Clinton André Merlo

# Polinômios Trigonométricos Não - Negativos

unesp

1910000940

unesp UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
*Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas*
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DE COMPUTAÇÃO E ESTATÍSTICA

# Polinômios Trigonométricos Não-Negativos

Clinton André Merlo

Dissertação de Mestrado

Pós-Graduação em Matemática Aplicada, MAP-050

Rua São Cristovão Colombo, 2265
Caixa Postal 136
15054-000 - São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (017) 221-2444
Fax: (017) 221-2445

# Polinômios Trigonométricos Não-Negativos

Clinton André Merlo

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Inst. de Biociências, Letras e Ciências Exatas - UNESP
BIBLIOTECA
S. J. Rio Preto
940/00

São José do Rio Preto

Março de 2000

Este trabalho foi realizado no Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, durante o curso de Mestrado do candidato, sob a orientação do Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov. O estudo e a pesquisa foram apoiados pela FAPESP, processo ( 98/11977-3). Os novos resultados desta dissertação, os Teoremas 3, 4, 5, 7, 8 e 11 e Corolário 2, são as principais contribuições do artigo D. K. Dimitrov and C. A. Merlo, Non-Negative Trigonometric Polynomials, submetido para publicação em *Constructive Approximation.*



" O pensamento é apenas um lampejo entre duas longas noites, mas esse lampejo é tudo."

Poincaré

A meus pais,
José e Cleide.

A meus irmãos,
Cleber e Cleiton.

## Agradecimentos

A todos os professores e funcionários, que de alguma forma contribuiram durante este período. Em especial, agradeço ao Prof. Dr. Dimitar K. Dimitrov pela orientação, amizade e paciência.

A todos os amigos e amigas pós-graduandos pela força e companheirismo.

A toda minha família, em especial a minha mãe pelo amor e incentivo.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

**Resumo**

Um problema extremo para os coeficientes de polinômios senos, os quais são não-negativos em $[0, \pi]$, foi colocado e discutido por Rogosinski e Szegő. Uma representação análoga à de Fejér-Riesz de polinômios trigonométricos gerais e polinômios cossenos é demonstrado para polinômios senos não-negativos. Vários polinômios senos e cossenos não-negativos são obtidos de forma explícita. Para toda função $f$ de período $2\pi$, contruímos sequências de polinômios trigonométricos e demonstramos suas convergências uniforme e $L_p$ para $f$.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

**Abstract**

An extremal problem for the coefficients of sine polynomials, which are non-negative in $[0, \pi]$, posed and discussed by Rogosinski and Szegő is under consideration. An analog of the Fejér-Riesz representation of non-negative general trigonometric and cosine polynomials is proved for non-negative sine polynomials. Various non-negative sine and cosine polynomials are obtained in an explicit form. For every $2\pi$-periodic function $f$, we construct sequences of approximating trigonometric polynomials and prove their uniform and $L_p$ convergence to $f$.

cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

# Índice


**1 Introdução** **10**

**2 Métodos para Construção de Polinômios Trigonométricos Não-Negativos** **25**

2.1 Representação de Fejér-Riesz . . . . . 28

2.1.1 Polinômios Trigonométricos Não-Negativos . . . . . 29

2.1.2 Polinômios Cossenos Não-Negativos . . . . . 31

2.2 Construção de Polinômios Senos Não-Negativos . . . . . 32

2.2.1 Relação entre Polinômios Senos e Cossenos Não-Negativos . . . . . 32

2.2.2 Representação Paramétrica dos Coeficientes $b_k$ . . . . . 34

2.3 Teorema de Rayleigh-Ritz . . . . . 38

2.3.1 Matrizes Unitárias . . . . . 39

2.3.2 Matrizes Hermitianas . . . . . 39

2.3.3 Teorema de Rayleigh-Ritz . . . . . 40

2.4 Polinômios Senos Não-Negativos com Coeficientes Extremos . . . . . 42

**3 Construção de Polinômios Senos Não-Negativos com Coeficientes Extremos** **43**

3.1 Polinômios Extremos para $b_n$ e $b_{n-1}$ . . . . . 43

3.1.1 O Mínimo e o Máximo de $b_n$ para $n = 2m+1$ e os Polinômios Extremos associados . . . . . 44

3.1.2 O Mínimo e o Máximo de $b_n$ para $n = 2m+2$ e os Polinômios Extremos associados . . . . . 48

3.1.3 O Mínimo e o Máximo de $b_{n-1}$ para $n = 2m+1$ e os Polinômios Extremos associados . . . . . 52

3.1.4 O Mínimo e o Máximo de $b_{n-1}$ para $n = 2m+2$ e os Polinômios Extremos associados . . . . . 54
3.2 Problemas Extremos para o Coeficiente $b_{n-2}$ . . . . . 58
3.2.1 O Mínimo e o Máximo de $b_{n-2}$ para $n = 2m+1$ e os Polinômios Extremos associados . . . . . 58
3.2.2 O valor Extremo de $b_{n-2}$ para $n = 2m + 2$ . . . . . 63

**4 Convergência de Polinômios Trigonométricos para Funções Periódicas 65**
4.1 Núcleo Positivo . . . . . 65
4.2 Núcleo Positivo Somável . . . . . 65
4.3 Convolução $K_n(f;x)$ . . . . . 66
4.4 Convergência na Norma Uniforme . . . . . 67
4.5 Convergência na Norma $\|.\|_{L_1}$ . . . . . 69
4.6 Convergência na Norma $\|.\|_{L_p}$ . . . . . 71

**5 Aproximação de Funções através de novas Sequências de Polinômios 74**
5.1 Resultados Preliminares . . . . . 74
5.2 Convergência Uniforme dos Novos Núcleos . . . . . 78

**Referências Bibliográficas 81**

# Capítulo 1

# Introdução

O núcleo de Poisson

$$1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos k\theta = \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}, \quad -1 < \rho < 1,$$

é um dos primeiros exemplos de séries trigonométricas não-negativas, conforme apontado por Askey e Gasper [4]. Além disso, esse núcleo também foi descoberto por Gauss [15].

O problema de construção de polinômios trigonométricos não-negativos foi inspirado pelo desenvolvimento da teoria das séries de Fourier e esta área de pesquisa tornou-se florescente no início deste século devido aos esforços de alguns célebres matemáticos.

É bem conhecido que, para toda função periódica de período $2\pi$ $f \in L_p[-\pi,\pi]$, $1 \leq p \leq \infty$, a sequência de convoluções $k_n * f$ converge para $f$ na norma $L_p$ desde que os $k_n$ sejam núcleos positivos somáveis [24, p. 9]. Núcleos somáveis são polinômios trigonométricos positivos pares, que aproximam $\delta(\theta)$ de Dirac. Fejér foi o primeiro a perceber este fato. Ele demonstrou em [9], que

$$F_n(\theta) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos k\theta \tag{1.1}$$

são aproximações da série de Fourier formal

$$1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \cos k\theta \tag{1.2}$$

de $\delta(\theta)$ e estabeleceu a convergência uniforme da sequência $(1/2\pi)\ F_n * f$ para $f$ para qualquer função contínua $f$ de período $2\pi$. Mais tarde, Jackson [22, 23] demonstrou que, para o núcleo

$$J_n(\theta) = \frac{1}{\gamma_n}\left(\frac{\operatorname{sen}(n\theta/2)}{n\operatorname{sen}(\theta/2)}\right)^4, \quad \text{onde} \quad \gamma_n = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}(n\theta/2)}{n\operatorname{sen}(\theta/2)}\right)^4 dt,$$



cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

a velocidade de convergência uniforme de $J_n * f$ para qualquer função contínua $f$ de período $2\pi$ é $\omega(f; 1/n)$, onde $\omega(f; \delta)$ denota o módulo de continuidade de $f$ (veja [37, Capítulo X, §6]). Este é o clássico teorema de Jackson da teoria da aproximação [27, 25]. Vale mencionar que $\omega(f; 1/n)$ é a melhor velocidade de aproximação uniforme possível de funções contínuas por polinômios trigonométricos de ordem $n$ (veja [31, Capítulo 6]).

Outro interesse de Fejér nos polinômios trigonométricos não-negativos foi o efeito de Gibbs [37, Capítulo II, §9]. Em 1910, Fejér conjecturou que as somas parciais

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{sen} k\theta}{k} \tag{1.3}$$

da série de Fourier da função $(\pi - \theta)/2$, $0 < \theta < \pi$, são positivas em $(0, \pi)$. A conjectura de Fejér foi demonstrada independentemente e quase simultaneamente por Jackson [21] e Gronwall [18]. Veja [19] e [26, Capítulos 2.2 e 4] para mais detalhes sobre o efeito de Gibbs e desigualdade de Fejér-Jackson-Gronwall. Além disso, W. H. Young [36] demonstrou que polinômios cossenos $1 + \sum_{k=1}^{n} (\cos k\theta)/k$ também são não-negativos e este resultado foi extendido por Rogosinski e Szegő [28] e por Gasper [14].

Existem ainda outras razões para o interesse em polinômios trigonométricos positivos e uma delas é a relação entre funções univalentes e polinômios. Alexander [1] demonstrou que o polinômio $\sum_{k=1}^{n} a_k z^k/k$ é univalente no disco unitário do plano complexo, desde que $a_1 \geq \cdots \geq a_n > 0$. Dieudoneé [7] revelou a conexão entre o resultado de Alexander e a desigualdade de Fejér-Jackson-Gronwall e também demonstrou que o polinômio $\sum_{k=1}^{n} a_k z^k$ é univalente no disco unitário se, e somente se,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k z^{k-1} \frac{\operatorname{sen} k\theta}{\operatorname{sen} \theta} \neq 0 \quad \text{para} \quad |z| < 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Outras contribuições sobre esta conexão são devidas a Fejér [11, 12] e a Fejér e Szegő [13] que demonstraram que uma função analítica $f(z) = u(z) + iv(z)$ com coeficientes de MacLaurin reais é univalente no disco unitário se $\partial u(e^{i\theta})/\partial\theta \leq 0$ para $0 \leq \theta \leq \pi$. Funções que obedecem a esta última propriedade são chamadas de "verticalmente convexas". Para este e outros interessantes resultados sobre a relação entre funções univalentes e séries trigonométricas não-negativas, veja a recente pesquisa de Gluchoff e Hartmann [16]. Os clássicos polinômios trigonométricos não-negativos inspiraram interessantes generalizações para somas positivas



cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

de polinômios de Jacobi. Um resultado bem conhecido nesta direção é a desigualdade de Askey e Gasper [3]. Ela desempenhou um importante papel na etapa final da demonstração do resultado de *de Brange* [6] sobre a conjectura de Bieberbach. A pesquisa de Askey e Gasper [4] é uma ótima fonte de informações sobre somas positivas de polinômios de Jacobi.

Uma aplicação imediata dos polinômios trigonométricos não-negativos é na teoria dos polinômios ortogonais sobre o círculo unitário. Uma classe geral de tais polinômios é constituída pelos polinômios de Bernstein-Szegő. Eles são ortogonais com relação a uma medida absolutamente contínua $d\nu(\theta)$ cuja derivada Radon-Nikodym $d\nu(\theta)/d\theta$ é a recíproca de um polinômio trigonométrico positivo (veja [35]). Esses tipos de medidas são os mais simples exemplos de medidas que pertencem à classe de Szegő. Os correspondentes polinômios ortogonais têm uma interessante aplicação na probabilidade com relação à previsão de séries de tempo [17].

A ferramenta básica para demonstrar a ortogonalidade dos polinômios de Bernstein-Szegő é a representação de Fejér e Riesz (veja [10]) de polinômios trigonométricos não-negativos: *Para todo polinômio trigonométrico não-negativo* $T(\theta)$,

$$T(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta),$$

*existe um polinômio algébrico* $R(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ *de grau* $n$ *tal que* $T(\theta) = |R(e^{i\theta})|^2$. *Reciprocamente, para todo polinômio algébrico* $R(z)$ *de grau* $n$, *o polinômio* $|R(e^{i\theta})|^2$ *é um polinômio trigonométrico não-negativo de ordem* $n$.

Cálculos simples permitem escrever este resultado na seguinte forma equivalente.

**Teorema 1** *O polinômio trigonométrico*

$$T(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta)$$

*de ordem* $n$ *é não-negativo para todo* $\theta$ *real se, e somente se, existem números complexos* $c_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, *tais que*

$$a_0 = \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2, \quad a_k - ib_k = 2 \sum_{\nu=0}^{n-k} c_{k+\nu} \bar{c}_\nu, \quad \text{para} \quad k = 1, \ldots, n.$$



cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Esta forma de representação de Fejér-Riesz mostra que uma variedade de polinômios trigonométricos não-negativos podem ser obtidos colocando-se diferentes valores para os parâmetros $c_k$. Entretanto, os exemplos mais naturais surgem como soluções de alguns problemas extremos para os coeficientes de $T(\theta)$.

**Exemplo**: *O núcleo de Fejér é solução do seguinte problema extremo: Determinar o polinômio*

$$C_n(\theta) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\theta \geq 0,$$

*para o qual o* $max\{a_0 + 2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_n\}$ *é atingido, sujeito a* $a_0 = 1$.

Fejér [10] determinou o máximo de $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ sujeito a $T(\theta)$ não-negativo e $a_0 = 1$. Ele mostrou que

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \leq 2\cos\left(\frac{\pi}{n+2}\right) \tag{1.4}$$

e que este limite é atingido para um polinômio não-negativo. A demonstração do teorema de aproximação de Jackson em Rivlin [27, Capítulo I] usa essencialmente a desigualdade de Fejér (1.4).

Demonstraremos que o polinômio

$$\sum_{k=0}^{m} \operatorname{sen}(2k+1)\theta = \frac{\operatorname{sen}^2(m+1)\theta}{\operatorname{sen}\theta} \tag{1.5}$$

torna-se um polinômio seno da forma $\sum_{k=1}^{2m+1} b_k \operatorname{sen} k\theta$, $b_1 = 1$, que é não-negativo em $[0, \pi]$, para o qual o máximo do momento $b_n$, $n = 2m+1$, é atingido.

Szegő [30] e Egerváry e Szász [8] estenderam o resultado de Fejér (1.4) para polinômios trigonométricos não-negativos, encontrando uma estimativa para $\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Este resultado pode ser escrito da seguinte forma:

**Teorema 2** *Se o polinômio trigonométrico*

$$T(\theta) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta)$$

*é não-negativo, então*

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2} \leq 2\cos\frac{\pi}{\lfloor n/k \rfloor + 2}, \quad 1 \leq k \leq n.$$



cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

*Além disso, a igualdade é atingida se, e somente se,*

$$T(\theta) = \tau(\theta)\left\{1 + \frac{2}{p+2}\sum_{\nu=1}^{p}\left((p-\nu+1)\cos\nu\alpha + \frac{\operatorname{sen}(\nu+1)\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)\cos(\nu m(\theta-\psi))\right\},$$

*onde $\tau$ é um polinômio trigonométrico arbitrário não-negativo de ordem $q$, $\alpha = \pi/(p+2)$, $p = [n/k]$, $n = pk+q$, $(0 \leq q < k)$ e $\psi$ é uma constante arbitrária.*

Em particular, obtemos a estimativa

$$|a_k| \leq \cos\frac{\pi}{[n/k]+2}, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

para os coeficientes do polinômio cosseno não-negativo

$$1/2 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\theta.$$

**Problema a ser discutido**: *Achar os valores extremos dos coeficientes de polinômios senos não-negativos e os correspondentes polinômios extremos.*

Desde que polinômios senos são funções ímpares, poderemos chamar

$$S_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen} k\theta$$

como um polinômio seno não-negativo se $S_n(\theta) \geq 0$ para todo $\theta \in [0, \pi]$. É claro que, se $S_n(\theta)$ é não-negativo, então $b_1 \geq 0$ além disso $S_n(\theta)$ é identicamente zero se, e somente se, $b_1 = 0$. Motivado pelos resultados para polinômios trigonométricos e cossenos descritos acima e tendo em mente esta observação sobre $b_1$, Rogosinski e Szegő [29] consideraram o seguinte problema extremo para polinômios senos não-negativos:

**Problema**: *Determinar os valores mínimo e máximo de $b_k$ supondo que o polinômio seno $S_n(\theta)$ pertence ao espaço*

$$\mathcal{S}_n = \left\{S_n(\theta) = \operatorname{sen}\theta + \sum_{k=2}^{n} b_k \operatorname{sen} k\theta \quad : \quad S_n(\theta) \geq 0 \quad \text{para} \quad \theta \in [0, \pi]\right\}.$$

*Para cada um desses valores, encontre o polinômio seno extremo que pertence a $\mathcal{S}_n$ e cujo coeficiente $b_k$ coincide com o correspondente valor extremo.*

Embora Rogosinski e Szegő tenham sugerido dois métodos para obter o extremo dos momentos $b_k$, eles somente encontraram os valores mínimo e máximo para $b_2, b_3, b_{n-1}$ e $b_n$. Além



cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

disso, em nenhum dos casos os correspondentes polinômios senos extremos foram determinados explicitamente.

Neste trabalho, desenvolvemos um método para resolver o problema acima colocado. A ferramenta básica é a representação geral de polinômios senos não-negativos. Note que o teorema 1 implica em uma representação de polinômios cossenos não-negativos (veja Teorema 3 a seguir). Entretanto, nenhuma representação similar de polinômio seno não-negativo é conhecida. Devido à complicada natureza do problema, aplicamos o método para encontrar os polinômios extremos, associados ao mínimo e ao máximo de $b_n$, $b_{n-1}$ e $b_{n-2}$. O método tem a vantagem de que para todo polinômio seno não-negativo, obtemos um correspondente polinômio cosseno não-negativo. Outra característica do método é ser puramente algorítmico. Desta maneira, um programa de computador poderia gerar os valores extremos dos momentos $b_k$ junto com os correspondentes polinômios senos extremos não-negativos.

Uma variedade de polinômios senos e cossenos não-negativos são colocados a seguir como teoremas e corolários. Formulamos e demonstramos somente algumas das possíveis consequências dos resultados principais. Por exemplo, não incluímos os polinômios trigonométricos não-negativos, que são combinações convexas dos polinômios que obteremos. O comentário que segue à declaração do resultado de Vietoris [34] no artigo de Askey e Steinig [5] dá idéia de como novos polinômios trigonométricos não-negativos podem ser gerados por uma sequência de polinômios trigonométricos não-negativos. Nosso método é desenvolvido no capítulo 2. No capítulo 3, apresentamos a solução dos problemas extremos para $b_{n-1}$ e $b_n$. Também encontramos os valores mínimo e máximo de $b_{n-2}$. Além disso, para $n$ ímpar, os correspondentes polinômios extremos são construídos e, para $n$ par, o comportamento do limite, isto é, do valor extremo de $b_{n-2}$, é estabelecido.

**Teorema 3** *Seja $n$ um natural par positivo e defina $m = (n-2)/2$. Se $S_n(\theta) \in \mathcal{S}_n$, então*

$$(i) \qquad -\frac{m+1}{m+2} \leq b_n \leq \frac{m+1}{m+2},$$

*onde a igualdade $b_n = (m+1)/(m+2)$ é atingida somente para o polinômio seno não-negativo*

$$\sum_{k=0}^{m} \left( \frac{(m+k+2)(m-k+1)}{(m+1)(m+2)} \operatorname{sen}(2k+1)\theta + \frac{(k+1)^2}{(m+1)(m+2)} \operatorname{sen}(2k+2)\theta \right) \tag{1.6}$$

*e a igualdade* $b_n = -(m+1)/(m+2)$ *é atingida somente para o polinômio seno não-negativo*

$$\sum_{k=0}^{m} \left( \frac{(m+k+2)(m-k+1)}{(m+1)(m+2)} \operatorname{sen}(2k+1)\theta - \frac{(k+1)^2}{(m+1)(m+2)} \operatorname{sen}(2k+2)\theta \right). \tag{1.7}$$

(*ii*) $$-\frac{m}{m+2} \leq b_{n-1} \leq 1,$$

*sendo que a igualdade* $b_{n-1} = 1$ *é atingida somente para o polinômio seno não-negativo*

$$\operatorname{sen}\theta + \sum_{k=1}^{m} (2pq \operatorname{sen} 2k\theta + \operatorname{sen}(2k+1)\theta) + pq \operatorname{sen}(2m+2)\theta, \tag{1.8}$$

*e a igualdade* $b_{n-1} = -m/(m+2)$ *é atingida somente para o polinômio seno não-negativo*

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta \;+\; & \sum_{k=1}^{m} \left\{ 2pq \left(1 - \frac{2k^2}{m(m+2)}\right) \operatorname{sen} 2k\theta + \left(1 - \frac{2k(k+1)}{m(m+2)}\right) \operatorname{sen}(2k+1)\theta \right\} \\ - \;\; & pq \operatorname{sen}(2m+2)\theta, \end{aligned} \tag{1.9}$$

*onde os parâmetros* $p$ *e* $q$ *satisfazem à relação* $p^2 + q^2 = 1$*, em ambos os casos.*

Um interessante polinômio seno não-negativo é

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(m+k+2)(m-k+1)}{(m+1)(m+2)} \operatorname{sen}(2k+1)\theta,$$

o qual é uma combinação convexa de (1.6) e (1.7).

**Teorema 4** *Seja* $n$ *um natural ímpar positivo e defina* $m = (n-1)/2$*. Se* $S_n(\theta) \in \mathcal{S}_n$*, então*

(*i*) $$\frac{-m}{m+2} \leq b_n \leq 1,$$

*além disso, a igualdade* $b_n = 1$ *é atingida somente para o polinômio seno não-negativo* (1.5) *e a igualdade* $b_n = -m/(m+2)$ *é atingida somente para o polinômio seno não-negativo*

$$\sum_{k=0}^{m} \left(1 - \frac{2k(k+1)}{m(m+2)}\right) \operatorname{sen}(2k+1)\theta. \tag{1.10}$$

(*ii*) $$-1 \leq \; b_{n-1} \leq 1,$$

*onde a igualdade* $b_{n-1} = 1$ *é atingida somente para o polinômio seno não-negativo*

$$\sum_{k=1}^{2m} \operatorname{sen} k\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2m+1)\theta \tag{1.11}$$

*e a igualdade* $b_{n-1} = -1$ *é atingida somente para o polinômio seno não-negativo*

$$\sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k+1} \operatorname{sen} k\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2m+1)\theta. \tag{1.12}$$



cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Observamos que o polinômio (1.10) coincide com o polinômio (1.9) se $p = 0$ ou $q = 0$.

