



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS- GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA E SEUS
FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

**INVESTIGANDO A PRÓPRIA PRÁTICA: utilizando a
Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da
Resolução de Problemas para a compreensão do significado do
zero nas operações de números naturais**

KATYANE ROMUALDO DOS SANTOS

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

Rio Claro – SP

2023

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIA E CIÊNCIAS EXATAS

CÂMPUS DE RIO CLARO

KATYANE ROMUALDO DOS SANTOS

INVESTIGANDO A PRÓPRIA PRÁTICA: utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas para a compreensão do significado do zero nas operações de números naturais

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Lourdes de la Rosa Onuchic

Rio Claro - SP

2023

S237i

Santos, Katyane Romualdo dos

Investigando a Própria Prática : utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas para a compreensão do significado do zero nas operações de números naturais /

Katyane Romualdo dos Santos. -- Rio Claro, 2023

180 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientadora: Lourdes de la Rosa Onuchic

1. Ensino do Zero. 2. Resolução de Problemas. 3. Investigando a Própria Prática. 4. Problemas do Campo Aditivo e Multiplicativo. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

KATYANE ROMUALDO DOS SANTOS

INVESTIGANDO A PRÓPRIA PRÁTICA: utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas para a compreensão do significado do zero nas operações de números naturais

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em 2023.

Comissão Examinadora

Prof^a. Dr^a. Lourdes de la Rosa Onuchic (USP) - Orientadora

Prof. Dr. Márcio Pironel (IFSP – Campus Salto)

Prof^a. Dr^a. Rosineide de Sousa Jucá (UEPA)

Prof^a. Dr^a. Célia Barros Nunes (UNEB, Campus X, Teixeira de Freitas) - suplente

Prof^a Dr^a. Rosana Giaretta Sguerra Miskulin (UNESP) - suplente

Conceito: Aprovado.

Rio Claro/SP, 23 de novembro de 2023

Dedico esse trabalho a Deus que me sustentou durante essa caminhada
acadêmica.

À minha mãe e ao meu pai que me apoiaram sempre a continuar meus
estudos, independente dos desafios e dificuldades.

AGRADECIMENTOS

Ao findar esta caminhada científica e acadêmica, não poderia deixar de agradecer a todos os envolvidos nesse processo.

Primeiramente ao senhor Jesus que não deixou de me fortalecer para não desistir dos meus sonhos, colocando pessoas incríveis na minha vida que fizeram toda diferença.

Agradeço aos meus queridos e amados pais, Valdete e Mauricio, que sempre estiveram comigo. Tudo o que eu conquistei foi graças ao apoio deles.

À minha orientadora Prof^a. Dr^a. Lourdes de la Rosa Onuchic que ampliou meus conhecimentos com a sua sabedoria, paciência e dedicação.

Aos meus amigos de graduação e pós-graduação que me ajudaram e me aconselharam a iniciar no Programa, em especial Douglas Guimarães, Letícia Borges, Igor Brandão e Jessica Algarve. Estiveram comigo do começo ao fim.

Aos colegas do Gterp que auxiliaram com materiais de estudos, conselhos e Problemas Geradores para serem estudados durante as reuniões semanais, trazendo novas aprendizagens.

Em especial a Inajara que sempre tirou minhas dúvidas e foi essencial para a conclusão deste trabalho, assim como a todos os professores do PPGEM.

Para finalizar, a todos os professores e funcionários da E. E. Prof. Dêlcio Báccaro que estavam torcendo pelo meu sucesso.

RESUMO

Essa pesquisa tem um cunho qualitativo e o objetivo de responder “Como a compreensão do algarismo zero pode contribuir para a aprendizagem das operações básicas através da Resolução de Problemas?”. Quando se trata do zero é necessário revisitar a História da Matemática e estudar de seu nascimento até sua consolidação. Essa parte histórica do zero foi essencial para entender que as dificuldades para compreender esse número vêm desde os primórdios de sua criação com as civilizações babilônica, maia, chinesa e hindu que de alguma forma adicionaram o zero em seus sistemas de numeração. A última foi a que mais abraçou esse número, não apenas deixando-o guardado entre as ordens faltosas de um número, mas criando propriedades para ele. Hoje, está presente no cotidiano proporcionando avanços matemáticos, assim como na física, na engenharia e em outras áreas. É impossível pensar em um mundo sem o zero, contudo, muitas vezes, ainda é visto de forma pejorativa e insignificante. Além da preocupação com essa desvalorização do zero, esta pesquisa procurou lidar com dificuldades dos alunos em operações básicas da matemática. Aprofundamo-nos em cada uma dessas operações, estudando suas estruturas com a finalidade de investigar como o zero se comportava em cada uma dessas operações. Para responder à pergunta da pesquisa aliamos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas com a Investigação da Própria Prática. A primeira propõe iniciar através de problemas para o ensino-aprendizagem dos alunos. Nessa metodologia o professor é mediador do processo de aprendizagem e, pode avaliar de forma ampla, cada um dos alunos, que são divididos em grupos. De outro modo, a Investigação da Própria Prática, busca valorizar a investigação em sala de aula do próprio professor que está lecionando, não necessitando intervenções de terceiros para resolver as próprias dificuldades em sala de aula. A pesquisa é uma revisão de conteúdo dos números naturais e dos problemas do campo aditivo e multiplicativo.

Palavras Chaves: Ensino do Zero, Resolução de Problemas, Investigando a Própria Prática, Problemas do Campo Aditivo e Multiplicativo.

ABSTRACT

This research has a qualitative nature and aims to answer “How can understanding the digit zero contribute to learning basic operations through Problem Solving?”. When it comes to zero, it is necessary to revisit the History of Mathematics and study from its birth to its consolidation. This historical part of zero was essential to understand that the difficulties in understanding this number come from the beginning of its creation with the Babylonian, Mayan, Chinese and Hindu civilizations that somehow added zero to their numbering systems. The last one was the one that most embraced this number, not just leaving it stored among the faulty orders of a number, but creating properties for it. Today, it is present in everyday life providing mathematical advances, as well as in physics, engineering and other areas. It is impossible to think of a world without zero, however, it is often still seen in a pejorative and insignificant way. In addition to the concern about this devaluation of zero, this research sought to deal with students' difficulties in basic mathematical operations. We delved deeper into each of these operations, studying their structures with the purpose of investigating how zero behaved in each of these operations. To answer the research question, we combine the Mathematics Teaching-Learning-Assessment Methodology through Problem Solving with the Investigation of Practice Itself. The first proposes to start with problems for the teaching-learning of students. In this methodology, the teacher is a mediator of the learning process and can comprehensively evaluate each of the students, who are divided into groups. In another way, the Investigation of Own Practice seeks to value the investigation in the classroom of the teacher himself who is teaching, not requiring interventions from third parties to resolve his own difficulties in the classroom. The research is a review of the content of natural numbers and problems in the additive and multiplicative field.

Keywords: Teaching from Zero, Problem Solving, Investigating Your Own Practice, Problems in the Additive and Multiplicative Field.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Imagem da atividade realizada na aula de Prática I.....	17
Figura 2: Fluxograma de Romberg	24
Figura 3: Modelo Preliminar da autora	26
Figura 4: Variáveis Chaves	26
Figura 5: Modelo Modificado da autora	27
Figura 7: Processo de Numeração.....	30
Figura 8: sistema de numeração sexagesimal dos babilônios	33
Figura 9: Sistema de numeração Maia	36
Figura 10: Exemplos de números maias	36
Fig. 11: Exemplos da mudança na terceira posição	37
Figura 12: Exemplos de números com o símbolo do zero como guardador de lugar	37
Figura 13: Números Maias.....	38
Figura 14: Sistema de numeração decimal chinesa.....	39
Figura 15: Exemplo de numeração chinesa	40
Figura 16: Sistema de numeração chinesa em barras verticais	40
Figura 17: Exemplos de números chineses em barras verticais.....	40
Figura 18: sistema de numeração chinesa em barras horizontais	41
Figura 19: Exemplos de números chineses utilizando barras verticais e horizontais	41
Figura 21: Escrita chinesa por extenso.....	42
Figura 22: Escrita chinesa em quadrilhado	42
Figura 23: Evolução da escrita dos números.....	46
Figura 24: Linha do tempo com os principais acontecimentos históricos com relação a origem do SND e do zero	55
.....	55
Figura 25: Representação do Problema de Reunir 1 através de imagens	79
Figura 27: Representação do Problema de Reunir 2 através de imagens (parte 1)..	80
Figura 28: Representação do Problema de Reunir 2 através de imagens (parte 2)..	81
Figura 29: Representação matemática do Problema de Reunir 2	81
Figura 30: Representação do Problema de Reunir 3 através de imagens (parte 1)..	83
Figura 31: Representação do Problema de Reunir 3 através de imagens (parte 2)..	83

Figura 32: Representação matemática do Problema de Reunir 3	84
Figura 33: Representação do Problema de Separar 1 através de imagens	85
Figura 34: Representação matemática do Problema de Separar 1	86
Figura 35: Representação do Problema de Separar 2 através de imagens (parte 1)	87
Figura 36: Representação do Problema de Separar 2 através de imagens (parte 2)	87
Figura 37: Representação matemática do Problema de Separar 2	88
Figura 38: Representação do Problema de Separar 3 através de imagens (parte 1)	88
Figura 39: Representação do Problema de Separar 3 através de imagens (parte 2)	89
Figura 40: Representação matemática do Problema de Separar 3	89
Figura 41: Representação do Problema de Parte-todo 1 através de imagens (parte 1)	91
Figura 42: Representação do Problema de Parte-todo 1 através de imagens (parte 2)	91
Figura 43: Representação matemática do Problema de Parte-todo 1	92
Figura 44: Representação do Problema Parte-todo 2 através de imagens (parte 1)	92
Figura 45: Representação do Problema Parte-todo 2 através de imagens (parte 2)	93
Figura 46: Representação matemática do Problema de Parte-todo 2	93
Figura 47: Representação do Problema Comparar 1 através de imagens (parte 1)	96
Figura 48: Representação do Problema Comparar 1 através de imagens (parte 2)	96
Figura 49: Representação matemática do Problema de Comparar 1	97
Figura 50: Representação do Problema de Comparar 2 através de imagens (parte 1)	97
Figura 51: Representação do Problema de Comparar 2 através de imagens (parte 2)	98
Figura 52: Representação do Problema Comparar 2 através de imagens (parte 3)	98
Figura 53: Representação matemática do Problema de Comparar 2	99
Figura 54: Representação do Problema de Comparar 3 através de imagens	100
Figura 55: Representação matemática do Problema de Comparar 3	100
Figura 56: Exemplo de adição e nomenclatura de suas partes	101
Figura 57: Exemplo de subtração e a nomenclatura de suas partes	103
Figura 58: Exemplo 1 de adição com reservas (parte 1)	104
Figura 59: Exemplo 1 de adição com reservas (parte 2)	104
Figura 60: Exemplo 2 de adição com reservas	104
Figura 61: Exemplo 1 de subtração com trocas	106

Figura 62: Exemplo de adição utilizando a reta numérica.....	107
Figura 63: Exemplo de subtração utilizando a reta numérica.....	107
Figura 64: Diferença entre os intervalos começando da origem e de um ponto específico, no caso o ponto 1	108
Figura 65: Resolução do Problema Extra (parte 1).....	109
Figura 66: Resolução do Problema Extra (parte 2).....	110
Figura 67: Resolução do Problema Extra (parte 3).....	110
Figura 68: Resolução do Problema Extra (parte 4).....	111
Figura 69: Resolução do Problema Extra em outra situação	111
Figura 70: Representação do Problema de Adição-repetida1 através de imagens (parte 1)	117
Figura 71: Representação do Problema de Adição-repetida 1 através de imagens (parte 2)	118
Figura 72: Representação do Problema 5.2 através de imagens (parte 1).....	119
Figura 73: Representação do Problema 5.2 através de imagens (parte 2)	119
Figura 74: Representação do Problema Adição-repetida 3 através de imagens	121
Figura 75: Representação do Problema de Taxa 1 através de imagens	122
Figura 76: Resolução do Problema de Taxa 1	122
Figura 77: Resolução do Problema de Taxa 2	124
Figura 78: Representação do Problema de Taxa 3 através de imagens (parte 1)...	124
Figura 79: Representação do Problema de Taxa 3 através de imagens (parte 2)...	125
Figura 81: Representação do Problema Comparação Multiplicativa 2 através de imagens	128
Figura 82: Representação do Problema Comparação Multiplicativa 3 através de imagens	129
Figura 83: Exemplo de multiplicação	131
Figura 84: Exemplo de divisão horizontal	132
Figura 85: Tabuada da Multiplicação	135
Figura 86: Exemplo de multiplicação - unidade por unidade	136
Figura 87: Exemplo multiplicação vertical com dois algarismos no multiplicando	138
Figura 88: Exemplo multiplicação vertical com dois algarismos no multiplicando, separando dezenas e unidades.....	138
Figura 89: Exemplo de multiplicação	139
Figura 90: Exemplo de multiplicação com o sinal de + e o espaço	140
Figura 91: Exemplo de multiplicação com o sinal +	140

Figura 92: Erro 1 de multiplicação	141
Figura 93: Erro 1 de multiplicação	142
Figura 94: Erro 2 de multiplicação	143
Figura 95: Erro 3 de multiplicação	143
Figura 96: Exemplo do elástico numerado com a reta numérica	147
Figura 97: Material Dourado	149
Figura 98: Algoritmo da Divisão	150
Figura 99: Prova real dos exemplos de divisão exatas	156
Figura 100: Outro exemplo com adição no quociente utilizando o Algoritmo da Divisão	157
Figura 101: Divisão de zero por quatro	163
Figura 102: Divisão de um por zero	165
Figura 103: Divisão de zero por zero	165

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - símbolos da numeração babilônica	33
Quadro 2: Síntese dos diferentes significados atribuídos ao.....	70
Quadro 3: Sistema de Numeração Decimal	73
Quadro 4: exemplo de um número no sistema de numeração decimal.....	75
Quadro 5: Operações Matemáticas: Diretas e Inversas.....	77
Quadro 6: Problemas de Reunir	85
Quadro 7: Problemas de Separar	90
Quadro 8: Problemas de Parte-todo	94
Quadro 9: Problemas de Comparação.....	101
Quadro 10: Contraexemplo da subtração não ser associativa.....	115
Quadro 11: Problemas de grupos iguais com adição-repetida	121
Quadro 12: Problemas de grupos iguais com taxa	126
Quadro 13: Problema de comparação multiplicativa	129
Quadro. 14: Comparação da adição-repetida com a multiplicação.....	134
Quadro 15: Comparação das tabuadas	134
Quadro 16: Tábua de Pitágoras incompleta	136
Quadro 17: Tábua de Pitágoras completa	137
Quadro 18: Primeiro exemplo de divisão utilizando material dourado	149
Quadro 19: Divisão de 9 por 3 usando o Material Dourado e o Algoritmo da Divisão	150
Quadro 20: Segundo exemplo de divisão utilizando material dourado	152
Quadro 21: Divisão de 24 por 6 usando o Material Dourado e o Algoritmo da Divisão	152
Quadro 22: Terceiro exemplo de divisão utilizando material dourado.....	153
Quadro 24: Algoritmo da divisão com valor posicional no quociente.....	158
Quadro 25: Divisão não exata com o exemplo de 115 dividido por 9.....	159
Quadro 26: Contraexemplo da divisão não ser associativa.....	162
Quadro 27: Contraexemplo da divisão não ser distributiva	163
Quadro 28: O zero em diferentes posições na divisão	166
Quadro 29: Paridade do número 4	168
Quadro 30: Paridade do número 3	169
Quadro 31: Relação par e ímpar na sequência numérica entre 1 e 4	169
Quadro 32: Relação par e ímpar na sequência numérica entre 1 e 12	170

Quadro 33: Relação par e ímpar na envolvendo o zero	170
Quadro 34: Explicação da paridade de um número pela definição.....	171

SUMÁRIO

SEÇÃO ZERO: INTRODUÇÃO	15
SEÇÃO UM: A PESQUISA E O MODELO DE ROMBERG-ONUICHIC.....	20
SEÇÃO DOIS: CONTEXTO HISTÓRICO DO ZERO	28
2.1. História do Número.....	28
2.2. Sistema de numeração e o zero para os Babilônios.....	32
2.3 Sistema de numeração e o zero para os maias.....	35
2.4 Sistema de numeração e o zero para os chineses.....	38
2.5 Sistema de numeração e o zero para os Hindus.....	42
2.6 A chegada do zero na Europa através dos árabes.....	45
2.7 Um mundo sem o zero?.....	48
2.8 Um olhar na literatura.....	49
2.8.1 A Origem do Zero.....	50
2.8.2 Sentidos do Zero	51
2.8.3 O Sistema de Numeração Decimal: um estudo sobre valor posicional	54
2.8.4 Conclusões dos trabalhos da Revisão de Literatura.....	57
SEÇÃO TRÊS: INVESTIGANDO A PRÓPRIA PRÁTICA E A METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS	58
3.1 Minha própria prática	64
SEÇÃO QUATRO: FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS BÁSICOS	66
4.1 Números Naturais, Inteiros e o Zero	66
4.2 Cardinalidade e Ordinalidade	71
4.3 Sistema de Numeração Decimal.....	72
4.4 Operações matemáticas.....	75
4.4.1 Problemas aditivos e subtrativos.....	77
4.4.2. Problemas multiplicativos (multiplicação e divisão).....	116
4.4.3 Paridade do Zero	166
SEÇÃO CINCO: CONSIDERAÇÕES FINAIS	174
REFERÊNCIAS.....	177

SEÇÃO ZERO: INTRODUÇÃO

Assim como na matemática o zero não apareceu na minha vida de forma natural. Talvez, assim como todo mundo, ele fosse apenas mais um número dentre tantos números nos conjuntos numéricos, utilizado nas operações, mas sem nada especial. E para entender como se tornou meu objeto de estudo “começaremos do zero”!

O interesse em ser professora de matemática surgiu com a influência de uma excelente professora que tive na oitava série (atual nono ano) do Ensino Fundamental. A partir daí, comecei a estudar para alcançar esse objetivo que se consolidou no Ensino Médio, através do PIBID (Projeto Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência) do qual participei como aluna. Os bolsistas faziam encontros semanais, no horário contrário, tirando nossas dúvidas de matemática referentes ao vestibular. Além disso, também frequentei o Cursinho Comunitário Athos, oferecido aos sábados, pela Unesp de Rio Claro.

Tive então a oportunidade de ingressar no curso de Licenciatura em Matemática da Unesp em Rio Claro. Enquanto cursava, participei de dois projetos: PIBID¹, estive envolvida com esse projeto por quase dois anos e meio; e o Residência Pedagógica (RP)² durante um ano e meio. Os dois projetos me trouxeram aprendizagem e experiência, porém participar do PIBID foi uma grande satisfação, devido ao fato de um dia ser participante-aluna do projeto e depois poder contribuir como participante-bolsista e retornar para a sociedade através do projeto que me ajudou durante a Educação Básica.

Reforço que ambos os projetos são voltados a incentivar graduandos a serem futuros professores e, para mim, foi além de um incentivo, mas uma confirmação da

¹ O programa oferece bolsas de iniciação à docência aos alunos de cursos presenciais que se dediquem ao estágio nas escolas públicas e que, quando graduados, se comprometam com o exercício do magistério na rede pública. O objetivo é antecipar o vínculo entre os futuros mestres e as salas de aula da rede pública. Com essa iniciativa, o Pibid faz uma articulação entre a educação superior (por meio das licenciaturas), a escola e os sistemas estaduais e municipais. Acesso: <http://portal.mec.gov.br/pibid>

² O Programa de Residência Pedagógica é um programa da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, que tem por finalidade fomentar projetos institucionais de residência pedagógica implementados por Instituições de Ensino Superior, contribuindo para o aperfeiçoamento da formação inicial de professores da educação básica nos cursos de licenciatura. Acesso: <https://www.gov.br/capes/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/educacao-basica/programa-residencia-pedagogica>

carreira que eu queria seguir: à docência. Contudo, não foram esses projetos que despertaram meu interesse pelo zero.

Meu interesse pelo zero nasceu nas aulas de Prática e Estágio Supervisionado I³. Durante as aulas, eu e meus colegas compartilhamos relatos dos estágios e projetos em que participamos. Nesses relatos questionamos sobre a dificuldade dos alunos principalmente em conceitos básicos da matemática.

Nessas mesmas aulas, foi-nos proposto uma atividade que já havia sido realizada com uma pesquisadora e seus alunos da Educação Básica para analisarmos. Foi por meio dessa atividade que surgiu o interesse por este objeto de estudo: o zero e, mais para frente, sobre o ensino do zero em diferentes contextos.

Inicialmente, questionei-me sobre o Algoritmo da Divisão. Contudo, durante as aulas, utilizando a Metodologia de Análise de Erros⁴, com foco em exercícios de multiplicação e divisão, meu interesse mudou.

Algumas aulas foram ministradas pela estagiária da professora da disciplina de Estágio, que estava pesquisando nessa área. E os exercícios propostos por ela foram realizados por alunos do Ensino Fundamental durante a sua pesquisa. Nessas aulas, a intenção era descobrir quais seriam ou poderiam ser as razões dos erros cometidos pelos alunos, ao invés de simplesmente dizer que só era falta de atenção deles. Isto é, questionar também sobre o ensino do próprio professor. A partir desses erros, rever a fala do professor.

Ali, ficou evidente para mim que o nosso modo de trabalhar conceitos matemáticos em sala de aula, com o intuito de tornar a linguagem matemática mais compreensível, poderia levar os estudantes a criar conceitos errados. Um exemplo: “o zero representa nada”. Essa “singela” e “inofensiva” frase pode desencadear uma série de erros matemáticos, confundindo e traumatizando os discentes.

Observe a Figura 1, tirada do meu caderno, enquanto estudante nesta disciplina. Nela contém algumas anotações, reescrevi as questões com os erros dos alunos e do lado

³ Disciplina realizada na Unesp Campus Rio Claro, com a turma de 2016

⁴ Referência: Curry (1994)

direito estão minhas suposições sobre o que esses alunos poderiam ter pensado enquanto resolviam cada questão, ou seja, procurei buscar os possíveis erros e suas origens.

Então a escrita em azul seria a resolução do aluno, as marcações em preto, laranja, vermelho e marrom são minhas anotações:

Figura 1: Imagem da atividade realizada na aula de Prática I

1ª conta: O aluno errou na multiplicação.
 Ele multiplicou 205 quando ele multiplicou 4×0 ,
 ele na verdade multiplicou pelo
 18180 "Vai dois" e o mesmo quando
 665 multiplicou 3
 1530

2ª conta: 1042
 $\times 2$
 18494
 $4484+$
 52334
 1º Erro: ou ele somou $0+2$ e depois multiplicou
 ou ele ignorou o 0 e fez 2×2
 2º Erro: Idem
 3º Erro: somou $1+4$ e depois mult.
 4º Erro: não somou ele se esqueceu de "subir 1".

3ª conta:
 4347
 $\times 6$
 $3726+$
 41607
 1º Erro: ou ele ~~se~~ somou $7+0$, ou
 ele errou a multiplicação
 2º Erro: mesmo erro $7+0$

Fonte: Arquivo pessoal

Observa-se nos três exemplos da Figura 1 que os alunos se equivocaram em vários conceitos, inclusive quando aparecia o algarismo zero, independentemente da ordem que ele ocupava no número. Supomos que eles ou ignoravam o zero e multiplicavam pelo número da ordem anterior ou acreditavam que zero multiplicado por qualquer número era o próprio número (na verdade isso vale para multiplicação por 1).

Será que tais erros não são oriundos da frase “o zero não representa nada” ou, pior dizendo, o “zero é nada”? Até mesmo as minhas anotações têm uma linguagem informal, como no “vai 2”, que prejudica o ensino e aprendizagem dos alunos. Lógico que existem outros erros, mas os que mais me chamaram atenção foram os que estavam relacionados ao zero.

Outra observação é que os sinais de adição observados no segundo e no terceiro algoritmos, são frutos de um outro erro comum entre os alunos e que decorrem de processos de ensino, de aprendizagem e de avaliação equivocados. Aquele espaço pertence ao zero e não ao símbolo “+”, para mostrar que não estamos mais multiplicando unidade por unidade, mas estamos multiplicando agora pelas dezenas. Esses conceitos serão explorados com mais detalhes nas próximas seções.

Vale ressaltar que a intenção deste trabalho não é analisar os erros e corrigi-los, e ensinar os alunos a fazer as operações corretamente. Mas permitir que eles entendam e compreendam o processo. Saber utilizar o algoritmo é consequência.

Por fim, essa cena me intrigou, o que fez com que despertasse em mim uma curiosidade e um interesse em me aprofundar sobre o zero, culminando no presente trabalho de pesquisa e, conseqüentemente, nesta minha dissertação. Isto é, até aqui apresentei a justificativa de como preocupação com o zero apareceu na minha vida, qual foi a motivação para continuar meus estudos e procurar na pós-graduação um meio para entender e criar novos meios de ensinar sobre o zero em diferentes contextos e operações.

Com essa motivação, eu me inscrevi no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática (PPGEM), na Unesp de Rio Claro. Dentro desse programa, conheci a área de Resolução de Problemas e, conseqüentemente, o Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas (GTERP) que se encaixava no meu projeto.

Novamente, fui agraciada ao entrar no Programa, sendo aceita nessa linha de pesquisa, podendo continuar meus estudos e investigar algo que me fascinava tanto.

Somadas à frase citada anteriormente, de que o “zero não representa nada” e que, além dessa há outros questionamentos e afirmações sobre o zero gerando muitas confusões, como: “Ele é um número? É um número natural? É par ou ímpar? É positivo ou negativo? Por que adicionar ou subtrair zero não faz diferença no resultado, mas na multiplicação zera tudo? Sabe-se que zero dividido por algo é zero e, algo dividido por zero é quanto?”. Essas são apenas a ponta do iceberg dos problemas com o zero que quero investigar.

Malba Tahan⁵ (1954), relata algumas frases comumente anunciadas pela sociedade, como metáforas, sobre o zero: “Reduzido a Zero” para representar que alguém foi humilhado; “Nada e Zero”, comparando os dois termos como sinônimos; e “Zero à esquerda” para dizer que alguém não tem valor.

Outra problemática com esse número está no quesito de avaliação. Ninguém quer receber essa nota zero, pois significa que aprendeu zero coisas sobre aquele assunto. Ou, que infelicidade é ver que não há nenhum dinheiro na conta do banco ou na carteira, está zerado. Estes são significados negativos para o zero. Mas será que o zero é tão ruim assim? Esses significados e dúvidas sobre o zero vão além dos muros escolares, tendo um forte apelo familiar e social (GUIMARÃES, 2008).

Por isso, o tema escolhido foi o zero, sua origem, sua representação na reta numerada, nas operações matemáticas: adição, subtração, multiplicação e divisão; suas propriedades nos diferentes conjuntos matemáticos presentes até o sexto ano, que é quando se inicia o estudo dos números e suas operações.

Assim, a pergunta desta pesquisa, depois de um processo árduo e de muitas descobertas, ficou sendo: **“Como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode contribuir para aprendizagem das operações com os naturais e melhorar a compreensão do papel do zero nas operações?”**. Tendo por objetivo **“Apresentar como a Metodologia de**

⁵ Prof. Júlio César de Mello e Souza também conhecido com o pseudônimo de Malba Tahan

Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode contribuir para aprendizagem das operações com os naturais e melhorar a compreensão do papel do zero nas operações.”.

Para atender a pergunta e o objetivo em questão, o trabalho foi estruturado da seguinte forma: na Seção Zero encontramos a introdução, a trajetória da pesquisadora com a devida justificativa e levantada a pergunta de pesquisa. Na Seção 1 discutiremos sobre o Modelo de Romberg-Onuchic que nos auxiliará no desenvolvimento da pesquisa.

Na Seção 2 haverá o levantamento histórico da construção do zero nas primeiras civilizações até os dias atuais (BOYER, 2012; IFRAH 1989, 1995; SALWI 1988; SEIFE 2000 e EVER 2011), destacando seus obstáculos e sua importância na/para a Matemática. Junto a esse levantamento, teremos uma revisão de literatura, observando o que outros autores investigaram, sugeriram e concluíram sobre essa temática (PADRÃO, 2008; TRACANELLA, 2018; GUIMARÃES, 2008).

A terceira Seção é sobre o tema Investigando a Própria Prática e o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (ROMBERG, 1992; ONUCHIC, NOGUTI, 2014; SANTOS, 2007; MARCONI, LAKATOS, 2003). O trabalho seguirá para a quarta Seção, com os Fundamentos da Matemática (CARAÇA, 1984; CENTURIÓN 1995, SANTANA 2012, entre outros), assim como os Problemas obtidos durante a pesquisa para responder à pergunta em questão. Por fim, terminaremos o trabalho com as considerações finais.

SEÇÃO UM: A PESQUISA E O MODELO DE ROMBERG-ONUCHIC

Minha caminhada científica, como a da maioria dos pesquisadores, foi cheia de mudanças. Entrei para a Pós-Graduação com a certeza de que os sujeitos da pesquisa seriam alunos do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental, Anos Iniciais, começando na origem dos problemas com o zero. Contudo, em 2019, o mundo enfrentou uma ameaça invisível, a COVID-19⁶, que colocou toda a sociedade em alerta.

⁶ "A covid-19 é uma doença que ataca o sistema respiratório causado por uma infecção aguda pelo vírus SARS-CoV-2, que pertence à família dos coronavírus. Como é uma doença de fácil transmissão

Precisei mudar os planos. Então recorri a planejar minha pesquisa com os professores dessa mesma escolaridade, os pedagogos. Consequentemente, a investigação da pesquisa precisou ser alterada e me mobilizei para, na época, responder à pergunta: **“Qual é a relevância do zero para a Matemática e como os professores da Educação Básica abordam esse conteúdo na sala de aula com seus alunos do 1º ao 5º ano?”**. Mas ainda não era definitivo.

Foram quase dois anos, que alunos e professores tiveram que se readaptar às aulas via chamadas de vídeo, como *Google Meet*, *Zoom* ou *Teams*. Contudo, apesar de todos os esforços, não podemos desconsiderar que muitos alunos não tinham acesso à internet ou a outros recursos tecnológicos para acompanhar essa nova forma de ensino. Também, muitos foram abalados por perdas de familiares, de amigos e de conhecidos por causa da doença. Assim, a falta de tecnologia, as perdas familiares e outros fatores prejudicaram o ensino de milhares de estudantes de diferentes faixas etárias.

Com a volta às aulas presenciais em setembro de 2021, como professora, pude sentir os efeitos do ensino remoto, com as dificuldades enfrentadas em sala de aula com alunos da 1ª série do Ensino Médio. Os dois últimos bimestres escolares foram de revisão de conteúdo dos anos anteriores, abordando poucos conteúdos do currículo dessa série.

Em 2022, atribuíram-me turmas de 6º ano do Ensino Fundamental. Esses alunos, vieram com uma realidade totalmente diferente. As escolas da Prefeitura da cidade de Rio Claro, diferentemente das escolas do Estado (Ensino Fundamental, Anos Finais e Ensino Médio) tiveram uma outra abordagem com os alunos. Eles ficaram sem aula desde março de 2020 até meados de setembro de 2021. No ano de 2020 nenhuma ação foi realizada entre alunos e escola. Em 2021 as escolas se mobilizaram para fazerem atividades impressas que seriam entregues quinzenalmente diretamente aos pais, evitando assim o contato com alunos. Em novembro de 2021, eles retornaram para escola, com revezamento de alunos em formato de bolha, ou seja, em pequenos grupos.

Devido a ela, a partir de 2020, houve mais de 6 milhões de vítimas fatais. Foi declarado no Brasil como pandemia pela Organização Mundial de Saúde (OMS) em 11 de março de 2020.
Acesso: <https://brasilescola.uol.com.br/geografia/pandemia-de-covid-19.htm>

Com isso, esses atuais alunos, de sextos anos, tiveram o quarto e quinto ano de escolaridade comprometidos. Entendo que tudo que foi possível realizar, pelos professores dos anos anteriores, foi feito. Todavia pudemos observar que houve prejuízo na aprendizagem.

Quando comecei a ministrar aulas para esses alunos, depois de Avaliações Diagnósticas, pude observar dificuldades com operações básicas, principalmente em subtração, multiplicação e divisão, as mais graves. Também recebi alunos com alto grau de dificuldade em leitura e escrita: alunos que só sabiam escrever o primeiro nome, alunos analfabetos funcionais, entre outras dificuldades.

Vi, nesse ambiente, uma oportunidade de minimizar parte dos impactos utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP) na minha própria formação de professora de matemática, estudando e pesquisando mais sobre o assunto, para auxiliar meus alunos na sua aprendizagem, mudando novamente os sujeitos da pesquisa e, assim, a pergunta e o objetivo. Ficaram definidos respectivamente: **“Como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode contribuir para aprendizagem das operações com os naturais e melhorar a compreensão do papel do zero nas operações?”** e **“Apresentar como a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode contribuir para aprendizagem das operações com os naturais e melhorar a compreensão do papel do zero nas operações.”**.

Para estruturar uma pesquisa é necessário que se pense na elaboração de um projeto para desenvolver a pesquisa que se quer adentrar. Fiorentino e Lorenzato (2006), ao criar um Roteiro para estruturar uma pesquisa apresentava-o em duas partes:

1ª parte: Elaboração do projeto de pesquisa destacando

1. Escolha do tema e sua justificativa;
2. Escolha do foco ou questões com problemas;
3. Escolha da Bibliografia;

4. Escolha do objetivo;
5. Escolha do método ou tipos de pesquisa;
6. Elaboração de um cronograma prevendo as diferentes etapas de pesquisa

2º Parte: Coleta, Análise e Conclusão

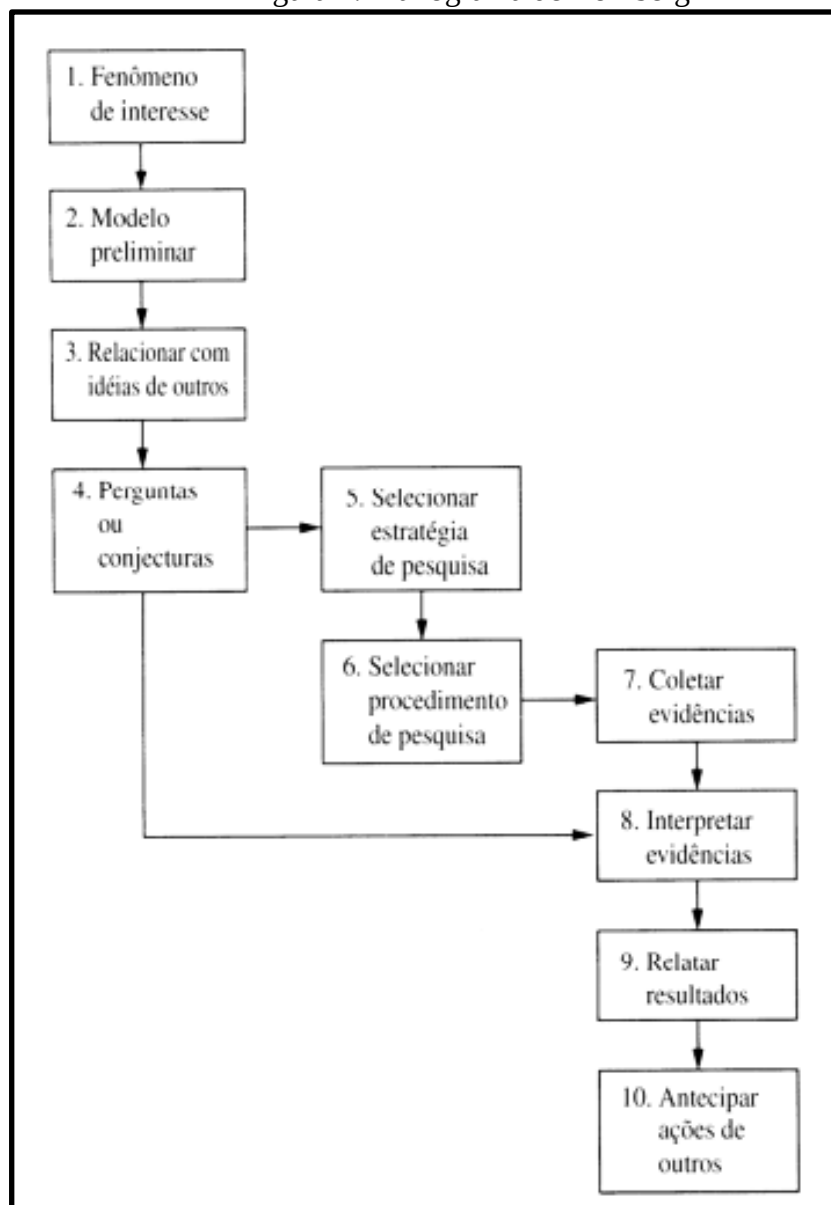
7. Cuidados referentes à coleta de dados
8. Cuidados referentes à análise de dados
9. A conclusão

Romberg (1992) em seu artigo “Perspectives on scholarship and Research Methods” traduzida por Onuchic e Boero (2007) e reimpresso sob o nome “Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa” na revista Bolema (Boletim de Educação Matemática). Onuchic e Boero, no resumo desse artigo, apresentado ao Bolema dizem que Romberg (1992) procura

identificar nas ciências sociais as amplas tendências de pesquisa relacionadas ao estudo do ensino e da aprendizagem em ambientes escolares e determinar como essas tendências têm influenciado o estudo da matemática nas escolas. (ONUCHIC, BOERO, 2007, p. 2)

Adiante, no artigo em questão, Romberg (2007) apresenta dez atividades que guiam o pesquisador na tomada de decisões sobre que tipo de evidências coletar e como realizou o trabalho de campo. Depois, com os dados coletados, o pesquisador deverá tirar conclusões e divulgar resultados.

Figura 2: Fluxograma de Romberg



Fonte: Romberg (2007, tradução de Onuchic e Boero)

O GTERP usou esse modelo em muitos dos seus trabalhos de dissertação e teses. Contudo, depois de ações e discussões, para atender às colocações do grupo, foi preciso modificá-lo, levando a acrescentar um item, o (4) Modelo Modificado, passando a ser chamado de Modelo Romberg-Onuchic.

Logo, o caminho a ser percorrido nesta pesquisa será conduzido a luz teórica do modelo de Romberg-Onuchic que define onze atividades importantes para a construção de um trabalho científico. São eles: (1) Fenômeno de Interesse; (2) Modelo Preliminar; (3) Relacionar com ideias dos outros; (4) Modelo Modificado; (5) Perguntas ou

Conjecturas; (6) Selecionar estratégias de pesquisa; (7) Selecionar Modelos de Pesquisa; (8) Coletar Evidências; (9) Interpretar as Evidências Coletadas; (10) Relatar Resultados; (11) Antecipar ações de outros (ONUChic, NOGUTI, 2014, p 59).

Essas onze atividades descritas estão dispostas em três blocos:

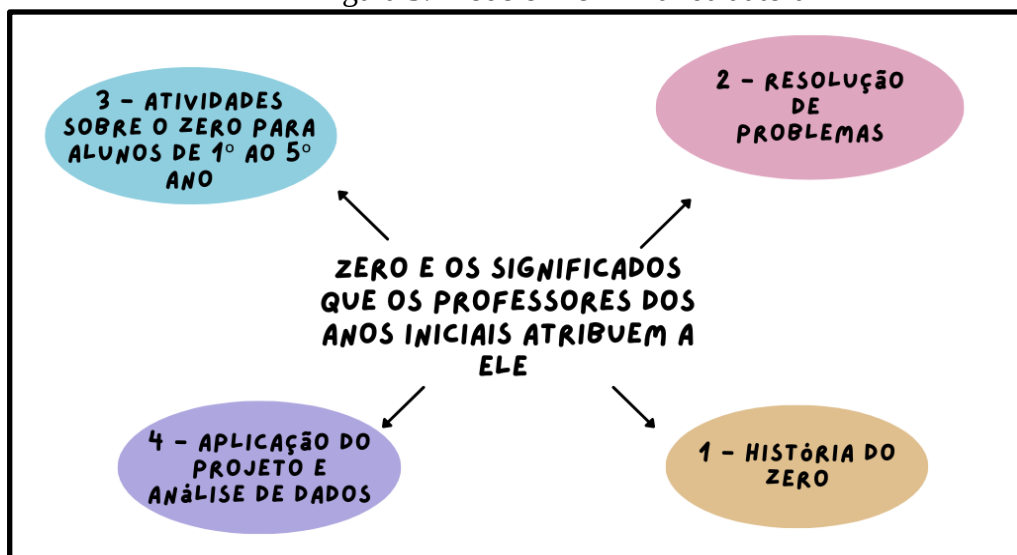
- 1º Bloco: do passo 1 ao 5 - identificação do problema da pesquisa;
- 2º Bloco: do passo 6 ao 7 - estratégias e procedimentos;
- 3º Bloco: do passo 8 ao 11 - conclusões.

