamente nulos:

$$I_k \approx 0 \tag{3.110}$$

e

$$P_k \approx 0, \tag{3.111}$$

temos

$$\{P, H_p\}^{qp+\theta\pi} \approx \{P, H_c\}^{qp+\theta\pi} + \{P, I_k\}^{qp+\theta\pi}\lambda^k + \{P, P_k\}^{qp+\theta\pi} l^k. \tag{3.112}$$

Para o (PP) entre a Hamiltoniana primária H_p e uma função ímpar I, usa-se a relação (3.87). O procedimento é o mesmo que levou à (3.112), e o resultado é dado por:

$$\{I, H_p\}^{qp-\theta\pi} \approx \{I, H_c\}^{qp-\theta\pi} + \{I, I_k\}^{qp-\theta\pi}\lambda^k + \{I, I_k\}^{qp-\theta\pi} l^k. \tag{3.113}$$

Portanto, as equações de Hamilton, para uma variável par e ímpar são, respectivamente:

$$\dot{P} \approx \{P, H_p\}^{qp+\theta\pi} \tag{3.114}$$

e

$$\dot{I} \approx \{I, H_p\}^{qp-\theta\pi}. \tag{3.115}$$

Capítulo 4

Supercampos: uma introdução

Após uma introdução histórica, apresentamos, rapidamente, a extensão *espinorial* do grupo de Poincaré, as transformações supersimétricas infinitesimais combinando bósons e férmions, e, por último, a definição de supercampo.

4.1 Introdução

Em 1964, Lipkin [67] discutiu a idéia de uma possível unificação de férmions e bósons em uma única família. Estudando essa idéia, de um ponto de vista que chamou de semifantasma ("classificação bariônica"), observou que a classificação de octetos de bárions, pseudoescalares, vetores e antibárions é invariante sob a troca simultânea do *spin* isotópico com o *spin* e a troca da hipercarga com o número bariônico - veja tabela abaixo.

	$S=1/2, B=1$	$S=0, B=0$	$S=1, B=0$	$S=1/2, B=-1$
$T=1/2,\ Y=1$	N	K	K^{*}	$\bar{\Xi}$
$T=0,\ Y=0$	Λ	η	$\omega\,(\varphi)$	$\bar{\Lambda}$
$T=1,\ Y=0$	$\sum$	π	ρ	$\bar{\sum}$
$T=1/2, Y=-1$	Ξ	$\bar{K}$	$\bar{K}^{*}$	$\bar{N}$

Na classificação usual $SU\,(3)$, partículas com o mesmo *spin* S e número bariônico B são combinadas em octetos cujas componentes são caracterizadas pelo valor do *isospin* T e hipercarga Y - coluna da tabela.

Na classificação bariônica, partículas com o mesmo *isospin* e mesma hipercarga são combinadas em uma família, e as componentes de cada família possuem *spin* e número bariônico diferentes, sugerindo, assim, que consideremos o produto direto da simeria usual $SU\left(3\right)$ e a simetria barbariônica. Nos anos sessenta, em conexão com as álgebras de correntes generalizadas, foram realizados diversos estudos para introduzir correntes fermiônicas que mudam o número bariônico [68], [69], [70]. No entanto, supersimetrias só foram adquirir uma base firme depois dos artigos pioneiros de Gol'fand e Likhtman [24], que propuseram e investigaram extensões *espinoriais* do grupo de Poincaré, álgebras supersimétricas e suas representações. Para o melhor entendimento e desenvolvimento de supersimetrias, podemos citar Volkov e Akulov [25], que propuseram uma possível interpretação do neutrino como uma partícula de Goldstone [26]. O interesse em supersimetria aumentou bastante com o artigo de Wess e Zumino [27], que propuseram a renormabilidade de seu modelo. Wess e Zumino não sabiam sobre os artigos prévios, e generalizaram a chamada simetria de *supergauge* que surge nos modelos duais [28], [29], [30]. Depois disso, o próximo passo foi o de Salam e Strathdee [31], que introduziram coordenadas *espinoriais* anticomutativas, um superespaço e o conceito de um supercampo. A possibilidade de estruturas *espinoriais* do espaço-tempo foi discutida por Arakai e Okubo [32], em conexão com o desejo de unificar as simetrias internas e do espaço-tempo, que foi retomada por Penrose [33] em conexão com os prospectos para a quantização da teoria da gravitação. Uma possível inter-relação entre as supersimetrias e a teoria da gravitação foi acentuada por Volkov e Soroka [34].

Traçaremos as características da supersimetria usando o exemplo mais simples de supermultipleto [23] , que consiste em um *espinor* de duas componentes $\psi_\alpha\left(x\right)$ e dois campos complexos sem *spin*, $A_1\left(x\right)$ e $F_1\left(x\right)$. As transformações supersimétricas infinitesimais combinando bósons e férmions são escritas na forma

$$\begin{aligned} \delta_\xi A_1\left(x\right) &= \xi^\alpha\psi_\alpha\left(x\right), \qquad \delta_\xi F_1\left(x\right) = -i\partial^\mu\psi^\alpha\left(x\right)\left(\sigma_\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\xi}^{\dot{\beta}}, \\ \delta_\xi\psi_\alpha\left(x\right) &= 2i\left(\sigma_\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}}\bar{\xi}^{\dot{\beta}}\partial^\mu A_1\left(x\right)+2\xi_\alpha F_1\left(x\right), \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde ξ é o parâmetro *espinorial* da transformação. Como campos fermiônicos anticomutam e campos bosônicos comutam, aparece, aqui, uma situação não usual, pois o parâmetro da transformação anticomuta $\left(\left\{\xi_\alpha,\xi_\beta\right\}=0\right)$, em vez de ser o usual $c-$número [72]. O grupo próprio dessas transformações expressa o fato de que o comutador de duas transformações supersimétricas é uma transformação supersimétrica. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\delta_\eta \delta_\xi A_1(x) &= 2i(\xi\sigma_\mu\bar{\eta})\,\partial^\mu A_1(x) + \xi^\alpha \eta_\alpha F_1(x), \\
(\delta_\eta\delta_\xi - \delta_\xi\delta_\eta) A_1(x) &= 2i\left(\xi\sigma_\mu\bar{\eta} - \eta\sigma_\mu\bar{\xi}\right)\partial^\mu A_1(x).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

As translações comutam com as transformações e, com elas, formam um supergrupo - um grupo generalizado contém ambos os parâmetros comutativos e anticomutativos.

Para obtermos a generalização da álgebra de Lie, representamos a transformação (4.1) da seguinte forma:

$$\delta A_1(x) = i\left[\xi^\alpha Q_\alpha + \bar{Q}_{\dot\alpha}\bar{\xi}^{\dot\alpha}, A_1(x)\right], \tag{4.3}$$

onde Q e $\bar{Q}$ são os geradores *espinoriais*, definidos explicitamente de acordo com o modelo de teoria de campo usado.

Como veremos na seção 2, a anticomutatividade dos geradores *espinoriais* fornece as translações e, portanto, transformações supesimétricas atuam nas coordenadas do espaço-tempo. Entretanto, não é possível construir um gerador *espinorial* unicamente de diferenciação em relação a x_μ. Portanto, introduziremos "coordenadas" *espinoriais* anticomutativas θ^α e $\bar{\theta}^{\dot\alpha}$:

$$\left\{\theta^\alpha, \theta^\beta\right\} = \left\{\theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot\beta}\right\} = \left\{\bar{\theta}^{\dot\alpha}, \bar{\theta}^{\dot\beta}\right\} = 0. \tag{4.4}$$

Temos, assim, um superespaço de oito dimensões, x_μ, θ^α e $\bar{\theta}^{\dot\alpha}$. É possível, agora, nesse superespaço, escolher uma realização em que os geradores *espinoriais* assumam a forma de operadores de translação com respeito à usual coordenada e as coordenadas *espinoriais* (conforme veremos na seção 3):

$$Q_\alpha = -i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \quad \bar{Q}_{\dot\alpha} = i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot\alpha}} + 2(\theta\sigma_\mu)_{\dot\alpha}\,\partial^\mu. \tag{4.5}$$

Além disso, podemos definir uma função nesse superespaço: $\phi_{\mu\nu\ldots}\left(x, \theta, \bar{\theta}\right)$, que é o supercampo.

Expandindo o supercampo $\phi(x,\theta)$ em série de potências de θ, teremos, simplesmente:

$$\phi(x,\theta) = A_1(x) + \theta^\alpha\psi_\alpha(x) + \theta^\alpha\theta_\alpha F_1(x). \tag{4.6}$$

Escrevendo a regra para uma transformação supersimétrica infinitesimal na forma

$$\delta\phi\left(x,\theta\right)=i\left(\xi^{\alpha}Q_{\alpha}+\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\right)\phi\left(x,\theta\right), \tag{4.7}$$

obtemos (4.1). Assim, é possível unificar as componentes bosônicas e fermiônicas de um supermultipleto em um simples objeto - um supercampo.

Supercampos mais complexos dependem de θ e $\bar{\theta}$, havendo, assim, outros índices descrevendo representações mais altas dos grupos de simetrias. Uma lei de transformação do tipo (4.7) é válida para todos eles, e são sempre equivalentes a um certo conjunto finito de campos bosônicos e fermiônicos no espaço-tempo.

A introdução de supercampos possibilita-nos a construção econômica e conveniente de uma teoria Lagrangiana de supercampos, que é equivalente a uma teoria de campos de bósons e férmions, com uma específica relação entre as constantes de interação. Um fator característico é a presença de campos auxiliares (do tipo $F_1\left(x\right)$ no supercampo (4.6)) que aparecem sem derivada na Lagrangiana e podem ser eliminados. Depois dessa eliminação, a supersimetria permanece de forma implícita, e é manifesta na conservação da corrente $spin-vetor$.

4.2 Extensão *espinorial* mínima do grupo de Poincaré

O grupo de supersimetria mais conhecido corresponde à extensão *espinorial* mínima do grupo de Poincaré [73]: junto aos geradores de rotações $(L_{\mu\nu})$ e translações (P_{μ}), com as relações de comutação,

$$\begin{aligned}\left[L_{\mu\nu},L_{\lambda\rho}\right] &= -i\left(\eta_{\mu\lambda}L_{\nu\rho}+\eta_{\nu\rho}L_{\mu\lambda}-\eta_{\mu\rho}L_{\nu\lambda}-\eta_{\nu\lambda}L_{\mu\rho}\right) \\ \left[L_{\mu\nu},P_{\lambda}\right] &= -i\left(\eta_{\mu\lambda}P_{\nu}-\eta_{\nu\lambda}P_{\mu}\right), \quad \left[P_{\mu},P_{\nu}\right]=0,\end{aligned} \tag{4.8}$$

adiciona-se unicamente um gerador *espinorial* Q_{α} e seu conjugado $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$. Isso é feito com base na definição de um *espinor*:

$$\left[L_{\mu\nu},Q_{\alpha}\right]=\frac{1}{2}\left(\sigma_{\mu\nu}\right)_{\alpha}^{\cdot\beta}Q_{\beta},\quad \left[L_{\mu\nu},\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right]=\frac{1}{2}\left(\tilde{\sigma}_{\mu\nu}\right)_{\dot{\alpha}}^{\cdot\dot{\beta}}\bar{Q}_{\dot{\beta}}. \tag{4.9}$$

Para fechar a álgebra, devemos especificar os anticomutadores entre os geradores *espinoriais*, e os comutadores entre esses e as translações. A única possibilidade algébrica que não requer geradores extras é dada por:

$$\begin{aligned} \left\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} &= 2\left(\sigma_\mu\right)_{\alpha\dot{\beta}} P^\mu, \\ \left\{Q_\alpha, Q_\beta\right\} &= \left\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} = 0, \\ \left[Q_\alpha, P_\mu\right] &= \left[\bar{Q}_{\dot{\beta}}, P_\mu\right] = 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Salam e Strathdee [74]-[81] usaram a superálgebra (4.8) e (4.10) em um formalismo *biespinorial*. Por exemplo, para os geradores *biespinoriais* de Majorama, temos

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} Q_\alpha \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \bar{S} = S^\dagger \gamma_0, \quad S_c = C\bar{S}^T = S, \tag{4.11}$$

e, usando as relações (4.8) e (4.10), temos

$$\{S_\rho, S_\tau\} = -\left(\gamma_\mu C\right)_{\rho\tau} P^\mu, \quad [P^\mu, S] = 0, \quad [L_{\mu\nu}, S] = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu} S. \tag{4.12}$$

No entanto, a superálgebra (4.8) e (4.10) foi proposta e investigada primeiramente por Gol'fand e Likhtman [24] em um formalismo *biespinorial* com os seguintes geradores:

$$W = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} Q_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{W} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right). \tag{4.13}$$

Assim, das (4.8) e (4.10), temos

$$\begin{aligned} \left\{W, \bar{W}\right\} &= \frac{1}{2}\left(1+\gamma_5\right)\gamma_\mu P^\mu, \quad [L_{\mu\nu}, W] = \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu} W \\ \left\{W, \bar{W}\right\} &= \left\{\bar{W}, \bar{W}\right\} = [P_\mu, W] = \left[P_\mu, \bar{W}\right] = 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

4.3 Superespaço

A realização $P^\mu = -i\partial^\mu$ e $L^{\mu\nu} = i\left(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu\right)$ dos geradores do grupo de Poincaré no espaço das funções das coordenadas é bem conhecida. A primeira expressão dos anticomutadores (4.10) fornece as translações. Conseqüentemente, as transformações de supersimetria atuam necessariamente sobre as coordenadas do espaço de Minkowiski e, também, é impossível construir os geradores *espinoriais* em termos das coordenadas x_μ e operadores diferenciais: a realização de geradores *espinoriais* requer uma extensão *espinorial* do espaço. Disso, portanto, podemos introduzir um superespaço [31, 79] cujos elementos são as coordenadas x_μ e os elementos de uma álgebra de Grassmann: os *espinores* anticomutativos θ^α e $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$,

$$\left\{\theta^\alpha, \theta^\beta\right\} = \left\{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\right\} = \left\{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \theta^{\dot{\beta}}\right\} = 0. \tag{4.15}$$

A ação do grupo de Poincaré no espaço (x, θ) é escrita da forma

$$x_\mu \rightarrow \Lambda_\mu^{\cdot\nu} x_\nu + a_\mu, \quad \theta^\alpha \rightarrow A_{\cdot\beta}^{\alpha}(\Lambda)\,\theta^\beta, \quad \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \rightarrow \bar{A}_{\cdot\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}(\Lambda)\,\bar{\theta}^{\dot{\beta}}, \tag{4.16}$$

onde $A(\Lambda)$ e $\bar{A}(\Lambda)$ denotam as representações *espinoriais* $(1/2, 0)$ e $(0, 1/2)$ das transformações do grupo de Lorentz.

É interessante notar que a forma diferencial

$$\omega_\mu = dx_\mu - i\left(d\theta\sigma_\mu\bar{\theta} - \theta\sigma_\mu d\bar{\theta}\right) \tag{4.17}$$

é invariante sob a seguinte transformação:

$$\begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu + i\left(\theta\sigma_\mu\bar{\xi} - \xi\sigma_\mu\bar{\theta}\right) \\ \theta' &= \theta + \xi, \quad \bar{\theta}' = \bar{\theta} + \bar{\xi}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

O intervalo do superespaço generalizado do espaço de Minkowiski $ds^2 = dx_\mu dx^\mu$ é dado por

$$ds_c^2 = \omega_\mu\omega^\mu, \tag{4.19}$$

que é invariante sob o completo grupo supersimétrico. A realização (4.18) não é única [82], [83], pois, com

$$x_\mu^{(a)} = x_\mu + ia\theta\sigma_\mu\bar{\theta}, \tag{4.20}$$

encontramos

$$x_\mu^{(a)} = x_\mu + i(a+1)\,\theta\sigma_\mu\bar{\xi} + i(a-1)\,\xi\sigma_\mu\bar{\theta} - ia\xi\sigma_\mu\bar{\xi}, \tag{4.21}$$

onde, se $a = 1\,(-1)$, unicamente $\theta\left(\bar{\theta}\right)$ aparece.

Nessas transformações, as coordenadas x_μ devem ser interpretadas como um certo elemento de paridade par da álgebra de Grassmann. O superespaço pode ser definido como o espaço de Minkowiski sobre o qual é especificada uma função algébrica com parâmetros x_μ, θ e $\bar{\theta}$. Quando consideramos uma função $\phi\left(x, \theta, \bar{\theta}\right)$, devemos manter x_μ como uma coordenada, c-número, enquanto representamos as transformações supersimétricas como transformações entre os coeficientes da expansão de $\phi\left(x, \theta, \bar{\theta}\right)$ em uma série de potências em θ e $\bar{\theta}$.

4.4 Supercampos

Um supercampo $\phi\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)$ é um campo no superespaço $\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)$; sua expansão, em uma série de potências de θ e $\bar{\theta}$, possui termos finitos, pois θ e $\bar{\theta}$ anticomutam, e, portanto, é obtido um polinômio:

$$\begin{aligned}\phi\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) &= A\left(x\right)+\theta\psi\left(x\right)+\bar{\varphi}\left(x\right)\bar{\theta}+\theta\theta F\left(x\right)+\bar{\theta}\bar{\theta}G\left(x\right)+ \\ &\quad \theta\sigma_{\mu}\bar{\theta}B^{\mu}\left(x\right)+\theta\theta\bar{\chi}\left(x\right)\bar{\theta}+\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda\left(x\right)+\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D\left(x\right).\end{aligned} \tag{4.22}$$

Podemos, conseqüentemente, expandir campos *espinoriais* $\psi_{\alpha}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)$ ou tensoriais $\psi_{\mu\nu}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)$ da mesma forma que para $\phi\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)$, bastando, para isso, colocar os respectivos índices em cada componente da expressão (4.22). Assim, um supercampo descreve um conjunto finito de campos, que são os coeficientes das expressões em potenciais de θ e $\bar{\theta}$.

Campos fermiônicos anticomutam e campos bosônicos comutam com θ e $\bar{\theta}$. A introdução dessas variáveis anticomutativas nos possibilita a combinação de campo com diferentes *spins* e estatísticas em um objeto compacto, um supercampo.

O campo escalar (4.22), que contém férmions $(\psi,\bar{\varphi},\lambda,\chi)$ e bósons (A,F,G,B^{μ},D), transforma-se da seguinte forma sob a (4.18):

$$\phi'\left(x_{\mu},\theta,\bar{\theta}\right)=\phi\left(x_{\mu}+i\theta\sigma_{\mu}\bar{\xi}-i\xi\sigma_{\mu}\bar{\theta},\quad \theta+\xi,\quad \bar{\theta}+\bar{\xi}\right). \tag{4.23}$$

O supercampo ϕ é uma representação do grupo completo de supersimetria.

