

IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.004/04

INVARIÂNCIA CONFORME NO MODELO SIGMA DA CORDA

OSCAR ANDRÉS BEDOYA DELGADO

Orientador

NATHAN JACOB BERKOVITS

23000000 3455



Abril de 2004

Agradecimentos

Agradeço enormemente ao Professor Nathan Jacob Berkovits, por ter me sugerido este tema, ajudado a encontrar o caminho certo durante as muitas vezes que tentei me perder e por ser tão paciente.

Agradeço também a muitas outras pessoas que me ajudaram a resolver dúvidas específicas, entre elas, Daniel Luiz Nedel, Juan Pablo Beltrán, Hector Ivan Arcos, Fernando David Marmolejo e os Professores Ruben Aldrovandi e Max Bruto Pimentel.

Não foi fácil escrever uma dissertação numa língua estrangeira, e peço desculpas públicas por meu português onde quer que tenha cometido uma falta. Foi fundamental a ajuda que Dáfní Fernanda Zenedin e Carlos Roberto Mafra me prestaram com relação ao português e pelas sugestões para que o texto tivesse maior clareza. A Arlene Cristina Aguilar, obrigado por ter me ensinado o JaxoDraw e pelas ajudas com o Latex.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Inumeráveis razões me motivam a agradecer a meus pais Luzby, Oscar e Niní....

Resumo

Será feita uma revisão acerca das simetrias da teoria de corda bosônica e suas anomalias. Este estudo será feito tanto para o caso de cordas movendo-se num espaço-tempo tipo Minkowski, como no caso de cordas acopladas a campos tomando valores no espaço-tempo. Usando teoria de perturbações, será calculada a condição de cancelamento de anomalia a 1-loop. Esta condição estabelecerá vínculos interessantes entre os campos do espaço tempo através de uma equação do tipo da equação de Einstein. Finalmente, será mostrado como calcular condições de cancelamento de anomalia a ordens mais altas em teoria de perturbações usando métodos do grupo de renormalização.

Palavras Chaves: Teoria de Cordas; Modelo Sigma.

Áreas do conhecimento: Teoria Quântica de Campos.

Abstract

A review will be made of the symmetries and the anomalies of the bosonic string. It will be considered the case of a string moving in a Minkowskian space-time and also, a string coupled to fields in space-time. Perturbation theory will allow calculation at the one-loop level of the condition under which the anomaly vanishes. This condition will establish interesting constraints on the background fields since they obey an equation of the Einstein type. Finally, it will be shown how to calculate conditions for anomaly vanishing beyond the one-loop order using renormalization group methods.

Índice

1	Introdução	1
2	Cordas em um espaço tempo plano	5
2.1	Aspectos Clássicos	5
2.1.1	Fixação do gauge conforme	8
2.1.2	Invariância de Weyl e invariância conforme	10
2.2	Quantização por Integral de Caminho de Polyakov	12
2.2.1	Procedimento de Faddeev - Popov	13
2.2.2	O elemento de medida e a origem da anomalia conforme	15
2.2.3	Cálculo da Anomalia de Weyl	17
3	Acoplamento da corda a campos no espaço-tempo	21
3.1	Ponto de vista da Teoria Quântica de Campos: Modelo sigma generalizado	22
3.2	Expansão em campo de fundo	24
3.2.1	Expansão usando coordenadas normais	25
3.3	Cálculo da anomalia a 1-loop	31
3.4	Condições de Consistência da invariância de Weyl	44
3.4.1	Relação do cancelamento da anomalia com a Geometria do espaço tempo	46
4	Invariância Conforme a ordens mais altas	48
4.1	Método do Grupo de Renormalização	48
4.1.1	Descrição do Método	48
4.1.2	Exemplo para um campo escalar	49
4.2	Método do grupo de renormalização aplicado ao Modelo Sigma	50
5	Conclusões	58
A	O Propagador no modelo sigma e cálculos de OPE	60

Capítulo 1

Introdução

Este capítulo tem como objetivo apresentar os conceitos fundamentais da teoria da relatividade especial, bem como as suas implicações para a física clássica. A relatividade especial foi desenvolvida por Albert Einstein em 1905, a partir da necessidade de reconciliar a mecânica clássica com a eletrodinâmica.

A relatividade especial baseia-se em dois princípios fundamentais: o princípio da relatividade, que afirma que as leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais, e o princípio da constância da velocidade da luz, que afirma que a velocidade da luz no vácuo é constante e independe do movimento do observador. Esses princípios levam a conclusões surpreendentes, como a dilatação do tempo, o contração dos comprimentos e a equivalência entre massa e energia. A relatividade especial também introduz o conceito de espaço-tempo, onde o tempo e o espaço são tratados como uma única entidade, o espaço-tempo.

Este capítulo também apresenta as equações de Lorentz, que descrevem a transformação entre dois referenciais inerciais em movimento relativo. Essas equações são fundamentais para a compreensão da relatividade especial e suas aplicações na física moderna.

Capítulo 1

Introdução

Ao querer fazer uma descrição de um fenômeno observado na natureza, um modelo relativamente simples pode, em algumas ocasiões, sofrer adaptações e/ou reinterpretções, de tal maneira que após um certo tempo a abrangência de sua aplicabilidade é mudada ou aumentada. Um exemplo espetacular desta situação é a Teoria de Cordas, cuja história será descrita parcial e brevemente.

Num esforço para descrever o espectro de partículas que interagem fortemente, vários modelos, conhecidos como modelos duais, foram propostos no final da década de 1960 [1]. Estes modelos não continham férmions; com esta motivação um modelo dual para férmions foi proposto posteriormente em 1971 [2]. Mesmo que estes modelos duais não tenham cumprido seu objetivo, o interesse neles foi mantido porque em 1972 foram encontradas relações entre eles e teorias de Yang-Mills [3]. Além disso, em 1974 se deu interpretação de gráviton a um estado sem massa e com spin 2 contido nos modelos duais [4]. Isso deu motivação para pensar nestes modelos não somente como uma teoria de Gravitação Quântica, mas como também um modelo de unificação das interações fundamentais. Esta idéia estava apoiada no fato dos modelos duais estarem definidos num espaço-tempo de dimensão D maior do que quatro ($D=26$ [5] para os modelos sem férmions e $D=10$ [6] quando férmions são incluídos), levando em conta que as teorias de Kaluza Klein conseguiam fazer uma formulação unificada da Gravitação e do Eletromagnetismo. Dado que um ano antes foi reconhecido que as propriedades estudadas destes modelos duais eram deriváveis de uma teoria primeiro quantizada, cujo Lagrangiano descreve relativisticamente um objeto estendido se propagando no espaço-tempo [7], esta teoria começou a ser conhecida como uma de Teoria de Cordas.

Uma maneira de quantizar a teoria de cordas usando métodos de integral funcional foi formulada em 1981 por A. Polyakov [8]. Com esta formulação foi aberta a proposta de usar um tipo de teoria de campos, conhecido como o Modelo Sigma não linear, para ser aplicado no âmbito de teoria de Cordas.

O Modelo Sigma não linear, durante a década de 1970, foi proposto como uma teoria para N campos escalares com simetria $O(N)$. Este modelo foi aplicado em 1972 para calcular espalhamento de Píons em quatro dimensões [9]. Uma generalização do modelo sigma em $2 + \epsilon$ dimensões foi formulada em 1980 por D. Friedan [10], na qual os campos tomam valores numa variedade compacta $\mathcal{M}$ (em lugar de um espaço homogêneo como é o caso de $O(N)$). Além disso foi suposto que $\mathcal{M}$ é dotada de um campo métrico que serve para acoplar os campos. Neste tipo de modelo sigma foram calculadas tanto a estrutura de divergências ultravioletas como a função β a dois loops usando métodos perturbativos já usados em [9].

A ação para uma teoria de cordas livre e o modelo sigma têm uma característica em comum; são invariantes por transformações conformes. A maneira de quantizar a corda livre usando integração funcional permite observar que a teoria tem esta simetria após de ser quantizada, i.e, é livre de anomalia, se a dimensão do espaço-tempo é $D = 26$ [8]. Diz-se então que a teoria é consistente. Um problema interessante, é saber quais são as condições para que a teoria tenha invariância conforme quando é acoplada com uma métrica para o espaço-tempo. Quando isto acontece, a ação que descreve este sistema é precisamente a ação do modelo sigma. Por isso o modelo sigma começa a cobrar importancia neste âmbito. Um tipo de modelo sigma generalizado para a corda (generalizado com respeito a [10]) pode ser proposto incluindo um campo antissimétrico e um campo escalar no espaço-tempo. A maneira que se conhece para verificar que este modelo sigma da corda tem simetria conforme é calcular quais condições anulam as funções β . O argumento para isso, é que se as funções β são zero, a teoria tem invariância de escala, mas como foi provado em [11], uma teoria em duas dimensões com esta simetria, também é invariante conforme. As funções β foram calculadas a 1-loop em 1985 [12], dando pois, condições de consistência na teoria com acoplamentos. Além disso, foi observado que estas condições de cancelamento de anomalia podem ser obtidas como equações de movimento a partir de uma ação no espaço-tempo. O que resulta mais surpreendente é que esta ação é precisamente a ação efetiva a baixas energias calculada a partir de amplitudes de espalhamento dos estados não massivos da teoria [13]. Isto estabelece uma ponte entre cancelamento de anomalias, funções β e Ações efetivas no espaço-tempo.

Dada esta motivação, o objetivo principal do presente trabalho é calcular, até primeira ordem em teoria de perturbações, quais são as condições para formular ao nível quântico, uma teoria de corda bosônica fechada acoplada com campos no espaço-tempo com invariância conforme.

Este cálculo é feito de uma maneira detalhada na seção 3.3. Mas antes de apresentar este cálculo é útil considerar um caso mais simples, que é o de uma teoria de cordas sem acoplamentos no espaço-tempo. Este é o material coberto no capítulo 2 e ele

é útil tanto para introduzir notação, como para entender como pode aparecer uma anomalia. Assim, se começa no capítulo 2 introduzindo brevemente a ação de corda bosônica dando ênfase na discussão das suas invariâncias; como se verá este é um sistema com simetria conforme, o que equivale a ter um tensor energia momento com traço zero. Seguidamente, faz-se uma descrição do processo de quantização por integral de caminho de Polyakov usando o procedimento de Faddeev-Popov para fixar um gauge. Isto se traduzirá no final na introdução de campos fantasmas, cuja ação possui as simetrias da ação clássica para a corda mais um elemento de medida funcional para eles. Será argumentado como este elemento de medida funcional, junto com o elemento de medida funcional para os campos que descrevem a corda no espaço-tempo não têm a simetria conforme, pelo qual as funções de correlação definidas usando a função de partição do sistema cordas-fantasma estão anomala-mente definidas. No entanto, finalizando o capítulo 2 se mostrará que se a corda se move em um espaço-tempo de dimensão D igual a 26 esta anomalia desaparece.

Uma vez firmadas estas bases procede-se no capítulo 3 a acoplar a corda com campos no espaço-tempo, encontrando o ponto de vista do modelo sigma generalizado. O uso da teoria de perturbações pode ajudar a encontrar a condição para que esta teoria tenha um tensor energia-momento com traço zero quando é quantizada. O cálculo do traço deste tensor se faz perturbativamente, usando um método covariante. No entanto, em lugar de calcular diretamente o traço, se faz uso da conservação do tensor energia-momento (a qual é válida porque a invariância por difeomorfismos é sempre mantida) para encontrar uma expressão para o traço. Como se verá, este cálculo indireto é útil, pois permite encontrar termos do traço do tensor energia-momento usando uma métrica plana para a folha de mundo. O cálculo a primeira ordem dá condições para manter a invariância conforme que generaliza a condição $D = 26$ encontrada no capítulo 2. Essas condições são escritas como derivadas dos campos acoplados com a corda com respeito às posições no espaço tempo. Mesmo que o sistema de equações diferenciais que elas constituem não va ser resolvido será argumentado porque elas são consistentes com o tipo de anomalia descrita no capítulo 2. Além disso, mostrar-se-á como este sistema de equações é equivalente a um outro sistema de equações onde uma delas é a equação de Einstein para o campo gravitacional. Finalizando o capítulo 3 será escrita uma ação no espaço-tempo a partir da qual são obtidas as condições de cancelamento de anomalia; isto eleva estas três equações à categoria de equações de movimento no espaço-tempo.

O objetivo do capítulo 4 é ilustrar como o formalismo do grupo de renormalização é usado para calcular a anomalia do modelo sigma da corda, i.e, calculando as funções β do grupo de renormalização. Por isso será feita uma descrição do método, dando

um exemplo de como é a função β para uma teoria de campos escalares sem massa e seguidamente será mostrado como o traço do tensor energia-momento do modelo sigma da corda pode ser escrito em termos das funções β do grupo de renormalização desta teoria, as quais dependem só de contratermos menos singulares que podem ser encontrados usando o método de regularização dimensional.

2 Cordas em um espaço-tempo plano

2.1 Espaço-tempo Clássico

Uma corda clássica é um objeto unidimensional, que se estende no tempo, e se move no espaço. A corda é descrita por uma função $X^\mu(\tau, \sigma)$ que dá a posição da corda no espaço-tempo em função do tempo τ e do espaço σ . A corda é considerada como um objeto clássico, e não como um objeto quântico. A corda é considerada como um objeto clássico, e não como um objeto quântico. A corda é considerada como um objeto clássico, e não como um objeto quântico.

A corda é considerada como um objeto clássico, e não como um objeto quântico. A corda é considerada como um objeto clássico, e não como um objeto quântico. A corda é considerada como um objeto clássico, e não como um objeto quântico. A corda é considerada como um objeto clássico, e não como um objeto quântico.

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma) \tag{2.1}$$

A corda é considerada como um objeto clássico, e não como um objeto quântico. A corda é considerada como um objeto clássico, e não como um objeto quântico. A corda é considerada como um objeto clássico, e não como um objeto quântico. A corda é considerada como um objeto clássico, e não como um objeto quântico.

¹ A corda é considerada como um objeto clássico, e não como um objeto quântico. A corda é considerada como um objeto clássico, e não como um objeto quântico.

² A corda é considerada como um objeto clássico, e não como um objeto quântico. A corda é considerada como um objeto clássico, e não como um objeto quântico.

Capítulo 2

Cordas em um espaço tempo plano

2.1 Aspectos Clássicos

A corda bosônica é um objeto unidimensional, que ao evoluir no tempo, gera uma superfície bidimensional, conhecida como folha de mundo Σ . As cordas podem ser de dois tipos: abertas (equivalentes a uma linha) e fechadas (equivalentes a um círculo). As superfícies geradas por elas podem ser parametrizadas por (σ^1, σ^2) ,* onde $\sigma^1, 0 < \sigma^1 < \pi$ contém a informação da colocação dos pontos ao longo da corda e $\sigma^2, -\infty < \sigma^2 < \infty$ caracteriza a evolução temporal dela†.

Uma maneira de fazer uma formulação clássica e relativística da corda é escrever uma ação com simetrias convenientemente escolhidas, mas para isso é necessário primeiro mapear os pontos da folha de mundo em pontos no espaço-tempo $\mathcal{M}$. Isto se faz através de um conjunto de D campos X^μ , com $\mu = 0, \dots, D - 1$:

$$X : \Sigma \rightarrow \mathcal{M}. \quad (2.1)$$

Assume-se que os campos X têm unidades de comprimento em $\mathcal{M}$ e que tanto Σ como $\mathcal{M}$ são variedades diferenciáveis. Em primeira instância, será considerado que o espaço-tempo no qual a corda se move é plano, com métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$. Por este motivo, a ação a ser escrita deve ter simetria de Poincaré. Como não existe escolha privilegiada para os parâmetros (σ^1, σ^2) , a ação deve ser também invariante sobre difeomorfismos na folha de mundo $\sigma \rightarrow \sigma'(\sigma)$. Sob estas transformações, $X^\mu(\sigma)$ transforma como um campo escalar $X^\mu(\sigma) \rightarrow X'^\mu(\sigma')$. Um candidato que satisfaz ambas as prescrições é a área da folha de mundo, dada pela raiz quadrada do determinante da métrica induzida pelo mapeamento no espaço-tempo:

* Assume-se desde o começo que fez-se uma rotação de Wick nas coordenadas da folha de mundo $\tau = -i\sigma^2$, onde σ^2 é um parâmetro real.

† As coordenadas $\sigma^a, a = 1, 2$ tem dimensão de *comprimento* na folha de mundo. Ao longo do todo texto será adotado um sistema de unidades para as grandezas do espaço tempo e da folha de mundo tal que $c = 1, \hbar = 1$.

$$h_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu, \quad (2.2)$$

(onde $\partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial \sigma^a}$) integrada sobre toda a folha de mundo

$$S_{NG}[X] = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{|h|}, \quad (2.3)$$

com h denotando $\det h_{ab}$. α' é uma constante com unidades de comprimento ao quadrado, conhecida como constante de Regge e S_{NG} é conhecida como a ação de Nambu-Goto. O estudo apresentado nesta dissertação se restringirá as cordas fechadas[†], para as quais $X^\mu(0, \sigma^2) = X^\mu(\pi, \sigma^2)$. A equação de movimento para o campo X^μ é

$$\partial_a(\sqrt{|h|} h^{ab} \partial_b X^\mu) = 0. \quad (2.4)$$

Existe outra descrição equivalente da teoria de cordas, útil na hora de fazer uma formulação quântica por meio da generalização da idéia de integral de caminho. Nesta outra descrição da corda bosônica, introduz-se um campo métrico para a folha de mundo $g = g_{ab}(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma^a \otimes d\sigma^b$, com assinatura $(+, +)$. De novo, requer-se uma ação com simetria de difeomorfismos em Σ e simetria de Poincaré. A ação

$$S_P[X, g] = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{|g|} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu g^{ab}, \quad (2.5)$$

conhecida como ação de Polyakov, satisfaz estas condições. Ela tem um novo campo cuja variação define o tensor energia momento

$$T^{ab} \equiv \frac{4\pi}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta}{\delta g_{ab}} S_P \quad (2.6)$$

$$= \frac{1}{\alpha'} (\partial^a X^\mu \partial^b X_\mu - \frac{1}{2} g^{ab} \partial_c X^\mu \partial^c X_\mu). \quad (2.7)$$

A condição de invariância de S_P com respeito ao novo campo g_{ab} , impõe uma condição nas componentes do tensor energia momento: elas devem anular-se. Note que a não inclusão de $g^{-1/2}$ na definição (2.6) faria com que T_{ab} fosse uma densidade tensorial em lugar de um tensor.

É fácil ver que esta condição, $T_{ab} = 0$, permite eliminar g_{ab} de S_P e obter de novo a ação de Nambu Goto. Neste sentido, as duas ações são equivalentes. Mais em detalhe, a equação de movimento para o campo X^μ , calculada da ação de Polyakov é

[†]Isto vai simplificar o trabalho *a posteriori* já que as folhas de mundo geradas pelas cordas não vão ter fronteiras.

$$\partial_a(\sqrt{|g|}g^{ab}\partial_b X^\mu) = 0. \quad (2.8)$$

Ela não é completamente idêntica a (2.4), mas da equação de movimento para g_{ab} se deriva

$$\sqrt{|g|}g^{ab} = \sqrt{h}h^{ab}, \quad (2.9)$$

portanto é necessário que as duas equações de movimento derivadas de S_P sejam satisfeitas para descrever uma corda relativística movendo-se no espaço tempo.

A inclusão de um campo adicional à descrição da corda traz como consequência o aparecimento de uma nova simetria da ação: S_P é invariante sobre escalamentos da métrica:

$$g'_{ab}(\sigma_1, \sigma_2) = e^{2\omega(\sigma_1, \sigma_2)} g_{ab}(\sigma_1, \sigma_2), \quad (2.10)$$

também conhecidos como transformações de Weyl. As simetrias da ação dão duas características adicionais ao tensor energia momento:

1. Devido à invariância sobre difeomorfismos, ele é conservado

$$\nabla_a T^{ab} = 0. \quad (2.11)$$

2. Devido à simetria de Weyl, o traço é sempre zero

$$g_{ab}T^{ab} = T_a{}^a = 0. \quad (2.12)$$

Dò ponto de vista das simetrias, é possível somar mais um termo à S_P :

$$S[X, g] = S_P + \lambda\chi, \quad (2.13)$$

com

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{|g|} R^{(2)}, \quad (2.14)$$

onde $R^{(2)}$ é o escalar de curvatura construído com a métrica da folha de mundo[§] e λ é uma constante de acoplamento sem dimensão. Este novo termo na ação não modifica o tensor energia-momento, já que sua variação com respeito à métrica é proporcional a $R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 0$; mas as simetrias do tensor de curvatura em duas dimensões implicam $R_{ab} = \frac{1}{2}g_{ab}R$. O conteúdo de informação de χ é meramente

[§]Mais exatamente, este novo termo na ação tem simetria de Weyl se a folha de mundo não tem fronteiras, como é o caso para a corda fechada.

global, pois ele é a característica de Euler da folha de mundo, a qual é uma constante, e como tal, não afeta a dinâmica da corda.

Como já se mencionou, é a simetria de Weyl que faz com que o tensor energia-momento definido classicamente tenha traço nulo. No entanto, isto não acontece na formulação quântica. Não é imediato que o traço do tensor energia momento tenha traço zero por causa da introdução de um elemento de medida para a integral funcional, que apesar de ser invariante por difeomorfismos, não é invariante de Weyl. Além disso, é o requerimento de manter a invariância de Weyl numa descrição quântica da corda acoplada a campos no espaço-tempo que fornecerá dados muito importantes sobre a geometria deste espaço.

Como já foi mencionado, a condição de invariância de Weyl e o anulamento do traço do tensor energia-momento são sinônimos. É possível introduzir mais um sinônimo para descrever invariância de Weyl, e este é a simetria conforme. Mas para introduzir esta outra linguagem é necessário primeiro fixar a métrica da folha de mundo no gauge conforme. Como se mostrará na próxima seção, a simetria por difeomorfismos torna possível fixar este gauge. Intuitivamente, as duas simetrias de difeomorfismos (uma para cada parâmetro da folha de mundo) podem ser usada para fixar dois componentes de g , ficando ela escrita em termos de só um componente independente.