Assim, seguindo esse modelo, entraremos no primeiro bloco enfatizando que a primeira atividade é o Fenômeno de Interesse: o ensino do zero e como ele pode contribuir para a aprendizagem das quatro operações matemáticas básicas dos números naturais.

A segunda atividade proposta nesse modelo é a construção de um modelo preliminar da pesquisa, isto é, quais são as primeiras ideias que o pesquisador tem e que acredita que serão necessárias para alcançar respostas às perguntas feitas. Diante do Fenômeno de Interesse posto em questão, foi pensado em buscar sobre a História do Zero, a Resolução de Problemas e as atividades que poderiam ser propostas para os professores baseadas na MEAAMa-RP.

O modelo preliminar, quando construído, estava na fase da pesquisa em que queríamos investigar a formação dos professores de 1º a 5º ano:

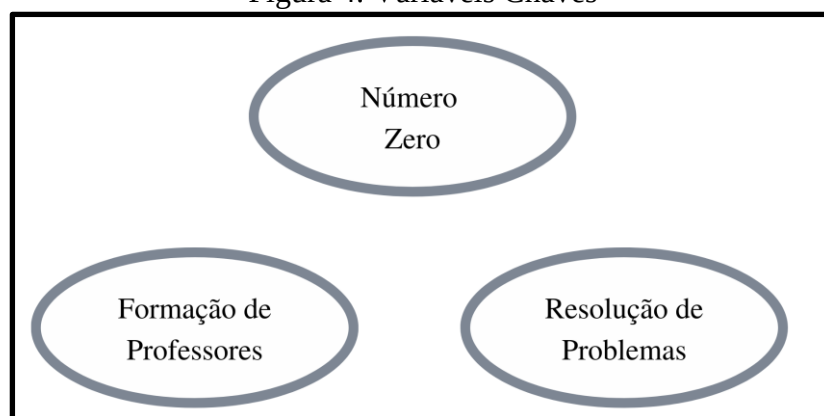
Figura 3: Modelo Preliminar da autora



Fonte: os autores

Contudo, como toda pesquisa em andamento, no processo de investigação, leituras e reflexões é comum que mudanças sejam feitas, que os caminhos e até mesmo as perguntas mudem, por isso dá importância do Modelo Modificado. O pesquisador tem que ser sensível a essas mudanças e muito mais que isso, aceitar essas mudanças de acordo com as necessidades inerentes à pesquisa. Olhando para esse Modelo Preliminar, podia-se observar alguns pontos identificados como variáveis-chave que poderiam abrir caminhos que nos levassem a responder nossa pergunta de pesquisa.

Figura 4: Variáveis Chaves



Fonte: os autores

Mas, devido ao novo cenário que nos foi colocado, tão relevante quanto o anterior, o foco mudou e foi necessária uma mudança no modelo. Com essas colocações, nosso modelo pôde ser alterado, tomando a seguinte forma:

Figura 5: Modelo Modificado da autora



Fonte: os autores

Podemos observar que as ideias, que tínhamos inicialmente, amadureceram. Permitindo que o trabalho se desenvolvesse como uma pesquisa científica investigando a sala de aula através do professor de matemática.

Essa mudança exige que sejam consideradas tanto a Pesquisa Pedagógica, que norteia e fundamenta as atividades da sala de aula, quanto a Pesquisa Científica, que confere aos estudos produzidos a validade e o rigor exigidos para que sejam, de fato, considerados pesquisa.

A pesquisa pedagógica, de acordo com Lankshear e Knobel (2008), surge da necessidade do professor que, observando eventos do cotidiano de uma sala de aula, deseja pesquisar sobre ela. (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p. 65)

O GTERP preocupa-se em fazer uso da pesquisa pedagógica em suas teses e dissertações e compreende que a MEAAM-RP é uma modalidade de pesquisa dividida em pesquisa pedagógica e pesquisa científica. A pesquisa pedagógica busca, em sua essência, melhorar os processos de ensino e aprendizagem em sala de aula utilizando para isso o ponto de vista do professor. Através dele espera-se compartilhar

conhecimentos e experiências que possam desenvolver competências e autonomia nele e nos seus alunos. (ONUChIC et al, 2014)

Para realizar uma pesquisa pedagógica, o professor deve ter em mente que é necessário que a pesquisa seja sistematizada, devendo “delimitar e justificar um determinado tema de estudo, levantar conjecturas ou hipóteses sobre ele, apresentar coleta de dados e, também, escrever um relatório da pesquisa feita” (ONUChIC; NOGUTI, 2014, p. 67). Essa sistematização permite que a pesquisa realizada tenha validade no meio científico. Adotamos então a MEAAMaRP como Pesquisa Pedagógica e o Modelo de Romberg-Onuchic para guiar nossa Pesquisa Científica.

SEÇÃO DOIS: CONTEXTO HISTÓRICO DO ZERO

Nesta seção iremos buscar, na bibliografia, referências sobre o zero desde sua formação na História da Matemática até seu uso em sala de aula através de trabalhos realizados por outros pesquisadores. Este é um momento importante em que podemos nos relacionar às ideias de outros autores.

2.1. História do Número

Antes mesmo da fala e da escrita, a ideia de contagem já existia. Os homens primitivos tinham como maior preocupação a alimentação e a sobrevivência. Eram nômades, em lugares abertos, e se instalavam em um determinado lugar enquanto havia comida. Suas armas eram produzidas para caça e sua arte representava essas caçadas.

Com o passar dos anos eles começaram a comercializar entre si, então se iniciou a ideia de contagem. Algumas tribos tinham até calendários pictográficos. É também de se esperar que eles tivessem a noção de *muito* e *pouco*. Porém, foi o desenvolvimento da agricultura, milhares de anos depois, que permitiu os avanços científicos, consequentemente matemáticos. (EVES, 2011)

Gundlach (1992) faz um estudo etnográfico para entender o desenvolvimento matemático das civilizações antigas, tomando como ponto de partida que a matemática é uma linguagem. Para explicar esse desenvolvimento, dividiu-se esse estudo em três fases: enumeração, numeração e número.

Este mesmo autor relata que o primeiro o homem utilizou a enumeração para comunicar quantidades. É uma correspondência um a um, de um objeto que se deseja contar (animais, dias, utensílios e etc) com um objeto marcador (pedras, galhos e partes do corpo). Nesse período, o homem não havia desenvolvido a fala e não entendia o significado quantitativo daqueles objetos marcadores. Alguns povos usavam partes do corpo como marcador, como mostra a Figura 6, no qual eles utilizavam a mão direita para indicar:

Figura 6: Processo de Enumeração

Dedo mínimo da mão esquerda
Dedo anular da mão esquerda
Dedo médio da mão esquerda
Dedo indicador da mão esquerda
Dedo polegar da mão esquerda
Pulso esquerdo
Cotovelo esquerdo
Ombro esquerdo
Lado esquerdo do peito
Lado direito do peito

Fonte: Gundlach (1992) p. 2

Então, se um pastor de ovelhas, ao relacionar a posição da mão com o número de animais, parasse no lado esquerdo do peito, bastava lembrar qual foi a última parte do corpo a ser tocada toda vez que contasse suas ovelhas. Era uma maneira também, se fosse necessário, de comunicar por gestos à sua comunidade a quantidade de ovelhas, “a ordem da sequência era fixa e natural”. (GUNDLACH, 1992)

A numeração, surgiu com a criação da linguagem e das palavras. Assim, cada parte do corpo recebeu uma palavra que ainda não era necessariamente um número. Para entender vejamos a Figura 7:

Figura 7: Processo de Numeração

1	<i>Tarangesa</i>	Dedo mínimo da mão esquerda
2	<i>Meta kina</i>	Dedo anular da mão esquerda
3	<i>Guigimeta</i>	Dedo médio da mão esquerda
4	<i>Topea</i>	Dedo indicador da mão esquerda
5	<i>Manda</i>	Dedo polegar da mão esquerda
6	<i>Guben</i>	Pulso esquerdo
7	<i>Trankgimbe</i>	Cotovelo esquerdo
8	<i>Podei</i>	Ombro esquerdo
9	<i>Ngama</i>	Lado esquerdo do peito
10	<i>Dala</i>	Lado direito do peito

Fonte: Gundlach (1992), p. 3

A passagem da enumeração para a numeração permitiu ao homem uma economia de ações físicas na hora de verificar a quantidade de objetos a serem contados, ou seja, não precisavam mais ficar indicando as partes do corpo. Cabe ressaltar que ainda não havia ideia de cada palavra ser um número, era mais uma ordem fixa de uma sequência de objetos.

Por último temos o surgimento dos números que podemos definir, segundo Lima et al (1997), como “entes abstratos desenvolvidos pelo homem como modelos que permitem contar e medir, portanto avaliar as diferentes quantidades de uma grandeza”.

Podemos observar nas duas figuras apresentadas, Figura 6 e Figura 7, que a maioria dos povos antigos contava até dez, seja utilizando as duas mãos ou com auxílio de algumas partes do corpo. Há civilizações que chegavam aos vinte, contando mãos e pés, e outras até 31. (GUNDLACH, 1992)

A invenção dos números se fez necessária pois, à medida que a sociedade crescia, problemas que precisavam de uma contagem de números maiores também surgiam. E “é útil ter nomes para números diferentes” (ASIMOV, 1993). Gregos, romanos, egípcios, babilônios, chineses e tantas outras civilizações criaram seus próprios sistemas de numeração, explanamos sobre algumas delas. Usavam símbolos e letras para expressar quantidades, na maioria dos casos usando um sistema aditivo e/ou multiplicativo. O problema da maioria deles, é que a escrita dos números se tornava exaustiva, por ficarem muito grandes.

Através dos sábios hindus com a ajuda dos árabes na popularização, chegamos nos números que conhecemos que são os hindu-arábicos. Os dez primeiros dígitos⁷ foram os primeiros a receber nome, sendo: um (1), dois (2), três (3), quatro (4), cinco (5), seis (6), sete (7), oito (8), nove (9) e dez (10). Mas seria impossível guardar um nome diferente para cada número, logo os nomes seguintes são provenientes dos dez primeiros. Foi assim que chegamos a cem, mil, milhão, bilhão e assim por diante. Podendo escrever qualquer número que seja de forma prática e rápida. E ainda operar com eles com facilidade.

Mas para isso, foi necessária a criação do zero, que não serve apenas para representar uma ordem vazia dentro de um sistema posicional, mas um número. E como este número (o zero) chegou até nós? Será que para as antigas civilizações foi algo trivial ou demandou muito tempo?

Não há como responder estas questões sem fazer uma viagem no tempo e entender como o Zero foi sendo pensado e construído ao longo dos séculos, em diferentes épocas e culturas, até chegar aos dias atuais. Veremos que o Zero enfrentou muitas barreiras para ser aceito pelos matemáticos e mais tempo ainda para passar de apenas um guardador de lugar para os números com propriedades definidas sobre ele e as operações executadas em números com o zero incluído.

Há muitas discussões sobre qual foi a primeira civilização ou quem foi o primeiro matemático a introduzir o zero num sistema de numeração. Contudo a intenção deste trabalho não está pautada nessa discussão, mas em rever alguns pontos importantes da história e compreender quais foram as dificuldades encontradas por estes humanos em identificar, em seus trabalhos, a forma como enfrentaram, ou não, problemas obtidos em seus sistemas de numeração.

Por isso, faremos um levantamento histórico da construção dos Sistemas de Numerações e do Zero, baseando-nos em Salwi (1988), Ifrah (1989, 1995 e 2010), Seife (2000), Pinedo (2004), Eves (2011) e Boyer (2012). Todos esses autores concordam que a trajetória do Zero não foi nada fácil de percorrer. Por mais que mostrar a ausência de uma quantidade se mostrasse necessária, chegar a isso custou muito. Sobre isso,

⁷ A palavra em latim *digitus* significa dedo. Em português é comum relacionar a palavra dedo e dígito, tornando-as quase idênticas (Asimov, 1993)

relataremos alguns acontecimentos ocorridos em quatro civilizações importantes ao se depararem com o Zero e de como lidaram com essa descoberta: Babilônios, Maias, Chineses e Hindus.

Nas outras grandes civilizações, como egípcios, gregos e romanos, seus sistemas de numeração não exigiam um zero. Na verdade, muitos deles tinham medo do zero e, mesmo que aparecesse uma necessidade em tê-lo, eles o ignoravam, supõe-se que por eles serem mais geométricos e práticos, então o zero não fazia sentido. Não falamos que temos zero ovelhas ou que a medida da largura ou do comprimento de um retângulo é zero e conseqüentemente sua área é zero, portanto não era aceita por eles a existência deste intrigante número. E mais, a ideia de existir o zero - o nada - se remetia ao caos ou ao vazio, que ia contra os princípios religiosos e filosóficos da época (SEIFE, 2000).

Por este motivo, não puderam vislumbrar a beleza escondida por detrás desse número e avançar em alguns cálculos matemáticos (aritméticos e algébricos). Enquanto esses povos tinham pavor do zero, outros viram a necessidade de tê-lo, e puderam construir novas matemáticas.

2.2. Sistema de numeração e o zero para os Babilônios

Entre os rios Tigre e Eufrates nasceu a civilização Mesopotâmica, que ficou conhecida como babilônios, durante o período de 2000 a.C. até 600 a.C., quando foi tomada por Ciro da Pérsia. Encontramos registros matemáticos dessa civilização em tábuas de argila, único material à disposição dessa civilização para registro. Essas tábuas eram feitas de argila molhada, os babilônios escreviam os caracteres em formatos de cunhas - por isso do nome cuneiformes - e por fim elas eram aquecidas até endurecer (BOYER, 2012).

Quadro 1: símbolos da numeração babilônica

1 - cravo	10 – asna
	

Fonte: os autores

Com apenas esses dois caracteres, os babilônios conseguiam escrever todos os seus números, com uma base sexagesimal, isto é, utilizando uma base 60. Para escrever, Ifrah (1995) nos descreve que eles usavam um cálamo feito de caniço, ou de uma vara de osso ou de marfim, no qual era talhada de forma que sua ponta tivesse um formato de uma linha reta, assim conseguiam fazer os dois algarismos: “o símbolo para o 1 [...] se obtinha pelo uso do ângulo do vértice do triângulo isósceles, e o símbolo 10 se obtinha pelo uso do ângulo da base.” (EVES, 2011, p 58) Esse sistema de numeração era posicional, logo os valores dos símbolos dependiam da posição que se encontravam. A Figura 8 mostra alguns exemplos de como eram escritos os números de 1 a 59:

Figura 8: sistema de numeração sexagesimal dos babilônios

 1	 11	 21	 31	 41	 51
 2	 12	 22	 32	 42	 52
 3	 13	 23	 33	 43	 53
 4	 14	 24	 34	 44	 54
 5	 15	 25	 35	 45	 55
 6	 16	 26	 36	 46	 56
 7	 17	 27	 37	 47	 57
 8	 18	 28	 38	 48	 58
 9	 19	 29	 39	 49	 59
 10	 20	 30	 40	 50	

Fonte: Imagens Google

Para representar o número 60 usavam o mesmo símbolo do 1, num tamanho maior para diferenciar:



Se observamos o exemplo dado por Boyer (2012), do número 222, se compararmos com o nosso sistema de numeração atual, onde cada algarismo tem um significado diferente, temos 2 unidades, 2 dezenas e 2 centenas, ou seja,

$$222 = 200 + 20 + 2 = 2 \times (10^2) + 2 \times (10) + 2.$$

O mesmo acontece com o sistema de numeração sexagesimal, quando repetimos um símbolo, cada posição tem um significado. Vejamos,

𐎶 𐎶	𐎶 𐎶	𐎶 𐎶
2×60^2	2×60^1	2×60^0

Ou seja: $2 \times (60^2) + 2 \times (60) + 2 = 7200 + 120 + 2 = 7322$. Todavia, com números de ordens superiores, isto é, números muito grandes, os babilônios encontraram algumas dificuldades, por não possuírem um símbolo para representar as posições vazias - eles não tinham um símbolo para o zero - o que ocasionou algumas ambiguidades.

Segue um exemplo de uma das dificuldades encontradas por eles, utilizando apenas duas cunhas:

𐎶 𐎶

para este, podemos ter várias suposições, poderia ser o número (relacionado com o nosso sistema de numeração atual):

- 2
- $(60) + 1$
- $(60)^2 + 1$

e tantas outras combinações.

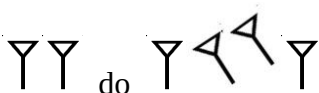
Para resolver tal problema, no começo, eles deixavam um espaço em branco entre os símbolos. Quando tinham que anotar várias ordens nulas consecutivas, como

dois espaços, com essa forma de escrita era difícil expressar o que queriam com precisão. Normalmente, pelo contexto da escrita, essa situação era solucionada, porém não evitava que houvesse confusões. Então, foi necessário criar um símbolo para representar o espaço vazio.

Essa “invenção” não foi rápida e nem trivial. Apenas em 300 a.C. foi que eles introduziram um marcador de lugar medial para simbolizar posições faltosas, utilizando duas cunhas oblíquas.



Logo, poderíamos diferenciar



Mas observe, esse zero era um marcador de lugar medial, ou seja, ele nunca aparecia no começo ou no final de um número, assim eliminava uma parte do equívoco, pois ainda era difícil diferenciar:

$$(60^3) + (60^2) \text{ de } (60^2) + (60)$$

Esse “zero” não tinha um valor numérico próprio. Além disso, eles não souberam aproveitar essa descoberta para fazer operações aritméticas, talvez pela dificuldade de trabalhar com apenas dois símbolos numéricos, tendo em vista que o símbolo para o zero ainda não era considerado como número, somente como guardador de lugar. (IFRAH, 1995)

2.3 Sistema de numeração e o zero para os maias

Os maias eram uma civilização que vivia no continente americano, especificamente na América Central, antes da invasão dos espanhóis. Lá, eles construíram um sistema de numeração vigesimal, melhor dizendo, de base 20, no qual,

Figure 9. Signal level $\sim M_{\text{bol}}$

Fonte: Ifrah (1995, p 639)

Figure 10. Effect of the initial concentration of the monomer on the polymerization of α -methylstyrene.

2

Fonte: os autores

Fig. 11: Exemplos da mudança na terceira posição



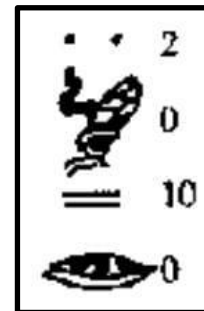
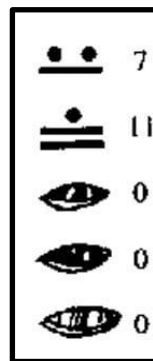
Fonte: os autores

ao invés de $7 \times 400 + 4 \times 20 + 12 = 2892$ por conta dessa mudança seria:

$$7 \times 360 + 4 \times 20 + 12 = 2612.$$

Do mesmo modo, ocorria para as posições seguintes do quarto, quinto andar e assim por diante. Logo com multiplicações e adições chegava-se a qualquer número por maior que fosse. Entretanto, como o sistema anterior dos babilônios, os maias também precisavam de algum símbolo para as posições faltosas. Muito sábios, inventaram um guardador de lugar em formato de caramujo ou concha de escargot. (IFRAH, 1995)

Figura 12: Exemplos de números com o símbolo do zero como guardador de lugar



$$7 \times 144000 + 11 \times 7200 + 0 \times 360 + 0 \times 20 + 0 \quad 2 \times 7200 + 0 \times 360 + 10 \times 20 + 0$$

Fonte: Ifrah (1995, p 641-642)

Notem pela Figura 12 que diferentemente dos babilônios, os maias usavam a representação para o zero tanto na posição medial quanto na final. Uma suposição, também para a criação do zero era mais do que a necessidade matemática, mas uma imposição religiosa, pois, em suas representações, eles associavam cada símbolo numérico a um deus do tempo e era inadmissível um dos deuses não ter um símbolo numérico para eles. (IFRAH, 1989)

Figura 13: Números Maias



Fonte: Seife (2000, p. 8)

Com medo de enfurecer os deuses, houve a criação simbólica do zero. Infelizmente, os maias não puderam avançar na aritmética devido à mudança de base na terceira posição. (IFRAH, 1989)

2.4 Sistema de numeração e o zero para os chineses

Como a maioria das civilizações antigas, os chineses se instalaram entre rios: Iang-tse e o Amarelo. Os registros encontrados dessa civilização não são tão confiáveis quanto os demais, pois em 213 a.C., Shi Huang-ti, o imperador da época, mandou queimar todos os livros por questões políticas. Além da perda lastimável de boa parte desses conteúdos, os que foram reconstruídos eram, de acordo com a memórias dos escritores, o que traz inseguranças aos historiadores quanto à veracidade desses registros

e se houve influências ou não de outros povos nas descobertas matemáticas (BOYER, 2012) e (EVES, 2011).

O que se sabe é que os chineses construíram dois tipos de sistemas de numeração: um baseado no princípio multiplicativo e outro baseado em notação posicional. No primeiro existia um símbolo para os números de um a nove, e também os símbolos para representar as potências de dez. Como mostra a Figura 14:

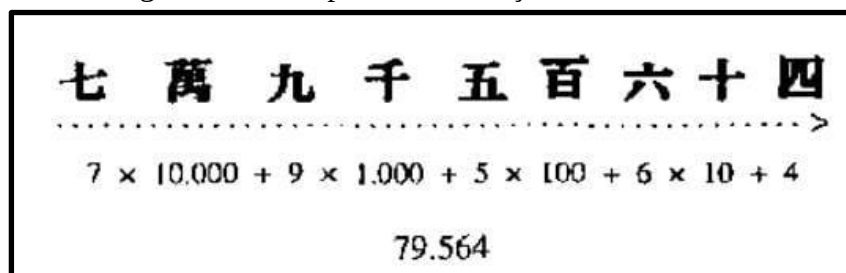
Figura 14: Sistema de numeração decimal chinesa

1	一	10	十
2	二		
3	三	100	百
4	四		
5	五	1 000	千
6	六		
7	七	10 000	萬
8	八		
9	九		

Fonte: Ifrah (1995, p 551)

“Assim, para todos os números intermediários, os chineses utilizavam a adição e a multiplicação ao mesmo tempo, decompondo o número 79564, por exemplo” (IFRAH, 1995, p 552):

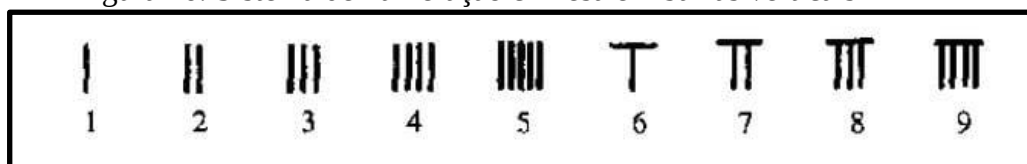
Figura 15: Exemplo de numeração chinesa



Fonte: Ifrah (1995, p 552)

No segundo sistema, com características parecidas com o nosso atual sistema de numeração, além de ser decimal era posicional, no qual cada símbolo representava um valor de acordo com o lugar que ocupava. Os algarismos de um a nove eram ideográficos, representados por barras verticais, como mostra a figura:

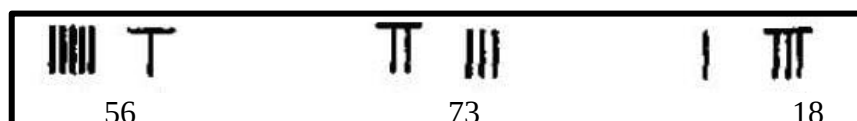
Figura 16: Sistema de numeração chinesa em barras verticais



Fonte: Ifrah (1995, p 581)

Alguns exemplos de números com esse sistema de numeração:

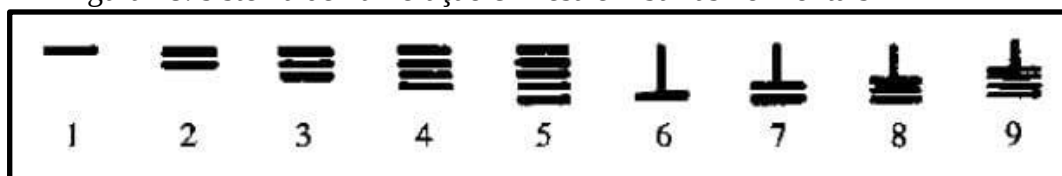
Figura 17: Exemplos de números chineses em barras verticais



Fonte: os autores

Infelizmente, algumas ambiguidades também ocorriam com os chineses, como no caso do 3 e do 12, ou 5 com 32, ou mesmo o 46 com 136, que ao escreverem se tornavam idênticos. Para contornar tal problema, continuaram usando as barras, mas na horizontal:

Figura 18: sistema de numeração chinesa em barras horizontais



Fonte: Ifrah (1995, p 582)

Depois, para bem distinguir as diferentes ordens de unidades em sua sucessão regular, alternaram os algarismos da primeira série com os da segunda. As unidades da sequência ímpar (unidades simples, centenas, dezenas de mil, milhões etc) foram expressas através de algarismos "verticais" e as unidades da sequência par (dezenas, milhares, centenas de mil, dezenas de milhões etc) por meio de algarismos "horizontais". E é assim que as ambiguidades foram igualmente dissipadas. (IFRAH, 1995, p 582)

Figura 19: Exemplos de números chineses utilizando barras verticais e horizontais

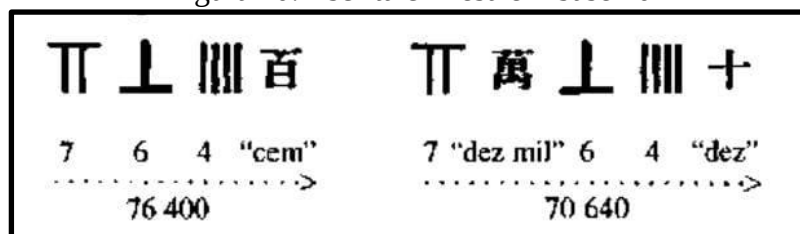


Fonte: os autores

Devido à ausência de um símbolo para as unidades faltosas havia inúmeras confusões. Assim como os babilônios, no início, deixavam um espaço em branco entre um algarismo e outro, o que não ajudou a solucionar por completo o problema. Ifrah (1995) nos mostra que os chineses tentaram resolver tal situação de outras três formas para deixar claro ao leitor o que queriam representar:

- a) Escreviam os numerais e nas posições faltosas expressavam por extenso as bases de dez

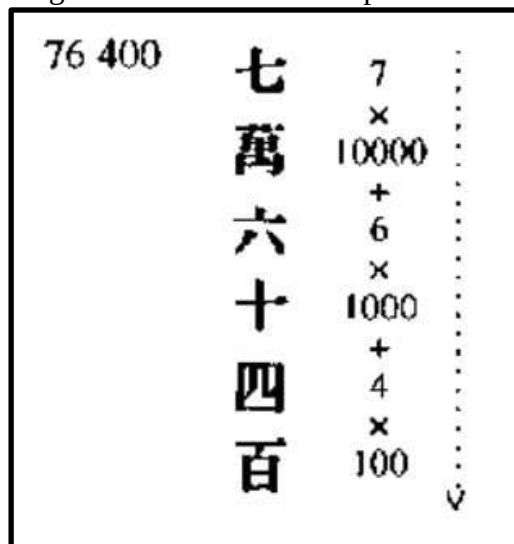
Figura 20: Escrita chinesa em base 10



Fonte: Ifrah (1995, p 585)

- b) Escreviam todo o número por extenso

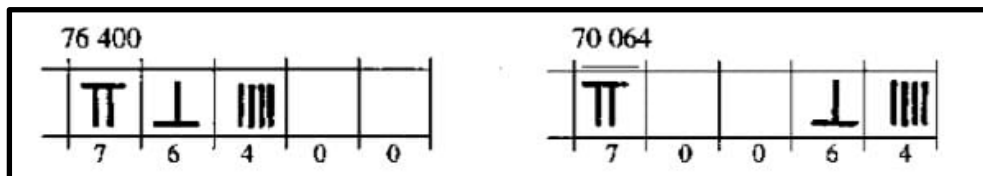
Figura 21: Escrita chinesa por extenso



Fonte: Ifrah (1995, p 585)

- c) Colocavam cada algarismo em um quadrilhado e deixavam vazio nas posições vazias

Figura 22: Escrita chinesa em quadrilhado



Fonte: Ifrah (1995, p 585)

Até então, apenas três povos conseguiram descobrir o princípio de posição: babilônios, chineses e maias, que foram assim os primeiros da história a poder representar qualquer número por maior que fosse, por meio de uma quantidade bastante limitada de algoritmos de base. [...] (IFRAH, 1989, p 261-262)

Por conta dessas incompletudes em cada uma das civilizações: os babilônios com o zero medial, os maias com a mudança na terceira posição e os chineses com a falta de um símbolo para o zero, não puderam evoluir na aritmética. E os zeros (símbolos) criados pelas duas primeiras civilizações não puderam contribuir no desenvolvimento matemático.

2.5 Sistema de numeração e o zero para os Hindus

Tem-se poucos registros históricos sobre o desenvolvimento da matemática hindu. Alguns exemplares, na época do Imperador Açoka por volta de 250 a.C., dos atuais números que usamos estão escritos em colunas de pedras na Índia. Os historiadores também não sabem ao certo, mas acreditam que os hindus tiveram influências de outras civilizações nas suas descobertas matemáticas, principalmente pela vinda de Alexandre, o Grande, em terras indianas, que trouxe influências da matemática grega, egípcia e babilônica (BOYER, 2012), (EVES, 2011) e (IFRAH, 2010).

Os hindus trabalhavam com um sistema parecido com os dos babilônios, os dois tinham em comum um sistema de numeração posicional, mas que se diferenciava por ser um sistema decimal, inicialmente com nove algarismos (de 1 a 9). E foi através deles, que conhecemos o zero tanto como símbolo quanto como número, em que se baseia o nosso sistema moderno.

No início, para representar números muito altos, além dos nove algarismos, eles começaram a escrever cada potência de dez. Em Ifrah (1989), é exemplificado que se eles queriam expressar 635, escreviam: 5, 3 *dasa*, 6 *sata*, onde *dasa* significava 10 e *sata* 100. Podemos notar que, os números, foram dispostos da esquerda para direita o contrário de como fazemos na atualidade, isto é, o 6 é a unidade, 3 *dasa* é a dezena e 6 *sata* é a centena nesse sistema de numeração. Para números maiores essa técnica de escrever as potências de dez era exaustiva e, a fim de facilitar, passaram a exprimir só os números, ainda da esquerda para a direita.

Assim, surgiu um problema, como expressar 402? Se escrevessem, o 2 4, não seria 402, mas sim 42. “Os sábios hindus contornaram o obstáculo recorrendo à palavra *sunya*, que significava ‘vazio’” (IFRAH, 1989, p 270). Então, o 402, poderia ser expresso como: 2 vazio 4. Obviamente essa descoberta não foi tão rápida, mas foi muito significativa para a matemática.

[...] o zero era representado por um círculo com um ponto no centro. Em sânscrito, o idioma então popular na Índia, era chamado “soonya” - vazio ou nada. Naquele tempo, quando o sânscrito era falado em todo o país, o zero tinha vários nomes como “kha”, “gagana”, “akasa”, “nabha” , “ananta”, que denotavam céu, vazio, ou infinito ou completo (SALWI, 1988, p. 9-10, tradução nossa)

Tinham eles, então, 9 algarismos distintos, princípio de posição e a descoberta do zero. Demorou algum tempo para eles aperfeiçoarem essas ideias. Foi necessário mudar a forma da escrita dos números, começaram a trabalhar com tábuas e colunas de ábacos na areia para fazerem operações, inclusive a de multiplicação.

Em menos de meio século, este conceito já significava indistintamente “vazio” ou “nada”, tendo sido enriquecido pela aquisição do sentido que atribuímos hoje à “quantidade nula” ou “número zero”. Graças a isto, o matemático e astrônomo Brahmagupta pode ensinar, em uma obra do ano de 628, o modo de efetuar simplesmente as seis operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação, divisão, elevação de potências e extração de raízes). [...] A álgebra moderna acabava de nascer [...] (IFRAH, 1989, p 293)

Tem-se, através desse gênio hindu e outros matemáticos indianos brilhantes, uma invenção extraordinária, que abriu portas não só para a aritmética, mas, também, a possibilidade de generalizar números e o desenvolvimento da álgebra e, entre outras, a descoberta da ausência e da nulidade.

Diferente dos povos do Ocidente, Brahmagupta se arriscou a definir as operações básicas sobre o zero. Esse matemático, além do zero, já trabalhava também com os números negativos, que era outro grande avanço à frente dos matemáticos europeus. Vejamos como são para as operações de adição e subtração (PINEDO, 2004):

(i) Adição: “A soma de zero e um número negativo é negativo, a soma de um número positivo e zero é positivo, a soma de zero e zero é zero”.

(ii) Subtração: “Um número negativo subtraído de zero é positivo, um número positivo subtraído de zero é negativo, zero subtraído de um número negativo é negativo, zero subtraído de um número positivo é positivo, zero subtraído de zero é zero”.

Note que a subtração é um pouco mais complicada, contudo, os hindus já operavam com as regras de sinais. Vejamos agora como eles definiam:

(iii) Multiplicação: “Qualquer número multiplicado por zero é zero”

Porém o problema estava na divisão:

(iv) Divisão: “Números positivos ou negativos quando divididos por zero são uma fração, com o zero como denominador. Zero dividido por negativo ou positivo, escreva a expressão como uma fração com zero como numerador e a quantidade finita como denominador. Zero dividido por zero é zero”.

Infelizmente, Brahmagupta não conseguiu definir bem a divisão por zero, mas era uma tentativa de estender o campo matemático. Contudo, foi através dele que muitos outros matemáticos tiveram um trampolim para avançar na álgebra e na aritmética. Duzentos anos depois, o matemático Mahavira também tentou melhorar a afirmação de Brahmagupta, em relação à multiplicação e à divisão. Contudo a confusão sobre a divisão permanecia: “Um número multiplicado por zero é zero e um número permanece o mesmo quando zero é subtraído disto. E um número permanece inalterado quando é dividido por zero”. (Pinedo, 2004).

Depois de 500 anos de Brahmagupta, outro matemático tenta dar uma explicação da divisão por zero, que ainda não estava correta. Foi Bhaskara afirmando:

que $(n/0) \cdot 0 = n$. Assim, Bhaskara tentou resolver o problema escrevendo $n/0 = \infty$. No princípio observe, poderíamos ser tentados a acreditar que Bhaskara fez o correto, mas claro que ele não fez. Se isto fosse então verdade que 0 vezes ∞ deve ser igual a qualquer número n, assim todos os números seriam iguais. Os matemáticos indianos não puderam resolver o problema da divisão por zero, a ponto de admitir que não se podia dividir por zero. Bhaskara declarou outras propriedades corretas para o zero, como $0^2 = 0$ e $\sqrt{0} = 0$ (PINEDO, 2004, p. 29).

Bhaskara acertou nas propriedades de potenciação e radiciação. Porém o grande problema ainda era na divisão!

2.6 A chegada do zero na Europa através dos árabes

Os árabes aproveitaram o conhecimento de diversas culturas para seu benefício, adotando os conhecimentos dos outros para aprimorar sua matemática. Aliás, foi através deles, que os conhecimentos gregos não se perderam por completo quando destruíram a

biblioteca de Alexandria por duas vezes, pois eles tinham cópias de alguns manuscritos, que puderam ser traduzidos e reconstituídos pelos gregos.

Não foi diferente com a matemática hindu! Os árabes ficaram tão encantados com a facilidade da aprendizagem matemática da Índia, do seu sistema posicional e decimal, e com os números, que não foi difícil aceitá-los e integrá-los em seu cotidiano. Claro, que muitas modificações, principalmente na escrita dos números, foram realizadas para se adequarem à escrita arábica como na Figura 23:

Figura 23: Evolução da escrita dos números

Algarismos Devanagari da época de Brahmagupta.	१ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९ ०
Algarismos Devanagari primitivo, anterior a Brahmagupta.	१ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९ ०
Algarismos árabes de 800 d.C.	١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠
Algarismos árabes atuais.	١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠
Letras árabes eventualmente usadas como algarismos	ا ب ج د ه و ز ح ط ي
Algarismos indo-arábicos medievais.	١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠
Indo-arábico atual.	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Fonte: adaptado de Pinedo (2004)

Enquanto os árabes se desenvolviam na matemática, os países ocidentais estavam ainda com dificuldades nas operações básicas de contagem. Muitos intelectuais da época sabiam ler e escrever com maestria, alguns até a arte da música, mas não sabiam adicionar e subtrair. Não fazia parte do programa das escolas da época, a aprendizagem dos cálculos matemáticos. Em poucas escolas, como as italianas, é que os alunos tinham a oportunidade de aprender multiplicação e divisão, já que estas tinham influências árabes (IFRAH, 2010).

Logo, um simples cálculo que levamos atualmente alguns minutos para realizar, naquele momento durava horas, por conta dos métodos ultrapassados utilizados pelas escolas e universidades. Assim, ficava restrito a uma minoria de pessoas que conseguiam entender tais operações.

Segundo Ifrah (2010), o sistema de numeração decimal hindu reconstruído pelos árabes, chegou definitivamente na Europa, devido a Gerbet d'Aurillac que, curioso para

aprender a arte da matemática e astronomia, mudou-se para Espanha, na escola dos mestres árabes. De volta à França, dirige escolas diocesanas, ensinando tudo que aprendeu na Espanha, permitindo e influenciando o Ocidente a entender e gostar de matemática.

Então, Gerbet se torna um dos precursores da introdução dos algarismos arábicos em nossa cultura, mas ainda não do zero, pois o clérigo não aceitava tradições de fora. Como continuavam utilizando o ábaco não sentiam a necessidade do zero, já que nesse instrumento bastava deixar a coluna vazia.

Foi no período do Renascimento que tudo mudou. Nele a Europa se abriu para a arte e a ciência novamente, e os cruzados tiveram uma parcela significativa nessa responsabilidade. As Cruzadas eram compostas por homens que acreditavam que, lutando contra os muçulmanos por conta da Terra Santa, teriam seus pecados perdoados. Nessas expedições, porém, com acesso a essas culturas, eles aprenderam o cálculo segundo Al Khwarizmi, sem o uso do ábaco, que teve por consequência a utilização do zero e do cálculo hindu.

Por outro lado, também aconteciam no Mediterrâneo, as traduções das obras grega, hindu e árabe na Espanha, o que levou esse país a receber diversos estrangeiros sedentos pelo conhecimento matemático, filosófico e de ciências naturais. Logo, o método utilizando o ábaco, começou a se tornar obsoleto e a utilização dos algarismos indo-arábicos passou a ser crescente entre os professores e seus discípulos (IFRAH, 2010). Mas a batalha entre os abacistas e algoristas ainda estava longe de terminar.

Um matemático importante dessa época foi Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci que, em uma das suas viagens à África e ao Oriente Próximo, conheceu mestres matemáticos árabes “que lhe explicaram a fundo o sistema numérico, às regras do cálculo algébrico e os princípios fundamentais da geometria” (IFRAH, 2010, p. 314).

Depois disso, escreveu um tratado esclarecendo as regras de cálculo, intitulado Tratado do Ábaco, para não criar atrito com os matemáticos europeus que utilizavam o ábaco como instrumento de cálculo e tinham o monopólio da arte da matemática e

temiam perder suas posições privilegiadas com a democratização do cálculo à população.

Além dos abacistas, a Igreja também interferiu, defendendo que tal conhecimento era satânico, principalmente em relação ao zero, que era traduzido como “vazio”, que ia contra os preceitos religiosos. Mas na verdade, ela também estava com medo de perder seu poder, já que boa parte das escolas e dos especialistas (professores) pertenciam ao clero. Porém,

Com a expansão do comércio, cada vez mais os cálculos demandavam maior destreza e exatidão. Os comerciantes necessitavam realizar contas de débito e crédito de seus clientes e o zero exercia papel de balança: quando a soma dos débitos e créditos resultava em zero, o cliente estava com suas dívidas pagas (TRACANELLA, 2018, p. 35 e 36).

Enquanto os comerciantes buscavam meios de facilitar as transações comerciais, havia uma briga interna entre os matemáticos da época: os abacistas que defendiam o uso do ábaco como ferramenta matemática para os cálculos e os algoristas, que defendiam o uso dos números indo-arábicos. E foi no meio dessa resistência, aproximadamente no século XVI, que o zero foi reconhecido como número. (TRACANELLA, 2018)

Apesar de toda essa resistência, era claro que o método dos algoristas eram muito mais prático e eficiente e, aos poucos, foram se tornando os mais utilizados pelo mundo, possibilitando o reconhecimento do zero pelos matemáticos e pela sociedade.

2.7 Um mundo sem o zero?

Será que agora, sabendo de toda essa evolução que o zero teve, podemos imaginar um mundo sem ele? Pelo jeito não! Assim que o zero foi reconhecido, obteve-se um número que foi a âncora para a álgebra e a matemática atual.

