

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FACULDADE DE CIÊNCIAS - CAMPUS BAURU

DEPARTAMENTO DE COMPUTAÇÃO

BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Kawe Antônio dos Santos Marcelino

**GERAÇÃO DE PADRÕES DE CORTE BIDIMENSIONAIS COM
ITENS REGULARES E IRREGULARES DO TIPO L**

BAURU

Novembro/2019

Kawe Antônio dos Santos Marcelino

GERAÇÃO DE PADRÕES DE CORTE BIDIMENSIONAIS COM ITENS REGULARES E IRREGULARES DO TIPO L

Trabalho de Conclusão de Curso do Curso de Bacharelado em Ciência da Computação da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Faculdade de Ciências, Campus Bauru.

Orientadora: Profa. Dra. Andréa Carla Gonçalves Vianna

BAURU

Novembro/2019

Kawe Antônio dos Santos Marcelino Geração de padrões de corte bidimensionais com itens regulares e irregulares do tipo L/ Kawe Antônio dos Santos Marcelino. – Bauru, Novembro/2019- 46 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.
Orientadora: Profa. Dra. Andréa Carla Gonçalves Vianna
Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Faculdade de Ciências
Ciência da Computação, Novembro/2019.
1. Problema de Corte Bidimensional 2. Análise combinatória 3. Geração de padrão de corte

Kawe Antônio dos Santos Marcelino

Geração de padrões de corte bidimensionais com itens regulares e irregulares do tipo L

Trabalho de Conclusão de Curso do Curso de Bacharelado em Ciência da Computação da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Faculdade de Ciências, Campus Bauru.

Banca Examinadora

Profa. Dra. Andréa Carla Gonçalves Vianna

Orientadora
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Faculdade de Ciências
Departamento de Computação

Profa. Dra. Simone das Graças Domingues Prado

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Faculdade de Ciências
Departamento de Computação

Profa. Dra. Adriana Cristina Cherri

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática

Bauru, _____ de Novembro de 2019.

À minha família que me proporcionou tudo o que precisava para chegar até onde cheguei.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família que sempre me inspiraram e deram todo o suporte necessário durante toda a minha infância até este momento para que pudesse perseguir e conquistar meus sonhos.

Gostaria de agradecer também a todos os meus amigos de sala e de faculdade, que sempre me ajudaram em tudo que precisei durante esses anos de faculdade. Conheci pessoas maravilhosas e irei levar vocês para a vida toda.

Agradeço também à minha orientadora por todo o suporte para que eu pudesse começar, desenvolver e concluir este trabalho, me atendendo em todas as horas que necessitei e me ensinando a todo momento.

Agradeço, por fim, à Unesp, o Departamento de Computação e aos professores que dispuseram de seu tempo para mim e todo à minha turma e ter proporcionado todas as condições para que eu pudesse concluir o curso.

O passado pode doer, mas do jeito que eu vejo você pode fugir dele ou aprender com ele
Rafiki (Rei Leão, 1994)

Resumo

Diversos tipos de indústrias têm como característica o corte de matéria prima em itens menores de diferentes tamanhos e com pouca padronização, de forma à atender a demanda interna ou externa. Para elas é essencial um bom planejamento na etapa de corte, afim de evitar desperdícios de material e, conseqüentemente, aumentar lucros e melhorar a competitividade. Na literatura, este problema é conhecido como Problema de Corte e Empacotamento, que consiste em encontrar a melhor forma de alocar itens menores em objetos maiores otimizando um determinado objetivo (e.g., maximizar o valor de utilidade total, minimizar a perda, etc.). Um tipo de Problema de Corte pouco estudado é o Problema de Corte Bidimensional com itens do tipo L. Este tipo de problema, em razão da presença de itens irregulares, tem alto grau de complexidade de resolução, mas também um alto grau de utilidade para as empresas. Este trabalho se propõe a estudar mais o tema e apresentar um método 2-estágios com combinação de itens irregulares para implementar um gerador de padrão de corte para problemas de corte bidimensional com itens regulares e irregulares do tipo L. Além da proposição do método, foi realizado um levantamento de instâncias da literatura para avaliar o desempenho do método perante os problemas de teste.

Palavras-chave: problema de corte bidimensional; análise combinatória; geração de padrão de corte.

Abstract

Several types of industries are characterized by the process of cutting raw material into smaller items of different sizes and with little standardization, in order to fulfill internal or external demand. For them a good planning at the cutting stage is essential in order to avoid material waste and, consequently, increase profits and improve competitiveness. In the literature, this problem is known as Cutting Stock Problem, which consists of finding the best way to allocate smaller items into larger objects by optimizing a given objective (e.g., maximize the total utility value, minimize loss, etc.). One class of Cutting Problem poorly studied in the literature is the 2-dimensional Cutting Problem with L-shaped pieces. This problem, due to the L-shaped pieces, has a high degree of complexity to be solved, but also has a high degree of interest to companies. This paper aims to study the 2-dimensional Cutting Problem with L-shaped pieces and propose a new method of 2-stages with combined pieces to implement a cutting pattern generator for 2-dimensional cutting problems with irregular pieces. In addition to the proposition of the new method, a collection of 2-dimensional cutting problem instances was collected in the literature to evaluate the method performance and compare the results with the literature.

Keywords: two-dimensional cutting problem; combinatorial analysis; cutting pattern generation.

Lista de figuras

Figura 1 – Aplicação de itens tipo L nos produtos da Apple.	14
Figura 2 – Exemplo de PC2D.	16
Figura 3 – Exemplo de padrão de corte.	17
Figura 4 – Exemplos de corte guilhotinado.	17
Figura 5 – Padrões de corte guilhotinado.	18
Figura 6 – Padrões de corte guilhotinado de (a) 2-estágios e (b) 4-estágios.	18
Figura 7 – Tipos de corte degrau.	25
Figura 8 – Exemplo de problema.	25
Figura 9 – Exemplo de padrão de corte com itens retangulares e do tipo L.	25
Figura 10 – Processo de transformação de itens do tipo L.	26
Figura 11 – Combinação de itens L com itens retangulares: (a) combinação na região de “dentro”; (b) combinação no “topo”.	27
Figura 12 – Combinações LR permitidas.	27
Figura 13 – Combinações LR não permitidas.	28
Figura 14 – Exemplos de combinação LL.	28
Figura 15 – Exemplo de solução homogênea.	29
Figura 16 – Exemplo de solução homogênea composta.	30
Figura 17 – Padrão de corte para a instância <i>gcut13</i>	37
Figura 18 – Padrão de corte para a instância <i>Xu</i> (irrestrito).	40
Figura 19 – Padrão de corte para a instância <i>Xu</i> (restrito).	41
Figura 20 – Padrão de corte para a instância <i>Nakatake</i> (irrestrito).	41
Figura 21 – Padrão de corte para a instância <i>Nakatake</i> (restrito).	42

Lista de tabelas

Tabela 1 – Resultados para problemas do grupo 1.	35
Tabela 2 – Dados para os problemas do grupo 2.	36
Tabela 3 – Resultados para o grupo 2.	36
Tabela 4 – Dados para a instância <i>Nakatake</i>	38
Tabela 5 – Dados para a instância <i>Xu</i>	39

Lista de abreviaturas e siglas

PC1D	Problema de Corte Unidimensional
PC2D	Problema de Corte Bidimensional
PC2DI	Problema de Corte Bidimensional Irrestrito
PC2DR	Problema de Corte Bidimensional Restrito
PC2D2E	Problema de Corte Bidimensional 2-estágios

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	PROBLEMA DE CORTE BIDIMENSIONAL	16
2.1	Descrição do Problema	16
2.2	Resolução do Problema de Corte 2-estágios	18
2.2.1	Problema da Mochila	19
2.2.2	Divisão e Conquista	20
2.2.3	Resolução do Problema de Corte 2-estágios Restrito	22
2.2.4	Problema de Corte Bidimensional com itens do tipo L	24
3	MÉTODO PROPOSTO	26
3.1	Resolução do Problema de Corte Bidimensional com itens do tipo L	26
4	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	32
4.1	Ferramentas utilizadas	32
4.1.1	Linguagem <i>Python</i>	32
4.1.2	CPLEX	32
4.1.3	TeXLive e TikZ	33
4.2	Estrutura do programa	33
5	RESULTADOS	35
6	CONCLUSÃO	43
	REFERÊNCIAS	44

1 Introdução

Diversos tipos de indústrias têm como característica o corte de matéria prima em itens menores de diferentes tamanhos e com pouca padronização, de forma à atender a demanda interna ou externa. Indústrias de aço, alumínio, vidro, madeira e tecido são alguns exemplos que têm esta característica. Para elas é essencial um bom planejamento na etapa de corte, afim de evitar desperdícios de material e, conseqüentemente, aumentar lucros e melhorar a competitividade.

Na literatura, este problema é conhecido como Problema de Corte e Empacotamento (DYCKHOFF, 1990). O Problema de Corte consiste, basicamente, em cortar unidades maiores (placas) dividindo-as em unidades menores (itens) otimizando determinado objetivo, como minimizar a perda de material. De forma relacionada, o Problema de Empacotamento consiste na alocação de unidades menores em uma unidade maior - como um contêiner, por exemplo - otimizando também uma função objetivo, como minimizar o espaço ocioso.

Em razão da alta aplicabilidade para pesquisa, diversidade de problemas reais em grande variedade e complexidade na solução destes problemas, o Problema de Corte e Empacotamento atrai muitos pesquisadores por todo mundo, como apontado por Bischoff e Wäscher (1995) e os estudos de Brown (1971), Golden (1976), Arenales, Morabito e Yanasse (1999) e Dyckhoff e Finke (1992).

Há vários tipos de problemas de corte, entretanto há um tópico pouco estudado pela literatura (VIANNA, 2000; LINS; LINS; MORABITO, 2003) que envolve cortes bidimensionais com itens regulares e irregulares, em especial itens com formato em L. Este tópico é abordado neste trabalho e tem por objetivo apresentar um método de resolução de problemas de corte bidimensional com itens regulares e irregulares do tipo L. A ideia é aplicar o método 2-estágios de (GILMORE; GOMORY, 1965) combinando itens regulares e irregulares (tipo L), de forma a aumentar o número de itens que o método pode usar para encontrar a melhor solução.