2.1.1 Fixação do gauge conforme

Num sistema de coordenadas arbitrário (σ^1, σ^2) , o elemento de linha tem a forma

$$dl^2 = g_{11}(d\sigma^1)^2 + 2g_{12}d\sigma^1 d\sigma^2 + g_{22}(d\sigma^2)^2, \quad (2.15)$$

onde supõe-se que g_{ab} são funções analíticas. O elemento de linha 2.15 pode ser escrito

$$dl^2 = \left(\sqrt{g_{11}}d\sigma^1 + \frac{g_{12} + i\sqrt{|g|}}{\sqrt{g_{11}}}d\sigma^2 \right) \left(\sqrt{g_{11}}d\sigma^1 + \frac{g_{12} - i\sqrt{|g|}}{\sqrt{g_{11}}}d\sigma^2 \right). \quad (2.16)$$

Num outro sistema de coordenadas $\xi^a(\sigma)$, a métrica será conforme à métrica plana, i.e $g = e^{2\omega(\sigma)}\delta$, se for possível encontrar uma função complexa $\kappa(\sigma)$ satisfazendo

$$\kappa \left(\sqrt{g_{11}}d\sigma^1 + \frac{g_{12} + i\sqrt{|g|}}{\sqrt{g_{11}}}d\sigma^2 \right) = d\xi^1 + id\xi^2, \quad (2.17)$$

$$\bar{\kappa} \left(\sqrt{g_{11}} d\sigma^1 + \frac{g_{12} - i\sqrt{|g|}}{\sqrt{g_{11}}} d\sigma^2 \right) = d\xi^1 - i d\xi^2, \quad (2.18)$$

pois

$$dl^2 = |\kappa|^{-2} ((d\xi^1)^2 + (d\xi^2)^2). \quad (2.19)$$

De (2.17)

$$\kappa \left(\sqrt{g_{11}} d\sigma^1 + \frac{g_{12} + i\sqrt{|g|}}{\sqrt{g_{11}}} d\sigma^2 \right) = \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial \sigma^1} + i \frac{\partial \xi^2}{\partial \sigma^1} \right) d\sigma^1 + \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial \sigma^2} + i \frac{\partial \xi^2}{\partial \sigma^2} \right) d\sigma^2, \quad (2.20)$$

mas como as coordenadas são independentes, de (2.20) escreve-se

$$\kappa \sqrt{g_{11}} = \frac{\partial \xi^1}{\partial \sigma^1} + i \frac{\partial \xi^2}{\partial \sigma^1}, \quad \kappa \frac{g_{12} + i\sqrt{|g|}}{\sqrt{g_{11}}} = \frac{\partial \xi^1}{\partial \sigma^2} + i \frac{\partial \xi^2}{\partial \sigma^2}. \quad (2.21)$$

Eliminando κ

$$(g_{12} + i\sqrt{|g|}) \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial \sigma^1} + i \frac{\partial \xi^2}{\partial \sigma^1} \right) = g_{11} \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial \sigma^2} + i \frac{\partial \xi^2}{\partial \sigma^2} \right) \quad (2.22)$$

e isolando a parte real e imaginária pura desta última equação, obtém-se

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial \sigma^1} = \frac{g_{11} \frac{\partial \xi^2}{\partial \sigma^2} - g_{12} \frac{\partial \xi^2}{\partial \sigma^1}}{\sqrt{|g|}}, \quad \frac{\partial \xi^2}{\partial \sigma^1} = \frac{g_{12} \frac{\partial \xi^1}{\partial \sigma^1} - g_{11} \frac{\partial \xi^1}{\partial \sigma^2}}{\sqrt{|g|}}. \quad (2.23)$$

Multiplicando (2.22) por $(g_{12} - i\sqrt{|g|})/g_{11}$, e isolando de novo as partes reais e imaginárias, encontra-se

$$\frac{\partial \xi^1}{\partial \sigma^2} = \frac{g_{12} \frac{\partial \xi^2}{\partial \sigma^2} - g_{22} \frac{\partial \xi^2}{\partial \sigma^1}}{\sqrt{|g|}}, \quad \frac{\partial \xi^2}{\partial \sigma^2} = \frac{g_{22} \frac{\partial \xi^1}{\partial \sigma^1} - g_{12} \frac{\partial \xi^1}{\partial \sigma^2}}{\sqrt{|g|}}. \quad (2.24)$$

Se as segundas derivadas de $\xi^a(\sigma)$ são contínuas, então $\frac{\partial^2 \xi^a}{\partial \sigma^1 \partial \sigma^2} = \frac{\partial^2 \xi^a}{\partial \sigma^2 \partial \sigma^1}$, e de (2.23), (2.24), se obtém o conjunto de equações diferenciais

$$L\xi^a = 0, \quad (2.25)$$

com o operador diferencial L definido por

$$L \equiv \frac{\partial}{\partial \sigma^1} \left[\frac{g_{12} \frac{\partial}{\partial \sigma^2} - g_{22} \frac{\partial}{\partial \sigma^1}}{\sqrt{g}} \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left[\frac{g_{12} \frac{\partial}{\partial \sigma^1} - g_{12} \frac{\partial}{\partial \sigma^2}}{\sqrt{g}} \right]. \quad (2.26)$$

a equação (2.25) é conhecida como a equação de Beltrami. A teoria de equações diferenciais [14] assegura que se g_{ab} são funções reais e C^∞ , a solução do sistema (2.25) existe, e define um difeomorfismo um a um

$$(\sigma^1, \sigma^2) \rightarrow (\xi^1(\sigma^1, \sigma^2), \xi^2(\sigma^1, \sigma^2)) \quad (2.27)$$

Finalmente, o fator conforme pode ser calculado usando (2.21).

Resumindo, uma escolha adequada do sistema de coordenadas permite escrever a métrica como um fator conforme vezes a métrica plana. Diz-se que uma métrica escrita desta maneira está no gauge conforme ou que é uma métrica conforme.

2.1.2 Invariância de Weyl e invariância conforme

Uma vez no gauge conforme, é possível introduzir uma outra linguagem para exigir que a teoria, definida clássica ou quanticamente, tenha simetria de Weyl, e o tensor energia momento tenha traço zero.

Supondo que o gauge conforme foi fixado[¶]: $\hat{g}_{ab} = e^{2\omega(\sigma)} \delta_{ab}$, pode-se usar coordenadas

$$z = \sigma^1 + i\sigma^2, \quad \bar{z} = \sigma^1 - i\sigma^2. \quad (2.28)$$

Neste sistema os componentes da métrica são

$$\hat{g}_{z\bar{z}} = \frac{1}{2}e^{2\omega} = \hat{g}_{\bar{z}z}, \quad \hat{g}_{zz} = \hat{g}_{\bar{z}\bar{z}} = 0. \quad (2.29)$$

Por outro lado, uma transformação infinitesimal de difeomorfismo em Σ ,

$$z \rightarrow z + v^z(z, \bar{z}), \quad (2.30)$$

$$\bar{z} \rightarrow \bar{z} + v^{\bar{z}}(z, \bar{z}), \quad (2.31)$$

resultará numa mudança nos campos g e X :

$$\delta \hat{g}_{ab} = \nabla_a v_b + \nabla_b v_a, \quad (2.32)$$

$$\delta X^\mu = v^a \nabla_a X^\mu. \quad (2.33)$$

[¶]A notação $\hat{g}$ será usada para denotar que a métrica esta em um gauge fixo.

Isto ocasiona que uma métrica $\hat{g}$, inicialmente no gauge conforme, não fique necessariamente neste gauge. No entanto, é fácil ver quais geradores de difeomorfismos vão preservar o gauge. No gauge conforme, os únicos símbolos de Christoffel diferentes de zero são

$$\Gamma_{zz}^z = 2\partial\omega, \quad \Gamma_{\bar{z}\bar{z}}^{\bar{z}} = 2\bar{\partial}\omega, \quad (2.34)$$

onde $\partial \equiv \frac{\partial}{\partial z}$ e $\bar{\partial} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$. De (2.34) obtém-se

$$\begin{aligned} \nabla_z v^z &= \partial v^z + 2\partial\omega v^z, & \nabla_{\bar{z}} v^z &= \bar{\partial} v^z, \\ \nabla_{\bar{z}} v^{\bar{z}} &= \bar{\partial} v^{\bar{z}} + 2\bar{\partial}\omega v^{\bar{z}}, & \nabla_z v^{\bar{z}} &= \partial v^{\bar{z}}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Assim, $\hat{g}_{zz}$ e $\hat{g}_{\bar{z}\bar{z}}$ continuam sendo zero (i.e a métrica tem a forma conforme) se os geradores das transformações são funções holomórficas e anti-holomórficas: $v \equiv v^z(z)$ e $\bar{v} \equiv v^{\bar{z}}(\bar{z})$. Este subconjunto do conjunto geral de difeomorfismos que mantém o gauge conforme é conhecido como *reparametrizações conformes*. Apesar de que uma reparametrização conforme deixa a métrica no mesmo gauge, o fator conforme muda como

$$2\delta\omega = \nabla_z v^z + \nabla_{\bar{z}} v^{\bar{z}}. \quad (2.36)$$

No entanto, ainda se tem uma simetria a mais, que pode ser usada para não mudar o fator conforme da métrica, isto é, usando uma transformação de Weyl que faça o efeito contrário do que a reparametrização conforme (2.36). Desta maneira, atuando com uma reparametrização conforme, junto com uma transformação de Weyl, é sempre possível fazer com que as transformações dos campos X^μ e $\hat{g}$ sejam

$$\delta X^\mu = v\partial X^\mu + \bar{v}\bar{\partial} X^\mu, \quad (2.37)$$

$$\delta\hat{g}_{ab} = 0. \quad (2.38)$$

O conjunto de transformações (2.37) e (2.38) denota-se por *transformações conformes*. É possível também pensar nas transformações em ordem inversa: Uma transformação conforme, acompanhada de uma transformação de Weyl convenientemente escolhida, é equivalente a uma reparametrização conforme. Uma teoria de campos invariante por transformações conformes é conhecida como uma CFT (Conformal Field Theory). Como se supõe que a teoria terá invariância de reparametrização, então ela será invariante conforme se tem simetria de Weyl, e vice-versa. Nesta linguagem, a teoria de corda bosônica é livre de *anomalia* se na sua formulação quântica ela continua sendo uma teoria conforme. Na seguinte seção se mostrará porque esta anomalia aparece, e também será mostrado qual condição permite restaurar a simetria conforme.

2.2 Quantização por Integral de Caminho de Polyakov

A adaptação da idéia de integral de caminho de Feynman em Teoria Quântica de Campos ao caso da teoria de cordas é conhecida como integral de caminho de Polyakov. Dadas duas configurações de cordas fixas no espaço-tempo, esta formulação diz como calcular a amplitude de probabilidade de começar com uma configuração e terminar na outra. Seguindo a idéia de Feynman, faz-se uma soma sobre todas as possíveis folhas de mundo que juntam as duas configurações fixas. É importante notar que as folhas de mundo que unem duas configurações fixas podem ter topologias diferentes, o que introduz de maneira natural termos de interação. Mais ainda, como na ação de Polyakov a métrica da folha de mundo faz o papel de um campo independente, tem-se que somar sobre todas as possíveis métricas euclidianas. Esta soma sobre possíveis configurações dos campos (X, g) é pesada pelo fator^{||} $\exp(-S[X, g])$. Além de somar sobre estas configurações, soma-se também sobre as possíveis topologias, i.e, sobre superfícies bidimensionais compactas de diferente genus g . Esta soma é pesada pelo fator e^χ , com χ dado por (2.14) e começa com $g = 0$: a esfera, continuando com $g = 1$: o torus, etc. No entanto, no presente trabalho só se tomará o primeiro termo desta soma. Esta aproximação conhece-se como nível de árvore em teoria de cordas.

O objeto fundamental a definir será a função de partição Z , definida como a amplitude de começar e terminar com zero número de cordas, ou amplitude vácuo - vácuo

Existem dois fatos importantes a levar em conta quando define-se o elemento de medida da função de partição. O primeiro, é que se as simetrias de gauge (Weyl e difeomorfismos) se mantêm numa formulação quântica, duas configurações (X, g) e (X', g') relacionadas entre si por estas simetrias fazem com que a função de partição não esteja corretamente definida. Este grupo de gauge tem dimensão infinita, por tanto se está somando infinitos termos iguais, originando divergências em Z . Para tratar este problema, divide-se pelo volume do grupo de difeomorfismos e transformações de Weyl $V_{Diff \times Weyl}$, ficando Z definida por

$$Z \equiv \int \frac{[dX dg]}{V_{diff \times Weyl}} \exp(-S[X, g]). \quad (2.39)$$

O outro fato é que Z tenha as simetrias de gauge. Como se verá, uma vez fixado o gauge conforme para a folha de mundo, o elemento de medida funcional no espaço das funções X não tem simetria de Weyl, e portanto a simetria conforme

^{||}O sinal menos neste exponencial vem de seguir a convenção para as integrais de caminho (usada em [15]) quando se faz a rotação de Wick na folha de mundo.

não é necessariamente satisfeita. É pois necessário calcular explicitamente qual é a condição para que a teoria tenha esta simetria. Fixar o grupo de gauge $V_{diff \times Weyl}$ permite identificar no conjunto de possíveis configurações $\{(X, g)\}$ dois subconjuntos disjuntos: Configurações dos campos relacionadas entre si por transformações de gauge, e configurações não relacionadas por estas simetrias. O primeiro constitui a chamada órbita de gauge, e o segundo o chamado gauge “slice”. Esta distinção permitirá cancelar o volume de grupo de gauge introduzido formalmente na função de partição.

O método que permite tirar da função de partição a soma sobre configurações inequivalentes é conhecido com procedimento de Faddeev-Popov.

2.2.1 Procedimento de Faddeev - Popov

No procedimento de Faddeev-Popov, introduz-se na função de partição a condição de fixação de gauge de maneira explícita, tal que não a altere. Com isto em mente, define-se o elemento de medida de Faddeev-Popov $\Delta_{FP}(g)$, satisfazendo

$$\Delta_{FP}(g) \int [d\zeta] \delta(g - \hat{g}) = 1. \quad (2.40)$$

ζ denota a ação conjunta de transformações de Weyl e difeomorfismos que permite fixar o gauge $\hat{g}$

$$\zeta : g \rightarrow \hat{g}, \quad (2.41)$$

$$\hat{g}_{ab}(\sigma') = e^{2\omega(\sigma)} \frac{\partial \sigma^c}{\partial \sigma'^a} \frac{\partial \sigma^d}{\partial \sigma'^b} g_{cd}(\sigma). \quad (2.42)$$

Denotando por G o grupo de difeomorfismos e transformações de Weyl, e por $\mathcal{G}$ a variedade associada a este grupo**, $[d\zeta]$ tem uma interpretação geométrica: é o elemento de medida em $\mathcal{G}$. Introduzindo (2.40) na função de partição, ela vai ganhar uma dependência na escolha do gauge

$$Z[\hat{g}] = \int \frac{[d\zeta dX dg]}{V_{diff \times Weyl}} \Delta_{FP}(g) \delta(g - \hat{g}) \exp(-S[X, g]). \quad (2.43)$$

Integrando no espaço das métricas, obtém-se

$$Z[\hat{g}] = \int \frac{[d\zeta dX]}{V_{diff \times Weyl}} \Delta_{FP}(\hat{g}) \exp(-S[X, \hat{g}]), \quad (2.44)$$

**Esta associação é viável se G é um grupo de Lie, para o qual deve-se restringir os difeomorfismos a aqueles que são conectados ao elemento identidade.

mas como Δ_{FP} e a ação são invariantes por transformações de difeomorfismos e Weyl, nada depende de ζ , portanto, o volume $V_{diff \times Weyl}$ vai ser cancelado com $\int [d\zeta]$, obtendo

$$Z[\hat{g}] = \int [dX] \Delta_{FP}(\hat{g}) \exp([X, \hat{g}]). \quad (2.45)$$

Agora, o problema se reduz a identificar a forma de $\Delta_{FP}(\hat{g})$. Para fazer esta identificação, faz-se uma variação em primeira ordem na condição de gauge^{††}:

$$\begin{aligned} \hat{g}_{ab}(\sigma') &\approx (1 + 2\omega)(\delta_a^c - \frac{\partial \delta \sigma^c}{\partial \sigma^a})(\delta_b^d - \frac{\partial \delta \sigma^d}{\partial \sigma^b})g_{cd}(\sigma) \\ &= g_{ab} + 2\omega g_{ab} - \nabla_{(a}\delta\sigma_{b)} + \delta\sigma^c \partial_c g_{ab}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

onde ∇_a é a derivada covariante definida em (Σ, g) e os parênteses nos sub-índices indicam que são simétricos. Mas para uma transformação infinitesimal

$$\hat{g}_{ab}(\sigma') = \hat{g}_{ab}(\sigma + \delta\sigma) \approx \hat{g}_{ab}(\sigma) + \delta\sigma^c \partial_c g_{ab}, \quad (2.47)$$

então a variação na forma funcional de g é

$$\begin{aligned} \delta g_{ab} &= \hat{g}_{ab}(\sigma) - g_{ab}(\sigma), \\ &= 2\omega g_{ab} - \nabla_{(a}\delta\sigma_{b)}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Somando e subtraindo $g_{ab}\nabla_c\delta\sigma^c$ em (2.48) permite escrever esta equação como

$$\delta g_{ab} = (2\omega - \nabla_c\delta\sigma^c)g_{ab} - 2(P_1\delta\sigma)_{ab}, \quad (2.49)$$

onde

$$(P_1\delta\sigma)_{ab} \equiv \frac{1}{2}(\nabla_a\delta\sigma_b + \nabla_b\delta\sigma_a - g_{ab}\nabla_c\delta\sigma^c). \quad (2.50)$$

Até primeira ordem nos parâmetros da transformação de gauge, de (2.40)

$$\Delta_{FP}^{-1}(\hat{g}) = \int [d\omega d\delta\sigma] \delta([-(2\omega - \hat{\nabla}_c\delta\sigma^c)\hat{g}_{ab} + 2(\hat{P}_1\delta\sigma)_{ab}]). \quad (2.51)$$

Usando a definição da função delta, e inserindo ela em (2.51):

$$\begin{aligned} \Delta_{FP}^{-1}(\hat{g}) &= \int [d\beta d\delta\sigma] \exp(i \int d^2\sigma \hat{g}^{\frac{1}{2}} \beta^{ab} [\hat{\nabla}\delta\sigma\hat{g} + 2\hat{P}_1\delta\sigma]_{ab}) \times \\ &\times \int \frac{[d\omega]}{2\pi} \exp(i \int d^2\sigma \hat{g}^{\frac{1}{2}} \omega [-2\beta^{ab}\hat{g}_{ab}]), \end{aligned} \quad (2.52)$$

^{††}É suficiente fazer uma transformação em primeira ordem, já que incluir mais ordens afastaria da escolha $\hat{g}$.

onde considera-se, sem perda de generalidade, que $\beta^{ab}(\sigma)$ é um tensor simétrico^{††}. O segundo fator é precisamente $\delta(-2\beta^{ab}\hat{g}_{ab})$, restringindo a somar só sobre tensores simétricos e sem traço. Chamando eles de β'^{ab} , i.e $\hat{g}_{ab}\beta'^{ab} = 0$. Usando de novo a definição do δ em (2.52), obtem-se

$$\Delta_{FP}^{-1}(\hat{g}) = \int [d\beta' d\delta\sigma] \exp(4\pi i \int d^2\sigma \hat{g}^{\frac{1}{2}} \beta'^{ab} [\hat{P}_1 \delta\sigma]_{ab}). \quad (2.53)$$

Tem-se então uma forma para o inverso da medida no “gauge slice” $\Delta_{FP}^{-1}(\hat{g})$. No entanto, o que se deseja conhecer não é o inverso da medida, mas a medida mesmo. Lembrando que as integrais funcionais sobre campos grassmanianos, dão o resultado inverso do que a integral funcional sobre campos bosônicos, relaciona-se

$$\delta\sigma^a \rightarrow c^a \quad (2.54)$$

$$\beta'^{ab} \rightarrow b^{ab} \quad (2.55)$$

obtendo

$$\Delta_{FP}(\hat{g}) = \int [dbdc] \exp(-S_f), \quad (2.56)$$

com

$$S_f = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\hat{g}} b^{ab} (\hat{P}_1 c)_{ab} = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\hat{g}} b^{ab} \hat{\nabla}_a c_b. \quad (2.57)$$

Os campos b e c são conhecidos como os fantasmas de Faddeev-Popov. Desta maneira, o problema do elemento de medida $\Delta_{FP}(\hat{g})$ se reduz à inclusão de uma ação para os campos fantasmas

$$Z[\hat{g}] = \int [dX dbdc] \exp(-S - S_f). \quad (2.58)$$

Fixando a métrica no gauge conforme, primeiro, se argumentará qual é a origem da perda da simetria de Weyl, e depois, se encontrarão as condições que devem ser satisfeitas para que quanticamente a teoria tenha esta simetria.

2.2.2 O elemento de medida e a origem da anomalia conforme

As ações de Polyakov e para os campos fantasma no gauge conforme, usando coordenadas $(z, \bar{z})$ são

$$S_P = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu, \quad (2.59)$$

^{††}O tensor β^{ab} pode não ter esta restrição, mas sempre pode ser decomposto numa parte simétrica e uma parte antissimétrica, e esta última multiplicada pelo tensor simétrico na exponencial de (2.52) é zero, o que introduziria um fator e^0 .

$$S_f = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b_{zz} \bar{\partial} c^z + b_{\bar{z}\bar{z}} \partial c^{\bar{z}}). \quad (2.60)$$

Como já foi discutido, S_P tem invariância conforme. A ação (2.60) é invariante por transformações

$$\delta b_{zz} = -v \partial b_{zz} - 2(\partial v) b_{zz}, \quad (2.61)$$

$$\delta c^z = -v \partial c^z + (\partial v) c^z, \quad (2.62)$$

e por transformações análogas para $b_{\bar{z}\bar{z}}$ e $c^{\bar{z}}$. As transformações (2.61) e (2.62) são transformações para campos conformes com peso $(2, 0)$ e $(-1, 0)$ respectivamente. Uma definição do que é o peso conforme de um campo apresenta-se no Apêndice A. Por causa da simetria conforme de S_P e S_f , o exponencial $e^{-S_P - S_f}$ é invariante conforme, e a única possível causa da perda desta simetria na função de partição (2.58) deve vir do elemento de medida funcional $[dX db dc]$. Para dar uma noção de por que o elemento de medida não é invariante conforme, supõe-se que a soma funcional sobre cada espaço de funções X, b, c seja dividido (independentemente) em elementos de volume infinitesimais. Após essa divisão, multiplica-se o volume destes elementos por $\exp(-S[\hat{g}, X, b, c])$ e se soma sobre todas as possíveis configurações. O que esta medida conta é quantas configurações existem num elemento infinitesimal. Dando privilégio à simetria de difeomorfismos na folha de mundo nesta soma, o elemento de volume infinitesimal deverá ter esta simetria. Mas para definir um elemento de volume nesses espaços é necessário primeiro ter uma noção de distância, definida através de um produto interno. Isto torna necessário o uso da métrica da folha de mundo. As distâncias entre duas configurações vizinhas X e $X + \delta X$, b e $b + \delta b$ e c e $c + \delta c$ são definidas por

$$||\delta X||^2 = \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{\hat{g}} \delta X^\mu \delta X_\mu, \quad (2.63)$$

$$||\delta b||^2 = \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{\hat{g}} \hat{g}_{ab} \hat{g}_{cd} b^{ac} b^{bd}, \quad (2.64)$$

$$||\delta c||^2 = \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{\hat{g}} \hat{g}_{ab} c^a c^b. \quad (2.65)$$

Claramente, eles são construídos de maneira invariante por reparametrizações na folha de mundo, mas não têm simetria de Weyl. Assim, o elemento de medida na integral funcional é a causa da anomalia. Apesar disso, ainda é possível encontrar condições sob as quais a teoria é livre de anomalia. No caso clássico o traço do tensor energia momento é zero, por causa da simetria conforme. No caso quântico impor $\langle T_a^a \rangle = 0$, com $\langle T_{ab} \rangle$ propriamente definido, permitirá encontrar uma condição para

que a teoria seja livre de anomalia.