De acordo com a (4.21), também é conveniente introduzir supercampos nas seguintes realizações ϕ_1 e ϕ_2:

$$\phi_1\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) = e^{-i\theta\partial\bar{\theta}}\phi\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) \tag{4.24}$$

$$\phi_2\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) = e^{+i\theta\partial\bar{\theta}}\phi\left(x,\theta,\bar{\theta}\right), \tag{4.25}$$

e, conseqüentemente,

$$\phi_1'\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) = \phi_1\left(x_{\mu}+2i\theta\sigma_{\mu}\bar{\xi}+i\xi\sigma_{\mu}\bar{\xi},\quad \theta+\xi,\quad \bar{\theta}+\bar{\xi}\right) \tag{4.26}$$

$$\phi_2'\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) = \phi_2\left(x_{\mu}-2i\xi\sigma_{\mu}\bar{\theta}-i\xi\sigma_{\mu}\bar{\xi},\quad \theta+\xi,\quad \bar{\theta}+\bar{\xi}\right). \tag{4.27}$$

Na realização (4.23), podemos considerar o supercampo real:

$$\phi\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)^{*}=\phi\left(x,\theta,\bar{\theta}\right). \tag{4.28}$$

Já que, conforme (4.24) e (4.25), os supercampos ϕ_1 e ϕ_2 podem ser relacionados entre si por meio da conjugação complexa, a realização (4.24) ((4.25)) é mais bem expressa se θ $\left(\bar{\theta}\right)$ não aparece na transformação da coordenada x_μ. Assim, podemos introduzir um supercampo "mais econômico", dependendo unicamente de θ $\left(\text{ou de } \bar{\theta}\right)$, que é o supercampo quiral escalar:

$$S\left(x,\theta\right) = A\left(x\right) + \theta\psi\left(x\right) + \theta\theta F\left(x\right), \tag{4.29}$$

onde $\theta_\alpha\theta_\beta\theta_\gamma = 0$.

Representando as transformações infinitesimais na forma

$$\delta\phi = i\left(\xi Q + \bar{Q}\bar{\xi}\right), \tag{4.30}$$

encontramos que

$$Q_\alpha = -i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - \left(\partial\bar{\theta}\right)_\alpha, \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}} = i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + \left(\theta\partial\right)_{\dot{\alpha}}, \tag{4.31}$$

e, correspondentemente, para os supercampos nas realizações assimétricas ϕ_1 e ϕ_2:

$$Q_\alpha^{(1)} = -i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \quad \text{e} \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}}^{(1)} = i\frac{\partial}{\partial\theta^{\dot{\alpha}}} + 2\left(\theta\hat{\partial}\right)_{\dot{\alpha}}. \tag{4.32}$$

As supercargas Q e $\bar{Q}$ satisfazem todas as relações da superálgebra (4.8) e (4.10). Como conseqüência, em $L_{\mu\nu}$ aparece um termo extra $1/2\left(\theta_{\mu\nu}\partial/\partial\theta + \bar{\theta}\tilde{\sigma}_{\mu\nu}\partial/\partial\bar{\theta}\right)$, devido à rotação das coordenadas *espinoriais*.

4.5 Transformações de campos bosônico e fermiônico

Para obtermos uma forma explícita dessas transformações, simplifiquemos usando o supercampo quiral (4.29) do seguinte modo:

$$\phi_1\left(x,\theta\right) = A_1\left(x\right) + \theta^\alpha\psi_\alpha\left(x\right) + \theta\theta F_1\left(x\right). \tag{4.33}$$

Sob as transformações infinitesimais (4.26), temos

$$\begin{aligned} \delta A_1\left(x\right) &= \xi^\alpha\psi_\alpha\left(x\right); \quad \delta F_1\left(x\right) = -i\partial^\mu\psi\left(x\right)\sigma_\mu\bar{\xi} \\ \delta\psi_\alpha &= 2i\left(\sigma_\mu\bar{\xi}\right)_\alpha\partial^\mu A_1\left(x\right) + 2\xi_\alpha F_1\left(x\right). \end{aligned} \tag{4.34}$$

Façamos a seguinte definição

$$A_1(x) = \frac{1}{2}[A(x) - iB(x)] \quad \text{e} \quad F_1(x) = \frac{1}{2}[F(x) + iG(x)], \tag{4.35}$$

onde $A(x)$ e $F(x)$ são campos escalares reais, $B(x)$ e $G(x)$ são campos pseudoescalares reais. Em termos desses campos e do *espinor* de Majorana $\psi(x)$, as transformações (4.34) são escritas como:

$$\begin{aligned} \delta A(x) &= \bar{\xi}\psi(x), \quad \delta B(x) = i\bar{\xi}\gamma_5\psi(x), \\ \delta F(x) &= i\bar{\xi}\tilde{\partial}\psi(x), \quad \delta G(x) = -\bar{\xi}\gamma_5\tilde{\partial}\psi(x), \\ \delta\psi(x) &= i\left(\partial^\mu A(x) - i\gamma_5\partial^\mu B(x)\right)\gamma_\mu + \left(F(x) + i\gamma_5 G(x)\right)\xi, \end{aligned} \tag{4.36}$$

onde $\tilde{\partial} \equiv \gamma^\mu\partial_\mu$. No artigo original de Wess e Zumino [27], essas transformações foram obtidas como uma generalização quadridimensional das transformações de *supergauge* em modelos duais. Com o uso de superálgebras e supercampos [31], tornou-se possível obtê-las de forma consistente.

Para o caso de um supercampo escalar real geral, temos

$$\begin{aligned} V\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) &= C + i\theta\chi - i\overline{\theta\chi} + \frac{i}{2}\theta\theta\left(M+iN\right) - \frac{i}{2}\overline{\theta\theta}\left(M-iN\right) - \theta\sigma\bar{\theta}v^\mu \\ &\quad + i\left(\theta\theta\right)\bar{\theta}\left(\bar{\lambda} + \frac{i}{2}\hat{\partial}\chi\right) - i\left(\overline{\theta\theta}\right)\theta\left(\lambda + \frac{i}{2}\hat{\partial}\bar{\chi}\right) + \left(\theta\theta\right)\left(\overline{\theta\theta}\right)\left(\frac{1}{2}D - \frac{1}{4}\partial^2 C\right) \end{aligned} \tag{4.37}$$

Sob transformações infinitesimais, encontramos, diretamente em termos dos *espinores* de Majorana, que

$$\begin{aligned} \delta C &= i\bar{\xi}\gamma_5\chi \\ \delta M &= \bar{\xi}\lambda + i\bar{\xi}\widetilde{\partial\chi}, \quad \delta N = i\bar{\xi}\gamma_5\lambda + \bar{\xi}\gamma_5\widetilde{\partial\chi} \\ \delta\chi &= \gamma_5\gamma_\mu\xi\partial^\mu C + i\gamma_\mu\xi v^\mu + \left(M + i\gamma_5 N\right)\xi \\ \delta v_\mu &= i\bar{\xi}\gamma_\mu\lambda + \bar{\xi}\partial_\mu\chi \\ \delta\lambda &= i\gamma_5\xi D + \frac{1}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu\xi\left(\partial^\mu v^\nu - \partial^\nu v^\mu\right) \\ \delta D &= \bar{\xi}\gamma_5\tilde{\partial}\lambda. \end{aligned} \tag{4.38}$$

As propriedades de transformação dos campos bosônicos e fermiônicos de outros supermultipletos podem ser encontradas de forma análoga. Devemos, entretanto, notar a seguinte regra:

"Em transformações supersimétricas, a mudança no último termo da expansão de qualquer supercampo - δF na (4.36) e δD na (4.38)- é uma derivada total, ou seja, o último termo é submetido a uma mudança unicamente por causa da translação do penúltimo termo em relação à coordenada x_μ [73]".

Capítulo 5

Aplicações

Após apresentarmos uma forma de construir Lagrangianas por meio da pseudomecânica, fizemos sua aplicação em partículas não relativísticas e relativísticas, em que discutimos as condições de contorno. Finalizamos com essas aplicações, construindo a teoria de DKP usando a pseudomecânica e o formalismo de supercampos; esse último também foi empregado na análise da partícula relativística em $D = 2 + 1$ como uma generalização de variáveis *Twistors*.

5.1 Construindo Lagrangianas

Como vimos, a Lagrangiana é uma função par; portanto, não devemos simplesmente escrevê-la proporcional a uma variável ímpar qualquer θ, tampouco, ao produto $\theta\theta$, pois da (3.14), $\theta\theta = 0$. Então, consideremos duas variáveis ímpares θ^i e θ^j. O produto $\theta^i\theta^j$ é par, porém, como $\left(\theta^i\theta^j\right)^* = -\theta^i\theta^j$, ele é imaginário puro; disso, devemos multiplicá-lo por um outro número imaginário puro para termos um produto real. O número mais simples é o i: $\left(i\theta^i\theta^j\right)^* = -i\theta^j\theta^i = i\theta^i\theta^j$. Assim, a forma mais geral para uma função par e real, pertencente à álgebra de Grassmann de três dimensões, é dada por

$$L_{ij} = ic_o i\theta_i\theta_j, \tag{5.1}$$

onde c_0 é uma constante real. Na verdade, a forma mais geral é a soma de L_{ij}:

$$L_1 = \sum_{i,j} L_{ij} = i\varepsilon_{kln}c^k\theta^l\theta^n, \tag{5.2}$$

onde $k, l, n = 1, 2, 3$, e ε_{kln} é totalmente antisimétrico. A mesma conclusão pode ser obtida para $\dot{\theta}^l$:

$$L_2 = i\varepsilon_{kln} b^k \dot{\theta}^l \dot{\theta}^n. \tag{5.3}$$

E, também, com as variáveis θ^l e $\dot{\theta}^n$:

$$L_3 = i\varepsilon_{kln} a^k \theta^l \dot{\theta}^n. \tag{5.4}$$

Claro que podemos estender para derivadas de ordens maiores, como

$$L_4 = i\varepsilon_{kln} d^k \ddot{\theta}^l \ddot{\theta}^n, \tag{5.5}$$

que resulta em mais duas funções:

$$L_5 = i\varepsilon_{kln} f^k \dot{\theta}^l \ddot{\theta}^n \tag{5.6}$$

e

$$L_6 = i\varepsilon_{kln} h^k \theta^l \ddot{\theta}^n, \tag{5.7}$$

e, assim, sucessivamente.

5.2 Partícula não relativística de *spin* 1/2

Analisemos a partícula não relativística com coordenadas de posição $x^i(t)$, $i = 1, 2, 3$, e, para descrevermos o grau de liberdade de *spin,* usemos as variáveis ímpares $\theta^i(t)$. Estas terão, por suposição, o comportamento de um vetor sob rotações espaciais. Assim, como vimos na seção anterior, uma Lagrangiana nesse superespaço é dada por

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + i\varepsilon_{kln} c^k \theta^l \theta^n + i\varepsilon_{kln} b^k \dot{\theta}^l \dot{\theta}^n + i\varepsilon_{kln} a^k \theta^l \dot{\theta}^n. \tag{5.8}$$

Consideremos primeiro, como caso particular de (5.8), a seguinte ação:

$$S = \int dt \left(i\delta_{lk} \theta^k \dot{\theta}^l + i\varepsilon_{kln} c^k \theta^k \theta^l \right), \tag{5.9}$$

com $\delta S = 0$, temos

$$\dot{\theta}_l = \varepsilon_{kml} c^k \theta^m, \tag{5.10}$$

a qual possui a solução

$$\overrightarrow{\theta}(t) = \overrightarrow{R}(t) \overrightarrow{\theta}(0), \tag{5.11}$$

onde $\overrightarrow{R}$ é uma matriz ortogonal descrevendo uma rotação com velocidade angular. Portanto, essa solução pode ser interpretada como uma precessão do *spin* em um campo magnético, digamos $\overrightarrow{B}$, onde a relação $\overrightarrow{b} = k\overrightarrow{B}$ expressa a velocidade, e k é o momento magnético.

Novamente, como caso especial da (5.8), consideremos a seguinte Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{i}{2}\dot{\overrightarrow{\theta}}\overrightarrow{\theta}. \tag{5.12}$$

Para passarmos ao formalismo Hamiltoniano, definimos os momentos conjugados:

$$\begin{aligned} p_i &= m\dot{x}_i, \\ \pi_k &= \frac{i}{2}\theta_k, \end{aligned} \tag{5.13}$$

onde, com a (3.100) , temos os Parênteses de Poisson Generalizados (PPG):

$$\begin{aligned} \left\{x^i, p_j\right\} &= \delta^i_j \\ \left\{\theta^k, \pi_l\right\} &= \delta^k_l, \end{aligned} \tag{5.14}$$

sendo os outros nulos. Utilizando a expressão (5.13), temos o vínculo primário

$$\pi_k - \frac{i}{2}\theta_k \simeq 0, \tag{5.15}$$

que é conseqüência da linearidade de L em $\dot{\theta}$. Com a Hamiltoniana primária,

$$H_p = \frac{\overrightarrow{p}^2}{2m} + I_k\lambda^k, \tag{5.16}$$

verificamos que não há vínculos secundários:

$$\dot{I}_k = \{I_k, H_p\} \simeq 0, \tag{5.17}$$

em que $\lambda^k = 0$. Os vínculos $I's$ são de segunda classe:

$$\{I_k, I_i\} = i\delta_{ki}. \tag{5.18}$$

Podemos, agora, introduzir os parênteses de Dirac utilizando os vínculos de segunda classe I_k; depois, consideramos a relação $I_k = 0$ como equações *fortes,* eliminando, assim, o π_k da teoria, deixando θ_i como única variável ímpar, modificando os (PPG) por

$$\left\{\theta^i, \theta^j\right\}_{PD} = i\delta^{ij}. \tag{5.19}$$

Para obter a (5.10), fizemos

$$\delta\theta\,(2) = \delta\theta\,(1) = 0, \tag{5.20}$$

o que não é correto: cada condição de contorno está relacionada com uma única constante de integração [66], e como a (5.10) nos fornece apenas uma única constante de integração, podemos ter somente uma condição de contorno. Analisaremos esse caso no exemplo intitulado como "Condições de contorno".

Antes de continuarmos com a (5.12), vamos, então, levar em conta essas condições de contorno. Assim, ao variarmos a ação obtida da (5.12), para encontrarmos as equações de movimento, veremos que devemos fazer as seguintes modificações:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} Ldt \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} Ldt + \frac{i}{2}\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left[c_0\theta\,(t)\right]dt, \tag{5.21}$$

onde $c_0 \equiv \theta\,(t_1)$,

$$\delta\overrightarrow{x}\,(t_1) = \delta\overrightarrow{x}\,(t_2) = 0 \qquad \text{permanecem}, \tag{5.22}$$

e

$$\delta\overrightarrow{\theta}\,(t_1) = 0, \qquad \delta\overrightarrow{\theta}\,(t_2) = 0 \rightarrow \delta\overrightarrow{\theta}\,(t_1) + \delta\overrightarrow{\theta}\,(t_2) = 0. \tag{5.23}$$

Confira:

$$\begin{aligned} \delta S &= m\dot{x}\delta\, x|_{t_1}^{t_2} + \frac{i}{2}\delta\theta\,\theta|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt\ddot{x}^i\delta x_i + i\int_{t_1}^{t_2} dt\dot{\theta}^i\delta\theta_i \\ &+\frac{i}{2}\left[\overrightarrow{\theta}\,(t_1)\,\delta\overrightarrow{\theta}\,(t_2) + \delta\overrightarrow{\theta}\,(t_1)\,\overrightarrow{\theta}\,(t_2) + \delta\overrightarrow{\theta}\,(t_1)\,\delta\overrightarrow{\theta}\,(t_2)\right], \end{aligned} \tag{5.24}$$

ou

$$\delta S = m\dot{x}\delta\, x|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt\ddot{x}^i\delta x_i + i\int_{t_1}^{t_2} dt\dot{\theta}^i\delta\theta_i - \frac{i}{2}\left[\delta\overrightarrow{\theta}\,(t_1) + \delta\overrightarrow{\theta}\,(t_2)\right]\left[\overrightarrow{\theta}\,(t_1) - \overrightarrow{\theta}\,(t_2)\right]. \tag{5.25}$$

Com $\delta S = 0$ e as (5.22) e (5.23), temos, portanto,

$$\begin{aligned} \ddot{x}^i &= 0, \\ \dot{\theta}^i &= 0. \end{aligned} \tag{5.26}$$

5.2.1 Quantidades conservadas

A ação (5.21) é invariante sob translações, rotações e transformações Galileanas. Os θ's são afetados unicamente pelas rotações espaciais, enquanto que, nos outros dois casos, obtemos os resultados padrões para a partícula sem *spin.* Portanto, analisemos o caso de rotações. Escrevendo a (5.21) na forma Hamiltoniana, temos

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\dot{\overrightarrow{x}} \overrightarrow{p} + \frac{i}{2} \dot{\overrightarrow{\theta}} \overrightarrow{\theta} - \frac{\overrightarrow{p}}{2m} \right) + \frac{i}{2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left[c_0 \theta \left(t \right) \right] dt, \tag{5.27}$$

que é invariante por estas rotações:

$$\begin{aligned} \delta x^i &= \omega^{ij} x_j \\ \delta p^i &= \omega^{ij} p_j \\ \delta \theta^i &= \omega^{ij} \theta_j, \end{aligned} \tag{5.28}$$

com $\omega^{ij} = -\omega^{ji}$. Do teorema de Noether, podemos reescrever a variação da ação como

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \overrightarrow{x}. \overrightarrow{p}|_{t_1}^{t_2} - \frac{1}{2} \left[\delta \overrightarrow{\theta} \left(t_1 \right) + \delta \overrightarrow{\theta} \left(t_2 \right) \right] \left[\overrightarrow{\theta} \left(t_1 \right) - \overrightarrow{\theta} \left(t_2 \right) \right] \\ &\quad + (\text{termos obedecendo às equações de movimento.}) \end{aligned} \tag{5.29}$$

Portanto, usando a (5.28) na (5.29), temos a seguinte quantidade conservada:

$$J_{ik} = L_{ik} + S_{ik}, \tag{5.30}$$

onde

$$L_{ik} = x_i p_k - x_k p_i, \tag{5.31}$$

$$S_{ik} = i \theta_i \theta_k. \tag{5.32}$$

Como a variável dinâmica J_{ik} é o gerador das rotações, então, podemos identificá-la com o momento angular total. Vejamos que J_{ik} separa-se em duas partes: uma orbital L_{ik}, que não é invariante sob translações ou transformações Galileanas, e uma parte intrínseca ou de *spin* S_{ik}, que é invariante por aquelas duas transformações. Em termos dos Parênteses de Dirac, L_{ik} e S_{ik} obedecem à sua álgebra. Por exemplo, se definirmos o vetor de *spin*,

$$S_i = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} S_{jk}, \tag{5.33}$$

temos

$$\{S_i, S_j\} = \epsilon_{ijk} S_k. \tag{5.34}$$

5.2.2 Quantização

Para mostrar que a ação (5.21) corresponde ao limite clássico de uma partícula não relativística de *spin* 1/2, utilizamos o processo de quantização canônica: convertemos as variáveis dinâmicas da teoria clássica em operadores, por meio da prescrição

$$\{A, B\}_{PD} \rightarrow (i\hbar)^{-1} \left[\widehat{A}, \widehat{B}\right]_{\pm}, \tag{5.35}$$

onde o sinal de mais denota um anticomutador -usado quando A e B forem ímpares- e o sinal de menos corresponde a um comutador - usado quando ao menos A ou B for par. Aplicando essa prescrição na (5.19), obtemos

$$\left[\widehat{\theta}_i, \widehat{\theta}_j\right]_{+} = \hbar\delta_{ij}, \tag{5.36}$$

onde temos a álgebra de Clifford. Em termos de operadores, atuando em um espaço vetorial, sabemos que existe uma única representação irredutível dessa álgebra. Nessa representação, temos

$$\widehat{\theta}_i = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{1/2} \sigma_i, \tag{5.37}$$

onde os σ's são as matrizes de Pauli. Então, o vetor de *spin* quântico é dado por

$$\widehat{S}_i = -\frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\widehat{\theta}_j\widehat{\theta}_k = -\frac{\hbar}{4}\epsilon_{ijk}\sigma_j\sigma_k, \tag{5.38}$$

que corresponde àquele de uma partícula (não relativística) de *spin* 1/2.

