

DIOGO RAMALHO DE OLIVEIRA

**CONTROLE H_∞ CHAVEADO PARA SISTEMAS NÃO LINEARES
INCERTOS DESCRITOS POR MODELOS FUZZY T-S CONSIDERANDO
REGIÃO DE OPERAÇÃO E SATURAÇÃO DO SINAL DE CONTROLE**

DIOGO RAMALHO DE OLIVEIRA

**CONTROLE \mathcal{H}_∞ CHAVEADO PARA SISTEMAS NÃO LINEARES
INCERTOS DESCRITOS POR MODELOS FUZZY T-S CONSIDERANDO
REGIÃO DE OPERAÇÃO E SATURAÇÃO DO SINAL DE CONTROLE**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia do Câmpus de Ilha Solteira - UNESP como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Especialidade: Automação.

Prof. Dr. Marcelo C. Minhoto Teixeira
Orientador

Ilha Solteira
2017

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

Oliveira, Diogo Ramalho de.
O48c Controle \mathcal{H}_∞ chaveado para sistemas não lineares incertos descritos por modelos fuzzy T-S considerando região de operação e saturação do sinal de controle / Diogo Ramalho de Oliveira. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2017
106 f. :il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de Conhecimento: Automação, 2017

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Inclui bibliografia

1. Controle Chaveado. 2. Controle \mathcal{H}_∞ . 3. Modelo fuzzy Takagi-Sugeno (T-S). 4. Saturação do sinal de controle. 5. Funções de pertinência desconhecidas. 6. Desigualdade matricial linear (LMI).



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: Controle H chaveado para sistemas não lineares incertos descritos por modelos fuzzy T-S considerando região de operação e saturação do sinal de controle

AUTOR: DIOGO RAMALHO DE OLIVEIRA

ORIENTADOR: MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: AUTOMAÇÃO pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNCAO
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. RODRIGO CARDIM
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. VALTER JUNIOR DE SOUZA LEITE
Departamento de Engenharia Mecatrônica / Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Prof. Dr. CRISTIANO QUEVEDO ANDREA
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia / Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Ilha Solteira, 31 de maio de 2017

Aos meu pais, Fernando e Rosimeire.

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos a todos os familiares, amigos, professores e funcionários da FEIS-UNESP, que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, dedico meus agradecimentos:

- A Deus, por ter me dado a vida, a saúde e uma família maravilhosa;
- Aos meus pais, Fernando e Rosimeire, por abdicarem dos seus próprios sonhos para que eu tivesse a oportunidade de realizar os meus. Agradeço todo o amor e empenho que tiveram na minha formação. Ao meu irmão, Caio, pelo carinho e incentivo;
- Ao Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, pela amizade, pela confiança e pelos agradáveis momentos de convivência durante estes anos. Sou muito grato pela excelente orientação, dada com sabedoria, humildade e determinação;
- Ao Prof. Dr. Edvaldo Assunção, pela amizade e por me apresentar esta área de pesquisa durante a minha iniciação científica na graduação. Sou grato também pela colaboração no desenvolvimento deste trabalho e pelo acompanhamento nas bancas examinadoras;
- Ao Prof. Dr. Rodrigo Cardim, pela amizade, pela colaboração no desenvolvimento deste trabalho e pelo acompanhamento nas bancas examinadoras;
- Ao Prof. Dr. Jean Marcos de Souza Ribeiro, sempre solícito nos momentos necessários;
- Aos meus amigos e companheiros que trabalharam comigo no laboratório de pesquisa em controle (LPC): Uiliam, Leonardo, Alexandre, Edson, Wallysonn, Emerson, Gilberto, Adalberto, Veronese, Lázaro, Mario, Ivan, Ariel, Bruno, Igor e Leidy;
- À Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (FEIS-UNESP), local onde estudei durante a graduação e o doutorado;
- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq (Processo: 142035/2013-0) e à FAPESP (Processo: 2011/17610-0) pelo apoio financeiro.

Talvez eu não tenha lembrado de todos neste momento, mas pode ter a certeza que eu não os esqueci.

RESUMO

Esta tese propõe projetos de controle \mathcal{H}_∞ chaveado para uma classe de sistemas não lineares incertos descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) com funções de pertinência desconhecidas. Os projetos de controle necessitam somente dos limites inferiores e superiores das não linearidades do sistema, que podem depender de parâmetros incertos da planta. Em diversas aplicações práticas, em virtude das restrições operacionais dos equipamentos, no projeto de controle é necessário considerar que a lei de controle está sujeita à saturação do atuador. Primeiramente, utilizando uma metodologia encontrada na literatura para resolver o problema da saturação do atuador, propõe-se uma lei de controle chaveada que escolhe um ganho do controlador de realimentação do vetor de estado, que pertence a um conjunto de ganhos conhecidos, que minimiza a derivada da função de Lyapunov do tipo quadrática. Este procedimento elimina a necessidade de encontrar as expressões das funções de pertinência para implementar a lei de controle, garante um desempenho \mathcal{H}_∞ ao sistema realimentado e assegura que as trajetórias do vetor de estado permanecem dentro de uma região de operação na qual o modelo fuzzy T-S é válido. Adicionalmente, adota-se uma outra metodologia para resolver o problema da saturação do atuador, que utiliza o sinal de controle para compor um vetor de estado expandido. Desta forma, os limites do sinal de controle fazem parte da região de operação na qual o sistema não linear incerto é exatamente representado via modelos fuzzy T-S. Uma lei de controle chaveada, que utiliza a realimentação do vetor de estado expandido, é proposta. As condições de projeto evitam a presença de uma possível descontinuidade do sinal de controle, eliminam a necessidade de obter as expressões das funções de pertinência para implementar a lei de controle, garantem um desempenho \mathcal{H}_∞ e asseguram que as trajetórias do vetor de estado e do sinal de controle permanecem dentro de uma região de operação na qual o modelo fuzzy T-S é válido. Por fim, três exemplos são apresentados. O primeiro exemplo estuda o controle de um sistema caótico denominado Lorenz. Mostra que, para distúrbios de grande magnitude, os procedimentos propostos apresentaram melhores resultados do que os obtidos com outro método recentemente encontrado na literatura, que considera o pleno acesso às funções de pertinência. No segundo exemplo, uma implementação prática em um sistema de controle de uma suspensão ativa de bancada, considerando uma mola não linear e falha no atuador, confirma a eficácia da abordagem proposta. O último exemplo utiliza um pêndulo invertido para abordar o problema de controle considerando a estabilidade local do sistema. As simulações ilustram que o esquema proposto, que utiliza o vetor de estado expandido, é capaz de evitar uma possível descontinuidade do sinal de controle.

Palavras-chave: Controle chaveado. Controle \mathcal{H}_∞ . Modelo fuzzy Takagi-Sugeno (T-S). Saturação do sinal de controle. Funções de pertinência desconhecidas. Desigualdade matricial linear (LMI).

ABSTRACT

This thesis proposes local \mathcal{H}_∞ switched control designs for a class of uncertain nonlinear plants described by Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy models with unknown membership functions. The control designs require only the lower and upper bounds of the system nonlinearities and of the system linear parameters, which can depend on uncertain parameters. In practical applications, due to the operational restrictions of the equipments, in the control design, it is necessary to consider that the control law is subject to actuator saturation. First, using a methodology found in the literature to solve the actuator saturation problem, one proposes a switched control law that chooses a state-feedback controller gain, which belongs to a given set of gains, that minimizes the time derivative of a quadratic Lyapunov function. This procedure eliminates the necessity of finding the membership function expressions to implement the control law, guarantees an \mathcal{H}_∞ performance and ensures that the state trajectory remains within a region in which the T-S fuzzy model is valid. In addition, the actuator saturation problem is approached with another methodology, using the control signal to compose an extended state vector. Then, the region in which the uncertain nonlinear system is exactly represented via T-S fuzzy models is composed by the bounds of the control signal. A switched control law, which chooses an extended state-feedback controller gain, is proposed. The design conditions avoid the presence of a possible discontinuity of the control signal, eliminate the necessity of finding the membership function expressions to implement the control law, guarantee an \mathcal{H}_∞ performance and ensure that the state trajectory and the control signal remain within a region in which the T-S fuzzy model is valid. Finally, three examples are presented. The first example studies the control of a chaotic Lorenz system. It shows that, for disturbances with large magnitude, the proposed procedures provided better results than the obtained with another recent method found in the literature, that considers full access to the membership functions. In the second example, a practical implementation of an active suspension control system, considering a nonlinear spring and an actuator fault, confirms the effectiveness of the proposed approach. The last example uses an inverted pendulum system to address the local stability control problem. The simulations illustrate that the control scheme, which uses the extended state vector, is able to avoid a possible discontinuity of the control signal.

Keywords: Switched control. \mathcal{H}_∞ control. Takagi-Sugeno (T-S) fuzzy model. Control signal saturation. Unknown membership functions. Linear matrix inequality (LMI).

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Interpretação gráfica da função $\text{sat}(u_k(t))$, $k \in \mathbb{K}_{n_u}$	22
Figura 2	Relações de inclusão entre os conjuntos \mathcal{X} , $\mathcal{L}(L_j)$ e $\mathcal{E}(V, v_0)$, e a trajetória do vetor de estado $x(t)$ para $w(t) = 0$ e $t \geq 0$	26
Figura 3	Relações de inclusão entre os conjuntos \mathcal{X} , $\mathcal{L}(L_j)$ e $\mathcal{E}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon)$, e a trajetória do vetor de estado $x(t)$ para $w(t) = 0$ e $t \geq 0$	28
Figura 4	Relações de inclusão entre os conjuntos \mathcal{X} , $\mathcal{L}(L_j)$, $\mathcal{E}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon)$ e $\mathcal{E}(V, \epsilon_0)$, e a trajetória do vetor de estado $x(t)$ para $w(t) \in \mathcal{W}$ e $t \geq 0$	28
Figura 5	Comparação entre os métodos propostos no Teorema 3 (LMIs (70) e (25)), no Corolário 1 (LMIs (83) e (25)) e em (LEE et al., 2015b).	50
Figura 6	Comportamento dinâmico do sistema realimentado (2), (10), (86)-(87) e (93): a trajetória do vetor de estado $x(t)$, a lei de controle chaveada (10), o distúrbio externo $w(t)$, a energia do sistema $V(x(t))$ e a relação entre $\frac{\int_0^\infty y(t)^T y(t) dt}{\int_0^\infty w(t)^T w(t) dt}$ e γ	52
Figura 7	Comportamento dinâmico do sistema realimentado (2), (10), (86)-(87) e (94): a trajetória do vetor de estado $x(t)$, a lei de controle chaveada (10), o distúrbio externo $w(t)$, a energia do sistema $V(x(t))$ e a relação entre $\frac{\int_0^\infty y(t)^T y(t) dt}{\int_0^\infty w(t)^T w(t) dt}$ e γ	53
Figura 8	Sistema de suspensão ativa fabricado pela Quanser [®] , pertencente ao LPC-FEIS-UNESP.	54
Figura 9	Modelo esquemático do sistema de suspensão ativa.	55
Figura 10	Resposta temporal prática para a varredura em frequência do sistema de suspensão ativa em malha aberta e em malha fechada, com falha no atuador.	59
Figura 11	Comportamento dinâmico do sistema de pêndulo invertido (103) utilizando a lei de controle chaveada (10): a trajetória do vetor de estado $x(t)$, a lei de controle chaveada (10) e a energia do sistema $V(x(t))$	62

Figura 12	Interpretação gráfica da função $\text{sat}(u_k(t))$, $k \in \mathbb{K}_{n_u}$, com destaque para a região linear da saturação (linha contínua grossa em azul).	65
Figura 13	Esquema de controle com realimentação do vetor de estado expandido.	66
Figura 14	Relação de inclusão entre os conjuntos \mathcal{S} e $\tilde{\mathcal{E}}(V, v_0)$, e a trajetória do vetor de estado expandido $\tilde{x}(t)$ para $w(t) = 0$ e $t \geq 0$	71
Figura 15	Relação de inclusão entre os conjuntos \mathcal{S} e $\tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon)$, e a trajetória do vetor de estado $\tilde{x}(t)$ para $w(t) = 0$ e $t \geq 0$	73
Figura 16	Relações de inclusão entre os conjuntos \mathcal{S} , $\tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon)$ e $\tilde{\mathcal{E}}(V, \epsilon_0)$, e a trajetória do vetor de estado $\tilde{x}(t)$ para $w(t) \in \mathcal{W}$ e $t \geq 0$	73
Figura 17	Comparação entre os métodos propostos no Teorema 3 (LMIs (70) e (25)), no Teorema 6 (LMIs (137) e (127)), no Corolário 1 (LMIs (83) e (25)) e em (LEE et al., 2015b).	86
Figura 18	Comportamento dinâmico do sistema (2), (86)-(87) e (156) utilizando a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (124) e (155): a trajetória do vetor de estado $x(t)$, o sinal de controle $u(t)$, a energia do sistema $V(\tilde{x}(t))$ e a relação entre $\frac{\int_0^\infty y(t)^T y(t) dt}{\int_0^\infty w(t)^T w(t) dt}$ e γ	88
Figura 19	Comportamento dinâmico do sistema (2), (86)-(87) e (157) utilizando a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (124) e (155): a trajetória do vetor de estado $x(t)$, o sinal de controle $u(t)$, a energia do sistema $V(\tilde{x}(t))$ e a relação entre $\frac{\int_0^\infty y(t)^T y(t) dt}{\int_0^\infty w(t)^T w(t) dt}$ e γ	89
Figura 20	Resposta temporal prática para a varredura em frequência do sistema de suspensão ativa em malha aberta e em malha fechada (utilizando a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (124) e (159)), com falha no atuador.	93
Figura 21	Comportamento dinâmico do sistema de pêndulo invertido (103) utilizando o esquema de controle da Figura 13 e a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (124) e (163): a trajetória do vetor de estado $x(t)$, o sinal de controle $u(t)$ e a energia do sistema $V(\tilde{x}(t))$	95

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Parâmetros do sistema de suspensão ativa.	56
Tabela 2	Comparação entre os métodos propostos em: Teorema 3, Teorema 6, Corolário 1 e (LEE et al., 2015b), considerando o sistema caótico Lorenz.	86
Tabela 3	Comparação entre os métodos propostos no Teorema 3 e no Teorema 6, considerando o sistema de suspensão ativa.	92
Tabela 4	Comparação entre os métodos propostos no Teorema 1 e no Teorema 4, considerando o sistema de suspensão pêndulo invertido. . .	94

LISTA DE SÍMBOLOS

I	Matriz identidade com dimensão apropriada.
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais.
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Conjunto das matrizes reais de dimensão $m \times n$.
\mathbb{K}_r	Conjunto $\{1, 2, \dots, r\}$, $r \in \mathbb{N}$.
M^T	Transposto da matriz real M .
$M \geq (>)0$	Matriz M simétrica e semi-definida (definida) positiva.
$M \leq (<)0$	Matriz M simétrica e semi-definida (definida) negativa.
$\text{co}\{\cdot\}$	Combinação convexa.
$\text{diag}\{M_1, \dots, M_r\}$	Matriz bloco diagonal formada pelas matrizes M_1, \dots, M_r .
*	Bloco simétrico de uma matriz simétrica.
Λ_r	Simplex unitário $\Lambda_r = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^r : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1, i \in \mathbb{K}_r \right\}$.
M_z	$M_z = \sum_i^r \alpha_i M_i$, $\alpha \in \Lambda_r$
$\ \xi\ _2^2$	Quadrado da norma de uma trajetória $\xi(t)$, igual a $\int_{t=0}^{\infty} \xi(t)^T \xi(t) dt$ para tempo contínuo.
\mathcal{L}_2	Conjunto de todas as trajetórias $\xi(t)$ tais que $\ \xi\ _2^2 < \infty$.
$\det(M)$	Determinante da matriz M .
\in	Pertence.
\subset	Está contido.
\forall	Para todo.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Objetivos	17
1.2	Estrutura da tese	18
1.3	Notações e ferramentas computacionais	19
2	CONCEITOS FUNDAMENTAIS	21
2.1	Sistema não linear incerto sujeito à saturação do sinal de controle e distúrbio externo	21
2.2	Representação exata do sistema não linear incerto através do modelo fuzzy T-S	22
2.3	Candidata a função de Lyapunov e o conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(V, v_0)$	23
2.4	Lei de controle chaveada sujeita à saturação	23
2.5	O problema da estabilidade considerando a região de operação e distúrbio nulo	25
2.6	O problema de controle \mathcal{H}_∞ considerando a região de operação	26
2.7	Relações de inclusão entre os conjuntos da região de operação	29
2.8	Expansão do volume do conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(V, 1)$	30
3	CONTROLE CHAVEADO PARA SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS DESCRITOS POR MODELOS FUZZY T-S CONSIDERANDO REGIÃO DE OPERAÇÃO E SATURAÇÃO DO SINAL DE CONTROLE	33
3.1	Projeto de controle chaveado para o problema da estabilidade local	34
3.1.1	Resultados preliminares	34
3.1.2	Projeto de controle chaveado: condições de estabilidade local	35
3.1.3	Projeto de controle chaveado: condições de estabilidade local com taxa de decaimento	36
3.2	Projeto de controle \mathcal{H}_∞ chaveado considerando região de operação	37

3.2.1	Resultados preliminares	38
3.2.2	Projeto de controle \mathcal{H}_∞ chaveado	42
3.2.3	Sobre os parâmetros relacionados ao projeto de controle	46
3.3	Resultados adicionais utilizados para comparação	46
3.3.1	Projeto de controle \mathcal{H}_∞ utilizando um único ganho de realimentação	46
3.3.2	Projeto de controle \mathcal{H}_∞ proposto em (LEE et al., 2015b)	48
3.4	Exemplos	48
3.4.1	Exemplo comparativo: sistema caótico Lorenz	48
3.4.2	Implementação prática utilizando um sistema de suspensão ativa de bancada com falha no atuador	53
3.4.3	Exemplo ilustrativo: pêndulo invertido	59
3.5	Conclusões parciais	62
4	SISTEMA NÃO LINEAR INCERTO SUJEITO À SATURAÇÃO DO ATUADOR UTILIZANDO O VETOR DE ESTADO EXPANDIDO	64
4.1	A região de operação \mathcal{U} na qual o sinal de controle não apresenta saturação	65
4.2	Esquema de controle utilizando realimentação do vetor de estado expandido	66
4.3	Representação exata do sistema não linear incerto através do modelo fuzzy T-S	67
4.4	Candidata a função de Lyapunov e o conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(V, v_0)$	68
4.5	Lei de controle utilizando o vetor de estado expandido	68
4.5.1	Lei de controle dependente das funções de pertinência	69
4.5.2	Lei de controle chaveada	69
4.6	O problema da estabilidade considerando a região de operação expandida e distúrbio nulo	70
4.7	O problema de controle \mathcal{H}_∞ considerando a região de operação expandida	71
4.8	Relação de inclusão entre os conjuntos da região de operação expandida	73
4.9	Expansão do volume do conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(V, 1)$	74

5	CONTROLE CHAVEADO PARA SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS DESCRITOS POR MODELOS FUZZY T-S CONSIDERANDO REGIÃO DE OPERAÇÃO EXPANDIDA, REALIMENTAÇÃO DO VETOR DE ESTADO EXPANDIDO E SATURAÇÃO DO SINAL DE CONTROLE	76
5.1	Resultados preliminares	76
5.2	Projeto de controle chaveado para o problema da estabilidade local	78
5.2.1	Projeto de controle chaveado: condição de estabilidade local	78
5.2.2	Projeto de controle chaveado: condição de estabilidade local com taxa de decaimento	79
5.3	Projeto de controle \mathcal{H}_∞ chaveado considerando região de operação expandida	80
5.4	Exemplos	84
5.4.1	Exemplo comparativo: sistema caótico Lorenz	84
5.4.2	Implementação prática utilizando um sistema de suspensão ativa de bancada com falha no atuador	90
5.4.3	Exemplo comparativo: pêndulo invertido	92
5.5	Conclusões Parciais	96
6	CONCLUSÕES	97
6.1	Perspectivas futuras	98
6.2	Publicações	99
6.2.1	Artigos completos publicados em periódicos	99
6.2.2	Artigos completos publicados em anais de congressos	99
	REFERÊNCIAS	102

1 INTRODUÇÃO

Uma ampla classe de sistemas não lineares pode ser descrita exatamente por modelos fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) (TAKAGI; SUGENO, 1985; TANIGUCHI et al., 2001) em uma dada região de operação, através de uma combinação de modelos lineares locais por meio de funções de pertinência fuzzy não lineares. A região de operação geralmente é uma região limitada no espaço de estados e pode-se assegurar que a planta é representada exatamente por um modelo fuzzy T-S somente nesta região. Com base na compensação distribuída paralela (WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1996) e nas desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMIs), diferentes técnicas de projeto de controle foram propostas nas últimas décadas para o controle de sistemas não lineares representados através de modelos fuzzy T-S (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998; TEIXEIRA; ZAK, 1999; TANIGUCHI et al., 2001; TANAKA; WANG, 2001; TUAN et al., 2001; LIU; ZHANG, 2003; FANG et al., 2006; DELMOTTE; GUERRA; KSANTINI, 2007; MONTAGNER; OLIVEIRA; PERES, 2009; CHEN et al., 2012; LI et al., 2012; SANTIM et al., 2012; CAMPOS et al., 2013; CHADLI; KARIMI, 2013; LIU; CAO; SHI, 2013; SOUZA et al., 2014; MÁRQUEZ et al., 2017).

A região na qual o modelo fuzzy T-S é definido é um tema importante no estudo de sistemas não lineares. Em (KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2013) é enfatizado que o modelo fuzzy T-S apenas descreve com precisão a dinâmica original do sistema não linear em uma região limitada do espaço de estados, definida como o domínio de validade. Desta forma, a imprecisão ao utilizar um modelo fuzzy T-S pode ser a origem de um desempenho insatisfatório, ou até mesmo a instabilidade, do sistema realimentado. Além disso, as condições operacionais práticas (como a região de segurança e as limitações do atuador), muitas vezes, implicam que o sistema realimentado opera em uma região limitada do espaço de estados. Estas condições operacionais podem ser incorporadas ao domínio de validade (KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2013). Ou seja, um bom desempenho do sistema controlado pode ser prejudicado devido à representação imprecisa do sistema não linear através do modelo fuzzy T-S, porque geralmente a região de operação e as restrições práticas, inerentes às plantas ou atuadores, são negligenciadas nos projetos de controle (KLUG et al., 2015).

Por este motivo, diversos trabalhos estudam a estabilidade local de sistemas não lineares descritos por modelo fuzzy T-S. Para avaliar a estabilidade local é necessário determinar se existe uma vizinhança próxima ao ponto de equilíbrio, chamado domínio de atração (KHALIL, 2001), de tal forma que todas as trajetórias do sistema, a partir de um ponto inicial no domínio de atração, convergem assintoticamente para o ponto de equilíbrio. Trabalhos como (KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2013; BERNAL; GUERRA, 2010; GUERRA et al., 2011; PAN et al., 2012; LEE; PARK; JOO, 2012; LEE; JOO; TAK, 2014, 2015a; LEE et al., 2015b) abordam o problema da estabilidade local, propondo métodos que estabilizam o sistema realimentado e garantem que as trajetórias do vetor de estado permanecem dentro da região de operação na qual o modelo fuzzy T-S é válido. Outros trabalhos, como por exemplo (TSENG; CHEN, 2006; NGUYEN; DAMBRINE; LAUBER, 2014; KLUG et al., 2015; ALVES et al., 2016b), consideram também que o atuador está sujeito à saturação.

No entanto, para um sistema não linear representado via modelo fuzzy T-S, alguns problemas podem dificultar uma implementação prática. Geralmente, o projeto de controle assume que as funções de pertinência são completamente conhecidas. Na prática, as funções de pertinência podem depender de variáveis de premissas imensuráveis ou parâmetros incertos. Por esta razão, é crescente o número de trabalhos que estudam métodos que permitem utilizar modelos fuzzy T-S com incertezas nas funções de pertinência ou nas variáveis de premissa. Um projeto de filtro \mathcal{H}_∞ para sistemas fuzzy T-S com funções de pertinência desconhecidas, ou parcialmente desconhecidas, foi proposto em (LI; YANG, 2013). Considerando que as funções de pertinência são imensuráveis ou desconhecidas, (LI; YANG, 2014) aborda o problema de detecção de falhas para sistemas fuzzy T-S, baseado em um filtro de detecção de falhas com ganhos variáveis. Em (ASEMANI; MAJD, 2013) são apresentados resultados relativos ao projeto de controladores \mathcal{H}_∞ baseados em observadores para sistemas fuzzy T-S, utilizando a estimativa das variáveis premissas. Um projeto de controle chaveado para uma classe de plantas não lineares incertas foi proposto em (SOUZA et al., 2014) e esta metodologia elimina a necessidade de encontrar as expressões das funções de pertinência para implementar a lei de controle.

Em busca de métodos cada vez mais relaxados, diferentes projetos de controle foram apresentados nos últimos anos (ver, por exemplo, (TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003; FANG et al., 2006; DELMOTTE; GUERRA; KSANTINI, 2007; DONG; YANG, 2008; MONTAGNER; OLIVEIRA; PERES, 2009; CHEN et al., 2012; CAMPOS et al., 2013; SOUZA et al., 2014)). Em (CHEN et al., 2012) é proposto um controlador fuzzy chaveado, baseado em uma função de Lyapunov quadrática por partes do tipo mínimo, e as condições apresentadas flexibilizaram os resultados conhecidos na literatura. Note que o controle chaveado é um tema recorrente em (CHEN et al., 2012) e (SOUZA et al., 2014), pois é possível proporcionar relaxação no projeto de controle e ainda obter um melhor

desempenho do sistema como um todo, quando comparado com os resultados obtidos com apenas um controlador.

Ao utilizar uma lei de controle chaveada, é possível que ocorra um fenômeno indesejado conhecido como *chattering*. O *chattering* é caracterizado por um chaveamento com frequência infinitamente rápida (DEAECTO; SOUZA; GEROMEL, 2014). Em uma implementação prática, este fenômeno deve ser evitado, pois pode causar danos aos equipamentos, especialmente aos atuadores do sistema. Diversas estratégias de controle que visam evitar a ocorrência do *chattering* podem ser encontradas na literatura, em especial, pode-se destacar a técnica de controle chaveado suave apresentada em (ALVES et al., 2016b, 2016a). Esta técnica de controle utiliza o conceito de mínimo suave, garantindo que a lei de controle chaveada não apresenta *chattering*. Como principal desvantagem deste método, tem-se que as condições de projeto garantem a estabilidade “*ultimate bounded*” do sistema realimentado, assegurando que as trajetórias do vetor de estado convirjam para uma região em torno do ponto de equilíbrio (CORLESS; LEITMANN, 1981). Sendo que esta região “*ultimate bounded*” é pequena o suficiente para garantir um bom desempenho do sistema, pois ela depende de parâmetros de suavização escolhidos pelo projetista.

Para sistemas não lineares sujeitos a distúrbios externos, o controle \mathcal{H}_∞ é uma técnica que mitiga o efeito do distúrbio externo (ou entrada exógena) na saída do sistema e, conseqüentemente, melhora o desempenho do sistema controlado. No entanto, a saturação do atuador é um problema inerente na maioria dos projetos de controle, inclusive no controle \mathcal{H}_∞ . Então, (TSENG; CHEN, 2006) propõe um projeto de controle fuzzy \mathcal{H}_∞ para sistemas não lineares sujeitos à saturação do atuador. As condições de projeto garantem que o sistema realimentado, sujeito a distúrbio externo, tenha um desempenho \mathcal{H}_∞ , mas não há garantia de que as trajetórias do vetor de estado permanecerão dentro da região de operação.

Em (LEE et al., 2015b) é proposto um procedimento de projeto de controle \mathcal{H}_∞ para sistemas não lineares sujeitos a distúrbios externos. No projeto de controle \mathcal{H}_∞ , normalmente, considera-se que o distúrbio externo possui energia limitada. Entretanto, motivado por (WANG; LIU, 2013), o projeto de controle proposto em (LEE et al., 2015b) considera que o distúrbio externo possui magnitude limitada, além da habitual energia limitada. Esta restrição de magnitude é necessária para que as condições de projeto garantam que as trajetórias do vetor de estado estarão confinadas dentro da região de operação na qual o moledor fuzzy T-S é válido. Mais detalhes sobre o projeto de controle \mathcal{H}_∞ proposto em (LEE et al., 2015b) serão apresentados no próximo capítulo da tese.

1.1 Objetivos

Este trabalho apresenta contribuições ao controle chaveado para um classe de sistemas não lineares incertos sujeito a distúrbios de energia limitada e saturação no atuador. Resumidamente, pode-se destacar os seguintes tópicos que são abordados ao longo da tese:

1. Controle \mathcal{H}_∞ : O controle \mathcal{H}_∞ é o principal foco do trabalho. Motivado pelo método proposto em (LEE et al., 2015b), as condições de projeto garantem um desempenho \mathcal{H}_∞ ao sistema realimentado e asseguram que as trajetórias do vetor de estado permanecem dentro da região de operação na qual o modelo fuzzy T-S é válido.
2. Lei de controle chaveada para sistemas não lineares incertos com funções de pertinência desconhecidas: Baseado em (TANIGUCHI et al., 2001) e (SANTIM et al., 2012), para representar a dinâmica do sistema não linear incerto, é necessário apenas conhecer os limites inferiores e superiores das não linearidades do sistema e dos termos lineares, que são calculados considerando a região de operação no espaço de estados e o conjunto conhecido de parâmetros incertos. Os modelos fuzzy T-S obtidos com este procedimento apresentam modelos locais conhecidos e pesos normalizados desconhecidos. A lei de controle chaveada seleciona um ganho do controlador de realimentação do vetor de estado, que minimiza a derivada temporal de uma função Lyapunov do tipo quadrática. Este procedimento elimina a necessidade de encontrar as expressões das funções de pertinência para implementar a lei de controle, o que é uma vantagem pois estes termos podem conter parâmetros incertos ou mesmo ter expressões longas e/ou complexas.
3. Saturação do sinal de controle: Em diversas aplicações práticas, em virtude das restrições operacionais dos equipamentos, no projeto de controle é necessário considerar que a lei de controle está sujeita à saturação do atuador. A saturação do sinal de controle é tratada de duas formas diferentes ao longo deste trabalho. Na primeira abordagem, utiliza-se uma técnica proposta em (HU; LIN; CHEN, 2002; CAO; LIN, 2003), na qual o sinal de controle sujeito à saturação pode ser representado através de uma combinação convexa dos valores do sinal de controle saturado e não saturado. Esta representação do sinal de controle sujeito à saturação só é válida se o vetor de estado permanecer dentro de uma região limitada do espaço de estados. Já na segunda abordagem, utiliza-se um vetor de estado expandido, no qual o sinal de controle é incluído. Desta forma, o espaço de estados é expandido e os limites do sinal de controle agora fazem parte da região de operação. As condições de projeto garantem que as trajetórias do vetor de estado expandido permanecem

dentro desta nova região de operação e conseqüentemente o sinal de controle fica restrito aos limites de saturação.

4. Mitigar os efeitos indesejados do *chattering*: Ao utilizar a segunda abordagem proposta para lidar com a saturação do atuador, é necessário utilizar um integrador para obter o sinal de controle. A utilização do integrador não impede o chaveamento com frequência rápida, que caracteriza o *chattering*, entretanto é possível eliminar uma possível descontinuidade do sinal de controle, mitigando um dos efeitos indesejados do *chattering*. De certa forma, pode-se considerar que ocorre uma suavização do sinal de controle. Entretanto, as condições de projeto garantem que a origem é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, ao contrário do controle suave proposto em (ALVES et al., 2016b, 2016a), que assegura a estabilidade “*ultimate bounded*” ao sistema realimentado.

1.2 Estrutura da tese

A estrutura desta tese é a seguinte:

- Capítulo 1: Introduce o tema abordado na tese. Apresenta os objetivos gerais do trabalho e a organização do texto. Por fim, para facilitar o desenvolvimento do conteúdo, algumas notações são definidas.
- Capítulo 2: Expõe os conceitos fundamentais necessários para a elaboração dos próximos capítulos, como a representação exata do sistema não linear incerto através do modelo fuzzy T-S, a região de operação na qual esta representação é válida e uma lei de controle chaveada utilizando a realimentação do vetor de estado. Além disso, são definidos dois problemas de controle que serão tratados no capítulo seguinte.
- Capítulo 3: Apresenta o procedimento de projeto de controle chaveado, descrito em (ALVES et al., 2016b), que garante a estabilidade local do sistema realimentado. Em seguida, a primeira importante contribuição da tese é apresentada: um projeto de controle \mathcal{H}_∞ chaveado para uma classe de sistemas não lineares incertos, considerando a região de operação. Adicionalmente, são apresentados três exemplos. O primeiro exemplo mostra uma comparação entre o projeto de controle \mathcal{H}_∞ chaveado proposto e o método apresentado em (LEE et al., 2015b). Os resultados deixam claro que, para um sistema não linear incerto, sujeito a distúrbios de grande magnitude, o procedimento proposto neste trabalho é a melhor opção. Em seguida, no segundo exemplo, uma implementação demonstra a eficácia prática do método, para controlar um sistema de suspensão ativa fabricado pela Quanser[®] (Quanser Innovate Educate, 2010), considerando uma mola não linear e uma falha do atuador.

O último exemplo utiliza um sistema de pêndulo invertido para ilustrar a aplicação do projeto de controle chaveado, descrito em (ALVES et al., 2016b), considerando a estabilidade local do sistema.

- Capítulo 4: Aponta uma outra abordagem ao problema de controle enunciado no Capítulo 2. Nesta nova abordagem, considera-se um novo vetor de estado, composto também pelo sinal de controle. Este novo vetor de estado será denominado de vetor de estado expandido. Novamente são apresentados conceitos fundamentais para a elaboração do próximo capítulo, como a representação exata do sistema não linear incerto através do modelo fuzzy T-S considerando a região de operação expandida e o esquema de controle utilizando a realimentação do vetor de estado expandido. Além disso, são definidos dois problemas de controle que serão tratados no capítulo seguinte.
- Capítulo 5: Propõe diversos procedimentos de projetos de controle chaveado utilizando a realimentação do vetor de estado expandido. Inicialmente, são apresentadas condições de projeto que garantem a estabilidade local do sistema realimentado. Por fim, é apresentado o projeto de controle \mathcal{H}_∞ chaveado considerando a região de operação expandida. Para ilustrar a eficácia dos métodos propostos, são utilizados os três exemplos que foram definidos anteriormente no Capítulo 3.
- Capítulo 6: Apresenta as conclusões finais, as perspectivas futuras e uma lista com as publicações dos trabalhos desenvolvidos ao longo da tese.

1.3 Notações e ferramentas computacionais

Por conveniência, ao longo deste trabalho, as seguintes notações são utilizadas: $\mathbb{K}_r = \{1, 2, \dots, r\}$, $r \in \mathbb{N}$. Para matrizes simétricas, o símbolo $(*)$ denota cada um dos seus blocos simétricos. $I(0)$ representa uma matriz identidade (zero) com dimensão apropriada. $\text{diag}\{M_1, M_2, \dots, M_r\}$ representa uma matriz bloco diagonal formada pelas matrizes M_1, M_2, \dots, M_r . $M_{(l)}$ representa a l -ésima linha de uma matriz M . Denota-se a combinação convexa dos vetores a_i , $i \in \mathbb{K}_r$, por $\text{co}\{a_1, \dots, a_r\}$. $M > 0$ ($M < 0$, $M \geq 0$ e $M \leq 0$) significa que a matriz M é definida positiva (definida negativa, semi-definida positiva, semi-definida negativa), respectivamente. $\|\xi\|_2^2 = \int_{t=0}^{\infty} \xi(t)^T \xi(t) dt$ é o quadrado da norma de uma trajetória $\xi(t)$ para tempo contínuo e \mathcal{L}_2 é o conjunto de todas as trajetórias $\xi(t)$ tais que $\|\xi\|_2^2 < \infty$. Finalmente, M_z representa uma matriz genérica, tal que

$$M_z = \sum_{i=1}^r \alpha_i M_i \quad \text{com} \quad \alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]^T \in \Lambda_r = \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^r : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1, i \in \mathbb{K}_r \right\}. \quad (1)$$

Os resultados numéricos, apresentados ao longo da tese, foram obtidos utilizando o *software* MatLab[®] e o *solver* LMILab, interfaceado pelo YALMIP (LÖFBERG, 2004).

2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Neste capítulo são apresentados os conceitos fundamentais necessários para a elaboração dos próximos capítulos. Inicialmente, define-se o sistema não linear incerto sujeito à saturação do sinal de controle e distúrbio externo, assim como a sua representação exata através do modelo fuzzy T-S. Destacando que esta representação só é válida em uma região restrita do espaço de estados, denominada de região de operação. Por se tratar de um sistema não linear incerto, considera-se que as funções de pertinência não estão disponíveis para realimentação. Logo, propõe-se utilizar uma lei de controle chaveada com realimentação do vetor de estado, que não necessita das funções de pertinência durante a implementação. Por fim, é apresentado o problema da estabilidade local, para o caso do distúrbio nulo, e o problema de controle \mathcal{H}_∞ considerando a região de operação.