2.2.3 Cálculo da Anomalia de Weyl

Uma vez fixado um gauge para a métrica, por exemplo o gauge conforme, a função de partição deve ser independente desta escolha, i.e

$$Z[\hat{g}'] = Z[\hat{g}], \quad (2.66)$$

onde $\hat{g}'$ é um segundo gauge obtido a partir de um primeiro gauge $\hat{g}$ (ou vice versa) através de alguma transformação de Weyl e/ou difeomorfismos. Esta exigência a sua vez requer fortemente que a teoria formulada quanticamente tenha as mesmas simetrias que a teoria clássica.

O comportamento da função de partição com respeito a transformações funcionais do gauge da métrica da folha de mundo define o tensor energia-momento quanticamente

$$\delta Z = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\hat{g}} \delta \hat{g}_{ab} \langle T^{ab} \rangle, \quad (2.67)$$

onde as quantidades escritas entre os símbolos $\langle \rangle$ são integradas funcionalmente sobre os campos X, b e c , multiplicados pela exponencial de menos a ação (incluindo os fantasmas).

A função de partição tem simetria de reparametrizações, pela qual o tensor energia momento é conservado (desprezando termos de fronteira). Para ver isto, lembre-se que o efeito de uma transformação de difeomorfismos infinitesimal em $\hat{g}$ é

$$\delta \hat{g}_{ab} = \nabla_a \delta \sigma_b + \nabla_b \delta \sigma_a, \quad (2.68)$$

então

$$\begin{aligned} \delta_{Diff} Z = 0 &= \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\hat{g}} \nabla_a \delta \sigma_b \langle T^{ab} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\hat{g}} \nabla_a (\delta \sigma_b \langle T^{ab} \rangle) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\hat{g}} \delta \sigma_b \nabla_a \langle T^{ab} \rangle. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Assim, para $\delta \sigma$ arbitrários, o tensor energia momento é conservado: $\nabla_a \langle T^{ab} \rangle = 0$. No entanto, como já se mencionou, Z não tem simetria de Weyl, portanto o traço do tensor energia-momento

$$\delta_{Weyl} Z = \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\hat{g}} \omega \langle T_a^a \rangle, \quad (2.70)$$

não tem por que ser zero. Ao igual que no caso clássico, Z é invariante sob transformações de Weyl (e portanto Z não depende do gauge) se o traço do tensor energia momento é zero. Mas dado que ele é diferente de zero por causa da anomalia conforme, é possível encontrar uma forma explicita para sua dependencia. T tem dimensão de *comprimento*⁻² na folha de mundo, e o traço tem simetria de difeomorfismos. Estas observações sugerem que

$$\langle T_a^a \rangle = a_1 R^{(2)}, \quad (2.71)$$

onde $R^{(2)}$ é o escalar de curvatura na folha de mundo e a_1 é uma constante de proporcionalidade sem dimensão, cuja forma deve ser determinada. Seu cancelamento implica imediatamente o cancelamento da anomalia, mas a questão é encontrar sua forma. Para começar, note-se que

$$R^{(2)} = e^{-2\omega} \delta^{ad} [\partial_{[c} \Gamma_{a]d}^c + \Gamma^e_{d[a} \Gamma^c_{c]e}], \quad (2.72)$$

$$= -2e^{-2\omega} \partial_a \partial_a \omega. \quad (2.73)$$

Mas o operador Laplaciano em duas dimensões no gauge conforme é dado por

$$\Delta \equiv \hat{g}^{ab} \nabla_a \nabla_b = e^{-2\omega} \delta^{ab} \partial_a \partial_b, \quad (2.74)$$

logo

$$R^{(2)} = -2\Delta\omega. \quad (2.75)$$

Portanto, usando (2.71) e (2.75), a variação da função de partição (2.67) devido a transformações de Weyl infinitesimais $\delta \hat{g}_{ab} = 2\delta\omega \delta_{ab}$ é

$$\delta_{Weyl} Z[e^{2\omega} \delta] = -\frac{a_1}{\pi} Z[e^{2\omega} \delta] \int d^2\sigma (\delta^{ab} \partial_a \partial_b \omega) \delta\omega. \quad (2.76)$$

Integrando por partes, e desprezando o valor de ω na borda de Σ , encontra-se que

$$\int_{\Sigma} d^2\sigma (\delta^{ab} \partial_a \partial_b \omega) \delta\omega = -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^2\sigma \delta (\delta^{ab} \partial_a \omega \partial_b \omega), \quad (2.77)$$

o que permite escrever, integrando ambos os lados as variações em (2.76)

$$Z[e^{2\omega}] = Z[\delta] \exp \left(\frac{a_1}{2\pi} \int d^2\sigma \delta \partial_a \omega \partial_a \omega \right). \quad (2.78)$$

A seguinte expressão [15] diz qual é a dependência da função de partição com respeito à fixação de gauge, para um gauge arbitrário

$$Z[\hat{g}] = Z[\delta] \exp \left\{ -\frac{a_1}{8\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\hat{g}} \int d^2\sigma' \sqrt{\hat{g}} \hat{R}^{(2)}(\sigma) G(\sigma, \sigma') \hat{R}^{(2)}(\sigma') \right\}, \quad (2.79)$$

com G satisfazendo

$$\sqrt{\hat{g}} \Delta G(\sigma, \sigma') = \delta^2(\sigma - \sigma'). \quad (2.80)$$

É fácil ver que (2.79) se reduz a (2.78) quando $\hat{g}$ é o gauge conforme.

Agora se mostrará uma maneira de encontrar um valor para a_1 . Fazendo uma expansão de $\hat{g}$ ao redor de uma métrica plana $\hat{g} = \delta + h$, e usando coordenadas complexas, o escalar de curvatura na folha de mundo é

$$R^{(2)} = 4\partial^2 h_{\bar{z}\bar{z}} + 4\bar{\partial}^2 h_{zz} - 8\partial\bar{\partial} h_{z\bar{z}}, \quad (2.81)$$

enquanto que a solução de (2.80) neste limite satisfaz

$$G = \frac{1}{4\pi} \ln |z - z'|^2. \quad (2.82)$$

De (2.79), mantendo termos de segunda ordem em h , encontra-se

$$\ln \frac{Z[\delta + h]}{Z[\delta]} = \frac{3a_1}{4\pi^2} \int d^2z \int d^2z' \frac{h_{\bar{z}\bar{z}}(z, \bar{z}) h_{\bar{z}\bar{z}}(z', \bar{z}')}{(z - z')^4}. \quad (2.83)$$

Por outro lado, fazendo a mesma expansão na equação que define o tensor energia-momento obtem-se

$$\ln \frac{Z[\delta + h]}{Z[\delta]} = -\frac{1}{8\pi^2} \int d^2z \int d^2z' \langle T_{zz}(z) T_{zz}(z') \rangle h_{\bar{z}\bar{z}}(z, \bar{z}) h_{\bar{z}\bar{z}}(z', \bar{z}'). \quad (2.84)$$

O cálculo de $\langle T(z)T(z') \rangle$ é feito no apêndice A. Seu resultado é

$$\langle T_{zz}(z) T_{zz}(z') \rangle = \frac{D-26}{2(z-z')^4} + \frac{2}{(z-z')^2} T_{zz}(z') + \frac{1}{(z-z')} \partial_{z'} T_{zz}(z'). \quad (2.85)$$

Substituindo (2.85) em (2.84) obtém-se

$$\ln \frac{Z[\delta + h]}{Z[\delta]} = -\frac{D-26}{16\pi^2} \int d^2z \int d^2z' \frac{h_{\bar{z}\bar{z}}(z, \bar{z})}{(z-z')^4} h_{\bar{z}\bar{z}}(z', \bar{z}'). \quad (2.86)$$

Finalmente, comparando (2.83) com (2.86) acha-se

$$a_1 = -\frac{D-26}{12}, \quad (2.87)$$

logo

$$\langle T_a{}^a \rangle = -\frac{D-26}{12}R^{(2)}. \quad (2.88)$$

Finalmente, a teoria será livre de anomalias se $a_1 = 0$: se a dimensão do espaço-tempo no qual a corda se propaga é $D = 26$. Isto é, para que a teoria tenha simetria conforme no nível quântico o número de mapas X da folha de mundo no espaço-tempo $\mathcal{M}$ tem que ser 26. Até onde é conhecido, o número de dimensões do espaço-tempo é quatro, mas este é um resultado interessante, pois é uma condição de consistência que fixa a dimensão do espaço tempo. Incorporando graus de liberdade fermiônicos de uma maneira supersimétrica, a teoria é invariante super-conforme num espaço-tempo de dimensão menor: $D = 10$. Uma sugestão é que as dimensões que “não são vistas” estão compactificadas, mas ainda é um problema aberto qual é a variedade que deve-se usar para fazer a compactificação. Esta não será a linha a ser seguida nos próximos capítulos.

Uma outra linha a seguir, não menos interessante, é cómo acoplar cordas a campos tomando valores no espaço tempo e verificar se a teoria é livre de anomalia. Este será o tópico do capítulo 3. O resultado que se obtendrá, além de conter o resultado final derivado neste capítulo no limite de não interação, dará condições interessantes sobre os campos a acoplar.

Capítulo 3

Acoplamento da corda a campos no espaço-tempo

Uma maneira de introduzir interações em teoria de cordas é acoplar os campos $X^\mu(\sigma)$, que descrevem a corda propagando-se no espaço-tempo, com campos tomando valores neste espaço*. Logicamente, para não alterar o tipo de objeto que se quer descrever, os acoplamentos ou interações devem ser introduzidos de maneira tal que a ação incluindo acoplamentos tenha as simetrias da ação de Polyakov, e reduzir-se a ela no limite de não interação. Em princípio, existem inumeráveis campos a acoplar no espaço-tempo mas se a teoria tem de ser invariante por um grupo maior do que Poincaré em $\mathcal{M}$, i.e, difeomorfismos, os acoplamentos da corda devem ser construídos com objetos tensoriais e o escalar adimensional de ação deve ser construído corretamente a partir destes objetos. Este critério ainda deixa uma margem ampla de acoplamentos. No entanto, se a teoria de campos (em duas dimensões) deve ter uma estrutura causal bem definida, não podem existir derivadas de ordem mais altas do que dois na ação [16]. Isto quer dizer que os campos X^μ que descrevem a corda serão acoplados a tensores do tipo $(2, 0)$ de uma maneira invariante por difeomorfismos e Weyl. Um primeiro campo a acoplar será um tensor simétrico (com dimensão de *comprimento*⁰) que pode-se pensar como uma métrica $G_{\mu\nu}(X)$ para $\mathcal{M}$. A ação

$$S_G = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{|g|} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}(X) \quad (3.1)$$

satisfaz às prescrições mencionadas e reduz-se à ação de Polyakov no limite $G_{\mu\nu}(X) = \eta_{\mu\nu}$. No entanto, esse não é o termo mais geral permitido pelas prescrições. Também pode-se considerar a ação caracterizada por um tensor antissimétrico no espaço-tempo $B_{\mu\nu}(X)$ também de dimensão *comprimento*⁰

*Além desta classe de interação, existe uma outra classe, que vem de somar sob todas as possíveis topologias que unem duas configurações de cordas fixas. No entanto, o tipo de acoplamentos que se quer introduzir neste capítulo será restrito a folhas de mundo com topologia trivial, i.e, a nível de árvore em cordas.

$$S_B = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu}(X), \quad (3.2)$$

onde $\epsilon^{ab} = \tilde{\epsilon}^{ab}/\sqrt{|g|}$ e $\tilde{\epsilon}^{ab}$ é o tensor de Levi-Civita, com $\tilde{\epsilon}^{12} = 1$. Por causa disto, não aparece $\sqrt{|g|}$ no elemento de volume bidimensional. A soma destas duas ações define uma teoria clássica de campos que tem simetria conforme. O seguinte passo é formular este modelo quanticamente, e verificar se ele é invariante conforme.

3.1 Ponto de vista da Teoria Quântica de Campos: Modelo sigma generalizado

Visto como uma teoria de campos bidimensional no espaço Σ , a ação S_G é conhecida como uma ação para o *modelo sigma não linear*. Seguindo o mesmo esquema de quantização do capítulo 2: integrando funcionalmente os campos (X, g) , será necessário fixar um gauge para a métrica da folha de mundo, portanto aparecem de novo os campos fantasmas b e c . Eles não serão acoplados com os novos campos a introduzir, por este motivo, nem sua ação nem seu respectivo elemento de medida funcional serão escritos na ação do sistema com acoplamentos. Assume-se pois que o gauge $\hat{g}$ foi escolhido e a contribuição dos fantasma ao traço do tensor energia momento será escrita no final.

A diferença substancial quando se faz uma mudança de $\eta \rightarrow G(X)$ é que incorporam-se infinitos termos de interação, como nota-se fazendo uma expansão em campo de fundo: $X = X_0 + l\Pi$, onde X_0 é alguma configuração fixa, l é uma constante com dimensão de comprimento em $\mathcal{M}$ e Π^μ é um campo quântico. A expansão ao redor de X_0 constitui uma expansão perturbativa para o campo G :

$$G_{\mu\nu}(X) = G_{\mu\nu}(X_0) + l \frac{\partial}{\partial X^\lambda} G_{\mu\nu}(X_0) \Pi^\lambda + \frac{1}{2} l^2 \frac{\partial^2}{\partial X^\lambda \partial X^\rho} G_{\mu\nu}(X_0) \Pi^\lambda \Pi^\rho + \dots, \quad (3.3)$$

e da mesma maneira encontra-se uma expansão análoga para $B_{\mu\nu}$. Duas observações são interessantes desse tipo de expansão. A primeira é que ela dá uma idéia de quão boa é a aproximação perturbativa já que se o produto de potências da constante l com derivadas de G em (3.3) satisfaz

$$l^p \frac{\partial^p}{\partial X^{\lambda_1} \dots \partial X^{\lambda_p}} G_{\mu\nu}(X_0) \ll 1, \quad (3.4)$$

(e uma expressão análoga para a expansão de B) então uma boa aproximação é considerar os termos em primeiras potências de l . Além disso, l faz uma contagem da ordem na expansão perturbativa.

A segunda observação é que as constantes de acoplamento $G_{\mu\nu}(X_0)$, $l\partial_\lambda G_{\mu\nu}(X_0)$, etc têm dimensão *comprimento*⁰ (a mesma situação acontece com a expansão de B). Por este motivo, a teoria apesar de ter infinitos acoplamentos, é renormalizável. Isto será aproveitado no capítulo 4 para introduzir uma abordagem que permitirá encontrar condições para o cancelamento da anomalia a ordem mais alta do que 1-loop.

Agora bem, como $\sqrt{\alpha'}$ tem dimensão de *comprimento* em $\mathcal{M}$, pode-se usar esta constante para contar a ordem da expansão perturbativa $l \rightarrow \sqrt{\alpha'}$.

Tal como no caso já estudado da corda sem acoplamentos, a questão a resolver é se o sistema corda-campos no espaço tempo é livre de anomalia. Esta questão deverá ser resolvida ordem a ordem em teoria de perturbações. Com este esquema em mente, pode-se pensar em somar mais um termo à ação definida por $S_G + S_B$. Um termo da forma

$$S_\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{|g|} R^{(2)} \Phi(X), \quad (3.5)$$

tem simetria por difeomorfismos, tanto em $\mathcal{M}$ como em Σ mas não tem simetria de Weyl. A ação (3.5) reduz-se, no caso $\Phi(X) = 1$ à característica de Euler χ , que foi somada à ação de Polyakov no Capítulo 2. Ela sim foi invariante por transformações de Weyl[†], mas por causa do campo Φ , (3.5) não terá esta simetria. Isto em verdade não é um problema, por causa das dimensões. O campo $\Phi(X)$ tem dimensão de *comprimento*⁰ então não é necessário introduzir a constante α' para fazer a ação S_Φ adimensional. Por este motivo, a contribuição $\langle T_a{}^a \rangle$ a nível clássico usando S_Φ e as calculadas a 1-loop usando $S_G + S_B$ será da mesma ordem no parâmetro perturbativo (α'^0), as contribuições a 1-loop usando S_Φ serão da mesma ordem α' daquelas calculadas a 2-loops usando $S_G + S_B$ (α') e assim sucessivamente. Em outras palavras, o termo na ação sem invariância conforme só começa a contribuir quando contribuições quânticas são consideradas. De fato, a inclusão de uma ação para o campo Φ , conhecido como o *Dílaton* é importante para conseguir anular a anomalia, como se verá explicitamente no cálculo a um loop. Um termo para o dílaton será pois incluído na ação S_σ total:

$$S_\sigma = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{|g|} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}(X) + \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2\sigma \epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu}(X) + \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{|g|} R^{(2)} \Phi(X). \quad (3.6)$$

[†]O que permite ver que χ tem simetria de Weyl é escrever o resultado da variação como um termo de superfície.

Esta é uma generalização do Modelo Sigma. Tratando este modelo de modo perturbativo será possível encontrar as condições para que seja livre de anomalia a 1-loop. No entanto, existem dois problemas a serem resolvidos. Um é que a expansão perturbativa não está escrita em termos invariantes por difeomorfismos em $\mathcal{M}$, porque a diferença de dois pontos $X - X_0$ não tem esta simetria. Isto faz com que os termos da expansão perturbativa sejam difíceis de se manipular. O segundo problema é que pela maneira em que estão escritos os acoplamentos, não é fácil encontrar o propagador da teoria livre. A solução desses problemas é o objeto da seguinte seção.

3.2 Expansão em campo de fundo

Fazendo uma expansão perturbativa será encontrada uma expressão diagramática para os termos dessa expansão. Por isto, começa-se introduzindo a função de partição

$$Z_J \equiv e^{-W[J]} = \int [dX] \exp(-(S[X] + X \cdot J)), \quad (3.7)$$

que define o funcional gerador $W[J]$ dos diagramas conectados, onde

$$X \cdot J = \int d^2\sigma X^\mu J_\mu. \quad (3.8)$$

A derivação funcional com respeito à corrente J define o campo médio

$$X_0^\mu \equiv \frac{\delta W}{\delta J_\mu} = \frac{1}{Z_J} \int [dX] X^\mu e^{S_J}, \quad (3.9)$$

com

$$S_J \equiv S[X] + X \cdot J. \quad (3.10)$$

Este campo médio X_0^μ desempenhará o papel de campo de fundo; será o campo ao redor do qual se fará a expansão. A ação efetiva é definida por

$$\Gamma \equiv W - X_0 \cdot J. \quad (3.11)$$

Desta equação, consegue-se escrever a corrente como

$$J_\mu = -\frac{\delta \Gamma}{\delta X_0^\mu}, \quad (3.12)$$

portanto, a ação efetiva toma a forma

$$\Gamma = W + X_0 \cdot \frac{\delta \Gamma}{\delta X_0}, \quad (3.13)$$

o que permite escrever $\exp(-\Gamma)$ usando (3.7), (3.12) e (3.13):

$$e^{-\Gamma}[X_0] = \int [d\Pi] \exp \left(- (S[X_0 + \Pi] - \Pi \cdot \frac{\delta \Gamma}{\delta X_0}) \right), \quad (3.14)$$

onde $\Pi^\mu \equiv X^\mu - X_0^\mu$. O campo Π desempenhará o papel de campo quântico no método de campo de fundo[†]. Em lugar de usar este funcional, usar-se-á

$$\Omega[X_0] = \int [d\Pi] \exp \left(- (S[X_0 + \Pi] - S[X_0] - \Pi \cdot \frac{\delta \Gamma}{\delta X_0}) \right). \quad (3.15)$$

Este será o gerador dos diagramas irreduzíveis a uma partícula. Subtraindo $S[X_0]$ da exponencial que aparece em (3.14), as expansões dos campos ao redor de X_0 sempre serão expressões do campo quântico Π . Fazendo uma expansão em série de Taylor ao redor de X_0 obter-se-á uma série de potências em Π . Cada um dos termos desta série não terá invariância por transformações gerais de coordenadas em $\mathcal{M}$ porque Π , ao ser escrito como uma diferença de coordenadas, não tem esta invariância. Por outro lado, mantendo a invariância de difeomorfismos em $\mathcal{M}$ facilitará a obtenção dos termos na expansão. Por isso, será importante escolher um sistema de coordenadas no qual esta invariância seja manifesta.

3.2.1 Expansão usando coordenadas normais

Dado que Π no sistema de coordenadas escolhido não é um vetor, o problema será resolvido se for possível encontrar uma transformação de coordenadas $\Pi \rightarrow \Pi(\xi)$ com ξ^μ transformando como um vetor contravariante [17].