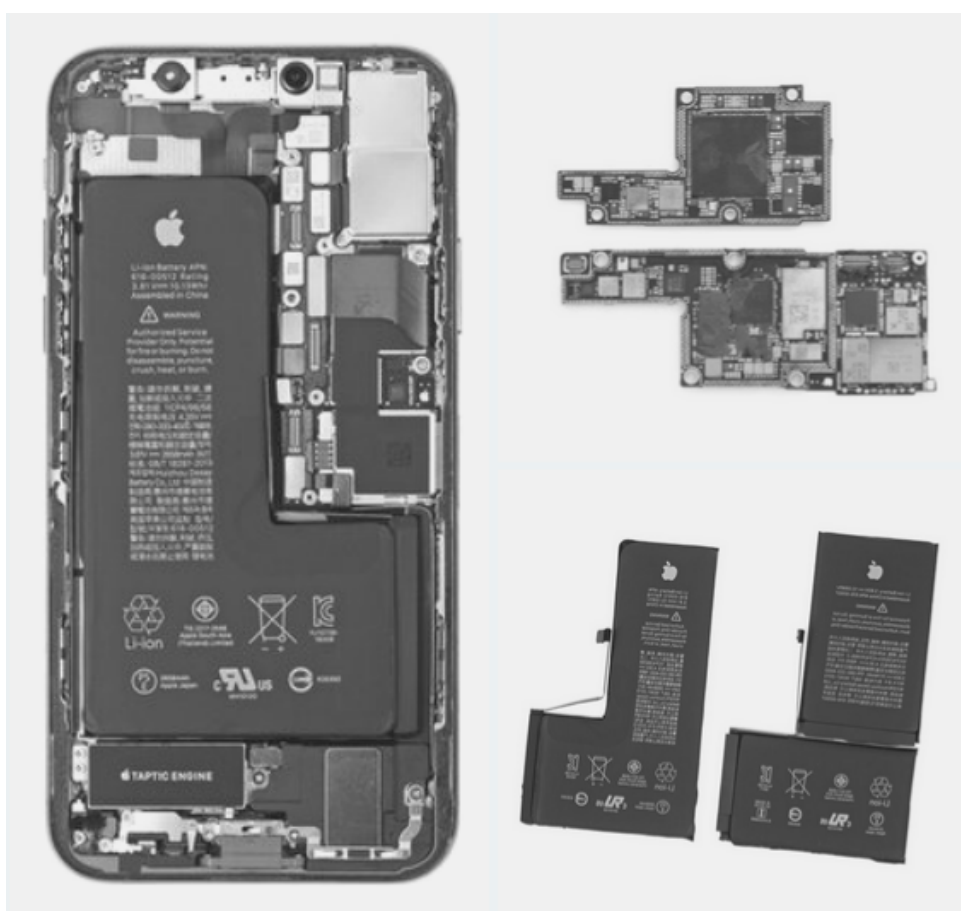
Mesmo com a pouca literatura sobre o problema de corte com itens irregulares, há diversos autores que estudaram o tema e apresentaram alguns métodos para a resolução deste tipo de problema. Dentre eles, temos Chen et al. (2010), Fujiyoshi e Murata (2000), Fujiyoshi e Murata (2002), Kang e Dai (1998), Lee (1993), Lins, Lins e Morabito (2003), Ma et al. (2001), Nakatake et al. (1996), Pang et al. (2001), Roberts (1984), Tang e Wong (2004), Wu, Chang e Chang (2003) e Xu, Guo e Cheng (1998).

Lins, Lins e Morabito (2003) trabalhou com um método para alocação de retângulos em grandes itens retangulares e do tipo L com intuito que esta abordagem resolve-se problemas de corte bidimensional complexos. Já Nakatake et al. (1996) e Xu, Guo e Cheng (1998) trabalharam com corte de circuito impresso, onde os componentes podem ser de diversos

formatos (L, T, U, etc.). O objetivo foi apresentar *designs* de circuito impresso que utilizem melhor todo o espaço disponível no circuito. Roberts (1984) desenvolveu uma solução para um problema real para a fabricação de móveis em que utilizou uma série de heurísticas que permitiam agendar o corte de itens de formatos e tamanhos variados.

Na indústria, um exemplo muito interessante de aplicação de itens do tipo L são os *smartphones* iPhone X e iPhone XS lançados, respectivamente, em 2017 e 2018 pela Apple. No iPhone X, a empresa usou uma placa-mãe em formato L em conjunto com uma bateria também em formato L, entretanto a bateria neste caso era a junção de duas baterias retangulares unidas para imitar o formato da placa-mãe, como ilustrado na Figura 1. A ideia era aumentar a capacidade de bateria do *smartphone* sem aumentar o tamanho do aparelho. Para o iPhone XS, a empresa decidiu por não utilizar mais uma placa-mãe em formato em L, mas manteve a bateria em formato L, que agora não é mais uma junção de duas baterias retangulares, mas sim um único item com formato em L (Figura 1).

Figura 1 – Aplicação de itens tipo L nos produtos da Apple.



Fonte: Elaborado pelo autor.

No Capítulo 2, o Problema de Corte Bidimensional é apresentado com mais detalhes. Além disso, há uma definição do Problema de Corte Bidimensional com itens do tipo L, tema

deste trabalho, e um método de resolução em 2-estágios muito utilizado na indústria para problemas do tipo bidimensional.

Os Capítulos 3 e 4 tratam, respectivamente, do método proposto para a resolução de problemas de corte bidimensional com itens L e da implementação computacional do método.

O Capítulo 5 discorre sobre o desempenho do método implementado comparando os resultados com algumas instâncias da literatura.

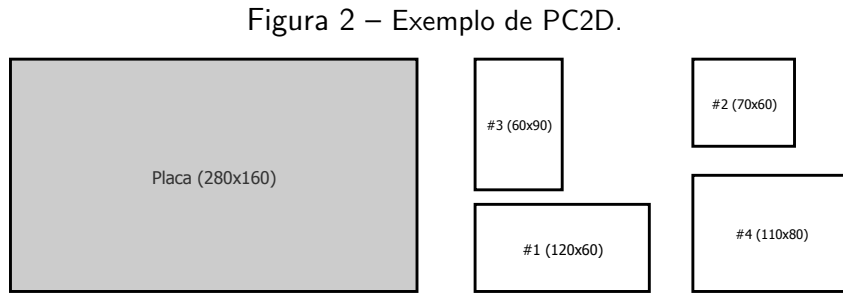
Por fim, o Capítulo 6 apresenta as conclusões do trabalho e passos que podem ser realizados no futuro.

2 Problema de Corte Bidimensional

Neste Capítulo é apresentado uma descrição mais detalhada do Problema de Corte Bidimensional e o método de resolução em dois estágios.

2.1 Descrição do Problema

O Problema de Corte Bidimensional (PC2D) consiste em cortar uma placa retangular em itens retangulares menores otimizando algum objetivo (por exemplo, minimizar a perda de matéria-prima, maximizar o valor de utilidade, entre outros). A Figura 2 mostra um exemplo de PC2D com placa e itens retangulares.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a definição do modelo matemático que define um padrão de corte para o PC2D, considere uma placa retangular de dimensões (L, W) , em que L e W representam, respectivamente, o comprimento e a largura da placa; e um conjunto de m itens retangulares menores de dimensões (l_i, w_i) , em que l_i representa o comprimento do item i e w_i a largura do mesmo. Além disso, cada item i tem um valor α_i associado, que neste caso será a área do item. O objetivo é maximizar a área total ocupada pelos itens (valor de utilidade será $\sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot x_i$), portanto também será minimizada a perda de matéria-prima. Seja x_i o número de vezes que o item i é produzido, é possível definir o seguinte modelo matemático:

$$\begin{aligned}
 &\text{maximizar valor de utilidade} \\
 &\text{sujeito a: } (x_1, x_2, \dots, x_m) \text{ correspondente a um padrão de corte} \\
 &x_i \geq 0, \text{ inteiro, } i = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{1}$$

O resultado do modelo matemático descrito define um padrão de corte. Padrão de corte que é o modo como os itens estão organizados ao longo da placa (Figura 3).

Figura 3 – Exemplo de padrão de corte.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Considerando apenas essas informações (dimensão da placa, conjunto de itens e o valor da área de cada item), o problema é classificado como Problema de Corte Bidimensional Irrestrito (PC2DI), ou seja, não há um limite de demanda (máximo ou mínimo, dependendo do problema abordado) da quantidade que cada item pode ser produzido. Caso haja restrição na quantidade de itens a ser produzida, o problema é chamado de Problema de Corte Bidimensional Restrito (PC2DR), que pode ser definido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 &\text{maximizar valor de utilidade} \\
 &\text{sujeito a: } (x_1, x_2, \dots, x_m) \text{ correspondente a um padrão de corte} \\
 &0 \leq x_i \leq b_i, \text{ inteiro, } i = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{2}$$

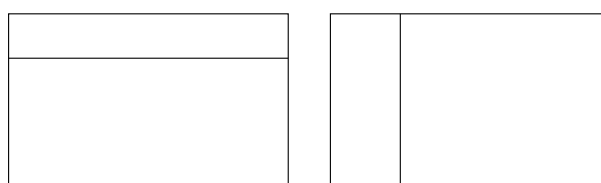
em que b_i é a quantidade máxima de itens do tipo i no padrão de corte.

Apesar de ser uma alteração mínima no modelo matemático em relação ao PC2DI, a limitação na quantidade de itens no padrão acrescenta bastante complexidade na resolução do problema (VIANNA, 2000).

Em muitos Problemas de Corte, o maquinário (serras) utilizado aplica cortes nos placas denominados *cortes guilhotinados*.