**Teorema 5** *Seja $n$ um natural ímpar positivo e defina $m = (n-1)/2$ com $m \geq 2$. Se $S_n(\theta) \in \mathcal{S}_n$, então*

$$\frac{-m+4-\sqrt{m(5m-8)}}{2(m+2)} \leq b_{n-2} \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

*A igualdade $b_{n-2} = (1+\sqrt{5})/2$ é atingida somente para o polinômio seno não-negativo*

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta \;+\; & \sum_{k=1}^{m-2}\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\right)\operatorname{sen}(2k+1)\theta \\ +\; & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\operatorname{sen}(2m-1)\theta + \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)\operatorname{sen}(2m+1)\theta \end{aligned} \tag{1.13}$$

*e a igualdade $b_{n-2} = (-m+4-\sqrt{m(5m-8)})/(2m+4)$ é atingida somente para o polinômio seno não-negativo*

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta \;+\; & \sum_{k=1}^{m-2}\left(\frac{4+2k+2k^2-m^2}{m^2-4} - \frac{2(2k(k+1)-2(k^2+k+2)m+m^3)}{(m^2-4)\sqrt{m(5m-8)}}\right)\operatorname{sen}(2k+1)\theta \\ +\; & \left(\frac{4-m-\sqrt{m(5m-8)}}{2(m+2)}\right)\operatorname{sen}(2m-1)\theta \\ -\; & \frac{m}{2(m+2)}\left(1+\frac{m-4}{\sqrt{m(5m-8)}}\right)\operatorname{sen}(2m+1)\theta. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Para formular nosso resultado relativo aos valores extremos de $b_{n-2}$ para o caso em que $n$ é par, necessitamos do seguinte resultado técnico:

**Lema 1** *Para todo inteiro positivo $m \geq 2$, o polinômio cúbico*

$$r_m(y) = -y^3 + \frac{4(m^2+m+2)}{(m+2)^2}y^2 - \frac{4(m^2-m+1)}{(m+2)^2}y + \frac{(m-1)^2}{(m+2)^2}$$

*tem três zeros positivos. Além disso, o maior zero $y(m)$ de $r_m(y)$ não excede $y(\infty) := (3+\sqrt{5})/2$ e $y(m)$ converge para $y(\infty)$ quando $m$ converge para infinito.*



cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

**Teorema 6** *Seja $n$ um natural par positivo e defina $m = (n-2)/2$ com $m \geq 2$. Se $y(m)$ é definido como no Lema 1, então, para todo $S_n(\theta) \in \mathcal{S}_n$,*

$$|b_{n-2}| \leq \sqrt{y(m)}.$$

*Em particular,*

$$|b_{n-2}| < \sqrt{(3+\sqrt{5})/2)}.$$

Empregando um resultado de Turán [33, Teorema I], conforme colocado no Teorema 10, obtemos, como consequência dos teoremas 3, 4 e 5, um análogo à desigualdade de Fejér-Jackson-Gronwall.

**Corolário 1** *Os polinômios senos*

$$\sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{k} - \frac{k-1}{n(n+1)} \right) \operatorname{sen} k\theta, \tag{1.15}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{k} - \frac{2(k-1)}{n^2-1} \right) \operatorname{sen} k\theta, \tag{1.16}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \operatorname{sen} k\theta \; - \; \frac{1}{2n} \operatorname{sen} n\theta, \tag{1.17}$$

$$\operatorname{sen}\theta + \left( \frac{5+2\sqrt{5}}{5} \right) \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{k} \operatorname{sen} k\theta + \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2(n-1)} \right) \operatorname{sen}(n-1)\theta + \left( \frac{5+\sqrt{5}}{10n} \right) \operatorname{sen} n\theta$$

*e*

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta \; &+ \; \sum_{k=2}^{n-2} \left( \frac{n^2-2n-2k^2+2k-3}{(n-3)(n+1)k} + \frac{2(n^2-1)(n-3)-4k(n-2)(k-1)}{k(n-3)(n+1)\sqrt{(n-1)(5n-13)}} \right) \operatorname{sen} k\theta \\ &+ \; \left( \frac{5-n-\sqrt{5n-13}}{2(n+1)\sqrt{n-1}} \right) \operatorname{sen}(n-1)\theta \\ &+ \; \left( \frac{1-n}{2n(n+1)} - \frac{(n-5)\sqrt{n-1}}{2n(n+1)\sqrt{5n-13}} \right) \operatorname{sen} n\theta \end{aligned}$$

*são não-negativos.*

Analisando o gráfico 1 do polinômio (1.17) em comparação com o polinômio de Fejér-Jackson-Gronwall (1.3) vemos que seus efeitos de Gibbs, isto é, as altas flutuações nos pontos de descontinuidades são iguais perto da origem. Mas, o polinômio (1.17) aproxima melhor a função $f(\theta) = (\pi - \theta)/2$, $0 < \theta < \pi$ fora de uma vizinhança da origem do que o polinômio (1.3).

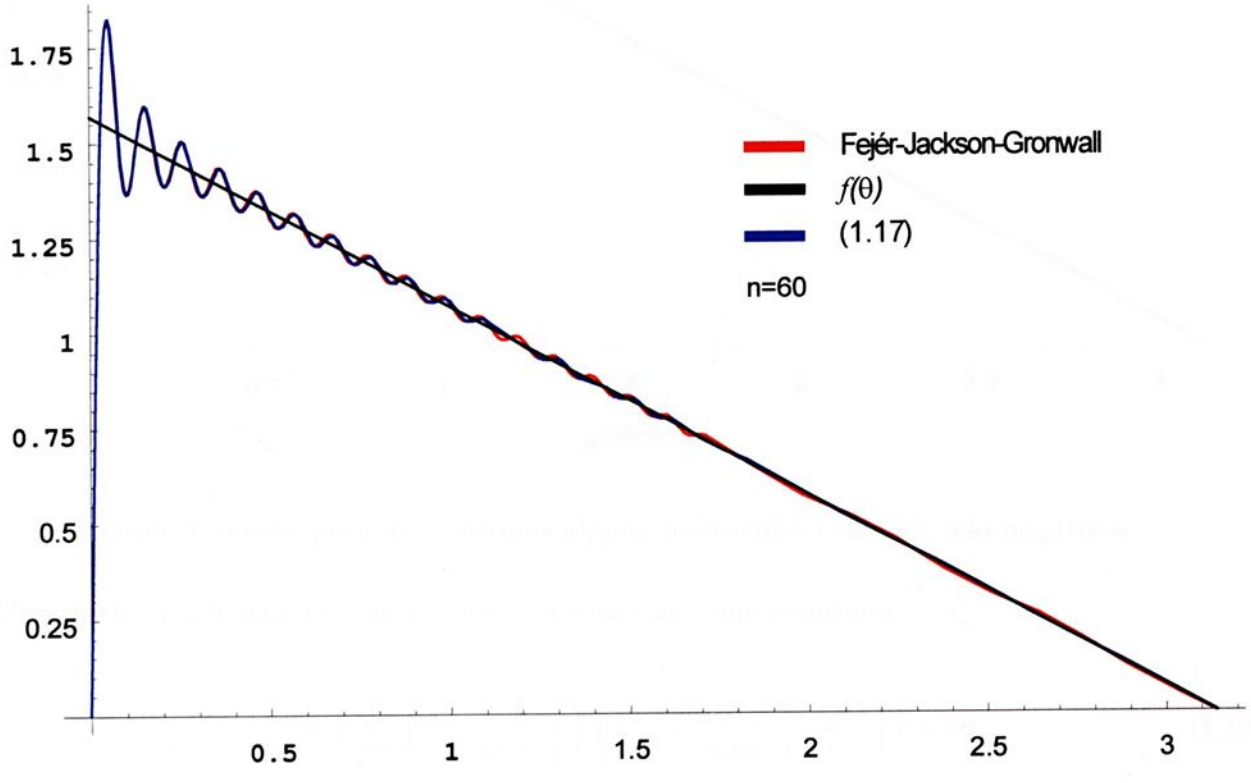



gráfico 1

O gráfico 2, a seguir, mostra que o polinômio (1.15) aproxima melhor a função $f(\theta) = (\pi - \theta)/2$, $0 < \theta < \pi$ para qualquer $x$ fora de uma pequena vizinhança da origem do que as somas parciais da série de Fourier da função $f(\theta)$, ou seja, o polinômio de Fejér-Jackson-Gronwall. O polinômio (1.15) apresenta um efeito de Gibbs menor do que o polinômio (1.3). Esta observação sugere que vale a pena investigar o efeito de Gibbs do polinômio (1.15) em um trabalho futuro.



unesp

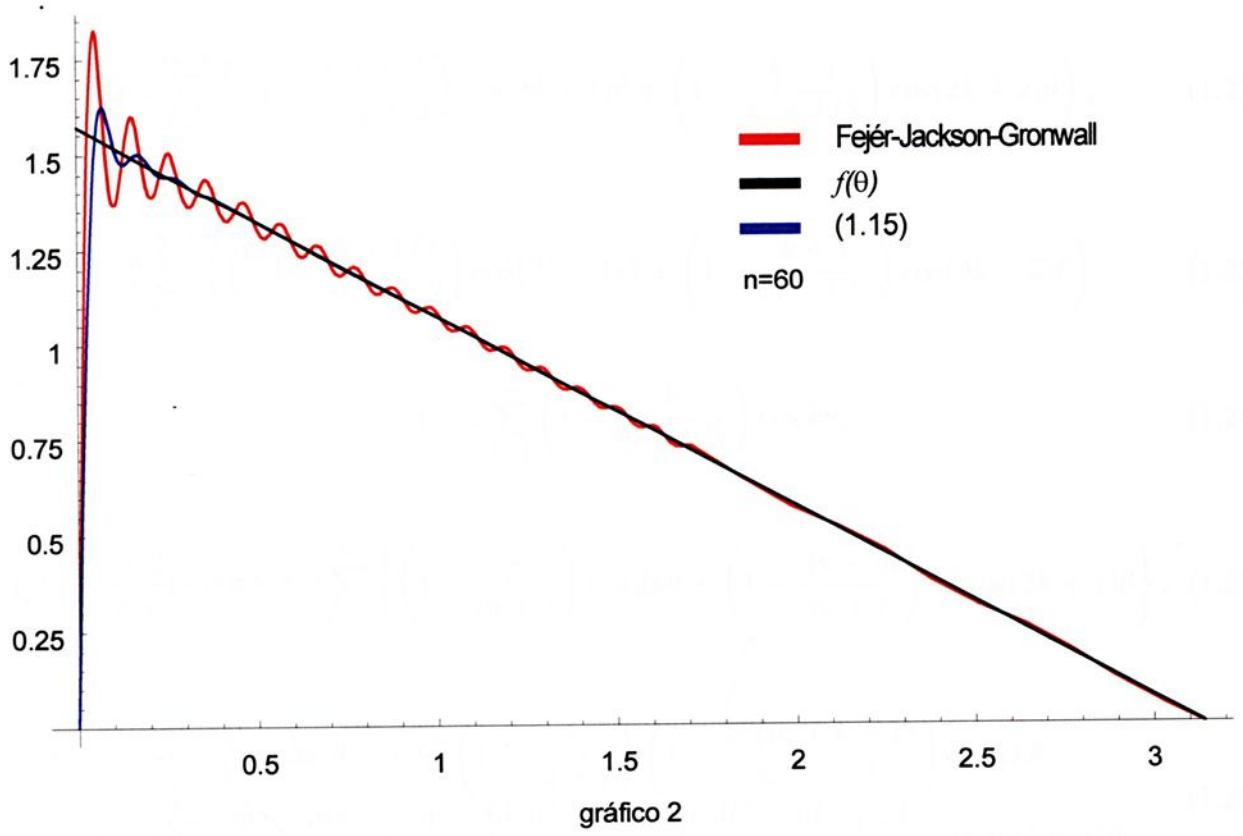



gráfico 2

O método também permite obtermos alguns polinômios cossenos não-negativos.

**Corolário 2** *Os seguintes polinômios cossenos são não-negativos:*

$$1+2\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{k}{m+1}\right)\left(1-\frac{2k(m+k+1)}{m(m+2)}\right)\cos k\theta, \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned}1+\cos\theta \;+\; & 2\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{k}{m+1}\right)\left(1-\frac{k}{m+2}\right)\left(1+\frac{k}{2m+3}\right)\cos(2k)\theta \\ & +\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{k}{m+1}\right)\left(1+k\left(\frac{4(k+1)}{2m+3}-\frac{2k+1}{m+2}\right)\right)\cos(2k+1)\theta,\end{aligned} \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned}1-\cos\theta \;+\; & 2\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{k}{m+1}\right)\left(1-\frac{k}{m+2}\right)\left(1+\frac{k}{2m+3}\right)\cos(2k)\theta \\ & -\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{k}{m+1}\right)\left(1+k\left(\frac{4(k+1)}{2m+3}-\frac{2k+1}{m+2}\right)\right)\cos(2k+1)\theta,\end{aligned} \tag{1.20}$$

$$1+2\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{k}{m+1}\right)\left(1-\frac{k}{m+2}\right)\left(1+\frac{k}{2m+3}\right)\cos k\theta, \tag{1.21}$$

$$1+2\sum_{k=0}^{m-1}\left(\left(1-\frac{k+1/2}{m+1/2}\right)\cos(2k+1)\theta+\left(1-\frac{k+1}{m+1/2}\right)\cos(2k+2)\theta\right), \tag{1.22}$$

$$1+2\sum_{k=0}^{m-1}\left(\left(-1+\frac{k+1/2}{m+1/2}\right)\cos(2k+1)\theta+\left(1-\frac{k+1}{m+1/2}\right)\cos(2k+2)\theta\right), \tag{1.23}$$

$$1+2\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{k}{m+1/2}\right)\cos k\theta, \tag{1.24}$$

$$1+\frac{4m+2}{m+1}pq\cos\theta+2\sum_{k=1}^{m}\left\{\left(1-\frac{k}{m+1}\right)\cos 2k\theta+\left(1-\frac{2k-m}{m+1}\right)pq\cos(2k+1)\theta\right\}, \tag{1.25}$$

$$\begin{aligned}1 \;&+\; \frac{4m-2}{m+1}pq\cos\theta+2\sum_{k=1}^{m}\left(1-\frac{k}{m+1}\right)\left(1-\frac{2k(m+k+1)}{m(m+2)}\right)\cos 2k\theta\\ &+\; 2\sum_{k=1}^{m}\frac{2m^3+3m^2-2m-6km^2-12km+4k^3+6k^2+2k}{m(m+1)(m+2)}pq\cos(2k+1)\theta,\end{aligned} \tag{1.26}$$

*onde os parâmetros $p$ e $q$ em (1.25) e (1.26) satisfazem à relação $p^2+q^2=1$,*

$$\frac{3+\sqrt{5}}{4}(m-1)\left(1+2\sum_{k=1}^{m-2}\left(1-\frac{k}{m-1}\right)\cos k\theta\right)+1+(1+\sqrt{5})\sum_{k=1}^{m-2}\cos k\theta+\cos m\theta \tag{1.27}$$

*e*

$$\begin{aligned}&\frac{m(-5+2m+\sqrt{m(5m-8)})}{6\sqrt{m(5m-8)}}\\ &+\;\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{10k+2k^3-4m-3km^2+m^3}{3m^2-12}\right)\cos k\theta\\ &+\;\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{2m^4-6km^3+m^3-8m^2+4k^3m+20km-4m-4k^3+4k}{(3m^2-12)\sqrt{m(5m-8)}}\right)\cos k\theta\\ &-\;\frac{m}{2(m+2)}\left(1+\frac{(m-4)}{\sqrt{m(5m-8)}}\right)\cos m\theta.\end{aligned} \tag{1.28}$$



cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

O polinômio (1.21) é uma combinação convexa de (1.19) e (1.20), e o polinômio (1.24) é uma combinação convexa de (1.22) e (1.23).

As formas explícitas dos polinômios cossenos não-negativos dadas pelas fórmulas de (1.18) a (1.24) são de algum modo muito similares ao clássico núcleo de Fejér (1.1). Enquanto os coeficientes de $F_n(\theta)$ aproximam "linearmente" os coeficientes da série de Fourier formal do $\delta(\theta)$ de Dirac, os coeficientes dos nossos polinômios cossenos, exceto para (1.24), aproximam, "quadrática" ou "cubicamente" os coeficientes de (1.2). Esta observação sugere que os polinômios cossenos acima podem ser aproximações melhores para o $\delta(\theta)$ de Dirac.

Pelo gráfico 3, a seguir, podemos comparar alguns dos polinômios cossenos não-negativos com o núcleo de Fejér. Os polinômios (1.18), (1.21), (1.22) e (1.24) aproximam bem o $\delta(\theta)$ de Dirac, conforme podemos observar através de seus gráficos. Além disso, o polinômio (1.21) apresenta menos flutuações em seu gráfico, ou seja, ele aproxima $\delta(\theta)$ de forma mais suave. Já o polinômio (1.24), cuja forma explícita é muito similar à de $F_n(\theta)$, aproxima o $\delta(\theta)$ de Dirac melhor que $F_n(\theta)$. Ainda melhor, o polinômio (1.22), o qual aproxima o $\delta(\theta)$ de Dirac mais rapidamente do que $F_n(\theta)$.

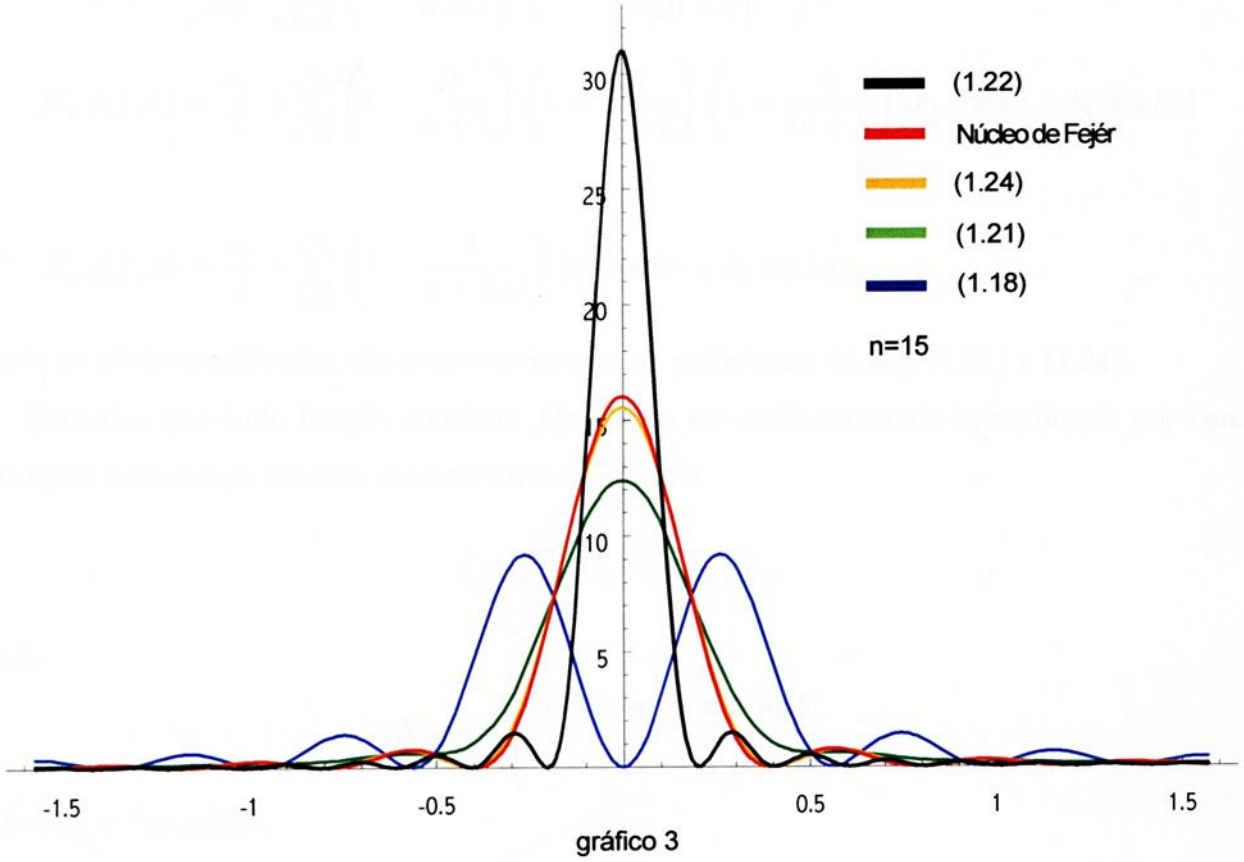



gráfico 3

As observações feitas, junto com a teoria geral de convergência de séries de Fourier modificadas, sugerem que será possível construir, para toda função $f(x)$ de período $2\pi$ e "suficientemente boa", alguns polinômios trigonométricos de aproximação que convergem para $f(x)$. Tal construção será feita utilizando alguns dos polinômios cossenos não-negativos obtidos no Corolário 2.

Consideremos qualquer função $f(x)$ do espaço $L_p[-\pi, \pi]$, onde

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)du,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos ku f(u)du$$

e

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} ku f(u)du, \qquad k = 1, 2, \cdots$$

são os seus coeficientes de Fourier. Assim, para $f(x)$, construiremos os polinômios trigonométricos de aproximação

$$K_{n,1}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2k(n+k+1)}{n(n+2)}\right)(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx),$$

$$K_{n,2}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\left(1 - \frac{k}{n+2}\right)\left(1 + \frac{k}{2n+3}\right)(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

e

$$K_{n,3}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1/2}\right)(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx),$$

onde os núcleos utilizados são respectivamente os polinômios (1.18), (1.21) e (1.24).

Sabemos que toda função contínua $f(x)$ pode ser uniformemente aproximada por combinações lineares de funções características da forma

$$f \sim \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i) X_{[\xi_i - \epsilon,\ \xi_i + \epsilon]},$$

onde

$$X_{[a,b]} = \begin{cases} 1, & se \quad x \in [a,b], \\ 0, & se \quad x \notin [a,b], \end{cases}$$

isto é, por "escadas".

Portanto, uma ferramenta vai aproximar uniformemente bem qualquer função contínua, se ela aproxima bem as funções características.

Pelo gráfico 4, vemos como os polinômios de aproximação $K_{n,j}$ juntamente com o polinômio de aproximação gerado pelo núcleo de Fejér, o qual é conhecido como somas de Cesàro, aproximam a função característica $X_{[0,\pi/4]}$. Observamos que o polinômio $K_{n,3}$ praticamente coincide com as somas de Cesàro e o polinômio $K_{n,2}$, apesar de mais lento, aproxima mais suavemente a função $X_{[0,\pi/4]}$.

