Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Problemas de Programação Linear: uma proposta de resolução geométrica para o Ensino Médio com o uso do GeoGebra

Juliana Mallia Zachi

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Ariane Luzia dos Santos
Unesp - FCT - Araraquara

2016

519.72 Zachi, Juliana Mallia
Z16p Problemas de Programação Linear: uma proposta de resolução geométrica para o Ensino Médio com o uso do GeoGebra/ Juliana Mallia Zachi- Rio Claro: [s.n.], 2016.
115 f., il., gráfs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientadora: Ariane Luzia dos Santos
Unesp - FCT - Araraquara

1. Programação Linear. 2. Álgebra Linear. 3. Programação Linear Geométrica. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Câmpus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Juliana Mallia Zachi
Problemas de Programação Linear: uma proposta de resolução geométrica para o Ensino Médio com o uso do GeoGebra

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Ariane Luzia dos Santos
Unesp - FCT - Araraquara
Orientadora

Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira
Unesp - IGCE - Rio Claro

Profa. Dra. Érica Regina Filletti Nascimento
Unesp - IQ - Araraquara

Rio Claro, 02 de Setembro de 2016

Dedico este trabalho a meus pais Cleuza e Marcílio e minha irmã Jussara. Sem o apoio deles eu não teria iniciado esta jornada.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me guiado com sabedoria durante toda minha jornada.

À minha orientadora Ariane, pela acolhida e orientação, pelas palavras de incentivo a cada etapa concluída e pelas sugestões de melhorias durante a elaboração deste trabalho.

Ao meu marido Claudinei, pelo apoio, compreensão e paciência.

Aos meus pais, Marcílio e Cleuza, pois foram meus maiores incentivadores. Nos momentos de cansaço, eram quem me motivavam a prosseguir.

À minha irmã Jussara, que me mostrou uma realidade profissional que eu gostaria de seguir.

A todos os meus colegas de mestrado, especialmente a Aline, Carina e André, pois estiveram sempre presentes nos momentos mais difíceis, em que algumas vezes pensei em desistir.

A todos os professores do PROFMAT, por acreditarem no programa e em mim.

Aos funcionários da Seção de Pós Graduação, da Biblioteca e todos que participaram direta ou indiretamente para viabilizar a realização deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior(CAPES) pelo apoio financeiro e à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela iniciativa.

A Geometria existe por toda parte.
É preciso, porém, olhos para vê-la,
inteligência para compreendê-la
e alma para admirá-la.
Malba Tahan em "O Homem que Calculava"

Resumo

Neste trabalho são apresentados os fundamentos da Programação Linear, em especial, da Programação Linear Geométrica, instrumento importante de otimização para problemas de Economia, gestão de empresas, problemas de transportes, obtenção de misturas ótimas, entre outros. Além disso, é apresentada uma proposta didática para os professores de educação básica da escola pública, utilizando o software GeoGebra como instrumento motivador para o estudo de uma situação de aprendizagem proposta no material de apoio idealizado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, abordada no caderno do aluno do 3º ano do Ensino Médio.

Palavras-chave: Programação Linear, Álgebra Linear, Programação Linear Geométrica.

Abstract

In this work presents the fundamentals of linear programming in particular, of geometric linear programming, important instrument of optimization for economic problems, business management, transport problems, obtaining optimal mixtures, among others. In addition, presents a didactic proposal for teachers of the basic education of public school, using the GeoGebra software as a motivating tool for the study of a learning situation proposed in the support material designed by the Education secretary of the State of São Paulo is presented, adressed in the student notebook of 3rd year of high school.

Keywords: Linear Programming, Linear Algebra, Linear Geometric Programming.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 INTRODUÇÃO

A origem dos estudos sobre problemas de otimizar uma função linear sujeita a restrições remetem a Fourrier, em 1826, com seus estudos sobre sistemas lineares de inequações.

Em 1939, percebeu-se a importância prática desses problemas, quando o russo Leonid Kantorovich desenvolveu os primeiros Problemas de Programação Linear para uso durante a Segunda Guerra Mundial, para planejar gastos e retornos, a fim de reduzir os custos para o exército e aumentar as perdas para o inimigo. Kantorovich, em 1975, ganhou o Prêmio Nobel da Economia, no entanto, seu trabalho ficou desconhecido durante vinte anos.

Por volta de 1940, os estudos sobre a Programação Linear atingiriam seu clímax, com os estudos de George Dantzig e com o premio Nobel da Economia entregue a George Stigler.

Em 1947, Dantzig, além de formular o Problema de Programação Linear também cria o Algorítmo Simplex para a sua solução. Após a guerra, muitas empresas encontraram o uso em seu planejamento diário.

Para o desenvolvimento do presente trabalho, foram realizadas diversas leituras, nas quais buscou-se embasamento teórico junto a diversos autores. As fontes consultadas foram as mais diversas possíveis, desde livros, artigos, dissertações de mestrado e doutorado, bem como experiências vivenciadas na prática. Através de conversas realizadas com antigos e novos docentes da disciplina de matemática, ficou evidente a necessidade de novas metodologias e práticas de como ensinar e aprender matemática, buscando uma maior motivação e interesse por parte dos discentes.

Para Melo(2012), o processo de ensino e aprendizagem da matemática é muito complexo e cheio de obstáculos, o que pode servir de estímulo para a busca de novas técnicas e metodologias para a diminuição gradativa de tais adversidades. Ainda, segundo Melo(2012, pág. 3), há "a imensa necessidade de buscarmos uma maior motivação para os discentes, através de uma matemática mais interessante e relacionada aos aspectos socioculturais dos alunos." Em sua dissertação de mestrado, o autor citado apresenta uma proposta de ensino do assunto Programação Linear, juntamente com o conteúdo de Matrizes e sistemas lineares para um grupo de alunos do Ensino Médio, em uma escola da cidade de Porto Alegre. A proposta foi a aplicação de situações-problema com parte da solução fazendo uso do Software Graphmatica, como facilitador na solução geométrica dos sistemas de inequação com duas variáveis. O uso do software foi bastante elucidativo e esclarecedor. Quando foram apresentados problemas com mais de duas variáveis, houve uma certa frustração por não ser possível a utilização do software para resolvê-los. Neste momento, foi comentado sobre o método simplex e a função *Solver* do Excel.

Os resultados obtidos foram muito positivos, pois os alunos apresentaram ótimos encaminhamentos para as soluções dos problemas, onde muitos chegaram praticamente sozinhos. Sentiu-se uma satisfação geral e interesse em continuar a estudar o assunto, pois muitos conteúdos, como inequação do 1º grau, passaram a fazer sentido.

Martins(2013) justifica seu trabalho pela necessidade de repensar o currículo, buscando estratégias e alternativas para responder aos questionamentos dos alunos, fazendo assim, uma conexão da matemática com o cotidiano. Em sua dissertação de mestrado, o autor ofereceu aos estudantes do Ensino Médio de uma instituição privada de Porto Alegre, atividades na modalidade de oficina, totalizando 20 horas de aulas em 8 encontros. Como o cumprimento das oficinas não era obrigatório, o número de participantes variou durante a aplicação da sequência. Apenas nove alunos participaram de todas as oficinas.

A sequência didática foi aplicada em grupos, através de resolução de problemas, permitindo aos alunos elaborar conclusões. As atividades foram aplicadas sem explanação de conceitos teóricos prévios, a fim de despertar a percepção de um método para a resolução de problemas. A teoria foi desenvolvida no decorrer das oficinas, paralelamente com a revisão de alguns conteúdos. Fez-se uso do software GeoGebra.

Para Martins(2013, pág. 60) "as atividades oportunizaram que os alunos criassem seu próprio algoritmo para a resolução de Problemas de Programação Linear", acreditando no favorecimento do aprendizado por meios não mecanizados de memorização de procedimentos e algoritmos prontos.

Ao final das oficinas, Martins(2013), constatou, de modo geral, um interesse nesse tópico, até então desconhecido, concluindo que houve entendimento de que, somente tabelas não resolvem todos os Problemas de Programação Linear, surgindo a necessidade de um método mais eficaz e do uso de equações e inequações. O estudo conectou conhecimentos prévios e sem sentido até o momento, já que não houve a abordagem de conceitos novos. O uso do software computacional foi um instrumento facilitador, pois permitiu a manipulação de parâmetros.

Ribas(2014) inicia seu trabalho citando George Polya em "A arte de resolver problemas", pois, ao levar em consideração suas ideias, poderemos ampliar os conceitos aprendidos pelos alunos, explorar novas possibilidades e instigar os alunos. O tema de sua dissertação foi motivado pelos questionamentos dos alunos sobre onde aplicar o que se aprende em Matemática e pelo desejo de despertar o interesse e a curiosidade dos alunos.

Ribas propõe atividades para 8 aulas, ou projeto no contra-turno, sendo as principais atividades: discussão dos problemas apresentados, abordagem dos conceitos de Programação Linear, construções no software GeoGebra, uso do software Excell ou Linux Calc para resolução dos problemas. Não houve avaliação dos resultados obtidos, pois as atividades não foram aplicadas aos seus alunos.

Riguetto(2015) escolheu este tema por estar presente no Material de Apoio ao Currículo do Estado de São Paulo, Caderno do Aluno da 3ª série do Ensino Médio volume 1, apresentando vários Problemas de Programação Linear, propiciando introduzir esse assunto no Ensino Médio de maneira simples. Faz-se necessário abordar a Matemática de forma que o aluno compreenda a importância em aprendê-la, e não simplesmente, a obrigação. Para isso, a autora sugere uma sequência didática com 10 problemas, em grau crescente de dificuldade, a serem resolvidos em duplas, utilizando a metodologia de resolução de problemas, concepção esta preconizada no Parâmetros Curriculares Nacionais.

Riguetto(2015) é professora na mesma unidade escolar desde 1983, sendo esta pública, na cidade de Ilha Solteira. A sequência foi aplicada a uma turma de 3º ano, inicialmente na forma de pré-teste, entendendo que, desta forma, os alunos se empenhariam na resolução dos problemas.

Os problemas mais simples foram resolvidos sem dificuldades pela maioria, já o problema que envolveu todos os conceitos foi resolvido por apenas uma dupla, apesar da intervenção da professora.

Finalizando, Riguetto(2015) define sua proposta como uma forma de auxiliar o professor na introdução deste assunto, pois observou uma escassez de material voltado ao Ensino Médio.

Como visto nos estudo realizados, o tema Programação Linear é de fácil aplicação e consegue responder de maneira clara aos questionamentos sobre o uso da matemática no dia a dia. Mesmo sendo um assunto interessante, é muito pouco explorado no Ensino Médio, sendo abordado em poucos livros didáticos. O caderno de apoio do aluno do 3º ano do Ensino Médio do Estado de São Paulo - volume 1, traz uma situação de aprendizagem sobre Problemas de Programação Linear,como motivação para uso das equações e inequações associadas a retas e regiões do plano. Por este motivo optei por explorar este tema, com o uso de software matemático GeoGebra como facilitador, trazendo assim a possibilidade de introduzir assuntos mais concretos, tentando deixar a matemática mais "palpável" aos olhos dos discentes.

Quanto à organização deste trabalho, no segundo capítulo é feito o estudo sobre conjuntos convexos.

O terceiro capítulo apresenta um estudo sobre Programação Linear, suas motivações, formulação de Problemas de Programação Linear, modelos nas formas padrão e canônica, além de exemplos de modelagem de Problemas de Programção Linear.

O capítulo quatro taz uma breve abordagem sobre os métodos Analítico e Simplex de resolução de Problemas de Programação Linear, especificando qual será mais viável para cada tipo de problema.

O capítulo cinco faz um estudo sobre Programação Linear Geométrica, abordando definições e resultados importantes, esquemas de soluções para problemas de duas variáveis, além da resolução de diversos exemplos que abordam as variações na natureza das soluções que podem ocorrer.

No capítulo seis são abordadas as aplicações no Ensino Médio, com alguns exemplos de aplicações propostas em livros didáticos, e a apresentação de uma proposta didática para motivar uma situação de aprendizagem apresentada no material de apoio do currículo do Estado de São Paulo, proposta no caderno do aluno do 3º ano do Ensino Médio.

Finalmente, nos apêndices, incluímos um manual para uso do software GeoGebra e o roteiro de aplicação descrito no material dirigido descrito no caderno do professor do currículo do Estado de São Paulo, que motivou a situação de aprendizagem utilizada na proposta didática deste trabalho.

Todas as figuras deste trabalho foram elaboradas pelo próprio autor.

2 CONJUNTOS CONVEXOS

Neste capítulo faremos um breve estudo sobre conjuntos convexos, pois veremos no capítulo 3 que o conjunto dos pontos viáveis para um Problema de Programação Linear é um conjunto convexo cujos vértices correspondem às soluções.

Definição 2.1. *Seja um conjunto de pontos $x_i \in X$. Diz-se que X é uma combinação linear convexa dos pontos x_i se $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, em que λ_i são os coeficientes escalares que terão que assumir os seguintes valores:*

$$\begin{cases} 0 \leq \lambda_i \leq 1 \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{cases}$$

Em outras palavras, dois pontos definem um segmento de reta e uma combinação linear convexa, que é igual ao segmento que os une.

Definição 2.2. *Um conjunto K é convexo quando todos os segmentos de reta que unem dois pontos quaisquer de K estão contidos em K. Um conjunto é fechado se ele compreende a sua fronteira.*

A representação gráfica de conjuntos convexos, por meio de um exemplo ilustrativo, está na Figura 2

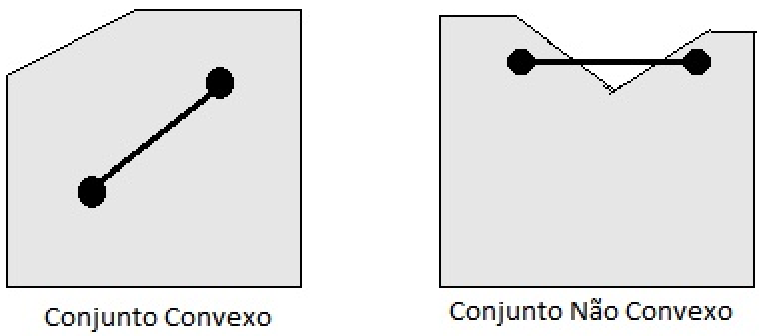


Figura 2.1: Exemplos de conjuntos convexos e não convexos.

Definição 2.3. *Um vértice é um ponto pertencente a um conjunto convexo que não pode ser obtido por meio de combinação convexa dos outros pontos do conjunto. Podemos dizer que um vértice é um ponto extremo de um conjunto convexo. Ver Figura 2.2.*

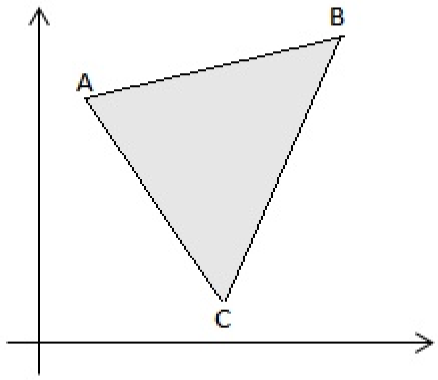


Figura 2.2: A, B e C são vértices.

Definição 2.4. *A combinação convexa de dois vértices de dois vértices A e B é considerada uma aresta se nenhum ponto de* $\overline{AB}$ *pode ser obtido pela combinação convexa de pontos não pertencentes a* $\overline{AB}$*. Ver Figura 2.3.*

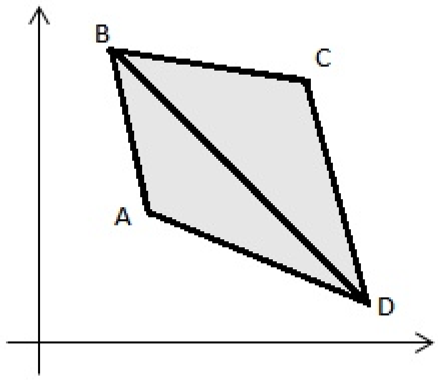


Figura 2.3: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ são arestas, $\overline{BD}$ não é uma aresta.

No próximo capítulo serão abordados os conceitos e definições sobre Programação Linear.

3 PROGRAMAÇÃO LINEAR

A Programação Linear (PL) é um dos ramos da programação matemática, e também uma das principais ferramentas da Pesquisa Operacional (PO). A Pesquisa Operacional teve suas primeiras atividades durante a Segunda Guerra Mundial, onde seus estudos foram utilizados nas tomadas de decisões sobre o uso de materiais de guerra. Após a Segunda Guerra Mundial, sua aplicação pode ser vista em diversos segmentos industriais e comerciais (estratégia, marketing, finanças, operações e logística, recursos humanos, entre outros).

Segundo Eiselt(2007, pág. 48), "problemas de programação matemática são modelos matemáticos que tentam modelar uma situação da vida real", através de variáveis e parâmetros, ambos representados por números. Os parâmetros são números conhecidos e devem ser tomados como um dado fixo, enquanto as variáveis são números cujos valores serão determinados no processo. Em geral, os parâmetros não são da competência do tomador de decisão, enquanto que as variáveis são. O termo programação é utilizado aqui como sinônimo de otimização, fazendo referência ao termo "programa", utilizado pelos militares norte-americanos, ao se referir à agenda de horários para treinamentos e ações logísticas, e não à programação de computadores.