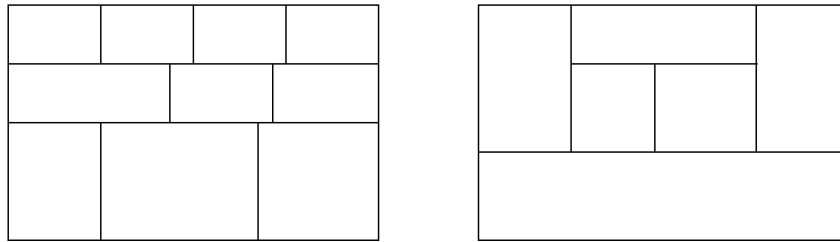
O corte é chamado guilhotinado quando, aplicado em um retângulo, produz dois novos retângulos, ou seja, o retângulo é cortado somente de modo horizontal ou vertical, conforme a Figura 4. Um padrão de corte é do tipo guilhotinado se for obtido por cortes guilhotinados sucessivos (Figura 5).

Figura 4 – Exemplos de corte guilhotinado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

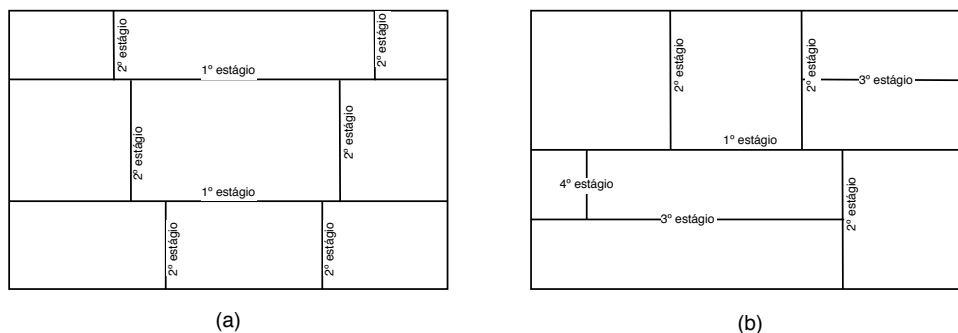
Figura 5 – Padrões de corte guilhotinado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Um padrão de corte guilhotinado pode ser do tipo estagiado (k -estágios) ou não-estagiado. No primeiro estágio os cortes são realizados de forma paralela a um dos lados da placa retangular; no próximo estágio, os cortes são perpendiculares aos cortes do estágio anterior, e assim por diante. Caso haja um limite k de estágios, o problema é chamado de Problema de Corte Guilhotinado k -estagiado. Caso contrário, é chamado de Problema de Corte Guilhotinado não-estagiado. A Figura 6 ilustra padrões de corte guilhotinado de 2 e 4 estágios.

Figura 6 – Padrões de corte guilhotinado de (a) 2-estágios e (b) 4-estágios.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O Problema de Corte Guilhotinado foi definido no artigo de [Gilmore e Gomory \(1965\)](#) e, através dos estudos dos autores, foi apresentado um método de resolução do Problema de Corte Bidimensional 2-estágios (PC2D2E). Na próxima seção é apresentado o método e sua aplicação em problemas de corte bidimensional.

2.2 Resolução do Problema de Corte 2-estágios

O método de 2-estágios é um método para resolução de problemas de corte bidimensional, como mostrado no artigo de [Gilmore e Gomory \(1965\)](#). Um dos motivos da proposição deste método é a complexidade computacional do método de geração de colunas, que apresenta um número muito grande de colunas no seu modelo matemático.

O método de 2-estágios utiliza duas ferramentas: o **Problema da Mochila** e o paradigma de **Divisão e Conquista**. O problema da mochila é um problema clássico da literatura de Otimização e Análise Combinatória, enquanto a Divisão e Conquista é um paradigma de algoritmos para resolução de problemas complexos. A seguir é dada uma explicação dos dois assuntos.

2.2.1 Problema da Mochila

O Problema da Mochila (em inglês, *Knapsack Problem*) é um problema clássico de otimização combinatória com aplicação em diversas áreas como investimentos, orçamentos, problemas de corte e empacotamento, entre outros. O nome, Problema da Mochila, é dado com base na situação hipotética em que uma pessoa deseja carregar uma mochila com itens de diferentes pesos e valores. O objetivo é carregar a mochila com o maior valor possível sem ultrapassar o peso máximo permitido pela mesma.

O problema pode ser formulado como:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } \sum_{i=1}^m v_i \cdot x_i \\ &\text{sujeito a: } \sum_{i=1}^m k_i \cdot x_i \leq K \\ &x_i \geq 0, \text{ inteiro, } i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{3}$$

em que K é o peso máximo que a mochila suporta, k_i , v_i são, respectivamente, o peso e o valor do item i e, x_i é quantidade de vezes que o item i foi carregado na mochila. A formulação deste problema é semelhante ao modelo matemático (1) para problemas de corte irrestrito.

O Problema da Mochila pode ser estendido para duas dimensões (Problema da Mochila Bidimensional) e, consiste de um conjunto de m itens retangulares, cada um possuindo valor (v_i) e dimensões de comprimento e largura ($l_i \times w_i$), e um retângulo (representando a mochila) de dimensões $L \times W$. O objetivo é alocar o maior valor possível de itens no retângulo, desde que os itens não se sobreponham (CAPRARA; MONACI, 2004) e não ultrapassem as dimensões da mochila.

O Problema da Mochila Bidimensional pode ser formulado de forma parecida com o

modelo matemático (3) alterando alguns parâmetros:

$$\begin{aligned} & \text{maximizar } \sum_{i=1}^m v_i \cdot x_i \\ & \text{sujeito a: } \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot x_i \leq A \\ & x_i \geq 0, \text{ inteiro, } i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4)$$

em que v_i , α_i e x_i representam, respectivamente, o valor, a área ($l_i \times w_i$) e a quantidade de vezes que o item i é alocado na mochila, e A representa a área total da mochila ($L \times W$).

O Problema da Mochila pode ter restrições da quantidade de vezes que um item pode ser carregado numa mesma mochila. Este problema pode ser descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \text{maximizar } \sum_{i=1}^m v_i \cdot x_i \\ & \text{sujeito a: } \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot x_i \leq A \\ & 0 \leq x_i \leq b_i, \text{ inteiro, } i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (5)$$

em que b_i é o máximo de vezes que o item i pode ser carregado na mochila. A descrição deste problemas é semelhante ao modelo matemático (2) para problemas de corte restrito.

O Problema da Mochila aparece em diversas situações, desde hipotéticas até reais. Uma dessas situações é o problema de corte de itens menores em objetos maiores. O método apresentado a seguir utiliza o Problema da Mochila para auxiliar na obtenção dos resultados.

2.2.2 Divisão e Conquista

O paradigma de divisão e conquista é uma ferramenta usado em algoritmos como *merge sort* e *quicksort* (KHAN ACADEMY, 2019), por exemplo, para facilitar a resolução de problemas de grande complexidade computacional. A ideia é quebrar um processo complexo em pequenos processos de menor complexidade e de fácil resolução computacional (TUTORIALSPPOINT, 2019). A seguir uma pequena explicação do problema da mochila e da divisão e conquista:

- **Dividir** o problema em subproblemas menores similares ao problema original, mas muito mais fáceis e rápidos de solucionar;
- **Conquistar** os subproblemas ao resolvê-los separadamente;
- **Combinar** a solução de todos os subproblemas de forma que o resultado final seja a solução do problema original, caso o mesmo fosse resolvido como um problema único.

A resolução do PC2D2E utiliza o mesmo conceito, onde primeiro resolve-se uma das dimensões da placa através dos subproblemas menores e depois resolve-se a outra dimensão na etapa de combinação. Desta forma, a divisão e conquista fica da seguinte forma: divide-se um PC2D em vários subproblemas de Problema de Corte Unidimensional (PC1D), usando o comprimento da placa para definir os PC1Ds; cada um desses subproblemas será resolvido como um problema da mochila; e, após a solução de todos os subproblemas, seus resultados serão usados para resolver mais um PC1D, agora usando a largura da placa para esta última etapa.

Seja uma placa retangular de dimensões (L, W) e um conjunto de m itens de dimensões (l_i, w_i) , $i = 1, \dots, m$, que devem ser produzidos a partir da placa. Este problema pode ser formulado como o modelo matemático (1), onde o valor de utilidade será a área total de alocação dos itens no padrão de corte $(\sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot x_i)$.

A resolução para o mesmo problema de corte formulado anteriormente pelo método de 2-estágios pode ser realizada da seguinte forma:

Etapa 1 - Dividir o problema original em subproblemas PC1D:

Através do conjunto m de itens do problema original, definir o conjunto F de faixas; cada faixa terá dimensões de comprimento L e largura w_i , $(i = 1, \dots, m)$. Como podem haver itens de mesma largura, selecionar as p faixas com larguras diferentes. Desta forma, o conjunto F é definido por $F = \{L \times w_1, L \times w_2, \dots, L \times w_p\}$. Após isso, para cada faixa $L \times w_f$, define-se o conjunto $W_f = \{i \text{ tal que } w_i \leq w_f\}$. Este conjunto restringe os itens que podem ser cortados numa faixa, ou seja, que respeitam a largura w_f da faixa.

Depois de definido o conjunto de faixas e o conjunto de itens para cada uma das faixas, o objetivo é cortar as faixas de modo que cada uma seja aproveitada da melhor maneira possível. Assim, para cada faixa f do conjunto F , deve ser resolvido o seguinte problema da mochila, conforme o modelo matemático (3):

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } V_f = \sum_{i \in W_f} \alpha_i \cdot x_i \\ &\text{sujeito a: } \sum_{i \in W_f} l_i \cdot x_i \leq L \\ &\quad x_i \geq 0, \text{ inteiro, } i \in W_f \end{aligned}$$

em que α_i é a área do item i e x_i é o número de vezes que o item i foi produzido na faixa f . Após a resolução dos p problemas, realiza-se a segunda etapa.

Etapa 2 - Determinar o padrão de corte bidimensional selecionando as melhores faixas encontradas:

Com os resultados dos p problemas da mochila, resolve-se mais um problema da mochila, agora combinando as faixas geradas na largura W . Na etapa anterior, o objetivo foi alocar

da melhor maneira os itens limitando-os pelo comprimento da faixa (L). Agora, o foco está em como alocar as faixas da melhor maneira, limitando-as pela largura da placa (W). Desta forma, é possível selecionar as melhores faixas e construir um padrão de corte bidimensional, solucionando o problema original.