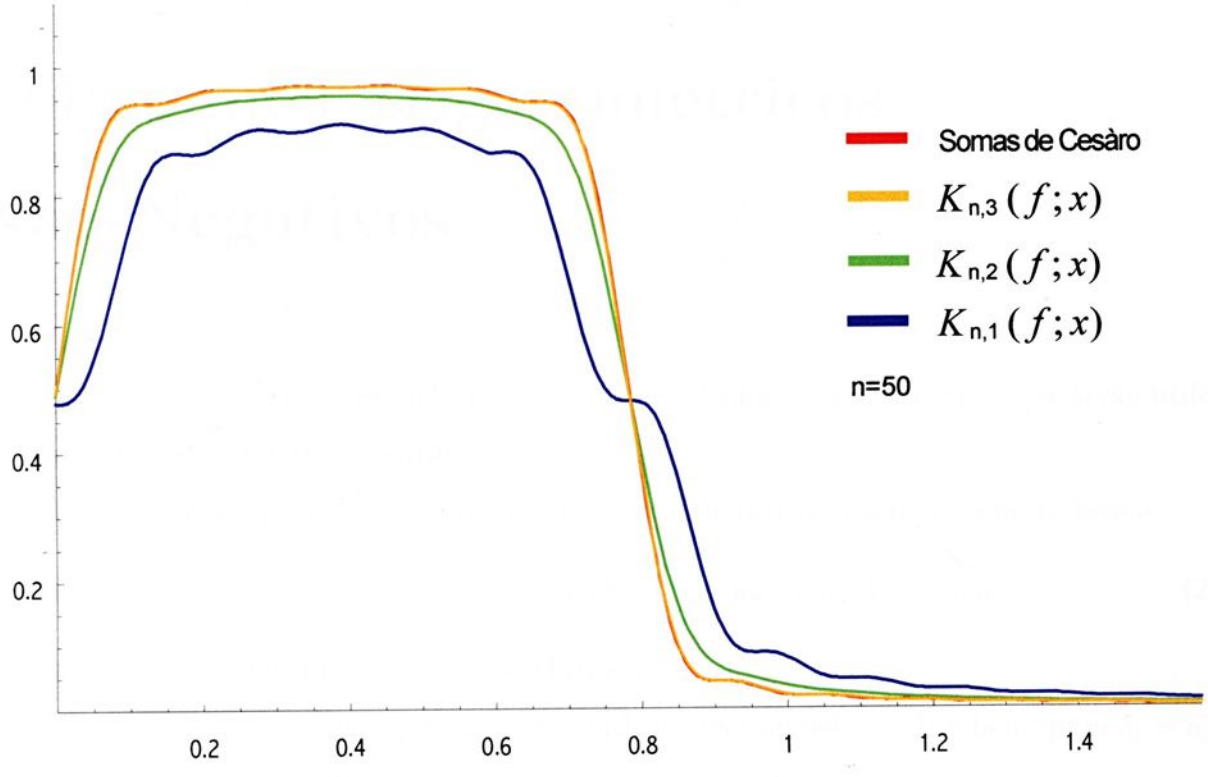



gráfico 4

Além disso no Capítulo 5 provaremos os seguintes resultados:

**Teorema 7** *Se $f(x)$ é de período $2\pi$ e pertence ao espaço $C[-\pi,\pi]$, então $K_{n,1}(f;x)$, $K_{n,2}(f;x)$ e $K_{n,3}(f;x)$ convergem uniformemente para $f(x)$.*

**Teorema 8** *Seja $p$ qualquer número real com $1 \leq p < \infty$. Se $f(x)$ é uma função de período $2\pi$ e pertence ao espaço $L_p[-\pi,\pi]$, então $\|K_{n,j} - f\|_{L_p}$ converge para zero quando $n$ tende para infinito para $j = 1,2,3$. Ou seja, $K_{n,1}(f;x)$, $K_{n,2}(f;x)$ e $K_{n,3}(f;x)$ convergem para a função $f(x)$ na norma $L_p$.*

# Capítulo 2

# Métodos para Construção de Polinômios Trigonométricos Não-Negativos

Antes de falarmos sobre os métodos, será preciso definir alguns conceitos que serão utilizados nas demonstrações dos resultados.

Sabemos que um polinômio trigonométrico em $\theta$ de ordem $n$ tem a seguinte forma

$$T_n(\theta) = a_0 + a_1 \cos\theta + b_1 \operatorname{sen}\theta + \cdots + a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta, \tag{2.1}$$

onde $a_\nu$ e $b_\nu$ são coeficientes complexos arbitrários.

Se $|a_n| + |b_n| > 0$, dizemos que (2.1) tem ordem precisamente $n$. Também, para $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, teremos o polinômio cosseno

$$C_n(\theta) = a_0 + a_1 \cos\theta + \cdots + a_n \cos n\theta$$

assim como para $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$, teremos o polinômio seno

$$S_n(\theta) = b_1 \operatorname{sen}\theta + b_2 \operatorname{sen} 2\theta + \cdots + b_n \operatorname{sen} n\theta.$$

Consideremos um polinômio algébrico de grau $n$ $P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu z^\nu$. Tomando $z$ na circunferência unitária, $z = e^{i\theta}$, teremos

$$T_n(\theta) = P(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos k\theta + b_k \operatorname{sen} k\theta),$$



cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

onde os coeficientes são complexos no caso geral. Agora, consideremos um polinômio trigonométrico da forma (2.1), que não seja identicamente zero. Então, ele não pode ter mais do que $2n$ zeros distintos em $(-\pi, \pi]$. Realmente, colocando $z = e^{i\theta}$ e usando a fórmula de Euler

$$\cos \nu\theta = \frac{1}{2}(e^{i\nu\theta} + e^{-i\nu\theta}) \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \nu\theta = \frac{1}{2}(e^{i\nu\theta} - e^{i\nu\theta}),$$

teremos,

$$T_n(\theta) = \sum_{\nu=-n}^{n} c_{n+\nu} e^{i\nu\theta},$$

onde,

$$c_{n+\nu} = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_{-\nu} + ib_{-\nu}), & \nu < 0, \\ a_0, & \nu = 0, \\ \frac{1}{2}(a_\nu - ib_\nu), & \nu > 0. \end{cases}$$

Desta forma, $e^{in\theta} T_n(\theta) = Q(z)$, onde $Q(z)$ é um polinômio algébrico de grau $2n$. Logo, se $T \not\equiv 0$, então $T$ não pode ter mais que $2n$ zeros distintos em $(-\pi, \pi]$.

Agora, consideremos os polinômios trigonométricos reais, ou seja, com coeficientes reais.

Supondo que

$$c_0 = a_0, \quad c_\nu = a_\nu - ib_\nu \qquad \nu = 1, \cdots, n,$$

onde $a_\nu$ e $b_\nu$ são reais, podemos representar um polinômio trigonométrico real como a parte real de um polinômio algébrico sobre o círculo unitário. Logo,

$$\begin{aligned} T_n(\theta) &= \Re e \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu z^\nu \right\}_{z=e^{i\theta}} = \Re e \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu - ib_\nu) e^{i\nu\theta} \right\} = \Re e \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu e^{i\nu\theta} - ib_\nu e^{i\nu\theta}) \right\} \\ &= \Re e \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu(\cos \nu\theta + i \operatorname{sen} \nu\theta) - ib_\nu(\cos \nu\theta + i \operatorname{sen} \nu\theta)) \right\} \\ &= \Re e \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu \cos \nu\theta + a_\nu i \operatorname{sen} \nu\theta - ib_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \operatorname{sen} \nu\theta) \right\} \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \operatorname{sen} \nu\theta) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \operatorname{sen} \nu\theta). \end{aligned}$$



cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

Mas, como

$$\begin{aligned}
\Re e\left\{\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu z^\nu\right\} &= \Re e\left\{\sum_{\nu=0}^{n}(a_\nu e^{i\nu\theta} + ib_\nu e^{i\nu\theta})\right\} \\
&= \Re e\left\{\sum_{\nu=0}^{n}(a_\nu(\cos\nu\theta + i\,\mathrm{sen}\,\nu\theta) + ib_\nu(\cos\nu\theta + i\,\mathrm{sen}\,\nu\theta))\right\} \\
&= \sum_{\nu=0}^{n}(a_\nu\cos\nu\theta - b_\nu\,\mathrm{sen}\,\nu\theta) = \sum_{\nu=0}^{n}\left(a_\nu\left(\frac{e^{i\nu\theta}+e^{-i\nu\theta}}{2}\right) - b_\nu\left(\frac{e^{i\nu\theta}-e^{-i\nu\theta}}{2i}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n}(a_\nu e^{i\nu\theta} + ib_\nu e^{i\nu\theta} + a_\nu e^{-i\nu\theta} - ib_\nu e^{-i\nu\theta}) = \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n}(c_\nu e^{i\nu\theta} + \overline{c_\nu}e^{-i\nu\theta}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n}(c_\nu z^\nu + \overline{c_\nu}\,\overline{z}^{\,\nu}),
\end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned}
T_n(\theta) &= \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n}(c_\nu z^\nu + \overline{c_\nu}\,\overline{z}^{\,\nu}) = \frac{1}{2}z^{-\nu}\sum_{\nu=0}^{n}(c_\nu z^{n+\nu} + \overline{c_\nu}\,\overline{z}^{\,\nu} z^n) \\
&= \frac{1}{2}z^{-\nu}\sum_{\nu=0}^{n}(c_\nu z^{n+\nu} + \overline{c_\nu}\,\frac{z^n}{z^\nu}) = \frac{1}{2}z^{-\nu}\sum_{\nu=0}^{n}(c_\nu z^{n+\nu} + \overline{c_\nu}\,z^{n-\nu})|_{z=e^{i\theta}}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$T_n(\theta) = \frac{1}{2}e^{-in\theta}Q(e^{i\theta}),$$

onde $Q(z) = \overline{c_n} + \overline{c_{n-1}}\,z + \cdots + \overline{c_1}\,z^{n-1} + 2c_0 z^n + c_1 z^{n+1} + \cdots + c_n z^{2n}$.

Agora, trocando os coeficientes do polinômio $Q(z)$ pelos seus respectivos conjugados, teremos o polinômio $\overline{Q}(z)$. Mas, $Q(z) = Q^*(z) = z^{2n}\overline{Q}(1/z)$, pois

$$\begin{aligned}
z^{2n}\overline{Q}(1/z) &= z^{2n}\left\{c_n + c_{n-1}\frac{1}{z} + \cdots + c_1\frac{1}{z^{n-1}} + 2c_0\frac{1}{z^n} + \overline{c_1}\,\frac{1}{z^{n+1}} + \cdots + \overline{c_n}\,\frac{1}{z^{2n}}\right\} \\
&= c_n z^{2n} + c_{n-1}z^{2n-1} + \cdots + c_1 z^{n+1} + 2c_0 z^n + \overline{c_1}\,z^{n-1} + \cdots + \overline{c_n} \\
&= Q(z).
\end{aligned}$$

Logo, $Q$ é um polinômio auto-inversível de grau $2n$.

Portanto,

$$|T_n(\theta)| = \frac{1}{2}|e^{-in\theta}||Q(e^{i\theta})| = \frac{1}{2}|Q(e^{i\theta})|. \tag{2.2}$$

**Observação 1:** Se $z_\nu$ é um zero do polinômio $Q$ com multiplicidade $k$, então $1/\overline{z}$ também é um zero de $Q$ com a mesma multiplicidade. Notemos, ainda, que os inversos de 0 e $\infty$ são $\infty$ e 0, respectivamente, onde $\infty$ como um zero de ordem $k$ significa que os coeficientes de potências maiores que $k$ em $Q$ se anulam.



cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

**Observação 2:** Para um polinômio trigonométrico de ordem $n$, o correspondente polinômio $Q$ deve ser diferente de zero na origem. Realmente, $Q(0) = \overline{c}_n \neq 0$. Se a ordem do polinômio $T$ é exatemente $m$, com $m < n$, então $c_{m+1} = \cdots = c_n = 0$ e o polinômio $Q$ se reduz a

$$\begin{aligned} Q(z) &= \overline{c_m} z^{n-m} + \cdots + \overline{c}_1 z^{n-1} + 2c_0 z^n + c_1 z^{n+1} + \cdots + c_m z^{n+m} \\ &= z^{n-m}(\overline{c_m} + \cdots + \overline{c_1}\, z^{m-1} + 2c_0 z^m + c_1 z^{m+1} + \cdots + c_m z^{2m}). \end{aligned}$$

Observemos que $Q(z)$ tem uma raiz em $z = 0$ de multiplicidade $n - m$ e também outra em $z = \infty$ de mesma multiplicidade.

## 2.1 Representação de Fejér-Riesz

Consideremos o polinômio algébrico, $R(z) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu z^\nu$, de grau $n$ com coeficientes complexos $c_\nu$, onde $\nu = 0, 1, \cdots, n$. Tomemos o quadrado do valor absoluto de $R(z)$ sobre a circunferência unitária $|z| = 1$. Então, para $z = e^{i\theta}$ com $\theta \in (-\pi, \pi]$, teremos

$$\begin{aligned} |R(e^{i\theta})|^2 &= R(e^{i\theta})\overline{R(e^{i\theta})} = R(e^{i\theta})\overline{R}(e^{-i\theta}) \\ &= \left(\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu e^{i\nu\theta}\right)\left(\sum_{\mu=0}^{n} \overline{c_\nu}\, e^{-i\mu\theta}\right) = \sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{n} c_\nu \overline{c_\mu}\, e^{i(\nu-\mu)\theta} \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \overline{c_\nu} + \sum_{\nu=1}^{n}\left\{\left(\sum_{\mu=0}^{n-\nu} c_{\nu+\mu}\overline{c_\mu}\right) e^{i\nu\theta} + \left(\sum_{\mu=0}^{n-\nu} \overline{c_{\nu+\mu}}\, c_\mu\right) e^{-i\nu\theta}\right\}. \end{aligned}$$

Logo,

$$|R(e^{i\theta})|^2 = a_0 + \sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu \cos\nu\theta + b_\nu \operatorname{sen}\nu\theta),$$

onde

$$a_0 = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \overline{c_\nu}, \quad a_\nu - ib_\nu = 2\sum_{\mu=0}^{n-\nu} c_{\nu+\mu}\overline{c_\mu}, \qquad \nu = 1, \cdots, n. \tag{2.3}$$

Desta maneira, $|R(e^{i\theta})|^2$ é um polinômio trigonométrico real de ordem pelo menos $n$. Vemos que este polinômio, com $a_n - ib_n = 2c_n\overline{c_0}$, é precisamente de ordem $n$ se $c_0 \neq 0$ e $c_n \neq 0$. Ainda, se os coeficientes de $R$ são reais, então $b_1 = \cdots = b_n = 0$ e o polinômio $|R(e^{i\theta})|^2$ se reduz ao polinômio cosseno.



cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

### 2.1.1 Polinômios Trigonométricos Não-Negativos

Em 1915, L. Fejér e F. Riesz, utilizando todos os resultados anteriores, deram uma importante representação paramétrica para polinômios trigonométricos não-negativos.

**Teorema 9** *Seja $T_n(\theta)$ um polinômio trigonométrico não-negativo de ordem $n$ arbitrário. Então, existe um polinômio algébrico $R(z)$ de grau $n$ tal que*

$$T_n(\theta) = |R(e^{i\theta})|^2. \tag{2.4}$$

*Reciprocamente, a expressão $|R(e^{i\theta})|^2$ sempre representa um polinômio trigonométrico não-negativo em $\theta$ de ordem $n$.*

*Demonstração:* Seja $T_n(\theta)$ um polinômio trigonométrico arbitrário não-negativo de ordem $n$.

Então, de acordo com o resultado (2.2), temos

$$T_n(\theta) = |T_n(\theta)| = \frac{1}{2}|Q(e^{i\theta})|, \tag{2.5}$$

onde $Q$ é um polinômio algébrico auto-inversível, como visto anteriormente. Agora, suponhamos que o polinômio trigonométrico não-negativo $T_n(\theta)$ tenha zeros reais. Desta forma, cada zero real $\theta_\mu$ do intervalo $(-\pi, \pi]$ do polinômio trigonométrico $T_n(\theta)$ é de multiplicidade par e $e^{i\theta_\mu} = \xi_\mu$ é um zero de $Q(z)$ de mesma multiplicidade. Pelas observações 1 e 2 sobre a distribuição dos zeros do polinômio $Q$, podemos escrever a seguinte fatoração

$$Q(z) = c_n z^k \prod_{\nu=1}^{p}(z - z_\nu)(z - z_\nu^*) \prod_{\mu=1}^{q}(z - \xi_\mu)^2, \tag{2.6}$$

onde $k + p + q = n$ para $k, p, q \geq 0$, $z_\nu^* = 1/\overline{z}$, $0 < |z_\nu| < 1$ e $|\xi_\mu| = 1$. Observemos que se $p = 0$ ou $q = 0$, o correspondente produto (2.6) deve ser igual a 1.

Para $p > 0$, $0 < |z_\nu| < 1$ e $z = e^{i\theta}$, temos a igualdade

$$\left|\frac{z - z_\nu}{z - z_\nu^*}\right| = \left|\frac{z - z_\nu}{z - 1/\overline{z_\nu}}\right| = |\overline{z_\nu}| \left|\frac{z - z_\nu}{z\overline{z_\nu} - 1}\right|. \tag{2.7}$$

Mostremos que

$$\left|\frac{z - z_\nu}{z - z_\nu^*}\right| = |z_\nu|, \tag{2.8}$$

demonstrando que

$$\left|\frac{z - z_\nu}{z\overline{z_\nu} - 1}\right| = 1,$$



unesp

já que $|\overline{z_\nu}| = |z_\nu|$.

Mas, esta última igualdade segue de

$$\begin{aligned}\left|\frac{z-z_\nu}{z\overline{z_\nu}-1}\right|^2 &= \frac{|z-z_\nu|^2}{|z\overline{z_\nu}-1|^2} = \frac{(z-z_\nu)\overline{(z-z_\nu)}}{(z\overline{z_\nu}-1)\overline{(z\overline{z_\nu}-1)}} = \frac{(z-z_\nu)(\overline{z}-\overline{z_\nu})}{(z\overline{z_\nu}-1)(\overline{z}\,z_\nu-1)} \\ &= \frac{z\overline{z}-z\overline{z_\nu}-z_\nu\overline{z}+z_\nu\overline{z_\nu}}{z\overline{z}z_\nu\overline{z_\nu}-\overline{z}\,z_\nu-z\overline{z_\nu}+1} = \frac{1-z\overline{z_\nu}-z_\nu\overline{z}+z_\nu\overline{z_\nu}}{1-z\overline{z_\nu}-z_\nu\overline{z}+|z|^2z_\nu\overline{z_\nu}} = 1,\end{aligned}$$

uma vez que $|z|^2 = 1$.

Logo, usando (2.5) e (2.6), temos que

$$T_n(\theta) = \frac{1}{2}|Q(z)| = \frac{1}{2}|c_n||z|^k \prod_{\nu=1}^{p}|z-z_\nu||z-z_\nu^*| \prod_{\mu=1}^{q}|z-\xi_\mu|^2.$$

Agora, usando a igualdade (2.8) e que $|z| = 1$, teremos

$$T_n(\theta) = \frac{1}{2}|Q(z)| = \frac{1}{2}|c_n| \prod_{\nu=1}^{p}|z_\nu||z-z_\nu^*|^2 \prod_{\mu=1}^{q}|z-\xi_\mu|^2.$$

Mas,

$$\begin{aligned}|z_\nu||z-z_\nu^*|^2 &= |z_\nu|\frac{|z\overline{z_\nu}-1|^2}{|\overline{z_\nu}|^2} = |z_\nu|\frac{(z\overline{z_\nu}-1)\overline{(z\overline{z_\nu}-1)}}{\overline{z_\nu}\,\overline{\overline{z_\nu}}} \\ &= |z_\nu|\frac{z_\nu\overline{z_\nu}-z\overline{z_\nu}-z_\nu\overline{z}+1}{z_\nu\overline{z_\nu}} = |z_\nu|\frac{z_\nu\overline{z_\nu}-z\overline{z_\nu}-z_\nu\overline{z}+1}{|z_\nu|^2} \\ &= \frac{(z-z_\nu)(\overline{z}-\overline{z_\nu})}{|z_\nu|} = \frac{(z-z_\nu)\overline{(z-z_\nu)}}{|z_\nu|} = \frac{|z-z_\nu|^2}{|z_\nu|}.\end{aligned}$$

Usando, $z = e^{i\theta}$, teremos

$$T_n(\theta) = A^2 \prod_{\nu=1}^{p}|e^{i\theta}-z_\nu|^2 \prod_{\mu=1}^{q}|e^{i\theta}-\xi_\mu|^2,$$

onde

$$A^2 = \frac{|c_n|}{2\prod_{\nu=1}^{p}|z_\nu|}.$$

Logo, $T_n(\theta)$ esta escrito na forma fatorada $|R(e^{i\theta})|^2$.

Portanto, a igualdade (2.4) está satisfeita.

A segunda parte da demonstração segue imediatamente dos resultados colocados no início desta seção. ■

Devemos observar que a representação (2.4) não é única. Por exemplo, se $\xi$ for um zero arbitrário do polinômio algébrico $R(z)$, então o polinômio

$$\tilde{R}(z) = \frac{1-\xi z}{z-\xi}R(z) \tag{2.9}$$



cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

fornece outra representação para o polinômio trigonométrico $T_n(\theta)$, pois

$$|R(e^{i\theta})|^2 = R(e^{i\theta})R(e^{-i\theta}) = T_n(\theta).$$

Mas,

$$\begin{aligned} |\tilde{R}(e^{i\theta})|^2 &= \tilde{R}(e^{i\theta})\tilde{R}(e^{-i\theta}) = \frac{1-\xi e^{i\theta}}{e^{i\theta}-\xi}R(e^{i\theta})\frac{1-\xi e^{-i\theta}}{e^{-i\theta}-\xi}R(e^{-i\theta}) \\ &= \frac{1-\xi e^{-i\theta}-\xi e^{i\theta}+\xi^2}{1-\xi e^{-i\theta}-\xi e^{i\theta}+\xi^2}T_n(\theta) \\ &= T_n(\theta). \end{aligned}$$

Sabemos que se $z_\nu$ é um zero de $R$, então $z_\nu^* = 1/\overline{z}$ também é. O que (2.9) faz é retirar o zero $z_\nu$ e colocar em seu lugar $1/z_\nu$, que é o conjugado de $z_\nu^*$.

Logo, poderiamos usar este método para remover todos os zeros do polinômio algébrico em $|z| < 1$, de forma a ter unicidade na representação (2.4).

### 2.1.2 Polinômios Cossenos Não-Negativos

O seguinte corolário do teorema anterior fornece uma representação para polinômios cossenos não-negativos.

**Corolário 3** *Se*

$$C_n(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\theta$$

*é um polinômio cosseno de ordem n, não-negativo para todo $\theta$ real, então existe um polinômio algébrico com coeficientes reais $R(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$, de grau n, tal que $C_n(\theta) = |R(e^{i\theta})|^2$. Desta maneira, o polinômio cosseno $C_n(\theta)$ de ordem n é não-negativo se, e somente se, existem números reais $c_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, tais que*

$$\begin{aligned} a_0 &= \sum_{k=0}^{n} c_k^2, \\ a_k &= \sum_{\nu=0}^{n-k} c_{k+\nu}c_\nu, \qquad k = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2.10}$$

*Demonstração:* Para verificar este resultado vamos considerar $T_n(\theta)$ como o polinômio cosseno não-negativo $C_n(\theta)$. Então, pelo teorema anterior, existe a representação $C_n(\theta) = |R(e^{i\theta})|^2$.





