

ADALBERTO ZANATTA NEDER LAZARINI

**Condições relaxadas para estabilidade e estabilização
de sistemas não lineares TS utilizando majorantes
ótimos da derivada de funções de Lyapunov fuzzy e
controladores chaveados**

Ilha Solteira
2021

**Condições relaxadas para estabilidade e estabilização
de sistemas não lineares TS utilizando majorantes
ótimos da derivada de funções de Lyapunov fuzzy e
controladores chaveados**

Tese apresentada ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista - UNESP - Campus de Ilha Solteira, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Automação.

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Orientador

Ilha Solteira

2021

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

- L431c Lazarini, Adalberto Zanatta Neder.
Condições relaxadas para estabilidade e estabilização de sistemas não lineares TS utilizando majorantes ótimos da derivada de funções de Lyapunov fuzzy e controladores chaveados / Adalberto Zanatta Neder Lazarini. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2021
103 f. : il.
- Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2021
- Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Inclui bibliografia
1. Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs). 2. Controle chaveado. 3. Função de Lyapunov Fuzzy. 4. Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno. 5. Controle Fuzzy.


Raiane da Silva Santos

Supervisora Técnica de Seção
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação
CRB/8 - 9999

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: Condições relaxadas para estabilidade e estabilização de sistemas não lineares TS utilizando majorantes ótimos da derivada de funções de Lyapunov fuzzy e controladores chaveados

AUTOR: ADALBERTO ZANATTA NEDER LAZARINI

ORIENTADOR: MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira".

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA (Participação Virtual)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. RODRIGO CARDIM (Participação Virtual)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. FLAVIO ANDRADE FARIA (Participação Virtual)
Faculdade de Ciências e Letras de Araraquara - UNESP

Prof. Dr. ROBERTO KAWAKAMI HARROP GALVÃO (Participação Virtual)
Divisão de Engenharia Eletrônica / Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA

Prof. Dr. WALLYSONN ALVES DE SOUZA (Participação Virtual)
Coordenação de Ciências Matemáticas e Naturais / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins - IFTO

Ilha Solteira, 26 de março de 2021

Resumo

Neste trabalho, é formulado um problema de otimização para majorantes de uma função custo, e é apresentada uma solução ótima para esse problema. Após isso, esse resultado é aplicado para a obtenção de condição relaxadas de estabilidade e estabilização para plantas não lineares descritas por modelos fuzzy Takagi-Sugeno (TS), baseadas na Função de Lypaunov Fuzzy (FLF) e nas desigualdades matriciais lineares (do inglês Linear Matrix Inequalities, ou LMIs). A FLF é dada por $V(x(t)) = x(t)^T P(h(x(t))) x(t)$, sendo $x(t)$ o vetor de estado da planta, $P(h(x(t))) = h_1(x(t))P_1 + h_2(x(t))P_2 + \dots + h_r(x(t))P_r$, $P_i = P_i^T > 0$ e $h_i(x(t))$ é o peso relacionado ao modelo local i na representação da planta através de modelos fuzzy TS, para $i = 1, 2, \dots, r$. Quando a derivada de $V(x(t))$ é calculada, aparece o termo $x(t)^T \dot{P}(h(x(t))) x(t)$, que normalmente é tratado utilizando-se majorantes conservadores, supondo que os limitantes das derivadas de $h_i(x(t))$, $i = 1, 2, \dots, r$, são conhecidos. O principal resultado desse trabalho é um procedimento para obter majorantes ótimos para o termo $x(t)^T \dot{P}(h(x(t))) x(t)$, que contemplem o valor máximo e sejam sempre menores ou iguais do que esse valor máximo. Além disso, é mostrada também a importância de um cálculo exato desses limitantes das derivadas de $h_i(x(t))$, $i = 1, 2, \dots, r$, quando a maioria dos resultados importantes da literatura apenas utilizam valores aleatórios para majorantes que já eram conservativos. Por fim, é proposto, uma vez que esse método de obtenção de um majorante ótimo retorna várias possibilidades de majorantes para termos desconhecidos, que toda essa informação seja associada ao projeto de estabilização em si. Seguindo essa ideia, foram propostos também controladores dependentes dos termos gerados pelo método de obtenção desses majorantes ótimos, através de controladores chaveados, gerando ainda menos conservadorismo na busca por solução do problema.

Palavras chave: Modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Funções de Lyapunov fuzzy. Desigualdades matriciais lineares (LMIs). Estabilidade. Estabilização. Controle fuzzy. Controle chaveado.

Abstract

This work initially proposes an optimization problem and after presents its optimal solution. Then, this result is applied to obtain relaxed conditions to design controllers for nonlinear plants described by Takagi-Sugeno (TS) models, based on fuzzy Lyapunov function (FLF) and Linear Matrix Inequalities (LMI). The FLF are given by $V(x(t)) = x(t)^T P(\alpha(x(t)))x(t)$, where $x(t)$ is the plant state vector, $P(\alpha(x(t))) = \alpha_1(x(t))P_1 + \alpha_2(x(t))P_2 + \dots + \alpha_r(x(t))P_r$, $P_i = P_i^T > 0$ and $\alpha_i(x(t))$ is the weight related to the local model i in the representation of the plant by TS fuzzy models, for $i = 1, 2, \dots, r$. When one calculates the time derivative of this $V(x(t))$, it appears the term $x(t)^T \dot{P}(\alpha(x(t)))x(t)$, that is usually handled using conservative upper bounds, supposing that the bounds of the time derivative of $\alpha_i(x(t))$, $i = 1, 2, \dots, r$, are available. The main result of this paper is a procedure to obtain optimal upper bounds for the term $x(t)^T \dot{P}(\alpha(x(t)))x(t)$, such that they contemplate the maximum value and are always smaller than or equal to the maximum value. Furthermore, it is also shown the importance of a exact calculation of these bounds of the derivatives of $h_i(x(t))$, $i = 1, 2, \dots, r$, while most of the important results of the literature only utilize random values for these already constraint upper bounds. Finally, it is proposed, once this procedure to obtain these optimal upper bounds utilizes many possibilities for these upper bounds using unknown terms, that all this information gets associated to the stabilization design itself. From this idea, it was also proposed controllers that are dependent from this term generated by this method for these optimal upper bounds, through switched controllers, resulting in even less constraints for search of the solution to the problem.

Keywords: Takagi-Sugeno Fuzzy Models. Fuzzy Lyapunov functions. Linear Matrix Inequalities (LMIs). Stability. Stabilization. Fuzzy control. Switched Control.

Lista de Figuras

1	Ilustração da aproximação obtida por modelos fuzzy TS.	15
2	Área de factibilidade para $r = 3$, $\times$ para o Teorema 1 em (GUEDES <i>et al.</i> , 2013) e $\circ$ para o algoritmo.	34
3	Área de factibilidade para $r = 2$, $(\cdot)$ para Teorema 3 original e $(\cdot, \times)$ para Teorema 3 utilizando o Algoritmo 1 apresentado no Teorema 1.	39
4	Área de factibilidade para $r = 3$, $(\cdot)$ para Teorema 3 original e $(\cdot, \times)$ para Teorema 3 utilizando o Algoritmo 1 apresentado no Teorema 1.	39
5	Área de factibilidade para $r = 2$, $(\cdot)$ para Teorema 4 original e $(\cdot, \times)$ para Teorema 4 utilizando o Algoritmo 1 presente no Teorema 1.	45
6	Área de factibilidade para $r = 2$ com intervalos diferentes de a e b , $(\cdot)$ para Teorema 4 original e $(\cdot, \times)$ para Teorema 4 utilizando o Algoritmo 1 presente no Teorema 1.	46
7	Área de factibilidade para $r = 2$ com intervalos diferentes para os limitantes $\hat{h}_i$, $(\cdot)$ para Teorema 4 original e $(\cdot, \times)$ para Teorema 4 utilizando o Algoritmo 1.	47
8	Área de factibilidade para $r = 3$, $(\cdot)$ para Teorema 4 original, $(\cdot, \times)$ para Teorema 3 original, $(\cdot, \times, \circ)$ para Teorema 3 utilizando o Algoritmo 1.	48
9	Área de factibilidade para $r = 3$, $(\cdot)$ para Teorema 3 original, $(\cdot, \times)$ para Teorema 3 utilizando o Algoritmo 1.	49
10	Área de factibilidade para $r = 3$, $(\cdot)$ para Teorema 4 original, $(\cdot, \times)$ para Teorema 4 utilizando o Algoritmo 1, $(\cdot, \times, \circ)$ para Teorema 3 utilizando o Algoritmo 1.	50
11	Área de factibilidade para $r = 3$, $(\cdot)$ para Teorema 4 original, $(\cdot, \times)$ para Teorema 4 utilizando o Algoritmo 1.	51

12	Área de factibilidade para $r = 2$, $(\cdot)$ para Teorema 5 original, $(\cdot, \times)$ para Teorema 5 utilizando o Algoritmo 1, com intervalos iguais para os limitantes de $\dot{h}_i$	55
13	Área de factibilidade diferente para $r = 2$, $(\cdot)$ para Teorema 5 original, $(\cdot, \times)$ para Teorema 5 utilizando o Algoritmo 1, com intervalos iguais para os limitantes de $\dot{h}_i$	56
14	Área de factibilidade para $r = 2$, $(\cdot)$ para Teorema 5 original, $(\cdot, \times)$ para Teorema 5 utilizando o Algoritmo 1, com intervalos diferentes para os limitantes de $\dot{h}_i$	57
15	Área de factibilidade para $r = 2$, $(\cdot)$ para Teorema 5 original, $(\cdot, \times)$ para Teorema 5 utilizando o Algoritmo 1, com intervalos iguais para os limitantes de $\dot{h}_i$	58
16	Área de factibilidade para $r = 2$, $(\cdot)$ para Teorema 5 original, $(\cdot, \times)$ para Teorema 5 utilizando o Algoritmo 1, com intervalos simétricos para os limitantes de $\dot{h}_i$	59
17	Área de factibilidade para $r = 2$, $(\cdot)$ para Teorema 5 original, $(\cdot, \times)$ para Teorema 5 utilizando o Algoritmo 1, com intervalos diferentes para os limitantes de $\dot{h}_i$	60
18	Região de Operação.	62
19	Pêndulo Invertido	63
20	Comportamento Dinâmico do Sistema Realimentado com os Ganhos (6.6).	65
21	Comportamento das Funções de Pertinência do Sistema Realimentado com os Ganhos (6.6).	65
22	Comportamento Dinâmico do Sistema Realimentado com os Ganhos (6.7).	66
23	Comportamento das Funções de Pertinência do Sistema Realimentado com os Ganhos (6.7).	66
24	Região de Factibilidade, $(\cdot)$ para o Teorema 3 original e $(\cdot, \times)$ para as LMIs adaptadas (5.13)-(5.15) com Região de Operação.	67
25	Comportamento Dinâmico do Sistema Realimentado com os Ganhos (6.9).	68

26	Comportamento das Funções de Pertinência do Sistema Realimentado com os Ganhos (6.9).	69
27	Comportamento Dinâmico do Sistema Realimentado com os Ganhos (6.10).	69
28	Comportamento das Funções de Pertinência do Sistema Realimentado com os Ganhos (6.10).	70
29	Região de Factibilidade, $(\cdot)$ para o Teorema 4 original e $(\cdot, \times)$ para as LMIs adaptadas (5.13)-(5.15) com Região de Operação.	70
30	Região de factibilidade comparativa para $r = 2$ e intervalos iguais de $\dot{h}_i$	86
31	Região de factibilidade comparativa para $r = 2$ e intervalos diferentes de $\dot{h}_i$	87
32	Comportamento Dinâmico do Sistema Realimentado com os Ganhos (7.75).	88
33	Comportamento das Funções de Pertinência do Sistema Realimentado com os Ganhos (7.75).	88
34	Comportamento das Derivadas das Funções de Pertinência do Sistema Realimentado com os Ganhos (7.75).	89
35	Chaveamento de Índices do Controlador K_σ para o Sistema Realimentado com os Ganhos (7.75).	89
36	Comportamento da Função de Lyapunov do Sistema Realimentado com os Ganhos (7.75).	90
37	Comportamento Dinâmico do Sistema Realimentado com os Ganhos (7.76).	91
38	Comportamento das Funções de Pertinência do Sistema Realimentado com os Ganhos (7.76).	91
39	Comportamento das Derivadas das Funções de Pertinência do Sistema Realimentado com os Ganhos (7.76).	92
40	Chaveamento de Índices do Controlador $K_\sigma(h(x(t)))$ para o Sistema Realimentado com os Ganhos (7.76).	92
41	Comportamento da Função de Lyapunov do Sistema Realimentado com os Ganhos (7.76).	93
42	Região de factibilidade comparativa para $r = 3$ e intervalos iguais de $\dot{h}_i$	94
43	Região de factibilidade comparativa para $r = 3$ e intervalos simétricos de $\dot{h}_i$	95

44	Região de factibilidade comparativa para $r = 4$ e intervalos iguais de $\dot{h}_i$. . .	96
45	Região de factibilidade comparativa para $r = 4$ e intervalos iguais de $\dot{h}_i$. . .	97

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}^n$	Conjunto de vetores com $n \times 1$ elementos reais.
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Conjunto de vetores com $n \times m$ elementos reais.
$\mathbb{K}_N$	Conjunto dos primeiros N números inteiros positivos: $\{1, 2, \dots, N\}$.
M^T	Transposto de uma matriz real M .
$M > (\geq) 0$	M é uma matriz positiva definida (semi-definida).
$M < (\leq) 0$	M é uma matriz negativa definida (semi-definida).
I	Matriz Identidade.
$ z $	Valor absoluto de um número real z .
$\text{diag}\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$	Matriz bloco diagonal cujos elementos diagonais são $M_1, M_2, \dots, M_n$.
$\mathcal{E}(P, \delta)$	Conjunto elipsoidal formado pelo vetor de estados $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ tal que $x(t)^T P x(t) \leq \delta$, $P = P^T \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $P > 0$.

Sumário

1	Introdução	11
2	Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno	13
2.1	Sistemas Fuzzy TS	13
2.2	Funções de Lyapunov	16
2.2.1	<i>Função de Lyapunov Quadrática</i>	17
2.2.2	<i>Função de Lyapunov Fuzzy</i>	17
3	Definição do Problema	18
3.1	Definição do Problema e Análise da Solução	19
3.2	Solução do Problema	22
3.3	Algoritmo 1	23
4	Condições de Estabilidade para Sistemas Fuzzy TS via FLF	32
4.1	Condições Relaxadas para Estabilidade de Sistemas Fuzzy TS Utilizando FLF	32
4.2	Resultados Numéricos	33
5	Condições Para Estabilização de Sistemas Fuzzy TS via FLF	35
5.1	Análise Sobre Condições de Relaxamento Para Estabilização de Sistemas Não Lineares Fuzzy TS	35
5.1.1	<i>Comparação com (MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009)</i>	35
5.1.2	<i>Comparação com (LIU et al., 2017)</i>	40
5.1.3	<i>Comparação com (QIAO; YANG, 2018)</i>	52
6	Condições de Estabilização para Sistemas Fuzzy TS Sujeitos a Região de Operação	61
6.1	Representação da Região de Operação	61

6.2	Condições de Estabilização para Sistemas Não Lineares Fuzzy TS Sujeitos a Região de Operação	62
6.2.1	<i>O Pêndulo Invertido</i>	62
6.2.2	<i>Comparação com (MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009) - Região de Operação</i>	63
6.2.3	<i>Comparação com (LIU et al., 2017) - Região de Operação</i>	67
7	Novas Condições de Estabilização para Sistemas Fuzzy TS	71
7.1	Introdução	71
7.2	Novas Propostas para Estabilidade de Sistemas Fuzzy TS	72
7.2.1	<i>Utilizando-se um controlador fuzzy $K(h(x(t)))$</i>	72
7.2.2	<i>Utilizando-se um ganho único K</i>	75
7.2.3	<i>Utilizando-se um ganho chaveado K_σ</i>	78
7.2.4	<i>Utilizando-se um conjunto de ganhos chaveados $K_\sigma(h(t))$</i>	82
7.2.5	<i>Resultados Comparativos</i>	85
8	Conclusões	98
	REFERÊNCIAS	100

1 Introdução

A introdução da lógica *fuzzy* (ZADEH, 1965) teve grande papel no avanço de processamento de dados e análises de sistemas, sendo um dos principais avanços dessa nova abordagem o estudo de sistemas não lineares. Com esta abordagem, é possível descrever sistemas desse tipo em função de uma combinação convexa de sistemas lineares, na chamada modelagem Takagi-Sugeno (TS) (TAKAGI; SUGENO, 1985).

Além disso, outra ferramenta introduzida para facilitar projetos de sistemas controle, ou até solucionar problemas e sistemas mais complexos, foram as LMIs (*Linear Matrix Inequalities*, ou Desigualdades Matriciais Lineares) (BOYD *et al.*, 1994; WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1996). Através delas, o projeto de controladores robustos para sistemas incertos e/ou sujeitos a falha se tornou mais fácil, porém tornou-se necessário o uso de um maior poder computacional para a resolução dos problemas de otimização propostos pelas LMIs.

Assim, utilizando-se da modelagem TS para sistemas não lineares e do projeto de controladores via LMIs, além das teorias de análise de sistemas dinâmicos (LYAPUNOV, 1992), a gama de soluções de controle aumentou consideravelmente, criando ainda novas abordagens, como o controle chaveado (SOUZA *et al.*, 2013), entre outros.

Uma dessas novas abordagens foi a utilização de uma função de Lyapunov fuzzy (FLF) na análise de estabilidade e/ou projeto de controladores para estabilização de sistemas não lineares TS (MOZELLI *et al.*, 2009; MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009; ESTEVES, 2011; GUEDES, 2015). Porém, a abordagem dos limitantes inferiores e superiores das derivadas temporais das funções de pertinência ($\dot{h}_i(x(t))$) ainda era conservativa. Assim, em (LAZARINI, 2017), foram propostas condições necessárias e suficientes para estabilidade de sistemas não lineares TS. No entanto, a abordagem adotada em (LAZARINI, 2017) para o ajuste de pesos foi aplicada apenas para análise da estabilidade de sistemas não lineares TS. Neste trabalho os resultados apresentados em (LAZARINI, 2017) serão devidamente formalizados e generalizados. Será mostrado que essa abordagem pode ser aplicada para otimização de vários tipos de funções dependentes dos termos associados a certos pesos, a fim de obter-se majorantes ótimos dessas funções.

Neste trabalho, é apresentado um problema de otimização para majorantes de uma função custo, e é apresentada uma solução ótima para esse problema. Após isso, esse resultado é aplicado para obter-se condição relaxadas de estabilidade e estabilização para plantas não lineares descritas por modelos TS, baseadas na FLF e nas LMIs. A FLF é dada por $V(x(t)) = x(t)^T P(h(x(t))) x(t)$, sendo $x(t)$ o vetor de estados da planta, $P(h(x(t))) = h_1(x(t))P_1 + h_2(x(t))P_2 + \dots + h_r(x(t))P_r$, $P_i = P_i^T > 0$ e $h_i(x(t))$ é o peso local relacionado ao modelo local i na representação da planta em modelos fuzzy TS, para $i = 1, 2, \dots, r$. Quando a derivada de $V(x(t))$ é calculada, aparece o termo $x(t)^T \dot{P}(h(x(t))) x(t)$, que normalmente é tratado utilizando-se majorantes conservadores, supondo que os limitantes das derivadas de $h_i(x(t))$, $i = 1, 2, \dots, r$, são conhecidos. O principal resultado desse trabalho é um procedimento para o cálculo de um majorante ótimo para o termo $x(t)^T \dot{P}(h(x(t))) x(t)$, que contemple o valor máximo e é sempre menor ou igual que esse valor máximo.

No Capítulo 2, será feita uma breve revisão de sistemas não lineares fuzzy TS, em conjunto com alguns aspectos importantes desses sistemas, que serão utilizados nos resultados desse trabalho. No Capítulo 3, será apresentado o algoritmo que resulta no ajuste ótimo de pesos em que se baseia todo esse trabalho e, no Capítulo 4, esse algoritmo será aplicado na análise de estabilidade de sistemas não lineares TS. No Capítulo 5, serão comparados resultados obtidos utilizando-se o algoritmo apresentado no Capítulo 3 para estabilização de sistemas não lineares TS com artigos publicados recentemente na literatura especializada. No Capítulo 6, será utilizado o conceito de região de operação, em combinação com o algoritmo citado, a fim de garantir as condições de existência do sistema, e também explicitar a importância de se calcular de maneira exata os limitantes das derivadas das funções de pertinência ($\dot{h}_i(x(t))$). No Capítulo 8, serão propostas novas técnicas para projeto de controladores para sistemas não lineares TS, a partir dos modelos formados pelo algoritmo que será apresentado no Capítulo 3, incluindo controladores chaveados (SOUZA *et al.*, 2014). Por fim, no Capítulo 8 serão apresentadas as conclusões do trabalho, bem como perspectivas de continuidade da linha de pesquisa.

2 Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno

2.1 Sistemas Fuzzy TS

Sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (TS) foram introduzidos nos anos 80 (TAKAGI; SUGENO, 1985) como uma representação de uma planta não linear através da combinação convexa de um certo número de modelos locais lineares e invariantes no tempo. Em alguns casos, quanto maior o número de modelos locais utilizados nessa representação, maior a fidelidade com o modelo real. Porém, ao mesmo tempo que a fidelidade aumenta, paga-se o preço da necessidade de alta capacidade computacional, ocasionalmente inviabilizando a implementação do projeto. Assim, deve-se sempre analisar a relação custo-benefício do uso de vários modelos locais.

A modelagem fuzzy TS é um método simples, sendo sua principal característica o conjunto de regras *se-então*, em que a descrição das dinâmicas locais de cada regra fuzzy é dada por um modelo de sistema linear (ESTEVEZ, 2011).

Tem-se o seguinte modelo linear local

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t).$$

sendo $i \in \mathbb{K}_r$ (r é o número de modelos lineares) e $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado. Assim, pode ser montado um conjunto de regras *se-então* disponíveis que regem o sistema, sendo que a i -ésima regra tem a forma:

$$\text{Regra } i: \begin{cases} \text{Se} & z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ e } \dots \text{ e } z_p(t) \text{ é } M_p^i, \\ \text{Então} & \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t). \end{cases} \quad (2.1)$$

Tem-se que M_j^i , com $j = 1, 2, \dots, p$, é o conjunto fuzzy j da regra i e $z_1(t), z_2(t), \dots, z_p(t)$ são as variáveis premissas. Seja $\mu_j^i(z_j(t))$ o “peso” do conjunto fuzzy M_j^i associado à variável premissa $z_j(t)$, e seja

$$w^i(z(t)) = \prod_{j=1}^p \mu_j^i(z_j(t)), \quad z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_p(t)]^T.$$

Como $\mu_j^i(z_j(t)) \geq 0$ tem-se, para $i \in \mathbb{K}_r$,

$$w^i(z(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^r w^i(z(t)) > 0, \quad i \in \mathbb{K}_r,$$

$\mathbb{K}_r$ sendo o conjunto de números inteiros positivos $\{1, \dots, r\}$.

Uma escolha conveniente para a obtenção de um modelo fuzzy TS para sistemas não lineares é adotar $z(t) = x(t)$, sendo $x(t)$ o vetor de estado do sistema não linear.

Desta forma, dados $[x(t), u(t), z(t)]$, o modelo matemático final do sistema fuzzy é inferido utilizando o método do centro de gravidade para a defuzzificação (TANIGUCHI *et al.*, 2001), e é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))}, \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)), \\ &= \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i \right) x(t) + \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t))B_i \right) u(t), \\ &= A(h)x(t) + B(h)u(t), \end{aligned} \tag{2.2}$$

sendo que,

$$h_i(z(t)) = \frac{w^i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))}, \quad i \in \mathbb{K}_r, \quad h = [h_1 \quad h_2 \quad \dots \quad h_r]^T. \tag{2.3}$$

Em (2.3), $h_i(z(t))$ é o peso normalizado de cada regra, também conhecido como função de pertinência do modelo local i , $i \in \mathbb{K}_r$ (CARDIM, 2009).

É importante observar que, para $i \in \mathbb{K}_r$, tem-se a combinação linear convexa dos modelos, ou seja,

$$h_i(z(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \quad i \in \mathbb{K}_r. \tag{2.4}$$

Assim, os pesos normalizados satisfazem as seguintes propriedades:

$$h_j(x(t)) \geq 0, \quad \sum_{j=1}^r h_j(x(t)) = 1, \quad \sum_{j=1}^r \dot{h}_j(x(t)) = 0, \quad t \geq 0 \text{ e } j \in \mathbb{K}_r. \tag{2.5}$$

Um das principais abordagens da literatura sobre as derivadas temporais das funções de pertinência é a sua limitação intervalar (MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009). De maneira geral, pode-se representar esses limitantes em 3 tipos de intervalos:

- Intervalos iguais

$$-\phi \leq \dot{h}_i \leq \phi, \tag{2.6}$$

para todo $i \in \mathbb{K}_r$;

- Intervalos simétricos,

$$\begin{aligned}
 -\phi_1 &\leq \dot{h}_1 \leq \phi_1, \\
 -\phi_2 &\leq \dot{h}_2 \leq \phi_2, \\
 -\phi_3 &\leq \dot{h}_3 \leq \phi_3, \\
 &\vdots \\
 -\phi_r &\leq \dot{h}_r \leq \phi_r;
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

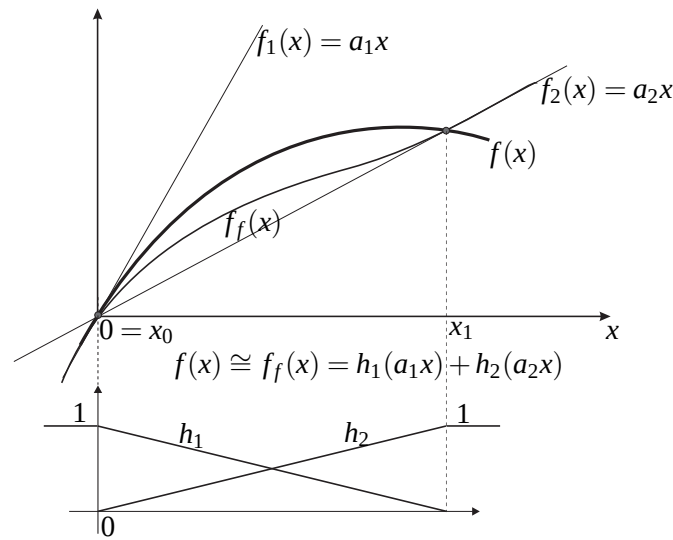
- Intervalos diferentes

$$\begin{aligned}
 -\phi_{1,1} &\leq \dot{h}_1 \leq \phi_{1,2}, \\
 -\phi_{2,1} &\leq \dot{h}_2 \leq \phi_{2,2}, \\
 -\phi_{3,1} &\leq \dot{h}_3 \leq \phi_{3,2}, \\
 &\vdots \\
 -\phi_{r,1} &\leq \dot{h}_r \leq \phi_{r,2}.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Exemplo

Um bom exemplo da modelagem fuzzy TS de sistemas pode ser encontrado em (MACHADO, 2003; GUEDES, 2015), como mostra a figura abaixo.

Figura 1 - Ilustração da aproximação obtida por modelos fuzzy TS.



Fonte: Machado (2003).

Considerando a função não linear $f(x)$ mostrada na Figura 1, nota-se que esta pode ser aproximada, para $x \approx x_0 = 0$, por $f_1(x) = a_1x$, que é a reta tangente desta curva em $x = 0$. Uma aproximação linear para esta função, para $x \approx x_1$, é $f_2(x) = a_2x$; observe que esta segunda aproximação linear não é tão boa quanto a primeira aproximação linear,

pois $f_2(x)$ não corresponde à reta tangente de $f(x)$ em $x = x_1$. Adotando-se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ como modelos locais, e as funções $h_1(x)$, $h_2(x)$ definidas na Figura 1 (observe que $h_1(x)$ e $h_2(x)$ são positivas ou nulas e que $h_1(x) + h_2(x) = 1$), um modelo fuzzy TS para $f(x)$ seria $f_f(x) = h_1(x)f_1(x) + h_2(x)f_2(x)$, como ilustrado na Figura 1. Pode-se observar que para $x \approx x_0$, então $h_1 \approx 1$, $h_2 \approx 0$ e $f_f(x) \approx f_1(x)$ e para $x \approx x_1$, então $h_2 \approx 1$, $h_1 \approx 0$ e $f_f(x) \approx f_2(x)$. Finalmente, verifica-se que $f_f(x)$ proporciona uma aproximação da função $f(x)$ muito melhor do que as funções $f_1(x)$ (linearização em torno de um ponto de operação) ou $f_2(x)$, por exemplo para $x_0 \leq x \leq x_1$. Esse exemplo simples mostra o potencial dos modelos fuzzy TS, no tratamento de funções e/ou de sistemas não lineares. Para obter melhores aproximações, é necessário escolher funções $h_1(x)$ e $h_2(x)$ de modo a conseguir uma aproximação exata da função $f(x)$ utilizando $f_f(x)$ (MACHADO, 2003; CARDIM, 2009; ESTEVES, 2011).

Baseado em (SOUZA *et al.*, 2013), a representação do sistema é realizada considerando os limites inferiores e superiores das não linearidades do sistema e também termos lineares incertos, em que esses máximos e mínimos formam vértices que descrevem um politopo. Os limites são calculados considerando uma região de operação conhecida do vetor de estado e o conjunto conhecido dos parâmetros incertos da planta. Os modelos fuzzy TS obtidos com este procedimento apresentam modelos locais conhecidos e pesos normalizados desconhecidos.

2.2 Funções de Lyapunov

Vários métodos para obtenção da função de Lyapunov foram propostos ao longo dos anos, como a função de Lyapunov quadrática, a função de Lyapunov fuzzy, a função de Lyapunov de integral de linha e as funções Lyapunov por partes (BERNAL; HUSEK, 2005; CHADLI; MAQUIN; RAGOT, 2000; JADBABAIE, 1999; JOHANSSON; RANTZER; ARZEN, 1999; OHTAKE; TANAKA; WANG, 2003; TANAKA; HORI; WANG, 2003; TANAKA; IKEDA; WANG, 1998a; TANAKA; SANO, 1994; WANG; TANAKA; GRIF-FIN, 1996; RHEE; WON, 2006).

Sendo assim, diferentes tipos de funções Lyapunov são utilizadas por diferentes autores na literatura, dependendo da natureza do sistema e de sua complexidade (ABDELMALEK, 2009), levando sempre em conta o conservadorismo das suas condições de estabilidade.

2.2.1 Função de Lyapunov Quadrática

Lyapunov conseguiu desenvolver teorias que analisavam sistemas dinâmicos não lineares através de sua “energia”. A teoria oferece técnicas baseadas em uma função que é positiva fora do ponto de equilíbrio, nula no ponto de equilíbrio, e que representa a “energia” do sistema analisado, a chamada função de Lyapunov. Assim, é possível analisar a estabilidade desse sistema a partir do comportamento dessa função “energia” em função do tempo. Se a “energia” decrescer, ou seja, se a derivada da função de Lyapunov for negativa, o sistema tende a ficar num ponto de equilíbrio quando sua função energia for nula.

Considere o sistema fuzzy TS apresentado em (2.2) e (2.5). A função de Lyapunov mais simples utilizada na literatura, também chamada de Função de Lyapunov Quadrática (FLQ), é dada por:

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t), \quad P > 0, \quad P^T = P. \quad (2.9)$$

Se $\dot{V}(x(t)) < 0$, para $x(t) \neq 0$, então o ponto $x = 0$ é localmente assintoticamente estável para o sistema descrito em (2.2) e (2.5).

2.2.2 Função de Lyapunov Fuzzy

As Funções de Lyapunov Fuzzy (FLF) foram uma nova abordagem proposta para a análise da estabilidade do sistema fuzzy TS (2.2) e (2.5), em busca de menos conservadorismo. As FLF podem ser definidas como (JADBABAIE, 1999; LEE; PARK; JOO, 2012; LEE; JOO; TAK, 2014; TANAKA; HORI; WANG, 2003):

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) x^T(t) P_i x(t), \quad (2.10)$$

sendo que, P_i , $i \in \mathbb{K}_r$, são matrizes simétricas definidas positivas.

3 Definição do Problema

Neste capítulo será proposto um problema de otimização de uma função custo relativamente geral. Nos capítulos seguintes este resultado será aplicado na obtenção de condições menos conservadoras, baseadas em FLF e LMIs, para o projeto de controladores de plantas não lineares descritas por modelos fuzzy TS.

Considere um conjunto de parâmetros $p_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{K}_r$, sendo que são conhecidas as constantes reais $\phi_{i,1}, \phi_{i,2}$ e C tais que as seguintes condições são satisfeitas:

$$\begin{aligned} \phi_{i,1} > 0, \phi_{i,2} > 0, i \in \mathbb{K}_r, \\ -\phi_{i,1} \leq p_i \leq \phi_{i,2}, i \in \mathbb{K}_r, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\sum_{i=1}^r p_i = C, \quad (3.2)$$

sendo que $\mathbb{K}_r = \{1, 2, \dots, r\}$.

Neste estudo, o conjunto de parâmetros p_i , $i \in \mathbb{K}_r$, permite que cada um desses p_i possa assumir qualquer valor satisfazendo (3.1), de modo que (3.2) seja respeitada.

Para ilustrar melhor este fato, suponha que para um elemento arbitrário $i \in \mathbb{K}_r$, $p_i = \phi_{i,2}$. Então, existem p_j , $j \in \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, r-1, r\}$ satisfazendo (3.1), tais que a condição (3.2) seja respeitada:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r p_j &= p_1 + p_2 + \dots + p_{i-1} + p_i + p_{i+1} + \dots + p_{r-1} + p_r \\ &= p_1 + p_2 + \dots + p_{i-1} + \phi_{i,2} + p_{i+1} + \dots + p_{r-1} + p_r \\ &= C, i \in \mathbb{K}_r. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Assim, como de (3.1) $-\phi_{i,1} \leq p_i$ para todo $i \in \mathbb{K}_r$, tem-se de (3.3) que

$$\begin{aligned} -\phi_{1,1} - \phi_{2,1} - \dots - \phi_{i-1,1} + \phi_{i,2} - \phi_{i+1,1} - \dots - \phi_{r-1,1} - \phi_{r,1} \\ \leq p_1 + p_2 + \dots + p_{i-1} + \phi_{i,2} + p_{i+1} + \dots + p_{r-1} + p_r = C, i \in \mathbb{K}_r. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Analogamente, para um elemento arbitrário $i \in \mathbb{K}_r$, suponha que $p_i = -\phi_{i,1}$. Então, existem p_j , $j \in \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, r-1, r\}$ satisfazendo (3.1), tais que a condição (3.2) seja atendida:

$$\sum_{j=1}^r p_j = p_1 + p_2 + \dots + p_{i-1} - \phi_{i,1} + p_{i+1} + \dots + p_{r-1} + p_r = C. \quad (3.5)$$

Logo, como de (3.1) $\phi_{i,2} \geq p_i$ para todo $i \in \mathbb{K}_r$, tem-se de (3.5) que

$$\begin{aligned} & \phi_{1,2} + \phi_{2,2} + \dots + \phi_{i-1,2} - \phi_{i,1} + \phi_{i+1,2} + \dots + \phi_{r-1,2} + \phi_{r,2} \\ & \geq p_1 + p_2 + \dots + p_{i-1} - \phi_{i,1} + p_{i+1} + \dots + p_{r-1} + p_r = C, i \in \mathbb{K}_r. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Considere agora um conjunto de vetores $T \in \mathbb{R}^r$, dado por:

$$\mathbf{v} = \{T \in \mathbb{R}^r / T = [T_1 \ T_2 \ \dots \ T_r]^T, T_i > 0 \text{ para todo } i \in \mathbb{K}_r\}. \quad (3.7)$$

Com as definições e análises descritas anteriormente, é possível estabelecer o problema que será estudado, e posteriormente, apresentar a sua solução. Como será visto mais à frente, este estudo possibilitará a obtenção de condições relaxadas para o projeto de controladores para plantas não lineares, descritas através de modelos *fuzzy* Takagi-Sugeno, utilizando funções de Lyapunov *fuzzy*.