2.1 Sistema não linear incerto sujeito à saturação do sinal de controle e distúrbio externo

Considere um sistema não linear incerto, sujeito à saturação do sinal de controle e distúrbio externo de energia limitada, descrito por

$$\dot{x}(t) = f_1(z(t))x(t) + f_2(z(t)) \text{sat}(u(t)) + f_3(z(t))w(t), \quad (2a)$$

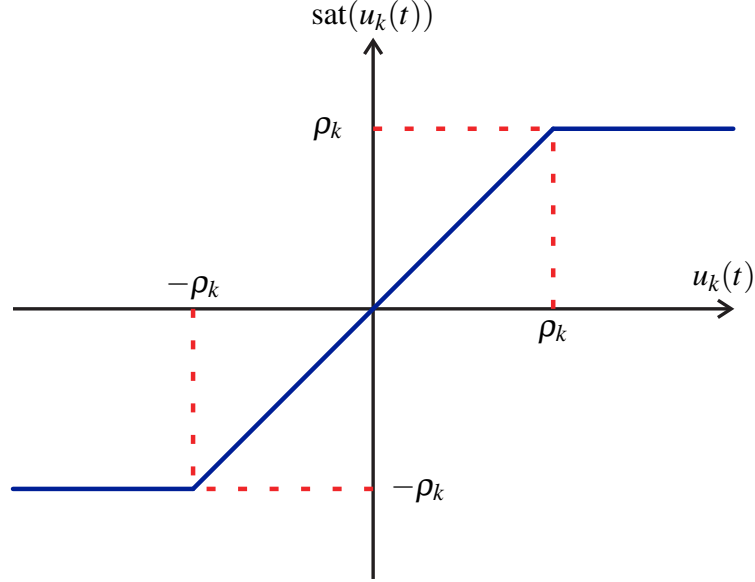
$$y(t) = g_1(z(t))x(t) + g_2(z(t)) \text{sat}(u(t)) + g_3(z(t))w(t), \quad (2b)$$

sendo que $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor de entrada, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ é a entrada exógena com energia limitada tal que $w(t) \in \mathcal{L}_2$ e $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o vetor de saída. A dinâmica do sistema não linear incerto é dada pelas funções não lineares $f_1(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $f_2(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $f_3(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$. Já a saída do sistema é dada pelas funções não lineares $g_1(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$, $g_2(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ e $g_3(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n_w}$. $z(t) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor cujas os elementos $z_l(t)$, $l \in \mathbb{K}_q$, são as variáveis de premissa que dependem do vetor de estado $x(t)$ e de parâmetros incertos ou variáveis desconhecidas, e $\text{sat}(u(t)) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada de controle sujeita à saturação, tal que

$$\text{sat}(u(t)) = \begin{bmatrix} \text{sat}(u_1(t)) \\ \vdots \\ \text{sat}(u_{n_u}(t)) \end{bmatrix}, \quad \text{sat}(u_k(t)) = \begin{cases} -\rho_k, & \text{se } u_k(t) < -\rho_k, \\ u_k(t), & \text{se } |u_k(t)| \leq \rho_k, \\ \rho_k, & \text{se } u_k(t) > \rho_k, \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{K}_{n_u}, \quad (3)$$

sendo que ρ_k , $k \in \mathbb{K}_{n_u}$, são constantes positivas com valores conhecidos. A interpretação gráfica da função $\text{sat}(u_k(t))$, $k \in \mathbb{K}_{n_u}$, pode ser observada na Figura 1.

Figura 1 - Interpretação gráfica da função $\text{sat}(u_k(t))$, $k \in \mathbb{K}_{n_u}$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

2.2 Representação exata do sistema não linear incerto através do modelo fuzzy T-S

Dada uma região de operação \mathcal{X} no espaço de estados definida como segue (KLUG et al., 2015):

$$\mathcal{X} := \{x(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : |R_{(h)}x(t)| \leq \phi_h, h \in \mathbb{K}_p\}, \quad (4)$$

sendo que a matriz $R = [R_{(1)}^T \cdots R_{(p)}^T]^T \in \mathbb{R}^{p \times n_x}$ e o vetor $\phi = [\phi_1 \cdots \phi_p]^T \in \mathbb{R}^p$ são conhecidos. Na região de operação \mathcal{X} , o sistema (2) pode ser representado exatamente por um modelo fuzzy T-S como descrito em (5), (6) e (7) (TANIGUCHI et al., 2001; SOUZA et al., 2014; SANTIM et al., 2012; ALVES et al., 2016b), em que:

$$\begin{aligned} \text{Regra } i: & \text{ SE } z_1(t) \text{ é } \mu_{i1} \text{ e } \dots \text{ e } z_q(t) \text{ é } \mu_{iq}, \\ & \text{ ENTÃO } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i \text{sat}(u(t)) + H_i w(t), \\ y(t) = C_i x(t) + D_i \text{sat}(u(t)) + G_i w(t), \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

sendo que $i \in \mathbb{K}_r$, $l \in \mathbb{K}_q$, μ_{il} é o conjunto fuzzy da regra i correspondente à função $z_l(t)$ e as seguintes matrizes são conhecidas: $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $H_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$, $C_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$, $D_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ e $G_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n_w}$.

A partir de (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998) e das definições dadas em (1), $\dot{x}(t)$ e

$y(t)$ dadas em (5) podem ser escritas como segue:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))(A_i x(t) + B_i \text{sat}(u(t)) + H_i w(t)) = A_z x(t) + B_z \text{sat}(u(t)) + H_z w(t), \quad (6a)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t))(C_i x(t) + D_i \text{sat}(u(t)) + G_i w(t)) = C_z x(t) + D_z \text{sat}(u(t)) + G_z w(t), \quad (6b)$$

sendo

$$\alpha_i(z(t)) = \frac{\mu_{i1}(z_1(t)) \times \cdots \times \mu_{iq}(z_q(t))}{\sum_{i=1}^r (\mu_{i1}(z_1(t)) \times \cdots \times \mu_{iq}(z_q(t)))}, \quad \alpha_i(z(t)) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) = 1, \quad i \in \mathbb{K}_r, \quad (7)$$

e $\mu_{il}(z_l(t)) \geq 0$ é a função de pertinência, em termos de variáveis desconhecidas ou parâmetros incertos, correspondente ao conjunto fuzzy μ_{il} , $i \in \mathbb{K}_r$ e $l \in \mathbb{K}_q$. O elemento α_i do vetor $\alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r]^T \in \Lambda_r$, dado em (1), é o peso normalizado de cada modelo local do sistema $(A_i, B_i, C_i, D_i, G_i, H_i)$ definido em (5), para $i \in \mathbb{K}_r$.

Um procedimento para a representação exata do sistema não linear incerto (2) como o modelo fuzzy T-S descrito em (6) é apresentado em (SANTIM et al., 2012; SOUZA et al., 2014; ALVES et al., 2016b). Os limites inferiores e superiores das não linearidades do sistema e dos termos lineares incertos são calculados considerando uma dada região de operação do vetor de estado e também o conjunto conhecido dos parâmetros incertos da planta. Os modelos fuzzy T-S obtidos com este procedimento apresentam modelos locais conhecidos e pesos normalizados desconhecidos. Este método foi aplicado para controlar um sistema de levitador magnético (SOUZA et al., 2014; ALVES et al., 2016b) e um sistema bola-viga (ALVES et al., 2016b).

2.3 Candidata a função de Lyapunov e o conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(V, v_0)$

Considere a candidata a função de Lyapunov quadrática

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t), \quad (8)$$

sendo que $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ é uma matriz simétrica definida positiva. Para uma dada constante positiva v_0 , define-se o seguinte conjunto elipsoidal:

$$\mathcal{E}(V, v_0) := \{x(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : x(t)^T P x(t) \leq v_0\}. \quad (9)$$

2.4 Lei de controle chaveada sujeita à saturação

O procedimento proposto em (SOUZA et al., 2014) utiliza matrizes simétricas auxiliares \bar{Q}_j , $j \in \mathbb{K}_r$, que são responsáveis por determinar o valor do índice de chaveamento

σ , conforme descrito em (10). Este índice σ seleciona um ganho do controlador de realimentação do vetor de estado, que pertence ao conjunto de ganhos $\{K_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}, j \in \mathbb{K}_r\}$. A lei de controle chaveada é definida da seguinte forma:

$$u(t) = u_\sigma(t) = -K_\sigma x(t), \quad \sigma = \arg^* \min_{j \in \mathbb{K}_r} \{x(t)^T \bar{Q}_j x(t)\}, \quad (10)$$

sendo que $\arg^* \min_{j \in \mathbb{K}_r} \{x(t)^T \bar{Q}_j x(t)\}$ denota o menor índice $\sigma \in \mathbb{K}_r$, tal que $x(t)^T \bar{Q}_\sigma x(t) = \min_{j \in \mathbb{K}_r} \{x(t)^T \bar{Q}_j x(t)\}$.

Seja \mathcal{F} um conjunto composto por matrizes diagonais $F_s \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$, $s \in \mathbb{K}_{2n_u}$, cujos elementos das diagonais são 0 ou 1 (CAO; LIN, 2003). Por exemplo, se $n_u = 2$, então

$$\mathcal{F} = \left\{ F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad (11)$$

e para todo $s \in \mathbb{K}_{2n_u}$, F_s^- denota o elemento de \mathcal{F} associado com F_s , tal que $F_s^- = I - F_s$. Por conveniência, considerando o vetor $\lambda = [\lambda_1 \cdots \lambda_{2n_u}]^T \in \mathbb{R}^{2n_u}$, a seguinte notação é utilizada:

$$F_\lambda = \sum_{s=1}^{2n_u} \lambda_s F_s, \quad F_\lambda^- = \sum_{s=1}^{2n_u} \lambda_s F_s^- \quad \text{com} \quad \lambda \in \Lambda_{2n_u} = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^{2n_u} : \lambda_s \geq 0, \sum_{s=1}^{2n_u} \lambda_s = 1, s \in \mathbb{K}_{2n_u} \right\}. \quad (12)$$

Seja o conjunto $\mathcal{L}(L_j)$ dado por

$$\mathcal{L}(L_j) := \{x(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : |L_{j(k)} x(t)| \leq \rho_k, j \in \mathbb{K}_r, k \in \mathbb{K}_{n_u}\}, \quad (13)$$

sendo que $L_j = [L_{j(1)}^T \cdots L_{j(n_u)}^T]^T \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e $\rho = [\rho_1 \cdots \rho_{n_u}]^T \in \mathbb{R}^{n_u}$ é um vetor conhecido.

Para $x(t) \in \mathcal{L}(L_j)$, $\forall j \in \mathbb{K}_r$, então $x(t) \in \mathcal{L}(L_\sigma)$. De acordo com (CAO; LIN, 2003), tem-se que $\text{sat}(u(t)) = \text{sat}(-K_\sigma x(t)) \in \text{co}\{F_s(-K_\sigma x(t)) + F_s^- L_\sigma x(t)\}$. Consequentemente, usando as notações dadas em (12), $\text{sat}(u(t))$ pode ser representado como:

$$\text{sat}(u(t)) = \sum_{s=1}^{2n_u} \lambda_s (F_s(-K_\sigma x(t)) + F_s^- L_\sigma x(t)) = (-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma) x(t). \quad (14)$$

Substituindo (14) em (6) e usando as notações dadas em (1) e (12), o sistema realimentado pode ser reescrito como segue:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) \left(A_i x(t) + B_i \sum_{s=1}^{2n_u} \lambda_s (F_s(-K_\sigma x(t)) + F_s^- L_\sigma x(t)) + H_i w(t) \right) \\ &= A_z x(t) + B_z (-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma) x(t) + H_z w(t), \end{aligned} \quad (15a)$$

e

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) \left(C_i x(t) + D_i \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s (F_s (-K_\sigma x(t)) + F_s^- L_\sigma x(t)) + G_i w(t) \right) \\ &= C_z x(t) + D_z (-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma) x(t) + G_z w(t). \end{aligned} \quad (15b)$$

2.5 O problema da estabilidade considerando a região de operação e distúrbio nulo

Inicialmente o problema de controle será definido para $w(t) = 0$, ou seja, trata-se apenas do problema da estabilidade local. O objetivo é determinar uma lei de controle que, para $w(t) = 0$ e $t \geq 0$, garanta que a origem seja um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema não linear incerto (2) e o conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(V, v_0)$ seja um conjunto positivamente invariante do domínio de atração (HU; LIN; CHEN, 2002) (ou seja, se $x(0)$ pertence ao conjunto $\mathcal{E}(V, v_0)$, então todas as trajetórias de $x(t)$, $t > 0$, também irão permanecer dentro deste conjunto). Dada a candidata a função de Lyapunov $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$, o conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(V, v_0)$ é considerado um conjunto positivamente invariante do domínio de atração se $\dot{V}(x(t)) < 0$, para $w(t) = 0$ e $x(t) \in \mathcal{E}(V, v_0) \setminus \{0\}$ (HU; LIN; CHEN, 2002).

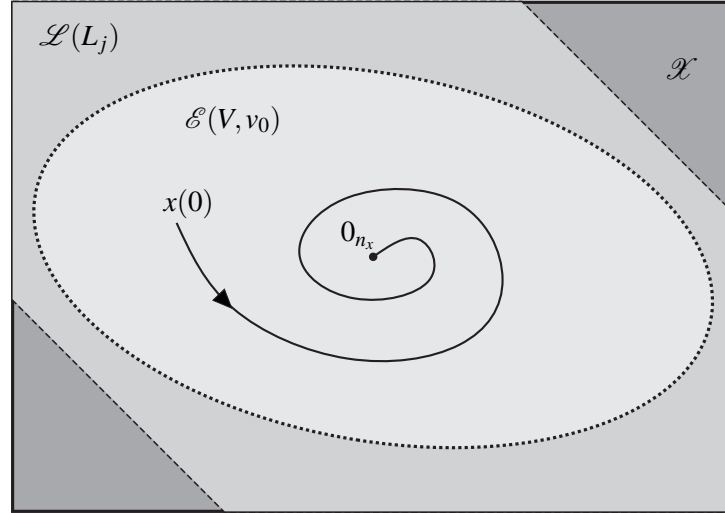
Entenda $x(t) \in \mathcal{E}(V, v_0) \setminus \{0\}$ como $x(t) \in \mathcal{E}(V, v_0)$ mas $x(t) \neq 0$.

Além disso, as seguintes relações de inclusão relacionadas aos conjuntos \mathcal{X} , $\mathcal{L}(L_j)$ e $\mathcal{E}(V, v_0)$ devem ser garantidas:

- $\mathcal{E}(V, v_0) \subset \mathcal{X}$: se $\mathcal{E}(V, v_0)$ é um conjunto positivamente invariante do domínio de atração, considerando a definição da região de operação \mathcal{X} em (4), esta restrição garante que o sistema não linear incerto (2) pode ser exatamente descrito pelo modelo fuzzy T-S dado em (6).
- $\mathcal{E}(V, v_0) \subset \mathcal{L}(L_j)$: se $\mathcal{E}(V, v_0)$ é um conjunto positivamente invariante do domínio de atração, considerando (14), esta restrição garante que o sinal de controle $\text{sat}(u(t))$ pode ser representado por $\text{sat}(u(t)) = (-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma) x(t)$. Ou seja, o sistema realimentado é dado por (15).

Estas propriedades são ilustradas na Figura 2. Considere que a seta indica o sentido da trajetória ao passar do tempo.

Figura 2 - Relações de inclusão entre os conjuntos \mathcal{X} , $\mathcal{L}(L_j)$ e $\mathcal{E}(V, v_0)$, e a trajetória do vetor de estado $x(t)$ para $w(t) = 0$ e $t \geq 0$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Observação 1. A taxa de decaimento é um índice de desempenho bastante comum no estudo da estabilidade de sistemas dinâmicos. Em (BOYD et al., 1994) a taxa de decaimento (ou maior expoente de Lyapunov) é definida como sendo o maior número real $\kappa > 0$, tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\kappa t} \|x(t)\| = 0, \quad (16)$$

para todas as trajetórias de $x(t)$. Como em (BOYD et al., 1994), pode-se usar uma função de Lyapunov quadrática (8), para estabelecer um limite inferior para a taxa de decaimento do sistema (2). A condição $\dot{V}(x(t)) \leq -2\kappa V(x(t))$, para todas as trajetórias de $x(t)$, é equivalente às especificações de uma taxa de decaimento maior ou igual a κ .

2.6 O problema de controle \mathcal{H}_∞ considerando a região de operação

Tendo em vista que além de estabilidade, um controlador deve assegurar um bom desempenho do sistema de malha fechada, habitualmente é definida uma medida ou norma para garantir a qualidade do projeto realizado. Desta forma, um importante índice de desempenho é a norma \mathcal{H}_∞ , que está relacionada com a capacidade do sistema de rejeitar distúrbios de energia limitada (BOYD et al., 1994; MONTAGNER; OLIVEIRA; PERES, 2009). Então, considere o distúrbio de energia limitada $w(t) \in \mathcal{L}_2$ e uma constante positiva ε , tais que

$$\mathcal{W} := \left\{ w(t) \in \mathbb{R}^{n_w} : \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \leq \varepsilon \right\}. \quad (17)$$

Supor que o distúrbio $w(t)$ possui energia limitada é essencial para o projeto de controle

\mathcal{H}_∞ . Desta forma, usualmente, tem-se que $w(t) \in \mathcal{L}_2$. Para lidar com o problema de controle \mathcal{H}_∞ considerando a região de operação, será atribuído um valor ao limitante da energia do distúrbio, que será dado por ε , tal que $w(t) \in \mathcal{W}$.

É necessário destacar que diversos trabalhos, que tratam do problema de controle \mathcal{H}_∞ para sistemas não lineares utilizando modelos fuzzy T-S, não apresentam condições que garantem que o vetor de estado permanecerá dentro da região de operação. O projeto de controle \mathcal{H}_∞ proposto em (TSENG; CHEN, 2006) exemplifica este fato. Basicamente, para $w(t) = \mathbf{0}$, as condições de projeto apresentadas em (TSENG; CHEN, 2006) garantem que o vetor de estado permanece dentro da região de operação. Já para $w(t) \neq \mathbf{0}$, é assegurado um custo garantido \mathcal{H}_∞ , porém não existe garantia de que o vetor de estado não escapará da região de operação.

Por sua vez, a metodologia proposta em (LEE et al., 2015b) garante ao sistema não linear realimentado um índice de desempenho \mathcal{H}_∞ e assegura que o vetor de estado permanecerá dentro da região de operação, para $w(t) \neq \mathbf{0}$. Baseado em (LEE et al., 2015b), considere a variável de relaxação $\varphi > 0$ e a constante $\varepsilon_0 \geq 0$.

Logo, o problema de controle \mathcal{H}_∞ para um sistema não linear, considerando a região de operação, consiste em determinar uma lei de controle que satisfaça os seguintes requisitos:

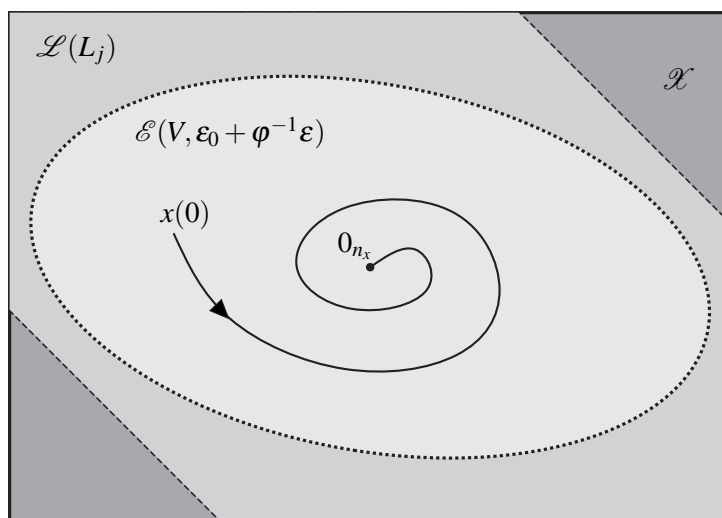
1. para $w(t) = \mathbf{0}$, $t \geq 0$, a origem é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema não linear incerto (2) e (10), e o conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$ é um conjunto positivamente invariante do domínio de atração (HU; LIN; CHEN, 2002) (ou seja, se $x(0)$ pertence ao conjunto $\mathcal{E}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$, então todas as trajetórias de $x(t)$, $t > 0$, também irão permanecer dentro deste conjunto). A Figura 3 ilustra esta propriedade.
2. para $w(t) \in \mathcal{W}$, qualquer trajetória com condição inicial dentro de $\mathcal{E}(V, \varepsilon_0)$ (ou seja, $x(0)^T P x(0) \leq \varepsilon_0$) não irá escapar do conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$, para todo $t \geq 0$. Esta propriedade é ilustrada na Figura 4.
3. para $w(t) \in \mathcal{W}$ e $x(0) = \mathbf{0}$, o sistema realimentado (15) possui um custo garantido \mathcal{H}_∞ igual a $\gamma > 0$, satisfazendo a seguinte desigualdade:

$$\|y(t)\|_2^2 \leq \gamma^2 \|w(t)\|_2^2, \quad \forall \alpha \in \Lambda_r. \quad (18)$$

4. As seguintes relações de inclusão relacionadas aos conjuntos \mathcal{X} , $\mathcal{L}(L_j)$ e $\mathcal{E}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$ devem ser garantidas:
 - $\mathcal{E}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon) \subset \mathcal{X}$: se o vetor de estado permanece dentro do conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$, esta restrição garante que o sistema não linear incerto (2) pode ser exatamente descrito pelo modelo fuzzy T-S dado em (6).

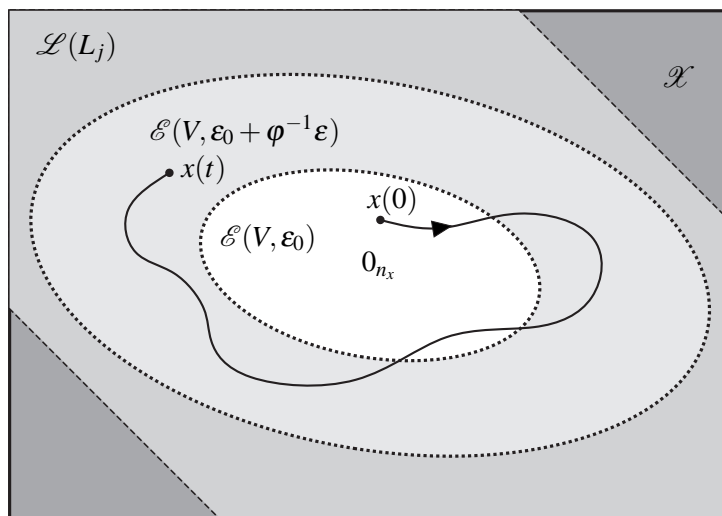
- $\mathcal{E}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon) \subset \mathcal{L}(L_j)$: se o vetor de estado permanece dentro do conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$, esta restrição garante que o sinal de controle $\text{sat}(u(t))$ pode ser representado por $\text{sat}(u(t)) = (-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma)x(t)$. Ou seja, o sistema realimentado é dado por (15).

Figura 3 - Relações de inclusão entre os conjuntos \mathcal{X} , $\mathcal{L}(L_j)$ e $\mathcal{E}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$, e a trajetória do vetor de estado $x(t)$ para $w(t) = 0$ e $t \geq 0$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 4 - Relações de inclusão entre os conjuntos \mathcal{X} , $\mathcal{L}(L_j)$, $\mathcal{E}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$ e $\mathcal{E}(V, \varepsilon_0)$, e a trajetória do vetor de estado $x(t)$ para $w(t) \in \mathcal{W}$ e $t \geq 0$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

2.7 Relações de inclusão entre os conjuntos da região de operação

A partir dos problemas de controle apresentados nas Seções 2.5 e 2.6, observe que algumas relações de inclusão entre os conjuntos \mathcal{X} , $\mathcal{L}(L_j)$ e $\mathcal{E}(V, v_0)$ devem ser asseguradas. Desta forma, o Lema 1 apresenta condições que garantem que tais relações de inclusão sejam respeitadas.

Lema 1. (ALVES et al., 2016b; HU; LIN; CHEN, 2002; BOYD et al., 1994) *Considere os conjuntos \mathcal{X} , $\mathcal{E}(V, v_0)$ e $\mathcal{L}(L_j)$ dados em (4), (9) e (13), respectivamente. As condições $\mathcal{E}(V, v_0) \subset \mathcal{X}$ e $\mathcal{E}(V, v_0) \subset \mathcal{L}(L_j)$ são asseguradas se as seguintes LMIs forem factíveis, respectivamente:*

$$\begin{bmatrix} \phi_h^2 v_0^{-1} & * \\ XR_{(h)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (19a)$$

$$\begin{bmatrix} \rho_k^2 v_0^{-1} & * \\ N_{j(k)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (19b)$$

para todo $h \in \mathbb{K}_p$, $j \in \mathbb{K}_r$ e $k \in \mathbb{K}_{n_u}$, sendo que $X = P^{-1}$ e $N_{j(k)} = L_{j(k)}X$.

Demonstração. A demonstração deste lema é dividida em duas partes.

- Demonstração da restrição $\mathcal{E}(V, v_0) \subset \mathcal{X}$:

Pré e pós multiplicando (19a) por $\text{diag}\{1, P\}$, sendo que $P = X^{-1}$, e aplicando o complemento de Schur no resultado, para $x(t) \neq 0$, obtém-se

$$\begin{aligned} P - R_{(h)}^T \phi_h^{-2} v_0 R_{(h)} &\geq 0, \\ P &\geq R_{(h)}^T \phi_h^{-2} v_0 R_{(h)} \\ x(t)^T P x(t) &\geq x(t)^T R_{(h)}^T \phi_h^{-2} v_0 R_{(h)} x(t) \end{aligned} \quad (20)$$

Considerando que $x(t) \in \mathcal{E}(V, v_0)$, tem-se que $x(t)^T P x(t) \leq v_0$ e assim

$$\begin{aligned} v_0 &\geq x(t)^T P x(t) \geq x(t)^T R_{(h)}^T \phi_h^{-2} v_0 R_{(h)} x(t) \\ \phi_h^2 &\geq x(t)^T R_{(h)}^T R_{(h)} x(t) \end{aligned} \quad (21)$$

Logo, $x(t) \in \mathcal{X}$ e, conseqüentemente, tem-se que $\mathcal{E}(V, v_0) \subset \mathcal{X}$.

- Demonstração da restrição $\mathcal{E}(V, v_0) \subset \mathcal{L}(L_j)$:

Pré e pós multiplicando (19b) por $\text{diag}\{1, P\}$, sendo que $P = X^{-1}$ e $N_{j(k)} = L_{j(k)}X$, e

aplicando o complemento de Schur no resultado, para $x(t) \neq 0$, obtém-se

$$\begin{aligned} P - L_{j(k)}^T \rho_k^{-2} v_0 L_{j(k)} &\geq 0, \\ P &\geq L_{j(k)}^T \rho_k^{-2} v_0 L_{j(k)} \\ x(t)^T P x(t) &\geq x(t)^T L_{j(k)}^T \rho_k^{-2} v_0 L_{j(k)} x(t) \end{aligned} \quad (22)$$

Considerando que $x(t) \in \mathcal{E}(V, v_0)$, tem-se que $x(t)^T P x(t) \leq v_0$ e assim

$$\begin{aligned} v_0 &\geq x(t)^T P x(t) \geq x(t)^T L_{j(k)}^T \rho_k^{-2} v_0 L_{j(k)} x(t) \\ \rho_k^2 &\geq x(t)^T L_{j(k)}^T L_{j(k)} x(t) \end{aligned} \quad (23)$$

Logo, $x(t) \in \mathcal{L}(L_j)$ e, conseqüentemente, tem-se que $\mathcal{E}(V, v_0) \subset \mathcal{L}(L_j)$. \square

Observação 2. *Frequentemente, em projetos de controle, os controladores de realimentação do vetor de estado apresentam ganhos elevados. Principalmente em implementações práticas, estes ganhos resultam em elevados valores do sinal de controle que podem inviabilizar a implementação. Entretanto, estes controladores com ganhos elevados podem ser evitados inserindo, por exemplo, a restrição $\mathcal{E}(V, v_0) \subset \mathcal{L}(K_j)$, que é imposta se a seguinte LMI for factível:*

$$\begin{bmatrix} \rho_k^2 v_0^{-1} & * \\ M_{j(k)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (24)$$

para todo $j \in \mathbb{K}_r$ e $k \in \mathbb{K}_{n_u}$. Note que, $\mathcal{L}(K_j)$ é um conjunto similar ao conjunto $\mathcal{L}(L_j)$, dado em (13) (HU; LIN; CHEN, 2002).

Demonstração. A demonstração é similar ao Lema 1. \square

2.8 Expansão do volume do conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(V, 1)$

Analisando os problemas de controle apresentados nas Seções 2.5 e 2.6, observe que existe um objetivo em comum de restringir o vetor de estado dentro de um conjunto elipsoidal. Logo, é desejável que este conjunto elipsoidal possua o maior volume possível, para permitir que a trajetória do vetor de estado opere em grande parte da região de operação \mathcal{X} . Na literatura existem diversas técnicas com o objetivo de expandir o volume do conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(V, 1)$. A seguir serão apresentadas duas destas metodologias.

Lema 2. *De acordo com (LEE et al., 2015b), o conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(V, 1)$ pode ser expandido ao inserir a restrição $\{x \in \mathbb{R}^{n_x} : x^T x \leq \beta\} \subset \mathcal{E}(V, 1)$, que é imposta se a LMI*

$$\begin{bmatrix} \beta^{-1} I & * \\ I & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (25)$$

é factível, sendo que β é uma constante positiva e pode ser utilizada como uma variável a ser maximizada, de forma a obter uma estimativa menos conservadora do conjunto de condições iniciais $\mathcal{E}(\mathbf{V}, 1)$.

Demonstração. Aplicando o complemento de Schur em (25) e pré e pós multiplicando o resultado por $x(t)^T$ e $x(t)$, respectivamente, para $x(t) \neq \mathbf{0}$, obtém-se:

$$x(t)^T P x(t) \leq \beta^{-1} x(t)^T x(t), \quad (26)$$

e a partir de (8), tem-se que $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$. Logo (26), é equivalente a

$$\begin{aligned} V(x(t)) &\leq \beta^{-1} x(t)^T x(t), \\ V(x(t)) - 1 &\leq \beta^{-1} x(t)^T x(t) - 1, \\ V(x(t)) - 1 &\leq \beta^{-1} (x(t)^T x(t) - \beta). \end{aligned} \quad (27)$$

Logo, para $x(t)^T x(t) \leq \beta$, tem-se que $V(x(t)) \leq 1$, concluindo a demonstração. \square

Lema 3. (CAO; LIN, 2003; ALVES et al., 2016b) *Seja um conjunto de condições iniciais desejadas para o sistema não linear, dado por $\mathfrak{X} = \bar{\omega} \text{co}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_L}\}$, $\bar{\omega} > 0$. Então a condição $\mathfrak{X} \subset \mathcal{E}(\mathbf{V}, 1)$ é assegurada caso*

$$\begin{bmatrix} \bar{\omega}^{-2} & * \\ \mathbf{v}_\ell & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (28)$$

seja satisfeita, para $\ell \in \mathbb{K}_{n_L}$. Observe que $\bar{\omega}$ é um fator de escala do conjunto $\text{co}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_L}\}$, portanto, $\bar{\omega}$ pode ser utilizado como uma variável a ser maximizada (minimização de $\bar{\omega}^{-2}$) de forma a obter uma estimativa menos conservadora do conjunto de condições iniciais $\mathcal{E}(\mathbf{V}, 1)$.

Demonstração. Seja $\mathbf{v}_\tau = \bar{\omega} \sum_{\ell=1}^{n_L} \tau_\ell \mathbf{v}_\ell$ um vetor arbitrário em \mathfrak{X} , sendo que $\tau_\ell \geq 0$ e $\sum_{\ell=1}^{n_L} \tau_\ell = 1$. Então, supondo que (28) seja factível, para todo $\ell \in \mathbb{K}_{n_L}$, e multiplicando as desigualdades por τ_ℓ e realizando o somatório de $\ell = 1$ até n_L , encontra-se

$$\begin{bmatrix} \bar{\omega}^{-2} & \mathbf{v}_\tau^T \\ \mathbf{v}_\tau & X \end{bmatrix} \geq 0. \quad (29)$$

Aplicando o complemento de Schur em (29), sendo $P = X^{-1}$, encontra-se

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^{-2} - \mathbf{v}_\tau^T P \mathbf{v}_\tau &\geq 0 \\ \bar{\omega}^{-2} &\geq \mathbf{v}_\tau^T P \mathbf{v}_\tau \\ 1 &\geq (\bar{\omega} \mathbf{v}_\tau)^T P (\bar{\omega} \mathbf{v}_\tau) \end{aligned} \quad (30)$$

Pela definição do conjunto $\mathcal{E}(V,1)$, dada (9), observe que (30) implica que $\varpi v_\tau \in \mathcal{E}(V,1)$ e portanto $\mathfrak{X} \subset \mathcal{E}(V,1)$. \square

3 CONTROLE CHAVEADO PARA SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS DESCRITOS POR MODELOS FUZZY T-S CONSIDERANDO REGIÃO DE OPERAÇÃO E SATURAÇÃO DO SINAL DE CONTROLE

Neste capítulo são apresentados diversos projetos de controle, que visam resolver os problemas de controle definidos no capítulo anterior.

Na Seção 3.1, dois projetos de controle chaveado, propostos em (ALVES et al., 2016b), são enunciados. Baseado na Seção 2.5, o primeiro projeto de controle considera o problema da estabilidade local para o caso de um distúrbio externo nulo. O Segundo projeto de controle, além de garantir a estabilidade local, ainda assegura ao sistema realimentado uma taxa de decaimento maior ou igual a κ .

Como contribuição da tese, a Seção 3.2 propõe um projeto de controle \mathcal{H}_∞ chaveado considerando a região de operação. Para um distúrbio externo não nulo e com energia limitada, as condições de projeto visam resolver o problema de controle \mathcal{H}_∞ definido na Seção 2.6, garantindo um índice de desempenho \mathcal{H}_∞ ao sistema realimentado e assegurando que todas as trajetórias do vetor de estado permanecem dentro da região de operação.

Outra contribuição da tese é o projeto de controle \mathcal{H}_∞ utilizando um único ganho de realimentação, pois apresenta uma alternativa para implementar a lei de controle sem a necessidade de utilizar as funções de pertinência. Além disso, o projeto de controle \mathcal{H}_∞ proposto em (LEE et al., 2015b) também é enunciado. Estes dois projetos de controle fazem parte da Seção 3.3.

Na Seção 3.4, o primeiro exemplo apresenta uma comparação entre os métodos de controle \mathcal{H}_∞ apresentados nas Seções 3.2 e 3.3. Em seguida, no segundo exemplo, uma implementação demonstra a eficácia prática do método, para controlar um sistema de suspensão ativa fabricada pela Quanser[®] (Quanser Innovate Educate, 2010), considerando uma mola não linear e uma falha do atuador. O último exemplo utiliza um sistema de pêndulo invertido para ilustrar a aplicação do projeto de controle chaveado, descrito em (ALVES et al., 2016b), considerando a estabilidade local do sistema.

3.1 Projeto de controle chaveado para o problema da estabilidade local

A Seção 3.1, tem o objetivo de apresentar condições de projeto para resolver o problema da estabilidade local, definido na Seção 2.5. As condições descritas a seguir foram propostas em (ALVES et al., 2016b).

3.1.1 Resultados preliminares

A seguir serão apresentados alguns resultados preliminares, necessários para elaborar o projeto de controle chaveado considerando o problema da estabilidade local, definido na Seção 2.5.

Então, inicialmente, considera-se que o sistema não linear incerto, dado em (2), possui distúrbio externo nulo. Ou seja, tem-se que $w(t) = 0$ para $t \geq 0$. Logo, a partir de (15), a dinâmica do sistema pode ser representada por:

$$\dot{x}(t) = A_z x(t) + B_z (-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma) x(t). \quad (31)$$

Desta forma, considere o seguinte lema.

Lema 4. *Suponha a existência de uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas $Z_i, Q_j \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $M_j, N_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$ e $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$, tais que a condição a seguir seja factível:*

$$B_i [-F_s M_j + F_s^- N_j] + [-F_s M_j + F_s^- N_j]^T B_i^T - Z_i - Q_j < 0. \quad (32)$$

Então, considerando (1), (10) e (12), para $x(t) \neq 0$, a seguinte condição é verdadeira:

$$x(t)^T \left\{ PB_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma] + [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma]^T B_z^T P \right\} x(t) < x(t)^T \bar{Z}_z x(t) + x(t)^T \bar{Q}_z x(t), \quad (33)$$

sendo que $P = X^{-1}$, $\bar{Z}_i = X^{-1} Z_i X^{-1}$, $\bar{Q}_i = X^{-1} Q_i X^{-1}$, $K_j = M_j X^{-1}$ e $L_j = N_j X^{-1}$.