Concordamos com Salwi (1988) que, para uma simples equação do segundo grau dada por $ax^2 + bx + c = 0$, não seria possível obter sua solução sem a descoberta do zero, ou mesmo a medição de temperatura, o cálculo da velocidade de um veículo ou qualquer outro tipo de medição, uma vez que o uso dos computadores, a física elétrica e nuclear, todas foram criadas ou aperfeiçoadas por conta do zero. Logo não haveriam celulares, computadores, internet, e enfim, o mundo tecnológico que conhecemos hoje não existiria.

Mas, afinal, o que é esse zero? Existe algo como zero na natureza? Não! Mesmo um espaço vazio contém ar, não "nada". O espaço exterior também não é tudo nada ou vácuo. A natureza abomina o vácuo e, portanto, um zero. Ele existe na mente. É uma criação da mente. Mas, como visto acima, levou a avanços consideráveis na ciência e na engenharia. É aí que reside o gênio da mente indiana antiga (SALWI, 1988, p. 25, tradução nossa).

Realmente, se analisarmos o nosso cotidiano não encontramos a necessidade em falar: “Tenho zero caixas de laranjas” ou “o volume que tal objeto ocupa é zero” ou mais “vou devolver zero reais de troco”. Não vemos o zero na natureza. Entretanto, foi através dele, como já comentamos anteriormente, que houve avanços na matemática e em outras ciências.

Em síntese, pode-se notar que o zero fez um grande percurso para ser reconhecido e aceito pelos matemáticos. Entretanto, entre alunos e alguns professores ele ainda é visto como nada e gerador de muitos equívocos.

Na próxima Subseção, uma vez realizada a contextualização histórica do zero e seu papel no desenvolvimento da matemática contemporânea, faremos uma revisão de literatura, descrevendo o que outros autores discutiram e concluíram sobre esse tema mostrando o que nosso trabalho tem para acrescentar ou diferenciar-se dos demais.

2.8 Um olhar na literatura

Há autores que destacam em seus trabalhos a importância do zero, desde sua criação até sua utilização em sala de aula com alunos da Educação Básica. Esta

Subseção será dedicada para apresentar alguns desses trabalhos, bem como seus objetivos, justificativas, dados apresentados e, principalmente, analisando quais são as contribuições desses trabalhos para a Educação Matemática e para este trabalho em questão.

Para encontrá-los buscamos no catálogo de teses e dissertações da Capes. Ao buscar a expressão, “ensino do zero” ou “aprendizagem do zero”, nenhum trabalho foi encontrado, mas ao utilizar a expressão de busca “história do zero” e “significados do zero”, encontramos respectivamente, duas dissertações e uma tese. Diante disso, realizamos a leitura de ambos os textos e encontramos outros trabalhos que subsidiaram a discussão feita nesta Seção.

Apesar da busca por “ensino do zero” não encontrar nenhum resultado, esses trabalhos referentes à história e ao significado trouxeram pesquisas sobre o ensino com alunos.

Como mencionado por Araújo e Borba (2010), que:

Ao realizar uma pesquisa, torna-se importante que, após a definição do tema, seja encontrado um foco, que se traduz, de forma mais específica, em um problema ou pergunta de pesquisa. E um procedimento primordial nessa empreitada é a revisão da literatura, na qual o pesquisador situa seu trabalho no processo de produção de conhecimento da comunidade científica. Ela é importante não só para que ‘não reinvente a roda’, refazendo o que já está feito, mas também porque o exercício de encontrar lacunas em trabalhos realizados ajuda na ‘focalização da lente’ do pesquisador (ARAÚJO, BORBA, 2010, p. 41).

Destacamos três trabalhos que foram essenciais para a evolução desta pesquisa, de modo que nos auxiliou a entender mais sobre nosso fenômeno de interesse e analisar diferentes abordagens em sala de aula e históricas.

2.8.1 A Origem do Zero

O trabalho de mestrado profissional de Darice Lascala Padrão, intitulado A Origem do Zero, está dividido em três capítulos. No capítulo 1 a autora apresenta sua justificativa para o tema, apontando que iniciou sua investigação sobre o zero devido à observação, feita em sala de aula, em que seus alunos do ensino básico ignoravam o

zero no cálculo para encontrar a solução da equação polinomial do 2º grau, $ax^2 + bx + c = 0$, utilizando a fórmula de Bhaskara ($x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$) e, quando o termo independente c era igual a zero, os alunos multiplicavam -4 pelo valor de a e não multiplicavam por zero.

Com esse problema, a autora buscava responder “Quais foram as dificuldades encontradas pelas civilizações, ao longo da história, até instituírem o zero como um elemento integrante da matemática?” (PADRÃO, 2008, p. 18)

O capítulo 2 é dedicado a responder à questão de pesquisa utilizando como recurso o levantamento bibliográfico de documentos sobre a temática. Nesse levantamento Padrão (2008) destaca três trabalhos: o artigo Sentidos Atribuídos ao zero por alunos da 6ª série (SALVADOR; NACARATO, 2003); a dissertação Sentido do zero (GUIMARÃES, 2008); e o artigo História do Número Zero (PINEDO; SBARDELOTTO, 2004).

A partir desses trabalhos, a autora pôde entender o contexto histórico do zero e as dificuldades apresentadas tanto pelas antigas civilizações quanto pelos alunos atualmente. No capítulo 3 é construído um contexto histórico no qual o zero está inserido, desde a civilização babilônica até a civilização hindu que, além do algarismo zero, criou-se um conceito para o zero transformando-o em número e com operações definidas sobre ele. (PADRÃO, 2008)

Por fim, nas considerações finais é revisto tudo o que foi discutido no trabalho e é sugerido que mais trabalhos sejam feitos em sala de aula com os alunos sobre esse tema.

Apesar do trabalho ser sucinto, ele traz em evidência pesquisas interessantes sobre a temática, também tem a construção cronológica não só em palavras, mas utilizando tabelas e gráficos do “nascimento do zero” até os dias atuais, ajudando na visualização do contexto histórico.

2.8.2 Sentidos do Zero

A Dissertação de Mestrado Sentidos do Zero realizada por Fabiane Guimarães também possui três capítulos. De início temos a trajetória da pesquisadora que, em um curso de especialização, estudou sobre o zero nas diferentes culturas, em especial na cultura Maia. Devido ao seu interesse pela História da Matemática, ela continua seus estudos por meio da dissertação de mestrado.

Apesar do seu grande interesse pela história do zero, essa história já está construída. Logo com a ajuda do orientador, mudou-se o foco para além do sentido bibliográfico, o objetivo foi o de analisar quais seriam os sentidos que crianças, jovens e adultos atribuiriam ao zero. Para isso, a autora se fundamentou na Etnomatemática para desenvolver sua pesquisa.

Temos então, no primeiro capítulo, a trajetória da autora o objeto de pesquisa que é analisar “Quais os sentidos atribuídos ao zero por alunos de diferentes idades e séries da escolaridade?”. Ela realizou entrevistas e questionário com alunos em escolas estaduais do Ensino Infantil, Ensino Fundamental Anos Iniciais (ou Ensino Fundamental I - EF I), Ensino Fundamental Anos Finais (ou Ensino Fundamental II - EF II), Ensino Médio e alunos do EJA (Educação de Jovens e Adultos), totalizando 211 relatos, como uma revisão de literatura apontando dois trabalhos: Salvador; Nacarato (2003) e Vergani (2001).

Ainda, neste capítulo, a autora apresenta alguns questionamentos que foram levantados aos entrevistados como: “Escreva com suas palavras o que é o zero para você”. E descreve que os alunos resgataram significados aprendidos tanto dentro quanto fora da escola. Ela reflete também sobre o conceito dado pelos alunos relacionando-o às ideias do filósofo Vygotsky. Para finalizar o capítulo, é apresentado o Programa de Etnomatemática, que tem como autor principal D’Ambrosio.

O segundo capítulo é dedicado à história do zero. Para isso, é necessário descrever os diferentes sistemas de numeração criados pelas diferentes civilizações. Apesar de começar a descrever os sistemas de numeração dos egípcios e dos gregos que, estes apesar de serem grandes matemáticos e famosos, não criaram o zero, pois seus sistemas não precisavam de um zero algarismo. A autora deixa claro que: “A presença do zero algarismo para a constituição dos números só é necessária quando se fala de um

sistema de numeração posicional, característica essa que não aparece nos sistemas egípcio, grego e romano.” (GUIMARÃES, 2008, p 37).

Contudo, nos sistemas babilônico, maia e por fim hindus, por serem sistemas posicionais houve necessidade da criação de um guardador de lugar, o zero, no qual ela descreve sobre os processos de criação de cada um deles. Da mesma forma, a autora se dedica a discutir sobre as operações com o zero e as dificuldades dos homens do passado.

No terceiro capítulo tem-se a apresentação das falas dos alunos diante das perguntas da pesquisadora. Ela dividiu em quatro unidades de significado os sentidos do zero: o zero como técnica matemática, o zero conceitual, o zero como técnica social; o zero como metáfora.

Durante as entrevistas perguntava-se para os alunos o que eles pensavam sobre o zero, a mesma pergunta feita para os quatro ciclos: Ensino Infantil, EF I, EF II, EM e o EJA. E, de acordo com as falas dos alunos, foi sendo separado em quais dos sentidos do zero entrava cada comentário. O EF I foi o único em que os alunos não relacionaram o zero com uma metáfora.

Nas considerações finais é destacada a relevância do zero e que, mesmo que ele tenha ideia de nada, ele é posto para representar que não existe uma quantidade numérica para uma determinada situação. Ainda que ele, como algarismo ou como número, tenha sentidos diferentes, principalmente quando se trata de questões financeiras, “é melhor o zero algarismo do que o zero número” (GUIMARÃES, 2008, p 87).

A autora também traz algumas reflexões sobre as operações matemáticas básicas e como a presença do zero - mesmo tendo um sentido de nada e nulo, dependendo do contexto - pode desestabilizar uma conta simples, como no caso da multiplicação e da divisão, com o poder de zerar qualquer número por maior que seja ou simplesmente deixar de mãos atadas, sem resposta, no caso da divisão por zero.

Enfim, foram muitos sentidos atribuídos a um único número, muitos deles negativos. Mas, para ela, o mais importante, é a participação dos alunos em discutir sobre esses diferentes interesses pelo zero.

2.8.3 O Sistema de Numeração Decimal: um estudo sobre valor posicional

A dissertação de mestrado escrita por Tracanella (2018), intitulada O Sistema de Numeração Decimal: um estudo sobre valor posicional, é organizada em sete capítulos. No primeiro capítulo a autora discorre sobre o tema do trabalho: Sistema de Numeração Decimal (SND) e as dificuldades encontradas em sala de aula pelos alunos. Quando é ensinado esse conteúdo, percebe-se que as dificuldades aumentam e se agravam quando são introduzidos os números decimais. Ela aponta que isso ocorre devido à aprendizagem baseada em memorização das ordens numéricas que, consequentemente, induz os alunos a aplicarem as mesmas propriedades dos números naturais aos números racionais.

Então, além do trabalho ser uma contribuição para a prática dos professores, há duas questões que orientam a investigação. São elas: “Que conhecimentos sobre o valor posicional no SND são mobilizados por alunos de quarto ano do Ensino Fundamental?” e “Que significados para o número zero no SND são indicados por educandos de quarto ano do Ensino Fundamental?”. (TRACANELLA, 2018, p. 16)

No capítulo seguinte a autora traz sua trajetória e as justificativas do seu trabalho. Dadas as apresentações é destacada a importância do pensamento matemático na educação dos alunos, de modo que esses tenham condições de analisar a sociedade em que vivem e não apenas a utilizarem a matemática de forma mecânica, na qual só se decoram fórmulas e algoritmos.

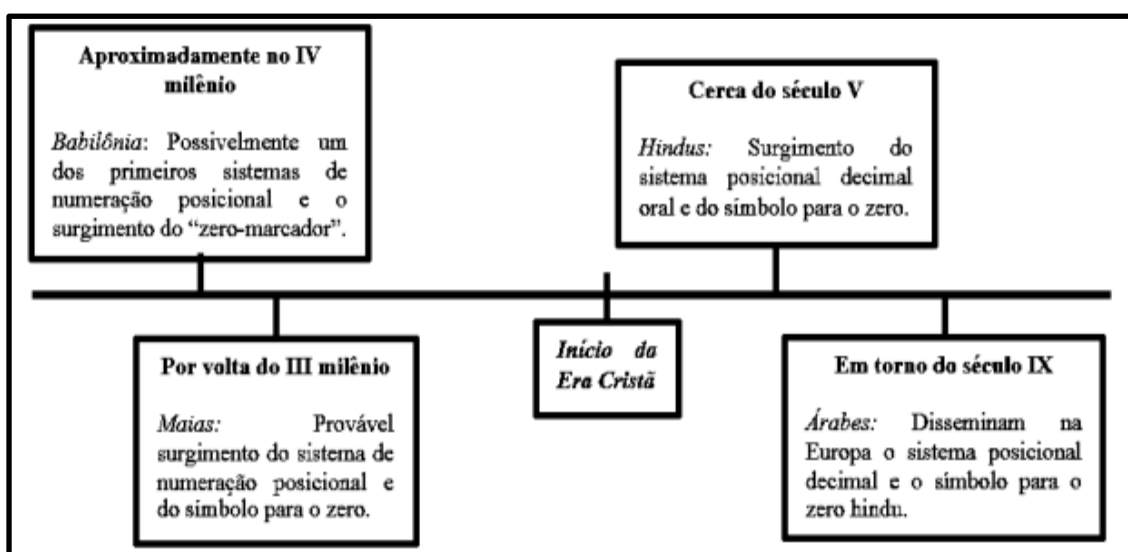
Também nesse trabalho é descrito o papel do número na formação da criança desde o nascimento, principalmente com familiares e a comunidade ao seu redor. Quando chegam à escola, já trazem traços dessas influências, em especial do zero que é comparado com nada. Sem contar as dificuldades existentes no entendimento, por parte dos alunos, do SND dos números naturais para os racionais que têm propriedades diferentes.

No capítulo três, essa autora faz uma contextualização histórica, trazendo relatos dos sistemas numéricos utilizados por algumas civilizações como também a presença do zero como marcador de lugar. Apesar dos povos egípcios e romanos serem famosos

por sua matemática, o nascimento do zero não partiu deles e, sim, por parte dos povos babilônicos, maias, hindus e árabes.

É muito difícil datar qual foi a primeira civilização que teve essa conquista, pois muitos povos, de diferentes lugares, criavam suas matemáticas de acordo com seus conhecimentos e sistemas de numeração. Segue uma linha do tempo feita pela autora, com os momentos históricos mais importantes da construção do zero:

Figura 24: Linha do tempo com os principais acontecimentos históricos com relação a origem do SND e do zero



Fonte: Tracanella, 2018, p 41

Para essa autora revisitar esses momentos históricos é entender que da mesma forma que essa construção matemática foi lenta e complexa, para os alunos, nos dias atuais, não é diferente. Dessa forma, a história da matemática pode ser um suporte didático para o ensino da Matemática na Educação Básica.

Os aportes teóricos da dissertação são apresentados no capítulo quatro, sendo as pesquisas de Piaget e Szeminska (1981), Kamii (1992, 1994), Lerner e Sadovsky (1996) e Zunino (1995).

No capítulo cinco se encontram os procedimentos metodológicos, iniciando com a importância da pesquisa qualitativa utilizada pela autora, como foi a escolha dos sujeitos da pesquisa e a sua trajetória

A análise dos dados está no capítulo seis. A autora realizou uma primeira atividade com um instrumento piloto de alunos, uma do terceiro e outra do quarto ano do Ensino Fundamental I. Na primeira atividade os alunos tinham que comparar pares de números e dizer qual era maior ou menor, justificando a resposta deles. Alguns desses números tinham a mesma quantidade de algarismos, mas havia um caso em que os números tinham quantidades de algarismos diferentes.

Na segunda atividade os alunos tinham alguns algarismos para formarem números (1, 2 e o 0), números de dois e três algarismos e, por fim, colocar em ordem crescente. Na terceira atividade o aluno tinha que indicar em qual posição colocar um determinado algarismo em um número, de forma que obtivesse o maior número possível.

Na quarta Tracanella (2018) traz uma atividade em os alunos tinham que fazer operações com os números dados, de forma que, em ordens específicas desses números, o resultado fosse zero. Exemplo: o que pode ser feito para no lugar do algarismo 8 do número 1872, ser zero? $1872 - 800 = 1072$. A resposta mais rápida para autora seria o 800, contudo ao analisamos existem outras opções que não são discutidas. Os números no intervalo de 773 a 872 também são opções.

A quinta atividade era de composição de números e a sexta atividade era de decomposição de números. Nessa atividade os alunos cometeram muitos erros, adicionando os algarismos e não os valores relativos. Em cima das respostas dos alunos, a pesquisadora fez mais algumas perguntas para analisar o conhecimento sobre o valor posicional e entender as justificativas dos alunos, depois de cada atividade, através de entrevistas.

Essa mesma abordagem foi feita com o instrumento definitivo, seis alunos do quarto ano do Ensino Fundamental I, analisando as respostas escritas e faladas por cada participante.

Por fim, no último capítulo, têm-se as considerações finais da autora, analisando toda sua pesquisa, trajetória e reconhecendo se o objetivo proposto e a pergunta de pesquisa haviam sido atendidos.

2.8.4 Conclusões dos trabalhos da Revisão de Literatura

Cada um desses trabalhos foi de extrema importância para nossa pesquisa. A dissertação de Padrão (2008) nos auxiliou no contexto histórico com tabelas e quadros ilustrativos sobre a história do zero em cada civilização. Também apresentou outros trabalhos sobre o tema que não haviam sido encontrados no catálogo CAPES.

A dissertação de Guimarães (2008) e a dissertação de Tracanella (2018) foram pesquisas realizadas com alunos em sala de aula. A primeira, de maneira mais ampla, analisando desde o Ensino Fundamental até o Médio e não esquecendo dos alunos do EJA, que têm uma realidade totalmente diferente. Já a segunda autora trabalhou com um grupo pequeno de alunos. Porém ambas nos mostraram a visão dos alunos e suas dificuldades sobre o zero em diferentes contextos.

Com a leitura dessas três dissertações encontramos artigos que foram tão importantes quanto, como o caso do artigo Sentidos Atribuídos ao zero por alunos da 6ª série (SALVADOR; NACARATO, 2003) e o artigo História do Número Zero (PINEDO; SBARDELOTTO, 2004).

Essas pesquisas nos mostraram que ainda faltam muitos outros trabalhos sobre o mesmo tema, para auxiliar os professores no processo de ensino dos números e suas operações, no qual se concentra nosso trabalho. Também nos fez ver que, dentre esses trabalhos, nenhum abordou a linha de Resolução de Problemas.

Assim, após analisar os trabalhos desses autores, concluímos o primeiro bloco de atividades de Romberg-Onuchic (descrito na Seção 1).

SEÇÃO TRÊS: INVESTIGANDO A PRÓPRIA PRÁTICA E A METODOLOGIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Inicialmente, quando essa investigação foi proposta, tínhamos um olhar para a ação de terceiros, conciliando o fenômeno de interesse com as práticas educativas de outros professores. Mas e quando sua própria prática é colocada em jogo? E quando se observa que sua sala de aula precisa de abordagens diferenciadas para aprendizagem?

Foi preciso esse estudo, investigando a própria prática por intermédio da Resolução de Problemas para que, como professora, pudesse saber e reaprender os pormenores dos conteúdos ministrados que me foram ensinados de forma tão automática, tanto na minha educação básica quanto na graduação.

Ponte e Serrazina (2003), que abordam a investigação na própria prática, têm visto e analisado diversos professores utilizando esse recurso ao invés de esperar por soluções externas (livros, apostilas e até mesmo outros profissionais especializados ou em especialização/pós-graduação) para os problemas de aprendizagem de sua sala de aula. Isto é, eles investigam a si mesmo e o seu ambiente de trabalho. Essa prática, em formato de aprendizagem, reforça a confiança e a autonomia do professor.

Tal investigação, para além de poder ajudar ao seu esclarecimento e resolução, contribui, também, para o desenvolvimento profissional dos participantes e para o aperfeiçoamento das organizações em que eles se inserem. (PONTE, SERRAZINA, 2003, p. 3)

Da mesma forma que os professores desejam que seus alunos se desenvolvam em seus conhecimentos, os professores também devem passar por esse processo. Primeiro para crescer profissionalmente, segundo para acompanhar a evolução pedagógica e tecnológica que está sendo inserida no contexto escolar e, por fim para compreender melhor seus estudantes que são de outra geração.

Para isso, o professor precisa olhar para si e se questionar como profissional, ou seja, “ser professor-investigador é, pois, primeiro que tudo, ter uma atitude de estar na profissão como intelectual que criticamente questiona e se questiona. (ALARCÃO,

2000, p. 6).

Ponte e Serrazina (2003) enfatizam que essa investigação se torna especial porque o objeto de estudo é sua própria prática profissional, tornando essa relação muito próxima. Mas para que esse tipo de investigação seja válido tem que seguir três critérios: “(i) produzir novos conhecimentos, (ii) ter uma metodologia rigorosa, e (iii) ser pública” (BEILLETOT, 2001, p.19).

Este trabalho se encaixa nessas descrições, pois (i) ele produziu novos conhecimentos em relação a historização do zero e de sua importância para a matemática, assim como meios de ensiná-lo e os fundamentos da Matemática de uma forma significativa através da Resolução de Problemas; (ii) seguida de forma criteriosa a Metodologia Científica de Romberg-Onuchic para o desenvolvimento da pesquisa e a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (MEAAMaRP) para a pesquisa pedagógica; (iii) como é um trabalho de uma professora em processo de formação de pós graduação, será pública tanto para uma banca, quanto para os colegas de trabalho durante as reuniões de ATPC (Aula de Trabalho Pedagógico Coletivo), espaço este em que também compartilhamos nossas ideias, metodologias utilizadas em sala de aula e propostas de trabalho.

Enfatizando que, não é porque os professores já passaram por suas graduações e especializações que eles não podem aprender coisas novas mesmo nos conteúdos básicos de suas disciplinas.

“Novo”, aqui, refere-se ao actor que realiza a investigação. Se me ocupo de um problema semelhante a outro já trabalhado por outras pessoas mas cujo trabalho eu desconheço, e produzo soluções (para mim) originais, estou certamente a realizar um trabalho de investigação. (PONTE, 2002, p. 4)

O ser professor exige diariamente conhecer metodologias, ferramentas digitais, recursos e materiais manipulativos para reinventar sua sala de aula e atender ao máximo a necessidade dos seus alunos, mesmo sabendo que não será cem por cento. É um caminho árduo, pois nem sempre a aula que foi preparada com tanto entusiasmo, atingirá os estudantes com essa mesma animação, mas é gratificante, principalmente quando se percebe que os estudantes realmente compreenderam e viram significado naquela aprendizagem.

Segundo relatos de Ponte e Serrazina (2003) o trabalho colaborativo durante uma investigação, em que cada participante tem seus objetivos comuns e individuais bem definidos é fundamental, pois os objetivos comuns são compartilhados a fim de fortalecer e concretizar os objetivos individuais.

O GTERP é um grupo participativo e colaborativo que tem um objeto em comum: o trabalho com Resolução de Problemas. Cada participante desse grupo, apesar de todos serem matemáticos, realiza suas atividades em segmentos diferentes, desde o ano de escolaridade até o objeto de estudo dentro da própria Matemática. Em nossas reuniões compartilhamos materiais, experiências, questionamentos e apoiamos uns aos outros.

Num trabalho colaborativo bem sucedido existem objectivos comuns fortes e partilhados, que permitem o prosseguimento de objectivos individuais também fortes de cada um dos participantes. Conseguir esta articulação nem sempre é fácil, mas é, certamente, uma condição fundamental para um processo de colaboração bem sucedida. (Ponte; Serrazina, 2003, p. 6)

Ponte e Serrazina (2003) também relatam que investigar está ligado a identificar um problema relevante para o professor, que deve ser estudado e, neste caso, para esta pesquisa, o estudo do zero em diferentes contextos utilizando como recurso a Resolução de Problemas e a MEAAMaRP é de suma importância.

No GTERP tem-se uma forma diferente de se trabalhar com Resolução de Problemas em sala de aula. Costuma-se ensinar o conteúdo para saber resolver problemas. O diferencial está que trabalhamos *através de* problemas, que significam ao *longo de*, isto é, enquanto o aluno resolve o problema a ele proposto, ele constrói um conteúdo matemático novo apoiando-se em seus conhecimentos prévios. Ou seja, começamos com Problemas.

Para a utilização da MEAAMaRP na sala de aula, tem-se dez momentos a serem seguidas: (i) proposição do problema; (ii) leitura individual; (iii) leitura em conjunto; (iv) resolução do problema; (v) observar e incentivar; (vi) registro das resoluções na lousa; (vii) plenária; (viii) busca do consenso; (ix) formalização do conteúdo; (x)

proposição e resolução de novos problemas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Para trabalhar em sala de aula com esta metodologia a fim de que os alunos adquiram a aprendizagem, iniciamos o trabalho a partir de um problema, o qual chamamos de Problema Gerador. Ou seja, antes de o professor introduzir um conhecimento novo, ele propõe um problema para seus estudantes que envolve esse conteúdo e que seja possível, através de seus conhecimentos prévios, buscar um caminho para resolver o problema. Deve ser desafiador, mas o aluno deve acreditar que ele pode conseguir.

O problema pode ser escolhido pelo professor ou até mesmo ser proposto pelos alunos. Eles terão um momento para refletir sozinhos e pensar em como resolvê-lo, depois se reunirão, em pequenos grupos, para fazer uma segunda reflexão. Esse momento de trabalho em grupo é importante para eles saberem trabalhar em parceria com os colegas, respeitando a opinião do próximo, isto é, aprendendo a ouvir uns aos outros e colaborando na busca da solução. Portanto, participativos e colaborativos.

Nesse processo de resolução do problema pelos alunos, o professor atua como mediador, não dando respostas para os alunos, mas os questionando, para que possam refletir sobre aquela situação dada. Podem-se usar diversos recursos para compreensão e a busca pela resolução do problema gerado, fazendo uso tabelas, desenhos ou até mesmo os próprios algoritmos. É importante que eles criem suas próprias estratégias.

Depois que todos os grupos tenham resolvido o problema, é pedido que um representante de cada grupo apresente, na lousa, sua solução que será comparada com as resoluções dos outros grupos. Esse é um outro momento de extrema importância, pois um problema pode ter diversas soluções e diferentes caminhos que o próprio professor não havia pensado. Nesse momento, os alunos são estimulados a defender seus pontos de vista, de uma forma mais sistemática, aprimorando sua linguagem formal e matemática. Com todas essas respostas obtidas, certas ou erradas, podem ser discutidas não de forma a constranger os discentes, mas de forma a levá-los a reconhecer porque aquele caminho é certo ou errado.

Assim, depois de toda essa discussão e análise, o professor deve formalizar o conteúdo, abordando outros problemas que podem surgir daquele mesmo que foi

resolvido. O professor deixaria então outros problemas para a fixação dos novos conceitos criados, já que os estudantes tiveram a experiência de fazer parte da construção daquele conhecimento. Isso torna a aprendizagem mais significativa, pois eles foram coautores desse processo.

Portanto,

na Resolução de Problemas, o foco não está na resposta ou na solução do problema, mas sim nos pensamentos produzidos e engendrados pelos conceitos e princípios que possam destacar a resolução do problema que se pretende estudar e avançar nos meios, e não simplesmente nos fins (LEAL JUNIOR, ONUCHIC, 2015, p. 973)

Ou seja, o intuito não é dizer ao professor e ao aluno o que é certo ou errado, ou qual é o melhor jeito de aprender e ensinar, mas, sim, de produzir pensamentos que levem o aluno à aprendizagem e não somente a uma repetição de palavras ditas pelo professor. Por sua vez, para que o professor possa ensinar o aluno, através de mediações e não de imposições, conseguindo avaliá-lo mais de perto, considerando cada progresso dele.

Nesta concepção, os estudantes passam a ter uma participação efetiva na constituição de sua aprendizagem, ou seja, são coautores da mesma e os professores são os incentivadores e mediadores desse processo através de atividades de ensino. (LEAL JUNIOR, ONUCHIC 2015, p 959)

É isso que a nossa metodologia propõe. Dentro do GTERP, temos trabalhos (dissertações e teses) interessantes que comprovam que MEAAMa-RP é uma ferramenta para ser utilizada em sala de aula, em todos os anos de escolaridade e que traz resultados significativos na aprendizagem dos alunos.

Um dos exemplos é a tese de Martins (2019), dividida em duas partes: Projeto 1- “Formação de Professores de Matemática no Instituto Federal de São Paulo (IFSP): um olhar para as possibilidades de atuação”. Inicialmente tinha por objetivo identificar quais os possíveis benefícios para os professores dos Institutos Federais (IFs), que lecionam tanto para alunos do ensino médio quanto para alunos de Licenciatura no curso de Matemática, para suas práticas na formação de professores.

Durante a análise e a realização do Projeto 1, o autor levantou dois

questionamentos que o fez mudar o foco da pesquisa para o Projeto 2, que era analisar as Possibilidades do uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, em um Curso de Licenciatura de Matemática na Rede Federal de Educação Tecnológica no Estado de São Paulo.

Ele concentrou sua pesquisa no campus de Araraquara (antes estava sendo analisado em cinco Campi). A pesquisa foi feita com uma turma de 6 alunos, em 16 encontros, primeiramente, mostrando aos futuros professores a Metodologia de Resolução de Problemas, proposta por ONUCHIC e o seu grupo, desde a teoria até a prática. No final da pesquisa, os licenciandos aplicaram o que aprenderam com os alunos do Ensino Médio integrado ao Técnico.

Outro trabalho muito importante para essa pesquisa foi a dissertação da Botta (1997). Quando a tese foi realizada, ainda não havia sido agregada a ideia de avaliação integrada ao ensino-aprendizagem, porém esse trabalho ofereceu uma abordagem aprofundada no primeiro capítulo em situações-problemas envolvendo as quatro primeiras operações básicas da matemática, que auxiliou esta pesquisa.

O questionamento da autora começou em relação às dificuldades dos alunos com os números racionais. Com o desejo de ensiná-los de forma diferente do que aprendeu, ela foi a fundo nos fundamentos da matemática, desde a relação de conjuntos, sequências, passando pelas operações básicas com números naturais, até chegar nos números racionais e no raciocínio proporcional.

A autora, além da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, utilizou também os Campos Conceituais de Vergnaud para fundamentar sua pesquisa.

E por fim, o trabalho de Pironel (2002) que foi o responsável por envolver a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas com a Avaliação. O autor busca através da etimologia da palavra, da contextualização histórica e documentos oficiais de ensino, entender com a avaliação foi sendo construída. A avaliação, inicialmente, era usada como ferramenta para analisar se o ensino tinha sido bem ministrado. Conforme a aprendizagem do estudante se tornou importante, incorporando no meio educação ensino-aprendizagem, a avaliação sobre a

aprendizagem ganhou força para compreender o rendimento e o desenvolvimento de cada estudantes.

Pironel (2002) traz diversos autores que discutem sobre avaliação e quais eram suas perspectivas sobre o assunto. Desde avaliações que valorizam apenas aspectos quantitativos até avaliações que se preocuparam em analisar quais eram as lacunas deixadas durante o processo de ensino-aprendizagem. Infelizmente, muitos professores avaliam apenas através de provas, com o objetivo de usá-las como meio de controle dos estudantes, por meio do medo.

Durante sua pesquisa, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas com alunos do Ensino Médio, utilizando problemas envolvendo os temas: Progressão Aritmética e Geométrica e Trigonometria no Triângulo Retângulo. O autor propõe aos professores, no final do seu trabalho, alguns instrumentos avaliativos que não limitam a prova, como: autoavaliação, diários interativos e relatórios avaliativos.

Esses três trabalhos mostram a eficácia da MEAAMaRP em sala de aula. Essa presente pesquisa não tem o viés de analisar alunos e professores e, sim, a própria prática da pesquisadora em formação, em três vertentes: ensino, aprendizagem e avaliação. Qual era a forma que a pesquisadora ensinava para os seus alunos? Da mesma forma que foi ensinado por seus professores durante seus anos de escolaridade, ensinando os alunos a fazerem continhas e ensinando o conceito para resolverem problemas?

Como a pesquisadora analisava a aprendizagem dos seus estudantes? Quem sabia fazer continhas, quem acertava a resposta mesmo que fosse um cálculo mental e sem dar espaço para os alunos conversarem entre si sobre suas soluções, proporcionando um trabalho colaborativo e participativo. E sobre a avaliação? Quem está sendo avaliada é a própria pesquisadora em sua pesquisa durante todo o processo de execução dela?

3.1 Minha própria prática

Antes mesmo de trabalhar como professora, fazia parte de projetos de iniciação à docência, o PIBID e o RP. Nesses projetos, procurei com os outros bolsistas trabalhar de formas diversificadas com os alunos como jogos, problemas contextualizados, brincadeiras e uso de plataformas matemáticas, a exemplo do Scratch.

Particpei de atividades culturais da escola entre elas, Festa Junina, Gincanas, Feira de Ciências e, até mesmo, projetos com a Sala de Leitura. Em todos esses espaços, apresentava de forma lúdica e dinâmica a matemática, para que os alunos não a vissem como um monstro, mas como algo presente e necessário ter o domínio para realizar tarefas diárias. Pensando bem, havia até uma tentativa de ensinar através de problemas, mas não nos moldes propostos pelo MEAAMaRP.

Esses dois projetos também eram utilizados como reforço escolar e auxílio aos professores. Sentava e ajudava os alunos a resolverem os exercícios. Me recordo bem, que era nos orientado, durante as reuniões quinzenais com o grupo dos projetos, a importância de ter paciência e deixar o aluno resolver da sua forma, sem resolver por ele, ser mediador.

Quando comecei a lecionar em 2019, seguia o que estava proposto no livro e na apostila, sem pensar numa metodologia (nesse período ainda estava em processo de entrevista e ingressar na pós-graduação). Ensinava do jeito que me foi ensinado. Tentava ser detalhista no linguajar e nos conceitos matemáticos, trabalhar com a história da matemática e com os recursos didáticos disponíveis na escola. Gostava de trazer jogos e trabalhar em duplas ou grupos.

Contudo, como ainda estava em processo de organizar a minha gestão em sala de aula, não aguardava o tempo do aluno a fim cumprir com o currículo. Não ouvia atentamente as explicações deles. Tentava, às vezes, sentar com cada aluno para explicar e ver suas dificuldades, mas em uma sala com 36 alunos, muitas das vezes, isso se tornava um caos.

Algumas resoluções diferentes dos alunos, perguntava como ele havia feito, porém não era sempre que compartilhava com os demais estudantes. Vejo que esse comportamento meu era pela falta de experiência. Havia alunos que entendiam dessa forma, porém também havia muitas dificuldades em conteúdos básicos, iguais aqueles problemas de multiplicação que me levaram a chegar no zero.

Esse é o cenário que me encontrava antes e durante essa pesquisa. Mas a pesquisa me proporcionou a olhar mais atentamente para minha prática docente. A pesquisa por si só, já mobiliza o autor a repensar e se reconstruir como profissional

analisando e questionando as respostas e resoluções de terceiros. E nesse caso, investigando a mim mesma, percebi que mesmo para conteúdos tão simples, e que via como banais, eu também não tinha resposta.

Por isso, na próxima seção é dada por tudo que precisei reaprender em busca de responder à pergunta de pesquisa. Logo podemos concluir o segundo bloco do Fluxograma de Romberg-Onuchic sobre estratégias e procedimentos de pesquisa.

SEÇÃO QUATRO: FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS BÁSICOS

Diante das dificuldades encontradas em meus alunos, foi necessário reaprender os conceitos básicos da matemática, principalmente em relação aos números e operações, de forma mais esmiuçada e detalhada, para atender as dificuldades de aprendizagem dos alunos. Por se tratar de operações básicas, para nós acadêmicos torna-se algo tão trivial depois de tanta bagagem que carregamos, mas, para as crianças elas, são verdadeiros monstrinhos.

Como o nosso estudo está baseado no ensino do zero em seus diferentes contextos, será necessário compreender toda a estrutura dos números, suas definições e propriedades. Por isso, o foco será colocado nos conteúdos ministrados para alunos até o sexto ano, que é onde se concentra a estrutura matemática desejada para estudar o nosso fenômeno de interesse.

Essa seção, também dá início ao último bloco do Fluxograma de Romberg-Onuchic sobre os dados da pesquisa e as conclusões. Para fundamentar essa parte da pesquisa, serão utilizados as obras de Van de Walle (2007), Centurión (1994) e, Smole e Muniz (2013).

4.1 Números Naturais, Inteiros e o Zero

A primeira questão que temos então é: como o zero é um número, podemos dizer que é um número natural?

Há várias controvérsias sobre o zero ser um número natural ou não. Para Centurión (1994) o conjunto dos números naturais é um modelo para os outros conjuntos, representa a contagem, logo os números naturais, para ela seriam, $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.

Para uma pessoa medianamente educada hoje, o ponto de partida óbvio da Matemática seria a série de números inteiros: 1, 2, 3, 4, ... etc. Provavelmente apenas a pessoa dotada de algum conhecimento de Matemática pensaria em começar com o 0 e não com 1. Admitiremos a existência desse grau de conhecimento e adotaremos para nosso ponto de vista a sequência: 0, 1, 2, 3, ... n, n+1, ... (CENTURIÓN, 1994, p. 81)

Essa autora, se baseia nos axiomas de Peano, matemático italiano que criou axiomas para a sequência dos números naturais utilizando três ideias para embasar as proposições: zero, número e sucessor.

As proposições são as seguintes:

- 1) 0 é um número
- 2) O sucessor de qualquer número é um número
- 3) Não há dois números com um mesmo sucessor
- 4) 0 não é sucessor de nenhum número natural
- 5) Qualquer propriedade que pertença a 0 e, também, ao sucessor de todo número que tenha essa propriedade, pertence a todos os números

Assim, segundo essas proposições, poderíamos tomar o zero como sendo um número natural. Por sua vez, Lima et al (1994) se abstém dessa discussão, afirmando que isso não tem muita importância, pois depende do ponto de vista de cada autor, mas reconhece que os livros de matemática brasileiros têm por costume definir o zero como sendo um número natural.

Eles justificam essa posição neutra, porque da mesma forma que podemos escolher 0 ou 1 como primeiro número da sequência dos naturais, outras civilizações,

como os gregos, não consideravam nem o 1 como sendo número e, conseqüentemente, a sequência dos números naturais, para eles, não começa pelo 1. Então, não haveria motivo para essa discussão. Apesar disso, em sua obra, o zero não pertence aos naturais (N).

Esses mesmos autores, alguns anos antes, explica se o zero é ou não natural, dizendo que:

Sim e não. Incluir ou não o número 0 no conjunto N dos números naturais é uma questão de preferência pessoal ou, mais objetivamente, de conveniência. O mesmo professor ou autor pode, em diferentes circunstâncias, escrever $0 \in N$ ou $0 \notin N$. Como assim? Consultemos um tratado de Álgebra. Praticamente em todos eles encontramos $N = \{0, 1, 2, \dots\}$. Vejamos um livro de Análise, lá acharemos quase sempre $N = \{1, 2, 3, \dots\}$. (LIMA et al, 1991, p. 150)

Ou seja, em Álgebra o autor irá preferir ter o zero no conjunto dos números naturais, pois como seu interesse está nas operações, é necessário haver um elemento neutro para adição. Também ele permite que “a diferença $x - y$ seja uma operação com valores em N não somente quando $x > y$ mas também se $x = y$ ” (LIMA, 1991, p. 150).

Em Análise Real, os números naturais são utilizados como índices de termos de uma sequência

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots).$$

Se considerarmos $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, teríamos

$$(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$$

e, nesse caso, o primeiro termo seria x_0 , o segundo x_1 e assim por diante. Logo x_n não seria o n -ésimo termo e sim o $(n+1)$ -ésimo termo. Para evitar isso, em Análise, tomamos o conjunto dos números naturais sem o zero.

Com isso, podemos denominar o conjunto N como sendo: (i) o conjunto dos números naturais mais o zero (ii) conjuntos dos números naturais não negativos (iii) conjuntos dos números naturais (N^*).

Diferentemente, Caraça (1984) e Malba Tahan (1965) afirmam veementemente que o zero não faz parte do conjunto dos números naturais. O zero permite a sucessão dos números inteiros. Ele é o responsável por separar os números positivos e negativos.

E analisando pela construção histórica dos números, em particular a do zero (também citada na Seção 2), nós também admitiremos essa última visão dos dois autores: zero não é um número natural.