3.1 Definição do Problema e Análise da Solução

Considere a função custo

$$J(p) = \sum_{i=1}^r p_i T_i, \quad (3.8)$$

definida para todos os pesos $p_i \in \mathbb{R}$ satisfazendo (3.1), (3.2), (3.4) e (3.6), sendo que as variáveis T_i foram definidas em (3.7).

Defina o conjunto Ω abaixo:

$$\Omega = \{p = [p_1 p_2 \dots p_r]^T \in \mathbb{R}^r / p_i, i \in \mathbb{K}_r, \text{ satisfazem (3.1), (3.2), (3.4) e (3.6)}\}. \quad (3.9)$$

Defina os pesos ótimos $p_i^*(T) \in \Omega$, $i \in \mathbb{K}_r$, sendo T_i e T definidos em (3.7), tais que

$$\max_{p \in \Omega} J(p) = \sum_{i=1}^r p_i^*(T) T_i. \quad (3.10)$$

Como será visto na Observação 1, para todos p_i satisfazendo (3.1), (3.2), (3.4) e (3.6),

e as variáveis T_i definidas em (3.7), então os pesos ótimos $p_i^*(T)$ descritos em (3.10) não são constantes e dependem de T .

Então, supondo que T em (3.7) não está disponível, o problema consiste em determinar majorantes ótimos para $J(p)$ definido em (3.8), compostos por $m \geq 1$ conjuntos de r pesos constantes p_{ji}^* , $j \in \mathbb{K}_m$ e $i \in \mathbb{K}_r$, tais que (3.1), (3.2), (3.4) e (3.6) sejam respeitadas, utilizando a notação $\bar{p}_j^* = [p_{j_1}^* p_{j_2}^* \cdots p_{j_r}^*]^T \in \Omega$ para $j \in \mathbb{K}_m$, as seguintes condições sejam satisfeitas :

$$\max_{p \in \Omega} J(p) \geq J(\bar{p}_j^*) = \sum_{i=1}^r p_{ji}^* T_i, \forall j \in \mathbb{K}_m \quad (3.11)$$

e

$$\max_{p \in \Omega} J(p) = \max_{j \in \mathbb{K}_m} J(\bar{p}_j^*) = \max_{j \in \mathbb{K}_m} \left\{ \sum_{i=1}^r p_{ji}^* T_i \right\}. \quad (3.12)$$

Observação 1. É importante observar que os pesos ótimos $p_i^*(T)$ em (3.10), $i \in \mathbb{K}_r$, dependem dos valores do vetor T definidos em (3.7). Para exemplificar esse fato, suponha que $T_i = \varepsilon_1 > 0$, $T_j = \varepsilon_2 > 0$, sendo que i é arbitrário tal que $i \in \mathbb{K}_r$ e $j \in \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, r-1, r\}$. Então, note que quando $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$, de (3.8), $J(p)$ vai ser aproximadamente igual a $p_i^*(T)T_i$ e o máximo de $J(p)$ para todo $p \in \Omega$, definido em (3.9), será $\phi_{i,2}T_i$, pois de (3.1) o valor máximo de $p_i^*(T)$ é $\phi_{i,2}$. A análise realizada nas equações (3.3) e (3.4) garantem a existência de p_j , $j \in \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, r-1, r\}$ satisfazendo (3.1), tais que a condição (3.2) seja respeitada. Agora, esta análise vale para todo $i \in \mathbb{K}_r$ e se adotarmos $p_i^*(T) = \phi_{i,2}$, para todo $i \in \mathbb{K}_r$, pela condição (3.2) teríamos que ter $\phi_{1,2} + \phi_{2,2} + \cdots + \phi_{r,2} = C$, o que é impossível observando a análise realizada em (3.5) e (3.6), pois $\phi_{i,2} > 0 > -\phi_{i,1}$ e consequentemente esta soma seria maior do que C . Assim, neste caso, não existem valores constantes de $p_i^*(T)$, $i \in \mathbb{K}_r$, que atendem (3.10), se considerarmos todos os possíveis vetores desconhecidos T definidos em (3.7). Esse fato mostra que os pesos ótimos $p_i^*(T)$, $i \in \mathbb{K}_r$, dependem do valor do vetor T .

Como o vetor T não é considerado disponível, então não é possível obter os pesos ótimos $p_i^*(T)$, $i \in \mathbb{K}_r$, que satisfazem a equação (3.10).

Com o objetivo de obter majorantes ótimos para $J(p)$, da forma dada em (3.10) com pesos constantes de $p_{ij}^*(T)$, $i \in \mathbb{K}_r$, $j \in \mathbb{K}_m$, que atendam (3.11) e (3.12), uma ideia é dividir o conjunto $\mathbf{v}$ de vetores T definidos em (3.7) em m subconjuntos, denominados por $\mathbf{v}_j$, $j \in \mathbb{K}_m$, de modo que para $T \in \mathbf{v}_j$, as condições abaixo sejam verificadas:

$$\max_{\substack{p \in \Omega \\ T \in \mathbf{v}_j}} J(p) = \sum_{i=1}^r p_{ij}^* T_i, j \in \mathbb{K}_m, \quad (3.13)$$

sendo que os pesos p_{ij}^* , para todo $i \in \mathbb{K}_r$, $j \in \mathbb{K}_m$, são constantes, e $p_j^* = [p_{j_1}^* p_{j_2}^* \cdots p_{j_r}^*]^T \in \Omega$

para todo $j \in \mathbb{K}_m$.

Adicionalmente, se escolhermos estes conjuntos tais que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \cup \mathbf{v}_2 \cup \dots \cup \mathbf{v}_m$, ou seja, de modo que qualquer elemento de $\mathbf{v}$ pertença a pelo menos um conjunto $\mathbf{v}_j$, $j \in \mathbb{K}_m$, então podemos usar o Lema 3.1, para obter um majorante ótimo de $J(p)$, que atenda (3.11) e (3.12).

Lema 3.1. *Considere a condição descrita em (3.14), sendo $J(p)$ definida em (3.8), para todo $T \in \mathbf{v}$ e $p \in \Omega$:*

$$J(p) = \sum_{i=1}^r p_i T_i \leq \max_{\substack{p \in \Omega \\ T \in \mathbf{v}}} J(p), \quad (3.14)$$

, supondo que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \cup \mathbf{v}_2 \cup \dots \cup \mathbf{v}_m$ e que

$$\max_{\substack{p \in \Omega \\ T \in \mathbf{v}_j}} J(p) = \sum_{i=1}^r p_{ji}^* T_i, \text{ para todo } j \in \mathbb{K}_m, \quad (3.15)$$

sendo que $\bar{p}_j^* = [p_{j1}^* p_{j2}^* \dots p_{jr}^*]^T \in \Omega$, para todo $j \in \mathbb{K}_m$, são vetores constantes e $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \cup \mathbf{v}_2 \cup \dots \cup \mathbf{v}_m$.

Então, a condição (3.14) é equivalente a

$$J(p) \leq \sum_{i=1}^r p_{ji}^* T_i, \text{ para todo } j \in \mathbb{K}_m. \quad (3.16)$$

Adicionalmente,

$$\max_{\substack{p \in \Omega \\ T \in \mathbf{v}}} J(p) = \max_{j \in \mathbb{K}_m} J(\bar{p}_j^*) = \max_{j \in \mathbb{K}_m} \sum_{i=1}^r p_{ij}^* T_i. \quad (3.17)$$

Demonstração. De (3.8), (3.14) e (3.15) e do fato que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \cup \mathbf{v}_2 \cup \dots \cup \mathbf{v}_m$, então para todo $T \in \mathbf{v}$ e $p \in \Omega$,

$$\begin{aligned} J(p) \leq \max_{\substack{p \in \Omega \\ T \in \mathbf{v}}} J(p) &\stackrel{\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \cup \mathbf{v}_2 \cup \dots \cup \mathbf{v}_m}{\iff} J(p) \leq \max_{\substack{p \in \Omega \\ T \in \mathbf{v}_j}} J(p), \text{ para todo } j \in \mathbb{K}_m \\ &\stackrel{(3.15)}{\iff} J(p) \leq \sum_{i=1}^r p_{ji}^* T_i, \text{ para todo } j \in \mathbb{K}_m. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Em (3.18) foi considerado o seguinte fato: a condição $\mathbf{z}(\omega) \leq \max\{z_1(\omega), z_2(\omega), \dots, z_m(\omega)\}$, em que $\mathbf{z}(\omega), z_1(\omega), z_2(\omega), \dots, z_m(\omega) \in \mathbb{R}$ e $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_r]^T \in \mathbb{R}^r$, é equivalente a $\mathbf{z}(\omega) \leq z_i(\omega)$, para todo $i \in \mathbb{K}_m$.

A verificação da condição dada em (3.17) segue do fato de que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \cup \mathbf{v}_2 \cup \dots \cup \mathbf{v}_m$, e assim, o máximo de $J(\mathbf{p})$ será o máximo dos máximos para T nos conjuntos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$, descritos em (3.15).

A prova está concluída. $\square$

Então, note que as condições (3.11) e (3.12) também são satisfeitas.

Observação 2. *A partir de agora, o problema consiste em obter os pesos ótimos $\bar{\mathbf{p}}_j^* = [p_{j1}^* p_{j2}^* \dots p_{jr}^*]^T \in \Omega$, $j \in \mathbb{K}_m$ e $i \in \mathbb{K}_r$, de modo que para todos possíveis valores das variáveis T_i definidas em (3.7) sejam determinados $m \geq 1$ majorantes para $J(\mathbf{p})$, denominados por $J(\bar{\mathbf{p}}_j^*)$, sendo $j \in \mathbb{K}_m$, apresentados em (3.11) e (3.12). Esses majorantes são ótimos pois nunca excedem o valor máximo de $J(\mathbf{p})$, para todo $\mathbf{p} \in \Omega$, e contemplam o valor máximo de $J(\mathbf{p})$ para todo $\mathbf{p} \in \Omega$. O Lema 3.1 mostra que esses majorantes oferecem condições equivalentes para o majorante ótimo proposto em (3.14).*

A solução deste problema é importante no projeto de controladores para sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno, pois pelo nosso conhecimento, os métodos disponíveis atualmente utilizam majorantes mais conservativos para $J(\mathbf{p})$. Assim, a solução proposta permitirá o projeto de controladores para esta classe de sistemas e com esta abordagem mais flexíveis, possibilitando a obtenção de índices de desempenho melhores ou iguais aos obtidos com os métodos disponíveis atualmente.

3.2 Solução do Problema

Analizando o problema descrito na Seção 3.1, indicando um possível procedimento para a obtenção de uma solução utilizando o Lema 3.1, um primeiro resultado para a sua solução trata da seguinte questão: supondo que as variáveis $T_i > 0$, $i \in \mathbb{K}_r$, são constantes conhecidas, quais seriam os pesos ótimos p_i^* , $i \in \mathbb{K}_r$, que satisfazem (3.10)?

A resposta para esta pergunta é apresentada no Algoritmo 1, que oferece um procedimento metódico para obter estes pesos ótimos p_i^* , $i \in \mathbb{K}_r$, quando $T_i > 0$, $i \in \mathbb{K}_r$, são conhecidos.

Uma observação interessante é que o Algoritmo 1 não necessita do conhecimento explícito de T_i , $i \in \mathbb{K}_r$, mas apenas do conhecimento das posições destes elementos quando eles são colocados em ordem decrescente. Por exemplo, para $r = 3$, suponha que T_1, T_2 e T_3 são tais que $T_2 \geq T_1 \geq T_3$. Então, essa informação, considerando o conhecimento das constantes reais $\phi_{i,1}$, $\phi_{i,2}$ e C para $i \in \mathbb{K}_r$ é suficiente para o Algoritmo 1 obter os pesos ótimos p_1^* , p_2^* e p_3^* , tais que (3.10) seja satisfeita.

Agora, deve-se lembrar que T_i , $i \in \mathbb{K}_r$ no problema descrito na Seção 3.1, são variáveis

desconhecidas, que podem assumir quaisquer valores positivos. Uma ideia para obter um majorante ótimo para $J(\mathbf{p})$ em (3.8) é considerar todas as possíveis combinações de ordens decrescentes distintas de T_i , $i \in \mathbb{K}_r$, e aplicar o Algoritmo 1 para cada uma delas. O número de combinações de ordens decrescentes distintas de T_i , $i \in \mathbb{K}_r$, é obtida pela permutação de r elementos, que é igual a $m = r! = r.(r-1).(r-2).\dots 2.1$. Defina então $\bar{\mathbf{p}}_j = [p_{j1}p_{j2}\dots p_{jr}]^T$ e $\bar{\mathbf{p}}_j^* = [p_{j1}^*p_{j2}^*\dots p_{jr}^*]^T$, $j \in \mathbb{K}_m$, o vetor de pesos ótimos, que maximizam $J(\mathbf{p})$, para a ordem decrescente j , $j \in \mathbb{K}_m$. Isso significa que para cada uma destas ordens decrescentes de j , $j \in \mathbb{K}_m$, $\max_{\mathbf{p} \in \Omega} J(\mathbf{p}) = J(\bar{\mathbf{p}}_j^*)$.

Então, note que, como para todo $T_i > 0$, $i \in \mathbb{K}_r$, uma destas combinações coincide com a ordem decrescente correta, pois estamos considerando todas as possíveis combinações. Assim, tem-se que:

$$\max_{\mathbf{p} \in \Omega} J(\mathbf{p}) = \max_{j \in \mathbb{K}_m} J(\bar{\mathbf{p}}_j^*). \quad (3.19)$$

Desta forma, com esse procedimento, são obtidos $m = r!$ majorantes de $J(\mathbf{p})$ definida em (3.8), sendo que pelo menos um deles coincide com o $\max_{\mathbf{p} \in \Omega} J(\mathbf{p})$. Assim, este conjunto de majorantes pode ser considerado ótimo, pois contempla o $\max_{\mathbf{p} \in \Omega} J(\mathbf{p})$ e nunca é maior do que o $\max_{\mathbf{p} \in \Omega} J(\mathbf{p})$, pois de (3.19), $J(\bar{\mathbf{p}}_j^*) \leq \max_{\mathbf{p} \in \Omega} J(\mathbf{p})$, $\forall j \in \mathbb{K}_m$. Portanto, é uma solução para o problema descrito na Seção 3.1.

Este procedimento pode ser formalizado, utilizando-se do Lema 3.1, considerando que o conjunto $\mathbf{v}_j$ corresponde à ordem decrescente j de T_i , $i \in \mathbb{K}_r$, para todo $j \in \mathbb{K}_m$. Assim, como as $m = r!$ combinações de T_i , $i \in \mathbb{K}_r$, contemplam todos os possíveis casos, tem-se de (3.7) que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 \cup \mathbf{v}_2 \cup \dots \cup \mathbf{v}_m$, e o Lema 3.1 pode ser aplicado para obter uma solução ótima para o problema.

A seguir, será proposto um algoritmo, que oferece um procedimento metódico para obtenção de pesos ótimos p_{ij}^* , $i \in \mathbb{K}_r$, para a ordem decrescente j de T_i , definido pelo conjunto $\mathbf{v}_j$, $j \in \mathbb{K}_m$, tal que a condição (3.15) seja respeitada.

3.3 Algoritmo 1

Defina o conjunto:

$$\Psi_r = \{\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \omega_2 \dots \omega_r]^T \in \mathbb{R}^r / \omega_i \in \mathbb{K}_r \text{ para todo } i \in \mathbb{K}_r \text{ e } \omega_1 \neq \omega_2 \neq \dots \neq \omega_r\}. \quad (3.20)$$

Note que, para quaisquer valores das variáveis $T_i > 0$, $i \in \mathbb{K}_r$, definidas em (3.7), sempre

é possível colocá-las em ordem decrescente, e usando a definição (3.20), obter $\omega \in \Psi_r$ tal que:

$$T_{\omega_r} \geq T_{\omega_{r-1}} \geq \dots \geq T_{\omega_2} \geq T_{\omega_1}, \omega = [\omega_1 \omega_2 \dots \omega_r]^T \in \Psi_r. \quad (3.21)$$

Por exemplo, para $r = 3$, considere que $T_1 = 4$, $T_2 = 6$ e $T_3 = 5$. Então, $\omega_3 = 2$, $\omega_2 = 3$ e $\omega_1 = 1$ de modo que $T_{\omega_3} = T_2 = 6 \geq T_{\omega_2} = T_3 = 5 \geq T_{\omega_1} = T_1 = 4$ e assim $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T = [1 \ 3 \ 2]^T \in \Psi_3$. Observe que neste caso a condição (3.21) foi satisfeita.

Defina:

$$J(p_\omega) = \sum_{i=1}^r p_{\omega_i} T_{\omega_i}. \quad (3.22)$$

O problema consiste em determinar um conjunto de pesos ótimos para $p_\omega = [p_{\omega_1} \ p_{\omega_2} \ \dots \ p_{\omega_r}]^T \in \Omega$ definido em (3.9), denominado $p_\omega^* = [p_{\omega_1}^* \ p_{\omega_2}^* \ \dots \ p_{\omega_r}^*]^T$, de modo que para as variáveis $T_{\omega_i} > 0, \omega_i \in \mathbb{K}_r$, definidas em (3.7) e satisfazendo (3.21), a condição abaixo seja satisfeita:

$$\max_{p_\omega \in \Omega} J(p_\omega) = J(p_\omega^*) = \sum_{i=1}^r p_{\omega_i}^* T_{\omega_i}. \quad (3.23)$$

A ideia central do algoritmo consiste nas atribuições dos maiores valores possíveis para p_{ω_i} , $i \in \mathbb{K}_r$, começando com $\omega_i = \omega_r$, depois com $\omega_i = \omega_{r-1}$ e assim por diante. Esta estratégia leva em conta a expressão de $J(p_\omega)$ definida em (3.22) e a ordem decrescente apresentada em (3.21), na qual os maiores valores de T_{ω_i} são $T_{\omega_r}, T_{\omega_{r-1}}, \dots, T_{\omega_1}$, sendo que o objetivo é obter os pesos ótimos p_ω^* para maximizar $J(p_\omega)$, de modo a atender (3.23).

O procedimento deve ainda considerar que $p_\omega^* = [p_{\omega_1}^* \ p_{\omega_2}^* \ \dots \ p_{\omega_r}^*]^T \in \Omega$ dado em (3.9) e que $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_r]^T \in \Psi_r$ definido em (3.20). Assim, de (3.1) e (3.2), $0 > -\phi_{\omega_i,1} \leq p_{\omega_i}^* \leq \phi_{\omega_i,2} > 0$, para todo $i \in \mathbb{K}_r$, e $p_{\omega_1}^* + p_{\omega_2}^* + \dots + p_{\omega_r}^* = C$.

Desta forma os menores valores de p_{ω_i} ficarão reservados para $p_{\omega_1}, p_{\omega_2}, \dots$, associados aos menores valores de T_{ω_i} , que são T_{ω_1} , depois T_{ω_2} e assim por diante, como pode ser visto em (3.21).

Agora serão apresentados os dois passos do algoritmo:

- Passo 1: Considere que o vetor $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_r]^T \in \Psi_r$ é conhecido e defina a soma de S_p abaixo, observando que ela é composta pelos termos associados aos valores máximos e mínimos de p_{ω_i} , para todo $\omega_i \in \mathbb{K}_r$, pois de (3.1), $-\phi_{\omega_i,1} \leq p_{\omega_i} \leq \phi_{\omega_i,2}$, para todo $i \in \mathbb{K}_r$:

$$S_p = -\phi_{\omega_1,1} - \phi_{\omega_2,1} - \dots - \phi_{\omega_{p-2},1} - \phi_{\omega_{p-1},1} + \phi_{\omega_p,2} + \phi_{\omega_{p+1},2} + \dots + \phi_{\omega_{r-1},2} + \phi_{\omega_r,2}. \quad (3.24)$$

Inicialmente, será determinado $k \in \mathbb{K}_r$ tal que:

$$\begin{cases} S_p \leq C, \text{ para } k \leq p \leq r, \text{ e} \\ S_{k-1} > C. \end{cases} \quad (3.25)$$

Note que, da análise realizada anteriormente, que resultou na condição (3.4), então para $i = \omega_r$ em (3.4) e $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \cdots \ \omega_r]^T \in \Psi_r$, tem-se de (3.24) que $S_r = -\phi_{\omega_1,1} - \cdots - \phi_{\omega_{r-1},1} + \phi_{\omega_r,2} \leq C$.

Agora, observe que da análise realizada anteriormente que resultou na condição (3.6), então para $i = \omega_1$ em (3.6) e $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \cdots \ \omega_r]^T \in \Psi_r$, tem-se de (3.24) que $-\phi_{\omega_1,1} + \phi_{\omega_2,2} \cdots + \phi_{\omega_{r-1},1} + \phi_{\omega_r,2} \geq C$. Então, como de (3.1), $0 > -\phi_{\omega_1,1} \leq p_{\omega_1} \leq \phi_{\omega_1,2} > 0$, obtém-se de (3.24) que $S_1 = \phi_{\omega_1,2} + \phi_{\omega_2,2} + \cdots + \phi_{\omega_r,2} > -\phi_{\omega_1,1} + \phi_{\omega_1,2} + \cdots + \phi_{\omega_r,2} \geq C$. Assim, $S_1 > C$.

Portanto, foi verificado que $S_r \leq C$ e que $S_1 > C$. Adicionalmente, observe que, de (3.1) e (3.24),

$$S_{i+1} - S_i = -\phi_{\omega_i,1} - \phi_{\omega_{i+1},2} < 0, i = 1, 2, \dots, r-1. \quad (3.26)$$

Logo, $S_r < S_{r-1} < S_{r-2} < \cdots < S_2 < S_1$. Assim, se $S_k \leq C$, então $S_r < S_{r-1} < S_{r-2} < \cdots < S_{k+1} < S_k \leq C$. Analogamente, se $S_{k-1} > C$, então $S_1 > S_2 > \cdots > S_{k-2} > S_{k-1} > C$. Estes fatos asseguram a existência de k satisfazendo a condição $1 < k \leq r$ de modo que as condições estabelecidas em (3.25) sejam atendidas.

• Passo 2: Obtido k , $1 \leq k \leq r$, de modo que as condições (3.25) sejam satisfeitas, então, para um dado $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \cdots \ \omega_r]^T \in \Psi_r$, os pesos ótimos, quando (3.21) é atendida, são os descritos abaixo:

$$\begin{cases} p_{\omega_i}^* = -\phi_{\omega_i,1}, \ i = 1, 2, \dots, k-3, k-2, \\ p_{\omega_j}^* = \phi_{\omega_j,2}, \ j = k, k+1, \dots, r-1, r, \\ p_{\omega_{k-1}}^* = C - \sum_{i=1}^{k-2} (-\phi_{\omega_i,1}) - \sum_{j=k}^r \phi_{\omega_j,2}. \end{cases} \quad (3.27)$$

Observe de (3.27) que $p_{\omega_1}^* + p_{\omega_2}^* + \cdots + p_{\omega_{r-1}}^* + p_{\omega_r}^* = C$ e assim, estes pesos atendem a condição (3.2).

Como visto no Passo 1, considerando (3.24) e (3.25), $S_k \leq C$, então $S_r < S_{r-1} < S_{r-2} < \cdots < S_{k+1} < S_k \leq C$ e também $S_{k-1} > C$, então $S_1 > S_2 > \cdots > S_{k-2} > S_{k-1} > C$.

Analisando as somas de S_k e S_{k-1} , note que a única diferença entre eles é que em S_k existe o termo $-\phi_{\omega_{k-1},1}$, que foi substituído pelo termo $\phi_{\omega_{k-1},2}$. Assim, foi obtida a relação

entre S_k e S_{k-1} , apresentada em (3.26). Para formalizar a existência de $p_{\omega_{k-1}}^*$ descrito em (3.25) de modo que (3.1) seja atendida, será realizada a análise apresentada a seguir.

Como de (3.25), $S_k \leq C$ e $S_{k-1} > C$, então $S_k - C \leq 0$ e $S_{k-1} - C > 0$, e é possível obter $\alpha \in [0, 1]$, tal que a combinação convexa abaixo seja nula:

$$\alpha(S_{k-1} - C) + (1 - \alpha)(S_k - C) = 0. \quad (3.28)$$

Realmente, de (3.28) é possível obter o valor de α :

$$\alpha = \frac{(-S_k + C)}{(-S_k + C) + (S_{k-1} - C)}, \quad (3.29)$$

e observar que $\alpha \in [0, 1]$, pois, como visto, $(-S_k + C) \geq 0$ e $(S_{k-1} - C) > 0$. Desta forma, (3.28) corresponde a uma combinação convexa igual a zero.

Agora, substituindo-se S_{k-1} e S_k , definidos em (3.24), em (3.28), tem-se de (3.26) que:

$$\begin{aligned} \alpha(S_{k-1} - C) + (1 - \alpha)(S_k - C) &= S_k + \alpha(S_{k-1} - S_k) - C = S_k + \alpha(\phi_{\omega_{k-1,1}} + \phi_{\omega_{k-1,2}}) - C \\ &= -\phi_{\omega_1,1} - \dots - \phi_{\omega_{k-2,1}} + [\alpha\phi_{\omega_{k-1,2}} + (1 - \alpha)(-\phi_{\omega_{k-1,1}})] + \phi_{\omega_k,2} + \dots + \phi_{\omega_r,2} - C = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Note que de (3.29) e de (3.26), então $\alpha = \frac{-S_k + C}{\phi_{\omega_{k-1,1}} + \phi_{\omega_{k-1,2}}}$. Assim, de (3.30) e S_k definida em (3.24), tem-se que o termo correspondente a $p_{\omega_{k-1}}^*$ é dado por:

$$\begin{aligned} &[\alpha\phi_{\omega_{k-1,2}} + (1 - \alpha)(-\phi_{\omega_{k-1,1}})] \\ &= \left[\frac{-S_k + C}{\phi_{\omega_{k-1,1}} + \phi_{\omega_{k-1,2}}} \right] \phi_{\omega_{k-1,2}} + \left[1 - \frac{-S_k + C}{\phi_{\omega_{k-1,1}} + \phi_{\omega_{k-1,2}}} \right] (-\phi_{\omega_{k-1,1}}) \\ &= -S_k + C - \phi_{\omega_{k-1,1}} = \phi_{\omega_1,1} + \dots + \phi_{\omega_{k-2,1}} - \phi_{\omega_k,2} - \dots - \phi_{\omega_r,2} + C = p_{\omega_{k-1}}^*. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Analisando (3.31), constata-se que $p_{\omega_{k-1}}^*$ definido em (3.27) satisfaz a condição $p_{\omega_{k-1}}^* = [\alpha\phi_{\omega_{k-1,2}} + (1 - \alpha)(-\phi_{\omega_{k-1,1}})]$. Portanto, como $p_{\omega_{k-1}}^*$ é uma combinação convexa de $\phi_{\omega_{k-1,2}}$ e $-\phi_{\omega_{k-1,1}}$, então pode-se afirmar que $-\phi_{\omega_{k-1,1}} \leq p_{\omega_{k-1}}^* \leq \phi_{\omega_{k-1,2}}$.

Logo, está assegurada a existência de $p_{\omega_{k-1}}^*$ e os pesos ótimos descritos em (3.27) são tais que $p_{\omega}^* = [p_{\omega_1}^* \ p_{\omega_2}^* \ \dots \ p_{\omega_r}^*]^T \in \Omega$, com $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_r]^T \in \Psi_r$, e sendo que (3.21) é satisfeita. Assim, p_{ω}^* atendem as condições (3.1) e (3.2).

Resumidamente, os passos do Algoritmo 1 são dados por:

- **Passo 1** - Obtenha k satisfazendo as condições descritas em (3.25) a partir das somas S_p dadas em (3.24). Isso pode ser feito calculando todas as somas S_p a partir de S_r , depois S_{r-1} , e assim por diante, até encontrar S_k , que é a última soma que é menor ou igual a C . Esse procedimento representa a tentativa de deixar a função $J(p)$ mais positiva possível, através da associação dos pesos máximos ao maior número possível de termos que compõem a função. Esse fato segue de que os valores ótimos para $p_{\omega_j}^* = \phi_{\omega_j,2}$ em (3.27), para $j = k, k+1, \dots, r$, que são iguais aos respectivos valores máximos para p_{ω_j} como descrito em (3.1). Quando não é mais possível associar um peso máximo a seu respectivo termo, uma vez que a condição de existência da função não foi respeitada, esse peso deve ser adaptado para deixar a função $J(p)$ maximizada, levando-se em conta (3.1) e (3.2).
- **Passo 2** - Obtido k que satisfaz as condições (3.25), calcule os pesos ótimos p_{ω_i} , $i \in \mathbb{K}_r$ para o dado $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_r]^T \in \Psi_r$ a partir de (3.27).

A seguir será demonstrado que os pesos definidos em (3.25) e (3.27) são ótimos, pois satisfazem a condição estabelecida em (3.23).

Teorema 1. *Considere que as variáveis $T_{\omega_i} > 0$, $i \in \mathbb{K}_r$, satisfazem a condição (3.21). Então, os pesos definidos em (3.25) e (3.27) são ótimos, pois atendem a condição (3.23).*

Demonstração. De $J(p_\omega)$ definido em (3.22), para $p_\omega = p_\omega^* = [p_{\omega_1}^* \ p_{\omega_2}^* \ \dots \ p_{\omega_r}^*]^T$ e os pesos definidos em (3.25) e (3.27), então

$$J(p_\omega^*) = \sum_{i=1}^r p_{\omega_i}^* T_{\omega_i} = \sum_{i=1}^{k-2} (-\phi_{\omega_i,1}) T_{\omega_i} + p_{\omega_{k-1}}^* T_{\omega_{k-1}} + \sum_{j=k}^r \phi_{\omega_j,2} T_{\omega_j}, \quad (3.32)$$

sendo que $p_{\omega_{k-1}}^*$ foi definido em (3.27).

Agora considere um vetor arbitrário $p_\omega = [p_{\omega_1} \ p_{\omega_2} \ \dots \ p_{\omega_r}]^T \in \Omega$, que, sem perda de generalidade, pode ser definido da seguinte maneira: $p_{\omega_1} = -\phi_{\omega_1,1} + \Delta\phi_{\omega_1}$, $p_{\omega_2} = -\phi_{\omega_2,1} + \Delta\phi_{\omega_2}$, $\dots$, $p_{\omega_{k-2}} = -\phi_{\omega_{k-2},1} + \Delta\phi_{\omega_{k-2}}$, $p_{\omega_k} = \phi_{\omega_k,2} - \Delta\phi_{\omega_k}$, $\dots$, $p_{\omega_{r-1}} = \phi_{\omega_{r-1},2} - \Delta\phi_{\omega_{r-1}}$, $p_{\omega_r} = \phi_{\omega_r,2} - \Delta\phi_{\omega_r}$. Como de (3.1), $-\phi_{\omega_i,1} \leq p_{\omega_i} \leq \phi_{\omega_i,2}$, para todo $i \in \mathbb{K}_r$ e como $p_\omega \in \Omega$, então necessariamente $\Delta\phi_{\omega_1}, \Delta\phi_{\omega_2}, \dots, \Delta\phi_{\omega_{k-3}}, \Delta\phi_{\omega_{k-2}}$ e $\Delta\phi_{\omega_k}, \Delta\phi_{\omega_{k+1}}, \dots, \Delta\phi_{\omega_{r-1}}, \Delta\phi_{\omega_r}$ são todos positivos ou nulos.

Observe ainda que $p_{\omega_{k-1}}$ não foi definido, pois de (3.2), ele é dado por :

$$\begin{aligned}
 p_{\omega_{k-1}} &= C - (p_{\omega_1} + p_{\omega_2} + \cdots + p_{\omega_{k-2}} + p_{\omega_k} + \cdots + p_{\omega_{r-1}} + p_{\omega_r}) = C - (-\phi_{\omega_1,1} + \Delta\phi_{\omega_1} - \phi_{\omega_2,1} \\
 &+ \Delta\phi_{\omega_2} - \cdots - \phi_{\omega_{k-2},1} + \Delta\phi_{\omega_{k-2}} + \phi_{\omega_k,2} - \Delta\phi_{\omega_k} + \cdots + \phi_{\omega_{r-1},2} - \Delta\phi_{\omega_{r-1}} + \phi_{\omega_r,2} - \Delta\phi_{\omega_r}) \\
 &= [C + \phi_{\omega_1,1} + \phi_{\omega_2,1} + \cdots + \phi_{\omega_{k-2},1} - \phi_{\omega_k,2} - \cdots - \phi_{\omega_{r-1},2} - \phi_{\omega_r,2}] - [\Delta\phi_{\omega_1} + \Delta\phi_{\omega_2} + \cdots + \Delta\phi_{\omega_{k-2}} \\
 &- \Delta\phi_{\omega_k} - \cdots - \Delta\phi_{\omega_{r-1}} - \Delta\phi_{\omega_r}] = p_{\omega_{k-1}}^* - [\Delta\phi_{\omega_1} + \Delta\phi_{\omega_2} + \cdots + \Delta\phi_{\omega_{k-2}} - \Delta\phi_{\omega_k} - \cdots - \Delta\phi_{\omega_{r-1}} \\
 &- \Delta\phi_{\omega_r}],
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

considerando a definição de $p_{\omega_{k-1}}^*$ em (3.27).