O desenvolvimento da Programação Linear foi inspirado em três tipos de problemas:

- Transporte: otimização de sistemas(programas) de distribuição, conhecendo-se os custos de transporte, a procura prevista para cada loja e as capacidades máximas de produção de cada fábrica.
- Composição: otimização da composição de uma dieta, minimizando o seu custo e satisfazendo os níveis mínimos de calorias e vitaminas necessários na alimentação.
- Formação e produção: otimização de programas de contratação e formação de pessoal, assim como de produção e armazenamento, de forma a minimizar os custos e maximizar os lucros.(Carvalho, 2014, pág. 11)

Para Maculan(p.11, 1980), "o problema de tomada de decisão leva em conta variáveis e as condições que "prendem" estas variáveis, às quais denominaremos restrições", podendo haver milhares de restrições e variáveis. Geralmente, a decisão está ligada a certo objetivo: minimizar os custos de produção, maximizar os lucros, melhorar as condições de vida de uma população, entre outros.

Os problemas de tomada de decisão, em geral, tratam de recursos limitados e a ideia é melhorar seu rendimento ou produtividade.

3.1 Definições e resultados preliminares

Seguem algumas definições e resultados importantes para o desenvolvimento deste trabalho:

Definição 3.1. *Uma função é linear quando envolve apenas constantes e termos com variáveis de primeira ordem.*

Definição 3.2. *As variáveis são contínuas quando podem assumir quaisquer valores em um intervalo de números reais.*

Definição 3.3. *Seja X um conjunto de pontos $X \subset \mathbb{R}^n$ tal que para todo $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X$, existem a_i e b, com pelo menos um a_i não nulo.*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

é um hiperplano em $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 3.1. Pontos são hiperplanos em $\mathbb{R}$, retas são hiperplanos em $\mathbb{R}^2$ e planos são hiperplanos em $\mathbb{R}^3$

Definição 3.4. *Em $\mathbb{R}^n$, um semiespaço é a região de um dos lados de um hiperplano. Em outras palavras, são os pontos x tais que*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \geq b \text{ ou } a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leq b$$

para determinados a_i e $b \in \mathbb{R}$.

Definição 3.5. *As variáveis de decisão são as incógnitas, ou valores desconhecidos, que serão determinados pela solução do modelo. Podem ser classificadas de acordo com as seguintes escalas de mensuração: variáveis contínuas, discretas ou binárias. As variáveis de decisão devem assumir valores não negativos.*

Definição 3.6. *A função objetivo é uma função matemática que determina o valor-alvo que se pretende alcançar ou a qualidade da solução, em função das variáveis de decisão e dos parâmetros, podendo ser uma função de maximização ou de minimização.*

Definição 3.7. *As restrições podem ser definidas como um conjunto de equações e inequações que as variáveis de decisão do modelo devem satisfazer. As restrições são adicionadas ao modelo de forma a considerar as limitações físicas do sistema, e afetam diretamente os valores das variáveis de decisão.*

Definição 3.8. *Solução viável ou factível é aquela que satisfaz todas as restrições do modelo, inclusive as de não negatividade.*

A importância dos pontos extremos de uma região viável é mostrada pelo seguinte teorema.

Teorema 3.1. *Se a região viável de um Problema de Programação Linear é não-vazia e limitada, então a função-objetivo atinge tanto um valor máximo quanto um valor mínimo e estes ocorrem em pontos extremos da região viável. Se a região viável é ilimitada, então a função-objetivo pode ou não atingir valores máximo ou mínimo; contudo, se atingir um máximo ou um mínimo, este ocorrerá em pontos extremos.*

A Figura 3.1 sugere a ideia por trás da prova do teorema 3.1. Como a função objetivo $z = c_1x_1 + c_2x_2$ de um PPL é uma função linear de x_1 e de x_2, as suas curvas de nível(as curvas ao longo das quais z tem valor constante) são retas. À medida que deslocamos perpendicularmente estas retas, a função-objetivo ou cresce ou decresce monotonamente. Dentro de uma região viável limitada, os valores máximos e mínimos de z devem ocorrer, portanto, nos pontos extremos, como indica a Figura 3.1.

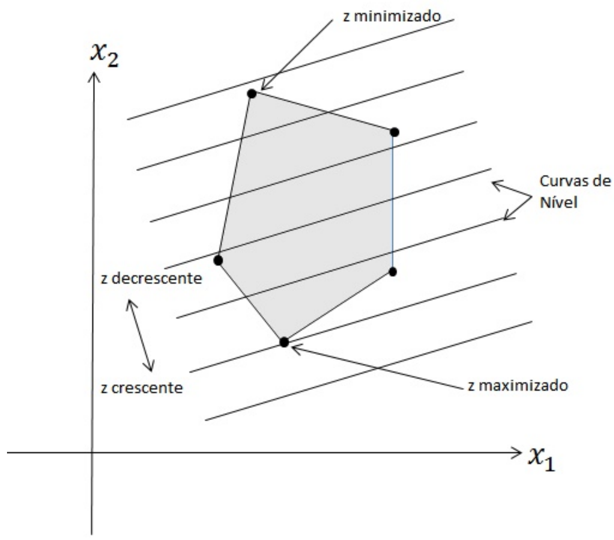


Figura 3.1: Representação da região viável de um PPL e suas curvas de nível.

Definição 3.9. *Solução Ótima é a solução factível que apresente o melhor valor da função objetivo.*

Teorema 3.2. *O conjunto S de soluções viáveis para um Problema de Programação Linear é fechado, convexo e limitado por baixo.*

Prova: *Pela restrição $x \geq 0$, S é limitado por baixo. Além disso, S é intersecção dos semiespaços definidos pelas restrições do problema e pela restrição de não negatividade. Como os semiespaços são convexos e fechados, o mesmo acontece com S.*

Teorema 3.3. *Seja S o conjunto de soluções viáveis para um Problema de Programação Linear. Então, se existe solução ótima para o Problema de Programação Linear, existe um ponto extremo em S com valor ótimo.*

Prova: *Seja $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$ a matriz dos coeficientes da função objetivo e $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ a matriz das variáveis de decisão da função objetivo. Desta forma, a função objetivo pode ser representada por: $z = c^T x$.*

S tem um número finito de pontos extremos que denotamos por $x_1^*, x_2^*, ..., x_p^*$. Seja x_0 um ponto viável maximizando $c^T x$ em S:

$$\forall x \in S,\ c^T x_0 \geq c^T x$$

Suponha que x_0 não é ponto extremo. Então x_0 pode ser descrito como combinação convexa dos pontos extremos de S.

$$x_0 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i^*,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum \lambda_i = 1$$

Seja então x_r^* o ponto extremo com maior valor objetivo. Então,

$$\begin{aligned} c^T x_0 &= c^T (\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i^*) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (c^T x_i^*) \\ &\leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (c^T x_r^*) \\ &= c^T x_r^* \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \\ & c^T x_r^*. \end{aligned}$$

Temos então $c^T x_0 \geq c^T x_r^*$. Como x_0 é ótimo, $c^T x_0 = c^T x_r^*$, e existe o ponto extremo x_r^* onde o valor do objetivo é ótimo.

Teorema 3.4. *O conjunto de soluções ótimas para um Problema de Programação Linear é um conjunto convexo.*

Prova: *Seja K o conjunto de soluções ótimas, $x_1^*, x_1^* \in K$, e z^* o valor ótimo da função objetivo. Então,*

$$c^T x_1^* = c^T x_2^* = z^*.$$

Como são viáveis, $x_1^*, x_1^* \in S$ e S é convexo, portanto

$$\begin{gathered} \lambda x_1^* + (1 - \lambda) x_2^* \in S. \\ 0 \leq \lambda \leq 1. \end{gathered}$$

Temos então

$$\begin{aligned} c^T (x_1^*, x_2^*) &= \lambda c^T x_1^* + (1 - \lambda) c^T x_2^* \\ &= \lambda z^* + (1 - \lambda) z^* = z^*. \end{aligned}$$

Assim, $\lambda x_1^* + (1 - \lambda) x_2^* \in K$, para $0 \leq \lambda \leq 1$, e K é convexo.

3.2 Formulação de um Problema de Programação Linear

A resolução de um Problema de Programação Linear (PPL) consiste em maximizar ou minimizar uma função linear com variáveis de decisão contínuas denominada como função objetivo, levando em consideração um conjunto de restrições, formado por um sistema linear de igualdades ou desigualdades.

A formulação de um modelo geral de Programação Linear pode ser representada como:
minimizar ou maximizar $z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$, satisfazendo as restrições

$$
\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2 \\
. \quad . \quad . \\
. \quad . \quad . \\
. \quad . \quad . \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m
\end{array}
$$

em que z é a função objetivo;
As restrições podem vir acompanhadas também dos sinais $\leq$ ou $=$.

x_j são as variáveis de decisão, principais ou controláveis, $x_j \geq 0$, j=*1, 2, ...,* n;

a_{ij} é a constante ou coeficiente das i-ésima restrição da j-ésima variável, i=*1, 2, ...,* m, j=*1, 2, ...,* n;

b_i é o termo independente ou quantidade de recursos disponíveis da i-ésima restrição, i=*1, 2, ...,* m;

c_j é a constante ou coeficiente da j-ésima variável da função objetivo, j=*1, 2, ...,* n.

3.3 Modelo de Programação Linear nas formas padrão e canônica

Um Problema de Programação Linear pode ser resolvido por diversos métodos: solução gráfica, analítica e Método Simplex. Faremos uma breve explanação sobre os métodos analítico e Simplex no capítulo 4 e sobre o método de resolução gráfica no capítulo 5. Para utilizar a forma de resolução analítica ou o método Simplex, a formulação do modelo deve estar na forma padrão.

3.3.1 Modelo de Programação Linear na forma padrão

Definição 3.10. *Um modelo de Programação Linear está na forma padrão quando atende aos seguintes requisitos:*

1. *Os termos independentes das restrições devem ser não negativos.*
2. *Todas as restrições devem estar representadas por equações lineares e apresentadas na forma de igualdade.*
3. *As variáveis de decisão devem ser não negativas.*

A forma padrão será representada matematicamente como:
minimizar ou maximizar $z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$, satisfazendo as restrições

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \\ \text{com } x_j \geq 0,\ j=1,\ 2,\ ...,\ n. \\ b_i \geq 0 i = 1, ..., m. \end{gathered}$$

3.3.2 Modelo de Programação Linear na forma canônica

Em um modelo de programação linear na forma canônica, as restrições serão apresentadas na forma de inequações, onde a função objetivo z poderá ser de maximização ou de minimização.

Definição 3.11. *Para uma função objetivo z de maximização, todas as restrições devem ser representadas com sinal do tipo $\leq$, já para uma função objetivo z de minimização, as restrições devem estar com sinal do tipo $\geq$.*

Para um problema de maximização, a forma canônica pode ser representada matematicamente como:
maximizar $z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$, satisfazendo as restrições

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \\ \text{com } x_j \geq 0,\ j=1,\ 2,\ ...,\ n. \end{gathered}$$

Já para um problema de minimização, a forma canônica passa a ser:
minimizar $z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$, satisfazendo as restrições

$$
\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2 \\
. \quad . \quad . \\
. \quad . \quad . \\
. \quad . \quad . \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m \\
\text{com } x_j \geq 0,\ j{=}1,\ 2,\ ...,\ n.
\end{array}
$$

3.3.3 Transformações para a forma padrão ou canônica

A partir de algumas operações elementares, podemos escrever várias formulações equivalentes, para utilização da mais conveniente. Tais como:

1. Minimizar uma função equivale a maximizar seu negativo, ou seja, minimizar $z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ equivale a maximizar $(-z) = (-c_1)x_1 + (-c_2)x_2 + ... + (-c_n)x_n$.

2. Se tivermos desigualdades em vez de equações, podemos inserir novas variáveis, conhecidas como variáveis de folga, obtendo igualdades.

   Segue um exemplo de aplicação abordado em Maculan(1980).

   Exemplo 3.2. Se tivermos: $4x_1 + 2x_2 \leq 5$ a variável de folga s_1 $(s_1 \geq 0)$ pode ser introduzida para conseguirmos $4x_1 + 2x_2 + s_1 = 5$.

   Podemos ver imediatamente que, para eliminar desigualdades do tipo ($\geq$), basta colocar uma variável de folga com sinal negativo, isto é, $4x_1 + 2x_2 \geq 5$ torna-se $4x_1 + 2x_2 - s_1 = 5$ $(s_1 \geq 0)$.

   É necessário colocar uma variável de folga diferente para cada linha. Se for usada a mesma variável de folga, obteríamos uma nova relação entre as desigualdades que não foi imposta no problema.

3. Uma igualdade $4x_1 = 5$, por exemplo, pode ser substituída por duas desigualdades $4x_1 \leq 5$ e $4x_1 \geq 5$.

4. Uma variável x_j é considerada livre, ou seja, sem restrição de sinal, se pode ser substituída pela diferença de duas variáveis não negativas:

$$x_j = x_j^1 - x_j^2,\ com\ x_j^1, x_j^2 \geq 0.$$

3.4 Exemplos de modelagem de um Problema de Programação Linear

Para Bassanezi(2002, pág. 20) "modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado".

Ainda para Bassanezi, a modelagem matemática é um processo utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos, permitindo abstrair e generalizar previsão de tendências matemáticas. Consiste, essencialmente, em transformar situações da realidade em problemas matemáticos.

A seguir será feita a modelagem de alguns Problemas de Programação Linear.

O exemplo 3.3 foi retirado de Maculan(1980) e os exemplos 3.4 e 3.5 foram retirados de Fávero(2012).

Exemplo 3.3. Um mercado oferece n alimentos diferentes. O custo por unidade de cada alimento j é c_j unidades de moeda (por exemplo, o alimento 1 custa R$ 15,00 por tonelada). Sabemos também que os alimentos possuem produtos nutritivos, tais como vitaminas, calorias, etc., o que mantém o homem com boa saúde. Consideremos m produtos essenciais para a vida humana. Os nutricionistas fornecem a quantidade de um produto nutritivo i contida em uma unidade do alimento j e indicam também a quantidade mínima necessária de cada produto i para manter o homem em perfeitas condições físicas, durante certo período de tempo (uma semana, por exemplo). Seja b_i para cada i essa quantidade mínima necessária. Considerando os dados expostos, desejamos uma dieta alimentar de menor custo total, que satisfaça às condições estabelecidas pelos nutricionistas para o período de tempo em questão, isto é, queremos saber a quantidade de cada alimento j que deve ser comprada, de tal maneira que o custo total da compra dos alimentos seja mínimo e atenda às condições de nutrição anteriormente mencionadas.

Para equacionarmos esse problema, consideraremos o conjunto de alimentos $J=\{1, 2, 3, ..., n\}$, que representa os n alimentos do mercado e o conjunto $I=\{1, 2, 3, ..., m\}$, que indica os m produtos nutritivos colhidos nos alimentos.

Seja a_{ij} a quantidade do produto nutritivo i contida em uma unidade do alimento j. A variável x_j indica a quantidade do alimento j que será adquirida. As variáveis x_j são denominadas variáveis de decisão. Notemos que essas variáveis x_j podem tomar apenas valores positivos ou nulo; uma quantidade negativa do alimento j a ser comprada não tem sentido nesse problema. Teria, caso pudéssemos, também, vender o alimento j ao mercado. Portanto, x_j é maior ou igual a zero, para todo alimento j que pertence ao conjunto J, isto é,

$$x_j \geq 0, \forall i \in J \tag{3.1}$$

Seja a_{ij} a quantidade do elemento i contida em uma unidade do elemento j: x_j unidades conterão $a_{ij}x_{ij}$. Se comprarmos $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ quantidades dos alimentos *1, 2, 3, ..., n*, respectivamente, então $a_{i1}x_1, a_{i2}x_2, a_{i3}x_3, ..., a_{in}x_n$ indicará a quantidade total do produto nutritivo i em todos os alimentos comprados. Essa quantidade deve ser, no mínimo, igual a b_i, para cada i que pertence ao conjunto I, isto é,

$$\sum_{j\in J} a_{ij}x_j \geq b_i \forall i \in I \tag{3.2}$$

Supondo que haja valores de x_j que satisfaçam 3.1 e 3.2, passaremos a expressar o custo total na compra dos alimentos. Para comprarmos x_j unidades de j, pagaremos c_jx_j unidades de moeda e, portanto, o custo total na compra de todos os alimentos será $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$. Este somatório será denominado z, isto é:

$$z = \sum_{j\in J} c_jx_j \tag{3.3}$$

Podemos concluir que desejamos tomar uma decisão em relação às compras dos alimentos j, de forma que o custo total z seja mínimo e que os valores de x_j satisfaçam a 3.1 e 3.2. Formalmente, escreveremos:

minimizar

$$z = \sum_{j\in J} c_jx_j \tag{3.4}$$

sujeito às restrições

$$\sum_{j\in J} a_{ij}x_j \geq b_i, \forall i \in I \tag{3.5}$$

$$x_j \geq 0, \forall j \in J \tag{3.6}$$

O problema designado por 3.4, 3.5 e 3.6 é denominado Problema de Programação Linear (PPL). A expressão 3.3 é denominada função objetivo ou função econômica, e as expressões da forma 3.5 e 3.6 serão restrições. O problema é linear porque só há funções lineares das variáveis x_j na função objetivo e nas restrições.

Exemplo 3.4. (Problema do Mix de Produção) A empresa Venix de brinquedos está revendo seu planejamento de produção de carrinhos e triciclos. O lucro líquido por unidade de carrinho e triciclo produzido é de R$12,00 e R$60,00, respectivamente. As matérias-primas e os insumos necessários para a fabricação de cada um dos produtos são terceirizados, cabendo à empresa os processos de usinagem, pintura e montagem. O processo de usinagem requer 15 minutos de mão de obra especializada por unidade de carrinho e 30 minutos por unidade de triciclo produzida. O processo de pintura requer 6 minutos de mão de obra especializada por unidade de carrinho e 45 minutos por unidade de triciclo produzida. Já o processo de montagem necessita de 6 minutos e 24 minutos para uma unidade de carrinho e triciclo produzido, respectivamente. O tempo disponível por semana é de 36, 22 e 15 horas para os processos de usinagem, pintura e montagem, respectivamente. A empresa quer determinar quanto produzir de cada produto por semana, respeitando as limitações de recursos, de forma a maximizar o lucro líquido semanal.