Mesmo sendo contrária à nossa visão, não há como negar que os livros didáticos, utilizados pelas escolas do Brasil, assumem o zero como sendo natural, por conveniência na utilização das próprias operações matemáticas, para definir, por exemplo, que $1 - 1$ é igual a zero, sem precisar de um conjunto numérico maior. Isto é, é uma opção didática para facilitar a compreensão dos alunos

O problema não é assumi-lo para os alunos como sendo natural ou não, é esconder toda essa bagagem histórica e permitir que eles o vejam como sendo apenas um nada, um ocupador de uma ordem vazia. Ele é muito mais que isso, como já demonstramos na seção 2 e,

Graças, ao zero, os números puderam se distanciar das necessidades práticas, como contar os dias e cabras e, se tornaram entidades com vidas próprias. Em outras palavras, o zero deixou de ser um nada e virou uma das maiores invenções da humanidade (BBC NEWS, 2019).

Buscamos na literatura, algum pesquisador que tivesse analisado livros didáticos, a fim de entender como o zero é tratado nesse recurso didático. Encontramos o Trabalho de Conclusão de Curso de Tássio Araújo.

Araújo (2010) analisa dois livros didáticos usados pelos professores de matemática e questiona que, mesmo tendo uma sessão separada para História da Matemática, não se faz essa abordagem histórica do zero. Pelo contrário, o apresenta em meio aos conteúdos com uma representação pronta e acabada.

O que se percebe, nesse estudo feito pelo autor, é que os livros didáticos abordam o zero de forma superficial, não diferenciando para os alunos, como mostraram Guimarães (2008) e Tracanella (2018), o zero em diferentes contextos: zero como elemento neutro da contagem; zero como valor posicional; zero como dado operatório; zero como origem.

O Quadro 2 é uma síntese dos significados do zero:

Quadro 2: Síntese dos diferentes significados atribuídos ao zero

Significados do zero	Características	Desenvolvimento Histórico	Exemplos
Zero como elemento de contagem	Cardinal de um conjunto vazio; nem sempre considerado um número natural; de natureza discreta; impregnado de “quantidades”	Tal significado não se fez presente na história da Matemática até a axiomatização de Peano (século XIX)	Significados: sem valor, nulo, nada.
Zero como valor posicional	Representa as ordens vazias, zero como algarismo; impregnado de “quantidades”	Utilizado pelos babilônios, maias, chineses e hindus.	Na formação de números retrata colunas vazias: 10, 100, 307, 1000, 1010 entre outros.
Zero como dado operatório	Elemento neutro da adição; anula o produto em uma multiplicação; $a^0 = 1$ (por definição, com $a \neq 0$; 0^0 é indeterminado; impregnado de “quantidade”	Utilizado pelos hindus	Resultado de operações como $(1 - 1 = 0)$; Elemento neutro da adição $(5 + 0 = 5)$; O produto de uma multiplicação por zero é nulo; Divisão por zero é indefinida.
Zero como origem	De natureza contínua; surge para a unificação da reta numérica no campo dos reais; impregnado de “qualidade”	Sistematizado por Dedekind (século XIX) na definição de número real	Ponto de referência (módulo de um número) Neutro, pois não apresenta sinal; Ponto de partida

Fonte: adaptado de Tracanella (2018)

Portanto, com a descoberta do zero, o homem pôde responder quanto era um número menos ele mesmo. E, em dada situação, que o valor do minuendo é menor que o valor do subtraendo, qual seria o resultado? Assim surgiram os números negativos e, portanto, foi necessária a criação de um novo conjunto numérico que agregasse esses novos números: os números inteiros. E o zero seria o ponto de origem desse novo conjunto, separando os números positivos e os números negativos.

4.2 Cardinalidade e Ordinalidade

A Matemática é uma ciência de padrão e ordem e, desde os homens primitivos, vemos traços de agrupamentos por meio de conjuntos: conjunto de animais, conjunto de ferramentas, conjunto de alimentos e assim por diante. Houve necessidade de se contar quantos elementos havia em cada conjunto. Dessa forma é que foram criados os conjuntos numéricos e, para entender a relação de ordem nesses conjuntos, precisamos compreender os conceitos de cardinalidade e ordinalidade. (ONUCHIC, ALLEVATO, 2011)

Segundo Centurión (1994), temos:

- Número cardinal: a cardinalidade é a própria medida da quantidade de elementos de um conjunto e é determinada pela relação de inclusão no conjunto dos números naturais (p. 77). Ou seja, a cardinalidade representa a quantidade de elementos que há em um determinado conjunto.
- Número ordinal: nos dá a ideia de ordem e identifica qual é o elemento do conjunto do qual estamos falando (p. 77), isto é, representa a ordem que cada elemento se encontra em um determinado conjunto.

Centurión (1994) traz um exemplo que ilustra bem a diferença entre esses dois conceitos. Se uma mãe apontar para os seus filhos e disser “esses são meus três filhos”, logo estará se referindo à quantidade de filhos que ela tem, isto é, sentido cardinal. Entretanto, se ela apresentar cada filho como sendo “este é o primeiro, este é segundo e este é o terceiro”, ela está nos mostrando a ordem de nascimento de cada filho, ou seja, sentido ordinal.

Quando se trata do zero, ele tem cardinalidade e ordinalidade? Centurión (1994) não especifica nada para o zero, mesmo o considerando como número natural. Na lista da ordinalidade ela começa dizendo que o número 1 é o primeiro, o 2 é o segundo e assim por diante.

O zero não tem cardinalidade, já que ele representa que determinado conjunto não possui nenhuma quantidade de elementos. Porém, em relação à ordem, em uma sequência numérica dos números inteiros não negativos, $Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, se tomarmos o zero como ponto de partida, podemos dizer que o número zero seria o primeiro, o número um o segundo, o número dois o terceiro e assim por diante.

4.3 Sistema de Numeração Decimal

Algo de extrema importância durante a fase de alfabetização matemática que precisa ser bem trabalhada com os alunos é a construção do Sistema de Numeração Decimal (SND), isto é, que os números são formados pela escrita e pela leitura em classes e ordens.

Tracanella (2018), trouxe discussões sobre o SND e as dificuldades dos alunos do Ensino Fundamental I (conhecido atualmente como Anos Iniciais), quando se tratava da posição relativa dos números e a confusão que esses alunos faziam entre dezenas e centenas agrupando-os de 10 em 10.

Mandarino e Belfort (2006) descrevem que, no nosso sistema de numeração, tem-se quatro princípios básicos, sendo eles:

- Ser decimal, isto é, usamos a base 10.

1782 = 1 unidade de milhar, 7 centenas, 8 dezenas e 2 unidades

$$1782 = 1.000 + 700 + 80 + 2$$

$$1782 = 1 \times 1000 + 7 \times 100 + 8 \times 10 + 2 \times 1$$

$$1782 = 1 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 2 \times 10^0$$

- Ser posicional: isto significa que o valor do algarismo depende de sua posição no número

261: o número 6, no número 261, representa seis dezenas, ou seja, sessenta unidades. Que é diferente no número 216, onde o seis representa seis unidades

- Temos nove algarismos distintos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- O décimo algarismo é o zero, usado para ocupar ordens vazias.

Mas o que são ordens e classes de um número?

As ordens e as classes nos auxiliam na escrita e na leitura de números pequenos e grandes. Para isso, temos agrupamentos de 10 em 10. Com os números de 0 a 9, conseguimos formar qualquer outro número, utilizando o valor posicional. Até nove são formadas as unidades. Quando se tem 10 unidades é formada uma dezena (1 dezena e 0 unidades), 20 unidades são duas dezenas, 34 unidades, são três dezenas e quatro unidades e, assim por diante.

Quando são formados 10 grupos com 10 unidades cada um, ou seja, 10 dezenas, temos então, uma centena, que é o número 100 (1 centena, 0 dezenas e 0 unidades). Assim são formados os demais números.

As unidades, dezenas e centenas formam as ordens e o conjunto das três ordens, são as classes. Pelo quadro abaixo, é possível observar que:

- As classes das unidades simples são formadas pelas unidades, dezenas e centenas simples, que são a 1º, 2º e 3ª ordem;
- As classes dos milhares são formadas pelas unidades, dezenas e centenas de milhar, que são 4º, 5º e 6ª ordem;
- As classes dos milhões são formadas pelas unidades, dezenas e centenas de milhão, que são as 7º, 8º e 9ª ordem.

Temos também as classes dos bilhões, trilhões e assim sucessivamente, seguindo essa mesma classificação das ordens. Portanto, com esse sistema é possível se escrever qualquer número sem dificuldades.

Quadro 3: Sistema de Numeração Decimal

Classes dos milhões			Classes dos milhares			Classe das unidades simples		
							2	3
						2	3	1
					2	3	1	0
9ª ordem	8ª ordem	7ª ordem	6ª ordem	5ª ordem	4ª ordem	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
Centenas de milhão	Dezenas de milhão	Unidades de milhão	Centenas de milhar	Dezenas de milhar	Unidades de milhar	Centenas	Dezenas	Unidades

Fonte: os autores

Observe os exemplos do quadro.

- $23 = 20 + 3$

Que está na classe das unidades simples, tendo duas ordens, sendo que o 2 representa duas dezenas e 3 representa três unidades.

- $231 = 200 + 30 + 1$

Apesar do número ter os algarismos 2 e 3, eles estão em ordens diferentes e superiores às do número anterior. O 2 está na terceira ordem, representando duas centenas; já o 3 está na segunda ordem, representando três dezenas; e o algarismo 1, representa uma unidade.

- $2.310 = 2.000 + 300 + 10 + 0$

Pertence a uma classe ainda maior. O algarismo 2 está na quarta ordem, ou seja, temos duas unidades de milhar. O 3, que está na terceira ordem, representa três centenas. O 1 está na segunda ordem, nas dezenas. E a primeira ordem está sendo ocupada pelo zero, isto é, temos zero unidades simples.

Neste último caso, o zero se posiciona como guardador de lugar, pois sem ele, o número seria 231.

É comum aos professores dos Anos Iniciais ensinarem seus alunos falando: “casinha das unidades”, “casinha das dezenas” e assim por diante. Pois é uma fala

visualmente entendível para os discentes dessa faixa etária. Entretanto, é adequado, conforme eles forem compreendendo o conteúdo e amadurecendo sua linguagem, utilizar a linguagem matemática.

Abaixo, o Quadro 4, com um exemplo de um número maior:

Quadro 4: exemplo de um número no sistema de numeração decimal

Classes dos milhões			Classes dos milhares			Classe das unidades simples		
3	0	4	5	7	0	0	2	9

Fonte: os autores

Na leitura, começa-se pelo número de maior ordem dentro da maior classe esse número seria lido assim: trezentos e quatro milhões, quinhentos e setenta mil e vinte nove unidades. Ou seja, na escrita numérica: 304.570.029.

Notar que para separar as classes, coloca-se um ponto entre os algarismos em que, além de ficar mais fácil a leitura, mostra-se uma relação com a Geometria. As classes das unidades simples têm relação com a reta (R), as classes dezenas com o plano (R^2) e as classes centenas com o espaço tridimensional (R^3).

Vale também destacar a posição do zero nesse número. Para isso, vamos decompor o número:

$$304.570.029 = 300.000.000 + 00.000.000 + 4.000.000 + 500.000 + 70.000 + 0.000 + 000 + 20 + 9$$

Nesse caso, novamente temos o zero como “guardador de lugar”, com o significado que lhe foi atribuído inicialmente pelos babilônios, maias e chineses. Ou seja, ele indica que, naquela posição, há uma ordem faltosa: na dezena de milhão, na unidade de milhar e na centena simples.

4.4 Operações matemáticas

As operações matemáticas conhecidas como Operações Aritméticas constituem o ramo da Matemática responsável pelo estudo das “propriedades dos números e [das] operações que se possam realizar sobre esses números, nos diferentes conjuntos numéricos” (CENTURIÓN, 1994, p. 88).

O mínimo que se deseja dos nossos alunos dos Anos Iniciais é que eles compreendam as quatro operações básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão e consigam resolver diferentes problemas que as envolvam. Contudo, cada vez mais, está sendo crescente as dificuldades encontradas em sala de aula, mesmo com essas operações que, para nós educadores, se mostram simples. A ideia deste trabalho é trazer uma proposta para sanar essas dificuldades através da Resolução de Problemas desenvolvida pelo GTERP.

Quando os docentes aplicam uma atividade ou fazem sua avaliação de matemática, é comum serem chamados pelos alunos para responder a seguinte pergunta: “professor(a) é de mais ou de menos essa questão?”. Isso demonstra, primeiramente, uma insegurança por parte dos educandos e mostra como o ensino de matemática não está sendo compreendido pelos estudantes, principalmente na compreensão da leitura de problemas contextualizados.

Por esse motivo, nesta seção será explorada cada uma das operações aritméticas detalhadamente, desde sua definição, propriedades e exemplos, sempre começando com a proposição de problemas. E, ao final de cada uma delas, tratar em particular como o zero pode se apresentar e quais são as discussões quando esse número tão singular aparece.

Em se tratando de operações matemáticas, o que significa operar? "Operar, enfim, é agir sobre os objetos e, de alguma maneira, realizar transformações" (CENTURIÓN, 1994, p. 89) Então, quando se operam os números, se está provocando uma transformação sobre eles.

É importante enfatizar que, dentre as operações, temos as operações diretas e inversas. As operações inversas são aquelas que desfazem a operação que a direta fez. Por exemplo: $7+3=10$, do resultado inicial que era 7, adicionou-se 3 e resultou 10. Para desfazer essa operação, basta subtrair 3 do 10, que voltará ao valor inicial.

Centurión (1995) dá um exemplo bem prático, utilizado no cotidiano, para exemplificar às crianças, o processo de vestir um casaco (operação direta) e o processo de tirar o casaco (operação inversa). Caraça (1951) nos apresenta as operações diretas e suas respectivas inversas, conforme o Quadro:

Quadro 5: Operações Matemáticas: Diretas e Inversas

Diretas	Inversas
Adição	Subtração
Multiplicação	Divisão
Potenciação	Radiciação e Logaritmação

Fonte: adaptado de Caraça (1951)

Este trabalho será direcionado para as operações diretas aditivas e multiplicativas e suas inversas.

4.4.1 Problemas aditivos e subtrativos

Van de Walle (2009) ressalta que em problemas dados aos alunos sobre adição e subtração, na maioria das vezes a adição tem relação com união e a subtração tem relação com remover. Porém nem sempre isso acontece. Por esse motivo, o autor separa em quatro estruturas aditivas e subtrativas: problemas de reunir, problemas de separar, problemas parte-todo e problemas de comparação.

Essas estruturas não precisam ser exibidas para os alunos. É para guiar o trabalho do professor. O que precisa ser trabalhado com os estudantes são os diferentes tipos de situações-problema.

Quando os estudantes desenvolvem essas definições limitadas de acrescentar-colocar e de retirar para adição e para a subtração, mais tarde, eles geralmente têm dificuldades quando o problema exige uma adição ou subtração, mas a estrutura é diferente da de reunir ou retirar. É importante que as crianças sejam expostas a todas as formas dentro dessas estruturas. (VAN DE WALLE, 2009, p. 170)

Dessa maneira, os problemas propostos nessa dissertação deverão estar dentro dessas estruturas. Todos esses problemas foram pensados para auxiliar o professor a trabalhar com seus alunos em cada uma dessas operações, iniciando-se com problemas

de acordo com o nível de escolaridade, com números de valor numérico baixo e utilizando representações gráficas ou, também, pode-se utilizar materiais manipulativos.

Depois que os alunos entenderem as operações dessa forma, poderão ser utilizadas expressões numéricas, ainda com o auxílio de imagens e de outras ferramentas, para que eles consigam relacioná-las e, por fim, trabalhar com os alunos as expressões matemáticas consequentes.

Assim, os problemas propostos, a partir de sua resolução, levam os alunos primeiramente a utilizar imagens representativas e, depois, utilizar a linguagem matemática. Ou seja, primeiro os alunos em pequenos grupos tentaram resolver os problemas com os seus conhecimentos prévios, o professor irá mediar a conversa entre os grupos, permitir que cada grupo defenda seu ponto de vista e sua resolução. Para enfim, o professor sistematizar formalmente o conteúdo, seguindo a MEAAMaRP.

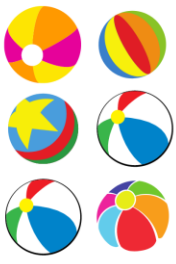
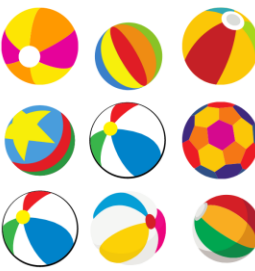
- **Problemas de Reunir**

Problema de Reunir 1: Alice tem 6 bolas e ganhou mais 3 de Pedro. Quantas bolas ela tem no total?

Quando se inicia o ensino de matemática com os alunos, principalmente nos anos iniciais, se faz necessário utilizar recursos de visualização e questões que estejam na realidade nessa faixa etária, seja utilizando desenhos ou materiais manipulativos, isto é, aquilo que está no alcance de cada professor.

No Problema de Reunir 1, alunos que estão iniciando ou até mesmo alunos que têm dificuldades, irão contar nos dedos, fazer desenhos ou pegar objetos para contar, para obter a resposta. Um exemplo, de representação, dessa situação seria:

Figura 25: Representação do Problema de Reunir 1 através de imagens

Alice	Pedro	Total
		

Fonte: os autores

Trabalhando com esse material, desenhando ou utilizando outros recursos, as crianças irão contar esses objetos, chegando ao resultado de 9 bolas. Esse tipo de situação está no cotidiano deles, antes mesmo de estarem na escola.

Quando se utilizam os materiais para demonstrar essa quantidade, assim que os alunos juntam 6 bolas mais 3 bolas, eles contam a quantidade que deu ao todo. Como estamos adicionando unidades com unidades que não ultrapassam 9, essa adição é chamada “sem reservas”:

Figura 26: Representação matemática do Problema de Reunir 1

$$\begin{array}{r}
 \text{D} \quad \text{U} \\
 + \quad 6 \\
 \quad 3 \\
 \hline
 9
 \end{array}$$

Fonte: os autores

Ou também sendo, pela expressão numérica:

$$6 + 3 = 9$$

Ou seja, 6 bolas mais 3 bolas é igual a 9 bolas que Alice tem no total.

Contudo, na adição, não temos somente questões que envolvem a união de dois conjuntos. Podemos, nesses mesmos problemas, explorar outros tipos de questões envolvendo mais elementos.

Problema de Reunir 2: Na caixa de brinquedos da Alice tem 3 bolas coloridas. Nessa caixa cabem até 9 bolas. Quantas bolas Alice precisa comprar para completar a caixa?

Coloca-se o problema. Depois de ouvir as crianças em suas manifestações, oralmente ou pela leitura feita, o professor pode levar os alunos a seguinte representação.

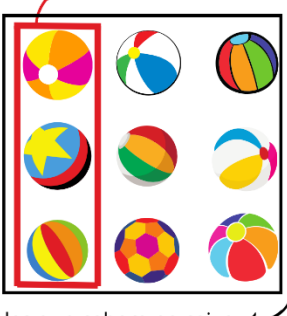
Figura 27: Representação do Problema de Reunir 2 através de imagens (parte 1)

Alice tem 3 bolas	Bolas que faltam na caixa	Total de bolas que cabem na caixa
		

Fonte: os autores

Nesse caso, temos o valor inicial e o resultado final. Porém não temos o valor intermediário e o problema pede para o encontrar. Para encontrar esse valor, os alunos poderiam pensar quantas bolas eles deveriam acrescentar às 3 bolas que Alice já tem para completar as 9.

Figura 28: Representação do Problema de Reunir 2 através de imagens (parte 2)

Alice tem 3 bolas	Bolas que faltam na caixa	Total de bolas que cabem na caixa
		

Fonte: os autores

Na Figura 28, estão indicadas as quantidades de bolas que Alice já tinha e as demais que cabem ainda na caixa. Assim, contando o número pode-se ver que o número de bolas procurado é 6.

Esse modo de pensar deve chegar aos alunos, o professor só o registra depois de os alunos mostrarem que entenderam o problema. Não é o professor fazendo essa ação, essa ação é feita para finalizar o entendimento dos alunos.

Porém, para este problema, temos uma peculiaridade. Como os problemas envolvem adição, o impulso é juntar 3 e 9. Tal feito resultará num total de bolas maior do que cabe na caixa de Alice. Queremos que 3 mais algumas bolas nos dê 9 bolas, isto é, das 9 bolas no total, vou retirar as que Alice já tem, para obter a quantidade de bolas que ainda podem caber na caixa. Por isso, no ensino da adição e da subtração é interessante trabalhar de forma síncrona., mostrando que:

Figura 29: Representação matemática do Problema de Reunir 2

$\begin{array}{r} + \quad 3 \\ \square \\ \hline 9 \end{array}$	ou	$\begin{array}{r} 9 \\ - \quad 3 \\ \hline 6 \end{array}$
---	----	---

Fonte: os autores

Assim, o valor necessário é 6. Logo, Alice precisa comprar 6 bolas, pois $3 \text{ bolas} + 6 \text{ bolas} = 9 \text{ bolas}$. Pode-se usar duas maneiras para resolver esse problema. Primeiro se perguntar: “quantas bolas faltam para completar as 9 bolas?” De 3 bolas para 9 bolas, faltam 6 bolas. E a segunda maneira, seria utilizar as **operações inversas**. Muitos professores chamam, a esse procedimento **prova real**, que é um recurso para provar que aquele resultado encontrado está correto.

A expressão numérica deste problema é dada por:

$$9 - 3 = 6$$

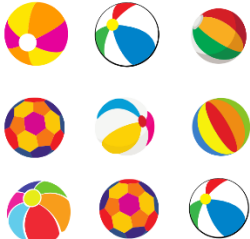
Isto é, 9 bolas que cabem na caixa menos 3 bolas que Alice já tem é igual a 6 bolas que faltam para completar a caixa.

Um outro tipo de problema que se pode explorar nesse caso, é quando não se conhece o primeiro valor:

Problema de Reunir 3: Alice ama bolas. Dentro da sua caixa de brinquedos ela tem algumas bolas. Pedro, sabendo o quanto ela gosta desse brinquedo, resolveu dar 4 bolas para ela. Quando Alice as contou, tinha 9 bolas. Quantas ela tinha no início?

Deixe os alunos buscarem a solução e perceber o que fizeram. Depois apresente essa imagem como exemplo para elucidar ou outro recurso disponível.

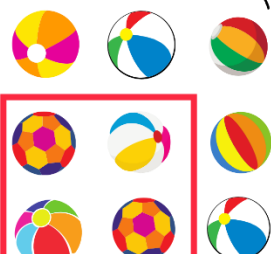
Figura 30: Representação do Problema de Reunir 3 através de imagens (parte 1)

Bolas que tem dentro da caixa	Bolas que Pedro deu	Bolas que Alice tem dentro da caixa
?		

Fonte: os autores

O professor deve perceber que, neste caso, está faltando o valor inicial, mas foram dados o valor intermediário e o resultado. Pode-se, então, mostrar para os estudantes que, desse total, 4 bolas são as que Alice ganhou do Pedro e as restantes são as que ela tinha antes. Pode-se perguntar aos alunos se eles percebem a diferença desse problema com os demais problemas já propostos, quais dados estão faltando, o que é o valor inicial, intermediário e resultado final. Para que eles percebam essa mudança.

Figura 31: Representação do Problema de Reunir 3 através de imagens (parte 2)

Bolas que tem dentro da caixa	Bolas que Pedro deu	Bolas que Alice tem dentro da caixa
?		Bolas que já tinham na caixa  Bolas que Pedro doou

Fonte: os autores

Assim, o valor procurado é 5 bolas.

Pode-se utilizar a mesma tática do anterior. Temos uma quantidade de bolas que somada a 4 bolas nos dá 9 bolas no total. Novamente não iremos adicionar os dois

valores, mas pensar quantas bolas preciso juntar às 4 bolas que tenho, para completar 9 bolas. Logo o resultado procurado é 5 bolas.

Com o algoritmo matemática utilizado posteriormente chega-se a:

Figura 32: Representação matemática do Problema de Reunir 3

$ \begin{array}{r} \text{D} \quad \text{U} \\ + \quad \blacksquare \\ \hline 4 \\ \hline 9 \end{array} $	ou	$ \begin{array}{r} \text{D} \quad \text{U} \\ - \quad 9 \\ \hline 4 \\ \hline 5 \end{array} $
---	----	--

Fonte: os autores

E é dado pela expressão numérica quantitativa:

$$9 - 4 = 5$$

Isto é, 9 bolas no total menos 4 bolas que Pedro deu é igual a 5 bolas que Alice já tinha.

Vejam que, nos dois problemas anteriores, uma forma de os resolver foi esconder umas das informações e utilizar o raciocínio lógico. Isso ajuda, posteriormente, no ensino da Álgebra.

O quadro abaixo, resume, através de expressões matemáticas, cada um dos Problemas de Reunir. Por enquanto, essas informações têm que estar na mente do professor enquanto os alunos não aprendem a sistematizar os problemas apresentados.

Quadro 6: Problemas de Reunir

Quantidade Desconhecida	Expressão Matemática	Problema de Reunir
Resultado	$6 + 3 = [\quad]$	1
Mudança	$3 + [\quad] = 9$	2
Inicial	$[\quad] + 4 = 9$	3

Fonte: baseado em Van de Walle (2009)

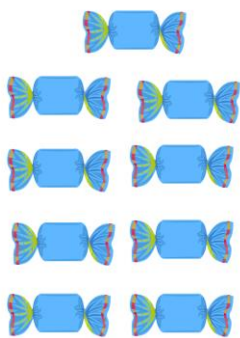
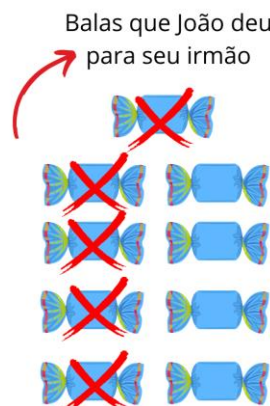
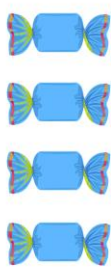
- **Problemas de separar**

Problema de Separar 1: João comprou 9 balas na padaria. Chegando em casa deu 5 para seu irmão mais novo. Com quantas balas João ficou?

Este tipo de problema que envolve subtração tem uma situação bem comum, no qual queremos descobrir qual o valor restante de balas que João ficou depois de ter doado 5 balas para seu irmão. Se for nas condições do professor, levar balas de verdade e pedir para os estudantes manuseá-las para dar resposta ao problema.

Depois das respostas dadas, o professor pode apresentar a seguinte figura:

Figura 33: Representação do Problema de Separar 1 através de imagens

João tinha 9 balas	Deu 5 balas para seu irmão	Quantidade de balas que João ficou
	Balas que João deu para seu irmão 	

Fonte: os autores

Utilizando diferentes tipos de materiais manipulativos ou representações (por exemplo, desenho), as crianças conseguem descobrir que João ficou com 4 balas. Isto é, o aluno, no início, pode utilizar os dedos, objetos ou representações gráficas para calcular, mas utilizando o algoritmo tem-se:

Figura 34: Representação matemática do Problema de Separar 1

$$\begin{array}{r} \text{D} \quad \text{U} \\ 9 \\ - \quad 5 \\ \hline 4 \end{array}$$

Fonte: os autores

Nesta subtração não foi necessário “emprestar” da ordem maior. Será discutido sobre isso, mais a frente, nesta mesma sessão. E a expressão numérica quantitativa é:

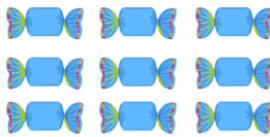
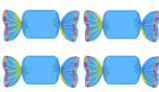
$$9 - 5 = 4$$

Ou seja, 9 balas menos 5 balas é igual a 4 balas que sobrou para o João. Mas podemos explorar outros tipos de situações-problema de subtração, como:

Problema de Separar 2: João comprou 9 balas na padaria e guardou no bolso da bermuda. Chegando em casa, percebeu que o bolso estava furado e que tinha apenas 4 balas. Quantas balas João perdeu?

Neste caso, o aluno precisa notar que temos o valor inicial e o valor final de balas, mas não temos a quantidade intermediária. Isto é, quantas balas João perdeu durante a ida para casa, para restarem apenas 4 balas. Questione-os novamente, se eles percebem que estão faltando tais valores, relacionando com o problema anterior.

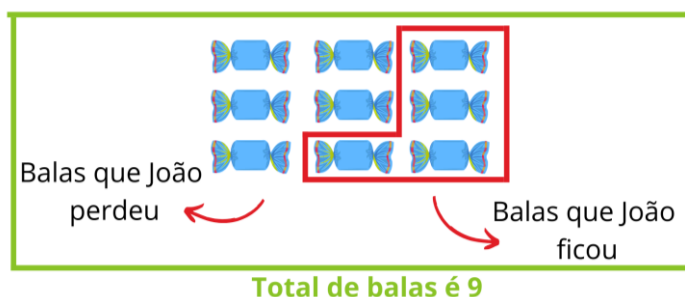
Figura 35: Representação do Problema de Separar 2 através de imagens (parte 1)

João comprou 9 balas	Perdeu uma quantidade de balas	João ficou com 4 balas
	?	

Fonte: os autores

Logo, podemos nos perguntar, que número de balas devo tirar de 9 balas para me dar 4 balas? Ou, se tinha 9 balas e me restaram apenas 4 balas, vou tirar 4 balas de 9 balas, para ficarem as que João perdeu no caminho.

Figura 36: Representação do Problema de Separar 2 através de imagens (parte 2)



Fonte: os autores

Assim, temos que João perdeu 5 balas pelo caminho.

Usando as mãos, por exemplo, contando de forma decrescente, obtém 5. Ou também, tira-se 4 do total 9. Observe que neste caso, não é possível usar o recurso da prova real, porque é necessário fazer o Resto - Subtraindo para obter o Minuendo. Contudo não temos o valor do Subtraendo para isto.

Figura 37: Representação matemática do Problema de Separar 2

$\begin{array}{r} D \quad U \\ 9 \\ - \quad \blacksquare \\ \hline 4 \end{array}$	ou	$\begin{array}{r} D \quad U \\ 9 \\ - \quad 4 \\ \hline 5 \end{array}$
---	----	--

Fonte: os autores

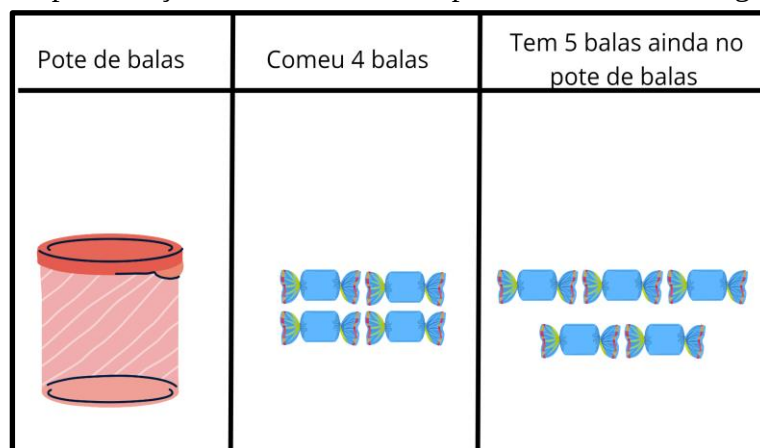
E tem-se como expressão numérica quantitativamente:

$9 - 4 = 5$

Isto é, 9 balas menos 4 balas que sobrou é igual a 5 balas que foram perdidas.
Por fim, outro tipo de problema de reunir:

Problema de Separar 3: João tinha algumas balas guardadas num potinho, ele comeu 4 balas, mas ainda tem 5 balas. Quantas balas ele tinha inicialmente?

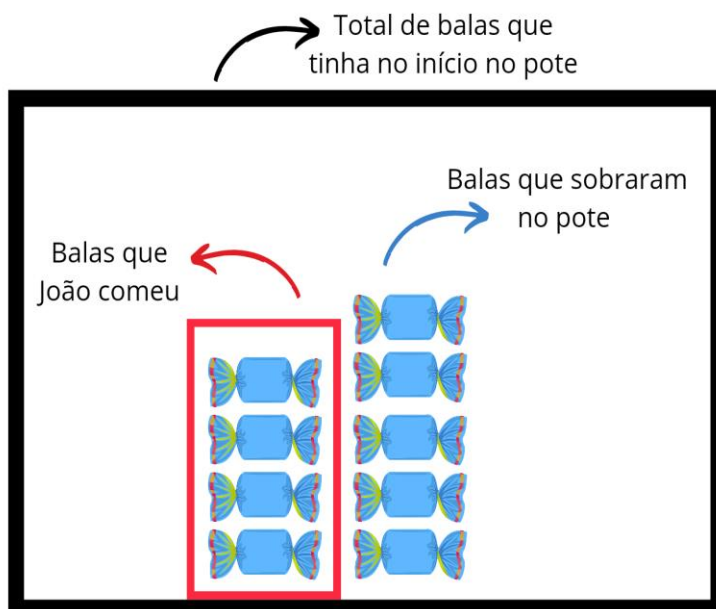
Figura 38: Representação do Problema de Separar 3 através de imagens (parte 1)



Fonte: os autores

Neste problema, é preciso descobrir o valor inicial. É necessário então se perguntar: que quantidade de balas se tira 4 e resulta em 5 balas? O valor esperado é 9, que é o total de balas.

Figura 39: Representação do Problema de Separar 3 através de imagens (parte 2)



Fonte: os autores

O aluno pode pegar valores e ir tirando 4 até chegar no resultado 5. Ou, fazer a operação inversa, como está representado no Algoritmo abaixo.

Figura 40: Representação matemática do Problema de Separar 3

$\begin{array}{r} \text{D U} \\ - \quad \blacksquare \\ 4 \\ \hline 5 \end{array}$	ou	$\begin{array}{r} \text{D U} \\ + \quad 5 \\ 4 \\ \hline 9 \end{array}$
--	----	---

Fonte: os autores

E a expressão numérica que o representa a quantidade:

$5 + 4 = 9$

Isto é, 5 balas que sobraram no pote mais 4 balas que foram comidas é igual a 9 balas no total. Novamente, apresentamos aos professores um quadro resumindo essas informações sistematicamente.

Quadro 7: Problemas de Separar

Quantidade Desconhecida	Expressão Matemática	Problema de Separar
Resultado	$9 - 5 = []$	1
Mudança	$9 - [] = 4$	2
Inicial	$[] - 4 = 5$	3

Fonte: baseado em Van de Walle (2009)

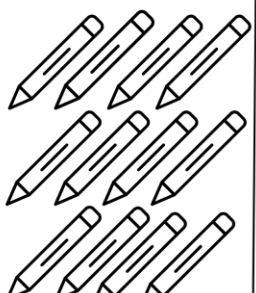
- **Problemas de Parte-todo**

O primeiro problema de parte-todo pode ser resolvido com a mesma interpretação dos problemas de reunir já que estamos unindo ou adicionando duas partes de um todo e onde uma das partes é desconhecida.

Problema de Parte-todo 1: Beatriz tem 12 lápis coloridos aquarela e 6 lápis coloridos metálicos. Quantos lápis ela tem ao todo?

Antes, esperar as colocações dos alunos frente ao problema proposto e, depois, formalizar o conteúdo com uso de desenhos ou outra ferramenta.

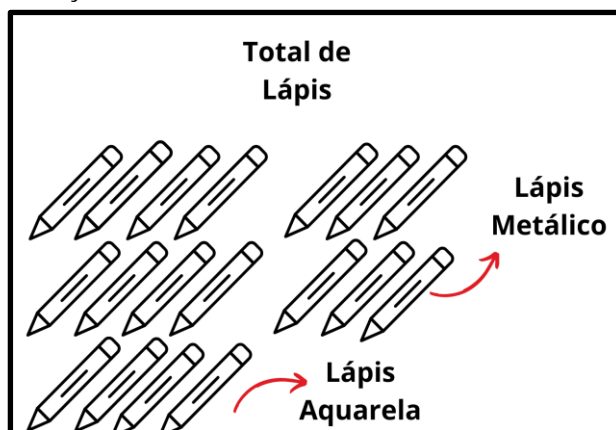
Figura 41: Representação do Problema de Parte-todo 1 através de imagens (parte 1)

Lápis Aquarela	Lápis Metálico	Total de Lápis
		

Fonte: os autores

O problema pede para descobrir o resultado final da união de duas partes: os lápis aquarelas e os lápis metálicos. Desenhando e contando os objetos se chegará ao resultado 18 lápis.

Figura 42: Representação do Problema de Parte-todo 1 através de imagens (parte 2)



Fonte: os autores

O que se pede para o aluno e para professor são diferentes. Para o professor ele chega ao resultado final, para o aluno a palavra união fica mais fácil em seu entendimento.

Os alunos podem até perguntar se podem adicionar objetos diferentes, pois tem-se dois tipos de lápis diferentes. Isso depende de cada problema ou exercício proposto. Neste caso está sendo pedida a quantidade total de lápis independentemente do tipo. Podia ser pedido para adicionar lápis, canetas e lapiseiras por exemplo. Não é errado adicionar itens diferentes, desde que seja isso o que o problema pede.

Pelo algoritmo da adição:

Figura 43: Representação matemática do Problema de Parte-todo 1

$$\begin{array}{r} \text{D U} \\ + 12 \\ \hline 6 \\ \hline 18 \end{array}$$

Fonte: os autores

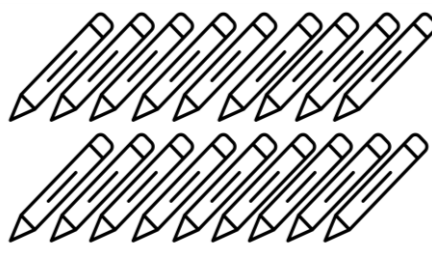
E pela expressão numérica:

$$12 + 6 = 18$$

Ou seja, 12 lápis aquarela mais 6 lápis metálicos é igual a 18 lápis no total.

Problema de Parte-todo 2: Beatriz tem 18 lápis, dentre eles 6 lápis são metálicos e os outros são aquarela. Quantos lápis aquarela Beatriz tem?

Figura 44: Representação do Problema Parte-todo 2 através de imagens (parte 1)



Fonte: os autores

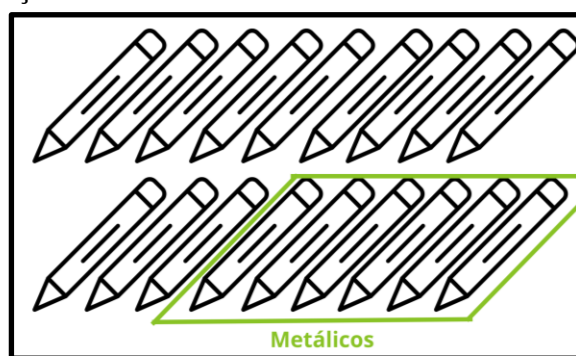
Neste caso, é apresentado o valor total de objetos que Beatriz possui e dentre desse total uma parte são de lápis metálicos. Permita que os estudantes resolvam, pegue seus lápis como exemplo e conversem com os colegas.

Depois dessa conversa, formalizando o procedimento, é apresentado pelo professor o valor total de objetos que Beatriz possui e, dentro desse total, uma parte que

é de lápis do modelo metálicos. Logo, dos 18 lápis, 6 deles são metálicos. O restante são lápis do modelo aquarela.

A primeira ideia para resolver esse problema é subtrair 6 lápis dos 18 lápis ou contar quantos lápis faltam de 6 lápis para chegar aos 18 lápis. Das duas formas, é claro, chega-se ao resultado 12 lápis aquarelas que têm Beatriz. Verifique se os alunos tiveram essas ideias ou outras.

Figura 45: Representação do Problema Parte-todo 2 através de imagens (parte 2)



Fonte: os autores

Agora, se for representado pelo Algoritmo, a operação realizada será a subtração.

Figura 46: Representação matemática do Problema de Parte-todo 2

<table style="margin: auto;"> <tr><td>D</td><td>U</td></tr> <tr><td>+</td><td>■</td></tr> <tr><td colspan="2"> </td></tr> <tr><td colspan="2">18</td></tr> </table>	D	U	+	■			18		ou	<table style="margin: auto;"> <tr><td>D</td><td>U</td></tr> <tr><td>1</td><td>8</td></tr> <tr><td>-</td><td>6</td></tr> <tr><td colspan="2"> </td></tr> <tr><td colspan="2">12</td></tr> </table>	D	U	1	8	-	6			12	
D	U																			
+	■																			
18																				
D	U																			
1	8																			
-	6																			
12																				

Fonte: os autores

Ou também, por:

$18 - 6 = 12$

Isto é, 18 lápis menos 6 lápis metálicos é igual a 12 lápis aquarela. Logo, a resposta procurada é de 12 lápis no modelo aquarela. A seguir, o quadro resumindo os Problemas de Parte-todo:

Quadro 8: Problemas de Parte-todo

Quantidade Desconhecida	Expressão Matemática	Problemas de Parte-todo
Todo desconhecido	$12 + 6 = []$	1
Parte desconhecida	$18 = 6 + []$	2

Fonte: os autores

Colocar na parte desconhecida a igualdade nesse formato de $18 = 6 + []$ foi proposital. Porque não é costume, dos professores em geral, escrever assim e consequentemente, muito menos os alunos. Porém, a igualdade, não deixa de estar correta. Pois a primeira informação que temos é do total e depois de suas parcelas, por isso a insistência em deixar nesta notação.