Com todas essas considerações, o problema da mochila final é dado por:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } V = \sum_{i=1}^p V_i \cdot x_i \\ &\text{sujeito a: } \sum_{i=1}^p w_i \cdot x_i \leq W \\ &x_i \geq 0, \text{ inteiro, } i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

em que V_i é a área alocada por itens da faixa i e x_i é o número de vezes que a faixa i é produzida. O resultado do problema fornece o padrão de corte 2-estágios que melhor aproveita a área da placa.

Este método geralmente é aplicado em problemas de corte com placa e itens retangulares, mas há outros problemas de corte em que o mesmo pode ser utilizado. Neste trabalho, o objetivo é utilizar o método de 2-estágios para resolver problemas de corte bidimensional com itens retangulares e itens irregulares do tipo L. Essa subclasse dos problemas de corte bidimensional é apresentada na Seção 2.2.4.

2.2.3 Resolução do Problema de Corte 2-estágios Restrito

O método de 2-estágios com restrição de demanda pode ser descrito da seguinte maneira, conforme (VIANNA; ARENALES; GRAMANI, 2003):

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^{P_k} \sum_{i \in I_k} v_i \cdot \lambda_{kp}^i \cdot \mu_{kp} \\ &\text{sujeito a: } \sum_{i \in I_k} l_i \cdot \lambda_{kp}^i \leq L, \text{ para } k = 1, \dots, K, p \in P_k \\ &\sum_{k=1}^K w_k \sum_{p=1}^{P_k} \mu_{kp} \leq W \\ &\sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^{P_k} \lambda_{kp}^i \cdot \mu_{kp} \leq b_i, \text{ para } i = 1, \dots, m \\ &\lambda_{kp}^i, \mu_{kp} \geq 0, \text{ inteiro, } i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, K, p = 1, \dots, P_k \end{aligned}$$

em que são dados do problema:

- L e W representam, respectivamente, o comprimento e largura da placa;

- l_i , w_i e b_i definem, respectivamente, o comprimento, largura e demanda do item do tipo i ;
- K é o número de larguras diferentes w_i ;
- P_k define o número máximo possível de faixas $L \times w_k$ que podem ser alocadas na placa;
- I_k é o conjunto de itens que podem ser alocados na faixa k ($I_k = \{i \mid w_i \leq w_k\}$);
- v_i é um valor associado ao item do tipo i .

As variáveis que definem a solução do problema são:

- λ_{kp}^i é o número de vezes que o item i é alocado no p -ésimo padrão da faixa k ;
- μ_{kp} define o número de vezes que o p -ésimo padrão da faixa k foi alocada ao longo da largura W da placa.

Conforme mostrado pelo modelo matemático, a aplicação do método de 2-estágios para resolver problemas de corte bidimensional restrito cria um problema de otimização não linear. Para contornar a não linearidade e não realizar nenhuma linearização, [Vianna, Arenales e Gramani \(2003\)](#) utilizaram uma heurística, que tem como base as etapas citadas na seção anterior, entretanto com algumas alterações para viabilizar a resolução do problema.

Seja uma placa de dimensões $L \times W$, um conjunto de m itens de dimensões $l_i \times w_i$ com demanda b_i e valor de utilidade v_i , o objetivo é maximizar a área total ocupada pelos itens na placa respeitando as demandas de cada um dos itens.

Segue uma heurística para resolução do problema:

Passo 1 Determinar um vetor de demandas e uma variável de controle.

Criar um vetor B com todas as demandas dos itens (b_i , $i = 1, \dots, m$) e uma variável $controle = W$. A variável de controle será responsável por limitar a geração de faixas que não podem ser encaixadas na placa, conforme este procedimento está sendo executado.

Passo 2 Criar F faixas de largura diferente conforme variável de controle.

Criar F faixas para as larguras diferente no conjunto de itens, desde que $w_f \leq controle$ para $f = 1, \dots, F$. Além das faixas, determinar o conjunto de itens que cada faixa f poderá utilizar:

$$W_f = \{i \mid w_i \leq w_f\}$$

Passo 3 Se nenhuma faixa foi gerada, ir para o **Passo 7**.

Passo 4 Resolver cada faixa como um problema da mochila.

Para cada uma das faixas geradas no **Passo 2**, resolver um problema da mochila, conforme o modelo matemático (5):

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } V_f = \sum_{i \in W_f} v_i \cdot x_i \\ &\text{sujeito a: } \sum_{i \in W_f} l_i \cdot x_i \leq L \\ &0 \leq x_i \leq b_i, \text{ inteiro, } i \in W_f \end{aligned}$$

em que x_i é o número de vezes que o item do tipo i foi produzido e V_f é valor ótimo encontrado resolvendo o problema da mochila. Observa-se que a demanda b_i do item i é obtida através do vetor de demandas B e caso a mesma seja igual a zero, o item pode ser descartado do modelo, pois sua demanda já foi atendida.

Passo 5 Selecionar a faixa com o maior valor de utilidade e alocá-la na placa.

Selecionar a faixa com o maior valor ótimo e alocá-la na placa, decrementando do vetor de demandas e da variável de controle o vetor x da solução e a largura w da melhor faixa.

Passo 6 Repetir os **Passos 2-6** até que a variável de controle não permita mais que uma faixa seja gerada, ou seja, as larguras das faixas são todas maiores que a variável de controle.

Passo 7 Solução encontrada e fim do procedimento.

A solução final será encontrada no conjunto de vetores xs e a somatória do valor ótimo da cada faixa alocada na placa.

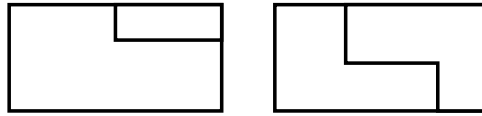
2.2.4 Problema de Corte Bidimensional com itens do tipo L

Todos os exemplos de problema de corte mencionados até o momento possuem placa e itens de formato retangular e os padrões de corte guilhotinados. Considere um problema com itens retangulares e irregulares do tipo L com objetivo de maximizar o valor de utilidade, entretanto com demanda por itens com geometrias diferentes.

Para a geração destes tipos de itens é necessário a utilização do corte de tipo degrau. Este tipo de corte gera um item retangular e um item do tipo L ou dois itens do tipo L, como ilustrado pela Figura 7.

Considere uma placa retangular de dimensões $L \times W$, onde L e W correspondem ao comprimento e largura da placa, respectivamente. Considere também um conjunto de m itens de dimensões $(l_{i1}, w_{i1}, l_{i2}, w_{i2})$, em que l_{i1} e l_{i2} são, respectivamente, o comprimento inferior e superior e w_{i1} e w_{i2} correspondem, respectivamente, a largura à esquerda e largura à direita

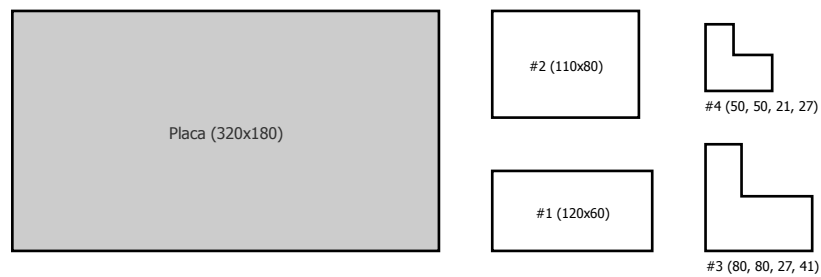
Figura 7 – Tipos de corte degrau.



Fonte: Elaborado pelo autor.

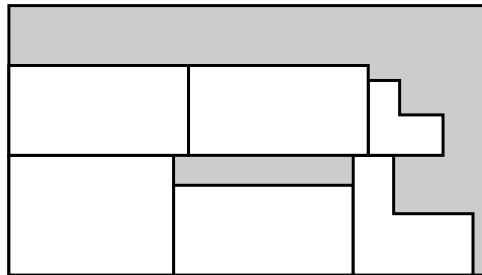
do item i (Figura 8). Se o item i possuir $l_{i1} = l_{i2}$ ou $w_{i1} = w_{i2}$, o item é caracterizado por ser retangular, caso contrário o item é do tipo L. A Figura 9 ilustra um padrão de corte para o problema descrito.

Figura 8 – Exemplo de problema.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 9 – Exemplo de padrão de corte com itens retangulares e do tipo L.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Problemas de corte com itens irregulares são comuns na indústria, entretanto há pouca literatura sobre o tema e métodos para solucioná-los. No próximo capítulo é apresentado uma solução 2-estágios para problemas de corte bidimensional com itens do tipo L.

3 Método Proposto

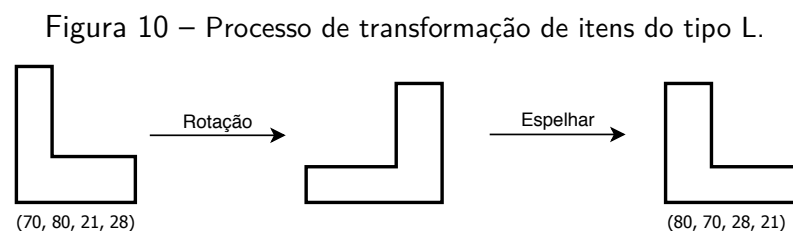
Há pouca literatura sobre problema de corte com itens irregulares sejam eles do tipo L, U, T ou outro formato. Este trabalho propõe a resolução do problema utilizando método 2-estágios, desenvolvido por [Gilmore e Gomory \(1965\)](#), com a combinação dos itens.

Na próxima seção é apresentado o método proposto por este trabalho para a resolução de problemas de corte bidimensional com itens retangulares e do tipo L. Primeiro é descrito a combinação de itens e logo em seguida sua aplicação no método de 2-estágios.

3.1 Resolução do Problema de Corte Bidimensional com itens do tipo L

Para a resolução de problemas de corte bidimensional com itens regulares e irregulares do tipo L este trabalho propõe a aplicação do método de 2-estágios combinando itens retangulares e irregulares do tipo L. A combinação tem como objetivo aumentar o conjunto de itens inicial do problema com novos itens que tem como característica a junção de dois itens. O intuito é que esses itens novos ajudem o método de 2-estágios a encontrar uma solução melhor em comparação a aplicação do método de 2-estágios sem os itens combinados.