Então, para este $p_\omega = [p_{\omega_1} \ p_{\omega_2} \ \cdots \ p_{\omega_r}]^T$, note que de (3.22), (3.32) e (3.33),

$$\begin{aligned}
 J(p_\omega^*) - J(p_\omega) &= \sum_{i=1}^r p_{\omega_i}^* T_{\omega_i} - \sum_{i=1}^r p_{\omega_i} T_{\omega_i} \\
 &= \left\{ \sum_{i=1}^{k-2} -\phi_{\omega_i,1} T_{\omega_i} + p_{\omega_{k-1}}^* T_{\omega_{k-1}} + \sum_{j=k}^r \phi_{\omega_j,2} T_{\omega_j} \right\} \\
 &- \left\{ \sum_{i=1}^{k-2} (-\phi_{\omega_i,1} + \Delta\phi_{\omega_i}) T_{\omega_i} + p_{\omega_{k-1}} T_{\omega_{k-1}} + \sum_{j=k}^r (\phi_{\omega_j,2} - \Delta\phi_{\omega_j}) T_{\omega_j} \right\} \\
 &= - \left\{ \sum_{i=1}^{k-2} \Delta\phi_{\omega_i} T_{\omega_i} + [-(\Delta\phi_{\omega_1} + \cdots + \Delta\phi_{\omega_{k-2}} - \Delta\phi_{\omega_k} - \cdots - \Delta\phi_{\omega_{r-1}} - \Delta\phi_{\omega_r})] T_{\omega_{k-1}} \right. \\
 &\left. - \sum_{j=k}^r \Delta\phi_{\omega_j} T_{\omega_j} \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Agora, como $\Delta\phi_{\omega_i} > 0$ para todo $i \in \mathbb{K}_r$, $i \neq k-1$, e de (3.21) $T_{\omega_l} \geq T_{\omega_q}$ para todo q e l com $l \geq q$. Então $\Delta\phi_{\omega_j} T_{\omega_j} \geq \Delta\phi_{\omega_j} T_{\omega_{k-1}}$, para $j = k, k+1, \dots, r$ e $-\Delta\phi_{\omega_i} T_{\omega_i} \geq -\Delta\phi_{\omega_i} T_{\omega_{k-1}}$, para $i = 1, 2, \dots, k-2$. Logo, tem-se de (3.34) que

$$\begin{aligned}
 J(p_\omega^*) - J(p_\omega) &= - \sum_{i=1}^{k-2} \Delta\phi_{\omega_i} T_{\omega_i} + (\Delta\phi_{\omega_1} + \cdots + \Delta\phi_{\omega_{k-2}} - \Delta\phi_{\omega_k} - \cdots - \Delta\phi_{\omega_{r-1}} - \Delta\phi_{\omega_r}) T_{\omega_{k-1}} \\
 &+ \sum_{j=k}^r \Delta\phi_{\omega_j} T_{\omega_j} \geq - \sum_{i=1}^{k-2} \Delta\phi_{\omega_i} T_{\omega_{k-1}} + (\Delta\phi_{\omega_1} + \cdots + \Delta\phi_{\omega_{k-2}} - \Delta\phi_{\omega_k} - \cdots - \Delta\phi_{\omega_{r-1}} - \Delta\phi_{\omega_r}) T_{\omega_{k-1}} \\
 &+ \sum_{j=k}^r \Delta\phi_{\omega_j} T_{\omega_{k-1}} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Assim, $J(p_\omega^*) - J(p_\omega) \geq 0$, o que implica que $J(p_\omega^*) \geq J(p_\omega)$. Como p_ω e $p_\omega^* \in \Omega$ foi

definida de forma arbitrária, conclui-se que a condição (3.23) é satisfeita. A prova está concluída. $\square$

Exemplo: Considere a função custo abaixo:

$$J(p) = \sum_{i=1}^3 p_i T_i, \quad (3.36)$$

definida para todos os pesos $p_i \in \mathbb{R}$ satisfazendo (3.1), (3.2), (3.4) e (3.6), sendo que as variáveis T_1 , T_2 e T_3 foram definidas em (3.7). Além disso, considere que os pesos p_1 , p_2 e p_3 têm os seguintes limitantes:

$$\begin{aligned} -\phi_{1,1} = -4 \leq p_1 \leq 2 = \phi_{1,2} \\ -\phi_{2,1} = -2 \leq p_2 \leq 3 = \phi_{2,2} \\ -\phi_{3,1} = -3 \leq p_3 \leq 5 = \phi_{3,2} \\ p_1 + p_2 + p_3 = C = 0. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Para determinação de um majorante superior para a função custo (3.36), serão utilizados os passos do Algoritmo 1.

Primeiramente, é necessário definir o conjunto Ψ apresentado em (3.20):

$$\Psi_3 = \{\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T \in \mathbb{R}^3 / \omega_i \in \mathbb{K}_3 \text{ para todo } i \in \mathbb{K}_3 \text{ e } \omega_1 \neq \omega_2 \neq \omega_3\}. \quad (3.38)$$

Neste exemplo, não é conhecida ordem de grandeza das variáveis T_1 , T_2 e T_3 . Ou seja, não será possível colocar essas variáveis em ordem decrescente, como é solicitado para utilização do Algoritmo 1. Portanto, como citado anteriormente, devemos considerar todas as possíveis combinações de ordem decrescente entre os termos T_1 , T_2 e T_3 . Neste caso, $m = r! = 3! = 6$ possíveis combinações:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_3 \geq T_2 \geq T_1 \\ T_3 \geq T_1 \geq T_2 \\ T_2 \geq T_3 \geq T_1 \\ T_2 \geq T_1 \geq T_3 \\ T_1 \geq T_3 \geq T_2 \\ T_1 \geq T_2 \geq T_3. \end{array} \right. \quad (3.39)$$

A princípio, será considerado que $T_3 \geq T_2 \geq T_1$. Assim, de (3.21) $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 3$ e $\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T = [1 \ 2 \ 3]^T$

Passo 1: Considerando que neste caso $\omega = [1 \ 2 \ 3]^T$, os parâmetros definidos em (3.37) e a definição de S_p em (3.24), podemos calcular as somas S_1 , S_2 e S_3 :

$$\begin{aligned} S_3 &= -\phi_{1,1} - \phi_{2,1} + \phi_{3,2} = -4 - 2 + 5 = -1 \\ S_2 &= -\phi_{1,1} + \phi_{2,2} + \phi_{3,2} = -4 + 3 + 5 = 4 \\ S_1 &= \phi_{1,2} + \phi_{2,2} + \phi_{3,2} = 2 + 3 + 5 = 10. \end{aligned} \tag{3.40}$$

A partir de (3.40), pode-se observar que a soma S_3 é a primeira soma que é menor ou igual a $C = 0$. Portanto, a partir de (3.25), pode-se definir $S_{k-1} = S_2$ e $k = 3$.

Passo 2: Obtido k , satisfazendo (3.25), podemos definir então os pesos ótimos, como em (3.27):

$$\begin{cases} p_{\omega_1}^* = p_1^* = -\phi_{1,1} = -4, \\ p_{\omega_3}^* = p_3^* = \phi_{3,2} = 5, \\ p_{\omega_2}^* = p_2^* = C - \sum_{i=1}^{k-2} (-\phi_{\omega_i,1}) - \sum_{j=k}^r \phi_{\omega_j,2} = C + \phi_{1,1} - \phi_{3,2} = -1. \end{cases} \tag{3.41}$$

Note que todos os pesos ótimos apresentados em (3.41) respeitam os limitantes (3.37). Então, para o caso apresentado de $T_3 \geq T_2 \geq T_1$, a função custo (3.36) terá seu majorante superior da seguinte forma:

$$\max J(p) = J(p^*) = \sum_{i=1}^3 p_i^* T_i = p_1^* T_1 + p_2^* T_2 + p_3^* T_3 = -4T_1 - 1T_2 + 5T_3. \tag{3.42}$$

A seguir, deve-se considerar uma ordem de grandeza para T_1 , T_2 e T_3 diferente da anterior, como $T_3 \geq T_1 \geq T_2$ por exemplo, e fazer os dois passos do Algoritmo 1 novamente, resultando num limitante superior de $J(p)$ específico para esse caso de $T_3 \geq T_1 \geq T_2$.

Para simplificar a demonstração, será apresentada a tabela abaixo, na qual são descritos todos os majorantes superiores para cada combinação possível de grandeza dos termos T_1 , T_2 e T_3 , seguindo a ordem das permutações apresentadas em (3.39).

Tabela 1 - Cálculo de todas as somas S_k possíveis e pesos ótimos para o Exemplo 1.

Permutação j	ω_3	ω_2	ω_1	S_1	S_2	S_3	p_1^*	p_2^*	p_3^*	$\max J(p)$
$T_3 \geq T_2 \geq T_1$ ($j = 1$)	3	2	1	10	4	-1	-4	-1	5	$-4T_1 - 1T_2 + 5T_3$
$T_3 \geq T_1 \geq T_2$ ($j = 2$)	3	1	2	10	3	-1	-3	-2	5	$-3T_1 - 2T_2 + 5T_3$
$T_2 \geq T_3 \geq T_1$ ($j = 3$)	2	3	1	10	4	-4	-4	3	1	$-4T_1 + 3T_2 + T_3$
$T_2 \geq T_1 \geq T_3$ ($j = 4$)	2	1	3	10	2	-4	0	3	-3	$0T_1 + 3T_2 - 3T_3$
$T_1 \geq T_3 \geq T_2$ ($j = 5$)	1	3	2	10	5	-3	2	-2	0	$2T_1 - 2T_2 + 0T_3$
$T_1 \geq T_2 \geq T_3$ ($j = 6$)	1	2	3	10	2	-3	2	1	-3	$2T_1 + 1T_2 - 3T_3$

Uma vez consideradas todas as possíveis combinações de ordem de grandeza para T_1 , T_2 e T_3 , foi provado anteriormente que um desses casos coincidirá com a ordem real após determinação dessas variáveis e, portanto, o majorante superior de $J(p)$ já terá sido contemplado na resolução do problema. Além disso, como dito anteriormente, do Lema (3.1) para $m = 6$, o valor dos 6 majorantes apresentados na Tabela 1 são sempre menores ou iguais ao máximo de $J(p)$ em (3.36), considerando (3.37) e T definido em (3.7).

4 Condições de Estabilidade para Sistemas Fuzzy TS via FLF

Nesse capítulo serão revistas as condições de estabilidade de sistemas fuzzy TS apresentadas em (LAZARINI, 2017).

Para tal, considere que cada modelo local do sistema (2.2), agora não forçado ($u(t) = 0$), possa ser descrito por

$$\dot{x}(t) = A_i x(t),$$

e, portanto, o sistema (2.2) é descrito como:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) A_i x(t). \quad (4.1)$$

4.1 Condições Relaxadas para Estabilidade de Sistemas Fuzzy TS Utilizando FLF

Suponha que as constantes $\phi_{\rho,1}$ e $\phi_{\rho,2}, \rho \in \mathbb{K}_r$ sejam positivas e conhecidas, tais que

$$-\phi_{\rho,1} \leq \dot{h}_{\rho} \leq \phi_{\rho,2}, \rho \in \mathbb{K}_r. \quad (4.2)$$

É importante ressaltar que:

$$\begin{aligned} h_{\omega_1} + h_{\omega_2} + \dots + h_{\omega_r} &= 1, \\ \dot{h}_{\omega_1} + \dot{h}_{\omega_2} + \dots + \dot{h}_{\omega_r} &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Teorema 2. *Considere o sistema fuzzy TS (4.1), e a FLF descrita por:*

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) x^T(t) P_i x(t), \quad (4.4)$$

sendo que $h_i, i \in \mathbb{K}_r$, satisfaz as condições apresentadas em (4.2) e (4.3).

Assim, a partir da FLF presente em (4.4), sendo $P_i = P_i^T > 0$, o sistema (4.1) terá o ponto $x = 0$ assintoticamente estável, se, para $x(t) \neq 0$,

$$F_{ij}(x(t)) + J_k^*(x(t)) < 0, i \geq j, \forall i, j \in \mathbb{K}_r, k \in \mathbb{K}_m, \quad (4.5)$$

for factível, sendo que

$$F_{ij} = \frac{1}{2}(A_i^T P_j + P_j A_i + A_j^T P_i + P_i A_j), i, j \in \mathbb{K}_r, F_{ij}(x(t)) = x(t)^T F_{ij} x(t), i \geq j, \quad (4.6)$$

$$J_k^*(x(t)) = \sum_{i=1}^r \dot{h}_{ik}^* x^T P_i x = x(t)^T J_k^* x(t), \quad (4.7)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_r, k \in \mathbb{K}_m, m = r!$, e $\dot{h}_1^*, \dot{h}_2^*, \dots, \dot{h}_r^*$ os pesos ótimos associados a cada P_i , calculados pelo Algoritmo 1 proposto no Teorema 1 para obter majorantes ótimos para $\dot{P}(h(t))$

Demonstração. (LAZARINI, 2017). □

Observação 3. No Teorema 2, o processamento do termo vinculado ao $\dot{P}(h)$, que aparece na derivada de $V(x(t))$ descrita em (4.4), foi ótimo, no sentido que, para $x(t) \neq 0$, $x^T \dot{P}(h)x + F_{ij}(x(t)) < 0$ se e somente se $x(t)^T J_k^* x(t) + F_{ij}(x(t)) < 0$, para todo $i \geq j \in \mathbb{K}_r, k \in \mathbb{K}_m$.

4.2 Resultados Numéricos

Considere o modelo Takagi-Sugeno com 3 regras, descrito por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{1}{5}(3b-2) & \frac{1}{5}(3a-4) \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{1}{5}(2b-3) & \frac{1}{5}(2a-6) \end{bmatrix},$$

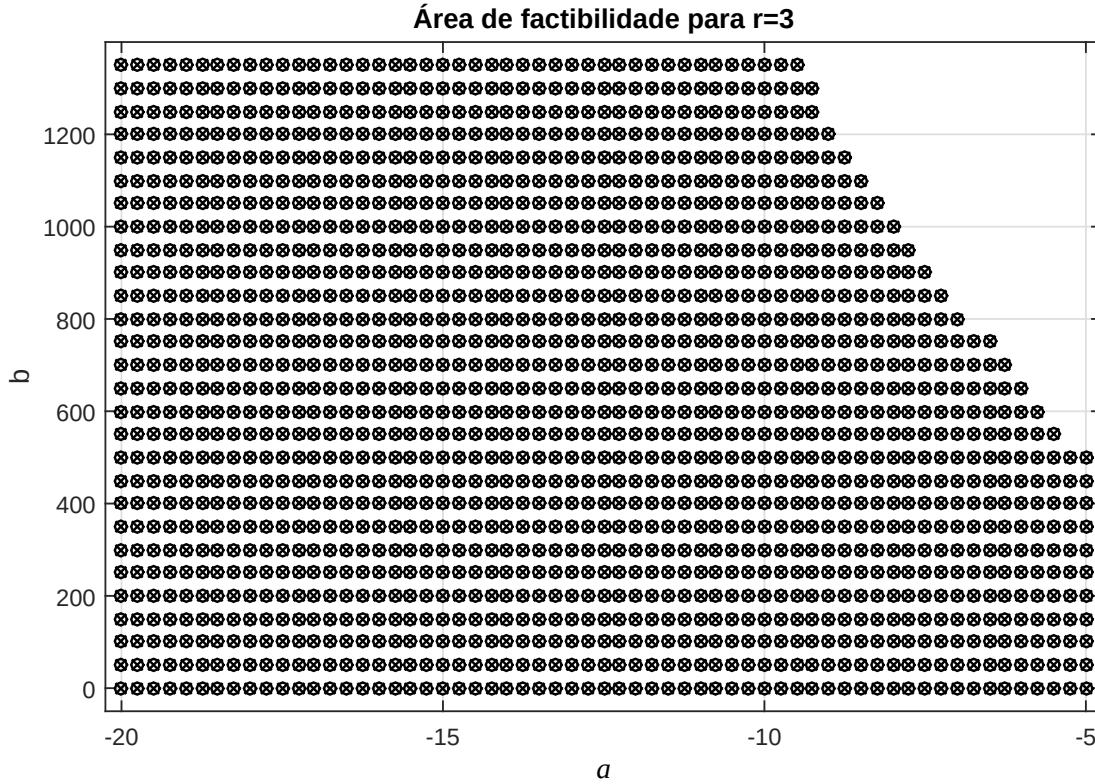
considerando os limites dos $\dot{h}_i$ como sendo

$$\begin{aligned} -0,65 &\leq \dot{h}_1 \leq 0,85 \\ -0,55 &\leq \dot{h}_2 \leq 0,75 \\ -0,95 &\leq \dot{h}_3 \leq 0,45, \end{aligned} \quad (4.8)$$

e variando os parâmetros a e b de $[-20, -5]$ e $[0, 1350]$, respectivamente, a Figura 2 mostra que as regiões de factibilidade fornecidas pelo algoritmo e pelo Teorema 1 em (GUEDES

et al., 2013), que apresenta resultados melhores do que teoremas clássicos da literatura ((MOZELLI *et al.*, 2009),(ESTEVEZ *et al.*, 2011)) são iguais.

Figura 2 - Área de factibilidade para $r = 3$, $\times$ para o Teorema 1 em (GUEDES *et al.*, 2013) e $\circ$ para o algoritmo.



Fonte: O próprio autor.

- Número de LMIs particulares fornecidas pelo algoritmo em função do termo F_{ij} : 6;
- Número de variáveis matriciais simétricas $n \times n$ utilizadas pelo algoritmo : 3;
- Número de LMIs particulares fornecidas pelo Teorema 1 em (GUEDES *et al.*, 2013) (Hiper-retângulos), em função do termo F_{ij} : 8;
- Número de variáveis matriciais simétricas $n \times n$ utilizadas pelo Teorema 1 em (GUEDES *et al.*, 2013) : 9.

5 Condições Para Estabilização de Sistemas Fuzzy TS via FLF

Neste capítulo, será analisada a utilização da abordagem do $\dot{P}(h)$ apresentada no Teorema 1 para novas condições de estabilização de sistemas fuzzy TS.

Como a partir de agora não será mais considerado o sistema não forçado, têm-se:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)] = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j (A_i x(t) - B_i K_j x(t)), \quad (5.1)$$

que utiliza o controlador *fuzzy* descrito por

$$u(t) = -K(h(x(t)))x(t) = -\sum_{j=1}^r h_j K_j x(t). \quad (5.2)$$

Manipulando (5.1) e multiplicando por $2[x^T(t)M + \dot{x}^T(t)\mu M]$, é possível ver que

$$2[x^T(t)M + \dot{x}^T(t)\mu M] \left[\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \{A_i x(t) - B_i K_j\} x(t) \right] = 0., \quad (5.3)$$

sendo μ e M arbitrários. Essa manipulação será útil nos Teoremas apresentados neste capítulo.

5.1 Análise Sobre Condições de Relaxamento Para Estabilização de Sistemas Não Lineares Fuzzy TS

5.1.1 Comparação com (MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009)

Nesta seção, serão comparados resultados a partir do Teorema apresentado em (MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009), descrito abaixo:

Teorema 3. (MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009) *Seja $\mu > 0$ um dado escalar.*

Considere que $h_\rho(z(t))$ respeita (2.5), e $|\dot{h}_\rho(z(t))| \leq \phi_\rho$. O sistema (5.1) é estabilizável pelo controlador fuzzy (5.2), com ganhos dados por $K_i = S_i^T R^{-T}$, se existirem matrizes simétricas T_i, Y , e matrizes quaisquer R, S_i satisfazendo o conjunto de LMIs

$$T_i > 0, \quad (5.4)$$

$$T_i + Y > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (5.5)$$

$$\Xi_{ii} < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (5.6)$$

$$\bar{\Xi}_{ij} < 0 \quad (i < j = 1, 2, \dots, r), \quad (5.7)$$

sendo:

$$\Xi_{ij} = \begin{bmatrix} T_\phi - A_i R^T - R A^T + B_i S_j^T + S_j B_i^T & * \\ T_i - \mu(A_i R^T - B_i S_j^T) + R & \mu(R + R^T) \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

$$\bar{\Xi}_{ij} = \Xi_{ij} + \Xi_{ji}, \quad (5.9)$$

$$T_\phi = \sum_{\rho=1}^r \phi_\rho (T_\rho + Y). \quad (5.10)$$

Demonstração. (MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009) □

Na demonstração do Teorema 3 citado acima, que é baseado no Teorema 1 apresentado também em (MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009), é feita a seguinte manipulação em (16) e (17) do artigo:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \left[2x^T(t) P_i \dot{x}(t) + \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_\rho(z(t)) x^T(t) (P_\rho + Y) x(t) \right] \\ &< \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \left[2x^T(t) P_i \dot{x}(t) + x^T(t) \underbrace{\sum_{\rho=1}^r \phi_\rho(z(t)) (P_\rho + Y)}_{P_\phi} x(t) \right]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Essa passagem adiciona um grande conservadorismo à busca por factibilidade do problema pois, ao procurar um controlador que estabilize o sistema considerando apenas os máximos dos $\dot{h}_\rho$'s, está sendo considerada uma situação que nunca vai ocorrer, que seria $\dot{h}_\rho = \phi_\rho$, para todo $\rho \in \mathbb{K}_r$. A soma de todos os $\dot{h}_\rho$'s não resulta em 0, condição de

existência do sistema. Porém, como $\sum_{\rho=1}^r \phi_{\rho} \geq \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{\rho} = 0$, (MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009) provam que esta condição é suficiente.

A fim de retirar esse conservadorismo, foi aplicada a abordagem proposta no Algoritmo 1 do Teorema 1 nas LMIs (5.4) - (5.7), resultando em LMIs quase idênticas, porém agora T_{ϕ} não é dada mais em função apenas dos máximos das derivadas das funções de pertinência do problema, e sim em função dos máximos e mínimos das mesmas, sendo assim menos conservativo que o procedimento adotado em (MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009). Esse processo é demonstrado a seguir:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \left[2x^T(t) P_i \dot{x}(t) + \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{\rho}(z(t)) x^T(t) (P_{\rho}) x(t) \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \left[2x^T(t) P_i \dot{x}(t) + x^T(t) \underbrace{\sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{k\rho}^*(z(t)) (P_{\rho})}_{P_k^*} x(t) \right], \end{aligned} \quad (5.12)$$

definindo $\dot{h}_{\rho}(z(t)) = p_{\rho}$, para todo $\rho \in \mathbb{K}_r$. Então as condições (3.1), (3.2), (3.4) e (3.6) são satisfeitas para $C = 0$. Além disso, definiu-se também $T_{\rho} = x(t)^T P_{\rho} x(t)$ e aplicou-se o Algoritmo 1 para cada ordem decrescente k de $T_1, T_2, \dots, T_r$, sendo $k \in \mathbb{K}_m$ e $m = r!$, para obter-se os pesos do majorante ótimo $p_{k_1}^* = \dot{h}_1(z(t))$, $p_{k_2}^* = \dot{h}_2(z(t))$, $\dots$, $p_{k_r}^* = \dot{h}_r(z(t))$, para $J(p)$ dado em (3.22), representado por $J(p) \leq \sum_{\rho=1}^r p_{k\rho}^* T_{\rho}$, para todo $k \in \mathbb{K}_m$.

Portanto, utilizando-se da mesma estratégia na prova do Teorema 6 presente em (MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009), equações (43) - (50), as LMIs do Teorema 3 adaptadas com a nova abordagem do Teorema 1 são:

$$\Gamma_i = R P_i R^T > 0, \quad (5.13)$$

$$\Xi_{iik} < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad k \in \mathbb{K}_m \quad (5.14)$$

$$\bar{\Xi}_{ijk} < 0 \quad (i < j = 1, 2, \dots, r), \quad k \in \mathbb{K}_m \quad (5.15)$$

sendo:

$$\Xi_{ijk} = \begin{bmatrix} \Gamma_k - A_i R^T - R A_i^T + B_i S_j^T + S_j B_i^T & * \\ \Gamma_i - \mu(A_i R^T - B_i S_j^T) + R & \mu(R + R^T) \end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

$$\bar{\Xi}_{ijk} = \Xi_{ijk} + \Xi_{jik}, \quad (5.17)$$

$$\Gamma_k = \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{k\rho}^* \Gamma_\rho, \quad (5.18)$$

sendo $\dot{h}_{\rho k}^*$, $k \in \mathbb{K}_m$, $m = r!$, o conjunto de pesos adaptados conforme o Algoritmo 1 presente no Teorema 1 para cada caso k a partir do conjunto (3.20).

Observação 4. *É importante ressaltar que, para as LMIs (5.13) - (5.15), não é mais necessário que $|\dot{h}_\rho(z(t))| \leq \phi_\rho$, uma vez que o Algoritmo 1 apresentado no Teorema 1 permite a adaptação dos limites da derivadas das funções de pertinência para limitantes assimétricos.*

Comparando as regiões de factibilidade apresentadas pelo Teorema 3 original e com as alterações propostas pelo Algoritmo 1 do Teorema 1, considerando para ambos os casos $\mu = 0,04$ e $|\phi_i| = 1$, para todo $i \in \mathbb{K}_r$, o seguintes resultados foram obtidos:

- Para $r = 2$

Considere o seguinte sistema não linear TS descrito por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3,6 & -1,6 \\ 6,2 & -4,3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a & -1,6 \\ 6,2 & -4,3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -0,45 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -b \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Variando-se os parâmetros a e b entre $[0, 25]$ e $[0, 2]$, respectivamente, $|\phi_i| = |\phi| = 1$, para $i \in \mathbb{K}_r$, e utilizando-se do solver LMILab, foi obtida a seguinte região de factibilidade:

Tabela 2 - Cálculo de todas as possíveis somas S_k e pesos ótimos para o exemplo com $r = 2$.

Permutação k	S_1	S_2	$\dot{\alpha}_{k1}^*$	$\dot{\alpha}_{k2}^*$	P_k^*
$x(t)^T P_2 x(t) \geq x(t)^T P_1 x(t)$ ($k = 1$)	2	0	-1	1	$-P_1 + P_2$
$x(t)^T P_1 x(t) \geq x(t)^T P_2 x(t)$ ($k = 2$)	2	0	1	-1	$P_1 - P_2$

- Para $r = 3$

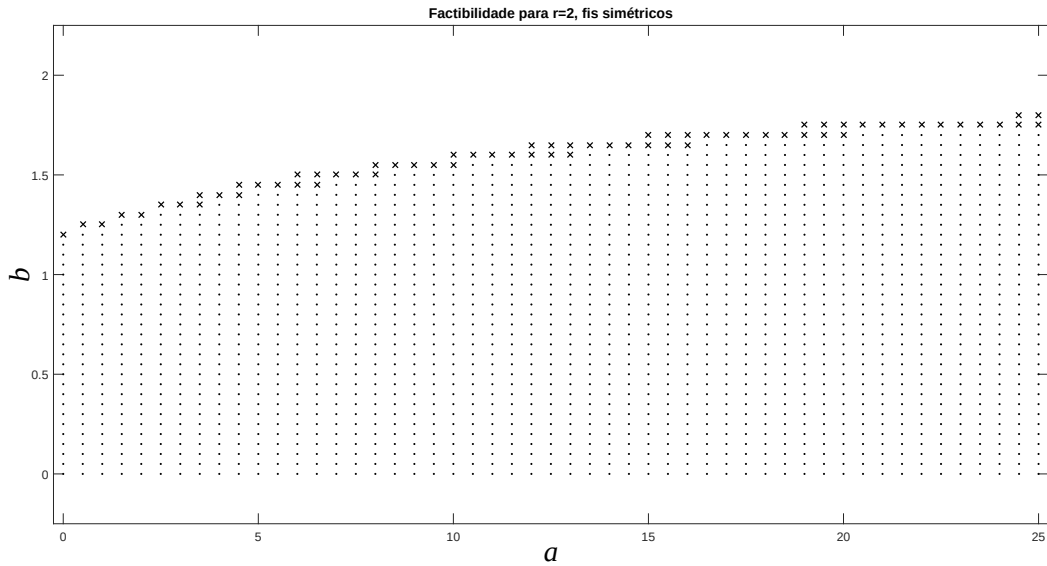
Considere o seguinte sistema não linear TS descrito por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3,6 & -1,6 \\ 6,2 & -4,3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a & -1,6 \\ 6,2 & -4,3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -3,6 & -1,6 \\ a & -4,3 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0,45 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -b \\ -3 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} -0,45 \\ -b \end{bmatrix}.$$

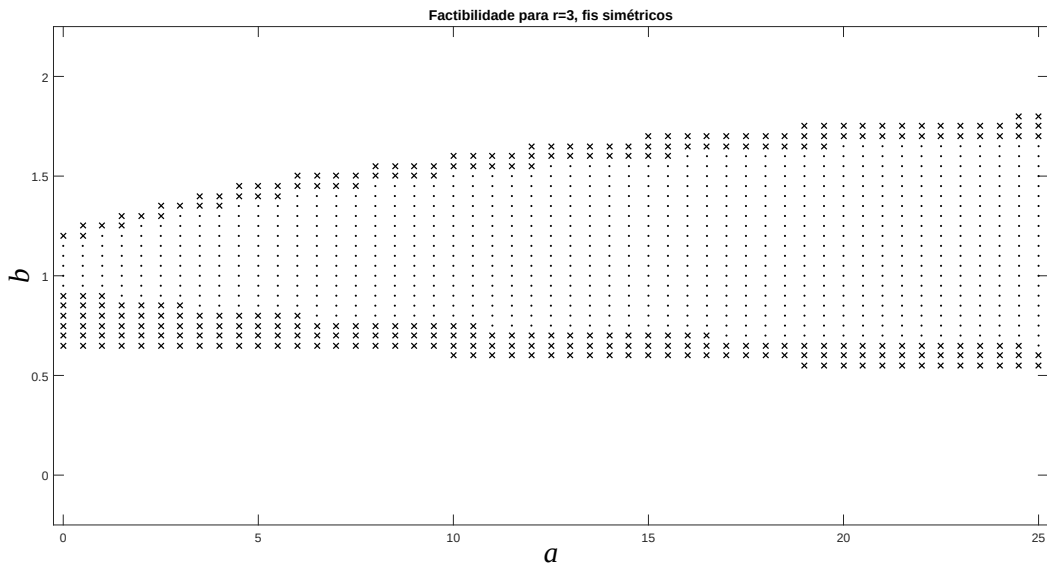
Variando-se os parâmetros a e b entre $[0, 25]$ e $[0, 2]$, respectivamente, $|\phi_i| = |\phi| = 1$, para $i \in \mathbb{K}_r$, e utilizando-se do solver LMILab, foi obtida a seguinte região de factibilidade:

Figura 3 - Área de factibilidade para $r = 2$, $(\cdot)$ para Teorema 3 original e $(\cdot, \times)$ para Teorema 3 utilizando o Algoritmo 1 apresentado no Teorema 1.



Fonte: O próprio autor.

Figura 4 - Área de factibilidade para $r = 3$, $(\cdot)$ para Teorema 3 original e $(\cdot, \times)$ para Teorema 3 utilizando o Algoritmo 1 apresentado no Teorema 1.



Fonte: O próprio autor.

Tabela 3 - Cálculo de todas as possíveis somas S_k e pesos ótimos para o exemplo com $r = 3$.

Permutação k	S_1	S_2	S_3	$\dot{\alpha}_{k1}^*$	$\dot{\alpha}_{k2}^*$	$\dot{\alpha}_{k3}^*$	P_k^*
$x(t)^T P_3 x(t)$ $\geq x(t)^T P_2 x(t)$ $\geq x(t)^T P_1 x(t)$ $(k = 1)$	3	1	-1	-1	0	1	$-P_1 + 0P_2 + P_3$
$x(t)^T P_3 x(t)$ $\geq x(t)^T P_1 x(t)$ $\geq x(t)^T P_2 x(t)$ $(k = 2)$	3	1	-1	0	-1	1	$0P_1 - P_2 + P_3$
$x(t)^T P_2 x(t)$ $\geq x(t)^T P_3 x(t)$ $\geq x(t)^T P_1 x(t)$ $(k = 3)$	3	1	-1	-1	1	0	$-P_1 + P_2 + 0P_3$
$x(t)^T P_2 x(t)$ $\geq x(t)^T P_1 x(t)$ $\geq x(t)^T P_3 x(t)$ $(k = 4)$	3	1	-1	0	1	-1	$0P_1 + P_2 - P_3$
$x(t)^T P_1 x(t)$ $\geq x(t)^T P_3 x(t)$ $\geq x(t)^T P_2 x(t)$ $(k = 5)$	3	1	-1	1	-1	0	$P_1 - P_2 + 0P_3$
$x(t)^T P_1 x(t)$ $\geq x(t)^T P_2 x(t)$ $\geq x(t)^T P_3 x(t)$ $(k = 6)$	3	1	-1	1	0	-1	$P_1 + 0P_2 - P_3$

5.1.2 Comparação com (LIU et al., 2017)

Nesta seção, serão comparados resultados a partir do Teorema 1 presente em (LIU et al., 2017). Neste artigo, é utilizada uma função de Lyapunov um pouco diferente das usuais, a partir das Derivadas de Altas Ordens das Função de Lyapunov (chamadas pelo autor de HODLF, ou *High Order Derivatives of Lyapunov Function*). Essa função de Lyapunov é dividida em duas partes, tal que um sistema não linear $\dot{x} = f(x)$ tem na origem um ponto de estabilidade assintótica se existirem funções de Lyapunov $V_1(x)$ e $V_2(x)$ tal que:

$$W(0) = \dot{V}_2(0) + V_1(0) = 0 \quad (5.19)$$

$$W(x) = \dot{V}_2(x) + V_1(x) > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (5.20)$$

$$\dot{W}(x) = \ddot{V}_2(x) + \dot{V}_1(x) < 0 \quad \forall x \neq 0 \quad (5.21)$$

No artigo em questão, (LIU *et al.*, 2017) utiliza $V_2(x)$ como sendo uma função quadrática de Lyapunov $V_2(x) = x^T P_2 x$ e $V_1(x)$ como sendo uma FLF como descrita em (4.4).