É uma boa oportunidade de trabalhar com o sinal de igualdade com os alunos, principalmente no significado que ela traz consigo. Exemplo da balança que utiliza dois pesos é bem utilizado nessa explicação, porém não faz mais parte do cotidiano dos alunos, visto que as balanças dos estabelecimentos são agora digitais. Desta forma, mudar os exemplos para balanças digitais seria uma solução, utilizando duas balanças para mostrar a igualdade.

Van de Walle (2009) traz uma preocupação ainda maior em relação ao sinal de igual:

Algum cuidado deve ser tomado com o sinal de igualdade. O sinal de igualdade significa ‘é o mesmo que’. Porém, a maioria das crianças é levada a acreditar que o símbolo significa ‘a resposta é’. É interpretado quase da mesma maneira como o = da calculadora. Isto é, é a tecla que você digita para obter a resposta. Uma equação como $4+8=3+9$ não tem ‘resposta’ e ainda é verdadeira porque ambos os lados suportam a mesma quantidade. Uma boa ideia é usar frequentemente a frase ‘é o mesmo que’ no lugar ou em conjunção com ‘é igual a’ ao ler as equações com os estudantes (VAN DE WALLE, 2009, p. 172).

Essa preocupação é válida e é deixada de lado por muitos professores de matemática. Essas falas mal colocadas pelo professor, pode ser um obstáculo didático futuramente, no ensino de álgebra, por exemplo, pois os alunos não conseguem observar que os dois lados da igualdade tem o mesmo “peso”/equivalentes. Outro fato com o sinal de igual é quando invertemos as ordens das escritas: $3 + 2 = 5$, mas poderia ser escrito

como $5 = 3 + 2$. As duas escritas estão corretas, que poderia ser o mesmo que $3 + 2 = x$ ou $x = 3 + 2$.

O próprio Problema de Parte-todo 2 mostrou, o resultado já estava dado e o que se queria era o valor de uma das parcelas. Então, seria lido como 18 é o mesmo que 6 mais alguma coisa. Essa escrita poderia ter sido abordada também nos problemas anteriores, como os Problemas de Reunir 2 e 3, Problemas de Separar 2 e 3, entre outros.

- **Problemas de Comparar**

Os problemas que envolvem comparação são complicados para as crianças por conta da dificuldade de interpretar o que está sendo pedido. Eles costumam ler as frases "quanto a mais" ou "quantos têm a menos" e isso induz os alunos a quererem utilizar a adição e a subtração, respectivamente, para essas situações. O que nem sempre é a solução do problema.

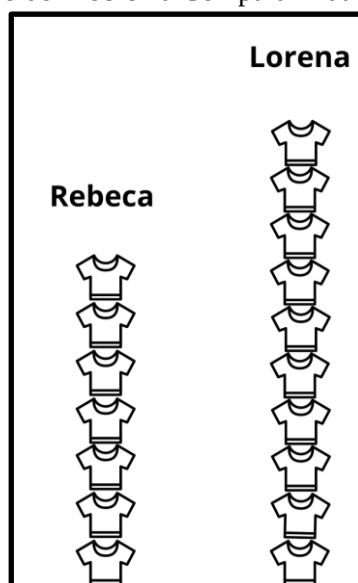
Problema de Comparar 1:

- a) Lorena tem 10 blusinhas e sua irmã mais nova Rebeca tem 7 blusinhas. Quantas blusinhas Lorena tem a mais que Rebeca?
- b) Quantas blusinhas Rebeca tem a menos que Lorena?

Apesar da palavra “mais” não é esse o significado dado ao problema: adicionar as duas quantidades. O que está sendo pedido é a diferença entre as duas quantidades, ou seja, se Rebeca tem 7 blusinhas para chegar às 10 blusinhas da irmã, faltam 3 blusinhas.

Esse problema é interessante para trabalhar com a linguagem matemática. Para isso o professor deve sentir a necessidade e a compreensão da língua pátria e, portanto, dar significado às palavras usadas no problema, o que nem sempre faz parte do vocabulário dos alunos. Lançando mão da representação com imagens, levar os alunos a verem as coisas ditas no problema.

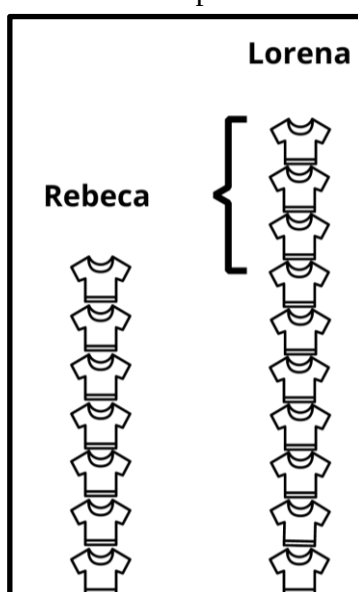
Figura 47: Representação do Problema Comparar 1 através de imagens (parte 1)



Fonte: os autores

Logo, as duas perguntas têm a mesma resposta quantitativa, porém com interpretação diferente. Pode-se dizer que Lorena tem 3 blusinhas a mais ou que Rebeca tem 3 blusinhas a menos.

Figura 48: Representação do Problema Comparar 1 através de imagens (parte 2)



Fonte: os autores

Representando através do Algoritmo:

Figura 49: Representação matemática do Problema de Comparar 1

$\begin{array}{r} D \ U \\ + \ 7 \\ \hline 1 \ 0 \end{array}$	ou	$\begin{array}{r} D \ U \\ - \ 1 \ 0 \\ \hline 3 \end{array}$
---	----	---

Fonte: os autores

Também, dada pela expressão numérica, expressando apenas a quantidade tem-se:

$10 - 7 = 3$

Isto é, 10 blusinhas de Lorena menos 7 blusinhas de Rebeca é igual a 3 blusinhas que Lorena tem a mais que Rebeca.

Problema de Comparar 2:

- a) Lorena tem 3 blusinhas a mais que sua irmã Rebeca. Rebeca tem 7 blusinhas. Quantas blusinhas Lorena possui?
- b) Rebeca tem 3 blusinhas a menos que sua irmã Lorena. Se Rebeca tem 7 blusinhas quantas sua irmã possui?

Figura 50: Representação do Problema de Comparar 2 através de imagens (parte 1)



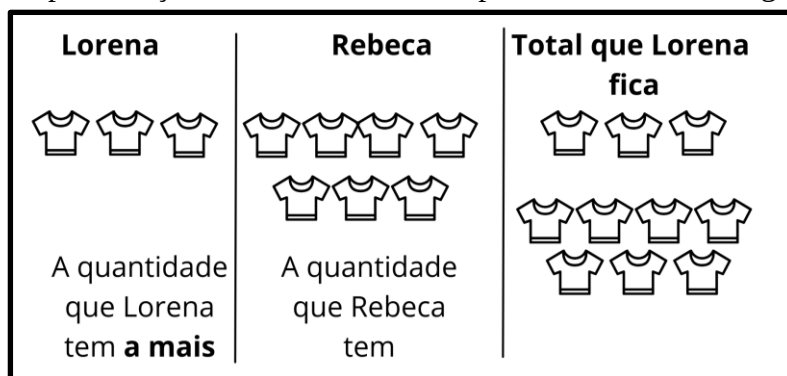
Fonte: os autores

Como o anterior, este problema utiliza as palavras “a mais”. Só que neste caso, realmente podemos somar as duas quantidades. Porque Lorena tem 3 blusinhas a mais

que Rebeca e o problema cita quantas blusinhas Rebeca tem. Então Lorena tem a quantidade de Rebeca mais 3 blusinhas.

Melhor dizendo, o que está sendo pedido é a quantidade maior, que no caso é a Lorena que tem e que são 10 blusinhas.

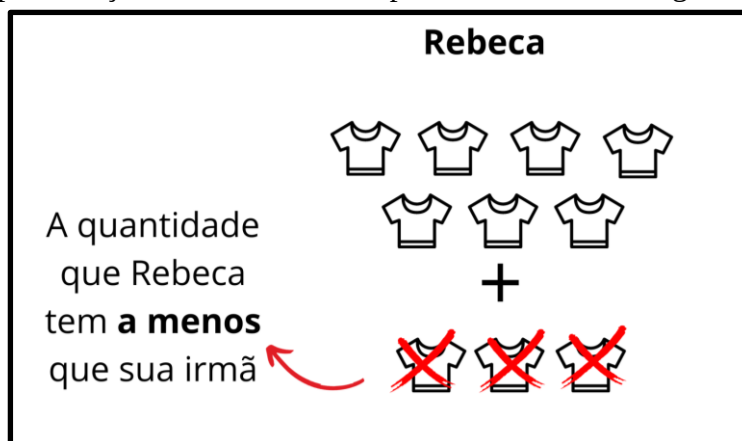
Figura 51: Representação do Problema de Comparar 2 através de imagens (parte 2)



Fonte: os autores

Para a segunda pergunta, a ideia é similar:

Figura 52: Representação do Problema Comparar 2 através de imagens (parte 3)



Fonte: os autores

Qual a quantidade de blusinhas que Lorena tem, sabendo que menos três dá a quantidade de blusinhas da Rebeca que são 7 blusinhas? Basta adicionar as da Rebeca com a quantidade que ela tem a menos de sua irmã. Utilizando o Algoritmo, resolve-se:

Figura 53: Representação matemática do Problema de Comparar 2

$\begin{array}{r} \text{D} \quad \text{U} \\ 7 \\ + 3 \\ \hline 10 \end{array}$	ou	$\begin{array}{r} \text{D} \quad \text{U} \\ \blacksquare \\ - 7 \\ \hline 3 \end{array}$
---	----	---

Fonte: os autores

Numericamente, visando a quantidade, deixar as crianças a partir da situação problema, buscar caminho para resolvê-lo e chegar em:

$7 + 3 = 10$

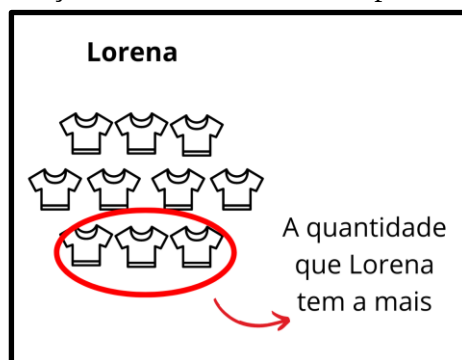
Ou seja, as 7 blusinhas da Rebeca mais as 3 blusinhas que a irmã tem a mais que ela é igual a 10 blusinhas. A Lorena tem 10 blusinhas.

Problema de Comparar 3:

- a) Lorena tem 3 blusinhas a mais que sua irmã Rebeca. Se ela possui 10 blusinhas, quantas blusinhas possui Rebeca?
- b) Rebeca tem 3 blusinhas a menos que Lorena. Lorena tem 10 blusinhas. E Rebeca, quantas tem?

Lembrando que o aluno tem que saber o significado das palavras que aparecem no enunciado do problema. Este problema é o inverso do problema 4.2, exigindo que o aluno descubra o resultado de **menor valor**, que é a quantidade de blusinhas que tem Rebeca. Como Lorena tem 10 blusinhas e, dentre elas, 3 são a mais que sua irmã, basta separar essa quantidade e sobrarão 7 blusinhas, que é a quantidade que sua irmã possui.

Figura 54: Representação do Problema de Comparar 3 através de imagens



Fonte: os autores

Pode-se efetuar a seguinte operação para obter o resultado, fazendo a diferença de 10 e 3. Ou pensando que valor que adiciona às 3 blusinhas que Lorena tem a mais que sua irmã, que vai dar o total de blusinhas de Lorena:

Figura 55: Representação matemática do Problema de Comparar 3

<table style="margin: auto;"> <tr><td>D</td><td>U</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>-</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>3</td></tr> <tr><td colspan="2"> </td></tr> <tr><td></td><td>7</td></tr> </table>	D	U	1	0	-			3				7	ou	<table style="margin: auto;"> <tr><td>D</td><td>U</td></tr> <tr><td></td><td></td></tr> <tr><td>+</td><td></td></tr> <tr><td></td><td>3</td></tr> <tr><td colspan="2"> </td></tr> <tr><td></td><td>10</td></tr> </table>	D	U			+			3				10
D	U																									
1	0																									
-																										
	3																									
	7																									
D	U																									
+																										
	3																									
	10																									

Fonte: os autores

Ou, pela expressão:

$10 - 3 = 7$

Isto é, 10 blusinhas que Rebeca tem menos às 3 que sua irmã tem é igual a 7 blusinhas. Logo, Lorena tem 7 blusinhas. Formalizando, encontra-se o quadro explicativo de cada um dos problemas, mostrando onde a informação estava desconhecida:

Quadro 9: Problemas de Comparação

Quantidade Desconhecida	Expressão Matemática	Problemas de Comparar
Diferença desconhecida	$10 - 7 = []$	1
Maior valor desconhecido	$7 + 3 = []$	2
Menor valor desconhecido	$10 - 3 = []$	3

Fonte: os autores

Concluimos assim a exposição dos problemas utilizando as quatro Estruturas Aditivas e Subtrativas propostas por Van de Walle (2009). Lembrando que cada problema poderá ser resolvido de diversas maneiras diferentes, cabe ao professor adaptá-los de acordo com a realidade de sua sala de aula. Também poderão ser alterados os valores numéricos dependendo do nível de ensino com que se está trabalhando.

Depois que os alunos aprenderem sobre adição e subtração de forma representativa e associando-lhes expressões matemáticas, apresenta-se a definição das duas operações e suas propriedades. Também se pode trabalhar com exercícios mais complexos e de ordens maiores, para fixar o conteúdo.

A definição de adição, segundo o dicionário Michaelis, é dada assim:

Adição é uma operação matemática que tem por fim, dados dois ou mais números, achar um outro número que contenha tantas unidades quantas houver nos números dados; a soma, ou seja, a soma é resultado da adição.

O símbolo que indica a adição entre dois números é representado pelo sinal + chamado **mais**. Os números que estão sendo adicionados são chamados parcelas. O resultado dessa operação chamamos soma ou total.

Figura 56: Exemplo de adição e nomenclatura de suas partes

5	+	4	=	9
1º Parcela		2º Parcela		Soma ou Total

Fonte: os autores

Genericamente, temos que se tomarmos **a**, **b** e **c** sendo números naturais quaisquer, a sentença matemática que representa essa operação é:

$$\mathbf{a + b = c}$$

Assim, serão tomados **a** e **b** como parcelas da adição e **c** a soma ou total, como já foi mencionado, pode se ver que essa forma genérica, ainda não é apropriada para alunos até o sexto ano do Ensino Fundamental. Smole e Muniz (2013) consideram a adição como sendo a principal dentre as quatro operações básicas e as demais operações são decorrentes dela, tendo a subtração sua maior conexão. “As crianças nas séries iniciais não têm necessidade dos símbolos, +, - e =. Porém, essas convenções simbólicas são importantes” (VAN DE WALLE, 2009, p. 172) para a compreensão e conhecimento do professor.

O mesmo dicionário Michaelis define:

Subtração é uma operação matemática por meio da qual se retira um número ou uma quantidade de um outro número ou outra quantidade; diminuição.

O símbolo que indica a subtração entre dois números é representado pelo sinal (-) chamado **menos**. Van de Walle (2009) adverte sobre o cuidado de ler esse sinal por menos ou subtrair e não por tirar, justamente pela confusão que os educandos podem ter quando a estrutura do problema de subtração pede uma ação contrária, como os Problemas de Separar 2 e 3. O que não acontece para adição, pois o sinal de mais (+) pode ser substituído facilmente pelo "e".

Os números que estão sendo subtraídos são chamados minuendo e subtraendo. O resultado pode ser expresso como resto, excesso ou diferença, pois na subtração envolvendo esses números que pode ter as ideias de: sobra ou resto, quem tem mais é o

excesso e a diferença de um valor para o outro. Dependendo da situação problema o resultado vai ter uma dessas ideias.

Figura 57: Exemplo de subtração e a nomenclatura de suas partes

5	-	4	=	1
Minuendo		Subtraendo		Resto, Excesso ou Diferença

Fonte: os autores

Também, genericamente, se tomarmos **a**, **b** e **c** como números naturais quaisquer, com a condição de **a** maior que **b**, expressa por $a > b$, existe um **c** que:

$$\mathbf{a - b = c}$$

Na qual, **a** é o minuendo, o que tem a quantidade; **b** é o subtraendo, o que se tirou e **c** é o resto, excesso ou diferença, como mencionado anteriormente. A razão pela qual **a** tem que ser maior que **b** é para garantir, nesse primeiro momento de aprendizagem sobre as operações matemáticas, em que não se tenha valores negativos, pois as crianças ainda não possuem conhecimento desse novo conjunto numérico.

Enfatizando o que já foi tratado nas Estruturas Aditivas e Subtrativas, a subtração tem a ideia de tirar, mas também de comparar e completar. Na subtração 9 - 6, a ideia de tirar seria: de 9, se tiro 6, restam 3, portanto, resto. Agora, quanto 9 é maior que 6? ou quanto 6 é menor que 9? Essa ideia de completar: 6 para completar 9, faltam 3.

Até então, nos problemas propostos em relação à adição não havia **reservas** e em relação à subtração sem as famosas **trocas**.

- **Adição com “reservas” ou “transportes”**

A adição com reserva se dá quando o valor adicionado ultrapassa 9. Por exemplo: 12 mais 9, se adicionarmos os valores que estão na unidade, $2 + 9 = 11$. O número 11 é maior que 9 e não se pode colocar dois algarismos na ordem das unidades.

Figura 58: Exemplo 1 de adição com reservas (parte 1)

D	U
+ 1	2
	9
	11

Fonte: os autores

Como $11 = 10 + 1$, o algarismo 1 que pertence às unidades, irá permanecer na ordem das unidades e as 10 unidades se transformará em uma dezena e será adicionado com às dezenas, sendo representado pelo número 1 em cima do algarismo 1, do número 12.

Figura 59: Exemplo 1 de adição com reservas (parte 2)

¹ D	U
+ 1	2
	9
2	1

Fonte: os autores

Então adicionando os dois algarismos, o 1 da ordem anterior com 1 do número 12, $1 + 1 = 2$. Assim, $12 + 9 = 21$. Esse processo pode ser feito com números de mais algarismos.

Figura 60: Exemplo 2 de adição com reservas

C	D	U		C	D	U		C	D	U		C	D	U
+	7	7	→	+	¹ 7	7	→	+	¹ 7	¹ 7	→	+	¹ 7	¹ 7
	5	8			5	8			5	8			5	8
					5				3	5		1	3	5

Fonte: os autores

É recomendável que se efetuem, da direita para a esquerda, as adições em que a soma dos algarismos das unidades, ou das dezenas, ou das centenas, etc, ultrapasse nove.

Estas adições são chamadas **adição com reserva** ou **adição com transporte**. É comum, na adição com transporte, dizermos “vai um”. Na verdade, o transporte é de **uma** dezena, **uma** centena, **uma** unidade de milhar, etc... (CENTURIÓN, 1995, p. 155)

Novamente, caímos na questão da linguagem que é passada para os alunos. O “vai um na casa das dezenas”, “vão dois na casa das centenas”, são exemplos de como se é ensinado esse “transporte”. Mesmo explicando dessa forma, o professor pode separar uns minutos da aula para explicar o porquê do uso dessa frase. O material dourado é uma excelente ferramenta para isso, trocando as unidades por dezenas ou trocando dezenas por centenas, para serem acrescentadas à ordem superior.

Centurión (1994) “sugere que se escrevam as parcelas uma abaixo da outra e que se adicionem da direita para a esquerda”. Isto é, unidade com unidade, dezena com dezena e assim sucessivamente. Portanto, enfatiza-se o valor posicional de cada algarismo para o estudante, retomando esse conteúdo.

Smole e Muniz (2013) complementam enfatizando o uso de diversos materiais disponíveis na escola e pelo professor “desde tampas de garrafa e pedrinhas, passando pelo material dourado e [...] ao ábaco”.

- **Subtração com “as trocas” ou recurso**

A subtração com “trocas” ou recurso - como é utilizado por Centurión (1994) - se dá quando o valor do minuendo é menor que o valor do subtraendo. Exemplo: na subtração $35 - 17$, como subtrair os algarismos que estão na ordem das unidades 5 - 7 (lembrando que ainda não lhes foram apresentados os números negativos).

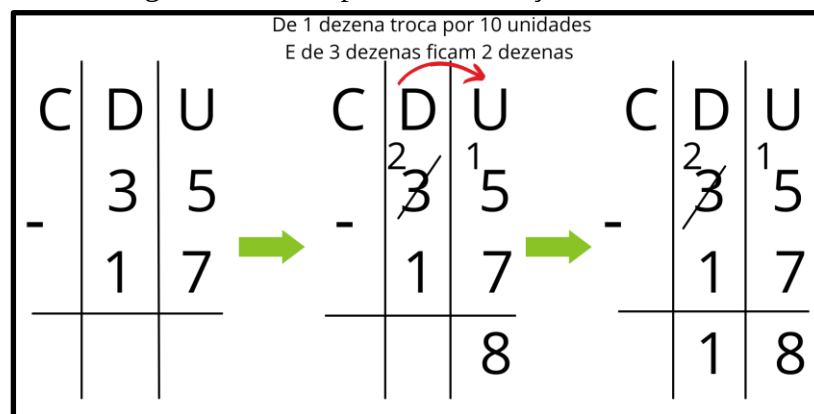
Para resolver isso, lembrar que $35 = 30 + 5$, isto é, 3 dezenas mais 5 unidades. Como na ordem das dezenas temos 3 dezenas, deixa duas dezenas na ordem das dezenas e transforma a outra em 10 unidades. Assim, 10 unidades + 5 unidades é o mesmo que 15 unidades.

Agora dá para concluir a subtração:

15 unidades - 7 unidades = 8 unidades

2 dezenas - 1 dezena = 1 dezena

Figura 61: Exemplo 1 de subtração com trocas



Fonte: os autores

O resultado obtido dessa subtração é o número 18.

[...] é comum, na subtração com recurso, usar-se a expressão: ‘empresta um’. Na verdade, não se ‘empresta’ nada, pois quem empresta alguma coisa, supõe-se, deveria devolvê-la. Na verdade, este procedimento no algoritmo apoia-se nas propriedades do nosso sistema decimal e posicional de numeração. O que se faz na subtração é decompor uma dezena em 10 unidades e acrescentá-las às unidades, ou decompor uma centena em 10 dezenas e acrescentá-las às dezenas (CENTURIÓN, 1994, p. 184-185).

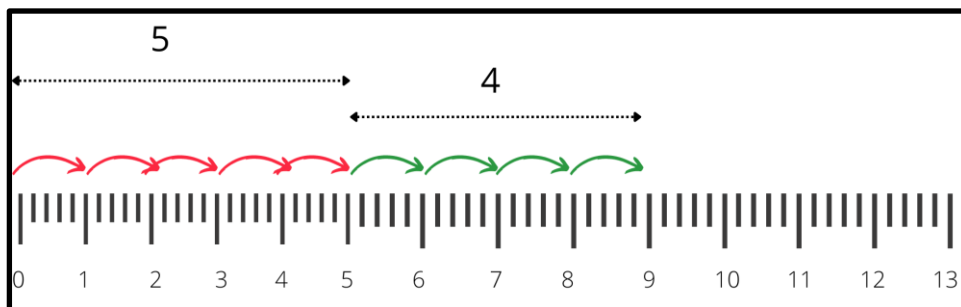
Outra vez se discute, com os professores, a linguagem utilizada no ensino das operações. É prático e rápido, enquanto se ensina a dizer “corta e empresta um”. Contudo, as vantagens de separar um tempo maior e explicar detalhadamente esse procedimento é uma oportunidade de relembrar com os alunos o SND e trabalhar o agrupamento e desagrupamento das ordens numéricas.

Além de adicionar e subtrair expressões matemáticas, pode-se utilizar a reta numerada como recurso para ensinar as operações, o que ajuda os alunos tanto na visualização dessas duas operações, quanto a entender o conceito de medida.

Para adicionar, na reta numérica, a ideia é de “pular” ou “andar” de um número a outro crescendo da esquerda para a direita, utilizando **intervalos da mesma medida**. No caso da adição de $5 + 4$, começando pelo ponto zero, “andaremos” 5 unidades e para

adicionar 4, “andaremos” do ponto onde parou, no caso o ponto 5 e “andaremos” mais quatro unidades. Chegando até o ponto 9, portanto $5 + 4 = 9$.

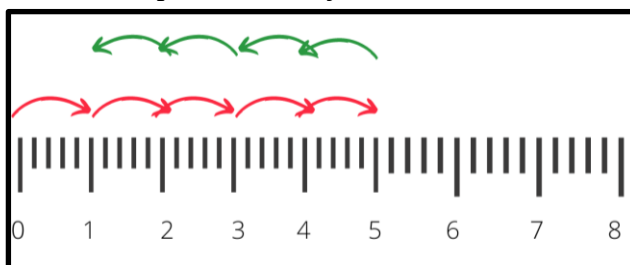
Figura 62: Exemplo de adição utilizando a reta numérica



Fonte: os autores

No caso da subtração de $5 - 4$, a ideia é de “voltar”. Primeiramente contaremos cinco, começando do ponto zero, “andaremos” cinco unidades, parando no ponto 5. Para subtrair 4 de 5, “voltaremos” 4 unidades. Parando no ponto 1. Portanto, $5 - 4 = 1$.

Figura 63: Exemplo de subtração utilizando a reta numérica



Fonte: os autores

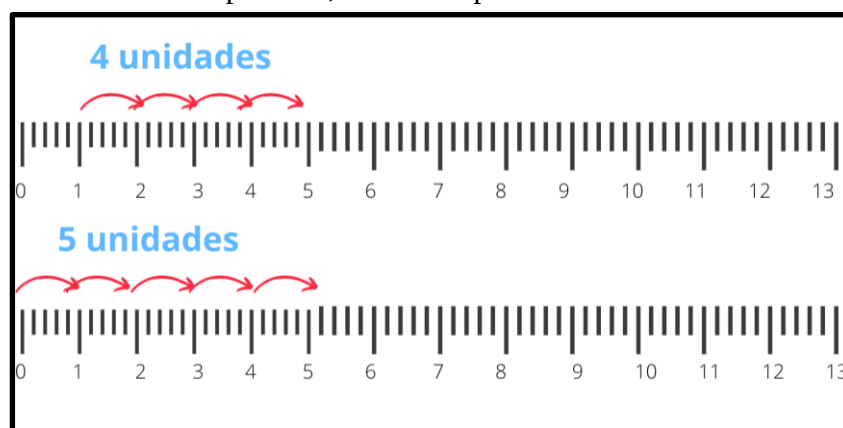
Essa linguagem de "andar", "pular", “voltar” deve ser usada até que os educandos estejam amadurecidos para usar a linguagem matemática de intervalos. Contudo,

Uma reta numérica apresenta algumas dificuldades conceituais verdadeiras para [as crianças de] 1ª a 2ª séries. Se uso como modelo nesses níveis em geral não é recomendado. Uma reta numérica mede as distâncias do zero, do mesmo modo que uma régua faz. Nas séries iniciais, as crianças focam nos pontos ou números em uma reta numérica em vez dos intervalos. Porém, se setas (saltos) forem desenhadas para cada número em um exercício, o conceito de comprimento é mais claramente ilustrado. Para modelar o conceito de ‘parte-todo’ de $5+3$, comece desenhando uma seta de 0 até 5, indicando, ‘tudo isso é cinco’. Não aponte para o ponto 5, dizendo ‘isso é cinco’ (VAN DE WALLE, 2009, p. 173).

Esse é um dos cuidados que Van de Walle (2009) orienta em seu livro. Mas, mesmo assim, o uso da reta numérica é importante. Saber manusear bem os instrumentos de medida é útil tanto na vida escolar quanto fora dela, como ferramenta de trabalho.

Não se pode aceitar que os estudantes terminem sua escolaridade básica, errando as medições de uma régua por exemplo. A imagem abaixo exemplifica uma situação com um erro grave que, infelizmente, é comum entre os estudantes. Suponha que se queira saber, se um objeto mede 5 centímetros. Ao invés de começarem do ponto zero para marcar 5 unidades de medida, começam do 1, errando a resposta. De 0 a 5, o intervalo é de 5 unidades, já de 1 a 5, o intervalo é de 4 unidades.

Figura 64: Diferença entre os intervalos começando da origem e de um ponto específico, no caso o ponto 1



Fonte: os autores

É interessante, para auxiliar nesse entendimento, começar não somente pelo zero, mas de outros pontos, propondo problemas como: se a régua estivesse quebrada como se poderia medir tal valor de unidades de medida?

Dentre os problemas apresentados até então, não abordamos nenhum que o zero tenha sido um entrave. A não ser esse da reta numerada, no qual a dificuldade é ver o zero como **origem** ou como **ponto de partida**. Por isso, preparamos um problema específico para discutir sobre o zero.

Problema extra: Encontre os valores que estão faltando

M	C	D	U
	2		2
-		4	
		6	2

Esse problema, diferente dos outros, não está relacionado com o cotidiano do aluno. Poderia até ter de ser criada uma situação em cima dessa imagem, mas o objetivo nesse momento é que os alunos reflitam sobre o papel do zero, não somente como um guardador de lugar.

Como eles já aprenderam o algoritmo tanto da adição quanto o da subtração, o professor deve orientá-los a começar das ordens menores (unidades) até as ordens maiores (milhares). No caso, nas unidades, qual é o número que lhe tirando 1 resulta 2? O número esperado que eles respondam é o número 3.

Figura 65: Resolução do Problema Extra (parte 1)

M	C	D	U
	2		3
-		4	
		6	2

Fonte: os autores

Na ordem das dezenas tem-se que: 2 menos algum valor deve resultar 2. Talvez, os estudantes se questionem nesta parte do problema, pois esperamos que como é uma subtração 2 menos algo tem que dar um valor menor. Porém, aqui resultou no mesmo valor, logo o número procurado é o zero.

Figura 66: Resolução do Problema Extra (parte 2)

M	C	D	U
2		2	3
-		4	0 1
		6	2 2

Fonte: os autores

Na terceira ordem, as centenas, procura-se um número que menos 4 resultará em 6. Esse pode ser que seja mais um entrave para os estudantes, permitindo que eles utilizem representações, os dedos das mãos ou objetos para perceberem que: pode-se colocar valores de 0 a 9 em cada uma das ordens. O maior valor é 9, porém $9 - 4 = 5$. Então, o valor procurado é o 10, pois $10 - 4 = 6$.

Mas não se pode colocar 10. Então como resolver? Lembre os estudantes de uma ferramenta importante da subtração: as trocas ou o famoso “empresta”. Se colocar o zero na centena, pode-se trocar na ordem dos milhares o 2 (que representa 2.000) por 1 (que representa 1.000) e transportar esse 1 que foi tirado dos milhares para as centenas. Ficando 10.

Figura 67: Resolução do Problema Extra (parte 3)

$$\begin{array}{r} \text{M} \quad \text{C} \quad \text{D} \quad \text{U} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \cancel{2} \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \quad 2 \quad 3 \\ - \quad \quad 4 \quad 0 \quad 1 \\ \hline \blacksquare \quad 6 \quad 2 \quad 2 \end{array}$$

Fonte: os autores

Logo, $10 - 4 = 6$. Por fim, na ordem dos milhares, restou apenas o valor 1 para ser subtraído por nenhum número, então o último número a ser encontrado é o 1.

Figura 68: Resolução do Problema Extra (parte 4)

	M	C	D	U
	¹ 2	¹ 0	2	3
-			4	0
	1	6	2	2

Fonte: os autores

Observe que esse problema foi específico para analisar o zero na subtração. O zero assume dois papéis: como elemento neutro para $2 - 0 = 2$ e como guardador de lugar para a ordem das centenas do número 2023 e na ordem das dezenas no número 401.

Utilizando o mesmo problema pode-se abordar outra situação com o zero, mudando os valores a serem encontrados.

Figura 69: Resolução do Problema Extra em outra situação

	M	C	D	U
	2	0	2	
-			4	0
	1			2

Fonte: os autores

O primeiro valor na unidade já se sabe que é o número 3, pois $3 - 1 = 2$. E na ordem das dezenas o resultado encontrado foi de $2 - 0 = 2$. E a subtração $0 - 4$? É muito comum as crianças aplicarem a mesma regra de $2 - 0 = 2$ para esse caso, respondendo que $0 - 4 = 4$. Contudo, o professor pode questionar duas coisas: a primeira é que na ordem dos milhares vai aparecer uma incoerência, pois 2 menos nada não pode ser 1. Ou também, um exemplo: se tenho zero balas, como vou tirar/doar quatro balas? Não faz sentido!

Assim, eles podem chegar à conclusão de que precisarão fazer o transporte dos milhares para as centenas para resolver. Essa confusão ocorre, pois,

Ocasionalmente os estudantes imaginam que $6 + 0$ deve ser maior que 6 ou que $12 - 0$ deve ser 11 pois ‘mais faz números maiores’ e ‘menos faz números menores’. Em vez de fazer regras que pareçam arbitrárias sobre adicionar e subtrair zero, construa oportunidades para discutir o zero na rotina da resolução de problemas” (Van de Walle, 2009, p. 175)

Esse problema abordou o zero de duas formas diferentes como já foi mencionado. E assim, os alunos posteriormente, quando for necessário, entenderão melhor as propriedades da adição e da subtração.

Aliás, quais são essas propriedades?

Adição e suas propriedades

As propriedades que iremos discutir para adição será para números no conjunto dos números naturais (N)

- **Fechamento:** essa propriedade garante que a adição de dois números naturais quaisquer resultará sempre em um número natural. Isto é, o conjunto dos números naturais é fechado.

Em notação matemática, tem-se que dados quaisquer **a** e **b** naturais, então existe **c** natural que:

$$a + b = c \in N$$

Sendo N o conjunto dos números naturais e o sinal $\in$ (lê-se pertence) é um símbolo matemático utilizado para mostrar que algo pertence a um determinado conjunto numérico. E se fosse três números naturais sendo adicionados? Então $a + b + c = d \in N$. Ampliando, a adição de quaisquer números naturais, independentemente de quantos números iremos adicionar, sempre resultará em um número natural.

- Comutativa: vem do verbo comutar, isto é, trocar ou mudar. Então a adição ser comutativa significa que a ordem das parcelas não altera o resultado da adição.

Exemplo: $6 + 4$ ou $4 + 6$ trocamos as parcelas de posição, mas o resultado continua sendo 10. Melhor dizendo $6 + 4 = 4 + 6 = 10$. Ou seja, a ordem das parcelas não alterou a soma.

Genericamente, quaisquer que sejam os números naturais dados para **a** e **b**, a propriedade comutativa é verdadeira para a adição. Dizendo que:

$$a + b = b + a$$

E prova-se também que isto vale para adicionar qualquer quantidade de parcelas, o resultado continuará sendo um número natural, que é o caso da propriedade a seguir.

- Associativa: é uma propriedade para quando temos três ou mais parcelas. Ela garante que, independentemente da ordem que escolhermos para adicionar os números, o resultado será sempre o mesmo.

Exemplo: dado os números 5, 4 e 3. Posso operar, começando pelos valores que estão dentro dos parênteses⁸: $(5 + 4) + 3$ ou, $5 + (4 + 3)$ ou também, $(5 + 3) + 4$, essas adições resultarão sempre 12. Ou seja,

$$(5 + 4) + 3 = 5 + (4 + 3) = (5 + 3) + 4 = 12$$

Genericamente, quaisquer que sejam os números naturais dados para **a**, **b** e **c**, a propriedade associativa é verdadeira para a adição.

$$(a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b = d$$

⁸ Para resolver expressões numéricas é preciso respeitar certas ordens. Na página 63 deste trabalho, apresentamos o Quadro 5 sobre as Operações Matemáticas. Lá, estava descrita as operações diretas e inversas. Na expressão: $2 + 10 \div 2 \times 3^2$. Começamos com as operações de grau maior: todas de potenciação e suas inversas, depois todas de multiplicação e sua inversa e, por último, todas de adição e sua inversa. Além de analisar os graus, também temos que notar se há símbolos: parênteses (), colchetes [] e chaves { }. Caso haja os símbolos primeiro operamos o que há dentro dos símbolos e depois trabalhamos com as operações. Segue essa ordem que foi apresentada para resolver as expressões matemáticas. Por fim, uma dúvida que também surge é que quando se tem esse tipo de caso: $8 \times 6 \div 3 + 20$. O que operamos primeiro? A multiplicação ou a divisão? Seguimos, resolvendo, na ordem que aparece na expressão, no caso, primeiro a multiplicação e depois a divisão.

Existem outras possibilidades, alterando a ordem, começando por **b** ou por **c**.

- Existência de um elemento neutro: o zero é elemento neutro da adição. Isso significa que ele não altera o valor da parcela no qual foi adicionado.

Exemplo: $7 + 0 = 0 + 7 = 7$

Genericamente, qualquer que seja $n \in N$, vale:

$$n + 0 = 0 + n = n$$

- Existência de elemento oposto: o elemento oposto na adição é um valor ele menos ele mesmo resulta em zero.

Exemplo: $10 + [] = 0$, ou seja, que valor eu devo tirar de 10 para resultar em zero? O valor procurado é o oposto de 10, que é ele negativo, o -10. Assim, $10 + (-10) = 0^9$.

Genericamente, dado $a \in N$

$$a + (-a) = 0$$

Subtração e suas propriedades

As propriedades na subtração são mais restritas, veja o porquê:

- Não possui fechamento: para uma propriedade ser fechada, dado quaisquer números naturais, se os subtrair o resultado tem que ser um número natural. Basta um contraexemplo para provar que a subtração não é fechada, pois tem que valer para todos os casos.

⁹ Para resolver esse exemplo foi aplicada a Regra de Sinais: + com + é positivo, - com - é positivo (sinais iguais, o resultado é positivo), + com - é negativo e, - com + é negativo (sinais contrários, o resultado é negativo). Nesta pesquisa não abordaremos profundamente o porquê dessa regra. Porque os alunos aprendem isso no 7º ano do Ensino Fundamental.

Contraexemplo: a subtração $5 - 6$, o resultado é um número negativo, -1 . Esse número não faz parte do conjunto dos números naturais.

- Comutativa: a subtração não é comutativa pelo mesmo motivo da propriedade anterior.

Contraexemplo: a subtração $6 - 5 = 1$. Porém, se comutar os números, $5 - 6 = -1$. Logo, o resultado não é o mesmo, pois $1 \neq -1$.

- Associativa: a subtração não é associativa.

Contraexemplo: dado os números 7, 3 e 2.

Quadro 10: Contraexemplo da subtração não ser associativa

1º Posicionamento dos Números	2º Posicionamento dos Números
$(7 - 3) - 2$	$7 - (3 - 2)$
$4 - 2$	$7 - 1$
2	6

Fonte: os autores

Para ser associativa, independente da ordem que se comesasse a operar, o resultado era para ser o mesmo. E como foi mostrado, isso não ocorre. Logo, o cuidado ao se resolver a subtração deve ser redobrado, pois a ordem das parcelas altera o resultado.

- Existência de elemento neutro: na adição o zero é o seu elemento neutro da adição, mas isso não ocorre para a subtração.

Contraexemplo: $5 - 0 = 5$ (para este caso o zero funciona como elemento neutro). Mas e para o caso de $0 - 5$, o resultado seria um número negativo. Então não manteria o valor da parcela, pois $5 \neq -5$.

- Existência de elemento oposto: o elemento oposto na subtração é um valor menos ele mesmo resultando em zero.

Exemplo: $10 - [] = 0$, ou seja, que valor eu devo tirar de 10 para resultar em zero? O valor procurado é o próprio 10. Assim, $10 - 10 = 0$.

Genericamente, dado $a \in N$

$$a + (-a) = 0$$

Tratando-se do zero pode se negar que ele é um número diferente dos demais. Seife (2000) escreve um livro inteiro apenas sobre o zero, mostrando sua importância e que ele não pode se resumir a um nada. Não só ele, mas Kaplan (1999) e Matias (2020), também dedicam obras só para este número. Sobre a adição, a subtração e o zero, Seife (2000) comenta que:

Adicione um número a si mesmo e ele muda. Um e um não é um - são dois. Dois e dois são quatro. Mas zero e zero são zero. Isso viola um princípio básico de números chamado axioma de Arquimedes, que diz que se você adicionar algo a si mesmo várias vezes, ele excederá qualquer outro número em magnitude. (O axioma de Arquimedes foi formulado em termos de áreas; um número era visto como a diferença de duas áreas desiguais.) Zero se recusa a ficar maior. Ele também se recusa a tornar qualquer outro número maior. Adicione dois e zero e você terá dois; é como se você nunca se importasse em somar os números. A mesma coisa acontece com a subtração. Tire zero de dois e você terá dois. Zero não tem substância. (SEIFE, 2000, p. 9, tradução nossa)

Realmente o zero se recusa a tornar algo maior ou menor, ou seja, ele prende o número em si mesmo não o permitindo aumentar ou diminuir, isso tratando-se da adição e da subtração. Mas uma situação mais difícil acontece com a multiplicação e a divisão.