5.3 Condições de Contorno

Consideremos o caso mais simples que é o de uma partícula Newtoniana submetida a uma força constante:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}_i^2 + mg_i x_i\right) dt. \tag{5.39}$$

Variando a ação, temos

$$\delta S = m\dot{x}_i\, \delta x_i|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} (m\ddot{x}_i - mg_i)\, \delta x_i dt, \tag{5.40}$$

onde fazemos a seguinte afirmação: seja a variação de S nula,

$$\delta S = 0, \tag{5.41}$$

que respeita estas duas condições de contorno:

$$\delta x_i (t_1) = 0, \tag{5.42}$$

$$\delta x_i (t_2) = 0. \tag{5.43}$$

Com isso, teremos a equação de movimento:

$$\ddot{x}_i = g_i. \tag{5.44}$$

Resolvendo-a, teremos as constantes de integração:

$$x_i (t) = x_i (t_1) + v_{0i} (t - t_1) + g_i \left(\frac{t^2 - t_1^2}{2} \right) - g_i t_1 (t - t_1). \tag{5.45}$$

Sob rotações, como vimos, a transformação é dada por

$$\delta x^i = \omega^{ij} x_j, \tag{5.46}$$

e como uma condição de contorno está definida no ponto

$$t = t_1, \tag{5.47}$$

temos, substituindo (5.45) na (5.46):

$$\delta x^i (t_1) = \omega^{ij} x_j (t_1). \tag{5.48}$$

Como $x_j (t_1)$ é a posição no tempo inicial, podemos escolhê-la consistente com a condição de contorno (5.42), a qual resulta da exigência de que a variação da ação seja nula, ou seja, $\delta S = 0$. Iremos escolhê-la, portanto, como sendo zero:

$$x_j (t_1) = 0. \tag{5.49}$$

Vejamos a outra condição (5.43). Usando, novamente, (5.45), temos

$$\delta x^i\left(t_2\right)=\omega^{ij}\left[\overbrace{x_j\left(t_1\right)}^{\substack{0\\ \shortparallel}}+v_{0j}\left(t_2-t_1\right)+g_j\left(\frac{t_2^2-t_1^2}{2}\right)-g_jt_1\left(t_2-t_1\right)\right]. \tag{5.50}$$

Como vimos, a variação da ação $\delta S=0$ foi feita sob a hipótese de que $\delta x^i\left(t_2\right)=0$. Isso está de acordo com (5.50), pois temos a segunda constante de integração v_{0j}, que podemos escolher como:

$$v_{0j}=g_jt_1-\frac{g_j}{\left(t_2-t_1\right)}\left(\frac{t_2^2-t_1^2}{2}\right) \tag{5.51}$$

De forma análoga a (5.39), escrevemos a seguinte ação com variáveis ímpares:

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{i}{2}\theta_i\dot{\theta}^i+ic_i\theta^i\right)dt. \tag{5.52}$$

Variando-a, temos

$$\delta S=\frac{i}{2}\theta_i\;\delta\theta^i\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}i\left(\dot{\theta}_i-c_i\right)\delta\theta^i dt. \tag{5.53}$$

Seguindo o mesmo raciocínio que nos levou à (5.44), temos

$$\delta S = 0, \tag{5.54}$$

$$\delta\theta_i\left(t_1\right) = 0, \tag{5.55}$$

$$\delta\theta_i\left(t_2\right) = 0, \tag{5.56}$$

$$\dot{\theta}_i = c_i. \tag{5.57}$$

Resolvendo essa última equação, temos

$$\theta^i\left(t\right)=\theta^i\left(t_1\right)+c^i\left(t-t_1\right). \tag{5.58}$$

Como vimos, sob rotações,

$$\delta\theta^i\left(t\right)=\omega^{ij}\theta_j\left(t\right). \tag{5.59}$$

Para o caso em que $t=t_1$, temos

$$\delta\theta^i\left(t_1\right)=\omega^{ij}\left[\theta_j\left(t_1\right)+c^i\left(t_1-t_1\right)\right]=\omega^{ij}\theta_j\left(t_1\right), \tag{5.60}$$

que é análoga à expressão (5.48). Usando o mesmo raciocínio que nos levou à relação (5.49), também temos que $\theta\,(t_1)$ é nulo:

$$\theta_j\,(t_1) = 0. \tag{5.61}$$

Porém, para o caso (5.56), temos

$$\delta\theta^i\,(t_2) = \omega^{ij}\left[\overbrace{\theta_j\,(t_1)}^{\overset{0}{\|}} + c_j\,(t_2 - t_1)\right] = \omega^{ij} c_j\,(t_2 - t_1)\,. \tag{5.62}$$

Vejamos que não temos mais constantes de integração que deixe $\delta\theta^i\,(t_2) = 0$, e, portanto, a obtenção da (5.57) sob a hipótese (5.56) não é válida. Para resolver isso, o que faremos é substituir as duas condições de contorno (5.55) e (5.56) por uma única:

$$\delta\theta_i\,(t_1) + \delta\theta_i\,(t_2) = 0. \tag{5.63}$$

Para conferir se essa expressão está de acordo com a constante de integração disponível, basta usarmos a (5.58) e a (5.59) na (5.56):

$$\delta\theta_i\,(t_1) + \delta\theta_i\,(t_2) = \omega^{ij}\left[\theta_j\,(t_1) + c_j\,(t_2 - t_1) + \theta_j\,(t_1)\right] = 0. \tag{5.64}$$

Portanto, a escolha para a constante de integração $\theta_j\,(t_1)$ será da forma

$$\theta_j\,(t_1) = \frac{1}{2} c_j\,(t_2 - t_1) \tag{5.65}$$

5.4 Partícula relativística

A (5.8), como vimos, é a Lagrangiana mais geral que se pode escrever para uma partícula Newtoniana que não possui interação da variável par com a ímpar. Seguindo aquele raciocínio, é natural pensar que para o caso relativístico teríamos uma extensão da (5.12) formulada no espaço de Minkowski. No entanto, esse raciocínio é errado: para obtermos a formulação da dinâmica da partícula relativística consistente, devemos introduzir um novo vínculo, porque a formulação do caso massivo possui cinco variáveis de Grassmann [5]. Portanto, a Lagrangiana de uma partícula relativística livre no superespaço é dada por:

$$L = -m\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} + \frac{i}{2}[\dot{\theta}^\mu \theta_\mu + \dot{\theta}_5 \theta_5 + (\theta_5 - u\theta) e\,(t)], \tag{5.66}$$

onde $c \equiv 1$, $e\,(t)$ é uma função arbitrária dependendo apenas do parâmetro t e

$$u_\mu \equiv \frac{\dot{x}_\mu}{z}, \qquad z \equiv \sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}. \tag{5.67}$$

Os momentos dessa Lagrangiana são dados por:

$$p_\mu = -mu_\mu - \frac{i}{2z}(\theta_\mu - u_\mu u\theta)\lambda \;\; \pi_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}^\mu} = \frac{i}{2}\theta_\mu, \;\; \pi_5 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_5} = \frac{i}{2}\theta_5, \;\; p_e = \frac{\partial L}{\partial \dot{e}} = 0, \tag{5.68}$$

que fornecem os seguintes vínculos primários:

$$P \equiv p^2 + m^2 \approx 0, \quad I_\mu \equiv \pi_\mu - \frac{i}{2}\theta_\mu \approx 0, \quad I_5 \equiv \pi_5 - \frac{i}{2}\theta_5 \approx 0, \quad I_e = p_e \approx 0. \tag{5.69}$$

Ao aplicarmos a condição de estabilidade sobre esses vínculos, teremos um único vínculo secundário:

$$I_D \equiv p\theta + m\theta_5 \approx 0. \tag{5.70}$$

Na construção dos Parênteses de Dirac, precisamos encontrar a matriz cujo determinante não seja nulo; para isso, fazemos os Parênteses de Poisson entre todos esses vínculos e construímos, com os *verdadeiros* vínculos de segunda classe, essa matriz. Depois dessa análise, encontramos que os seguintes vínculos são de segunda e de primeira classes, respectivamente:

$$I_\mu \equiv \pi_\mu - \frac{i}{2}\theta_\mu \approx 0, \quad I_5 \equiv \pi_5 - \frac{i}{2}\theta_5 \approx 0, \tag{5.71}$$

$$P \equiv p^2 + m^2 \approx 0, \qquad I \equiv p\theta + m\theta_5 \approx 0. \tag{5.72}$$

Então, os Parênteses de Dirac entre as variáveis canônicas são dados por:

$$\{p_\mu, q_\nu\}^{qp+\theta\pi} = g_{\mu\nu}, \quad \{\theta_\mu, \theta_\nu\}^{qp-\theta\pi} = -ig_{\mu\nu}, \quad \{\theta_5, \theta_5\}^{qp-\theta\pi} = i, \tag{5.73}$$

sendo os outros nulos.

5.4.1 Condições de contorno

Ao obtermos as equações de movimento variando a ação com a Lagrangiana (5.66), notaremos que as condições de contorno terão as seguintes formas:

$$\delta x^\mu(t_2) = \delta x^\mu(t_1) = 0, \tag{5.74}$$

$$\delta\theta^{\mu}(t_2) + \delta\theta^{\mu}(t_1) = 0, \tag{5.75}$$

$$\delta\theta_5(t_2) + \delta\theta_5(t_1) = 0, \tag{5.76}$$

e que devemos adicionar o seguinte termo de fronteira nessa ação:

$$S_{front.} = \frac{i}{2}[\theta^{\alpha}(t_1)\theta_{\alpha}(t_2) + \theta_5(t_1)\theta_5(t_5)]. \tag{5.77}$$

Ou seja,

$$S_T = S + S_{front.}. \tag{5.78}$$

5.4.2 Quantidades conservadas

Usando as rotações no espaço-tempo ou transformadas de Poincaré:

$$\delta x^{\mu} = \omega^{\mu\nu}x_{\nu} + \epsilon^{\mu}, \quad \delta p_{\mu} = \omega_{\mu\nu}p^{\nu}, \quad \delta\theta_{\mu} = \omega_{\mu\nu}\theta^{\nu}, \quad \delta\theta_5 = 0 \tag{5.79}$$

e a condição de extremo:

$$\delta S_T = 0, \tag{5.80}$$

temos

$$[p_{\mu}(t_2) - p_{\mu}(t_1)]\epsilon^{\mu} - \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}[J_{\mu\nu}(t_2) - J_{\mu\nu}(t_1)] = 0, \tag{5.81}$$

com

$$J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}, \tag{5.82}$$

onde

$$L_{\mu\nu} = x_{\mu}p_{\nu} - x_{\nu}p_{\mu} \tag{5.83}$$

e

$$S_{\mu\nu} = i\theta_{\mu}\theta\nu. \tag{5.84}$$

A relação (5.82) expressa os geradores das rotações de Lorentz, e é identificada com o momento angular total da partícula.

5.4.3 Quantização

Na Teoria Quântica, os geradores (5.83) e (5.84), além de adquirirem os *status* de operadores, devem ser (anti) simetrizados [5]:

$$\widehat{L}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\widehat{q}_\mu \widehat{p}_\nu + \widehat{p}_\nu \widehat{q}_\mu - \widehat{q}_\nu \widehat{p}_\mu - \widehat{p}_\mu \widehat{q}_\nu) \tag{5.85}$$

e

$$\widehat{S}_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}(\widehat{\theta}_\mu \widehat{\theta}_\nu - \widehat{\theta}_\nu \widehat{\theta}_\mu) \equiv \frac{i}{2}\hbar(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) \tag{5.86}$$

onde

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = -2g_{\mu\nu}. \tag{5.87}$$

Os Parênteses de Dirac (5.73), na quantização canônica, adquirem os *status* de operadores:

$$[\widehat{p}_\mu, \widehat{q}_\nu]_{qp} = i\hbar g_{\mu\nu}, \qquad [\widehat{\theta}_\mu, \widehat{\theta}_\nu]_{\theta\pi} = \hbar g_{\mu\nu}, \qquad [\widehat{\theta}_5, \widehat{\theta}_5]^{\theta\pi} = \hbar, \tag{5.88}$$

e os vínculos de primeira classe (5.72) são convertidos em condições sobre estados físicos:

$$(\widehat{p}_\nu \widehat{p}^\nu - m^2)\psi_i = 0 \tag{5.89}$$

e

$$(\widehat{p}\widehat{\theta} + m\widehat{\theta}_5)\psi = 0, \tag{5.90}$$

onde os operadores $\widehat{\theta}_\mu$ e $\widehat{\theta}_5$ são geradores da álgebra de Clifford; sua representação, para o caso em questão, é quadridimensional e pode ser denotada pelas matrizes de Pauli-Dirac:

$$\widehat{\theta}_\mu = \sqrt{\hbar}\gamma_5 \gamma_\mu \tag{5.91}$$

e

$$\widehat{\theta}_5 = \sqrt{\hbar}\gamma_5, \tag{5.92}$$

onde

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \tag{5.93}$$

e

$$\gamma_5^2 = 1. \tag{5.94}$$

γ_0 e γ_5 são Hermitianas e $\gamma_{1,2,3}$ são anti-Hermitianas. Multiplicando (5.90) por $(\hbar/2)^{-\frac{1}{2}}\gamma_5$, obtemos a equação de Dirac na representação usual:

$$(p\gamma + m)\psi = 0. \tag{5.95}$$

Mecânica Pseudoclássica para Partículas de *Spins* 0 e 1

Resumo

Obtivemos uma ação para a partícula com *spin* e sem massa por meio da mecânica pseudoclássica, que possui como base variáveis *Grassmannianas*. Essa ação é invariante sob reparametrização τ, transformações do $O\left(N\right)$ e sob SUSY local. Após quantização, para o caso especial $N = 2$, obtivemos uma ação que, além de descrever alguns aspectos topológicos, descreve os setores de *spins* zero e um da teoria DKP sem massa. Exploramos, também, uma formulação supersimétrica desse modelo.

5.5 Pseudoclassical Mechanics for the spin 0 and 1 Particles

R. Casana*(1), M. Pazetti†(1), B. M. Pimentel‡(1) and J. S. Vaverde§(1,2)

(1) *Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista*
Rua Pamplona 145, CEP 01405-900, São Paulo, SP, Brazil
(2) *Departamento de Ciências Exatas, Universidade Federal de Lavras*
Caixa Postal 3037, CEP 37200-000, Lavras, MG, Brazil

Abstract

We give an action for the massless spinning particle in pseudoclassical mechanics by using grassmann variables. The constructed action is invariant under τ-reparametrizations, local SUSY and $O(N)$ transformations. After quantization, for the special case $N = 2$, we get an action which describes the spin 0, 1 and topological sectors of the massless DKP theory. A SUSY formulation of the given model also is explored.

5.5.1 Introduction

Investigations of particle systems with arbitrary spin was initially given by Bargmann-Wigner [1] and Rarita-Schwinger [2], here the Dirac representations of the spin one half particles are the basis to the construction of higher spin theories. The formalism is based on the bispinor wave function with $2s$ Dirac indices (for spin s) and the total symmetrical representation is used to study the maximum spin value of the model.

On the other hand, the first ideas about the studies of classical systems that include in the phase space both commuting and anticommuting variables (pseudoclassical mechanics) was put forward by Schwinger [1] in 1953. However it was

*casana@ift.unesp.br
†mpazetti@ift.unesp.br
‡pimentel@ift.unesp.br
§valverde@ift.unesp.br,valverde@stout.ufla.br

Martin [2] who achieved these ideas in 1959. Later in the Berezin and Marinov works [5] a model for the description of spin one half particles was proposed, here the consistent formulation of the relativistic particle dynamics implies in the addition of a new constraint, this is because the formulation of the massive case has five grassmann variables. At the same time these models were also studied by Casalbuoni [23] who explored the internal group symmetry and the gauge invariance of the resulting action. In this way was possible the description of spinless and spin one particles using these internal symmetries. Interaction of spinning particle systems with external Yang-Mills and gravitational fields was investigated in [24]. The quantization of similar models are performed by means of the Dirac procedure for constrained systems.

Many other papers appeared about the study of spinning particles in the framework of pseudoclassical mechanics, for example the derivation of the equation of motions for the massive and massless spinning particles are treated in the works [10, 11, 10, 11], where the spin description is achieved by means of the inclusion of internal group symmetries. Similarly, the case of the Dirac particle is discussed in the works [12, 13, 14]. A path integral representation for obtaining a Dirac propagator was also obtained in [15] and other studies connecting the pseudoclassical mechanics with the string theory was investigated [16] for the free case as in interacting with an external field. Also, the pseudoclassical description of massless Weyl fermions and its path integral quantization when coupled to Yang-Mills and gravitational fields was studied in [17]. Similarly, the path integral quantization of spinning particles interacting with external electromagnetic field was analyzed in [18].

Besides this, the pseudoclassical approach can be applied to other different models. This is the case of the Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) theory [19, 20, 21] which describes massive spin 0 and spin 1 particles in a unified representation. Questions about the equivalence of the DKP theory with theories like Klein-Gordon and Maxwell are discussed in [39, 40, 41] (a good historical review of the DKP theory can be found in [42, 43]). The Field theory of the massless DKP has a local gauge symmetry which describes the electromagnetic field in its spin 1 sector. It is important to notice that the massless case can not be obtained through the limit $m \to 0$ of the massive case. This is due to the fact that the projections of DKP field into spin 0 and 1 sectors involve the mass as a multiplicative factor [18] so that taking the limit $m \rightarrow 0$ makes the results previously obtained useless. Moreover, if we simply make mass equal to zero in the usual massive DKP Lagrangian we obtain a Lagrangian with no local gauge symmetry. Studies in the Riemann-Cartan space time was proposed in [19, 20, 18].

Recently, a super generalization of the DKP algebra was done by Okubo [21] where the starting point is the study of all irreducible representations by means of the Lie algebra $so(1,4)$ [22], moreover, a paraDKP (PDKP) algebra is constructed intimately related to the Lie superalgebra $osp(1,4)$, obtaining as result the super DKP algebra that contains the boson and fermion representations.