Aplicando (2.4) em $R(z)$ de modo que todos os seus zeros estejam no disco unitário $|z| \leq 1$, temos garantido que o polinômio algébrico é único.

Supondo que $C_n(\theta)$ tenha zeros reais, então eles são de multiplicidade dois e seus respectivos simétricos também são zeros de mesma multiplicidade. Ou seja, se $\theta_\mu$ é um zero real, então $-\theta_\mu$ também é zero, pois $C_n(\theta)$ é um polinômio par. Assim, $e^{i\theta_\mu} = \xi_\mu$ e $e^{-i\theta_\mu} = \overline{\xi_\mu}$ são zeros do polinômio algébrico. Logo, fazendo isto para todos os zeros reais de $C_n(\theta)$ e como os demais zeros $z_\nu^*$, $0 < |z_\nu^*| < 1$, aparecem com seus respectivos conjugados devido a (2.4) temos imediatamente que o polinômio algébrico tem coeficientes reais $c_k$, $k = 0, 1, \cdots, n$. ■

Desta forma, a relação (2.10) segue de (2.3) para $c_k$ reais.

## 2.2 Construção de Polinômios Senos Não-Negativos

Nesta seção, veremos como obter os polinômios senos não-negativos a partir dos polinômios cossenos não-negativos, além de obter uma representação paramétrica para os coeficientes $b_k$ dos polinômios senos não-negativos.

### 2.2.1 Relação entre Polinômios Senos e Cossenos Não-Negativos

A seguinte relação entre os polinômios senos não-negativos e os polinômios cossenos não-negativos é uma simples observação (veja [29]).

**Lema 2** *O polinômio seno de ordem n*

$$S_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} b_k \ \operatorname{sen} k\theta$$

*é não-negativo em* $[0, \pi]$ *se, e somente se, o polinômio cosseno de ordem* $n-1$

$$C_{n-1}(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos k\theta$$

*é não-negativo, onde os coeficientes são relacionados da seguinte forma*

$$\begin{aligned} b_k &= a_{k-1} - a_{k+1}, \qquad k = 1, \ldots, n-2, \\ b_{n-1} &= a_{n-2}, \\ b_n &= a_{n-1}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

*Demonstração:* Vamos considerar o polinômio cosseno não-negativo $C_{n-1}(\theta)$ de ordem $n-1$

$$C_{n-1}(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos k\theta.$$

Lembremos as seguintes relações trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(k+1)\theta = \operatorname{sen} k\theta \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cos k\theta \tag{2.12}$$

e

$$\operatorname{sen}(k-1)\theta = \operatorname{sen} k\theta \cos\theta - \operatorname{sen}\theta \cos k\theta. \tag{2.13}$$

Então, subtraindo (2.12) de (2.13), obtemos

$$\operatorname{sen}\theta \cos k\theta = \frac{1}{2}\{\operatorname{sen}(k+1)\theta - \operatorname{sen}(k-1)\theta\}. \tag{2.14}$$

Agora, fazendo o produto $2\operatorname{sen}\theta C_{n-1}(\theta)$, teremos

$$2\operatorname{sen}\theta C_{n-1}(\theta) = 2\left\{\frac{a_0}{2}\operatorname{sen}\theta - a_1 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + a_2 \operatorname{sen}\theta\cos 2\theta + \cdots + a_{n-1}\operatorname{sen}\theta\cos(n-1)\theta\right\}.$$

Usando (2.14) em $2\operatorname{sen}\theta C_{n-1}(\theta)$, obteremos

$$\begin{aligned} 2\operatorname{sen}\theta C_{n-1}(\theta) &= a_0\operatorname{sen}\theta + a_1\operatorname{sen}2\theta + \cdots + a_k(\operatorname{sen}(k+1)\theta - \operatorname{sen}(k-1)\theta) + \cdots + \\ &\quad a_{n-2}(\operatorname{sen}(n-1)\theta - \operatorname{sen}(n-2)\theta) + a_{n-1}(\operatorname{sen} n\theta - \operatorname{sen}(n-2)\theta)) \\ &= (a_0 - a_2)\operatorname{sen}\theta + (a_1 - a_3)\operatorname{sen}2\theta + \cdots + (a_{k-1} - ak + 1)\operatorname{sen}k\theta + \cdots + \\ &\quad (a_{n-3} - a_{n-1})\operatorname{sen}(n-2)\theta + a_{n-2}\operatorname{sen}(n-1)\theta + a_{n-1}\operatorname{sen}\theta. \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes do polinômio $2\operatorname{sen}\theta C_{n-1}(\theta)$ com os do polinômio seno $S_n(\theta)$, teremos a relação (2.11). Portanto, concluímos que dado um polinômio cosseno não-negativo temos um polinômio seno não-negativo se os coeficientes satisfazem à relação (2.11). O caso contrário segue de modo análogo. ∎

Outro resultado interessante sobre polinômios senos não-negativos é o seguinte teorema de Turán o qual foi usado para obter o Corolário 1.

**Teorema 10** *Se, para um $n$ fixo, os números reais $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$ são tais que*

$$f(x) = b_1\operatorname{sen}x + b_2\operatorname{sen}3x + b_3\operatorname{sen}5x + \cdots + b_n\operatorname{sen}(2n-1)x \geq 0$$

*para $0 < x < \pi$, então, para o mesmo $n$ e $0 < x < \pi$, temos*

$$g(x) \equiv \frac{b_1}{1}\operatorname{sen}x + \frac{b_2}{2}\operatorname{sen}2x + \frac{b_3}{3}\operatorname{sen}3x + \cdots + \frac{b_n}{n}\operatorname{sen}nx > 0.$$



unesp

### 2.2.2 Representação Paramétrica dos Coeficientes $b_k$

Como consequência dos resultados anteriores, obtemos uma representação paramétrica para os coeficientes dos polinômios senos não-negativos.

**Lema 3** *O polinômio seno de ordem n*

$$S_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} b_k \ \operatorname{sen} k\theta$$

*é não-negativo se, e somente se, existem números reais* $c_0, \ldots, c_{n-1}$ *tais que*

$$\begin{aligned} b_1 &= \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu^2 - \sum_{\nu=0}^{n-3} c_\nu c_{\nu+2}, \\ b_k &= \sum_{\nu=0}^{n-k} c_{k+\nu-1} c_\nu - \sum_{\nu=0}^{n-k-2} c_{k+\nu+1} c_\nu, \qquad k = 2, \ldots, n-2, \\ b_{n-1} &= c_0 c_{n-2} + c_1 c_{n-1}, \\ b_n &= c_0 c_{n-1}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

*Demonstração:* Sabemos, pelo Lema 2, que o polinômio $S_n(\theta)$ é não-negativo se, e somente se, o polinômio cosseno $C_{n-1}(\theta)$ é não-negativo, onde vale a relação (2.11) para os coeficientes.

Assim, basta obtermos novas relações sobre os coeficientes $b_k$ em termos dos coeficientes $c_k$ reais, usando o corolário anterior. Desta forma, devemos aplicar (2.10) em (2.11), observando que estamos trabalhando com um polinômio cosseno de ordem $n-1$.

Logo,

$$\begin{aligned} b_1 &= a_0 - a_2 = \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu^2 - \sum_{\nu=0}^{n-3} c_{\nu+2} c_\nu, \\ b_{n-1} &= a_{n-2} = \sum_{\nu=0}^{n-1-(n-2)} c_{n-2+\nu} c_\nu = \sum_{\nu=0}^{1} c_{\nu+n-2} c_\nu \\ &= c_0 c_{n-2} + c_1 c_{n-1}, \\ b_n &= a_{n-1} = \sum_{\nu=0}^{n-1-(n-1)} c_{n-1+\nu} c_\nu = c_{n-1} c_0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} b_k &= a_{k-1} - a_{k+1} = \sum_{\nu=0}^{n-1-(k-1)} c_{k-1+\nu} c_\nu - \sum_{\nu=0}^{n-1-(k+1)} c_{k+1+\nu} c_\nu \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-k} c_{k+\nu-1} c_\nu - \sum_{\nu=0}^{n-k-2} c_{k+\nu+1} c_\nu, \quad \text{para} \quad k = 2, \cdots, n-2. \end{aligned}$$



unesp

Portanto, verificamos que a relação (2.15) vale se, e somente se, $S_n(\theta)$ é um polinômio não-negativo. ■

Agora, vamos representar $b_1$ como soma de quadrados, ou seja, canonizar a forma quadrática.

O processo de canonização segue da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
b_1 &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 - \sum_{k=0}^{n-3} c_k c_{k+2} \\
&= \left(c_0 - \frac{1}{2}c_2\right)^2 + \left(c_1 - \frac{1}{2}c_3\right)^2 + \frac{3}{4}c_2^2 + \frac{3}{4}c_3^2 + \sum_{k=4}^{n-1} c_k^2 - \sum_{k=2}^{n-3} c_k c_{k+2} \\
&= \left(c_0 - \frac{1}{2}c_2\right)^2 + \left(c_1 - \frac{1}{2}c_3\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}c_4\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}c_3 - \frac{1}{\sqrt{3}}c_5\right)^2 \\
&\quad + \frac{2}{3}c_4^2 + \frac{2}{3}c_5^2 + \sum_{k=6}^{n-1} c_k^2 - \sum_{k=4}^{n-3} c_k c_{k+2}.
\end{aligned}$$

Não é difícil ver que se $n$ é ímpar, $n = 2m+1$, então, $b_1$ pode ser escrito como uma soma de quadrados da forma

$$\begin{aligned}
b_1 &= \left(c_0 - \frac{c_2}{2}\right)^2 + \left(c_1 - \frac{c_3}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}}c_2 - \frac{c_4}{2\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}}c_3 - \frac{c_5}{2\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2 + \cdots \\
&\quad + \left(\sqrt{q_{k+1}}c_2 k - \frac{c_{2k+2}}{2\sqrt{q_{k+1}}}\right)^2 + \left(\sqrt{q_{k+1}}c_{2k+1} - \frac{c_{2k+3}}{\sqrt{q_{k+1}}}\right)^2 + \cdots \\
&\quad + \left(\sqrt{q_{m-1}}c_{2m-3} - \frac{c_{2m-1}}{2\sqrt{q_{m-1}}}\right)^2 + \left(\sqrt{q_m}c_{2m-2} - \frac{c_{2m}}{2\sqrt{q_m}}\right)^2 \\
&\quad + \left(\sqrt{q_m}c_{2m-1}\right)^2 + \left(\sqrt{q_{m+1}}c_{2m}\right)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{m-2} \left\{ \left(\sqrt{q_{k+1}}c_{2k} - \frac{c_{2k+2}}{2\sqrt{q_{k+1}}}\right)^2 + \left(\sqrt{q_{k+1}}c_{2k+1} - \frac{c_{2k+3}}{2\sqrt{q_{k+1}}}\right)^2 \right\} \\
&\quad + \left(\sqrt{q_m}c_{2m-2} - \frac{c_{2m}}{2\sqrt{q_m}}\right)^2 + q_m c_{2m-1}^2 + q_{m+1}c_{2m}^2
\end{aligned}$$

e, se $n$ é par, $n = 2m+2$, então, $b_1$ é dado por

$$\begin{aligned}
b_1 &= \left(c_0 - \frac{c_2}{2}\right)^2 + \left(c_1 - \frac{c_3}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}}c_2 - \frac{c_4}{2\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}}c_3 - \frac{c_5}{2\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)^2 + \cdots \\
&\quad + \left(\sqrt{q_{k+1}}c_2 k - \frac{c_{2k+2}}{2\sqrt{q_{k+1}}}\right)^2 + \left(\sqrt{q_{k+1}}c_{2k+1} - \frac{c_{2k+3}}{\sqrt{q_{k+1}}}\right)^2 + \cdots \\
&\quad + \left(\sqrt{q_m}c_{2m-2} - \frac{c_{2m}}{2\sqrt{q_m}}\right)^2 + \left(\sqrt{q_m}c_{2m-1} - \frac{c_{2m+1}}{2\sqrt{q_m}}\right)^2 \\
&\quad + \left(\sqrt{q_{m+1}}c_{2m}\right)^2 + \left(\sqrt{q_{m+1}}c_{2m+1}\right)^2
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \left( \sqrt{q_{k+1}} c_{2k} - \frac{c_{2k+2}}{2\sqrt{q_{k+1}}} \right)^2 + \left( \sqrt{q_{k+1}} c_{2k+1} - \frac{c_{2k+3}}{2\sqrt{q_{k+1}}} \right)^2 \right\}$$
$$+ q_{m+1} c_{2m}^2 + q_{m+1} c_{2m+1}^2,$$

onde os parâmetros $q_k$, $k = 1, \ldots, m+1$, são determinados pela relação de recorrência $q_1 = 1$, $q_{k+1} = 1 - 1/(4q_k)$. A solução desta última equação é

$$q_k = \frac{k+1}{2k}. \tag{2.16}$$

Podemos, então, formular nosso próximo lema.

**Lema 4** *Seja a sequência* $\{q_k\}$ *definida por* (2.16). *Então, para todo inteiro positivo* $n$, *o coeficiente* $b_1$ *pode ser representado como uma soma de quadrados*

$$b_1 = \sum_{k=0}^{n-1} d_k^2,$$

*onde, para* $n$ *ímpar,* $n = 2m+1$ *os parâmetros* $d_k$ *e* $c_k$ *são relacionados por*

$$\begin{aligned}
\sqrt{q_k} c_{2k-2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{q_k}} c_{2k} &= d_{2k-2}, \quad k = 1, \ldots, m, \\
\sqrt{q_k} c_{2k-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{q_k}} c_{2k+1} &= d_{2k-1}, \quad k = 1, \ldots, m-1, \\
\sqrt{q_{m+1}} c_{2m} &= d_{2m}, \\
\sqrt{q_m} c_{2m-1} &= d_{2m-1}
\end{aligned}$$

*e, para* $n$ *par,* $n = 2m+2$ *os parâmetros* $d_k$ *e* $c_k$ *são relacionados por*

$$\begin{aligned}
\sqrt{q_k} c_{2k-2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{q_k}} c_{2k} &= d_{2k-2}, \quad k = 1, \ldots, m, \\
\sqrt{q_k} c_{2k-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{q_k}} c_{2k+1} &= d_{2k-1}, \quad k = 1, \ldots, m, \\
\sqrt{q_{m+1}} c_{2m} &= d_{2m}, \\
\sqrt{q_{m+1}} c_{2m+1} &= d_{2m+1}.
\end{aligned}$$

A verificação deste lema segue de forma imediata pelos resultados sobre a canonização de $b_1$, ou seja, considerando os casos onde $n$ é par ou ímpar, respectivamente, basta substituirmos os termos que aparecem ao quadrado em $b_1$ pelos novos parâmetros $d_j$. Tal representação de $b_1$ é mais simples através dos novos parâmetros $d_j$. Além disso, podemos obter os valores dos coeficientes $c_j$ em termos dos $d_j$. O sistema de equações lineares obtido pode ser resolvido



cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

com relação a $c_k$. Além disso, usando a forma explícita (2.16) de $q_k$, $k = 1, \ldots$, e colocando $q_{k+1} \cdots q_{k+\nu} = 1$ para $\nu = 0$, obtemos uma representação explícita de $c_k$ em termos de uma combinação linear dos novos parâmetros $d_j$, $j = k, k+2, k+4, \ldots$.

Desta maneira, $c_{2k}$, $k = 0, 1, \ldots, m$, são dados por

$$\begin{aligned} c_{2k} &= \sum_{\nu=0}^{m-k} \frac{1}{2^\nu} (q_{k+1} \cdots q_{k+\nu} \sqrt{q_{k+\nu+1}})^{-1} d_{2k+2\nu} \\ &= (k+1) \sum_{\nu=0}^{m-k} \sqrt{\frac{2}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)}} d_{2k+2\nu}, \end{aligned} \tag{2.17}$$

enquanto que para os parâmetros $c_{2k+1}$, teremos

$$\begin{aligned} c_{2k+1} &= \sum_{\nu=0}^{m-k-1} \frac{1}{2^\nu} (q_{k+1} \cdots q_{k+\nu} \sqrt{q_{k+\nu+1}})^{-1} d_{2k+2\nu+1} \\ &= (k+1) \sum_{\nu=0}^{m-k-1} \sqrt{\frac{2}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)}} d_{2k+2\nu+1}, \end{aligned} \tag{2.18}$$

se $n = 2m + 1$, ou

$$\begin{aligned} c_{2k+1} &= \sum_{\nu=0}^{m-k} \frac{1}{2^\nu} (q_{k+1} \cdots q_{k+\nu} \sqrt{q_{k+\nu+1}})^{-1} d_{2k+2\nu+1} \\ &= (k+1) \sum_{\nu=0}^{m-k} \sqrt{\frac{2}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)}} d_{2k+2\nu+1}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

se $n = 2m + 2$.

Os Lemas 3 e 4 e as relações (2.17), (2.18) e (2.19) fornecem a representação paramétrica dos coeficientes dos polinômios senos não-negativos.

**Teorema 11** *O polinômio seno*

$$S_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} b_k \ \text{sen}\, k\theta$$

*é não-negativo para* $\theta \in [0, \pi]$ *se, e somente se, existem parâmetros reais* $d_0, \ldots, d_{n-1}$, *tal que* $b_1 = d_0^2 + \cdots + d_{n-1}^2$ *e*

$$b_k = \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{i,i}^{(k)} d_i^2 + 2 \sum_{0 \le i < j \le n-1} \delta_{i,j}^{(k)} d_i d_j, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{2.20}$$

*onde os coeficientes* $\delta_{i,j}^{(k)}$ *são obtidos explicitamente pelas relações* (2.15), (2.17), (2.18) *e* (2.19).



unesp

Usando as relações (2.17), (2.18) e (2.19), podemos representar os coeficientes $c_j$ como combinações lineares dos parâmetros $d_j$. Usando esta representação, podemos escrever os coeficientes $b_j$ do polinômio seno $S_n(\theta)$ no Lema 3 em termos de $d_j$. Além disso, concluímos que os coeficientes $b_j$ representam uma forma quadrática em termos de $d_j$, pois vêm do produto dos $c_j$.

Por exemplo, vamos escrever a expressão quadrática do coeficiente $b_n$ para $n = 2m + 2$.

Assim, devemos usar as expressões (2.17) e (2.19) em (2.15). Então, teremos

$$\begin{aligned} b_n &= b_{2m+1} = c_0 c_{2m+1} \\ &= \left(\sum_{\nu=0}^{m} \sqrt{\frac{2}{(\nu+1)(\nu+2)}} d_{2\nu}\right)\left((m+1)\sqrt{\frac{2}{(m+1)(m+2)}} d_{2m+1}\right) \\ &= 2\sqrt{\frac{m+1}{m+2}} \sum_{\nu=0}^{m} \frac{d_\nu d_{2m+1}}{\sqrt{(\nu+1)(\nu+2)}}. \end{aligned}$$

Observemos que a complexidade das expressões quadráticas aumenta quando vamos em direção ao coeficiente $b_1$. Este foi um dos motivos pelo qual este trabalho se limitou a estudar até o coeficiente $b_{n-2}$.

Sabemos que, para toda forma quadrática, existe uma matriz simétrica associada. Desta forma, se $D_k = (\delta_{i,j}^{(k)})_{i,j=0}^{n-1}$ for uma matriz simétrica associada à forma quadrática (2.20) e representarmos o vetor $(d_0, \ldots, d_{n-1})^T$ por $\mathbf{d}$, teremos

$$b_k = \mathbf{d}^T D_k \mathbf{d}.$$

Através desta representação, encontramos os valores extremos de $b_k$, uma vez que os valores mínimos e máximos de $b_k$ estão associados ao menor e ao maior autovalor da matriz simétrica, respectivamente, como veremos no teorema de Rayleigh-Ritz.

## 2.3 Teorema de Rayleigh-Ritz

Através deste teorema, poderemos encontrar os valores extremos de $b_k$. Mas, antes devemos colocar alguns resultados de modo a facilitar a compreensão deste teorema. Tais resultados e suas respectivas demonstrações podem ser encontrados, integralmente, em C. R. R Alves [2].



unesp

### 2.3.1 Matrizes Unitárias

**Definição 1** *A matriz $U \in M_n$, onde $M_n$ denota o espaço das matrizes de ordem $n \times n$, é unitária se $U^*U = I$ (onde $U^* = \overline{U}^t$ e $\overline{U}^t$ é a matriz conjugada transposta de $U$). Se $U \in M_n(\mathbb{R})$, então $U$ é chamada ortogonal.*

**Definição 2** *Recordemos que os vetores $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{C}^n$ formam um conjunto ortogonal se $x_i^* x_j = 0$ para quaisquer $1 \leq i < j \leq k$. Se, além disso, os vetores são normalizados, isto é, $x_i^* x_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$, então o conjunto é chamado ortonormal.*

**Definição 3** *A matriz $B \in M_n$ é unitariamente similar a $A \in M_n$, se existe uma matriz unitária $U \in M_n$, tal que $B = U^*AU$. Se $U$ é real (e, por isso, ortogonal), então $B$ é ortogonalmente similar a $A$.*

**Teorema 12** *Dado $A \in M_n$ com auto-valores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ em qualquer ordem pré-estabelecida, existe uma matriz unitária $U \in M_n$ tal que $U^*AU = T$, onde $T$ é uma matriz triangular superior com elementos da diagonal $t_{ii} = \lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

### 2.3.2 Matrizes Hermitianas

**Definição 4** *A matriz $A \in M_n$ é hermitiana se $A = A^*$. Se $A = -A^*$, então $A$ é chamada anti-hermitiana.*

Observações:

1. $A + A^*$, $AA^*$ e $A^*A$ são hermitianas para todo $A \in M_n$.
2. Se $A$ é hermitiana então $A^k$ é hermitiana para $k = 1, 2, \ldots$.
3. Se $A$ é não-singular e hermitiana então $A^{-1}$ é hermitiana.
4. Se $A$ e $B$ são hermitianas, então $aA + bB$ é hermitiana para todos os escalares reais $a$ e $b$.
5. Se $A \in M_n$ é hermitiana, então $a_{ii} \in M_n(\mathbb{R}), i = 1, \ldots, n$ e $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ para todos os $i$ e $j$ tais que $1 \leq i < j \leq n$.



unesp

**Lema 5** *Sejam $a$ e $b$ números complexos. Então, $a\bar{b} + \bar{a}b \in \mathbb{R}$.*

**Teorema 13** *Seja $A \in M_n$ hermitiana. Então,*

*(a) $x^*Ax$ é real para todo $x \in \mathbb{C}^n$.*

*(b) Todos os auto-valores de $A$ são reais.*

*(c) $S^*AS$ é hermitiana para todo $S \in M_n$.*

**Teorema 14** *(Teorema Espectral) Seja $A \in M_n$ hermitiana. Então, existe uma matriz unitária $U \in M_n$ e uma diagonal $D \in M_n(\mathbb{R})$ tais que $D = U^*AU$. (Os auto-vetores de $A$ são as colunas de $U$ e os auto-valores de $A$, os elementos da diagonal de $D$).*

### 2.3.3 Teorema de Rayleigh-Ritz

Este teorema também pode ser encontrado em Horn e Johnson [20].