Para formular o Problema de Programação Linear que maximiza o lucro líquido da empresa Venix, primeiramente, definem-se as variáveis de decisão do modelo:

x_j = quantidade a ser fabricada do produto j por semana, j = *1, 2*.

Assim, tem-se:

x_1 = quantidade de carrinhos a serem produzidos por semana.

x_2 = quantidade de triciclos a serem produzidos por semana.

Verifica-se, portanto, que as variáveis de decisão devem assumir valores inteiros, pois não se pode produzir valores fracionários de carrinhos ou triciclos.

O lucro líquido por unidade de carrinho é R$12,00, enquanto o lucro líquido de unidade de triciclo é R$60,00. Busca-se maximizar o lucro líquido semanal gerado a partir das quantidades de carrinhos e triciclos fabricados. Logo, a função objetivo pode ser escrita da seguinte forma: maximizar $z = 12x_1 + 60x_2$.

Considerando o processo de usinagem, para produzir uma unidade de carrinho e triciclo necessita-se de 15 minutos (0,25 hora) e 30 minutos (0,5 hora) de mão de obra especializada, respectivamente $(0,25x_1 + 0,5x_2)$. Porém, o tempo total de mão de obra para a atividade de usinagem não pode ultrapassar 36 horas/semana, gerando a seguinte restrição: $0,25x_1 + 0,5x_2 \leq 36$.

Analogamente, para a atividade de pintura, uma unidade de carrinho e triciclo produzido requer 6 minutos (0,1 hora) e 45 minutos (0,75 hora) de mão de obra especializada, respectivamente $(0,1x_1 + 0,75x_2)$. Porém, o limite de mão de obra disponível para essa atividade é de 22 horas/semana: $0,1x_1 + 0,75x_2 \leq 22$.

Já para o processo de montagem, para produzir uma unidade de carrinho e triciclo necessita-se de 6 minutos (0,1 hora) e 24 minutos (0,4 hora) de mão de obra, respectivamente $(0,1x_1 + 0,4x_2)$. A disponibilidade de mão de obra para essa atividade é de 15 horas/semana: $0,1x_1 + 0,4x_2 \leq 15$.

Finalmente, têm-se as restrições de não negatividade das variáveis de decisão: $x_j \geq 0, j = 1,2$.

A formulação completa do modelo pode ser representada como: maximizar $z = 12x_1 + 60x_2$, sujeito a:

$$
\begin{gathered}
0,25x_1 + 0,5x_2 \leq 36 \\
0,1x_1 + 0,75x_2 \leq 22 \\
0,1x_1 + 0,4x_2 \leq 15 \\
x_j \geq 0, j = 1,2.
\end{gathered}
$$

Exemplo 3.5. (Problema da Dieta) A anemia é uma doença decorrente de baixos níveis de hemoglobina no sangue, proteína esta responsável pelo transporte de oxigênio.

Segundo a hematologista Adriana Ferreira, a "ferropriva" é a anemia mais comum e é causada pela deficiência de ferro no organismo. Para sua prevenção, deve-se adotar uma dieta rica em ferro, vitamina A, vitamina B12 e ácido fólico. Esses nutrientes podem ser encontrados em diversos alimentos, como espinafre, brócolis, agrião, tomate, cenoura, ovo, feijão, grão de bico, soja, carne, fígado e peixe. A Tabela 3.1 apresenta as necessidades diárias de cada nutriente, a respectiva quantidade em cada um dos alimentos e o preço referente a 100g de cada alimento. A fim de previnir que seus pacientes apresentem esse tipo de anemia, o Hospital Metrópole está estudando uma nova dieta. O objetivo é selecionar os ingredientes, com o menor custo possível, que farão parte das duas principais refeições diárias (almoço e jantar), de forma que 100% das necessidades diárias de cada um desses nutrientes sejam atendidas nas duas refeições. Além disso, o total ingerido nas duas refeições não pode ultrapassar 1,5kg.

	Porção de 100 gramas				
	Ferro	**Vitamina A**	**Vitamina B12**	**Ácido Fólico**	**Preço**
	(mg)	**(UI)**	**(mcg)**	**(mg)**	**(R$)**
Espinafre	3	7.400	0	0,4	0,30
Brócolis	1,2	138,8	0	0,5	0,20
Agrião	0,2	4.725	0	0,1	0,18
Tomate	0,49	1.130	0	0,25	0,16
Cenoura	1	14.500	0,1	0,005	0,30
Ovo	0,9	3.215	1	0,05	0,30
Feijão	7,1	0	0	0,056	0,40
Grão de Bico	4,86	41	0	0,4	0,40
Soja	3	1.000	0	0,08	0,45
Carne	1,5	0	3	0,06	0,75
Fígado	10	32.000	100	0,38	0,80
Peixe	1,1	140	2,14	0,002	0,85
Necessidades diárias	**8**	**4.500**	**2**	**0,4**	

Tabela 3.1: Tabela de nutrientes, necessidades diárias e custo por alimento.

Primeiramente, definem-se as variáveis de decisão do modelo:
x_j = quantidade (kg) do alimento j consumido diariamente, j = *1, 2, ..., 12.*
Assim, tem-se:
x_1 = quantidade (kg) de espinafre consumido diariamente.
x_2 = quantidade (kg) de brócolis consumido diariamente.
x_3 = quantidade (kg) de agrião consumido diariamente.
x_4 = quantidade (kg) de tomate consumido diariamente.
x_5 = quantidade (kg) de cenoura consumido diariamente.
x_6 = quantidade (kg) de ovo consumido diariamente.
x_7 = quantidade (kg) de feijão consumido diariamente.
x_8 = quantidade (kg) de grão de bico consumido diariamente.

x_9 = quantidade (kg) de soja consumido diariamente.
x_{10} = quantidade (kg) de carne consumido diariamente.
x_{11} = quantidade (kg) de fígado consumido diariamente.
x_{12} = quantidade (kg) de peixe consumido diariamente.

A função objetivo busca minimizar o custo total dos alimentos. Os valores na Tabela 3.1 estão expressos referentes a 100 gramas, porém, tanto na função objetivo como nas restrições, serão expressos por kg de alimento. Desta forma, a função objetivo será expressa por: minimizar $z = 3x_1 + 2x_2 + 1,8x_3 + 1,6x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 4x_7 + 4x_8 + 4,5x_9 + 5x_{10} + 8x_{11} + 8,5x_{12}$.

As restrições relacionadas às necessidades mínimas diárias de cada nutriente devem ser atendidas. Adicionalmente, deve-se considerar a restrição de peso máximo permitido nas duas refeições.

1. As necessidades mínimas diárias de ferro devem ser atendidas:

$$30x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 4,9x_4 + 10x_5 + 9x_6 + 71x_7 + 48,6x_8 + 30x_9 + 15x_{10} + 100x_{11} + 11x_{12} \geq 80.$$

2. As necessidades mínimas diárias de vitamina A devem ser atendidas:

$$74.000x_1 + 1.388x_2 + 47.250x_3 + 11.300x_4 + 145.000x_5 + 32.150x_6 + 410x_8 + 10.000x_9 + 320.000x_{11} + 1.400x_{12} \geq 45.000.$$

3. As necessidades mínimas diárias de vitamina B12 devem ser atendidas:

$$x_5 + 10x_6 + 30x_{10} + 1.000x_{11} + 21,4x_{12} \geq 20.$$

4. As necessidades mínimas diárias de ácido fólico devem ser atendidas:

$$4x_1 + 5x_2 + x_3 + 2,5x_4 + 0,05x_5 + 0,5x_6 + 0,56x_7 + 4x_8 + 0,8x_9 + 0,6x_{10} + 3,8x_{11} + 0,02x_{12} \geq 4.$$

5. O total consumido nas duas refeições não pode ultrapassar 1,5kg:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} \leq 1,5.$$

6. As variáveis de decisão do modelo são não negativas:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12} \geq 0.$$

7. O modelo completo será descrito como: minimizar $z = 3x_1 + 2x_2 + 1,8x_3 + 1,6x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 4x_7 + 4x_8 + 4,5x_9 + 5x_{10} + 8x_{11} + 8,5x_{12}$ sujeito a:

$$30x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 4,9x_4 + 10x_5 + 9x_6 + 71x_7 + 48,6x_8 + 30x_9 + 15x_{10} + 100x_{11} + 11x_{12} \geq 80$$

$$74.000x_1 + 1.388x_2 + 47.250x_3 + 11.300x_4 + 145.000x_5 + 32.150x_6 + 410x_8 + 10.000x_9 + 320.000x_{11} + 1.400x_{12} \geq 45.000$$

$$x_5 + 10x_6 + 30x_{10} + 1.000x_{11} + 21,4x_{12} \geq 20$$

$$4x_1 + 5x_2 + x_3 + 2,5x_4 + 0,05x_5 + 0,5x_6 + 0,56x_7 + 4x_8 + 0,8x_9 + 0,6x_{10} + 3,8x_{11} + 0,02x_{12} \geq 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} \leq 1,5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12} \geq 0$$

No próximo capítulo serão abordados os métodos de resolução de um PPL.

4 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Neste capítulo será feita uma breve abordagem de dois métodos de resolução de um Problema de Programação Linear, a saber, os métodos analítico e Simplex. O método geométrico será abordado no capítulo 5, de forma mais detalhada, pois se refere ao tema central deste trabalho.

A escolha do método de resolução dependerá da quantidade de variáveis de decisão que o problema apresentar, pois em um problema com muitas variáveis, o método analítico e o geométrico tornam-se inviáveis, sendo utilizados o método Simplex ou algum outro software.

4.1 Método analítico

Nesta seção será abordada a solução analítica de um Problema de Programação Linear em que m < n. Para isto, será considerado um sistema $Ax = b$ de m equações lineares e n variáveis.

Teorema 4.1. *Um sistema de equações lineares tem zero, uma ou uma infinidade de soluções.*

Prova: Se $Ax = b$ é um sistema de equações lineares, vale exatamente uma das afirmações:

(a) o sistema não tem solução;

(b) o sistema tem exatamente uma solução;

(c) o sistema tem mais de uma solução.

A prova estará completa se conseguirmos mostrar que o sistema tem uma infinidade de soluções no caso (c).

Suponha que $Ax = b$ tenha mais de uma solução e seja $x_0 = x_1 - x_2$, onde x_1 e x_2 são duas soluções distintas quaisquer. Como x_1 e x_2 são distintas, a solução x_0 é não nula; além disso,

$$Ax_0 = A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = b - b = 0$$

Se k for um escalar qualquer, então

$$A(x_1 + kx_0) = Ax_1 + A(kx_0) = Ax_1 + k(Ax_0) = b - k0 = b + 0 = b$$

No entanto, isso significa que $x_1 + kx_0$ é uma solução de $Ax = b$. Como x_0 é não nula e existe uma infinidade de escolhas para k, o sistema $Ax = b$ tem uma infinidade de soluções.

Definição 4.1. *Variáveis não básicas (VNB) são as variáveis obtidas escolhendo-se um conjunto de variáveis n - m de x, e atribuindo valores iguais a zero a elas.*

Definição 4.2. *Variáveis básicas (VB) são as m variáveis restantes do sistema, que serão determinadas.*

Definição 4.3. *Solução básica (SB) são os valores encontrados para as variáveis básicas.*

Definição 4.4. *Base é o conjunto de variáveis básicas.*

Definição 4.5. *Solução básica factível (SBF) é a solução que atende as restrições de não negatividade.*

A solução do sistema $Ax = b$, se dará seguindo os seguintes passos:

1) Determinar quem serão as variáveis não básicas;

2) Determinar quem serão as variáveis básicas;

3) Resolver o sistema das variáveis básicas encontrando assim, a solução básica.

4) Calcular a solução ótima, aplicando na função objetivo z todas as possíveis soluções básicas e escolher a melhor alternativa.

O número máximo de soluções básicas será calculado pela combinação $C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, analisando todas as possíveis combinações de n variáveis escolhidas m a m, escolhendo, em seguida, a melhor delas.

Este método é adequado para valores pequenos de m e n, pois caso contrário, a resolução do sistema se tornaria impraticável. Segue o exemplo retirado de Fávero, 2012, pág.124.

Exemplo 4.1. Considere o seguinte Problema de Programação Linear:

$$max\ 3x_1 + 2x_2$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 20$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Resolvendo o problema de forma analítica, é preciso deixá-lo na forma padrão. Para isto, serão incluídas as variáveis de folga x_3 e x_4, sendo reescrito como:

$$max\ 3x_1 + 2x_2$$

sujeito a

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{gathered}$$

O novo sistema tem 2 equações e 4 variáveis. Assim, haverá *4 - 2 = 2* variáveis não básicas, e os valores das 2 variáveis básicas restantes serão determinados por um sistema de equações.

O total de soluções básicas será calculado pela combinação a seguir:

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!2!} = \frac{12}{2} = 6$$

Assim, serão 6 soluções básicas nesse sistema.

1ª solução básica:

Variáveis não básicas: x_1, x_2 , Variáveis básicas: x_3, x_4

Solução não básica: $x_1 = 0, x_2 = 0$

Sistema para o cálculo da solução básica

$$\begin{cases} 0 + 0 + x_3 = 6 \Rightarrow x_3 = 6 \\ 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + x_4 = 20 \Rightarrow x_4 = 20 \end{cases}$$

Função objetivo: $z = 3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$

2ª solução básica:

Variáveis não básicas: x_2, x_4 , Variáveis básicas: x_1, x_3

Solução não básica: $x_2 = 0, x_4 = 0$

Sistema para o cálculo da solução básica

$$\begin{cases} x_1 + 0 + x_3 = 6 \Rightarrow x_1 + x_3 = 6 \Rightarrow 4 + x_3 = 6 \Rightarrow x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2 \cdot 0 + 0 = 20 \Rightarrow 5x_1 = 20 \Rightarrow x_1 = 4 \end{cases}$$

Função objetivo: $z = 3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 12$

3ª solução básica:

Variáveis não básicas: x_2, x_3 , Variáveis básicas: x_1, x_4

Solução não básica: $x_2 = 0, x_3 = 0$

Sistema para o cálculo da solução básica

$$\begin{cases} x_1 + 0 + 0 = 6 \Rightarrow x_1 = 6 \\ 5x_1 + 2 \cdot 0 + x_4 = 20 \Rightarrow 5 \cdot 6 + x_4 = 20 \Rightarrow x_4 = 20 - 30 \Rightarrow x_4 = -10 \end{cases}$$

Como $x_4 < 0$, a solução é infactível.

4ª solução básica:

Variáveis não básicas: x_3, x_4 , Variáveis básicas: x_1, x_2

Solução não básica: $x_3 = 0, x_4 = 0$

Sistema para o cálculo da solução básica

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0 = 6 \Rightarrow x_1 + x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = 3,33 \\ 5x_1 + 2x_2 + 0 = 20 \Rightarrow 5x_1 + 2x_2 = 20 \Rightarrow x_1 = 2,67 \end{cases}$$

Função objetivo: $z = 3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 2,67 + 2 \cdot 3,33 = 14,7$

5ª solução básica:

Variáveis não básicas: x_1, x_3 , Variáveis básicas: x_2, x_4

Solução não básica: $x_1 = 0, x_3 = 0$

Sistema para o cálculo da solução básica

$$\begin{cases} 0 + x_2 + 0 = 6 \Rightarrow x_2 = 6 \\ 5 \cdot 0 + 2x_2 + x_4 = 20 \Rightarrow 2 \cdot 6 + x_4 = 20 \Rightarrow x_4 = 20 - 12 \Rightarrow x_4 = 8 \end{cases}$$

Função objetivo: $z = 3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 6 = 12$

6ª solução básica:

Variáveis não básicas: x_1, x_4 , Variáveis básicas: x_2, x_3

Solução não básica: $x_1 = 0, x_4 = 0$

Sistema para o cálculo da solução básica

$$\begin{cases} 0 + x_2 + x_3 = 6 \Rightarrow 10 + x_3 = 6 \rightarrow x_3 = 6 - 10 \rightarrow x_3 = -4 \\ 5 \cdot 0 + 2x_2 + 0 = 20 \Rightarrow x_2 = 10 \end{cases}$$

Como $x_3 < 0$, a solução é infactível.

Como queremos maximizar a função objetivo, a solução ótima é a 4ª solução básica, com $x_1 = 2,67$, $x_2 = 3,33$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ e $z = 14,67$.

4.2 O Método Simplex

Este método teve origem em 1947 com a disseminação da Pesquisa Operacional nos Estados Unidos, depois da Segunda Guerra Mundial, sendo hoje o mais conhecido para resolver Problemas de Programação Linear. A vantagem deste método, é que, ao contrário da resolução gráfica ou do método analítico, que são inviáveis para problemas com mais de três variáveis, ele pode ser aplicado a qualquer Problema de Programação Linear.

Para Taha(2008), "os cálculos do método simplex são particularmente tediosos, repetitivos e, acima de tudo, maçantes". Desta maneira, torna-se inviável seu estudo no Ensino Médio.

O desenvolvimento dos cálculos do Método Simplex serão facilitados quando:

1) Todas as restrições (com exceção da não negatividade das variáveis) são equações cujos lados direitos são não negativos;

2) Todas as variáveis são não negativas.

O algorítmo Simplex é um procedimento algébrico e iterativo, com um número finito de iterações, obtendo a cada iteração uma solução básica factível inicial, buscando, a cada nova iteração, uma nova solução básica factível com melhor valor na função objetivo, até que o valor ótimo seja atingido.

O algorítmo Simplex pode ser descrito no fluxograma conforme Figura 4.1.

Os passos do algoritmo geral descrito na Figura 4.1 estão detalhados a seguir, considerando um problema de maximização.