Demonstração. Suponha a existência de uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas $Z_i, Q_j \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e matrizes $M_j, N_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, tais que (32) seja factível, para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$ e $s \in \mathbb{K}_{2^{n_u}}$. A partir de (1), (10) e (12), lembrando que $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, $\lambda_s \geq 0$ e $\sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s = 1$, defina $P = X^{-1}$, $K_\sigma = M_\sigma X^{-1}$, $L_\sigma = N_\sigma X^{-1}$, $\bar{Z}_z = X^{-1} Z_z X^{-1}$ e $\bar{Q}_\sigma = X^{-1} Q_\sigma X^{-1}$. Pré e pós multiplicando (32) por P , substituindo j por σ , multiplicando o resultado por α_i e realizando o somatório de $i = 1$ até r , multiplicando o resultado por λ_s e realizando o somatório de $s = 1$ até 2^{n_u} , então tem-se a seguinte desigualdade:

$$PB_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma] + [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma]^T B_z^T P - \bar{Z}_z - \bar{Q}_\sigma < 0. \quad (34)$$

Para $x(t) \neq 0$, a partir de (1) e (10), note que $x(t)^T \bar{Q}_\sigma x(t) = \min_{j \in \mathbb{K}_r} \{x(t)^T \bar{Q}_j x(t)\} \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i x(t)^T \bar{Q}_i x(t) = x(t)^T \bar{Q}_z x(t)$. Logo

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i x(t)^T \bar{Z}_i x(t) + x(t)^T \bar{Q}_\sigma x(t) \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i x(t)^T (\bar{Z}_i + \bar{Q}_i) x(t) = x(t)^T (\bar{Z}_z + \bar{Q}_z) x(t). \quad (35)$$

Portanto, para $x(t) \neq 0$, considerando (35), observe que de (34), tem-se que

$$\begin{aligned} x(t)^T \left\{ PB_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma] + [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma]^T B_z^T P \right\} x(t) \\ < x(t)^T (\bar{Z}_z + \bar{Q}_\sigma) x(t) \leq x(t)^T (\bar{Z}_z + \bar{Q}_z) x(t). \end{aligned} \quad (36)$$

A condição (36) é equivalente a (33). Logo a prova está concluída. \square

3.1.2 Projeto de controle chaveado: condições de estabilidade local

Teorema 1. (ALVES et al., 2016b) *Para o caso em particular no qual o distúrbio externo é nulo ($w(t) = 0$), considere a região de operação \mathcal{X} , dada em (4), na qual o sistema não linear incerto sujeito à saturação do atuador (2) pode ser exatamente descrito por (31), sendo que $\rho \in \mathbb{R}^{n_u}$, $R \in \mathbb{R}^{p \times n_x}$, $\phi \in \mathbb{R}^p$ e $v_0 > 0$ são conhecidos. Suponha a existência de uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas $Z_i, Q_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e matrizes $M_j, N_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, tais que as seguintes condições sejam factíveis:*

$$B_i [-F_s M_j + F_s^- N_j] + [-F_s M_j + F_s^- N_j]^T B_i^T - Z_i - Q_j < 0, \quad (37a)$$

$$XA_i^T + A_i X + Z_i + Q_i < 0, \quad (37b)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_h^2 v_0^{-1} & * \\ XR_{(h)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (37c)$$

$$\begin{bmatrix} \rho_k^2 v_0^{-1} & * \\ N_{j(k)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (37d)$$

para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$ e $s \in \mathbb{K}_{2n_u}$, sendo que $F_s \in \mathcal{F}$ e $F_s^- = I - F_s$. Então, $\mathcal{E}(V, v_0) \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{E}(V, v_0) \subset \mathcal{L}(L_j)$ e a lei de controle chaveada (10), sendo que $P = X^{-1}$, $\bar{Q}_i = X^{-1} Q_i X^{-1}$ e os ganhos dos controladores são dados por $K_j = M_j X^{-1}$, garante que para $w(t) = 0$, $t \geq 0$, a origem é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema não linear incerto (2) e (10), e o conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(V, v_0)$ é um conjunto positivamente invariante do domínio de atração (ou seja, se $x(0)$ pertence ao conjunto $\mathcal{E}(V, v_0)$, então todas as trajetórias de $x(t)$, $t > 0$, irão permanecer dentro deste conjunto).

Demonstração. Considere a candidata a função de Lyapunov dada em (8). Primeira-

mente, de acordo com o Lema 1, observe que (37c) e (37d) garantem que $\mathcal{E}(V, v_0) \subset \mathcal{X}$ e $\mathcal{E}(V, v_0) \subset \mathcal{L}(L_j)$, respectivamente. A partir de (1), pré e pós multiplicando (37b) por $P = X^{-1}$, substituindo as variáveis $\bar{Z}_i = X^{-1}Z_iX^{-1}$ e $\bar{Q}_i = X^{-1}Q_iX^{-1}$, multiplicando o resultado por $\alpha_i \geq 0$, $i \in \mathbb{K}_r$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ e realizando o somatório de $i = 1$ até r , para $x(t) \neq 0$, a seguinte desigualdade é obtida:

$$x(t)^T A_z^T P x(t) + x(t)^T P A_z x(t) + x(t)^T \bar{Z}_z x(t) + x(t)^T \bar{Q}_z x(t) < 0. \quad (38)$$

Note que a partir do Lema 4, a LMI (37a) assegura que a desigualdade (33) é verdadeira. Para $x(t) \neq 0$, a partir de (33) e (38), tem-se que

$$\begin{aligned} x(t)^T \left\{ P B_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma] + [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma]^T B_z^T P \right\} x(t) \\ < x(t)^T \{ \bar{Z}_z + \bar{Q}_z \} x(t) < x(t)^T \{ -A_z^T P - P A_z \} x(t). \end{aligned} \quad (39)$$

A partir de (31) e (8), se $w(t) = 0$ e $x(t) \in \mathcal{E}(V, v_0)$, lembrando que $\mathcal{E}(V, v_0) \subset \mathcal{X}$ e $\mathcal{E}(V, v_0) \subset \mathcal{L}(L_j)$, a desigualdade (39) implica que $\dot{V}(x(t)) < 0$, para todo $x(t) \in \mathcal{E}(V, v_0) \setminus \{0\}$. Logo, para $w(t) = 0$, a lei de controle chaveada (10) torna a origem do sistema não linear incerto (2) um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável para todo $x(0) \in \mathcal{E}(V, v_0)$. \square

3.1.3 Projeto de controle chaveado: condições de estabilidade local com taxa de decaimento

Teorema 2. (ALVES et al., 2016b) *Para o caso em particular no qual o distúrbio externo é nulo ($w(t) = 0$), considere a região de operação \mathcal{X} , dada em (4), na qual o sistema não linear incerto sujeito à saturação do atuador (2) pode ser exatamente descrito por (31), sendo que $\rho \in \mathbb{R}^{n_u}$, $R \in \mathbb{R}^{p \times n_x}$, $\phi \in \mathbb{R}^p$ e $v_0 > 0$ são conhecidos. Suponha a existência de uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas $Z_i, Q_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $M_j, N_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e um escalar $\kappa > 0$, tais que as seguintes condições sejam factíveis:*

$$B_i [-F_s M_j + F_s^- N_j] + [-F_s M_j + F_s^- N_j]^T B_i^T - Z_i - Q_j < 0, \quad (40a)$$

$$X A_i^T + A_i X + Z_i + Q_i + 2\kappa X < 0, \quad (40b)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_h^2 v_0^{-1} & * \\ X R_{(h)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (40c)$$

$$\begin{bmatrix} \rho_k^2 v_0^{-1} & * \\ N_{j(k)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (40d)$$

para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$ e $s \in \mathbb{K}_{2^{nu}}$, sendo que $F_s \in \mathcal{F}$ e $F_s^- = I - F_s$. Então, $\mathcal{E}(V, v_0) \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{E}(V, v_0) \subset \mathcal{L}(L_j)$ e a lei de controle chaveada (10), sendo que $P = X^{-1}$, $\bar{Q}_i = X^{-1}Q_iX^{-1}$ e os ganhos dos controladores são dados por $K_j = M_jX^{-1}$, garante que para $w(t) = 0$, $t \geq 0$, a origem é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema não linear incerto (2) e (10) com taxa de decaimento maior ou igual a κ , e o conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(V, v_0)$ é um conjunto positivamente invariante do domínio de atração (ou seja, se $x(0)$ pertence ao conjunto $\mathcal{E}(V, v_0)$, então todas as trajetórias de $x(t)$, $t > 0$, irão permanecer dentro deste conjunto).

Demonstração. Considere a candidata a função de Lyapunov dada em (8). Primeiramente, de acordo com o Lema 1, observe que (40c) e (40d) garantem que $\mathcal{E}(V, v_0) \subset \mathcal{X}$ e $\mathcal{E}(V, v_0) \subset \mathcal{L}(L_j)$, respectivamente. A partir de (1), pré e pós multiplicando (40b) por $P = X^{-1}$, substituindo as variáveis $\bar{Z}_i = X^{-1}Z_iX^{-1}$ e $\bar{Q}_i = X^{-1}Q_iX^{-1}$, multiplicando o resultado por $\alpha_i \geq 0$, $i \in \mathbb{K}_r$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ e realizando o somatório de $i = 1$ até r , para $x(t) \neq 0$, a seguinte desigualdade é obtida:

$$x(t)^T A_z^T P x(t) + x(t)^T P A_z x(t) + x(t)^T \bar{Z}_z x(t) + x(t)^T \bar{Q}_z x(t) + 2\kappa x(t)^T P x(t) < 0. \quad (41)$$

Note que a partir do Lema 4, a LMI (40a) assegura que a desigualdade (33) é verdadeira. Para $x(t) \neq 0$, a partir de (33) e (41), tem-se que

$$x(t)^T \left\{ P B_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma] + [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma]^T B_z^T P \right\} x(t) < x(t)^T \{ \bar{Z}_z + \bar{Q}_z \} x(t) < x(t)^T \{ -A_z^T P - P A_z - 2\kappa P \} x(t). \quad (42)$$

A partir de (31) e (8), se $w(t) = 0$ e $x(t) \in \mathcal{E}(V, v_0)$, lembrando que $\mathcal{E}(V, v_0) \subset \mathcal{X}$ e $\mathcal{E}(V, v_0) \subset \mathcal{L}(L_j)$, a desigualdade (42) implica que $\dot{V}(x(t)) < -2\kappa V(x(t))$, para todo $x(t) \in \mathcal{E}(V, v_0) \setminus \{0\}$. Logo, para $w(t) = 0$, a lei de controle (10) torna a origem do sistema não linear incerto (2) um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a κ para todo $x(0) \in \mathcal{E}(V, v_0)$. \square

3.2 Projeto de controle \mathcal{H}_∞ chaveado considerando região de operação

Agora, os resultados apresentados a partir desta seção, são as principais contribuições da tese. A Seção 3.2 tem o objetivo de apresentar condições para resolver o problema de controle \mathcal{H}_∞ , considerando a região de operação e um distúrbio externo não nulo e com energia limitada, ou seja, $w(t) \in \mathcal{W}$. Este problema de controle foi apresentado anteriormente na Seção 2.6.

3.2.1 Resultados preliminares

Alguns resultados preliminares são apresentados para auxiliar a elaboração do projeto de controle \mathcal{H}_∞ chaveado. Por conveniência, considerando (1), (12) e $j \in \mathbb{K}_r$, são definidas as seguintes funções:

$$\mathcal{M}_{z\lambda}^{(\dot{x})}(P, K_j, L_j) = \begin{bmatrix} A_z^T P + PA_z + PB_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j] + [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j]^T B_z^T P & * \\ H_z^T P & -\varphi^{-1} I \end{bmatrix}, \quad (43)$$

$$\mathcal{N}_{z\lambda}^{(\dot{x})}(P, K_j, L_j) = PB_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j] + [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j]^T B_z^T P + \varphi PH_z H_z^T P, \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{z\lambda}^{(\dot{xy})}(P, K_j, L_j) &= \begin{bmatrix} A_z^T P + PA_z + PB_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j] + [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j]^T B_z^T P & * \\ H_z^T P & -\varphi^{-1} I \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} (C_z + D_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j])^T \\ G_z^T \end{bmatrix} \varphi^{-1} \gamma^{-2} I \begin{bmatrix} (C_z + D_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j])^T \\ G_z^T \end{bmatrix}^T, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{z\lambda}^{(\dot{xy})}(P, K_j, L_j) &= PB_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j] + [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j]^T B_z^T P \\ &+ \varphi^{-1} \gamma^{-2} (C_z + D_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j])^T (C_z + D_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j]) \\ &+ (H_z^T P + \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T (C_z + D_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j]))^T (\varphi^{-1} I - \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T G_z)^{-1} \\ &\times (H_z^T P + \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T (C_z + D_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j])). \end{aligned} \quad (46)$$

Os seguintes lemas serão utilizados na prova do resultado principal deste capítulo. Os Lemas 5 e 6 são baseados em (DEAECTO; SANTOS, 2015).

Lema 5. Considere $\mathcal{M}_{z\lambda}^{(\dot{xy})}(P, K_\sigma, L_\sigma)$ e $\mathcal{N}_{z\lambda}^{(\dot{xy})}(P, K_\sigma, L_\sigma)$ dados em (45) e (46), respectivamente, e suponha que $-\varphi^{-1} I + \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T G_z < 0$. Então, a seguinte condição

$$\sup_{w \in \mathcal{L}_2} \left\{ \begin{bmatrix} x^T & w^T \end{bmatrix} \mathcal{M}_{z\lambda}^{(\dot{xy})}(P, K_\sigma, L_\sigma) \begin{bmatrix} x^T & w^T \end{bmatrix}^T \right\} = x^T \left\{ A_z^T P + PA_z + \mathcal{N}_{z\lambda}^{(\dot{xy})}(P, K_\sigma, L_\sigma) \right\} x \quad (47)$$

será satisfeita e a solução ótima do lado esquerdo de (47) é

$$w^* = (\varphi^{-1} I - \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T G_z)^{-1} (H_z^T P + \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T (C_z + D_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma])) x. \quad (48)$$

Demonstração. Definindo a função

$$f(w, x) = \begin{bmatrix} x^T & w^T \end{bmatrix} \mathcal{M}_{z\lambda}^{(\dot{xy})}(P, K_\sigma, L_\sigma) \begin{bmatrix} x^T & w^T \end{bmatrix}^T, \quad (49)$$

a derivada parcial da função $f(w, x)$ em relação a w é

$$\frac{\partial f(w, x)}{\partial w} = 2 \left(H_z^T P + \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T (C_z + D_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma]) \right) x - 2 \left(\varphi^{-1} I - \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T G_z \right) w. \quad (50)$$

Logo, para $\frac{\partial f(w, x)}{\partial w} = 0$ o ponto crítico w^* (48) é obtido. Além disso, note que

$$\frac{\partial^2 f(w, x)}{\partial w^2} = -2 \left(\varphi^{-1} I - \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T G_z \right) < 0, \quad (51)$$

e então $f(w^*, x)$ é um ponto de máximo. Agora, substituindo w^* in $f(w, x)$

$$\begin{aligned} f(w^*, x) &= \begin{bmatrix} x^T & w^{*T} \end{bmatrix} \mathcal{M}_{z\lambda}^{(\dot{x}y)}(P, K_\sigma, L_\sigma) \begin{bmatrix} x^T & w^{*T} \end{bmatrix}^T \\ &= x^T \left\{ A_z^T P + P A_z + P B_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j] + [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j]^T B_z^T P \right. \\ &\quad \left. + \varphi^{-1} \gamma^{-2} (C_z + D_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j])^T (C_z + D_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j]) \right\} x \\ &\quad + x^T \left\{ P H_z + \varphi^{-1} \gamma^{-2} (C_z + D_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j])^T G_z \right\} w^* \\ &\quad + w^{*T} \left\{ H_z^T P + \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T (C_z + D_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j]) \right\} x \\ &\quad + w^{*T} \left\{ -\varphi^{-1} I + \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T G_z \right\} w^* \\ &= x^T \left\{ A_z^T P + P A_z + P B_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j] + [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j]^T B_z^T P \right. \\ &\quad \left. + \varphi^{-1} \gamma^{-2} (C_z + D_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j])^T (C_z + D_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j]) \right\} x \\ &\quad + x^T \left\{ \left(P H_z + \varphi^{-1} \gamma^{-2} (C_z + D_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j])^T G_z \right) (\varphi^{-1} I - \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T G_z)^{-1} \right. \\ &\quad \left. \times \left(H_z^T P + \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T (C_z + D_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma]) \right) \right\} x \\ &\quad + x^T \left\{ \left(H_z^T P + \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T (C_z + D_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma]) \right)^T (\varphi^{-1} I - \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T G_z)^{-T} \right. \\ &\quad \left. \times \left(H_z^T P + \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T (C_z + D_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j]) \right) \right\} x \\ &\quad + x^T \left\{ \left(H_z^T P + \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T (C_z + D_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma]) \right)^T (\varphi^{-1} I - \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T G_z)^{-T} \right. \\ &\quad \left. \times \left(-\varphi^{-1} I + \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T G_z \right) (\varphi^{-1} I - \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T G_z)^{-1} \right. \\ &\quad \left. \times \left(H_z^T P + \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T (C_z + D_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma]) \right) \right\} x \end{aligned} \quad (52)$$

obtem-se o lado direito de (47) e a prova está concluída. \square

Lema 6. Considere $\mathcal{M}_{z\lambda}^{(\dot{x})}(P, K_\sigma, L_\sigma)$ e $\mathcal{N}_{z\lambda}^{(\dot{x})}(P, K_\sigma, L_\sigma)$ dados em (43) e (44), respectivamente e suponha que $\varphi > 0$. Então, a seguinte condição

$$\sup_{w \in \mathcal{L}_2} \left\{ \begin{bmatrix} x^T & w^T \end{bmatrix} \mathcal{M}_{z\lambda}^{(\dot{x})}(P, K_\sigma, L_\sigma) \begin{bmatrix} x^T & w^T \end{bmatrix}^T \right\} = x^T \left\{ A_z^T P + P A_z + \mathcal{N}_{z\lambda}^{(\dot{x})}(P, K_\sigma, L_\sigma) \right\} x \quad (53)$$

será satisfeita e a solução ótima do lado esquerdo de (53) é

$$w^* = \varphi H_z^T P x. \quad (54)$$

Demonstração. Definindo a função

$$f(w, x) = \begin{bmatrix} x^T & w^T \end{bmatrix} \mathcal{M}_{z\lambda}^{(x)}(P, K_\sigma, L_\sigma) \begin{bmatrix} x^T & w^T \end{bmatrix}^T, \quad (55)$$

a derivada parcial da função $f(w, x)$ em relação a w é

$$\frac{\partial f(w, x)}{\partial w} = 2H_z^T P x - 2\varphi^{-1} w. \quad (56)$$

Logo, para $\frac{\partial f(w, x)}{\partial w} = 0$ o ponto crítico w^* (54) é obtido. Além disso, note que

$$\frac{\partial^2 f(w, x)}{\partial w^2} = -2\varphi^{-1} < 0, \quad (57)$$

e então $f(w^*, x)$ é um ponto de máximo. Agora, substituindo w^* in $f(w, x)$ obtém-se o lado direito de (53) e a prova está concluída. \square

Lema 7. *Suponha a existência de uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas $Z_i, Q_j \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $M_j, N_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$ e $s \in \mathbb{K}_{2n_u}$, tais que a condição a seguir seja factível:*

$$\begin{bmatrix} B_i [-F_s M_j + F_s^- N_j] + [-F_s M_j + F_s^- N_j]^T B_i^T - Z_i - Q_j & * & * \\ H_i^T & -\varphi^{-1} I & * \\ C_i X + D_i [-F_s M_j + F_s^- N_j] & G_i & -\varphi \mu I \end{bmatrix} < 0. \quad (58)$$

Então, considerando (1), (10), (44) e (46), para $x(t) \neq 0$, as seguintes condições são verdadeiras:

$$x(t)^T \left\{ P B_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma] + [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma]^T B_z^T P \right\} x(t) < x(t)^T \{ \bar{Z}_z + \bar{Q}_z \} x(t), \quad (59a)$$

$$x(t)^T \mathcal{N}_{z\lambda}^{(x)}(P, K_\sigma, L_\sigma) x(t) < x(t)^T \{ \bar{Z}_z + \bar{Q}_z \} x(t), \quad (59b)$$

$$x(t)^T \mathcal{N}_{z\lambda}^{(xy)}(P, K_\sigma, L_\sigma) x(t) < x(t)^T \{ \bar{Z}_z + \bar{Q}_z \} x(t), \quad (59c)$$

sendo que $P = X^{-1}$, $\bar{Z}_i = X^{-1} Z_i X^{-1}$, $\bar{Q}_i = X^{-1} Q_i X^{-1}$, $K_j = M_j X^{-1}$, $L_j = N_j X^{-1}$, $\gamma^2 = \mu > 0$ e $\varphi > 0$.

Demonstração. Suponha a existência de uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas $Z_i, Q_j \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e matrizes $M_j, N_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, tais que (58) seja factível, para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$ e $s \in \mathbb{K}_{2n_u}$. A partir de (1), (10) e (12), lembrando que $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, $\lambda_s \geq 0$ e $\sum_{s=1}^{2n_u} \lambda_s = 1$, defina $P = X^{-1}$, $K_\sigma = M_\sigma X^{-1}$, $L_\sigma = N_\sigma X^{-1}$, $\bar{Z}_z = X^{-1} Z_z X^{-1}$, $\bar{Q}_\sigma = X^{-1} Q_\sigma X^{-1}$ e $\mu = \gamma^2$. Pré e pós multiplicando (58) por $\text{diag}\{P, I, I\}$, substituindo j por σ , multiplicando o resultado por α_i e realizando o somatório de $i = 1$ até r , multiplicando o resultado por λ_s e realizando o somatório de $s = 1$ até $2n_u$, então tem-se a seguinte

desigualdade:

$$\begin{bmatrix} PB_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma] + [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma]^T B_z^T P - \bar{Z}_z - \bar{Q}_\sigma & * & * \\ H_z^T P & -\varphi^{-1} I & * \\ C_z + D_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma] & G_z & -\varphi \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (60)$$

e consequentemente

$$\begin{bmatrix} PB_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma] + [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma]^T B_z^T P - \bar{Z}_z - \bar{Q}_\sigma & * \\ H_z^T P & -\varphi^{-1} I \end{bmatrix} < 0, \quad (61)$$

$$PB_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma] + [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma]^T B_z^T P - \bar{Z}_z - \bar{Q}_\sigma < 0. \quad (62)$$

Aplicando o complemento de Schur em (61) e considerando $\mathcal{N}_{z\lambda}^{\dot{x}}(P, K_\sigma, L_\sigma)$, dado em (44), obtém-se

$$\begin{aligned} PB_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j] + [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j]^T B_z^T P + \varphi P H_z H_z^T P - \bar{Z}_z - \bar{Q}_\sigma \\ = \mathcal{N}_{z\lambda}^{\dot{x}}(P, K_\sigma, L_\sigma) - \bar{Z}_z - \bar{Q}_\sigma < 0. \end{aligned} \quad (63)$$

Agora, aplicando o complemento de Schur em (60), segue que

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} PB_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma] + [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma]^T B_z^T P - \bar{Z}_z - \bar{Q}_\sigma & * \\ H_z^T P & -\varphi^{-1} I \end{bmatrix} \\ & + \varphi^{-1} \gamma^{-2} \begin{bmatrix} (C_z + D_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma])^T \\ G_z^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (C_z + D_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma])^T \\ G_z^T \end{bmatrix}^T \\ & = \begin{bmatrix} PB_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma] - \bar{Z}_z - \bar{Q}_\sigma \\ + [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma]^T B_z^T P \\ + \varphi^{-1} \gamma^{-2} (C_z + D_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma])^T \\ \times (C_z + D_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma]) \\ H_z^T P + \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T (C_z + D_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma]) \end{bmatrix} \begin{matrix} * \\ * \\ * \\ * \\ -\varphi^{-1} I + \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T G_z \end{matrix} < 0 \end{aligned} \quad (64)$$

Considerando $\mathcal{N}_{z\lambda}^{\dot{xy}}(P, K_\sigma, L_\sigma)$, dado em (46), e aplicando o complemento de Schur em (64), obtém-se

$$\begin{aligned} & PB_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j] + [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j]^T B_z^T P - \bar{Z}_z - \bar{Q}_\sigma \\ & + \varphi^{-1} \gamma^{-2} (C_z + D_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j])^T (C_z + D_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j]) \\ & + (H_z^T P + \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T (C_z + D_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j]))^T (\varphi^{-1} I - \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T G_z)^{-1} \\ & \times (H_z^T P + \varphi^{-1} \gamma^{-2} G_z^T (C_z + D_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j])) \\ & = \mathcal{N}_{z\lambda}^{\dot{xy}}(P, K_\sigma, L_\sigma) - \bar{Z}_z - \bar{Q}_\sigma < 0. \end{aligned} \quad (65)$$

Para $x(t) \neq 0$, a partir de (1) e (10), note que $x(t)^T \bar{Q}_\sigma x(t) = \min_{j \in \mathbb{K}_r} \{x(t)^T \bar{Q}_j x(t)\} \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i x(t)^T \bar{Q}_i x(t) = x(t)^T \bar{Q}_z x(t)$. Logo

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i x(t)^T \bar{Z}_i x(t) + x(t)^T \bar{Q}_\sigma x(t) \leq \sum_{i=1}^r \alpha_i x(t)^T \{\bar{Z}_i + \bar{Q}_i\} x(t) = x(t)^T \{\bar{Z}_z + \bar{Q}_z\} x(t). \quad (66)$$

Portanto, para $x(t) \neq 0$, considerando (66), observe que a partir de (62), (63) e (65) têm-se que

$$\begin{aligned} x(t)^T \left\{ PB_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma] + [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma]^T B_z^T P \right\} x(t) \\ < x(t)^T \{\bar{Z}_z + \bar{Q}_\sigma\} x(t) \leq x(t)^T \{\bar{Z}_z + \bar{Q}_z\} x(t), \end{aligned} \quad (67)$$

$$x(t)^T \mathcal{N}_{z\lambda}^{\dot{x}}(P, K_\sigma, L_\sigma) x(t) < x(t)^T \{\bar{Z}_z + \bar{Q}_\sigma\} x(t) \leq x(t)^T \{\bar{Z}_z + \bar{Q}_z\} x(t), \quad (68)$$

$$x(t)^T \mathcal{N}_{z\lambda}^{\dot{y}}(P, K_\sigma, L_\sigma) x(t) < x(t)^T \{\bar{Z}_z + \bar{Q}_\sigma\} x(t) \leq x(t)^T \{\bar{Z}_z + \bar{Q}_z\} x(t), \quad (69)$$

respectivamente.

As condições (67), (68) e (69) são equivalente a (59a), (59b) e (59c), respectivamente. Logo a prova está concluída. \square

3.2.2 Projeto de controle \mathcal{H}_∞ chaveado

Finalmente, tendo em vista o problema de controle \mathcal{H}_∞ considerando a região de operação, definido na Seção 2.6, o teorema principal é proposto. Veja as Figuras 3 e 4 para interpretar graficamente as propriedades do Teorema 3 e do Corolário 1.

Teorema 3. *Considere a região de operação \mathcal{X} , dada em (4), na qual o sistema não linear incerto sujeito à saturação do atuador e distúrbio de energia limitada (2) pode ser exatamente descrito por (15), sendo que $\rho \in \mathbb{R}^{n_u}$, $R \in \mathbb{R}^{p \times n_x}$, $\phi \in \mathbb{R}^p$, $\varepsilon_0 \geq 0$, $\varepsilon > 0$ e $\varphi > 0$ são conhecidos. Suponha a existência de uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas Z_i , $Q_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes M_j , $N_j \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e um escalar $\mu > 0$, tais que o seguinte problema de otimização seja factível:*

$\min \mu$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} B_i [-F_s M_j + F_s^- N_j] + [-F_s M_j + F_s^- N_j]^T B_i^T - Z_i - Q_j & * & * \\ H_i^T & -\varphi^{-1} I & * \\ C_i X + D_i [-F_s M_j + F_s^- N_j] & G_i & -\varphi \mu I \end{bmatrix} < 0, \quad (70a)$$

$$X A_i^T + A_i X + Z_i + Q_i < 0, \quad (70b)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\phi_h^2}{\varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon} & * \\ XR_{(h)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (70c)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\rho_k^2}{\varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon} & * \\ N_{j(k)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (70d)$$

para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$ e $s \in \mathbb{K}_{2^{nu}}$, sendo que $F_s \in \mathcal{F}$ e $F_s^- = I - F_s$. Então, $\mathcal{E}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon) \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{E}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon) \subset \mathcal{L}(L_j)$ e a lei de controle chaveada (10), sendo que $P = X^{-1}$, $\bar{Q}_i = X^{-1}Q_iX^{-1}$ e os ganhos dos controladores são dados por $K_j = M_jX^{-1}$, garante que:

1. para $w(t) = 0$, $t \geq 0$, a origem é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema não linear incerto (2) e (10), e o conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$ é um conjunto positivamente invariante do domínio de atração (ou seja, se $x(0)$ pertence ao conjunto $\mathcal{E}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$, então todas as trajetórias de $x(t)$, $t > 0$, irão permanecer dentro deste conjunto);
2. para $w(t) \in \mathcal{W}$, se $x(0) \in \mathcal{E}(V, \varepsilon_0)$, então $x(t) \in \mathcal{E}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$, para todo $t \geq 0$;
3. para $w(t) \in \mathcal{W}$, se $x(0) = 0$, então o sistema não linear incerto (2) e (10) possui um custo garantido \mathcal{H}_∞ igual a $\gamma = \sqrt{\bar{\mu}} > 0$, tal que

$$\|y(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|w(t)\|_2^2, \quad (71)$$

e $x(t) \in \mathcal{E}(V, \varphi^{-1}\varepsilon)$, para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Considere a candidata a função de Lyapunov dada em (8). Primeiramente, de acordo com o Lema 1, observe que (70c) e (70d) garantem que $\mathcal{E}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon) \subset \mathcal{X}$ e $\mathcal{E}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon) \subset \mathcal{L}(L_j)$, respectivamente. A partir de (1), pré e pós multiplicando (70b) por $P = X^{-1}$, substituindo as variáveis $\bar{Z}_i = X^{-1}Z_iX^{-1}$ e $\bar{Q}_i = X^{-1}Q_iX^{-1}$, multiplicando o resultado por $\alpha_i \geq 0$, $i \in \mathbb{K}_r$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ e realizando o somatório de $i = 1$ até r , para $x(t) \neq 0$, a seguinte desigualdade é obtida:

$$x(t)^T A_z^T P x(t) + x(t)^T P A_z x(t) + x(t)^T \bar{Z}_z x(t) + x(t)^T \bar{Q}_z x(t) < 0. \quad (72)$$

- Primeira propriedade:

Para realizar a demonstração da primeira propriedade, note que a partir do Lema 7, a LMI (70a) assegura que a desigualdade (59a) é verdadeira. Para $x(t) \neq 0$, a partir de (59a) e (72), tem-se que

$$\begin{aligned} x(t)^T \left\{ P B_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma] + [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma]^T B_z^T P \right\} x(t) \\ < x(t)^T \{ \bar{Z}_z + \bar{Q}_z \} x(t) < x(t)^T \{ -A_z^T P - P A_z \} x(t). \end{aligned} \quad (73)$$

A partir de (15a) e (8), se $w(t) = \mathbf{0}$ e $x(t) \in \mathcal{E}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varphi}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})$, lembrando que $\mathcal{E}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varphi}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}) \subset \mathcal{X}$ e $\mathcal{E}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varphi}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}) \subset \mathcal{L}(L_j)$, a desigualdade (73) implica que $\dot{V}(x(t)) < \mathbf{0}$, para todo $x(t) \in \mathcal{E}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varphi}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}) \setminus \{\mathbf{0}\}$. Logo, para $w(t) = \mathbf{0}$, a lei de controle (10) torna a origem do sistema não linear incerto (2) um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável para todo $x(0) \in \mathcal{E}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varphi}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})$.

- Segunda propriedade:

A demonstração da segunda propriedade decorre do Lema 7. Considerando (44), observe que a LMI (70a) assegura que a desigualdade (59b) é verdadeira. Para $x(t) \neq \mathbf{0}$, a partir de (59b) e (72), obtém-se

$$x(t)^T \mathcal{N}_{z\lambda}^{(x)}(P, K_\sigma, L_\sigma)x(t) < x(t)^T \{\bar{Z}_z + \bar{Q}_z\}x(t) < x(t)^T \{-A_z^T P - PA_z\}x(t). \quad (74)$$

Para $x(t) \neq \mathbf{0}$, considerando (43) e (44), a partir do Lema 6 e (74), note que

$$\begin{aligned} 0 > x(t)^T \left\{ A_z^T P + PA_z + \mathcal{N}_{z\lambda}^{(x)}(P, K_\sigma, L_\sigma) \right\} x(t) &\geq \begin{bmatrix} x^T & w^T \end{bmatrix} \mathcal{M}_{z\lambda}^{(x)}(P, K_\sigma, L_\sigma) \begin{bmatrix} x^T & w^T \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_z^T P + PA_z + PB_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma] + [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma]^T B_z^T P & * \\ H_z^T P & -\boldsymbol{\varphi}^{-1}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \\ &= x(t)^T \left\{ A_z^T P + PA_z + PB_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma] + [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma]^T B_z^T P \right\} x(t) \\ &\quad + x(t)^T P H_z w(t) + w(t)^T H_z^T P x(t) - w(t)^T \boldsymbol{\varphi}^{-1} w(t). \end{aligned} \quad (75)$$

A partir de (15a) e (8), se $w(t) \in \mathcal{W}$ e $x(t) \in \mathcal{E}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0)$, lembrando que $\mathcal{E}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0) \subset \mathcal{X}$ e $\mathcal{E}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0) \subset \mathcal{L}(L_j)$, a desigualdade (75) implica que

$$\dot{V}(x(t)) - \boldsymbol{\varphi}^{-1} w(t)^T w(t) < \mathbf{0}, \quad (76)$$

para todo $x(t) \in \mathcal{E}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0) \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Para $x(0) \in \mathcal{E}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0)$ e a partir de (17), tem-se que $V(x(0)) \leq \boldsymbol{\varepsilon}_0$ e $\int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \leq \boldsymbol{\varepsilon}$, respectivamente. Logo, integrando (76) de 0 até ∞ , obtém-se

$$V(x(\infty)) < V(x(0)) + \boldsymbol{\varphi}^{-1} \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \leq V(x(0)) + \boldsymbol{\varphi}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \leq \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varphi}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (77)$$

concluindo que $V(x(\infty)) < \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varphi}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}$. Lembrando que $\mathcal{E}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varphi}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}) \subset \mathcal{X}$ e $\mathcal{E}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varphi}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}) \subset \mathcal{L}(L_j)$, a desigualdade (77) assegura que qualquer trajetória com condição inicial $x(0) \in \mathcal{E}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0)$ irá permanecer dentro do conjunto $\mathcal{E}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varphi}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}) \setminus \partial \mathcal{E}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varphi}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon})$, para todo $t \geq 0$, sendo que $\partial \mathcal{E}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varphi}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon})$ é a fronteira de $\mathcal{E}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varphi}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon})$.