4.4.2. Problemas multiplicativos (multiplicação e divisão)

Assim como Van de Walle (2009) usaremos o termo multiplicativo para designar problemas de multiplicação e divisão. Esses tipos de problemas o autor separa em duas estruturas: grupos iguais (adição repetida e taxas) e comparação multiplicativa.

Como nos problemas aditivos e subtrativos em que trabalhamos paralelamente a adição e a subtração, faremos o mesmo com a multiplicação e a divisão. Lembrando que os problemas propostos serão pensados para utilizar recursos visuais ou manipulativos para auxiliar no entendimento da criança e, depois, entrar com o algoritmo.

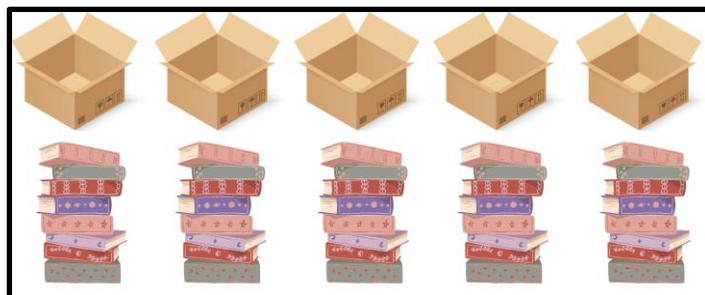
- **Problemas de grupos iguais**

(a) problemas de adição-repetida

Problema 5.1: Marcela comprou 5 caixas de livros sortidos para a biblioteca da escola. Cada caixa contém 8 livros. Quantos livros ela comprou no total?

A primeira ideia relacionada à multiplicação é a de adição de parcelas iguais. Assim, podemos incentivar os alunos a utilizar seus conhecimentos prévios em adição para resolver esse problema. Se cada caixa tem 8 livros e têm-se 5 caixas, para obter o resultado basta juntar a quantidade total de livros, utilizando 8 livros os alunos os contariam e na imagem abaixo poderiam ver a relação.

Figura 70: Representação do Problema de Adição-repetida¹ através de imagens (parte 1)



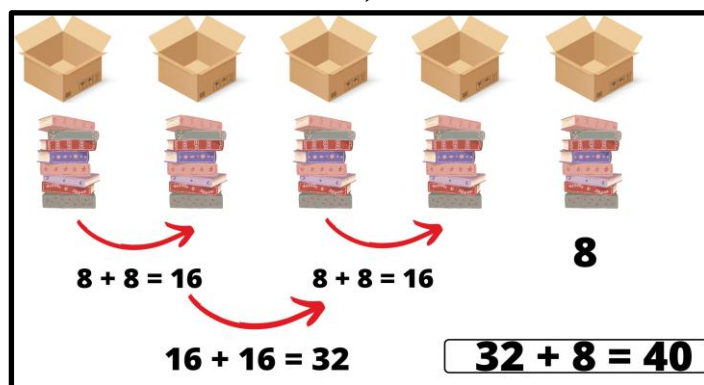
Fonte: os autores

(i) ir contando cada um dos livros, um por um, até chegar na soma de 40 ou também contar de 8 em 8.

$$8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 40$$

(ii) ou fazer pequenos agrupamentos e para depois juntá-los

Figura 71: Representação do Problema de Adição-repetida 1 através de imagens (parte 2)



Fonte: os autores

De ambas as formas é possível chegar ao resultado, porém a de agrupamento facilita o cálculo mental e é mais rápido, principalmente quando a quantidade de vezes que tem que adicionar aumenta. Aliás, essa linguagem pode ser utilizada com os alunos: o número 8 foi repetido 5 vezes. Isto é, trabalhamos com multiplicação, sem utilizar o algoritmo da multiplicação.

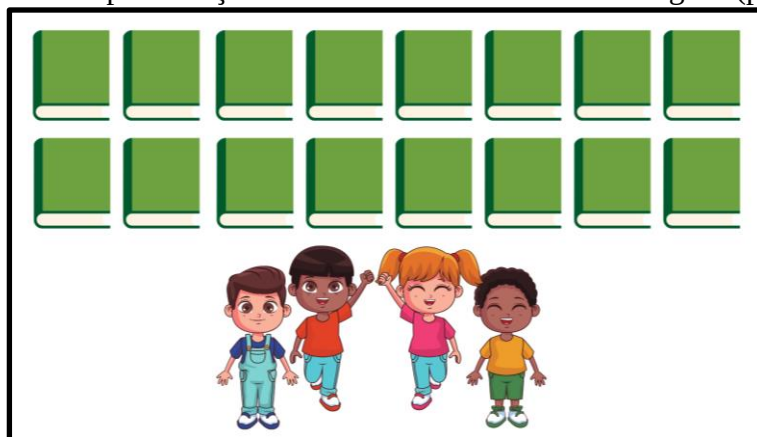
Portanto, $8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 40$, pode ser escrito assim:

$$5 \times 8 = 40$$

Na multiplicação toma-se uma quantidade determinada de vezes. Também fazemos uma correspondência, um a um, de quanto cada aluno receberá. Isso significa que multiplicamos 5 vezes o número 8, isto é, escrevemos o número 8, cinco vezes. Essa rigorosidade, não é necessária nesse primeiro contato com a multiplicação, mas discutiremos a importância de distinguir 5×8 de 8×5 .

Problema 5.2: Marcela está separando alguns livros repetidos da biblioteca para doar para os alunos. Tem 4 alunos interessados e 16 livros para doação. Cada aluno vai receber quantos livros?

Figura 72: Representação do Problema 5.2 através de imagens (parte 1)

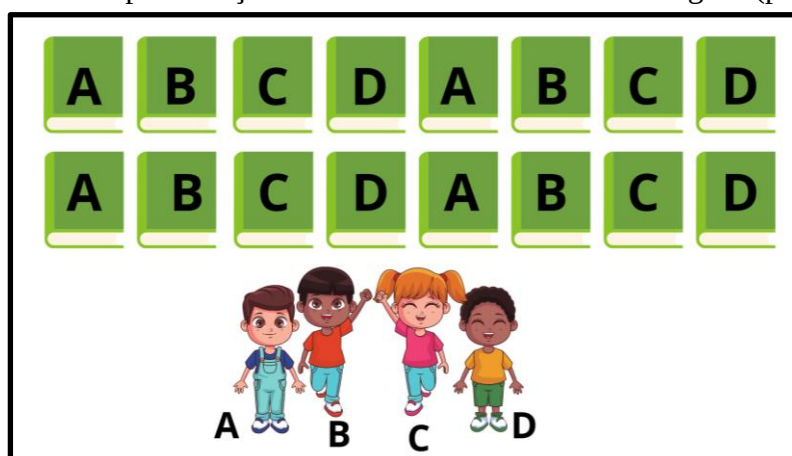


Fonte: os autores

Fazendo a correspondência, ver-se o que cada aluno receberá, quantas vezes o 4 cabe em 16. Este problema está relacionado à divisão, melhor dizendo, a repartição, no qual temos um total de objetos (16 livros) e eles serão distribuídos em uma determinada quantidade (4 alunos) igualmente. Como no problema anterior, não utilizaremos ainda o algoritmo da divisão. Utilizando a imagem, os alunos podem relacionar cada item a uma criança da forma que achar mais adequado.

É importante deixá-los resolver de acordo com seus conhecimentos e questioná-los sobre suas soluções, pois, antes da escola, eles já trazem muita bagagem matemática de casa ou de sua comunidade (Carragher, 1982). Neste caso, escolhemos relacionar cada criança com uma letra: A, B, C e D e, distribuir igualmente os livros para cada criança. Para, depois, contar a quantidade de livros com a letra A, com a letra B e assim por diante.

Figura 73: Representação do Problema 5.2 através de imagens (parte 2)



Fonte: os autores

Criança A: 4 livros	Criança B: 4 livros	Criança C: 4 livros	Criança D: 4 livros
------------------------	------------------------	------------------------	------------------------

Logo, cada criança recebeu 4 livros. Portanto, 16 livros distribuídos igualmente a 4 crianças, serão 4 livros para cada criança.

Associando com a expressão numérica, tem-se:

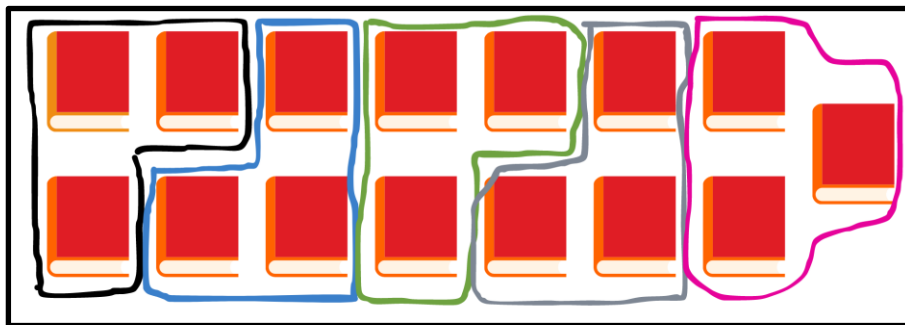
$$16 \div 4 = 4$$

E se diz, 16 dividido por 4 é igual a 4. Isto é, 16 livros divididos igualmente para 4 crianças é igual 4 livros por criança.

Problema 5.3: Haverá uma gincana na escola e Marcela separou 15 livros para doar. Fez embalagens com 3 livros dentro. Quantas embalagens ela conseguiu fazer com essa quantidade de livros?

Esse problema assim como o anterior também envolve a ideia de divisão (repartição), porém com um aspecto diferente: ele não traz a quantidade exata de embalagens utilizadas nessa distribuição, que é justamente o que queremos descobrir. Então uma solução seria fazer grupinhos com 3 livros até utilizar todos ou quase todos os livros que foram separados por Marcela. O professor pode levar a mesma quantidade de livros, do problema acima, para a sala de aula e deixar que os alunos manipulem esse objeto para responder a questão dada.

Figura 74: Representação do Problema Adição-repetida 3 através de imagens



Fonte: os autores

Contornando de 3 em 3, obtemos 5 grupos com 3 livros cada. Assim, Marcela vai ter 5 embalagens contendo 3 livros cada para presentear as crianças na gincana. A expressão numérica deste problema fica sendo:

$$15 \div 3 = 5$$

Ou, 15 dividido por 3 é igual a 5. Isto é, esta expressão diz que para dividir os 15 livros em grupos com 3 livros, serão necessárias 5 embalagens.

A seguir um quadro explicativo, mostrando onde a informação estava desconhecida nos problemas de grupos iguais com adição-repetida:

Quadro 11: Problemas de grupos iguais com adição-repetida

Quantidade Desconhecida	Expressão Matemática	Problemas
Todo	$8 \times 5 = []$	5.1
Tamanho do Grupo	$16 \div 4 = []$	5.2
Número de Grupo	$15 \div [] = 3$	5.3

Fonte: os autores

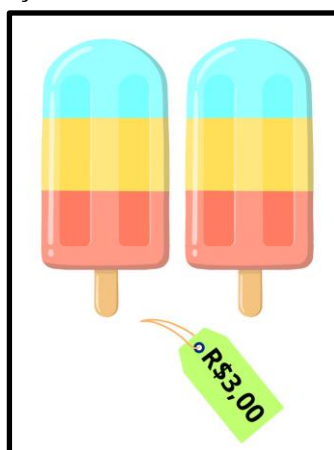
Nos problemas que foram resolvidos através da divisão não exploramos, por enquanto, quando sobra resto. Deixaremos essas situações para quando iniciarmos o Algoritmo da Divisão.

(b) problemas que envolvem taxa (ideia de proporcionalidade):

Problema de Taxa 1: Uma sorveteira está com uma promoção: dois sorvetes por R\$3,00. Se Jonata comprou 6 sorvetes, quanto ele pagará?

Esse problema poderia ser resolvido encontrando o valor de uma unidade, porém isso não é necessário nesse caso. Já que dividindo 3 reais por 2 sorvetes, teremos um número decimal, que ainda não foi desenvolvido para essa escolaridade.

Figura 75: Representação do Problema de Taxa 1 através de imagens



Fonte: os autores

Temos que Jonata comprou dois sorvetes por R\$3,00. Podemos ajudar os alunos a notar a relação entre o número 2 e 6. No qual 6 é o triplo do 2. Como triplicou a quantidade de sorvetes, também vai triplicar o valor a ser pago.

Figura 76: Resolução do Problema de Taxa 1

$$\begin{array}{cc} \text{x3} \left(\begin{array}{l} 2 \text{ sorvetes} \\ 6 \text{ sorvetes} \end{array} \right. & \text{R\$3,00} \left(\begin{array}{l} \\ \text{x3} \end{array} \right) \end{array}$$

Fonte: os autores

O valor encontrado é então de R\$ 9,00, que pode ser obtido através da adição $3,00 + 3,00 + 3,00 = 9,00$ ou também pela multiplicação $3 \times 3,00 = 9,00$. Assim, Jonata pagou R\$9,00 por 6 sorvetes. Vale enfatizar a importância de usar a unidade de medida. Não estamos falando somente em números, estamos usando a unidade de medida.

Problemas de proporcionalidade nessas simples multiplicações, incentivam os alunos a enxergar relações matemáticas para posteriormente trabalharem com problemas mais complexos de proporcionalidade (razão, proporção, relação direta e inversa).

Assim, a expressão numérica quantitativa utilizada para resolver este problema foi:

$$3 \times 3 = 9$$

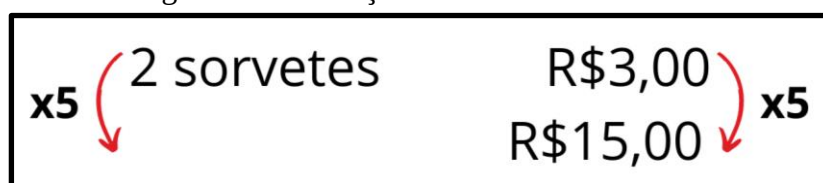
Isto é, 3 multiplicado por 3 reais é igual a 9 reais. Pode ser usado o termo triplo também, o triplo de 3 reais é 9 reais.

Problema de Taxa 2: Utilizando os valores dados no Problema 6.1, com R\$15,00 é possível comprar quantos sorvetes?

No problema anterior, Jonata tinha a quantidade de sorvetes, mas não se sabia o valor total pago por esta quantidade. Já essa situação é o contrário, Jonata possui o valor total, mas não a quantidade de sorvetes. Converse com as crianças para perceber se elas conseguem notar essa diferença, caso não consigam, como professor mediador, nossa responsabilidade é fazer as perguntas certas para que os alunos por si só cheguem às suas conclusões.

Depois dessa conversa, os estudantes irão encontrar diversos caminhos, dentre eles, têm-se que de R\$3,00 para chegar em R\$15,00 quantas vezes aumentou? Veja, que até então não falamos de tabuada, então uma possibilidade para os alunos resolverem é que contando de 3 em 3 até chegar em 15, foram cinco vezes. Portanto, 15 é cinco vezes maior que o 3.

Figura 77: Resolução do Problema de Taxa 2



Fonte: os autores

Então como $3,00 + 3,00 + 3,00 + 3,00 + 3,00 = 15,00$, temos que fazer o mesmo com os 2 sorvetes, adicioná-lo 5 vezes, então $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$. A resposta para esse problema é que com R\$15,00 Jonata consegue comprar 10 sorvetes.

A expressão matemática obtida no problema é:

$$5 \times 2 = 10$$

Isto é, o quádruplo de dois sorvetes é igual a dez sorvetes.

Problema de Taxa 3: Os sorvetes especiais são mais caros. Jonata gastou R\$24,00 com 6 sorvetes. Quanto custa cada sorvete?

Nesse problema, a pergunta pede o valor unitário de cada sorvete. Pode-se usar dinheiro falso para resolvê-lo. Apesar do uso do cartão de crédito e de débito ou mesmo aplicativos bancários estarem extinguindo as cédulas em dinheiro, ainda é um bom recurso para aprendizagem. Que é o que iremos utilizar para essa explicação.

Figura 78: Representação do Problema de Taxa 3 através de imagens (parte 1)

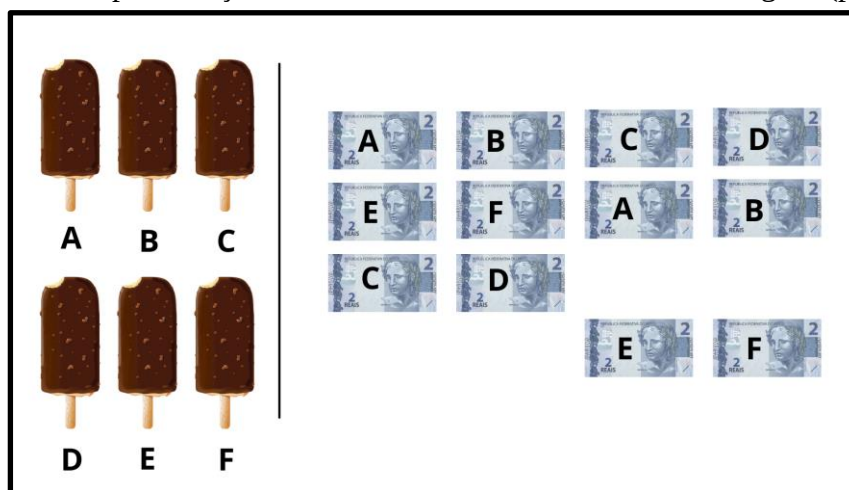


Fonte: os autores

Jonata gastou R\$24,00 em 6 sorvetes como mostra a imagem. Se tentarmos dividir essas cédulas para os seis sorvetes, não será possível. Então a ideia é trocar essas cédulas por outras que nos auxiliem nessa divisão. Trocar a cédula de R\$20,00 por notas de 10 ou de 5 reais não irá ajudar. Mas podemos trocar por notas de 2 reais.

Com essa troca, uma nota de 20 reais será substituída por 10 notas de 2 reais. Mais as duas notas de 2 reais que já havia na imagem.

Figura 79: Representação do Problema de Taxa 3 através de imagens (parte 2)



Fonte: os autores

Organizando essas notas de maneira ordenada, ou seja, em disposição retangular, ficará mais fácil visualizar a divisão. Cada sorvete ficou com duas notas de R\$ 2,00, que equivalem a R\$ 4,00. Assim, a resposta do problema é que Jonata pagou R\$ 4,00 em cada sorvete especial.

A expressão numérica é dada por:

$$24 \div 6 = 4$$

Isto é, o resultado é que cada sorvete custará R\$ 4,00, pois R\$ 24,00 divididos para os 6 sorvetes levam a ver que cada sorvete custará R\$ 4,00 cada. Novamente, o quadro explicativo, mostrando onde os valores estão desconhecidos.

Quadro 12: Problemas de grupos iguais com taxa

Quantidade Desconhecida	Expressão Matemática	Problemas de Taxa
Todo	$8 \times 5 = []$	1
Tamanho do Grupo	$3 \times [] = 15$	2
Número de Grupo	$24 \div [] = 4$	3

Fonte: os autores

- **Problemas de Comparação Multiplicativa**

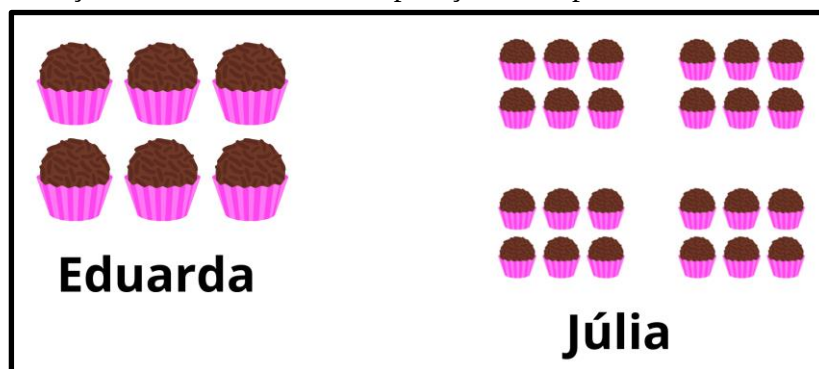
Quando discutimos problemas aditivos e subtrativos, também resolvemos problemas de comparar (quantos a mais, quantos a menos). Mas, para problemas multiplicativos, a expressão utilizada é quantas vezes mais ou quantas vezes um número cabe dentro de outro número. Vejamos esses três casos:

Problema Comparação Multiplicativa 1: Eduarda comprou 6 brigadeiros. Júlia comprou o quádruplo de quantos a Eduarda comprou. Quantos brigadeiros Júlia têm?

A primeira coisa a se perguntar para os estudantes é se eles sabem o que significa duplo, triplo ou quádruplo. Depois de esclarecida essas palavras, provavelmente ficará mais fácil de entender que o problema pede 4 vezes aquele valor de brigadeiros que Eduarda tem.

A confusão que pode acontecer nesse tipo de situação é a de os alunos acharem que o resultado é quatro mais quatro vezes, isto é, juntam o quádruplo da Júlia mais o da Eduarda.

Figura 80: Representação do Problema de Comparação Multiplicativa 1 através de imagens



Fonte: os autores

O quádruplo de 6 é então: $6 + 6 + 6 + 6 = 24$. Assim, Júlia tem 24 brigadeiros, pois também,

$$6 \times 4 = 24$$

Isto é, 6 brigadeiros vezes 4 é igual a 24 brigadeiros.

Problema Comparação Multiplicativa 2: Júlia ganhou uma caixa com 24 beijinhos, que é o triplo de Eduarda. Quantos beijinhos Eduarda ganhou?

Novamente, explorar com os estudantes o que significa ser o triplo de algo. Assim que eles entenderem que é três vezes mais, pedir para que eles observem a diferença desse problema para o anterior, que eles não são iguais.

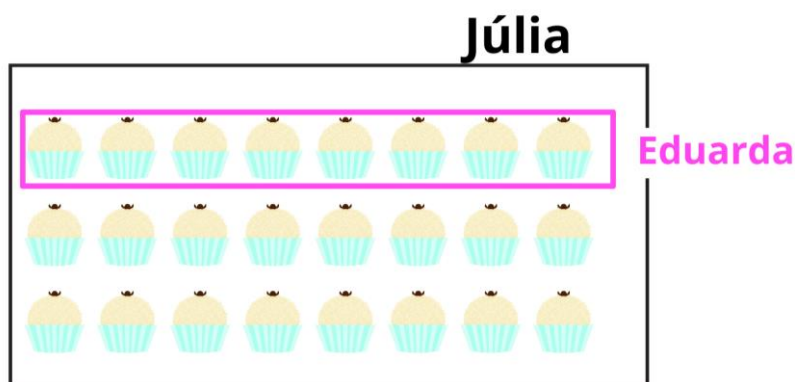
No primeiro Eduarda tinha uma quantidade de brigadeiros e Júlia tinha quatro vezes mais que ela, então era 6×4 . Mas, nesse problema, Júlia tem uma quantidade de beijinhos que é o triplo de Eduarda, melhor dizendo, 24 beijinhos é três vezes mais que a quantidade que Eduarda tem. Portanto, Júlia tem mais beijinhos que a Eduarda.

O valor procurado é menor que 24. E, para resolver, precisaremos dividir 24 em 3 partes iguais. Novamente, como ainda não trabalhamos o Algoritmo da Divisão,

estamos resolvendo esse problema intuitivamente e com o uso de imagens ou materiais manipulativos.

Uma solução, é pedir aos alunos que observem como estão trabalhando com o triplo. Nessa divisão pode-se colocar os 24 beijinhos de Júlia em três grupos ou em três fileiras. A escolha de três fileiras é justamente relaciona-se com o triplo. Os alunos podem tomar bolinhas de papel para facilitar a visualização e o entendimento do problema.

Figura 81: Representação do Problema Comparação Multiplicativa 2 através de imagens



Fonte: os autores

Dos 24 beijinhos dispostos em três fileiras, uma fileira é a quantidade que Eduarda tem de beijinhos que equivale a 8 beijinhos. A expressão numérica é dada por:

$$24 \div 3 = 8$$

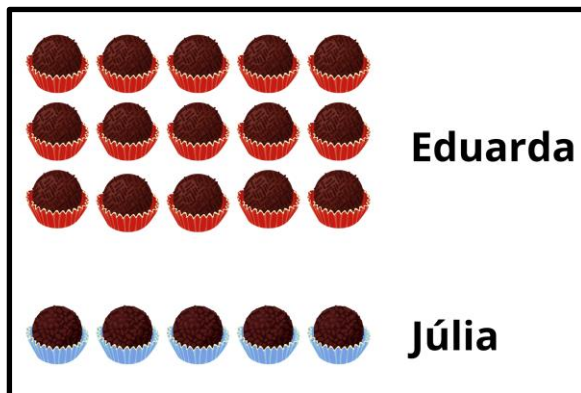
Isto é, 24 beijinhos dividido em 3 partes é igual a 8 beijinhos.

Problema Comparação Multiplicativa 3: Eduarda fez 15 brigadeiros e Júlia fez 5 brigadeiros. Eduarda fez quantas vezes mais que Júlia?

Por fim, neste último problema, é dada a quantidade de brigadeiros de ambas as garotas, diferente dos dois problemas anteriores em que havia uma quantidade

desconhecida de alguma menina. Visualizar esse problema em disposição retangular relacionando 15 com 5, vendo que para o 15 podemos fazer três fileiras com cinco brigadeiros, será possível responder sem o uso do Algoritmo da Divisão.

Figura 82: Representação do Problema Comparação Multiplicativa 3 através de imagens



Fonte: os autores

Portanto, a quantidade de brigadeiros da Eduarda é três vezes maior que a da Júlia. A expressão numérica seria dada por:

$$3 \times 5 = 15$$

Isto é, 3 vezes 5 brigadeiros é igual a 15 brigadeiros. Como nas outras situações, para os problemas de comparação multiplicativa, também apresentaremos um quadro explicativo, mostrando claramente quais eram as quantidades desconhecidas dentro de cada problema.

Quadro 13: Problema de comparação multiplicativa

Quantidade Desconhecida	Expressão Matemática	Problemas de Comparação Multiplicativa
Produto	$6 \times 4 = []$	1
Tamanho do Conjunto	$24 \div 3 = []$	2
Multiplicador	$5 \times [] = 15$	3

Fonte: os autores

Concluimos os problemas multiplicativos propostos por Van de Walle (2009). Como já comentamos anteriormente, no final dos problemas aditivos e subtrativos, o professor e seus alunos podem encontrar outras soluções para os problemas dados. Também podem ser alterados os valores de acordo com a faixa etária dos alunos.

Até aqui, não trabalhamos com os Algoritmos da Multiplicação e da Divisão (nem divisão com resto). O principal objetivo é perceber como os estudantes lidam com cada situação utilizando seus conhecimentos de anos anteriores e de sua própria experiência fora do ambiente escolar. E também lidarem com o trabalho em equipe, aprendendo a ouvir os colegas, aceitar opiniões contrárias e treinar a argumentação. Essa é uma das ações propostas pela MEAAMaRP. Mas é de suma importância definir com os alunos cada uma das operações e suas propriedades.

A definição encontrada no dicionário para multiplicação é:

Operação aritmética que consiste em repetir um número, chamado multiplicando, tantas vezes quantas forem as unidades de outro, chamado multiplicador, para achar um terceiro, que representa o produto dos dois.

O símbolo utilizado para multiplicação entre dois valores é dado pelo sinal “x” ou “.” (um ponto) que é mais utilizado quando se inicia o estudo de álgebra, para não confundir o sinal da operação com a letra x. Independentemente, esses sinais são lidos como **vezes**. Os números que estão sendo multiplicados se chamam multiplicando (o que sofre a ação) e multiplicador (o que faz a ação), também conhecidos como fatores.

O multiplicador indica o número de vezes que o multiplicando será adicionado. E o resultado dessa operação chamamos produto. Usando o exemplo abaixo, tem-se que o multiplicador é o que faz a ação (tomar duas vezes) e o multiplicando é o que sofre a ação (o tamanho da parte).

Figura 83: Exemplo de multiplicação

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{2} & \mathbf{x} & \mathbf{5} & \mathbf{= 10} & \mathbf{\rightarrow} & \mathbf{5 + 5} & \mathbf{= 10} \\ \text{multiplicador} & & \text{multiplicando} & \text{produto} & & \underbrace{\hspace{1cm}} & \\ & & & & & \text{2 vezes} & \end{array}$$

Fonte: os autores

Genericamente, temos que se tomarmos **a**, **b** e **c** com números naturais quaisquer, a sentença matemática que representa esta operação é:

$$\mathbf{a \times b = c}$$

Sendo **a** e **b** fatores da multiplicação, multiplicador e multiplicando, respectivamente e, **c** é o produto.

Para divisão temos a seguinte definição:

Operação com que se procura descobrir quantas vezes uma quantidade está contida em outra. Ato ou processo de dividir inicialmente algo de modo que cada um receba uma parte de um todo; distribuição, partilha, repartição.

O símbolo que indica a divisão entre dois números é representado pelo sinal $\div$ chamado de dividir. Também é utilizado o símbolo / (barra) para representar divisão, principalmente ligada a ideia de fração.

Os números que estão sendo divididos são chamados de dividendo (sofre a ação) e divisor (faz a ação), ou seja, o divisor divide o dividendo. O resultado é o quociente, para **divisões exatas**.

Figura 84: Exemplo de divisão horizontal

15	÷	3	=	5
dividendo		divisor		quociente

Fonte: os autores

Também, genericamente, se tomarmos **a**, **b** e **c** como números naturais quaisquer, com a condição de $a > b$ (**a** maior que **b** e múltiplo de **c**), teremos:

$a \div b = c$

Portanto, **a** é o dividendo, **b** é o divisor e **c** é o quociente. A restrição de **a** ser maior que **b** existe para garantir, que nesse primeiro contato com a divisão, não se tenha números decimais entre 0 e 1. E **b** ser múltiplo de **c** para garantir que não tenha resto.

Tanto para a multiplicação quanto para a divisão, as apresentamos no formato horizontal de sua resolução e não entramos em detalhes quando a divisão tem resto. Esses detalhes, serão mais bem explicados em cada uma dessas operações mais à frente.

Algoritmo da Multiplicação

É comum, ao iniciar o ensino de multiplicação, apresentar a Tabuada para os estudantes e pedir que eles a decorem. A Tabuada é uma excelente ferramenta para a multiplicação e para a divisão. Ela tem o potencial de facilitar e agilizar a resolução dos problemas e dos exercícios dados, para quem a entende e decora.

Porém, concordamos com Smole e Muniz (2013) quando esses autores dizem que “decorar a tabuada não deve ser o objetivo central de estudar a multiplicação”. Mas eles admitem que a compreensão e a construção da tabuada fazem parte do conjunto de conhecimentos que os alunos precisam adquirir.

Não podemos esquecer que o uso da tabuada facilita os cálculos a serem realizados, somente não devemos colocar a tabuada à frente da aprendizagem do conceito que é a base da construção do procedimento pelo sujeito, nem exigir que a criança a saiba de cor após construí-la uma única vez. (SMOLE; MUNIZ, 2013, p. 39)

Pode-se iniciar esse conceito, utilizando a adição de parcelas iguais para relacionar com a multiplicação, mostrando algumas relações. A exemplo da tabuada do 2:

$2 + 2 = 4$, o número 2 está sendo repetido 2 vezes, então lemos duas vezes o dois ou $2 \times 2 = 4$;

$2 + 2 + 2 = 6$, o número 2 está sendo repetido 3 vezes, então lemos três vezes o dois ou $3 \times 2 = 6$;

$2 + 2 + 2 + 2 = 8$, o número 2 está sendo repetido 4 vezes, então lemos quatro vezes o dois ou $4 \times 2 = 8$;

$2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$, o número 2 está sendo repetido 5, então lemos cinco vezes o dois ou $5 \times 2 = 10$.

Propositalmente, não foi colocado o $1 \times 2 = 2$ já que, neste caso, o dois não foi adicionado nenhuma vez a ele. Isto é, ele foi escrito apenas uma vez.

Quadro. 14: Comparação da adição-repetida com a multiplicação

Adição-repetida	Multiplicação (tabuada do 2)
2	$1 \times 2 = 2$
$2 + 2 = 4$	$2 \times 2 = 4$
$2 + 2 + 2 = 6$	$3 \times 2 = 6$
$2 + 2 + 2 + 2 = 8$	$4 \times 2 = 8$

Fonte: os autores

E assim por diante. Logo após a criança entender essa relação, pode-se construir a tabuada com ela. Observe que existe algo sutil nas tabuadas:

Quadro 15: Comparação das tabuadas

Tabuada do 2 (comumente encontrada)	Tabuada do 2 (forma correta)
$2 \times 1 = 2$	$1 \times 2 = 2$
$2 \times 2 = 4$	$2 \times 2 = 4$
$2 \times 3 = 6$	$3 \times 2 = 6$
$2 \times 4 = 8$	$4 \times 2 = 8$
$2 \times 5 = 10$	$5 \times 2 = 10$

Fonte: os autores

A questão é que do lado esquerdo do quadro está a forma que costumamos encontrar para as tabuadas, o primeiro fator sendo o valor da tabuada que se está operando. Contudo, o erro ocorre na leitura, pois $2 \times 4 = 4 + 4$, ou seja, estou repetindo o número 4. E a tabuada do 2, é para ser a repetição do número 2. Os resultados são os mesmos, mas a interpretação dada é diferente. E, dependendo da pergunta do problema ou exercício dado, ele pode gerar equívocos.

Portanto, a tabuada deveria ser dada da seguinte forma:

Figura 85: Tabuada da Multiplicação

1 $1 \times 1 = 1$ $2 \times 1 = 2$ $3 \times 1 = 3$ $4 \times 1 = 4$ $5 \times 1 = 5$ $6 \times 1 = 6$ $7 \times 1 = 7$ $8 \times 1 = 8$ $9 \times 1 = 9$ $10 \times 1 = 10$	2 $1 \times 2 = 2$ $2 \times 2 = 4$ $3 \times 2 = 6$ $4 \times 2 = 8$ $5 \times 2 = 10$ $6 \times 2 = 12$ $7 \times 2 = 14$ $8 \times 2 = 16$ $9 \times 2 = 18$ $10 \times 2 = 20$	3 $1 \times 3 = 3$ $2 \times 3 = 6$ $3 \times 3 = 9$ $4 \times 3 = 12$ $5 \times 3 = 15$ $6 \times 3 = 18$ $7 \times 3 = 21$ $8 \times 3 = 24$ $9 \times 3 = 27$ $10 \times 3 = 30$	4 $1 \times 4 = 4$ $2 \times 4 = 8$ $3 \times 4 = 12$ $4 \times 4 = 16$ $5 \times 4 = 20$ $6 \times 4 = 24$ $7 \times 4 = 28$ $8 \times 4 = 32$ $9 \times 4 = 36$ $10 \times 4 = 40$	5 $1 \times 5 = 5$ $2 \times 5 = 10$ $3 \times 5 = 15$ $4 \times 5 = 20$ $5 \times 5 = 25$ $6 \times 5 = 30$ $7 \times 5 = 35$ $8 \times 5 = 40$ $9 \times 5 = 45$ $10 \times 5 = 50$
6 $1 \times 6 = 6$ $2 \times 6 = 12$ $3 \times 6 = 18$ $4 \times 6 = 24$ $5 \times 6 = 30$ $6 \times 6 = 36$ $7 \times 6 = 42$ $8 \times 6 = 48$ $9 \times 6 = 54$ $10 \times 6 = 60$	7 $1 \times 7 = 7$ $2 \times 7 = 14$ $3 \times 7 = 21$ $4 \times 7 = 28$ $5 \times 7 = 35$ $6 \times 7 = 42$ $7 \times 7 = 49$ $8 \times 7 = 56$ $9 \times 7 = 63$ $10 \times 7 = 70$	8 $1 \times 8 = 8$ $2 \times 8 = 16$ $3 \times 8 = 24$ $4 \times 8 = 32$ $5 \times 8 = 40$ $6 \times 8 = 48$ $7 \times 8 = 56$ $8 \times 8 = 64$ $9 \times 8 = 72$ $10 \times 8 = 80$	9 $1 \times 9 = 9$ $2 \times 9 = 18$ $3 \times 9 = 27$ $4 \times 9 = 36$ $5 \times 9 = 45$ $6 \times 9 = 54$ $7 \times 9 = 63$ $8 \times 9 = 72$ $9 \times 9 = 81$ $10 \times 9 = 90$	10 $1 \times 10 = 10$ $2 \times 10 = 20$ $3 \times 10 = 30$ $4 \times 10 = 40$ $5 \times 10 = 50$ $6 \times 10 = 60$ $7 \times 10 = 70$ $8 \times 10 = 80$ $9 \times 10 = 90$ $10 \times 10 = 100$

Fonte: Imagens do Google

É interessante lembrar que era muito usado lápis com tabuada de multiplicação pelos estudantes. Mas não existia apenas de multiplicação, mas também das outras três operações.

Vamos a um exemplo mais concreto para elucidar essa diferença: José vai comprar um relógio de R\$100,00 e vai parcelar no cartão sem juros. Se ele parcelar em 5 vezes, as parcelas serão de R\$20,00. Se ele parcelar em 20 vezes, as parcelas serão de R\$5,00.

De todas as formas, não vai alterar o preço do relógio. Porém, 20×5 , isto é, 20 parcelas de 5 reais, será um pagamento bem mais longo (quase dois anos pagando) do que 5×20 , que é 5 vezes R\$20,00 (que se paga em menos de meio ano, mas com valor parcela maior). É essa diferença que os alunos precisam enxergar.

Todos os problemas até aqui, foram resolvidos no formato horizontal, mas conforme os valores vão aumentando o formato vertical se torna mais útil. Tomemos como exemplo uma multiplicação simples de 3×5 para entender o processo.

Figura 86: Exemplo de multiplicação - unidade por unidade

$$\begin{array}{r}
 5 \times 3 \\
 \hline
 15
 \end{array}$$

D U

3 → multiplicando

× 5 → multiplicador

15

Fonte: os autores

Na forma vertical, o fator debaixo é multiplicado pelo algarismo do fator de cima, da direita para esquerda, ou seja, unidade sendo multiplicado pela unidade. Assim, $5 \times 3 = 15$.

Voltando ao assunto da tabuada, o quadro abaixo é outro exemplo, mas cartesiana. Ele é conhecido também como Tábua (Tabela) de Pitágoras.

Quadro 16: Tábua de Pitágoras incompleta

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3									
4	4									
5	5									
6	6									
7	7									
8	8									
9	9									
10	10									

Fonte: criação dos autores

Há vários pontos positivos de se trabalhar esse quadro no ensino da tabuada. Primeiro que cada estudante pode escolher se vai preenchê-lo na horizontal ou na vertical, esse momento é rico de discussões, pois podemos estabelecer outras relações matemáticas.

Vejamos com esse quadro fica quando está completo

Quadro 17: Tábua de Pitágoras completa

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fonte: os autores

Segundo, pode-se notar que a linha/coluna do número 4 é o dobro do número 2. Isso ocorre também para a linha/coluna do número 3 e 6, 4 e 8. 6 e 9. 5 e 10. Também pode analisar que a linha/coluna do 9 é o triplo da linha/coluna do 3. Se tomarmos os resultados da linha/coluna do 1 e do 2, obtém-se os resultados da linha/coluna do número 3. Na diagonal principal têm-se os resultados do produto quando os dois fatores são iguais.

E por fim, como é uma tabuada cartesiana, se os estudantes dominarem o raciocínio de sua construção, é um passo à frente quando tiverem que aprender plano cartesiano. É importante enfatizar e reforçar que os resultados obtidos na tabuada de cada número é uma sequência ordenada. Na tabuada do 2, os resultados estão obedecendo a ordem de 2 em 2. O mesmo ocorre para as outras Tabuadas.

Enfatizamos esse detalhe, pois já tivemos experiências de alunos que entendiam a tabuada, porém não conseguiam enxergar qual era a razão de uma sequência, melhor dizendo, não conseguiam notar de quanto em quanto aquela sequência estava crescendo ou decrescendo.

Outro método que pode ser utilizado junto da tabuada é a área de retângulos, relacionando aritmética com geometria. Quando se trabalha com área de retângulos ou

a quantidade de quadradinhos que foi dividido em um retângulo, ajuda no ensino da tabuada e posteriormente nas operações de potenciação e radiciação, com as áreas quadradas, da mesma forma que a Tábua de Pitágoras e a sua diagonal principal.