An extended variant including Grassmann variables for the DKP theory is very interesting for many reasons, for example a pseudoclassical version allow us to make an attempt to the construction of a supersymmetry variant of the theory where the action must be expressed in terms of (super)fields. It is also no clear about the particle states that will compose the (super)multiplet in this theory.

In this work we propose a possible action for the massless DKP theory in the pseudoclassical approach. In section **2**, the pseudoclassical action is given including the correct boundary terms that yields a consistent equations of motions. We carry out the constraint analysis of the system and verify his invariance under τ-reparametrizations, internal group $O(N)$ and SUSY transformations. We find the generators of corresponding transformations and give the Pauli-Lubanski vector. In section **3**, the quantization is performed and proved that for the special case $N = 2$ the both sectors of spin 0 and spin 1 of the DKP theory appear. We get the scalar and vectorial field as a first result, we also obtain the topological field solutions correspondent to the both spin sectors. In Section **4**, using the SUSY principles we extend the proposed action to the Superspace formalism obtaining a consistent result as in the pseudoclassical model. Finally in section **5**, we give our conclusions and comments.

5.5.2 Pseudoclassical Mechanics

We start with the action in the first order formalism that considers an internal group symmetry

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[(\dot{x} - i\chi\psi)\, p + \frac{e}{2}p^2 + \frac{i}{2}\psi\dot{\psi} + \frac{i}{2}f\psi\psi \right] + \frac{i}{2}\psi\left(\tau_2\right)\psi\left(\tau_1\right) \tag{5.96}$$

here x_μ is the space time coordinate, p_μ the auxiliary momentum vector; $\psi_\mu^k(\tau)-$ $k,l,...=1,2,...N$ are the fermion coordinates, superpartner of $x_\mu(\tau)$, $\left(x_\mu,\psi_\mu^k\right)$ is the multiplet of matter; $e(\tau)$ is the *einbein*, his superpartner $\chi_k(\tau)$ is the unidimensional gravitino; $f_{ik}(\tau)=-f_{ki}(\tau)$ is the gauge field for internal symmetry, (e,χ_k,f_{ik}) is the supergravitational multiplet on the world line.

The action (5.182) includes the correct boundary terms that guarantee the consistence of the equations of motions for the grassmann variables. This is because in the variational principle the fermionic canonical coordinates have only one condition

$$\delta\left(\psi\left(\tau_2\right)+\psi\left(\tau_1\right)\right)=0 \tag{5.97}$$

for the other coordinates only the space time coordinate is restricted to the condition

$$\delta x\left(\tau_2\right)=\delta x\left(\tau_1\right)=0 \tag{5.98}$$

internal group indices in the case $N=2$ when $i,k=1,2$ are contracted by means of symbol Kroeneker δ_{ik} (for the group $O(2)$ and spin 1) or Levi-Civita symbol ϵ_{ik} (for the group $Sp(1)$ and spin 0).

The lagrangian that follows from (5.182) is

$$\mathcal{L}=(\dot{x}-i\chi\psi)\,p+\frac{e}{2}p^2+\frac{i}{2}\psi\dot{\psi}+\frac{i}{2}f\psi\psi \tag{5.99}$$

It is possible to write the action (5.182) in a different way, for this we perform the variation of S with respect to p, then we get the following equation

$$p=-e^{-1}\left(\dot{x}-i\chi\psi\right) \tag{5.100}$$

inserting this solution into (5.182) we obtain the second order formalism of the action

$$\begin{aligned} S &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\left[-\frac{e^{-1}}{2}\left(\dot{x}^2-2i\dot{x}\chi\psi-(\chi\psi)^2\right)+\frac{i}{2}\psi\dot{\psi}+\frac{i}{2}f\psi\psi\right] \\ &\quad +\frac{i}{2}\psi\left(\tau_2\right)\psi\left(\tau_1\right) \end{aligned} \tag{5.101}$$

then the lagrangian that follows from (5.101) is

$$\mathcal{L}=-\frac{e^{-1}}{2}\left(\dot{x}^2-2i\dot{x}\chi\psi-(\chi\psi)^2\right)+\frac{i}{2}\psi\dot{\psi}+\frac{i}{2}f\psi\psi \tag{5.102}$$

the term $(\chi\psi)^2 = \chi_i\psi_i\chi_k\psi_k$ appears because an internal group symmetry $O(N)$ was introduced in the theory.

Both formulations (5.182) and (5.101) are equivalent and as we will see later the constraint analysis gives the same result.

Equations of motions that follow from the action (5.182) result in

$$p_\mu\psi_k^\mu = 0, \quad \psi_{\mu i}\psi_k^\mu = 0, \quad \dot{\psi}_k^\mu = -p^\mu\chi_k + f_{ik}\psi_i^\mu, \quad \dot{p} = 0$$

we can see that for a special case $e = 1$, $\chi = f = 0$ we obtain the solutions

$$x_\mu(\tau) = x_\mu(0) + p_\mu\tau, \quad \psi_k^\mu = const.$$

Constraint Analysis

Now we proceed to the constraint analysis of the theory. Using the definition for the canonical momentum: $p_a = \frac{\overleftarrow{\partial}\mathcal{L}}{\partial\dot{q}^a}$, we obtain

$$\begin{aligned} p_\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\mu} = p_\mu; \quad \pi_\mu^k = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}_k^\mu} = \frac{i}{2}\psi_\mu^k \\ \pi &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{e}^\mu} = 0; \quad \pi^k = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\chi}_k} = 0; \quad \pi^{ik} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{f}_{ik}} = 0 \end{aligned} \tag{5.103}$$

from which a set of primary constraints appears

$$\Omega_\mu^k = \pi_\mu^k - \frac{i}{2}\psi_\mu^k \approx 0, \quad \Omega_\pi = \pi \approx 0, \quad \Omega^k = \pi^k \approx 0, \quad \Omega^{ik} = \pi^{ik} \approx 0 \tag{5.104}$$

following the standard Dirac procedure for a theory with constraints we construct the primary hamiltonian from the lagrangian (5.184), $\mathcal{H} = p_a\dot{q}^a - \mathcal{L}$,

$$\mathcal{H}^{(1)} = i\chi_k\psi_k^\mu p_\mu - \frac{e}{2}p^2 - \frac{i}{2}f_{ik}\psi_{\mu i}\psi_k^\mu + \lambda^a\Omega_a \tag{5.105}$$

where we have included the primary constraints (5.186), $\lambda^a = \left\{\lambda_\mu^k, \lambda_\pi, \lambda^k, \lambda^{ik}\right\}$ are the lagrange multipliers. When we apply the stability conditions on the primary constraints

$$\dot{\Omega}_a = \left\{\Omega_a, \mathcal{H}^{(1)}\right\}_{PB} = 0 \tag{5.106}$$

we obtain a new set of secondary constraints

$$\Omega_\pi^{(2)} = \frac{1}{2}p^2 \approx 0, \quad \Omega_k^{(2)} = i\psi_k^\mu p_\mu \approx 0, \quad \Omega_{ik}^{(2)} = i\psi_{\mu i}\psi_k^\mu \approx 0 \tag{5.107}$$

the conservation of these secondary constraints in time tell us that no more constraints appear in the theory. Next the constraint classification gives the following first class

$$\Omega_\pi^{(2)} = \frac{1}{2}p^2 \approx 0 \tag{5.108}$$
$$\Omega_k^{(2)} = i\psi_k^\mu p_\mu \approx 0 \tag{5.109}$$
$$\Omega_{ik}^{(2)} = i\psi_i^\mu \psi_k^\mu \approx 0 \tag{5.110}$$

and the second class constraints

$$\Omega_\mu^k = \pi_\mu^k - \frac{i}{2}\psi_\mu^k \approx 0 \tag{5.111}$$

with the help of the second class constraints we construct the Dirac Bracket (DB) between the canonical variables and obtain

$$\left\{\psi_\mu^i, \psi_\nu^k\right\}_{DB} = -i\delta^{ik} g_{\mu\nu}, \quad \left\{x_\mu, p_\nu\right\}_{DB} = g_{\mu\nu} \tag{5.112}$$

Invariance

In the theory with the action (5.101), we have three gauge transformations that do not change their physical sense. The τ-reparametrization

$$\begin{aligned} \delta x &= \varepsilon \dot{x}, \quad \delta\psi = \varepsilon\dot{\psi} \\ \delta e &= (\varepsilon e)^{\cdot}, \quad \delta\chi = (\varepsilon\chi)^{\cdot}, \quad \delta f = (\varepsilon f)^{\cdot} \end{aligned} \tag{5.113}$$

the invariance under local internal symmetries $O(N)$

$$\begin{aligned} \delta x &= 0, \quad \delta\psi = a\psi \\ \delta e &= 0, \quad \delta\chi = a\chi, \quad \delta f = \dot{a} + af - fa \end{aligned} \tag{5.114}$$

and the invariance under local $(n = 1)$ SUSY transformations

$$\begin{aligned} \delta x &= i\alpha\psi, \quad \delta\psi = e^{-1}\alpha\left(\dot{x} - i\chi\psi\right) \\ \delta e &= 2i\alpha\chi, \quad \delta\chi = \dot{\alpha} - f\alpha, \quad \delta f = 0 \end{aligned} \tag{5.115}$$

It is interesting to commute two local ($n = 1$) SUSY transformations. This gives

$$\begin{aligned}
[\delta_\alpha, \delta_\beta] x &= \delta_{\varepsilon 0} \dot{x} + \delta_{a_0} x + \delta_{\alpha_0} x && (5.116)\\
[\delta_\alpha, \delta_\beta] \psi &= \delta_{\varepsilon 0} \dot{\psi} + \delta_{a_0} \psi + \delta_{\alpha_0} \psi && (5.117)\\
[\delta_\alpha, \delta_\beta] e &= \delta_{\varepsilon 0} \dot{e} + \delta_{a_0} e + \delta_{\alpha_0} e && (5.118)\\
[\delta_\alpha, \delta_\beta] \chi &= \delta_{\varepsilon 0} \dot{\chi} + \delta_{a_0} \chi + \delta_{\alpha_0} \chi && (5.119)\\
[\delta_\alpha, \delta_\beta] f &= \delta_{\varepsilon 0} \dot{f} + \delta_{a_0} f + \delta_{\alpha_0} f && (5.120)
\end{aligned}$$

where the new parameters are now field dependent

$$\varepsilon_0 = 2ie^{-1}\alpha\beta, \quad \alpha_0 = -\varepsilon_0 \chi, \quad a_0 = -\varepsilon_0 f \tag{5.121}$$

this shows that there is no simple gauge group structure, although the invariance is still enough to secure good physical properties of the action.

The invariance of the action (5.101) is reached if we impose the conditions at the endpoints for the parameters

$$\varepsilon(\tau_1) = \varepsilon(\tau_2) = 0, \quad \alpha(\tau_1) = \alpha(\tau_2) = 0 \tag{5.122}$$

On the other hand it is possible to find the generators of the transformations (5.227)-(5.229). We follow the work of Casalbuoni [23] where the generators of the transformations F are given by

$$F = p_a \delta q^a - \varphi, \quad \delta L = \frac{d\varphi}{d\tau} \tag{5.123}$$

being φ the generating function. To verify the correctness of found generators we use

$$\delta u = \{u, \epsilon F\}_{DB} \tag{5.124}$$

where ϵ is the parameter of a given transformation.

We find for the τ-reparametrizations

$$\begin{aligned}
F &= i\chi\psi p - \frac{e}{2}p^2 - \frac{i}{2} f\psi\psi && (5.125)\\
\{x^\mu, \varepsilon F\}_{DB} &= \varepsilon \dot{x}^\mu, \quad \{\psi_k^\mu, \varepsilon F\}_{DB} = \varepsilon \dot{\psi}_k^\mu && (5.126)
\end{aligned}$$

internal $O(N)$ symmetries

$$\begin{aligned}
F_{ik} &= \frac{i}{2}\psi_i^\mu \psi_{\mu k} + \chi_i \pi_k && (5.127)\\
\{x^\mu, aF\}_{DB} &= 0, \quad \{\psi_i^\mu, aF\}_{DB} = a_{ik}\psi_k^\mu, \quad \{\chi_i, aF\}_{DB} = a_{ik}\chi_k && (5.128)
\end{aligned}$$

and SUSY transformations

$$F_k = ip_\mu \psi_k^\mu + 2i\chi_k \pi \tag{5.129}$$

$$\{x^\mu, \alpha F\}_{DB} = i\alpha_k \psi_k^\mu, \quad \{\psi, \alpha F\}_{DB} = e^{-1}\alpha\left(\dot{x} - i\chi\psi\right) \tag{5.130}$$

$$\{e, \alpha F\}_{DB} = 2i\alpha\chi \tag{5.131}$$

To close the invariance we remark that the proposed theory is also invariant under Poincaré transformations, i.e.

$$\delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu + \epsilon^\mu, \quad \delta\psi_k^\mu = \omega^\mu{}_\nu \psi_k^\nu, \quad \delta e = \delta\chi = \delta f = 0 \tag{5.132}$$

with the generators

$$\epsilon^a F_a = \epsilon^\mu P_\mu + \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu} \tag{5.133}$$

where

$$M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu}, \quad L_{\mu\nu} = x_\nu p_\mu - x_\mu p_\nu, \quad S_{\mu\nu} = i\psi_\mu^k \psi_\nu^k \tag{5.134}$$

in this way is constructed the Pauli-Lubanski vector

$$W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} P^\nu M^{\lambda\rho}, \quad W^2 = \frac{1}{2}\left(P^2 S^2 + 2\left(S_{\mu\nu}P^\nu\right)^2\right) \tag{5.135}$$

5.5.3 Quantization

The constraint analysis which was done before takes a physical sense when the quantization is performed and a coherent interpretation of the equation of motions is given.

With the quantization the canonical variables becomes operators

$$x_\mu \to \widehat{x}_\mu, \quad p_\mu \to \widehat{p}_\mu, \quad \psi_\mu^i \to \widehat{\psi}_\mu^i \tag{5.136}$$

and the DB follows the commutator or anticommutator rules

$$\{\;\widehat{}\;\} \to i\hbar\{\quad\}_{DB} \tag{5.137}$$

thus we have the following commutation relations

$$\left\{\widehat{\psi}_\mu^i, \widehat{\psi}_\nu^k\right\} = \hbar\delta^{ik} g_{\mu\nu}, \quad [\widehat{x}_\mu, \widehat{p}_\mu] = i\hbar g_{\mu\nu} \tag{5.138}$$

We pick out a general realization for the operator $\widehat{\psi}^k_\mu$ satisfying the relation (5.138) and the equations of motions

$$D\left(\widehat{\psi}^k_\mu\right) = S\left(Y\right)\left(\left(\gamma_5\right)^{\otimes(k-1)} \otimes \gamma_\mu\gamma_5 \otimes I^{\otimes(N-k)}\right) \tag{5.139}$$

here $S(Y)$ is the Young symmetrization operator, γ_μ are the Dirac matrices and γ_5 is given by

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \quad \left(\gamma_5\right)^2 = 1 \tag{5.140}$$

The first class constraints are applied into the vector state $|\Phi\rangle \equiv |\Phi\rangle_{\alpha_1\ldots\alpha_N}$. We recall that an internal group symmetry $O(N)$, where $i, k, ... = 1, 2, ..., N$, is considered in the Lagrangian (5.182). Thus we obtain

$$p^2\left|\Phi\right\rangle_{\alpha_1\ldots\alpha_N} = 0 \tag{5.141}$$

$$p^\mu\gamma^k_\mu\left|\Phi\right\rangle_{\alpha_1\ldots,\alpha_k,\ldots\alpha_N} = 0 \tag{5.142}$$

$$\gamma^{\mu i}\gamma^k_\mu\left|\Phi\right\rangle_{\alpha_1\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_k,\ldots\alpha_N} = 0 \tag{5.143}$$

the first equation is the mass shell condition in the case of a massless particle. The second one is a set of linear equations for every Dirac indices where no symmetrization on the vector state $|\Phi\rangle$ is assumed. However when the symmetrization over the vector state is taken into account, (5.142) becomes the Bargmann-Wigner [1] equation for a particle with spin $N/2$. The total symmetrical part of $|\Phi\rangle$ generates a representation with the higher spin value. In our case, the third equation is a projector of the representations of DKP theory, i.e., it separates out a particular spin representation of the vector state.

In the particular choose: $i, k = 1, 2$, i.e. when the internal group symmetry is $O(2)$, (5.141)-(5.143) reproduce de DKP equations for massless particles with spin 0 and 1. In this case the realization (5.139) becomes

$$D\left(\widehat{\psi}^1_\mu\right) = i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left(\gamma_\mu\gamma_5 \otimes 1\right), \quad D\left(\widehat{\psi}^2_\mu\right) = i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left(\gamma_5 \otimes \gamma_\mu\gamma_5\right) \tag{5.144}$$

Let's take only two Dirac indices in the vector state $|\Phi\rangle_{\alpha_1\alpha_2}$, then using a complete set of Dirac matrices we decompose $|\Phi\rangle_{\alpha_1\alpha_2}$ as follows [33]

$$\begin{aligned} \left|\Phi\right\rangle_{\alpha_1\alpha_2} = {} & a\left(\gamma^5 C\right)_{\alpha_1\alpha_2}\zeta_5 + a_1\left(\gamma^5\gamma^\mu C\right)_{\alpha_1\alpha_2}\zeta_{5\mu} + a_2 C_{\alpha_1\alpha_2}\zeta \\ & + b\left(\gamma^\mu C\right)_{\alpha_1\alpha_2}\left(\zeta_\mu\right) + b_1\left(\Sigma^{\mu\nu}C\right)_{\alpha_1\alpha_2}\zeta_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{5.145}$$

here a, a_1, b, b_1 and a_2 must be considered as free parameters and will be adjusted to assure the correctness of the final equations. The term: $C_{\alpha_1\alpha_2}\zeta$, is referred to a trivial representation and we do not consider it, therefore, we set $a_2 = 0$.

We also have

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right) \tag{5.146}$$

and C is the charge conjugation matrix

$$C^T = -C. \tag{5.147}$$

Considering the properties of the matrix C we obtain the antisymmetrical

$$|\Phi\rangle_{[\alpha_1\alpha_2]} = a\ \left(\gamma^5 C\right)_{\alpha_1\alpha_2}\ \zeta_5 + a_1\left(\gamma^5\gamma^\mu C\right)_{\alpha_1\alpha_2}\zeta_{5\mu} \tag{5.148}$$

and the symmetrical part of the vector state.

$$|\Phi\rangle_{\{\alpha_1\alpha_2\}} = b\left(\gamma^\mu C\right)_{\alpha_1\alpha_2}\zeta_\mu + b_1\left(\Sigma^{\mu\nu}C\right)_{\alpha_1\alpha_2}\zeta_{\mu\nu}. \tag{5.149}$$

Thus for the particular case of $O(2)$ symmetry we obtain

$$p^2\,|\Phi\rangle_{\alpha_1\alpha_2} = 0 \tag{5.150}$$

$$p^\mu\gamma_\mu^{(1)}\,|\Phi\rangle_{\alpha_1\alpha_2} = 0, \quad p^\mu\gamma_\mu^{(2)}\,|\Phi\rangle_{\alpha_1\alpha_2} = 0 \tag{5.151}$$

$$\gamma_\mu^{(1)}\gamma^{\mu(2)}\,|\Phi\rangle_{\alpha_1\alpha_2} = 0 \tag{5.152}$$

these relations give the DKP equation for spin 0 and spin 1. The relation (5.152) can be shown to be a projector that separates the corresponding sector of the vector state $|\Phi\rangle_{\alpha_1\alpha_2}$.