Início: O problema deve estar na forma padrão.

Passo 1: Encontrar uma solução básica factível (SBF) inicial para o PPL. Uma SBF inicial pode ser obtida atribuindo valores iguais a zero às variáveis de decisão. Para

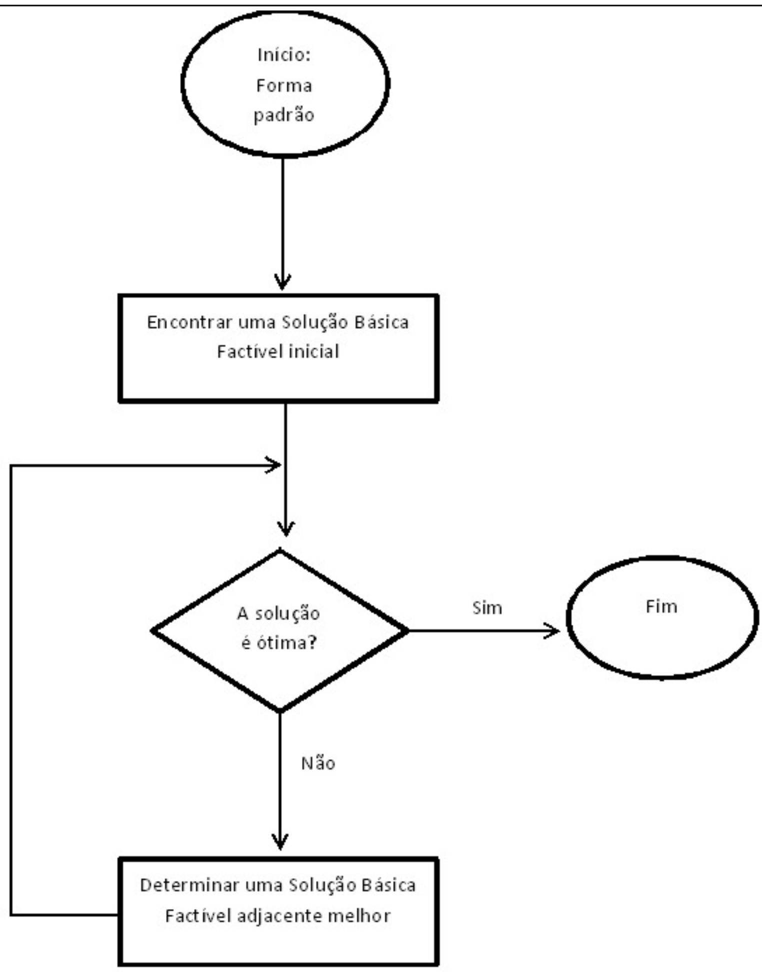


Figura 4.1: Fluxograma da descrição geral do algorítmo Simplex.

que essa solução seja factível, nenhuma das restrições do problema pode ser violada.

Passo 2: Teste de otimalidade. Uma solução básica factível é ótima se não houver soluções básicas factíveis adjacentes melhores. Uma SBF adjacente é melhor do que a SBF atual se houver um incremento positivo no valor da função objetivo z. Analogamente, uma SBF adjacente é pior do que a SBF atual se o incremento em z for negativo. Enquanto pelo menos uma das variáveis não básicas da função objetivo z tiver coeficiente positivo, há uma SBF melhor.

Iteração: Determinar uma SBF adjacente melhor. A direção de maior incremento em z deve ser identificada, para que uma melhor solução básica factível seja determinada. Para isso, três passos devem ser tomados:

1. Determinar a variável não básica que passará para o conjunto de variáveis básicas (base). Ela deve ser aquela que tem maior incremento em z, isto é, com maior coeficiente positivo em z.

2. Escolher a variável básica que passará para o conjunto de variáveis não básicas. A variável escolhida a sair da base deve ser aquela que limita o crescimento da variável não básica selecionada no passo anterior a entrar na base.

3. Resolver o sistema de equações recalculando os valores da nova solução básica adjacente. Antes disso, o sistema de equações deve ser convertido para uma forma mais conveniente, por meio de operações algébricas elementares, utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan. A partir do novo sistema de equações, cada nova equação deve possuir apenas uma variável básica com coeficiente igual a 1, cada variável básica deve aparecer em apenas uma equação, e a função objetivo deve ser escrita em função das variáveis não básicas, de forma que os valores das novas variáveis básicas e da função objetivo z podem ser obtidos diretamente, e o teste de otimalidade pode ser verificado facilmente.

No exemplo 4.1 foram calculadas todas as possíveis soluções básicas e escolhida a melhor delas. O mesmo exemplo será resolvido pelo Método Simplex.

Exemplo 4.2. Considere o seguinte Problema de Programação Linear:

$$max\ 3x_1 + 2x_2$$

sujeito a

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 \leq 6 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{gathered}$$

Para resolver o problema de forma analítica do método Simplex, o problema deve estar na forma padrão.

$$max : 3x_1 + 2x_2 \tag{4.1}$$

sujeito a

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6 \tag{4.2}$$

$$5x_1 + 2x_2 + x_4 = 20 \tag{4.3}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \tag{4.4}$$

Passo 1: Encontrar uma SBF inicial para o PPL.

Uma solução básica inicial pode ser obtida atribuindo valores iguais a zero às variáveis de decisão x_1 e x_2, que são variáveis não básicas. Os valores das variáveis básicas x_3 e x_4 podem ser obtido a partir do sistema de equações envolvendo as restrições, já que cada equação possui apenas uma variável básica com coeficiente 1 e aparece em apenas uma equação.

Resultado completo da solução inicial:

Variáveis não básicas: x_1, x_2. Variáveis básicas x_3, x_4.

Solução não básica: $x_1 = 0, x_2 = 0$.

Sistema para o cálculo da solução básica

$$\begin{cases} 0 + 0 + x_3 = 6 \Rightarrow x_3 = 6 \\ 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + x_4 = 20 \Rightarrow x_4 = 20 \end{cases}$$

Solução: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 6, 20)$.
Função objetivo: $z = 3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$.

Passo 2: Teste de otimalidade.

Podemos afirmar que a SBF inicial obtida no Passo 1 não é ótima, já que os coeficientes das variáveis não básicas x_1 e x_2 na função objetivo do sistema de equações são positivos. Se qualquer uma das variáveis deixar de assumir o valor zero, passando a assumir um valor positivo, haverá um incremento positivo no valor da função objetivo z. Dessa forma, é possível obter uma SBF adjacente melhor.

Iteração 1: Determinar uma SBF adjacente melhor.

Cada um dos três passos a serem implementados nessa iteração está detalhado a seguir:

1. Variável não básica que entrará na base.

De acordo com o sistema de equações, pode-se verificar que a variável x_1 possui maior coeficiente positivo na função objetivo comparada com a variável x_2, gerando assim maior incremento positivo em z, caso fossem consideradas as mesmas unidades de medida para x_1 e x_2. Logo, a variável não básica escolhida a entrar na base é x_1.

2. Variável básica que sairá da base.

Para selecionar a variável básica que sairá da base, devemos escolher aquela que limita o crescimento da variável não básica escolhida no passo anterior a entrar na base (x_1). Para isso, primeiramente, devemos atribuir o valor zero às variáveis que permaneceram não básicas (neste caso apenas x_2) em todas as equações. A partir daí, pode-se obter as equações de cada uma das variáveis básicas em função da variável não básica escolhida a entrar na base (x_1). Como todas as variáveis básicas devem assumir valores não negativos, inserindo-se o sinal de desigualdade do tipo ≥ 0 em cada uma das restrições pode-se identificar a variável básica que limita o crescimento de x_1.

Assim, atribuindo o valor zero à variável x_2 nas equações 4.2 e 4.3 do sistema de equações, pode-se obter as equações das variáveis básicas x_3 e x_4 em função de x_1:

$$x_3 = 6 - x_1$$
$$x_4 = 20 - 5x_1$$

Como as variáveis x_3 e x_4 devem assumir valores não negativos, logo:

$$x_3 = 6 - x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 6$$
$$x_4 = 20 - 5x_1 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 4$$

Podemos concluir que a variável que limita o crescimento de x_1 é a variável x_4, já que o valor máximo que x_1 pode atingir a partir de x_4 é menor comparado à variável x_3. Portanto, a variável básica escolhida para sair da base é x_4.

3. Transformar o sistema de equações utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan e recalcular a solução básica.

Conforme mostrado nos dois passos anteriores, a variável x_1 entra na base no lugar da variável x_4 de forma a gerar uma solução básica adjacente melhor. Portanto, o conjunto de variáveis não básicas e o conjunto de variáveis básicas passa a ser: x_2, x_4, x_1, x_3, respectivamente.

Busca-se, nessa etapa, recalcular os valores da nova solução básica factível. Como x_4 representa a nova variável não básica na solução adjacente, juntamente com x_2 que permaneceu não básica, tem-se que $x_2 = 0$ e $x_4 = 0$. A partir daí, os valores das variáveis básicas x_1 e x_3 da solução adjacente devem ser recalculados, além do valor da função objetivo z.

Primeiramente, o sistema de equações deve ser convertido, por meio de operações elementares, para uma forma mais conveniente, utilizando-se o método de eliminação de Gauss-Jordan, de modo que cada equação possua apenas uma variável básica (x_1 ou x_3) com coeficiente igual a 1, cada variável básica apareça em apenas uma equação e de forma que a função objetivo possa ser escrita em função das variáveis não básicas x_2 e x_4.

Para isso, os coeficientes da variável x_1 no sistema de equações atual devem ser transformados de 3, 1 e 5 para 0, 0 e 1.

Converteremos o coeficiente da variável x_1 na equação 4.3 de 5 para 1. Para isso, basta dividir esta por 5, de forma que a nova equação 4.5 passa a ser escrita em função de uma única variável básica (x_1) com coeficiente 1:

$$x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_4 = 4 \tag{4.5}$$

Outra transformação deve ser efetuada de modo a converter o coeficiente da variável x_1 na equação 4.2 de 1 para 0. Para isso, basta subtrair a equação 4.5 da equação 4.2, de forma que a nova equação 4.6 passa a ser escrita em função de uma única variável básicas (x_3) com coeficiente 1:

$$\frac{3}{5}x_2 + x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 2 \tag{4.6}$$

Finalmente, deve-se converter o coeficiente da variável x_1 na função objetivo de 3 para 0. Para isso, basta multiplicar a equação 4.5 por 3 e subtraí-la da equação 4.1, de forma que a nova equação 4.7 possa ser escrita em função de x_2 e x_4:

$$z = \frac{4}{5}x_2 - \frac{3}{5}x_4 + 12 \tag{4.7}$$

O sistema de equações completo, obtido após a aplicação do método de eliminação de Gauss-Jordan, é:

$$z = \frac{4}{5}x_2 - \frac{3}{5}x_4 + 12 \tag{4.8}$$

$$\frac{3}{5}x_2 + x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 2 \tag{4.9}$$

$$x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_4 = 4 \tag{4.10}$$

A partir do novo sistema de equações é possível obter imediatamente os novos valores de x_1, x_3 e z. O resultado completo da nova solução é:

Variáveis não básicas: x_2, x_4.

Variáveis básicas: x_1, x_3.

Solução não básica: $x_2 = 0, x_4 = 0$.

Solução básica factível: $x_1 = 4, x_3 = 2$.

Solução: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4, 0, 2, 0)$.

Função objetivo: $z = 3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 0 = 12$.

Houve um incremento positivo em z comparado com a SBF atual, portanto foi possível obter uma SBF adjacente melhor. A SBF adjacente obtida nessa iteração passa a ser a SBF atual.

Passo 2: Teste de otimalidade.

A SBF atual ainda não é ótima, já que o coeficiente da variável não básica x_2 na equação 4.8 é positivo. Se essa variável passar a assumir qualquer valor positivo, haverá um incremento positivo no valor da função objetivo z. Dessa forma, é possível obter uma SBF adjacente melhor.

Iteração 2: Determinar uma SBF melhor

Os três passos a serem implementados para determinar uma SBF melhor estão detalhados a seguir:

1. Variável não básica que entrará na base.

De acordo com o sistema de equações, pode-se verificar que a variável x_2 é a única com coeficiente positivo na equação 4.8, de forma a gerar um incremento positivo na função objetivo z para qualquer valor positivo que a variável x_2 possa assumir. Logo, a variável não básica escolhida a passar do conjunto de variáveis não básicas para o conjunto de variáveis básicas é x_2.

2. Variável básica que sairá da base.

A variável básica que sairá da base é aquela que limita o crescimento da variável não básica escolhida no passo anterior a entrar na base (x_4). Atribuindo o valor zero à variável que permaneceu não básica ($x = 0$), em cada uma das equações 4.9 e 4.10, é possível obter as equações de cada uma das variáveis básicas x_1 e x_2 da solução básica atual em função da variável não básica escolhida a entrar na base (x_2):

$$x_1 = 4 - \frac{2}{5}x_2$$
$$x_3 = 2 - \frac{3}{5}x_2$$

Como as variáveis x_1 e x_3 devem assumir valores não negativos, logo:

$$x_1 = 4 - \frac{2}{5}x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq 10$$
$$x_3 = 2 - \frac{3}{5}x_2 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq \frac{10}{3}$$

Podemos concluir que a variável que limita o crescimento de x_2 é a variável x_3, já que o valor máximo que x_2 pode assumir a partir de x_3 é menor comparado à variável x_1. Portanto, a variável básica escolhida para sair da base é x_3.

3. Transformar o sistema de equações utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan e recalcular a solução básica.

Conforme mostrado nos dois passos anteriores, a variável x_2 entra na base no lugar da variável x_3 de forma a gerar uma solução básica adjacente melhor. Portanto, o conjunto de variáveis não básicas e o conjunto de variáveis básicas passa a ser: variáveis não básicas: x_3, x_4 , variáveis básicas: x_1, x_2.

Antes de calcular os valores da nova solução básica, o sistema de equações deve ser convertido por meio do método de eliminação de Gauss-Jordan.

Neste caso, os coeficientes da variável x_2 no sistema de equações atual devem ser transformados de $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{5}$ para 0, 1 e 0.

Primeiramente, converteremos o coeficiente da variável x_2 na equação 4.9 de $\frac{3}{5}$ para 1. Para isso, basta multiplicar a equação 4.9 por $\frac{5}{3}$, de forma que a nova equação 4.11 passa a ser escrita em função de uma única variável básica (x_2) com coeficiente 1:

$$x_2 + \frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 = \frac{10}{3} \tag{4.11}$$

Analogamente, deve-se converter o coeficiente da variável x_2 na equação 4.10 de $\frac{2}{5}$ para 0. Para isso, basta multiplicar a equação 4.11 por $\frac{2}{5}$ e subtraí-la da equação 4.10, de forma que a nova equação 4.12 passa a ser escrita em função de uma única variável básicas (x_1) com coeficiente 1:

$$x_1 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{8}{3} \tag{4.12}$$

Finalmente, deve-se converter o coeficiente da variável x_2 na função objetivo de $\frac{4}{5}$ para 0. Para isso, basta multiplicar a equação 4.11 por $\frac{4}{5}$ e subtraí-la da equação 4.8, de forma que a nova equação 4.13 possa ser escrita em função de x_3 e x_4:

$$z = -\frac{4}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{44}{3} \tag{4.13}$$

O sistema de equações completo está representado a seguir:

$$z = -\frac{4}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{44}{3} \tag{4.14}$$

$$x_2 + \frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = \frac{10}{3} \tag{4.15}$$

$$x_1 - \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{8}{3} \tag{4.16}$$

A partir do novo sistema de equações é possível obter imediatamente os novos valores de x_1, x_2 e z. O resultado completo da nova solução é:

Variáveis não básicas: x_3, x_4 , Variáveis básicas x_1, x_2

Solução não básica: $x_3 = 0, x_4 = 0$

Solução básica factível: $x_1 = \frac{8}{3} = 2,67 \ e \ x_2 = \frac{10}{3} = 3,33$

Solução: $x_1, x_2, x_3, x_4 = \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, 0, 0$

Função objetivo: $z = 3x_1 + 2x_2 = 3 \cdot \frac{8}{3} + 2 \cdot \frac{10}{3} = \frac{44}{3} = 14,67$

Assim, foi possível obter uma SBF adjacente melhor, já que houve um incremento positivo em z, comparado com a SBF atual. A SBF adjacente nessa iteração passa a ser a SBF atual.

Passo 2: Teste de otimalidade.

A SBF atual é a ótima, já que os coeficientes das variáveis não básicas x_3 e x_4 na equação 4.14 são negativos. Portanto, não é mais possível nenhum incremento positivo no valor da função objetivo z, finalizando aqui o algorítimo do exemplo 4.2.

Existe também a resolução na forma tabular do método Simplex para problemas de maximização, método simplex para problemas de minimização, entre outros, mas como este não é o tema deste trabalho, não serão explanados.

No capítulo a seguir apresentaremos a PL do ponto de vista geométrico.

5 PROGRAMAÇÃO LINEAR GEOMÉTRICA

Este capítulo aborda a resolução gráfica de um Problema de Programação Linear. Este método de resolução não pode ser visto como ferramenta prática, pois é adequado somente para problemas simples, que envolvem duas variáveis de decisão. Para problemas com 3 variáveis de decisão, a resolução se dará de forma muito complexa, porém possível. No entando, ele é o mais adequado para a proposta deste trabalho, que é a aplicação no Ensino Médio, pois permite aprofundar a compreensão do que é um Problema de Programação Linear e de suas soluções.