Teorema 4. (LIU *et al.*, 2017) *O sistema TS (5.1) com funções de pertinência diferenciáveis será assintoticamente estável se existir uma matriz inversível X , matrizes simétricas $\tilde{P}_{1i}, \tilde{P}_2, \tilde{Y}_1, \tilde{S}_i$, matrizes quaisquer $\tilde{Y}_2, N_j$ e escalares pré-definidos $\beta_{ij} > 0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_6$, $i, j = 1, 2, \dots, r$ tais que as LMIs a seguir sejam satisfeitas.*

$$\tilde{\Theta}_{ij} + \tilde{\Theta}_{ji} > 0 \quad \forall i \leq j, \quad (5.22)$$

$$\tilde{P}_{1i} - Y \leq \tilde{S}_i \quad \forall i, \quad (5.23)$$

$$\tilde{S}_i \geq 0 \quad \forall i, \quad (5.24)$$

$$\Psi_{ij} + \Psi_{ji} < 0 \quad \forall i \leq j, \quad (5.25)$$

sendo

$$\tilde{\Theta}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}_{ij}^{(11)} & * \\ \tilde{\Theta}_{ij}^{(21)} & \tilde{\Theta}_{ij}^{(22)} \end{bmatrix}, \quad (5.26)$$

$$\tilde{\Theta}_{ij}^{(11)} = \tilde{P}_{1i} + \mu_1(A_i X^T + B_i N_j) + \mu_1(A_i X^T + B_i N_j)^T, \quad (5.27)$$

$$\tilde{\Theta}_{ij}^{(21)} = \tilde{P}_2 - \mu_1 X + \mu_2(A_i X^T + B_i N_j), \quad (5.28)$$

$$\tilde{\Theta}_{ij}^{(22)} = -\mu_2(X + X^T), \quad (5.29)$$

$$\Psi_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_{ij} & * & * & * & \dots & * \\ \tilde{Y} & \Psi^{(22)} & * & * & \dots & * \\ \tilde{\Omega}_{11} & 0 & -\beta_{11}I & * & \dots & * \\ \tilde{\Omega}_{12} & 0 & 0 & -\beta_{12}I & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\Omega}_{rr} & 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta_{rr}I \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

$$\Psi^{(22)} = -\frac{1}{\sum_{p=1}^r \sum_{s=1}^r \beta_{ps}} I, \quad (5.31)$$

$$\tilde{\Xi}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_{ij}^{(11)} & * & * \\ \tilde{\Xi}_{ij}^{(21)} & \tilde{\Xi}_{ij}^{(22)} & * \\ \tilde{\Xi}_{ij}^{(31)} & \tilde{\Xi}_{ij}^{(32)} & \tilde{\Xi}_{ij}^{(33)} \end{bmatrix}, \quad (5.32)$$

$$\tilde{\Xi}_{ij}^{(11)} = \sum_{\rho=1}^r (\bar{\phi}_\rho - \underline{\phi}_\rho) \tilde{S}_\rho + \sum_{\rho=1}^r \underline{\phi}_\rho (\tilde{P}_{1\rho} - \tilde{Y}_1) + (A_i X^T + B_i N_j) + (A_i X^T + B_i N_j)^T, \quad (5.33)$$

$$\tilde{\Xi}_{ij}^{(21)} = \tilde{P}_{1i} - X + \mu_3 * (A_i X^T + B_i N_j) + \mu_4 * (A_i X^T + B_i N_j)^T, \quad (5.34)$$

$$\tilde{\Xi}_{ij}^{(22)} = 2\tilde{P}_2 - \mu_3 * (X + X^T) + \mu_5 * (A_i X^T + B_i N_j) + \mu_5 * (A_i X^T + B_i N_j)^T, \quad (5.35)$$

$$\tilde{\Xi}^{(31)} = \tilde{P}_2 - \mu_4 X, \quad (5.36)$$

$$\tilde{\Xi}_{ij}^{(32)} = \mu_6 * (A_i X^T + B_i N_j) - \mu_5 * (X + X^T), \quad (5.37)$$

$$\tilde{\Xi}^{(33)} = -\mu_6 * (X + X^T), \quad (5.38)$$

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} \mu_4 I & \mu_5 I & \mu_6 I \end{bmatrix}, \quad (5.39)$$

$$\tilde{\Omega}_{mn} = \begin{bmatrix} \rho_{mn}(A_m X^T + B_m N_n - \tilde{Y}_2) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.40)$$

$\underline{\phi}_i$ e $\bar{\phi}_i$ são os limites superiores e inferiores de $\dot{w}_i$, respectivamente, ρ_{mn} é o limite superior de $|\dot{h}_{ij}|$ e os ganhos dos controladores são obtidos por $G_j = N_j X^{-T} \forall j$

Demonstração. (LIU *et al.*, 2017)

□

Na demonstração do Teorema 4, na equação (16), o autor faz o uso da seguinte relação:

$$\begin{aligned} \dot{W}(x) &= \Lambda + x^T \left(\sum_{\rho=1}^r \dot{w}_\rho P_{1\rho} - \Gamma_3 \right) x \\ &= \Lambda + x^T \left(\sum_{\rho=1}^r (\dot{w}_\rho - \underline{\phi}_\rho) (P_{1\rho} - Y_1) + \sum_{\rho=1}^r \underline{\phi}_\rho (P_{1\rho} - Y_1) \right) x \\ &\leq \Lambda + x^T \left(\sum_{\rho=1}^r (\bar{\phi}_\rho - \underline{\phi}_\rho) S_\rho + \sum_{\rho=1}^r \underline{\phi}_\rho (P_{1\rho} - Y_1) \right) x. \end{aligned} \quad (5.41)$$

sendo $\Lambda = 2\dot{x}^T P_2 x + 2\dot{x}^T P_2 \dot{x} + 2\dot{x}^T \sum_{\rho=1}^r w_\rho P_{1\rho} x$ e $\Gamma_3 = \sum_{\rho=1}^r \dot{w}_\rho Y_1$.

A relação (5.41) mostra que as variáveis de folga S_i e Y_1 são utilizadas exclusivamente para diminuir a influência de estar-se considerando um caso fora do conjunto solução, onde todos os $\dot{h}_i$'s atingem valores máximos. Portanto, a fim de reduzir esse conservadorismo, utiliza-se da abordagem proposta no Teorema 1 em relação a $\dot{P}(h)$, a mesma passagem fica:

$$\dot{W}(x) = \Lambda + x^T \left(\sum_{\rho=1}^r \dot{w}_\rho P_{1\rho} \right) x \leq \Lambda + x^T \left(\sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{k\rho}^* P_{1\rho} \right) x, \quad (5.42)$$

definindo $\dot{h}_\rho(z(t)) = p_\rho$, para todo $\rho \in \mathbb{K}_r$. Então as condições (3.1), (3.2), (3.4) e (3.6) são satisfeitas para $C = 0$. Além disso, definiu-se também $T_\rho = x(t)^T P_{1\rho} x(t)$ e aplicou-se o Algoritmo 1 para cada ordem decrescente k de $T_1, T_2, \dots, T_r$, sendo $k \in \mathbb{K}_m$ e $m = r!$, para obter-se os pesos do majorante ótimo $p_{k_1}^* = \dot{h}_1(z(t))$, $p_{k_2}^* = \dot{h}_2(z(t))$, $\dots$, $p_{k_r}^* = \dot{h}_r(z(t))$, para $J(p)$ dado em (3.22), representado por $J(p) \leq \sum_{\rho=1}^r p_{k\rho} T_\rho$, para todo $k \in \mathbb{K}_m$.

Seguindo a mesma estratégia da prova do Teorema 1 apresentado em (LIU *et al.*, 2017), porém utilizando a equação (5.42) no lugar da Equação (17) do artigo, representada em (5.41), chega-se às LMIs que foram programadas nos exemplos:

$$\tilde{\Theta}_{ij} + \tilde{\Theta}_{ji} > 0 \quad \forall i \leq j, \quad (5.43)$$

$$\tilde{P}_{1i} > 0 \quad \forall i, \quad (5.44)$$

$$\Psi_{ijk} + \Psi_{jik} < 0 \quad \forall i \leq j, \quad k \in \mathbb{K}_m \quad (5.45)$$

sendo

$$\tilde{\Theta}_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}_{ij}^{(11)} & * \\ \tilde{\Theta}_{ij}^{(21)} & \tilde{\Theta}_{ij}^{(22)} \end{bmatrix}, \quad (5.46)$$

$$\tilde{\Theta}_{ij}^{(11)} = \tilde{P}_{1i} + \mu_1(A_i X^T + B_i N_j) + \mu_1(A_i X^T + B_i N_j)^T, \quad (5.47)$$

$$\tilde{\Theta}_{ij}^{(21)} = \tilde{P}_2 - \mu_1 X + \mu_2(A_i X^T + B_i N_j), \quad (5.48)$$

$$\tilde{\Theta}_{ij}^{(22)} = -\mu_2(X + X^T), \quad (5.49)$$

$$\Psi_{ijk} = \begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_{ijk} & * & * & * & \cdots & * \\ \tilde{\Upsilon} & \Psi^{(22)} & * & * & \cdots & * \\ \tilde{\Omega}_{11} & 0 & -\beta_{11}I & * & \cdots & * \\ \tilde{\Omega}_{12} & 0 & 0 & -\beta_{12}I & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\Omega}_{rr} & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta_{rr}I \end{bmatrix}, \quad (5.50)$$

$$\Psi^{(22)} = -\frac{1}{\sum_{p=1}^r \sum_{s=1}^r \beta_{ps}} I, \quad (5.51)$$

$$\tilde{\Xi}_{ijk} = \begin{bmatrix} \tilde{\Xi}_{ijk}^{(11)} & * & * \\ \tilde{\Xi}_{ij}^{(21)} & \tilde{\Xi}_{ij}^{(22)} & * \\ \tilde{\Xi}^{(31)} & \tilde{\Xi}_{ij}^{(32)} & \tilde{\Xi}^{(33)} \end{bmatrix}, \quad (5.52)$$

$$\tilde{\Xi}_{ijk}^{(11)} = \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{\rho k}^* P_{1\rho} + (A_i X^T + B_i N_j) + (A_i X^T + B_i N_j)^T, \quad (5.53)$$

$$\tilde{\Xi}_{ij}^{(21)} = \tilde{P}_{1i} - X + \mu_3 * (A_i X^T + B_i N_j) + \mu_4 * (A_i X^T + B_i N_j)^T, \quad (5.54)$$

$$\tilde{\Xi}_{ij}^{(22)} = 2\tilde{P}_2 - \mu_3 * (X + X^T) + \mu_5 * (A_i X^T + B_i N_j) + \mu_5 * (A_i X^T + B_i N_j)^T, \quad (5.55)$$

$$\tilde{\Xi}^{(31)} = \tilde{P}_2 - \mu_4 X, \quad (5.56)$$

$$\tilde{\Xi}_{ij}^{(32)} = \mu_6 * (A_i X^T + B_i N_j) - \mu_5 * (X + X^T), \quad (5.57)$$

$$\tilde{\Xi}^{(33)} = -\mu_6 * (X + X^T), \quad (5.58)$$

$$\tilde{\Upsilon} = \begin{bmatrix} \mu_4 I & \mu_5 I & \mu_6 I \end{bmatrix}, \quad (5.59)$$

$$\tilde{\Omega}_{mn} = \begin{bmatrix} \rho_{mn}(A_m X^T + B_m N_n - \tilde{Y}_2) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.60)$$

Observação 5. Uma das vantagens do Teorema 4 é que, ao contrário do Teorema 3, os $\dot{h}_i$'s não precisam ser simétricos. Porém, será mostrado que, em alguns casos de sistemas simétricos, o Teorema 3 pode proporcionar áreas de factibilidade maiores que o Teorema

4. Apesar disso, será mostrado que a abordagem proposta pelo Teorema 1 proporciona resultados com regiões de factibilidade maiores ou iguais em todos os casos.

- Para $r = 2$

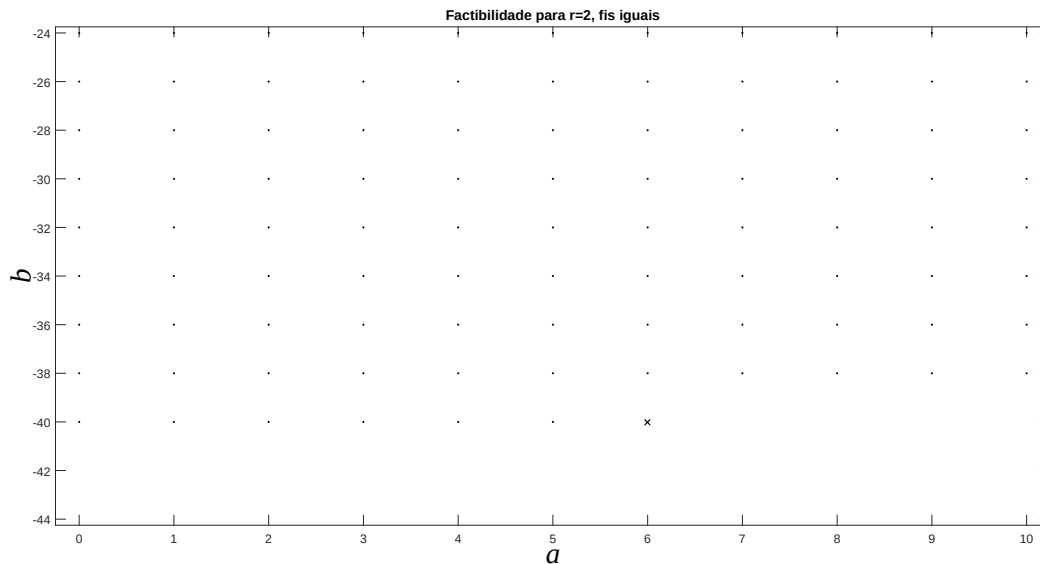
Considere o seguinte sistema não linear TS descrito por

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3,6 & -1,6 \\ 6,2 & -4,3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -a & -1,6 \\ 6,2 & -4,3 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -0,45 \\ -3 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -b \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Variando-se os parâmetros a e b entre $[0, 10]$ e $[-44, -24]$, respectivamente, e utilizando-se do solver Sedumi, foram obtidas as seguintes região de factibilidade:

- Para intervalos de $\dot{h}_i$'s iguais, $\phi = 1$

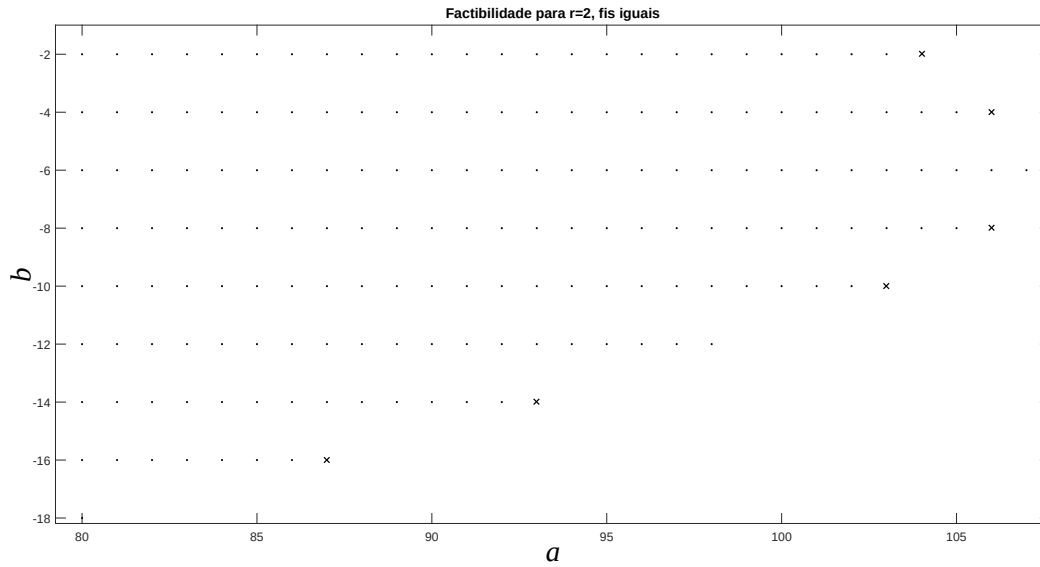
Figura 5 - Área de factibilidade para $r = 2$, $(\cdot)$ para Teorema 4 original e $(\cdot, \times)$ para Teorema 4 utilizando o Algoritmo 1 presente no Teorema 1.



Fonte: O próprio autor.

Alterando a região de variação dos parâmetros a e b para $[80, 110]$ e $[-18, -2]$, respectivamente, obteve-se a região de factibilidade representada na Figura 6.

Figura 6 - Área de factibilidade para $r = 2$ com intervalos diferentes de a e b , $(\cdot)$ para Teorema 4 original e $(\cdot, \times)$ para Teorema 4 utilizando o Algoritmo 1 presente no Teorema 1.



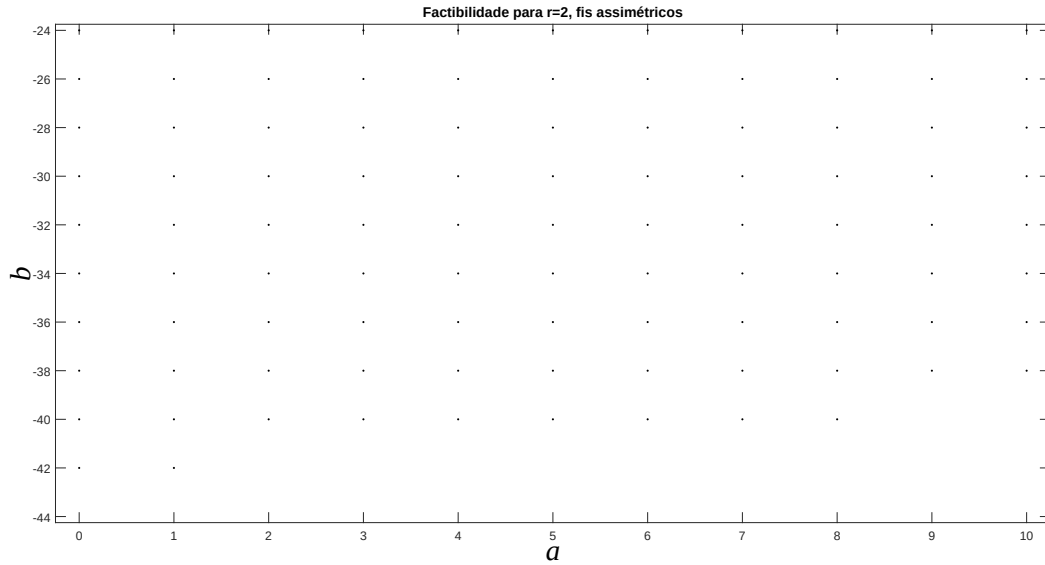
Fonte: O próprio autor.

- Para intervalos de $\dot{h}_i$'s assimétricos

Neste caso, foram utilizados os seguintes valores para os limites de $\dot{h}_i$

$$\begin{aligned} -1 &\leq \dot{h}_1 \leq 0,4, \\ -0,4 &\leq \dot{h}_2 \leq 1. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Figura 7 - Área de factibilidade para $r = 2$ com intervalos diferentes para os limitantes $\dot{h}_i$, $(\cdot)$ para Teorema 4 original e $(\cdot, x)$ para Teorema 4 utilizando o Algoritmo 1.



Fonte: O próprio autor.

Não foi possível achar uma região de a e b onde a abordagem do Teorema 1 tivesse vantagem sobre o Teorema 4, mostrando que ambos produzem resultados iguais.

- Para $r = 3$

Considere o seguinte sistema não linear TS descrito por

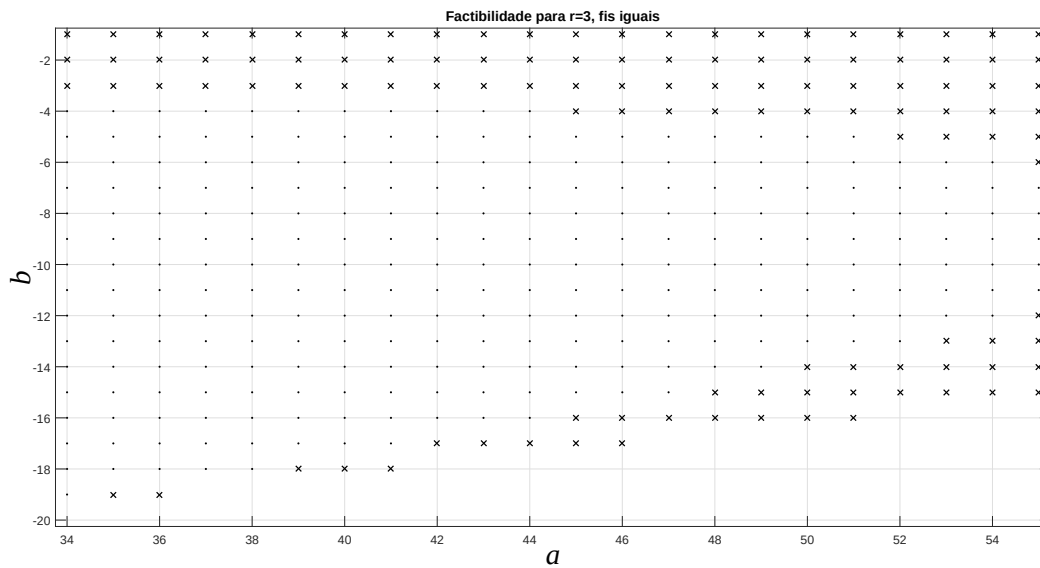
$$A_1 = \begin{bmatrix} 3,6 & -1,6 \\ 6,2 & -4,3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a & -1,6 \\ 6,2 & -4,3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -3,6 & -1,6 \\ a & -4,3 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0,45 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -b \\ -3 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} -0,45 \\ b \end{bmatrix}.$$

Neste caso, será utilizado também como comparação o Teorema 3 com e sem a abordagem proposta no Teorema 1. Variando-se os parâmetros a e b entre $[34, 55]$ e $[-20, -1]$, respectivamente, e utilizando-se do solver Sedumi, foi obtida a seguinte região de factibilidade:

- Para intervalos de $\dot{h}_i$'s iguais, $\phi = 1$

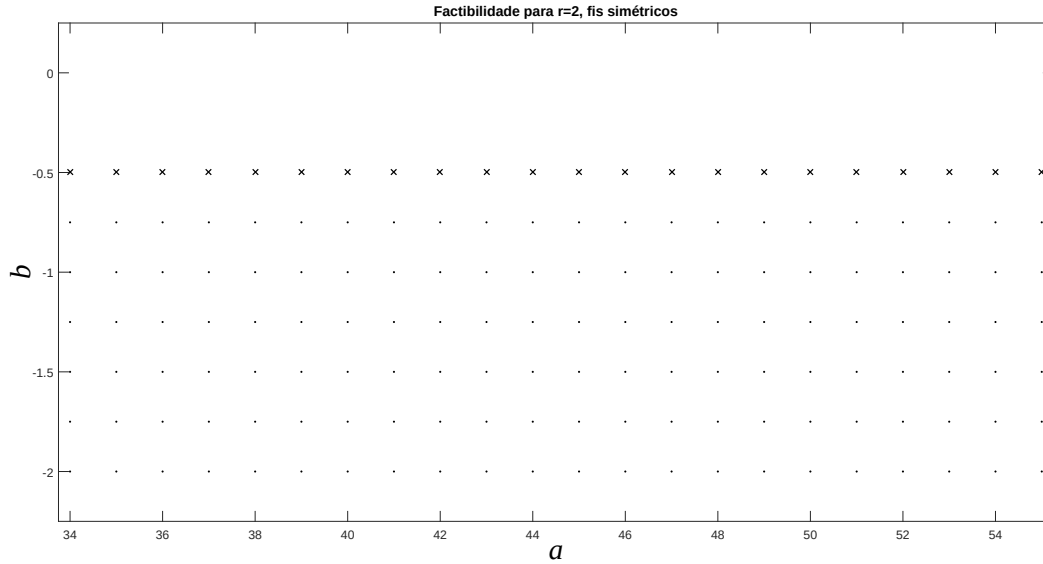
Figura 8 - Área de factibilidade para $r = 3$, $(\cdot)$ para Teorema 4 original, $(\cdot, \times)$ para Teorema 3 original, $(\cdot, \times, o)$ para Teorema 3 utilizando o Algoritmo 1.



Fonte: O próprio autor.

Dando um zoom na região de factibilidade apresentada na Figura 8, é possível ver que a abordagem proposta pelo Teorema 1 melhora os resultados, como mostrado na Figura 9.

Figura 9 - Área de factibilidade para $r = 3$, $(\cdot)$ para Teorema 3 original, $(\cdot, \times)$ para Teorema 3 utilizando o Algoritmo 1.



Fonte: O próprio autor.

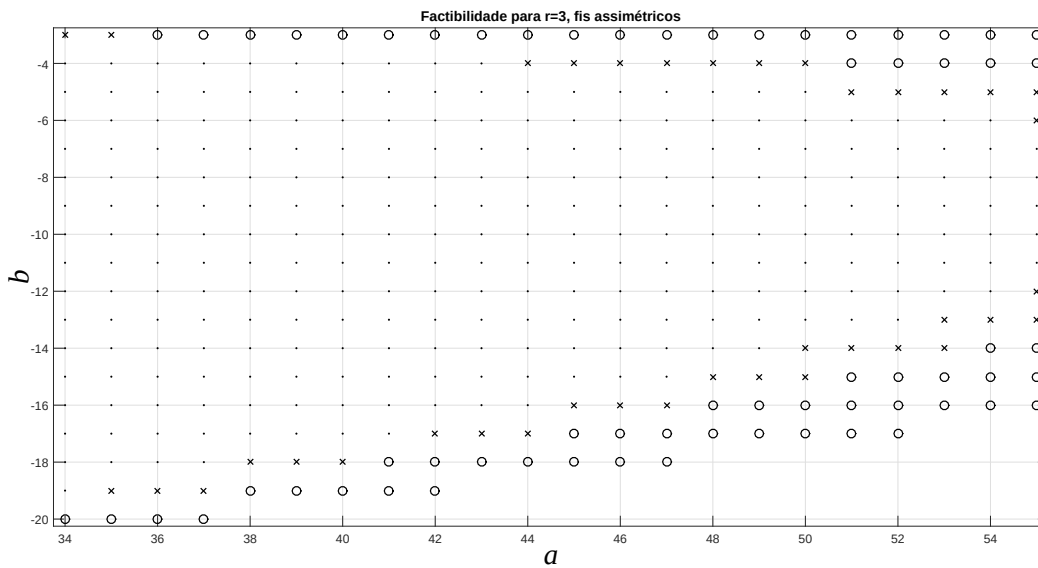
- Para intervalos de $\dot{h}_i$'s assimétricos

Neste caso, foram utilizados os seguintes valores para os limites de $\dot{h}_i$

$$\begin{aligned} -0,9 &\leq \dot{h}_1 \leq 0,5, \\ -0,7 &\leq \dot{h}_2 \leq 1 \\ -1,2 &\leq \dot{h}_2 \leq 0,9. \end{aligned} \tag{5.62}$$

Além disso, será utilizado também como comparação o Teorema 3 com a abordagem proposta no Teorema 1, já que sem essa abordagem, o Teorema 3 só pode ser usado para sistemas com $\dot{h}_i$'s simétricos. Variando-se os parâmetros a e b entre $[34, 54]$ e $[-20, -1]$, respectivamente, e utilizando-se do solver Sedumi, foi obtida a seguinte região de factibilidade:

Figura 10 - Área de factibilidade para $r = 3$, $(\cdot)$ para Teorema 4 original, $(\cdot, \times)$ para Teorema 4 utilizando o Algoritmo 1, $(\cdot, \times, o)$ para Teorema 3 utilizando o Algoritmo 1.



Fonte: O próprio autor.

- Para intervalos de $\dot{h}_i$'s assimétricos, variando-se os ϕ_i 's.

Considere que os ϕ_i 's são dependentes de parâmetros varáveis, de maneira que:

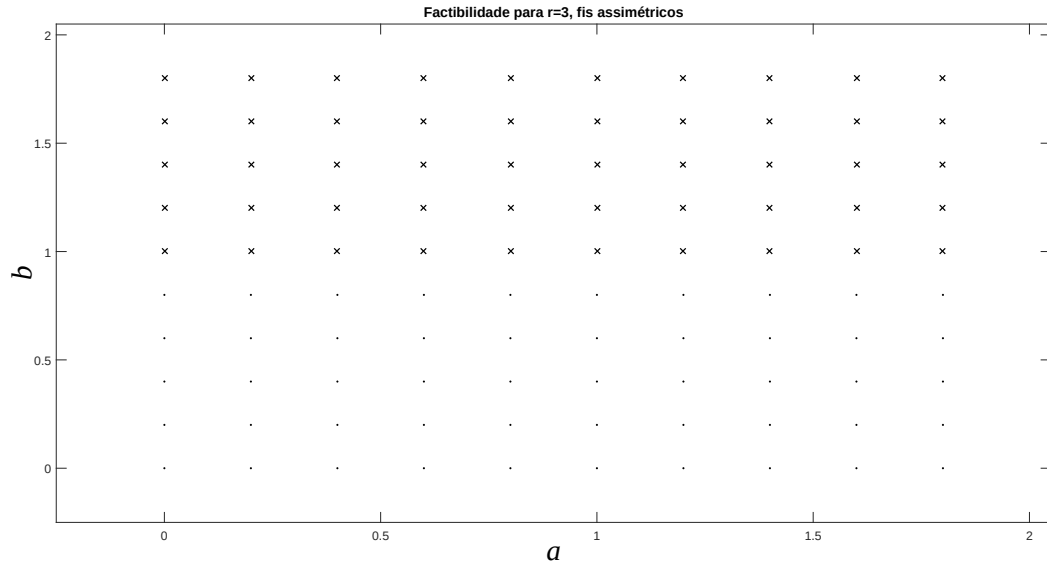
$$-(a+b) \leq \dot{h}_1 \leq \frac{2(a+b)}{3} \quad (5.63)$$

$$-\frac{3(a+b)}{4} \leq \dot{h}_2 \leq \frac{7(a+b)}{10} \quad (5.64)$$

$$-\frac{3(a+b)}{5} \leq \dot{h}_3 \leq \frac{2(a+b)}{5} \quad (5.65)$$

Variando-se os parâmetros a e b entre $[0,00001;1,8]$ e $[0,00001;1,8]$, respectivamente, e utilizando-se do solver Sedumi, foi obtida a seguinte região de factibilidade:

Figura 11 - Área de factibilidade para $r = 3$, $(\cdot)$ para Teorema 4 original, $(\cdot, \times)$ para Teorema 4 utilizando o Algoritmo 1.



Fonte: O próprio autor.

Observação 6. *É importante ressaltar que, para a validação total dos resultados obtidos nas simulações realizadas, todas as variáveis arbitrárias (μ no Teorema 3 e $\beta_{ij}, \rho_{ij}, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_6$, $i, j = 1, 2, \dots, r$ no Teorema 4) tiveram seus respectivos valores exatamente iguais aos valores utilizados nas simulações de cada artigo ($(\mu = 0,04$ em (MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009) e $\beta_{ij} = 1, \mu_1 = -10^{-2}, \mu_2 = -10^{-4}, \mu_3 = 0,04, \mu_4 = -10^{-2}, \mu_5 = 10^{-4}, \mu_6 = 10^{-6}, \rho_{11} = \rho_{22} = 1, \rho_{12} = \rho_{21} = 0,1$, $i, j = 1, 2$ em (LIU et al., 2017)).*

5.1.3 Comparação com (QIAO; YANG, 2018)

Nesta seção, serão comparados resultados a partir do Teorema 3.1 presente em (QIAO; YANG, 2018). Neste trabalho, o autor utiliza-se de uma ferramenta matemática para inserção de mais variáveis matriciais, a fim de relaxar a busca por soluções. Porém, apesar da inserção dessas variáveis, a construção do termo dependente das derivadas das funções de pertinência continuam dependendo somente dos limitantes superiores das mesmas, fazendo com que esse termo não seja otimizado.

Teorema 5. (QIAO; YANG, 2018) *Se existir um escalar $\rho > 0$, matrizes simétricas $P_i > 0, X_i, X$ e matrizes H, G quaisquer satisfazendo as LMIs abaixo:*

$$\Theta_i < 0, i = 1, 2, \dots, r, \quad (5.66)$$

sendo

$$\Theta_i = \begin{bmatrix} -HF_i - F_i^T H^T + \sum_{i=1}^r \frac{1}{4} \phi_i^2 X_i & * & * & * & \cdots & * \\ P_i - \rho HF_i + \bar{E}^T H^T + Q^T G^T & \rho(\bar{E}^T H^T + Q^T G^T + H\bar{E} + GQ) & * & * & \cdots & * \\ P_1 + X & 0 & -X_1 & * & \cdots & * \\ P_2 + X & 0 & 0 & -X_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_r + X & 0 & 0 & 0 & \cdots & -X_r \end{bmatrix},$$

$$Q = [C \ I],$$

então existe um observador que realiza uma estimação assintótica do vetor de estados e de falhas do sensores do sistema. As matrizes do observador são dadas por:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = GH^{-1}, E = \begin{bmatrix} I + NC & N \\ MC & M \end{bmatrix}, F_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C & -I \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}. \quad (5.67)$$

Demonstração. (QIAO; YANG, 2018) □

No trabalho em questão, os autores fazem a seguinte passagem, demonstrada na

Equação (20) do artigo:

$$\sum_{i=1}^r \dot{h}(\xi)P_i = \sum_{i=1}^r \dot{h}(\xi)(P_i + X) \leq \sum_{i=1}^r \phi_i(P_i + X) \leq \sum_{i=1}^r [(P_i + X)X_i^{-1}(P_i + X) + \frac{1}{4}\phi_i^2 X_i], \quad (5.68)$$

sendo ξ vetor de estados e de falhas dos sensores do sistema e ϕ_i os limitantes superiores das derivadas das funções de pertinência do sistema.

Como observado anteriormente, a utilização somente dos limitantes superiores dessas derivadas acaba trazendo conservadorismo à resolução do problema, mesmo quando há a inserção de variáveis matriciais de folga (no caso, as matrizes X_i).

A fim de relaxar as LMIs do Teorema 5, foi aplicado o procedimento descrito pelo Algoritmo 1 do Teorema 1. Porém, a princípio, esse procedimento não trouxe ganho algum a resolução do problema, retornando regiões de factibilidade iguais e até ocasionalmente menores que as LMIs originais do Teorema 5. Isso se deve ao fato de que, graças a passagem representada na Equação (5.68), acaba-se utilizando o quadrado dos pesos ajustados, ou seja:

$$\sum_{i=1}^r \dot{h}(\xi)P_i \leq \sum_{i=1}^r \dot{h}_{ki}^* P_i \leq \sum_{i=1}^r [P_i X_i^{-1} P_i + \frac{1}{4}(\dot{h}_{ki}^*)^2 X_i], \quad (5.69)$$

sendo $\dot{h}_{ki}^*$ o conjunto de pesos ótimos adaptados para $\dot{h}_i$ conforme o Algoritmo 1 apresentado no Teorema 1

A utilização dessa ferramenta matemática que resulta no termo $(\dot{h}_i^*)^2$ acaba tirando uma das principais vantagens da abordagem contida no Teorema 1: a possibilidade de utilização de valores negativos para os $\dot{h}_i$.