Antes da combinação dos itens, é necessário que todos os itens do tipo L tenham formato tal que $l_{i1} \geq w_{i1}$. Isso foi definido para facilitar a construção dos itens combinados. Caso o item não atenda a condição de formato, o mesmo deve ser transformado, como mostra a Figura 10:



Fonte: Elaborado pelo autor.

A transformação possui duas etapas: a primeira é rotacionar o item em 90 graus de forma que a largura à esquerda se torne o comprimento inferior, e a segunda etapa é espelhar o item tal que a nova largura à esquerda obtida pela rotação se torna a largura à direita.

Após estes ajustes, inicia-se o método. A seguir é apresentado as etapas para a resolução do problema irrestrito:

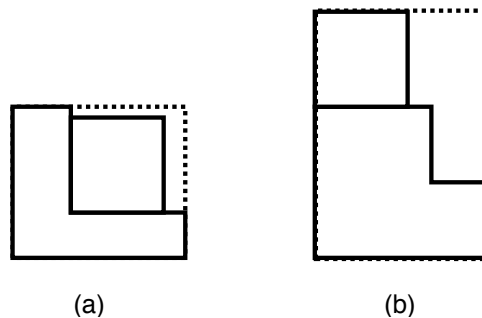
(Etapa 1) **Geração de itens combinados**

Após o levantamento das principais informações do problema de corte bidimensional: dimensões da placa, quantidade total de itens, demanda e dimensões de cada item (regular ou irregular do tipo L), é realizada a combinação dos itens. A combinação ocorre em duas situações:

a) **Item do tipo L com item retangular (combinação LR)**

Para cada item do tipo L é verificada a maior região para tentar encaixar os itens retangulares. Esta região pode ser "dentro" do item L (região entre l_1 e l_2) ou no "topo", em cima do comprimento superior l_2 . A Figura 11 ilustra as duas regiões.

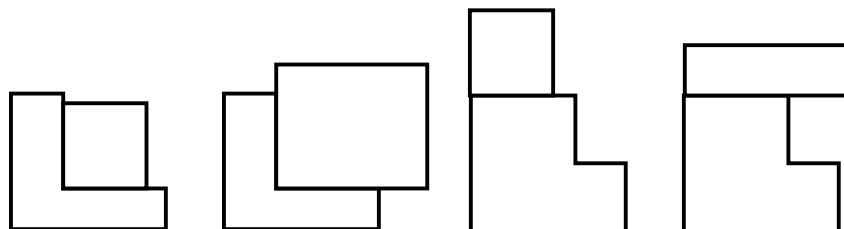
Figura 11 – Combinação de itens L com itens retangulares: (a) combinação na região de "dentro"; (b) combinação no "topo".



Fonte: Elaborado pelo autor.

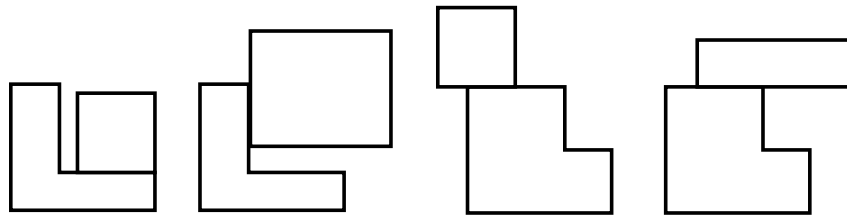
Determinada a região, o item retangular é encaixado no item L sempre partindo da largura à esquerda, no caso da combinação pelo "topo", ou sempre partindo pela largura interna, caso a combinação seja por "dentro". É calculado as novas dimensões l e w do item (retângulo envolvente) e a área ocupada do mesmo (que será a área dos dois itens somadas). As Figuras 12 e 13 mostram, respectivamente, combinações permitidas e não permitidas.

Figura 12 – Combinações LR permitidas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 13 – Combinações LR não permitidas.



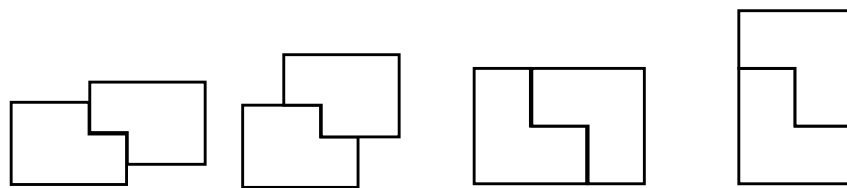
Fonte: Elaborado pelo autor.

Caso a perda do novo item seja menor ou igual que uma porcentagem α da área do retângulo envolvente do novo item, o mesmo será considerado aceito e adicionado ao conjunto de itens. Caso contrário, o novo item é descartado.

b) **Item do tipo L combinado com ele mesmo de forma "espelhada" (combinação LL)**

Para esta combinação também há as regiões de "dentro" e do "topo", entretanto a combinação é realizada para as duas regiões e não há nenhuma condição de aceite do novo item no conjunto de itens do problema. Este tipo de combinação também segue as regras dos itens combinados não ultrapassarem a largura à esquerda e estarem juntos ao item que serve como base. Na combinação LL, os dois itens são iguais, entretanto o segundo item é a versão "espelhada" do primeiro item, ou seja, o primeiro item rotacionado em 180 graus. A Figura 14 mostra algumas combinações LL.

Figura 14 – Exemplos de combinação LL.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Após todo o processo de geração de combinação de itens, o conjunto de m itens iniciais aumentará em c itens, respectivos aos novos itens combinados criados. Portanto, tem-se um conjunto de $n = m + c$ itens.

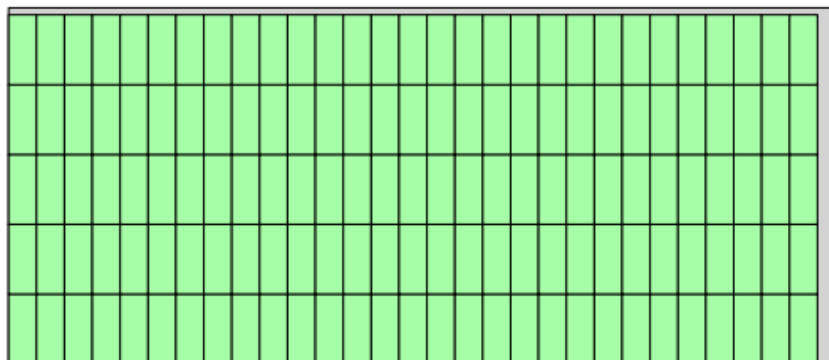
(Etapa 2) **Obtenção da solução inicial**

Esta etapa tem como objetivo obter uma solução inicial para o problema através de um algoritmo "guloso".

Como o problema é irrestrito, a solução inicial é alocar o maior número de itens do mesmo tipo na placa e determinar o valor de utilidade total, retornando o padrão que

teve o melhor valor de utilidade total. Essa solução é chamada de solução homogênea, ilustrado na Figura 15.

Figura 15 – Exemplo de solução homogênea.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Determinada a solução inicial, inicia-se a fase da busca pela solução ótima. Esta fase engloba as etapas 3, 4 e 5.

(Etapa 3) **Geração das faixas**

Gerar as faixas para as p larguras diferentes do conjunto de n itens, conforme detalhado no Capítulo 2.

(Etapa 4) **Resolução das faixas como Problema da Mochila**

Resolver os diversos Problemas da Mochila como descrito no modelo matemático (3).

(Etapa 5) **Resolução do último Problema da Mochila**

Resolver o último Problema da Mochila, otimizando as faixas que serão alocadas na placa, conforme descrito no Capítulo 2. Caso a solução encontrada seja melhor que a solução inicial, retornar a solução encontrada. Se não, retornar solução inicial.

Para o Problema de Corte Restrito, o método é o seguinte:

(Etapa 1) **Geração de itens combinados**

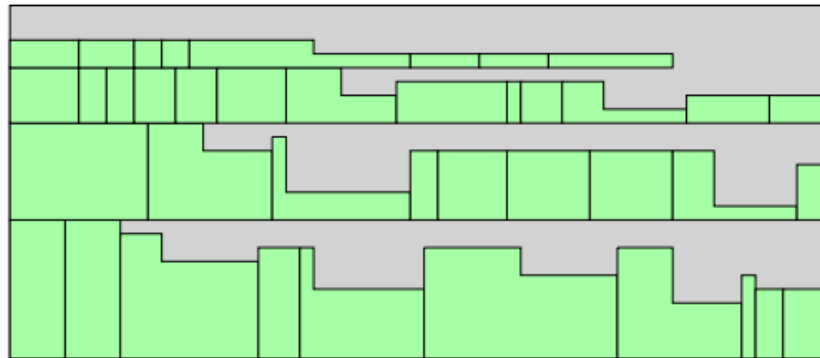
Da mesma forma que o problema irrestrito.

(Etapa 2) **Obtenção da solução inicial**

Nesta etapa tem como objetivo obter uma solução inicial para o problema através de um algoritmo "guloso". A solução inicial será do tipo homogênea composta para o Problema Restrito. Como as demandas devem ser atendidas, o algoritmo alocará, em faixas, o maior número de itens 1 até atender a demanda ou o quanto couber. Logo depois, para o segundo item repetirá o processo até alocar todos os itens. A alocação poderá ser

em uma nova faixa ou numa faixa já preenchida e que possui espaço suficiente para a alocação do item. A alocação dos itens é feita pela ordem dos itens de maior valor. A Figura 16 ilustra uma solução homogênea composta.

Figura 16 – Exemplo de solução homogênea composta.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Determinada a solução inicial, inicia-se a fase da busca pela solução ótima. Esta fase engloba as etapas 3, 4 e 5.

(Etapa 3) **Geração das faixas**

Gerar as faixas para as p larguras distintas do conjunto de n itens caso ainda haja espaço na placa.