Sistema de coordenadas normais Se X_0^μ são as coordenadas para um ponto $\mathcal{P}_0$ em $\mathcal{M}$ e $X_0^\mu + \Pi^\mu$ são as coordenadas para um ponto $\mathcal{P}$, é possível encontrar um outro sistema de coordenadas através da geodésica que une estes dois pontos, sempre que eles sejam suficientemente próximos [18]. Considere-se que o parâmetro afim t que parametriza a geodésica

$$\frac{d^2 \lambda^\mu}{dt^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{d\lambda^\nu}{dt} \frac{d\lambda^\rho}{dt} = 0 \quad (3.16)$$

é tal que $\lambda^\mu(0) = X_0^\mu$ e $\lambda^\mu(1) = X_0^\mu + \Pi^\mu$. Definindo ξ^μ como

$$\xi^\mu \equiv \frac{d\lambda^\mu}{dt}(0), \quad (3.17)$$

[†]Note-se a diferença com $X = X_0 + l\Pi$ escrito anteriormente. Agora Π terá dimensão de comprimento, mas isto não mudará o tipo de expansão escrita em potências de α' .

ele será um vetor tangente à geodésica no ponto $\mathcal{P}_0$, e como tal, transformará como um vetor sob uma mudança de coordenadas. Sendo assim, qualquer objeto geométrico expandido como uma série de Taylor ao redor de X_0^μ será uma expressão invariante por difeomorfismos em $\mathcal{M}$

$$T_{\mu_1 \dots \mu_k}(X_0 + \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{\nu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \xi^{\nu_n}} \right) T_{\mu_1 \dots \mu_k}(X_0) \xi^{\nu_1} \dots \xi^{\nu_n}. \quad (3.18)$$

Supondo uma solução para a equação da geodésica (3.16) em séries de potências

$$\lambda^\mu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} \lambda^\mu(t) t^n, \quad (3.19)$$

então esta solução, sujeita às condições iniciais tem a forma

$$\lambda^\mu(t) = X_0^\mu + \xi^\mu t - \frac{1}{2} \Gamma_{\nu_1 \nu_2}^\mu \xi^{\nu_1} \xi^{\nu_2} t^2 - \frac{1}{3!} \Gamma_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^\mu \xi^{\nu_1} \xi^{\nu_2} \xi^{\nu_3} t^3 - \dots, \quad (3.20)$$

$$= X_0^\mu + \xi^\mu t - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \Gamma_{\nu_1 \dots \nu_n}^\mu \xi^{\nu_1} \dots \xi^{\nu_n} t^n, \quad (3.21)$$

onde

$$\Gamma_{\nu_1 \nu_2 \nu_3}^\mu = \partial_{\nu_1} \Gamma_{\nu_2 \nu_3}^\mu - \Gamma_{\nu_1 \nu_2}^\lambda \Gamma_{\lambda \nu_3}^\mu - \Gamma_{\nu_1 \nu_3}^\lambda \Gamma_{\lambda \nu_2}^\mu, \quad (3.22)$$

$$\equiv \nabla_{\nu_1} \Gamma_{\nu_2 \nu_3}^\mu. \quad (3.23)$$

A definição (3.23) é usada de maneira recursiva para definir $\Gamma_{\nu_1 \dots \nu_n}^\mu$ como a derivada covariante atuando só nos índices inferiores

$$\Gamma_{\nu_1 \dots \nu_n}^\mu \equiv \nabla_{\nu_1} \Gamma_{\nu_2 \dots \nu_n}^\mu. \quad (3.24)$$

Finalmente, $\lambda(t=1)$ define uma transformação de coordenadas na qual Π escreve-se como um vetor contravariante se neste sistema de coordenadas

$$\bar{\Gamma}_{(\nu_1 \dots \nu_n)}^\mu = 0. \quad (3.25)$$

O que define o *sistema de coordenadas normais*. A notação com barra indicará que a expressão é válida no sistema de coordenadas normais.

Neste sistema de coordenadas, muitas expressões simplificam-se. Os símbolos de Christoffel anulam-se, mas não suas derivadas, portanto, as componentes do tensor de curvatura escrevem-se:

$$\bar{R}^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda \bar{\Gamma}_{\nu\rho}^\mu - \partial_\rho \bar{\Gamma}_{\nu\lambda}^\mu. \quad (3.26)$$

De (3.25) para $n=3$ obtém-se

$$\partial_\nu \bar{\Gamma}_{\lambda\rho}^\mu = -\partial_\lambda \bar{\Gamma}_{\rho\nu}^\mu - \partial_\rho \bar{\Gamma}_{\lambda\nu}^\mu. \quad (3.27)$$

Somando $2\partial_\nu \bar{\Gamma}_{\rho\lambda}^\mu$ a ambos os lados de (3.27) e usando a simetria dos símbolos de Christoffel, obtém-se

$$\partial_{\nu_1} \bar{\Gamma}_{\nu_2\nu_3}^\mu = \frac{1}{3} \left(\bar{R}^\mu{}_{\nu_2\nu_1\nu_3} + \bar{R}^\mu{}_{\nu_3\nu_1\nu_2} \right). \quad (3.28)$$

Agora este resultado pode ser usado para encontrar a expansão em coordenadas normais dos campo $G_{\mu\nu}$ e $B_{\mu\nu}$ até a ordem de interesse [§].

Expansao Perturbativa dos campos no espaço tempo

De (3.18) obtém-se

$$\begin{aligned} \bar{G}_{\mu\nu}(X_0 + \xi) &= \bar{G}_{\mu\nu}(X_0) + \frac{\partial}{\partial \xi^\lambda} \bar{G}_{\mu\nu}(X_0) \xi^\lambda + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^\lambda \partial \xi^\rho} \bar{G}_{\mu\nu}(X_0) \xi^\lambda \xi^\rho \dots \end{aligned} \quad (3.29)$$

Como se esta escrevendo esta expressão num sistema de coordenadas normais então

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\lambda} \bar{G}_{\mu\nu} = \nabla_\lambda \bar{G}_{\mu\nu}, \quad (3.30)$$

mas supõe-se que em $(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ a métrica é covariantemente constante, portanto este termo não aparece na expansão.

As derivadas do terceiro termo em (3.29) podem ser escritos como

$$\partial_\lambda \partial_\rho \bar{G}_{\mu\nu} = \nabla_\lambda \nabla_\rho \bar{G}_{\mu\nu} + \partial_\lambda \bar{\Gamma}_{\rho\mu}^\eta \bar{G}_{\eta\nu} + \partial_\lambda \bar{\Gamma}_{\rho\nu}^\eta \bar{G}_{\mu\eta}. \quad (3.31)$$

Simetrizando (3.31) em λ e ρ , e usando (3.28)

$$\partial_{(\lambda} \partial_{\rho)} \bar{G}_{\mu\nu} = \nabla_{(\lambda} \nabla_{\rho)} \bar{G}_{\mu\nu} + \frac{1}{3} [\bar{R}_{\nu(\rho\lambda)\mu} + \bar{R}_{\nu\mu(\lambda\rho)} + \bar{R}_{\mu(\rho\lambda)\nu} + \bar{R}_{\mu\nu(\lambda\rho)}]. \quad (3.32)$$

Substituindo esta expressão em (3.29), e usando as simetrias dos componentes do tensor de curvatura

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = -R_{\mu\nu\rho\lambda}, \quad R_{\mu\nu\lambda\rho} = R_{\lambda\rho\mu\nu}, \quad (3.33)$$

[§]Usando (3.25) é possível relacionar derivadas da conexão em coordenadas normais com tensores de curvatura para $n > 3$, as quais são necessárias para calcular a expansão perturbativa a fim de obter termos de ordem mais alta que 1-loop. No entanto, um algoritmo mais útil para encontrar expansões de tensores em coordenadas normais a ordens mais altas encontra-se em [19].

obtém-se

$$\bar{G}_{\mu\nu}(X_0 + \Pi) = \bar{G}_{\mu\nu}(X_0) + \frac{1}{3}\bar{R}_{\mu\lambda\rho\nu}\xi^\lambda\xi^\rho + \dots, \quad (3.34)$$

onde de novo, as derivadas covariantes de G são zero. Agora, a expansão (3.34) está escrita puramente em termos tensoriais, pelo qual, é uma expressão válida em qualquer sistema de coordenadas. Por este motivo, pode-se deixar de usar a notação com barra. Lembrando a expressão da função de partição (3.15), é necessário calcular também $\partial_a(X_0^\mu + \Pi^\mu)$. Para isto, calcula-se (3.20) em $s = 1$ e diferencia-se:

$$\partial_a(X_0^\mu + \Pi^\mu) = \partial_a X_0^\mu + \partial_a \xi^\mu - \frac{1}{2}\partial_\nu \bar{\Gamma}_{\lambda\rho}^\mu \xi^\lambda \xi^\rho \partial_a X_0^\nu - \dots, \quad (3.35)$$

e usando de novo (3.28),

$$\partial_a(X_0^\mu + \Pi^\mu) = \partial_a X_0^\mu + \nabla_a \xi^\mu + \frac{1}{3}\bar{R}^\mu{}_{\lambda\rho\nu}\partial_a X_0^\nu \xi^\lambda \xi^\rho - \dots, \quad (3.36)$$

onde

$$\nabla_a \xi^\mu \equiv \partial_a \xi^\mu + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu \xi^\lambda \partial_a X_0^\rho \quad (3.37)$$

é a covariantização de $\partial_a \xi^\mu$. Assim, (3.36) fica escrita de uma maneira onde a covariância é manifesta.

Finalmente multiplicando as expansões (3.34) e (3.36) encontra-se

$$\begin{aligned} S_G[X_0 + \Pi] &= S_G[X_0] + \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{|g|} g^{ab} G_{\mu\nu} \partial_a X_0^\mu \nabla_b \xi^\nu \\ &+ \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{|g|} g^{ab} (G_{\mu\nu} \nabla_a \xi^\mu \nabla_b \xi^\nu + R_{\mu\lambda\rho\nu} \partial_a X_0^\mu \partial_b X_0^\nu \xi^\lambda \xi^\rho) \\ &+ \frac{1}{3\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{|g|} g^{ab} R_{\mu\lambda\rho\nu} \partial_a X_0^\mu \nabla_b \xi^\nu \xi^\lambda \xi^\rho \\ &+ \frac{1}{12\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{|g|} g^{ab} R_{\mu\lambda\rho\nu} \nabla_a \xi^\mu \nabla_b \xi^\nu \xi^\lambda \xi^\rho \dots \end{aligned} \quad (3.38)$$

Se o campo X_0 satisfaz à equação de movimento clássica derivada de S_G

$$\partial_a(\sqrt{|g|} g^{ab} \partial_b X^\mu) = -\sqrt{|g|} g^{ab} \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \partial_a X_0^\nu \partial_b X_0^\lambda, \quad (3.39)$$

o termo linear em ξ da expansão (3.38) desaparece. Daqui em diante, supõe-se que este é o caso[¶]: escolhe-se o campo de fundo X_0 tal que ele satisfaz às equações de

[¶]Não é necessário substituir explicitamente a equação de movimento em (3.38), o termo linear em ξ^μ é precisamente a variação até primeira ordem da ação, com respeito a variações do campo X^μ .

movimento clássicas para S_σ .

Agora, para o tensor antissimétrico $B_{\mu\nu}$ obtém-se a seguinte expansão

$$B_{\mu\nu}(X_0 + \Pi) = B_{\mu\nu}(X_0) + \nabla_\lambda B_{\mu\nu}(X_0)\xi^\lambda + \frac{1}{2}(\nabla_\lambda \nabla_\rho B_{\mu\nu}(X_0) + \frac{1}{3}R^\eta{}_{\lambda\rho\mu}B_{\eta\nu}(X_0) + \frac{1}{3}R^\eta{}_{\lambda\rho\nu}B_{\mu\eta}(X_0))\xi^\lambda\xi^\rho + \dots \quad (3.40)$$

De (3.40) e (3.36), encontra-se

$$\begin{aligned} S_B[X_0 + \Pi] &= S_B[X_0] + \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2\sigma \epsilon^{ab} (B_{\mu\nu}(X_0) \partial_a X_0^\mu \nabla_b \xi^\nu \\ &\quad + \frac{1}{2} \nabla_\lambda B_{\mu\nu} \partial_a X_0^\mu \partial_b X_0^\nu \xi^\lambda) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2\sigma \epsilon^{ab} [B_{\mu\nu}(X_0) \nabla_a \xi^\mu \nabla_b \xi^\nu + 2 \nabla_\lambda B_{\mu\nu} \partial_a X_0^\mu \xi^\lambda \nabla_b \xi^\nu \\ &\quad + \frac{1}{2} (\nabla_\lambda \nabla_\rho B_{\mu\nu} + 2 B_{\mu\eta} R^\eta{}_{\lambda\rho\nu}) \partial_a X_0^\mu \partial_b X_0^\nu \xi^\lambda \xi^\rho] + \dots \end{aligned} \quad (3.41)$$

No entanto, note-se que a ação para o tensor antissimétrico S_B é invariante por transformações

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\mu\nu} + \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu, \quad (3.42)$$

para alguma função vetorial $\Lambda_\mu(X)$. Esta é uma simetria deste campo no espaço tempo, portanto, é importante que os termos da expansão também tenham esta simetria. Por este motivo, procura-se que os termos da expansão estejam em termos do “field strength”

$$H_{\mu\nu\lambda} \equiv \nabla_\mu B_{\nu\lambda} + \nabla_\nu B_{\lambda\mu} + \nabla_\lambda B_{\mu\nu} = \nabla_{[\mu} B_{\nu\lambda]}, \quad (3.43)$$

que é invariante por transformações (3.42). A notação com colchete nos subíndices indica que eles são antissimetrizados. Usando a regra do produto para derivadas, e desprezando termos de superfície, encontra-se a seguinte expansão para S_B até segunda ordem em ξ

$$S_B[X_0 + \Pi] = S_B[X_0] + \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2\sigma \epsilon^{ab} \left(H_{\lambda\mu\nu} \partial_a X_0^\lambda \xi^\mu \nabla_b \xi^\nu + \frac{1}{2} \nabla_\lambda H_{\mu\nu\rho} \partial_a X_0^\mu \partial_b X_0^\nu \xi^\lambda \xi^\rho \right) + \dots \quad (3.44)$$

A expansão para S_Φ obtém-se com maior facilidade

$$\begin{aligned} S_\Phi[X_0 + \Pi] &= S_\Phi[X_0] + \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{|g|} R^{(2)} \nabla_\mu \Phi(X_0) \xi^\mu \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{|g|} R^{(2)} \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi(X_0) \xi^\mu \xi^\nu + \dots \end{aligned} \quad (3.45)$$

Ao querer escrever os diagramas de Feynman correspondentes às expansões (3.38), (3.44) e (3.45), nota-se que o termo cinético, que só aparece em (3.38), não é simples por causa do acoplamento com o campo $G_{\mu\nu}$. Isto ocasiona dificuldade para encontrar o propagador do campo ξ . Felizmente, é possível simplificar esta tarefa, escolhendo uma base de coordenadas ortonormais, ou base tetrada. A seguir, se da uma descrição de como isto é feito.

Bases Coordenadas e bases Tetradas

Denotando por $\{\hat{\partial}_\mu\}$ os vetores da base coordenada, uma outra base escreve-se como uma combinação linear dela

$$\hat{e}_i = e_i^\mu \hat{\partial}_\mu, \quad (3.46)$$

com $i = 0, \dots, D - 1$. Para que a nova base seja ortonormal, ela deve satisfazer

$$G(\hat{e}_i, \hat{e}_j) = G_{\mu\nu} dX^\mu \otimes dX^\nu (e_i^\lambda \hat{\partial}_\lambda, e_j^\rho \hat{\partial}_\rho) = \delta_{ij}, \quad (3.47)$$

logo

$$G_{\mu\nu} e_i^\mu e_j^\nu = \delta_{ij}. \quad (3.48)$$

Denotando-se por e_i^μ os elementos inversos de e_μ^i , eles satisfazem

$$e_i^\mu e_\mu^j = \delta_i^j, \quad e_\mu^i e_i^\nu = \delta_\mu^\nu, \quad (3.49)$$

e de (3.48) obtém-se

$$\eta_{ij} e_\mu^i e_\nu^j = G_{\mu\nu}. \quad (3.50)$$

Nesta base, introduz-se a conexão ω_μ , com componentes $\omega_\mu^i{}_j$. Ela está definida pela condição que a derivada covariante atuando na base tetrada é zero:

$$\nabla_\mu e_\nu^i \equiv \partial_\mu e_\nu^i - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda e_\lambda^i + \omega_\mu^i{}_j e_\nu^j = 0. \quad (3.51)$$

Agora, é fácil ver como estão relacionadas as componentes de um vetor nas duas bases:

$$\xi = \xi^i \hat{e}_i = \xi^i e_i^\mu \hat{\partial}_\mu = \xi^\mu \hat{\partial}_\mu, \quad (3.52)$$

de onde

$$\xi^\mu = \xi^i e_i^\mu. \quad (3.53)$$

Portanto, usando (3.48), (3.51) e (3.53)

$$G_{\mu\nu} \nabla_a \xi^\mu \nabla_b \xi^\nu = \delta_{ij} e_\mu^i e_\nu^j \nabla_a \xi^\mu \nabla_b \xi^\nu, \quad (3.54)$$

$$= (\nabla_a \xi)^i (\nabla_b \xi)^i. \quad (3.55)$$

Neste caso, ∇_a indica a covariantização da derivada ∂_a , dada por

$$(\nabla_a \xi)^i = \partial_a \xi^i + \omega_\mu^i{}_j \partial_a X^\mu \xi^j, \quad (3.56)$$

e assume-se que esta derivada atuando em e_μ^i é zero.

Desta maneira, encontra-se a seguinte expansão para a ação do modelo sigma generalizado

$$\begin{aligned} S_\sigma[X_0 + \Pi] &= S_\sigma[X_0] + \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{|g|} g^{ab} [(\nabla_a \xi)^i (\nabla_b \xi)^i \\ &\quad + R_{\mu ij\nu}(X_0) \partial_a X_0^\mu \partial_b X_0^\nu \xi^i \xi^j] \\ &\quad + \frac{1}{3\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{|g|} g^{ab} R_{\mu ijk}(X_0) \partial_a X_0^\mu (\nabla_b \xi)^k \xi^i \xi^j \\ &\quad + \frac{1}{12\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{|g|} g^{ab} R_{iklj}(X_0) (\nabla_a \xi)^i (\nabla_b \xi)^j \xi^k \xi^l \\ &\quad + \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_\Sigma d^2\sigma \epsilon^{ab} [H_{\mu ij}(X_0) \partial_a X_0^\mu \xi^i (\nabla_b \xi)^j \\ &\quad + \frac{1}{2} \nabla_i H_{\mu\nu j}(X_0) \partial_a X_0^\mu \partial_b X_0^\nu \xi^i \xi^j] \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{|g|} R^{(2)} \nabla_i \nabla_j \Phi(X_0) \xi^i \xi^j + \dots \end{aligned} \quad (3.57)$$

Em seguida será calculado o traço do tensor energia momento a um loop num gauge fixo da métrica da folha de mundo.

3.3 Cálculo da anomalia a 1-loop

Como foi discutido no capítulo 2, verificar se a teoria têm invariância de Weyl, é equivalente a verificar se o tensor energia-momento tem traço zero. Lembrando a expressão para o funcional gerador em termos da ação efetiva

$$\Omega = e^{-\Gamma}. \quad (3.58)$$

Esse funcional depende somente da métrica da folha de mundo (em um gauge fixo) e, como consequência da invariância por difeomorfismos, satisfaz

$$0 = \int_\Sigma d^2\sigma \frac{\delta\Gamma}{\delta g^{ab}} (\nabla^a v^b + \nabla^b v^a), \quad (3.59)$$

ou no gauge conforme

$$0 = \int_{\Sigma} d^2z \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta g^{zz}} \nabla^z v^z + \frac{\delta\Gamma}{\delta g^{\bar{z}\bar{z}}} \nabla^{\bar{z}} v^{\bar{z}} - \frac{1}{2} \frac{\delta\Gamma}{\delta\omega} (\nabla_z v^z + \nabla_{\bar{z}} v^{\bar{z}}) \right). \quad (3.60)$$

Integrando esta expressão por partes

$$0 = \int_{\Sigma} d^2z \sqrt{\hat{g}} \left[\left(\nabla_z \left(\frac{1}{2\sqrt{\hat{g}}} \frac{\delta\Gamma}{\delta\omega} \right) - \nabla^z \left(\frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \frac{\delta\Gamma}{\delta g^{zz}} \right) \right) v^z + \left(\nabla_{\bar{z}} \left(\frac{1}{2\sqrt{\hat{g}}} \frac{\delta\Gamma}{\delta\omega} \right) - \nabla^{\bar{z}} \left(\frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \frac{\delta\Gamma}{\delta g^{\bar{z}\bar{z}}} \right) \right) v^{\bar{z}} \right], \quad (3.61)$$

e como as funções v^z e $v^{\bar{z}}$ são arbitrárias, obtém-se o conjunto de equações

$$\nabla_z \left(\frac{1}{2\sqrt{\hat{g}}} \frac{\delta\Gamma}{\delta\omega} \right) = \nabla^z \left(\frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \frac{\delta\Gamma}{\delta g^{zz}} \right) \quad (3.62)$$

$$\nabla_{\bar{z}} \left(\frac{1}{2\sqrt{\hat{g}}} \frac{\delta\Gamma}{\delta\omega} \right) = \nabla^{\bar{z}} \left(\frac{1}{\sqrt{\hat{g}}} \frac{\delta\Gamma}{\delta g^{\bar{z}\bar{z}}} \right). \quad (3.63)$$

Estas equações são o análogo da conservação do tensor energia momento clássico.

É possível mostrar que o lado direito são as derivadas do valor esperado das componentes zz e $\bar{z}\bar{z}$ deste tensor, como se argumentará na continuação.

De (3.58),

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta g^{zz}} = -\frac{1}{\Omega} \frac{\delta\Omega}{\delta g^{zz}}. \quad (3.64)$$

O elemento de medida pode contribuir com respeito na variação da função de partição, mas este não é o caso no gauge conforme, como pode-se verificar usando o produto interno $||\delta X||^2$, definido no capítulo anterior, que serve para definir o elemento de medida funcional $[dX]$. Isto permite escrever

$$\nabla_z \left(\frac{4\pi}{\sqrt{\hat{g}}} \frac{\delta\Gamma}{\delta g^{zz}} \right) = \nabla^z \langle T_{zz} \rangle, \quad (3.65)$$

e da mesma maneira

$$\nabla_{\bar{z}} \left(\frac{4\pi}{\sqrt{\hat{g}}} \frac{\delta\Gamma}{\delta g^{\bar{z}\bar{z}}} \right) = \nabla^{\bar{z}} \langle T_{\bar{z}\bar{z}} \rangle. \quad (3.66)$$

O lado esquerdo de (3.62) será identificado com o valor esperado do componente zz deste tensor.