Spin 0

Let's take the antisymmetrical part of the vector state $|\Phi\rangle_{\alpha_1\alpha_2}$ and replace it in one of the equations (5.151), then we obtain

$$\left(p_\mu\gamma^\mu\right)_{\alpha\alpha_1}|\Phi\rangle_{[\alpha_1\alpha_2]} = \left(p_\mu\gamma^\mu\right)_{\alpha\alpha_1}\left[a\left(\gamma^5 C\right)_{\alpha_1\alpha_2}\zeta_5 + a_1\left(\gamma^5\gamma^\nu C\right)_{\alpha_1\alpha_2}\zeta_{5\nu}\right] = 0 \tag{5.153}$$

multiplying on the right side by $\left(C^{-1}\gamma^5\right)_{\alpha_2\alpha}$ and considering $\gamma_5^2 = 1$, we have

$$p_\mu\left[a\left(\gamma^\mu\right)_{\alpha\alpha}\zeta_5 - a_1\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\right)_{\alpha\alpha}\zeta_{5\nu}\right] = 0 \tag{5.154}$$

with the use of the trace properties the equation (5.154) results in

$$a_1 \left(p^\mu \zeta_{5\mu}\right) = 0 \tag{5.155}$$

On the other hand, if we multiply the equation (5.153) by $\left(C^{-1}\gamma^5\gamma^\lambda\gamma^\rho\right)_{\alpha_2\alpha}$ and taking the trace operation we got to

$$a_1 \left(p^\mu \zeta_5^\nu - p^\nu \zeta_5^\mu\right) = 0 \tag{5.156}$$

for $a_1 \neq 0$, one solution for the last relation is given by

$$\zeta_5^\mu = p^\mu \zeta_5 \tag{5.157}$$

Thus equations (5.155) and (5.156) are the equations for the spin 0 particles and the equation (5.155) gives the massless Klein-Gordon equation for the scalar field ζ_5.

Now if we multiply (5.153) on the right side by $\left(C^{-1}\gamma^5\gamma^\lambda\right)_{\alpha_2\alpha}$ we obtain

$$p_\mu \left[a \left(\gamma^\lambda\gamma^\mu\right)_{\alpha\alpha} \zeta_5 - a_1 \left(\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\right)_{\alpha\alpha} \zeta_{5\nu}\right] = 0 \tag{5.158}$$

using again the trace properties for the Dirac matrices a third relation is obtained

$$a \left(p^\mu \zeta_5\right) = 0 \tag{5.159}$$

this equation is compatible with the equation (5.155) and (5.156) if only if $a = 0$.

Spin 1

Now we take the symmetrical part of the vector state $|\Phi\rangle_{\alpha_1\alpha_2}$, the equation (5.151) becomes

$$\left(p_\mu\gamma^\mu\right)_{\alpha\alpha_1} \left[b \left(\gamma^\nu C\right)_{\alpha_1\alpha_2} \zeta_\nu + b_1 \left(\Sigma^{\nu\lambda} C\right)_{\alpha_1\alpha_2} \zeta_{\nu\lambda}\right] = 0. \tag{5.160}$$

Multiplying on the right side by $\left(C^{-1}\gamma^\rho\right)_{\alpha_2\alpha}$ we get

$$p_\mu \left[\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\right)_{\alpha\alpha} \zeta_\nu + \left(\gamma^\mu\Sigma^{\nu\lambda}\gamma^\rho\right)_{\alpha\alpha} \zeta_{\nu\lambda}\right] = 0 \tag{5.161}$$

using the trace properties for the γ^μ-matrices it simplifies to give

$$b_1 \left(p^\lambda \zeta_{\lambda\rho}\right) = 0 \tag{5.162}$$

Multiplying (5.160) by $\left(C^{-1}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\tau}\right)_{\alpha_2\alpha}$ it simplifies to be

$$p_{\mu}\left[\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\tau}\right)_{\alpha\alpha}\zeta_{\nu}+\left(\gamma^{\mu}\Sigma^{\nu\lambda}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\gamma^{\tau}\right)_{\alpha\alpha}\zeta_{\nu\lambda}\right]=0 \tag{5.163}$$

tracing the equation above and considering the antisymmetric character of the tensor field $\zeta^{\rho\tau}$ we get the Bianchi relation

$$b_1\left(p^{\rho}\zeta^{\tau\sigma}+p^{\sigma}\zeta^{\rho\tau}+p^{\tau}\zeta^{\sigma\rho}\right)=0 \tag{5.164}$$

If we set $b_1 \neq 1$, one possible solution of the relation (5.164) can be obtained if we put

$$\zeta^{\mu\nu}=p^{\mu}\zeta^{\nu}-p^{\nu}\zeta^{\mu} \tag{5.165}$$

i.e. the strength tensor of the Maxwell theory and the equation (5.162) becomes the Maxwell equation for the electromagnetic field .

We can obtain more two equations: the first one is gotten multiplying (5.160) on the right side by $\left(C^{-1}\right)_{\alpha_2\alpha}$ we have

$$bp_{\mu}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right)_{\alpha\alpha}\zeta_{\nu}=0 \tag{5.166}$$

with the help of the trace properties for the Dirac matrices we obtain

$$b\left(p_{\mu}\zeta^{\mu}\right)=0, \tag{5.167}$$

to get the second one we multiply (5.160) by $\left(C^{-1}\gamma^{\rho}\gamma^{\sigma}\right)_{\alpha_2\alpha}$ and next we take the trace operation over the γ^{μ}-matrices to obtain

$$b\left(p^{\mu}\zeta^{\nu}-p^{\nu}\zeta^{\mu}\right)=0 \tag{5.168}$$

The equations (5.167) and (5.168) are compatible with the equations (5.162), (5.164) and (5.165) if and only if we set $b=0$.

Topological solutions

On the other hand we can get two additional solutions if we set $b \neq 0$ and $b_1=0$. Thus the first solution is getting when we solve the equation (5.167) choosing

$$\zeta^{\mu}=p_{\nu}\zeta^{\mu\nu} \tag{5.169}$$

where $\zeta^{\mu\nu}$ is an antisymmetrical tensor field satisfying the equation (5.168).

And the second solution is founded when set the vector field in the equation (5.167) being

$$\zeta^{\mu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} p_{\nu} \zeta_{\alpha\beta} \tag{5.170}$$

The equations (5.169) and (5.170) are topological field solutions for the spin 1 and spin 0 sectors [23], respectively. Such topological solutions were found in the massless DKP theory by Harish-Chandra [35] and in the context of usual Klein-Gordon and Maxwell theories studying their higher tensor representations by Deser and Witten [36] and Townsend [37].

5.5.4 Superspace Formulation

As a natural way we extend the previous analysis of the action and give the formulation in terms of superspace.

Firstly we consider the motion of the particle in the large superspace (big SUSY) $(X_{\mu}, \Theta_{\alpha})$¶ whose trajectory is parametrized by the proper supertime (τ, η_1, η_2) of dimension $(1/2)$, here η_1, η_2 are the grassmann real superpartners of the convencional time τ. In this way the coordinates of the particle are scalar superfields in the little superspace (little SUSY). For this case we have‖

$$\begin{aligned} X_{\mu}(\tau, \eta_1, \eta_2) &= x_{\mu}(\tau) + i\eta_i \psi_{\mu}^{i}(\tau) + i\eta_i \eta_j F_{\mu}^{ij}(\tau) & (5.171) \\ \Theta_{\alpha}(\tau, \eta_1, \eta_2) &= \theta_{\alpha}(\tau) + \eta_i \lambda_{\alpha}^{i}(\tau) + \eta_i \eta_j \mathcal{F}_{\alpha}^{ij}(\tau) & (5.172) \end{aligned}$$

where $i, j = 1, 2$; ψ_{μ}^{i} is the grassman superpartner of the common coordinate x_{μ}; λ_{α}^{i} is a commuting majorana spinor, superpartner of the grassmann variables θ_{α}. $F_{\mu}^{ij} = -F_{\mu}^{ji}$ and $\mathcal{F}_{\alpha}^{ij} = -\mathcal{F}_{\alpha}^{ji}$ are antisymmetric fields.

In order to construct an action which is invariant under general transformations in superspace we introduce the supereinbein $E_M^A(\tau, \eta_1, \eta_2)$, where M $[A]$ are a curved [tangent] indices and $D_A = E_A^M \partial_M$ is the supercovariant general derivatives, here E_A^M is the inverse of E_M^A. If we take a special gauge

$$E_M^{\alpha} = \Lambda \overline{E}_M^{\alpha}, \quad E_M^{a} = \Lambda^{1/2} \overline{E}_M^{a} \tag{5.173}$$

¶When the interaction is switched on, we must to include a complex grassmann spinor field $\overline{\Theta}_{\alpha}$. This enable us to consider theories with interacting charged particles.

‖We recall that this form is valid only for the case of two indices $i = 1, 2$. If we want to analyse theories with a bigger internal symmetry $O(N)$, we need to include a more terms.

where

$$\overline{E}_\mu^\alpha = 1, \quad \overline{E}_\mu^a = 0, \quad \overline{E}_m^\alpha = -i\eta, \quad \overline{E}_m^a = 1 \tag{5.174}$$

is the flat space supereinbein, then the superscalar field Λ an the derivative D_A takes the form

$$\begin{aligned} \Lambda(\tau, \eta_1, \eta_2) &= e(\tau) + i\eta_i\chi_i(\tau) + i\eta_i\eta_j f_{ij}(\tau), & (5.175)\\ \overline{D}_a &\equiv D_i = \frac{\partial}{\partial\eta^i} + i\eta_i\frac{\partial}{\partial\tau}, \quad \overline{D}_\alpha = \partial_\tau & (5.176)\end{aligned}$$

here $e(\tau)$ is the graviton field and $\chi_i(\tau)$ the gravitino field of the two-dimensional $n = 2$ supergravity; $f_{ij} = -f_{ji}$ is an antisymmetric matrix field. It is no difficult to prove that $\left(\overline{D}_a\right)^2 \equiv (D_i)^2 = i\partial_\tau$

In this way the extension to superspace of the action (5.101), is given by**

$$S = \frac{1}{4}\int d\tau d\eta_1 d\eta_2 \Lambda^{-1}\epsilon_{ij} D_i X_\mu D_j X^\mu \tag{5.177}$$

here ϵ_{ij} is the antisymmetric matrix: $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$, $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$. Using the property $\Lambda\Lambda^{-1} = 1$ for the supereinbein field we obtain

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}(\tau, \eta_1, \eta_2) &= e^{-1}(\tau) - ie^{-2}(\tau)\eta_i\chi_i(\tau) - ie^{-2}(\tau)\eta_i\eta_j f_{ij}(\tau) \\ &\quad + e^{-3}(\tau)\eta_i\eta_j\chi_i(\tau)\chi_j(\tau) & (5.178)\end{aligned}$$

After some manipulations and integrating over the grassmann variables we have

$$\begin{aligned} S &= \int d\tau \left(-\frac{1}{2}e^{-1}\dot{x}^2 + \frac{i}{2}e^{-1}\psi_i\dot{\psi}_i + \frac{i}{2}e^{-2}\chi_i\psi_i\dot{x} + \frac{i}{2}e^{-2}f_{ij}\psi_i\psi_j\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}e^{-3}\chi_i\psi_i\chi_j\psi_j + e^{-1}F^2 - ie^{-2}F_{ij}\chi_i\psi_j\right) & (5.179)\end{aligned}$$

redefining the fields

$$\chi = e^{1/2}\chi', \quad \psi = e^{1/2}\psi', \quad f = ef', \quad F = eF' \tag{5.180}$$

we obtain

$$\begin{aligned} S &= \int d\tau \left(-\frac{1}{2}e^{-1}\dot{x}^2 + \frac{i}{2}\psi_i\dot{\psi}_i + \frac{i}{2}e^{-1}\chi_i\psi_i\dot{x} + \frac{i}{2}f_{ij}\psi_i\psi_j\right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}e^{-1}\chi_i\psi_i\chi_j\psi_j + eF^2 - iF_{ij}\chi_i\psi_j\right) & (5.181)\end{aligned}$$

**The presence of the superscalar field Λ is to guarantee the local SUSY invariance.

we see that this action is identical to the proposed in (5.101) when we put $F = \chi\psi$, i.e. when the fermion coordinate and the gravitino field are coupled.

This shows that considering the correct inclusion of internal symmetries in the superspace formulation we obtain, in the special case, the same action proposed from the pseudoclassical point of view. The internal symmetry group $O(N)$ is connected to the number of grassmann variables η_i.

5.5.5 Conclusions

In this work we give an action for the massless DKP theory by using Grassmann variables and the consistence of the equations of motions are assured by means of the inclusion of boundary terms. We also verified the invariance under τ-reparametrizations, local SUSY and internal group $O(N)$ transformations, the generators of these transformations are also found. We carried out the constraint analysis of the theory and verified that after quantization a possible inconsistency can appear, nevertheless the further analysis allow us to solve it with the introduction of some parameters that play a role of regulators of the theory. By the way an important result in this context was obtained, i.e. an aditional topological solution for the spin 0 and 1 is derived from this model. As a natural continuation of the presented action we extended the studies to superspace formalism obtaining under some conditions the same initial pseudoclassical action.

For the further development of the theory we are working to accomplish the analysis through the most powerful method for a theory with constraints, i.e. via the BFV-BRST method, which can open the possibility of calculating the propagator of the resulting theory using the path integral representation. And, for further studies the inclusion of interactions (i.e., electromagnetic, Yang-Mills and gravitational fields) in the theory will be discussed.

5.5.6 Acknowledgements

RC (grant 01/12611-7) and MP thank FAPESP and CAPES for full support, respectively, BMP thanks CNPq and FAPESP (grant 02/00222-9) for partial support, JSV thanks FAPESP (grant 00/03812-6) and FAPEMIG (grant 00193/06) for partial and full support, respectively.

Referências Bibliográficas

[1] V. Bargman and E. Wigner, Proc. Am. Acad. Sci. **34**, 211 (1948).

[2] W. Rarita and J.S. Schwinger, Phys. Rev. **60**, 61 (1941).

[3] J.A. Schwinger, Phil. Mag. **44**, 1171 (1953).

[4] J.L. Martin, Proc. Roy. Soc. **A251**, 536 (1959).

[5] F.A. Berezin and M.S. Marinov, JETP Lett. **21**, 320 (1975); Annals of Phys. **104**, 336 (1977).

[6] R. Casalbuoni, Nuovo Cim. **A33**, 389 (1976); Nuovo Cim. **A33**, 115 (1976).

A. Barducci, R. Casalbuoni and L. Lusanna, Nuovo Cim. **A35**, 377 (1976).

[7] A. Barducci, R. Casalbuoni and L. Lusanna, Nucl. Phys. **B124**, 93 (1977); Nucl. Phys. **B124**, 521 (1977).

[8] L. Brink, S. Deser, B. Zumino, P. Di Vechia and P. Howe, Phys. Lett. **64B**, 435 (1976).

[9] L. Brink, P. Di Vechia and P. Howe, Nucl. Phys. **B118**, 76 (1977).

[10] V.D. Gershun and V.I. Tkach, Ukrainskii Fizicheskii Zhurnal **29**, 1620 (1984).

[11] V.D. Gershun and V.I. Tkach, Problemy Yadernoj Fiziki i Kosmicheskih Luchey **22**, 36 (1984). In Russian.

[12] Carlos A. Galvão and C. Teitelboim, J. Math. Phys. **21**, 1863 (1980).

[13] V. Gitman and I.V. Tyutin, Class. Quantum Grav. **7**, 2131 (1990); *Quantization of fields with Constraints* (Springer, Berlin, 1990).

[14] Stoian I. Zlatev, Phys. Rev. **D 62**, 105020 (2000).

[15] A.V. Marshakov and V. Ya. Fainberg, JETP Lett. **46**, 319 (1987).

[16] A.V. Marshakov, Nucl. Phys. **B312**, 178 (1986).

[17] A. Barducci, R. Casalbuoni, D. Dominici and L. Lusanna, Phys. Lett. **B100**, 126 (1981).

[18] A. Barducci, F. Bordi and R. Casalbuoni, Il Nuovo Cim. **B64**, 287 (1981).

[19] R.J. Duffin, Phys. Rev. **54**, 1114 (1938).

[20] N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. **A173**, 91 (1939).

[21] G. Petiau, Acad. Roy. de Belg., A. Sci. Mem. Collect **16** (1936).

[22] V. Ya. Fainberg and B. M. Pimentel, Theor. Math. Phys. **124**, 1234 (2000).

[23] V. Ya. Fainberg and B. M. Pimentel, Phys. Lett. **A271**, 16 (2000).

[24] V.Ya. Fainberg, B.M. Pimentel and J.S. Valverde, Proceedings of the International Meeting "Quantization Gauge Theories and Strings" dedicated to the memory of E.S. Fradkin., Moscow, (2000), Vol II, p. 79 (edited by A. Semikhatov, M. Vasilied and V. Zaikin, Scientific World 2001).

[25] R.A. Krajcik and M. M. Nieto, Am. J. Phys., **45**, 818 (1974).

[26] R.A. Krajcik and M. M. Nieto, Phys. Rev. **D10**, 4049 (1974); *ibid.* **11**, 1442 (1974); *ibid.* **11**, 1459 (1974); *ibid* **13**, 924 (1975); *ibid.* **14**, 418 (1976); *ibid.* **15**, 433 (1977); *ibid.* **15**, 445 (1977).

[27] Harish Chandra, Proc. Roy. Soc. Lond. **A186**, 502 (1946).

[28] R. Casana, V.Ya. Fainberg, J.T. Lunardi, B.M. Pimentel and R.G. Teixeira, Class. Quant. Grav. **20**, 2457 (2003).

[29] R. Casana, J.T. Lunardi, B.M. Pimentel and R.G. Teixeira, Int. J. Mod. Phys. **A17**, 4197 (2002).

[30] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel and R. G. Teixeira, Gen. Rel. Grav. **34**, 491 (2002).

R. Casana, J.T. Lunardi, B.M. Pimentel and R.G. Teixeira, Gen. Rel. Grav. **34**, 1941 (2002).

[31] S. Okubo, J. Math. Phys. **42**, 4554 (2001).

[32] E. Fishbach, J.D. Louck, M.M. Nieto, C.K. Scott, J. Math. Phys. **15**, 60 (1974).

[33] V. Dvoeglazov, math-ph/9808005; physics/9804010.