(Etapa 4) **Resolução das faixas como Problema da Mochila**

Resolver as faixas como Problema da Mochila, conforme modelo matemático do problema da mochila restrito (5), e adicionando dois tipos de restrições:

a) Restrição de combinação LR

Seja o item 1 e 2, respectivamente, itens do tipo L e R, e o item 3 a combinação dos dois itens, a restrição de combinação será:

$$x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 \leq b$$

em que x_1 , x_2 e x_3 representam a quantidade de vezes que os itens 1, 2 e 3 são produzidos. b representa a menor demanda entre os itens 1 e 2.

b) Restrição de combinação LL

Seja o item 1 um item do tipo L e o item 2 a combinação LL do item 1, a restrição de combinação será:

$$x_1 + 2 \cdot x_2 \leq b_1$$

em que x_1 e x_2 representam a quantidade de vezes que os itens 1 e 2 foram produzidos, e b_1 representa a demanda do item 1, que será a demanda do item 2.

O modelo matemático do problema restrito não comporta totalmente as demandas, o que cria a necessidade de torná-lo um problema de otimização não linear. Para evitar isso, foi definido o seguinte procedimento:

- i) Gerar as faixas como problemas de otimização linear, conforme modelo do Problema da Mochila;
- ii) Resolver todos os problemas até o primeiro que não tenha solução viável;
- iii) Selecionar, entre as faixas com solução viável, a faixa com melhor valor de utilidade. Caso haja mais de uma faixa com o mesmo resultado, verificar a faixa que possui o maior número de itens alocados. Caso haja mais de uma faixa com o mesmo número de itens alocados, retornar qualquer faixa;
- iv) Atualizar a demanda dos itens;
- v) Repetir os passos **i** a **iv** até que todas as demandas sejam atendidas ou não ser possível gerar mais faixas por falta de espaço na placa.

(Etapa 5) **Resolução do problema**

Terminada a etapa anterior, retornar a solução encontrada, caso a mesma seja melhor que a solução inicial. Se não, retornar a solução inicial.

4 Implementação Computacional

Este capítulo apresenta as ferramentas e estrutura do programa para a geração dos padrões de corte.

4.1 Ferramentas utilizadas

Para a implementação foram utilizadas três ferramentas: a Linguagem *Python*, o pacote de otimização CPLEX e o pacote do TeXLive com o pacote TikZ.

4.1.1 Linguagem *Python*

A linguagem de programação *Python* é uma das linguagens mais utilizadas e com grande suporte da comunidade de desenvolvedores oferecendo uma vasta gama de pacotes para resolver inúmeros problemas. Além disso, sua curva de aprendizagem é muito baixa, suporta diversos paradigmas de programação (i.e., estruturada e orientada a objetos), e tem uma sintaxe muito próxima a de pseudo-algoritmos. Todas essas vantagens mostraram de grande relevância para a escolha desta ferramenta para o projeto. Para o desenvolvimento do gerador de padrões foi utilizada a versão 3.7.3.

4.1.2 CPLEX

O pacote CPLEX é um produto proprietário da IBM que oferece recursos para se desenvolver aplicações que necessitem da resolução de problemas de otimização linear, linear inteiro, quadrático, entre outras variações. Foi criado em 1988 por Robert E. Bixby como o Método Simplex implementado na Linguagem C ([BIXBY, 2012](#)). Daí a origem do nome do programa, e em 2009 foi adquirido pela IBM através da empresa ILOG ([IBM-NEWSROOM, 2009](#)).

Com o passar dos anos, além de continuar o suporte a linguagem C, foi criada APIs (*Application Programming Interface* em inglês, traduzida como Interface de Programação de Aplicação) para as linguagens Java, C++, C# (C-Sharp), Python, entre outras.

Devido a API para Python e da robustez do programa, o mesmo foi escolhido para resolver os problemas da mochila criados pelo gerador de padrões durante a execução do método. Para este trabalho foi utilizada a versão 12.9 utilizando uma licença para estudante fornecida pela própria IBM através do seu programa AI (sigla para *Academic Initiative*).

4.1.3 TeXLive e TikZ

Para o módulo de desenho do gerador de padrões foi necessário a utilização da distribuição TeXLive. Esta distribuição instala um ambiente completo do sistema LaTeX, conhecida plataforma de preparação de documentos por texto simples e comandos de formatação. A escolha pela distribuição TeXLive se deu pela facilidade de instalação em qualquer sistema operacional (S.O.) e pela presença do pacote TikZ e do *script* pdflatex.

O pacote TikZ é uma biblioteca que permite produzir gráficos e desenhos utilizando descrição geométrica/algébrica através de comandos como:

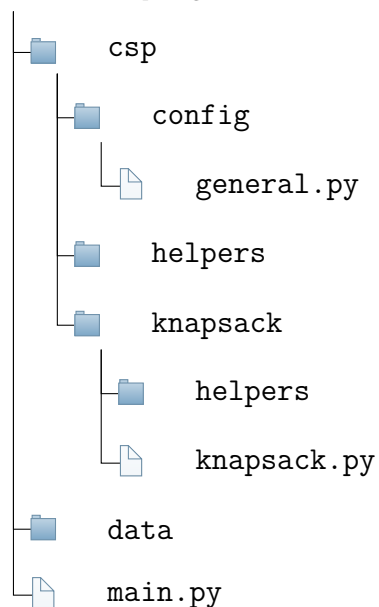
```
\tikz \draw (0,0) rectangle (3,1);
\tikz \draw (0,0) circle (0.5);
```

É possível desenhar, por exemplo, retângulos e círculos de forma simples e rápida. No primeiro, descreve-se o retângulo apontando o ponto inicial e final e entre eles a palavra-chave *rectangle*. Para o círculo, a sintaxe é a mesma, mas o último comando é o raio que círculo possui.

4.2 Estrutura do programa

A estrutura do programa é organizada da seguinte forma:

raíz do projeto



A pasta data armazena alguns exemplos de problemas de corte para testar o gerador executando o arquivo `main.py` no terminal. A execução no terminal é bem simples e recebe

parâmetros como o caminho do arquivo de teste no sistema, se é para rotacionar ou não, gerar o padrão de corte desenhado, se o problema possui restrição.

A pasta `csp` é onde todo o código do gerador de padrões está armazenado e é chamado pelo arquivo `main.py`. Cada subdiretório da pasta `csp` possui um arquivo `__init__.py` para torná-los módulos do Python. Isto permite que cada pasta possa ser chamada por outros arquivos em lugares diferentes, facilitando a modularização. Dentro da pasta `csp` há três módulos: `config`, `helpers` e `knapsack`.

O módulo `config` tem responsabilidade de armazenar, através do arquivo `general.py`, as variáveis globais de todo o programa. Neste módulo que é declarada a estrutura de dados para as informações da placa e dos itens. As informações da placa são armazenadas numa variável chamada *plate* que terá os atributos *L* e *W*. As informações dos itens são armazenadas através da instância de uma classe de dados (*dataclass* no Python) chamada *Piece*.

A classe *Piece* tem como atributos a identificação, tipo (retangular, irregular ou combinada), dimensões (diferente para cada tipo de item), área, demanda e perda de cada item. Além disso, há atributos para verificar se o item foi rotacionado (somente para itens retangulares), transformado (somente para itens irregulares, e indica se foi aplicada o processo de transformação relatada na Seção 3.1) e é fruto de uma combinação, que conterá informações sobre os itens originais e o tipo de combinação (combinação LR ou LL). Há duas funções que realizam o cálculo da área e perda, conforme tipo do item.

O módulo `helpers` é responsável por facilitar operações comuns a todo o programa, como desenho de padrões de corte, leitura dos arquivos e determinação da solução inicial para problemas irrestritos e restritos.

Finalmente, o último módulo, `knapsack`, é responsável por implementar o método proposto conforme descrição no Capítulo 3. A forma como este módulo foi construído é de emular uma API que, após a declaração do problema de corte a ser solucionado, basta instanciar a classe correspondente ao tipo de problema a ser tratado (restrito ou irrestrito) e chamar as funções `solve` e `get_solution`.

Neste módulo, as classes para os dois tipos de problema de corte (restrito ou irrestrito) estão implementadas no arquivo `knapsack.py`. A pasta `helpers` interna à pasta do módulo `knapsack` é responsável por criar a base dos problemas da mochila. Esta base tem como objetivo implementar os problemas da mochila criadas pelas classes do arquivo `knapsack.py` e usar a API para Python do CPLEX e retornar a solução encontrada.

5 Resultados

Para avaliar o desempenho do método descrito na seção 3.1, foi utilizado instâncias da literatura. Apesar de algumas instâncias terem solução ótima obtida por meio de métodos diferentes, os resultados obtidos mostram que o método consegue encontrar um resultado muito próximo do ótimo, quando não o encontram.

As instâncias foram separadas em dois grupos: problemas de corte com itens retangulares e problemas de corte com itens retangulares e do tipo L. Todos os problemas tem como solução ótima a perda encontrada para o problema na forma irrestrita.

Uma observação importante a ser feita é que todos as soluções ótimas das instâncias dos dois grupos não utilizaram um método de 2-estágios. Portanto, os resultados apesar de comparáveis (solução do método e solução ótima da literatura terem o mesmo valor de perda), não são equivalentes, pois o processo de obtenção do padrão de corte é diferente.

Para o primeiro grupo foi selecionado 13 problemas da *OR-Library* (*gcut1*, ..., *gcut13*) e que foram analisados por [Beasley \(1985\)](#), [Cintra et al. \(2008\)](#) e [Yanasse e Morabito \(2013\)](#). A Tabela 1 apresenta, para cada instância, a solução ótima fornecida pela literatura e a solução do método implementado.

Tabela 1 – Resultados para problemas do grupo 1.