Assim, deu-se um passo a menos do que foi dado na Equação (5.68), sendo

$$\dot{P}(h) = \sum_{i=1}^r \dot{h}(\xi)P_i \leq \sum_{i=1}^r \dot{h}_{ki}^* P_i, \quad (5.70)$$

definindo $\dot{h}_p(z(t)) = p_p$, para todo $p \in \mathbb{K}_r$. Então as condições (3.1), (3.2), (3.4) e (3.6) são satisfeitas para $C = 0$. Além disso, definiu-se também $T_p = x(t)^T P_p x(t)$ e aplicou-se o Algoritmo 1 para cada ordem decrescente k de $T_1, T_2, \dots, T_r$, sendo $k \in \mathbb{K}_m$ e $m = r!$, para obter-se os pesos do majorante ótimo $p_{k_1}^* = \dot{h}_1(z(t))$, $p_{k_2}^* = \dot{h}_2(z(t))$, $\dots$, $p_{k_r}^* = \dot{h}_r(z(t))$, para $J(p)$ dado em (3.22), representado por $J(p) \leq \sum_{p=1}^r p_{kp} T_p$, para todo $k \in \mathbb{K}_m$.

A partir do passo descrito em (5.70) e da prova disponível em (QIAO; YANG, 2018), acabou-se chegando em condições semelhantes ao conjunto de LMIs adaptadas pelo Algoritmo 1 para o caso de comparação com (MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009),

apresentadas em (5.13)-(5.18). As LMIs adaptadas a partir de (QIAO; YANG, 2018), utilizadas para as comparações a seguir, foram:

$$\Theta_{ik} < 0, \quad i \in \mathbb{K}_r, \quad k \in \mathbb{K}_m \quad (5.71)$$

sendo

$$\Theta_{ik} = \begin{bmatrix} -HF_i - F_i^T H^T + \sum_{i=1}^r \dot{h}_{ki}^* P_i & * \\ P_i - \rho HF_i + \bar{E}^T H^T + Q^T G^T & \rho(\bar{E}^T H^T + Q^T G^T + H\bar{E} + GQ) \end{bmatrix} < 0,$$

com as mesmas matrizes Q, E, L, F_i, GH^{-1} apresentadas em (5.67).

- Para $r = 2$

Considere o seguinte sistema não linear TS apresentado em (QIAO; YANG, 2018) descrito por

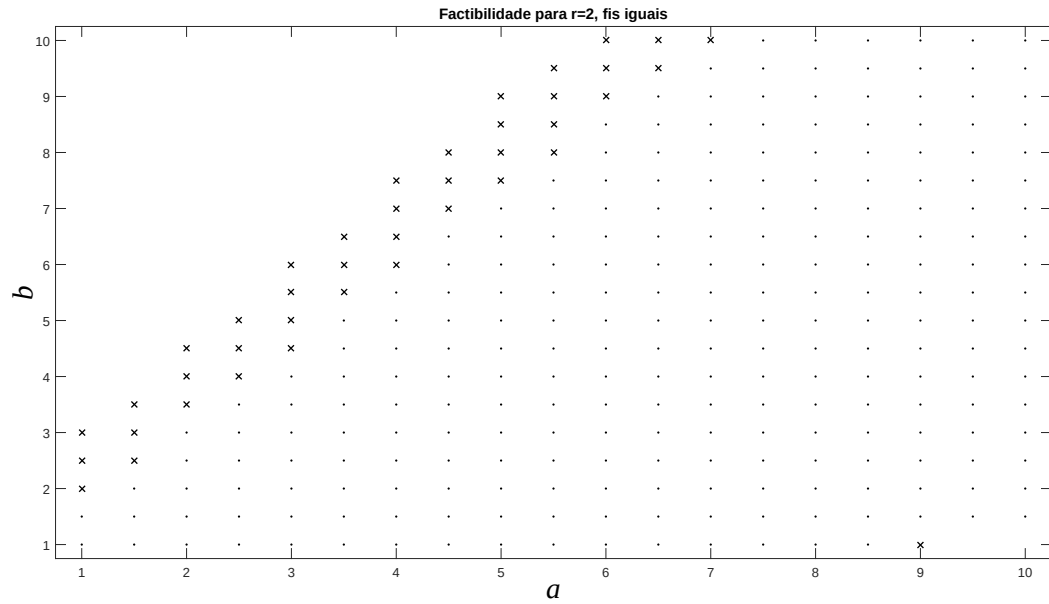
$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & a & 1 \\ -1,94 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & b & 1 \\ -0.5 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Variando-se os parâmetros a e b entre $[1; 10]$ e $[1; 10]$, respectivamente, e utilizando-se do solver Sedumi, foram obtidas as seguintes regiões de factibilidade:

- Para intervalos de $\dot{h}_i$ iguais, $\phi = 1.144$

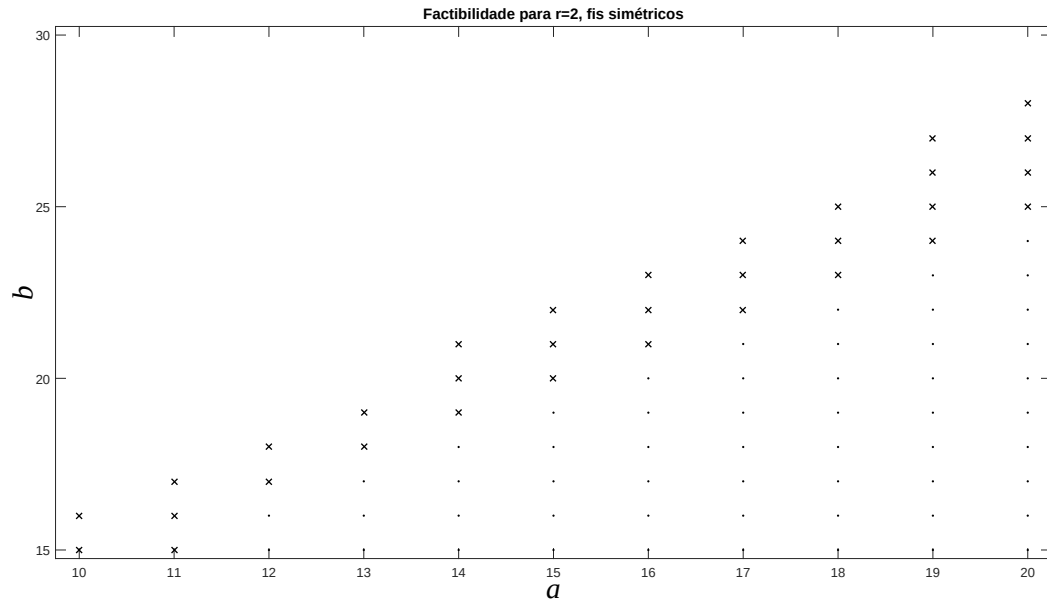
Figura 12 - Área de factibilidade para $r = 2$, $(\cdot)$ para Teorema 5 original, $(\cdot, \times)$ para Teorema 5 utilizando o Algoritmo 1, com intervalos iguais para os limitantes de $\dot{h}_i$.



Fonte: O próprio autor.

Ainda utilizando esse valor para ϕ , foi realizada uma busca em uma região de a e b diferente da mostrada em (QIAO; YANG, 2018), resultando na Figura abaixo:

Figura 13 - Área de factibilidade diferente para $r = 2$, $(\cdot)$ para Teorema 5 original, $(\cdot, \times)$ para Teorema 5 utilizando o Algoritmo 1, com intervalos iguais para os limitantes de $\dot{h}_i$.



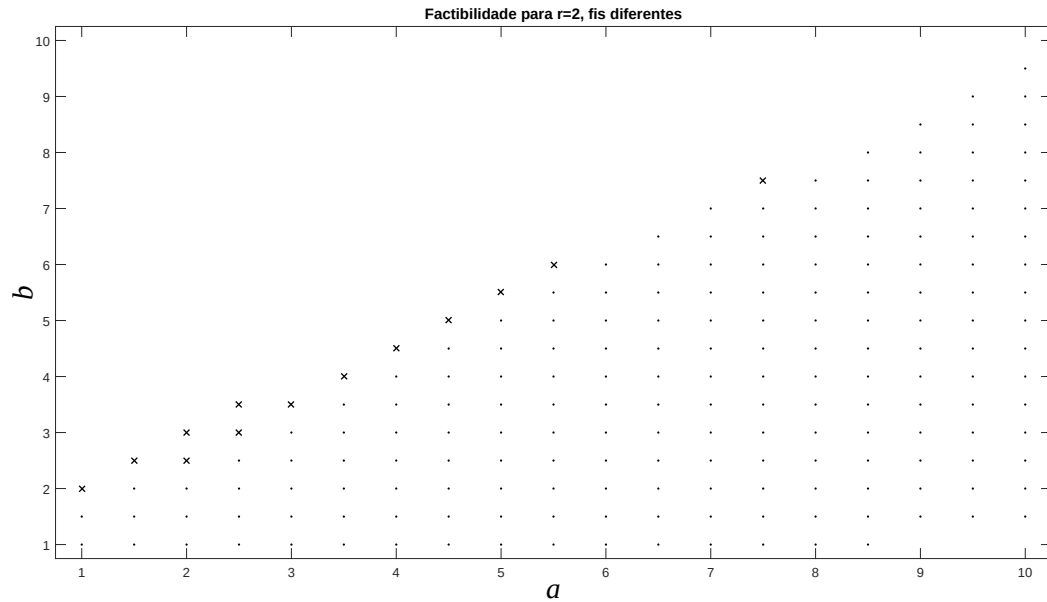
Fonte: O próprio autor.

- Para intervalos de $\dot{h}_i$ diferentes

Para este caso, foram usados os seguintes valores para os limites dos $\dot{h}_i$:

$$\begin{aligned} -3 &\leq \dot{h}_1 \leq 1,5 \\ -1,5 &\leq \dot{h}_2 \leq 3 \end{aligned} \tag{5.72}$$

Figura 14 - Área de factibilidade para $r = 2$, $(\cdot)$ para Teorema 5 original, $(\cdot, \times)$ para Teorema 5 utilizando o Algoritmo 1, com intervalos diferentes para os limitantes de $\dot{h}_i$.



Fonte: O próprio autor.

- Para $r = 3$

Considere o seguinte sistema não linear TS adaptado a partir do apresentado em (QIAO; YANG, 2018), descrito por

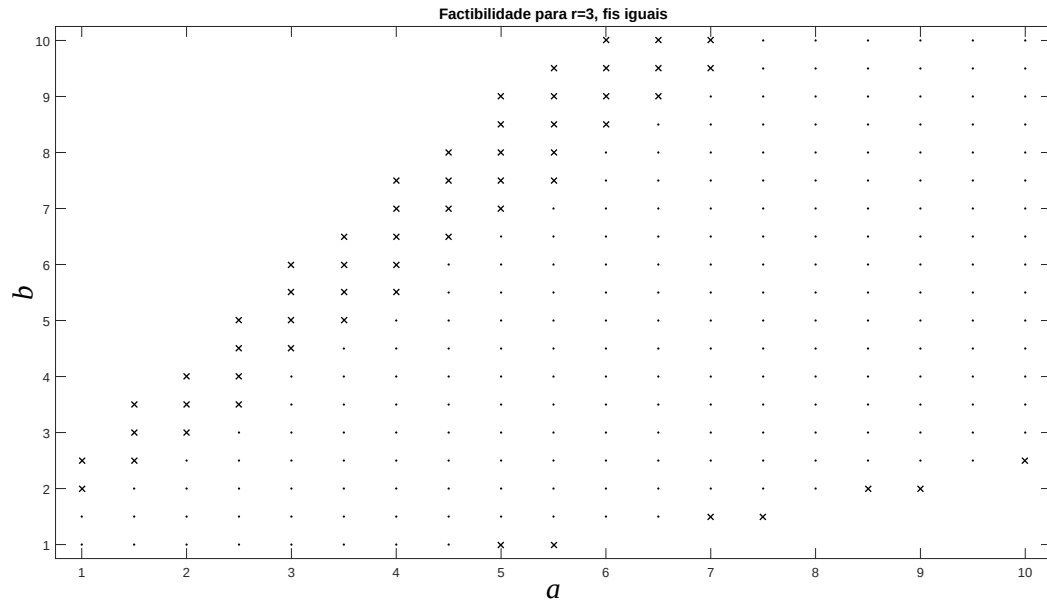
$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & a & 1 \\ -1,94 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & b & 1 \\ -0,5 & -1,5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & b & 1 \\ -1 & -0,9 & 0 \\ 0 & -1 & -1,8 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 1,5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Variando-se os parâmetros a e b entre $[1; 10]$ e $[1; 10]$, respectivamente, e utilizando-se do solver Sedumi, foram obtidas as seguintes regiões de factibilidade:

- Para intervalos de $\dot{h}_i$ iguais, $\phi = 1.144$

Figura 15 - Área de factibilidade para $r = 2$, $(\cdot)$ para Teorema 5 original, $(\cdot, \times)$ para Teorema 5 utilizando o Algoritmo 1, com intervalos iguais para os limitantes de $\dot{h}_i$.



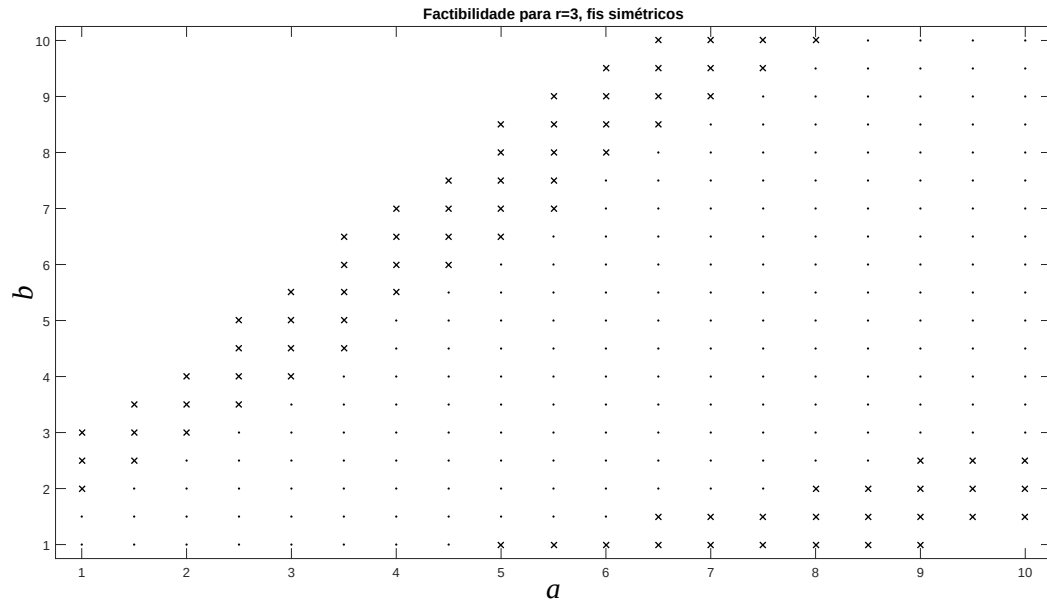
Fonte: O próprio autor.

- Para intervalos de $\dot{h}_i$ simétricos

Para este caso, foram usados os seguintes valores para os limites dos $\dot{h}_i$:

$$\begin{aligned}
 -1,17 &\leq \dot{h}_1 \leq 1,17 \\
 -1,25 &\leq \dot{h}_2 \leq 1,25 \\
 -1,5 &\leq \dot{h}_3 \leq 1,5
 \end{aligned} \tag{5.73}$$

Figura 16 - Área de factibilidade para $r = 2$, $(\cdot)$ para Teorema 5 original, $(\cdot, \times)$ para Teorema 5 utilizando o Algoritmo 1, com intervalos simétricos para os limitantes de $\dot{h}_i$.



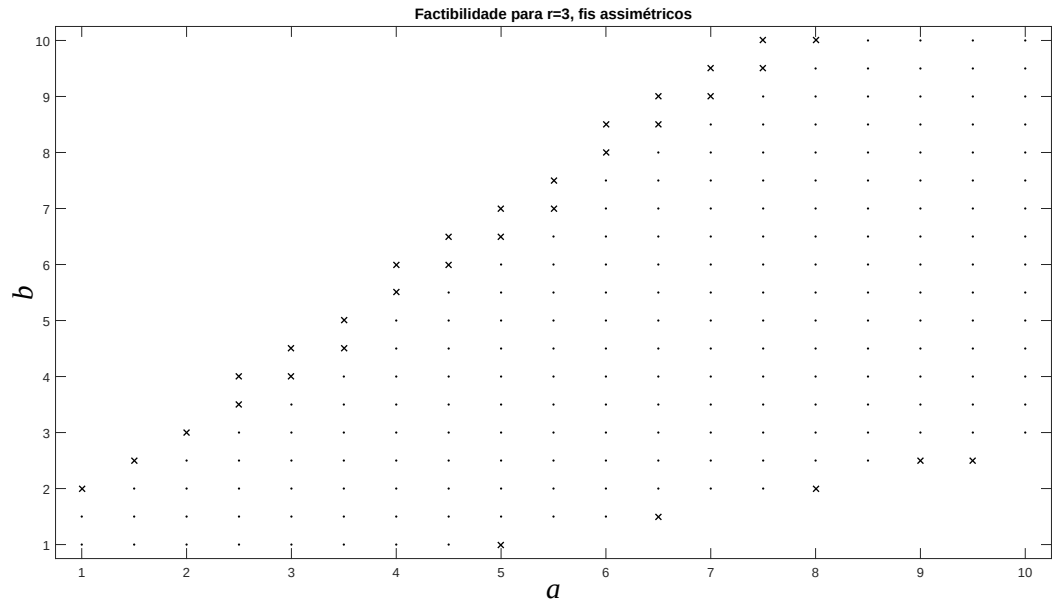
Fonte: O próprio autor.

- Para intervalos de $\dot{h}_i$ diferentes

Para este caso, foram usados os seguintes valores para os limites dos $\dot{h}_i$:

$$\begin{aligned}
 -1,1 &\leq \dot{h}_1 \leq 1,17 \\
 -0,9 &\leq \dot{h}_2 \leq 1,25 \\
 -1 &\leq \dot{h}_3 \leq 1,5
 \end{aligned} \tag{5.74}$$

Figura 17 - Área de factibilidade para $r = 2$, $(\cdot)$ para Teorema 5 original, $(\cdot, \times)$ para Teorema 5 utilizando o Algoritmo 1, com intervalos diferentes para os limitantes de $\dot{h}_i$.



Fonte: O próprio autor.

6 Condições de Estabilização para Sistemas Fuzzy TS Sujeitos a Região de Operação

6.1 Representação da Região de Operação

Considere como região de operação de um sistema um conjunto compacto definido $\chi \subset \mathbb{R}^{n_x}$ dado por:

$$\chi \triangleq \{x(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : |N_{(h)}x(t)| \leq \kappa_h, h \in \mathbb{I}_{n_h}\}, \quad (6.1)$$

sendo $N = [N_{(1)}^T \ N_{(2)}^T \ \dots \ N_{(n_h)}^T]^T \in \mathbb{R}^{n_h \times n_x}$ e $\kappa = [\kappa_1 \ \kappa_2 \ \dots \ \kappa_{n_h}]^T \in \mathbb{R}^{n_h}$ conhecidos.

Defina também um conjunto ε tal que

$$\varepsilon \triangleq \{x(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : x(t)^T P x(t) \leq \delta\}. \quad (6.2)$$

Em (ALVES *et al.*, 2016), é apresentado um lema que fornece uma condição suficiente tal que, se satisfeita, assegura $\varepsilon(P, \delta) \subset \chi(N_{(h)})$.

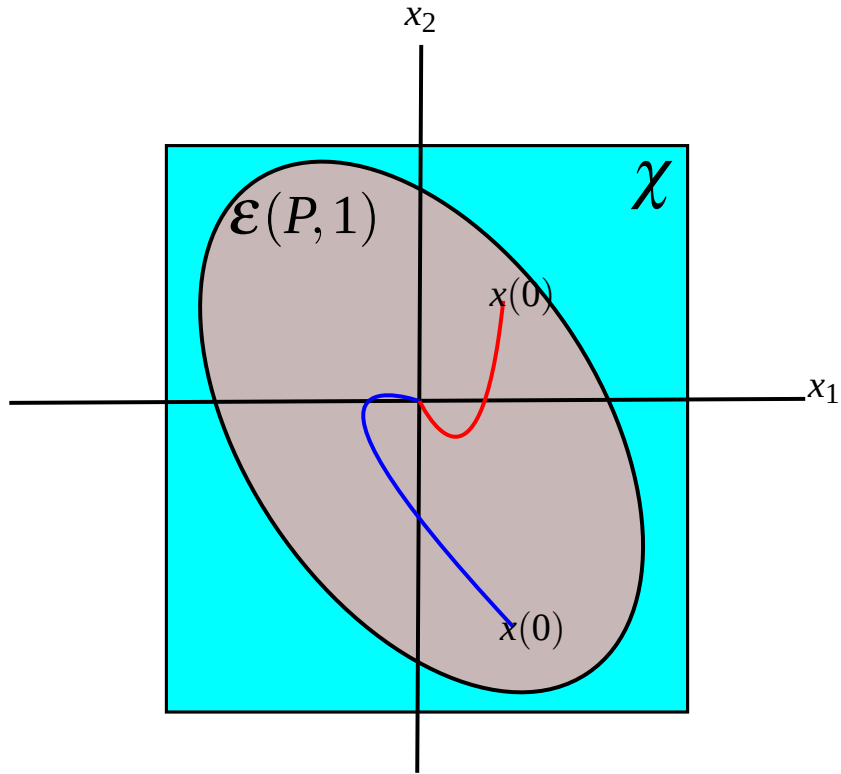
Lema 6.1. (ALVES *et al.*, 2016) *Dados os conjuntos (6.1) e (6.2), a condição $\varepsilon(P, \delta) \subset \chi(N_{(h)})$ é satisfeita se*

$$\begin{bmatrix} \kappa_h^2 \delta^{-1} & * \\ X N_{(h)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0. \quad (6.3)$$

Demonstração. (ALVES *et al.*, 2016). □

Assim, fica definida uma região ε em que, se as condições iniciais $x(0)$ estão dentro dos limites dessa região, então os estados $x(t)$ não sairão da região de operação χ para $t > 0$, como representado na figura abaixo.

Figura 18 - Região de Operação.



Fonte: O próprio autor.

6.2 Condições de Estabilização para Sistemas Não Lineares Fuzzy TS Sujeitos a Região de Operação

6.2.1 O Pêndulo Invertido

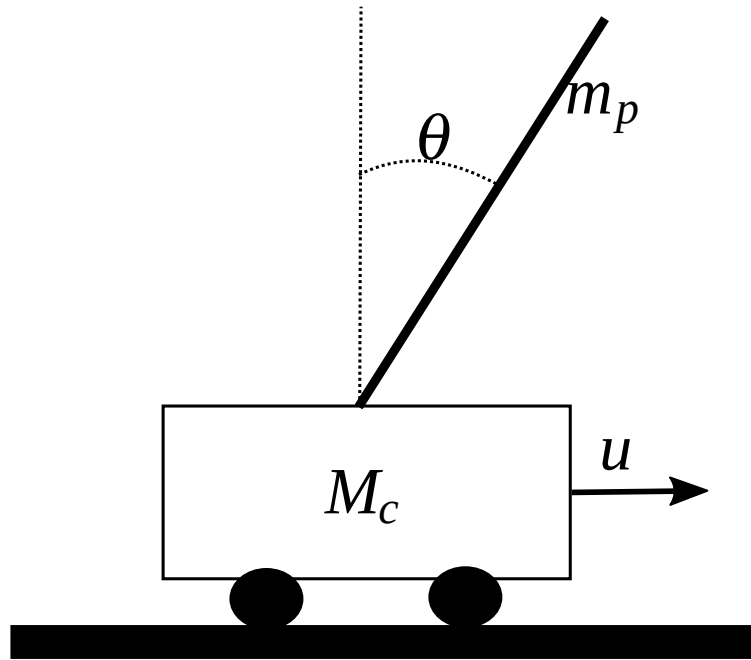
Para as aplicações a seguir, será considerada a dinâmica de um pêndulo invertido, apresentada em (LIU *et al.*, 2017):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\frac{4L}{3} - am_p L} & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\frac{4L}{3} - am_p L \beta^2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-a}{\frac{4L}{3} - am_p L} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-a\beta}{\frac{4L}{3} - am_p L \beta^2} \end{bmatrix},$$

sendo $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $m_p = 2 \text{ kg}$, $M_c = 10 \text{ kg}$, $a = \frac{1}{M_c + m_p}$, $L = 1/2 \text{ m}$ e $\beta = \cos(80\pi/180)$ e as funções de pertinência do sistema são $h_1(x_1(t)) = e^{-x_1(t)^2/0,32}$ e $h_2(x_1(t)) = 1 - h_1(x_1(t))$.

Figura 19 - Pêndulo Invertido



Fonte: O próprio autor.

6.2.2 Comparação com (MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009) - Região de Operação

Assim como no Capítulo 2, a Aplicação 1 leva em contas as LMIs propostas em (MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009). Para aquele caso, foram propostas as alterações que resultaram nas LMIs (5.13)-(5.15). Nesse caso, além da manutenção dos limitantes dos $\dot{h}_i$'s, será adicionada a restrição da região de operação, apresentada em (6.1) e os limites superiores e inferiores dos $\dot{h}_i$'s serão calculados de maneira exata, como apresentado em (TANAKA; HORI; WANG, 2003).

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= \frac{\partial h_1(x_1)}{\partial x_1} \dot{x}_1(t) = \frac{\partial h_1(x_1)}{\partial x_1} \times [1 \ 0] \left(\sum_{i=1}^r h_i(x_1) (A_i x(t) + B_i u(t)) \right) \\ &= \frac{\partial h_1(x_1)}{\partial x_1} (h_1(x_1) x_2 + h_2(x_1) x_2) = \frac{\partial h_1(x_1)}{\partial x_1} x_2 = \frac{-2x_1 x_2 e^{-x_1^2/0,32}}{0,32}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Levando-se em conta uma região de operação dada por $x_1 \in [-80\pi/180, 80\pi/180] rad$

e $x_2 \in [-80\pi/180, 80\pi/180]rad/s$, têm-se:

$$\begin{aligned}\max \dot{h}_1 &= 0,0067; \\ \min \dot{h}_1 &= -0,0068; \\ \max \dot{h}_2 &= -\min \dot{h}_1; \\ \min \dot{h}_2 &= -\max \dot{h}_1.\end{aligned}\tag{6.5}$$

Como o Teorema 3 não permite a utilização de limitantes diferentes (só é proposto para intervalos simétricos dos limites dos $\dot{h}_i$'s), será utilizado um valor padrão de 10 para esses limites, que foi o valor utilizado em (LIU *et al.*, 2017), utiliza-se método nenhum para um cálculo exato desse limitantes dos $\dot{h}_i$'s.

As LMIs do Teorema 3 original foram programadas via Matlab utilizando-se do solver SeDuMi 1.3 e retornaram os seguintes ganhos de realimentação negativa ($u = -K(h)x(t)$):

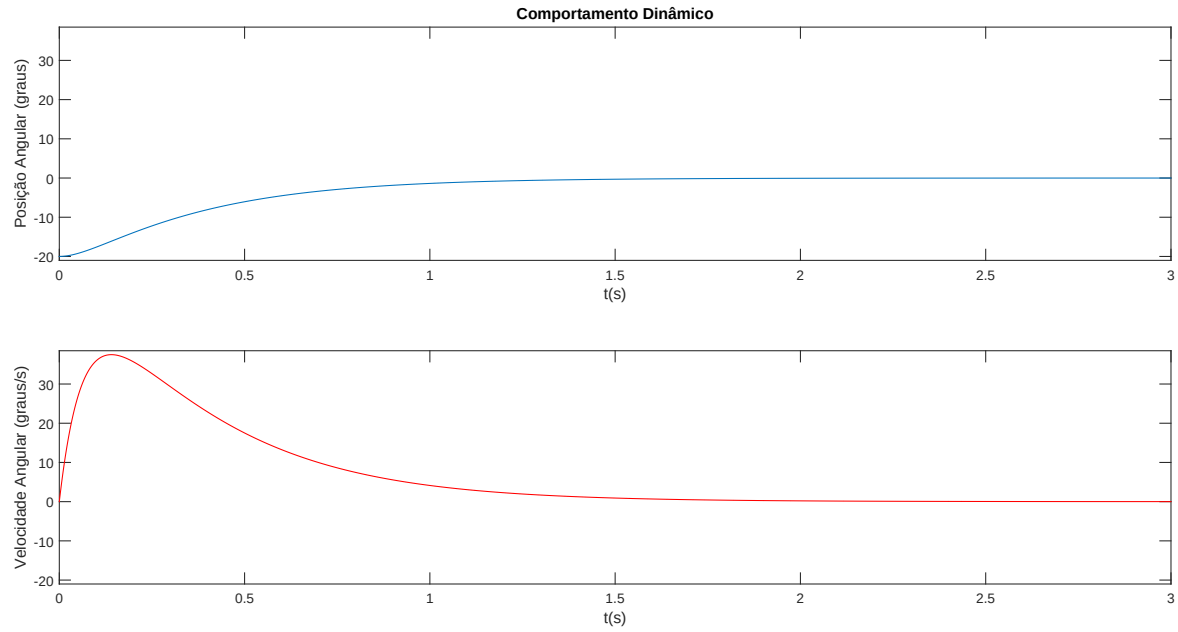
$$\begin{aligned}K_1 &= [-220,7454 \quad -57,7113], \\ K_2 &= [-563,1885 \quad -182,2289].\end{aligned}\tag{6.6}$$

Já as LMIs adaptadas do Teorema 3 em função do Algoritmo 1, apresentadas em (5.13)-(5.15), em conjunto com a LMI (6.3), que representa a região de operação utilizada, retornaram os seguintes ganhos para a mesma realimentação negativa:

$$\begin{aligned}K_1 &= [-187,3325 \quad -33,5886], \\ K_2 &= [-414,1012 \quad -103,6300].\end{aligned}\tag{6.7}$$

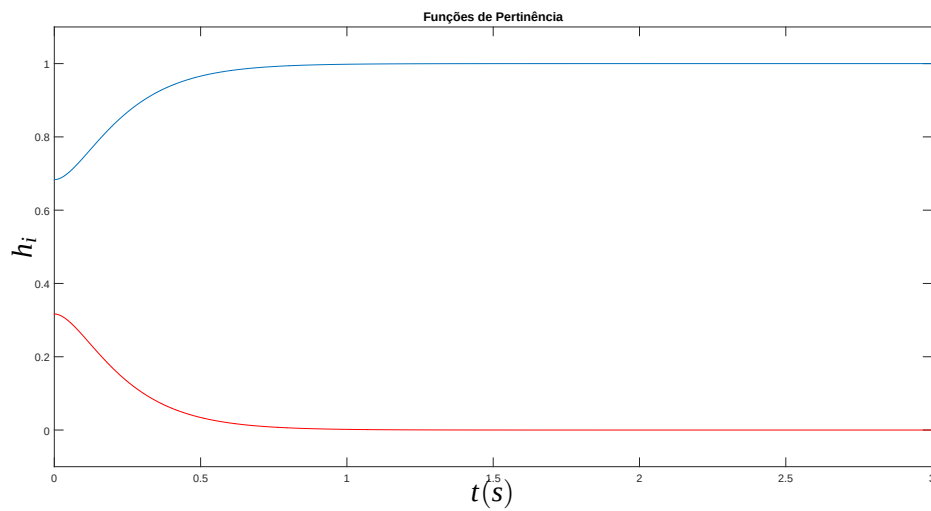
O comportamento dinâmico do sistema para uma posição inicial $x(0) = [-20\pi/180 \quad 0]$ é mostrado nas Figuras 20 - 23.

Figura 20 - Comportamento Dinâmico do Sistema Realimentado com os Ganhos (6.6).



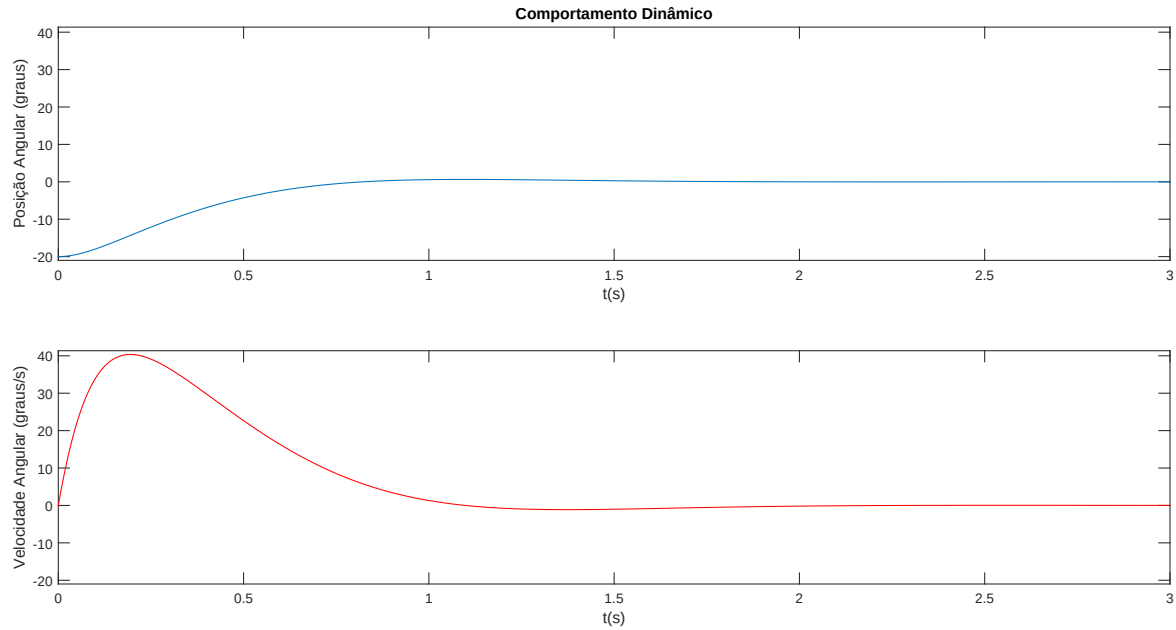
Fonte: O próprio autor.

Figura 21 - Comportamento das Funções de Pertinência do Sistema Realimentado com os Ganhos (6.6).



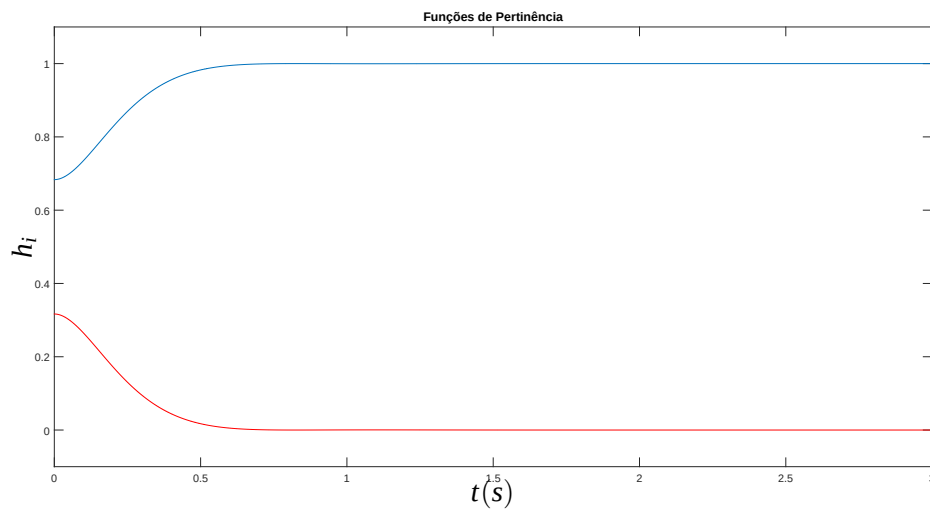
Fonte: O próprio autor.