**Teorema 15** *Seja $A \in M_n$ hermitiana e seus auto-valores ordenados da forma*

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n = \lambda_{\max}.$$

*Então, $\lambda_1 x^*x \leq x^*Ax \leq \lambda_n x^*x$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$,*

$$\lambda_{\max} = \lambda_n = \max_{x \neq 0} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \max_{x^*x=1} x^*Ax$$

*e*

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 = \min_{x \neq 0} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \min_{x^*x=1} x^*Ax.$$

*Demonstração:* Como $A$ é hermitiana, podemos escrever $A = UDU^*$ , onde $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ e $U \in M_n$ é unitária, isto é, $U^*U = I$. Para qualquer $x \in \mathbb{C}^n$, temos:

$$x^*Ax = x^*(UDU^*)x = (U^*x)^*D(U^*x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |(U^*x)_i|^2.$$

Como cada termo $|(U^*x)_i|^2 > 0$, temos, então que

$$\lambda_{\min} \sum_{i=1}^{n} |(U^*x)_i|^2 \leq x^*Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |(U^*x)_i|^2 \leq \lambda_{\max} \sum_{i=1}^{n} |(U^*x)_i|^2.$$





Por outro lado, $U$ é unitária. Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} |(U^*x)_i|^2 = (U^*x)^*(U^*x) = x^*UU^*x = x^*x.$$

Dessa forma,

$$\frac{x^*Ax}{x^*x} \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} \frac{|(U^*x)_i|^2}{x^*x} = \lambda_n.$$

Então, se $x \neq 0$, temos $\lambda_n \geq \frac{x^*Ax}{x^*x}$ , com igualdade quando $x$ é auto-vetor de $A$, ou seja,

$$\lambda_n = \max_{x \neq 0} \frac{x^*Ax}{x^*x}. \tag{2.21}$$

Analogamente,

$$\frac{x^*Ax}{x^*x} \geq \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{|(U^*x)_i|^2}{x^*x} = \lambda_1.$$

Assim, se $x \neq 0$, temos $\lambda_1 \leq \frac{x^*Ax}{x^*x}$, com igualdade quando $x$ é auto-vetor de $A$, isto é,

$$\lambda_1 = \min_{x \neq 0} \frac{x^*Ax}{x^*x}. \tag{2.22}$$

Temos, então, $\lambda_1 x^*x \leq x^*Ax \leq \lambda_n x^*x$.

Finalmente, de $x \neq 0$, temos

$$\frac{x^*Ax}{x^*x} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^*x}}\right)^* A \left(\frac{x}{\sqrt{x^*x}}\right)$$

e

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^*x}}\right)^* \left(\frac{x}{\sqrt{x^*x}}\right) = 1.$$

Portanto, as condições(2.21) e (2.22) são equivalentes às condições $\max_{x^*x=1} x^*Ax = \lambda_n$ e $\min_{x^*x=1} x^*Ax = \lambda_1$, respectivamente. ■

## 2.4 Polinômios Senos Não-Negativos com Coeficientes Extremos

Pelo Teorema 15, obtemos o principal resultado deste capítulo.

**Teorema 16** *Se $\lambda_{k,min}$ e $\lambda_{k,max}$ forem o menor e o maior autovalores de $D_k$ e $S_n(\theta) \in \mathcal{S}_n$, então,*

$$\lambda_{k,min} \leq b_k \leq \lambda_{k,max}.$$

*Além disso, a igualdade $b_k = \lambda_{k,max}$ é atingida se, e somente se, $S_n(\theta)$ é um polinômio seno em $\mathcal{S}_n$, cujos coeficientes $b_i$, $i = 2, \ldots, n$, são obtidos pela fórmula*

$$b_i = \mathbf{d}_{k,max}^T D_i \mathbf{d}_{k,max},$$

*onde $\mathbf{d}_{k,max}$ é um autovetor de comprimento um, associado ao autovalor $\lambda_{k,max}$.*

*Analogamente, a igualdade $b_k = \lambda_{k,min}$ é atingida se, e somente se, $S_n(\theta)$ é um polinômio seno em $\mathcal{S}_n$, cujos coeficientes $b_i$, $i = 2, \ldots, n$, são obtidos pela fórmula*

$$b_i = \mathbf{d}_{k,min}^T D_i \mathbf{d}_{k,min},$$

*onde $\mathbf{d}_{k,min}$ é um autovetor de comprimento um, associado ao autovalor $\lambda_{k,min}$.*



unesp

# Capítulo 3

# Construção de Polinômios Senos Não-Negativos com Coeficientes Extremos

Neste capítulo, vamos achar os valores extremos dos coeficientes $b_n$, $b_{n-1}$ e $b_{n-2}$. Os polinômios extremos associados aos coeficientes $b_n$ e $b_{n-1}$ também serão obtidos explicitamente. Para o coeficiente $b_{n-2}$, com $n = 2m+1$, obteremos, ainda, os polinômios extremos asssociados. Porém, devido à complexidade da forma quadrática que representa o coeficiente $b_{n-2}$ para o caso $n = 2m + 2$, apenas os seus valores extremos foram determinados.

## 3.1 Polinômios Extremos para $b_n$ e $b_{n-1}$

Vale mencionar que os valores extremos para os coeficientes bem como os polinômios extremos associados dependem da paridade de $n$. Desta forma, para qualquer coeficiente, consideraremos quatro casos: os problemas de mínimo e de máximo e, para cada um deles, os casos em que $n$ é par e ímpar.

### 3.1.1 O Mínimo e o Máximo de $b_n$ para $n = 2m+1$ e os Polinômios Extremos associados

Usando as relações (2.15), (2.17) e (2.18), obtemos

$$b_n = \sum_{k=0}^{m} \frac{d_{2k} d_{2m}}{2^k q_1 q_2 \cdots q_k \sqrt{q_{k+1}} \sqrt{q_{m+1}}},$$

onde $q_k$ é dado por (2.16). Como

$$\begin{aligned} 2^k q_1 q_2 \cdots q_k \sqrt{q_{k+1}} \sqrt{q_{m+1}} &= 2^k \frac{2}{(2)(1)} \frac{3}{(3)(2)} \frac{4}{(4)(3)} \cdots \frac{k}{2(k-1)} \frac{k+1}{2k} \sqrt{\frac{(k+2)(m+2)}{4(k+1)(m+1)}} \\ &= \sqrt{\frac{m+2}{m+1}} \frac{\sqrt{(k+1)(k+2)}}{2}, \end{aligned}$$

então

$$b_n = \sqrt{\frac{m+1}{m+2}} \sum_{k=0}^{m} \frac{2 d_{2k} d_{2m}}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}.$$

Escrevendo

$$\alpha := \sqrt{\frac{m+1}{m+2}} \tag{3.1}$$

e

$$A_j := \frac{1}{\sqrt{(j+1)(j+2)}}, \quad j = 0, \ldots, m, \tag{3.2}$$

a matriz simétrica $D_n^{(o)}$ associada à forma quadrática que representa $b_n$ é

$$D_n^{(o)} = \begin{pmatrix} 2\alpha A_m & 0 & \alpha A_{m-1} & \cdots & \alpha A_1 & 0 & \alpha A_0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha A_{m-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ \alpha A_1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ \alpha A_0 & 0 & 0 & & & & \end{pmatrix}.$$

Desta forma, o polinômio característico de $D_n^{(o)}$ será dado pelo determinante

$$\begin{aligned} det(D_n^{(o)} - \lambda I) &= (-\lambda)^{2m} \left\{ (\alpha^2 A_0^2 + \cdots + \alpha^2 A_{m-1}^2)/\lambda + 2\alpha A_m - \lambda \right\} \\ &= (-\lambda)^{2m-1} \left\{ \lambda^2 - 2 \frac{\alpha}{\sqrt{(m+1)(m+2)}} \lambda - \alpha^2 \frac{m}{m+1} \right\}, \end{aligned}$$



unesp

onde $I$ é a matriz identidade de ordem $2m+1$. Para tornar o cálculo deste determinante mais simples, primeiramente transformamos a matriz $(D_n^{(o)} - \lambda I)$ em uma matriz triangular inferior, através de operações elementares em suas linhas. Para uma matriz triangular inferior, o determinante é dado simplesmente pelo produto dos elementos da diagonal principal. Este processo também foi usado para achar todos os polinômios característicos dos demais casos deste capítulo.

Desde que o menor e o maior zeros deste polinômio são $-m/(m+2)$ e 1, respectivamente, então, pelo Teorema 16, temos

$$-\frac{m}{m+2} \leq b_n \leq 1.$$

Desta forma, para determinar o polinômio extremo associado a $b_{n,max}$, precisamos encontrar primeiro um autovetor $\mathbf{d}_{n,max}^{(o)}$ de $D_n^{(o)}$, associado ao autovalor $\lambda = 1$, tal que

$$d_0^2 + \cdots + d_{2m}^2 = 1. \tag{3.3}$$

Resolvendo o sistema linear homogêneo

$$\begin{pmatrix} 2\alpha A_m - 1 & 0 & \alpha A_{m-1} & \cdots & \alpha A_1 & 0 & \alpha A_0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha A_{m-1} & 0 & -1 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \alpha A_1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ \alpha A_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{2m} \\ d_{2m-1} \\ d_{2m-2} \\ \vdots \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} = 0$$

para obtermos as cordenadas de $\mathbf{d}_{n,max}^{(o)}$, chegamos que $d_{2k} = \alpha A_k d_{2m}$ e $d_{2k+1} = 0$ para $k = 0, \ldots, m-1$.

Substituindo os valores de $d_j$ em (3.3), teremos

$$d_{2m} = \pm\sqrt{\frac{m+2}{2m+2}}.$$

Logo, os autovetores são $\pm\mathbf{d}_{n,max}^{(o)}$, onde

$$\mathbf{d}_{n,max}^{(o)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(A_0, 0, A_1, 0, \ldots, A_{m-2}, 0, A_{m-1}, 0, 1/\alpha\right).$$



unesp

Observe que ambos os coeficientes $a_k$ e $b_k$ são expressos como formas quadráticas de $d_0, d_1, \ldots, d_{2m}$.

Assim, para qualquer escolha do sinal do autovetor, teremos o mesmo polinômio extremo. Vamos trabalhar com $\mathbf{d}^{(o)}_{n,max}$.

Pelas relações (2.17) e (2.18), obtemos $c_{2k+1} = 0$ e

$$\begin{aligned}
c_{2k} &= (k+1)\sum_{\nu=0}^{m-k}\sqrt{\frac{2}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)}}d_{2k+2\nu} \\
&= (k+1)\left(\sqrt{\frac{2}{(m+1)(m+2)}}\sqrt{\frac{m+2}{2(m+1)}} + \sum_{\nu=0}^{m-k-1}\sqrt{\frac{2}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)}}d_{2k+2\nu}\right) \\
&= \frac{k+1}{m+1} + \alpha(k+1)\sum_{\nu=0}^{m-k-1}\sqrt{\frac{2}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)}}\sqrt{\frac{m+2}{2(m+1)}}A_{k+\nu} \\
&= \frac{k+1}{m+1} + \alpha(k+1)\sqrt{\frac{m+2}{m+1}}\sum_{\nu=0}^{m-k-1}\frac{1}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)} \\
&= \frac{k+1}{m+1} + (k+1)\sum_{\nu=0}^{m-k-1}\frac{1}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

para $k = 0, \ldots, m-1$,

Então, pelas expressões (2.10), temos que $a_{2k} = m+1-k$ para $k = 0, \ldots, m$ e $a_{2k+1} = 0$ para $k = 0, \ldots, m-1$. Assim, obtemos o polinômio cosseno não-negativo

$$\frac{m+1}{2} + \sum_{k=1}^{m}(m-k+1)\cos 2k\theta.$$

Multiplicando-o por 2/(m+1), de modo que $a_0 = 1$, chegamos à forma equivalente

$$1 + 2\sum_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{k}{m+1}\right)\cos 2k\theta.$$

Aplicando a transformação de $\theta$ para $\theta/2$, a qual preserva as características do polinômio, obtemos o clássico polinômio cosseno não-negativo (1.1). Usando as expressões dos coeficientes $a_k$ em (2.11), obtemos o polinômio seno não-negativo (1.5).

O procedimento para determinar o polinômio seno extremo associado a $b_{n,min}$ é similar. Primeiro, encontramos os autovetores de $D^{(o)}_n$ associados ao menor autovalor $\lambda = -m/(m+2)$ de modo a satisfazer (3.3).



cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

Resolvendo o sistema linear homogêneo

$$\begin{pmatrix} 2\alpha A_m - \lambda & 0 & \alpha A_{m-1} & \cdots & \alpha A_1 & 0 & \alpha A_0 \\ 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha A_{m-1} & 0 & -\lambda & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \alpha A_1 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 0 \\ \alpha A_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{2m} \\ d_{2m-1} \\ d_{2m-2} \\ \vdots \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} = 0$$

para as cordenadas de $\mathbf{d}^{(o)}_{n,min}$, obtemos

$$d_{2k} = \sqrt{\frac{m+2}{2m}} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \quad \text{e} \quad d_{2k+1} = 0$$

para $k = 0, \ldots, m-1$.

Substituindo esses valores em (3.3), teremos

$$d_{2m} = -\sqrt{\frac{m}{2m+2}}.$$

Assim, os autovetores são $\pm\mathbf{d}^{(o)}_{n,min}$, onde

$$\mathbf{d}^{(o)}_{n,min} = \sqrt{\frac{m+2}{2m}} \, (A_0, 0, A_1, 0, \ldots, 0, A_{m-1}, 0, -mA_m)^T$$

e escolhemos o sinal positivo. Então, por (2.18), obtemos $c_{2k+1} = 0$ e, por (2.17), teremos

$$\begin{aligned} c_{2k} &= (k+1) \sum_{\nu=0}^{m-k} \sqrt{\frac{2}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)}} d_{2k+2\nu} \\ &= (k+1) \left( -\sqrt{\frac{2}{(m+1)(m+2)}} \sqrt{\frac{m}{2m+2}} + \sum_{\nu=0}^{m-k-1} \sqrt{\frac{2}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)}} d_{2k+2\nu} \right) \\ &= -\frac{k+1}{m+1} \sqrt{\frac{m}{m+2}} + (k+1) \sum_{\nu=0}^{m-k-1} \sqrt{\frac{2}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)}} \sqrt{\frac{m+2}{2m}} A_{k+\nu} \\ &= -\frac{k+1}{m+1} \sqrt{\frac{m}{m+2}} + (k+1) \sqrt{\frac{m+2}{2m}} \sum_{\nu=0}^{m-k-1} \frac{1}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)} \\ &= \sqrt{\frac{m}{m+2}} \frac{m-2k}{m}, \qquad k = 0, \cdots, m. \end{aligned}$$



unesp

Então, pelas expressões (2.10), temos $a_{2k+1} = 0, \quad k = 0, \cdots, m-1$ e

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{1}{m(m+2)} \sum_{j=0}^{m-k} (m-2j)(m-2j-2k) \\ &= \frac{(m-k+1)(m^2+2m-2mk-2k^2-2k)}{3m(m+2)}, \qquad k = 0, \cdots, m. \end{aligned}$$

Logo, chegamos no polinômio cosseno não-negativo (1.18). Agora, precisamos expressar os coeficientes $b_k$ em termos de $a_k$ usando (2.11). Obviamente, $b_{2k} = 0$ e

$$\begin{aligned} b_{2k+1} &= \frac{m-k+1}{3m(m+2)}(m^2-2mk-2k^2+2m-2k) - \frac{m-k}{3m(m+2)}(m^2-2mk-2k^2-6k-4) \\ &= \frac{m^2-2k^2-2k+2m}{m(m+2)} \\ &= 1 - \frac{2k(k+1)}{m(m+2)}. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos o polinômio seno não-negativo (1.10).

### 3.1.2 O Mínimo e o Máximo de $b_n$ para $n = 2m+2$ e os Polinômios Extremos associados

Através das relações (2.15), (2.17) e (2.19), temos

$$b_n = \sum_{k=0}^{m} \frac{d_{2k} d_{2m+1}}{2^k q_1 q_2 \cdots q_k \sqrt{q_{k+1}} \sqrt{q_{m+1}}}.$$

Como

$$2^k q_1 q_2 \cdots q_k \sqrt{q_{k+1}} \sqrt{q_{m+1}} = \sqrt{\frac{m+2}{m+1}} \frac{\sqrt{(k+1)(k+2)}}{2},$$

então

$$b_n = \sqrt{\frac{m+1}{m+2}} \sum_{k=0}^{m} \frac{2 d_{2k} d_{2m+1}}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}.$$

Assim, a matriz simétrica $D_n^{(e)}$ associada à forma quadrática $b_n$ será

$$D_n^{(e)} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha A_m & 0 & \cdots & \alpha A_1 & 0 & \alpha A_0 \\ \alpha A_m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ \alpha A_1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ \alpha A_0 & 0 & 0 & & & & \end{pmatrix},$$

onde $\alpha$ e $A_j$ são definidos por (3.1) e (3.2), respectivamente. O polinômio característico de $D_n^{(e)}$ é

$$\begin{aligned} det(D_n^{(e)} - \lambda I) &= (-\lambda)^{2m+1} \left\{ (\alpha^2 A_0^2 + \cdots + \alpha^2 A_{m-1}^2 + \alpha^2 A_m^2)/\lambda - \lambda \right\} \\ &= (-\lambda)^{2m} \left\{ \lambda^2 - \alpha^2 \frac{m+1}{m+2} \right\}. \end{aligned}$$

Como o menor e o maior zeros deste polinômio são $-(m+1)/(m+2)$ e $(m+1)/(m+2)$, respectivamente, então, pelo Teorema 16, temos

$$-\frac{m+1}{m+2} \leq b_n \leq \frac{m+1}{m+2}.$$

Assim, para determinar o polinômio extremo associado a $b_{n,max}$, precisamos encontrar um autovetor $\mathbf{d}_{n,max}^{(e)}$ de $D_n^{(e)}$, associado com o autovalor $\lambda = (m+1)/(m+2)$, tal que

$$d_0^2 + \cdots + d_{2m+1}^2 = 1. \tag{3.4}$$

Resolvendo o sistema linear homogêneo

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \alpha A_m & 0 & \alpha A_{m-1} & \cdots & \alpha A_1 & 0 & \alpha A_0 \\ \alpha A_m & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha A_{m-1} & 0 & 0 & -\lambda & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots & \\ \alpha A_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 0 \\ \alpha A_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{2m+1} \\ d_{2m} \\ d_{2m-1} \\ d_{2m-2} \\ \vdots \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} = 0$$

para as coordenadas de $\mathbf{d}_{n,max}^{(e)} = 0$, obtemos

$$d_{2k} = ((m+2)/(m+1))\alpha A_k d_{2m+1}, \quad k = 0, \ldots, m$$

e $d_{2k+1} = 0, \ \ k = 0, \ldots, m-1$. Substituindo os valores de $d_j$ em (3.4), teremos

$$d_{2m+1} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Desta forma, os autovetores que precisamos são $\pm \mathbf{d}_{n,max}^{(e)}$, onde

$$\mathbf{d}_{n,max}^{(e)} = \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} \left( A_0, 0, A_1, 0, \ldots, A_m, \alpha \right)^T.$$

Vamos trabalhar com $\mathbf{d}^{(e)}_{n,max}$. Por (2.17) e (2.19), obtemos

$$\begin{aligned} c_{2k} &= (k+1)\sum_{\nu=0}^{m-k}\sqrt{\frac{2}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)}}d_{2k+2\nu} \\ &= \alpha(k+1)\frac{m+2}{m+1}\sum_{\nu=0}^{m-k}\sqrt{\frac{1}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)}}A_{k+\nu} \\ &= \alpha(k+1)\frac{m+2}{m+1}\sum_{\nu=0}^{m-k}\frac{1}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)} \\ &= \frac{m-k+1}{m+2}\sqrt{\frac{m+2}{m+1}}, \qquad k=0,\ldots,m \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c_{2k+1} &= (k+1)\sum_{\nu=0}^{m-k}\sqrt{\frac{2}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)}}d_{2k+2\nu+1} \\ &= (k+1)\left(\sqrt{\frac{1}{(m+1)(m+2)}}+\sum_{\nu=0}^{m-k-1}\sqrt{\frac{2}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)}}d_{2k+2\nu+1}\right) \\ &= \frac{k+1}{m+1}\sqrt{\frac{m+1}{m+2}}, \qquad k=0,\ldots,m. \end{aligned}$$

940/00

Então, pelas relações em (2.10), teremos

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \frac{1}{(m+1)(m+2)}\sum_{j=0}^{m-k}((m-j+1)(m-k-j+1)+(j+1)(k+j+1)) \\ &= \frac{(m-k+1)(2m^2-mk+7m-k^2-k+6)}{3(m+1)(m+2)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \frac{1}{(m+1)(m+2)}\left(\sum_{j=0}^{m-k}(m-j+1)(k+j+1)+\sum_{j=0}^{m-k-1}(j+1)(m-k-j)\right) \\ &= \frac{(2m^3+9m^2+13m-2k^3-3k^2-k+6)}{6(m+1)(m+2)}. \end{aligned}$$

Portanto, obtemos o polinômio cosseno não-negativo (1.19). Além disso, usando as relações (2.11), teremos o polinômio seno não-negativo (1.6).

Para determinar o polinômio seno extremo associado a $b_{n,min}$, encontramos os autovetores de $D^{(e)}_n$ associados ao menor autovalor $\lambda = -(m+1)/(m+2)$, tal que tenhamos (3.4).