#	Instância	Dimensão da Placa	Quant. de itens	Solução Ótima	Solução do método
1	<i>gcut1</i>	250 x 250	10	9,664%	9,664%
2	<i>gcut2</i>		20	3,142%	3,878%
3	<i>gcut3</i>		30	2,342%	3,787%
4	<i>gcut4</i>		50	1,283%	1,283%
5	<i>gcut5</i>	500 x 500	10	1,600%	1,600%
6	<i>gcut6</i>		20	4,401%	5,997%
7	<i>gcut7</i>		30	2,973%	2,973%
8	<i>gcut8</i>		50	1,347%	1,697%
9	<i>gcut9</i>	1000 x 1000	10	2,890%	2,890%
10	<i>gcut10</i>		20	1,798%	1,797%
11	<i>gcut11</i>		30	1,990%	2,536%
12	<i>gcut12</i>		50	2,001%	2,223%
13	<i>gcut13</i>	3000 x 3000	32	0,025%	1,042%

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota-se que dos 13 problemas, o método determinou a solução ótima das instâncias #1, #4, #5, #7 e #9. Vale destacar que para o problema *gcut10*, o resultado foi o mesmo também, apesar da diferença de 0,001%. Além disso, para as outras instâncias foi possível obter um resultado bem próximo do ótimo (instâncias #2, #8 e #12).

Na Figura 17 é ilustrado o padrão de corte da solução ótima ([CINTRA et al., 2008](#)) e o

padrão de corte obtido pelo método proposto para o problema *gcut13*, que tiveram, conforme comentado anteriormente, uma diferença de 1% de perda entre as soluções.

Para o grupo 2 foi selecionado dois problemas. As instâncias #1 e #2 foram analisadas por Nakatake et al. (1996), Xu, Guo e Cheng (1998) e Cherri e Vianna (2012). As soluções determinadas neste trabalho são 2-estágio.

As Tabelas 2 e 3 apresentam, respectivamente, as informações sobre cada instância do grupo 2 e as soluções para os casos irrestrito e restrito.

Tabela 2 – Dados para os problemas do grupo 2.

#	Instância	Dimensão da Placa	Quant. de itens	Quant. de itens retangulares	Quant. de itens do tipo L
1	Nakatake	594 x 255	35	25	10
2	Xu	6314 x 5922	28	7	21

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 3 – Resultados para o grupo 2.

#	Instância	Solução ótima	Solução do método (irrestrito)	Solução do método (restrito)
1	Nakatake	13,000%	2,621%	38,932%
2	Xu	5,200%	0,716%	31,339%

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota-se que método teve ótimos resultados para todas as instâncias no caso irrestrito, obtendo perda bem abaixo da solução ótima encontrada pelos autores. O destaque é para a solução da instância #1 que teve uma diminuição da perda de 13% para menos de 3%, uma melhora bastante considerável.

Para o caso restrito, as soluções não se mostraram muito boas. Isso se deve ao fato destes problemas apresentarem itens com demanda muito baixa, tornando a perda automaticamente grande. Outro problema é que a demanda baixa impede o uso dos itens combinados, já que os mesmos representam os itens originais duas vezes no modelo matemático, violando as restrições de combinação LR e LL. Isto acarreta que, caso a demanda de um item k qualquer seja 1, é impossível aplicar um item combinado do item k sem violar a demanda do mesmo.

As Tabelas 4 e 5 ilustram as demandas e dimensões de cada item para as instâncias #1 e #2.

Tabela 4 – Dados para a instância *Nakatake*.

Itens retangulares				Demanda
l		w		
50		40		1
20		40		1
40		100		2
10		60		1
20		50		1
30		80		1
20		40		2
30		50		1
80		30		1
30		40		2
10		30		1
30		30		1
20		50		1
60		20		1
50		20		1
50		40		1
50		50		1
40		20		1
60		50		1
100		70		1
40		20		1
50		10		2
20		20		2
90		10		1
60		50		1
Itens do tipo L				Demanda
l_1	w_1	l_2	w_2	
80	90	50	10	1
90	50	30	10	1
160	20	90	10	1
60	100	20	10	1
90	30	30	10	1
40	80	20	40	1
140	80	70	60	1
90	80	40	40	1
100	90	30	70	1
70	90	50	40	1

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 5 – Dados para a instância Xu .

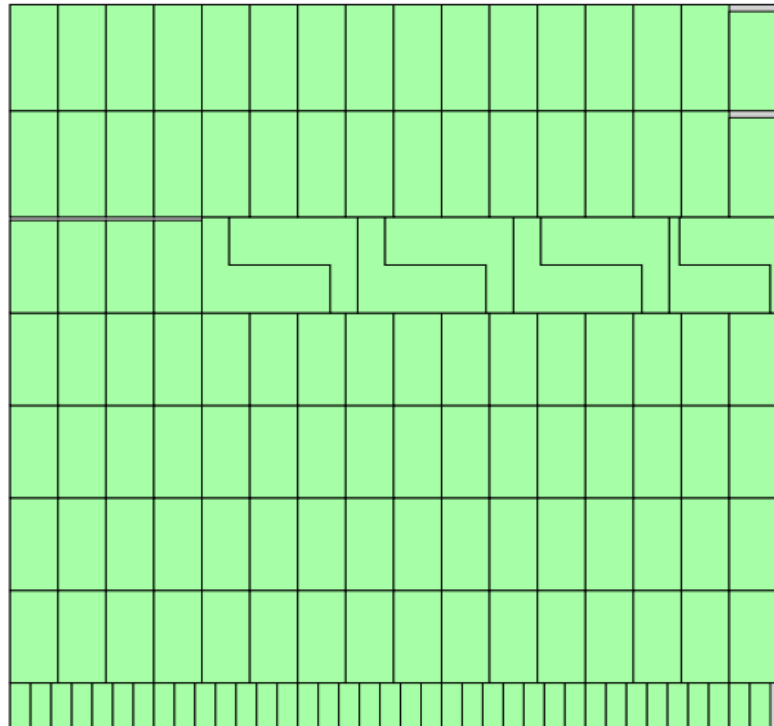
Itens retangulares				Demanda
l		w		
1708		3234		1
1862		882		1
392		756		1
798		266		1
392		868		1
168		378		1
434		812		1
Itens do tipo L				Demanda
l_1	w_1	l_2	w_2	
1302	1554	672	1302	1
3080	2618	2184	1008	1
1386	1260	84	532	1
868	756	28	350	1
910	1778	266	532	1
1064	980	980	518	1
826	672	616	378	1
672	1064	406	266	1
924	798	854	406	1
854	686	798	322	1
1862	392	784	145	1
1050	784	224	392	1
1582	364	784	252	1
826	784	84	392	1
952	728	840	364	1
2128	490	1134	448	1
784	672	728	350	1
1148	1050	994	490	1
1890	1680	1302	728	1
1722	1218	560	672	1
1204	952	238	448	1

Fonte: Elaborado pelo autor.

Mesmo com estes resultados para os problemas restritos, é perceptível que a combinação dos itens irregulares com ele mesmo e com itens retangulares ajudou a obter soluções com bom resultado para os problemas irrestritos. Para problemas restritos onde a demanda dos itens é maior, o método terá mais recursos para gerar um padrão de corte mais otimizado utilizando-se dos itens combinados.

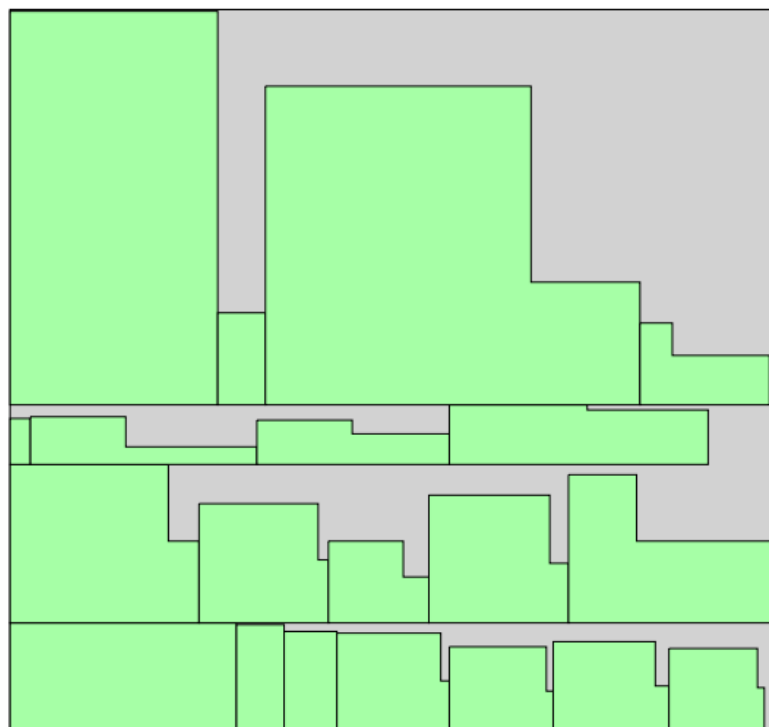
Nas Figuras 18 e 19 estão ilustrados, respectivamente, o padrão de corte irrestrito e restrito da instância #2 do grupo 2.

Figura 18 – Padrão de corte para a instância Xu (irrestrito).



Fonte: Elaborado pelo autor.

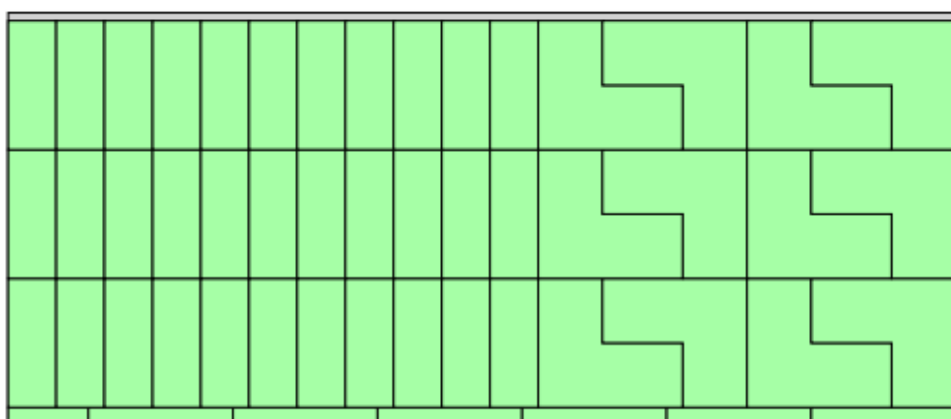
Figura 19 – Padrão de corte para a instância *Xu* (restrito).



Fonte: Elaborado pelo autor.