[34] I. L. Buchbinder, S. M. Kuzenko, *Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity: Or a Walk through Superspace*, Institute of Physics Publishing (1998).

[35] Harish-Chandra, Proc. Roy. Soc. Lond. **A186**, 502 (1946).

[36] S. Deser and E. Witten, Nucl.Phys. **B178**, 491 (1981).

[37] P.K. Townsend, CERN-TH-3067, Procceedings of 18th Winter School of Theoretical Physics: Gauge Field Theories (Ed. by W. Garczyński, 1986), pp. 649-669.

Partícula relativística em $D = 2 + 1$

Resumo

Propomos uma variante SUSY para a ação de uma partícula com *spin* e sem massa via inclusão de variáveis *twistor*. A ação é construída para ser invariante sob transformações de SUSY e reparametrização τ sempre que incluirmos um campo em interação. Além disso, foi feita análise de vínculos e obtidas equações de movimento. As relações de comutação, obtidas para o *espinor* comutativo λ_α, mostram-nos que o estado de partícula possui *spin* e estatística fracionários. Introduzimos um possível termo massivo para um modelo não interagente.

5.6 Relativistic particle in $D = 2 + 1$

J. S. Vaverde[(1)] e M. Pazetti[(1)]

[(1)] *Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista*
Rua Pamplona 145, CEP 01405-900, São Paulo, SP, Brazil

Abstract

We propose a SUSY variant of the action for a massless spinning particles via the inclusion of twistor variables. The action is constructed to be invariant under SUSY transformations and τ-reparametrizations even when an interaction field is including. The constraint analysis is achieved and the equations of motion are derived. The commutation relations obtained for the commuting spinor variables λ_α show that the particle states have fractional statistics and spin. At once we introduce a possible massive term for the non-interacting model

5.6.1 Introduction

The field theory in space-time $D = 2 + 1$ has some interesting features related with the nontrivial topology of the configuration space. For example, solitons of $D = 2 + 1$ theories can hold fractional charge, statistics and spin [1, 2, 3, 4], many of such systems have been observed in condensed matter experiments.

Alternatively, other phenomenological models implement the appearance of exotic statistics by the addition of a Chern-Simons term to the effective action for a statistical gauge field [5, 6]. For example, such interesting situation ocurred in the $O(3)$ $\sigma-$ model proposed by Balachandran *et al.* [7], where the Chern-Simon term is constructed from the $SU(2)$ connection form on $\sigma-$ model fiber bundle space with S^2 sphere as the base, where the quantization of this model leads to obtain solitons with fractional spin. In the Semenoff´s work [8, 9] solitons with exotic statistical properties are also obtained when the interaction of the scalar and abelian gauge field is considered. Other works involving particles with fractional spin can be found in [10], where a non-Grassmannian approach is formulated on the pseudoclassical basis for the massive as well as for the massless case.

The problem to the construction of a consistent field theory for quartions in dimensions $D = 2+1$ and $D = 3+1$ was considered by Volkov *et al.* in the works [11, 12]. The extension of the free theory to higher dimensional space-times must be performed with a special care because there is a theorem which states that in $D \geq 3+1$ the statistics must be either fermionic or bosonic ones. As we know this theorem is valid for the finite-dimensional representation of the Lorentz group. However in the works [11, 12] it is showed that the fractional spin-states are described by the infinite-dimensional representations of the Lorentz group and the existence of quartions in higher dimensions is also possible, in this sense we remark that studies for the $D = 3+1$ model were performed in [13] where some important results were pointed out and the algebra properties were discussed. It is worthwhile to notice that in $D = 3+1$ a pair of linear independent equations is obtained and it becomes inconsistent when the interaction is included. However as Volkov *et al.* [11, 12] pointed out there is the possibility to describe the dynamic of quartions by means of the twistor variables and the interactions can be studied in a consistent way.

For further development of the theory, it would be very useful to establish the fundamental connection between space-time and twistor description of particles and superparticles at the Lagrangian level. Twistor theory has been developed mainly by Penrose [14, 15] and the theory is in fact largely based on ideas of conformal symmetry, i.e., zero rest mass particles and conformally invariant fields. In this formalism, the basic variables to describe the dynamics of the massless spinning particles are a pair of spinor variables called twistor and the procedure of canonical quantization can be applied to these variables. In this sense the space of twistors can be considered as more basic and fundamental than space-time and in certain cases it allows a simplification of the constraint analysis and a larger transparency of the symmetry properties. Consequently, when the twistor techniques [16, 17] are implemented into the structure of supersymmetric theories, a new ingredient to study the different models is presented.

The main goal in this present work is to explore the consequences of the vacuum fluctuation of one of these models [18] just originated by the twistor variables. For this purpose we give a SUSY generalization of this action [19] and study the constraint structure of the model for the free case as well as when an interaction is included.

The paper is organized as follows: in section **2** we give a brief review about theories that consider particles with fractional spin and statistics (quartions). We discuss the connections between fractional statistics and fractional spin and see that the possibility of the existence of quartions no contradict the fundamental Pauli principle. In section **3** we start with the action for a free massless spinning particles in $D = 2 + 1$ that includes twistor variables. Next, considering only the vacuum fluctuations we construct an action that is invariant under SUSY transformations and τ - reparametrizations, in following we perform the constraint analysis for the free case as well as for an interacting "gauge"field and, finally a massive term to the model is introduced. In section **4** we give our final remarks and conclusions.

5.6.2 Particles with fractional spins

It was shown [11] that quantum field theories in $D = 2 + 1$ dimensions have a very interesting structure when the connection between statistical and spin properties is studied. As it was pointed out, the existence of objects (quartions) possessing non-trivial (exotic) spin no contradict the fundamental Pauli principle that establishes the existence of integer or half integer spin. The existence of quartions is concerning with the topological properties of the space-time and it is in complete agreement with the group-theoretical description of its dynamical properties.

The Poincare group (or the inhomogeneous Lorentz group $ISO(1, 2)$) is constructed by three translation generators P_m ($m = 0, 1, 2$) and three angular momenta generators M_m of the Lorentz group $SO(1, 2)$ that is isomorphic to $SL(2, \mathbf{R})$. It is well known that the $ISO(1, 2)$ generators satisfy the following commutation relations

$$[P_m, P_n] = 0, \quad [M^m, M^n] = i\epsilon^{mnl} M_l, \quad [M^m, P^n] = i\epsilon^{mnl} P_l \tag{5.182}$$

here ϵ^{mnl} is the total antisymmetric tensor and the space-time metric is defined by $\eta^{mn} = diag\,(+, -, -)$. There are three independent Casimir operators

$$\begin{aligned} C_1 &= P^n P_n = m^2 \\ C_2 &= M_n P^n \\ C_3 &= \frac{P_0}{|P_0|} \end{aligned} \tag{5.183}$$

where we see that the mass shell condition and the Pauli-Liubanski scalar are defined by the the two first relations while the third one is the energy sign.

A consistent relativistic field theory for particles with fractional spin and statistics is constructed on the base of the Heisenberg-Weyl group [20, 21] whose irreducible representations are given by the particle states with spin values $S_{1/4}$ and $S_{3/4}$. As it is known this group is generated by the coordinate q and momentum $p = i\hbar\partial/\partial q$ operators acting on vectors of the Hilbert space satisfying the usual commutation relations

$$[q,p] = i, \quad [q,q] = [p,p] = 0 \tag{5.184}$$

We recall that in the considered theory q parametrizes the quartion spin space. As customary the action of the rising a^+ and lowering a operator

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - ip), \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip) \tag{5.185}$$

onto the vacuum vector $|0\rangle$, generates the corresponding orthonormal basic vector of the representation space that has the following form

$$|n\rangle = (n!)^{-1/2}\left(a^+\right)^n |0\rangle, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{5.186}$$

Defining the Majorana spinor

$$L_\alpha = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \tag{5.187}$$

it is possible to construct the $SL(2, R)$ group generators by means of the Heisemberg-Weyl generators q, p in a Lorentz covariant manner.

With this definition the commutation relation (5.184) becomes

$$[L_\alpha, L_\beta] = -i\hbar\epsilon_{\alpha\beta} \tag{5.188}$$

where $\epsilon_{\alpha\beta}$ is the antisymmetric matrix $\epsilon_{12} = 1$. The last relation determines, in our case, the nature of the theory under consideration and implies in the possible existence of particles with exotic spin and statistics (quartions).

The $SL(2, R)$ generators acting on the representations $S_{1/4}, S_{3/4}$ are given by the anticommutators of spinors L_α components as follows

$$M_{\alpha\beta} = iM_n\left(\gamma^n\right)_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\left(L_\alpha L_\beta + L_\beta L_\alpha\right) = \frac{1}{2}\left\{L_\alpha, L_\beta\right\} \tag{5.189}$$

As it is well known, spinors have a richer structure than vectors, and is connected with the group properties of the $SU(2)$ which is the covering group of the rotation group $O(3)$. In this sense the existence of quartions can be considered as more fundamental than spinors and should have a certain relation with the elementary particle physics.

As it was given in [11, 12] the equation for quartions in Lorentz covariant form can be written as

$$\left(L^{\alpha} P_{\alpha\beta} - mL_{\beta}\right)\Phi = 0 \tag{5.190}$$

and it resembles the Dirac equation if we put $L_{\alpha}\Phi = \Psi$, thus in our case Φ has a continuous dependence on the spin parameter. It is important to remark that in these models there are problems concerned with the construction of the Lagrangian which generates the equations of motions (5.190). Another problem, related to the development of the theory based on the equation (5.190) is the difficulty to add interactions of quartions with the common fields as, for example, the electromagnetic interaction that can be implemented via the minimal coupling procedure. Therefore, other alternatives must be explored to obtain a satisfactory and consistent theory for quartions. We will try to reach our goal by means of SUSY resources.

5.6.3 Relativistic Particle Dynamics

Free case

We begin with the formulation of massless relativistic particle dynamics in $D = 2+1$ - dimensional space-time. The momentum vector $p_{\alpha\beta} = \gamma^{m}_{\alpha\beta} p_m$ is written as a bilinear combination of twistor components λ_{α} obtaining for the proposed action [22]

$$S = \int d\tau \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \dot{x}^{\alpha\beta} \tag{5.191}$$

which is the connection between the space-time formulation and the twistor one. Here λ_{α} is a commuting Majorana spinor, the index $\alpha, \beta = 1, 2$, $x^{\alpha\beta}(\tau) = \gamma^{m\alpha\beta} x_m(\tau)$ is the coordinate of the particle $(m = 0, 1, 2)$ and $\dot{x}^{\alpha\beta} = \frac{d}{d\tau}\, x^{\alpha\beta}(\tau)$.

The inclusion of twistor variables enables us to consider the vacuum fluctuations giving an additional term containing a $\dot{\lambda}^{\alpha}$ and that is considered minimally into the action [18]

$$S_0 = l \int d\tau \lambda_{\alpha} \dot{\lambda}^{\alpha} \tag{5.192}$$

where l is an arbitrary parameter of length and was introduced to assure the correctness of the action dimension.

We consider the motion of the particle in the large superspace (X_m, Θ_α) whose trajectory is parameterized by the proper supertime (τ, η) of dimension $(1/1)$ (η is the grassmannian real superpartner of the conventional time τ). In this way the coordinates of the particle trajectory constitute scalar superfields in the little superspace $(1/1)$:

$$X_m(\tau,\eta) = x_m(\tau) + i\eta\psi_m(\tau) \tag{5.193}$$

$$\Theta_\alpha(\tau,\eta) = \theta_\alpha(\tau) + \eta\lambda_\alpha(\tau) \tag{5.194}$$

where the grassmannian variable ψ_m is the superpartner of the bosonic coordinate x_m and the commuting Majorana spinor λ_α is the superpartner of the grassmannian variable θ_α.

In order to construct an action which is invariant under general transformations in superspace we introduce the supereinbein $E_M^A(\tau,\eta)$, where M $[A]$ are curved [tangent] indices and $D_A = E_A^M \partial_M$ is the supercovariant general derivative, E_A^M is the inverse of E_M^A. In the special gauge [25]

$$E_M^\alpha = \Lambda \overline{E}_M^\alpha, \quad E_M^a = \Lambda^{1/2}\overline{E}_M^a \tag{5.195}$$

where

$$\overline{E}_\mu^\alpha = 1, \quad \overline{E}_\mu^a = 0, \quad \overline{E}_m^\alpha = -i\eta, \quad \overline{E}_m^a = 1 \tag{5.196}$$

is the flat space supereinbein. In this case, the superscalar field Λ and the derivative D_A can be written as

$$\Lambda = e + i\eta\chi, \quad \overline{D}_a = \partial_\eta + i\eta\partial_\tau, \quad \overline{D}_\alpha = \partial_\tau \tag{5.197}$$

where $e(\tau)$ is the graviton field and $\chi(\tau)$ is the gravitino field of the 1 - dimensional $n = 1$ supergravity. There is no difficult to prove that

$$\left(\overline{D}_a\right)^2 \equiv (D_\eta)^2 = i\partial_\tau$$

The extension to superspace of the actions (5.191) and (5.192) is given by[††]

$$S = il \int d\tau d\eta \Lambda^{-1} D_\eta X^{\alpha\beta} D_\eta \Theta_\alpha D_\eta \Theta_\beta \tag{5.198}$$

[††]As we will see later the presence of the superscalar field Λ guarantees the local SUSY invariance.

and

$$S_0 = \frac{il}{2}\int d\tau d\eta \Lambda^{-1} D_\eta \Theta_\alpha \dot{\Theta}^\alpha, \tag{5.199}$$

respectively. Where we introduce the length constant l to obtain the correct dimension of the superfield components, however, the final results will be l-independent.

From the condition $\Lambda\Lambda^{-1} = 1$ we obtain

$$\Lambda^{-1} = e^{-1} - ie^{-2}\eta\chi. \tag{5.200}$$

Our main goal is to study the dynamics of the action (5.199) arising when we consider the vacuum fluctuations. We also remark that S_0 appears due to the twistor variables introduced in the action (5.191).

After simple manipulations we obtain for the action (5.199) in the second order formalism

$$S_0 = l\int d\tau \left[\frac{1}{2}e^{-1}\left(i\dot{\theta}_\alpha\dot{\theta}^\alpha + \lambda_\alpha\dot{\lambda}^\alpha\right) - \frac{i}{2}e^{-2}\chi\lambda_\alpha\dot{\theta}^\alpha\right]. \tag{5.201}$$

Immediately, we do the following redefinition of the fields

$$\lambda_\alpha = e^{1/2}\widehat{\lambda}_\alpha, \quad \chi = e^{1/2}\widehat{\chi} \tag{5.202}$$

that allows to rewrite the action S_0 as being

$$S_0 = l\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left[\frac{i}{2}e^{-1}\left(\dot{\theta}_\alpha - \frac{1}{2}\widehat{\chi}\widehat{\lambda}_\alpha\right)\left(\dot{\theta}^\alpha - \frac{1}{2}\widehat{\chi}\widehat{\lambda}^\alpha\right) + \frac{1}{2}\widehat{\lambda}_\alpha\dot{\widehat{\lambda}}^\alpha\right] + \frac{l}{2}\widehat{\lambda}_\alpha(\tau_2)\widehat{\lambda}^\alpha(\tau_1) \tag{5.203}$$

note that the "small"supersymmetrization of the action (5.192) generates the kinetic term for the dynamical variable θ_α. The boundary term in (5.203) was introduced to get a set of consistent equations of motion [12] which are given by

$$\dot{\widehat{\lambda}}_\alpha = \frac{ie^{-1}}{2}\widehat{\chi}\left(\dot{\theta}_\alpha - \frac{1}{2}\widehat{\chi}\widehat{\lambda}_\alpha\right), \quad \widehat{\lambda}^\alpha\pi_\alpha = 0, \quad \pi_\alpha\pi^\alpha = 0, \quad \dot{\pi}_\alpha = 0. \tag{5.204}$$

We follow the standard Dirac procedure to study the constrained system generated by the action (5.203). The canonical momentum obtained from (5.203) are

$$\pi_\alpha = ie^{-1}\left(\dot{\theta}_\alpha - \frac{1}{2}\widehat{\chi}\widehat{\lambda}_\alpha\right) \tag{5.205}$$

$$\varkappa_\alpha = \frac{1}{2}\widehat{\lambda}_\alpha, \quad \pi_\chi = 0, \quad \pi_e = 0. \tag{5.206}$$

The set of primary constraints is

$$\Omega_\alpha = \varkappa_\alpha - \frac{1}{2}\widehat{\lambda}_\alpha \approx 0, \quad \Omega_\chi = \pi_\chi \approx 0, \quad \Omega_e = \pi_e \approx 0 \tag{5.207}$$

The primary hamiltonian associated to the action (5.203) and that considers the primary constraints is given by

$$\mathcal{H}_P = -\frac{i}{2}e\pi_\alpha\pi^\alpha - \frac{1}{2}\widehat{\chi}\widehat{\lambda}^\alpha\pi_\alpha + \Gamma^a\Omega_a \tag{5.208}$$

where $\Gamma^a \equiv \{\Gamma^\alpha, \Gamma^\chi, \Gamma^e\}$ are the lagrange multipliers. The stability condition applied on the primary constraints gives a set of secondary constraints

$$\Omega_\chi^{(2)} = \frac{1}{2}\widehat{\lambda}^\alpha\pi_\alpha \approx 0, \quad \Omega_e^{(2)} = \frac{i}{2}\pi_\alpha\pi^\alpha \approx 0 \tag{5.209}$$

which yield a set of first class constraints. With the help of the second class constraint $\Omega_\alpha = \varkappa_\alpha - \frac{1}{2}\widehat{\lambda}_\alpha \approx 0$ we can construct the Dirac Bracket (DB) for any two variables

$$\{F, G\}_{DB} = \{F, G\}_{PB} - \{F, \Omega_\alpha\}_{PB} C^{-1}_{\alpha\beta} \{\Omega_\beta, G\}_{PB} \tag{5.210}$$

where $C_{\alpha\beta}$ is the matrix formed by the Poisson Bracket (PB) of the second class constraints. Thus we derive the DB for the canonical variables

$$\begin{aligned} \left\{\theta^\alpha, \theta^\beta\right\}_{DB} &= \{\pi_\alpha, \pi_\beta\}_{DB} = 0 && (5.211) \\ \{\theta^\alpha, \pi_\beta\}_{DB} &= -\delta^\alpha_\beta, \quad \left\{\widehat{\lambda}_\alpha, \widehat{\lambda}_\beta\right\}_{DB} = \epsilon_{\alpha\beta} && (5.212) \end{aligned}$$

There are two types of gauge (super) transformations that leave the action (5.203) invariant: The invariance under local SUSY transformations

$$\begin{aligned} \delta\theta_\alpha &= \alpha(\tau)\widehat{\lambda}_\alpha, \quad \delta\widehat{\lambda}_\alpha = i\alpha(\tau)e^{-1}\left(\dot{\theta}_\alpha - \frac{1}{2}\widehat{\chi}\widehat{\lambda}_\alpha\right) \\ \delta e &= i\alpha(\tau)\widehat{\chi}, \quad \delta\widehat{\chi} = 2\dot{\alpha}(\tau) \end{aligned} \tag{5.213}$$

and the τ-reparametrizations

$$\begin{aligned} \delta\theta_\alpha &= a(\tau)\dot{\theta}_\alpha, \quad \delta\widehat{\lambda}_\alpha = a(\tau)\dot{\widehat{\lambda}}_\alpha \\ \delta e &= (ae)^\cdot, \quad \delta\widehat{\chi} = (a\widehat{\chi})^\cdot \end{aligned} \tag{5.214}$$

The invariance under τ-reparametrizations is required by the fact that we can choose any parameter without altering the physics of the system.