Inst. de Biociências, Letras e Ciências Exatas - UNESP
BIBLIOTECA
S. J. Rio Preto

Resolvendo o sistema linear homogêneo

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \alpha A_m & 0 & \alpha A_{m-1} & \cdots & \alpha A_1 & 0 & \alpha A_0 \\ \alpha A_m & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha A_{m-1} & 0 & 0 & -\lambda & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \alpha A_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 0 \\ \alpha A_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{2m+1} \\ d_{2m} \\ d_{2m-1} \\ d_{2m-2} \\ \vdots \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} = 0$$

para as coordenadas de $\pm\mathbf{d}_{n,min}^{(e)}$, obtemos

$$d_{2k} = -((m+2)/(m+1))\alpha A_k d_{2m+1}, \quad k = 0, \ldots, m$$

e $d_{2k+1} = 0$, $k = 0, \cdots, m-1$. Substituindo os valores de $d_j$ em (3.4), temos que $d_{2m+1} = \pm\sqrt{2}/2$. Desta forma, os autovetores que precisamos são $\pm\mathbf{d}_{n,min}^{(e)}$, onde

$$\mathbf{d}_{n,min}^{(e)} = -\frac{1}{\sqrt{2}\alpha}\left(A_0, 0, A_1, 0, \ldots, A_m, -\alpha\right)^T$$

e escolhemos o de sinal positivo. Então, pelas fórmulas (2.17) e (2.19), teremos

$$c_{2k} = -\frac{m-k+1}{m+2}\sqrt{\frac{m+2}{m+1}}$$

e

$$c_{2k+1} = \frac{k+1}{m+1}\sqrt{\frac{m+1}{m+2}},$$

para $k = 0, \ldots, m$. Analogamente ao caso anterior, teremos

$$a_{2k} = \frac{(m-k+1)(2m^2 - mk + 7m - k^2 - k + 6)}{3(m+1)(m+2)}$$

e

$$a_{2k+1} = -\frac{(2m^3 + 9m^2 + 13m - 2k^3 - 3k^2 - k + 6)}{6(m+1)(m+2)}, \quad k = 0, \cdots, m.$$

Portanto, obteremos o polinômio cosseno não-negativo (1.20). De modo análogo, usando as relações (2.11), teremos o polinômio seno não-negativo (1.7).

### 3.1.3 O Mínimo e o Máximo de $b_{n-1}$ para $n = 2m+1$ e os Polinômios Extremos associados

Usando as relações (2.15), (2.17) e (2.18), obtemos

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= \sum_{k=0}^{m} \frac{d_{2k}d_{2m-1}}{2^k q_1 q_2 \cdots q_k \sqrt{q_{k+1}}\sqrt{q_m}} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{d_{2k+1}d_{2m}}{2^k q_1 q_2 \cdots q_k \sqrt{q_{k+1}}\sqrt{q_{m+1}}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{m+1}} \sum_{k=0}^{m} \frac{2d_{2k}d_{2m-1}}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} + \sqrt{\frac{m+1}{m+2}} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2d_{2k+1}d_{2m}}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}. \end{aligned}$$

Tomando

$$\beta := \sqrt{\frac{m}{m+1}}, \tag{3.5}$$

obtemos a matriz simétrica

$$D_{n-1}^{(o)} = \begin{pmatrix} 0 & \beta A_m + \alpha A_{m-1} & 0 & \cdots & \alpha A_0 & 0 \\ \beta A_m + \alpha A_{m-1} & 0 & \beta A_{m-1} & \cdots & 0 & \beta A_0 \\ 0 & \beta A_{m-1} & & & & \\ \alpha A_{m-2} & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & \beta A_1 & & & & \\ \alpha A_0 & 0 & & & & \\ 0 & \beta A_0 & & & & \end{pmatrix}$$

associada à forma quadrática $b_{n-1}$. Assim, o polinômio característico de $D_{n-1}^{(o)}$ é

$$det(D_{n-1}^{(o)} - \lambda I) = (-\lambda)^{2m-3} \left\{ \lambda^4 - \frac{2m^2+2m+2}{(m+1)(m+2)}\lambda^2 + \frac{m(m-1)}{(m+1)(m+2)} \right\}.$$

Desde que os zeros deste polinômio são $\pm 1$, então, pelo Teorema 16, teremos

$$|b_{n-1}| \leq 1.$$

Assim, para determinar o polinômio extremo associado a $b_{n-1,max}$, precisamos encontrar um autovetor $\mathbf{d}_{n-1,max}^{(o)}$ de $D_{n-1}^{(o)}$ associado ao autovalor $\lambda = 1$, tal que $d_0^2 + \cdots + d_{2m}^2 = 1$.

Resolvendo o sistema linear homogêneo

$$\begin{pmatrix} -1 & (\beta A_m + \alpha A_{m-1}) & 0 & \alpha A_{m-2} & \cdots & \alpha A_0 & 0 \\ (\beta A_m + \alpha A_{m-1}) & -1 & \beta A_{m-1} & 0 & \cdots & 0 & \beta A_0 \\ 0 & \beta A_{m-1} & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha A_{m-2} & 0 & 0 & -1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_0\alpha & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & \beta A_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{2m} \\ d_{2m-1} \\ d_{2m-2} \\ d_{2m-3} \\ \vdots \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} = 0$$

para as coordenadas de $\mathbf{d}^{(o)}_{n-1,max}$, obtemos $d_{2k} = A_k/2, \quad k = 0, \cdots, m-1, \quad d_{2k+1} = d_{2k}, \quad k = 0, \cdots, m-2, \quad d_{2m} = ((m+2)/(4m+4))^{1/2}$ e $d_{2m-1} = ((m+1)/4m)^{1/2}$.

Logo, os autovetores são $\pm\mathbf{d}^{(o)}_{n-1,max}$, onde

$$\mathbf{d}^{(o)}_{n-1,max} = \frac{1}{2}\left(A_0, A_0, \ldots, A_{m-2}, A_{m-2}, A_{m-1}, \sqrt{\frac{m+1}{m}}, \sqrt{\frac{m+2}{m+1}}\right)^T.$$

Pelas relações (2.17) e (2.18), teremos

$$\begin{aligned} c_{2k} &= (k+1)\sum_{\nu=0}^{m-k}\sqrt{\frac{2}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)}}d_{2k+2\nu} \\ &= (k+1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2(m+1)} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{\nu=0}^{m-k-1}\frac{1}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{k+1}{m+1} + \frac{m-k}{m+1}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad k = 0, \ldots, 2m. \end{aligned}$$

Além disso, vemos facilmente que $c_{2k+1} = \sqrt{2}/2, \quad k = 0, \cdots, m-1$.

Então, as expressões em (2.10) implicam em

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \sum_{j=0}^{m-k}(c_{2j}c_{2j+2k}) + \sum_{j=0}^{m-k-1}(c_{2j+1}c_{2j+2k+1}) \\ &= m - k + 1/2, \quad k = 0, \ldots, m \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \sum_{j=0}^{m-k-1}(c_{2j}c_{2j+2k+1} + c_{2j+1}c_{2j+2k+2}) \\ &= m - k, \quad k = 0, \ldots, m-1. \end{aligned}$$

Portanto, obtivemos o polinômio cosseno não-negativo (1.22) e, por (2.11), o polinômio seno não-negativo (1.11).

O polinômio seno extremo associado a $b_{n-1,min}$ é obtido através dos autovetores de $D_{n-1}^{(o)}$ associados ao menor autovalor $\lambda = -1$ satisfazendo (3.3).

Resolvendo o sistema linear homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & (\beta A_m + \alpha A_{m-1}) & 0 & \alpha A_{m-2} & \cdots & \alpha A_0 & 0 \\ (\beta A_m + \alpha A_{m-1}) & 1 & \beta A_{m-1} & 0 & \cdots & 0 & \beta A_0 \\ 0 & \beta A_{m-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha A_{m-2} & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_0 \alpha & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \beta A_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{2m} \\ d_{2m-1} \\ d_{2m-2} \\ d_{2m-3} \\ \vdots \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} = 0$$

para as coordenadas de $\mathbf{d}_{n-1,min}^{(o)}$, obtemos $d_k = -A_k/2, \quad k = 0, \cdots, 2m-2, \quad d_{2m-1} = ((m+1)/4m)^{1/2}$ e $d_{2m} = ((m+2)/(4m+4))^{1/2}$.

Portanto, os autovetores são $\pm\mathbf{d}_{n-1,min}^{(o)}$, onde

$$\mathbf{d}_{n-1,min}^{(o)} = \frac{1}{2}\left(A_0, -A_0, \ldots, A_{m-2}, -A_{m-2}, A_{m-1}, -\sqrt{\frac{m+1}{m}}, \sqrt{\frac{m+2}{m+1}}\right)^T.$$

Desta forma, pelas relações (2.17) e (2.18), teremos $c_{2k} = \sqrt{2}/2, \quad k = 0, \ldots, m$ e $c_{2k+1} = -\sqrt{2}/2, \quad k = 0, \ldots, m-1$. Consequentemente, a expressão (2.10) implicará em $a_{2k} = m - k + 1/2, \quad k = 0, \ldots, m$ e $a_{2k+1} = -(m-k), \quad k = 0, \ldots, m-1$.

Portanto, obtivemos o polinômio cosseno não-negativo (1.23). Além disso, por (2.11), obteremos o polinômio seno não-negativo (1.12).

### 3.1.4 O Mínimo e o Máximo de $b_{n-1}$ para $n = 2m+2$ e os Polinômios Extremos associados

Usando as relações (2.15), (2.17) e (2.19), sabemos que

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= \sum_{k=0}^{m}\left(\frac{d_{2k}d_{2m}}{2^k q_1 q_2 \cdots q_k\sqrt{q_{k+1}}\sqrt{q_{m+1}}} + \frac{d_{2k+1}d_{2m+1}}{2^k q_1 q_2 \cdots q_k\sqrt{q_{k+1}}\sqrt{q_{m+1}}}\right) \\ &= \sqrt{\frac{m+1}{m+2}}\sum_{k=0}^{m}\frac{2(d_{2k}d_{2m} + d_{2k+1}d_{2m+1})}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}. \end{aligned}$$

Então, a matriz simétrica $D_{n-1}^{(e)}$ associada com a forma quadrática que representa $b_{n-1}$ é

$$D_{n-1}^{(e)} = \begin{pmatrix} 2\alpha A_m & 0 & \alpha A_{m-1} & 0 & \cdots & \alpha A_0 & 0 \\ 0 & 2\alpha A_m & 0 & \alpha A_{m-1} & \cdots & 0 & \alpha A_0 \\ \alpha A_{m-1} & 0 & & & & & \\ 0 & \alpha A_{m-1} & & & & & \\ \vdots & \vdots & & & & & \\ \alpha A_0 & 0 & & & & & \\ 0 & \alpha A_0 & & & & & \end{pmatrix}.$$

Logo, o polinômio característico de $D_{n-1}^{(e)}$ é obtido pelo seguinte determinante

$$det(D_{n-1}^{(e)} - \lambda I) = \lambda^{2m-2}\left(\lambda^2 - \frac{2}{m+2}\lambda - \frac{m}{m+2}\right)^2.$$

Além disso, o menor e o maior zeros deste polinômio são $-m/(m+2)$ e 1, respectivamente. Assim, pelo Teorema 16, temos

$$-\frac{m}{m+2} \leq b_{n-1} \leq 1.$$

Para determinar o polinômio extremo associado a $b_{n-1,max}$, primeiro precisamos encontrar um autovetor $\mathbf{d}_{n-1,max}^{(e)}$ de $D_{n-1}^{(e)}$, associado ao autovalor $\lambda = 1$, tal que

$$d_0^2 + \cdots + d_{2m+1}^2 = 1.$$

Como no caso anterior, resolvendo o sistema linear homogêneo

$$\begin{pmatrix} (\alpha A_m - 1) & 0 & \alpha A_{m-1} & 0 & \cdots & \alpha A_0 & 0 \\ 0 & (\alpha A_m - 1) & 0 & \alpha A_{m-1} & \cdots & 0 & \alpha A_0 \\ \alpha A_{m-1} & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha A_{m-1} & 0 & -1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha A_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & \alpha A_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{2m+1} \\ d_{2m} \\ d_{2m-1} \\ d_{2m-2} \\ \vdots \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} = 0$$

para as coordenadas do autovetor $\mathbf{d}_{n-1,max}^{(e)}$, obtemos $d_{2m} = P$, $d_{2m+1} = Q$, $d_{2k} = \alpha P A_k$ e $d_{2k+1} = \alpha Q A_k$, $k = 0, \ldots, m-1$, onde os parâmetros $P$ e $Q$ satisfazem à relação

$$P^2 + Q^2 = \frac{m+2}{2m+2}.$$



cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

Agora, pelas relações (2.17) e (2.19), teremos os coeficientes

$$\begin{aligned} c_{2k} &= (k+1)\sum_{\nu=0}^{m-k}\sqrt{\frac{2}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)}}d_{2k+2\nu} \\ &= (k+1)\left(\sqrt{\frac{2}{(m+1)(m+2)}}P+\alpha P\sum_{\nu=0}^{m-k-1}\sqrt{\frac{2}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)}}A_{k+\nu}\right) \\ &= \sqrt{2}(k+1)\alpha P\left(\frac{1}{m+1}+\sum_{\nu=0}^{m-k-1}\frac{1}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)}\right) \\ &= \sqrt{2}\alpha P \end{aligned}$$

e, de modo análogo, $c_{2k+1}=\sqrt{2}\alpha Q,\ \ k=0,\ldots,m.$

Podemos achar os coeficientes do polinômio cosseno extremo usando as relações em (2.10).

Logo,

$$\begin{aligned} a_{2k} &= \sum_{j=0}^{m-k}((c_{2j}c_{2k+2j})+(c_{2j+1}c_{2j+2k+1})) \\ &= \sum_{j=0}^{m-k}\left((P\alpha\sqrt{2})^2+(Q\alpha\sqrt{2})^2\right) \\ &= (P^2+Q^2)\frac{(m-k+1)(2m+2)}{m+2} \\ &= m-k+1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \sum_{j=0}^{m-k}(c_{2j}c_{2j+2k+1})+\sum_{j=0}^{m-k-1}(c_{2j+1}c_{2j+2k+2}) \\ &= \sum_{j=0}^{m-k}2PQ\alpha^2+\sum_{j=0}^{m-k-1}2PQ\alpha^2 \\ &= \frac{2(m+1)(m-k+1)}{m+2}PQ+\frac{2(m+1)(m-k)}{m+2}PQ \\ &= \frac{2(m+1)(2m-2k+1)}{m+2}PQ, \qquad k=0,\ldots,m. \end{aligned}$$

Usando

$$P=\sqrt{\frac{m+2}{2m+2}}p \quad \text{e} \quad Q=\sqrt{\frac{m+2}{2m+2}}q,$$

obteremos o polinômio cosseno não-negativo (1.25) e pelas relações (2.11), teremos o polinômio seno não-negativo (1.8).



unesp

Para determinar o polinômio extremo associado a $\mathbf{b}_{n-1,min}$, primeiramente precisamos encontrar um autovetor $\mathbf{d}^{(e)}_{n-1,min}$ de $D^{(e)}_{n-1}$, associado ao menor autovalor $\lambda = -m/(m+2)$, tal que $d_0^2 + d_1^2 + \cdots + d_{2m+1}^2 = 1$.

Resolvendo o sistema linear homogêneo

$$\begin{pmatrix} (\alpha A_m - \lambda) & 0 & \alpha A_{m-1} & 0 & \cdots & \alpha A_0 & 0 \\ 0 & (\alpha A_m - \lambda) & 0 & \alpha A_{m-1} & \cdots & 0 & \alpha A_0 \\ \alpha A_{m-1} & 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha A_{m-1} & 0 & -\lambda & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha A_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 0 \\ 0 & \alpha A_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{2m+1} \\ d_{2m} \\ d_{2m-1} \\ d_{2m-2} \\ \vdots \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} = 0$$

para as coordenadas de $\mathbf{d}^{(e)}_{n-1,min}$, como no caso anterior obtemos $d_{2m} = P$, $d_{2m+1} = Q$,

$$d_{2k} = -\alpha P A_k \frac{m+2}{m}$$

e

$$d_{2k+1} = -\alpha Q A_k \frac{m+2}{m}, \quad k = 0, \ldots, m-1,$$

onde, neste caso, os parâmetros $P$ e $Q$ satisfazem à relação

$$P^2 + Q^2 = \frac{m}{(2m+2)}.$$

Assim, pelas relações (2.17) e (2.19), teremos

$$\begin{aligned} c_{2k} &= (k+1) \sum_{\nu=0}^{m-k} \sqrt{\frac{2}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)}} d_{2k+2\nu} \\ &= (k+1) \left( \sqrt{\frac{2}{(m+1)(m+2)}} P - \alpha P \frac{m+2}{m} \sum_{\nu=0}^{m-k-1} \sqrt{\frac{2}{(m+1)(m+2)}} A_{k+\nu} \right) \\ &= \sqrt{2}(k+1)\alpha P \left( \frac{1}{m+1} - \frac{m+2}{m} \sum_{\nu=0}^{m-k-1} \frac{1}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)} \right) \\ &= \sqrt{2}\alpha P \frac{2k-m}{m} \end{aligned}$$

e, de modo análogo, $c_{2k+1} = \sqrt{2}\alpha Q(2k-m)/m$, $k = 0, \ldots, m$.

Além disso, por (2.10), obtemos

$$
\begin{aligned}
a_{2k} &= \sum_{j=0}^{m-k} (c_{2j}c_{2k+2j} + c_{2j+1}c_{2j+2k+1}) \\
&= \frac{2\alpha^2}{m^2} \sum_{j=0}^{m-k} \Big( P^2(2j-m)(2j+2k-m) + Q^2(2j-m)(2j+2k-m) \Big) \\
&= \frac{\alpha^2}{m^2} \left( \frac{m+2}{m+1} \right) \sum_{j=0}^{m-k} (2j-m)(2j+2k-m) \\
&= \frac{(m-k+1)(m^2-2km+2m-2k^2-2k)}{3m(m+2)}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
a_{2k+1} &= \sum_{j=0}^{m-k} (c_{2j}c_{2j+2k_1}) + \sum_{j=0}^{m-k-1} c_{2j+1}c_{2j+2k+2} \\
&= \frac{2\alpha^2 PQ}{m^2} \left( \sum_{j=0}^{m-k} (2j-m)(2j+2k-m) + \sum_{j=0}^{m-k-1} (2j-m)(2j+2k+2-m) \right) \\
&= \frac{2(m+1)(4k^3+6k^2+2k-2m-12km+3m^3-6km^2+2m^3)}{3m^2(m+2)} PQ,
\end{aligned}
$$

para $k = 0, \ldots, m$.

Usando

$$
P = \sqrt{\frac{m}{2m+2}}p \quad \text{e} \quad Q = \sqrt{\frac{m}{2m+2}}q,
$$

teremos o polinômio cosseno não-negativo (1.26). Ainda, pela relação (2.11), obtemos o polinômio seno não-negativo (1.9).

## 3.2 Problemas Extremos para o Coeficiente $b_{n-2}$

### 3.2.1 O Mínimo e o Máximo de $b_{n-2}$ para $n = 2m+1$ e os Polinômios Extremos associados

*Demonstração do Teorema* 5:

Neste caso, as relações (2.15), (2.17) e (2.18) implicam em

$$\begin{aligned} b_{n-2} &= \sum_{k=0}^{m}\left(\frac{d_{2k}d_{2m-2}}{2^k q_1q_2\cdots q_k\sqrt{q_{k+1}}\sqrt{q_m}}+\frac{d_{2k}d_{2m}}{2^{k+1}q_1q_2\cdots q_kq_m\sqrt{q_{k+1}}\sqrt{q_{m+1}}}\right)\\ &\quad+\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{2^k}d_{2k}d_{2m}}{2^k q_1q_2\cdots q_kq_m\sqrt{q_{k+1}}\sqrt{q_{m+1}}}+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{d_{2k+1}d_{2m-1}}{2^k q_1q_2\cdots q_k\sqrt{q_{k+1}}\sqrt{q_m}}\\ &= \sum_{k=0}^{m}\frac{2}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}\left(\beta d_{2k}d_{2m-2}+\gamma d_{2k}d_{2m}+(-1)^{2^k}\alpha d_{2k}d_{2m}\right)\\ &\quad+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{2\beta d_{2k+1}d_{2m-1}}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}, \end{aligned}$$

onde $\alpha$ e $\beta$ são definidos, respectivamente, por (3.1) e (3.5) e

$$\gamma := \frac{m}{\sqrt{(m+1)(m+2)}}. \tag{3.6}$$

Logo, a matriz simétrica $D_{n-2}^{(o)}$ associada à forma quadrática a que representa $b_{n-2}$ é dada por

$$\begin{pmatrix} 2(\alpha+\gamma)\alpha A_m & 0 & (\alpha+\gamma)A_{m-1}+\alpha A_m & \cdots & (\gamma-\alpha)A_0\\ 0 & 2\beta A_{m-1} & 0 & \cdots & 0\\ (\alpha+\gamma)A_{m-1}+\alpha A_m & 0 & 2\beta A_{m-1} & \cdots & \beta A_0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ (\alpha+\gamma)A_1 & 0 & \beta A_1 & & \\ 0 & \beta A_0 & 0 & & \\ (\gamma-\alpha)A_0 & 0 & \beta A_0 & & \end{pmatrix}.$$

Então, o polinômio característico de $D_{n-2}^{(o)}$ será dado pelo seguinte determinante

$$det(D_{n-2}^{(o)}-\lambda I) = -\lambda^{2m-5}(\lambda-1)\left(\lambda^2-\lambda-1\right)\left(\lambda+\frac{m-1}{m+2}\right)\left(\lambda^2+\frac{m-4}{m+2}\lambda-\frac{m-2}{m+2}\right).$$

Observemos que o menor e o maior zeros deste polinômio são, respectivamente,

$$\frac{-m+4-\sqrt{m(5m-8)}}{2(m+2)} \quad \text{e} \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Para determinarmos o polinômio extremo associado a $b_{n-2,max}$, precisamos encontrar um autovetor $\mathbf{d}_{n-2,max}^{(o)}$ de $D_{n-2}^{(o)}$ associado ao autovalor $\lambda = (1+\sqrt{5})/2$, tal que

$$d_0^2+\cdots+d_{2m}^2 = 1. \tag{3.7}$$

Resolvendo o sistema linear homogêneo

$$\begin{pmatrix} 2(\alpha+\gamma)A_m-\lambda & 0 & (\alpha+\gamma)A_{m-1}+\beta A_m & \cdots & 0 & (\gamma-\alpha)A_0 \\ 0 & 2\beta A_{m-1}-\lambda & 0 & \cdots & \beta A_0 & 0 \\ (\alpha+\gamma)A_{m-1}+\beta A_m & 0 & 2\beta A_{m-1}-\lambda & \cdots & 0 & \beta A_0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \beta A_0 & 0 & \cdots & -\lambda & 0 \\ (\gamma-\alpha)A_0 & 0 & \beta A_0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{2m} \\ d_{2m-1} \\ d_{2m-2} \\ \vdots \\ d_1 \\ d_0 \end{pmatrix} = 0$$

para as coordenadas de $\mathbf{d}^{(o)}_{n-2,max}$, obtemos $d_{2k+1}=0,\ \ k=0,\cdots,m-1$,

$$\begin{aligned} d_0 &= \frac{\kappa}{\sqrt{2}\lambda(1+\sqrt{5})}, \\ d_{2k} &= \frac{1+\sqrt{5}}{4}A_k\kappa, \qquad k=1,\cdots,m-2, \\ d_{2m-2} &= \frac{2m+3+\sqrt{5}}{2\sqrt{m(m+1)}(1+\sqrt{5})}\kappa \end{aligned}$$

e

$$d_{2m}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m+2}{m+1}}\kappa,$$

onde

$$\kappa := \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{5+2\sqrt{5}}}.$$