- Terceira propriedade:

Para a demonstração da terceira propriedade, considerando (46) e o Lema 7, observe que a LMI (70a) assegura que a desigualdade (59c) é verdadeira. Para $x(t) \neq 0$, a partir de (59c) e (72), tem-se que

$$x(t)^T \mathcal{N}_{z\lambda}^{(xy)}(P, K_\sigma, L_\sigma)x(t) < x(t)^T \{\bar{Z}_z + \bar{Q}_z\}x(t) < x(t)^T \{-A_z^T P - PA_z\}x(t). \quad (78)$$

A partir de (70a), observe que $\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 \end{bmatrix} < 0$, sendo que $\psi_1 = \begin{bmatrix} -\varphi^{-1}I & G_i^T \end{bmatrix}^T$ e $\psi_2 = \begin{bmatrix} G_i & -\varphi\mu I \end{bmatrix}^T$. Logo, considerando o complemento de Schur, $\Psi < 0$ é equivalente a $-\varphi^{-1}I + \varphi^{-1}\mu^{-1}G_i^T G_i < 0$. Além disso, lembrando que $\mu = \gamma^2$, a condição suposta no Lema 5 é verdadeira. Para $x(t) \neq 0$, considerando (45) e (46), a partir do Lema 5 e (78), observe que

$$\begin{aligned} 0 &> x^T \left\{ A_z^T P + PA_z + \mathcal{N}_{z\lambda}^{(xy)}(P, K_\sigma, L_\sigma) \right\} x \geq \begin{bmatrix} x^T & w^T \end{bmatrix} \mathcal{M}_{z\lambda}^{(xy)}(P, K_\sigma, L_\sigma) \begin{bmatrix} x^T & w^T \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} A_z^T P + PA_z + PB_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j] + [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j]^T B_z^T P & * \\ H_z^T P & -\varphi^{-1}I \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} (C_z + D_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j])^T \\ G_z^T \end{bmatrix} \varphi^{-1} \gamma^{-2} I \begin{bmatrix} (C_z + D_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j])^T \\ G_z^T \end{bmatrix}^T \right\} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \\ &= x^T \left\{ A_z^T P + PA_z + PB_z [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma] + [-F_\lambda K_\sigma + F_\lambda^- L_\sigma]^T B_z^T P \right\} x \\ &\quad + \varphi^{-1} \gamma^{-2} (C_z x + D_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j] x + G_z w)^T (C_z x + D_z [-F_\lambda K_j + F_\lambda^- L_j] x + G_z w) \\ &\quad + x^T P H_z w + w^T H_z^T P x - \varphi^{-1} w^T w. \end{aligned} \quad (79)$$

A partir de (15), (8) e da segunda propriedade do Teorema 3, se $w(t) \in \mathcal{W}$ e $x(0) = 0$, então $x(t) \in \mathcal{E}(V, \varphi^{-1}\varepsilon) \subset \mathcal{E}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$, $\forall t \geq 0$. Lembrando que $\mathcal{E}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon) \subset \mathcal{X}$ e $\mathcal{E}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon) \subset \mathcal{L}(L_j)$, a desigualdade (79) implica que

$$\dot{V}(x(t)) + \varphi^{-1} \gamma^{-2} y(t)^T y(t) - \varphi^{-1} w(t)^T w(t) < 0, \quad (80)$$

para todo $x(t) \in \mathcal{E}(V, \varphi^{-1}\varepsilon) \setminus \{0\}$.

Integrando (80) de 0 até ∞ , obtém-se

$$\varphi^{-1} \gamma^{-2} \int_0^\infty y(t)^T y(t) dt - \varphi^{-1} \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt < V(x(0)) - V(x(\infty)) \leq V(x(0)) = 0. \quad (81)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} \gamma^{-2} \int_0^\infty y(t)^T y(t) dt - \varphi^{-1} \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt &< 0 \\ \int_0^\infty y(t)^T y(t) dt &< \gamma^2 \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \end{aligned}$$

$$\|y(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|w(t)\|_2^2, \quad (82)$$

demonstrando que o sistema não linear incerto (2) e (10) possui um custo garantido \mathcal{H}_∞ igual a $\gamma = \sqrt{\mu} > 0$. \square

3.2.3 Sobre os parâmetros relacionados ao projeto de controle

Para um projeto de controle apropriado, vários parâmetros precisam ser ajustados. Observe que os parâmetros ϕ e ρ estão relacionados aos limites físicos do sistema, tais que ϕ e ρ são escolhidos de acordo com a região de operação \mathcal{X} , dada em (4), e região $\mathcal{L}(L_j)$, dada em (13), respectivamente. O parâmetro ϵ_0 está relacionado com a condição inicial $x(0)$ e, conseqüentemente, com a energia inicial $V(x(0))$, de modo que o parâmetro ϵ_0 pode ser determinado de acordo com uma possível região de condições iniciais. O parâmetro ϵ é o limitante da energia do distúrbio. O parâmetro φ é uma variável de folga, sem significado físico. Juntos, os parâmetros ϵ_0 , ϵ e φ são responsáveis por estabelecer a região $\mathcal{E}(V, \epsilon_0 + \varphi^{-1}\epsilon)$ e o parâmetro β é escolhido para expandir o volume desta região.

3.3 Resultados adicionais utilizados para comparação

Nesta seção serão apresentados dois projetos de controle \mathcal{H}_∞ , que serão utilizados posteriormente em exemplos comparativos. O primeiro método é um caso particular do Teorema 3.

3.3.1 Projeto de controle \mathcal{H}_∞ utilizando um único ganho de realimentação

A lei de controle, dada por $u(t) = -Kx(t)$, é uma alternativa para resolver o problema de controle abordado anteriormente, sem a necessidade de encontrar as expressões de funções de pertinência. Usando uma função quadrática de Lyapunov (8), as condições de projeto de controle \mathcal{H}_∞ considerando a região de operação podem ser enunciadas de forma semelhante ao Teorema 3.

Corolário 1. *Considere a região de operação \mathcal{X} , dada em (4), na qual o sistema não linear incerto sujeito à saturação do atuador e distúrbio de energia limitada (2) pode ser exatamente descrito por (15), para $K_\sigma = K$ e $L_\sigma = L$, sendo que $\rho \in \mathbb{R}^{n_u}$, $R \in \mathbb{R}^{p \times n_x}$, $\phi \in \mathbb{R}^p$, $\epsilon_0 \geq 0$, $\epsilon > 0$ e $\varphi > 0$ são conhecidos. Suponha a existência de uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $M, N \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e um escalar $\mu > 0$, tais*

que o seguinte problema de otimização seja factível:

$\min \mu$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} XA_i^T + A_iX + B_i[-F_sM + F_s^-N] + [-F_sM + F_s^-N]^T B_i^T & * & * \\ & H_i^T & -\varphi^{-1}I \\ & C_iX + D_i[-F_sM + F_s^-N] & G_i \quad -\varphi\mu I \end{bmatrix} < 0, \quad (83a)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\phi_h^2}{\varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon} & * \\ XR_{(h)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \frac{\rho_k^2}{\varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon} & * \\ N_{(k)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (83b)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_r$ e $s \in \mathbb{K}_{2n_u}$, sendo que $F_s \in \mathcal{F}$ e $F_s^- = I - F_s$. Então, $\mathcal{E}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon) \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{E}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon) \subset \mathcal{L}(L)$ e a lei de controle $u(t) = -Kx(t)$, sendo que o ganho do controlador é dado por $K = MX^{-1}$, garante que:

1. para $w(t) = 0$, $t \geq 0$, a origem é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema não linear incerto (2), com $u(t) = -Kx(t)$, e o conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$ é um conjunto positivamente invariante do domínio de atração (ou seja, se $x(0)$ pertence ao conjunto $\mathcal{E}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$, então todas as trajetória de $x(t)$, $t > 0$, irão permanecer dentro deste conjunto);
2. para $w(t) \in \mathcal{W}$, se $x(0) \in \mathcal{E}(V, \varepsilon_0)$, então $x(t) \in \mathcal{E}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$, para todo $t \geq 0$;
3. para $w(t) \in \mathcal{W}$, se $x(0) = 0$, então o sistema não linear incerto (2), com $u(t) = -Kx(t)$, possui um custo garantido \mathcal{H}_∞ igual a $\gamma = \sqrt{\bar{\mu}} > 0$, tal que

$$\|y(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|w(t)\|_2^2, \quad (84)$$

e $x(t) \in \mathcal{E}(V, \varphi^{-1}\varepsilon)$, para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Suponha a existência de uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e matrizes $M, N \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$. De forma similar ao Lema 7 e considerando $K_\sigma = K$, $L_\sigma = L$, (44) e (46), para $x(t) \neq 0$, se a condição (83a) é verdadeira, então as seguintes condições também são verdadeiras:

$$x(t)^T \left\{ PB_z [-F_\lambda K + F_\lambda^- L] + [-F_\lambda K + F_\lambda^- L]^T B_z^T P \right\} x(t) < x(t)^T \left\{ -A_z^T P - PA_z \right\} x(t), \quad (85a)$$

$$x(t)^T \mathcal{N}_{z\lambda}^{(\dot{x})}(P, K, L)x(t) < x(t)^T \left\{ -A_z^T P - PA_z \right\} x(t), \quad (85b)$$

$$x(t)^T \mathcal{N}_{z\lambda}^{(\dot{xy})}(P, K, L)x(t) < x(t)^T \left\{ -A_z^T P - PA_z \right\} x(t). \quad (85c)$$

Observe que, as desigualdades (85a), (85b) e (85c) são equivalente a (73), (74) e (78), respectivamente, para $K_\sigma = K$ e $L_\sigma = L$. Portanto, a partir de (85) e seguindo os mesmos

passos da demonstração do Teorema 3, as propriedades 1, 2 e 3 do Corolário 1 podem ser demonstradas. \square

3.3.2 Projeto de controle \mathcal{H}_∞ proposto em (LEE et al., 2015b)

Em (LEE et al., 2015b) é proposto um projeto de controle \mathcal{H}_∞ para sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy T-S. Assim como no Teorema 3 e no Corolário 1, as condições apresentadas em (LEE et al., 2015b) garantem que o sistema não linear possui um custo garantido \mathcal{H}_∞ e asseguram que as trajetórias do vetor de estado permanecem dentro de um conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(V, 1 + \varphi^{-1}\varepsilon) \subset \mathcal{X}$. Para informações mais detalhadas, consulte o artigo (LEE et al., 2015b). Entretanto, algumas diferenças entre os projetos devem ser destacadas. Note que em (LEE et al., 2015b):

- A candidata a função de Lyapunov é dada por $V(x(t)) = x(t)^T P_z^{-1} x(t)$, sendo que $z(t) = \mathcal{T}x(t) \in \mathbb{R}^q$, $\mathcal{T} \in \mathbb{R}^{q \times n_x}$. Ou seja, as variáveis de premissa são uma combinação linear das variáveis de estado. Além disso ainda existem dois outros conjuntos, dados por:

$$\mathcal{R} := \{x(t) \in \mathbb{R}^{n_x} : \mathcal{T}_l x(t) \in [-\xi_{l,\max}, \xi_{l,\max}], l \in \mathbb{K}_q\},$$

$$\mathcal{H}(b) := \{x(t) \in \mathcal{R} : |\dot{\alpha}_i(z(t))| \leq b, i \in \mathbb{K}_r\}.$$

- Considera-se que o sistema não linear está sujeito a distúrbios de energia e magnitude limitadas, tais que $w(t)^T w(t) \leq \delta$ e $\int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \leq \varepsilon$. A restrição de magnitude, dada por $w(t)^T w(t) \leq \delta$, é uma condição necessária para assegurar que $\mathcal{E}(V, 1 + \varphi^{-1}\varepsilon) \subset \mathcal{H}(b)$, para $w(t) \neq 0$ e $x(0) \in \mathcal{E}(V, 1 + \varphi^{-1}\varepsilon)$.
- A lei de controle considera pleno acesso às funções de pertinência, tal que $u(t) = K_z P_z^{-1} x(t)$. Ou seja, as funções de pertinência não podem depender de parâmetros incertos.
- O projeto de controle não considera que o atuador esteja sujeito à saturação. Desta forma, a região $\mathcal{L}(L_j)$ não existe no projeto de controle proposto em (LEE et al., 2015b).

3.4 Exemplos

3.4.1 Exemplo comparativo: sistema caótico Lorenz

Exemplo 1.

Considere o sistema caótico Lorenz apresentado em (WANG; LIU, 2013; LEE et al., 2015b) e descrito exatamente pelo modelo fuzzy T-S, dado em (6), sendo que:

$$\begin{aligned}
 A_1 = \begin{bmatrix} -\eta_1 & \eta_1 & 0 \\ \eta_2 & -1 & 20 \\ 0 & -20 & -\eta_3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -\eta_1 & \eta_1 & 0 \\ \eta_2 & -1 & -30 \\ 0 & 30 & -\eta_3 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \\ \eta_3 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\eta_1 \\ -\eta_2 & 0 \\ 0 & \eta_3 \end{bmatrix}, \\
 H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_1 \end{bmatrix}, C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 G_1 = G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 D_1 = D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{86}$$

para $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (5, 30, 2)$.

O distúrbio de energia limitada, $w(t) \in \mathcal{W}$, é dado por

$$\begin{cases} w(t) = \mathcal{A} \begin{bmatrix} \text{sen}(\omega t) \\ \text{sen}(\omega t) \\ \text{sen}(\omega t) \end{bmatrix}, & t \in [0, t_f]; \\ w(t) = 0_3, & t \in [t_f, \infty), \end{cases} \tag{87}$$

e os parâmetros \mathcal{A} , ω e t_f são escolhidos de forma adequada para satisfazer as seguintes condições:

$$\int_0^{t_f} w(t)^T w(t) dt \leq \int_0^{\infty} w(t)^T w(t) dt \leq \varepsilon \text{ e } w(t)^T w(t) \leq \delta, \forall t \in [0, \infty). \tag{88}$$

A partir de (87) e (88), observe que

$$w(t)^T w(t) = 3\mathcal{A}^2 \text{sen}^2(\omega t) \leq 3\mathcal{A}^2 \leq \delta, \tag{89}$$

e

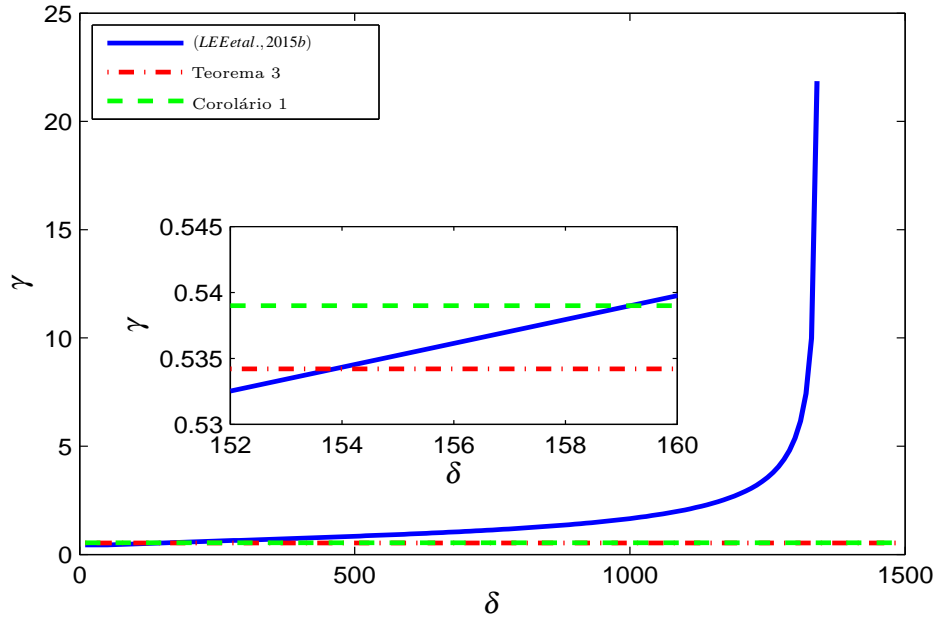
$$\begin{aligned}
 \int_0^{t_f} w(t)^T w(t) dt &= \int_0^{t_f} 3\mathcal{A}^2 \text{sen}^2(\omega t) dt \\
 &= \int_0^{t_f} 3\mathcal{A}^2 \left(\frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \right) dt = \frac{3\mathcal{A}^2 t_f}{2} - \frac{3\mathcal{A}^2 \text{sen}(2\omega t_f)}{4\omega}. \tag{90}
 \end{aligned}$$

Considere o distúrbio $w(t)$ dado em (87), com $t_f = \frac{a\pi}{2\omega}$ e $a \in \{1, 2, \dots\}$. Consequentemente, a partir de (90) obtém-se:

$$\int_0^{t_f} w(t)^T w(t) dt = \frac{3\mathcal{A}^2 \pi a}{4\omega} - \frac{3\mathcal{A}^2 \text{sen}(a\pi)}{4\omega} = \frac{3\mathcal{A}^2 \pi a}{4\omega} \leq \varepsilon, \quad a \in \{1, 2, \dots\}. \tag{91}$$

Para $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (5, 30, 2)$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\phi = 30$, $\rho = \begin{bmatrix} 100 & 100 \end{bmatrix}^T$, $\varphi = 110$, $\beta = 100$, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon = 15\pi$ e $10 \leq \delta \leq 1500$ uma comparação entre os métodos propostos no Teorema 3 (LMIs (70) e (25)), no Corolário 1 (LMIs (83) e (25)) e em (LEE et al., 2015b) é apresentada na Figura 5.

Figura 5 - Comparação entre os métodos propostos no Teorema 3 (LMIs (70) e (25)), no Corolário 1 (LMIs (83) e (25)) e em (LEE et al., 2015b).



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Analisando a Figura 5, note que para $10 \leq \delta \leq 153,9$ o método proposto em (LEE et al., 2015b) apresenta os melhores valores de γ , entretanto, para $\delta \geq 1343$, as LMIs deste mesmo método se tornam infactíveis. Para o Teorema 3 e o Corolário 1, foram obtidos os valores de $\gamma = 0,5342$ e $\gamma = 0,5390$, respectivamente. Observe que a variação do parâmetro δ não altera o resultado do valor de γ nestes dois casos, pois a magnitude do distúrbio não influencia a solução das LMIs do Teorema 3 (LMIs (70) e (25)) e do Corolário 1 (LMIs (83) e (25)). Por fim, para $\delta > 153,9$, observe que o Teorema 3 apresenta os melhores valores de γ .

Resolvendo o problema de otimização do Teorema 3, dado pelas LMIs (70) e (25), e utilizando os parâmetros mencionados anteriormente, foram obtidos os seguintes ganhos dos controladores K_j , as matrizes simétricas \bar{Q}_j , $j \in \mathbb{K}_2$, e a matriz simétrica definida

positiva P :

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} -5,1207 & -1,3967 & 1,0277 \\ 5,3067 & 1,8843 & 0,1022 \end{bmatrix}, & P &= \begin{bmatrix} 0,0090 & 0,0028 & -0,0008 \\ 0,0028 & 0,0011 & -0,0003 \\ -0,0008 & -0,0003 & 0,0002 \end{bmatrix}, \\ K_2 &= \begin{bmatrix} -5,0252 & -1,3993 & 1,0316 \\ 5,1996 & 1,8793 & 0,0982 \end{bmatrix}, & & \\ \bar{Q}_1 &= \begin{bmatrix} 0,0201 & -0,0050 & 0,0047 \\ -0,0050 & -0,0017 & 0,0027 \\ 0,0047 & 0,0027 & -0,0007 \end{bmatrix}, & \bar{Q}_2 &= \begin{bmatrix} -0,0226 & -0,0291 & 0,0049 \\ -0,0291 & -0,0149 & 0,0030 \\ 0,0049 & 0,0030 & -0,0007 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (92)$$

Utilizando o *software* MatLab/Simulink[®], foram realizadas duas simulações que serão apresentadas a seguir. Em ambas as simulações, utilizou-se a lei de controle chaveada (10), com o conjunto de controladores e matrizes auxiliares dados em (92), para simular a dinâmica do sistema realimentado (2), (10) e (86)-(87). Nas duas simulações, a energia do distúrbio externo será a mesma. Entretanto, serão utilizados diferentes valores de magnitude e frequência em cada simulação.

- Primeira simulação:

A primeira simulação tem o objetivo de analisar o comportamento do sistema caótico Lorenz (86) sujeito a um distúrbio externo $w(t)$ com magnitude elevada. Considere uma condição inicial nula $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ e o distúrbio $w(t) \in \mathcal{W}$, definido em (87), sendo que

$$\mathcal{A} = 10\sqrt{5}, \quad \omega = 112,5 \text{ rad/s}, \quad a = 3 \quad \text{e} \quad t_f = \frac{3\pi}{225} \text{s}, \quad (93)$$

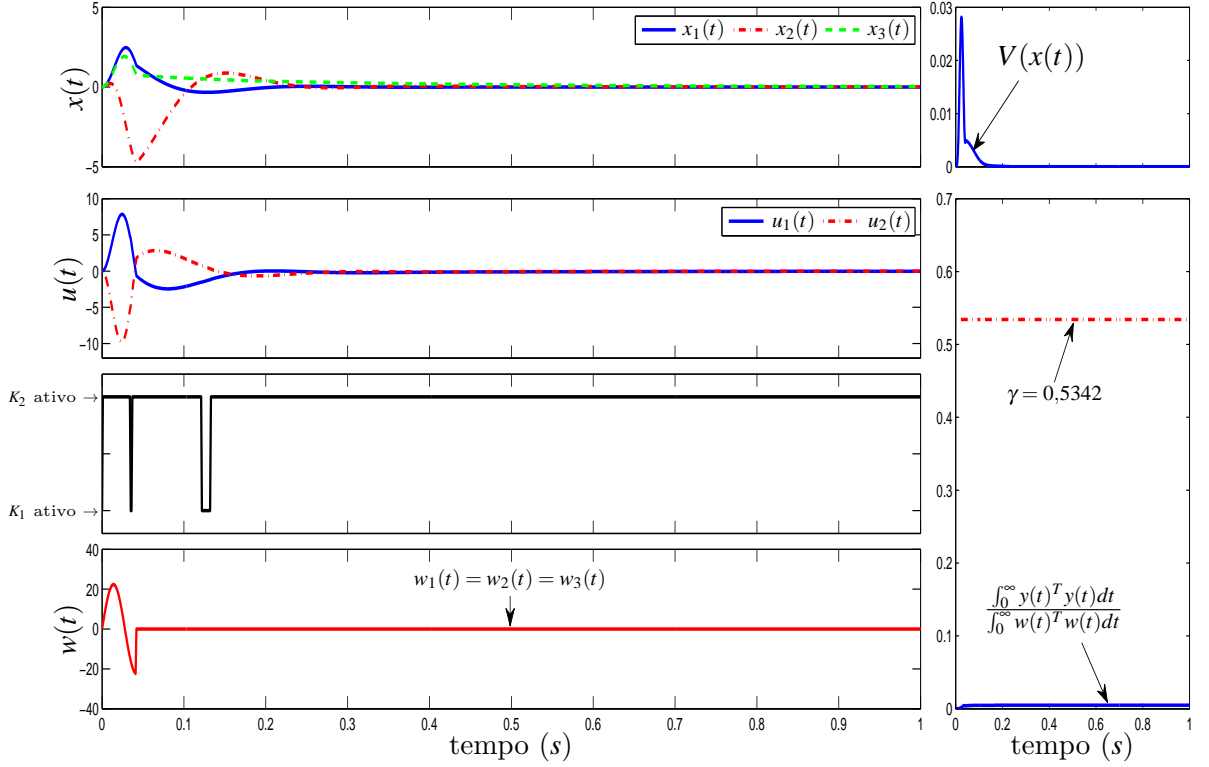
tais que $\int_0^{t_f} w(t)^T w(t) dt = 10\pi \leq \varepsilon = 15\pi$ e $w(t)^T w(t) \leq 1500$. O resultado da simulação é apresentado na Figura 6.

Observe que, utilizando a lei de controle chaveada (10) e (92), para $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, as trajetória do vetor de estado do sistema controlado permaneceram dentro do conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(V, \varphi^{-1}\varepsilon) = \mathcal{E}(V, 0,4284)$ e, conseqüentemente, $x(t) \in \mathcal{L}(L_j)$ e $x(t) \in \mathcal{X}$, para todo $t \geq 0$. O custo garantido \mathcal{H}_∞ assegurou que $\int_0^\infty y(t)^T y(t) dt / \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \leq 0,0048 \leq \gamma = 0,5342$. Por fim, note que $w(t)^T w(t) \leq 1500 = \delta$, portanto, de acordo com a Figura 5, o método proposto em (LEE et al., 2015b) é infactível.

- Segunda simulação:

A segunda simulação tem o objetivo de analisar o comportamento do sistema caótico Lorenz (86) sujeito a um distúrbio externo $w(t)$ de baixa frequência, que amplifique a

Figura 6 - Comportamento dinâmico do sistema realimentado (2), (10), (86)-(87) e (93): a trajetória do vetor de estado $x(t)$, a lei de controle chaveada (10), o distúrbio externo $w(t)$, a energia do sistema $V(x(t))$ e a relação entre $\frac{\int_0^\infty y(t)^T y(t) dt}{\int_0^\infty w(t)^T w(t) dt}$ e γ .



Fonte: Elaboração do próprio autor.

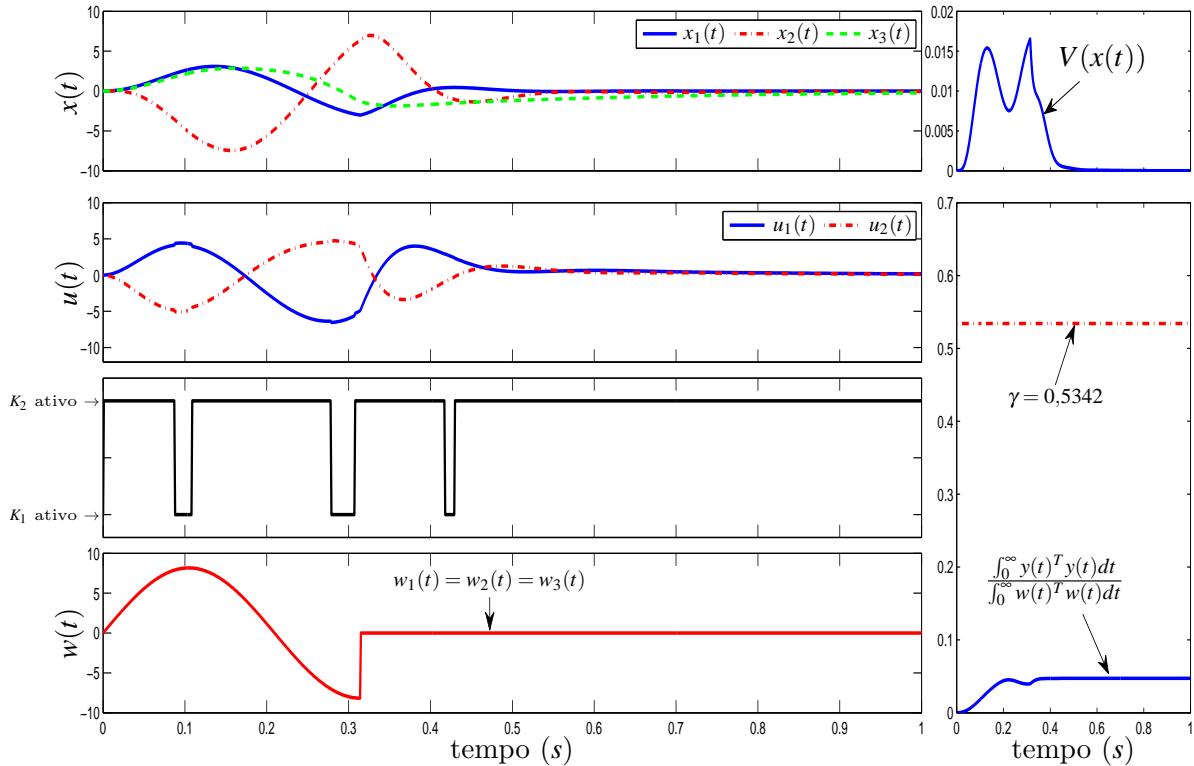
saída do sistema e, conseqüentemente, aumente a relação $\int_0^\infty y(t)^T y(t) dt / \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt$. Considere uma condição inicial nula $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ e o distúrbio $w(t) \in \mathcal{W}$, definido em (87), sendo que

$$\mathcal{A} = \frac{10}{3}\sqrt{6}, \quad \omega = 15\text{rad/s}, \quad a = 3 \quad \text{e} \quad t_f = \frac{3\pi}{30}\text{s}, \quad (94)$$

tais que $\int_0^{t_f} w(t)^T w(t) dt = 10\pi \leq \varepsilon = 15\pi$ e $w(t)^T w(t) \leq 200$. O resultado da simulação é apresentado na Figura 7.

Como mencionado anteriormente, a energia do distúrbio externo é a mesma em ambas as simulações. Nesta segunda simulação, a frequência $\omega = 15\text{rad/s}$ aumentou o valor da relação $\int_0^\infty y(t)^T y(t) dt / \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt$, entretanto o custo garantido \mathcal{H}_∞ assegurou que $\int_0^\infty y(t)^T y(t) dt / \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \leq 0,0473 \leq \gamma = 0,5342$. Novamente, utilizando a lei de controle chaveada (10) e (92), para $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, as trajetória do vetor de estado do sistema controlado permaneceram dentro do conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(V, \varphi^{-1}\varepsilon) = \mathcal{E}(V, 0,4284)$ e, conseqüentemente, $x(t) \in \mathcal{L}(L_j)$ e $x(t) \in \mathcal{X}$, para todo $t \geq 0$.

Figura 7 - Comportamento dinâmico do sistema realimentado (2), (10), (86)-(87) e (94): a trajetória do vetor de estado $x(t)$, a lei de controle chaveada (10), o distúrbio externo $w(t)$, a energia do sistema $V(x(t))$ e a relação entre $\frac{\int_0^\infty y(t)^T y(t) dt}{\int_0^\infty w(t)^T w(t) dt}$ e γ .



Fonte: Elaboração do próprio autor.

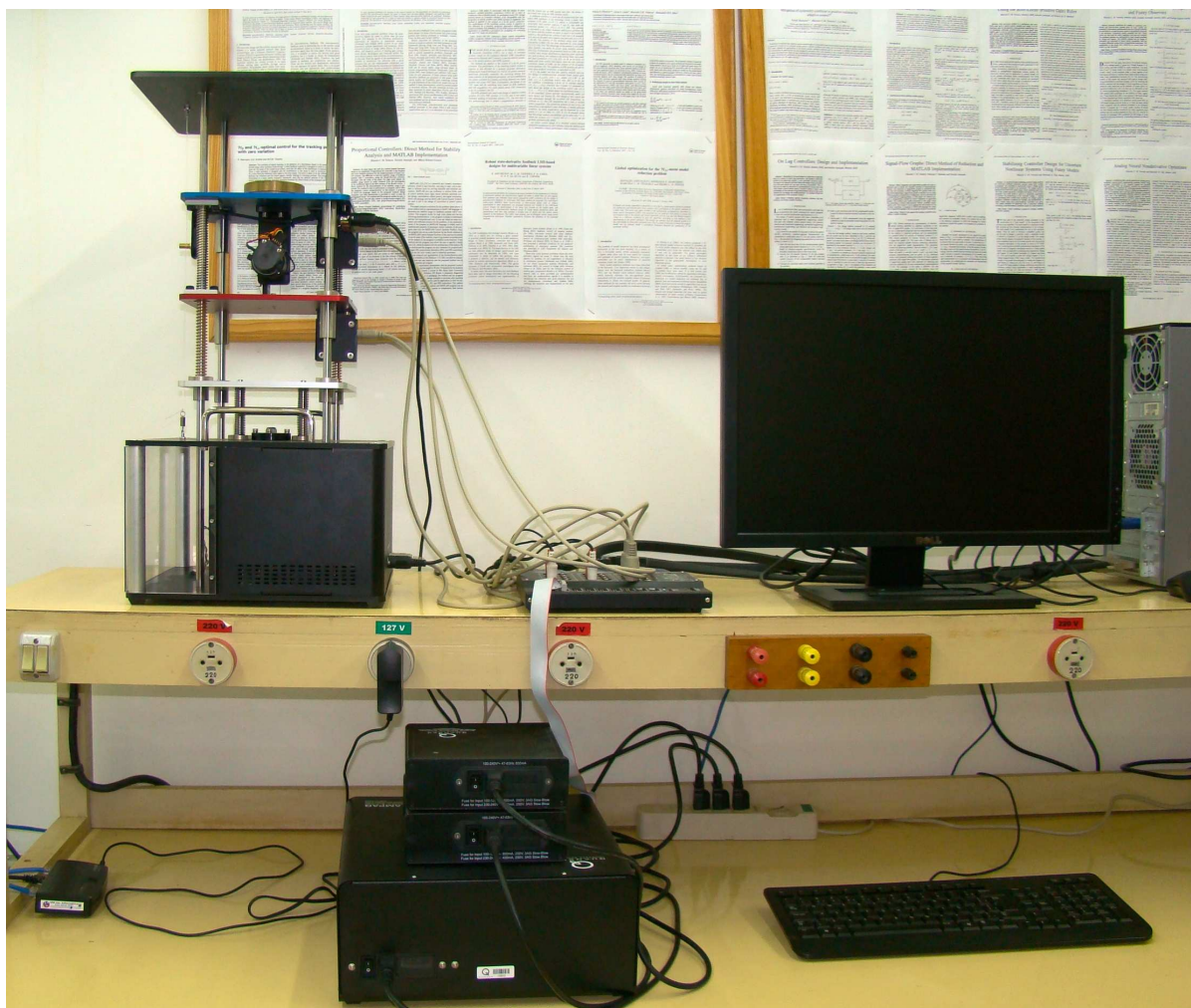
3.4.2 Implementação prática utilizando um sistema de suspensão ativa de bancada com falha no atuador

Exemplo 2.

O propósito deste exemplo é projetar e implementar uma lei de controle \mathcal{H}_∞ chaveada para um modelo de suspensão ativa. Então, considere o sistema de suspensão ativa de um veículo, fabricado pela Quanser[®] (Quanser Innovate Educate, 2010), apresentado na Figura 8. O seu modelo esquemático está representado na Figura 9.

O sistema consiste de um conjunto de duas massas, denotadas de M_s e M_{us} . A massa M_s representa $\frac{1}{4}$ da estrutura total do veículo e é suportada pela mola k_s e pelo amortecedor b_s . A massa M_{us} corresponde a massa do conjunto do pneu e é suportada pela mola k_{us} e pelo amortecedor b_{us} . As vibrações causadas pelas irregularidades da pista podem ser atenuadas pelo sistema de suspensão ativa do veículo, representado por um motor (atuador) conectado entre as massas M_s e M_{us} , e controlado pela força F_c (SILVA et al., 2013).

Figura 8 - Sistema de suspensão ativa fabricado pela Quanser[®], pertencente ao LPC-FEIS-UNESP.



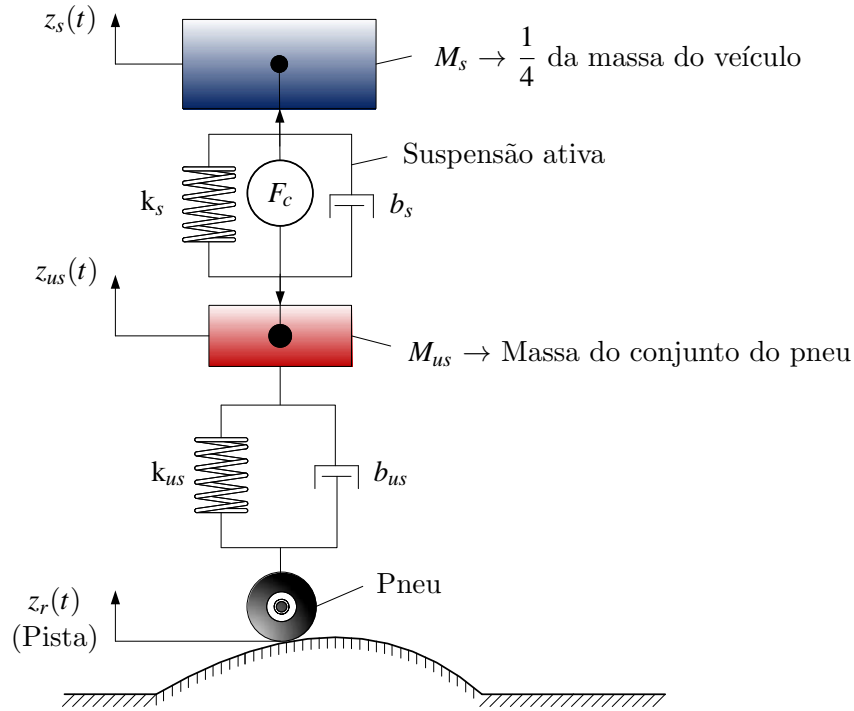
Fonte: Elaboração do próprio autor.

O modelo esquemático fornecido pela Quanser[®] considera que a rigidez da mola k_{us} é constante e igual a k_{us_0} . Embora esta seja uma boa aproximação do modelo matemático da mola, é improvável encontrar uma mola com características lineares na vida real e por este motivo é razoável modelar a rigidez da mola através de uma função não linear (ONAT et al., 2009). De acordo com (ONAT et al., 2009), a rigidez da mola possui um comportamento não linear em suas extremidades. Por este motivo, baseado em (ONAT et al., 2009), este exemplo considera um caso genérico em que a rigidez da mola é dada por:

$$k_{us}(z_{us} - z_r, \Delta k_{us}) = k_{us_0} (1 + \Delta k_{us} |z_{us} - z_r|). \quad (95)$$

Observe que $\Delta k_{us} |z_{us} - z_r|$ pode representar a não linearidade e também uma incerteza paramétrica relacionada a rigidez da mola, sendo que Δk_{us} é um parâmetro incerto tal que $0 \leq \Delta k_{us} \leq \Delta k_{us_0}$, e Δk_{us_0} , k_{us_0} são constantes conhecidas. Note que esta definição de k_{us} ,

Figura 9 - Modelo esquemático do sistema de suspensão ativa.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

para $\Delta k_{us} = 0$, contempla o valor nominal $k_{us} = k_{us0}$, dado em (Quanser Innovate Educate, 2010).