O uso da malha quadriculada se constitui em uma potente ferramenta para a construção do algoritmo da multiplicação com dois dígitos no multiplicador. (SMOLE; MUNIZ, 2013, p. 39)

- **Multiplicação com dois algarismos (no multiplicador e/ou no multiplicando)**

Tomemos o exemplo de 4×12 , ou seja, o 12 será adicionado 4 vezes.

Figura 87: Exemplo multiplicação vertical com dois algarismos no multiplicando

$$\begin{array}{r}
 \text{D U} \\
 12 \\
 \times 4 \\
 \hline
 48
 \end{array}$$

Fonte: os autores

O fator (multiplicador) 4 é multiplicado pelo fator (multiplicando) da unidade, da direita para esquerda. Assim, $4 \times 2 = 8$. Quando o fator 4, multiplica o número 1, temos $4 \times 1 = 4$. Logo, $4 \times 12 = 48$.

Pode-se explicar também utilizando a decomposição do número 12. O número 12 pode ser decomposto em $10 + 2$ e fazer as multiplicações, $10 \times 4 = 40$ e $2 \times 4 = 8$. E por fim, adicionar os resultados $40 + 8 = 48$.

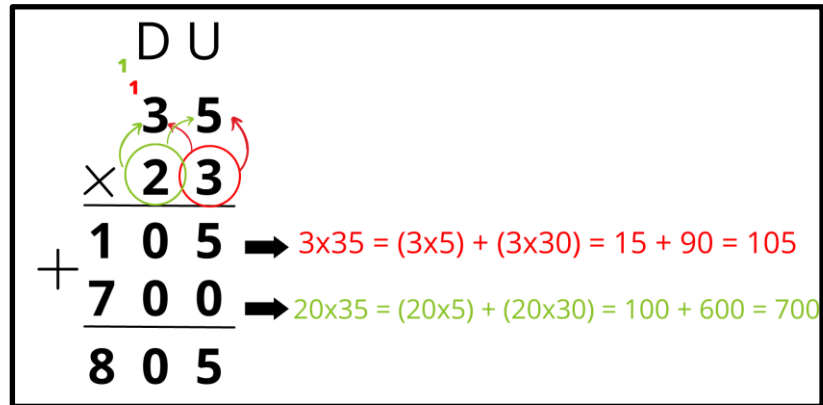
Figura 88: Exemplo multiplicação vertical com dois algarismos no multiplicando, separando dezenas e unidades

$$\begin{array}{r}
 \text{D U} \quad \text{D U} \\
 10 \quad 2 \\
 \times 4 \quad 4 \\
 \hline
 40 \quad 8 \\
 \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\
 40 + 8 = 48
 \end{array}$$

Fonte: os autores

Outro exemplo, agora com dois algarismos nos dois fatores, 23×35 .

Figura 89: Exemplo de multiplicação



Fonte: os autores

Como é proposto pelo Algoritmo da Multiplicação, começamos multiplicando o fator (multiplicador) 3 pelas unidades e depois pelas dezenas. Mas $3 \times 5 = 15$, o 15 ultrapassa o valor permitido pelas unidades, pois 15 é uma dezena e 5 unidades. Então, na ordem das unidades permanece o 5 e a dezena colocamos junto com as dezenas.

Continuando, ao multiplicar o fator (multiplicador) 3 por 3 (multiplicando), como o 3 está na ordem das dezenas, ele representa 30. Assim, $3 \times 30 = 90$. Porém, temos mais uma dezena, $90 + 10 = 100$. Portanto, $3 \times 35 = 15 + 90 = 105$. Isso é feito com o fator (multiplicador) 2 que está na ordem das dezenas. Resultando no produto 805.

- **Sinal de mais, espaço ou o zero?**

Uma observação importante é quando o sinal de mais (+) é utilizado por alguns professores ao ensinar multiplicação. Ou até mesmo deixam um espaço vazio. Qual é a justificativa para isso?

Utilizemos o exemplo de 23×35 para elucidar essas situações:

Figura 90: Exemplo de multiplicação com o sinal de + e o espaço

Com sinal de mais (+)	Com o espaço
$ \begin{array}{r} 35 \\ \times 23 \\ \hline 105 \\ 70+ \\ \hline 805 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 35 \\ \times 23 \\ \hline 105 \\ +70 \\ \hline 805 \end{array} $

Fonte: os autores

Quando se deixa um espaço vazio no Algoritmo da Multiplicação, significa que houve uma troca da multiplicação das unidades para as dezenas. Então não podemos colocar aquele valor na ordem das unidades, pois não pertence a unidade e sim a dezena.

Agora o sinal de mais não é adequado. Primeiro, que matematicamente não há significado na expressão $5 + = 5$.

Figura 91: Exemplo de multiplicação com o sinal +

Com sinal de mais (+)
$ \begin{array}{r} 35 \\ \times 23 \\ \hline 105 \\ 70+ \\ \hline 805 \end{array} $

Fonte: os autores

Imagina uma multiplicação na qual os fatores têm três algarismos. Terão vários sinais de mais, que serão totalmente desnecessários. Assim, não é correto usar o mais dessa forma. O zero passou por várias civilizações e construções justamente para assumir em primeiro lugar essa posição: de valor posicional das ordens faltosas.

Pode-se, também, deixar em branco (espaço vazio). Isso vai exigir que o aluno preste mais atenção quanto às ordens de cada algarismo para não errar. Porém, não é melhor já ensinar utilizando o zero, já que esse é o lugar dele?

- **Alguns casos de multiplicação**

No início deste trabalho, foram apresentadas questões de multiplicação, avaliadas durante a aula de Prática sob olhar da Análise de Erros. Estas questões apresentaram vários erros, que mostravam o quanto os alunos não haviam entendido o Algoritmo da Multiplicação e a multiplicação pelo zero, como mostra as figuras a seguir.

O que deveria ser bem trabalhado, antes de pedir aos alunos que executasse essas operações, seguindo regras, seria levá-los a entender o que deveria ser feito, isto é, através de situações multiplicativas simples entenderem que está se tomando tantas vezes aquele número e depois juntando as partes, como fizemos com os problemas multiplicativos.

Se para os alunos parece difícil de entender, para os professores é necessário que entendam. Então, conseguiriam levar os alunos, se possível dentro de um treinamento dessas ideias, a executar as operações sem as “regrinhas” que lhes são apresentadas sem justificativas. Essas ideias devem ser, de início, com multiplicações simples, entendidas a unidade de cada algarismo do número considerado.

Figura 92: Erro 1 de multiplicação

1ª conta: O aluno errou na multiplicação.

34 multiplicado por 205 quando ele multiplicou 4×0 , ele na verdade multiplicou pelo 1880 "vai dois" e 0 mesmo quando multiplicou 3

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 205 \\ \hline 1880 \\ 665 \\ \hline 7530 \end{array}$$

Fonte: Arquivo pessoal

Analizando a primeira operação: 34×205 . Observando a justificativa dada pelo aluno, significa que ele não entendeu o que queria e deveria fazer e nem tinha o conhecimento necessário da operação multiplicação. Isto é, com o pedido de fazer

34×205 , o importante para o aluno seria fazer o que o professor dissesse, aplicar o Algoritmo da Multiplicação, mas, como ele não havia entendido o processo “falado” pelo professor, pode-se ver uma sucessão de erros, principalmente nos momentos que tinha o zero em algum valor posicional.

Uma forma de solucionar esses tipos de dúvidas, seria levar os alunos a pensar na decomposição dos números em unidades, dezenas e centenas. Se analisarmos a primeira operação nessa perspectiva teremos a decomposição do número 34: 3 dezenas + 4 unidades.

Ao multiplicar por 205 teremos:

- $(205 \times 3 \text{ dezenas}) + (205 \times 4 \text{ unidades})$
- $(205 \times 30) + (205 \times 4)$
- $6150 + 820$

Por fim, encontramos o resultado somando os valores encontrados na decomposição:

Figura 93: Erro 1 de multiplicação

205
x34

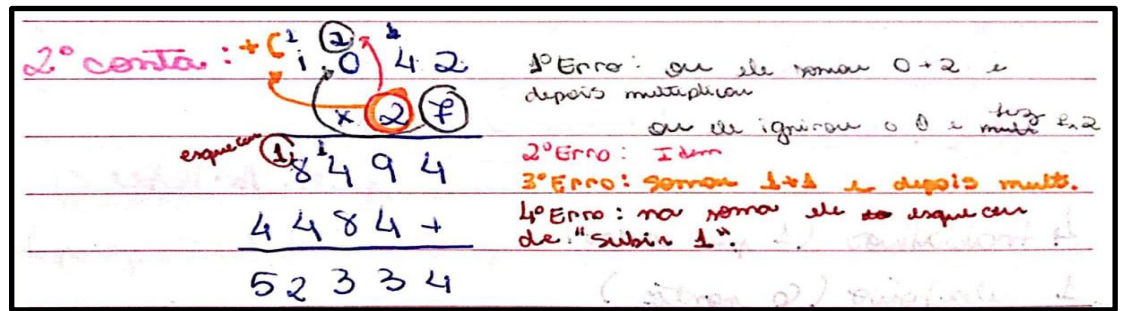
820
+
6150

6970

Fonte: os autores

A Figura 94, mostra o segundo erro de multiplicação.

Figura 94: Erro 2 de multiplicação



Fonte: Arquivo pessoal

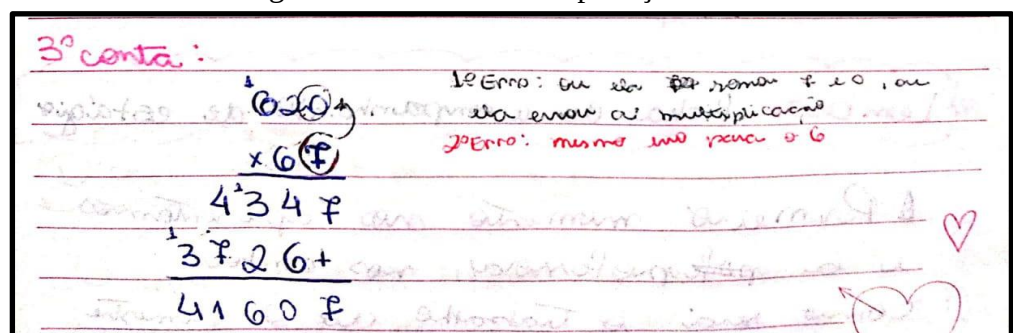
Na segunda operação, 27×1042 encontramos erros similares aos anteriores, que também poderiam ser resolvidos se o aluno compreendesse bem a decomposição dos números: 2 dezenas + 7 unidades.

Multiplicando por 1042

- $(1042 \text{ unidade de milhar} \times 20) + (1042 \text{ centenas} \times 7)$
- $1.042 \times 20 + 1.042 \times 7$
- $20.840 + 7.294$

Somando os valores, teremos 28.134.

Figura 95: Erro 3 de multiplicação



Fonte: arquivo pessoal

O mesmo pode ser feito para 620×67 . Esses três casos foram os precursores do meu estudo sobre o zero em seus diferentes contextos. Vejamos as propriedades dentro dessa operação.

Multiplicação e suas propriedades

- Fechamento: essa propriedade garante que a multiplicação de dois números naturais resultará em um número natural.

Em notação matemática, tem-se que dados **a** e **b** naturais:

$$a \times b \in N$$

- Comutativa: a multiplicação ser comutativa significa que a ordem dos fatores não irá alterar o resultado da adição.

Exemplo: 6×4 ou 4×6 trocamos fatores de posição, mas o resultado continua sendo 24. Melhor dizendo $6 \times 4 = 4 \times 6 = 24$.

Genericamente, quaisquer que sejam os números naturais dados para **a** e **b**, a propriedade comutativa é verdadeira para a multiplicação.

$$a \times b = b \times a$$

- Associativa: na multiplicação, independentemente da ordem que escolhermos multiplicar os números, de dois em dois, o resultado será o mesmo.

Exemplo: dado os números 5, 4 e 3. Posso operar, começando pelos valores que estão dentro dos parênteses: $(5 \times 4) \times 3$ ou, $5 \times (4 \times 3)$ ou também, $(5 \times 3) \times 4$, essas adições resultarão em 60. Ou seja,

$$(5 \times 4) \times 3 = 5 \times (4 \times 3) = (5 \times 3) \times 4 = 12$$

Genericamente, quaisquer que sejam os números naturais dados para **a**, **b** e **c**, a propriedade associativa é verdadeira para a multiplicação.

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

- Existência de um elemento neutro: o **1 (um)** é elemento neutro da multiplicação. Isso significa que ele não altera o valor dos fatores no qual foi multiplicado

Exemplo: $7 \times 1 = 1 \times 7 = 7$

Genericamente, dado $n \in N$

$$n \times 1 = 1 \times n = n$$

- Existência de elemento inverso: o elemento inverso na multiplicação é aquele que ao ser multiplicado por um número resulta em 1.

Exemplo: $10 \times [] = 1$, ou seja, que valor eu devo multiplicar por 10 que resulta em 1?

O valor procurado é o inverso de 10, no caso uma fração, $\frac{1}{10}$. Assim, $10 \times \frac{1}{10} = 1$.

Genericamente, dado $a \in N$

$$a \times \left(\frac{1}{a}\right) = 1$$

- Distributiva: essa propriedade une duas operações: a multiplicação e a adição (ou subtração). A multiplicação é distribuída pelas parcelas da adição.

Exemplo: Dado os números 8, 2 e 5, podemos resolver o que está entre os parênteses primeiro e comparando o resultado do lado esquerdo e do lado direito da igualdade teremos o mesmo resultado:

$$8 \times (2 + 5) = (8 \times 2) + (8 \times 5)$$

$$8 \times 7 = 16 + 40$$

$$56 = 56$$

Genericamente, dado $a, b \text{ e } c \in N$

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

E o mesmo para subtração,

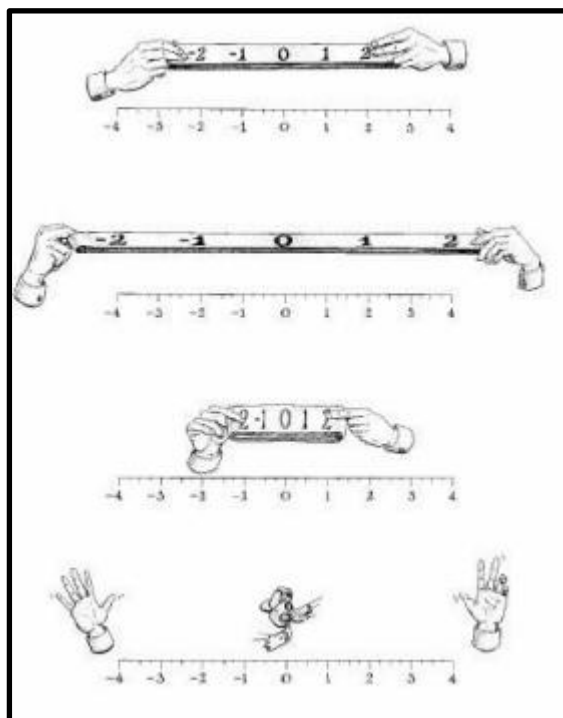
$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

Focaremos agora na multiplicação pelo zero. Seife (2000) explica de forma bem didática como a multiplicação ocorre com os números naturais. Ele dá um exemplo utilizando uma reta numérica e um elástico (também numerado). No momento inicial, os dois estão alinhados, tanto a reta quanto o elástico. Ao multiplicar por dois, é como esticar o elástico, a marca do número um que estava na linha com a reta, agora está no número dois; a marca do número dois está no número quatro e assim sucessivamente.

E se multiplicarmos pela metade, isto é, por um meio, teremos que a marca que estava em três estará em um e meio; a marca que estava no dois estará no um; e assim por diante. Então, este autor questiona: o que acontece ao multiplicar pelo zero? É como se o elástico se rompesse, atraindo tudo para o zero. (SEIFE, 2000)

O zero se torna um imã na multiplicação, um grande buraco negro que toma tudo para si.

Figura 96: Exemplo do elástico numerado com a reta numérica



Fonte: Seife (2000)

Portanto, zero vezes qualquer número é sempre zero! Tornando-se o elemento nulo da multiplicação. Seife (2000) explica esse fato utilizando a propriedade distributiva.

Aplique esta propriedade a zero e algo estranho acontecerá. Sabemos que $0 + 0 = 0$, então um número multiplicado por zero é o mesmo que multiplicar por $(0 + 0)$. Tomando dois como exemplo, $2 \times 0 = 2 \times (0 + 0)$, mas pela propriedade distributiva sabemos que $2 \times (0 + 0)$ é a mesma coisa que $2 \times 0 + 2 \times 0$. Mas isso significa $2 \times 0 = 2 \times 0 + 2 \times 0$. Seja o que for 2×0 , quando você o adiciona a si mesmo, ele permanece o mesmo. Isso parece muito com zero. Na verdade, é exatamente isso. Subtraia 2×0 de cada lado da equação e vemos que $0 = 2 \times 0$. Portanto, não importa o que você faça, multiplicar um número por zero resulta em zero. Este número problemático esmaga a reta numérica em um ponto. (SEIFE, 2000, p. 9, tradução nossa)

Na multiplicação o zero leva todos os números para si mesmo. Na divisão ele faz um verdadeiro caos, vamos ver...

Algoritmo da Divisão

A operação divisão é uma das grandes dificuldades que os alunos vivem, principalmente quando o foco é somente no uso do Algoritmo da Divisão. Uma das problemáticas desse método, é que nele se encontram as operações de adição, subtração e multiplicação simultaneamente.

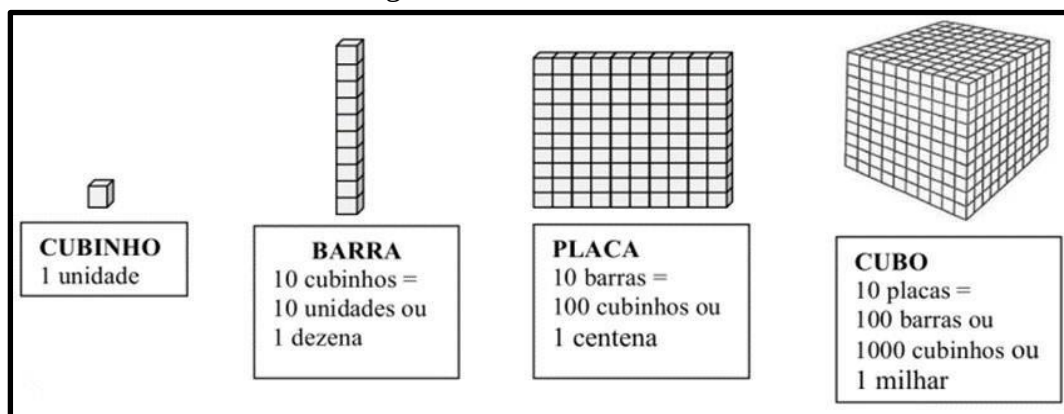
O cálculo da divisão tem sido considerado pelos professores como um dos mais difíceis de ser assimilado pelos alunos, fato que gera preocupações e buscas por estratégias de ensino mais eficazes para a aprendizagem. (AGRANIONI; ENRICHONE; ZATTI, 2009, p. 1)

Apesar desse algoritmo ser de difícil compreensão, mentalmente os alunos sabem dividir pois já realizam essa operação todos os dias: dividindo as balas com os colegas, o refrigerante com os irmãos, os brinquedos com os parentes, enfim, em diversas situações vivem a divisão. Algumas vezes uma divisão é exata e em outras não. Mas eles podem ter e criar estratégias para resolver essas situações que aparecem.

Smole e Muniz (2013) descrevem que divisão pode assumir diferentes significados. Não é apenas dividir em partes iguais, mas, também, de classificar, marcar limites e medida. Por isso, repetimos, é que o professor deve aproveitar os conhecimentos prévios dos alunos que são adquiridos junto aos seus familiares e comunidade (fora do ambiente escolar) para que esses assimilem as situações que já é do conhecimento deles e que eles já sabem resolver, mas, agora, utilizando a matemática formal.

Após a concretização, desse conhecimento informal, é a hora de apresentar o algoritmo da divisão para as crianças. Uma sugestão é fazer o uso do material dourado. Esse material costuma estar presente nas escolas e é bem ilustrativo para o entendimento dos estudantes.

Figura 97: Material Dourado



Fonte: imagens google

Cada cubinho representa uma unidade. A cada 10 cubinhos é formada uma barra que representa uma dezena. O mesmo acontece com as barras. A cada 10 barras é formada uma placa representada por uma centena. E, por fim, a cada 10 placas forma-se um cubo, que representa um milhar.

Como os problemas envolvendo divisão neste trabalho, dar primeiro problemas de divisão exata para os alunos relacionarem a ideia de divisão com o algoritmo de divisão usando esse material. Será proposto três exemplos de como pode utilizar o material dourado com a divisão exata; primeiro exemplo: 9 balas divididas por 3 alunos.

Quadro 18: Primeiro exemplo de divisão utilizando material dourado

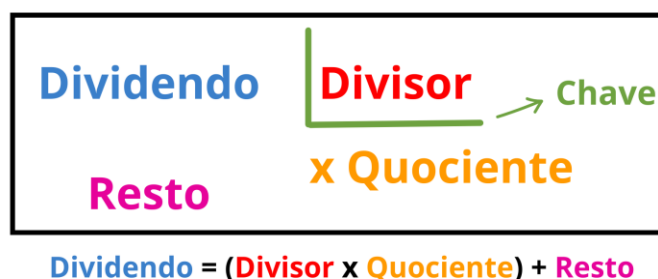
Divisão usando Material Dourado		
Tem-se 9 cubinhos que serão distribuídos igualmente em três grupos (alunos);	Como os cubinhos são manipuláveis, os alunos podem distribuir um a um;	E verão que cada grupo (aluno) terá 3 cubinhos (balas) cada

Fonte: os autores

Esse exemplo nos mostra que 9 balas divididas igualmente para 3 crianças resultam 3 balas para cada criança. Essa ideia já foi bastante explorada durante o uso

dos problemas como ponto de partida. Com o objetivo de ensinar a divisão e construir seu algoritmo, o professor pode relacionar o uso do material com a escrita do algoritmo. Esse algoritmo é dado por:

Figura 98: Algoritmo da Divisão



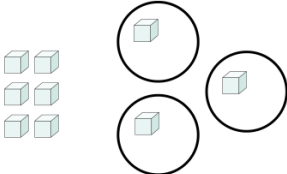
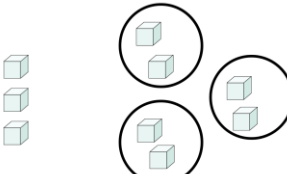
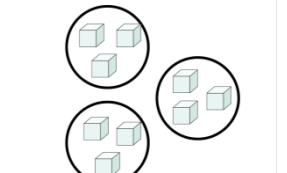
Fonte: os autores

Não usaremos neste primeiro a igualdade do dividendo com produto do divisor e quociente adicionar ao resto. Mas iremos usá-lo posteriormente. Uma opção é trabalhar material dourado e ferramenta do algoritmo da divisão juntos, o aluno pode assimilar as semelhanças do que ele faz mentalmente e verificar o conceito da divisão com o uso de materiais manipulativos e matemática formal.

Ao invés de começar com o Algoritmo da Divisão que dá a resposta de forma rápida com o uso direto da tabuada, deixe os alunos anotarem o processo que fazem com o Material Dourado no algoritmo. Essa sugestão é dada por Smole e Muniz (2013)

Quadro 19: Divisão de 9 por 3 usando o Material Dourado e o Algoritmo da Divisão

Com o Material Dourado	Com o Algoritmo da Divisão	Explicação
		O primeiro passo é o aluno relacionar o que ele vê no material manipulativo com o algoritmo. Os nove cubinhos é a quantidade que vai sofrer a ação (dividendo) e os três grupos representa o dividendo (que faz a ação);

	$\begin{array}{r} 9 \overline{) 3} \\ - 3 \\ \hline 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} \times 1 \\ + 1 \\ + 1 \end{array}$	Como a divisão é por 3, tem que ter no mínimo três cubinhos para cada grupo ter um. Pode-se começar pegando três cubinhos e distribuindo (valor que fica abaixo do quociente). Cada grupo ficou com um cubinho (quociente). Restando seis cubinhos (resto).
	$\begin{array}{r} 9 \overline{) 3} \\ - 3 \\ \hline 6 \\ - 3 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \times 1+1 \\ + 1+1 \\ + 1+1 \end{array}$	Pega-se mais três cubinhos que sobraram, e ao distribuir, deu mais um cubinho para cada grupo (adiciona-se mais um ao quociente). Restando, agora, apenas 3 (resto da segunda divisão).
	DIVIDENDO → 9 $\begin{array}{r} 9 \overline{) 3} \\ - 3 \\ \hline 6 \\ - 3 \\ \hline 3 \\ - 3 \\ \hline 0 \end{array}$ DIVISOR → 3 QUOCIENTE → 1+1+1 RESTO → 0 divisão exata resulta em zero	Por último, distribui os 3 restantes. Terá mais um cubinho em cada grupo (acrescenta-se mais um no quociente). Totalizando três cubinhos em cada grupo. Ou seja, a resposta é que cada criança vai receber 3 balas e não restaram nenhuma.

Fonte: os autores

Logo, nesse primeiro exemplo, trabalhou com dois números de unidades simples. O segundo exemplo é uma divisão de dezenas por unidades: 24 balas divididas para 6 amigos.

Quadro 20: Segundo exemplo de divisão utilizando material dourado

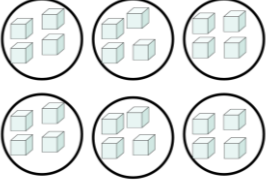
Divisão utilizando o Material Dourado		
Nesse exemplo, como envolve dezenas, tem-se duas barras e quatro cubinhos. Contudo ao tentar dividir, não é possível, pois duas barras inteiras não dão para dividir para 6, dois amigos iriam receber e os 4 ficaram sem. O mesmo, para os quatro cubinhos;	Por isso, trocamos as duas barras por 20 cubinhos. Totalizando 24 cubinhos, agora conseguimos distribuir;	Ao distribuir os cubinhos um a um, o aluno pode perceber que não sobrou nenhum cubinho (balas). Assim cada amigo recebeu 4 balas.

Fonte: os autores

Novamente, relacionando o uso do Material Dourado e o Algoritmo, tem-se:

Quadro 21: Divisão de 24 por 6 usando o Material Dourado e o Algoritmo da Divisão

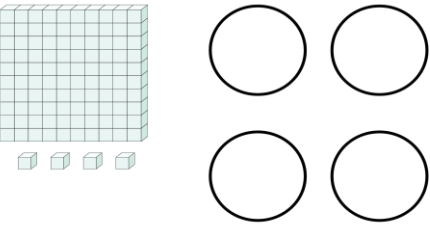
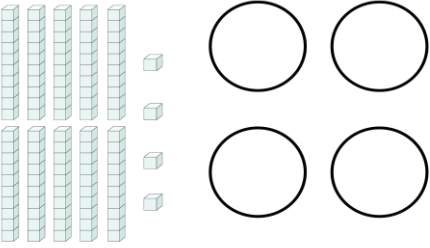
Com o Material Dourado	Com o Algoritmo da Divisão	Explicação
	$24 \overline{) 6}$	Primeiro se relaciona o Material Dourado com o Algoritmo;
	$24 \overline{) 6}$	Nas trocas das duas barras (duas dezenas) para vinte cubinhos (vinte unidades), permanece inalterado a parte da escrita matemática;
	$\begin{array}{r} \text{DU} \\ 24 \overline{) 6} \\ - 18 \quad \times 3 \\ \hline 06 \end{array}$	Os vinte cubinhos, que eram 2 barras, podem ser distribuídos um a um nos grupos, chegando a conclusão que é possível cada grupo ter três cubinhos (valor no quociente), totalizando

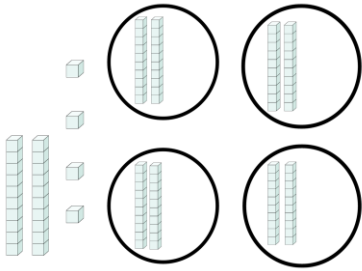
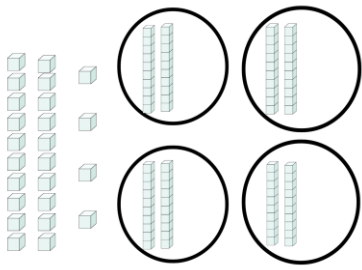
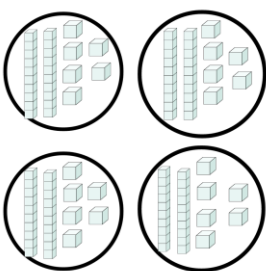
		dezoito cubinhos (valor escrito abaixo do número 24 no dividendo) distribuídos nesta primeira etapa. Restando 6 cubinhos (resto da primeira divisão);
	DIVIDENDO $\begin{array}{r} 24 \\ - 18 \\ \hline 06 \\ - 06 \\ \hline 00 \end{array}$ D U $\begin{array}{r} 24 \\ - 18 \\ \hline 06 \\ - 06 \\ \hline 00 \end{array}$ $\xrightarrow{\text{DIVISOR}} 6$ $\times 3 + 1$ $\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{4} \rightarrow \text{QUOCIENTE}$ $\rightarrow \text{RESTO}$ divisão exata resulta em zero	Como restou seis cubinhos e tem-se seis grupos, em cada grupo vai mais um cubinho (valor acrescentado ao quociente). Ou seja, os seis cubinhos (valor abaixo do primeiro resto) foram distribuídos. Restante nenhum cubinho. Assim, seguindo a ideia do exemplo, cada aluno recebeu 4 balas.

Fonte: os autores

O terceiro e último exemplo, para divisão exata, onde o dividendo seja uma centena: 104 figurinhas em 4 caixas.

Quadro 22: Terceiro exemplo de divisão utilizando material dourado

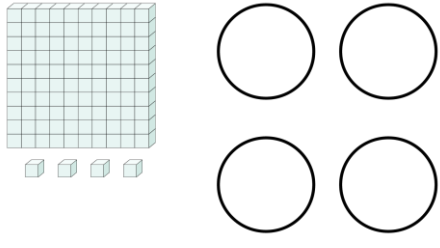
Divisão utilizando o Material Dourado		
		Nesse exemplo, como envolve centenas, tem-se uma placa e quatro cubinhos. Contudo ao tentar dividir, não é possível, pois não dá para distribuir uma única placa para 4 grupos (caixas). Já os quatro cubinhos dão para distribuir, mas vamos, nesse caso, deixar por último;
		Como a placa não permite ser dividida, troca-se ela por 10 barras;

	Ao distribuir as 10 barras, nota-se que foi possível distribuir 8 delas (80 unidades). Contudo, sobram 2 barras, que não dão para distribuir igualmente;
	Novamente o aluno faz a troca. Mas agora as 2 barras serão trocadas por 20 cubinhos (20 unidades), sendo possível distribuí-las nos quatro grupos (caixas). Lembrando que há 20 cubinhos (que eram as duas barras) mais 4 cubinhos que já estavam desde o início no exemplo, tendo ao todo 24 cubinhos;
	Por fim, o resultado da divisão é de 26 figurinhas em cada caixa, pois há, em cada grupo, 2 barras e 6 cubinhos.

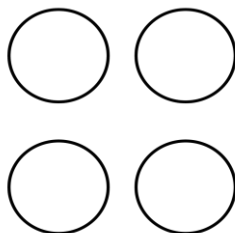
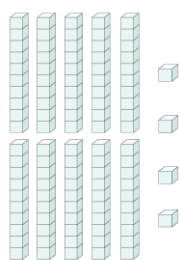
Fonte: os autores

O motivo de ter deixado por último a distribuição dos 4 cubinhos, lá no início do exemplo, é porque em alguns casos, quando há essas trocas, adicionam-se às trocas de dezenas para unidades com os cubinhos já existentes para distribuir. E, ao relacionar o uso desse material com o Algoritmo da Divisão, tem-se:

Quadro 23: Divisão de 104 por 4 usando o Material Dourado e o Algoritmo da Divisão

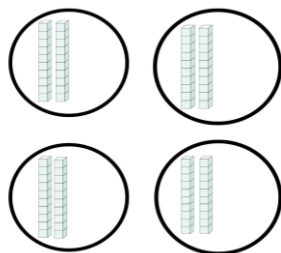
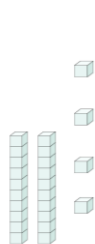
Com o Material Dourado	Com o Algoritmo da Divisão
	$ \begin{array}{r} \text{C D U} \\ 104 \overline{) 4} \end{array} $

Novamente assimilando o Material Dourado com a escrita matemática, trabalhando com os dois recursos simultaneamente. É interessante pedir para que os alunos vão explicando esse processo, para avaliar se eles compreenderam o que estão fazendo ou se só estão reproduzindo a fala do professor;



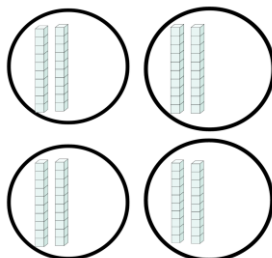
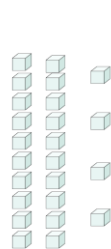
$$\begin{array}{r} \text{C D U} \\ 104 \overline{) 4} \end{array}$$

No Material Dourado troca-se a placa (centena) por barra (dezenas). Mas nesse Algoritmo não existe alteração;



$$\begin{array}{r} \text{C D U} \\ 104 \overline{) 4} \\ - \quad 80 \quad \times 20 \\ \hline 24 \end{array}$$

Há diversas possibilidades para distribuir o Material Dourado. Se começar pelas barras, nota-se que dá para distribuir duas barras (duas dezenas) em cada um dos grupos. Matemática, podemos assimilar com a tabuada do 4, que vai até $10 \times 4 = 40$. Dobrando-se esse valor, $20 \times 4 = 80$, que é justamente as oito barras (valor escrito abaixo do dividendo) que foi dividida igualmente para os quatro grupos. Cada grupo ficou com duas barras (valor do quociente). Restante duas barras e quatro cubinhos;



$$\begin{array}{r} \text{C D U} \\ 104 \overline{) 4} \\ - \quad 80 \quad \times 20 \\ \hline 24 \end{array}$$

Ainda é possível dividir, mas com o Material Dourado, troca-se as barras (dezenas) por cubinhos (unidades);

	DIVISOR 4 DIVIDENDO C D U $\begin{array}{r} 104 \\ - 80 \\ \hline 24 \\ - 24 \\ \hline 00 \end{array}$ QUOCIENTE $\times 20 + 6$ 26 RESTO divisão exata resulta em zero
Os vinte e quatro cubinhos, distribuídos um a um igualmente, cabem exatamente nos quatro grupos, assim cada grupo fica com seis cubinhos. Matematicamente, posso distribuir o restante dos cubinhos, colocando seis cubinhos em cada grupo, pois $6 \times 4 = 24$. Não restando nenhum valor.	

Fonte: os autores

Pode ser feita a prova real de cada um desses exemplos para os alunos assimilarem as operações inversas. A operação inversa da divisão é a multiplicação. Logo utilizamos que $quociente \times divisor = dividendo$. Não tem a adição do resto pois este é zero.

Figura 99: Prova real dos exemplos de divisão exatas

Exemplo 1 $\begin{array}{r} 3 \\ \times 3 \\ \hline 9 \end{array}$ divisor quociente dividendo	Exemplo 2 $\begin{array}{r} 6 \\ \times 4 \\ \hline 24 \end{array}$ divisor quociente dividendo
Exemplo 3 $\begin{array}{r} 26 \\ \times 4 \\ \hline 104 \end{array}$ quociente divisor dividendo Foi invertido os fatores para facilitar a multiplicação	

Fonte: os autores

Cada uma das provas reais, a multiplicação resultou no valor do dividendo de cada exemplo, logo todas as resoluções estavam corretas. O último exemplo nos traz duas observações:

- **Observação 1**

Foi utilizado no quociente a adição durante o processo. Esse é um jeito de ensinar

divisão, os alunos vão distribuindo, igualmente, valores conhecidos por eles e, depois, adiciona-se para encontrar o valor do quociente. Faz-se isso, justamente para valorizar o que eles já conhecem de divisão informal. Poderia ter sido feito, também, da seguinte forma (ainda utilizando a adição no quociente):

Figura 100: Outro exemplo com adição no quociente utilizando o Algoritmo da Divisão

C D U		
1 0 4	4	
-	x 10 + 10 + 6	
4 0		
-		
6 4		
-		
4 0		
-		
2 4		
-		
2 4		
-		
0 0		

$0 \times 4 = 0$
$1 \times 4 = 4$
$2 \times 4 = 8$
$3 \times 4 = 12$
$4 \times 4 = 16$
$5 \times 4 = 20$
$6 \times 4 = 24$
$7 \times 4 = 28$
$8 \times 4 = 32$
$9 \times 4 = 36$
$10 \times 4 = 40$

Fonte: os autores

O professor pode deixá-los à vontade e mostrar que apesar de diferentes distribuições (feitas corretamente) chega-se ao mesmo resultado. Depois que eles entenderam bem a divisão feita dessa forma, pode-se ensinar da maneira que é mais rápida, usando a tabuada e o conceito de quantos cabem e de valor posicional no quociente, sem a adição.

Assim, acreditamos que começar o processo de divisão através desse tipo de atividade e usando o conhecimento anterior do aluno favorecerá a construção do algoritmo por ele. Começando com números pequenos e aumentando gradativamente levará os alunos a melhor elaborar e construir a técnica de divisão. [...] Deixar os alunos livres para escolherem o melhor caminho a seguir, propondo situações em que eles sejam compelidos a procurar novos caminhos, contribuirá para a aquisição de sentido do princípio fundamental da divisão. Após algumas experimentações, eles observarão as vantagens em se distribuir o máximo de centenas ou dezenas, quando houver possibilidade. (Smole, Muniz, 2013, p. 45)

Abaixo, segue a segunda forma de resolver a divisão:

Quadro 24: Algoritmo da divisão com valor posicional no quociente

Algoritmo da Divisão	Explicação
C D U <u>104</u> 4	Quando se ensina adição, subtração e multiplicação, começa-se das ordens menores para as maiores, isto é, da direita para a esquerda. Mas a divisão feita neste formato é diferente. Colocamos o arco, para indicar os algarismos que iremos dividir, da esquerda para direita. Isso é explicado com o uso do material dourado em que é distribuído primeiro as ordens maiores passando pelas ordens menores. Logo, o 1, representa uma placa (uma centena) e realmente não é possível dividir, tendo que fazer a troca;
C D U <u>104</u> 4 - 8 x 2 2	0 x 4 = 0 1 x 4 = 4 <u>2 x 4 = 8</u> 3 x 4 = 12 4 x 4 = 16 5 x 4 = 20 6 x 4 = 24 7 x 4 = 28 8 x 4 = 32 9 x 4 = 36 10 x 4 = 40 Na troca da placa para a barra (centena para dezenas), ficasse dez barras, por isso o arco fica no 10. Daí, a pergunta a se fazer é: quantas barras de 4 em 4 cabem em dez barras? Cabem duas barras (duas dezenas) em cada grupo, distribuindo ao todo oito barras. Porém sobram duas barras.
C D U <u>104</u> 4 - 8 x 26 24 - 24 00	0 x 4 = 0 1 x 4 = 4 2 x 4 = 8 3 x 4 = 12 4 x 4 = 16 5 x 4 = 20 <u>6 x 4 = 24</u> 7 x 4 = 28 8 x 4 = 32 9 x 4 = 36 10 x 4 = 40 Além das duas barras restantes, tem-se ainda quatro unidades (por esse motivo colocamos uma flechinha para “baixar o número 4”. As duas barras também serão trocadas por cubinhos para continuar a divisão. Assim, ao todo, são vinte e quatro cubinhos (vinte quatro unidades). Na tabuada do quatro, tem-se que $6 \times 4 = 24$. Logo, cada grupo ficará com 6 unidades. Resultando em 26, no caso do exemplo, 26 figurinhas por caixa.

Fonte: os autores

• **Observação 2**

A segunda observação está voltada para a explicação que pode ser dada para os alunos do porquê se utiliza o sinal **menos** no Algoritmo de Divisão. Ao distribuir a primeira parte, no caso de 104 figuras em 4 caixas, se as figurinhas estivessem em uma sacola, retiráramos 80 deles e os distribuíramos entre os 4 grupos. Esse processo de

retirar, isto é, diminuir a quantidade de figurinhas dentro da sacola, é na que se encontra a subtração. Retirar e diminuir tem relação com a operação de subtração.

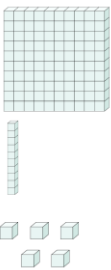
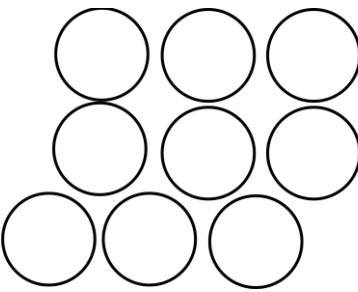
Repetimos o mesmo processo quando restam 24. Logo, como dito anteriormente, o Algoritmo da Divisão usa as quatro operações trabalhadas simultaneamente. O professor deve ter a preocupação de explicar cada um desses processos já que essa é uma das operações que as crianças têm mais dificuldade.