Assim, encontramos os autovetores $\pm\mathbf{d}^{(o)}_{n-2,max}$, onde

$$\mathbf{d}^{(o)}_{n-2,max}=\frac{\kappa}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\lambda(1+\sqrt{5})},0,\cdots,0,\frac{2m+3+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})\sqrt{m(m+1)}},0,\sqrt{\frac{m+2}{m+1}}\right)^T.$$

Através das relações (2.17) e (2.18), teremos

$$\begin{aligned} c_{2k} &= (k+1)\sum_{\nu=0}^{m-k}\sqrt{\frac{2}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)}}d_{2k+2\nu} \\ &= (k+1)\kappa\left(\frac{\sqrt{2}}{2(m+1)}+\frac{\sqrt{2}(2m+3+\sqrt{5})}{2m(m+1)(1+\sqrt{5})}+\frac{1+\sqrt{5}}{4}\sum_{\nu=0}^{m-k-2}\sqrt{2}A^2_{k+\nu}\right) \\ &= (k+1)\kappa\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{m+1}+\frac{2m+3+\sqrt{5}}{m(m+1)(1+\sqrt{5}}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{m-k-1}{m(k+1)}\right)\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{5})\kappa}{4}, \qquad k=1,\cdots,m-1 \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \sum_{\nu=0}^{m} \sqrt{\frac{2}{(\nu+1)(\nu+2)}}\, d_{2\nu} \\
&= d_0 + \sum_{\nu=1}^{m-2} \sqrt{\frac{2}{(\nu+1)(\nu+2)}}\, d_{2\nu} + \sqrt{\frac{2}{m(m+1)}}\, d_{2m-2} + \sqrt{\frac{2}{(m+1)(m+2)}}\, d_{2m} \\
&= \frac{\kappa}{\sqrt{2}\lambda(1+\sqrt{5})} + \frac{\sqrt{2}}{2(m+1)} + \frac{\sqrt{2}(2m+3+\sqrt{5})}{2m(m+1)(1+\sqrt{5})}\kappa + \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{5})}{4}\kappa \sum_{\nu=1}^{m-2} A_\nu^2 \\
&= \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \left( \frac{2+3\lambda+\sqrt{5}\lambda}{2(\lambda+\sqrt{5}\lambda)} \right) \\
&= \kappa/\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

De modo análogo, temos que $c_{2m} = c_0$. Portanto, usando as relações em (2.10), obtemos

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \kappa^2 + \sum_{j=1}^{m-1} \left( \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{5})\kappa}{4} \right)^2 \\
&= \kappa^2 + \left( \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{5}\kappa)}{4} \right)^2 (m-1) \\
&= \kappa^2 + \kappa^2 (m-1) \left( \frac{3+\sqrt{5}}{4} \right), \\
a_{2k} &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\kappa^2 + \sum_{j=1}^{m-k-1} \left( \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{5})\kappa}{4} \right)^2 \\
&= \kappa^2 \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + (m-k-1) \left( \frac{3+\sqrt{5}}{4} \right) \right), \qquad k = 1, \cdots, m-1, \\
a_{2m} &= c_0 c_{2m} = \frac{\kappa^2}{2}
\end{aligned}
$$

e ainda $a_{2k+1} = 0, \ \ k = 0, \cdots, m-1$.

Com esses resultados, podemos escrever o polinômio cosseno não-negativo (1.27). Além disso, usando (2.11), obtemos o polinômio seno não-negativo (1.13).

Para determinar o polinômio seno extremo associado a $b^{(o)}_{n-2,min}$, precisamos achar o autovetor $\mathbf{d}^{(o)}_{n-2,min}$ de $D^{(o)}_{n-2}$, associado ao menor autovalor $\lambda = (-m+4-(m(5m-8))^{1/2})/(2m+4)$. Para isso, temos que resolver o sistema linear homogêneo, como no caso anterior, para o menor autovalor.

Tomemos

$$
\sigma := \beta \sqrt{1 + \frac{m-4}{\sqrt{m(5m-8)}}}.
$$

Pelas coordenadas de $\mathbf{d}^{(o)}_{n-2,min}$, obtemos $d_{2k+1} = 0, \quad k = 0, \cdots, m-1,$

$$\begin{aligned} d_0 &= -\frac{3m - \sqrt{m(5m-8)}}{4m\sqrt{2}}\alpha\sigma, \\ d_{2k} &= \frac{(m+2)}{m - \sqrt{m(5m-8)}}\alpha\sigma A_k, \qquad k = 1, \cdots, m-2, \\ d_{2m-2} &= \frac{m(1-m) + (1+m)\sqrt{m(5m-8)}}{4m\sqrt{m(m+2)}}\sigma \end{aligned}$$

e

$$d_{2m} = \frac{\sigma}{2}.$$

Pelas relações (2.17) e (2.18), obtemos $c_{2k+1} = 0, \ \ k = 0, \cdots, m-1,$

$$\begin{aligned} c_{2k} &= (k+1)\sum_{\nu=0}^{m-k}\sqrt{\frac{2}{(k+\nu+1)(k+\nu+2)}}d_{2k+2\nu} \\ &= \frac{\sqrt{2}(m-2k)(m+\sqrt{m(5m-8)})}{4m(2-m)}\alpha\sigma, \qquad k = 1, \cdots, m-1, \\ c_0 &= \sum_{\nu=0}^{m}\sqrt{\frac{2}{(\nu+1)(\nu+2)}}d_{2\nu} \\ &= -\frac{\alpha\sigma}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

e, de modo análogo, $c_{2m} = -c_0$. Então, as relações em (2.10) implicam em

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{m(2m-5+\sqrt{m(5m-8)})}{3\sqrt{m(5m-8)}}, \\ a_{2k} &= \frac{10k + 2k^3 - 4m - 3km^2 + m^3}{3(m^2-4)} \\ &\quad + \frac{4k^3(m-1) + m(m^2-4)(2m+1) + k(4+20m-6m^3)}{3(m^2-4)\sqrt{m(5m-8)}} \end{aligned}$$

e

$$a_{2m} = -\frac{\alpha^2\sigma^2}{2}.$$

Portanto, chegamos ao polinômio cosseno não-negativo (1.28) e, através das relações em (2.11), no polinômio seno não-negativo (1.14).

### 3.2.2 O valor Extremo de $b_{n-2}$ para $n = 2m + 2$

*Demonstração do Lema* 1:

Uma análise simples, mostra que dois pontos positivos fornecem os valores extremos de $r_m(y)$. O valor de $r_m(y)$ é negativo para o menor desses pontos e positivo para o outro. Desde que $r_m(0) > 0$ e $r_m(y)$ é negativo para $y$ suficientemente grande, então $r_m(y)$ tem três zeros positivos. Por outro lado, $y(\infty) = (3 + \sqrt{5})/2$ é estritamente maior que o ponto de máximo local de $r_m$ e $r_m(y(\infty)) < 0$. Isto implica na desigualdade $y(m) < y(\infty)$. Logo, é claro que $r_m(y)$ converge uniformemente sobre conjuntos compactos do plano complexo para o polinômio $-y^3 + 4y^2 - 4y + 1$. Então, pelo teorema de Hurwitz (veja Teorema 3.45 em [32]) a sequência dos maiores zeros $y(m)$ de $r_m(y)$ converge para o maior zero $(3 + \sqrt{5})/2$ de $-y^3 + 4y^2 - 4y + 1$, quando $m$ converge para infinito.

*Demonstração do Teorema* 6:

Usando as relações (2.15), (2.17) e (2.19), temos que

$$\begin{aligned} b_{n-2} &= \sum_{k=0}^{m} \left( \frac{d_{2k} d_{2m-1}}{2^k q_1 q_2 \cdots q_k \sqrt{q_{k+1}} \sqrt{q_m}} + \frac{d_{2k} d_{2m+1}}{2^{k+1} q_1 q_2 \cdots q_k q_m \sqrt{q_{k+1}} \sqrt{q_{m+1}}} \right) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{m} \left( \frac{(-1)^{2^k} d_{2k} d_{2m+1}}{2^k q_1 q_2 \cdots q_k \sqrt{q_{k+1}} \sqrt{q_{m+1}}} + \frac{d_{2k+1} d_{2m}}{2^k q_1 q_2 \cdots q_k \sqrt{q_{k+1}} \sqrt{q_{m+1}}} \right) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{m} \frac{\beta d_{2k} d_{2m-1} + (\gamma + (-1)^{2^k} \alpha) d_{2k} d_{2m+1} + \alpha d_{2k+1} d_{2m}}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}, \end{aligned}$$

onde $\alpha, \beta$ e $\gamma$ são definidos por (3.1), (3.5) e (3.6), respectivamente. Assim, a matriz simétrica $D_{n-2}^{(e)}$ associada à forma quadrática, que representa $b_{n-2}$ é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & e_1 & 0 & (\alpha+\gamma)A_{m-1} & \cdots & (\gamma-\alpha)A_0 \\ e_1 & 0 & e_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e_2 & 0 & \beta A_{m-1} & \cdots & \beta A_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ (\alpha+\gamma)A_1 & 0 & \beta A_1 & & & \\ 0 & \alpha A_0 & 0 & & & \\ (\gamma-\alpha)A_0 & 0 & \beta A_0 & & & \end{pmatrix},$$

onde $e_1 = (2\alpha + \gamma)A_m$ e $e_2 = \alpha A_{m-1} + \beta A_m$. O polinômio característico associado é dado por

$$det(D_{n-2}^{(e)} - \lambda I) = -\lambda^{2m-4} r_m(\lambda^2),$$

onde

$$r_m(\lambda^2) = -\lambda^6 + \frac{4(m^2+m+2)}{(m+2)^2}\lambda^4 - \frac{4(m^2-m+1)}{(m+2)^2}\lambda^2 + \frac{(m-1)^2}{(m+2)^2}.$$

Portanto, fazendo $\lambda^2 = y$, teremos o polinômio cúbico $r_m(y)$ que possue três zeros positivos, quando $m \geq 2$. Além disso, o maior zero $y(m)$ de $r_m(y)$ não excede $y(\infty) = (3+\sqrt{5})/2$ e $y(m)$ converge para $y(\infty)$ quando $m$ converge para infinito, conforme vimos na demonstração do Lema 1.

# Capítulo 4

# Convergência de Polinômios Trigonométricos para Funções Periódicas

Neste capítulo, vamos verificar a convergência de polinômios trigonométricos para funções periódicas nas normas uniforme, $\|.\|_{L_1}$ e $\|.\|_{L_p}$. Assim, precisaremos de algumas definições para verificar os principais resultados.

## 4.1 Núcleo Positivo

**Definição 5** *Um polinômio cosseno $K_n(\theta)$ de ordem $n$ é chamado núcleo positivo se satisfaz às exigências:*

*1)* $K_n(\theta) \geq 0, \quad \text{para} \quad 0 \leq \theta \leq \pi;$

*2)* $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta) d\theta = 1.$

## 4.2 Núcleo Positivo Somável

**Definição 6** *Uma seqüência de núcleos positivos $\{K_n(\theta)\}_{n=0}^{\infty}$ é chamada somável se, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $K_n(\theta)$ satisfaz 1) e 2) e, além disso a seguinte exigência adicional é*

*satisfeita:*

*3) Para qualquer $\delta > 0$, $K_n(\theta)$ converge uniformemente para zero em $[\delta, 2\pi - \delta]$ quando $n$ tende para infinito.*

A rigor, isto significa que para quaisquer $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ existe um $N \in \mathbb{N}$ que depende de $\delta$ e $\varepsilon$, ou seja, $N = N(\delta, \varepsilon)$, tal que, para qualquer $n > N$, temos $|K_n(\theta)| < \varepsilon$ para qualquer $\theta \in [\delta, 2\pi - \delta]$.

## 4.3 Convolução $K_n(f; x)$

**Definição 7** *Para qualquer função $f(x)$ de período $2\pi$ pertencente ao espaço das funções integráveis em $[-\pi, \pi]$ definimos o polinômio trigonométrico*

$$K_n(f; x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(\theta) f(x - \theta) d\theta$$

*como sendo a convolução de $f(x)$ com o núcleo somável $K_n(\theta)$.*

Por exemplo, consideremos $K_n(\theta)$ como o polinômio cosseno

$$K_n(\theta) = \alpha_0 + 2 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos k\theta.$$

Assim,

$$\begin{aligned} K_n(f; x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \alpha_0 + 2 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos k\theta \right) f(x - \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \alpha_0 f(x - \theta) d\theta + 2 \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos k\theta f(x - \theta) d\theta \right). \end{aligned}$$

Fazendo $x - \theta = u$,

$$\begin{aligned} K_n(f; x) &= \frac{1}{2\pi} \left( - \int_{\pi}^{-\pi} \alpha_0 f(u) du - 2 \int_{\pi}^{-\pi} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos(k(x - u)) f(u) du \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \alpha_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du + 2 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k(x - u)) f(u) du \right) \end{aligned}$$

e, usando a identidade trigonométrica $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$, teremos

$$\begin{aligned} K_n(f; x) &= \frac{1}{2\pi} \left( \alpha_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du + 2 \sum_{k=1}^{n} \left[ \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} (\cos kx \cos ku + \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} ku) f(u) du \right] \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \alpha_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du + 2 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left( \cos kx \int_{-\pi}^{\pi} \cos ku f(u) du + \operatorname{sen} kx \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} ku f(u) du \right) \right). \end{aligned}$$

Desde que os coeficientes de Fourier são dados por

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)du, \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kuf(u)du, \qquad k = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

e

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kuf(u)du, \qquad k = 1, 2, \cdots,$$

obtemos

$$K_n(f;x) = \frac{\alpha_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)). \tag{4.1}$$

Por exemplo, quando $K_n(\theta)$ coincide com o núcleo de Féjer (1.1), temos

$$K_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(1 - \frac{k}{n+1})(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx).$$

Essas são exatamente as somas de Cesàro das séries de Fourier.

## 4.4 Convergência na Norma Uniforme

**Teorema 17** *Se $f(x)$ pertence ao espaço das funções contínuas de período $2\pi$ e $\{K_n(\theta)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de núcleos positivos somáveis, então $K_n(f;x)$ converge uniformemente para $f(x)$ em $[0, 2\pi]$.*

*Demonstração*: Seja $S_n(f;x)$ a soma parcial da série de Fourier

$$S_n(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx).$$

Sabe-se que a série de Fourier de uma função constante $c$ é ela mesma, ou seja, $S_n(c;x) \equiv c$. Se $c \equiv 1$ então $S_n(1;x) \equiv 1$ o que implica que $K_n(1;x) \equiv 1$ se, e somente se,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1$$

e

$$K_n(t) \geq 0.$$

Escrevendo

$$\begin{aligned} K_n(f;x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)f(x-t)dt - f(x)\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt\right\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)(f(x-t)-f(x))dt \end{aligned}$$

e aplicando o módulo, tem-se

$$\begin{aligned} |K_n(f;x) - f(x)| &= \frac{1}{2\pi}|\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)(f(x-t)-f(x))dt| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)-f(x)|K_n(t)dt, \end{aligned}$$

uma vez que $K_n(t) \geq 0$.

O objetivo é mostrar que $K_n(f;x)$ converge uniformemente para $f(x)$. Como $f(x)$ é contínua em $[0, 2\pi]$, que é um conjunto compacto, então $f(x)$ é uniformemente contínua, ou seja, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, para todo $t$ com $|t| < \delta$,

$$|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon, \qquad x,\ x-t \in [0, 2\pi].$$

Logo,

$$|K_n(f;x) - f(x)| \leq I_1 + I_2 + I_3,$$

onde

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta} |f(x-t)-f(x)|K_n(t)dt,$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t)-f(x)|K_n(t)dt$$

e

$$I_3 = \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} |f(x-t)-f(x)|K_n(t)dt.$$

Primeiramente, mostraremos que a integral $I_2$ é limitada por $\varepsilon$. De fato,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t)-f(x)|K_n(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{0} |f(x-t)-f(x)|K_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\delta} |f(x-t)-f(x)|K_n(t)dt \\ &\leq \varepsilon\left\{\int_{-\delta}^{0} K_n(t)dt + \int_{0}^{\delta} K_n(t)dt\right\} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = \varepsilon. \end{aligned}$$



cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

Como $f(x)$ é contínua em um intervalo fechado $[0, 2\pi]$, conclue-se que $f$ é limitada. Assim, existe um $M > 0$ tal que

$$|f(y)| \leq M, \qquad y \in \mathbb{R},$$

uma vez que $f$ é periódica.

Logo,

$$|f(x-t) - f(x)| \leq |f(x-t)| + |f(x)| \leq 2M.$$

Mas, sabemos que $K_n(t)$ é um núcleo somável, ou seja, para qualquer $\delta > 0$ ele converge uniformemente para zero em $[\delta, 2\pi - \delta]$ quando $n$ tende para infinito. Assim, existe um $\nu$ natural tal que, para qualquer $n > \nu$, $K_n(t) < \varepsilon$ para todo $t \in [\delta, 2\pi - \delta]$.

Então,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x-t) - f(x)| K_n(t) dt \\ &\leq \frac{M}{\pi} \int_{-\pi}^{-\delta} K_n(t) dt \\ &< M\varepsilon. \end{aligned}$$

De modo análogo podemos concluir o resultado para a integral $I_3$.

Portanto,

$$|K_n(f;x) - f(x)| \leq I_1 + I_2 + I_3 < (2M+1)\varepsilon,$$

para qualquer $x \in [0, 2\pi]$, ou seja, $K_n(f;x)$ converge uniformemente para $f$. ■

## 4.5 Convergência na Norma $\|.\|_{L_1}$

**Definição 8** *O espaço $L_1[-\pi, \pi]$ é formado por todas as funções integráveis $f(x)$ com domínio em $[-\pi, \pi]$ e imagem em $\mathbb{R}$ tais que*

$$\|f(x)\|_{L_1} = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt < \infty.$$

**Teorema 18** *Para qualquer função $f(x)$ de período $2\pi$ do espaço $L_1[-\pi, \pi]$, temos que*

$$\|K_n(f;x) - f\|_{L_1}$$

*converge para zero quando $n$ tende a infinito.*

*Demonstração:* Sabemos que

$$\begin{aligned}
\|K_n(f;x) - f(x)\|_{L_1} &= \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(f;x) - f(x)|dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))K_n(t)dt \right| dx \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|K_n(t)dt \right) dx.
\end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned}
\|K_n(f;x) - f(x)\|_{L_1} &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) \left( \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|dx \right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\alpha(t)dt
\end{aligned}$$

onde

$$\alpha(t) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|dx.$$

Vemos que $\alpha(0) = 0$. Vamos demonstrar que $\alpha(t)$ é contínua no ponto $t = 0$.

O conjunto das funções contínuas é denso em $[-\pi, \pi]$ com relação a norma $L_1$.

Desta forma, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma função $g(x)$ do espaço $C[-\pi, \pi]$ tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|dx < \varepsilon.$$

Como $f$ e $g$ são funções de período $2\pi$, temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - g(x-t)|dx < \varepsilon,$$

para qualquer $t \in \mathbb{R}$.

Como a função $g(x)$ é contínua em um compacto, então é uniformemente contínua. Assim, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, para todo $t$ com $|t| < \delta$,

$$|g(x-t) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2\pi},$$

para quaisquer $x$ e $x - t$ em $[0, 2\pi]$.

Então,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(x-t) - g(x)|dx < \varepsilon.$$

Assim, para $|t| < \delta$, teremos

$$\begin{aligned} |\alpha(t)| &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - g(x-t) + g(x-t) - g(x) + g(x) - f(x)|dx \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - g(x-t)|dx + \int_{-\pi}^{\pi} |g(x-t) - g(x)|dx + \int_{-\pi}^{\pi} |g(x) - f(x)|dx \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Logo, $|\alpha(t) - \alpha(0)| < 3\varepsilon$. Mas, se usarmos $\delta = 3\varepsilon$, teremos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\alpha(t)dt$$

converge para $\alpha(0) = 0$.

Portanto, $\|K_n(f;x) - f(x)\|_{L_1}$ converge para zero quando $n$ tende para infinito. ■

## 4.6 Convergência na Norma $\|.\|_{L_p}$

**Definição 9** *O espaço $L_p[-\pi, \pi]$ é formado por todas as funções integráveis $f(x)$ com domínio em $[-\pi, \pi]$ e imagem em $\mathbb{R}$ tais que*

$$\|f(x)\|_{L_p} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt\right)^{1/p} < \infty.$$

**Teorema 19** *Para qualquer função $f(x)$ de período $2\pi$ do espaço $L_p[-\pi, \pi]$, com $1 < p < \infty$, temos que*

$$\|K_n(f;x) - f\|_{L_p}$$

*converge para zero quando $n$ tende para infinito.*

*Demonstração:* Sejam $f \in L_p[-\pi, \pi]$ e $n \in \mathbb{N}$ fixos.

Consideremos $q$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $g(x) \in L_q[-\pi, \pi]$.

Segue, da demonstração do Teorema 17, que

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)K_n(t)dt.$$

Assim, vemos que a soma $K_n(f;x)$ é a convolução de $f(t)$ com o núcleo $K_n(t)$, ou seja,

$$K_n(f;x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))K_n(t)dt.$$

Aplicando a norma $L_p$ temos

$$\|K_n(f;x) - f(x)\|_{L_p} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))K_n(t)dt\right|^p dx\right)^{1/p}.$$

Porém, como a expressão acima é muito difícil de tratar, vamos considerar a integral

$$\int_{-\pi}^{\pi}(K_n(f;x)-f(x))g(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))K_n(t)dt\right)g(x)dx.$$

Aplicando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\int_{-\pi}^{\pi}(K_n(f;x)-f(x))g(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))g(x)dx\right)K_n(t)dt.$$

Mas,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))g(x)dx &\leq \left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))g(x)dx\right| \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi}|(f(x-t)-f(x))g(x)|dx.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))g(x)dx &\leq \left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|^p dx\right)^{1/p}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^q dx\right)^{1/q} \\ &= \tilde{\alpha}(t)\|g(x)\|_{L_q},\end{aligned}$$

onde

$$\tilde{\alpha}(t) = \left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Vemos que $\tilde{\alpha}(0) = 0$ pois $f(x-t)-f(x) = 0$ para $t = 0$. Assim, como na demonstração do teorema anterior, podemos concluir que $\tilde{\alpha}(t)$ é contínua para $t = 0$, ou seja, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que para todo $t$ com $|t| < \delta$,

$$|\tilde{\alpha}(t)| < 3\varepsilon.$$

Assim, podemos mostrar que

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(K_n(f;x)-f(x))g(x)dx\right| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))g(x)dx\right|K_n(t)dt \\ &\leq \|g(x)\|_{L_q}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{\alpha}(t)K_n(t)dt \\ &\leq 3\epsilon\|g(x)\|_{L_q},\end{aligned}$$

para $n$ suficientemente grande.