Além disso, neste exemplo é considerada uma falha do atuador que resulta em uma perda de potência. A perda de potência é representada, no modelo matemático, pela função $k_{falha}(t)$ (LI et al., 2012; SILVA et al., 2013), tal que

$$u(t)_{falha} = k_{falha}(t) u(t), \quad u(t) = F_c(t). \quad (96)$$

Desta forma, é possível considerar que o atuador possua três diferentes condições de operação (SILVA et al., 2013):

1. Se $k_{falha}(t) = 0$, isso implica que o atuador $u(t)_{falha}$ possui uma falha total, ou o sistema de suspensão ativa está operando em malha aberta;
2. Se $k_{falha}(t) = 1$, representa o caso em que não ocorre falha no atuador $u(t)_{falha}$;
3. Se $0 < k_{falha}(t) < 1$, significa que existe uma falha parcial no atuador $u(t)_{falha}$.

Então uma falha no atuador pode ser representada com uma incerteza paramétrica.

Além disso, com base na modelagem apresentada em (Quanser Innovate Educate,

2010), considerando (95), (96) e o vetor das variáveis de premissa

$$z(t) = [x(t)^T \ \Delta k_{us} \ k_{falha}]^T, \quad (97)$$

o modelo dinâmico do sistema de suspensão ativa pode ser representado por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{M_s} & -\frac{b_s}{M_s} & 0 & \frac{b_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_{us}} & \frac{b_s}{M_{us}} & f_{43}(z(t)) & -\frac{(b_s+b_{us})}{M_{us}} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_{falha}(t)}{M_s} \\ 0 \\ -\frac{k_{falha}(t)}{M_{us}} \end{bmatrix} \text{sat}(u(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{b_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix} w(t), \\ x(t) &= \begin{bmatrix} z_s(t) - z_{us}(t) \\ \dot{z}_s(t) \\ z_{us}(t) - z_r(t) \\ \dot{z}_{us}(t) \end{bmatrix}, \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \quad w(t) = \dot{z}_r, \\ & \quad \quad \quad f_{43}(z(t)) = -\frac{k_{us0}(1+\Delta k_{us}|z_{us}-z_r|)}{M_{us}}. \end{aligned} \quad (98)$$

Os respectivos valores dos parâmetros do sistema são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 - Parâmetros do sistema de suspensão ativa.

Parâmetros	Símbolo	Valor
Massa de $\frac{1}{4}$ do corpo total do veículo (kg)	M_s	2,45
Massa do conjunto do pneu (kg)	M_{us}	1
Constante de rigidez da mola (N/m)	k_s	900
Constante de rigidez da mola (N/m)	k_{us0}	2500
Coeficiente de amortecimento (Ns/m)	b_s	7,5
Coeficiente de amortecimento (Ns/m)	b_{us}	5
Parâmetro da mola (m^{-1})	Δk_{us0}	2

Fonte: (Quanser Innovate Educate, 2010).

Logo, para encontrar os modelos locais do sistema, os valores máximos e mínimos das funções $k_{falha}(t)$ e $f_{43}(z(t))$ devem ser obtidos. Neste caso, a metodologia proposta em (SANTIM et al., 2012) será utilizada. Considerando que a falha no atuador pode diminuir 20% da potência do atuador, então $0,8 \leq k_{falha}(t) \leq 1$. Devido a restrição física relacionada ao comprimento da mola, a variável de estado $z_{us} - z_r$ é limitada no intervalo $-0,02 \leq z_{us} - z_r \leq 0,02\text{m}$. Assim, o domínio D da função não linear $f_{43}(z(t))$ e de $k_{falha}(t)$ é

$$D = \left\{ z(t) = [x(t)^T \ \Delta k_{us} \ k_{falha}]^T \in \mathbb{R}^6 : \right. \\ \left. -0,02 \leq z_{us} - z_r \leq 0,02, \ 0 \leq \Delta k_{us} \leq 2, \ 0,8 \leq k_{falha}(t) \leq 1 \right\}. \quad (99)$$

Os valores máximo e mínimo da função $f_{43}(z(t))$, no domínio D , são:

$$a_{43_1} = \max_{z(t) \in D} \{f_{43}(z(t))\} = -2500, \quad a_{43_2} = \min_{z(t) \in D} \{f_{43}(z(t))\} = -2600. \quad (100)$$

Então, a partir de (98), (99), (100) e da Tabela 1, os seguintes modelos locais são obtidos:

$$A_1 = A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367,35 & -3,0612 & 0 & 3,0612 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2600 & -12,5 \end{bmatrix}, \quad (101a)$$

$$A_2 = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367,35 & -3,0612 & 0 & 3,0612 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix}, \quad (101b)$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0,32653 & 0 & -0,8 \end{bmatrix}^T, \quad (101c)$$

$$B_3 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0,40816 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T, \quad (101d)$$

$$H_1 = H_2 = H_3 = H_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}^T, \quad (101e)$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (101f)$$

$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = \mathbf{0}_{2 \times 1}, \quad (101g)$$

$$G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = \mathbf{0}_{2 \times 1}. \quad (101h)$$

Considere que a região de operação \mathcal{X} (4) é dada por: $p = 1$, $h \in \mathbb{K}_1$, $R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\phi = 0,02$. O sinal de controle $F_c(t)$ é limitado entre os valores de $\pm 39,2\text{N}$, de acordo com as sugestões do fabricante e as restrições físicas do equipamento (Quanser Innovate Educate, 2010). Esta saturação do sinal de controle é implementada na prática através de um bloco saturador via *software* Simulink[®]. Então, o conjunto $\mathcal{L}(L_j)$ (13) tem $n_u = 1$, $k \in \mathbb{K}_1$ e $\rho = 39,2$.

O sinal de referência $z_r(t)$, que altera o perfil da pista, pode ser escolhido para reproduzir um sinal senoidal com amplitude de $0,0015\text{m}$ e frequência ($f = 1 + t$)Hz para $0,5 \leq t \leq 9,5\text{s}$, ou seja, a frequência varia linearmente de $1,5$ até $10,5\text{Hz}$. Já para $0 \leq t < 0,5\text{s}$ e $9,5 < t \leq 10\text{s}$ a amplitude de $z_r(t)$ é igual a zero. Observe que $w(t)$ possui energia limitada. Então, considere que $x(0) = 0$, $x(0)^T P x(0) = 0$ e $\int_0^{10} w(t)^T w(t) dt \leq \int_0^{\infty} w(t)^T w(t) dt \leq 0,02$, tal que $\varepsilon_0 = 0$ e $\varepsilon = 0,02$.

Finalmente, para $\varphi = 10$ e $\beta = 0,01$, o problema de otimização dado pelas LMIs (70),

apresentado no Teorema 3, em conjunto com as LMIs (24)-(25), foi resolvido. A solução deste problema de otimização apresentou um custo garantido \mathcal{H}_∞ de $\gamma = 0,0927$. Obteve-se também os seguintes ganhos dos controladores K_j , matrizes simétricas \bar{Q}_j , $j \in \mathbb{K}_4$, e a matriz simétrica definida positiva P :

$$K_1 = \begin{bmatrix} 540,7490 & 85,8203 & -959,0292 & -17,0055 \end{bmatrix}, \quad (102a)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 569,5530 & 87,1733 & -997,7777 & -16,4277 \end{bmatrix}, \quad (102b)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 467,1574 & 83,2382 & -1348,4751 & -27,9562 \end{bmatrix}, \quad (102c)$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 482,0866 & 84,1950 & -1407,2348 & -27,8619 \end{bmatrix}, \quad (102d)$$

$$\bar{Q}_1 = \begin{bmatrix} 802636,08 & 104815,23 & -5219931,14 & -59773,91 \\ 104815,23 & 6651,43 & -173408,81 & -827,31 \\ -5219931,14 & -173408,81 & -2766069,05 & -115346,88 \\ -59773,91 & -827,31 & -115346,88 & -2469,70 \end{bmatrix}, \quad (102e)$$

$$\bar{Q}_2 = \begin{bmatrix} 802635,90 & 104815,16 & -5219933,19 & -59773,84 \\ 104815,16 & 6651,42 & -173408,67 & -827,30 \\ -5219933,19 & -173408,67 & -2766091,42 & -115347,21 \\ -59773,84 & -827,30 & -115347,21 & -2469,69 \end{bmatrix}, \quad (102f)$$

$$\bar{Q}_3 = \begin{bmatrix} 802637,36 & 104815,74 & -5219948,52 & -59774,33 \\ 104815,74 & 6651,53 & -173410,60 & -827,34 \\ -5219948,52 & -173410,60 & -2766094,33 & -115347,77 \\ -59774,33 & -827,34 & -115347,77 & -2469,72 \end{bmatrix}, \quad (102g)$$

$$\bar{Q}_4 = \begin{bmatrix} 802637,25 & 104815,70 & -5219951,73 & -59774,29 \\ 104815,70 & 6651,53 & -173410,43 & -827,34 \\ -5219951,73 & -173410,43 & -2766121,43 & -115348,20 \\ -59774,29 & -827,34 & -115348,20 & -2469,72 \end{bmatrix}, \quad (102h)$$

$$P = \begin{bmatrix} 7,1074 & 0,2849 & 0,2107 & 0,1082 \\ 0,2849 & 0,0177 & -0,1496 & 0,0018 \\ 0,2107 & -0,1496 & 11,4549 & 0,1604 \\ 0,1082 & 0,0018 & 0,1604 & 0,0062 \end{bmatrix}. \quad (102i)$$

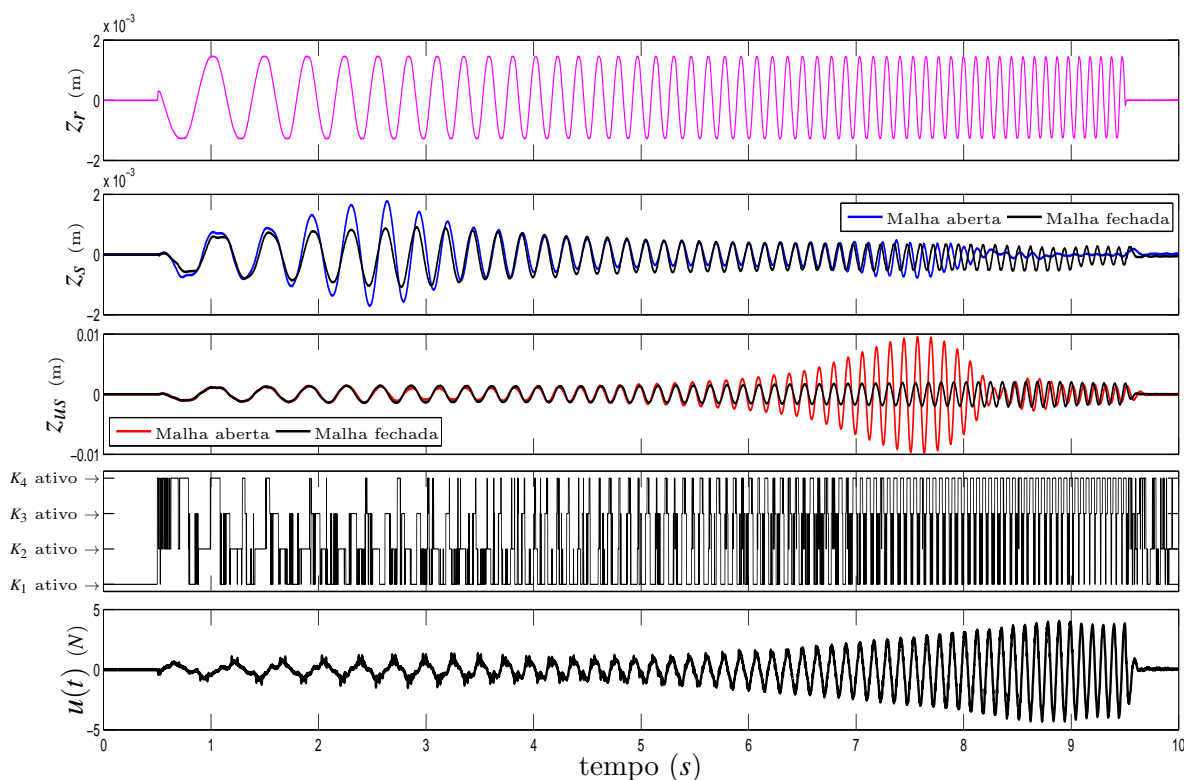
Duas implementações foram realizadas. Na primeira implementação, utilizou-se o sistema em malha aberta ($u(t) = 0$, para $0 \leq t \leq 10s$). Na segunda implementação, a lei de controle chaveada dada em (10) e (102) foi utilizada, considerando uma falha no atuador.

Para adicionar a falha no atuador sem nenhuma alteração física do sistema, uma diminuição de 20% na potência do atuador foi imposta inserindo um ganho $k_{falha} = 0,8$

diretamente no motor, como descrito em (96), utilizando o *software* MatLab/Simulink[®]. Enfatizando que a implementação em malha fechada foi realizada inteiramente com a falha no atuador ($k_{falha}(t) = 0,8$ em (96), para $0 \leq t \leq 10$ s).

A resposta dinâmica do sistema é apresentada na Figura 10. A partir desta figura, observa-se que o sistema em malha aberta é estável, mesmo sem a ação do controlador. Todavia, o sistema apresenta oscilações com grandes amplitudes, causando desconforto ao motorista e alto nível de esforço mecânico, que podem causar danos aos componentes da suspensão. Note que o sistema em malha fechada reduziu as amplitudes máximas de z_s e z_{us} , proporcionando conforto e segurança ao sistema. Finalmente, a minimização do custo garantido \mathcal{H}_∞ mitigou o efeito do distúrbio na saída do sistema.

Figura 10 - Resposta temporal prática para a varredura em frequência do sistema de suspensão ativa em malha aberta e em malha fechada, com falha no atuador.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

3.4.3 Exemplo ilustrativo: pêndulo invertido

Exemplo 3.

Este exemplo tem o objetivo de estudar o problema da estabilidade local para ilustrar a eficácia do projeto de controle chaveado apresentado no Teorema 1 (ALVES et al., 2016b).

Então, considere um pêndulo invertido com a dinâmica dada por (TSENG; CHEN, 2006; CHIU, 2014):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ f_1(z(t)) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f_2(z(t)) \end{bmatrix} \text{sat}(u(t)), \quad (103a)$$

com $z(t) = x(t)$ e

$$f_1(z(t)) = \frac{\text{sinc}\left(\frac{x_1(t)}{\pi}\right) (g - \theta_1 x_2^2 \cos(x_1(t)))}{\frac{4l}{3} - \theta_1 \cos^2(x_1(t))}, \quad f_2(z(t)) = \frac{-\theta_0 \cos(x_1(t))}{\frac{4l}{3} - \theta_1 \cos^2(x_1(t))}, \quad (103b)$$

sendo que

$$\text{sinc}\left(\frac{x_1(t)}{\pi}\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{x_1(t)}{\pi}\right)}{\frac{x_1(t)}{\pi}} \quad (103c)$$

e $x_1(t)$ representa o ângulo (rad) que a haste do pêndulo forma com a vertical, $x_2(t)$ é a velocidade angular (rad/s), $\text{sat}(u(t))$ é o sinal de controle sujeito à saturação (N), $g = 9,8\text{m/s}^2$ é a aceleração da gravidade, $\theta_0 = 1/(m+M)$, $\theta_1 = ml\theta_0$, $m = 0,3\text{kg}$ é a massa do pêndulo, $M = 0,6\text{kg}$ é a massa do carro e $l = 0,5\text{m}$ é a distância entre o centro de massa da haste do pêndulo até sua extremidade.

Para utilizar a metodologia proposta em (TANIGUCHI et al., 2001; SANTIM et al., 2012) é necessário calcular os valores máximos e mínimos das funções não lineares $f_1(z(t))$ e $f_2(z(t))$. Logo, considerando que as funções não lineares pertencem ao domínio D , tal que

$$D = \left\{ z(t) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{3} \leq x_1(t) \leq \frac{\pi}{3}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x_2(t) \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

os valores máximos e mínimos das não linearidades são dados por

$$15,0683 \leq f_1(z(t)) \leq 19,6000 \quad \text{e} \quad -2,2222 \leq f_2(z(t)) \leq -0,8889. \quad (104)$$

Então, utilizando a metodologia proposta em (TANIGUCHI et al., 2001; SANTIM et al., 2012), o sistema dado em (103) pode ser representado através do modelo fuzzy T-S dado em (6), considerando distúrbio externo nulo ($w(t) = 0$) para $t \geq 0$, sendo que

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 15,0683 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 19,6000 & 0 \end{bmatrix}, \quad (105a)$$

$$B_1 = B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2,2222 \end{bmatrix}, \quad B_2 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,8889 \end{bmatrix}. \quad (105b)$$

A região de operação \mathcal{X} , na qual o modelo fuzzy T-S (6) é válido, é dada em (4), sendo que $p = 2$, $h \in \mathbb{K}_2$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\phi = \left[\frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{2} \right]^T$. A região $\mathcal{L}(L_j)$ é dada em (13), sendo que $n_u = 1$, $k \in \mathbb{K}_1$ e $\rho = 5$. A partir de (9), considera-se que $v_0 = 1$, tal que o

conjunto elipsoidal é dado por $\mathcal{E}(V, 1)$.

Baseado no Lema 3, deseja-se encontrar um conjunto de condições iniciais dado por $\mathfrak{X} = \bar{\omega} \text{co}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_L}\}$, $\bar{\omega} > 0$, tal que $\mathfrak{X} \subset \mathcal{E}(V, 1)$. No caso do pêndulo invertido, será considerada uma condição inicial $x(0) = [\bar{\omega} \ 0]^T$, tal que a minimização de $\bar{\omega}^{-2}$ irá fornecer uma estimativa menos conservadora para $x_1(0)$ (posição angular inicial), sendo que $n_L = 1$ e $\mathbf{v}_1 = [1 \ 0]^T$. Logo, a partir do Lema 3 e do Teorema 1 e considerando os modelos locais (105), tem-se o seguinte problema de otimização:

$$\text{Problema de otimização: } \begin{cases} \min \bar{\omega}^{-2} \\ \text{sujeito as condições do Teorema 1 e do Lema 3.} \end{cases} \quad (106)$$

Resolvendo o problema de otimização, dado em (106), obteve-se $\bar{\omega} = 0,2245$ e os seguintes ganhos de realimentação do vetor de estado K_j , as matrizes simétricas \bar{Q}_j , $j \in K_4$, e a matriz simétrica definida positiva P:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -10,9750 & -3,0881 \end{bmatrix}, \quad (107a)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -11,2399 & -3,1612 \end{bmatrix}, \quad (107b)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -38,1728 & -10,3547 \end{bmatrix}, \quad (107c)$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -41,9615 & -11,4141 \end{bmatrix}, \quad (107d)$$

$$\bar{Q}_1 = \begin{bmatrix} 9986178681,9237 & 2261112065,9330 \\ 2261112065,9330 & 510830562,1186 \end{bmatrix}, \quad (107e)$$

$$\bar{Q}_2 = \begin{bmatrix} 9986178678,9132 & 2261112065,0309 \\ 2261112065,0309 & 510830561,8488 \end{bmatrix}, \quad (107f)$$

$$\bar{Q}_3 = \begin{bmatrix} 9986178641,2722 & 2261112057,8400 \\ 2261112057,8400 & 510830561,0151 \end{bmatrix}, \quad (107g)$$

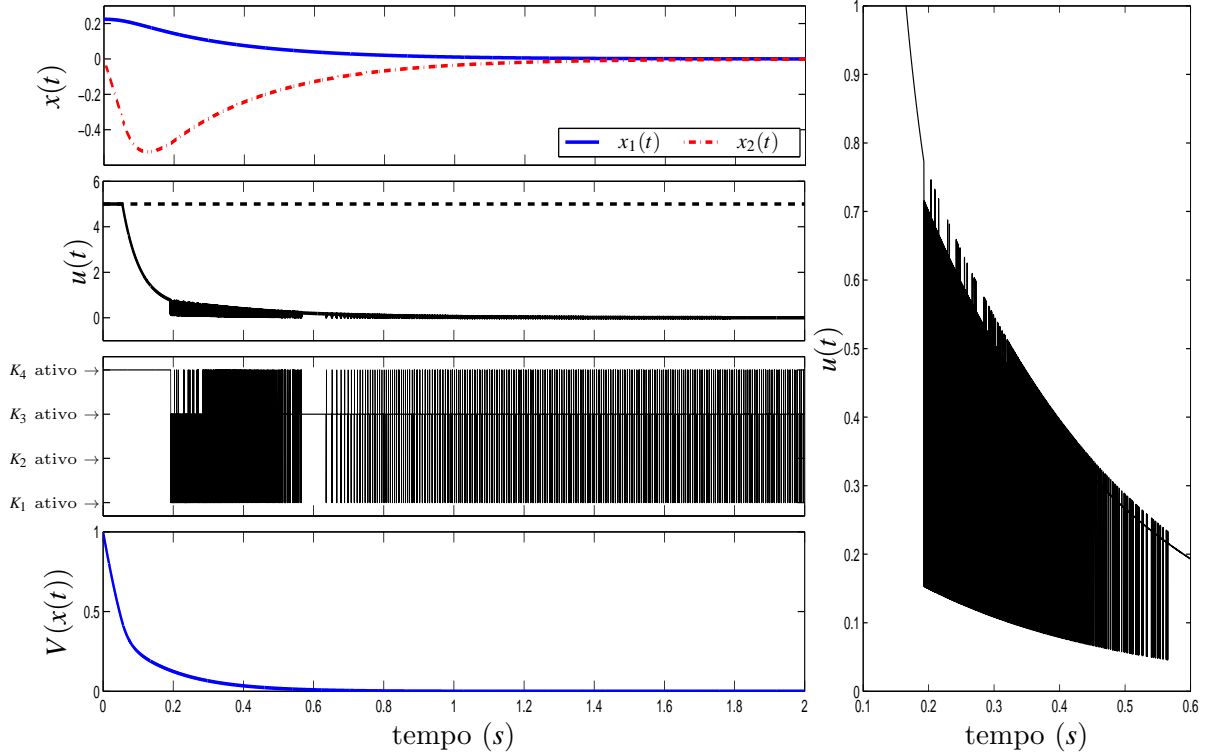
$$\bar{Q}_4 = \begin{bmatrix} 9986178640,3551 & 2261112058,0074 \\ 2261112058,0074 & 510830561,2078 \end{bmatrix}, \quad (107h)$$

$$P = \begin{bmatrix} 19,8437 & 4,2974 \\ 4,2974 & 1,3359 \end{bmatrix}. \quad (107i)$$

Considere a condições inicial $x(0) = [\bar{\omega} \ 0]^T = [0,2245 \ 0]^T$. A lei de controle chaveada (10), com o conjunto de controladores e matrizes auxiliares dados em (107), foi utilizada para realizar uma simulação do sistema de pêndulo invertido (103) via *software* MatLab/Simulink[®]. O resultado da simulação é apresentado na Figura 11.

A partir da Figura 11, note que para a condição inicial $x(0) = [0,2245 \ 0]^T$, tem-

Figura 11 - Comportamento dinâmico do sistema de pêndulo invertido (103) utilizando a lei de controle chaveada (10): a trajetória do vetor de estado $x(t)$, a lei de controle chaveada (10) e a energia do sistema $V(x(t))$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

se que $V(x(0)) = 1$. De acordo com o Teorema 1, as condições de projeto garantem que o conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(V, 1)$ é um conjunto positivamente invariante do domínio de atração. Este fato foi confirmado, pois para $x(0) \in \mathcal{E}(V, 1)$, a lei de controle chaveada (10) confinou todas as trajetórias do vetor de estado dentro do conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(V, 1)$ e, conseqüentemente, dentro da região de operação \mathcal{X} e da região $\mathcal{L}(L_j)$. Além disso, a lei de controle chaveada (10) garantiu que a origem é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema de pêndulo invertido, dado em (103).

Por fim, pode-se observar que nos primeiros instantes de simulação o sinal de controle apresentou saturação. A partir do quadro em destaque à direita na Figura 11, observou-se que a frequência rápida de chaveamento causou descontinuidade do sinal de controle $u(t)$.

3.5 Conclusões parciais

Um projeto de controle \mathcal{H}_∞ chaveado para uma classe de sistemas não lineares incertos, sujeito à saturação do atuador e distúrbios de energia limitada, foi proposto neste capítulo. A lei de controle chaveada assegura que todas as trajetórias do vetor de estado

permanecem dentro de uma região, na qual o sistema não linear incerto pode ser descrito exatamente por modelos fuzzy T-S. As duas principais vantagens do método proposto são: *i*) Para a implementação da lei de controle chaveada não é necessário encontrar as expressões das funções de pertinência. Assim, o procedimento proposto permite que as funções de pertinência dependam de parâmetros incertos ou desconhecidos; *ii*) As condições de projeto não dependem da magnitude do distúrbio, ao contrário do método apresentado (LEE et al., 2015b) que só é aplicado em sistemas sujeitos a distúrbios de magnitude limitada.

Considerando o sistema caótico Lorenz, descrito no primeiro exemplo, o projeto de controle chaveado, proposto no Teorema 3, apresentou melhores resultados quando comparado ao projeto de controle proposto no Corolário 1, que usa apenas um controlador. Para os distúrbios de grande magnitude, os métodos propostos proporcionaram melhores resultados, mesmo quando comparados com o procedimento apresentado em (LEE et al., 2015b), que considera pleno acesso às funções de pertinência.

Uma implementação prática usando um sistema de suspensão ativa ilustrou a eficácia prática da metodologia proposta e mostrou que o controle chaveado \mathcal{H}_∞ é capaz de mitigar a ação de um distúrbio na saída do sistema, mesmo com uma falha no atuador.

Finalmente, um sistema de pêndulo invertido foi utilizado para ilustrar a eficácia do projeto de controle apresentado no Teorema 1 (ALVES et al., 2016b). Observou-se que as condições de projeto garantiram que o conjunto elipsoidal $\mathcal{E}(V, 1)$ é um conjunto positivamente invariante do domínio de atração e a lei de controle chaveada (10) assegurou que o sistema realimentado é localmente assintoticamente estável. Foi possível destacar que a lei de controle chaveada (10) pode apresentar descontinuidade do sinal de controle, em virtude do chaveamento dos controladores.

4 SISTEMA NÃO LINEAR INCERTO SUJEITO À SATURAÇÃO DO ATUADOR UTILIZANDO O VETOR DE ESTADO EXPANDIDO

Neste capítulo são apresentados resultados preliminares, essenciais para o desenvolvimento dos projetos de controle que serão propostos no Capítulo 5. Todo o desenvolvimento deste capítulo baseia-se na utilização de um vetor de estado expandido, composto pelo sinal de controle. Então, considerando que o vetor de estado é dado por $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ e o sinal de controle é dado por $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$, o vetor de estado expandido é definido como

$$\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_x+n_u}. \quad (108)$$

Considere um sistema não linear incerto sujeito a saturação do atuador e distúrbio externo, dado em (2), descrito por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_1(z(t))x(t) + f_2(z(t))\text{sat}(u(t)) + f_3(z(t))w(t), \\ y(t) &= g_1(z(t))x(t) + g_2(z(t))\text{sat}(u(t)) + g_3(z(t))w(t), \end{aligned}$$

sendo que $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ é o vetor de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é o vetor de entrada, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ é a entrada exógena com energia limitada tal que $w(t) \in \mathcal{L}_2$ e $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ é o vetor de saída. A dinâmica do sistema não linear incerto é dada pelas funções não lineares $f_1(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $f_2(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $f_3(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{n_x \times n_w}$. Já a saída do sistema é dada pelas funções não lineares $g_1(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$, $g_2(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ e $g_3(\cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{n_y \times n_w}$. $z(t) \in \mathbb{R}^q$ é o vetor cujas os elementos $z_l(t)$, $l \in \mathbb{K}_q$, são as variáveis de premissa que dependem do vetor de estado $x(t)$ e de parâmetros incertos ou variáveis desconhecidas, e $\text{sat}(u(t)) \in \mathbb{R}^{n_u}$ é a entrada de controle sujeita à saturação, dada em (3), tal que

$$\text{sat}(u(t)) = \begin{bmatrix} \text{sat}(u_1(t)) \\ \vdots \\ \text{sat}(u_{n_u}(t)) \end{bmatrix}, \quad \text{sat}(u_k(t)) = \begin{cases} -\rho_k, & \text{se } u_k(t) < -\rho_k, \\ u_k(t), & \text{se } |u_k(t)| \leq \rho_k, \\ \rho_k, & \text{se } u_k(t) > \rho_k, \end{cases} \quad \forall k \in \mathbb{K}_{n_u},$$

sendo que ρ_k , $k \in \mathbb{K}_{n_u}$, são constantes positivas com valores conhecidos.

As próximas seções têm o objetivo de representar a dinâmica do sistema não linear incerto (2) em função do vetor de estado expandido $\tilde{x}(t)$.

4.1 A região de operação \mathcal{U} na qual o sinal de controle não apresenta saturação

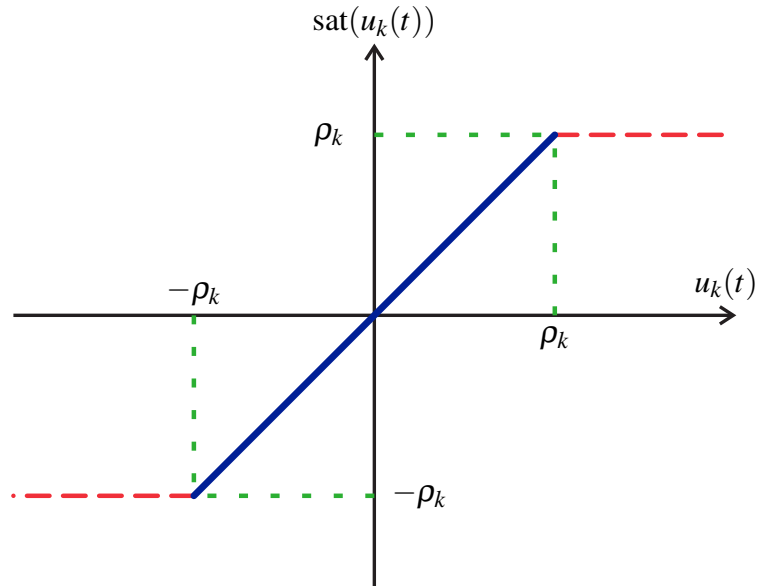
Primeiramente, observe que a dinâmica do sistema não linear (2) é dada em função da entrada de controle sujeita à saturação $\text{sat}(u(t))$. Então, o objetivo é descrever a dinâmica do sistema não linear em função da entrada de controle $u(t)$.

A partir de (3) e da Figura 12, observe que $\text{sat}(u_k(t)) = u_k(t)$ se $|u_k(t)| \leq \rho_k$, $k \in \mathbb{K}_{n_u}$. Logo, a região de operação para a entrada de controle é definida como

$$\mathcal{U} := \{u(t) \in \mathbb{R}^{n_u} : |u_k(t)| \leq \rho_k, k \in \mathbb{K}_{n_u}\}, \quad (110)$$

sendo $\rho = [\rho_1 \cdots \rho_{n_u}]^T \in \mathbb{R}^{n_u}$ conhecidos. Para $u(t) \in \mathcal{U}$ a entrada de controle opera na região linear da saturação, ou seja, $\text{sat}(u(t)) = u(t)$.

Figura 12 - Interpretação gráfica da função $\text{sat}(u_k(t))$, $k \in \mathbb{K}_{n_u}$, com destaque para a região linear da saturação (linha contínua grossa em azul).



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Consequentemente, para $u(t) \in \mathcal{U}$, o sistema não linear incerto (2) pode ser representado por

$$\dot{x}(t) = f_1(z(t))x(t) + f_2(z(t))u(t) + f_3(z(t))w(t), \quad (111a)$$

$$y(t) = g_1(z(t))x(t) + g_2(z(t))u(t) + g_3(z(t))w(t). \quad (111b)$$

Resumindo, garantir que $u(t) \in \mathcal{U}$, $\forall t \geq 0$, será um dos objetivos dos problemas de controle que serão apresentados nas próximas seções.

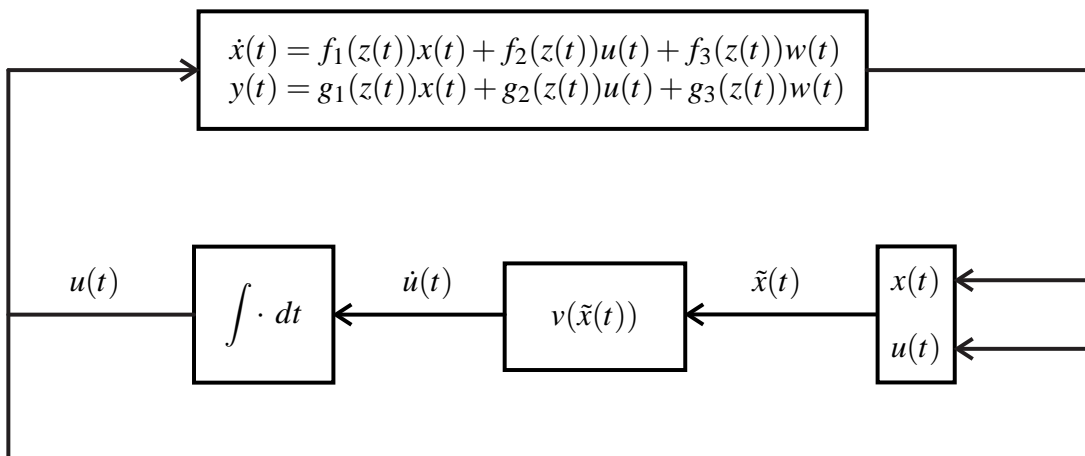
4.2 Esquema de controle utilizando realimentação do vetor de estado expandido

Considere o esquema de controle proposto na Figura 13. A partir deste diagrama de controle, observe que a derivada temporal da lei de controle $u(t)$ é dada por $v(\tilde{x}(t))$, tal que:

$$v(\tilde{x}(t)) = v(x(t), u(t)) = \dot{u}(t), \quad (112)$$

para $u(t) \in \mathcal{U}, \forall t \geq 0$.

Figura 13 - Esquema de controle com realimentação do vetor de estado expandido.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Ainda neste capítulo, serão definidas duas leis de controle $v(\tilde{x}(t))$. A primeira lei de controle, denominada $v_z(\tilde{x}(t))$, é baseada na compensação distribuída paralela e utiliza as funções de pertinência (α) durante a implementação. No entanto, por se tratar do controle de um sistema não linear incerto, considera-se que as funções de pertinência não estão disponíveis para implementação, pois usualmente dependem de parâmetros incertos. Desta forma, propõe-se uma lei de controle chaveada, denominada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, sendo que a metodologia proposta não utiliza as funções de pertinência durante a implementação, porém mantém as mesmas relaxações de projeto que a lei de controle $v_z(\tilde{x}(t))$ proporciona. Mais detalhes sobre estas duas leis de controle serão apresentadas nas próximas seções.

No entanto, como apresentado anteriormente, um das desvantagens de uma lei de controle chaveada é a possibilidade da ocorrência do *chattering*, que é um fenômeno indesejado caracterizado por um chaveamento com frequência infinitamente rápida. Desta forma, deve-se destacar a principal vantagem da lei de controle $v(\tilde{x}(t))$ proposta em (112). Observe que em (112) a lei de controle $v(\tilde{x}(t))$ é definida em relação à derivada temporal da lei de controle $u(t)$. Na prática, o sinal de controle implementado é dado por $u(t)$, que é obtido a partir da integral de $v(\tilde{x}(t))$. Esse procedimento não impede um chaveamento com frequência rápida, entretanto é possível eliminar uma possível descontinuidade do sinal de controle, mitigando um dos efeitos indesejados do *chattering*.

4.3 Representação exata do sistema não linear incerto através do modelo fuzzy T-S

Inicialmente, considere a região de operação \mathcal{X} no espaço de estados, definida em (4), e a região de operação para a entrada de controle \mathcal{U} , definida em (110). A partir destas duas regiões de operação, pode-se estabelecer uma região de operação $\mathcal{S} = \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ que será denominada de região de operação expandida. Considerando o vetor de estado expandido $\tilde{x}(t)$, dado em (108), a região de operação expandida \mathcal{S} é definida como

$$\mathcal{S} := \{ \tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x+n_u} : |S_{(m)}\tilde{x}(t)| \leq \vartheta_m, m \in \mathbb{K}_{p+n_u} \}, \quad (113)$$

sendo que $S = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I_{n_u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{(1)}^T & \cdots & S_{(p+n_u)}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{(p+n_u) \times (n_x+n_u)}$ e

$$\vartheta = \begin{bmatrix} \vartheta_1 = \phi_1 & \cdots & \vartheta_p = \phi_p & \vartheta_{p+1} = \rho_1 & \cdots & \vartheta_{p+n_u} = \rho_{n_u} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \phi^T & \rho^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{p+n_u}, \quad (114)$$

são parâmetros conhecidos a partir de (4) e (110).