5.1 Uma solução geométrica para Problemas de Programação Linear

Cada problema a ser abordado neste capítulo é um caso especial do seguinte problema:

Problema: Encontrar valores de x_1 e x_2 que ou maximizam ou minimizam

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{5.1}$$

sujeito a

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\geq b_2 \\ &... \\ &... \\ &... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &\geq b_m \end{aligned} \tag{5.2}$$

e

$$x_1 \geq 0 \, e \, x_2 \geq 0 \tag{5.3}$$

Em cada uma das condições de 5.2, pode ser usado também um dos símbolos $\leq$ ou $=$.

O problema acima é chamado *Problema geral de Programação Linear* em duas variáveis. A função linear z em 5.1 é chamada *função-objetivo.* As equações 5.2 e 5.3 são chamadas *restrições* ou *vínculos*; em particular, as equações em 5.3 são chamadas de *restrições de não-negatividade* das variáveis x_1 e x_2.

Para resolver graficamente um PPL em duas variáveis, será encontrado um par de variáveis (x_1,x_2) que satisfaz todas as restrições, chamado de *solução viável.* O conjunto de todas as soluções viáveis determina um subconjunto do plano x_1x_2 chamado *região viável.* Nosso objetivo é encontrar uma solução viável que maximize a função-objetivo, ou seja, a *solução ótima.*

Para examinar a região viável de um Problema de Programação Linear, observa-se que cada restrição do tipo

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$$

define uma reta no plano x_1x_2, enquanto cada restrição da forma

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i \text{ ou } a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geq b_i$$

define um semiplano que inclui a reta de fronteira

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$$

Assim, a região viável é sempre uma intersecção de um número finito de retas e semiplanos.

5.2 Esquematização gráfica de soluções de Problemas de Programação Linear com duas variáveis

Aqui serão abordadas algumas possíveis soluções para um Problema de Programação Linear, de acordo com a região viável obtida em cada caso.

As regiões viáveis podem ser limitadas ou ilimitadas, desta forma, as soluções poderão ser dadas como:

- Uma única solução ótima;
- Todos os pontos de um segmento de reta são soluções ótimas;
- Solução ilimitada;
- Uma semi-reta contendo todos os pontos de solução ótima;
- Conjunto solução vazio.

A Figura 5.1 representa a solução ótima de uma região viável:

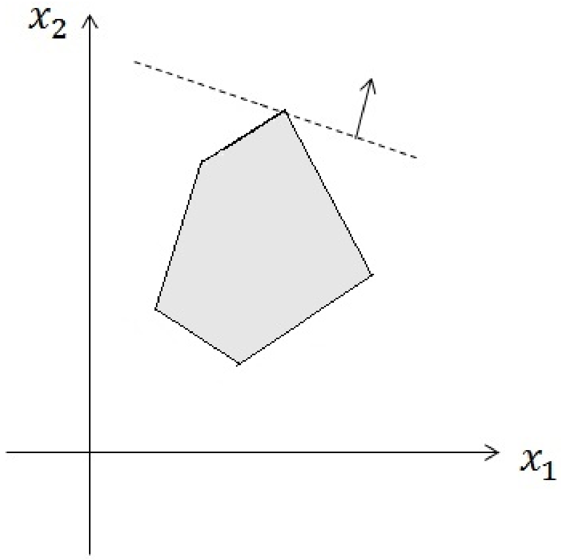


Figura 5.1: Solução ótima de uma região viável.

Todos os pontos de um segmento de reta são soluções ótimas, e dão o mesmo valor para a função objetivo, como pode-se ver na Figura 5.2

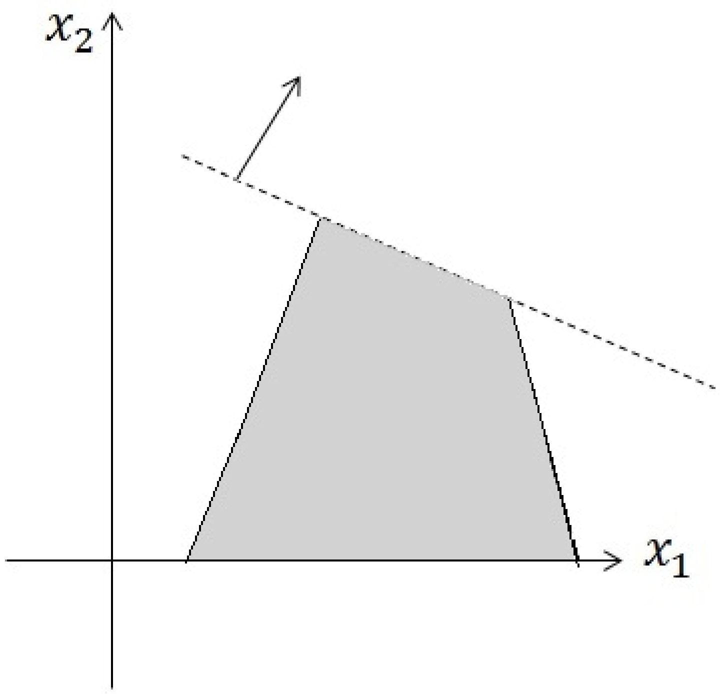


Figura 5.2: Solução ótima representada por um segmento de reta.

Uma solução ilimitada está representada na Figura 5.3

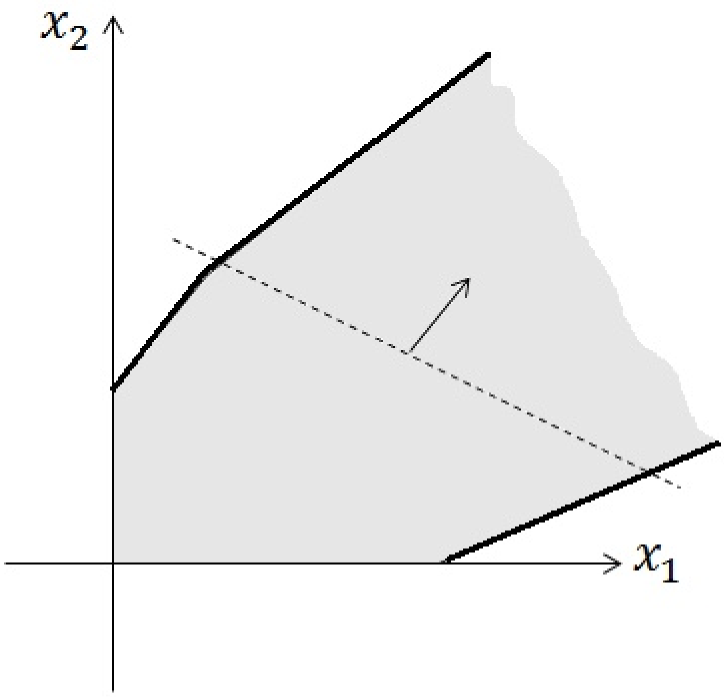


Figura 5.3: Solução ilimitada.

Uma semi-reta contendo todos os pontos de solução ótima está representada na Figura 5.4

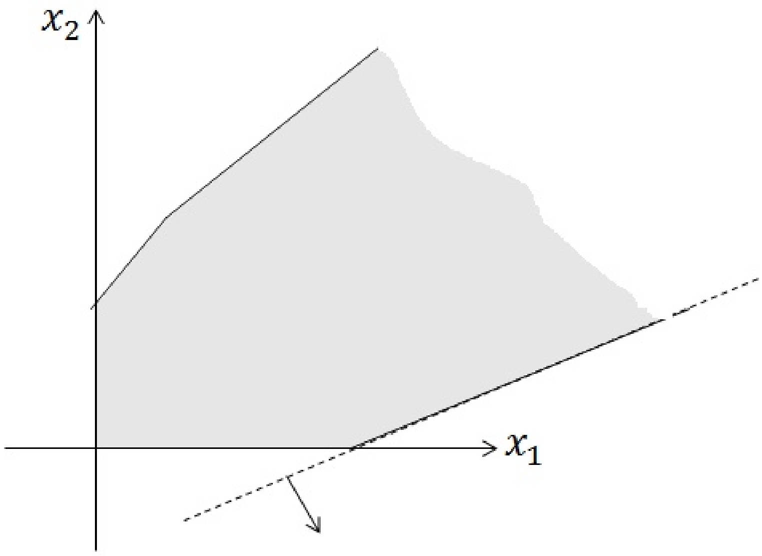


Figura 5.4: Solução ótima dada por uma semi-reta.

Um conjunto de soluções vazio, isto é, quando não há intersecção das regiões representadas pelas restrições está representado na Figura 5.5

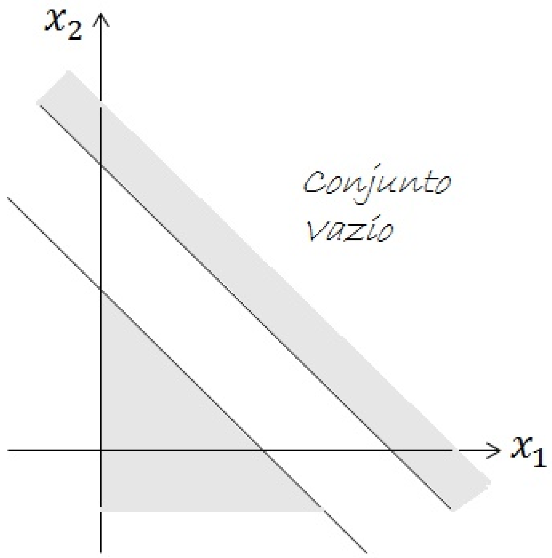


Figura 5.5: Conjunto solução vazio.

5.3 Exemplos de resolução de PPL pelo método geométrico

Os exemplos abordados a seguir foram retirados de Anton(2012):

Exemplo 5.1. Minimizando o custo Um estudante quer projetar um desjejum com flocos de milho e leite que seja o mais econômico possível. Levando em conta o que ele consegue comer nas suas outras refeições, ele decide que seu café da manhã deveria suprí-lo com pelo menos 9 gramas de proteínas, pelo menos uma terça parte da necessidade diária recomendada(NDR) de vitamina D e pelo menos uma quarta parte da NDR de cálcio. Ele encontra as informações nutricionais nas embalagens do leite e do flocos de milho contidas na Tabela 5.1:

	Leite(meio copo)	Flocos de Milho(1 xícara)
Custo	7,5 centavos	50 centavos
Proteína	4 gramas	2 gramas
Vitamina D	$\frac{1}{8}$ de NDR	$\frac{1}{10}$ de NDR
Cálcio	$\frac{1}{6}$ de NDR	Nada

Tabela 5.1: Tabela Nutricional do exemplo 5.1.

A fim de não ter uma mistura muito empapada ou muito seca, o estudante decide limitar-se a misturas que contenham de no mínimo 1 a no máximo 3 xícaras de flocos de milho por copo de leite. Quais quantidades de leite e de flocos de milho ele deve utilizar para minimizar o custo do seu desjejum?

Solução:

Para a formulação matemática desse problema, sejam x_1 a quantidade de leite utilizada(medida em meios copos) e x_2 a quantidade de flocos de milho utilizada(medida em xícaras). Então, sendo z o custo do desjejum em centavos, podemos escrever as restrições seguintes:

Custo do desjejum:	$z = 7,5x_1 + 50x_2$
Pelo menos 9 gramas de proteína:	$4x_1 + 2x_2 \geq 9$
Pelo menos $\frac{1}{3}$ NDR de vitamina D:	$\frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{10}x_2 \geq \frac{1}{3}$
Pelo menos $\frac{1}{4}$ NDR de Cálcio:	$\frac{1}{6}x_1 \geq \frac{1}{4}$
Pelo menos 1 xícara de flocos de milho por copos(dois meios copos) de leite:	$\frac{x_2}{x_1} \geq \frac{1}{2}$ (ou $x_1 \leq 2x_2$)
No máximo 3 xícaras de flocos de milho por copo(dois meios copos) de leite:	$\frac{x_2}{x_1} \leq \frac{3}{2}$ (ou $3x_1 \geq 2x_2$)

Como antes, também estamos supondo implicitamente que $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$. Assim, a formulação matemática completa do problema é como segue: encontrar valores de x_1 e x_2 que minimizam

$$z = 7,5x_1 + 50x_2$$

sujeito a

$$\begin{gathered}
4x_1 + 2x_2 \geq 9 \\
\frac{1}{8}x_1 + \frac{1}{10}x_2 \geq \frac{1}{3} \\
\frac{1}{6}x_1 \geq \frac{1}{4} \\
x_1 \leq 2x_2 \\
3x_1 \geq 2x_2 \\
x_1 \geq 0 \\
x_2 \geq 0
\end{gathered}$$

A região viável deste problema é indicada na Figura 5.6. Por ser ilimitada, o Teorema 3.1 não nos garante que a função-objetivo atinge um valor máximo. De fato, é fácil verificar que, como a região viável contém pontos nos quais ambos x_1 e x_2 são arbitrariamente grandes e positivos, a função objetivo toma valores arbitrariamente grandes e positivos. Este problema não tem solução ótima. Em vez disto, nós dizemos que o problema tem uma *solução ilimitada*.

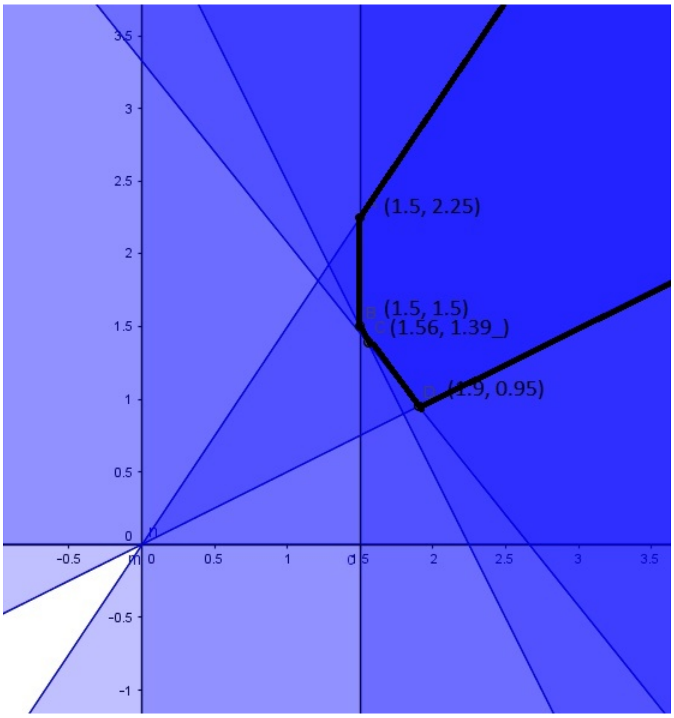


Figura 5.6: Região viável do exemplo 5.1.

Exemplo 5.2. Maximizando o lucro de vendas

Um fabricante de bombons tem estocado bombons de chocolate, sendo 130 kg com recheio de cerejas e 170 kg com recheio de menta. Ele decide vender o estoque na forma de dois pacotes sortidos diferentes. Um pacote contém uma mistura com metade do peso em bombons de cereja e metade em menta e vende por R$ 20,00 o kg. O outro pacote contém uma mistura de um terço de bombons de cereja e dois terços de menta e vende por R$ 12,50 o kg. O vendedor deveria preparar quantos quilos de cada mistura a fim de maximizar seu lucro de vendas?

Solução:

Inicialmente vamos formular este problema matematicamente. Chamamos de A a mistura com metade de cereja e metade de menta e o número de quilos desta mistura que deverá ser preparada é x_1. Chamamos de B a mistura com um terço cereja e dois terços menta e o número de quilos desta mistura que deverá ser preparada é x_2. Como a mistura A vende por R$ 20,00 e a mistura B vende por R$ 12,50 por quilo, o total z de vendas(em reais) será

$$z = 20{,}00x_1 + 12{,}50x_2.$$

Como cada quilo da mistura A contém meio quilo de bombons de cereja e cada quilo da mistura B contém um terço de quilo de bombons de cereja, o número total de quilos de bombons de cereja usados em ambas misturas é

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2.$$

De maneira similar, como cada quilo da mistura A contém meio quilo de menta e cada quilo da mistura B contém dois terços de quilo de menta, o número total de quilos de bombons de menta usados em ambas misturas é

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{3}x_2.$$

Já que o fabricante só pode usar, no máximo, 130 quilos de bombons de cereja e 170 quilos de bombons de menta, nós devemos ter

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 &\leq 130\\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{3}x_2 &\leq 170\end{aligned}$$

Além disso, como x_1 e x_2 não podem ser números negativos, temos

$$x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0.$$

Isto mostra que o problema pode ser formulado matematicamente, como segue: Encontrar valores de x_1 e x_2 que maximizam

$$z = 20{,}00x_1 + 12{,}50x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 &\leq 130\\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{3}x_2 &\leq 170\\ x_1 &\geq 0\\ x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

As quatro restrições

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 &\leq 130\\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{3}x_2 &\leq 170\\ x_1 &\geq 0\\ x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

definem os semiplanos indicados nas partes (a), (b), (c) e (d) da Figura 5.7. A região viável deste problema é, portanto, a intersecção destes 4 semiplanos, que é a região indicada na Figura 5.7(e).