Logo, exite um natural $\nu$, tal que

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}(K_n(f;x)-f(x))g(x)dx\right| \leq 3\varepsilon\|g(x)\|_{L_q},$$

para qualquer $n > \nu$.

Certamente $K_n(f;x) - f(x)$ é um funcional linear em $L_p$. Então, pelo Teorema de Riesz, existe uma função $g$ do espaço $L_q$ tal que o funcional admite uma representação através do produto interno:

$$K_n(f;x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi}(K_n(f;x)-f(x))g(x)dx.$$

Assim, demonstramos que

$$|K_n(f;x) - f(x)| \leq 3\epsilon\|g(x)\|_{L_q}.$$

Portanto, se usarmos a representação da norma de um funcional, teremos

$$\|K_n(f;x) - f(x)\|_{L_p} \leq 3\epsilon,$$

para qualquer $n > \nu$. ■

# Capítulo 5

# Aproximação de Funções através de novas Sequências de Polinômios

Neste capítulo, demonstraremos a convergência uniforme de sequências $\{K_n(\theta)\}_{n=1}^{\infty}$ de polinômios cossenos não-negativos concluindo, assim, que são de fato sequências de núcleos positivos somáveis. Através dos teoremas gerais do Capítulo 4, demonstraremos que, para qualquer função $f \in C[-\pi, \pi]$, as convoluções $K_n(f;x)$ convergem uniformemente para $f(x)$. Analogamente, $K_n(f;x)$ converge para $f(x)$ na norma $L_p[-\pi,\pi]$ quando $f \in L_p[-\pi,\pi]$.

## 5.1 Resultados Preliminares

Primeiramente, demonstraremos um lema técnico.

**Lema 6** *Para todo $n \in \mathbb{N}$, valem as seguintes somas de cossenos:*

$$\Sigma_1(\theta) := \sum_{k=1}^{n} \cos k\theta = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{\operatorname{sen}\left((2n+1)/2\right)\theta}{\operatorname{sen}\left(\theta/2\right)}\right), \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_2(\theta) := \sum_{k=1}^{n} k\cos k\theta \;\; &= \;\; \frac{1}{2\operatorname{sen}\left(\theta/2\right)}\{(n+1)\cos((n+1)/2)\theta \operatorname{sen}\left(n/2\right)\theta \\ &\quad +(n\cos(n/2)\theta - \cot(\theta/2)\operatorname{sen}\left(n/2\right)\theta)\operatorname{sen}\left((n+1)/2\right)\theta\}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\Sigma_3(\theta) := \sum_{k=1}^{n} k^2 \cos k\theta = \frac{1}{8\,\mathrm{sen}^3(\theta/2)}\{(2n^2+2n-1)\,\mathrm{sen}\,((2n+1)/2)\theta$$
$$-n^2\,\mathrm{sen}\,((2n+3)/2)\theta + (n+1)^2\,\mathrm{sen}\,((1-2n)/2)\theta\} \qquad (5.3)$$

*e*

$$\Sigma_4(\theta) := \sum_{k=1}^{n} k^3 \cos k\theta = \frac{-1}{16\,\mathrm{sen}^4(\theta/2)}\{-4-2\cos\theta+(4-6n^2-3n^3+6n^2\cos\theta)\cos n\theta$$
$$+\cos(n+1)\theta+\cos(1-n)\theta+6n\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,n\theta$$
$$+n^3(3\cos(n+1)\theta-\cos(n+2)\theta+\cos(1-n)\theta\}. \qquad (5.4)$$

*Demonstração:* A demonstração de (5.1) pode ser feita por indução em $n$ ou usando o fato que

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta = \Re e\left\{\sum_{k=1}^{n} z^k\right\} = \Re e\left\{z\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right)\right\}, \qquad z = e^{i\theta}.$$

Como, $z^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta$, teremos

$$\Re e\left\{z\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right)\right\} = \Re e\left\{\frac{(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)(1-\cos n\theta-i\,\mathrm{sen}\,n\theta)}{1-\cos\theta-i\,\mathrm{sen}\,\theta}\right\}$$

$$= \frac{\Re e\{(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)(1-\cos n\theta-i\,\mathrm{sen}\,n\theta)(1-\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta)\}}{(1-\cos\theta)^2+\mathrm{sen}^2\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta-\cos^2\theta-\cos\theta\cos n\theta+cos^2\theta\cos n\theta-\mathrm{sen}^2\theta+\cos n\theta\,\mathrm{sen}^2\theta}{(1-\cos\theta)^2+\mathrm{sen}^2\theta}$$

$$= \frac{-1+\cos\theta+\cos n\theta-\cos(n+1)\theta}{(1-\cos\theta)^2+\mathrm{sen}^2\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-1+\frac{\mathrm{sen}\,((2n+1)/2)\theta}{\mathrm{sen}\,(\theta/2)}\right).$$

Além disso, usando (5.1), temos que (5.3) pode ser dado por

$$\Sigma_3(\theta) = \sum_{k=1}^{n} k^2\cos k\theta = -\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta\right)$$
$$= -\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\frac{1}{2}\left(-1+\frac{\mathrm{sen}\,((2n+1)/2)\theta}{\mathrm{sen}\,(\theta/2)}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{8\,\mathrm{sen}^3(\theta/2)}\{(2n^2+2n-1)\,\mathrm{sen}\,((2n+1)/2)\theta$$
$$-n^2\,\mathrm{sen}\,((2n+3)/2)\theta+(n+1)^2\,\mathrm{sen}\,((1-2n/2)\theta\}.$$

De modo análogo, a verificação de (5.2) pode ser feita por indução em $n$ ou usando o fato que

$$\sum_{k=1}^{n} k\cos k\theta = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen} k\theta\right).$$

Mas,

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen} k\theta = \Im m\left\{\sum_{k=1}^{n} z^k\right\} = \Im m\left\{z\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right)\right\},$$

onde $z = e^{i\theta}$.

Desde que $z^n = \cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta$, temos

$$\begin{aligned}
\Im m\left\{z\left(\frac{1-z^n}{1-z}\right)\right\} &= \Im m\left\{\frac{(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)(1-\cos n\theta - i\operatorname{sen} n\theta)}{1-\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta}\right\} \\
&= \frac{\Im m\{(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)(1-\cos n\theta - i\operatorname{sen} n\theta)(1-\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\}}{(1-\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\theta - \cos n\theta\operatorname{sen}\theta - \cos\theta\operatorname{sen} n\theta + \cos^2\theta\operatorname{sen} n\theta + \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen} n\theta}{(1-\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} n\theta - \operatorname{sen}(n+1)\theta}{(1-\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta} \\
&= \frac{\operatorname{sen}(n/2)\theta\operatorname{sen}((n+1)/2)\theta}{\operatorname{sen}(\theta/2)}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\operatorname{sen}(n/2)\theta\operatorname{sen}((n+1)/2)\theta}{\operatorname{sen}(\theta/2)}\right) &= \frac{1}{8\operatorname{sen}^3(\theta/2)}\{(2n^2+2n-1)\operatorname{sen}((2n+1)/2)\theta \\
&\quad -n^2\operatorname{sen}((2n+3)/2)\theta + (n+1)^2\operatorname{sen}((1-2n)/2)\theta\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\cos k\theta.
\end{aligned}$$

Para a expressão (5.4), segue imeditamente que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3\cos k\theta &= -\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\left(\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen} k\theta\right) \\
&= -\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\left(\frac{\operatorname{sen}(n/2)\theta\operatorname{sen}((n+1)/2)\theta}{\operatorname{sen}(\theta/2)}\right) \\
&= \frac{-1}{16\operatorname{sen}^4(\theta/2)}\{-4-2\cos\theta + (4-6n^2-3n^3+6n^2\cos\theta)\cos n\theta \\
&\quad +\cos(n+1)\theta + \cos(1-n)\theta + 6n\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} n\theta \\
&\quad +n^3(3\cos(n+1)\theta - \cos(n+2)\theta + \cos(1-n)\theta\}.
\end{aligned}$$

O seguinte resultado fornece uma técnica para demonstrar que uma sequência de núcleos é somável.

**Lema 7** *Seja $h(\theta)$ uma função contínua e crescente em $[0,\pi]$ e positiva em $(0,\pi]$. Se $\{f_n(\theta)\}$ é uma sequência de funções pares, positivas e de período $2\pi$ em $[-\pi,\pi]$ tal que*

$$h(\theta)f_n(\theta) \leq \kappa_n, \qquad \theta \in [0,\pi],$$

*onde $\kappa_n$ é uma sequência de números positivos que converge para zero, então $\{f_n(\theta)\}$ é uma sequência de núcleos somáveis.*

*Demonstração:* Temos que demonstrar que, para qualquer $\delta > 0$ e qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número natural $N$ tal que, para todo $n > N$, a desigualdade

$$|f_n(\theta)| < \varepsilon \tag{5.5}$$

vale para todo $\theta \in [\delta, 2\pi - \delta]$. Desde que $f_n(\theta)$ são funções pares e de período $2\pi$, basta demonstrar (5.5) para $\theta \in [\delta,\pi]$.

Sejam $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ fixos. A convergência da sequência $\kappa_n$ implica que existe $N > 0$ tal que, para qualquer $n > N$,

$$\kappa_n < h(\delta)\varepsilon. \tag{5.6}$$

Por outro lado, pelo enunciado, temos que $h(\theta)f_n(\theta) \leq \kappa_n$ para todo $\theta \in [0,\pi]$ e, em particular, para $\theta \in [\delta,\pi]$. Portanto,

$$f_n(\theta) \leq \frac{1}{h(\theta)}\kappa_n, \qquad \theta \in [\delta,\pi]. \tag{5.7}$$

Desde que $h(\theta)$ é crescente em $[\delta,\pi]$, a função $\dfrac{1}{h(\theta)}$ será decrescente neste intervalo. Por essa razão

$$\frac{1}{h(\theta)} \leq \frac{1}{h(\delta)}, \qquad \theta \in [\delta,\pi]. \tag{5.8}$$

Agora, (5.7) e (5.1) implicam que

$$f_n(\theta) \leq \frac{1}{h(\delta)}\kappa_n, \qquad \theta \in [\delta,\pi]$$

e, por (5.6), a desigualdade (5.5) vale em $[\delta,\pi]$. ∎



unesp

## 5.2 Convergência Uniforme dos Novos Núcleos

**Teorema 20** *As três sequências de núcleos positivos definidas através das fórmulas*

$$K_{n,1}(\theta) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2k(n+k+1)}{n(n+2)}\right)\cos k\theta,$$

$$K_{n,2}(\theta) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\left(1 - \frac{k}{n+2}\right)\left(1 + \frac{k}{2n+3}\right)\cos k\theta$$

*e*

$$K_{n,3}(\theta) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1/2}\right)\cos k\theta$$

*são somáveis.*

Observe que esses núcleos são exatamente os polinômios cossenos não-negativos (1.18), (1.21) e (1.24) obtidos no Corolário 2.

*Demonstração:* Para o polinômio cosseno não-negativo $K_{n,1}(\theta)$ vamos expandir a expressão geral de seu coeficiente em termos de $k$, logo

$$K_{n,1}(\theta) = 1 + 2\left\{\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta - \frac{3n^2+6n+2}{n(n+1)(n+2)}\sum_{k=1}^{n}k\cos k\theta + \frac{2}{n(n+1)(n+2)}\sum_{k=1}^{n}k^3\cos k\theta\right\}.$$

Desta forma, usando as expressões (5.1), (5.2) e (5.4), obtemos

$$K_{n,1}(\theta) = 1 + 2\left\{\Sigma_1(\theta) - \frac{3n^2+6n+2}{n(n+1)(n+2)}\Sigma_2(\theta) + \frac{2}{n(n+1)(n+2)}\Sigma_4(\theta)\right\}.$$

Portanto, através de cálculos diretos podemos representar o polinômio cosseno não-negativo (1.18) da seguinte forma explícita fechada:

$$K_{n,1}(\theta) = \frac{3((n+2)\operatorname{sen}(n/2)\theta - n\operatorname{sen}((2\theta+n\theta)/2))^2}{4n(n+1)(n+2)\operatorname{sen}^4(\theta/2)}.$$

Multiplicando a forma fechada por $\operatorname{sen}^4(\theta/2)$ e sabendo que $|\operatorname{sen} u| \leq 1$ para qualquer $u \in [-\pi, \pi]$, teremos

$$\operatorname{sen}^4(\theta/2)K_{n,1}(\theta) \leq \frac{3(n+1)}{n(n+2)}.$$

Aplicando o Lema 7 com $h(\theta) = \operatorname{sen}^4(\theta/2)$ e $f_n(\theta) = K_n(\theta)$, concluímos que $\{K_{n,1}(\theta)\}_{n=1}^{\infty}$ é de fato uma sequência de núcleos positivos somáveis.



unesp

Agora, considerando o polinômio cosseno não-negativo $K_{n,2}(\theta)$ e expandindo a expressão geral do seu coeficiente em termos de $k$, teremos

$$K_{n,2}(\theta) = 1 + 2\left\{\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta - \frac{3n^2+9n+7}{(n+1)(n+2)(2n+3)}\sum_{k=1}^{n}k\cos k\theta\right\} + \frac{2}{(n+1)(n+2)(2n+3)}\sum_{k=1}^{n}k^3\cos k\theta.$$

Pelas expressões (5.1), (5.2) e (5.4), teremos

$$K_{n,2}(\theta) = 1 + 2\left\{\Sigma_1(\theta) - \frac{3n^2+9n+7}{(n+1)(n+2)(2n+3)}\Sigma_2(\theta) + \frac{1}{(n+1)(n+2)(2n+3)}\Sigma_4(\theta)\right\}.$$

Logo, através de simplificações diretas, podemos representar o polinômio (1.21) da seguinte forma explícita fechada

$$K_{n,2}(\theta) = \frac{3(n^2+3n+3-(n^2+3n+2)\cos\theta-(n+2)\cos(n+1)\theta)}{4(n+1)(n+2)(2n+3)\,\mathrm{sen}^4(\theta/2)} + \frac{3(\cos(n+2)\theta+n\cos(n+2)\theta)}{4(n+1)(n+2)(2n+3)\,\mathrm{sen}^4(\theta/2)}.$$

Multiplicando-a por $\mathrm{sen}^4(\theta/2)$ e sabendo que $|\cos u| \leq 1$ para qualquer $u \in [-\pi,\pi]$, teremos

$$\mathrm{sen}^4(\theta/2)K_{n,2}(\theta) \leq \frac{3(n+2)}{2(n+1)(2n+3)}.$$

Assim, usando o Lema 7 com $h(\theta) = \mathrm{sen}^4(\theta/2)$ e $f_n(\theta) = K_n(\theta)$, concluímos que de fato $\{K_{n,2}(\theta)\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de núcleos positivos somáveis.

Por último, consideremos o polinômio $K_{n,3}(\theta)$ escrito na forma

$$K_{n,3}(\theta) = 1 + 2\left\{\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta - \left(\frac{1}{n+1/2}\right)\sum_{k=1}^{n}k\cos k\theta\right\}.$$

Usando as expressões (5.1) e (5.2), obtemos

$$K_{n,3}(\theta) = 1 + 2\left\{\Sigma_1(\theta) - \left(\frac{1}{n+1/2}\right)\Sigma_2(\theta)\right\}.$$

Logo, podemos representar o polinômio (1.24) da seguinte forma fechada

$$K_{n,3}(\theta) = \frac{2-\cos n\theta-\cos(n+1)\theta}{(4n+2)\,\mathrm{sen}^2(\theta/2)}.$$

Multiplicando por $\operatorname{sen}^2(\theta/2)$ e usando que $|\cos u| \leq 1$ para todo $u \in [-\pi, \pi]$, obtemos

$$\operatorname{sen}^2(\theta/2) K_{n,3}(\theta) \leq \frac{1}{n+2}.$$

Portanto, tomando $h(\theta) = \operatorname{sen}^2(\theta/2)$ e $f_n(\theta) = K_n(\theta)$, concluímos, pelo Lema 7, que $\{K_{n,3}(\theta)\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de núcleos positivos somáveis. ∎

Através da fórmula geral de convolução (4.1), para qualquer função $f(x)$ de período $2\pi$ contruímos os polinômios

$$K_{n,1}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2k(n+k+1)}{n(n+2)}\right)(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx),$$

$$K_{n,2}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\left(1 - \frac{k}{n+2}\right)\left(1 + \frac{k}{2n+3}\right)(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

e

$$K_{n,3}(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1/2}\right)(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx),$$

onde $a_k$ e $b_k$ são os coeficientes de Fourier de $f(x)$.

Assim, os Teoremas 7 e 8 são consequências imediatas do teorema anterior e dos Teoremas 17, 18 e 19.

# Referências Bibliográficas


[1] J. W. Alexander, Functions which map the interior of the unit disc upon simple regions, *Ann. of Math.* 17 (1915-16) 12-22.

[2] C. R. R. Alves, Desigualdades dos Tipos Markov e Kolmogorov para Polinômios, Dissertação defendida em março de 1999. UNESP-IBILCE.

[3] R. Askey & G. Gasper, Positive Jacobi polynomial sums, *Amer. J. Math.* 98 (1976) 709-737.

[4] R. Askey & G. Gasper, Inequalities for polynomials, *The Bieberbach conjecture: proceedings of the symposium on the occasion of proof*, A. Baernstein II et al., eds. (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986), pp. 7-32.

[5] R. Askey & J. Steinig, Some positive trigonometric sums, *Trans. Amer. Math. Soc.* 187 (1974) 295-307.

[6] L. de Branges, A proof of the Bieberbach conjecture, *Acta Math.* 154 (1985) 137-152.

[7] J. Dieudoneé, Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynômes et aux fonctions bornées d'une variable complexe, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3) 48 (1931) 247-358.

[8] E. Egerváry & Szász, Einige Extremalprobleme im Bereiche der trigonometrischen Polynome, *Math. Z.* 27 (1928) 641-652.

[9] L. Fejér, Sur les functions bornées et integrables, *C. R. Acad. Sci. Paris* 131 (1900) 984-987.

[10] L. Fejér, Über trigonometriche Polynome, *J. Reine Angew. Math.* 146 (1915) 53-82.




cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 1 12 13 14 15 16 17 18

[11] L. Fejér, On new properties of the arithmetical means of the partial sums of Fourier series, *J. Math. Physics* 13 (1934) 83-88.

[12] L. Fejér, Untersuchungen über Potenzreihen mit mehrfach monotoren Koeffizientenfolge, *Litt. Acad. Sci. Szeged* 8 (1936) 89-115.

[13] L. Fejér & G. Szegő, Special conformal maps, *Duke Math. J.* 18 (1951) 535-548.

[14] G. Gasper, Nonnegative sums of cosine, ultraspherical and Jacobi polynomials, *J. Math. Anal. Appl.* 26 (1969) 60-68.

[15] K. F. Gauss, Développement des fonctions pŕiodiques en séries, Werke VII, (K. Gesell. Wiss., Göttingen, 1906), pp. 469-172.

[16] A. Gluchoff & F. Hartmann, Univalent polynomials and non-negative trigonometric sums, *Amer. Math. Monthly* 105 (1998) 508-522.

[17] B. L. Golinskii, On the asymptotic behaviour of the prediction error, *Theory Probab. Appl.* 19 (1974) 693-709.

[18] T. H. Gronwall, Über die Gibbssche Erscheinung und die trigonometrischen Summen $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \cdots + \frac{1}{n}\sin nx$, *Math. Ann.* 72 (1912) 228-243.

[19] E. Hewitt & R. E. Hewitt, The Gibbs-Wilbraham phenomenon: an episode in Fourier analysis, *Arch. Hist. Exact Sci.* 21 (1979) 129-160.

[20] G. A. Horn & C. R. Johnson, *Matrix analysis* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985).

[21] D. Jackson, Über eine trigonometrische Summe, *Rend. Circ. Mat. Palermo* 32 (1911) 257-262.

[22] D. Jackson, Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebenen Ordnung, doctoral thesis, University of Göttingen, 1911.

[23] D. Jackson, *The theory of approximations*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. XI (Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1930).



cm 1 2 3 4 5 6 7 unesp 11 12 13 14 15 16 17 18

[24] Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis* (John Wiley, New York, 1968).

[25] D. S. Lubinsky, Jackson & Bernstein theorems for exponential weights, *Approximation theory and function series* (Bolyai Society Math. Studies, Budapest, 1996), pp. 86-115.

[26] G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović & Th. M. Rassias, *Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros* (World Scientific, Singapore, 1994).

[27] T. J. Rivlin, *An introduction to the approximation of functions* (Dover Publications, New York, 1981).

[28] W. W. Rogosinski & G. Szegő, Über die Abschnitte von Potenzreihen, die in einem Kreise beschränkt bleiben, *Math. Z.* 28 (1928) 73-94; reprinted in *Gabor Szegő: Collected papers* Vol. 2, R. Askey, ed., (Birkhäuser, Boston, 1982), pp. 89-110.

[29] W. W. Rogosinski & G. Szegő, Extremum problems for non-negative sine polynomials, *Acta Sci. Math. Szeged* 12 (1950) 112-124; reprinted in *Gabor Szegő: Collected papers* Vol. 3, R. Askey, ed., (Birkhäuser, Boston, 1982), pp. 196-208.

[30] G. Szegő, Koeffizientenabschätzungen bei ebenen und räumlichen harmonischen Entwicklungen, *Math. Ann.* 96 (1926/27) 601-632.

[31] A. F. Timan, *Theory of approximation of functions of a real variable* (Pergammon Press, Oxford, 1963).

[32] E. C. Titchmars, *The theory of functions* (Oxford Univ. Press, London, 1939).

[33] P. Turán, On a trigonometric sum, *Ann. Soc. Polon. Math.* 25 (1952) 155-161.

[34] L. Vietoris, Über das Vorzeichechen gewisser trigonometrischer Summen, *Sitzungsber. Öst. Akad. Wiss.* 167 (1958) 125-135; *Anzeiger. Öst. Akad. Wiss.* (1959) 192-193.

[35] W. Van Assche, Orthogonal polynomials in the complex plane and on the real line, *Fields Inst. Comm.* 14 (1997) 211-245.

[36] W. H. Young, On certain series of Fourier, *Proc. London Mah. Soc.* (2) 11 (1912) 357-366.

[37] A. Zygmund, *Trigonometric series* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1968).