Na região de operação \mathcal{S} o sistema não linear incerto sujeito à saturação, dado em (2), pode ser representado pelo sistema não linear incerto (111), pois para $u(t) \in \mathcal{U}$ a entrada de controle se encontra em uma região linear, ou seja, $\text{sat}(u(t)) = u(t)$. Além disso, o sistema não linear incerto (111) pode ser exatamente descrito pelo modelo fuzzy T-S como descrito em (115) e (116):

$$\begin{array}{l} \text{Regra } i: \text{ SE } z_1(t) \text{ é } \mu_{i1} \text{ e } \dots \text{ e } z_q(t) \text{ é } \mu_{iq}, \\ \text{ENTÃO } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t) + H_i w(t), \\ y(t) = C_i x(t) + D_i u(t) + G_i w(t), \end{cases} \end{array} \quad (115)$$

A partir de (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998), das definições dadas em (1) e (115), $\dot{x}(t)$ e $y(t)$ dadas em (115) podem ser escritas como segue:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t) + H_i w(t)) = A_z x(t) + B_z u(t) + H_z w(t), \quad (116a)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) (C_i x(t) + D_i u(t) + G_i w(t)) = C_z x(t) + D_z u(t) + G_z w(t), \quad (116b)$$

sendo

$$\alpha_i(z(t)) = \frac{\mu_{i1}(z_1(t)) \times \cdots \times \mu_{iq}(z_q(t))}{\sum_{i=1}^r (\mu_{i1}(z_1(t)) \times \cdots \times \mu_{iq}(z_q(t)))}, \quad (117)$$

e $\mu_{il}(z_l(t))$ é a função de pertinência, em termos de variáveis desconhecidas ou parâmetros incertos, correspondente ao conjunto fuzzy μ_{il} , $i \in \mathbb{K}_r$ e $l \in \mathbb{K}_q$. O elemento α_i do vetor $\alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r]^T \in \Lambda_r$ dado em (1) é o peso normalizado de cada modelo local do sistema $(A_i, B_i, C_i, D_i, G_i, H_i)$ definido em (115), para $i \in \mathbb{K}_r$.

Utilizando o esquema de controle com realimentação do vetor de estado expandido, dado em (112) e na Figura 13, e considerando a representação do sistema não linear incerto dada em (116), pode-se representar a dinâmica do vetor de estado expandido, tal que

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_z & B_z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} v(\tilde{x}(t)) + \begin{bmatrix} H_z \\ 0 \end{bmatrix} w(t), \quad (118a)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C_z & D_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} + G_z w(t). \quad (118b)$$

Reescrevendo (118), obtém-se

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}_z \tilde{x}(t) + \tilde{B} v(\tilde{x}(t)) + \tilde{H}_z w(t), \quad (119a)$$

$$y(t) = \tilde{C}_z \tilde{x}(t) + \tilde{G}_z w(t), \quad (119b)$$

sendo que

$$\tilde{A}_z = \begin{bmatrix} A_z & B_z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \tilde{H}_z = \begin{bmatrix} H_z \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{C}_z = \begin{bmatrix} C_z & D_z \end{bmatrix}, \tilde{G}_z = G_z. \quad (119c)$$

4.4 Candidata a função de Lyapunov e o conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(V, v_0)$

Considere a candidata a função de Lyapunov quadrática

$$V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T P \tilde{x}(t), \quad (120)$$

sendo que $P \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)}$ é uma matriz simétrica definida positiva. Para uma dada constante positiva v_0 , define-se o seguinte conjunto elipsoidal:

$$\tilde{\mathcal{E}}(V, v_0) := \{ \tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x+n_u} : \tilde{x}(t)^T P \tilde{x}(t) \leq v_0 \}. \quad (121)$$

4.5 Lei de controle utilizando o vetor de estado expandido

Inicialmente, considere o esquema de controle com realimentação do vetor de estado expandido, dado em (112) e na Figura 13. A seguir, duas leis de controle distintas serão apresentadas.

4.5.1 Lei de controle dependente das funções de pertinência

Primeiramente, baseada na compensação distribuída paralela, considere a seguinte lei de controle dependente do parâmetro α :

$$\begin{aligned} \text{Regra } i: \quad & \text{SE } z_1(t) \text{ é } \mu_{i1} \text{ e } \dots \text{ e } z_q(t) \text{ é } \mu_{iq}, \\ & \text{ENTÃO } v_z(\tilde{x}(t)) = -K_i \tilde{x}(t) \end{aligned} \quad (122)$$

e a partir das definições dadas em (1) e (122), $v_z(\tilde{x}(t))$ pode ser escrita como segue:

$$v_z(\tilde{x}(t)) = - \sum_{i=1}^r \alpha_i K_i \tilde{x}(t) = -K_z \tilde{x}(t). \quad (123)$$

Observe que para realizar a implementação da lei de controle (123), é necessário ter pleno acesso às variáveis de pertinência que compõem α , definido em (1) e (7). Entretanto, em sistemas não lineares incertos, frequentemente as variáveis de pertinência dependem de parâmetros incertos ou imensuráveis. Logo, a lei de controle proposta em (123) não será implementada.

Mesmo que a lei de controle (123) não seja implementável, é necessário defini-la, pois a metodologia utilizada neste capítulo baseia-se nela para desenvolver os projetos de controle. Então, resumidamente, as LMIs serão estabelecidas supondo a lei de controle dependente de α , dada em (123). Entretanto, durante a implementação, será utilizada a lei de controle chaveada proposta a seguir.

4.5.2 Lei de controle chaveada

Baseando-se em (SOUZA et al., 2013), considere a lei de controle chaveada utilizando o vetor de estado expandido, dada por:

$$v_\sigma(\tilde{x}(t)) = -K_\sigma \tilde{x}(t), \quad \sigma = \arg^* \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{-\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} K_i \tilde{x}(t)\}, \quad (124)$$

sendo que $\arg^* \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{-\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} K_i \tilde{x}(t)\}$ denota o menor índice σ , tal que $-\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} K_\sigma \tilde{x}(t) = \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{-\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} K_i \tilde{x}(t)\}$.

O procedimento proposto utiliza a regra de chaveamento σ , dada em (124), tal que o produto $-\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} K_i \tilde{x}(t)$, $i \in \mathbb{K}_r$, é utilizado para determinar o valor do índice σ . Este índice σ seleciona um ganho do controlador de realimentação do vetor de estado expandido, que pertence ao conjunto de ganhos $\{K_i \in \mathbb{R}^{n_u \times (n_x + n_u)}, i \in \mathbb{K}_r\}$.

Esta regra de chaveamento σ é projetada com o propósito de eliminar a necessidade de utilizar as funções de pertinência na implementação da lei de controle. A ideia principal

parte do fato de que o mínimo de um conjunto de números reais é menor ou igual do que qualquer combinação convexa dos elementos do conjunto. De fato, para $i \in \mathbb{K}_r$ e sendo $\alpha_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, tem-se que $\min_{i \in \mathbb{K}_r} \{a_i\} = \alpha_1 \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{a_i\} + \alpha_2 \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{a_i\} + \cdots + \alpha_r \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{a_i\} \leq \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_r a_r = \sum_{i=1}^r \alpha_i a_i$.

Então, propõe-se que os projetos de controle sejam elaborados considerando a lei de controle $v_z(\tilde{x}(t))$, dada em (123), obtendo assim os ganhos de realimentação do vetor de estado expandido $K_i \in \mathbb{R}^{n_u \times (n_x + n_u)}$, $i \in \mathbb{K}_r$. No entanto, será implementada a lei de controle $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (124), sendo que a regra de chaveamento $\sigma = \arg^* \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{-\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} K_i \tilde{x}(t)\}$, irá selecionar um ganho de realimentação K_i , $i \in \mathbb{K}_r$ (calculados anteriormente) que minimiza a derivada temporal da função de Lyapunov (120). Por sua vez, utilizando o fato de que o mínimo de um conjunto de números reais é menor ou igual que qualquer combinação convexa dos elementos do conjunto, prova-se que a derivada temporal da função de Lyapunov utilizando a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (124), é menor ou igual do que a derivada temporal da função de Lyapunov utilizando a lei de controle $v_z(\tilde{x}(t))$, dada em (123).

Basicamente, pode-se afirmar que a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$ sintetiza a lei de controle dependente das funções de pertinência $v_z(\tilde{x}(t))$. Esta metodologia adotada mantém a flexibilização nas LMIs proporcionada ao projetar um ganho de realimentação K_i para cada modelo local (A_i, B) , $i \in \mathbb{K}_r$, que é uma das principais vantagens da lei de controle $v_z(\tilde{x}(t))$. Além disso, a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$ elimina a necessidade de possuir pleno acesso às variáveis de pertinência.

4.6 O problema da estabilidade considerando a região de operação expandida e distúrbio nulo

Inicialmente, o problema de controle será definido para $w(t) = 0$, ou seja, trata-se apenas do problema de estabilidade local. O objetivo é determinar uma lei de controle que, para $w(t) = 0$ e $t \geq 0$, garanta que a origem $\tilde{x} = 0$ seja um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema não linear incerto (119) e o conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(V, v_0)$ seja um conjunto positivamente invariante do domínio de atração (HU; LIN; CHEN, 2002) (ou seja, se $\tilde{x}(0)$ pertence ao conjunto $\tilde{\mathcal{E}}(V, v_0)$, então todas as trajetórias de $\tilde{x}(t)$, $t > 0$, também irão permanecer dentro deste conjunto). Dada a candidata a função de Lyapunov $V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T P \tilde{x}(t)$, o conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(V, v_0)$ é considerado um conjunto positivamente invariante do domínio de atração se $\dot{V}(\tilde{x}(t)) < 0$, para $w(t) = 0$ e $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, v_0) \setminus \{0\}$.

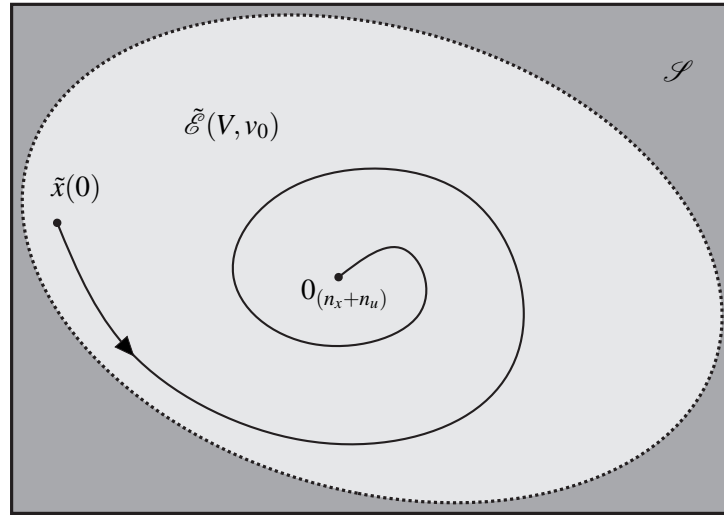
Além disso, a relação de inclusão $\tilde{\mathcal{E}}(V, v_0) \subset \mathcal{S}$ deve ser garantida, pois se $\tilde{\mathcal{E}}(V, v_0)$ é um conjunto positivamente invariante do domínio de atração, a restrição $\tilde{\mathcal{E}}(V, v_0) \subset \mathcal{S}$

garante que:

- o sinal de controle sujeito a saturação $\text{sat}(u(t))$ estará confinado dentro da região linear da saturação, podendo ser representado por $\text{sat}(u(t)) = u(t)$. Ou seja, se $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, v_0)$, consequentemente $\tilde{x}(t) \in \mathcal{S}$, logo $u(t) \in \mathcal{U}$ e o sistema não linear incerto, dado em (2), pode ser representado por (111).
- o sistema não linear incerto (111) pode ser exatamente descrito pelo modelo fuzzy T-S dado em (116). Ou seja, se $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, v_0)$, consequentemente $\tilde{x}(t) \in \mathcal{S}$, logo $u(t) \in \mathcal{U}$ e $x(t) \in \mathcal{X}$ e o sistema não linear incerto (2) é dado por (116).

Estas propriedades são ilustradas na Figura 14.

Figura 14 - Relação de inclusão entre os conjuntos \mathcal{S} e $\tilde{\mathcal{E}}(V, v_0)$, e a trajetória do vetor de estado expandido $\tilde{x}(t)$ para $w(t) = 0$ e $t \geq 0$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

4.7 O problema de controle \mathcal{H}_∞ considerando a região de operação expandida

Assim como apresentado no problema de controle \mathcal{H}_∞ da Seção 2.6, novamente considera-se que o distúrbio $w(t)$ possui energia limitada, tal que $w(t) \in \mathcal{W}$. Assim como definido em (17), tem-se que

$$\mathcal{W} := \left\{ w(t) \in \mathbb{R}^{n_w} : \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \leq \varepsilon \right\}.$$

Além disso, considere a variável de relaxação $\varphi > 0$ e a constante $\varepsilon_0 \geq 0$.

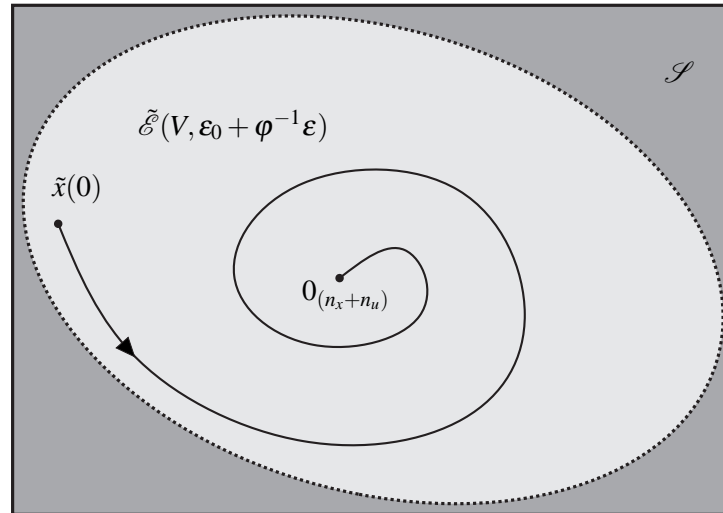
Logo, o problema de controle \mathcal{H}_∞ para um sistema não linear, considerando a região de operação expandida \mathcal{S} , consiste em determinar uma lei de controle que satisfaça os seguintes requisitos:

1. para $w(t) = 0$, $t \geq 0$, a origem $\tilde{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema não linear incerto (119) e o conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varphi}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})$ é um conjunto positivamente invariante do domínio de atração (HU; LIN; CHEN, 2002) (ou seja, se $\tilde{x}(0)$ pertence ao conjunto $\tilde{\mathcal{E}}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varphi}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})$, então todas as trajetórias de $\tilde{x}(t)$, $t > 0$, também irão permanecer dentro deste conjunto). A Figura 15 ilustra esta propriedade.
2. para $w(t) \in \mathcal{W}$, qualquer trajetória com condição inicial dentro de $\tilde{\mathcal{E}}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0)$ (ou seja, $\tilde{x}(0)^T P \tilde{x}(0) \leq \boldsymbol{\varepsilon}_0$) não irá escapar do conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varphi}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})$, para todo $t \geq 0$. Esta propriedade é ilustrada na Figura 16.
3. para $w(t) \in \mathcal{W}$ e $\tilde{x}(0) = 0$, o sistema realimentado (119) possui um custo garantido \mathcal{H}_∞ igual a $\gamma > 0$, satisfazendo a seguinte desigualdade:

$$\|y(t)\|_2^2 \leq \gamma^2 \|w(t)\|_2^2, \quad \forall \alpha \in \Lambda_r. \quad (125)$$

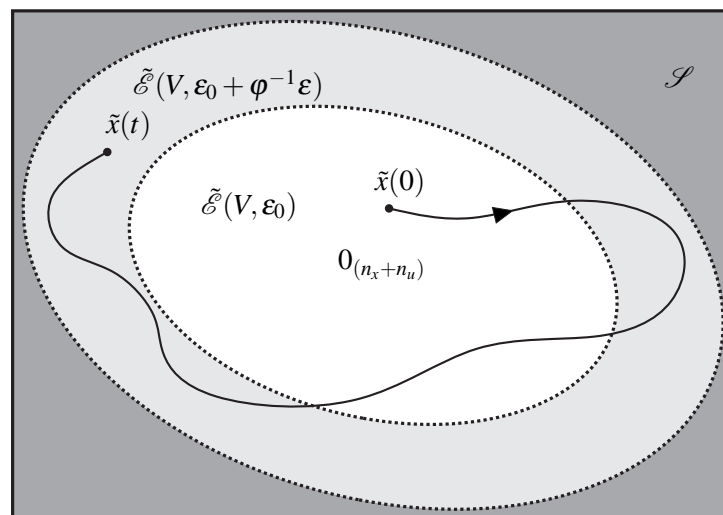
4. A relação de inclusão $\tilde{\mathcal{E}}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varphi}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}) \subset \mathcal{S}$ deve ser garantida, pois se $\tilde{\mathcal{E}}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varphi}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})$ é um conjunto positivamente invariante do domínio de atração, a restrição $\tilde{\mathcal{E}}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varphi}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}) \subset \mathcal{S}$ garante que:
 - o sinal de controle sujeito a saturação $\text{sat}(u(t))$ está confinado dentro da região linear da saturação, podendo ser representado por $\text{sat}(u(t)) = u(t)$. Ou seja, se $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varphi}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})$, conseqüentemente $\tilde{x}(t) \in \mathcal{S}$, logo $u(t) \in \mathcal{U}$ e o sistema não linear incerto (2) é dado por (111).
 - o sistema não linear incerto (111) pode ser exatamente descrito pelo modelo fuzzy T-S dado em (116). Ou seja, se $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varphi}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})$, conseqüentemente $\tilde{x}(t) \in \mathcal{S}$, logo $u(t) \in \mathcal{U}$ e $x(t) \in \mathcal{X}$ e o sistema não linear incerto, dado em (2), pode ser representado por (116).

Figura 15 - Relação de inclusão entre os conjuntos \mathcal{S} e $\tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$, e a trajetória do vetor de estado $\tilde{x}(t)$ para $w(t) = 0$ e $t \geq 0$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 16 - Relações de inclusão entre os conjuntos \mathcal{S} , $\tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$ e $\tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0)$, e a trajetória do vetor de estado $\tilde{x}(t)$ para $w(t) \in \mathcal{W}$ e $t \geq 0$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

4.8 Relação de inclusão entre os conjuntos da região de operação expandida

A partir dos problemas de controle apresentados nas Seções 4.6 e 4.7, observe que existe uma relação de inclusão entre os conjuntos \mathcal{S} e $\tilde{\mathcal{E}}(V, v_0)$ que deve ser garantida. O Lema 8 apresenta uma condição que garante esta relação de inclusão.

Lema 8. Considere os conjuntos \mathcal{S} e $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{V}, v_0)$ dados em (113) e (121), respectivamente. A condição $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{V}, v_0) \subset \mathcal{S}$ é assegurada se a seguinte LMI for factível:

$$\begin{bmatrix} \vartheta_m^2 v_0^{-1} & * \\ \mathbf{X} \mathbf{S}_{(m)}^T & \mathbf{X} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (126)$$

para todo $m \in \mathbb{K}_{n_x+n_u}$, sendo que $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}$.

Demonstração. Multiplicando ambos os lados de (126) por $\text{diag}\{1, \mathbf{P}\}$, sendo $\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1}$, e aplicando o complemento de Schur, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{P} - \mathbf{S}_{(m)}^T \vartheta_m^{-2} v_0 \mathbf{S}_{(m)} &\geq 0, \\ \mathbf{P} &\geq \mathbf{S}_{(m)}^T \vartheta_m^{-2} v_0 \mathbf{S}_{(m)}, \\ \tilde{\mathbf{x}}(t)^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}(t) &\geq \tilde{\mathbf{x}}(t)^T \mathbf{S}_{(m)}^T \vartheta_m^{-2} v_0 \mathbf{S}_{(m)} \tilde{\mathbf{x}}(t). \end{aligned}$$

Considerando $\tilde{\mathbf{x}}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{V}, v_0)$, de (121) tem-se que $\tilde{\mathbf{x}}(t)^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}(t) \leq v_0$ e assim

$$\begin{aligned} v_0 &\geq \tilde{\mathbf{x}}(t)^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}(t) \geq \vartheta_m^{-2} v_0 \tilde{\mathbf{x}}(t)^T \mathbf{S}_{(m)}^T \mathbf{S}_{(m)} \tilde{\mathbf{x}}(t), \\ \vartheta_m^2 &\geq \tilde{\mathbf{x}}(t)^T \mathbf{S}_{(m)}^T \mathbf{S}_{(m)} \tilde{\mathbf{x}}(t). \end{aligned}$$

Portanto, a partir de (113), para $m \in \mathbb{K}_{n_x+n_u}$, observe que $\tilde{\mathbf{x}}(t) \in \mathcal{S}$ e, consequentemente, $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{V}, v_0) \subset \mathcal{S}$. \square

4.9 Expansão do volume do conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{V}, 1)$

A seguir, dois lemas são apresentados com o propósito de expandir o volume do conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{V}, 1)$. As demonstrações seguem os mesmos passos dos lemas apresentados na Seção 2.8.

Lema 9. O conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{V}, 1)$ pode ser expandido ao inserir a restrição $\{\tilde{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^{n_x+n_u} : \tilde{\mathbf{x}}(t)^T \tilde{\mathbf{x}}(t) \leq \beta\} \subset \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{V}, 1)$, que é imposta se a LMI

$$\begin{bmatrix} \beta^{-1} \mathbf{I} & * \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (127)$$

é factível, sendo que β é uma constante positiva e pode ser utilizada como uma variável a ser maximizada, de forma a obter uma estimativa menos conservadora do conjunto de condições iniciais $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{V}, 1)$

Lema 10. Seja um conjunto de condições iniciais desejadas para o sistema não linear,

dado por $\tilde{\mathcal{X}} = \varpi \text{co}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_L}\}$, $\varpi > 0$, então a condição $\tilde{\mathcal{X}} \subset \tilde{\mathcal{E}}(V, 1)$ é assegurada caso

$$\begin{bmatrix} \varpi^{-2} & * \\ \mathbf{v}_\ell & X \end{bmatrix} \geq 0 \quad (128)$$

seja satisfeita $\forall \ell \in \mathbb{K}_{n_L}$. Observe que ϖ é um fator de escala do conjunto $\text{co}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_L}\}$, portanto, ϖ pode ser utilizado como uma variável a ser maximizada (minimização de ϖ^{-2}) de forma a obter uma estimativa menos conservadora do conjunto de condições iniciais $\tilde{\mathcal{E}}(V, 1)$.

5 CONTROLE CHAVEADO PARA SISTEMAS NÃO LINEARES INCERTOS DESCRITOS POR MODELOS FUZZY T-S CONSIDERANDO REGIÃO DE OPERAÇÃO EXPANDIDA, REALIMENTAÇÃO DO VETOR DE ESTADO EXPANDIDO E SATURAÇÃO DO SINAL DE CONTROLE

Neste capítulo, diversos projetos de controle são propostos visando resolver os problemas de controle considerando a região de operação expandida, definidos no capítulo anterior.

Na Seção 5.2, são propostos dois projetos de controle chaveado para resolver o problema da estabilidade local considerando a região de operação expandida, definido na Seção 4.6. Um dos projetos de controle, além de garantir a estabilidade local, ainda assegura ao sistema realimentado uma taxa de decaimento maior ou igual a κ .

Além disso, na Seção 5.3, propõe-se um projeto de controle \mathcal{H}_∞ que garante ao sistema realimentado um índice de desempenho \mathcal{H}_∞ e assegura que todas as trajetórias do vetor de estado e do sinal de controle permanecem dentro da região de operação expandida. Esse projeto de controle tem o objetivo de resolver o problema de controle \mathcal{H}_∞ apresentado na Seção 4.7.

Por fim, a Seção 5.4 utiliza os três exemplos definidos anteriormente na Seção 3.4 para ilustrar a eficácia dos métodos propostos.

5.1 Resultados preliminares

A metodologia utilizada neste capítulo permite que o projeto de controle seja elaborado considerando a utilização da lei de controle $v_z(\tilde{x}(t))$, dada em (123), que depende das funções de pertinência. Ou seja, a lei de controle $v_z(\tilde{x}(t))$ é utilizada para projetar os ganhos de realimentação do vetor de estado expandido $K_i \in \mathbb{R}^{n_u \times (n_x + n_u)}$, $i \in \mathbb{K}_r$. Entretanto, a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (124), será utilizada na implementação. O Lema 11, apresentado a seguir, é essencial para o desenvolvimento dos resultados propostos neste capítulo e permite que esta metodologia seja aplicada.

Lema 11. *Considere a candidata a função de Lyapunov $V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T P \tilde{x}(t)$, dada em (120), sendo que $P \in \mathbb{R}^{(n_x + n_u) \times (n_x + n_u)}$ é uma matriz simétrica definida positiva. Defina*

$\dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t))$ a derivada temporal de $V(\tilde{x}(t))$ para o sistema não linear incerto (2), realimentado pela lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (124). Defina $\dot{V}_z(\tilde{x}(t))$ a derivada temporal de $V(\tilde{x}(t))$ para o sistema não linear incerto (2), realimentado pela lei de controle $v_z(\tilde{x}(t))$, dada em (123).

Suponha que as condições de projeto garantam que $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, v_0) \subset \mathcal{S}$ para $t \geq 0$. A lei de chaveamento $\sigma = \arg^* \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{-\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} K_i \tilde{x}(t)\}$, dada em (124), garante que $\dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t)) \leq \dot{V}_z(\tilde{x}(t))$ para todo $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, v_0) \subset \mathcal{S}$.

Demonstração. Considere a candidata a função de Lyapunov $V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T P \tilde{x}(t)$, dada em (120), sendo que $P \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)}$ é uma matriz simétrica definida positiva. Note que a cada instante de tempo a derivada temporal de $V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T P \tilde{x}(t)$ pode ser representada por $\dot{V}(\tilde{x}(t)) = 2\tilde{x}(t)^T P \dot{\tilde{x}}(t)$. Defina $\dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t))$ a derivada temporal de $V(\tilde{x}(t))$ para o sistema não linear incerto (2), realimentado pela lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (124).

Suponha que as condições de projeto garantam que $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, v_0) \subset \mathcal{S}$ para $t \geq 0$. Logo, o modelo fuzzy T-S (119) descreve exatamente a dinâmica do sistema não linear incerto (2) e tem-se que

$$\begin{aligned} \dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t)) &= 2\tilde{x}(t)^T P (\tilde{A}_z \tilde{x}(t) + \tilde{B} v_\sigma(\tilde{x}(t)) + \tilde{H}_z w(t)) \\ &= 2\tilde{x}(t)^T P \tilde{A}_z \tilde{x}(t) - 2\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} K_\sigma \tilde{x}(t) + 2\tilde{x}(t)^T P \tilde{H}_z w(t) \\ &= 2\tilde{x}(t)^T P \tilde{A}_z \tilde{x}(t) + 2 \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} (-K_i) \tilde{x}(t)\} + 2\tilde{x}(t)^T P \tilde{H}_z w(t). \end{aligned} \quad (129)$$

A partir de (1), lembrando que $\alpha_i \geq 0$, $i \in \mathbb{K}_r$ e $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$, tem-se a seguinte propriedade:

$$\min_{i \in \mathbb{K}_r} \{\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} (-K_i) \tilde{x}(t)\} \leq \tilde{x}(t)^T P \tilde{B} \left(-\sum_{i=1}^r \alpha_i K_i \right) \tilde{x}(t). \quad (130)$$

Agora, defina $\dot{V}_z(\tilde{x}(t))$ a derivada temporal de $V(\tilde{x}(t))$ para o sistema não linear incerto (2), realimentado pela lei de controle dependente de parâmetro $v_z(\tilde{x}(t))$, dada em (123). Então, a partir de (1), (129) e (130), obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t)) &= 2\tilde{x}(t)^T P (\tilde{A}_z \tilde{x}(t) + \tilde{B} v_\sigma(\tilde{x}(t)) + \tilde{H}_z w(t)) \\ &= 2\tilde{x}(t)^T P \tilde{A}_z \tilde{x}(t) - 2\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} K_\sigma \tilde{x}(t) + 2\tilde{x}(t)^T P \tilde{H}_z w(t) \\ &= 2\tilde{x}(t)^T P \tilde{A}_z \tilde{x}(t) + 2 \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} (-K_i) \tilde{x}(t)\} + 2\tilde{x}(t)^T P \tilde{H}_z w(t) \\ &\leq 2\tilde{x}(t)^T P \tilde{A}_z \tilde{x}(t) + 2 \left\{ \tilde{x}(t)^T P \tilde{B} \left(-\sum_{i=1}^r \alpha_i K_i \right) \tilde{x}(t) \right\} + 2\tilde{x}(t)^T P \tilde{H}_z w(t) \\ &= 2\tilde{x}(t)^T P \tilde{A}_z \tilde{x}(t) - 2\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} K_z \tilde{x}(t) + 2\tilde{x}(t)^T P \tilde{H}_z w(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\tilde{x}(t)^T P (\tilde{A}_z \tilde{x}(t) + \tilde{B} v_z(\tilde{x}(t)) + \tilde{H}_z w(t)) \\
&= \dot{V}_z(\tilde{x}(t)).
\end{aligned} \tag{131}$$

Portanto, tem-se que $\dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t)) \leq \dot{V}_z(\tilde{x}(t))$ para todo $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, v_0) \subset \mathcal{S}$. \square

5.2 Projeto de controle chaveado para o problema da estabilidade local

A Seção 5.2, tem o objetivo de apresentar condições de projeto para resolver o problema da estabilidade local considerando a região de operação expandida e distúrbio nulo, definido na Seção 4.6.

Inicialmente, considera-se que o sistema não linear incerto, dado em (2), possui distúrbio externo nulo. Ou seja, tem-se que $w(t) = 0$ para $t \geq 0$. Logo, a partir de (119), a dinâmica do sistema não linear pode ser representada por:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}_z \tilde{x}(t) + \tilde{B} v(\tilde{x}(t)), \tag{132a}$$

$$y(t) = \tilde{C}_z \tilde{x}(t), \tag{132b}$$

sendo que

$$\tilde{A}_z = \begin{bmatrix} A_z & B_z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \tilde{C}_z = \begin{bmatrix} C_z & D_z \end{bmatrix}. \tag{132c}$$

5.2.1 Projeto de controle chaveado: condição de estabilidade local

Teorema 4. *Para o caso particular no qual o distúrbio externo é nulo ($w(t) = 0$), considere a região de operação expandida \mathcal{S} , dada em (113), na qual o sistema não linear incerto sujeito a saturação do atuador (2) pode ser exatamente descrito por (132), sendo que $\vartheta \in \mathbb{R}^{n_x+n_u}$, $S \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)}$ e v_0 são parâmetros conhecidos. Suponha a existência de uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)}$ e matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{n_u \times (n_x+n_u)}$, tais que as seguintes condições sejam factíveis:*

$$\tilde{A}_i X + X \tilde{A}_i^T - \tilde{B} M_i - M_i^T \tilde{B}^T < 0, \tag{133a}$$

$$\begin{bmatrix} \vartheta_m^2 v_0^{-1} & * \\ X S_{(m)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \tag{133b}$$

para todo $i \in \mathbb{K}_r$, e $m \in \mathbb{K}_{n_x+n_u}$. Então $\tilde{\mathcal{E}}(V, v_0) \subset \mathcal{S}$ e o esquema de controle da Figura 13 com a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (124), sendo que $K_i = M_i X^{-1}$ e $P = X^{-1}$, garante que a origem $\tilde{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema não linear incerto (132) e o conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(V, v_0)$ é um conjunto

positivamente invariante do domínio de atração (ou seja, se $\tilde{x}(0)$ pertence ao conjunto $\tilde{\mathcal{E}}(V, v_0)$, então todas as trajetórias de $\tilde{x}(t)$, $t > 0$, irão permanecer dentro deste conjunto).

Demonstração. Considere a candidata a função de Lyapunov dada em (120). Primeiramente, de acordo com o Lema 8, observe que (133b) garante que $\tilde{\mathcal{E}}(V, v_0) \subset \mathcal{S}$. Desta forma, para $w(t) = 0$ e $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, v_0) \subset \mathcal{S}$, o modelo fuzzy T-S (132) descreve exatamente a dinâmica do sistema não linear incerto sujeito a saturação do atuador (2). A partir de (1), pré e pós multiplicando (133a) por $P = X^{-1}$, definindo $K_i = M_i X^{-1}$, multiplicando o resultado por $\alpha_i \geq 0$, $i \in \mathbb{K}_r$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ e realizando o somatório de $i = 1$ até r , para $\tilde{x}(t) \neq 0$, a seguinte desigualdade é obtida:

$$\tilde{x}(t)^T \{ \tilde{A}_z^T P + P \tilde{A}_z - P \tilde{B} K_z - K_z^T \tilde{B}^T P \} \tilde{x}(t) < 0. \quad (134)$$

Considere as definições de $\dot{V}_z(\tilde{x}(t))$ e $\dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t))$ apresentadas no Lema 11. A partir de (132) e (120), lembrando que $\tilde{\mathcal{E}}(V, v_0) \subset \mathcal{S}$, a desigualdade (134) implica que $\dot{V}_z(\tilde{x}(t)) < 0$, para todo $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, v_0) \setminus \{0\}$. De acordo com o Lema 11, observe que a lei de chaveamento $\sigma = \arg^* \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{ -\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} K_i \tilde{x}(t) \}$, dada em (124), garante que $\dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t)) \leq \dot{V}_z(\tilde{x}(t))$ para todo $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, v_0) \subset \mathcal{S}$. Consequentemente, a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (124), garante que a origem $\tilde{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema não linear incerto (132) e o conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(V, v_0)$ é um conjunto positivamente invariante do domínio de atração, ou seja, toda a trajetória do vetor de estado iniciada em $\tilde{x}(0) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, v_0)$ permanece na região de operação \mathcal{S} . \square

5.2.2 Projeto de controle chaveado: condição de estabilidade local com taxa de decaimento

Teorema 5. Para o caso particular no qual o distúrbio externo é nulo ($w(t) = 0$), considere a região de operação expandida \mathcal{S} , dada em (113), na qual o sistema não linear incerto sujeito a saturação do atuador (2) pode ser exatamente descrito por (132), sendo que $\vartheta \in \mathbb{R}^{n_x+n_u}$, $S \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)}$ e v_0 são parâmetros conhecidos. Suponha a existência de uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)}$, matrizes $M_i \in \mathbb{R}^{n_u \times (n_x+n_u)}$ e um escalar $\kappa > 0$, tais que as seguintes condições sejam factíveis:

$$\tilde{A}_i X + X \tilde{A}_i^T - \tilde{B} M_i - M_i^T \tilde{B}^T + 2\kappa X < 0, \quad (135a)$$

$$\begin{bmatrix} \vartheta_m^2 v_0^{-1} & * \\ X S_{(m)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (135b)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_{n_r}$ e $m \in \mathbb{K}_{n_x+n_u}$. Então $\tilde{\mathcal{E}}(V, v_0) \subset \mathcal{S}$ e o esquema de controle da Figura 13 com a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (124), sendo que $K_i = M_i X^{-1}$ e $P = X^{-1}$, garante que a origem $\tilde{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do

sistema não linear incerto (132) com taxa de decaimento maior ou igual a κ e o conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{V}, \mathbf{v}_0)$ é um conjunto positivamente invariante do domínio de atração (ou seja, se $\tilde{\mathbf{x}}(0)$ pertence ao conjunto $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{V}, \mathbf{v}_0)$, então todas as trajetórias de $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, $t > 0$, irão permanecer dentro deste conjunto).