It is interesting to commute two SUSY transformations, then, using (5.213) we obtain

$$\begin{aligned} [\delta_\alpha, \delta_\beta]\,\theta_\alpha &= f\dot{\theta}_\alpha + \overline{\delta}_g \theta_\alpha, \quad [\delta_\alpha, \delta_\beta]\,\widehat{\lambda}_\alpha = f\dot{\widehat{\lambda}}_\alpha + \overline{\delta}_g \widehat{\lambda}_\alpha \\ [\delta_\alpha, \delta_\beta]\,e &= (fe)^{\cdot} + \overline{\delta}_g e, \quad [\delta_\alpha, \delta_\beta]\,\widehat{\chi} = (f\widehat{\chi})^{\cdot} + \overline{\delta}_g \widehat{\chi} \end{aligned} \tag{5.215}$$

where we have introduced a new reparametrization (f) and SUSY (g) transformation parameters

$$f\,(\tau) = 2i\beta\alpha e^{-1}, \quad g\,(\tau) = -\frac{1}{2} f\widehat{\chi} \tag{5.216}$$

Thus we see that the commutation of two SUSY transformations yields a reparametrization (with parameter f) plus an additional SUSY transformation (with parameter g). We also remark that the new transformation parameters are field dependent.

The generator G of the transformations (5.213) and (5.214) can be found by means of [23, 24]

$$\epsilon G = p_a \delta a^a - \varphi, \quad \delta L = \frac{d\varphi}{d\tau} \tag{5.217}$$

where ϵ^a are the transformation parameters and, φ is the generating function. The generators must satisfy the relation

$$\delta u = \{u, \epsilon G\}_{DB} \tag{5.218}$$

being u any of the coordinate q^a.

In this way, we get for the the local SUSY transformations

$$\begin{aligned} G &= -\widehat{\lambda}^\alpha \widehat{\pi}_\alpha + i\widehat{\chi}\pi_e \\ \{\theta^\alpha, \alpha G\}_{DB} &= \alpha\widehat{\lambda}^\alpha, \quad \left\{\widehat{\lambda}^\alpha, \alpha G\right\}_{DB} = i\alpha\left(\dot{\theta}^\alpha - \frac{1}{2}\widehat{\chi}\widehat{\lambda}^\alpha\right) \\ \{e, \alpha G\}_{DB} &= i\alpha\widehat{\chi} \end{aligned} \tag{5.219}$$

and the following τ-reparametrizations

$$\begin{aligned} G &= -\frac{1}{2} e\pi_\alpha \pi^\alpha - \frac{1}{2}\widehat{\chi}\widehat{\lambda}^\alpha \pi_\alpha \\ \{\theta^\alpha, aG\}_{DB} &= \alpha\dot{\theta}^\alpha, \quad \left\{\widehat{\lambda}^\alpha, aG\right\}_{DB} = a\dot{\widehat{\lambda}}^\alpha \end{aligned} \tag{5.220}$$

the last result shows that the canonical hamiltonian is the generator of the τ-reparametrizations.

Quantization

The quantization of the model is performed using the correspondence principle where the Dirac brackets of the dynamical variables transform in commutator or anticommutator $\{\,\widehat{}\,\} \to \frac{\hbar}{i}\{\quad\}_{DB}$, i.e.

$$\left\{\widehat{\theta}^{\alpha}, \widehat{\theta}^{\beta}\right\} = \left\{\widehat{\pi}_{\alpha}, \widehat{\pi}_{\beta}\right\} = 0 \tag{5.221}$$

$$\left\{\widehat{\theta}^{\alpha}, \widehat{\pi}_{\beta}\right\} = ih\delta^{\alpha}_{\beta}, \quad \left[\widehat{\lambda}_{\alpha}, \widehat{\lambda}_{\beta}\right] = -ih\epsilon_{\alpha\beta}. \tag{5.222}$$

The first class constraints are applied on the quartion vector states $|\Phi\rangle$

$$\widehat{\lambda}_{\alpha}\widehat{\pi}^{\alpha}|\Phi\rangle = 0 \tag{5.223}$$

$$\widehat{\pi}_{\alpha}\widehat{\pi}^{\alpha}|\Phi\rangle = 0. \tag{5.224}$$

After a simple manipulation we can see that $\left(\widehat{\lambda}_{\alpha}\widehat{\pi}^{\alpha}\right)^2 \approx \widehat{\pi}_{\alpha}\widehat{\pi}^{\alpha}$. In a certain sense this leads to interpret the (5.223) as the Dirac equation and the (5.224) as the Klein-Gordon equation. However it is necessary to point out that in this model we do not have necessarily particles with spin 1/2 or 0.

Immediately, we select a particular realization for the operators satisfying the commutation relations (5.221) and (5.222)

$$\mathcal{D}\left(\widehat{\theta}_{\alpha}\right) = \theta_{\alpha}, \quad ,\mathcal{D}\left(\widehat{\lambda}_{\alpha}\right) = L_{\alpha} \tag{5.225}$$

$$\mathcal{D}\left(\widehat{\pi}_{\alpha}\right) = i\hbar\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} \equiv i\hbar\partial_{\alpha} \tag{5.226}$$

where L_{α} is the operator given in (5.187) just the realization for the operators that describes particles with exotic spin (quartions). This result enables us to consider the presence of quartions inside the vector state $|\Phi\rangle$ and, a possible supermultiplet formed by particles with spin $s = 1/4, 3/4$. We emphasize that it does not contradict the SUSY principles since the difference between the minimal weight is equal to 1/2 just as it happened in any SUSY transformation.

Interaction

Now we will analyze our system when a "gauge" field is added. To construct the action that includes the interaction of the vacuum fluctuations with a certain gauge field must be considered their functional nature. Then the action takes the form [11]

$$S_1 = ig \int d\tau d\eta D_\eta \Theta_\alpha \mathbf{A}^\alpha (\Theta) \tag{5.227}$$

where g is the coupling constant for interaction and $\mathbf{A}^\alpha (\Theta)$ is a "functional" super-gauge field given by

$$\mathbf{A}^\alpha (\Theta) \equiv \mathbf{A}^\alpha (\theta, \eta; \lambda) = A^\alpha (\theta) + \eta B^\alpha (\theta; \lambda) \tag{5.228}$$

with A^α being the grassmannian superpartner of the bosonic field B^α. On the other hand, considering (5.194) we obtain

$$\mathbf{A}^\alpha (\Theta) \equiv \mathbf{A}^\alpha (\theta + \eta\lambda) = A^\alpha (\theta) + \eta\lambda_\beta \frac{F^{\beta\alpha} (\theta)}{2} \tag{5.229}$$

the factor $\frac{1}{2}$ in the last relation is inserted for convenience. From (5.228) and (5.229), we conclude that

$$B^\alpha (\theta; \lambda) = \frac{1}{2} \lambda_\beta F^{\beta\alpha} (\theta) \tag{5.230}$$

using the equations (5.194), (5.197) and (5.230) we can write the action (5.227) as being

$$S_1 = ig \int d\tau \left(e\widehat{\lambda}_\alpha \widehat{B}^\alpha + \dot{\theta}_\alpha A^\alpha \right) = ig \int d\tau \left(\frac{1}{2} e\widehat{\lambda}_\alpha \widehat{\lambda}_\beta F^{\beta\alpha} + \dot{\theta}_\alpha A^\alpha \right) \tag{5.231}$$

where we have redefined the fields as in (5.202). Due the commutation relation for the spinor $\widehat{\lambda}_\alpha$ we infer that only the symmetrical part of the field $F^{\beta\alpha}$ contributes to this action.

The action (5.231) is invariant under local SUSY transformations (5.213) with

$$\delta A^\alpha = i\alpha (\tau) \widehat{B}^\alpha = \frac{i}{2} \alpha (\tau) \widehat{\lambda}_\beta F^{\beta\alpha} \tag{5.232}$$

$$\delta \widehat{B}^\alpha = i\alpha (\tau) e^{-1} \left[\dot{A}^\alpha - \frac{i}{2} \widehat{\chi} \widehat{B}^\alpha \right] \tag{5.233}$$

this invariance provides an unique value for the field $F^{\alpha\beta}$ which results in

$$F^{\alpha\beta} = i \left(\partial^\beta A^\alpha + \partial^\alpha A^\beta \right) \tag{5.234}$$

it is no difficult to show that

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \tag{5.235}$$

On account of the connection of the $SL(2,R)$ and $O(3)$ groups where the σ^m matrices play the role of Clebsh-Gordon coefficients, we infer the following relation between the quantities $F_{\alpha\beta}$ and F_{mn}

$$F^{mn} = (\sigma^{mn})_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad \partial_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 0 \tag{5.236}$$

i.e. $F^{\alpha\beta}$ is the spinor form of the "electromagnetic field". We remember that for this "spin tensor" field in $D = 2+1$ dimensions there are only 3 linearly independent components.

The invariance under τ-reparametrizations (5.214) are completed with

$$\delta A^{\alpha} = a\dot{A}^{\alpha} \tag{5.237}$$

$$\delta \widehat{B}^{\alpha} = a\dot{\widehat{B}}^{\alpha} \tag{5.238}$$

Joining the free action (5.203) with the interaction action (5.231) we have

$$\begin{aligned} S &= \int d\tau \left[\frac{i}{2} e^{-1} \left(\dot{\theta}_{\alpha} - \frac{1}{2} \widehat{\chi} \widehat{\lambda}_{\alpha} \right) \left(\dot{\theta}^{\alpha} - \frac{1}{2} \widehat{\chi} \widehat{\lambda}^{\alpha} \right) + \frac{1}{2} \widehat{\lambda}_{\alpha} \dot{\widehat{\lambda}}^{\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2} eg \widehat{\lambda}_{\alpha} \widehat{\lambda}_{\beta} F^{\beta\alpha} + ig\dot{\theta}_{\alpha} A^{\alpha} \right]. \end{aligned} \tag{5.239}$$

From which we obtain the following canonical momentum conjugate

$$\begin{aligned} \pi_{\alpha} &= ie^{-1} \left(\dot{\theta}_{\alpha} - \frac{1}{2} \widehat{\chi} \widehat{\lambda}_{\alpha} \right) + iA_{\alpha} = \mathcal{P}_{\alpha} + igA_{\alpha} \\ \varkappa_{\alpha} &= \frac{1}{2} \widehat{\lambda}_{\alpha}, \quad \pi_{\chi} = 0, \quad \pi_e = 0, \quad \pi_{\alpha}^{A} = 0, \quad \pi_{\alpha}^{B} = 0 \end{aligned} \tag{5.240}$$

and the primary constraints

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha} &= \varkappa_{\alpha} - \frac{1}{2} \widehat{\lambda}_{\alpha} \approx 0, \quad \Omega_{\chi} = \pi_{\chi} \approx 0, \quad \Omega_e = \pi_e \approx 0 \\ \Omega_{\alpha}^{A} &= \pi_{\alpha}^{A} \approx 0, \quad \Omega_{\alpha}^{B} = \pi_{\alpha}^{B} \approx 0 \end{aligned} \tag{5.241}$$

The extended hamiltonian that considers the primary constraints (5.241) is

$$\mathcal{H}_P = -\frac{i}{2} e \mathcal{P}_{\alpha} \mathcal{P}^{\alpha} - \frac{i}{2} eg \widehat{\lambda}_{\alpha} \widehat{\lambda}_{\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \widehat{\chi} \widehat{\lambda}_{\alpha} \mathcal{P}^{\alpha} + \Gamma^{a} \Omega_{a} \tag{5.242}$$

where $\Gamma^a \equiv \{\Gamma^{\alpha}, \Gamma^{\chi}, \Gamma^{e}, \Gamma_A^{\alpha}, \Gamma_B^{\alpha}\}$ are the new lagrange multipliers. The conservation of primary constraints in time leads to

$$T_2 \equiv \frac{1}{2} \widehat{\lambda}_{\alpha} \mathcal{P}^{\alpha} \approx 0, \quad T_1 \equiv \frac{i}{2} \left(\mathcal{P}_{\alpha} \mathcal{P}^{\alpha} + g \widehat{\lambda}_{\alpha} \widehat{\lambda}_{\beta} F^{\alpha\beta} \right) \approx 0 \tag{5.243}$$

which is a set of first class constraints satisfying the algebra

$$\{T_1, T_2\}_{DB} = 0, \quad \{T_1, T_1\}_{DB} = 0, \quad \{T_2, T_2\}_{DB} = \frac{i}{2}T_1. \tag{5.244}$$

In the same manner as in (5.210) we define the DB, that results in

$$\begin{aligned} \left\{\theta^\alpha, \theta^\beta\right\}_{DB} &= 0, \quad \left\{\theta^\alpha, \mathcal{P}_\beta\right\}_{DB} = -\delta^\alpha_\beta \\ \left\{\mathcal{P}_\alpha, \mathcal{P}_\beta\right\}_{DB} &= -gF_{\alpha\beta}, \quad \left\{\widehat{\lambda}_\alpha, \widehat{\lambda}_\beta\right\}_{DB} = \epsilon_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{5.245}$$

Upon quantization the canonical variables become operators and the DB follows the commutator or anticommutator rules

$$\begin{aligned} \left\{\widehat{\theta}^\alpha, \widehat{\theta}^\beta\right\} &= 0, \quad \left\{\widehat{\theta}^\alpha, \widehat{\mathcal{P}}_\beta\right\} = i\hbar\delta^\alpha_\beta \\ \left\{\widehat{\mathcal{P}}_\alpha, \widehat{\mathcal{P}}_\beta\right\} &= i\hbar gF_{\alpha\beta}, \quad \left[\widehat{\lambda}_\alpha, \widehat{\lambda}_\beta\right] = -i\hbar\epsilon_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{5.246}$$

The first class constraints are applied on the vector state $|\Phi\rangle$

$$\widehat{\lambda}_\alpha \mathcal{P}^\alpha |\Phi\rangle = 0 \tag{5.247}$$

$$\left(\mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}^\alpha + g\widehat{\lambda}_\alpha\widehat{\lambda}_\beta F^{\alpha\beta}\right)|\Phi\rangle = 0 \tag{5.248}$$

We note that the first equation (5.247) obeys the minimal coupling principle when a gauge field is added. On the other hand (5.248) is the Klein-Gordon-Fock equation when the interaction is considered.

The possible realization for the resulting operators that take into account the commutation relations (5.246) is similar to the free case (5.225) but the equation (5.226) suffers a compatible modification with the minimal coupling principle,

$$\mathcal{D}\left(\widehat{\mathcal{P}}_\alpha\right) = i\hbar\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + iA_\alpha \equiv i\hbar\partial_\alpha + igA_\alpha. \tag{5.249}$$

As the representations (5.225) remain the same, the possibility to obtain quartions in our analysis is maintained.

5.6.4 The massive Term

We consider the possibility of including a massive term to the lagrangian (5.201). The SUSY extension for this term is non trivial and requires concepts and methods of spontaneous SUSY breaking. Nevertheless, we give a possible component form of the model based on ideas of the pseudoclassical formalism, thus, a consistent action including a massive term is given by

$$S_m = \frac{i}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(em^2 + i\theta_5\dot{\theta}_5 + im\widehat{\chi}\theta_5\right) + \frac{i}{2}\theta_5\left(\tau_2\right)\theta_5\left(\tau_1\right) \tag{5.250}$$

where θ_5 is a grassmannian variable and the boundary term is added for the consistence of the resulting equation of motions. The action (5.250) preserves the invariance under local SUSY transformations (5.213) and τ-reparametrizations (5.214) when $\delta\theta_5 = m\alpha$ and $\delta\theta_5 = a\dot{\theta}_5$ are included, respectively. Thus the new hamiltonian for the massive free case results in

$$\mathcal{H} = -\frac{ie}{2}\left(\pi_\alpha\pi^\alpha + m^2\right) - \frac{1}{2}\widehat{\chi}\left(\widehat{\lambda}^\alpha\pi_\alpha - m\lambda_5\right) \tag{5.251}$$

The constraint analysis of the new system provides the following set of first class constraints

$$\pi_\alpha\pi^\alpha + m^2 \approx 0, \quad \widehat{\lambda}^\alpha\pi_\alpha - m\theta_5 \approx 0 \tag{5.252}$$

and second class constraints

$$\varkappa_\alpha - \frac{1}{2}\widehat{\lambda}_\alpha \approx 0, \quad \varkappa_5 - \frac{1}{2}\theta_5 \approx 0. \tag{5.253}$$

5.6.5 Conclusions

In this work we have constructed in $D = 2+1$ dimensional space-time a supersymmetric version of the action that describes the vacuum fluctuations of the massless relativistic particles, these contribution appears when twistor variables are introduced in the theory [18]. The construction is performed leaving the action invariant under local SUSY transformations and τ- reparametrizations. The general Dirac procedure to the analysis of constrained systems was performed obtaining after quantization a very interesting result, i.e., the possibility to appear particles states with fractional spin. Our result is preserved even when a certain "gauge" superfield A_α is switched on. We argued that the proposed action via inclusion of twistor variables also give a consistent method to study interactions of quartions and "gauge" fields. The multiplet formed by this particles is in complete accordance with the SUSY principles because the difference between the minimal weights (spins) in the multiplet is equal to 1/2.

On the other hand we have included a massive term to the studied action (5.192). The SUSY extension for this term is non trivial and requires concepts and methods of spontaneous SUSY breaking. Nevertheless, we give a possible component form of the model based on ideas of pseudoclassical formalism by the introduction of the grassmannian variable θ_5. The contribution must be added to the action preserving its invariance under local SUSY transformations and τ-reparametrizations. The study of the meaning of a massive theory for quartions and exploration of the resulting multiplet will also be explored.

Further we will study the extension of the model to $D = 3+1$ dimension and will also explore the possibility of obtaining particles with fractional statistics and spin. Here we point out that this requires the use of the covering group $SL\,(2, C)$ and must be considered two types of spinors $(\alpha, \dot{\alpha})$. This implies that the contribution to the vacuum fluctuation will have the additional term $\lambda_{\dot{\alpha}}\dot{\lambda}^{\dot{\alpha}}$ and the existence of the antiparticles could arise in this model.

5.6.6 Acknowledgements

We would like to thank Prof. B.M. Pimentel and R.A. Casana for the comments and suggestions given during the writing of this work. MP thanks CAPES for full support.

Referências Bibliográficas

[1] R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. **D13**, 3398 (1976).

[2] A.J. Niemi and G.W. Semenoff, Phys. Rept. **135**, 99 (1986).