Assim, independentemente do componente de g considerado, a variação da ação efetiva com respeito a ele será identificada com o tensor energia momento na formulação quântica:

$$\langle T_{ab} \rangle = \frac{4\pi}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta \Gamma}{g_{ab}}, \quad (3.67)$$

Desta maneira, (3.62) toma a forma de uma lei de conservação

$$\nabla_z \langle T_{\bar{z}z} \rangle + \nabla_{\bar{z}} \langle T_{zz} \rangle = 0. \quad (3.68)$$

A idéia é usar o valor de $\langle T_{zz} \rangle$ calculado a 1-loop^{||}, encontrando uma expressão que permita indicar condições sobre a simetria de Weyl. Encontrar uma expansão em diagramas de Feynman será bastante útil para fazer este cálculo. Para encontrar esta expansão, usa-se a definição do gerador funcional Ω (3.15), a definição do tensor energia momento (3.67) e a expansão em campo de fundo para a ação do modelo sigma generalizado (3.57). Só por simplicidade, considera-se inicialmente que o espaço da folha de mundo é Euclidiano, e posteriormente serão considerados os efeitos da curvatura na folha de mundo.

Usando-se a notação $q = q^z$, $\bar{q} = q^{\bar{z}}$, no espaço dos momenta a lei de conservação (3.68) se escreve

$$\bar{q} \langle T_{z\bar{z}}(q) \rangle + q \langle T_{zz}(q) \rangle = 0. \quad (3.69)$$

Nesta notação, a dependência nos momentos q , indica que a expressão está escrita no espaço dos momentos. Primeiro será calculada a contribuição a $\langle T_{zz} \rangle$ que vem da variação da ação efetiva que só contem o termo S_G . De (3.67) e (3.64)

$$\langle T_{zz} \rangle = \frac{1}{\Omega[X_0]} \frac{4\pi}{\sqrt{|g|}} \int [d\xi] e\{-(S[X_0 + \xi] - S[X_0])\} \frac{\delta(S_G[X_0 + \xi] - S_G[X_0])}{\delta g^{zz}}. \quad (3.70)$$

Agora será entendido el por que da definição (3.15) e a vantagem de usar uma base tetrada.

O termo na exponencial pode-se como

$$S_G[X_0 + \xi] - S_G[X_0] = S_{Liv} + S_{Int}, \quad (3.71)$$

onde

$$S_{Liv} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{|g|} g^{ab} \partial_a \xi^i \partial_b \xi^i \quad (3.72)$$

e

^{||}O valor de $\langle T_{zz} \rangle$, é sempre finito, como é mostrado em [20] e isto garante que seu valor sempre possa ser usado para calcular $\langle T_{z\bar{z}} \rangle$.

$$S_{Int} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{|g|} g^{ab} R_{i\mu j\nu} \partial_a X_0^\mu \partial_b X_0^\nu \xi^i \xi^j. \quad (3.73)$$

Isto é, a subtração do termo $S[X_0]$ deixa uma expressão para o valor esperado no vácuo do tensor energia momento (ou em geral, de qualquer valor esperado) como uma expressão sempre em termos do campo quântico ξ . Note que se usou uma das simetrias do tensor de curvatura (3.33). Ter escolhido a base tetrada permite encontrar uma expressão para o propagador no espaço de momentos, já que permite escrever S_{Liv} como o termo cinético para o campo ξ^i quando a folha de mundo tem métrica plana, como é o caso que está sendo considerado. Ele permite identificar o propagador (ver Apêndice A, equação (A.17)). No espaço dos momentos, este propagador é expresso diagramaticamente como uma linha

$$i \xrightarrow{q} j = \frac{4\pi\alpha'\eta^{ij}}{q^2}$$

Do termo S_{Int} encontra-se um vértice, representado graficamente por um ponto

$$= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \sqrt{|g|} g^{ab} R_{i\mu j\nu} \partial_a X_0^\mu \partial_a X_0^\nu \xi^i \xi^j,$$

As linhas curvas representam o campo de fundo X_0^μ . Escrevendo (3.70) como

$$\langle T_{zz} \rangle = \frac{1}{\Omega[X_0]} \int [d\xi] e^{-(S_{Liv})} \left(\frac{1}{\alpha'} \partial_z \xi^i \partial_z \xi^i + \dots \right) e^{-S_{Int}} \quad (3.74)$$

e fazendo uma expansão da exponencial do termo de interação, encontra-se o seguinte diagrama

$\frac{1}{\alpha'} \partial_z \xi^i \partial_z \xi^j$

$-\frac{1}{4\pi\alpha'} \sqrt{|g|} g^{ab} R_{j\mu k\nu} \partial_a X_0^\mu \partial_b X_0^\nu \xi^j \xi^k$

l

$q+l$

Gráfico 1.

onde a cruz representa uma inserção do tensor energia momento. Deste gráfico, usando as regras para o vértice e o propagador, multiplicar por um fator de 2 (por a simetria ao fazer as contrações), e integrando sobre o momento interno l , então

$$\langle T_{zz} \rangle_G = \frac{1}{4} \int \frac{d^2 l}{2\pi} \frac{\bar{l}(\bar{l} + \bar{q})}{l^2(l + q)^2} \{R_{\mu\nu} \partial_a X_0^\mu \partial^a X_0^\nu\}(q). \quad (3.75)$$

Nesta equação, as chaves indicam que esta é uma expressão no espaço dos momentos, mas independente do momento l .

Para calcular a integral em (3.75), usa-se o parâmetro de Feynman x para escreve-la de uma forma conhecida, cujo valor pode ser encontrado usando por exemplo formulas de regularização dimensional para o cálculo de integrais [16]. Introduzindo o parâmetro x , o integrando de (3.75) escreve-se

$$\frac{\bar{l}(\bar{l} + \bar{q})}{l^2(l + q)^2} = \int_0^1 dx \frac{(l^1 - il^2)^2 + (l^1 - il^2)(q^1 - iq^2)}{[xl^2 + (1 - x)(l + q)^2]^2}. \quad (3.76)$$

Definindo

$$k^a \equiv l^a + (1 - x)q^a, \quad a = 1, 2 \quad (3.77)$$

então

$$\int \frac{dl d\bar{l}}{2\pi} \frac{\bar{l}(\bar{l} + \bar{q})}{l^2(l + q)^2} = \int_0^1 dx \int \frac{d^2 k}{\pi} \frac{(k^1)^2 - (k^2)^2 - 2ik^1 k^2 - x(1 - x)(q^1 - iq^2)^2}{(k^2 + \Delta)^2}, \quad (3.78)$$

com

$$\Delta \equiv x(1 - x)q^2. \quad (3.79)$$

Na integral (3.78) existem termos lineares em k , que foram omitidos pois eles anulam-se por simetria. Extendendo o espaço bidimensional para $d = 2 + \epsilon$, (3.78) tem já uma forma conhecida. Os dois termos quadráticos em k cancelam-se entre si usando

$$\int d^d k \frac{k^a k^b}{(k^2 + \Delta)^2} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \delta^{ab}}{2} \Gamma(1 - \frac{d}{2}) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1 - \frac{d}{2}}. \quad (3.80)$$

Agora, usando

$$\int d^d k \frac{1}{(k^2 + \Delta)^2} = \pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}} \quad (3.81)$$

no limite $\epsilon \rightarrow 0$, obtém-se

$$\int \frac{d^2 l}{2\pi} \frac{\bar{l}(\bar{l} + \bar{q})}{l^2(l + q)^2} = -\frac{\bar{q}}{q}. \quad (3.82)$$

Substituindo (3.82) em (3.69) obtém-se uma expressão para o traço (ou melhor, proporcional ao traço) do tensor energia-momento

$$\langle T_{zz} \rangle_G = \frac{1}{4} R_{\mu\nu} \partial_a X_0^\mu \partial^a X_0^\nu. \quad (3.83)$$

Agora, para calcular a contribuição a $\langle T_{zz} \rangle$ que vem da parte do tensor antisimétrico, encontra-se dois tipos de interações: Uma do mesmo tipo do caso anterior, que permite escrever

$$\langle T_{zz} \rangle_{H_1} = -\frac{1}{8} \epsilon^{ab} \nabla^\lambda H_{\lambda\mu\nu} (X_0) \partial_a X_0^\mu \partial_b X_0^\nu. \quad (3.84)$$

Mas também encontra-se uma interação que vem do primeiro termo em (3.44). Um diagrama com só a ordem linear da expansão do exponencial dele anula-se por causa da antissimetria de H , portanto, considera-se a contribuição deste termo em ordem quadrática da expansão da exponencial da interação. O tipo de interação resultante está representada por

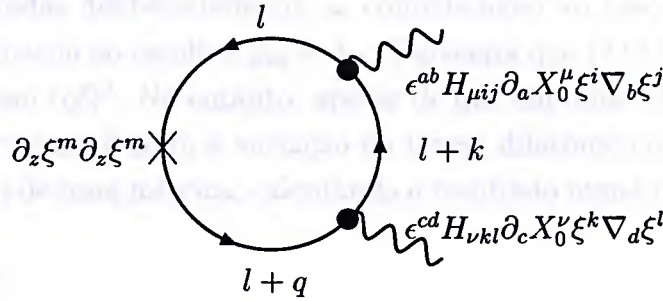


Gráfico 2.

do qual, obtém-se

$$\langle T_{zz} \rangle_{H_2} = -\frac{1}{8\alpha'} \frac{(4\pi\alpha')^3}{(4\pi\alpha')^2} \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{|g|}} \frac{\epsilon^{cd}}{\sqrt{|g|}} \partial_a X_0^\mu \partial_b X_0^\nu H_{\mu ij} H_{\nu kl} \eta^{il} \eta^{jk} \int \frac{dl d\bar{l}}{2(2\pi)^2} \frac{(l+q)_z (l+k)_b l_z l_d}{l^2(l+q)^2(l+k)^2} \quad (3.85)$$

Sem perda de generalidade, pode-se fazer $k = 0$. Usando

$$l_b l_d = \frac{1}{2} g_{bd} l^2 \quad (3.86)$$

e

$$\epsilon^{ab} \epsilon^{cd} g_{bd} = g^{ac}, \quad (3.87)$$

a equação (3.85) escreve-se

$$\langle T_{zz} \rangle_{H_2} = -\frac{1}{64} H_{\mu\nu}^2 g^{ab} \partial_a X_0^\mu \partial_b X_0^\nu \int \frac{dl d\bar{l}}{2\pi} \frac{\bar{l}(\bar{l} + \bar{q})}{l^2(l + q)^2}, \quad (3.88)$$

com

$$H_{\mu\nu}^2 \equiv H_{\mu\lambda\rho} H_\nu^{\lambda\rho}. \quad (3.89)$$

Usando o valor já calculado desta integral (3.82) e tendo em conta que existem quatro configurações idênticas ao diagrama do gráfico 2, encontra-se a seguinte expressão para $\langle T_{zz} \rangle$

$$\langle T_{zz} \rangle_{H_2} = \frac{1}{16} \frac{\bar{q}}{q} H_{\mu\nu}^2 g^{ab} \partial_a X_0^\mu \partial_b X_0^\nu. \quad (3.90)$$

Finalmente, usando a expressão para a conservação do tensor energia momento (3.69) pode-se encontrar a expressão para $\langle T_{z\bar{z}} \rangle$.

Resumindo os resultados até agora,

$$\langle T_{z\bar{z}} \rangle = \left(\frac{1}{4} R_{\mu\nu} - \frac{1}{16} H_{\mu\nu}^2 \right) \partial_a X_0^\mu \partial^a X_0^\nu + \left(-\frac{1}{8} \nabla^\lambda H_{\lambda\mu\nu} \right) \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{|g|}} \partial_a X_0^\mu \partial_b X_0^\nu \quad (3.91)$$

Até aqui, foram ignoradas deliberadamente as contribuições ao traço que vem de variações da ação do dilaton ao escolher $g_{ab} = \delta_{ab}$. Pareceria que (3.91) seriam todas as contribuições a ordem $(\alpha')^0$. No entanto, apesar de que em uma folha de mundo plana o escalar de curvatura é zero, a variação do termo dilatônico com respeito a variações infinitesimais de uma métrica, calculando o resultado numa métrica plana, é diferentes de zero.

Fazendo esta variação

$$\delta S_\Phi = -\frac{1}{2\pi} \int_\Sigma d^2\sigma \delta(\sqrt{|g|} R^{(2)}) \Phi(X), \quad (3.92)$$

pode-se usar a identidade de Palatini

$$\delta R_{ab}^{(2)} = \nabla_c \delta \Gamma_{ab}^c - \nabla_b \delta \Gamma_{ac}^c \nabla_c \delta \Gamma_{ab}^c, \quad (3.93)$$

onde

$$\delta \Gamma_{ab}^c \equiv -g^{cd} \delta g_{de} \Gamma_{ab}^e + \frac{1}{2} g^{cd} (\delta g_{da,b} + \delta g_{db,a} - \delta g_{ab,d}), \quad (3.94)$$

para escrever

$$\sqrt{|g|} g^{ab} \delta R_{ab}^{(2)} = \nabla_b (\sqrt{|g|} g^{ab} \delta \Gamma_{ac}^c) - \nabla_c (\sqrt{|g|} g^{ab} \delta \Gamma_{ab}^c). \quad (3.95)$$

Integrando (3.92) por partes obtém-se

$$\begin{aligned}\delta S_\Phi &= \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{|g|} \{g^{ab} \delta \Gamma_{ab}^c \partial_c \Phi(X) - g^{ab} \delta \Gamma_{ac}^c \partial_b \Phi(X)\} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_\Sigma d^2\sigma \{ \delta \sqrt{|g|} R^{(2)} \Phi(X) + \sqrt{|g|} \delta g^{ab} R^{(2)} \}.\end{aligned}\quad (3.96)$$

Substituindo (3.94) em (3.96), integrando de novo por partes, e fazendo $g_{ab} = \delta_{ab}$, consegue-se calcular o tensor energia momento

$$T_{ab}^{dil} = 2(\partial_a \partial_b - \delta_{ab} \Delta) \Phi(X). \quad (3.97)$$

O símbolo Δ é o Laplaciano na folha de mundo. Em coordenadas $(z, \bar{z})$,

$$T_{z\bar{z}}^{dil} = -\frac{1}{2} \Delta \Phi(X(\sigma)), \quad (3.98)$$

e o traço é diferente de zero, como era de se esperar, por causa da falta de simetria conforme de S_Φ . Para calcular a contribuição deste traço à anomalia total de S_σ , calcula-se (3.98) em X_0 ,

$$\begin{aligned}\Delta \Phi(X_0) &= 2g^{z\bar{z}} \partial_z \partial_{\bar{z}} \Phi(X_0), \\ &= 2g^{z\bar{z}} \partial_z (\partial_\mu \Phi(X_0) \partial_{\bar{z}} X_0^\mu), \\ &= \partial_a X_0^\nu \partial^a X_0^\mu \partial_\nu \partial_\mu \Phi(X_0) + \Delta X_0^\mu \partial_\mu \Phi(X_0).\end{aligned}\quad (3.99)$$

Mas como supõe-se que o campo X_0 satisfaz a equação de movimento clássica

$$\Delta X_0^\mu = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu g^{ab} \partial_a X_0^\nu \partial^a X_0^\lambda + \frac{1}{2} H^\mu{}_{\nu\lambda} \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{|g|}} \partial_a X_0^\nu \partial_b X_0^\lambda, \quad (3.100)$$

substituindo (3.100) em (3.99), obtém-se

$$\Delta \Phi(X_0) = \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi(X_0) \partial_a X_0^\mu \partial^a X_0^\nu + \frac{1}{2} \nabla^\mu \Phi(X_0) H_{\mu\nu\lambda} \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{|g|}} \partial_a X_0^\nu \partial_b X_0^\lambda, \quad (3.101)$$

Isto é, as contribuições da parte clássica que vem da variação de S_Φ são da mesma ordem das contribuições que vem de $\langle T_G \rangle$ e $\langle T_H \rangle$ a 1-loop: $(\alpha')^0$. Conseqüentemente, escreve-se o siguiente resultado parcial

$$\langle T_a^a \rangle = \beta_{\mu\nu}^G \partial_a X_0^\mu \partial^a X_0^\nu + \beta_{\mu\nu}^B \frac{\epsilon^{ab}}{\sqrt{|g|}} \partial_a X_0^\mu \partial_b X_0^\nu, \quad (3.102)$$

com

$$\beta_{\mu\nu}^G = R_{\mu\nu}(X_0) - \frac{1}{4}H_{\mu\lambda\rho}H_{\nu}{}^{\lambda\rho}(X_0) + 2\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi(X_0), \quad (3.103)$$

$$\beta_{\mu\nu}^B = -\frac{1}{2}\nabla^\lambda H_{\lambda\mu\nu}(X_0) + H_{\lambda\mu\nu}\nabla^\lambda\Phi(X_0). \quad (3.104)$$

Até agora, tem-se calculado o traço do tensor energia momento numa folha de mundo plana, mas ainda existem mais termos opacados por esta escolha da métrica em Σ . Para encontrá-los, pode-se continuar usando a conservação do tensor energia-momento sem ter que fazer cálculos em folha mundo com curvatura. Mas isto não é suficiente, terá que calcular-se a função de dois pontos para este tensor. Para ver porque calcular esta função de dois pontos ajuda a encontrar o traço, lembre-se que por causa da simetria de difeomorfismos, uma métrica curva pode-se escrever como um fator de escala vezes a métrica plana. Nesse caso, dizer que a teoria tem simetria de Weyl, é equivalente a dizer que o traço do tensor energia momento, calculando numa métrica $g_{ab} = e^{2\omega}\delta_{ab}$, é igual a zero. Isto deve independender do fator de escala ω para que seja um resultado válido para qualquer folha de mundo curva. Então, minimamente a primeira variação com respeito a ω deve ser zero. Esta primeira variação escreve-se como

$$\frac{\delta}{\delta\omega(z')}\langle T_{z\bar{z}}(z)\rangle_{e^{2\omega}\delta} = \frac{\delta\langle T_{z\bar{z}}(z)\rangle}{\delta g^{ab}} \frac{\delta g^{ab}}{\delta\omega}, \quad (3.105)$$

e calculando em $\omega = 0$, a variação (3.105) é escrita em termos da função de dois pontos para o tensor energia-momento

$$\frac{\delta}{\delta\omega(z')}\langle T_{z\bar{z}}(z)\rangle_{e^{2\omega}\delta} = -\frac{1}{\pi}\langle T_{z\bar{z}}(z)T_{z\bar{z}}(z')\rangle_\delta, \quad (3.106)$$

onde

$$\langle T_{z\bar{z}}(z)T_{z\bar{z}}(z')\rangle_\delta = \langle T_{z\bar{z}}^G(z)T_{z\bar{z}}^G(z')\rangle_\delta + 2\langle T_{z\bar{z}}^G(z)T_{z\bar{z}}^\Phi(z')\rangle_\delta + \langle T_{z\bar{z}}^\Phi(z)T_{z\bar{z}}^\Phi(z')\rangle_\delta. \quad (3.107)$$

Uma integração de ω permite escrever o traço do tensor energia momento em termos dos resultados obtidos dos cálculos da função de dois pontos. O que se obterá será precisamente algo já conhecido desde o capítulo 2: um termo proporcional ao escalar de curvatura da folha de mundo $R^{(2)}$, cuja constante de proporcionalidade contem a dimensão do espaço-tempo. Além disso, encontra-se-ão também contribuições dos campos G e H .

Considere-se pelo momento, só os termos da ação clássica que têm simetria de Weyl: S_G e S_B . Ao nível mais baixo em α' , $((\alpha')^0)$ na função de dois pontos, $\langle T_{zz}T_{zz}\rangle$, encontra-se o seguinte gráfico

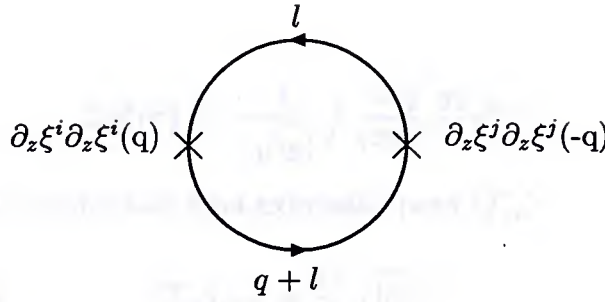


Gráfico 3.

do qual extrai-se

$$\langle T_{zz}(q)T_{zz}(-q) \rangle = \frac{D}{8} \int d^2 l \frac{\bar{l}^2 (\bar{l} + \bar{q})^2}{l^2 (l + q)^2}. \quad (3.108)$$

Para escrever a integral em (3.108) como uma integral cujo valor é conhecido, introduz-se um parâmetro de Feynman x , como já se fez. A função de dois pontos (3.108) toma a forma

$$\langle T_{zz}(q)T_{zz}(-q) \rangle = \frac{D}{8} \int_0^1 dx \int d^d k \frac{(k^1 - ik^2)^4 + x^2(1-x)^2 \bar{q}^4}{(k^2 + \Delta)^2}, \quad (3.109)$$

com k e Δ dados por (3.77) e (3.79) respectivamente. Os termos em potências ímpares de k são zero por simetria, e os termos quadráticos também cancelam-se entre eles, como em (3.78). Não é difícil comprovar que o termo quártico em k desaparece usando

$$\int d^d k \frac{k^a k^b k^c k^d}{(k^2 + \Delta)^2} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{4} \Gamma\left(-\frac{d}{2}\right) \Delta^{\frac{d}{2}} (\delta^{ab} \delta^{cd} + \delta^{ac} \delta^{bd} + \delta^{ad} \delta^{bc}). \quad (3.110)$$

Usando (3.81), encontra-se

$$\langle T_{zz}(q)T_{zz}(-q) \rangle_\delta = \frac{\pi}{48} D \frac{\bar{q}^3}{q}. \quad (3.111)$$

Usando duas vezes a conservação do tensor energia momento $qT_{zz}(q) + \bar{q}T_{z\bar{z}}(q) = 0$, obtém-se

$$\langle T_{z\bar{z}}(q)T_{z\bar{z}}(-q) \rangle_\delta = \frac{\pi}{48} D q \bar{q}. \quad (3.112)$$

Escrevendo esta equação no espaço das coordenadas

$$\langle T_{z\bar{z}}(z)T_{z\bar{z}}(0) \rangle_\delta = -\frac{\pi D}{12} \sqrt{|g|} \Delta \delta^{(2)}(z), \quad (3.113)$$

onde usou-se

$$\Delta\delta^2(\sigma) = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \int \frac{d^2q}{(2\pi)^2} \frac{q\bar{q}}{4} e^{iq \cdot z}. \quad (3.114)$$

Da equação (3.106), encontra-se uma expressão para $\langle T_{z\bar{z}} \rangle$

$$\langle T_{z\bar{z}} \rangle_{e^{2\omega\delta}} = \frac{D}{12} \sqrt{|g|} \Delta\omega. \quad (3.115)$$

Usando a expressão para o escalar de curvatura na folha de mundo

$$R^{(2)} = -2\Delta\omega, \quad (3.116)$$

válida no gauge conforme, consegue-se escrever

$$\langle T_{z\bar{z}} \rangle_{e^{2\omega\delta}} = -\frac{D}{24} \sqrt{|g|} R^{(2)}. \quad (3.117)$$

Multiplicando ambos os lados de (3.117) por $2g^{z\bar{z}}$

$$\langle T_a{}^a \rangle = -\frac{D}{12} R^{(2)}. \quad (3.118)$$

Esta expressão já foi encontrada no capítulo anterior, só que dessa vez, apareceu um fator de $D - 26$ no numerador do lado direito em lugar de D . Este número -26 é uma contribuição dos campos fantasmas, que não foram incluídos no modelo sigma. Note-se que esta última contribuição ao traço do tensor energia momento tem uma estrutura diferente, pois é proporcional a $R^{(2)}$ e não a $\partial_a X_0^\mu \partial^a X_0^\nu$ ou $\epsilon^{ab} \partial_a X_0^\mu \partial_b X_0^\nu$. Além disso, nesta contribuição não aparecem termos com os campos no espaço-tempo G e H . Para encontrar suas contribuições proporcionais a $R^{(2)}$, é necessário usar ordens mais altas das expansões de $S_G[X]$ e $S_B[X]$ (lembre-se que no momento, estão-se considerando só os termos que vem das ações que são classicamente invariantes por transformações de Weyl). Estas contribuições podem ser encontradas calculando os gráficos [21]

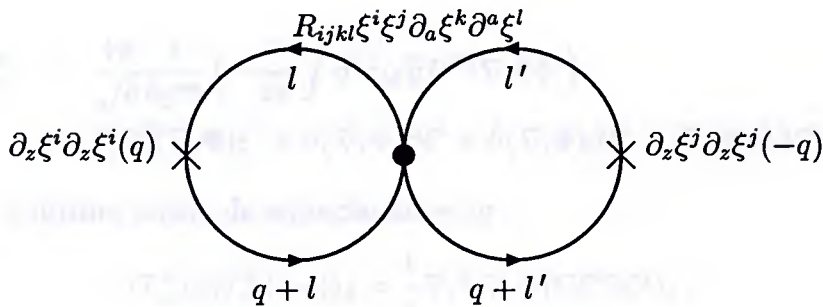


Gráfico 4.