Figura 22 - Comportamento Dinâmico do Sistema Realimentado com os Ganhos (6.7).



Fonte: O próprio autor.

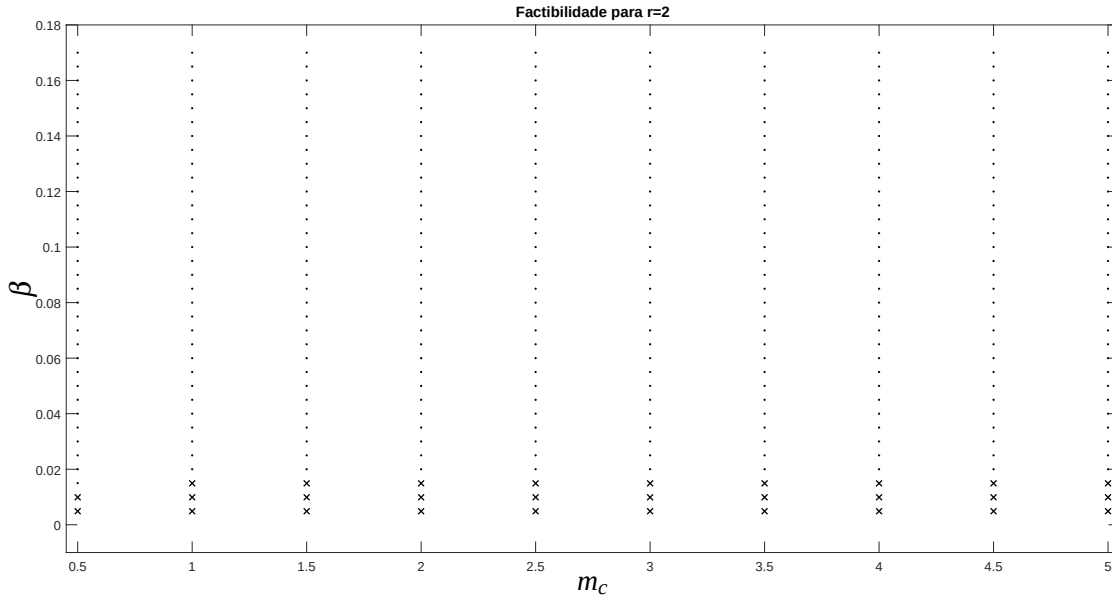
Figura 23 - Comportamento das Funções de Pertinência do Sistema Realimentado com os Ganhos (6.7).



Fonte: O próprio autor.

Variando-se a massa da haste no intervalo $m_c = [0, 5, 5]kg$ e o valor de $\beta = [0, \cos(80\pi/180)]$, foi feita uma varredura para obter-se a região de factibilidade para cada teorema. O resultado está representado na Figura 24.

Figura 24 - Região de Factibilidade, $(\cdot)$ para o Teorema 3 original e $(\cdot, \times)$ para as LMIs adaptadas (5.13)-(5.15) com Região de Operação.



Fonte: O próprio autor.

6.2.3 Comparação com (LIU et al., 2017) - Região de Operação

Assim como no Capítulo 2, a Aplicação 2 leva em conta as LMIs propostas em (LIU et al., 2017). Para aquele caso, foram propostas as alterações a partir do Teorema 1 que resultaram nas LMIs (5.43)-(5.45). Nesse caso, além da manutenção dos limitantes dos $\dot{h}_i$'s, será adicionada a restrição da região de operação, apresentada em (6.1) e os limites superiores e inferiores dos $\dot{h}_i$'s serão os mesmos que os mostrados em (6.5).

Como em (LIU et al., 2017), há apenas uma suposição dos limites dos $\dot{h}_i$'s, foram utilizados os seguintes valores para o Teorema 4:

$$\begin{aligned}
 \max \dot{h}_1 &= 10; \\
 \min \dot{h}_1 &= -5; \\
 \max \dot{h}_2 &= -\min \dot{h}_1; \\
 \min \dot{h}_2 &= -\max \dot{h}_1.
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

As LMIs do Teorema 4 original foram programadas via Matlab utilizando-se do solver

SeDuMi 1.3, e retornaram os seguintes ganhos de realimentação negativa ($u = -K(h)x(t)$):

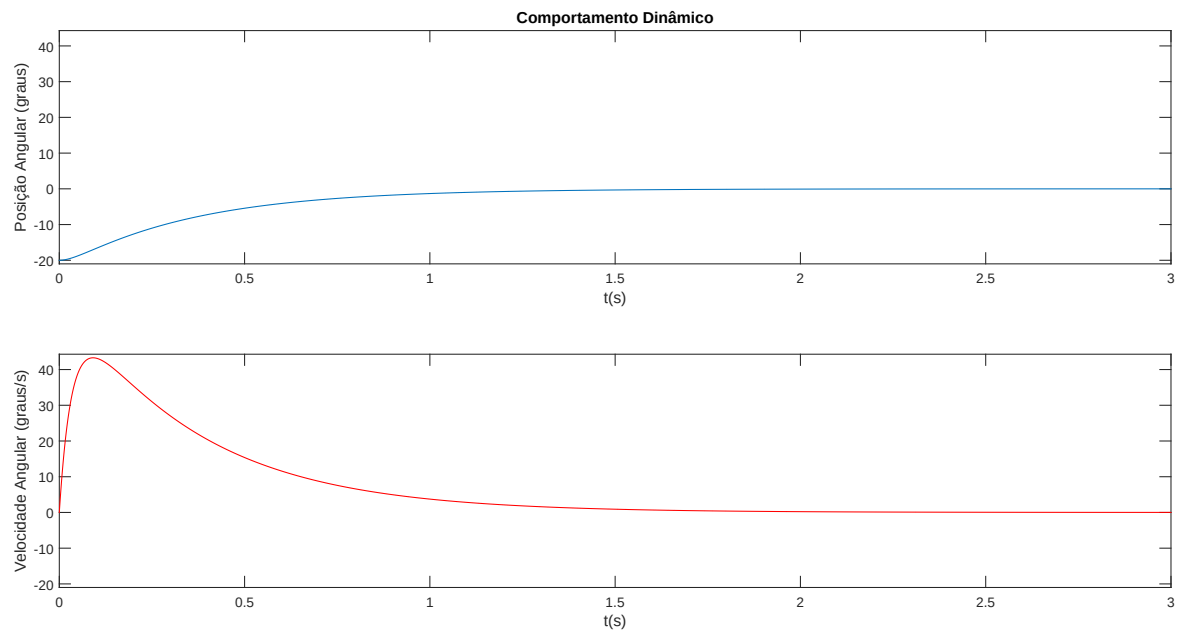
$$\begin{aligned} K_1 &= [-330,3150 \quad -98,1393], \\ K_2 &= [-1,0234 \quad -0,3432] \times 10^3. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Já as LMIs adaptadas do Teorema 4, apresentadas em (5.43)-(5.45), em conjunto com a LMI (6.3), que representa a região de operação utilizada, retornaram os seguintes ganhos para a mesma realimentação negativa:

$$\begin{aligned} K_1 &= [-144,9920 \quad -23,5603], \\ K_2 &= [-551,3927 \quad -141,8436]. \end{aligned} \quad (6.10)$$

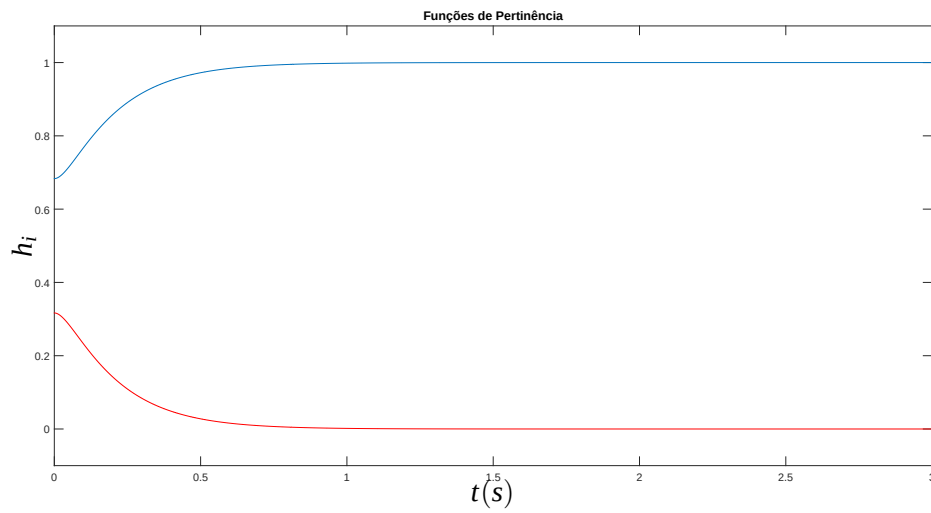
O comportamento dinâmico do sistema para uma posição inicial $x(0) = [-20\pi/180 \quad 0]$ é mostrado nas Figuras 25 - 28.

Figura 25 - Comportamento Dinâmico do Sistema Realimentado com os Ganhos (6.9).



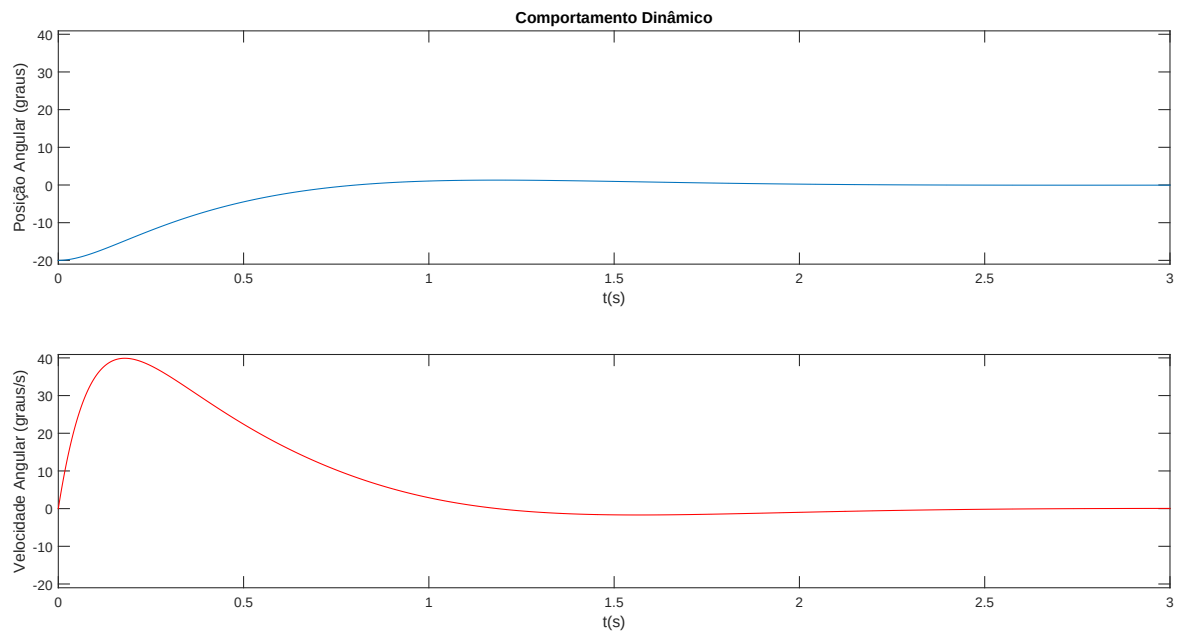
Fonte: O próprio autor.

Figura 26 - Comportamento das Funções de Pertinência do Sistema Realimentado com os Ganhos (6.9).



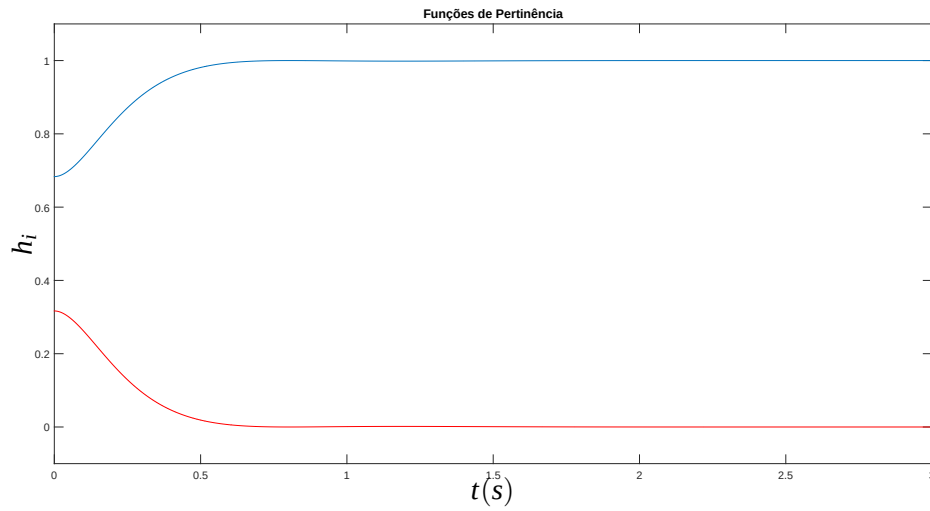
Fonte: O próprio autor.

Figura 27 - Comportamento Dinâmico do Sistema Realimentado com os Ganhos (6.10).



Fonte: O próprio autor.

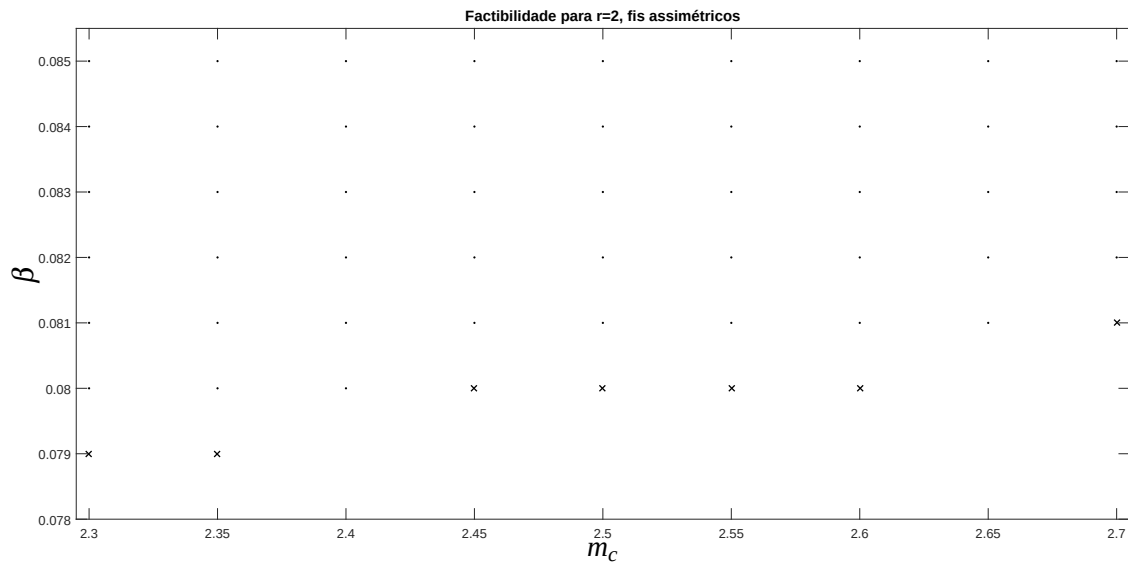
Figura 28 - Comportamento das Funções de Pertinência do Sistema Realimentado com os Ganhos (6.10).



Fonte: O próprio autor.

Variando-se a massa da haste no intervalo $m_c = [2, 3, 2, 7]kg$ e o valor de $\beta = [0,079, 0,085]$, foi feita uma varredura para obter-se a região de factibilidade para cada teorema. O resultado está representado na Figura 29.

Figura 29 - Região de Factibilidade, $(\cdot)$ para o Teorema 4 original e $(\cdot, \times)$ para as LMIs adaptadas (5.13)-(5.15) com Região de Operação.



Fonte: O próprio autor.

7 Novas Condições de Estabilização para Sistemas Fuzzy TS

7.1 Introdução

A fim de utilizar-se melhor todas as informações fornecidas a partir da utilização do algoritmo apresentado no Teorema 1, neste capítulo serão propostas novas abordagens para o projeto de controladores para sistemas não lineares TS baseados nas regras geradas pelo algoritmo.

Considere o sistema TS dado por

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)], \quad (7.1)$$

sendo que $u(t)$ poderá ter vários formatos, como será visto a seguir.

Todas as propostas de projeto de controladores que serão apresentadas para essa classe de sistema são diretamente ligadas à aplicação do algoritmo e, portanto, ao Teorema 1. Será considerado que as todas as condições de existência desses sistemas, representadas por

$$-\phi_{\rho,1} \leq \dot{h}_{\rho} \leq \phi_{\rho,2}, \rho \in \mathbb{K}_r, \quad (7.2)$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r h_i &= 1, \\ \sum_{i=1}^r \dot{h}_i &= 0, \end{aligned} \quad (7.3)$$

são sempre respeitadas.

Também é importante recordar a definição o conjunto:

$$\psi_r = \left\{ \omega = [\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_r]^T \in \mathbb{R}^r / \omega_1 \neq \omega_2 \neq \cdots \neq \omega_r \text{ e } \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r \in \mathbb{K}_r \right\}. \quad (7.4)$$

7.2 Novas Propostas para Estabilidade de Sistemas Fuzzy TS

7.2.1 Utilizando-se um controlador fuzzy $K(h(x(t)))$

Primeiramente, será formalizado o procedimento que gerou as LMIs (5.13) - (5.18)).

Considere a lei de controle a seguir

$$u(t) = -K(h(x(t)))x(t) = -\sum_{j=1}^r h(x(t))_j K_j x(t). \quad (7.5)$$

Portanto, o sistema (7.1) com a lei de controle (7.5) pode ser reescrito como sendo

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(A_i x(t) + B_i u(t)) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j (A_i x(t) - B_i K_j x(t)). \quad (7.6)$$

Teorema 6. *Seja $\mu > 0$ um dado escalar. Considere também que $h(z(t))$ respeita (7.3), e que $-\phi_{\rho,1} \leq \dot{h}_{\rho}(z(t)) \leq \phi_{\rho,2}$ sendo que $-\phi_{\rho,1}$ e $\phi_{\rho,2}$ são constantes reais, e defina $\dot{h}_{\rho}(z(t)) = p_{\rho}$, para todo $\rho \in \mathbb{K}_r$. Então as condições (3.1), (3.2), (3.4) e (3.6) são satisfeitas para $C = 0$. Além disso, suponha que existam matrizes $P_{\rho} = P_{\rho}^T > 0$, defina também $T_{\rho} = x(t)^T P_{\rho} x(t)$, para todo $\rho \in \mathbb{K}_r$. Note que T_{ρ} é positivo para $x(t) \neq 0$, e aplique o Algoritmo 1 para cada ordem decrescente k de $T_1, T_2, \dots, T_r$, sendo $k \in \mathbb{K}_m$ e $m = r!$, para obter-se os pesos do majorante ótimo $p_{k_1}^* = \dot{h}_1^*(z(t))$, $p_{k_2}^* = \dot{h}_2^*(z(t))$, $\dots$, $p_{k_r}^* = \dot{h}_r^*(z(t))$, para $J(p)$ dado em (3.22), representado por $J(p) \leq \sum_{\rho=1}^r p_{k\rho}^* T_{\rho}$, para todo $k \in \mathbb{K}_m$. O sistema (7.1) é estabilizável pelo controlador (7.5), com ganho dado por $K_j = S_j^T R^{-T}$, e também $P_i = R^{-1} \Gamma_i R^{-T}$, se existirem matrizes simétricas Γ_i , e matrizes quaisquer R, S satisfazendo o conjunto de LMIs*

$$\Gamma_i > 0, \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (7.7)$$

$$\Xi_{iik} < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r; k = 1, 2, \dots, m), \quad (7.8)$$

$$\bar{\Xi}_{ijk} < 0 \quad (i < j = 1, 2, \dots, r; k = 1, 2, \dots, m), \quad (7.9)$$

where:

$$\Xi_{ijk} = \begin{bmatrix} \Gamma_k^* - A_i R^T - R A^T + B_i S_j^T + S_j B_i^T & * \\ \Gamma_i - \mu(A_i R^T - B_i S_j^T) + R & \mu(R + R^T) \end{bmatrix}, \quad (7.10)$$

$$\bar{\Xi}_{ijk} = \Xi_{ijk} + \Xi_{jik}, \quad (7.11)$$

$$\Gamma_k^* = \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{k\rho}^* (\Gamma_\rho). \quad (7.12)$$

Demonstração. Considere a candidata a função de Lyapunov, a FLF, descrita por:

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^r h_i x^T(t) P_i x(t), \quad (7.13)$$

sendo $P_i = P_i^T > 0$, para todo $i \in \mathbb{K}_r$.

Observe também, de (7.1), o produto nulo abaixo

$$2[x^T(t)M + \dot{x}^T(t)\mu M] \times \left[\dot{x} - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j (A_i - B_i K_j) x(t) \right] = 0. \quad (7.14)$$

Derivando (7.13) em relação a t , têm-se

$$\dot{V}(x) = 2 \sum_{i=1}^r h_i x^T(t) P_i \dot{x}(t) + x^T(t) \underbrace{\sum_{\rho=1}^r \dot{h}_\rho P_\rho}_{\dot{P}(h)} x(t). \quad (7.15)$$

Usando o Teorema 1 para o processamento do termo (7.15) relacionado ao $\dot{P}(h)$, que pode ser visto como uma função custo de pesos limitados $\dot{h}_i$, para $i \in \mathbb{K}_r$, tem-se que

$$x^T(t) \dot{P}(h) x(t) = \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_\rho x^T(t) P_\rho x(t) \leq \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{k\rho}^* x^T(t) P_\rho x(t) \quad (7.16)$$

em que $\dot{h}_{k\rho}^*$, $k \in \mathbb{K}_m$, $m = r!$, são os pesos ótimos calculados pelo Algoritmo 1 do Teorema 1 para cada caso de ordem decrescente k de $x(t)^T P_i x(t)$, $i \in \mathbb{K}_r$. Para essa aplicação do Teorema 1 e do Algoritmo 1 mencionado anteriormente, defina $h_\rho = \dot{h}_\rho$ e $T_\rho = x(t)^T P_\rho x(t)$, para todo $\rho \in \mathbb{K}_r$. Então, observe que, de (7.15), o termo $x(t)^T \dot{P}(h) x(t)$ é igual a função custo $J(h)$ definida em (3.8). Além disso, a partir das condições propostas pelo Teorema 6, as condições (3.1), (3.2), (3.4) e (3.6) são satisfeitas, para $C = 0$. Portanto, pode-se utilizar os resultados do Algoritmo 1 para obter-se m majorantes ótimos de $J(h)$ para cada ordem decrescente k de $T_1, T_2, \dots, T_r$, em que $k \in \mathbb{K}_m$, e $m = r!$. Agora, para uma ordem decrescente $k \in \mathbb{K}_m$, definindo como em (3.13) os pesos ótimos $h_{k\rho}^* = \dot{h}_{k\rho}^*$, esse majorante

ótimo para $J(h)$ é igual a $\sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{k\rho}^* T_\rho$, como mostrado no final de (7.16). O Teorema 1 que esses pesos são ótimos e o Lema 3.1 assegura que, se considerados todos os m majorantes mencionados, então será equivalente a dizer que $J(h)$ é menor que ou igual ao seu valor máximo.

Agora, adicionando o termo nulo (7.14), de (7.16) tem-se que, para $k \in \mathbb{K}_m$,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq 2 \sum_{i=1}^r h_i x^T(t) P_i \dot{x}(t) + x^T(t) \underbrace{\sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{k\rho}^* P_\rho}_{P_k^*} x(t) + 2[x^T(t)M + \dot{x}^T(t)\mu M] \\ &\times \left[\dot{x} - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j (A_i - B_i K_j) x(t) \right] = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j [2x^T(t)P_i \dot{x}(t) + x^T(t)P_k^* \dot{x}(t) \\ &+ 2x^T(t)M \dot{x}(t) + 2\dot{x}^T(t)\mu M \dot{x}(t) - 2x^T(t)M\{A_i - B_i K_j\}x(t) - 2\dot{x}^T(t)\mu M\{A_i - B_i K_j\}x(t)]. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Utilizando-se do vetor

$$\xi \triangleq [x^T(t) \quad \dot{x}^T(t)]^T, \quad (7.18)$$

(7.17) pode ser reescrita como

$$\dot{V}(x) \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \xi^T \Lambda_{ijk} \xi = \sum_{i=j}^r h_i^2 \xi^T \Lambda_{iik} \xi + \sum_{i < j}^r h_i h_j \xi^T \underbrace{[\Lambda_{ijk} + \Lambda_{jik}]}_{\bar{\Lambda}_{ijk}} \xi, \quad (7.19)$$

sendo

$$\begin{aligned} \Lambda_{ijk} &\triangleq \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \\ \lambda_1 &= P_k^* - M(A_i - B_i K_j) - (A_i - B_i K_j)M^T, \\ \lambda_2 &= P_i - \mu M(A_i - B_i K_j^T) + M^T, \\ \lambda_3 &= \mu(M + M^T). \end{aligned} \quad (7.20)$$

Se $\Lambda_{iik} < 0$ e $\bar{\Lambda}_{ijk} < 0$, o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema controlado (7.1) e (7.5), descrito em (7.6), é assintoticamente estável. Pre e pós-multiplicando Λ_{ijk} e $\bar{\Lambda}_{ijk}$ pelas matrizes não singulares $\text{diag}(M^{-1}, M^{-1})$ e $\text{diag}(M^{-T}, M^{-T})$, respectivamente, e pre e pós-multiplicando (7.7) por M^{-1} e M^{-T} , respectivamente, as seguintes desigualdades são

obtidas:

$$\begin{aligned} M^{-1}P_iM^{-T} &> 0, \\ \Theta_{iik} &< 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r; k = 1, 2, \dots, m), \\ \bar{\Theta}_{ijk} &< 0 \quad (i < j = 1, 2, \dots, r; k = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \quad (7.21)$$

sendo $\bar{\Theta}_{ijk} = \Theta_{ijk} + \Theta_{jik}$ e

$$\begin{aligned} \Theta_{ijk} &\triangleq \begin{bmatrix} \gamma_1 & * \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}, \\ \gamma_1 &= M^{-1}P_k^*M^{-T} - (A_i - B_iK_j)M^{-T} - M^{-1}(A_i - B_iK_j), \\ \gamma_2 &= M^{-1}P_iM^{-T} - \mu(A_i - B_iK_j^T)M^{-T} + M^{-1}, \\ \gamma_3 &= \mu(M^{-1} + M^{-T}). \end{aligned} \quad (7.22)$$

Considere as definições a seguir:

$$R \triangleq M^{-1}, \Gamma_i \triangleq RP_iR^T, \Gamma_k^* \triangleq RP_k^*R^T, S_j \triangleq RK_j^T, \quad (7.23)$$

são obtidas as LMIs (7.7) - (7.9) e se elas forem respeitadas para todo $k \in \mathbb{K}_m$, o ponto $x = 0$ do sistema (7.1) é assintoticamente estável, com ganhos de malha fechada dados por $K_j = S_j^T R^{-T}$, for $j \in \mathbb{K}_r$. $\square$

7.2.2 Utilizando-se um ganho único K

Foi proposta a utilização de um ganho único K robusto, ao invés do conjunto de ganhos $K(h(x(t)))$ adotados nos Teoremas apresentados anteriormente. Essa abordagem é então utilizada no Teorema 7.

Considere a lei de controle a seguir:

$$u(t) = -Kx(t). \quad (7.24)$$

Teorema 7. *Seja $\mu > 0$ um dado escalar. Considere também que $h(z(t))$ respeita (7.3), e que $-\phi_{\rho,1} \leq \dot{h}_{\rho}(z(t)) \leq \phi_{\rho,2}$ sendo que $-\phi_{\rho,1}$ e $\phi_{\rho,2}$ são constantes reais, e defina $\dot{h}_{\rho}(z(t)) = p_{\rho}$, para todo $\rho \in \mathbb{K}_r$. Então as condições (3.1), (3.2), (3.4) e (3.6) são satisfeitas para $C = 0$. Além disso, suponha que existam matrizes $P_{\rho} = P_{\rho}^T > 0$, defina também $T_{\rho} = x(t)^T P_{\rho} x(t)$, para todo $\rho \in \mathbb{K}_r$. Note que T_{ρ} é positivo para $x(t) \neq 0$, e aplique o Algoritmo 1 para cada ordem decrescente k de $T_1, T_2, \dots, T_r$, sendo $k \in \mathbb{K}_m$ e $m = r!$, para obter-se os pesos do majorante ótimo $p_{k_1}^* = \dot{h}_1^*(z(t))$, $p_{k_2}^* = \dot{h}_2^*(z(t))$, $\dots$, $p_{k_r}^* = \dot{h}_r^*(z(t))$, para $J(p)$ dado em (3.22), representado por $J(p) \leq \sum_{\rho=1}^r p_{k\rho}^* T_{\rho}$, para todo $k \in \mathbb{K}_m$. O sistema*

(7.1) é estabilizável pelo controlador (7.24), com ganho dado por $K = S^T R^{-T}$, e também $P_i = R^{-1} \Gamma_i R^{-T}$, se existirem matrizes simétricas Γ_i , e matrizes quaisquer R, S satisfazendo o conjunto de LMIs

$$\Gamma_i = R P_i R^T > 0, \quad (7.25)$$

$$\Xi_{ik} < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (7.26)$$

sendo:

$$\Xi_{ik} = \begin{bmatrix} \Gamma_k - A_i R^T - R A_i^T + B_i S^T + S B_i^T & * \\ \Gamma_i - \mu(A_i R^T - B_i S^T) + R & \mu(R + R^T) \end{bmatrix}, \quad (7.27)$$

$$\Gamma_k^* = \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{k\rho}^* \Gamma_\rho. \quad (7.28)$$

Demonstração. Considere a candidata a função de Lyapunov, a FLF, descrita por:

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^r h_i x^T(t) P_i x(t), \quad (7.29)$$

sendo que as matrizes $P_i = P_i^T > 0$, para todo $i \in \mathbb{K}_r$.

Observe também, de (7.1), o produto nulo abaixo

$$\begin{aligned} & 2[x^T(t)M + \dot{x}^T(t)\mu M] \\ & \times \left[\dot{x} - \sum_{i=1}^r h_i (A_i - B_i K)x(t) \right] = 0. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Derivando (7.29) em relação a t , têm-se

$$\dot{V}(x) = 2 \sum_{i=1}^r h_i x^T(t) P_i \dot{x}(t) + x^T(t) \underbrace{\sum_{\rho=1}^r \dot{h}_\rho P_\rho}_{\dot{P}(h)} x(t). \quad (7.31)$$

Usando-se o Teorema 1 para o processamento $\dot{P}(h)$, que é uma função custo descrita por pesos limitados $\dot{h}_i$, têm-se que

$$x^T(t) \dot{P}(h) x(t) = x^T(t) \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_\rho P_\rho x(t) \leq x^T(t) \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{k\rho}^* P_\rho x(t), \quad \text{para todo } k \in \mathbb{K}_m, \quad (7.32)$$

sendo que $\dot{h}_{k\rho}^*$, $k \in \mathbb{K}_m$, $m = r!$, são os pesos ótimos calculados pelo Algoritmo 1, mencionado no Teorema 1, para cada caso de ordem decrescente de P_i , $i \in \mathbb{K}_r$.

Agora, adicionando-se o termo nulo (7.30),

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &\leq 2 \sum_{i=1}^r h_i x^T(t) P_i \dot{x}(t) + x^T(t) \underbrace{\sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{k\rho}^* P_\rho}_{P_k^*} x(t) + 2[x^T(t)M + \dot{x}^T(t)\mu M] \\
&\times \left[\dot{x} - \sum_{i=1}^r h_i (A_i - B_i K) x(t) \right] = \sum_{i=1}^r h_i [2x^T(t) P_i \dot{x}(t) + x^T(t) P_k^* \dot{x}(t) \\
&+ 2x^T(t) M \dot{x}(t) + 2\dot{x}^T(t) \mu M \dot{x}(t) - 2x^T(t) M \{A_i - B_i K\} x(t) - 2\dot{x}^T(t) \mu M \{A_i - B_i K\} x(t)].
\end{aligned} \tag{7.33}$$

Utilizando-se do vetor

$$\xi \triangleq [x^T(t) \ \dot{x}^T(t)]^T, \tag{7.34}$$

(7.33) pode ser reescrita como sendo

$$\dot{V}(x) \leq \sum_{i=1}^r h_i \xi^T \Lambda_{ik} \xi \tag{7.35}$$

sendo que

$$\begin{aligned}
\Lambda_{ik} &\triangleq \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \\
\lambda_1 &= P_k^* - M(A_i - B_i K) - (A_i - B_i K)M^T, \\
\lambda_2 &= P_i - \mu M(A_i - B_i K) + M^T, \\
\lambda_3 &= \mu(M + M^T).
\end{aligned} \tag{7.36}$$

Se $\Lambda_{ik} < 0$, para todo $i \in \mathbb{K}_r$ e $k \in \mathbb{K}_m$, o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema (7.1) é assintoticamente estável. Pré e pós multiplicando Λ_{ik} pelas matrizes não singulares $\text{diag}(M^{-1}, M^{-1})$ e $\text{diag}(M^{-T}, M^{-T})$, respectivamente, e pré e pós multiplicando (7.25) por M^{-1} e M^{-T} , respectivamente, as desigualdades a seguir são obtidas:

$$\begin{aligned}
M^{-1} P_i M^{-T} &> 0, \\
\Theta_{ik} &< 0 \ (i = 1, 2, \dots, r), \ (k = 1, 2, \dots, m),
\end{aligned} \tag{7.37}$$

sendo

$$\begin{aligned}\Theta_{ik} &\triangleq \begin{bmatrix} \gamma_1 & * \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}, \\ \gamma_1 &= M^{-1}P_k^*M^{-T} - (A_i - B_iK)M^{-T} - M^{-1}(A_i - B_iK), \\ \gamma_2 &= M^{-1}P_iM^{-T} - \mu(A_i - B_iK)M^{-T} + M^{-1}, \\ \gamma_3 &= \mu(M^{-1} + M^{-T}).\end{aligned}\tag{7.38}$$

Considerando as definições a seguir:

$$R \triangleq M^{-1}, \Gamma_i \triangleq RP_iR^T, \Gamma_k^* \triangleq RP_k^*R^T, S \triangleq RK^T,\tag{7.39}$$

são obtidas as LMIs (7.25) - (7.26), e se elas forem respeitadas para todo $k \in \mathbb{K}_m$, o ponto $x = 0$ do sistema (7.1) é assintoticamente estável, com ganhos de malha fechada dados por $K = S^T R^{-T}$. $\square$

7.2.3 Utilizando-se um ganho chaveado K_σ

O algoritmo apresentado no Teorema 1 retorna para o usuário até $r!$, sendo r o número de regras que descrevem o sistema não linear TS, possibilidades de combinação de pesos para cada $\dot{h}_{\omega_i}P_{\omega_i}$. Sendo assim, é possível associar um ganho K para cada uma dessas combinações geradas, que acaba resultando em um conjunto de LMIs.