[3] E.C. Marino, Proceedings of the IX Jorge Andre Swieca Summer School, 196-222 (1997).

[4] D.P. Arovas, J.R. Schrieffer and F. Wilczek; Nucl. Phys. **B251**, 117 (1985); Phys. Rev. Lett. **53**, 722 (1984). F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **49**, 957 (1982); **48**, 1144 (1982).

[5] T.H. Hansson, S. Kivelson and S.C. Zhang, Phys Rev. Lett. **62**, 82 (1988).

[6] F. Wilczek and A. Zee; Phys. Rev. Lett. **51**, 2250 (1983).

[7] A.P. Balachandran, M.J. Bowick, K.S. Gupta and A.M. Srivastava, Mod. Phys. Lett. **A3**, 1725 (1988).

[8] G.W. Semenoff, Phys. Rev. Lett. **61**, 517 (1988).

[9] G.V. Semenoff and P. Sodano; Nuclear Phys. **B328**, 753 (1989).

[10] M.S. Plyushchay; Nucl. Phys. **B714**, 269 (2005); Phys. Lett. **B320**, 91 (1994); Phys. Lett. **B236**, 291 (1990); Phys. Lett. **B243**, 383 (1990), Phys. Lett. **B248**, 299 (1990), Phys. Lett. **B280**, 232 (1992), Phys. Lett. **B248**, 107 (1990), Phys. Lett. **B262**, 71 (1991); Int. J. Mod. Phys. **A7**, 7045 (1992) .

[11] D.V. Volkov, D.P. Sorokin and V.I. Tkach, "Proceedings Problems of Modern Quantum Field Theory", Springer-Verlag, p. 132 (1990).

[12] D.V. Volkov, JETP Letters **49**, 541 (1989).

[13] S. M. Klishevich, M.S. Plyushchay and Rauch de Traubenberg; Nucl. Phys. **B616**, 419 (2001).

[14] R. Penrose, Int. J. Theor. Phys. **1**, 61 (1968); J. Math. Phys. **10**, 38 (1969); J. Math. Phys. **8**, 345 (1967).

[15] R. Penrose and M.A.H. MacCallum, Phys. Rept. **6**, 241 (1972).

[16] D.P. Sorokin, V.I. Tkach and D.V. Volkov, Mod. Phys. Lett. **A4**, 901 (1989).

[17] I.A. Bandos, A.Yu. Nurmagambetov, D.P. Sorokin and D.V. Volkov, JETP Letters **60**, 621 (1994).

[18] D.V. Volkov, V.A. Soroka, D.P. Sorokin and V.I. Tkach, JETP, **52**, 526 (1990); Int. J. Mod. Phys. **A7**, 5977 (1992) .

[19] D.P. Sorokin and D.V. Volkov; Int. J. Mod. Phys. **A9**, 1555, 1994.

[20] S.S. Sannikov, Ucranian Phys. Journ. **10**, 684 (1965); Teor. Matem. Fizika, **34**, 34 (1978).

[21] A.M. Perelomov, Generalized Coherent sates and their Applications, Springer, (1986).

[22] T. Shirafuji, Prog. Theor. Phys. **70**, 18 (1983).

[23] R. Casalbuoni, Nuovo Cim. **A33**, 389 (1976); Nuovo Cim. **A33**, 115 (1976); Phys. Letters, **62B**, 49 (1976).

[24] A. Barducci, R. Casalbuoni and L. Lusanna; Nuovo Cim. **A35**, 377 (1976).

[25] L. Brink, S. Deser, B. Zumino, P. Di Vechia and P. Howe, Phys. Lett. **64B**, 435 (1976).

[26] C.A. Galvão and C. Teitelboim, *Classical Supersymmetrry particles*, J. Math. Phys. **21**, 7 1980.

[27] L. Brink, P. Di Vechia and P. Howe, Nucl. Phys. **B118**, 76 (1977).

Capítulo 6

Comentários finais

Com o intuito de destacar e introduzir outros pontos importantes sobre nosso trabalho, faremos, a seguir, alguns comentários finais.

Um dos problemas em construir um modelo que descreva os fenômenos físicos - equações de movimento- é a sua própria construção, pois como saber qual é a Lagrangiana correta? Do ponto de vista da pseudomecânica, isso se torna mais fácil, como vimos nos exemplos de partículas não relativísticas; entretanto, ela também possui seus próprios problemas, como vimos no caso da partícula relativística. Percebemos, também, que podemos pensar a teoria de supercampos como advinda de uma pseudomecânica, pois seus (super) campos são funções pares e ímpares. Disso, portanto, segue que a pseudomecânica é uma candidata natural como um limite clássico para sistemas fermiônicos e bosônicos: ela é por si só e através de supercampos.

Ao propormos uma ação para a teoria de DKP sem massa usando a pseudomecânica e a teoria de supercampos, verificamos, depois de encontrarmos os geradores destas transformações, a sua invariância sob reparametrização τ, transformação de SUSY local e do grupo interno $O(N)$. Ao fazermos a análise de vínculos, notamos que, depois da quantização, uma possível inconsistência aparece; entretanto, conseguimos resolvê-la introduzindo alguns parâmetros que funcionam como reguladores da teoria [86].

Por fim, construímos, no espaço-tempo de dimensão $D = 2+1$, uma versão supersimétrica da ação que descreve as flutuações do vácuo da partícula relativística sem massa. Esta contribuição aparece quando variáveis de *twistors* são introduzidas na teoria [35]. Essa construção é feita deixando a ação invariante sob transformações de SUSY local e reparametrização τ. O método de Dirac para análise de sistemas com vínculos foi utilizado, obtendo, após a quantização, um resultado relativamente relevante: a possibilidade de surgir estados de partículas com *spins* fracionários. Nosso resultado é preservado sempre que um certo supercampo de *gauge* A_α é adicionado. Argumentamos que a ação proposta, via inclusão de variáveis *twistors,* fornece, também, um método consistente para o estudo de interações entre *quartions* e campos de *gauge*. O multipleto, formado por essas partículas, está em completo acordo com os princípios da SUSY, pois, a diferença entre o peso mínimo (*spins*) no multipleto é igual a $1/2$. Em adição, incluímos um termo massivo à ação estudada (5.192). A extensão à SUSY com esse termo não é trivial, pois, requer conceitos e métodos de quebra espontânea de SUSY. Entretanto, acrescentamos sob as idéias do formalismo pseudoclássico uma variável *Grassmanniana* θ_5 como uma possível componente. A contribuição à ação, que surge devido a isso, deve preservar as invariâncias sob SUSY local e reparametrizações τ.

Finalmente, nos passos seguintes, pretendemos estudar a expansão desse modelo, acima comentado, para a dimensão $D = 3 + 1$ com o intuito de obtermos partículas com estatística e *spin* fracionários nessa dimensão. Aqui, apontamos que a questão requer o uso do grupo $SL\left(2, C\right)$, e devemos considerar dois tipos de *espinores* $(\alpha, \dot{\alpha})$, os quais implicam que a contribuição da flutuação do vácuo deverá ter um termo adicional $\lambda_{\dot{\alpha}}\dot{\lambda}^{\dot{\alpha}}$ e, em adição, a existência de antipartículas pode surgir nesse modelo.

Paralelamente, pretendemos, também, abordar as teorias de DKP e de *quartions*, usando o método BFV-BRST [85], pois, esse método abre a possibilidade de calcularmos o propagador da teoria com o uso da representação da integral de trajetória. Temos, ainda, a perspectiva de incluirmos interações (eletromagnéticas, Yang-Mills e campos gravitacionais) nessas teorias.

Referências Bibliográficas

[1] Schwinger, J.A., Phil. Mag. **44**, 1171 (1953).

[2] Martin, J.L., Proc. Roy. Soc. **A251**, 536 (1959).

[3] Casalbuoni, R., Nuovo Cim. **A33**, 115 (1976).

[4] Berezin, F.A. e Marinov, M.S., JETP Lett., Vol. **21**, Nº. 11, 320 (1975).

[5] Berezin, F.A. e Marinov, M.S., Ann. Phys., (N.Y.), **104**, 336 (1977).

[6] Casalbuoni, R., Nuovo Cim. **A33**, 389 (1976).

[7] Barducci, A., Casalbuoni, R. e Lusanna, L., Nuovo Cim. **35A**, 377 (1976).

[8] Barducci, A., Casalbuoni, R. e Lusanna, L., Nucl. Phys. **B124**, 93 (1977); Nucl. Phys. **B124**, 521 (1977).

[9] Barducci, A., Bordi, F. e Casalbuoni, R., Nuovo Cim. **B64**, 287 (1981).

[10] Brink, L., Deser, S., Zumino, B., Vechia, P. Di, e Howe, P., Phys. Lett. **64B**, 435 (1976).

[11] Brink, L., Vechia, P. Di e Howe, P., Nucl. Phys. **B118**, 76 (1977).

[12] Galvão, C. A. e Teitelboim, C., J. Math. Phys. **21**, 1863 (1980).

[13] Gitman, V. e Tyutin, I. V., Class. Quantum Grav. **7**, 2131 (1990); *Quantization of fields with Constraints* (Springer, Berlin, 1990).

[14] Zlatev, S. I., Phys. Rev. **D 62**, 105020 (2000).

[15] Marshakov, A.V. e Fainberg, V. Ya., JETP Lett. **46**, 319 (1987).

[16] Marshakov, A.V., Nucl. Phys. **B312**, 178 (1986).

[17] Duffin, R. Y., Phys. Rev. **54,** 1114 (1938); Kemmer, N., Proc. Roy. Soc. **A173**, 91 (1939); Petiau, G., Acad. Roy. de Belg., A. Sci. Mem. Collect **16** (1936).

[18] Lunardi, J.T., Pimentel, B.M e Teixeira, Gen. Rel. Grav. **34**, 491 (2002).

Casana, R., Lunardi, J.T., Pimentel, B.M e Teixeira, Gen. Rel. Grav. **34**, 1941 (2002).

[19] Casana, R., Fainberg, V.Ya., Lunardi, J.T., Pimentel, B.M. e Teixeira, R.G., Class. Quant. Grav. **20**, 2457 (2003).

[20] Casana, R., Lunardi, J.T., Pimentel, B.M e Teixeira, R.G., Int. J. Mod. Phys. **A17**, 4197 (2002).

[21] Okubo, S., J. Math. Phys. **42**, 4554 (2001).

[22] Fishbach, E., Louck, J.D., Nieto, M.M., C.K. Scott, J. Math. Phys. **15**, 60 (1974).

[23] Buchbinder, I. L., e Kuzenko, S., "Ideas and Methods of Supersymmetry or a walk Through Superspace", IOP Publishing Ltd (1998).

[24] Gol'fand, Yu. A. e Likhtman, E. P., JETP Lett. **13,** 323 (1972).

[25] Volkov, D. V. e Akulov, V. P., JETP Lett. **16,** 438 (1972); Phys. Lett. **B46,** 109 (1973).

[26] Flato, M. e Hillion, P., Phys. Rev. **D1,** 1667 (1970).

[27] Wess, J. e Zumino, B., Nucl. Phys. **B70**, 39 (1974); Phys. Lett. **B49,** 52 (1974).

[28] Aharonov, Y., Casher, A. e Susskind, L., Phys. Lett. **B35**, 512 (1971).

[29] Gervais, J. L. e Sakita, B., Nucl. Phys. **B34**, 633 (1971).

[30] Neveu, A. e Schwarz, J. H., Nucl. Phys. **B31**, 86 (1971).

[31] Salam, A. e Strathdee, J., Nucl. Phys. **B76**, 477 (1974).

[32] Arakai, S. e Okubo, S., Lett. Nuovo Cimento **3**, 511 (1972).

[33] Penrose, R. e MacCallum, M. A. H., Phys. Rept. **C6**, 241 (1972).

[34] Volkov, D. V. e Soroka, V. A., zhETF Pis. Red. **18**, 529 (1973) [JETP Lett. **18**, 312(1973)].

[35] D.P. Sorokin, V.I. Tkach and D.V. Volkov, Mod. Phys. Lett. **A4**, 901 (1989).

[36] I.A. Bandos, A.Yu. Nurmagambetov, D.P. Sorokin and D.V. Volkov, JETP Letters **60**, 621 (1994).

[37] D.V. Volkov, V.A. Soroka, D.P. Sorokin and V.I. Tkach, JETP, **52**, 526 (1990); Int. J. Mod. Phys. **A7**, 5977 (1992) .

[38] Valverde, J. S. e Pazetti, M., JHEP **08**, 037 (2006).

[39] Fainberg, V. Ya. e Pimentel, B. M., Theor. Math. Phys. **124**, 1234 (2000).

[40] Fainberg, V. Ya. e Pimentel, B. M., Phys. Lett. **A271**, 16 (2000).

[41] Fainberg, V. Ya., Pimentel, B. M. e Valverde, J.S., Proceedings of the International Meeting "Quantization Gauge Theories and Strings" dedicated to the memory of E.S. Fradkin., Moscow, (2000), Vol II, p. 79 (edited by A. Semikhatov, M. Vasilied and V. Zaikin, Scientific World 2001).

[42] Krajcik, R.A. e Nieto, M. M., Am. J. Phys., **45**, 818 (1974).

[43] Krajcik, R.A. e Nieto, M. M., Phys. Rev. **D10**, 4049 (1974); *ibid.* **11**, 1442 (1974); *ibid.* **11**, 1459 (1974); *ibid* **13**, 924 (1975); *ibid.* **14**, 418 (1976); *ibid.* **15**, 433 (1977); *ibid.* **15**, 445 (1977).

[44] Harish Chandra, Proc. Roy. Soc. Lond. **A186**, 502 (1946).

[45] Warner, F. W. , Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Springer-Verlag, N. Y. (2000)

[46] Müller-Kirsten, H. J. W. e Wiedemann, A., Supersymmetry An Introduction with Conceptual and Calculational Details, World Scientific, Singapore (19870).

[47] Greiner, W., Relativistic Quantum Mechanics Wave Equations, 2º edição, Springer-Verlag, N. Y. (1994).

[48] Lurié, D., Particles and Fields, John Wiley & Sons, N.Y. (1968).

[49] Dirac, P. A. M., Proc. Roy. Soc. **A155**, 447 (1936).

[50] Bargmann, V., Wigner, E., Proc. Nat. Sci. (USA) **34,** 211 (1948).

[51] Hamermesh, M., Group Theory and its application to physical problemas, Addison-Wesley, USA (1962).

[52] Dvoeglazov, V., math-ph/9808005; physics/9804010.

[53] Melo, C. A. Miquele de, Geometria Invariante de Escala, Tese de Doutorado, IFT-T.001/06, IFT/UNESP, Fevereiro de 2006.

[54] Rarita, W. e Schwinger, J., Phys. Rev. **60**, 61 (1941).

[55] http://www.maths.utas.edu.au/People/dfs/Papers/GrassmannLinAlgpaper.pdf
http://www.maths.utas.edu.au/People/dfs/Papers/GrassmannUAlgpaper.pdf
http://www.maths.utas.edu.au/People/dfs/Papers/GrassmannTranslation.ps
http://www.maths.utas.edu.au/People/dfs/Papers/ADGpaper97.pdf

[56] http://www.ses.swin.edu.au/homes/brownw/grassmannalgebra/book/
Browne, J., "Grassmann Algebra: Exploring applications of extended vector algebra with Mathematica".

[57] Fishbach, E., Louck, J.D., Nieto, M.M. e Scott, C.K., J. Math. Phys. 15, 60 (1974).

[58] Berezin, F. A.,"Introduction to Superanalysis", D. Reidel Publishing Company, (1987).

[59] Lima, E. L., "Elementos de Topologia Geral", Livros Técnicos e Científicos Editora S.A ,RJ (1976).

[60] Thron, W. J., "Topological Structures", Holt, Rinehart and Winston, NY (1966).

[61] Berezin, F. A., "The Method of Second Quantization", Academic Press, (1966).

[62] Dirac, P. A. M., "Lectures on Quantum Mechanics", Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York (1964).

[63] Hanson, A., Regge, T. e Teitelboim, C., "Constrained Hamiltonian Systems", accademia nazionale dei lincei, Roma (1976).

[64] Sundermeyer, K., "Lecture Notes in Physics: constrained dynamics", Springer, New York (1982).

[65] Balachandran, A. P., Marmo, M., Skagerstam, B. S. e Stern, A., "Classical Topology and Quantum States", Word Scientific (1991).

[66] Galvão, C. A. P. e Teitelboim, C., J. Math. Phys. 21(7), 1863 (1980). Buchbinder, I. L., e Kuzenko, S., "Ideas and Methods of Supersymmetry or a walk Through Superspace", IOP Publishing Ltd (1998).

[67] Lipkin, H. J., Phys. Lett. **9,** 203 (1964).

[68] Joseph, A., Nuovo Cimento **A8,** 217 (1972).

[69] Miyazawa, H., Progr. Theor. Phys. **36**,1266 (1966); Phys. Rev. **170**, 1586 (1968).

[70] Hwa, R. C. e Nuyts, J., Phys. Rev. **151**, 1215 (1966).

[71] Ferrara, S. e Zumino, B., Nucl. Phys. **B87**, 207 (1975).

[72] DeWitt, B., "Supermanifolds", 2º ed., Cambridge University Press (1992).

[73] Ogievetskii, V. I. e Menzincescu, L. , Sov. Phys.-Usp., Vol. **18**, Nº 12, 960 (1976).

[74] Salam, A. e Strathdee, J., Nucl. Phys. **B76**, 477 (1974).

[75] Salam, A. e Strathdee, J., Nucl. Phys. **B80**, 499 (1974).

[76] Salam, A. e Strathdee, J., Phys. Lett. **B49**, 465 (1974).

[77] Salam, A. e Strathdee, J., Phys. Lett. **B51**, 353 (1974)

[78] Salam, A. e Strathdee, J., Nucl. Phys. **B84**, 127 (1973).

[79] Salam, A. e Strathdee, J., Phys. Rev. **D11**, 1521 (1975).

[80] Salam, A. e Strathdee, J., Nucl. Phys. **B86**, 142 (1975).

[81] Salam, A. e Strathdee, J., Nucl. Phys. **B87**, 85 (1975).

[82] Srivastava, P. P., Lett. Nuovo Cimento **12**, 161 (1974).

[83] Ferrara, S., Zumino, B. e Wess, J., Phys. Lett. **B51**, 239 (1974).

[84] Bouquiaux, L., Dauby, P. e Hussin, V., J. Math. Phys. **28** (2), 477 (1987).

[85] Becchi, C., Rouet A. e Stora, R., Phys. Lett. **52B,** 344 (1974); Fradkin, E. S. e Vilkovisky, G. A., CERN Report TH2332 (1977); Batalin, I. A. e Vilkovisky, Phys. Lett. **B69**, 309 (1977); Fradkin, E. S. e Fradkina, Phys. Lett. **B72**, 343 (1977).

[86] Casana, R., Pazetti, M., Pimentel, B. M. and Vaverde, J. S., "Pseudoclassical Mechanics for the spin 0 and 1 Particles", submetido a JHEP.