Demonstração. Considere a candidata a função de Lyapunov dada em (120). Primeiramente, de acordo com o Lema 8, observe que (135b) garante que $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{V}, \mathbf{v}_0) \subset \mathcal{S}$. Desta forma, para $w(t) = \mathbf{0}$ e $\tilde{\mathbf{x}}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{V}, \mathbf{v}_0) \subset \mathcal{S}$, o modelo fuzzy T-S (132) descreve exatamente a dinâmica do sistema não linear incerto sujeito a saturação do atuador (2). A partir de (1), pré e pós multiplicando (135a) por $\mathbf{P} = \mathbf{X}^{-1}$, definindo $\mathbf{K}_i = \mathbf{M}_i \mathbf{X}^{-1}$, multiplicando o resultado por $\alpha_i \geq 0$, $i \in \mathbb{K}_r$, $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ e realizando o somatório de $i = 1$ até r , para $\tilde{\mathbf{x}}(t) \neq \mathbf{0}$, a seguinte desigualdade é obtida:

$$\tilde{\mathbf{x}}(t)^T \{ \tilde{\mathbf{A}}_z^T \mathbf{P} + \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{A}_z - \mathbf{P} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{K}_z - \mathbf{K}_z^T \tilde{\mathbf{B}}^T \mathbf{P} + 2\kappa \mathbf{P} \} \tilde{\mathbf{x}}(t) < 0. \quad (136)$$

Considere as definições de $\dot{V}_z(\tilde{\mathbf{x}}(t))$ e $\dot{V}_\sigma(\tilde{\mathbf{x}}(t))$ apresentadas no Lema 11. A partir de (132) e (120), lembrando que $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{V}, \mathbf{v}_0) \subset \mathcal{S}$, a desigualdade (136) implica que $\dot{V}_z(\tilde{\mathbf{x}}(t)) < -2\kappa V(\tilde{\mathbf{x}}(t))$, para todo $\tilde{\mathbf{x}}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{V}, \mathbf{v}_0) \setminus \{\mathbf{0}\}$. De acordo com o Lema 11, observe que a lei de chaveamento $\sigma = \arg^* \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{-\tilde{\mathbf{x}}(t)^T \mathbf{P} \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{K}_i \tilde{\mathbf{x}}(t)\}$, dada em (124), garante que $\dot{V}_\sigma(\tilde{\mathbf{x}}(t)) \leq \dot{V}_z(\tilde{\mathbf{x}}(t))$ para todo $\tilde{\mathbf{x}}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{V}, \mathbf{v}_0) \subset \mathcal{S}$. Consequentemente, a lei de controle chaveada $\nu_\sigma(\tilde{\mathbf{x}}(t))$, dada em (124), garante que a origem $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema não linear incerto (132) com taxa de decaimento maior ou igual a κ e o conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{V}, \mathbf{v}_0)$ é um conjunto positivamente invariante do domínio de atração, ou seja, toda a trajetória do vetor de estado iniciada em $\tilde{\mathbf{x}}(0) \in \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{V}, \mathbf{v}_0)$ permanece na região de operação \mathcal{S} . \square

5.3 Projeto de controle \mathcal{H}_∞ chaveado considerando região de operação expandida

A Seção 5.3 tem o objetivo de apresentar condições para resolver o problema de controle \mathcal{H}_∞ , considerando a região de operação expandida e distúrbio externo não nulo com energia limitada, ou seja, $w(t) \in \mathcal{W}$. Este problema de controle foi apresentado na Seção 4.7.

Teorema 6. *Considere a região de operação \mathcal{S} , dada em (113), na qual o sistema não linear incerto sujeito a saturação do atuador e distúrbio de energia limitada (2) pode ser exatamente descrito por (119), sendo que $\vartheta \in \mathbb{R}^{n_x+n_u}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_0 \geq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\varphi} > \mathbf{0}$ são conhecidos. Suponha a existência de uma matriz simétrica definida positiva $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)}$, matrizes $\mathbf{M}_i \in \mathbb{R}^{n_u \times (n_x+n_u)}$ e um escalar $\mu > 0$, tais que o seguinte*

problema de otimização seja factível:

$\min \mu$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_i X + X \tilde{A}_i^T - \tilde{B} M_i - M_i^T \tilde{B}^T & * & * \\ \tilde{H}_i^T & -\varphi^{-1} I & * \\ \tilde{C}_i X & \tilde{G}_i & -\varphi \mu I \end{bmatrix} < 0, \quad (137a)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\vartheta_m^2}{\varepsilon_0 + \varphi^{-1} \varepsilon} & * \\ X S_{(m)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (137b)$$

para todo $i, j \in \mathbb{K}_r$ e $m \in \mathbb{K}_{n_x + n_u}$. Então $\tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1} \varepsilon) \subset \mathcal{S}$ e o esquema de controle da Figura 13 com a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (124), sendo que $K_i = M_i X^{-1}$ e $P = X^{-1}$, garante que:

1. para $w(t) = 0$, $t \geq 0$, a origem $\tilde{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema não linear incerto (132) e o conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1} \varepsilon)$ é um conjunto positivamente invariante do domínio de atração (ou seja, se $\tilde{x}(0)$ pertence ao conjunto $\tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1} \varepsilon)$, então todas as trajetórias de $\tilde{x}(t)$, $t > 0$, irão permanecer dentro deste conjunto). A Figura 15 ilustra esta propriedade;
2. para $w(t) \in \mathcal{W}$, se $\tilde{x}(0) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0)$, então $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1} \varepsilon)$, para todo $t \geq 0$. A Figura 16 ilustra esta propriedade;
3. para $w(t) \in \mathcal{W}$, se $\tilde{x}(0) = 0$, então o sistema não linear incerto (119) possui um custo garantido \mathcal{H}_∞ igual a $\gamma = \sqrt{\mu} > 0$, tal que

$$\|y(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|w(t)\|_2^2, \quad (138)$$

e $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \varphi^{-1} \varepsilon)$, para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Considere a candidata a função de Lyapunov dada em (120) e as definições de $\dot{V}_z(\tilde{x}(t))$ e $\dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t))$ apresentadas no Lema 11. Primeiramente, de acordo com o Lema 8, observe que (137b) garante que $\tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1} \varepsilon) \subset \mathcal{S}$.

Agora, a partir de (1), pré e pós multiplicando (137a) por $\text{diag}\{X^{-1}, I, I\}$, substituindo $X^{-1} = P$ e $M_i = K_i X$ e multiplicando o resultado por $\alpha_i \geq 0$, $i \in \mathbb{K}_r$ e $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ e realizando o somatório de $i = 1$ até r , obtém-se

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_z^T P + P \tilde{A}_z - P \tilde{B} K_z - K_z^T \tilde{B}^T P & * & * \\ \tilde{H}_z^T P & -\varphi^{-1} I & * \\ \tilde{C}_z & \tilde{G}_z & -\varphi \mu I \end{bmatrix} < 0, \quad (139)$$

e conseqüentemente

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_z^T P + P\tilde{A}_z - P\tilde{B}K_z - K_z^T \tilde{B}^T P & * \\ \tilde{H}_z^T P & -\varphi^{-1}I \end{bmatrix} < 0, \quad (140)$$

$$\tilde{A}_z^T P + P\tilde{A}_z - P\tilde{B}K_z - K_z^T \tilde{B}^T P < 0. \quad (141)$$

- Primeira propriedade:

Para demonstrar a primeira propriedade, considere que $w(t) = 0$ para $t \geq 0$. A partir de (141), para $\tilde{x}(t) \neq 0$, tem-se que

$$\tilde{x}(t)^T \{ \tilde{A}_z^T P + P\tilde{A}_z - P\tilde{B}K_z - K_z^T \tilde{B}^T P \} \tilde{x}(t) < 0. \quad (142)$$

Note que, para $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon) \subset \mathcal{S}$, o modelo fuzzy T-S (132) descreve exatamente a dinâmica do sistema não linear incerto sujeito a saturação do atuador (2). A partir de (132) e (120), lembrando que $\tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon) \subset \mathcal{S}$, a desigualdade (142) implica que $\dot{V}_z(\tilde{x}(t)) < 0$, para todo $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon) \setminus \{0\}$. De acordo com o Lema 11, observe que a lei de chaveamento $\sigma = \arg^* \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{ -\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} K_i \tilde{x}(t) \}$, dada em (124), garante que $\dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t)) \leq \dot{V}_z(\tilde{x}(t))$ para todo $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon) \subset \mathcal{S}$. Conseqüentemente, a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (124), garante que a origem $\tilde{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema não linear incerto (132) e o conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$ é um conjunto positivamente invariante do domínio de atração, ou seja, toda a trajetória do vetor de estado iniciada em $\tilde{x}(0) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$ permanece na região de operação \mathcal{S} .

- Segunda propriedade:

Agora, na demonstração da segunda propriedade, considere que $w(t) \in \mathcal{W}$. A partir de (140), para $\tilde{x}(t) \neq 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &> \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{A}_z^T P + P\tilde{A}_z - P\tilde{B}K_z - K_z^T \tilde{B}^T P & * \\ \tilde{H}_z^T P & -\varphi^{-1}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \\ &= \tilde{x}(t)^T \{ \tilde{A}_z^T P + P\tilde{A}_z - P\tilde{B}K_z - K_z^T \tilde{B}^T P \} \tilde{x}(t) \\ &\quad + \tilde{x}(t)^T P \tilde{H}_z w(t) + w(t)^T \tilde{H}_z^T P \tilde{x}(t) - w(t)^T \varphi^{-1} w(t). \end{aligned} \quad (143)$$

Observe que, para $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon) \subset \mathcal{S}$, o modelo fuzzy T-S (119) descreve exatamente a dinâmica do sistema não linear incerto sujeito a saturação do atuador (2). A partir de (132) e (120), lembrando que $\tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon) \subset \mathcal{S}$, a desigualdade (143) implica que

$$\dot{V}_z(\tilde{x}(t)) - \varphi^{-1} w(t)^T w(t) < 0, \quad (144)$$

para todo $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon) \setminus \{0\}$. De acordo com o Lema 11, observe que a lei de chaveamento $\sigma = \arg^* \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{-\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} K_i \tilde{x}(t)\}$, dada em (124), garante que $\dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t)) \leq \dot{V}_z(\tilde{x}(t))$ para todo $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon) \subset \mathcal{S}$. Consequentemente, a partir de (144), a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (124), garante que

$$\dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t)) \leq \dot{V}_z(\tilde{x}(t)) < \varphi^{-1}w(t)^T w(t), \quad (145)$$

para todo $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon) \setminus \{0\}$. Considerando $\tilde{x}(0) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0)$ e a partir de (17), tem-se que $V(\tilde{x}(0)) \leq \varepsilon_0$ e $\int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \leq \varepsilon$, respectivamente. Logo, integrando (145) de 0 até ∞ , obtém-se

$$V(\tilde{x}(\infty)) < V(\tilde{x}(0)) + \varphi^{-1} \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \leq V(\tilde{x}(0)) + \varphi^{-1}\varepsilon \leq \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon, \quad (146)$$

concluindo que $V(\tilde{x}(\infty)) < \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon$. Desta forma, a desigualdade (146) assegura que qualquer trajetória com condição inicial $\tilde{x}(0) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0)$ irá permanecer dentro do conjunto $\tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon) \setminus \partial \tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$, para todo $t \geq 0$, sendo que $\partial \tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$ é a fronteira de $\tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon)$.

- Terceira propriedade:

Novamente, na demonstração da terceira propriedade, considere $w(t) \in \mathcal{W}$. Aplicando o complemento de Schur em (139), sendo que $\mu = \gamma^2$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_z^T P + P \tilde{A}_z - P \tilde{B} K_z - K_z^T \tilde{B}^T P & * \\ \tilde{H}_z^T P & -\varphi^{-1} I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{C}_z^T \\ \tilde{G}_z^T \end{bmatrix} \varphi^{-1} \gamma^{-2} I \begin{bmatrix} \tilde{C}_z & \tilde{G}_z \end{bmatrix} < 0. \quad (147)$$

A partir de (147), para $\tilde{x}(t) \neq 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &> \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{A}_z^T P + P \tilde{A}_z - P \tilde{B} K_z - K_z^T \tilde{B}^T P & * \\ \tilde{H}_z^T P & -\varphi^{-1} I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{C}_z^T \\ \tilde{G}_z^T \end{bmatrix} \varphi^{-1} \gamma^{-2} I \begin{bmatrix} \tilde{C}_z & \tilde{G}_z \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \\ &= \tilde{x}(t)^T \{ \tilde{A}_z^T P + P \tilde{A}_z - P \tilde{B} K_z - K_z^T \tilde{B}^T P \} \tilde{x}(t) \\ &\quad + \tilde{x}(t)^T P \tilde{H}_z w(t) + w(t)^T \tilde{H}_z^T P \tilde{x}(t) - w(t)^T \varphi^{-1} w(t) \\ &\quad + \varphi^{-1} \gamma^{-2} (\tilde{C}_z \tilde{x}(t) + \tilde{G}_z w(t))^T (\tilde{C}_z \tilde{x}(t) + \tilde{G}_z w(t)). \end{aligned} \quad (148)$$

A partir da segunda propriedade do Teorema 6, se $w(t) \in \mathcal{W}$ e $\tilde{x}(0) = 0$, então $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \varphi^{-1}\varepsilon) \subset \tilde{\mathcal{E}}(V, \varepsilon_0 + \varphi^{-1}\varepsilon) \subset \mathcal{S}$, para todo $t \geq 0$. Logo, o modelo fuzzy T-S (119) descreve exatamente a dinâmica do sistema não linear incerto sujeito a saturação do

atuador (2). A partir de (132) e (120), a desigualdade (148) implica que

$$\dot{V}_z(\tilde{x}(t)) + \varphi^{-1} \gamma^{-2} y(t)^T y(t) - \varphi^{-1} w(t)^T w(t) < 0, \quad (149)$$

para todo $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \varphi^{-1} \varepsilon) \setminus \{0\}$. De acordo com o Lema 11, observe que a lei de chaveamento $\sigma = \arg^* \min_{i \in \mathbb{K}_r} \{-\tilde{x}(t)^T P \tilde{B} K_i \tilde{x}(t)\}$, dada em (124), garante que $\dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t)) \leq \dot{V}_z(\tilde{x}(t))$ para todo $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \varphi^{-1} \varepsilon) \subset \mathcal{S}$. Consequentemente, a partir de (149), a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (124), garante que

$$\dot{V}_\sigma(\tilde{x}(t)) \leq \dot{V}_z(\tilde{x}(t)) < -\varphi^{-1} \gamma^{-2} y(t)^T y(t) + \varphi^{-1} w(t)^T w(t), \quad (150)$$

para todo $\tilde{x}(t) \in \tilde{\mathcal{E}}(V, \varphi^{-1} \varepsilon) \setminus \{0\}$.

Considerando $\tilde{x}(0) = 0$ e integrando (150) de 0 até ∞ , obtém-se

$$\varphi^{-1} \gamma^{-2} \int_0^\infty y(t)^T y(t) dt - \varphi^{-1} \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt < V(\tilde{x}(0)) - V(\tilde{x}(\infty)) \leq V(\tilde{x}(0)) = 0. \quad (151)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} \gamma^{-2} \int_0^\infty y(t)^T y(t) dt - \varphi^{-1} \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt &< 0 \\ \int_0^\infty y(t)^T y(t) dt &< \gamma^2 \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \\ \|y(t)\|_2^2 &< \gamma^2 \|w(t)\|_2^2, \end{aligned} \quad (152)$$

demonstrando que o sistema não linear incerto (2) possui um custo garantido \mathcal{H}_∞ igual a $\gamma = \sqrt{\mu} > 0$. \square

5.4 Exemplos

5.4.1 Exemplo comparativo: sistema caótico Lorenz

Exemplo 4.

A partir do Exemplo 1, considere o sistema caótico Lorenz descrito exatamente pelo modelo fuzzy T-S, dado em (6), sendo que os modelos locais são apresentados em (86) (WANG; LIU, 2013; LEE et al., 2015b).

Agora, adotando a representação do sistema não linear incerto (2) através do modelo fuzzy T-S em função do vetor de estado expandido, apresentado em (119), observe que a partir dos modelos locais dados em (86), é possível obter os modelos locais expandidos \tilde{A}_i ,

\tilde{B} , \tilde{H}_i , \tilde{C}_i , \tilde{G}_i , $i \in \mathbb{K}_2$, tais que:

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} -\eta_1 & \eta_1 & 0 & \eta_1 & 0 \\ \eta_2 & -1 & 20 & 0 & \eta_2 \\ 0 & -20 & -\eta_3 & \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} -\eta_1 & \eta_1 & 0 & 0 & -\eta_1 \\ \eta_2 & -1 & -30 & -\eta_2 & 0 \\ 0 & 30 & -\eta_3 & 0 & \eta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (153a)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{H}_1 = \tilde{H}_2 = \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (153b)$$

$$\tilde{G}_1 = \tilde{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

para $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (5, 30, 2)$.

A partir das informações fornecidas no Exemplo 1, tem-se que a região de operação \mathcal{X} , dada em (4), possui $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\phi = 30$. Já a região $\mathcal{L}(L_j)$, dada em (13), possui $\rho = \begin{bmatrix} 100 & 100 \end{bmatrix}^T$. Logo, a região de operação expandida \mathcal{S} , dada em (113), é formada por

$$S = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \vartheta = \begin{bmatrix} \phi & \rho \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 30 & 100 & 100 \end{bmatrix}^T. \quad (154)$$

Para $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (5, 30, 2)$, $\phi = 110$, $\beta = 100$, $\varepsilon_0 = 1$ e $\varepsilon = 15\pi$ o problema de otimização proposto no Teorema 6 (LMIs (137) e (127)) foi resolvido. A solução deste problema de otimização proporcionou um valor de $\gamma = 0,9188$ e os seguintes ganhos K_i , $i \in \mathbb{K}_2$, e a matriz simétrica definida positiva P :

$$K_1 = \begin{bmatrix} -95,2537 & 44,3780 & 267,3780 & 219,8677 & 180,6525 \\ 216,6148 & 184,9992 & 188,6750 & 158,4627 & 182,3053 \end{bmatrix}, \quad (155a)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -207,4026 & -47,1420 & 122,1969 & 108,0065 & 58,2988 \\ 51,8394 & 202,3379 & 306,2684 & 265,7281 & 240,1488 \end{bmatrix}, \quad (155b)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0,0086 & 0,0031 & -0,0010 & -0,0008 & 0,0006 \\ 0,0031 & 0,0022 & 0,0012 & 0,0011 & 0,0014 \\ -0,0010 & 0,0012 & 0,0043 & 0,0035 & 0,0030 \\ -0,0008 & 0,0011 & 0,0035 & 0,0030 & 0,0025 \\ 0,0006 & 0,0014 & 0,0030 & 0,0025 & 0,0025 \end{bmatrix}. \quad (155c)$$

Comparações entre os métodos propostos no Teorema 6 (LMIs (137) e (127)), no

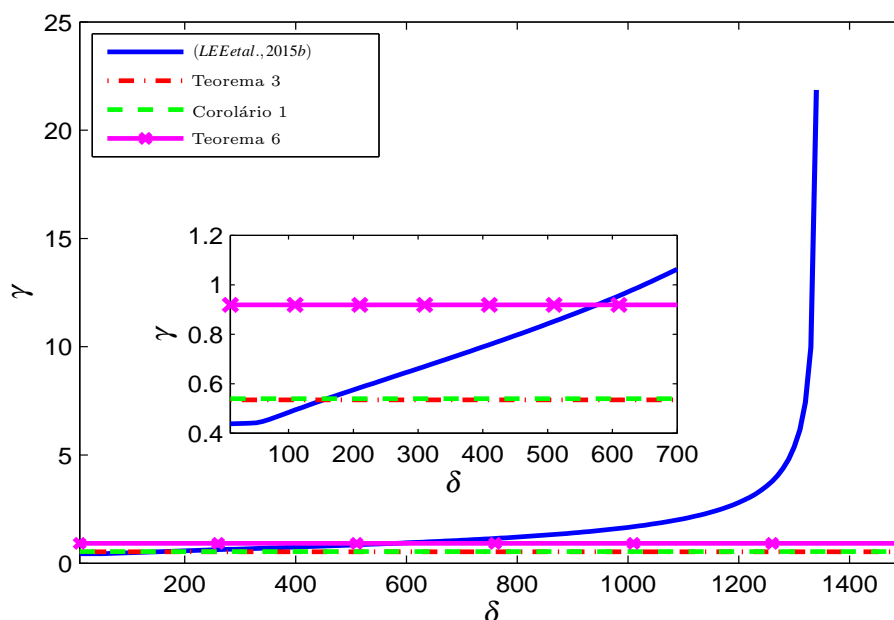
Teorema 3 (LMIs (70) e (25)), no Corolário 1 (LMIs (83) e (25)) e em (LEE et al., 2015b) são apresentadas na Tabela 2 e na Figura 17. Deve-se lembrar que, nestas comparações, somente os resultados do método proposto em (LEE et al., 2015b) variam de acordo com a magnitude δ do distúrbio externo. A comparação apresentada na Tabela 2 considera que $\delta = 10$.

Tabela 2 - Comparação entre os métodos propostos em: Teorema 3, Teorema 6, Corolário 1 e (LEE et al., 2015b), considerando o sistema caótico Lorenz.

Método utilizado	LMIs utilizadas	γ
Teorema 3	LMIs (70) e (25)	0,5342
Corolário 1	LMIs (83) e (25)	0,5390
(LEE et al., 2015b)	LMIs apresentadas no artigo, para $\delta = 10$	0,4375
Teorema 6	LMIs (137) e (127)	0,9188

Fonte: Elaboração próprio autor.

Figura 17 - Comparação entre os métodos propostos no Teorema 3 (LMIs (70) e (25)), no Teorema 6 (LMIs (137) e (127)), no Corolário 1 (LMIs (83) e (25)) e em (LEE et al., 2015b).



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na Figura 5, apresentada no Exemplo 1, era possível observar que o método proposto em (LEE et al., 2015b) fornecia os melhores valores de γ para $10 \leq \delta \leq 153,9$, no entanto as LMIs eram infatíveis para $\delta \geq 1343$. A partir da Figura 5, da Figura 17 e da Tabela 2, verifica-se que o Teorema 3 continua a apresentar o menor valor de γ para $\delta > 153,9$.

Observe que o Teorema 6 apresenta um valor de γ maior que o Teorema 3 e o Corolário 1, entretanto o projeto de controle utilizando o Teorema 6 evita a saturação e a descontinuidade do sinal de controle. Quando comparado ao método apresentado em (LEE et al., 2015b), observe que o Teorema 6 apresenta melhores resultados de γ para $\delta \geq 576$.

Utilizando o *software* MatLab/Simulink[®], foram realizadas duas simulações que serão apresentadas a seguir. Em ambas as simulações, utilizou-se o esquema de controle apresentado na Figura 13 que utiliza a realimentação do vetor de estado expandido, com a lei de controle chaveada $v_{\sigma}(\tilde{x}(t))$, dada em (124), e o conjunto de controladores (155), para simular a dinâmica do sistema realimentado (2) e (86)-(87). Nas duas simulações, a energia do distúrbio externo será a mesma. Entretanto, semelhante ao Exemplo 1, serão utilizados diferentes valores de magnitude e frequência em cada simulação.

- Primeira simulação:

A primeira simulação tem o objetivo de analisar o comportamento do sistema caótico Lorenz (86) sujeito a um distúrbio externo $w(t)$ com magnitude elevada. Considere uma condição inicial nula $\tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ e o distúrbio $w(t) \in \mathcal{W}$, definido em (87), sendo que

$$\mathcal{A} = 10\sqrt{5}, \quad \omega = 112,5 \text{ rad/s}, \quad a = 3 \quad \text{e} \quad t_f = \frac{3\pi}{225} \text{s}, \quad (156)$$

tais que $\int_0^{t_f} w(t)^T w(t) dt = 10\pi \leq \varepsilon = 15\pi$ e $w(t)^T w(t) \leq 1500$. O resultado da simulação é apresentado na Figura 18.

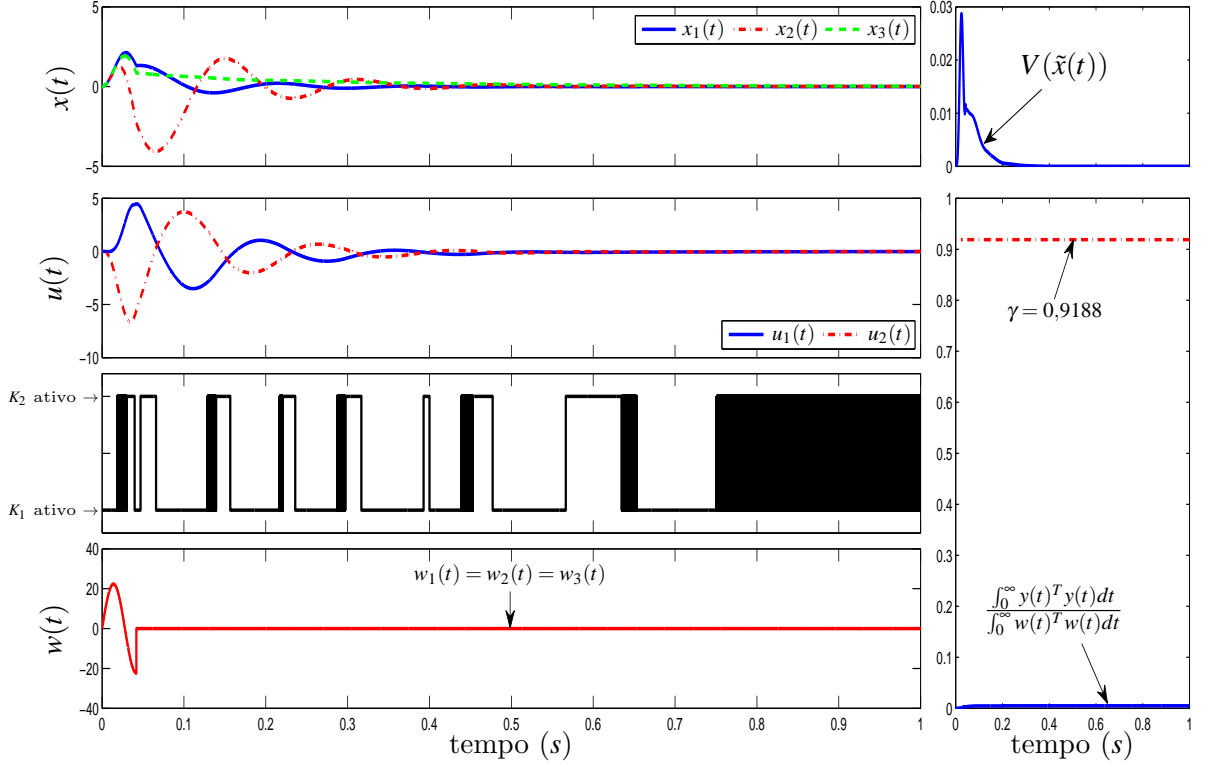
Observe que, utilizando o esquema de controle da Figura 13 e a lei de controle chaveada $v_{\sigma}(\tilde{x}(t))$, dada em (124) e (155), para $\tilde{x}(0) = 0$, as trajetória do vetor de estado expandido do sistema controlado permaneceram dentro do conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(V, \varphi^{-1}\varepsilon) = \mathcal{E}(V, 0, 4284)$ e, conseqüentemente, $\tilde{x}(t) \in \mathcal{S}$, para todo $t \geq 0$. O custo garantido \mathcal{H}_{∞} assegurou que $\int_0^{\infty} y(t)^T y(t) dt / \int_0^{\infty} w(t)^T w(t) dt \leq 0,0049 \leq \gamma = 0,9188$.

Além disso, mesmo ocorrendo um chaveamento com frequência rápida entre os ganhos de realimentação do vetor de estado expandido K_1 e K_2 , observou-se que o esquema de controle da Figura 13 assegurou que não houvesse descontinuidade do sinal de controle $u(t)$, em virtude da utilização do integrador.

Analisando os resultados apresentados nas Figuras 6 e 18, pode-se notar que o sistema realimentado com a lei de controle chaveada $v_{\sigma}(\tilde{x}(t))$, dada em (124), apresentou um tempo de estabelecimento maior e um sinal de controle menor, quando comparado com o sistema realimentado com a lei de controle chaveada (10).

Por fim, de acordo com a Figura 5, é importante destacar que o método proposto em (LEE et al., 2015b) não é factível, pois $w(t)^T w(t) \leq 1500 = \delta$.

Figura 18 - Comportamento dinâmico do sistema (2), (86)-(87) e (156) utilizando a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (124) e (155): a trajetória do vetor de estado $x(t)$, o sinal de controle $u(t)$, a energia do sistema $V(\tilde{x}(t))$ e a relação entre $\frac{\int_0^\infty y(t)^T y(t) dt}{\int_0^\infty w(t)^T w(t) dt}$ e γ .



Fonte: Elaboração do próprio autor.

- Segunda simulação:

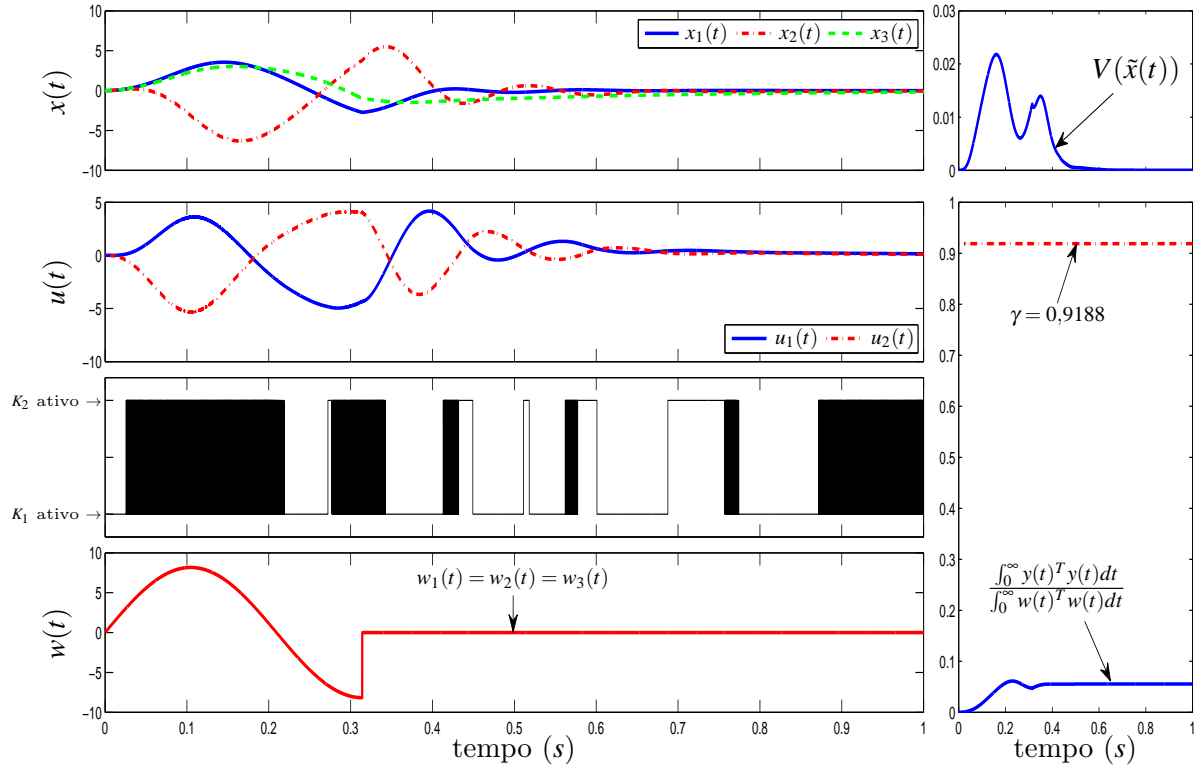
A segunda simulação tem o objetivo de analisar o comportamento do sistema caótico Lorenz (86) sujeito a um distúrbio externo $w(t)$ de baixa frequência, que amplifique a saída do sistema e, conseqüentemente, aumente a relação $\int_0^\infty y(t)^T y(t) dt / \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt$. Considere uma condição inicial nula $\tilde{x}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ e o distúrbio $w(t) \in \mathcal{W}$, definido em (87), sendo que

$$\mathcal{A} = \frac{10}{3}\sqrt{6}, \quad \omega = 15 \text{ rad/s}, \quad a = 3 \quad \text{e} \quad t_f = \frac{3\pi}{30} \text{ s}, \quad (157)$$

tais que $\int_0^{t_f} w(t)^T w(t) dt = 10\pi \leq \varepsilon = 15\pi$ e $w(t)^T w(t) \leq 200$. O resultado da simulação é apresentado na Figura 19.

Observe que, utilizando o esquema de controle da Figura 13 e a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (124) e (155), para $\tilde{x}(0) = 0$, as trajetória do vetor de estado expandido do sistema controlado permaneceram dentro do conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(V, \varphi^{-1}\varepsilon) = \mathcal{E}(V, 0,4284)$ e, conseqüentemente, $\tilde{x}(t) \in \mathcal{S}$, para todo $t \geq 0$.

Figura 19 - Comportamento dinâmico do sistema (2), (86)-(87) e (157) utilizando a lei de controle chaveada $v_{\sigma}(\tilde{x}(t))$, dada em (124) e (155): a trajetória do vetor de estado $x(t)$, o sinal de controle $u(t)$, a energia do sistema $V(\tilde{x}(t))$ e a relação entre $\frac{\int_0^{\infty} y(t)^T y(t) dt}{\int_0^{\infty} w(t)^T w(t) dt}$ e γ .



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Como mencionado anteriormente, a energia do distúrbio externo é a mesma em ambas as simulações. Nesta segunda simulação, a frequência $\omega = 15\text{rad/s}$ aumentou o valor da relação $\int_0^{\infty} y(t)^T y(t) dt / \int_0^{\infty} w(t)^T w(t) dt$, entretanto o custo garantido \mathcal{H}_{∞} assegurou que $\int_0^{\infty} y(t)^T y(t) dt / \int_0^{\infty} w(t)^T w(t) dt \leq 0,0554 \leq \gamma = 0,9188$.

Novamente, mesmo ocorrendo um chaveamento com frequência rápida entre os ganhos de realimentação do vetor de estado expandido K_1 e K_2 , observou-se que o esquema de controle da Figura 13 assegurou que não houvesse descontinuidade do sinal de controle $u(t)$, em virtude da utilização do integrador.

Analisando os resultados apresentados nas Figuras 7 e 19, pode-se notar que o sistema realimentado com a lei de controle chaveada $v_{\sigma}(\tilde{x}(t))$, dada em (124), apresentou um sinal de controle menor quando comparado com o sistema realimentado com a lei de controle chaveada (10).

5.4.2 Implementação prática utilizando um sistema de suspensão ativa de bancada com falha no atuador

Exemplo 5.

Considere o sistema de suspensão ativa apresentado no Exemplo 2. O propósito deste exemplo é projetar e implementar uma lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, utilizando a realimentação do vetor de estado expandido, para resolver o problema de controle \mathcal{H}_∞ considerando a região de operação expandida.

Novamente, considera-se que a rigidez da mola k_{us} possui um comportamento não linear e que a falha no atuador pode diminuir 20% da potência do atuador. Logo, a partir de (98), (99), (100) e da Tabela 1, considerando a representação do sistema de suspensão ativa através do modelo fuzzy T-S (6), foram obtidos os modelos locais dados em (101).

Agora, adotando a representação do sistema não linear incerto (2) através do modelo fuzzy T-S em função do vetor de estado expandido, apresentado em (119), observe que a partir dos modelos locais dados em (101), é possível obter os modelos locais expandidos $\tilde{A}_i, \tilde{B}, \tilde{H}_i, \tilde{C}_i, \tilde{G}_i, i \in \mathbb{K}_4$, tais que:

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -367,35 & -3,0612 & 0 & 3,0612 & 0,32653 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 900 & 7,5 & -2600 & -12,5 & -0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (158a)$$

$$\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -367,35 & -3,0612 & 0 & 3,0612 & 0,32653 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 & -0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (158b)$$

$$\tilde{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -367,35 & -3,0612 & 0 & 3,0612 & 0,40816 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 900 & 7,5 & -2600 & -12,5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (158c)$$

$$\tilde{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -367,35 & -3,0612 & 0 & 3,0612 & 0,40816 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (158d)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (158e)$$

$$\tilde{H}_1 = \tilde{H}_2 = \tilde{H}_3 = \tilde{H}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (158f)$$

$$\tilde{C}_1 = \tilde{C}_2 = \tilde{C}_3 = \tilde{C}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (158g)$$

$$\tilde{G}_1 = \tilde{G}_2 = \tilde{G}_3 = \tilde{G}_4 = 0_{2 \times 1}. \quad (158h)$$

Considerando as mesmas informações fornecidas no Exemplo 2, tem-se que a região de operação \mathcal{X} , dada em (4), tem $p = 1$, $h \in \mathbb{K}_1$, $R = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$ e $\phi = 0,02$. O sinal de controle $F_c(t)$ é limitado entre os valores de $\pm 39,2N$, de acordo com as sugestões do fabricante e as restrições físicas do equipamento (Quanser Innovate Educate, 2010). Então, a região $\mathcal{L}(L_j)$, dada em (13), tem $n_u = 1$, $k \in \mathbb{K}_1$ e $\rho = 39,2$. A partir destas informações, a região de operação expandida \mathcal{S} é dada em (113), sendo que $m \in \mathbb{K}_2$, $S = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\vartheta = \begin{bmatrix} \phi & \rho \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0,02 & 39,2 \end{bmatrix}^T$.

Novamente, considerou-se que o sinal de referência $z_r(t)$, que altera o perfil da pista, reproduz um sinal senoidal com amplitude de $0,0015m$ e frequência $(f = 1 + t)Hz$ para $0,5 \leq t \leq 9,5s$, ou seja, a frequência varia linearmente de $1,5$ até $10,5Hz$. Já para $0 \leq t < 0,5s$ e $9,5 < t \leq 10s$ a amplitude de $z_r(t)$ é igual a zero. Observe que $w(t)$ possui energia limitada. Então, considere que $\tilde{x}(0) = 0$, $\tilde{x}(0)^T P \tilde{x}(0) = 0$ e $\int_0^{10} w(t)^T w(t) dt \leq \int_0^{\infty} w(t)^T w(t) dt \leq 0,02$, tal que $\varepsilon_0 = 0$ e $\varepsilon = 0,02$.