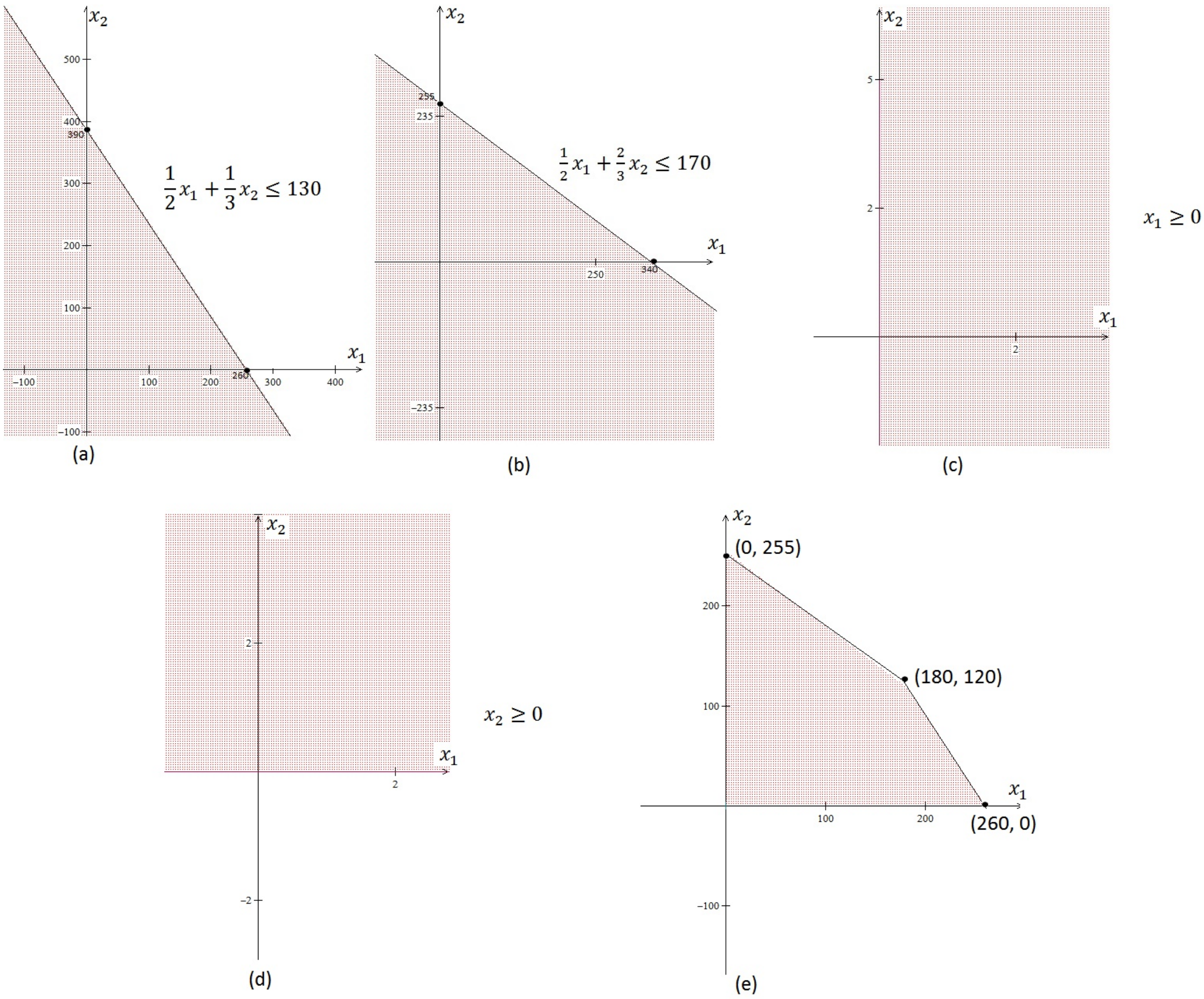


Figura 5.7: Semiplanos indicados pelas restrições do Exemplo 5.2 e a região viável.

Pode ser mostrado que a região viável de um Problema de Programação Linear tem uma fronteira que consiste de um número finito de segmentos de retas. Uma região viável é dita *limitada* (Figura 5.7(e)) se puder ser englobada num círculo suficientemente grande; caso contrário, ela é *ilimitada*(Figura 5.10). Se a região viável é vazia(ou seja, não contém pontos), então as restrições são inconsistentes e o Problema de Programação Linear não possui solução(Figura 5.11).

Os pontos de fronteira de uma região viável que são intersecções de dois segmentos de retas de fronteira, são chamados *pontos extremos.* (Também são chamados pontos de *esquina* ou *de vértice.*) Por exemplo, pela Figura 5.7(e), a região viável tem quatro pontos extremos,

$$(0,0),\ (0,255),\ (180,120),\ (260,0)$$

A Figura 5.7(e) mostra que a região viável é limitada. Consequentemente, pelo Teorema 3.1 a função-objetivo

$$z = 20,00x_1 + 12,50x_2$$

atinge tanto um valor mínimo quanto um valor máximo em pontos extremos. Os quatro pontos extremos e os correspondentes valores de z são dados na Tabela 5.2.

Ponto Extremo (x_1,x_2)	Valor de $z = 20,00x_1 + 12,50x_2$
(0,0)	0
(0,255)	3187,50
(180,120)	5100,00
(260,0)	5200,00

Tabela 5.2: Tabela de pontos extremos do Exemplo 5.2.

Nós vemos que o maior valor de z é 5.200,00 e a correspondente solução ótima é (260,0). Assim, o fabricante de balas atinge um máximo de R$ 5.200,00 de vendas quando ele produz 260 quilos da mistura A e nada da mistura B.

Nos próximos exemplos vamos usar o Teorema 3.1 para resolver vários Problemas de Programação Linear e ilustrar as variações na natureza das soluções que podem ocorrer.

Exemplo 5.3. Encontre valores de x_1 e x_2 que maximizam

$$z = x_1 + 3x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_1 - x_2 &\leq 7 \\ x_2 &\leq 6 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Solução:

Na Figura 5.8 apresentamos a região viável deste problema. Por ser limitada, o valor máximo de z é atingido em um dos cinco pontos extremos. Os valores da função-objetivo nos cinco pontos extremos são dados na Tabela 5.3.

A partir da Tabela 5.3 vemos que o valor máximo de z é 21, atingido em x_1=3 e x_2=6.

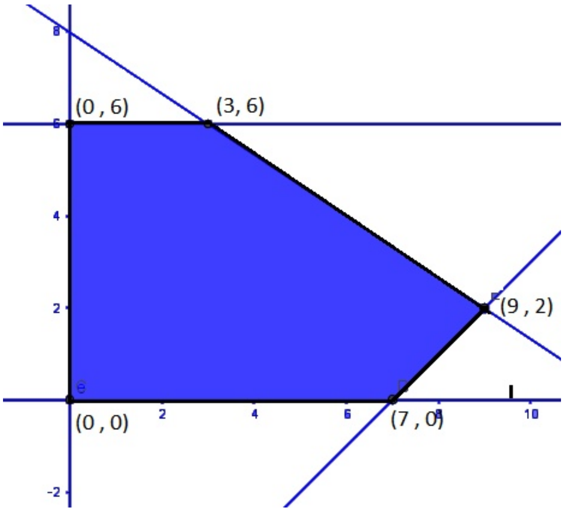


Figura 5.8: Região viável do exemplo 5.3.

Ponto extremo (x_1,x_2)	Valor de $z = x_1 + 3x_2$
(0,6)	18
(3,6)	21
(9,2)	15
(7,0)	7
(0,0)	0

Tabela 5.3: Tabela de pontos extremos do Exemplo 5.3.

Exemplo 5.4. Encontre valores de x_1 e x_2 que maximizam

$$z = 4x_1 + 6x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 24 \\ x_1 - x_2 &\leq 7 \\ x_2 &\leq 6 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solução:

As restrições deste problema são idênticas às restrições do Exemplo 5.3, portanto a região viável deste problema também é dada pela Figura 5.8. Os valores da função-objetivo nos cinco pontos extremos são dados na Tabela 5.4.

Vemos que a função-objetivo atinge um valor máximo de 48 nos dois pontos extremos adjacentes (3,6) e (9,2). Isto mostra que uma solução ótima em um PPL não precisa ser única. Se a função-objetivo assume o mesmo valor em dois pontos extremos adjacentes, ela tem o mesmo valor em todos os pontos do segmento de reta da fronteira que conecta estes dois pontos extremos. Assim, neste exemplo, o valor máximo de z é alcançado em todos os pontos do segmento de reta que conecta os pontos (3,6) e (9,2).

Ponto extremo (x_1,x_2)	Valor de $z = 4x_1 + 6x_2$
(0,6)	36
(3,6)	48
(9,2)	48
(7,0)	28
(0,0)	0

Tabela 5.4: Tabela de pontos extremos do Exemplo 5.4.

Exemplo 5.5. A região viável é um segmento de reta.

Encontre valores de x_1 e x_2 que minimizam

$$z = 2x_1 - x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 12 \\ 2x_1 - 3x_2 &\geq 0 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solução:

Na Figura 5.9 apresentamos a região viável deste problema. Como uma das restrições é uma restrição de igualdade, a região viável é um segmento de reta com dois pontos extremos. Os valores de z nos dois pontos extremos são dados na Tabela 5.5.

Ponto extremo (x_1,x_2)	Valor de $z = 2x_1 - x_2$
(3,2)	4
(6,0)	12

Tabela 5.5: Tabela de pontos extremos do Exemplo 5.5.

Assim, o valor mínimo de z é 4, atingido em x_1=3 e x_2=2.

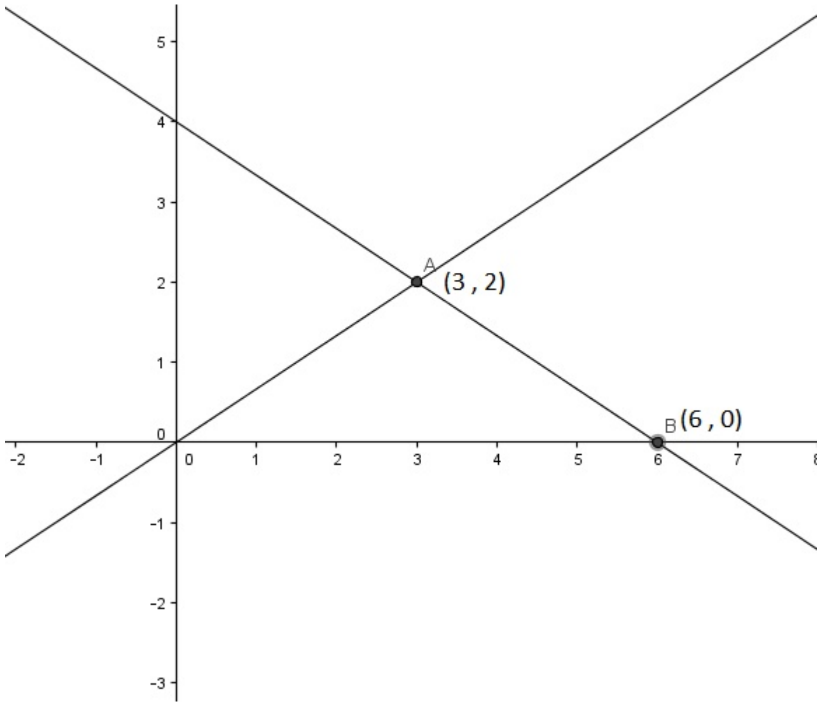


Figura 5.9: Região viável do exemplo 5.5.

Exemplo 5.6. Encontre valores de x_1 e x_2 que maximizam

$$z = 2x_1 + 5x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 8 \\ -4x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 0 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solução:

A região viável deste PPL é indicada na Figura 5.10. Por ser ilimitada, o Teorema 3.1 não nos garante que a função-objetivo atinge um valor máximo. De fato, é fácil verificar que, como a região viável contém pontos nos quais ambos x_1 e x_2 são arbitrariamente grandes e positivos, a função objetivo

$$z = 2x_1 + 5x_2$$

toma valores arbitrariamente grandes e positivos. Este problema não tem solução ótima. Em vez disto, nós dizemos que o problema tem uma *solução ilimitada.*

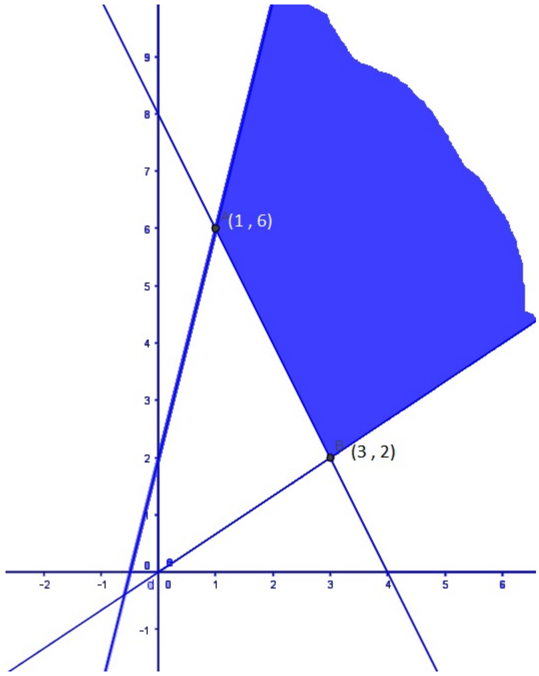


Figura 5.10: Região viável do exemplo 5.6.

Exemplo 5.7. Encontre valores de x_1 e x_2 que maximizam

$$z = -5x_1 + x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 8 \\ -4x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 0 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solução:

As restrições acima são as mesmas que as do Exemplo 5.6, portanto a região viável deste problema também é dada pela Figura 5.10. A função-objetivo deste problema atinge um máximo na região viável e, pelo Teorema 3.1, este máximo deve ser atingido num ponto extremo. Os valores de z nos dois pontos extremos são dados na Tabela 5.6.

Ponto extremo (x_1,x_2)	Valor de $z = -5x_1 + x_2$
(1,6)	1
(3,2)	-13

Tabela 5.6: Tabela de pontos extremos do Exemplo 5.7.

Assim, o valor máximo de z é 1 e é atingido em x_1=1 e x_2=6.

Exemplo 5.8. Encontre valores de x_1 e x_2 que minimizam

$$z = 3x_1 - 8x_2$$

sujeito a

$$\begin{gathered} 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 11x_2 \leq 33 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 24 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{gathered}$$

Solução:

Como pode ser visto na Figura 5.11, a intersecção dos cinco semiplanos definidos pelas cinco restrições é vazio. Este PPL não possui soluções viáveis pois as restrições são inconsistentes.

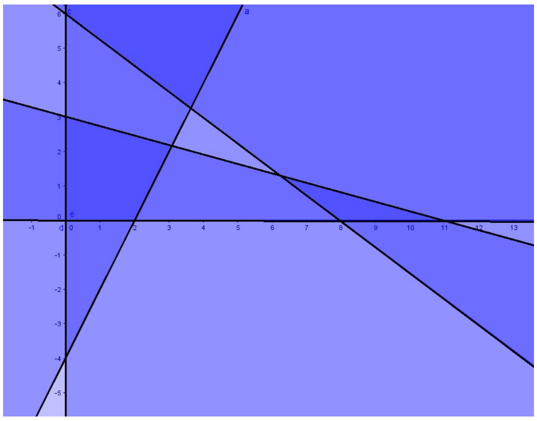


Figura 5.11: Região viável do exemplo 5.8.

Não há pontos comuns a todas as cinco regiões sombreadas.

No próximo capítulo será feita uma breve abordagem de aplicações no Ensino Médio e, em seguida a proposta de uma sequência didática.

6 APLICAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Em seu trabalho, Martins(2013) faz uma análise de sete livros didáticos indicados no "Guia de livros didáticos" do Programa Nacional do Livro Didático 2012 (PNLD 2012), verificando quais deles abordavam o conteúdo sobre Programação Linear. Dos sete livros analisados, apenas dois fizeram uma breve referência ao tema, como podemos ver na Figura 6.1:

Coleção - Editora	**Autor (es)**	**Aborda PL?**
Conexões com a matemática - Moderna	Juliane Matsubara Barroso	Não
Matemática: contexto & aplicações – Ática	Luiz Roberto Dante	Sim
Matemática: Paiva – Moderna	Manoel Paiva	Não
Matemática: Ciência e aplicações – Saraiva	David Degenszajn Gelson Iezzi Nilze de Almeida Osvaldo Dolce Roberto Périgo	Sim
Matemática: Ciência Linguagem e tecnologia – Scipione	Jackson Ribeiro	Não
Matemática: Ensino médio – Saraiva	Maria Ignez Diniz Kátia Stocco Smole	Não
Novo olhar: Matemática - FTD	Joamir Souza	Não

Figura 6.1: Coleções do PNLD 2012 - Fonte: Martins(p.53, 2012).

Dante(2011) aborda a Programação Linear como um assunto optativo, fazendo uma breve introdução sobre a importância do uso de sistemas lineares e inequações em problemas de Economia, transporte, dietas, entre outros, definindo o que é um Problema de Programação Linear.

Em seguida, Dante(2011) introduz um problema que será resolvido no exemplo 6.3

e faz somente um *passo a passo* de como resolver um Problema de Programação Linear pelo método geométrico, descrito abaixo:

Diante de um Problema de Programação Linear, consideramos a seguinte orientação para resolvê-lo:

1. Estabelecemos a função objetivo, isto é, a função que queremos maximizar ou minimizar.
2. Transformamos as restrições impostas no problema num sistema de inequações lineares.
3. Traçamos o gráfico do polígono convexo correspondente a essas restrições determinando as coordenadas dos seus vértices.
4. Calculamos os valores da função objetivo em cada um dos vértices.
5. O maior desses valores é o máximo e o menor é o mínimos da função objetivo.
6. Voltamos ao problema e damos a sua solução.

Depois, Dante(2011) resolve alguns exemplos de aplicação, seguindo o *passo a passo*, como pode ser visto nos exemplos 6.1, 6.2 e 6.3.

Exemplo 6.1. Um comerciante vende dois tipos de artigos, $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$. Na venda do artigo $\boldsymbol{A}$ tem um lucro de 20 por unidade e na venda do artigo $\boldsymbol{B}$ tem um lucro de 30. Em seu depósito só cabem 100 artigos e sabe-se que por compromissos já assumidos ele venderá pelo menos 15 artigos do tipo $\boldsymbol{A}$ e 25 do tipo $\boldsymbol{B}$. O distribuidor pode entregar ao comerciante, no máximo, 60 artigos do tipo $\boldsymbol{A}$ e 50 artigos do tipo $\boldsymbol{B}$. Quantos artigos de cada tipo deverá o comerciante encomendar ao distribuidor para que, supondo que os venda todos, obtenha o lucro máximo?