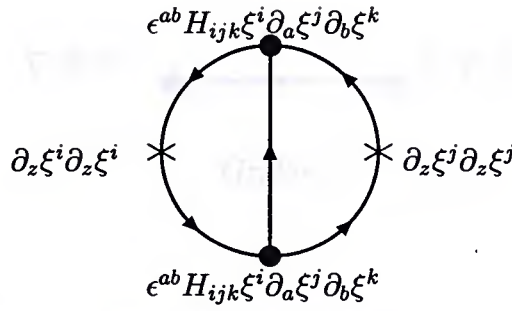


Gráfico 5.

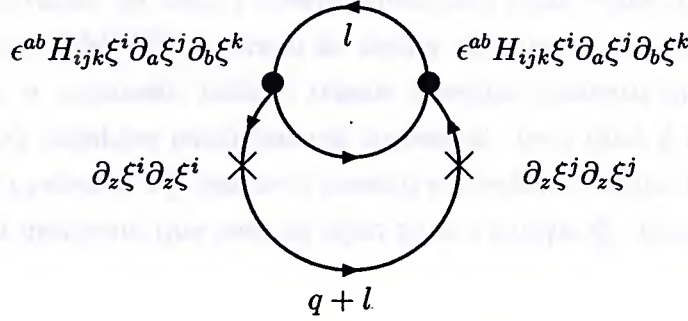


Gráfico 6.

Estes cálculos a dois loops são mais complicados, pois aparecem subdivergências. No entanto, de acordo com [21] suas contribuições ao traço $\langle T_a^a \rangle$ podem ser calculadas usando a mesma estratégia da conservação do tensor energia-momento. Eles contribuem

$$\langle T_a^a \rangle = \alpha' \left(R - \frac{H^2}{12} \right) R^{(2)}, \quad (3.119)$$

onde R é o escalar de curvatura no espaço-tempo.

Resta ainda calcular as contribuições que podem aparecer considerando as funções de dois pontos $\langle T_{zz}^\Phi(z) T_{zz}^\Phi(z') \rangle$ e $\langle T_{zz}^G(z) T_{zz}^\Phi(z') \rangle$. Da expansão para a ação do campo Φ não é difícil ver

$$\begin{aligned} T_{zz}^\Phi &= \frac{4\pi}{\sqrt{g}} \frac{\delta}{\delta g^{zz}} \left(-\frac{1}{2\pi} \int d^2z \sqrt{g} R^{(2)} \nabla_i \Phi \xi^i \right) \\ &= 2[\partial \bar{\partial}(\nabla_i \Phi) \xi^i + \partial(\nabla_i \Phi) \bar{\partial} \xi^i + \bar{\partial}(\nabla_i \Phi) \partial \xi^i + (\nabla_i \Phi) \partial \bar{\partial} \xi^i]. \end{aligned} \quad (3.120)$$

Tomando só o último termo da equação anterior

$$\langle T_{zz}^\Phi(q) T_{zz}^\Phi(-q) \rangle_\delta = \frac{1}{4} \nabla_i \Phi \nabla_j \Phi \langle \square \xi^i \square \xi^j \rangle_\delta \quad (3.121)$$

que se pode representar pelo seguinte gráfico



Gráfico 7.

de onde se obtém

$$\langle T_{zz}^{\Phi} T_{zz}^{\Phi} \rangle_{\delta} = \pi \alpha' (\nabla \Phi)^2 q \bar{q}. \quad (3.122)$$

Usando a conservação do tensor energia-momento duas vezes, obtém-se uma contribuição de $-2\alpha'(\nabla \Phi)^2 R^{(2)}$ ao traço do tensor energia momento.

No entanto, a expansão para o tensor energia-momento que vem de fazer a variação para S_{Φ} também contribui em ordem α' , pelo qual é necessário calcular a $\langle T_{zz}^G T_{zz}^{\Phi} \rangle$. Para calcular T_{zz}^{Φ} usa-se o mesmo procedimento que permitiu encontrar o tensor energia momento que vem da ação para o campo Φ . Encontra-se o seguinte resultado

$$\begin{aligned} T_{zz}^{\Phi} &= \frac{4\pi}{\sqrt{g}} \frac{\delta}{\delta g^{zz}} \left(-\frac{1}{4\pi} \int d^2z \sqrt{g} R^{(2)} \nabla_i \Phi \nabla_j \Phi \xi^i \xi^j \right) \\ &= -[\partial^2 (\nabla_i \nabla_j \Phi) \xi^i \xi^j + 4\partial (\nabla_i \nabla_j \Phi) \partial \xi^i \xi^j + 2(\partial_i \partial_j \Phi) \xi^i \partial^2 \xi^j \\ &\quad + 2(\nabla_i \nabla_j \Phi) \partial \xi^i \partial \xi^j]. \end{aligned} \quad (3.123)$$

Destes termos, os únicos que darão uma contribuição diferente de zero são os dois últimos. O produto do último termo com T_{zz}^G é representado pelo seguinte diagrama

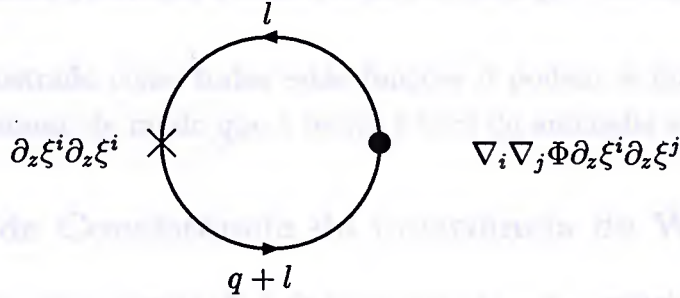


Gráfico 8.

e o produto do penúltimo termo de (3.123) com T_{zz}^G pode-se representar por um diagrama similar. Do gráfico anterior pode-se ler

$$\langle T_{zz}^G T_{zz}^{\Phi} \rangle_{\delta} = -\frac{1}{2} \alpha' \nabla^2 \Phi \int d\bar{l} d\bar{l} \frac{\bar{l}^2 (\bar{l} + \bar{q})^2}{\bar{l}^2 (\bar{l} + \bar{q})^2}, \quad (3.124)$$

esta integral é a mesma de (3.108). Assim, usando o mesmo resultado para a integral, encontra-se

$$\langle T_{zz}^G T_{zz}^\Phi \rangle_\delta = -\frac{\pi\alpha'}{6} \nabla^2 \Phi \frac{(\bar{q})^3}{q} \quad (3.125)$$

Para calcular a contribuição restante, tem-se que calcular

$$\int d\bar{l} d\bar{l} \frac{\bar{l}^3 (\bar{l} + \bar{q})}{\bar{l}^2 (\bar{l} + \bar{q})^2} \quad (3.126)$$

O resultado é o dobro de (3.125) e somando tudo obtém-se

$$\langle T_{z\bar{z}} \rangle_{e^{2\omega}\delta} = 2\alpha' \sqrt{|g|} \nabla^2 \Phi R^{(2)}. \quad (3.127)$$

Somando todas as contribuições calculadas até aqui da maneira indicada em (3.107) ao traço do tensor energia momento, ele é escrito como

$$\langle T_a^a \rangle = \beta_{\mu\nu}^G g^{ab} \partial_a X_0^\mu \partial_b X_0^\nu + \beta_{\mu\nu}^B \epsilon^{ab} \partial_a X_0^\mu \partial_b X_0^\nu + \beta^\Phi R^{(2)}, \quad (3.128)$$

com

$$\beta_{\mu\nu}^G = R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} H_{\mu\lambda\rho} H_\nu^{\lambda\rho} + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi, \quad (3.129)$$

$$\beta_{\mu\nu}^B = -\frac{1}{2} \nabla^\rho H_{\mu\nu\rho} + \nabla_\lambda \Phi H^\lambda_{\mu\nu}, \quad (3.130)$$

$$\beta^\Phi = -\frac{D-26}{12} + \alpha' \left(R - \frac{H^2}{12} + 4\nabla^2 \Phi - 4(\nabla\Phi)^2 \right). \quad (3.131)$$

Como foi estabelecido desde o começo, a contribuição ao traço que vem dos fantasmas foi incorporado em β^Φ .

A continuação será mostrado como todas estas funções β podem se igualar a zero de uma maneira consistente de modo que a teoria é livre de anomalia a 1-loop.

3.4 Condições de Consistência da invariância de Weyl

Quando os campos no espaço-tempo B e Φ são zero e $G_{\mu\nu}$ é a métrica plana, os coeficientes $\beta_{\mu\nu}^G$, $\beta_{\mu\nu}^B$ em (3.128) são zero, e β^Φ reduz-se ao número a_1 encontrado no capítulo 2, tal como é de se esperar. Nesse caso, por argumentos de localidade e dimensionalidade escreveu-se o traço do tensor energia-momento proporcional ao escalar de curvatura na folha de mundo e a anomalia foi identificada com a constante a_1 . No entanto, quando a corda é acoplada a campos no espaço-tempo aparecem termos no traço que não têm esta propriedade: eles são proporcionais a $\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu$.

Além disso, β^Φ aparece como uma correção a a_1 . Para que a teoria seja livre de anomalia, as três funções β devem-se anular, mas isso deve acontecer de uma maneira consistente, onde por consistente entende-se a preservar a propriedade que β^Φ é um número. O termo de ordem α' em β^Φ são campos calculados no espaço tempo, e por isso em princípio, não têm que ser constantes. Felizmente, como se mostrará na continuação, as condições $\beta_{\mu\nu}^G = 0$ e $\beta_{\mu\nu}^B = 0$ implicam em que o gradiente de β^Φ é zero, com o qual β^Φ é uma constante.

Usando a identidade de Bianchi para o tensor de curvatura

$$\nabla_{[\lambda} R_{\mu\nu]\rho\eta} = 0, \quad (3.132)$$

é fácil ver que o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ satisfaz

$$\nabla^\nu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \nabla_\mu R. \quad (3.133)$$

Da definição do "field strength" $H_{\mu\nu\lambda}$ pode-se verificar que ele satisfaz a seguinte identidade

$$\nabla_{[\rho} H_{\mu\nu]\lambda} = 0, \quad (3.134)$$

o que permite escrever

$$\nabla^\nu (H_{\mu\lambda\rho} H_\nu{}^{\lambda\rho}) = H_{\mu\lambda\rho} \nabla^\nu H_\nu{}^{\lambda\rho} + \frac{1}{6} \nabla_\mu H^2, \quad (3.135)$$

Assim, calculando $\nabla^\nu \beta_{\mu\nu}^G$ obtém-se

$$\nabla^\nu \beta_{\mu\nu}^G = \frac{1}{2} \nabla_\mu R - \frac{1}{24} \nabla_\mu H^2 - \frac{1}{4} H_\mu{}^{\lambda\rho} \nabla^\nu H_{\nu\lambda\rho} + 2 \nabla_\mu \nabla^2 \Phi + 2 R_{\mu\nu} \nabla^\nu \Phi, \quad (3.136)$$

onde se usou a definição do tensor de curvatura $[\nabla_\mu, \nabla_\nu] v^\lambda = -R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda v^\rho$.

Em termos da função $\beta_{\mu\nu}^G$ e a função $\beta_{\mu\nu}^B$ a equação (3.136) é escrita como

$$\nabla^\nu \beta_{\mu\nu}^G = \frac{1}{2} \nabla_\mu \left(R - \frac{1}{12} H^2 + 4 \nabla^2 \Phi - 4 (\nabla \Phi)^2 \right) + \frac{1}{2} \beta_{\nu\lambda}^B H_\mu{}^{\nu\lambda} + 2 \beta_{\mu\nu}^G \nabla^\nu \Phi, \quad (3.137)$$

ou

$$\nabla^\nu \beta_{\mu\nu}^G = \frac{1}{2\alpha'} \nabla_\mu \beta^\Phi + \frac{1}{2} \beta_{\nu\lambda}^B H_\mu{}^{\nu\lambda} + 2 \beta_{\mu\nu}^G \nabla^\nu \Phi, \quad (3.138)$$

de onde se conclui que β^Φ será uma constante se as funções $\beta_{\mu\nu}^G$ e $\beta_{\mu\nu}^B$ são zero. Porém, todas as funções β igualadas a zero fazem com que a teoria seja invariante de Weyl Quanticamente.

3.4.1 Relação do cancelamento da anomalia com a Geometria do espaço tempo

O sistema de equações que obtém-se de fazer as três funções β iguais a zero pode ser escrito de uma maneira mais sugestiva. De $\beta^\Phi = 0$ consegue-se escrever

$$R = \frac{1}{12}H^2 - 4\nabla^2\Phi - 4(\nabla\Phi)^2; \quad (3.139)$$

com o que de $\beta_{\mu\nu}^G = 0$ obtém-se

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}G_{\mu\nu}R = \Theta_{\mu\nu}, \quad (3.140)$$

onde

$$\Theta_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4} \left(H_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{6}G_{\mu\nu}H^2 \right) - 2\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi + 2G_{\mu\nu}\nabla^2\Phi - 2G_{\mu\nu}(\nabla\Phi)^2. \quad (3.141)$$

A equação (3.140), satisfeita pelo campo métrico, é a equação de Einstein no espaço tempo, com tensor de energia-momento (3.141). Este tensor é simétrico, mas sua conservação deve ser verificada. De fato, aplicando o operador ∇^μ à equação (3.140), o lado esquerdo é identicamente zero, como pode-se verificar usando a identidade de Bianchi (3.132). O lado direito pode ser escrito como

$$\nabla^\mu\Theta_{\mu\nu} = \beta_{\mu\lambda}^B H_\nu{}^{\mu\lambda} - 2\beta_{\mu\nu}^G \nabla^\mu\Phi. \quad (3.142)$$

De maneira que as condições para que a teoria tenha simetria de Weyl ao nível quântico $\beta_{\mu\nu}^G = 0$, $\beta_{\mu\nu}^B = 0$ garantem com que o tensor energia-momento para a matéria seja conservado.

Agora é possível encontrar outras duas equações para os outros campos no espaço-tempo. Tomando o traço de $\beta_{\mu\nu}^G$ encontra-se

$$G^{\mu\nu}\beta_{\mu\nu}^G = R - \frac{1}{4}H_{\mu\nu}^2 + 2\nabla^2\Phi, \quad (3.143)$$

mas da condição $\beta_{\mu\nu}^G = 0$ junto com $\beta^\Phi = 0$, consegue-se eliminar R para escrever

$$\nabla^2\Phi - 2(\nabla\Phi)^2 = -\frac{1}{12}H^2. \quad (3.144)$$

que constituirá uma equação para o campo Φ .

Finalmente, a equação para o campo H virá da mesma condição $\beta_{\mu\nu}^B = 0$:

$$\nabla^\lambda H_{\lambda\mu\nu} = 2\nabla^\lambda\Phi H^\lambda{}_{\mu\nu}. \quad (3.145)$$

Como é conhecido, a equação de Einstein é deduzida como equação de movimento da ação de Einstein-Hilbert. É pois tentador pensar que as três equações para os campos no espaço-tempo (3.140), (3.144) e (3.145) sejam dedutíveis de um princípio de ação. Este trabalho foi feito em [26], onde a seguinte ação é encontrada

$$S = \int d^D X \sqrt{|G|} e^{-2\Phi} \left(R - \frac{1}{12} H^2 + 4(\nabla\Phi)^2 \right). \quad (3.146)$$

Efetivamente, fazendo a variação de (3.146) com respeito aos campos G , H e Φ obtém-se

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^D X \sqrt{|G|} e^{-2\Phi} \{ & \delta G^{\mu\nu} [R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R G_{\mu\nu} + 2 \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - 2 G_{\mu\nu} \nabla^2 \Phi \\ & + 2 G_{\mu\nu} (\nabla\Phi)^2 + \frac{1}{24} G_{\mu\nu} H^2 - \frac{1}{4} H^2_{\mu\nu}] - \frac{1}{2} \delta\Phi \beta^\Phi - \\ & \frac{1}{6} H^{\mu\nu\lambda} \delta H_{\mu\nu\lambda} \}. \end{aligned} \quad (3.147)$$

O setor de derivadas do campo $G_{\mu\nu}$ em (3.146) não tem a forma da ação de Einstein-Hilbert por causa da exponencial do campo Φ , mas fazendo uma transformação $G_{\mu\nu} = e^\omega \tilde{G}_{\mu\nu}$, (3.146) muda como

$$\begin{aligned} S = \int d^D X \sqrt{|\tilde{G}|} e^{-2\Phi} e^{\omega \frac{D-2}{2}} \{ & \tilde{R} - (D-1) \tilde{\nabla}^2 \omega - \frac{1}{4} (D-1)(D-2) (\tilde{\nabla}\omega)^2 \\ & + 4 (\tilde{\nabla}\Phi)^2 - \frac{1}{12} e^{-2\omega} \tilde{H}^2 \}, \end{aligned} \quad (3.148)$$

onde a notação com $\tilde{}$ é para indicar que as contrações foram feitas com a métrica $\tilde{G}$. A ação de Einstein-Hilbert estará contida em (3.148) escolhendo

$$\omega = \frac{4\Phi}{D-2}, \quad (3.149)$$

com o que (3.148) escreve-se

$$S = \int d^D X \sqrt{|\tilde{G}|} \left(\tilde{R} - \frac{4}{D-2} (\tilde{\nabla}\Phi)^2 - \frac{1}{12} e^{\frac{8\Phi}{D-2}} H^2 \right). \quad (3.150)$$

Na ação (3.150) identifica-se um termo cinético para o Dilaton e um termo do tipo Maxwell para o campo antissimétrico, mas com um acoplamento ao campo Φ .

Termina-se pois, encontrando conexões de um tipo já conhecido entre os campos do espaço-tempo, a partir da idéia de formular uma teoria de cordas acoplada a campos no espaço-tempo.

No capítulo seguinte será feita uma descrição de como calcular as funções β a ordens mais altas.

Capítulo 4

Invariância Conforme a ordens mais altas

4.1 Método do Grupo de Renormalização

4.1.1 Descrição do Método

Numa Teoria Quântica de Campos (TQC) é comum que o cálculo de funções de correlação dem resultados infinitos ordem a ordem em teoria de perturbações, e como consequência, quantidades observáveis calculadas a partir delas (por exemplo a auto-energia do eletrôn em QED) são também infinitas. No entanto, existe uma maneira sistemática de “remover” os infinitos fazendo uma redefinição dos campos, massa e constantes de acoplamento. Esta sistemática é conhecida como renormalização, e pode ser implementada introduzindo um parâmetro de escala μ e escrevendo os campos e quantidades em termos dos quais está escrita a teoria inicialmente (denotados por campos e quantidades nuas) em termos de novos campos e quantidades (chamadas de renormalizadas) mais uma série de contratermos calculados usando o método de regularização dimensional. Deste modo, as regras de Feynman são alteradas de tal maneira que consegue-se obter resultados finitos ordem a ordem no parâmetro de perturbação. Nem toda TQC é renormalizável. Uma maneira de ver se ela tem esta propriedade, é verificar se a constante de acoplamento é adimensional como é o caso em teorias como $\lambda\phi^4$ e QED em quatro dimensões. O modelo sigma generalizado (3.1) também satisfaz esta propriedade, mesmo que o número de constantes de acoplamento sem dimensão é infinito, como foi observado no capítulo 3. Agora, as funções de correlação independem do parâmetro de escala μ , o que será escrito como uma equação diferencial cujos coeficientes são conhecidos como funções β . A utilidade do método do grupo de renormalização aplicado ao modelo sigma generalizado se verá quando o tensor energia-momento for escrito como uma soma de termos, cujos coeficientes são as funções β deste modelo e identifica-se as funções β com os coeficientes dos contratermos menos singulares. Mas para ilustrar o processo, considera-se primeiro o caso de uma teoria de campo escalar em quatro

dimensões, sem massa.