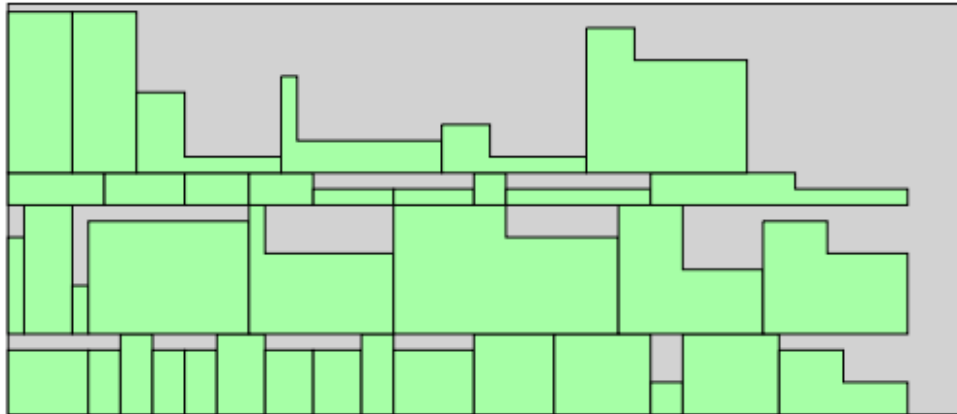
Os padrões de corte irrestrito e restrito para a instância #1 do grupo 2 estão ilustrados nas Figuras 20 e 21.

Figura 20 – Padrão de corte para a instância *Nakatake* (irrestrito).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 21 – Padrão de corte para a instância *Nakatake* (restrito).



Fonte: Elaborado pelo autor.

6 Conclusão

Neste trabalho foi abordado o Problema de Corte Bidimensional com especial foco nos problemas com itens regulares e irregulares do tipo L. O objetivo foi apresentar um método 2-estágios com combinação de itens regulares e irregulares (aumentando o número de itens), de modo que a tentar diminuir ou eliminar a perda dos itens L, melhorando a solução final.

O método apresentou bons resultados tanto para problemas somente com itens retangulares como em problemas com os dois tipos de item. Vale destacar os ótimos resultados obtidos no segundo grupo de instâncias, onde o método foi capaz de gerar padrões de corte com perda próxima a zero.

A combinação de itens realmente ajudou o algoritmo de corte a encontrar uma solução melhor, em decorrência do aumento de variabilidade de itens disponíveis e que, se tratando dos itens combinados, se equivalem aos itens originais. Como trabalho futuro, pode-se tentar aplicar a combinação em métodos como o grafo E/OU, algoritmos genéticos, entre outros. Outra tratativa é combinar itens retangulares com eles mesmos, de modo a diminuir a perda do padrão de corte conforme foi feito com os outros tipos de combinação de itens.

Referências

- ARENALES, M.; MORABITO, R.; YANASSE, H. Special issue: Cutting and packing problems. *Pesquisa Operacional*, v. 19, n. 2, p. 107–299, 1999.
- BEASLEY, J. E. Algorithms for unconstrained two-dimensional guillotine cutting. *Journal of the Operational Research Society*, Taylor & Francis, v. 36, n. 4, p. 297–306, 1985. Disponível em: <<https://doi.org/10.1057/jors.1985.51>>.
- BISCHOFF, E.; WÄSCHER, G. Cutting and packing. *European Journal of Operational Research*, v. 84, n. 3, p. 503 – 505, 1995. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037722179500018L>>.
- BIXBY, R. E. A brief history of linear and mixed-integer programming computation. *Documenta Mathematica*, 2012.
- BROWN, A. R. A. R. Book; Book/Illustrated. *Optimum packing and depletion : the computer in space - and resource-usage problems*. [S.l.]: London : Macdonald and Co. ; New York : American Elsevier, 1971. Bibliography: p. 106. ISBN 0444195882.
- CAPRARA, A.; MONACI, M. On the two-dimensional knapsack problem. *Operations Research Letters*, v. 32, n. 1, p. 5 – 14, 2004. ISSN 0167-6377. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167637703000579>>.
- CHEN, D.; LIU, J.; FU, Y.; SHANG, M. An efficient heuristic algorithm for arbitrary shaped rectilinear block packing problem. *Computers & Operations Research*, v. 37, p. 1068–1074, 2010.
- CHERRI, A. C.; VIANNA, A. C. G. Problemas de corte com itens irregulares. In: *XVI CLAIO/ XLIV SBPO - Congresso Latino-Iberoamericano de Investigación Operativa / Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. [S.l.: s.n.], 2012. (Anais do CLAIO/SBPO), p. 3327–3335.
- CINTRA, G.; MIYAZAWA, F.; WAKABAYASHI, Y.; XAVIER, E. Algorithms for two-dimensional cutting stock and strip packing problems using dynamic programming and column generation. *European Journal of Operational Research*, v. 191, n. 1, p. 61 – 85, 2008. ISSN 0377-2217. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221707008831>>.
- DYCKHOFF, H. A typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 44, n. 2, p. 145–159, 1990.
- DYCKHOFF, H.; FINKE, U. *Cutting and packing in production and distribution: A typology and bibliography*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1992.
- FUJIYOSHI, K.; MURATA, H. Arbitrary convex and concave rectilinear block packing using sequence-pair. *Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, v. 19, p. 224 – 233, 03 2000.
- FUJIYOSHI, K.; MURATA, H. Packing of l-shaped and rectangular modules using sequence-pair method. *Electronics and Communications in Japan (Part III: Fundamental Electronic Science)*, v. 85, p. 52 – 64, 02 2002.

GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. *Oper. Res.*, INFORMS, Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS), Linthicum, Maryland, USA, v. 13, n. 1, p. 94–120, fev. 1965. ISSN 0030-364X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1287/opre.13.1.94>>.

GOLDEN, B. L. Approaches to the cutting stock problem. *AIIE transactions*, Taylor & Francis, v. 8, n. 2, p. 265–274, 1976.

IBM-NEWSROOM. *IBM Completes Acquisition of ILOG*. 2009. Disponível em: <<https://web.archive.org/web/20120927094255/https://www-304.ibm.com/jct03002c/press/us/en/pressrelease/26403.wss>>. Acesso em: 21 out. 2019.

Kang, M. Z.; Dai, W. W. . Arbitrary rectilinear block packing based on sequence pair. In: *1998 IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design. Digest of Technical Papers (IEEE Cat. No.98CB36287)*. [S.l.: s.n.], 1998. p. 259–266. ISSN null.

KHAN ACADEMY. *Divide and conquer algorithms*. 2019. Disponível em: <<https://www.khanacademy.org/computing/computer-science/algorithms/merge-sort/a/divide-and-conquer-algorithms>>. Acesso em: 19 out. 2019.

LEE, T.-c. A bounded 2d contour searching algorithm for floorplan design with arbitrarily shaped rectilinear and soft modules. In: *Proceedings of the 30th International Design Automation Conference*. New York, NY, USA: ACM, 1993. (DAC '93), p. 525–530. ISBN 0-89791-577-1. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/157485.165014>>.

LINS, L.; LINS, S.; MORABITO, R. An l-approach for packing (l, w)-rectangles into rectangular and l-shaped pieces. *Journal of the Operational Research Society*, v. 54, 2003.

MA, Y.; HONG, X.; DONG, S.; CAI, Y.; CHENG, C.-K.; GU, J. Floorplanning with abutment constraints and l-shaped/t-shaped blocks based on corner block list. In: . [S.l.: s.n.], 2001. p. 770– 775. ISBN 1-58113-297-2.

NAKATAKE, S.; FUJIYOSHI, K.; MURATA, H.; KAJITANI, Y. Module placement on bsg-structure and ic layout applications. In: *Proceedings of the 1996 IEEE/ACM International Conference on Computer-aided Design*. Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, 1996. (ICCAD '96), p. 484–491. ISBN 0-8186-7597-7. Disponível em: <<http://dl.acm.org/citation.cfm?id=244522.244865>>.

PANG, Y.; CHENG, C.-K.; LAMPAERT, K.; XIE, W. Rectilinear block packing using o-tree representation. In: . [S.l.: s.n.], 2001. p. 156–161.

ROBERTS, S. A. Application of heuristic techniques to the cutting-stock problem for worktops. *Journal of the Operational Research Society*, Taylor & Francis, v. 35, n. 5, p. 369–377, 1984. Disponível em: <<https://doi.org/10.1057/jors.1984.77>>.

TANG, X.; WONG, M. D. F. On handling arbitrary rectilinear shape constraint. In: *Proceedings of the 2004 Asia and South Pacific Design Automation Conference*. Piscataway, NJ, USA: IEEE Press, 2004. (ASP-DAC '04), p. 38–41. ISBN 0-7803-8175-0. Disponível em: <<http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1015090.1015101>>.

TUTORIALSPPOINT. *Data Structures - Divide and Conquer*. 2019. Disponível em: <https://www.tutorialspoint.com/data_structures_algorithms/divide_and_conquer.htm>. Acesso em: 19 out. 2019.

VIANNA, A. C. G. *Problemas de corte e empacotamento: uma abordagem em grafo E/OU*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2000.

VIANNA, A. C. G.; ARENALES, M. N.; GRAMANI, M. C. N. Two-stage and constrained two-dimensional guillotine cutting problems. ICMC-USP, 2003.

WU, G.-M.; CHANG, Y.-C.; CHANG, Y.-W. Rectilinear block placement using b*-trees. *ACM Trans. Des. Autom. Electron. Syst.*, ACM, New York, NY, USA, v. 8, n. 2, p. 188–202, abr. 2003. ISSN 1084-4309. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/762488.762490>>.

XU, J.; GUO, P.-n.; CHENG, C.-K. Rectilinear block placement using sequence-pair. In: *Proceedings of the 1998 International Symposium on Physical Design*. New York, NY, USA: ACM, 1998. (ISPD '98), p. 173–178. ISBN 1-58113-021-X. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/274535.274561>>.

YANASSE, H. H.; MORABITO, R. Modelos lineares e não lineares inteiros para problemas da mochila bidimensional restrita a 2 estágios. *Production*, scielo, v. 23, p. 887 – 896, 12 2013. ISSN 0103-6513. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-65132013000400018&nrm=iso>.