SOLUÇÃO:

Seja x o número de artigos do tipo $\boldsymbol{A}$ e y o tipo de artigo do tipo $\boldsymbol{B}$.

1. Função objetivo

Se para cada artigo do tipo $\boldsymbol{A}$ que vende tem um lucro de 20 e para cada artigo do tipo $\boldsymbol{B}$ tem um lucro de 30, o lucro total é dado pela função objetivo $L = 20x + 30y$.

2. Restrições

a) Cabem no máximo 100 artigos: $x + y \leq 100$.
b) Serão vendidos pelo menos 15 artigos $\boldsymbol{A}$: $x \geq 15$.
c) Serão vendidos pelo menos 25 artigos $\boldsymbol{B}$: $y \geq 25$.
d) O distribuidor entregará no máximo 60 artigos $\boldsymbol{A}$: $x \leq 60$.

e) O distribuidor entregará no máximo 50 artigos ***B***: $y \leq 50$.

3. Gráfico

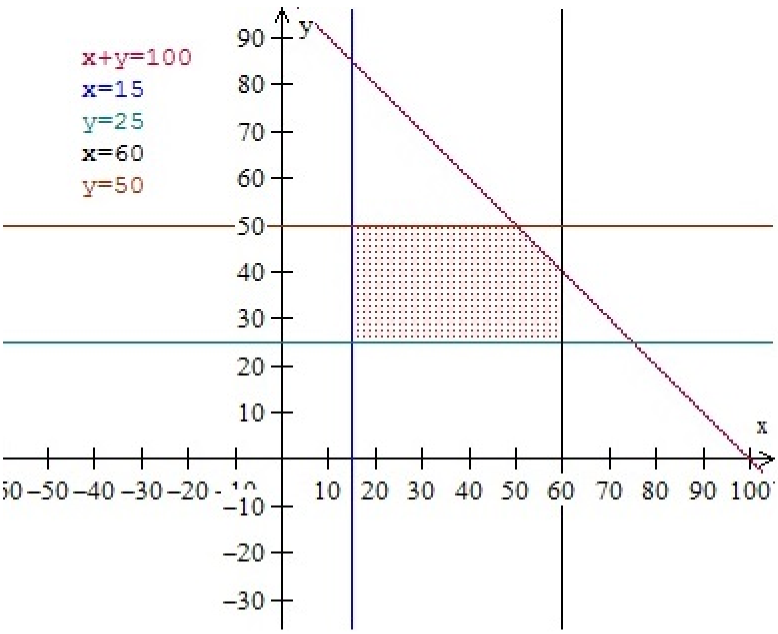


Figura 6.2: Região viável do exemplo 6.1.

4. Valor da função objetivo nos vértices

Como pode ser visto na Tabela 6.1 as coordenadas dos vértices do polígono resultante se encontram facilmente resolvendo os pares de equações que correspondem aos lados que determinam o vértice. As coordenadas são: (15,25), (15,50), (50,50), (60,40), (60,25).

Vértice	$\mathbf{L = 20x + 30y}$
(15,25)	$20 \cdot 15 + 30 \cdot 25 = 1050 \leftarrow$ mínimo
(15,50)	$20 \cdot 15 + 30 \cdot 50 = 1800$
(50,50)	$20 \cdot 50 + 30 \cdot 50 = 2500 \leftarrow$ máximo
(60,40)	$20 \cdot 60 + 30 \cdot 40 = 2400$
(60,25)	$20 \cdot 60 + 30 \cdot 25 = 1950$

Tabela 6.1: Tabela dos pontos extremos do exemplo 6.1.

5. Solução ótima:

Concluímos que a solução ótima, que corresponde ao valor máximo de lucro ***L***, é (50,50) e o lucro máximo é 2500.

6. Resposta do problema

O comerciante, para obter lucro máximo nas condições do problema, deverá encomendar 50 artigos do tipo ***A*** e 50 artigos do tipo ***B***. Com isso, vendendo todos, terá um lucro de 2500.

Exemplo 6.2. Uma firma comercial tem 40 unidades de mercadoria no depósito $\mathbf{D}_1$ e 50 unidades no depósito $\mathbf{D}_2$. Deve enviar 30 unidades ao cliente **A** e 40 ao cliente **B**. Os gastos de transporte por unidade de mercadoria estão indicados no esquema da Figura 6.3. De que maneira deve enviar essas mercadorias para que o gasto com transportes seja mínimo?

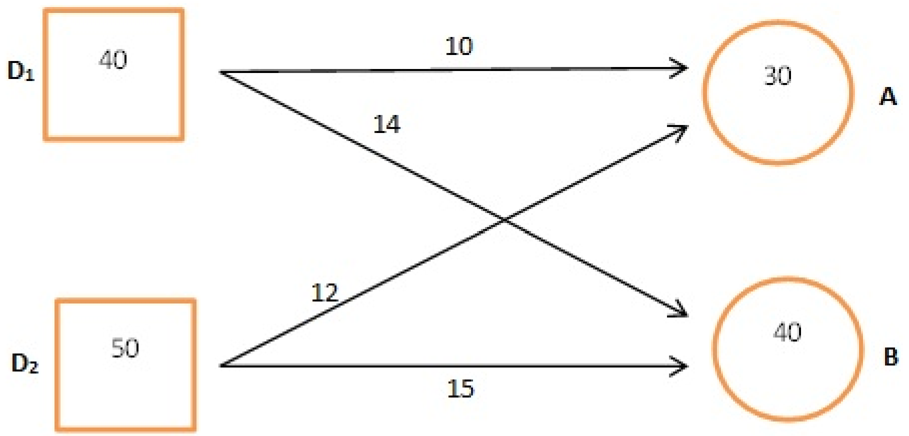


Figura 6.3: Esquema de gastos de transporte por unidade de mercadoria.

Seja **x** a quantidade que deve ser enviada a **A** do depósito $\mathbf{D}_1$ e **y** a quantidade que deve ser enviada a **B** do mesmo depósito $\mathbf{D}_1$. Assim, (30 - x) será a quantidade que deve enviar a **A** do depósito $\mathbf{D}_2$ e (40 - y) a que deve enviar a **B** do depósito $\mathbf{D}_2$.

1. Função objetivo:

O gasto **G** do transporte será dado por: $G = 10x + 14y + 12(30 - x) + 15(40 - y) = 960 - 2x - y$.

Pretendemos minimizar a função $G = 960 - 2x - y$.

2. Restrições:

a) $x \geq 0,\ y \geq 0$ (são unidades de mercadoria).
b) $x \leq 30,\ y \leq 40.$
c) $x + y \leq 40$ (em $\mathbf{D}_1$ há somente 40 unidades).
d) $(30 - x) + (40 - y) \leq 50$ ou equivalentemente, $x + y \geq 20$ (em $\mathbf{D}_2$ há somente

50 unidades).

3. Gráfico:

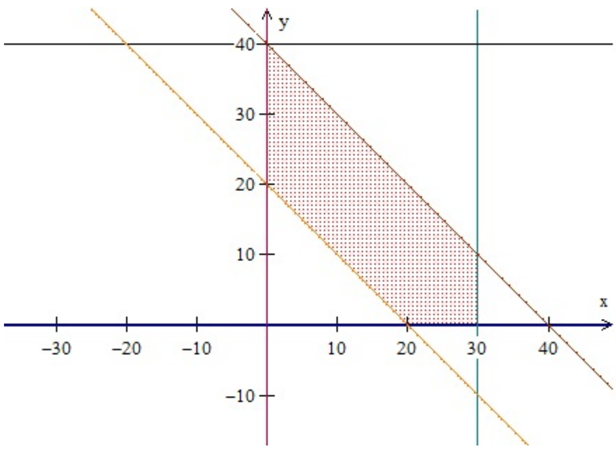


Figura 6.4: Região viável do exemplo 6.2.

As coordenadas dos vértices são (0,20), (0,40), (20,0), (30,0), (30,10).

4. Valor da função objetivo em cada vértice:

Vértice	**Valor dos gastos G = 960 - 2x - y**
(0,20)	960 - 2 · 0 - 20 = 940 ← máximo
(0,40)	960 - 2 · 0 - 40 = 920
(20,0)	960 - 2 · 20 - 0 = 920
(30,0)	960 - 2 · 30 - 0 = 900
(30,10)	960 - 2 · 30 - 10 = 890 ← mínimo

Tabela 6.2: Tabela dos pontos extremos do exemplo 6.2.

5. Solução ótima:

A solução ótima do problema é dada pelo vértice (30,10) = (x,y). Assim, $30 - x = 0$ e $40 - y = 30$.

6. Resposta do problema:

O gasto mínimo se obterá enviando 30 unidades de mercadoria de $\mathbf{D_1}$ a **A**, 10 de $\mathbf{D_1}$ a **B**, 30 de $\mathbf{D_2}$ a **B** e nenhuma de $\mathbf{D_2}$ a **A**.

Exemplo 6.3. Dois produtos **P** e **Q** contêm as vitaminas **A**, **B** e **C** nas quantidades indicadas no quadro a seguir. A última coluna indica a quantidade mínima necessária de cada vitamina para uma alimentação sadia, e a última linha indica o preço de cada produto por unidade. Que quantidade de cada produto uma dieta deve conter para que proporcione uma alimentação sadia com o mínimo custo?

	P	Q	
A	3	1	12
B	3	4	30
C	2	7	28
	3	2	

Tabela 6.3: Quantidade de vitaminas A, B e C presentes nos produtos P e Q.

Seja **x** a quantidade do produto **P** e **y** a quantidade do produto **Q** nas condições do problema.

1. Função objetivo
O custo é dado por $C = 3x + 2y$, o qual queremos minimizar.

2. Restrições
As condições impostas pelo problema são:

a) $x \geq 0$.
b) $y \geq 0$.
c) $3x + y \geq 12$.
d) $3x + 4y \geq 30$.
e) $2x + 7y \geq 28$.

3. Gráfico

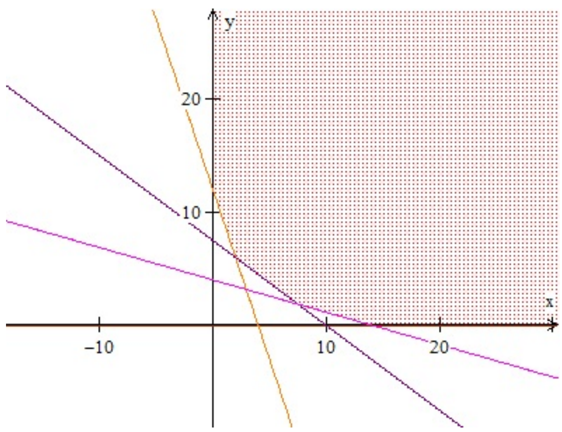


Figura 6.5: Região viável do exemplo 6.3.

Como pode ser visto na Figura 6.5, a região de possibilidades é a parte do plano ilimitado pelas retas $x = 0$, $y = 0$, $3x + y = 12$, $3x + 4y = 30$ e $2x + 7y = 28$. Os vértices são dados pelas soluções dos sistemas:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3x + y = 12 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x + y = 12 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + 7y = 28 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x + 7y = 28 \\ y = 0 \end{cases}$$

As soluções são, respectivamente, (0,12), (2,6), $(\frac{98}{13}, \frac{24}{13})$ e (14,0).

4. Valores que a função objetivo assume nos vértices

Vértice	**Valor da função C = 3x + 2y**
(0,12)	$C = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 12 = 24$
(2,6)	$C = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 18 \leftarrow$ mínimo
$(\frac{98}{13}, \frac{24}{13})$	$C = 3 \cdot \frac{98}{13} + 2 \cdot \frac{98}{13} = 26{,}3$
(14,0)	$C = 3 \cdot 14 + 2 \cdot 0 = 42 \leftarrow$ máximo

Tabela 6.4: Pontos extremos do exemplo 6.3.

5. Resposta do problema

A dieta ótima, que é sadia e tem custo mínimo, consiste em consumir 2 unidades do produto **P** e 6 unidades do produto **Q**.

Como pode ser visto, apesar desses autores abordarem o assunto, eles o colocam da forma tradicional, sem nenhum "atrativo" para o aluno. O uso de um software matemático ajudaria a ilustrar e motivar a resolução destes problemas.

6.1 Sequência didática para aplicação no Ensino Médio

O Caderno do Aluno da 3ª série do Ensino Médio, volume 1, aborda o tema em uma das situações de aprendizagem, mas sem mencionar o termo Programação Linear, como podemos ver na Figura 6.6.

A proposta desta sequência didática é de acrescentar o uso do software GeoGebra como facilitador na construção gráfica e interpretação dos sistemas de equações e inequações assim como a visualização das regiões planas, facilitando o entendimento do cálculo do ponto de intersecção de retas dos exercícios propostos no caderno do aluno, situação de aprendizagem 3(ano 2014 a 2017), com início na página 27.

Esta sequência didática poderá ser aplicada individualmente ou em grupos, de acordo com a estrutura física da escola. O uso do software GeoGebra se deu por ser um software gratuito, disponível para PC, notebook, tablet e smartfone, viabilizando o acesso de todos os alunos.

Todas as Figuras foram retiradas do material de apoio ao currículo do Estado de São Paulo - Caderno do Professor - 3º ano do Ensino Médio - Volume 1.

SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 3
PROBLEMAS LINEARES – MÁXIMOS E MÍNIMOS

Conteúdos e temas: equação da reta em diferentes contextos: problemas lineares; representação de retas e regiões do plano cartesiano: problemas de máximos e mínimos.

Competências e habilidades: capacidade de recorrer à linguagem da Geometria Analítica para enfrentar situações-problema em diferentes contextos; reconhecimento da importância da ideia de proporcionalidade e de sua relação direta com as equações das retas.

Sugestão de estratégias: apresentação de uma coleção de problemas lineares, alguns deles envolvendo situações de máximos ou mínimos, como motivação para uso das equações e inequações associadas a retas e regiões do plano.

Figura 6.6: Conteúdos e temas, competências e habilidades e sugestão de estratégia da situação de aprendizagem 3 sobre Problemas Lineares - Máximos e Mínimos.

Segue abaixo a sequência didática:

Atividade 1: Apresentar o software GeoGebra, e explorar os passos descritos no manual do apêndice A.

Este momento será para o aluno se familiriazar com o software e aprender manuseá-lo. Desta forma, se o professor sentir necessidade, repetir os passos com conjuntos de inequações diferentes, até que os alunos se sintam aptos a utilizar o GeoGebra como instrumento facilitador.

Atividade 2: Fazer o *exercício 1* da situação de aprendizagem 3, página 27, descrito na Figura 6.7

1. Em uma fábrica que produz um só tipo de produto, o custo C da produção de **x** unidades é a soma de um custo fixo C_0 com um custo variável C_1, que é proporcional a **x**. Se o processo de produção for tal que cada unidade produzida a mais tenha sempre o mesmo custo, independentemente do valor de **x**, então $C_1 = kx$, onde **k** representa o custo de cada unidade do produto. Em uma fábrica como a descrita acima, tem-se: $\mathbf{C = 3\,000 + 150x}$ (**x** é o número de artigos; **C** é o custo da produção em reais).

   a) Esboce o gráfico de C em função de **x**.

   b) Para qual valor de **x** o custo fixo se iguala ao custo variável?

   c) A partir de qual valor de **x** o custo fixo passa a representar menos de 10% do custo total da produção?

Figura 6.7: Atividade 1 da situação de aprendizagem 3 do caderno do aluno.

Para este exercícios não há necessidade do uso do GeoGebra. Como pode-se observar na Figura 6.8, o uso do software neste caso, não será didático, pois a reta não ficará visualmente apresentável.

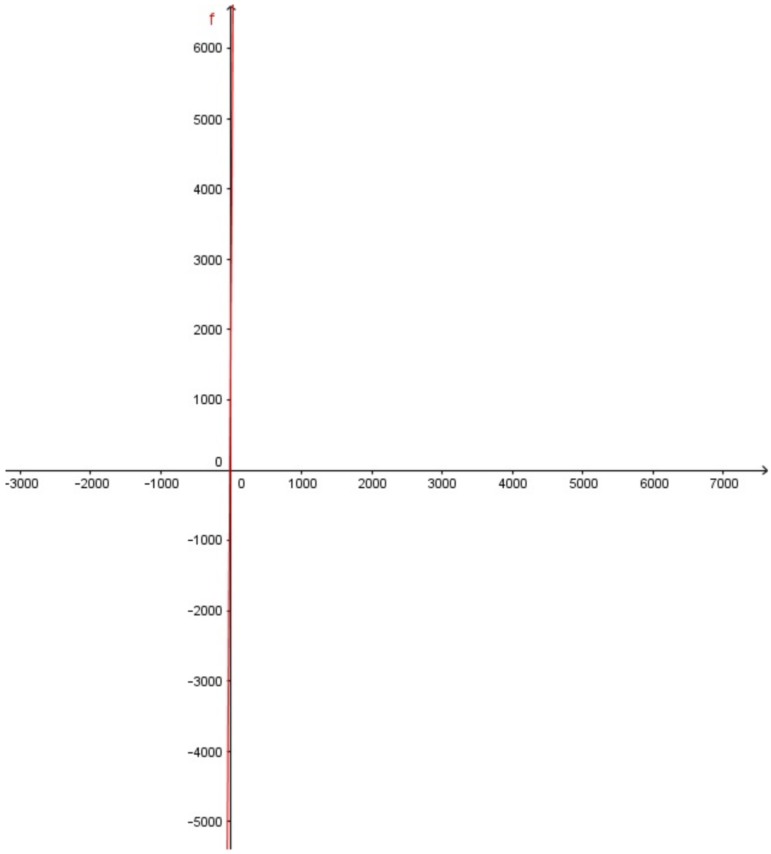


Figura 6.8: Gráfico da função $C = 3000 + 150x$.