4.1.2 Exemplo para um campo escalar

No quadro do formalismo de renormalização, a constante de acoplamento nua λ_B numa teoria de campo escalar é escrita como

$$\lambda_B = \mu^\epsilon \left(\lambda + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon^i} a_i(\lambda) \right), \quad (4.1)$$

onde $\epsilon = d - 4$, λ é a constante de acoplamento renormalizada, μ é um parâmetro de escala com dimensão de massa e os coeficientes a_i da série em ϵ^{-i} correspondem aos contratermos que devem ser somados para fazer finita a teoria, calculados ordem a ordem usando regularização dimensional. Na prescrição de t'Hooft, [22], supõe-se que eles não têm dependência explícita em μ , pelo qual, só λ dependerá de μ para que o acoplamento nua seja independente da escala.

Para saber como é a dependência da constante de acoplamento renormalizada com a escala, faz-se uma pequena variação desta última:

$$\mu = \mu'(1 - \eta), \quad (4.2)$$

com η uma quantidade infinitesimal. Então, a expressão (4.1) toma a forma

$$\lambda_B = (\mu')^\epsilon \left(\lambda - \epsilon\eta\lambda - \eta a_1(\lambda) + \sum \frac{a_i(\lambda) - \eta a_{i+1}(\lambda)}{\epsilon^i} \right). \quad (4.3)$$

Agora, definindo

$$\lambda = \lambda' + \epsilon\eta\lambda + \eta z a_1(\lambda), \quad (4.4)$$

com $z \equiv 1 - \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda}$, a equação (4.3) escreve-se

$$\lambda_B = (\mu')^\epsilon \left(\lambda' + \sum_i \frac{1}{\epsilon^i} a_i(\lambda') - \eta \sum_i \frac{1}{\epsilon^i} \left(z a_{i+1} - (z a_1) \frac{\partial a_i}{\partial \lambda} \right) \right). \quad (4.5)$$

A equação (4.5) tem a mesma forma que (4.1) se

$$z a_{i+1} = z a_1 \frac{\partial a_i}{\partial \lambda}, \quad (4.6)$$

isto é, a condição (4.6) é uma condição de consistência para manter o suposto de ter uma constante de acoplamento nua independente da escala.

Agora, (4.4) pode-se escrever como

$$\mu' \frac{\lambda' - \lambda}{\mu - \mu'} = \epsilon\lambda + z a_1(\lambda), \quad (4.7)$$

ou fazendo o limite $\mu' \rightarrow \mu$, encontra-se

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \lambda = -\beta(\lambda), \quad (4.8)$$

com

$$\beta \equiv \epsilon \lambda + z a_1(\lambda). \quad (4.9)$$

É importante fazer notar que a função β assim definida depende só do coeficiente a_1 do pólo simples ϵ^{-1} . Numa expansão perturbativa, cada loop contribui com um pólo simples, portanto, calcular a função β reduz-se a identificar e calcular os termos que tem esta divergência. A equação (4.6) pode ser usada como algoritmo para calcular os coeficientes dos outros contratermos mais divergentes.

De uma maneira similar, no caso do modelo sigma serão encontradas expressões para as funções β deste modelo em termos dos contratermos com polos simples e condições de consistência do tipo (4.6), que serão úteis para escrever o traço do tensor energia-momento em termo das funções β . No seguinte, serão ignorados termos que contém o tensor antissimétrico H .

4.2 Método do grupo de renormalização aplicado ao Modelo Sigma

O ponto de partida é a continuação analítica em $2 + \epsilon$ dimensões da ação para o modelo sigma generalizado

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int dv \left(G_{\mu\nu}^B g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + 2\alpha' R^{(2)} \Phi^B \right), \quad (4.10)$$

onde $dv \equiv d^{2+\epsilon} \sigma \sqrt{|g|}$ é o elemento de volume em $2 + \epsilon$ dimensões. O super-índice B designa as constantes de acoplamentos nus. Tal como no caso do campo escalar, estes acoplamentos nus serão escritos em termos de acoplamentos renormalizados (denotados sem o super-índice B) e uma soma de contratermos,

$$G_{\mu\nu}^B = \mu^\epsilon (G_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}), \quad (4.11)$$

$$\Phi^B = \mu^\epsilon (Z\Phi + \Psi), \quad (4.12)$$

com

$$T_{\mu\nu}(G) = \sum_{L=1}^{\infty} (\alpha')^L \sum_{i=1}^L \frac{1}{\epsilon^i} T_{\mu\nu}^{(L,i)}(G), \quad (4.13)$$

$$Z\Phi = \Phi + \sum_{L=1}^{\infty} (\alpha')^L \sum_{i=1}^L \frac{1}{\epsilon^i} Z^{(L,i)}(G)\Phi, \quad (4.14)$$

$$\Psi(G) = \sum_{L=1}^{\infty} \frac{1}{\epsilon^i} \Psi^{(i)}(G). \quad (4.15)$$

De novo, α' é usado para contar o numero de loops na expansão perturbativa que permite encontrar os contratermos $T_{\mu\nu}^{(L,i)}$ e $Z^{(L,i)}\Phi$. Eles são contratermos calculados usando coordenadas normais na expansão em campo de fundo, por isso, eles constituem expressões covariantes.

Note-se a diferenca entre (4.11) e (4.12). Na ultima, o acoplamento renormalizado Φ está acompanhado de um fator $Z(G)$. A expressão $Z\Phi$ esta constituida por derivadas ∇_μ aplicadas a Φ propriamente contraídas para formar escalares, por exemplo $G^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\Phi$; tal como $T_{\mu\nu}$ esta constituido de derivadas de objetos tensoriais $R^\lambda_{\mu\nu\rho}$, $R_{\mu\nu}$ ou R , ou combinações de eles formando tensores do tipo $(2,0)$ no espaço tempo. De ai a dependencia de G em $Z\Phi$. Mas também (4.12) tem uma soma de contratermos $\Psi(G)$ que não tem análogo em (4.11); isto é devido a que podem aparecer contratermos escalares construidos só com a métrica $G_{\mu\nu}$, por exemplo $R_{\mu\nu\lambda\rho}R^{\mu\nu\lambda\rho}$ acoplados com o escalar de curvatura na folha de mundo $R^{(2)}$.

Tal como se fez no exemplo do campo escalar, da condição de invariância de escala das constantes de acoplamento nuas

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} G_{\mu\nu}^B = 0, \quad \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Phi^B = 0, \quad (4.16)$$

serão derivadas as expressões para as funções β do modelo sigma. Substituindo (4.11) na primeira das equações (4.16) obtém-se

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} G_{\mu\nu} = -\epsilon G_{\mu\nu} - \epsilon T_{\mu\nu} - \mu \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial \mu}. \quad (4.17)$$

Tanto o segundo e terceiro termo do lado direito de (4.17) podem-se obter de (4.13); eles são

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} T_{\mu\nu} = \sum_L (\alpha')^L \sum_i \frac{1}{\epsilon^i} \mu \frac{\partial G}{\partial \mu} \cdot \frac{T_{\mu\nu}^{(L,i)}}{\partial G}, \quad (4.18)$$

e

$$\epsilon T_{\mu\nu} = \sum_L (\alpha')^L T_{\mu\nu}^{(L,1)} + \sum_L (\alpha')^L \sum_{i=1}^L \frac{1}{\epsilon^i} T_{\mu\nu}^{(L,i+1)}, \quad (4.19)$$

onde foi implementada a notação $A \cdot B = A^{\mu\nu} B_{\mu\nu}$ em (4.18). Esta será a interpretação que se dará quando se escreva um ponto entre dois objetos neste capítulo.

Agora bem, inserindo (4.17) em (4.18) e substituindo (4.19) em (4.17), a parte não singular de (4.17) fica na forma

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} G_{\mu\nu} = -\epsilon G_{\mu\nu} - \sum_L (\alpha')^L T_{\mu\nu}^{(L,1)} + \sum_L (\alpha')^L G \cdot \frac{\partial T_{\mu\nu}^{(L,1)}}{\partial G}. \quad (4.20)$$

Mas quando $G_{\mu\nu} \rightarrow \Lambda^{-1} G_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}^{(L,i)} \rightarrow \Lambda^{L-1} T_{\mu\nu}^{(L,i)}$, como pode-se ver de (4.10), (4.11) e (4.13) de onde encontra-se

$$G \cdot \frac{\partial T_{\mu\nu}^{(L,i)}}{\partial G} = -(L-1) T_{\mu\nu}^{(L,i)}, \quad (4.21)$$

logo (4.20) escreve-se

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} G_{\mu\nu} = -\epsilon G_{\mu\nu} + \beta_{\mu\nu}, \quad (4.22)$$

com

$$\beta_{\mu\nu} = - \sum_L (\alpha')^L L T_{\mu\nu}^{(L,1)}. \quad (4.23)$$

Tal como no exemplo do campo escalar, a função β vem dada pelos coeficientes do polo simples, ordem a ordem em teoria de perturbações. Agora fazendo os mesmos calculos, mas conservando as partes singulares (coeficientes de ϵ^{-i}), de (4.18)

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} T_{\mu\nu} = - \sum_L (\alpha')^L \sum_{i=1}^L \frac{1}{\epsilon^{i-1}} G \cdot \frac{\partial T_{\mu\nu}^{(L,i)}}{\partial G} + \beta \cdot \frac{\partial}{\partial G} \sum_L (\alpha')^L \sum_i \frac{1}{\epsilon^i} T_{\mu\nu}^{(L,i)}, \quad (4.24)$$

usando (4.21) e (4.22) obtém-se a seguinte expressão para a parte não singular

$$\sum_L (\alpha')^L L T_{\mu\nu}^{(L,i+1)} + \beta \cdot \frac{\partial}{\partial G} \sum_L (\alpha')^L T_{\mu\nu}^{(L,i)} = 0. \quad (4.25)$$

A equação (4.25) permite encontrar contratermos de ordem ϵ^{-i} , com $i > 1$, aunque eles não são importantes no calculo da função β .

Seguindo o mesmo procedimento para Φ^B encontra-se a seguinte equação satisfeita pela parte menos singular

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Phi = -\epsilon \Phi + \gamma(\Phi) + \theta(G), \quad (4.26)$$

onde

$$\gamma(\Phi) = - \sum_L (\alpha')^L L Z^{(L,1)} \Phi, \quad (4.27)$$

$$\theta(G) = \left(G \cdot \frac{\partial}{\partial G} - 1 \right) \Psi^{(1)}. \quad (4.28)$$

Agora, $Z^{(L,i)}$ se transforma como $\Lambda^L Z^{(L,i)}$ quando $G \rightarrow \Lambda^{-1}G$, logo

$$G \cdot \frac{\partial}{\partial G} Z^{(L,i)} = -L Z^{(L,i)}. \quad (4.29)$$

Seguindo um procedimento similar, mas para os coeficientes de ϵ^{-i} , com $i > 1$, encontra-se as seguintes condições que estes coeficientes devem satisfazer

$$\left(1 - G \cdot \frac{\partial}{\partial G}\right) \Psi^{(i+1)} + \beta \cdot \frac{\partial}{\partial G} \Psi^{(i)} + \sum_L (\alpha')^L Z^{(L,i)} \theta(G) = 0, \quad (4.30)$$

$$\sum_L (\alpha') Z^{(L,i+1)} \Phi + \sum_L (\alpha')^L Z^{(L,i)} \gamma + \sum_L (\alpha')^L \beta \cdot \frac{\partial}{\partial G} Z^{(L,i)} \Phi = 0. \quad (4.31)$$

Estas relações de consistência (4.30) e (4.31) entre contratermos Ψ e $Z\Phi$, junto com (4.25) permitirão relacionar o traço do tensor energia-momento com as funções β, γ e θ .

Para encontrar esta relação, primeiro se encontrará uma expressão para o traço do tensor energia momento de sua definição:

$$T_a{}^a = \frac{4\pi}{\sqrt{g}} g^{ab} \frac{\delta S}{\delta g^{ab}}. \quad (4.32)$$

Fazendo esta variação na ação (4.10) encontra-se

$$T_a{}^a = \frac{1}{2\alpha'} \{-\epsilon G_{\mu\nu}^B \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g^{ab} - 2\alpha' \epsilon \tilde{R}^{(2)} \Phi^B + 4\alpha' \Delta \Phi^B\}, \quad (4.33)$$

onde $\tilde{R}^{(2)} \equiv R^{(2)}/(1 - \epsilon)$ e Δ é o operador Laplaciano em dois dimensões.

A pesar de ser derivado de uma teoria renormalizada, o tensor energia-momento na folha de mundo não é finito, ele precisa ser renormalizado. Por esse motivo, será definido um ordenamento normal, denotado por N de quantidades do tipo $F_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g^{ab}$ e de escalares no espaço tempo, que constituem os termos que compõem o traço (4.33). Os resultados desses ordenamentos normais serão finitos. Como a ação (4.10) é finita quando é escrita em termos dos acoplamentos renormalizados usando (4.11) e (4.12) [23], derivando a ação com respeito acoplamento $G_{\mu\nu}$ permite obter uma quantidade finita; cujo resultado é

$$\begin{aligned} 4\pi\alpha' \frac{\partial S}{\partial G_{\mu\nu}} &= \int dv \mu^\epsilon \left((\delta^\mu{}_\lambda \delta^\nu{}_\rho + \frac{\partial T_{\lambda\rho}}{\partial G_{\mu\nu}}) \partial_a X^\lambda \partial_b X^\rho g^{ab} \right. \\ &\quad \left. + 2\alpha' R^{(2)} \left(\frac{\partial Z}{\partial G_{\mu\nu}} \Phi + \frac{\partial \Psi}{\partial G_{\mu\nu}} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Inserindo um tensor $F_{\mu\nu}$ dentro de (4.34), consegue-se definir um ordenamento normal

$$\begin{aligned}
\int dv \mu^\epsilon N[F_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g^{ab}] &\equiv 4\pi\alpha' F \cdot \frac{\partial S}{\partial G} \\
&= \int dv \mu^\epsilon \left((F_{\mu\nu} + F \cdot \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial G}) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g^{ab} \right. \\
&\quad \left. + 2\alpha' R^{(2)} (F \cdot \frac{\partial Z}{\partial G} \Phi + F \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial G}) \right), \quad (4.35)
\end{aligned}$$

Como a teoria esta renormalizada, este é um resultado finito [23]. Além disso, define-se de uma maneira similar

$$\begin{aligned}
\int dv \mu^\epsilon R^{(2)} N[H] &\equiv 2\pi \frac{\partial S}{\partial \Phi} H \\
&= \int dv \mu^\epsilon R^{(2)} ZH, \quad (4.36)
\end{aligned}$$

para um escalar H no espaço tempo.

Agora, para escrever o traço (4.33) em termos destas objetos normalizados, este é integrado na folha de mundo e escrevendo as quantidades nuas em termos das renormalizadas e seus contratermos usando (4.11) e (4.12). O resultado é

$$\begin{aligned}
2\alpha' \int dv T_a^a &= \int dv \mu^\epsilon \{ -\epsilon (G_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g^{ab} - 2\alpha' \epsilon (Z\Phi + \Psi) R^{(2)} \\
&\quad + 4\alpha' \Delta \mu^\epsilon (Z\Phi + \Psi) \}. \quad (4.37)
\end{aligned}$$

No último termo de (4.37) aparece o operador laplaciano Δ em dois dimensões, este último termo é pois um termo de superfície que será desprezado na continuação. Somando e substraindo termos, a equação (4.37) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
2\alpha' \int dv T_a^a &= \int dv \mu^\epsilon \{ (\beta_{\mu\nu} + \beta \cdot \frac{\partial}{\partial G} T_{\mu\nu}) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g^{ab} \\
&\quad - \epsilon (G_{\mu\nu} + G \cdot \frac{\partial G}{\partial G} T_{\mu\nu}) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g^{ab} - 2\alpha' \epsilon R^{(2)} (Z\Phi + \Psi) \\
&\quad - (\beta_{\mu\nu} + \beta \cdot \frac{\partial}{\partial G} T_{\mu\nu} - \epsilon G \cdot \frac{\partial G}{\partial G} T_{\mu\nu}) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g^{ab} \}, \quad (4.38)
\end{aligned}$$

incorporando as definições (4.35) e (4.36) em (4.38) e usando as condições de consistência (4.25), (4.30) e (4.31), também como (4.21) e (4.29), a integração do traço do tensor energia-momento toma a forma

$$\begin{aligned}
2\alpha' \int dv T_a^a &= \int dv \mu^\epsilon \{ N[\beta_{\mu\nu}] \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g^{ab} - \epsilon N[G_{\mu\nu}] \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g^{ab} \\
&\quad + 2\alpha' R^{(2)} (N[\gamma + \theta]) - 2\alpha' \epsilon N[\Phi] \}. \quad (4.39)
\end{aligned}$$

Logo, com a condição $\beta_{\mu\nu} = 0$, e $\beta^\Phi = \gamma + \theta = 0$ no limite $\epsilon \rightarrow 0$ o traço integrado do tensor energia-momento é zero. Como consequência, o modelo sigma não teria invariância de escala local, só global. Cabe enfatizar a importância do uso das relações de consistência entre os coeficientes dos contratermos mais singulares na dedução da expressão (4.39). No entanto, a idéia é usar este tipo de método para mostrar que a teoria tem invariância conforme. Deve-se encontrar, pois, uma expressão não do traço integrado mas do traço em termos das funções β, θ e Φ . A idéia é redefinir o produto de operadores compostos, de maneira que o traço do tensor energia-momento seja finito sem ser integrado. Tseytlin [24] notou que somando a derivada total

$$\partial_a(\partial^a X^\mu A_\mu) = \nabla_\lambda A_\nu \partial_a X^\lambda \partial_b X^\nu g^{ab} + \alpha' R^{(2)} \nabla^\mu \Phi A_\mu \quad (4.40)$$

à definição do ordenamento de operadores compostos sem integração, consegue-se fazer uma definição local e finita para o produto de operadores num mesmo ponto, com o que ele toma a forma

$$\begin{aligned} N[F_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu] &\equiv (F_{\mu\nu} + F \cdot \frac{\partial}{\partial G} T_{\mu\nu} + \nabla_{(\mu} A_{\nu)}) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g^{ab} \\ &\quad + 2\alpha' R^{(2)} (F \cdot \frac{\partial Z}{\partial G} \Phi + F \cdot \frac{\partial}{\partial G} \Phi + \nabla_\mu \Phi A^\mu), \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$N[H] \equiv ZH. \quad (4.42)$$

onde

$$A_\mu = \sum_L (L)^L \sum_i \frac{1}{\epsilon^i} A_\mu^{(L,i)}. \quad (4.43)$$

O que se quer dizer é que mais contratermos devem ser calculados. Em termos de ordenamento redefinido, o traço do tensor energia momento (4.33) escreve-se

$$2\alpha' T_a^a = N[\beta_{\mu\nu}^* \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g^{ab}] + 2\alpha' R^{(2)} N[\beta^*] - \epsilon N[G_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g^{ab}] + 2\epsilon \alpha' R^{(2)} N[\Phi], \quad (4.44)$$

com

$$\beta_{\mu\nu}^* = \beta_{\mu\nu} - \frac{\alpha'}{2} \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi + \nabla_{(\mu} S_{\nu)}, \quad (4.45)$$

$$\beta^* = \beta + 2\gamma + 2\theta + \nabla^\mu \Phi S_\mu \quad (4.46)$$

e $A_\mu \equiv S_\mu - \frac{\alpha'}{2} \nabla_\mu \Phi$.

A maneira de exemplo se mostrará como calcular de novo o termo $R_{\mu\nu}$ da função $\beta_{\mu\nu}$, i.e, o contratermo $T_{\mu\nu}^{(1,1)}$. Lembrando a expressão a ordem mais baixa para a expansão de S_G :

$$S^{(2)} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \left(\nabla_a \xi^i \nabla_b \xi^i - R_{i\mu j\nu} \partial_a X_0^\mu \partial^a X_0^\nu \xi^i \xi^j \right), \quad (4.47)$$

pode-se calcular a ação com as correções devido à expansão perturbativa *

$$\Omega = e^{-\Gamma} = \int [\Pi] e^{-S_{Liv}} e^{-S_{Int}}, \quad (4.48)$$

onde S_{Liv} e S_{Int} estão dados por (3.72) e (3.73) respectivamente e o lado direito pode-se calcular perturbativamente fazendo uma expansão em série de Taylor do exponencial. A contribuição à primeira ordem a Γ é

$$\Gamma^{(2)} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z R_{\mu\nu ij} \partial_a X_0^\mu \partial^a X_0^\nu \langle \xi^i(z) \xi^j(z') \rangle, \quad (4.49)$$

onde deve-se tomar o limite $z \rightarrow z'$. Agora, a quantidade entre colchetes angulares é o propagador (A.15), e escrevendo o logaritmo no espaço dos momentos, a seguinte expressão é encontrada

$$\Gamma^{(2)} = \int d^2z 2R_{\mu\nu} \partial_a X_0^\mu \partial^a X_0^\nu \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{e^{ik \cdot (z-z')}}{k^2}. \quad (4.50)$$

Tomando o limite $z \rightarrow z'$ e usando regularização dimensional para resolver a integral em k , obtém-se (escrevendo só a parte singular em $\epsilon = d - 2$)

$$\Gamma^{(2)} = \frac{1}{2\pi\epsilon\alpha'} \int d^2z 2\alpha' R_{\mu\nu} \partial_a X_0^\mu \partial^a X_0^\nu, \quad (4.51)$$

de onde

$$T_{\mu\nu}^{(1,1)} = -2R_{\mu\nu}. \quad (4.52)$$

Substituindo (4.52) em (4.23) obtém-se o termo $R_{\mu\nu}$ da função $\beta_{\mu\nu}$.[†]

A maneira de proceder para calcular $\beta_{\mu\nu}$ a 2-loop é ir até os termos ξ com potências três e quatro, e encontrar usando regularização dimensional quais diagramas dão um pólo simples. O cálculo não será feito aqui, mas os resultados encontrados em [10], [17] junto com alguns valores calculados para $Z^{(L,1)}$ são

*A notação (2) é para denotar que este foi o segundo termo da expansão de S_G em coordenadas normais, o primeiro foi zero usando as equações de movimento para X_0 .

[†]Devido á maneira como foi escrito o traço do tensor energia- momento, aparece um $2\alpha'$ que não aparece nas expressões do capítulo anterior.

$$T_{\mu\nu}^{(2,1)} = -\frac{1}{4}R_{\mu\lambda\eta\rho}R_{\nu}{}^{\lambda\eta\rho}, \quad Z^{(1,1)}\Phi = \frac{1}{2}G^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\Phi, \quad Z^{(2,1)} = 0. \quad (4.53)$$

Os contratermos S_{μ} e θ só começam a aparecer a três loops. Eles são calculados em [24] e [25].