Finalmente, para $\varphi = 10$ e $\beta = 0,01$, o problema de otimização dado pelas LMIs (137), apresentado no Teorema 6, em conjunto com a LMI (127), foi resolvido. A solução do problema de otimização apresentou um custo garantido \mathcal{H}_∞ de $\gamma = 0,1004$. Obteve-se também os seguintes ganhos dos controladores K_i , $i \in \mathbb{K}_4$, e a matriz simétrica definida positiva P :

$$K_1 = \begin{bmatrix} 145535,2608 & 32085,6977 & -486188,5796 & -9545,7170 & 403,4450 \end{bmatrix}, \quad (159a)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 149182,4392 & 32771,9928 & -497010,6459 & -9748,0353 & 411,7944 \end{bmatrix}, \quad (159b)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 380365,6668 & 69746,1918 & -1022867,7628 & -18555,9397 & 843,5595 \end{bmatrix}, \quad (159c)$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 383780,1013 & 70393,1021 & -1033146,6976 & -18748,2573 & 851,4391 \end{bmatrix}, \quad (159d)$$

$$P = \begin{bmatrix} 22,0287 & 2,7362 & -33,9722 & -0,4620 & 0,0295 \\ 2,7362 & 0,4086 & -5,5281 & -0,0863 & 0,0046 \\ -33,9722 & -5,5281 & 84,7157 & 1,3493 & -0,0642 \\ -0,4620 & -0,0863 & 1,3493 & 0,0252 & -0,0010 \\ 0,0295 & 0,0046 & -0,0642 & -0,0010 & 0,00005 \end{bmatrix}. \quad (159e)$$

Uma comparação entre os métodos propostos no Teorema 3 (LMIs (70), (24) e (25)) e no Teorema 6 (LMIs (137) e (127)) é apresentada na Tabela 3. Sendo que o Teorema 3 apresentou o melhor resultado.

Tabela 3 - Comparação entre os métodos propostos no Teorema 3 e no Teorema 6, considerando o sistema de suspensão ativa.

Método utilizado	LMIs utilizadas	γ
Teorema 3	LMIs (70), (24) e (25)	0,0927
Teorema 6	LMIs (137) e (127)	0,1004

Fonte: Elaboração próprio autor.

Duas implementações foram realizadas. Na primeira implementação, utilizou-se o sistema em malha aberta ($u(t) = 0$, para $0 \leq t \leq 10$ s). Na segunda implementação, a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (124) e (159), foi utilizada, inserindo uma falha de 20% no atuador via *software* MatLab/Simulink[®].

A resposta dinâmica do sistema de suspensão ativa, realimentado utilizando o esquema de controle da Figura 13 e a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (124) e (159), é apresentada na Figura 20. Note que o sistema em malha fechada reduziu as amplitudes máximas de z_s e z_{us} , proporcionando conforto e segurança ao sistema. Ou seja, minimização do custo garantido \mathcal{H}_∞ mitigou o efeito do distúrbio na saída do sistema.

5.4.3 Exemplo comparativo: pêndulo invertido

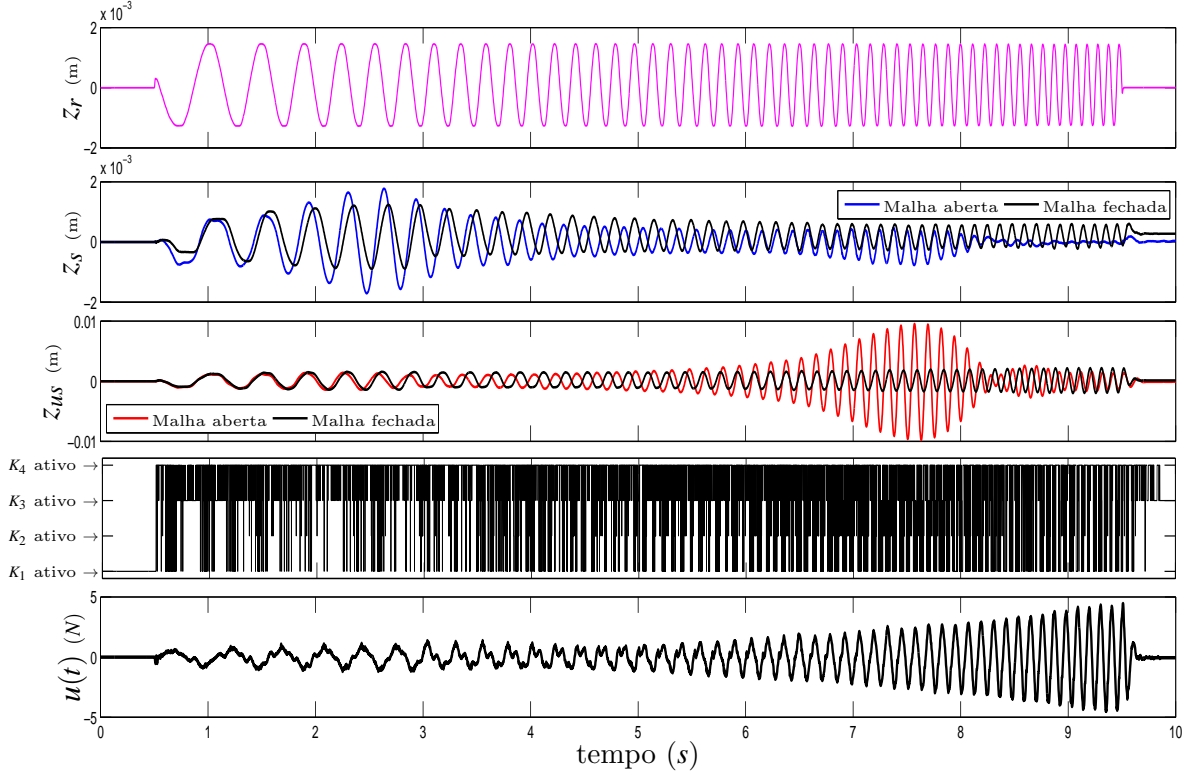
Exemplo 6.

Este último exemplo tem o objetivo de estudar o problema de estabilidade local, comparando os projetos de controle apresentados no Teorema 1 (ALVES et al., 2016b) e no Teorema 4. Então, considere um pêndulo invertido apresentado no Exemplo 3, com a dinâmica dada em (103) (TSENG; CHEN, 2006; CHIU, 2014).

Agora, adotando a representação do sistema não linear incerto (2) através do modelo fuzzy T-S em função do vetor de estado expandido, apresentado em (132), observe que a partir dos modelos locais dados em (105), é possível obter os modelos locais expandidos $\tilde{A}_i, \tilde{B}, i \in \mathbb{K}_4$, tais que:

$$\tilde{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 15,0683 & 0 & -2,2222 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 15,0683 & 0 & -0,8889 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (160a)$$

Figura 20 - Resposta temporal prática para a varredura em frequência do sistema de suspensão ativa em malha aberta e em malha fechada (utilizando a lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (124) e (159)), com falha no atuador.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

$$\tilde{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 19,6000 & 0 & -2,2222 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 19,6000 & 0 & -0,8889 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (160b)$$

A partir das informações fornecidas no Exemplo 3, tem-se que a região de operação \mathcal{X} , dada em (4), possui $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\phi = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}^T$. A região $\mathcal{L}(L_j)$, dada em (13), tem $\rho = 5$. A partir de (9), considerou-se que $v_0 = 1$, tal que o conjunto elipsoidal é dado por $\mathcal{E}(V, 1)$.

Logo a região de operação expandida \mathcal{S} é dada em (113), sendo que

$$S = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \vartheta = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & 5 \end{bmatrix}^T. \quad (161)$$

Baseado no Lema 10, deseja-se encontrar um conjunto de condições iniciais dado por $\mathfrak{X} = \varpi \text{co}\{v_1, \dots, v_{n_L}\}$, $\varpi > 0$, tal que $\mathfrak{X} \subset \tilde{\mathcal{E}}(V, 1)$. No caso do pêndulo invertido, será

considerada uma condição inicial $\tilde{x}(0) = [\varpi \ 0 \ 0]^T$, tal que a minimização de ϖ^{-2} irá fornecer uma estimativa menos conservadora para $\tilde{x}_1(0)$ (posição angular inicial), sendo que $n_L = 1$ e $\mathbf{v}_1 = [1 \ 0 \ 0]^T$. Logo, a partir do Lema 10 e do Teorema 4 e considerando os modelos locais expandidos (160), tem-se o seguinte problema de otimização:

$$\text{Problema de otimização: } \begin{cases} \min \varpi^{-2} \\ \text{sujeito as condições do Teorema 4 e do Lema 10.} \end{cases} \quad (162)$$

Resolvendo o problema de otimização, dado em (162), obteve-se $\varpi = 0,1133$ e os seguintes ganhos de realimentação do vetor de estado expandido K_i , $i \in K_4$, e a matriz simétrica definida positiva P:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -15538,1051 & -3530,7267 & 685,9408 \end{bmatrix}, \quad (163a)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -14952,3862 & -3383,5179 & 672,6596 \end{bmatrix}, \quad (163b)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -15492,9667 & -3519,3820 & 684,9173 \end{bmatrix}, \quad (163c)$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -14907,2477 & -3372,1732 & 671,6361 \end{bmatrix}, \quad (163d)$$

$$P = \begin{bmatrix} 77,7933 & 17,5717 & -1,7640 \\ 17,5717 & 4,4163 & -0,3984 \\ -1,7640 & -0,3984 & 0,0800 \end{bmatrix}. \quad (163e)$$

Uma comparação entre os métodos propostos no Teorema 1 (LMIs (70) e (28)) e no Teorema 4 (LMIs (133) e (128)) é apresentada na Tabela 4. Observe que o Teorema 1 apresentou o melhor resultado, pois expandiu o conjunto de condições iniciais para $\tilde{x}(0) = [\varpi \ 0 \ 0]^T$.

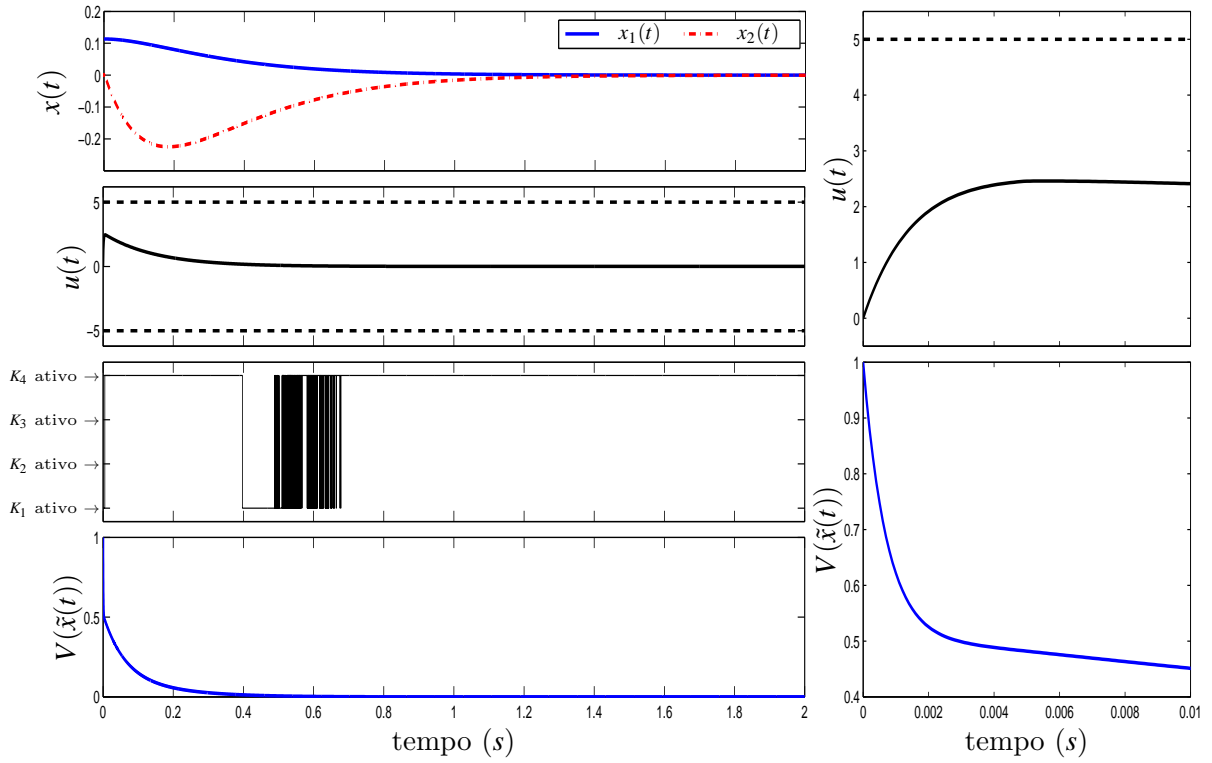
Tabela 4 - Comparação entre os métodos propostos no Teorema 1 e no Teorema 4, considerando o sistema de suspensão pêndulo invertido.

Método utilizado	LMIs utilizadas	ϖ
Teorema 1	LMIs (70) e (28)	0,2716
Teorema 4	LMIs (133) e (128)	0,1133

Fonte: Elaboração próprio autor.

Considere a condições inicial $\tilde{x}(0) = [\varpi \ 0 \ 0]^T = [0,1133 \ 0 \ 0]^T$. O esquema de controle da Figura 13 e a lei de controle chaveada $\mathbf{v}_\sigma(\tilde{x}(t))$, dada em (124), com o conjunto de ganhos de realimentação do vetor de estado expandido dados em (163), foram utilizados para realizar uma simulação do sistema de pêndulo invertido (103) via *software* MatLab/Simulink[®]. O resultado da simulação é apresentado na Figura 21.

Figura 21 - Comportamento dinâmico do sistema de pêndulo invertido (103) utilizando o esquema de controle da Figura 13 e a lei de controle chaveada $v_{\sigma}(\tilde{x}(t))$, dada em (124) e (163): a trajetória do vetor de estado $x(t)$, o sinal de controle $u(t)$ e a energia do sistema $V(\tilde{x}(t))$.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A partir da Figura 21, note que para a condição inicial $\tilde{x}(0) = [0,1133 \ 0 \ 0]^T$, tem-se que $V(\tilde{x}(0)) = 1$. De acordo com o Teorema 4, as condições de projeto garantem que o conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(V,1)$ é um conjunto positivamente invariante do domínio de atração. Este fato foi confirmado, pois para $\tilde{x}(0) \in \tilde{\mathcal{E}}(V,1)$, a lei de controle chaveada $v_{\sigma}(\tilde{x}(t))$, dada em (124) e (163), confinou todas as trajetórias do vetor de estado expandido dentro do conjunto elipsoidal $\tilde{\mathcal{E}}(V,1)$ e, conseqüentemente, dentro da região de operação expandida \mathcal{S} .

Além disso, a lei de controle chaveada $v_{\sigma}(\tilde{x}(t))$, dada em (124) e (163), garantiu que a origem é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema de pêndulo invertido, dado em (103). O esquema de controle da Figura 13 eliminou a descontinuidade do sinal de controle $u(t)$, mitigando um dos efeitos indesejados do *chattering*. Por fim, note que o sinal de controle $u(t)$ não apresentou saturação.

5.5 Conclusões Parciais

Utilizando a realimentação do vetor de estado expandido, foi proposto um procedimento de projeto de controle \mathcal{H}_∞ chaveado para uma classe de sistemas não lineares incertos, sujeito à saturação do atuador e distúrbios de energia limitada. A lei de controle chaveada confinou todas as trajetórias do vetor de estado expandido dentro de uma região, na qual o sinal de controle não apresenta saturação e o sistema não linear incerto pode ser descrito exatamente por modelos fuzzy T-S. As principais vantagens do método proposto são: *i*) Para a implementação da lei de controle chaveada não é necessário encontrar as expressões das funções de pertinência. Assim, o procedimento proposto permite que as funções de pertinência dependam de parâmetros incertos ou desconhecidos; *ii*) As condições de projeto não dependem da magnitude do distúrbio, ao contrário do método apresentado (LEE et al., 2015b) que só é aplicado em sistemas sujeitos a distúrbios de magnitude limitada. *iii*) O sinal de controle é obtido a partir de um integrador, eliminando a possibilidade de descontinuidade do sinal de controle causada pelo chaveamento dos ganhos de realimentação do vetor de estado expandido.

Analisando os resultados numéricos dos Exemplos 1 e 4, que utilizaram o sistema caótico Lorenz, observou-se que os projetos de controle \mathcal{H}_∞ propostos nesta tese (Teorema 3, Corolário 1 e Teorema 6) apresentaram nítida vantagem quando o sistema não linear está sujeito a um distúrbio externo com grande amplitude, pois ao contrário do método proposto em (LEE et al., 2015b), os procedimentos propostos neste trabalho não dependem da magnitude do distúrbio externo.

Uma implementação prática usando um sistema de suspensão ativa ilustrou a eficácia prática da metodologia proposta e mostrou que o controle chaveado \mathcal{H}_∞ é capaz de mitigar a ação de um distúrbio na saída do sistema, mesmo com uma falha no atuador.

Finalmente, utilizando um sistema de pêndulo invertido, foi possível estudar o problema da estabilidade local para um sistema não linear sujeito à saturação do atuador, comparando os projetos de controle do Teorema 1 (ALVES et al., 2016b) e do Teorema 4, proposto neste trabalho. O Teorema 1 apresentou o melhor resultado numérico, pois expandiu o conjunto de condições iniciais. Todavia, as condições de projeto do Teorema 1 utilizam a lei de controle chaveada (10) e como observado na Figura 11, esta lei de controle chaveada pode apresentar descontinuidade do sinal de controle $u(t)$. Já as condições de projeto do Teorema 4 são baseadas na lei de controle chaveada $v_\sigma(\tilde{x}(t))$, que utiliza a realimentação do vetor de estado expandido e o esquema de controle da Figura 13. Verificou-se que o esquema de controle da Figura 13 eliminou a descontinuidade do sinal de controle $u(t)$, mitigando um dos efeitos indesejados do *chattering*.

6 CONCLUSÕES

Nesta tese foram propostos projetos de controle \mathcal{H}_∞ chaveado para uma classe de sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy T-S, considerando funções de pertinência desconhecidas. Baseado em (TANIGUCHI et al., 2001) e (SANTIM et al., 2012), para representar a dinâmica do sistema não linear incerto, foi necessário apenas conhecer os limites inferiores e superiores das não linearidades do sistema e dos termos lineares (ou não lineares) incertos, que foram calculados considerando a região de operação no espaço de estados e o conjunto conhecido de parâmetros incertos. A técnica de controle \mathcal{H}_∞ frequentemente proporciona ganhos de realimentação com valores elevados, consequentemente considerou-se que a lei de controle chaveada estava sujeita à saturação do atuador, sendo que o problema da saturação foi tratado com duas metodologias diferentes ao longo do trabalho. Nas duas metodologias, a lei de controle chaveada eliminou a necessidade de encontrar as expressões das funções de pertinência durante a implementação, o que é uma vantagem, pois estes termos podem depender de parâmetros incertos.

No Capítulo 2, adotou-se uma técnica proposta em (HU; LIN; CHEN, 2002; CAO; LIN, 2003) para representar o sinal de controle sujeito à saturação através de uma combinação convexa dos valores do sinal de controle saturado e não saturado. A partir desta metodologia, no Capítulo 3, é apresentado um projeto de controle chaveado proposto em (ALVES et al., 2016b) que trata do problema da estabilidade local, utilizando uma lei de controle chaveada descrita em (SOUZA et al., 2014). Adicionalmente, utilizando a mesma lei de controle chaveada, foi proposto um projeto de controle \mathcal{H}_∞ chaveado para uma classe de sistemas não lineares incertos sujeitos à saturação do atuador e distúrbios de energia limitada. Entre as principais vantagens do método proposto, foi observado que:

- i)* A lei de controle chaveada garantiu ao sistema realimentado um índice de desempenho \mathcal{H}_∞ e confinou todas as trajetórias do vetor de estado dentro de uma região de operação, na qual o sistema não linear incerto pode ser descrito exatamente por modelos fuzzy T-S;
- ii)* As condições de projeto não dependem da magnitude do distúrbio externo, ao contrário do método apresentado (LEE et al., 2015b) que só é aplicado em sistemas sujeitos a distúrbios de magnitude limitada.

Considerando a mesma classe de sistema não lineares citada anteriormente, no Ca-

pítulo 4 foi utilizada uma outra abordagem para lidar com o problema da saturação do atuador. A metodologia adotada utiliza o sinal de controle para compor um vetor de estado expandido. Assim, foi possível redefinir a região de operação na qual o sistema não linear incerto é exatamente representado via modelos fuzzy T-S. Esta região, denominada de região de operação expandida, é composta também pelos limites do sinal de controle. No Capítulo 5, foi proposto um projeto de controle \mathcal{H}_∞ chaveado utilizando a realimentação do vetor de estado expandido. As vantagens deste método são semelhantes ao anterior, pois foi observado que: *i*) A lei de controle chaveada garantiu ao sistema realimentado um índice de desempenho \mathcal{H}_∞ , confinou todas as trajetórias do vetor de estado expandido dentro de uma região de operação expandida, na qual o sistema não linear incerto pode ser descrito exatamente por modelos fuzzy T-S e consequentemente o sinal de controle operou na região linear da função $\text{sat}(u(t))$; *ii*) Novamente, as condições de projeto não dependem da magnitude do distúrbio externo, ao contrário do método apresentado (LEE et al., 2015b); *iii*) O esquema de controle proposto, pode eliminar uma possível descontinuidade do sinal de controle, mitigando um dos efeitos indesejados do *chattering*.

Finalmente, a implementação prática usando um sistema de suspensão ativa ilustrou a eficácia prática das metodologias propostas. A partir da resposta dinâmica do sistema, observou-se que o sistema em malha aberta era estável, mesmo sem a ação do controlador. Todavia, o sistema apresentava oscilações com grandes amplitudes, causando desconforto ao motorista e alto nível de esforço mecânico, podendo causar danos aos componentes da suspensão. O sistema em malha fechada reduziu as amplitudes máximas de oscilação das placas, proporcionando conforto e segurança ao sistema. Ou seja, a minimização do custo garantido \mathcal{H}_∞ mitigou o efeito do distúrbio na saída do sistema.

6.1 Perspectivas futuras

Como perspectivas futuras, pode-se listar os seguintes tópicos de pesquisa:

- Generalizar os resultados apresentados neste trabalho para sistemas fuzzy Takagi-Sugeno discretos no tempo;
- Estudar o conjunto positivamente invariante $\mathcal{E}(V)$ de uma função de Lyapunov quadrática por partes do tipo mínimo.

6.2 Publicações

6.2.1 Artigos completos publicados em periódicos

ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; **OLIVEIRA, D. R.**; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; DE SOUZA, W. A. Smoothing switched control laws for uncertain non-linear systems subject to actuator saturation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, v.30, p.1408-1433, 2016.

MAINARDI JÚNIOR, E. I.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; MOREIRA, M. R.; **OLIVEIRA, D. R.**; CARNIATO, A. A. Robust control of switched linear systems with output switching strategy. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, v.26, p.455-465, 2015.

6.2.2 Artigos completos publicados em anais de congressos

ALVES, U. N. L. T.; **OLIVEIRA, D. R.**; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Smoothing switched control for uncertain T-S fuzzy systems with unknown membership functions, actuator saturation and disturbance In: 2016 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZIEEE), 2016, Vancouver. 2016 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE). IEEE, 2016. p.2212-2219

OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ALVES, U. N. L. T.; SOUZA, W. A.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. Controle \mathcal{H}_∞ chaveado para sistemas não lineares fuzzy Takagi-Sugeno com saturação do sinal de controle In: XXI Congresso Brasileiro de Automática, 2016, Vitória. XXI Congresso Brasileiro de Automática, 2016.

BUZETTI, A. S.; TEIXEIRA, M. C. M.; **OLIVEIRA, D. R.**; LAZARINI, A. Z. N.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. Projeto de controle robusto para sistemas com sensores que apresentam falhas variantes no tempo In: XXI Congresso Brasileiro de Automática, 2016, Vitória. XXI Congresso Brasileiro de Automática, 2016.

ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; **OLIVEIRA, D. R.**; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Sobre o controle chaveado de sistemas não lineares incertos com saturação no atuador In: XXI Congresso Brasileiro de Automática, 2016, Vitória. XXI Congresso Brasileiro de Automática, 2016.

CARDIM, R.; TELLO, I. F. Y.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; **OLIVEIRA, D. R.**; ALVES, U. N. L. T. Application of robust switched controllers in active suspension system In: XXI Congresso Brasileiro de Automática, 2016, Vitória. XXI Congresso Brasileiro de Automática, 2016

CADALSO, M. R. R.; LLINS, L. I. H.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.;

OLIVEIRA, D. R. Projeto de controladores gain scheduling usando realimentação derivativa com restrição de D-estabilidade In: XXI Congresso Brasileiro de Automática, 2016, Vitória. XXI Congresso Brasileiro de Automática, 2016.

BUZETTI, A. S.; **OLIVEIRA, D. R.**; TEIXEIRA, M. C. M.; SOUZA, W. A.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. Projeto de controle robusto chaveado com falhas nos sensores In: XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2015, Natal - RN. XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2015.

ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; **OLIVEIRA, D. R.**; SOUZA, W. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Redução do chattering em controle chaveado pela suavização na mudança do ganho de realimentação In: XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2015, Natal - RN. XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2015.

LLINS, L. I. H.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; **OLIVEIRA, D. R.**; SILVA, E. R. P. Projeto de controlador gain scheduling usando realimentação derivativa via LMI In: XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2015, Natal - RN. XII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2015.

OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A.; MOREIRA, M. R.; SILVA, J. H. P. Projeto de controle robusto \mathcal{H}_∞ chaveado: implementação prática em um sistema de suspensão ativa In: XX Congresso Brasileiro de Automática, 2014, Belo Horizonte. XX Congresso Brasileiro de Automática, 2014.

SOUZA, W. A.; **OLIVEIRA, D. R.**; TEIXEIRA, M. C. M.; SILVA, L. S. C.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Projeto e implementação de um controlador robusto chaveado utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno In: XX Congresso Brasileiro de Automática, 2014, Belo Horizonte. XX Congresso Brasileiro de Automática, 2014.

MAINARDI JUNIOR, E. I.; TEIXEIRA, M. C. M.; MOREIRA, M. R.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; **OLIVEIRA, D. R.** Robust control of switched linear systems with output switching strategy In: XX Congresso Brasileiro de Automática, 2014, Belo Horizonte. XX Congresso Brasileiro de Automática, 2014.

CAMATA, R. P.; ASSUNÇÃO, E.; SILVA, E. R. P.; BUZACHERO, L. F. S.; ALVES, U. N. L. T.; **OLIVEIRA, D. R.** Implementação de controlador robusto para o sistema ball balancer sujeito a falhas estruturais In: XX Congresso Brasileiro de Automática, 2014, Belo Horizonte. XX Congresso Brasileiro de Automática, 2014.

SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; **OLIVEIRA, D. R.**; VIEIRA, A. R.; ASSUNÇÃO, E.; RIBEIRO, J. M. S.; SILVA, E. R. P. Projeto e implementação de um controlador robusto chaveado para um sistema 2D ball balancer In: XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2013, Fortaleza. SBAI, 2013.

MAINARDI JUNIOR, E. I.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; **OLIVEIRA, D. R.**; YOSHIMURA, V. L. Controle de sistemas lineares chaveados utilizando realimentação estática da saída e funções de Lyapunov-Metzler In: XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2013, Fortaleza. SBAI, 2013.

REFERÊNCIAS

- ALVES, U. N. L. T.; OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Smoothing switched control for uncertain T-S fuzzy systems with unknown membership functions, actuator saturation and disturbance. In: *IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS (FUZZ-IEEE), 2016*. Vancouver: **Conference of the...** Vancouver: IEEE, 2016a. p. 2212–2219.
- ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A. Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, Chichester, v. 30, n. 8-10, p. 1408–1433, 2016b.
- ASEMANI, M. H.; MAJD, V. J. A robust observer-based controller design for uncertain T-S fuzzy systems with unknown premise variables via LMI. *Fuzzy Sets and Systems*, Amsterdam, v. 212, p. 21–40, 2013.
- BERNAL, M.; GUERRA, T. Generalized nonquadratic stability of continuous-time Takagi-Sugeno models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 18, n. 4, p. 815–822, 2010.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Philadelphia: SIAM, 1994. (Studies in Applied Mathematics, v. 15).
- CAMPOS, V. C. S.; SOUZA, F. O.; TÔRRES, L. A. B.; PALHARES, R. M. New stability conditions based on piecewise fuzzy Lyapunov functions and tensor product transformations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 21, n. 4, p. 748–760, 2013.
- CAO, Y.-Y.; LIN, Z. Robust stability analysis and fuzzy-scheduling control for nonlinear systems subject to actuator saturation. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 11, n. 1, p. 57–67, 2003.
- CHADLI, M.; KARIMI, H. R. Robust observer design for unknown inputs Takagi-Sugeno models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 21, n. 1, p. 158–164, 2013.
- CHEN, Y. J.; OHTAKE, H.; TANAKA, K.; WANG, W. J.; WANG, H. O. Relaxed stabilization criterion for T-S fuzzy systems by minimum-type piecewise-Lyapunov function-based switching fuzzy controller. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 20, n. 6, p. 1166–1173, 2012.
- CHIU, C.-S. Dynamic decoupling approach to robust T-S fuzzy model-based control.

- IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 22, n. 5, p. 1088–1100, 2014.
- CORLESS, M.; LEITMANN, G. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 26, n. 5, p. 1139–1144, 1981.
- DEAECTO, G. S.; SANTOS, G. C. State feedback \mathcal{H}_∞ control design of continuous-time switched affine systems. *IET Control Theory Applications*, Stevenage, v. 9, n. 10, p. 1511–1516, 2015.
- DEAECTO, G. S.; SOUZA, M.; GEROMEL, J. C. Chattering free control of continuous-time switched linear systems. *IET Control Theory Applications*, Stevenage, v. 8, n. 5, p. 348–354, 2014.
- DELMOTTE, F.; GUERRA, T. M.; KSANTINI, M. Continuous Takagi-Sugeno's models: Reduction of the number of LMI conditions in various fuzzy control design technics. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 15, n. 3, p. 426–438, 2007.
- DONG, J.; YANG, G.-H. Dynamic output feedback control synthesis for continuous-time T-S fuzzy systems via a switched fuzzy control scheme. *IEEE Transaction on Systems, Man, Cybernetics. B*, Piscataway, v. 38, n. 4, p. 1166–1175, 2008.
- FANG, C.-H.; LIU, Y.-S.; KAU, S.-W.; HONG, L.; LEE, C.-H. A new LMI-based approach to relaxed quadratic stabilization of T-S fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 14, n. 3, p. 386–397, 2006.
- GUERRA, T.; JAADARI, A.; PAN, J.; SALA, A. Some refinements for non quadratic stabilization of continuous TS models. In: *IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS*. Taipei: **Conference of the...** Taipei: IEEE, 2011. p. 329–333.
- HU, T.; LIN, Z.; CHEN, B. M. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. *Automatica*, Laxemburg, v. 38, n. 2, p. 351 – 359, 2002.
- KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. Saddle River: Prentice-Hall, 2001.
- KLUG, M.; CASTELAN, E. B.; COUTINHO, D. Control of nonlinear discrete-time systems subject to energy bounded disturbances using local T-S fuzzy models. In: *IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 52, 2013*. Florence: **Conference of the...** Florence: IEEE, 2013. p. 7426–7431.
- KLUG, M.; CASTELAN, E. B.; LEITE, V. J.; SILVA, L. F. Fuzzy dynamic output feedback control through nonlinear Takagi-Sugeno models. *Fuzzy Sets and Systems*, Amsterdam, v. 263, p. 92–111, 2015.
- LEE, D. H.; JOO, Y. H.; TAK, M. H. Local stability analysis of continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems: A fuzzy lyapunov function approach. *Information Sciences*, Philadelphia, v. 257, p. 163–175, 2014.
- LEE, D. H.; JOO, Y. H.; TAK, M. H. LMI conditions for local stability and stabilization

- of continuous-time T-S fuzzy systems. *International Journal of Control, Automation and Systems*, Heidelberg, v. 13, n. 4, p. 986–994, 2015a.
- LEE, D. H.; PARK, J. B.; JOO, Y. H. A fuzzy lyapunov function approach to estimating the domain of attraction for continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems. *Information Sciences*, Philadelphia, v. 185, n. 1, p. 230–248, 2012.
- LEE, D. H.; PARK, J. B.; JOO, Y. H.; KIM, S. K. Local \mathcal{H}_∞ controller design for continuous-time T-S fuzzy systems. *International Journal of Control, Automation and Systems*, Heidelberg, v. 13, n. 6, p. 1499–1507, 2015b.
- LI, H.; LIU, H.; GAO, H.; SHI, P. Reliable fuzzy control for active suspension systems with actuator delay and fault. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 20, n. 2, p. 342–357, 2012.
- LI, X. J.; YANG, G. H. Switching-type \mathcal{H}_∞ filter design for T-S fuzzy systems with unknown or partially unknown membership functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 21, n. 2, p. 385–392, 2013.
- LI, X. J.; YANG, G. H. Fault detection for T-S fuzzy systems with unknown membership functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 22, n. 1, p. 139–152, 2014.
- LIU, M.; CAO, X.; SHI, P. Fault estimation and tolerant control for fuzzy stochastic systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 21, n. 2, p. 221–229, 2013.
- LIU, X. D.; ZHANG, Q. New approaches to \mathcal{H}_∞ controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI. *Automatica*, Laxemburg, v. 39, n. 9, p. 1571–1582, 2003.
- LÖFBERG, J. Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *2004 IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER AIDED CONTROL SYSTEMS DESIGN, 2004*. New Orleans: **Conference of the...** New Orleans: IEEE, 2004. p. 248–289.
- MÁRQUEZ, R.; GUERRA, T. M.; BERNAL, M.; KRUSZEWSKI, A. Asymptotically necessary and sufficient conditions for Takagi-Sugeno models using generalized non-quadratic parameter-dependent controller design. *Fuzzy Sets and Systems*, Amsterdam, v. 306, p. 48–62, 2017.
- MONTAGNER, V. F.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Convergent LMI relaxations for quadratic stabilizability and \mathcal{H}_∞ control of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transaction Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 17, n. 4, p. 863–873, 2009.
- NGUYEN, A.; DAMBRINE, M.; LAUBER, J. Lyapunov-based robust control design for a class of switching non-linear systems subject to input saturation: application to engine control. *IET Control Theory Applications*, Stevenage, v. 8, n. 17, p. 1789–1802, 2014.
- ONAT, C.; KUCUKDEMIRAL, I.; SIVRIOGLU, S.; YUKSEK, I.; CANSEVER, G.

- LPV gain-scheduling controller design for a nonlinear quarter-vehicle active suspension system. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, London, v. 31, n. 1, p. 71–95, 2009.
- PAN, J.-T.; GUERRA, T.; FEI, S. min; JAADARI, A. Nonquadratic stabilization of continuous T-S fuzzy models: LMI solution for a local approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 20, n. 3, p. 594–602, 2012.
- Quanser Innovate Educate. **Active suspension LQG control using Quarc** - instructor manual. Ontario, p. 48, 2010.
- SANTIM, M. P. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SOUZA, W. A.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. Design of a Takagi-Sugeno fuzzy regulator for a set of operation points. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 2012, p. 1–17, 2012.
- SILVA, E. R. P.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M.; CARDIM, R. Robust controller implementation via state-derivative feedback in an active suspension system subjected to fault. In: *CONTROL AND FAULT-TOLERANT SYSTEMS (SysTol), 2013 CONFERENCE ON, 2013*. Nice: **Conference of the...** Nice: IEEE, 2013. p. 752–757.
- SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi-Sugeno fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 22, n. 6, p. 1720–1727, 2014.
- SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 2013, p. 10, 2013.
- TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, SMC-15*, Piscataway, n. 1, p. 116–132, 1985.
- TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 6, n. 2, p. 250–265, 1998.
- TANAKA, K.; WANG, H. O. *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*. New York: John Wiley & Sons, 2001.
- TANIGUCHI, T.; K.; OHATAKE, H.; WANG, H. O. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 9, n. 4, p. 525–537, 2001.
- TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. G. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. *IEEE Transaction Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 11, n. 5, p. 613–623, 2003.
- TEIXEIRA, M. C. M.; ZAK, S. H. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 7, n. 2, p. 133–142, 1999.

- TSENG, C.-S.; CHEN, B.-S. \mathcal{H}_∞ fuzzy control design for nonlinear systems subject to actuator saturation. In: *2006 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS. : Conference of the...* [S.l: s.n.], 2006. p. 783–788.
- TUAN, H.; APKARIAN, P.; NARIKIYO, T.; YAMAMOTO, Y. Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 9, n. 2, p. 324–332, 2001.
- WANG, H. O.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. F. An approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 4, n. 1, p. 14–23, 1996.
- WANG, L.; LIU, X. Local analysis of continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy system with disturbances bounded by magnitude or energy: A Lagrange multiplier method. *Information Sciences*, Philadelphia, v. 248, p. 89–102, 2013.