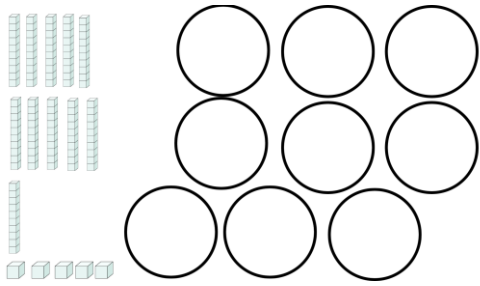
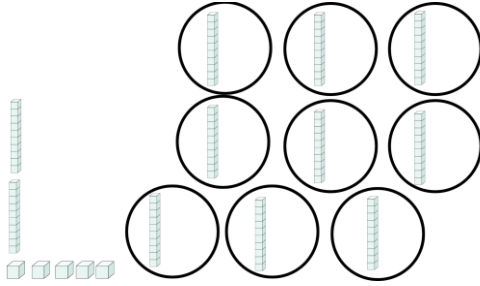
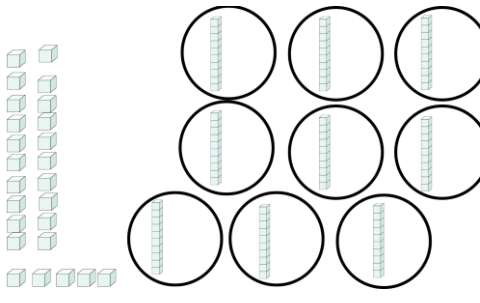
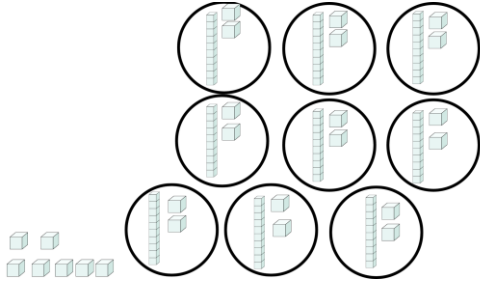
- **Observação 3**

O quociente não é sinônimo de resposta em todos os problemas de divisão, isto é, nem sempre a resposta do problema é o valor do quociente. Pode haver problemas que a pergunta é sobre o resto, por exemplo. Por isso aluno deve estar atento a pergunta que está sendo pedida e o professor, por sua vez, deve colocar problemas com estruturas diversas para os alunos resolver e, para não ficarem engessados apenas em achar o valor do quociente da divisão.

Assim, até aqui os exemplos propostos eram de divisões exatas, isto é, onde o resto era zero. Um exemplo, que pode ser dado, em relação a divisão não exata é: 115 salgadinhos para 9 pessoas.

Quadro 25: Divisão não exata com o exemplo de 115 dividido por 9

Material Dourado	Algoritmo da Divisão
 	$\begin{array}{r} \text{C D U} \\ 115 \overline{) 9} \end{array}$
Ao dividir 115 por 9, o Material Dourado nos mostra, que não tem como cada grupo ter uma centena. Já no Algoritmo da Divisão, também se vê manifestando essa troca, com a utilização do arco, que não é possível dividir 1 por 9;	

	C D U 1 1 5 9
Trocando-se uma placa (uma centena) por dez barras (dez dezenas), assim tem-se dez barras da troca mais uma barra que já havia desde o início. E no caso do algoritmo, o arco vai sobre o 11 (que é o mesmo que as onze barras);	
	C D U $\begin{array}{r} \overline{)115} \quad \overline{)9} \\ \underline{9} \\ 2 \end{array}$ x 1 0 x 9 = 0 1 x 9 = 9 2 x 9 = 18 3 x 9 = 27 4 x 9 = 36 5 x 9 = 45 6 x 9 = 54 7 x 9 = 63 8 x 9 = 72 9 x 9 = 81 10 x 9 = 90
Distribuindo as onze barras, é possível distribuir nove delas, sobrando duas barras. O mesmo no algoritmo, cabe uma vez o 9 no 11. O 1 fica no quociente (que é quantidade que foi distribuído em cada grupo), o 9 abaixo do dividendo (que é a quantidade que foi possível distribuir nesse primeiro momento). Ao subtrair, restam 2 (esse dois está na ordem das dezenas);	
	C D U $\begin{array}{r} \overline{)115} \quad \overline{)9} \\ \underline{9} \\ 2 \end{array}$ x 1 0 x 9 = 0 1 x 9 = 9 2 x 9 = 18 3 x 9 = 27 4 x 9 = 36 5 x 9 = 45 6 x 9 = 54 7 x 9 = 63 8 x 9 = 72 9 x 9 = 81 10 x 9 = 90
No Material Dourado, tem que ser feita a troca das duas barras (duas dezenas) por dez cubinhos (dez unidades). Assim, fica-se com vinte e cinco cubinhos;	
	C D U $\begin{array}{r} \overline{)115} \quad \overline{)9} \\ \underline{9} \\ 25 \\ \underline{18} \\ 7 \end{array}$ x 12 0 x 9 = 0 1 x 9 = 9 2 x 9 = 18 3 x 9 = 27 4 x 9 = 36 5 x 9 = 45 6 x 9 = 54 7 x 9 = 63 8 x 9 = 72 9 x 9 = 81 10 x 9 = 90
No algoritmo, vê-se os vinte e cinco cubinhos, quando se diz: “ainda resta o 5 no dividendo, baixa ele do lado do resto, ficando com 25”. Dos vinte e cinco cubinhos (vinte e cinco unidades) pode ser distribuído apenas dezoito cubinhos (dezoito unidades) de	

forma que cada grupo tenha dois cubinhos (valor que se coloca no quociente) e restando sete cubinhos (sete unidades). Logo cada pessoa poderá comer 12 salgadinhos e sobrá 7 salgadinhos.

Fonte: os autores

Como esse trabalho se concentra em números naturais, paramos a divisão com o resto 7. A prova real dessa situação é dada por:

$$\text{quociente} \times \text{divisor} = 12 \times 9 = 108$$

Não deu valor do dividendo, porque não é uma divisão exata, logo adiciona-se o resto:

$$(\text{quociente} \times \text{divisor}) + \text{resto} = (12 \times 9) + 7 = 108 + 7 = 115$$

Dado os exemplos de divisão exata e não exata, vejamos quais são as propriedades da divisão.

Divisão e suas propriedades

Assim como na subtração, a divisão também tem mais restrições em suas propriedades do que a adição e a multiplicação. Vejam o porquê:

- Comutativa: a divisão não é comutativa.

Contraexemplo: a divisão de $10 \div 5 = 2$. Porém, se comutar os números, $5 \div 10 = 0,5$. Logo, o resultado não é o mesmo, pois $2 \neq 0,5$.

- Associativa: a divisão também não é associativa, por consequência da propriedade anterior.

Contraexemplo: dado os números 7, 3 e 2.

Quadro 26: Contraexemplo da divisão não ser associativa

1º Posicionamento dos Números	2º Posicionamento dos Números
$(10 \div 5) \div 2$	$10 \div (5 \div 2)$
$2 \div 2$	$10 \div 2,5$
1	4

Fonte: os autores

Pelo quadro, notamos que o resultado da operação, ao ser alterada a ordem dos números é alterado o resultado. Logo, o cuidado ao se resolver a divisão deve ser redobrado também.

- Existência de elemento neutro: na divisão o elemento neutro é o número 1. Qualquer número, dividido por um, sempre vai dar ele mesmo.

Exemplo: $8 \div 1 = 8$

Genericamente, dado $a \in \mathbb{N}$

$a \div 1 = a$

Logo, **a** dividido por 1 (pega-se uma vez o **a**) é ele mesmo. Mas, $a \div a = 1$.

- Fechamento: a divisão não possui fechamento.

Contraexemplo: a divisão $3 \div 6$, o resultado é um número decimal, 0,5. Esse número não faz parte do conjunto dos números naturais.

- Distributiva: essa propriedade também não é válida na divisão, nem em relação à adição e nem em relação à subtração.

Contraexemplo: dados os números 24, 4 e 2, têm-se:

Quadro 27: Contraexemplo da divisão não ser distributiva

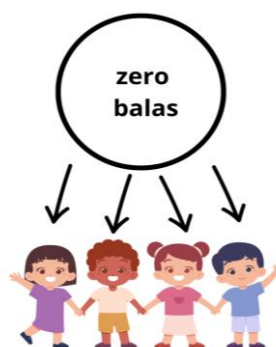
Em relação à adição		Em relação a subtração	
<i>Aplicando a Distributiva</i>	<i>Começando a resolver pelos parênteses</i>	<i>Aplicando a Distributiva</i>	<i>Começando a resolver pelos parênteses</i>
$24 \div (4 + 2)$ $24 \div 4 + 24 \div 2$ $6 + 12$ 18	$24 \div (4 + 2)$ $24 \div 6$ 4	$24 \div (4 - 2)$ $24 \div 4 - 24 \div 2$ $6 - 12$ -6	$24 \div (4 - 2)$ $24 \div 2$ 12

Fonte: os autores

E a divisão envolvendo o número zero? Qual é o segredo que não é revelado aos alunos quando se fala: não se pode dividir por zero! Tornando essa operação um erro tão grave. Relembrando a associação de Seife (2000) com o elástico numerado sobre a reta numérica da Fig. 96, ao multiplicar por um número o elástico se estica e ao dividir se reduz. Quando se multiplica por zero, a reta é desfeita. Como a divisão é a operação inversa da multiplicação, teoricamente a divisão pelo zero deveria desfazer a destruição causada na multiplicação, porém não é isso que ocorre.

Que fique claro para os alunos que dividir zero por algo é possível. O problema está no processo contrário. Se temos, por exemplo, zero balas para dividir para um grupo de 4 pessoas, cada pessoa receberá zero balas, já que não se tem nenhuma quantidade para dividir, mesmo com a boa intenção.

Figura 101: Divisão de zero por quatro



Fonte: os autores

Logo, $0 \div n = 0$. Isso faz sentido! A grande problemática está em $n \div 0$. É importante separar um tempo da aula para mostrar essa diferença para as crianças, para que elas não generalizem e saibam o porquê do primeiro caso dar certo e o outro não.

Uma sugestão para mostrar do motivo de $n \div 0$ não dar certo é relembrar com eles primeiro a relação de inversa da multiplicação e divisão. Tomemos como exemplo: um relógio que custa R\$100,00 e será pago em 5 parcelas, o valor de cada parcela será de R\$ 20,00. Logo $100 \div 5 = 20$. Podemos pensar o inverso para essa situação. Comprei um relógio parcelado em 5 vezes de R\$20,00, o valor total do relógio será de R\$ 100,00.

Assim, $100 \div 5 = 20 \Rightarrow 20 \times 5 = 100$. Voltamos sempre que o relógio custa R\$100,00, pois $(100 \div 5) \times 5 = 100$. E que a parcela será de R\$20,00, pois $(20 \times 5) \div 5 = 20$. A divisão desfaz o que a multiplicação fez e vice-versa.

O mesmo acontece com o zero no dividendo: $(0 \times 5) \div 5 = 0$

Agora, vamos analisar quando o zero está no divisor. Seife (2000) começa essa prova da seguinte maneira: sabe-se que $2 \times 0 = 0$. Para desfazer essa multiplicação, bastaria dividir por zero. Suponha, por enquanto, que $(2 \times 0) \div 0 = 2$. O mesmo serve para $(3 \times 0) \div 0 = 3$ ou para $(4 \times 0) \div 0 = 4$. Porém, como já dissemos no início dessa demonstração $2 \times 0 = 0$, logo $(2 \times 0) \div 0 = 0 \div 0 = 2$. Da mesma forma, $(3 \times 0) \div 0 = 0 \div 0 = 3$ e também $(4 \times 0) \div 0 = 0 \div 0 = 4$.

Então, $0 \div 0 = 2$, que também é igual a 3 e a 4? Há algo errado! Utilizando a ideia de operações inversas já vemos essa inconsistência. Vejamos pelo algoritmo da divisão, que é mais visível para os estudantes.

Figura 102: Divisão de um por zero

$$\begin{array}{r} 1 \overline{) 0} \\ ? \end{array}$$

Que número multiplicado por zero resulta em 1? Ou, na tabuada do zero tem 1?

$0 \times 1 = 0$

$0 \times 2 = 0$

$0 \times 3 = 0$

:

$0 \times 10 = 0$

:

Fonte: os autores

Não existe um número que satisfaça essa condição. Qualquer que seja o número, do maior ou menor, desde os naturais até os números reais, não teremos uma resposta. Logo não existe um número que dê para encontrar o resultado de $1 \div 0$, ou qualquer outro número dividido pelo zero.

Mas, essa não é a única situação complicada que o zero nos coloca. O que dizer de $0 \div 0$? O professor pode fazer essa pergunta aos alunos e esperar as respostas deles. Será que é válido como $0 \div 1$? Ou será que não é válido como $1 \div 0$? Depois dessa discussão o professor pode mostrar pelo algoritmo da divisão a seguinte situação:

Figura 103: Divisão de zero por zero

$$\begin{array}{r} 0 \overline{) 0} \\ ? \end{array}$$

Que número multiplicado por zero resulta em 0? Ou, na tabuada do zero tem 0?

$0 \times 1 = 0$

$0 \times 2 = 0$

$0 \times 3 = 0$

:

$0 \times 10 = 0$

:

Qualquer número é válido

Fonte: os autores

O zero nos coloca em cada saia justa. Nesse caso, não é válida a divisão não porque não existe nenhum valor, mas porque qualquer valor é válido. Um pode escolher

o número um como resposta e estará correto, pois $1 \times 0 = 0$. Porém, para o 23 também é válido, pois $23 \times 0 = 0$, ou para qualquer outro número, já que $n \times 0 = 0$.

Portanto,

Quadro 28: O zero em diferentes posições na divisão

$0 \div n$	$n \div 0$	$0 \div 0$
válido, o resultado sempre será zero	não é válido, pois não existe um único valor que satisfaça a divisão	não é válido, pois existe uma infinidade de possibilidades de escolha

Fonte: os autores

A divisão envolvendo o número zero não é tão simples assim, pior de tudo, se você simplesmente dividir por zero, pode destruir toda a base da lógica e da matemática. Dividir por zero uma vez - apenas uma vez - permite que você prove, matematicamente, qualquer coisa no universo. Você pode provar que $1 + 1 = 42$ [...] Multiplicar por zero reduz a reta numérica. Mas a divisão por zero destrói toda a estrutura da matemática. Há muito poder neste número simples. (SEIFE, 2000, p. 10, tradução nossa)

Por isso, negamos a ideia de dizer que o zero é nada ou somente colocá-lo como guardador de lugar. Ele tem um poder enorme e abriu portas para matemática, mesmo com todos esses desafios.

4.4.3 Paridade do Zero

Problema 8: Por conta do congestionamento no centro da cidade de Rio Claro, algumas medidas foram tomadas para diminuir o fluxo de carros e motos, pelo Prefeito:

"Os motoristas que têm placas que terminam em um número ímpar ou terminam em uma letra ou outro caractere poderão andar no centro com seus automóveis nos dias ímpares, como amanhã, que é dia 9", disse ele . Quem tem placa com número par ou zero, só poderá trafegar nos dias pares, como sábado, 10 de novembro."

O uso da frase "número par ou o número zero" implica que zero não é par para o Prefeito. Por outro lado, o prefeito está colocando o zero junto com os pares.

Contudo, além do prefeito, os policiais também se confundindo com a situação,

deixavam passar todos os carros com finais zeros, tanto em dias pares quanto em dias ímpares. Assim traz o questionamento: se o zero é par, ímpar ou mesmo nenhum dos dois.

Como poderíamos ajudar o prefeito e os policiais da cidade a entenderem se o final zero fica nos dias pares ou ímpares? Aliás, o zero é par, é ímpar ou nenhum dos dois?

Fonte: Problema adaptado do site Prof. Edigley Alexandre¹⁰

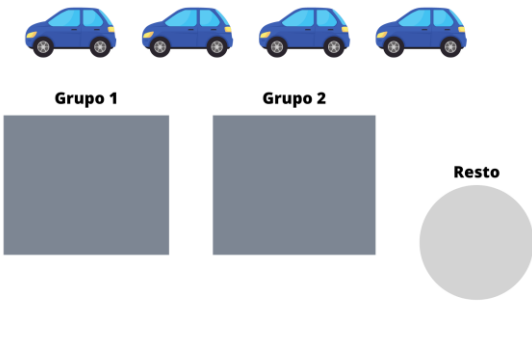
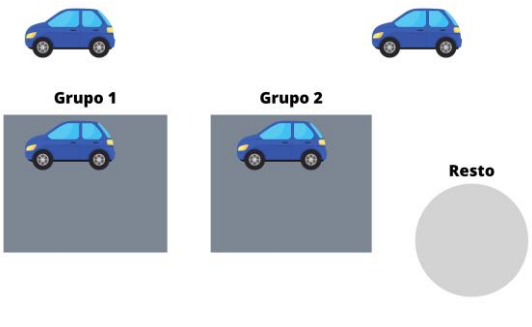
Então zero é par, ímpar ou até mesmo neutro? Como vimos na adição ele realmente é um número neutro e na subtração também, quando é um número menos zero. Porém, na multiplicação ele tem como característica de anulador, todo número por maior ou menor que seja, sendo racional ou irracional vezes zero é sempre zero.

Então neutro não cabe nessa definição de números pares ou ímpares. Sabemos que a resposta para isso é: zero é par. Mas como provar isso?

Como professora, costumamos falar que um número é par, quando fazemos parzinhos. O número quatro é par, por exemplo:

¹⁰ Site: <https://www.prof-edigleyalexandre.com/2012/12/afinal-zero-e-um-numero-Par-ou-Impar.html>. Acesso em 11/11/2023.

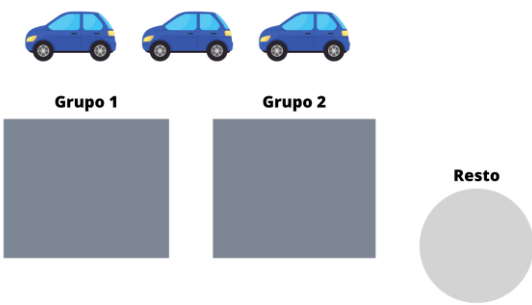
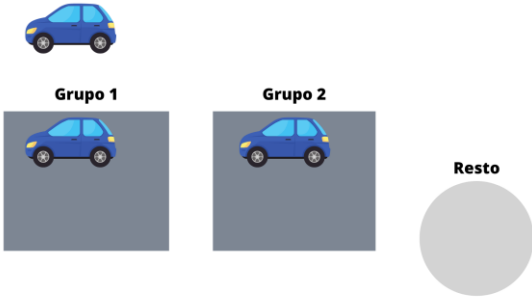
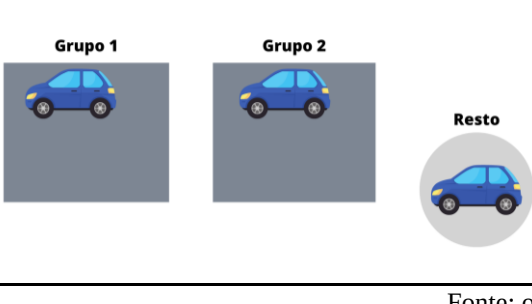
Quadro 29: Paridade do número 4

O número 4 é par?		
	Dado quatro carrinhos, para saber se 4 é par, tem que se formar “parzinhos”. Na verdade, o que quer se provar é se é divisível por 2.	
	Podemos distribuir esses carrinhos em dois grupos e analisar se sobra resto.	
	Logo, nota-se que 4 é par, pois é possível distribuir em dois grupos, de forma que não sobra nenhum.	

Fonte: os autores

Vejamos outro exemplo:

Quadro 30: Paridade do número 3

O número 3 é par?	
	Novamente, tem-se 3 carrinhos, para provar se é par ou não, ou seja, se é possível dividir em dois grupos sem restar nenhum carrinho;
	Distribuindo os carrinhos, consegue-se colocar um carrinho em cada grupo.
	Mostrando que sobra um carrinho, então não é par, pois esse que sobrou não posso dividir entre os dois grupos de forma igual.

Fonte: os autores

Os estudantes podem seguir esse exemplo para os números 2 e 1. Irão chegar à conclusão de que 2 é par e 1 é ímpar. O professor pode estimulá-los ainda mais para estabelecerem uma relação:

Quadro 31: Relação par e ímpar na sequência numérica entre 1 e 4

1	2	3	4
Ímpar	par	ímpar	Par

Fonte: os autores

E essa sequência poderia se estender:

Quadro 32: Relação par e ímpar na sequência numérica entre 1 e 12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ímpar	par	ímpar	par	ímpar	par	ímpar	par	ímpar	Par	ímpar	par

Fonte: os autores

Logo, eles poderiam perceber que se repete o padrão “**ímpar, par**” e que os números que têm como último algarismo: 1, 2, 3, 5, 7, 9 são ímpares e 2, 4, 6, 8, 0 (por conta do 10, 20, 30 e assim por diante) são pares. Então o número zero também é par. Esse conceito se chama paridade.

Quadro 33: Relação par e ímpar na envolvendo o zero

0	1	2	3
par	Ímpar	Par	ímpar

Fonte: os autores

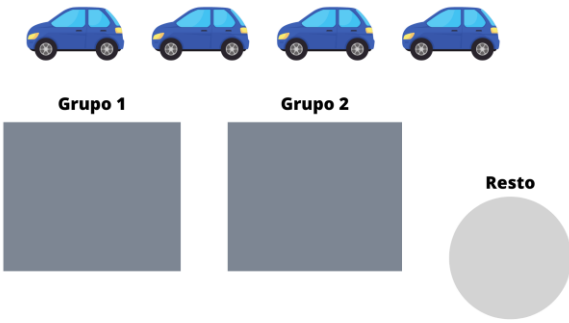
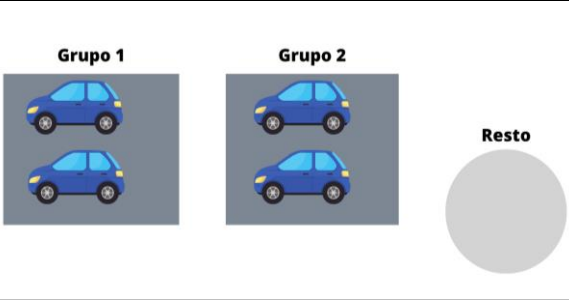
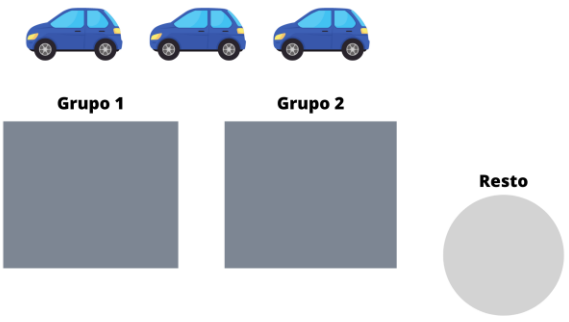
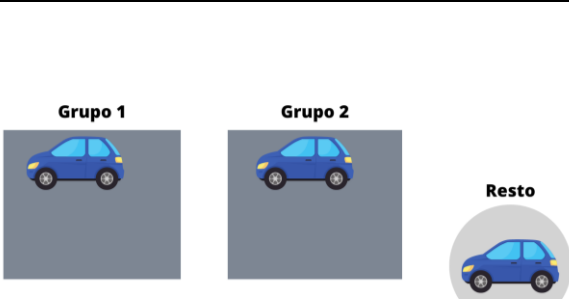
Os estudantes, da faixa etária deste estudo, costumam se convencer apenas com isso que zero é par. Assim, a resposta para o Problema 5, é que a ideia do Prefeito colocar o zero com os pares está correta, já que zero faz parte desse grupo.

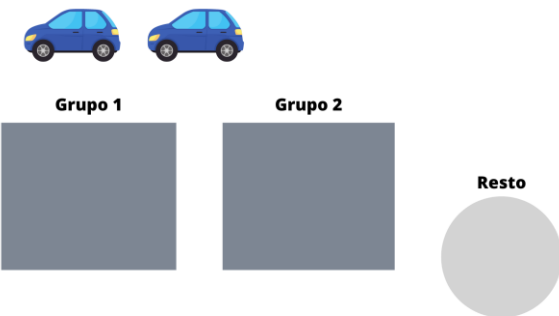
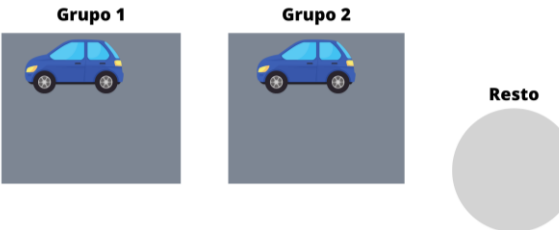
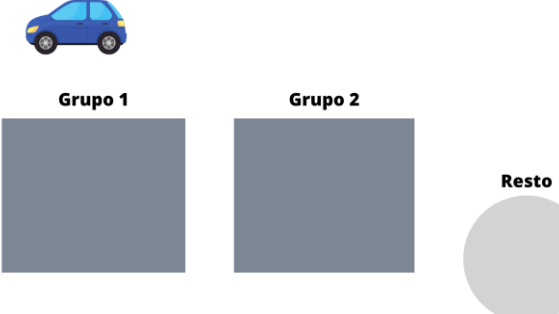
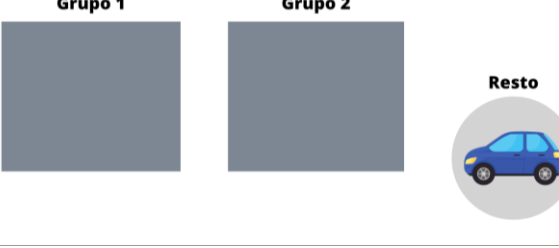
Por definição, temos que um número é par quando é divisível por 2, isto é, quando dividimos um número natural por 2 e o resultado é uma divisão exata. Podemos usar a expressão: $n \times 2 = p$, onde n é qualquer número natural e p é um número par. Por consequência, todo número que é multiplicado por dois se torna par, melhor dizendo, todo múltiplo de dois é par. Então, p é par, se e somente se, p for múltiplo de 2.

Para os números ímpares temos por definição que um número é ímpar quando ao ser dividido por dois tem o resto 1, portanto não é uma divisão exata. Podemos usar a expressão: $(n \times 2) + 1 = i$, onde n é qualquer número natural e i representa os números ímpares. Assim, i é ímpar quando não é múltiplo de 2.

Voltando ao Problema 6, poderíamos ter resolvido por esta definição:

Quadro 34: Explicação da paridade de um número pela definição

O número 4 é par?	 	Pela imagem tem-se que 4 pode ser dividido em dois grupos. Cada grupo ficará com duas unidades e não vai restar nenhum carrinho. Logo, 4 é par, porque ele é 2 vezes algum número. Ou seja, 2 vezes 2, ou 2 grupos com 2 carrinhos nos darão 4 carrinhos ao todo ao todo. Tendo a expressão: $2 \times 2 = 4$
O número 3 é par?	 	Pela imagem, 3 carrinhos podem ser dividido em dois grupos. Cada grupo ficará com uma unidade, porém restará também uma unidade que não pode ser distribuída. Logo 3 é ímpar, pois ele é duas vezes um número mais um. Isto é, 2 grupos de 1 carrinho, mas 1 carrinho que sobrou (o resto). Então toda vez que precisar escrever “mais um” esse número será ímpar. Expressão: $(2 \times 1) + 1 = 3$

O número 2 é par?		O mesmo processo para o número 2. Ao distribuir, cada grupo fica com um carrinho, não sobrando nenhum. Expressão: $(2 \times 1) = 2$
		
O número 1 é par?		Para o número 1 tem-se que é ímpar, pois ao distribuir, não foi possível colocar unidades inteiras em cada grupo, sobrando esse um carrinho e cada grupo ficando com zero unidades. Expressão: $(2 \times 0) + 1 = 1$
		

O número zero é par?		Por fim, para o número zero. Como a quantidade de carrinhos é zero, cada grupo ficará com zero unidades. Como os dois grupos têm a mesma quantidade de carrinhos, por mais que seja zero, ele é par. Já que também pode ser escrito como duas vezes algum número natural. Expressão: $2 \times 0 = 0$
----------------------	--	---

Fonte: os autores

Por fim, podemos utilizar três definições para números pares e ímpares:

(i) Número Par

Definição 1: Todo número par é múltiplo de 2.

Definição 2: Todo número par é divisível por 2.

Definição 3: dado um número p , pertencente ao conjunto dos números inteiros, p será par se: $p = 2n$ (para as crianças podemos escrever: Todo número que é 2 vezes algum número natural)

(ii) Número Ímpar

Definição 1: Todo número ímpar não é múltiplo de 2.

Definição 2: Todo número ímpar não é divisível por 2.

Definição 3: dado um número inteiro i , ele será ímpar se: $i = 2n + 1$ (para as crianças podemos escrever: Todo número que é 2 vezes algum número natural mais 1)

E mais uma observação, posso usar isso também para os números negativos, não é algo somente para os números positivos. Assim o professor pode concluir esse conteúdo com exercícios de fixação.

SEÇÃO CINCO: CONSIDERAÇÕES FINAIS

O zero teve uma trajetória incrível. Seu nascimento, como guardador de lugar em algumas civilizações antigas, permitiu resolver problemas de interpretações matemáticas. Passou pelo seu reconhecimento e solidificação na Índia, com os hindus o aceitando como algo além de guardador de lugar e criando propriedades para ele. As portas para o mundo se abriram graças aos árabes, mas ele, o zero, teve que conquistar o seu espaço na matemática europeia devido a vários preconceitos religiosos da época que impediam sua utilização. Depois de muitos anos, conseguiu ser reconhecido por vários matemáticos e permitiu avanços matemáticos e tecnológicos.

Mesmo depois de provar seu valor, ele ainda é dito como “nada” por alunos e professores. Realmente é um numerozinho emblemático entretanto muito necessário. Não é um “nada”, mas também não é um tudo. Contudo foi estudado por muitos autores, levando a trabalhos acadêmicos (artigos, teses e dissertações) como Padrão (2008), Tracanella (2017), Guimarães (2008) e Pinedo (2014), ou até mesmo livros de Seife (2000) e Kaplan (1999). Todos deram valor real ao zero.

O interesse pela pesquisa se iniciou pela resolução de algumas multiplicações de dois números naturais na qual o zero se encontra como algarismo de um dos números. Havia um erro nas resoluções da multiplicação pelo zero. Foi o pontapé para a pesquisa seguindo com a historização sobre ele. Essa parte da história da matemática me fez compreender que as dificuldades de entender e olhar para o zero como um número foi desde sua criação. Ele foi um número a ser criado depois dos naturais, mas não era visto como número, era apenas um guardador de lugar, essa visão de desvalorização tem se perpetuado como já abordamos inicialmente em expressões coloquiais que atribuem essa conotação ao zero.

Contudo, o problema da multiplicação com o zero era muito mais profundo. A questão não estava apenas no zero, mas no próprio entendimento dos alunos em relação às operações. Estas são vistas de modo que o aluno reproduz mecanicamente o que lhe foi ensinado sem questionar, gerando muitas dificuldades na sua manipulação.

O que eu, como professora, poderia fazer para sanar essas dificuldades e

estimular o interesse dos estudantes pelo zero nas operações matemáticas? Foi necessário todo um estudo na estrutura de cada operação e saber como o zero deveria ser introduzido na construção das operações.

Durante esse estudo, notei que a pesquisa caminhava, não olhando para o trabalho de terceiros (alunos e professores) mas para minha própria prática docente. Por isso, procurando na literatura, estudei trabalhos sobre o tema, incluindo de Ponte e Serrazina (2003), Ponte (2002) e Alarcão (2000) que tratam desse assunto: Investigando a Própria Prática Docente. Estudar minha própria didática como professora me fez perceber as deficiências que existiam em minha prática e avaliá-las.

Pude me analisar e traçar o tipo de professora que queria ser, buscando estratégias para ensinar os alunos através da Resolução de Problemas. Cada problema proposto, neste trabalho, foi criado dentro da realidade dos alunos nas salas de aula, de forma que pudessem ser alterados os valores e a dificuldade de cada problema dependendo do ano/série.

Esse trabalho se tornou um guia de aprendizagem para mim e espero que seja para outros professores tanto da área de matemática quanto para pedagogos aplicarem durante suas aulas. Durante o processo de pesquisa e escrita, lecionei para sextos anos e os problemas de adição e subtração já estavam prontos e pude iniciar com eles. Notei uma grande diferença entre os anos que eu iniciava o conteúdo de forma tradicional com o que comecei com problemas. Quando me preparava para lecionar, lembrava do ensino tradicional que tive e o reproduzia em sala de aula.

Entretanto, depois de conhecer Resolução de Problemas, especificamente a MEAAMaRP, reconheci que é necessário dar tempo para os alunos refletirem; que há vantagens de eles discutirem em grupo; trocar conhecimentos; colocar todas as sugestões na lousa para que identifiquem o certo e o errado e engajar mais os alunos no processo de ensino-aprendizagem. Essa Metodologia, aliada à Investigação da Própria Prática me proporcionou mais confiança em meu trabalho na sala de aula, além de trazer melhores resultados no aprendizado dos estudantes.

Contudo, conclui essa investigação respondendo à questão inicial da pesquisa “Como o ensino do zero contribui para a aprendizagem das operações básicas através

da Resolução de Problemas?”, que começou de forma singela em estudar o número zero por pura curiosidade de como ele se comportava nas operações matemáticas e foi se aprofundando ao me fazer repensar o meu trabalho em sala de aula.

Finalizo, refletindo no que Martins (2019) relatou sobre o ato de pesquisar que, pela ingenuidade do pesquisador, quando se começa a pesquisar, acredita-se que será encontrada resposta para tudo, que a pesquisa vai revelar só coisas boas. Contudo, percebe-se que, nesse caminho, que o mais importante é refletir sobre determinado assunto de forma crítica, dar importância a objetos/seres esquecidos e, entre erros e acertos, crescer profissionalmente e academicamente.

REFERÊNCIAS

AGRANIONIH, N. T.; ENRICONE, JRB; ZATTI, F. **Dificuldades no cálculo de divisão na 5ª série do ensino fundamental**. X Encontro Gaúcho de Educação matemática, EGEM, RS-Ijuí. Anais, 2009.

ALARCÃO, I. **Professor-investigador: Que sentido? Que formação**. Formação profissional de professores no ensino superior, v. 1, p. 21-31, 2001.

ARAÚJO, T. O. **História do zero [manuscrito]: reflexões sobre abordagens em Livros Didáticos do 6º ano do Ensino Fundamental**. 2010. 93 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Centro de Ciências Humanas e Exatas, 2010.

ASIMOV, I. **No mundo dos números**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1983.

BBC News. **A longa batalha do zero para se tornar número**. YouTube, 19 de fevereiro de 2019. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Kgt3UggJ70k>. Acesso em: 15 de dezembro de 2022

BOGDAN, R.; BIKLEN S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto, 1994.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica: 2010.

BOTTA, L. S. **Números Racionais e Raciocínio Proporcional: Considerações sobre o Ensino-Aprendizagem**. 1997. 185 f. Dissertação (Mestre em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 1997.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, 2012.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora, 1951.

CENTURIÓN, M. **Números e operações: conteúdo e metodologia da Matemática**. São Paulo: Editora Scipione, 1994.

CUNHA, D. R. **A matemática na formação de professores dos anos iniciais do ensino fundamental: relações entre a formação inicial e a prática pedagógica**. 2010. 107 f. Dissertação (mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Porto Alegre, 2010.

DOS SANTOS, K. R; BORGES, L.; ONUCHIC, L. R. **Nada e menos que nada na perspectiva da Resolução de Problemas**. Com a Palavra, o Professor, v. 7, n. 18, p.

293-307, 2022.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5º ed. Campinas, Sp: Editora da Unicamp, 2011

FIORENTINI, D. LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados (2006).

GUIMARÃES, F. **Sentidos do Zero**. 2008. 115 f. Trabalho de conclusão de curso (Dissertação) - Programa de Estudos de Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo, 2008.

GUNDLACH, B. H. **História dos números e numerais**. trad Hygino H Domingues. São Paulo: Atual, 1992

IFRAH, G. **História universal dos algarismos**. vol 1. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1989.

IFRAH, G. **Os números: a história de uma grande invenção**. 3º Edição. São Paulo: Globo, 1989.

LEAL JUNIOR, L. C.; ONUCHIC, L. R. Ensino e Aprendizagem de Matemática Através da Resolução de Problemas Como Prática Sociointeracionista. **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 53, p. 955-978, dez. 2015.

LIMA, E. L. et al. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

LIMA, E. L., et al. **A matemática do ensino médio**. vol 1. 8ª edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1997

MANDARINO, M. C. F.; BELFORT, E. **Números naturais: conteúdo e forma**. Rio de Janeiro: Ministério da Educação: Universidade Federal do Rio de Janeiro, Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciências, 2005.

MARTINS, E. R. **Possibilidades do uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de matemática através da Resolução de Problemas em um curso de licenciatura matemática da Rede Federal de Educação Tecnológica no Estado de São Paulo**. 2019. 220 f. Tese (doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2019.

MATIAS, F. M. **O tratado do zero: quase tudo que se pode dizer sobre nada**. Niterói. 2020

ONUCHIC, L. R. A Resolução de Problemas na Educação Matemática: onde estamos e para onde iremos? *In: IV Jornada Nacional de Educação Matemática e XVII Jornada Regional*

de Educação Matemática. 2012. **Anais [...]** São José, Passo Fundo, 2012. p 1-15.

ONUCHIC, L. R, NOGUTI, F. C. H. A Pesquisa Científica e a Pesquisa Pedagógica. In: ONUCHIC, L. R, ALLEVATO, N. S. G, NOGUTI, F. C. H, JUSTULIN, A. M, (Org.). **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p.53-68.

PADRÃO, D. L. **A origem do zero**. Mestrado Profissional em Ensino da Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PUC/São Paulo, 2008.

PINEDO, C. J. Q. **História do número zero**. Revista Tecnologia & Humanismo, v. 18, n. 26, p. 20-33, 2004.

PIRONEL, M. **A avaliação integrada no processo de ensino-aprendizagem da Matemática**. 2002. 193 f. Dissertação (Mestrado)-Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2002.

PONTE, J. P. **Investigar a nossa própria prática. Refletir e investigar sobre a prática profissional**, p. 5-28, 2002.

PONTE, J. P. D; SERRAZINA, L. **Professores e formadores investigam a sua própria prática: o papel da colaboração**. ZETETIKÉ. Revista de Educação Matemática, 11(2), 9-55, 2003.

PONTE, J. P. **Investigar a nossa própria prática: uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional**. PNA, v. 2, n. 4, p. 153-180, 2008.

SALVADOR, C. M. A.; NACARATO, A. M. **Sentidos atribuídos ao zero por alunos da 6ª série**. REUNIÃO ANUAL DA ANPEd, v. 26, 2003 (a).

SALVADOR, C. M.; MENDES, A. **Os números relativos em sala de aula: um olhar para o zero**. 2003 (b).

SALWI, D. M. **Story of Zero**. New Delhi: CBT, 1988.

SANTANA, E. R. S. **Adição e subtração: o suporte didático influencia a aprendizagem do estudante**. Ilhéus: Editus, 2012.

SEIFE, C. **Zero: the biography of a dangerous idea**. Penguin, 2000.

SEVERINO, A. J. Metodologia do trabalho científico. São Paulo: Cortez 2002.

SMOLE, K. S.; MUNIZ, C. A. A matemática em sala de aula: reflexões e propostas para os anos iniciais do ensino fundamental. Porto Alegre: Penso, 2013

SOUZA, J. C. M. **Folclore da Matemática**. Rio de Janeiro: Conquista, 1954.

STEWART, I. **O fantástico mundo dos números**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor Ltda, 2016.

TRACANELLA, A. T. Uma breve contextualização histórica e os sentidos do número zero. **Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática**. v. 20, p. 1-12, 2016.

TRACANELLA, A. T.; BIANCHINI, B. L. Os conhecimentos docentes e as operações matemáticas envolvendo o zero. *In*. V Encontro de Produção Discente dos Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática e Afins São Paulo. 2017. **Revista de Produção Discente em Educação de Matemática**. v.6, n.1, pp.121-131, 2017.

TRACANELLA, A. T. **O sistema de numeração decimal: um estudo sobre o valor posicional**. 2018. 181 f. Trabalho de conclusão de curso (Dissertação) - Programas de Estudos de Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo, 2018.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. Tradução Paulo Henrique Colonese. Porto Alegre: Artmed, 2009.