Em resumo as condições de invariância conforme podem ser encontradas mediante o cálculo das divergências que tem pólos simples, as quais por sua vez são calculadas usando o método de regularização dimensional. Isto começa a ser uma tarefa mais comprida, pois aparecem subdivergências a partir dos diagramas a dois loops, e os contratermos para elas devem ser devidamente introduzidos. Apesar disso, as funções β para o modelo sigma generalizado foram calculadas até 2-loops [26], junto com a ação no espaço-tempo (encontrada usando cálculos de amplitudes de espalhamento de modos não massivos de cordas) e foi encontrada a mesma correspondência encontrada a 1-loop, i.e, as condições de invariância conforme podem ser derivadas desta ação no espaço-tempo como equações de movimento para os campos do modelo sigma. Cálculos até 3-loops foram feitos para o modelo sigma sem dilaton nem tensor antissimétrico, encontrando a mesma correspondência com as equações de movimento derivadas de uma ação no espaço-tempo [27], [28] e [29].

Capítulo 5

Conclusões

Calcular quais condições devem ser satisfeitas para formular uma teoria de corda bosônica, tanto para uma corda sem acoplamentos, como acoplada com campos no espaço-tempo, permite encontrar condições de auto-consistência. O primeiro caso gera uma condição na dimensão do espaço-tempo que a corda se propaga; ele deve ter 26 dimensões. No segundo caso, a partir de um cálculo a 1-loop, encontra-se restrições nos campos com os quais a corda foi acoplada e que em princípio tinham certo grau de arbitrariedade. Pode-se observar que ter incluído o termo do dilaton na ação para o modelo sigma generalizado ajudou a determinar que a função β^Φ é a uma constante quando β^G e β^B são zero.

Existe uma maneira de escrever as condições para preservar a simetria conforme onde uma das condições é a equação de Einstein em 26 dimensões, com um tensor energia-momento que satisfaz uma lei de conservação. Isso é um requerimento importante por causa da simetria de difeomorfismos no espaço-tempo. Além disso, foi observado como este conjunto de condições de consistência são obtidos como equações de movimento para os campos acoplados com a corda a partir de um princípio de ação em 26 dimensões. Mesmo que esta ação não tenha sido derivada nesta dissertação, vale a pena apontar que ela pode ser encontrada no limite de baixas energias ($\alpha' \rightarrow 0$) das amplitudes de espalhamento entre os estados não massivos da teoria de cordas. Esta é uma relação que se mantém nas ordens em teoria de perturbações até onde foi calculado, e por isso, o cálculo de ações efetivas a baixas energias constitui uma área de aplicação do cálculo das funções β do modelo sigma.

Uma maneira sistemática de calcular as condições de cancelamento de anomalia é através dos coeficientes da equação de grupo de renormalização do modelo sigma. Eles podem ser calculados dos contratermos menos singulares calculados ordem a ordem perturbativamente, usando uma expansão covariante e o método de regularização dimensional.

Uma perspectiva do presente trabalho é aproveitar o que foi aprendido em sua

realização para ser aplicado na teoria de supercordas. Este tipo de teoria é de maior interesse, por conter férmions em seu espectro. No entanto, um problema aparece ao querer fazer um tratamento perturbativo com simetrias de Poincaré e supersimetria manifestas, devido à não existência de uma formulação para a teoria de supercordas com estas simetrias manifestas. Um avanço nesta área é uma descrição alternativa da supercorda [30] usando espinores puros. Assim, um problema interessante é usar espinores puros para escrever uma ação para o modelo sigma, e calcular equações de movimento com invariância super-Poincaré manifesta. Alguns pasos em esta direção já foram dados, calculando as equações de movimento para as supercordas Heteróticas e tipo II a nível de árvore [31], e para a corda Heterótica a um loop [32].

Apêndice A

O Propagador no modelo sigma e cálculos de OPE

Quando é escolhido um gauge $\hat{g}_{ab} = \delta_{ab}$ para a folha de mundo da corda bosônica sem acoplamentos no espaço tempo, a ação toma a forma de um termo cinético para D escalares livres. Usando coordenadas complexas, $(z, \bar{z})$ a ação é

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X_\mu \bar{\partial} X^\mu. \quad (\text{A.1})$$

Dela se encontra a equação de movimento para X^μ

$$\frac{\delta S}{\delta X_\mu} = -\frac{1}{\pi\alpha'} \partial \bar{\partial} X^\mu = 0, \quad (\text{A.2})$$

logo, ∂X^μ é holomórfico: $\partial X^\mu(z)$ e $\bar{\partial} X^\mu$ é anti-holomórfico. Por outro lado, a ação para os fantasmas neste mesmo gauge é

$$S_f = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (b_{zz} \partial c^z(z) + b_{\bar{z}\bar{z}} \bar{\partial} c^{\bar{z}}), \quad (\text{A.3})$$

de onde obtém-se as equações de movimento

$$\frac{1}{2\pi} \bar{\partial} c^z = 0, \quad \frac{1}{2\pi} \bar{\partial} b_{zz} = 0, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{1}{2\pi} \partial c^{\bar{z}} = 0, \quad \frac{1}{2\pi} \partial b_{\bar{z}\bar{z}} = 0. \quad (\text{A.5})$$

O valor esperado de um funcional $F[X]$ é definida por

$$\langle F[X] \rangle = \int [dX] e^{-S} F[X]; \quad (\text{A.6})$$

se ele é uma variação total, o valor esperado é zero; em particular

$$\int [dX] \frac{\delta}{\delta X_\mu(z, \bar{z})} e^{-S} = 0, \quad (\text{A.7})$$

de onde

$$\frac{1}{\pi\alpha'} \langle \bar{\partial} \partial X^\mu(z, \bar{z}) \rangle = 0, \quad (\text{A.8})$$

i.e, obtém-se o valor esperado da equação de movimento clássica. Considerando uma inserção de $X^\nu(z', \bar{z}')$ dentro da função do valor esperado, deve-se satisfazer também

$$\int [dX] \frac{\delta}{\delta X_\mu(z, \bar{z})} \{e^{-S} X^\nu(z', \bar{z}')\} = 0, \quad (\text{A.9})$$

de onde

$$\eta^{\mu\nu} \langle \delta^2(z - z', \bar{z} - \bar{z}') \rangle + \frac{1}{\pi\alpha'} \partial_z \partial_{\bar{z}} \langle X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z', \bar{z}') \rangle = 0, \quad (\text{A.10})$$

assim, as derivadas $\partial\bar{\partial}$ do produto de dois X^μ no limite $z \rightarrow z'$ divergem. No entanto, fazendo a definição

$$N[X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z', \bar{z}')] \equiv \langle X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z', \bar{z}') \rangle + \frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln|z - z'|^2, \quad (\text{A.11})$$

logo $N[X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z', \bar{z}')]$, chamado produto normalmente ordenado, satisfaz a mesma equação (A.8); para verificar isso, usa-se

$$\partial\bar{\partial} \ln|z|^2 = 2\pi\delta^2(z, \bar{z}). \quad (\text{A.12})$$

Além disso, o produto normalmente ordenado não tem divergências, pois foi precisamente definido tirando a parte divergente do produto de campos calculados no mesmo ponto. Que o produto normalmente ordenado satisfaça a equação (A.8) quer dizer que pode ser expandido numa parte holomórfica e outra anti-holomórfica. De fato, fazendo a expansão em série de Taylor do produto normalmente ordenado de $X^\mu(z, \bar{z})$ com $X^\nu(z', \bar{z}')$, da definição (A.11) encontra-se

$$\begin{aligned} \langle X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z', \bar{z}') \rangle &= -\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln|z - z'|^2 + N[X^\mu(z', \bar{z}') X^\nu(z', \bar{z}')] \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \{ (z - z')^n N[\partial^n X^\mu(z', \bar{z}') X^\nu(z', \bar{z}')] \\ &+ (\bar{z} - \bar{z}')^n N[\bar{\partial}^n X^\mu(z', \bar{z}') X^\nu(z', \bar{z}')] \}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Esta é uma expressão conhecida como Expansão em Produto de Operadores, ou OPE (por suas iniciais em Inglês). Ela é útil pois contém a informação dos produtos dos campos quando estão calculados em argumentos que são próximos. Como no limite $(z, \bar{z}) \rightarrow (z', \bar{z}')$ tanto o produto normalmente ordenado de $X^\mu(z, \bar{z})$ com $X^\nu(z', \bar{z}')$ como cada um dos termos da somatória em (A.13) é zero, então o comportamento quando estes dois pontos são próximos é

$$\lim_{(z, \bar{z}) \rightarrow (z', \bar{z}')} \langle X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z', \bar{z}') \rangle = -\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln|z - z'|^2, \quad (\text{A.14})$$

o que é usualmente denotado por

$$\langle X^\mu(z, \bar{z}) X^\nu(z', \bar{z}') \rangle \sim -\frac{\alpha'}{2} \eta^{\mu\nu} \ln|z - z'|^2. \quad (\text{A.15})$$

Este é, por sua vez, o propagador ou função de Green correspondente a esta teoria livre. Dado que

$$\partial \bar{\partial} \ln|z - z'|^2 = 2\pi \delta^{(2)}(z - z', \bar{z} - \bar{z}'), \quad (\text{A.16})$$

o propagador no espaço dos momentos é

$$\langle X^\mu X^\nu \rangle = \frac{4\pi\alpha' \eta^{\mu\nu}}{q^2} \quad (\text{A.17})$$

Da mesma maneira, incorporando o exponencial da ação para os fantasmas (os quais independem um do outro e os dois independem de X) junto com seu elemento de medida, pode-se encontrar de

$$\int [dbdc dX] \frac{\delta}{\delta c^z(z, \bar{z})} \{e^{-S-S_f} c^z(z', \bar{z}')\} = 0, \quad (\text{A.18})$$

uma expressão similar a (A.10)

$$\bar{\partial} \langle b_{zz}(z, \bar{z}) c^z(z', \bar{z}') \rangle = 2\pi \langle \delta^{(2)}(z - z', \bar{z} - \bar{z}') \rangle, \quad (\text{A.19})$$

o que sugere definir o ordenamento normal entre fantasmas

$$N[b_{zz}(z, \bar{z}) c^z(z', \bar{z}')] \equiv \langle b_{zz}(z, \bar{z}) c^z(z', \bar{z}') \rangle - \frac{1}{z - z'}, \quad (\text{A.20})$$

onde é usado

$$\bar{\partial} \frac{1}{z} = 2\pi \delta^{(2)}(z, \bar{z}) \quad (\text{A.21})$$

para mostrar que $N[b_{zz}(z) c^z(z')]$ é holomórfico. Uma definição análoga a (A.20) se faz para o produto normalmente ordenado de $b_{z\bar{z}}$ com $c^{\bar{z}}$. De novo, o OPE de $b_{zz}(z)$ com $c^z(z')$ pode ser calculado expandindo em série de Taylor a parte normalmente ordenada em (A.20) e fazendo o limite $(z, \bar{z}) \rightarrow (z', \bar{z}')$ encontra-se

$$\langle b_{zz}(z) c^z(z') \rangle \sim \frac{1}{z - z'}, \quad (\text{A.22})$$

e como b e c anticomutam logo

$$\langle c^z(z) b_{zz}(z') \rangle \sim \frac{1}{z - z'}. \quad (\text{A.23})$$

O tensor energia-momento, definido de

$$\langle T_{ab}^X \rangle = \frac{4\pi}{\sqrt{g}} \frac{\delta}{\delta g^{ab}} \int [dX] e^{-S}, \quad (\text{A.24})$$

é o valor esperado do tensor energia-momento obtido classicamente quando a métrica da folha de mundo é plana. Em coordenadas $(z, \bar{z})$ ele é

$$\langle T_{zz}^X(z) \rangle = -\frac{1}{\alpha'} \langle \partial X^\mu(z) \partial X_\mu(z) \rangle, \quad \langle T_{\bar{z}\bar{z}}^X(\bar{z}) \rangle = -\frac{1}{\alpha'} \langle \bar{\partial} X^\mu(\bar{z}) \bar{\partial} X_\mu(\bar{z}) \rangle. \quad (\text{A.25})$$

Note-se que estas componentes estão sendo escritas como o produto de dois operadores no mesmo ponto, mas está sendo assumido nesta notação que eles já foram ordenados normalmente. Esta notação é assumida em todo o texto, e por isso as funções de correlação calculadas num mesmo ponto sempre são zero.

Para fazer o OPE da componente T_{zz}^X do tensor energia-momento com ela mesma, escreve-se

$$\langle T_{zz}^X(z) T_{zz}^X(z') \rangle = \frac{1}{(\alpha')^2} \langle \partial_z X^\mu(z) \partial_z X_\mu(z) \partial_{z'} X^\nu(z') \partial_{z'} X_\nu(z') \rangle, \quad (\text{A.26})$$

e usa-se o teorema de Wick, onde cada contração pode-se encontrar do propagador (A.15):

$$\begin{aligned} \langle T_{zz}^X(z) T_{zz}^X(z') \rangle &= \frac{1}{(\alpha')^2} \eta_{\mu\lambda} \eta_{\rho\eta} \{ 2 \overline{\partial_z X^\mu(z) \partial_{z'} X^\rho(z')} \overline{\partial_z X^\lambda(z) \partial_{z'} X^\eta(z')} \\ &\quad + 4 \overline{\partial_z X^\mu(z) \partial_{z'} X^\rho(z')} \langle \partial_z X^\lambda(z) \partial_{z'} X^\eta(z') \rangle \\ &\quad + \langle \partial_z X^\mu(z) \partial_{z'} X^\rho(z') \rangle \overline{\partial_z X^\lambda(z) \partial_{z'} X^\eta(z')} \}. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

De (A.15),

$$\langle \partial_z X^\mu(z) \partial_{z'} X^\rho(z') \rangle \sim -\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{(z - z')^2} \eta^{\mu\rho}, \quad (\text{A.28})$$

logo

$$\langle T_{zz}^X(z) T_{zz}^X(z') \rangle \sim \frac{D}{2(z - z')^4} - \frac{2}{\alpha'} \frac{1}{(z - z')^2} \langle \partial_z X^\lambda(z) \partial_{z'} X_\lambda(z') \rangle. \quad (\text{A.29})$$

Agora, fazendo a expansão de $\partial X^\lambda(z)$ ao redor de z' e mantendo só os termos singulares, de (A.29) obtém-se

$$\begin{aligned} \langle T_{zz}^X(z) T_{zz}^X(z') \rangle &\sim \frac{D}{2(z - z')^4} - \frac{2}{\alpha'} \frac{1}{(z - z')^2} \langle \partial_{z'} X^\lambda(z') \partial_{z'} X_\lambda(z') \rangle \\ &\quad - \frac{2}{\alpha'} \frac{1}{(z - z')} \langle \partial_{z'}^2 X^\lambda(z') \partial_{z'} X_\lambda(z') \rangle, \\ &= \frac{D}{2(z - z')^4} + \frac{2}{(z - z')^2} \langle T_{zz}^X(z') \rangle + \frac{1}{(z - z')} \partial_{z'} \langle T_{zz}^X(z') \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Por outro lado, o tensor energia momento para os fantasmas pode-se encontrar via teorema de Noether da simetria de S_f por transformações

$$\delta b_{zz} = -v\partial b_{zz} - 2(\partial v)b_z z, \quad (\text{A.31})$$

$$\delta c^z = -v\partial c^z + (\partial v)c^z, \quad (\text{A.32})$$

assim, encontra-se

$$\langle T_{zz}^f(z) \rangle = -\langle \partial b_{zz}(z)c^z(z) \rangle - 2\langle b_{zz}(z)\partial c^z(z) \rangle. \quad (\text{A.33})$$

A notação $T^f(z) \equiv T_{zz}^f(z)$, $b(z) \equiv b_{zz}$ e $c \equiv c^z(z)$ simplificará a escrita. O OPE de $T^f(z)$ com $T^f(z')$ é

$$\begin{aligned} \langle T^f(z)T^f(z') \rangle &= \langle \partial b(z)c(z)\partial' b(z')c(z') \rangle + 2\langle \partial b(z)c(z)b(z')\partial' c(z') \rangle \\ &+ 2\langle b(z)\partial c(z)\partial' b(z')c(z') \rangle + 4\langle b(z)\partial c(z)b(z')\partial' c(z') \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Onde fazendo as contrações de Wick de cada um dos termos do lado direito de (A.34) encontra-se

$$\langle \partial b(z)c(z)\partial' b(z')c(z') \rangle \sim -\frac{1}{(z-z')^4} - \frac{\langle c(z)\partial' b(z') \rangle - \langle \partial b(z)c(z') \rangle}{(z-z')^2} \quad (\text{A.35})$$

$$2\langle \partial b(z)c(z)b(z')\partial' c(z') \rangle \sim -\frac{4}{(z-z')^4} - \frac{4\langle c(z)b(z') \rangle}{(z-z')^3} + \frac{2\langle \partial b(z)\partial' c(z') \rangle}{z-z'} \quad (\text{A.36})$$

$$2\langle b(z)\partial c(z)\partial' b(z')c(z') \rangle \sim -\frac{4}{(z-z')^4} - \frac{4\langle b(z)c(z') \rangle}{(z-z')^3} + \frac{2\langle \partial c(z)\partial' b(z') \rangle}{z-z'} \quad (\text{A.37})$$

$$4\langle b(z)\partial c(z)b(z')\partial' c(z') \rangle \sim -\frac{4}{(z-z')^4} - 4\frac{\langle b(z)\partial' c(z') \rangle - \langle \partial c(z)b(z') \rangle}{(z-z')^2}. \quad (\text{A.38})$$

Substituindo (A.35), (A.36), (A.37) e (A.38) em (A.34), usando a antissimetria do produto de b com c e fazendo uma expansão em série de Taylor ao redor de z' obtém-se

$$\langle T^f(z)T^f(z') \rangle \sim \frac{-26}{2(z-z')^4} + 2\frac{\langle T^f(z') \rangle}{(z-z')^2} + \frac{\partial' \langle T^f(z') \rangle}{z-z'}. \quad (\text{A.39})$$

Finalmente, escrevendo o tensor energia-momento total $T = T^X + T^f$, de (A.30) e (A.39) obtém-se

$$\langle T(z)T(z') \rangle = \frac{D-26}{2(z-z')^4} + \frac{2}{(z-z')^2} \langle T(z') \rangle + \frac{1}{z-z'} \partial' \langle T(z') \rangle. \quad (\text{A.40})$$

Um campo Φ é chamado um campo conforme, se o OPE do tensor energia momento com ele tem a forma.

$$\langle T(z)\phi(z') \rangle \sim \frac{1}{(z-z')^2}\phi(z') + \frac{1}{z-z'}\partial\phi(z'), \quad (\text{A.41})$$

onde h é uma constante, conhecida como o peso do operador. Os OPE do tensor energia-momento T^f com b e c tem esta forma, com h igual a 2 e -1 respectivamente. A transformação que gera a ação de T^f nesses campos é precisamente (A.31) e (A.32), por isso foi mencionado no texto principal que b e c são campos conformes com pesos 2 e -1 respectivamente.

Referências

- [1] G. Veneziano, *Nuovo Cimento* **57A**, 190 (1968), M. A. Virasoro, *Phys. Rev.* **177**, 2309 (1969), J. A. Shapiro, *Phys. Lett* **338**, 361 (1970).
- [2] P. Ramond, *Phys. Rev D* **D3**, 2415 (1971).
- [3]] A. Neveu e J. Scherk, *Nucl. Phys.* **B36**, 155, (1972)
- [4] J. Scherk, J. H. Schwarz, *Nucl. Phys*, **B81** 118 (1974).
- [5] C. Lovelace, *Phys. Lett.*, **34B**, 500 (1971).
- [6] A. Neveu e J.H Schwarz, *Nucl. Phys.*, **B31**, 86 (1971)
- [7] P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi e C. B. Thorn, *Nucl. Phys* **B56**, 109 (1973).
- [8] A. M. Polyakov, *Phys. Lett.* **103B**, 207 (1981).
- [9] J. Honerkamp, *Nucl. Phys* **B36**, 130 (1972).
- [10] D. H. Friedan, *Phys. Rev. Lett.* **45** 1057, (1980).
- [11] J. Polchinski, *Nucl. Phys*, **B303**, 226 (1988)
- [12] C.G. Callan, D. Friedan, E.J. Martinec e M.J. Perry *Nucl. Phys*, **B262** (1985).
- [13] E.S Fradkin e A.A Tseytlin, *Nucl. Phys.*, **B261** (1985).
- [14] B. Dubrovin, A. Fomenko e S. Novikov, *Modern Geometry - Methods and Applications* (Springer-Verlag, 1993). d. J. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry*, (Addison Wesley, 1950).
- [15] J. Polchinski, *String Theory, An Introduction to the Bosonic String* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998)
- [16] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer* (Addison-Wesley Publishing Company, 1990).

- [17] L. Alvarez-Gaumé, D. Z. Freedman e S. Mukhi, *Ann. Phys.* **134** , 85 (1981).
- [18] R. L Bishop e R. J Crittenden, *Geometry of Manifolds* (New York: Academic Press, 1964).
- [19] S. Mukhi, *Nucl. Phys.* **B 264**, 640 (1986).
- [20] L. Alvarez-Gaumé e E. Witten, *Nucl. Phys.* **B234**, 269 (1984).
- [21] C. Callan e L. Thorlacius, *Sigma Models and String Theory, In Particles, Strings and Supernovae*, TASI 1988, eds. A. Jevicki, C. -I. Tan. (Singapore: World Scientific, 1989).
- [22] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B61**, 455 (1973)
- [23] P. Breitenlohner e D. Maison, *Commun. math. Phys.* **52** 11,39,55 (1977).
- [24] A.A. Tseytlin, *Nucl. Phys*, **B276**, 391 (1986).
- [25] G. Curci e G. Paffuti, *Nucl. Phys.* **B286**, 399 (1987).
- [26] R.R Metsaev e A.A. Tseytlin, *Nucl. Phys.* **B293**, 385, (1987).
- [27] A.P. Foakes e N. Mohammedi, *Nucl. Phys.* **B306**, 343 (1988).
- [28] S.J. Graham, *Phys. Lett* **B197**, 543, (1987).
- [29] R.R Metsaev e A.A. Tseytlin, *Phys. Lett.* **B185**, 52, (1987).
- [30] N. Berkovits, *JHEP*, **0004**, 18 (2000).
- [31] N. Berkovits, *Nucl. Phys*, **B635**, 75 (2001).
- [32] B. C. Vallilo e O. Chandia, hep-th/0401226.