Portanto, colocando um índice em cada uma dessas possibilidades e o chamando de σ , é possível associar um ganho do controlador a cada um dessas ordens decrescentes. Considere então a seguinte lei de controle.

$$u(t) = -K_\sigma x(t),\tag{7.40}$$

sendo que $\sigma(t) \in \mathbb{K}_m, m = r!$ é o índice da ordem decrescente que está sendo respeitada no instante t .

Teorema 8. *Seja $\mu > 0$ um dado escalar. Considere também que $h(z(t))$ respeita (7.3), e que $-\phi_{\rho,1} \leq \dot{h}_\rho(z(t)) \leq \phi_{\rho,2}$ sendo que $-\phi_{\rho,1}$ e $\phi_{\rho,2}$ são constantes reais, e defina $\dot{h}_\rho(z(t)) = p_\rho$, para todo $\rho \in \mathbb{K}_r$. Então as condições (3.1), (3.2), (3.4) e (3.6) são satisfeitas para $C = 0$. Além disso, suponha que existam matrizes $P_\rho = P_\rho^T > 0$, defina também $T_\rho = x(t)^T P_\rho x(t)$, para todo $\rho \in \mathbb{K}_r$. Note que T_ρ é positivo para $x(t) \neq 0$, e aplique o Algoritmo 1 para cada ordem decrescente k de $T_1, T_2, \dots, T_r$, sendo $k \in \mathbb{K}_m$ e $m = r!$, para obter-se os pesos do majorante ótimo $p_{k_1}^* = \dot{h}_1^*(z(t))$, $p_{k_2}^* = \dot{h}_2^*(z(t))$, $\dots$, $p_{k_r}^* = \dot{h}_r^*(z(t))$, para $J(p)$ dado em (3.22), representado por $J(p) \leq \sum_{\rho=1}^r p_{k\rho}^* T_\rho$, para todo $k \in \mathbb{K}_m$. O sistema (7.1)*

é estabilizável pelo controlador chaveado (7.40), com ganhos dados por $K_\sigma = S_\sigma^T R^{-T}$, e também $P_i = R^{-1} \Gamma_i R^{-T}$, se existirem matrizes simétricas Γ_i , e matrizes quaisquer R, S_σ satisfazendo o conjunto de LMIs

$$\Gamma_i = R P_i R^T > 0, \quad (7.41)$$

$$\Xi_{i\sigma} < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m), \quad (7.42)$$

sendo:

$$\Xi_{i\sigma} = \begin{bmatrix} \Gamma_\sigma^* - A_i R^T - R A_i^T + B_i S_\sigma^T + S_\sigma B_i^T & * \\ \Gamma_i - \mu(A_i R^T - B_i S_\sigma^T) + R & \mu(R + R^T) \end{bmatrix}, \quad (7.43)$$

$$\Gamma_\sigma^* = \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{\sigma\rho}^* \Gamma_\rho. \quad (7.44)$$

Demonstração. Considere a candidata a função de Lyapunov, a FLF, descrita por:

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^r h_i x^T(t) P_i x(t), \quad (7.45)$$

sendo que as matrizes $P_i = P_i^T > 0$, para todo $i \in \mathbb{K}_r$.

Observe também, de (7.1), o produto nulo abaixo

$$2[x^T(t)M + \dot{x}^T(t)\mu M] \times \left[\dot{x} - \sum_{i=1}^r h_i (A_i - B_i K)x(t) \right] = 0. \quad (7.46)$$

Derivando (7.45) em relação a t , têm-se

$$\dot{V}(x) = 2 \sum_{i=1}^r h_i x^T(t) P_i \dot{x}(t) + x^T(t) \underbrace{\sum_{\rho=1}^r \dot{h}_\rho P_\rho}_{\dot{P}(h)} x(t). \quad (7.47)$$

Utilizando-se do Teorema 1 para o processamento $\dot{P}(h)$, que é uma função custo descrita por pesos limitados $\dot{h}_i$, têm-se que

$$x^T(t) \dot{P}(h) x(t) = x^T(t) \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_\rho P_\rho x(t) \leq x^T(t) \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{\sigma\rho}^* P_\rho x(t), \quad \text{para todo } \sigma \in \mathbb{K}_m, \quad (7.48)$$

sendo que $\dot{h}_{\sigma\rho}^*$, $k \in \mathbb{K}_m$, $m = r!$, os pesos ótimos calculados pelo Algoritmo 1 para cada caso σ de ordem decrescente de P_i , $i \in \mathbb{K}_r$.

Neste passo, é importante entender que o Algoritmo retornará m possibilidades de limitantes para função custo apresentada em (7.48). Portanto é possível associar o índice σ ao controlador que será projetado através das LMIs que serão apresentadas a seguir. Dessa maneira, durante a operação do sistema, serão chaveados m controladores K_σ , dependendo de qual ordem decrescente de $x^T P_i x$, $i \in \mathbb{K}_r$, está sendo respeitada.

Agora, adicionando-se o termo nulo (7.46),

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &\leq 2 \sum_{i=1}^r h_i x^T(t) P_i \dot{x}(t) + x^T(t) \underbrace{\sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{\sigma\rho}^* P_\rho}_{P_\sigma^*} x(t) + 2[x^T(t)M + \dot{x}^T(t)\mu M] \\ &\times \left[\dot{x} - \sum_{i=1}^r h_i (A_i - B_i K) x(t) \right] = \sum_{i=1}^r h_i [2x^T(t) P_i \dot{x}(t) + x^T(t) P_\sigma^* \dot{x}(t) \\ &+ 2x^T(t) M \dot{x}(t) + 2\dot{x}^T(t) \mu M \dot{x}(t) - 2x^T(t) M \{A_i - B_i K_\sigma\} x(t) - 2\dot{x}^T(t) \mu M \{A_i - B_i K_\sigma\} x(t)]. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Utilizando-se do vetor

$$\xi \triangleq [x^T(t) \ \dot{x}^T(t)]^T, \quad (7.50)$$

(7.49) pode ser reescrita como sendo

$$\dot{V}(x) \leq \sum_{i=1}^r h_i \xi^T \Lambda_{i\sigma} \xi \quad (7.51)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \Lambda_{i\sigma} &\triangleq \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \\ \lambda_1 &= P_\sigma^* - M(A_i - B_i K_\sigma) - (A_i - B_i K_\sigma)M^T, \\ \lambda_2 &= P_i - \mu M(A_i - B_i K_\sigma) + M^T, \\ \lambda_3 &= \mu(M + M^T). \end{aligned} \quad (7.52)$$

Se $\Lambda_{i\sigma} < 0$, para todo $i \in \mathbb{K}_r$ e $\sigma \in \mathbb{K}_m$ o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema (7.1) é assintoticamente estável. Pré e pós multiplicando $\Lambda_{i\sigma}$ pelas matrizes não singulares $\text{diag}(M^{-1}, M^{-1})$ e $\text{diag}(M^{-T}, M^{-T})$, respectivamente, e pré e pós multiplicando (7.41) por

M^{-1} e M^{-T} , respectivamente, as desigualdades a seguir são obtidas:

$$\begin{aligned} M^{-1}P_iM^{-t} &> 0, \\ \Theta_{i\sigma} &< 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m), \end{aligned} \quad (7.53)$$

sendo

$$\begin{aligned} \Theta_{i\sigma} &\triangleq \begin{bmatrix} \gamma_1 & * \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}, \\ \gamma_1 &= M^{-1}P_\sigma^*M^{-T} - (A_i - B_iK_\sigma)M^{-T} - M^{-1}(A_i - B_iK_\sigma), \\ \gamma_2 &= M^{-1}P_iM^{-T} - \mu(A_i - B_iK_\sigma)M^{-T} + M^{-1}, \\ \gamma_3 &= \mu(M^{-1} + M^{-T}). \end{aligned} \quad (7.54)$$

Considerando as definições a seguir:

$$R \triangleq M^{-1}, \quad \Gamma_i \triangleq RP_iR^T, \quad \Gamma_\sigma^* \triangleq RP_\sigma^*R^T, \quad S_\sigma \triangleq RK_\sigma^T, \quad (7.55)$$

são obtidas as LMIs (7.41) - (7.42), e se elas forem respeitadas para todo $\sigma \in \mathbb{K}_m$, o ponto $x = 0$ do sistema (7.1) é assintoticamente estável, com ganhos de malha fechada dados por $K_\sigma = S_\sigma^T R^{-T}$, $\sigma \in \mathbb{K}_m$. $\square$

Dessa maneira, é possível criar uma lei de chaveamento que define em qual modelo formado pelo algoritmo apresentado no Teorema 1 o sistema está no momento e utilizar o ganho K projetado especificamente para esse modelo.

Exemplo: Para $r=3$, o algoritmo fornece 6 possibilidades:

Caso 1: $x(t)^T P_3 x(t) \geq x(t)^T P_2 x(t) \geq x(t)^T P_1 x(t)$;

Caso 2: $x(t)^T P_3 x(t) \geq x(t)^T P_1 x(t) \geq x(t)^T P_2 x(t)$;

Caso 3: $x(t)^T P_2 x(t) \geq x(t)^T P_3 x(t) \geq x(t)^T P_1 x(t)$;

Caso 4: $x(t)^T P_2 x(t) \geq x(t)^T P_1 x(t) \geq x(t)^T P_3 x(t)$;

Caso 5: $x(t)^T P_1 x(t) \geq x(t)^T P_3 x(t) \geq x(t)^T P_2 x(t)$;

Caso 6: $x(t)^T P_1 x(t) \geq x(t)^T P_2 x(t) \geq x(t)^T P_3 x(t)$.

Assim, pode-se dizer que o Caso 1 produz o índice 1 em K_σ , o Caso 2 produz o índice 2 em K_σ , e assim por diante até o Caso 6.

7.2.4 Utilizando-se um conjunto de ganhos chaveados $K_{\sigma}(h(t))$

Ainda utilizando-se os modelos gerados pelo algoritmo apresentado no Teorema 1, é possível projetar não apenas um K_{σ} para cada modelo, mas também um conjunto de $K_{(\sigma,i)}$'s para realimentação de um controlador fuzzy descrito por

$$u(t) = -K_{\sigma}(h(x(t)))x(t) = -\sum_{j=1}^r h_j K_{(\sigma,j)} x(t), \quad (7.56)$$

sendo σ o índice de cada modelo gerado pelo algoritmo, como exemplificado na abordagem anterior.

Teorema 9. *Seja $\mu > 0$ um dado escalar. Considere também que $h(z(t))$ respeita (7.3), e que $-\phi_{\rho,1} \leq \dot{h}_{\rho}(z(t)) \leq \phi_{\rho,2}$ sendo que $-\phi_{\rho,1}$ e $\phi_{\rho,2}$ são constantes reais, e defina $\dot{h}_{\rho}(z(t)) = p_{\rho}$, para todo $\rho \in \mathbb{K}_r$. Então as condições (3.1), (3.2), (3.4) e (3.6) são satisfeitas para $C = 0$. Além disso, suponha que existam matrizes $P_{\rho} = P_{\rho}^T > 0$, defina também $T_{\rho} = x(t)^T P_{\rho} x(t)$, para todo $\rho \in \mathbb{K}_r$. Note que T_{ρ} é positivo para $x(t) \neq 0$, e aplique o Algoritmo 1 para cada ordem decrescente k de $T_1, T_2, \dots, T_r$, sendo $k \in \mathbb{K}_m$ e $m = r!$, para obter-se os pesos do majorante ótimo $p_{k_1}^* = \dot{h}_1^*(z(t))$, $p_{k_2}^* = \dot{h}_2^*(z(t))$, $\dots$, $p_{k_r}^* = \dot{h}_r^*(z(t))$, para $J(p)$ dado em (3.22), representado por $J(p) \leq \sum_{\rho=1}^r p_{k\rho}^* T_{\rho}$, para todo $k \in \mathbb{K}_m$. O sistema (7.1) é estabilizável pelo controlador formado pelos conjuntos de ganhos chaveados (7.56), com ganhos dados por $K_{(\sigma,j)} = S_{\sigma j}^T R^{-T}$, e também $P_i = R^{-1} \Gamma_i R^{-T}$, se existirem matrizes simétricas Γ_i , e matrizes quaisquer $R, S_{\sigma j}$ satisfazendo o conjunto de LMIs*

$$\Gamma_i > 0, \quad (7.57)$$

$$\Xi_{ii\sigma} < 0 (i = 1, 2, \dots, r), \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m), \quad (7.58)$$

$$\bar{\Xi}_{ij\sigma} < 0 (i < j = 1, 2, \dots, r), \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m), \quad (7.59)$$

sendo:

$$\Xi_{ij\sigma} = \begin{bmatrix} \Gamma_{\sigma}^* - A_i R^T - R A^T + B_i S_{\sigma j}^T + S_{\sigma j} B_i^T & * \\ \Gamma_i - \mu(A_i R^T - B_i S_{\sigma j}^T) + R & \mu(R + R^T) \end{bmatrix}, \quad (7.60)$$

$$\bar{\Xi}_{ij\sigma} = \Xi_{ij\sigma} + \Xi_{ji\sigma}, \quad (7.61)$$

$$\Gamma_{\sigma}^* = \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{\sigma\rho}^* \Gamma_{\rho}. \quad (7.62)$$

Demonstração. Considere a candidata a função de Lyapunov, a FLF, descrita por:

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^r h_i x^T(t) P_i x(t), \quad (7.63)$$

sendo que as matrizes $P_i = P_i^T > 0$, para todo $i \in \mathbb{K}_r$.

Observe também, de (7.1), o produto nulo abaixo

$$\begin{aligned} & 2[x^T(t)M + \dot{x}^T(t)\mu M] \\ & \times \left[\dot{x} - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j (A_i - B_i K_j) x(t) \right] = 0. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Derivando (7.63) em relação a t , têm-se

$$\dot{V}(x) = 2 \sum_{i=1}^r h_i x^T(t) P_i \dot{x}(t) + x^T(t) \underbrace{\sum_{\rho=1}^r \dot{h}_\rho P_\rho}_{\dot{P}(h)} x(t). \quad (7.65)$$

Usando-se o Teorema 1 para o processamento $\dot{P}(h)$, que é uma função custo descrita por pesos limitados $\dot{h}_i$, têm-se que

$$x^T(t) \dot{P}(h) x(t) = x^T(t) \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_\rho P_\rho x(t) \leq x^T(t) \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{\sigma\rho}^* P_\rho x(t), \text{ para todo } \sigma \in \mathbb{K}_m, \quad (7.66)$$

sendo que $\dot{h}_{\sigma\rho}^*$, $k \in \mathbb{K}_m$, $m = r!$, são os pesos ótimos calculados pelo Algoritmo 1, mencionado Teorema 1 para cada caso σ de ordem decrescente de P_i , $i \in \mathbb{K}_r$.

Neste passo, é importante entender que o Algoritmo retornará m possibilidades de limitantes para função custo apresentada em (7.66). Portanto é possível associar o índice σ ao controlador que será projetado através das LMIs que serão apresentadas a seguir. Dessa maneira, durante a operação do sistema, serão chaveados m conjuntos de controladores $K_{\sigma j}$, dependendo de qual ordem decrescente de $x(t)^T P_i x(t)$, $i \in \mathbb{K}_r$, está sendo respeitada. Portanto, não será apenas projetado um controlador para cada modelo local do sistema fuzzy TS, mas sim um controlador para cada modelo local de cada possibilidade retornada para o algoritmo, proporcionando assim $m \times r = r! \times r$ ganhos para os controladores.

Agora, adicionando-se o termo nulo (7.64),

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &\leq 2 \sum_{i=1}^r h_i x^T(t) P_i \dot{x}(t) + x^T(t) \underbrace{\sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{\sigma\rho}^* P_\rho}_{P_\sigma^*} x(t) + 2[x^T(t)M + \dot{x}^T(t)\mu M] \\
&\times \left[\dot{x} - \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j (A_i - B_i K_j) x(t) \right] = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j [2x^T(t)P_i \dot{x}(t) + x^T(t)P_\sigma^* \dot{x}(t) \\
&+ 2x^T(t)M \dot{x}(t) + 2\dot{x}^T(t)\mu M \dot{x}(t) - 2x^T(t)M\{A_i - B_i K_{\sigma j}\}x(t) - 2\dot{x}^T(t)\mu M\{A_i - B_i K_{\sigma j}\}x(t)].
\end{aligned} \tag{7.67}$$

Utilizando-se do vetor

$$\xi \triangleq [x^T(t) \ \dot{x}^T(t)]^T, \tag{7.68}$$

(7.67) pode ser reescrita como sendo

$$\dot{V}(x) \leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \xi^T \Lambda_{ij\sigma} \xi = \sum_{i=j}^r h_i^2 \xi^T \Lambda_{ii\sigma} \xi + \sum_{i < j}^r h_i h_j \xi^T \underbrace{[\Lambda_{ij\sigma} + \Lambda_{ji\sigma}]}_{\bar{\Lambda}_{ij\sigma}} \xi, \tag{7.69}$$

sendo que

$$\begin{aligned}
\Lambda_{ij\sigma} &\triangleq \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \\
\lambda_1 &= P_\sigma^* - M(A_i - B_i K_{\sigma j}) - (A_i - B_i K_{\sigma j})M^T, \\
\lambda_2 &= P_i - \mu M(A_i - B_i K_{\sigma j}) + M^T, \\
\lambda_3 &= \mu(M + M^T).
\end{aligned} \tag{7.70}$$

Se $\Lambda_{iik} < 0$ e $\bar{\Lambda}_{ijk} < 0$, para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$ e $k \in \mathbb{K}_m$, o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema (7.1) é assintoticamente estável. Pré e pós multiplicando Λ_{ijk} e $\bar{\Lambda}_{ijk}$ pelas matrizes não singulares $\text{diag}(M^{-1}, M^{-1})$ e $\text{diag}(M^{-T}, M^{-T})$, respectivamente, e pré e pós multiplicando (7.57) por M^{-1} e M^{-T} , respectivamente, as desigualdades a seguir são obtidas:

$$\begin{aligned}
M^{-1}P_i M^{-t} &> 0, \\
\Theta_{ii\sigma} &< 0 \ (i = 1, 2, \dots, r), \ (\sigma = 1, 2, \dots, m), \\
\bar{\Theta}_{ij\sigma} &< 0 \ (i < j = 1, 2, \dots, r), \ (\sigma = 1, 2, \dots, m)
\end{aligned} \tag{7.71}$$

sendo $\bar{\Theta}_{ijk\sigma} = \Theta_{ij\sigma} + \Theta_{ji\sigma}$ e

$$\begin{aligned}\Theta_{ij\sigma} &\triangleq \begin{bmatrix} \gamma_1 & * \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}, \\ \gamma_1 &= M^{-1}P_{\sigma}^*M^{-T} - (A_i - B_iK_{\sigma j})M^{-T} - M^{-1}(A_i - B_iK_{\sigma j}), \\ \gamma_2 &= M^{-1}P_iM^{-T} - \mu(A_i - B_iK_{\sigma j})M^{-T} + M^{-1}, \\ \gamma_3 &= \mu(M^{-1} + M^{-T}).\end{aligned}\tag{7.72}$$

Considerando as definições a seguir:

$$R \triangleq M^{-1}, \Gamma_i \triangleq RP_iR^T, \Gamma_{\sigma}^* \triangleq RP_{\sigma}^*R^T, S_{\sigma j} \triangleq RK_{\sigma j}^T,\tag{7.73}$$

são obtidas as LMIs (7.57) - (7.59), e se elas forem respeitadas para todo $\sigma \in \mathbb{K}_m$, o ponto $x=0$ do sistema (7.1) é assintoticamente estável, com ganhos de malha fechada dados por $K_{\sigma j} = S_{\sigma j}^T R^{-T}$, $\sigma \in \mathbb{K}_m$, $j \in \mathbb{K}_r$. $\square$

7.2.5 Resultados Comparativos

Nesta seção, serão comparados todos os tipos de controladores propostos até agora baseados no algoritmo do Teorema 1 e no Teorema 3 puro, ou seja,

- K único (Teorema 7);
- K_{σ} , em função de cada modelo apresentado pelo Algoritmo 1 (Teorema 8);
- $K(h(x(t)))_1$, apresentado no Teorema 3;
- $K(h(x(t)))_2$, com o controlador fuzzy clássico, utilizando o Teorema 1 no processamento do termo $\dot{P}(h(x(t)))$ (Teorema 6);
- $K_{\sigma}(h(t))$, com um conjunto de ganhos em função de cada modelo apresentado pelo Algoritmo 1 (Teorema 9);

- Para $r = 2$

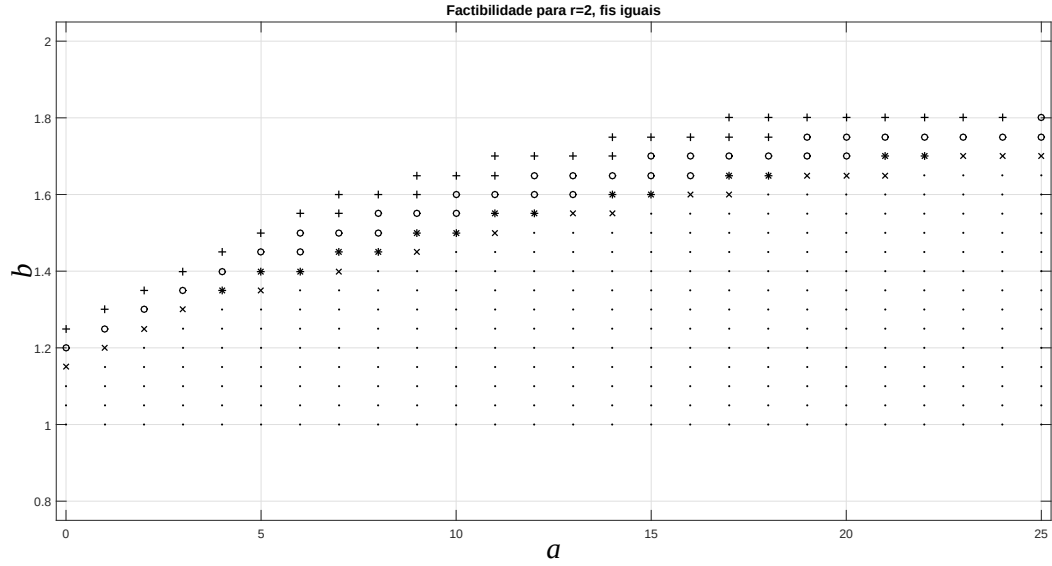
Considere o sistema não linear TS apresentado em (MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3,6 & -1,6 \\ 6,2 & -4,3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -a & -1,6 \\ 6,2 & -4,3 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -0,45 \\ -3 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -b \\ -3 \end{bmatrix}.$$

- Com intervalos iguais de $\dot{h}_i$:

Considerando $\phi = 1$ e variando-se os parâmetros a e b entre $[0; 25]$ e $[1; 1, 8]$, respectivamente, e utilizando-se do solver Sedumi, foi obtida a seguinte região de factibilidade:

Figura 30 - Região de factibilidade comparativa para $r = 2$ e intervalos iguais de $\dot{h}_i$.



Fonte: O próprio autor.

Na Figura 30, as regiões de factibilidade são representadas da seguinte maneira:

→ $\cdot$ para K único;

→ $\cdot, \times$ para K_σ ;

→ $\cdot, \times, *$ para $K(h(x(t)))_1$;

→ $\cdot, \times, *, \circ$ para $K(h(x(t)))_2$;

→ $\cdot, \times, *, \circ, +$ para $K_\sigma(h(x(t)))$;

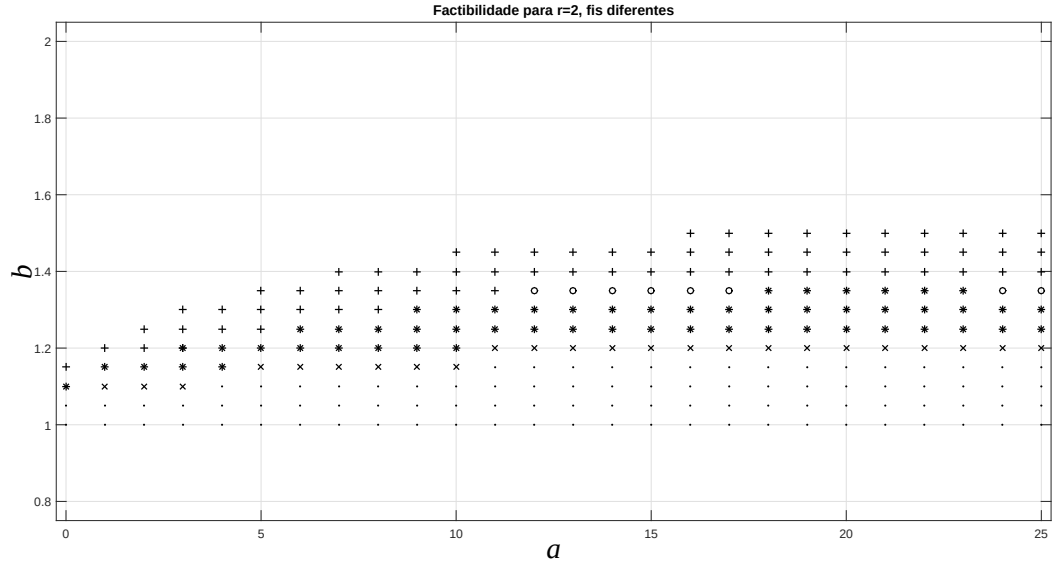
● Com intervalos diferentes de $\dot{h}_i$:

Considerando os seguintes intervalos para $\dot{h}_i$:

$$\begin{aligned} -5 &\leq \dot{h}_1 \leq 3; \\ -3 &\leq \dot{h}_2 \leq 5, \end{aligned} \tag{7.74}$$

e variando-se os parâmetros a e b entre $[0; 25]$ e $[1; 1, 8]$, respectivamente, e utilizando-se do solver Sedumi, foi obtida a seguinte região de factibilidade:

Figura 31 - Região de factibilidade comparativa para $r = 2$ e intervalos diferentes de $\dot{h}_i$.



Fonte: O próprio autor.

Na Figura 31, as regiões de factibilidade são representadas da seguinte maneira:

→ $\cdot$ para $K(h(x(t)))_1$;

→ $\cdot, \times$ para K único;

→ $\cdot, \times, *$ para $K(h(x(t)))_2$;

→ $\cdot, \times, *, o$ para K_σ ;

→ $\cdot, \times, *, o, +$ para $K_\sigma(h(x(t)))$;

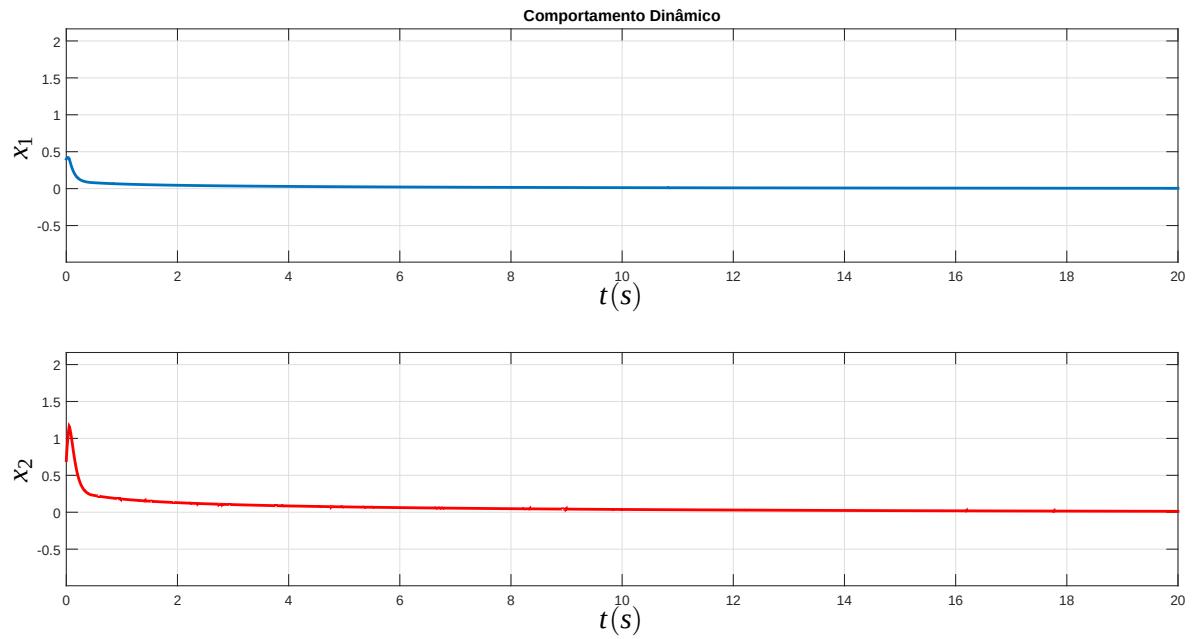
Ainda para esses intervalos de $\dot{h}_i$, foi simulada a dinâmica do sistema para os últimos pontos de factibilidade de K_σ e de $K_\sigma(h(t))$, a fim de verificar-se se eles realmente representavam pontos em que o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema controlado é assintoticamente estável e se os controladores realmente trocavam seus índices em função da evolução das variáveis de estado com o decorrer do tempo.

Utilizando-se o solver Sedumi, com os parâmetros a e b valendo 12 e 1,35, respectivamente, foram obtidos os seguintes ganhos de realimentação negativa ($u = -K_\sigma x(t)$):

$$\begin{aligned} K_1 &= [22, 1931 \quad -5, 8632], \\ K_2 &= [22, 7399 \quad -7, 6675]. \end{aligned} \tag{7.75}$$

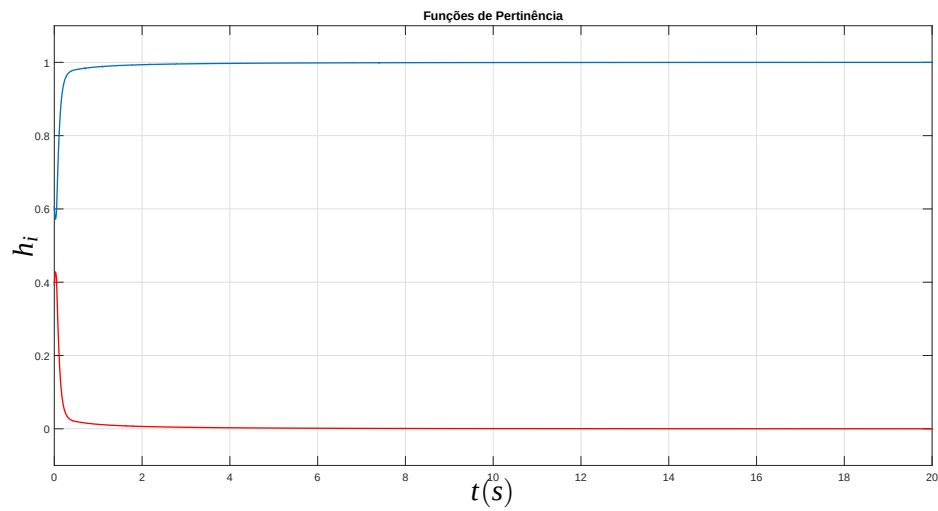
A resposta dinâmica do sistema para o ponto inicial $x(0) = [0,4, 0,7]^T$, escolhido de maneira arbitrária, está representada nas figuras abaixo.

Figura 32 - Comportamento Dinâmico do Sistema Realimentado com os Ganhos (7.75).



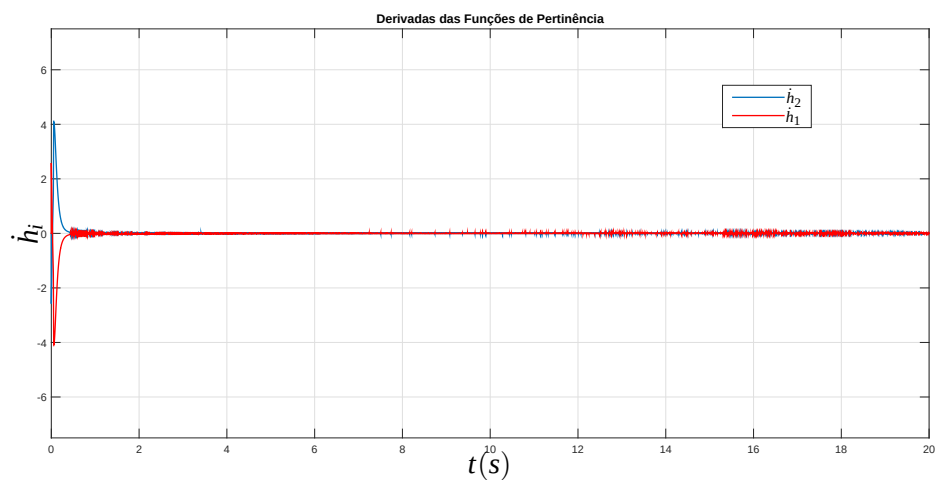
Fonte: O próprio autor.

Figura 33 - Comportamento das Funções de Pertinência do Sistema Realimentado com os Ganhos (7.75).



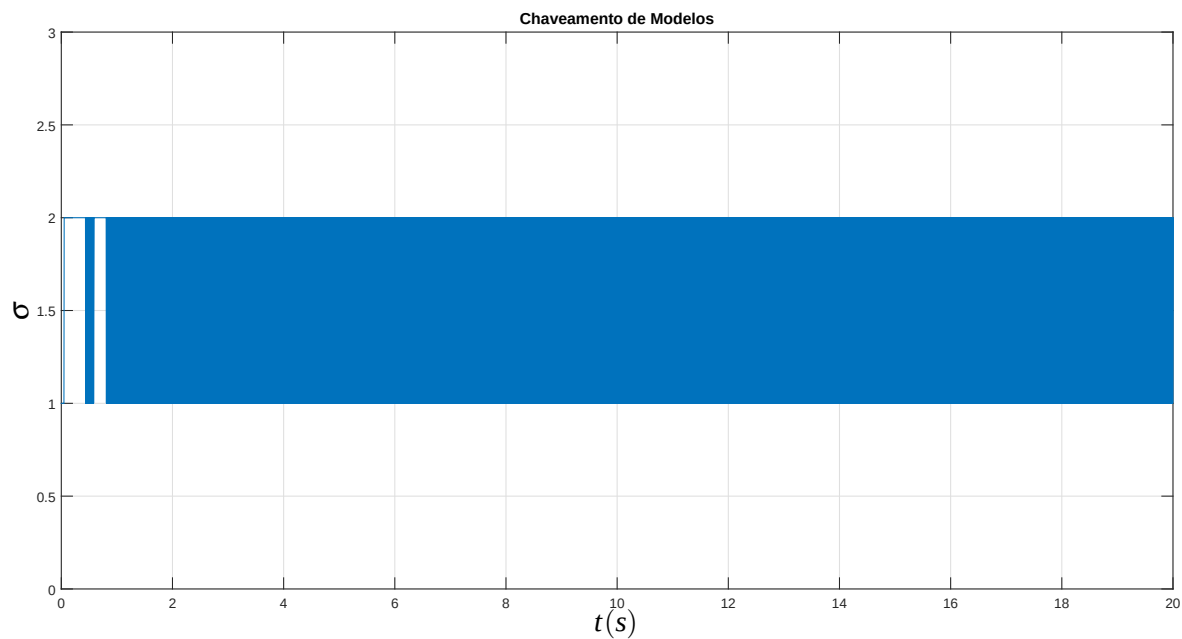
Fonte: O próprio autor.

Figura 34 - Comportamento das Derivadas das Funções de Pertinência do Sistema Realimentado com os Ganhos (7.75).



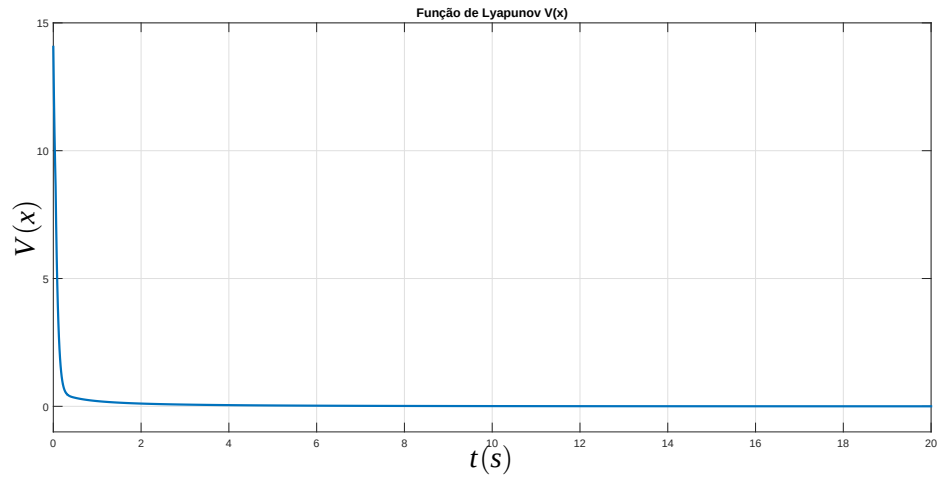
Fonte: O próprio autor.

Figura 35 - Chaveamento de Índices do Controlador K_σ para o Sistema Realimentado com os Ganhos (7.75).



Fonte: O próprio autor.

Figura 36 - Comportamento da Função de Lyapunov do Sistema Realimentado com os Ganhos (7.75).



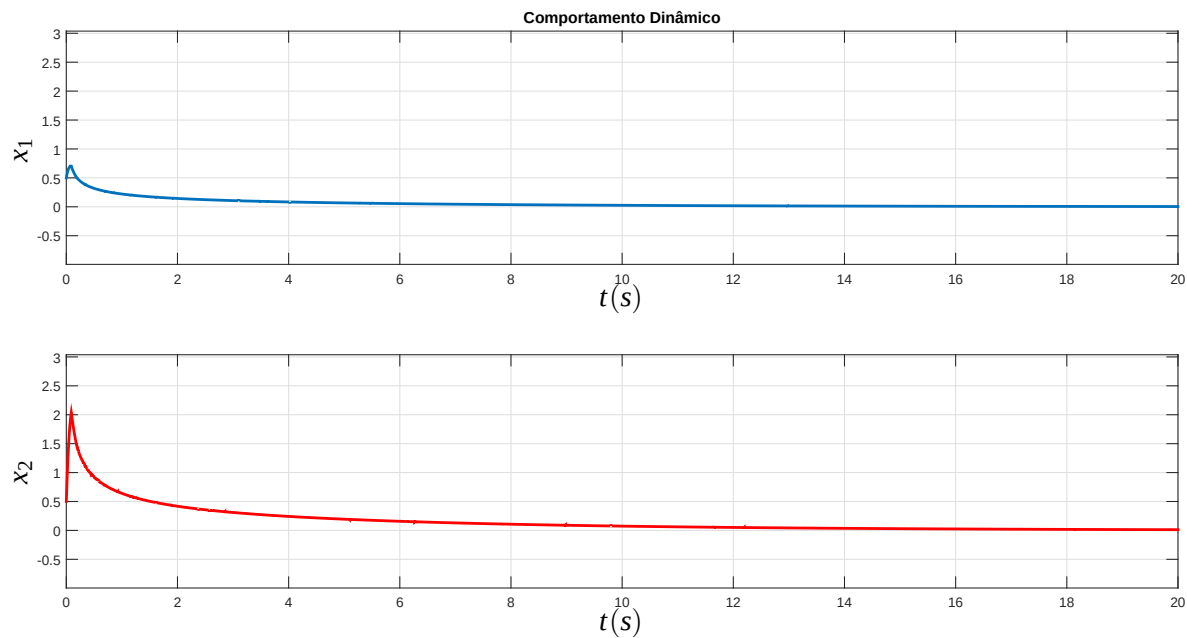
Fonte: O próprio autor.

Para a realimentação negativa utilizando-se o conjunto de ganhos chaveados $K_{\sigma}(h(x(t)))$, foi utilizado também o solver Sedumi, porém agora com os parâmetros a e b valendo 16 e 1,5, respectivamente, Assim, foram obtidos os ganhos:

$$\begin{aligned}
 K_{1,1} &= [27,8311 \quad -7,4895], \\
 K_{1,2} &= [19,7669 \quad -8,1094], \\
 K_{2,1} &= [21,5814 \quad -7.4539], \\
 K_{2,2} &= [5,8571 \quad -5.9666].
 \end{aligned}
 \tag{7.76}$$

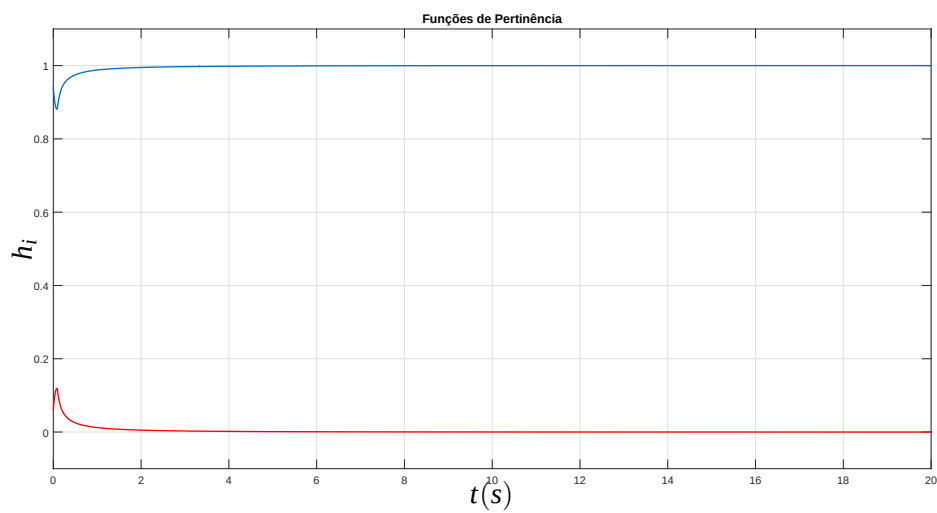
A resposta dinâmica do sistema para o ponto inicial $x(0) = [0,5 \quad 0,5]^T$, escolhido de maneira arbitrária, está representada nas figuras abaixo.

Figura 37 - Comportamento Dinâmico do Sistema Realimentado com os Ganhos (7.76).



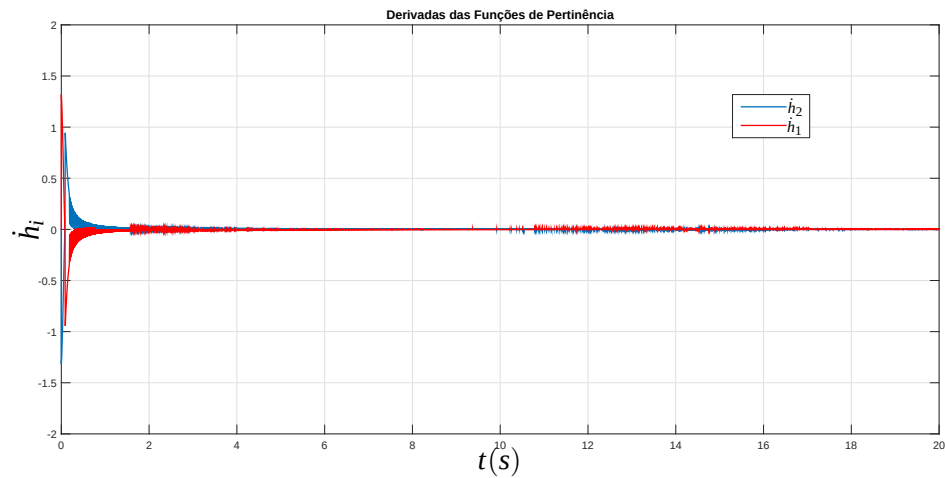
Fonte: O próprio autor.

Figura 38 - Comportamento das Funções de Pertinência do Sistema Realimentado com os Ganhos (7.76).



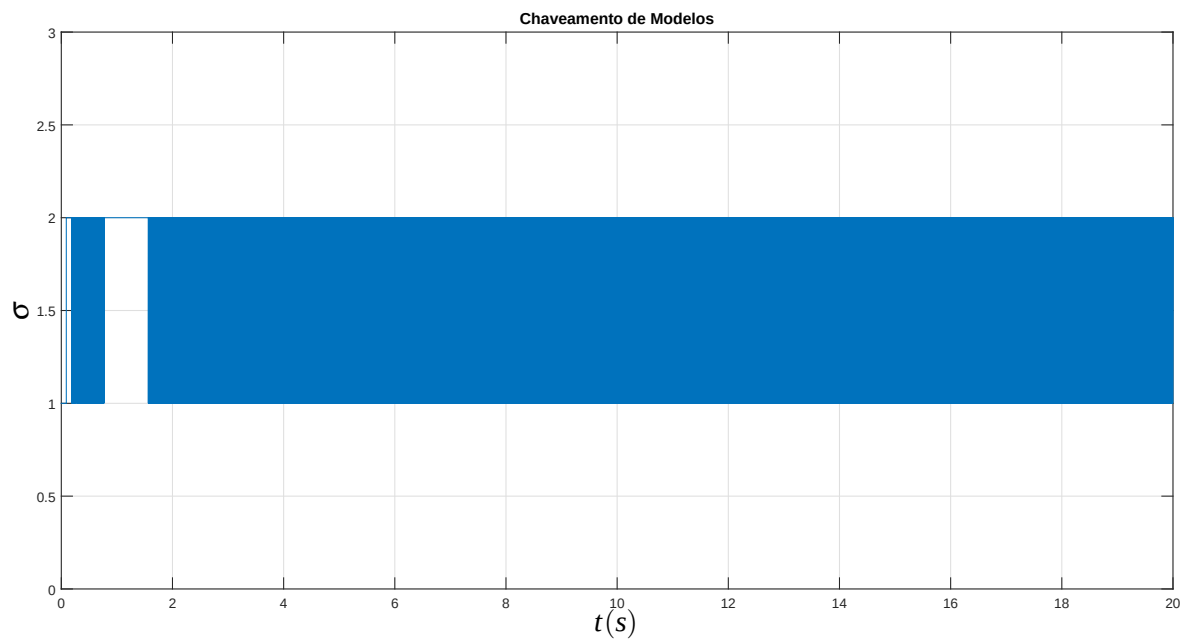
Fonte: O próprio autor.

Figura 39 - Comportamento das Derivadas das Funções de Pertinência do Sistema Realimentado com os Ganhos (7.76).



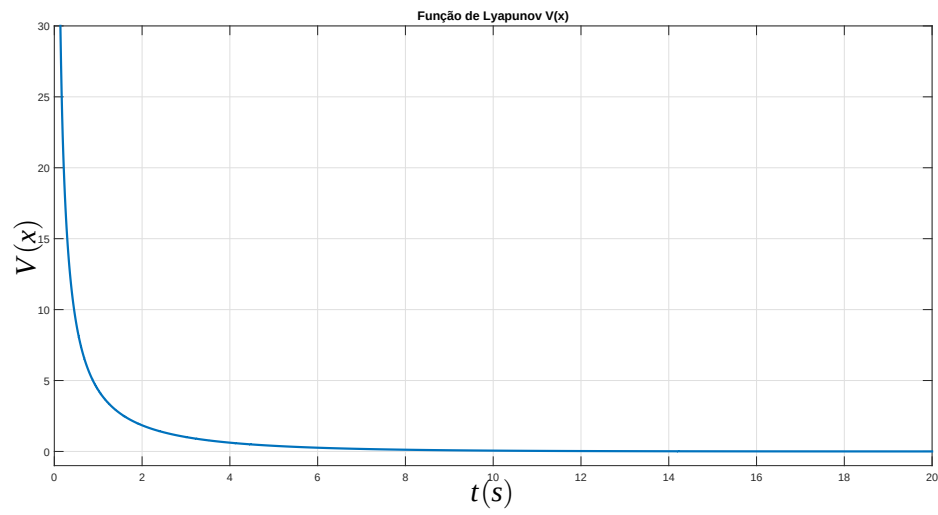
Fonte: O próprio autor.

Figura 40 - Chaveamento de Índices do Controlador $K_\sigma(h(x(t)))$ para o Sistema Realimentado com os Ganhos (7.76).



Fonte: O próprio autor.

Figura 41 - Comportamento da Função de Lyapunov do Sistema Realimentado com os Ganhos (7.76).



Fonte: O próprio autor.

- Para $r = 3$

Considere o sistema não linear TS adaptado a partir de (MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009)

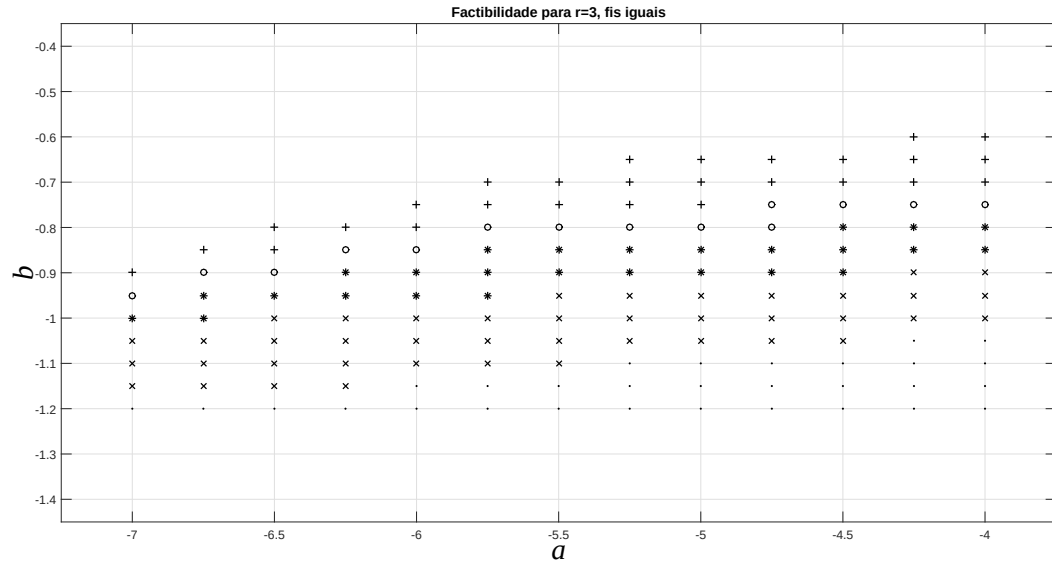
$$A_1 = \begin{bmatrix} 3,6 & -1,6 \\ 6,2 & -4,3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a & -1,6 \\ 6,2 & -4,3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -3,6 & -1,6 \\ a & -4,3 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0,45 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -b \\ -3 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} -0,45 \\ b \end{bmatrix}.$$

• Com intervalos iguais de $\dot{h}_i$:

Considerando $\phi = 1$ e variando-se os parâmetros a e b entre $[-7; -4]$ e $[-1,2; -0,6]$, respectivamente, e utilizando-se do solver Sedumi, foi obtida a seguinte região de factibilidade:

Figura 42 - Região de factibilidade comparativa para $r = 3$ e intervalos iguais de $\dot{h}_i$.



Fonte: O próprio autor.

Na Figura 42, as regiões de factibilidade são representadas da seguinte maneira:

→ $\cdot$ para $K(h(x(t)))_1$;

→ $\cdot, \times$ para K único;

→ $\cdot, \times, *$ para K_σ ;

→ $\cdot, \times, *, o$ para $K(h(x(t)))_2$;

$\rightarrow \cdot, \times, *, \circ, +$ para $K_\sigma(h(x(t)))$;

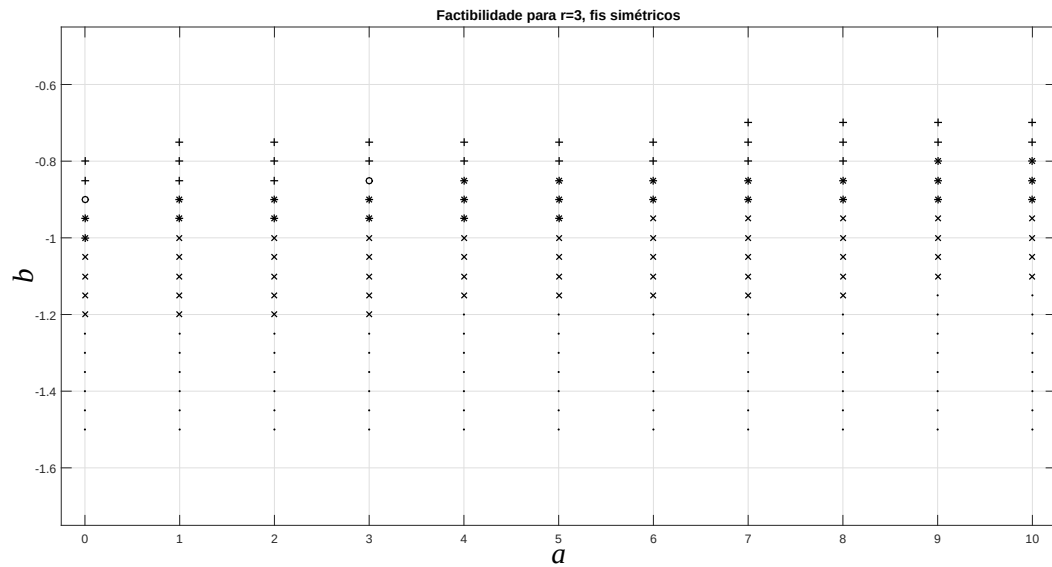
• Com intervalos simétricos de $\dot{h}_i$:

Considerando os seguintes intervalos para $\dot{h}_i$:

$$\begin{aligned} -2 &\leq \dot{h}_1 \leq 2; \\ -3 &\leq \dot{h}_2 \leq 3; \\ -5 &\leq \dot{h}_3 \leq 5, \end{aligned} \tag{7.77}$$

e variando-se os parâmetros a e b entre $[0; 10]$ e $[-1, 5; -0, 7]$, respectivamente, e utilizando-se do solver Sedumi, foi obtida a seguinte região de factibilidade:

Figura 43 - Região de factibilidade comparativa para $r = 3$ e intervalos simétricos de $\dot{h}_i$.



Fonte: O próprio autor.

Na Figura 43, as regiões de factibilidade são representadas da seguinte maneira:

$\rightarrow \cdot$ para $K(h(x(t)))_1$;

$\rightarrow \cdot, \times$ para K único;

$\rightarrow \cdot, \times, *$ para $K(h(x(t)))_2$;

$\rightarrow \cdot, \times, *, \circ$ para K_σ ;

$\rightarrow \cdot, \times, *, \circ, +$ para $K_\sigma(h(x(t)))$;

- Para $r = 4$

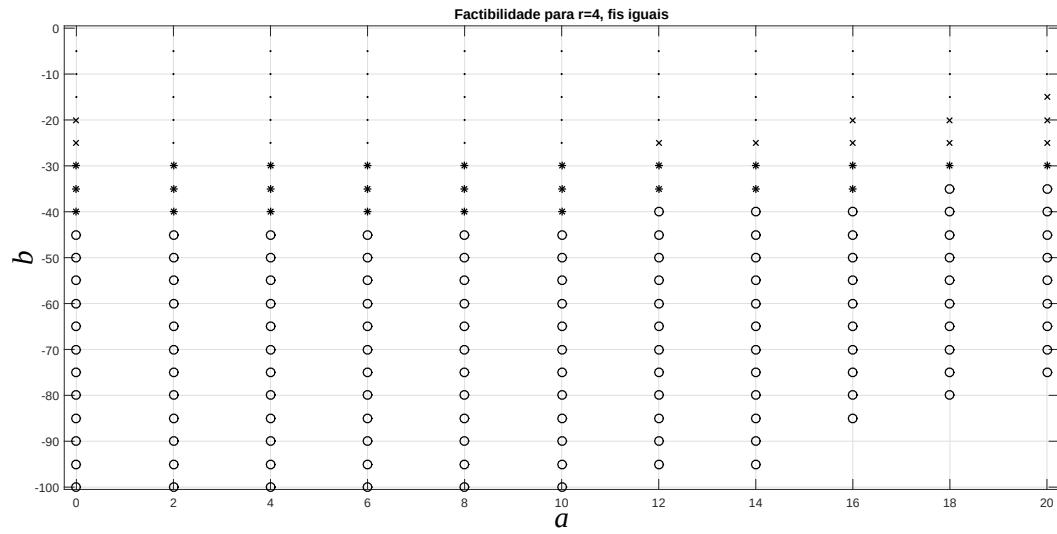
Considere o sistema não linear TS adaptado a partir de (CAMPOS; NGUYEN; PALHARES, 2017)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -a \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 20 & -2 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 20 & -2 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -b \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Considerando $|\phi_i| = |\phi| = 5$, para todo $i \in \mathbb{K}_r$, e variando-se os parâmetros a e b entre $[0; 20]$ e $[-100; -0]$, respectivamente, e utilizando-se do solver Sedumi, foi obtida a seguinte região de factibilidade:

Figura 44 - Região de factibilidade comparativa para $r = 4$ e intervalos iguais de $\dot{h}_i$.



Fonte: O próprio autor.

Na Figura 44, as regiões de factibilidade são representadas da seguinte maneira:

→ · para $K(h(x(t)))_1$;

→ ·, × para K único;

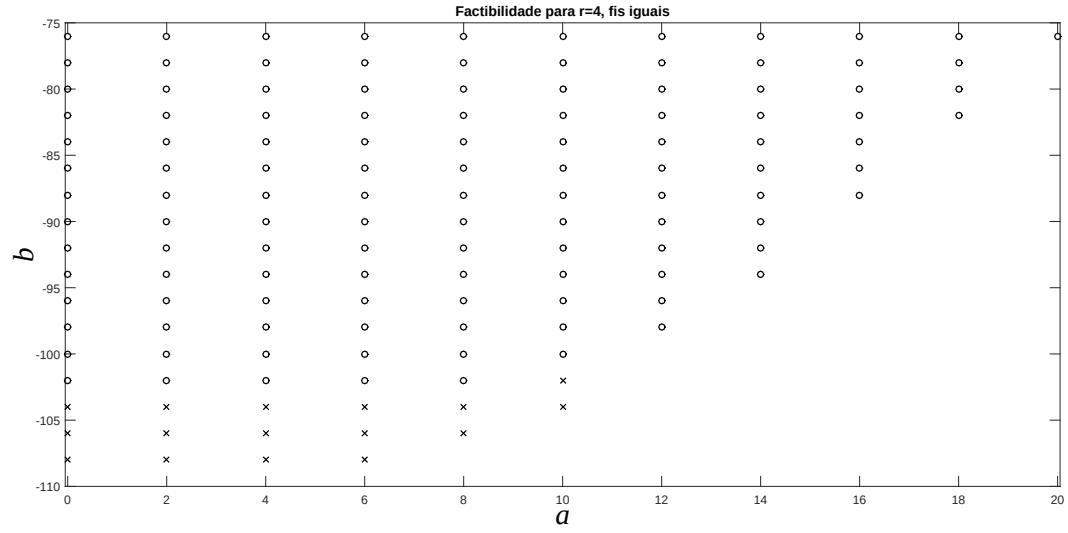
→ ·, ×, * para K_σ ;

→ ·, ×, *, o para $K(h(x(t)))_2$;

→ ·, ×, *, o, + para $K_\sigma(h(x(t)))$.

Ainda com o mesmo valor para $\phi = 5$, a fim de demonstrar a diferença de factibilidade para os controladores $K(h(x(t)))_2$ e $K_\sigma(h(t))$, foi gerada a Figura 45, com uma continuidade dos intervalos de a e b da Figura 44.

Figura 45 - Região de factibilidade comparativa para $r = 4$ e intervalos iguais de $\dot{h}_i$.



Fonte: O próprio autor.

Na Figura 45, as regiões de factibilidade são representadas da seguinte maneira:

→ o para $K(h(x(t)))_2$;

→ o, x para $K_\sigma(h(t))$.

8 Conclusões

Neste trabalho, foram analisadas condições de estabilidade e estabilização de sistemas não-lineares fuzzy TS a partir da utilização de Funções de Lyapunov Fuzzy (FLF) e uma nova abordagem para otimização de funções com termos dependendo de pesos limitados.

A princípio, foi apresentado o Teorema 1, que permite um ajuste ótimo de pesos para uma função custo, com o objetivo de obter-se um majorante superior dessa função.

Utilizando esse ajuste ótimo de pesos apresentado pelo Teorema 1, foi proposto a utilização do Algoritmo 1 para adaptação do termo $\dot{P}(h(x(t)))$, problema introduzido pela utilização da FLF, em função dos limites das derivadas das funções de pertinência dos modelos locais do sistema fuzzy TS.

Para os casos de estabilização, foi mostrado que utilizando-se do ajuste de pesos propostos pelo Teorema 1 para o termo $\dot{P}(h(x(t)))$ em teoremas publicados em periódicos recentes e importantes, é possível relaxar a busca por controladores robustos para sistemas complexos e incertos.

No Capítulo 6, foi mostrado ainda que, se o sistema estiver sujeito a uma região de operação, é possível realizar um cálculo preciso dos limitantes do $\dot{h}_i$'s. Neste caso, a utilização do Teorema 1 fica ainda mais interessante, uma vez que não é mais necessária a suposição dos limitantes, fato que pode atrapalhar a busca por factibilidade das LMIs se forem considerados desnecessariamente limitantes muito altos. Adicionalmente, ainda há uma garantia de que, se as condições iniciais desse sistema estiverem dentro de um intervalo conhecido, ele nunca sairá desse intervalo, o que ajuda na busca de uma solução, já que todos os casos produzidos pelo algoritmo presente no Teorema 1 estarão dentro da faixa de operação real do sistema.

No Capítulo 7, foram propostas novas abordagens em relação ao projeto de controladores para sistemas não lineares TS, utilizando-se diferentes tipos de controladores: um ganho K único (Teorema 7), um K_σ chaveado em função das possibilidades de ordem decrescentes dos P_i 's, retornada pelo Algoritmo 1 (Teorema 8) e um conjunto de ganhos chaveados $K_{\sigma j}$, em função dos modelos locais dos sistema fuzzy TS e também das possibilidades de ordem decrescentes dos P_i 's, retornada pelo Algoritmo 1 (Teorema 9).

As simulações apresentadas mostraram que a utilização do Algoritmo 1 para um cálculo otimizado da influência do termo $\dot{P}(h(x(t)))$ ocasionalmente possibilita resultados mais relaxados utilizando-se apenas um ganho K único de realimentação, mesmo quando comparados com controladores mais sofisticados, porém que utilizam métodos diferentes para cálculo do termo $\dot{P}(h(x(t)))$ (MOZELLI; PALHARES; AVELLAR, 2009). Além disso, os resultados mostraram que as novas propostas de técnica para projeto dos controladores, agora utilizando-se de índices chaveados em relação a que modelo do algoritmo o sistema está mais próximo em cada momento, produziram áreas de factibilidade maiores dos que os outros controladores propostos na literatura recente.

A continuação do trabalho consiste na proposta de ainda mais técnicas de controle baseadas nos modelos que o algoritmo presente no Teorema 1 produz, e utilização de controladores dependentes não somente do $h(x(t))$, mas também de $\dot{h}(x(t))$, reduzindo ainda mais a influência do termo $\dot{P}(h(x(t)))$ e relaxando a busca por soluções do problema.

REFERÊNCIAS

ABDELMALEK, I. *Non linear systems control: LMI fuzzy approach*. 104 p. Tese (Doutorado) — University Hadj Lakhdar de Batna - République Algérienne Démocratique et Populaire, 2009.

ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R. de; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A. de. Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, p. 1408–1433, 2016.

BERNAL, M.; HUSEK, P. Non-quadratic performance design for Takagi-Sugeno fuzzy systems. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, v. 15, n. 3, p. 383–391, 2005.

BOYD, S.; GHAOUI, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear matrix inequalities in systems and control theory*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. 193 p.

CAMPOS, V. C. S.; NGUYEN, A.; PALHARES, R. M. A comparison of different upper-bound inequalities for the membership functions derivative. *IFAC Paper Online*, IFAC, p. 3001–3006, 2017.

CARDIM, R. *Projeto de controladores baseados em LMIs: realimentação derivativa e sistemas chaveados utilizando estrutura variável*. 120 p. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.

CHADLI, M.; MAQUIN, D.; RAGOT, J. Relaxed stability conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEMS, MAN, AND CYBERNETICS, 2000, Nashville. Nashville, 2000. p. 3514–3519.

ESTEVES, T.; JÚNIOR, E. M.; MOREIRA, M.; CARDIM, R.; ALVES, M. P.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E. Análise da estabilidade de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno utilizando funções de Lyapunov fuzzy. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 2011, São João del-Rei. São João del-Rei, 2011. p. 885–890.

ESTEVES, T. T. *Análise da estabilidade de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno utilizando as desigualdades de Lyapunov-Metzler*. 99 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2011.

GUEDES, J. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Stability of nonlinear system using Takagi-Sugeno fuzzy models and hyper-rectangle of LMIs. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Heidelberg, v. 24, n. 1-2, p. 46–53, 2013.

GUEDES, J. B. *Novas condições de estabilidade de sistemas não lineares utilizando funções Lyapunov fuzzy*. 92 p. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”- Campus Ilha Solteira, 2015.

JADBABAIE, A. A reduction in conservatism in stability and L_2 gain analysis of Takagi-Sugeno fuzzy systems via linear matrix inequalities. In: IFAC WORD CONGRESS, 1999, China. *Proceedings...* China, 1999. p. 285–289.

JOHANSSON, M.; RANTZER, A.; ARZEN, K. Piecewise quadratic stability of fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 7, n. 6, p. 713–722, 1999. ISSN 1063-6706.

LAZARINI, A. Z. N. *Condições de relaxamento para a estabilidade de sistemas não lineares T-S utilizando funções lyapunov fuzzy*. 87 p. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2017.

LEE, D. H.; JOO, Y. H.; TAK, M. H. Local stability analysis of continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems: A fuzzy Lyapunov function approach. *Information Sciences*, Santa Rosa, v. 257, p. 163 – 175, 2014. ISSN 0020-0255.

LEE, D. H.; PARK, J. B.; JOO, Y. H. A fuzzy Lyapunov function approach to estimating the domain of attraction for continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems. *Information Sciences*, Santa Rosa, v. 185, n. 1, p. 230 – 248, 2012. ISSN 0020-0255.

LIU, C.; LAM, H.; FERNANDO, T.; IU, H. H. Design of fuzzy functional observer-controller via higher order derivatives of Lyapunov function for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, New York, v. 47, n. 7, p. 1630–1640, July 2017.

LYAPUNOV, A. M. *General problem of the stability of motion*. [S.l.]: CRC Press, 1992. 270 p.

MACHADO, E. R. M. D. *Modelagem e controle de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno*. 190 p. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2003.

MOZELLI, L. A.; PALHARES, R. M.; AVELLAR, G. S. C. A systematic approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems. *Information Sciences*, v. 179, p. 1149–11162, 2009.

MOZELLI, L. A.; PALHARES, R. M.; SOUZA, F. O.; MENDES, E. M. A. M. Reducing conservativeness in recent stability conditions of TS fuzzy systems. *Automatica*, Kidlington, v. 45, n. 6, p. 1580–1583, 2009.

OHTAKE, H.; TANAKA, K.; WANG, H. Piecewise nonlinear control. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL. Maui, 2003. v. 5, p. 4735–4740. ISSN 0191-2216.

QIAO, L.; YANG, Y. Fault-tolerant control for T-S fuzzy systems with sensor faults: Application to a shop propulsion system. *Journal of the Franklin Institute*, p. 4854 – 4872, 2018.

- RHEE, B. J.; WON, S. A new fuzzy Lyapunov function approach for a Takagi - Sugeno fuzzy control system design. *Fuzzy Sets and Systems*, p. 1211–1228, 2006.
- SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using takagi-sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, p. 1720–1727, 2014.
- SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties. *Mathematical Problems in Engineering*, p. 10, 2013.
- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics*, New York, v. 15, n. 1, p. 116–132, 1985.
- TANAKA, K.; HORI, T.; WANG, H. A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 11, n. 4, p. 582–589, 2003.
- TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Amsterdam, v. 6, n. 2, p. 250–265, 1998a. ISSN 1063-6706.
- TANAKA, K.; SANO, M. A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Amsterdam, v. 2, n. 2, p. 119–134, 1994. ISSN 1063-6706.
- TANIGUCHI, T.; TANAKA, K.; OHTAKE, H.; WANG, H. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 9, n. 4, p. 525–538, 2001. ISSN 1063-6706.
- WANG, H.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 4, n. 1, p. 14–23, 1996. ISSN 1063-6706.
- ZADEH, L. A. Fuzzy sets. *Information and Control*, v. 8, n. 2, p. 338–353, 1965.