Atividade 3: Fazer o *exercício 2* da situação de aprendizagem 3, página 28, descrito na Figura 6.9

2. Uma fábrica produz dois tipos de produtos: A e B. A quantidade produzida diariamente de A é igual a **x**, e a quantidade diária de B é igual a **y**. O processo de produção é tal que cada unidade produzida de A custa sempre 5 reais e cada unidade de B custa 8 reais, sendo, portanto, o custo da produção conjunta de A e B igual a **C = 5x + 8y** (C em reais).

   a) Sendo o valor de C, em determinado dia, igual a R$ 2 400,00, determine dois pares de valores possíveis para **x** e **y**.

   b) Sendo o máximo valor admissível para C igual a R$ 3 200,00, qual é o valor máximo possível para **x**? E qual é o valor máximo possível para **y**? (Observação: $x \geq 0$, $y \geq 0$.)

   c) Represente em um sistema de coordenadas no plano os pares (x; y) para os quais se tem $C \leq 3\,200$.

Figura 6.9: Atividade 2 da situação de aprendizagem 3 do caderno do aluno.

O item 2a poderá ser explorado com o uso do GeoGebra, conforme descrição na Figura 6.10. Aqui o professor poderá clicar em diversos pontos, explorando com os alunos quais os melhores pontos a serem escolhidos, e já introduzir o conceito de não negatividade das variáveis, explorando os pontos do 1º quadrante. Orientar os alunos a escolherem também os pontos sobre os eixos coordenados.

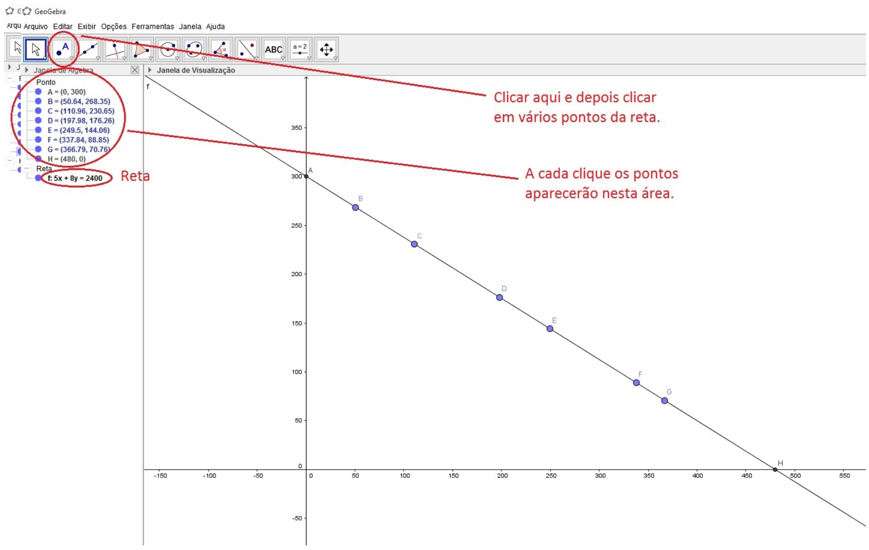


Figura 6.10: Gráfico da equação $5x + 8y = 2400$ e alguns pontos da reta.

Para a resolução do item 2b, acrescentar a equação $5x + 8y = 3200$, e explorar o fato das retas serem paralelas. Clicar novamento no ícone "Ponto" do GeoGebra e marcar os pontos sobre os eixos coordenados nesta reta. O professor poderá clicar em vários pontos da reta e ajudar o aluno a perceber que os valores máximos para x e y estão nos eixos coordenados. O resultado deste passo está descrito na Figura 6.11

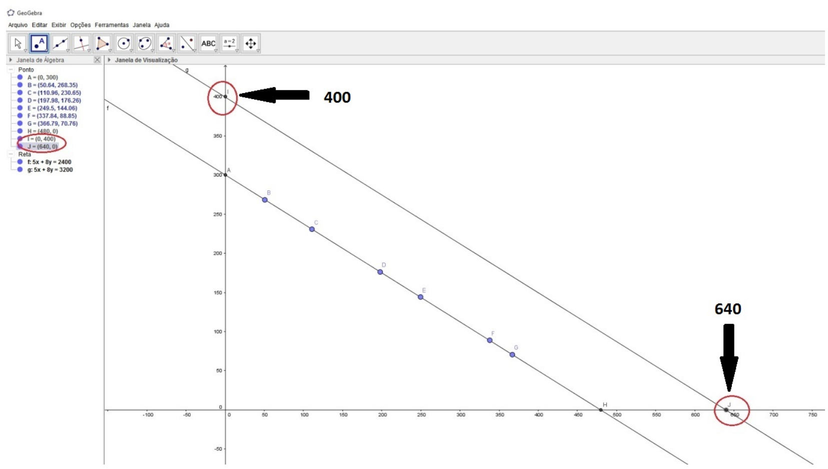


Figura 6.11: Gráfico das equações $5x + 8y = 2400$ e $5x + 8y = 3200$.

Para a resoução do item 2c, inserir no GeoGebra a inequação $5x + 8y \leq 3200$, conforme descrição no tutorial do apêndice A. O resultado está descrito na Figura 6.12.

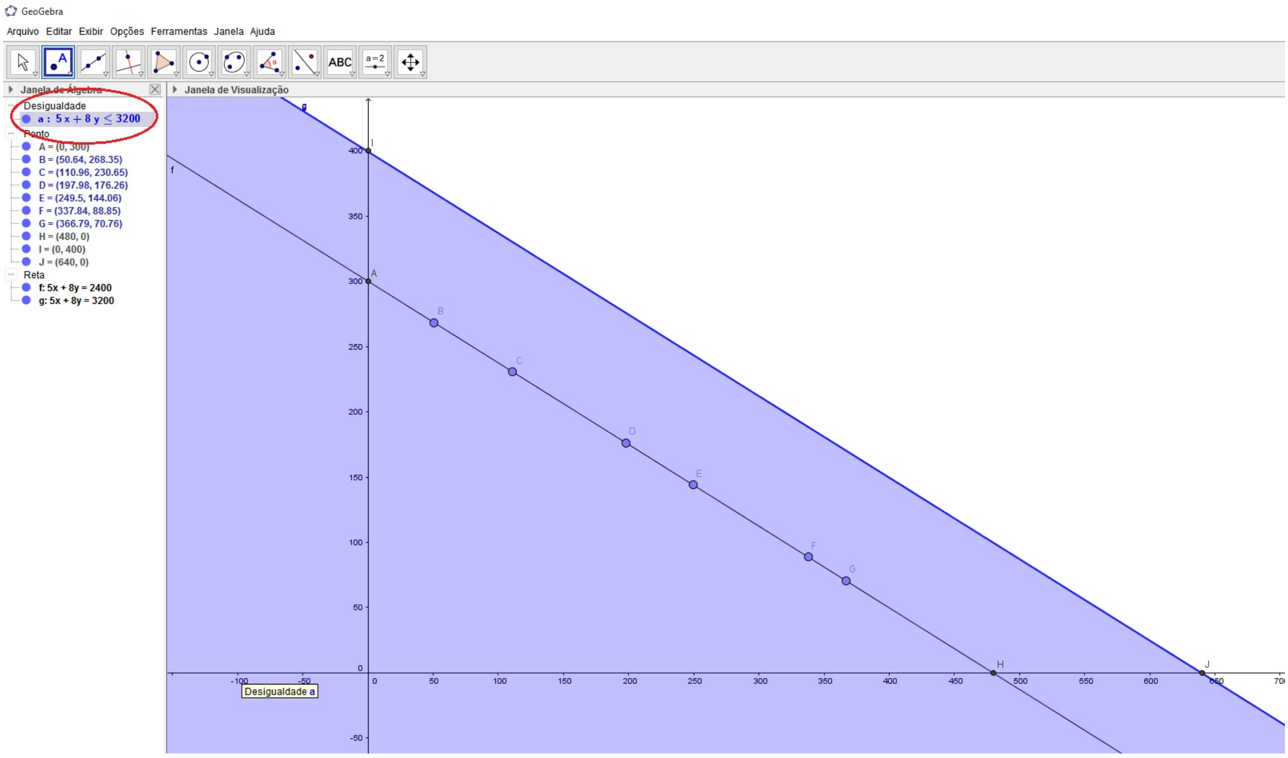


Figura 6.12: Gráfico da inequação $5x + 8y \leq 3200$.

Atividade 4: Fazer o *exercício 3* da situação de aprendizagem 3, página 29, descrito na Figura 6.13.

3. Uma pessoa deve fazer uma dieta que forneça pelo menos 6 mg de vitamina B_2, alimentando-se exclusivamente dos alimentos I e II, oferecidos em pacotes de 100 g. Cada pacote do alimento I fornece 1,2 mg de B_2, e cada pacote do alimento II fornece 0,15 mg de B_2. Sendo **x** o número de pacotes do alimento I a serem ingeridos, e **y** o número de pacotes do alimento II:

   a) Escreva a relação que deve existir entre **x** e **y** para que a dieta seja satisfeita.

   b) Represente graficamente os pares (x; y) que satisfazem essa relação. (Lembre-se de que devemos ter, naturalmente, $x \geq 0$, $y \geq 0$.)

Figura 6.13: Atividade 2 da situação de aprendizagem 3 do caderno do aluno.

No item 3a, introduzir o conceito de restrições, ajudando o aluno na interpretação do enunciado e formulação da inequação.

Para a resolução do item 3b, falar sobre as restrições de negatividade e da restrição encontrada no item 3a. Representar no GeoGebra as inequações $1,2x + 0,15y \geq 6$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Lembre-se de seguir os passos descritos no manual do apêndice A, e construir primeiro as equações, depois as inequações e por fim a interseção entre as equações. Explorar as regiões de intersecção passando o "mouse" sobre as regiões. Neste momento, o software mostra quais desigualdades estão inseridas na intersecção daquela região. O resultado está descrito na Figura 6.14.

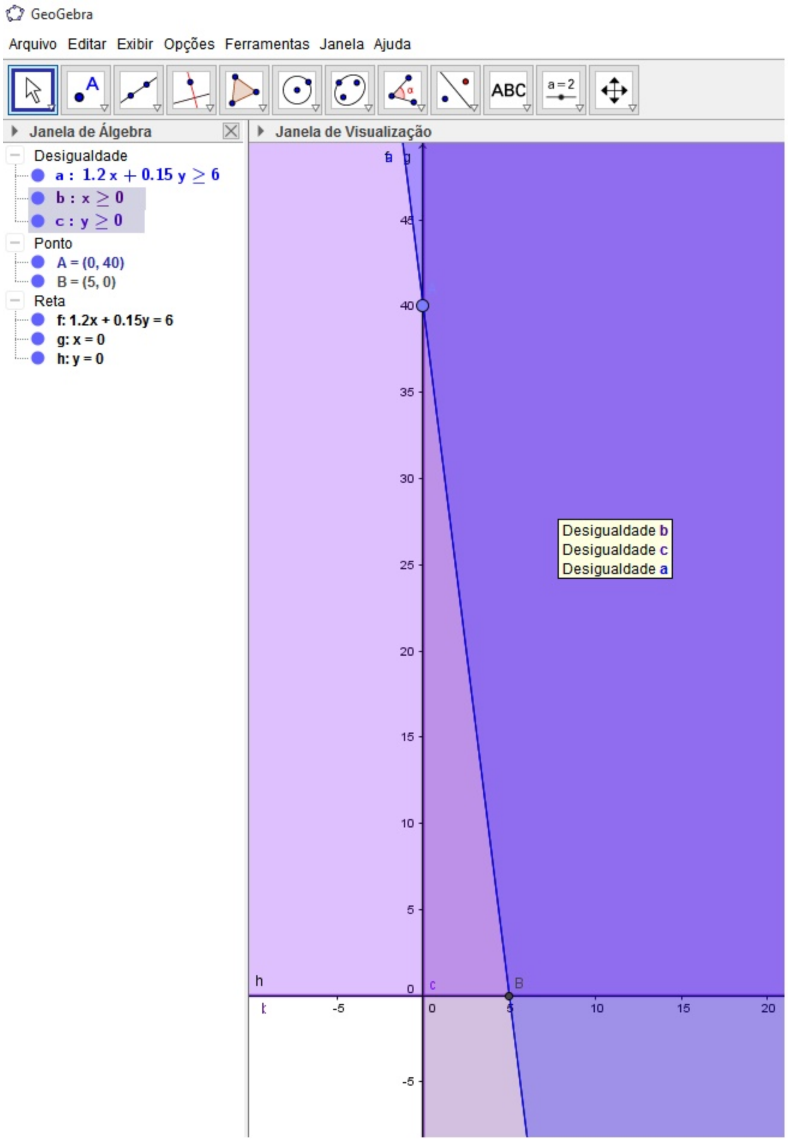


Figura 6.14: Gráfico intersecção das inequações *1.2x + 0.15y* ≥ 6, $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Atividade 5: Fazer o *exercício 4* da situação de aprendizagem 3, página 29, descrito na Figura 6.15.

No item 4a, falar sobre função objetivo e auxiliar o aluno na formulação da mesma.

Para o item 4b, construir no GeoGebra a equação proposta no enunciado. Marcar os pontos de intersecção com os eixos coordenados. Explorar os conceitos de valor máximo e valor mínimo. Ver resultado na Figura 6.16.

Para o item 4c, representar no GeoGebra as equações pedidas no enunciado e suas intersecções com os eixos coordenados, introduzir o conceito das curvas de nível, sem entrar em termos técnicos, utilizar somente a ideia. Falar sobre o paralelismo de retas e a intersecção das retas com os eixos coordenados. Ver resultado na Figura 6.17.

Para o item 4d, utilizar o grafico feito no item 4c, explorando o que foi pedido.

4. Retome o enunciado da atividade anterior. Considere que cada pacote de 100 g do alimento I custa 5 reais e cada pacote de II custa 2 reais.

   a) Expresse o custo C da alimentação, se forem utilizados **x** pacotes de I e **y** pacotes de II.

   b) Represente graficamente no plano cartesiano os pares (x; y) que correspondem ao custo C_1 = 40 reais, notando que eles correspondem a uma reta r_1.

   c) Represente os pontos que correspondem ao custo de C_2 = 60 reais e C_3 = 80 reais, notando que eles correspondem às retas r_2 e r_3, paralelas à reta r_1 do item anterior.

   d) Mostre que, quanto menor o custo, menor a ordenada do ponto em que a reta que o representa intercepta o eixo **y**.

   e) Para qual dos pares (x; y) tem-se a dieta satisfeita e o custo da alimentação o menor possível?

Figura 6.15: Atividade 4 da situação de aprendizagem 3 do caderno do aluno.

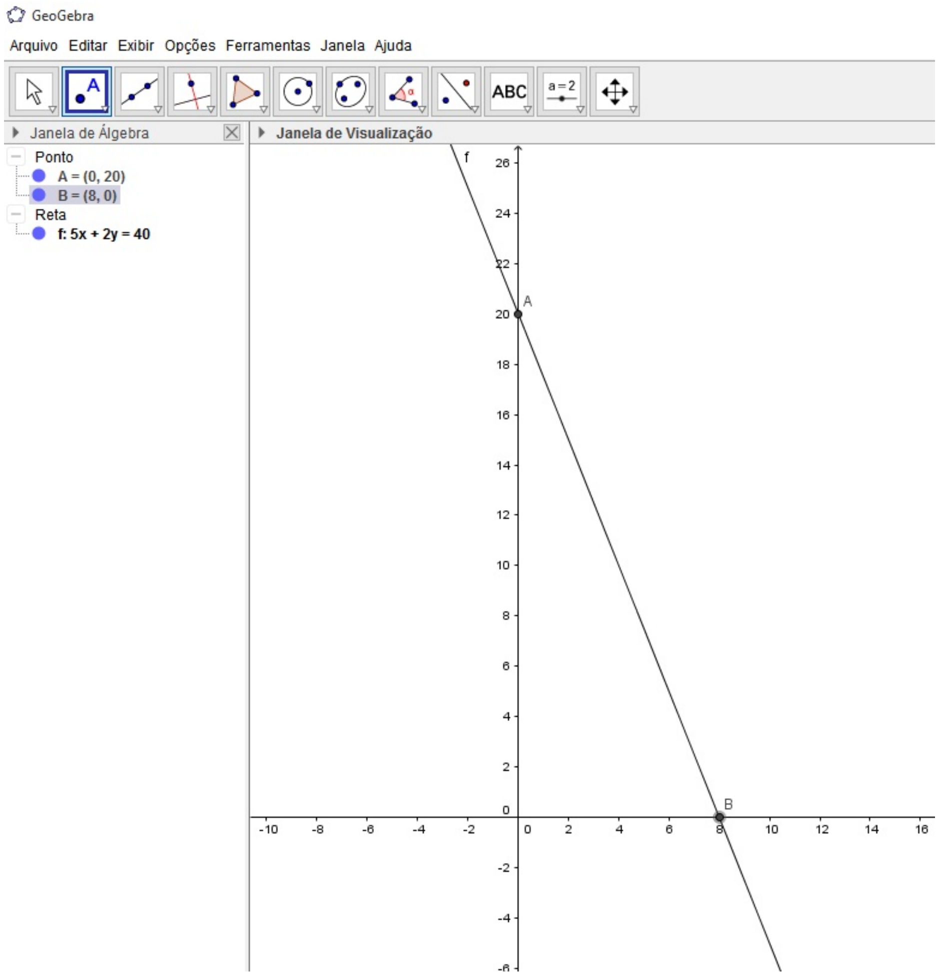


Figura 6.16: Gráfico da equação $5x + 2y = 40$.

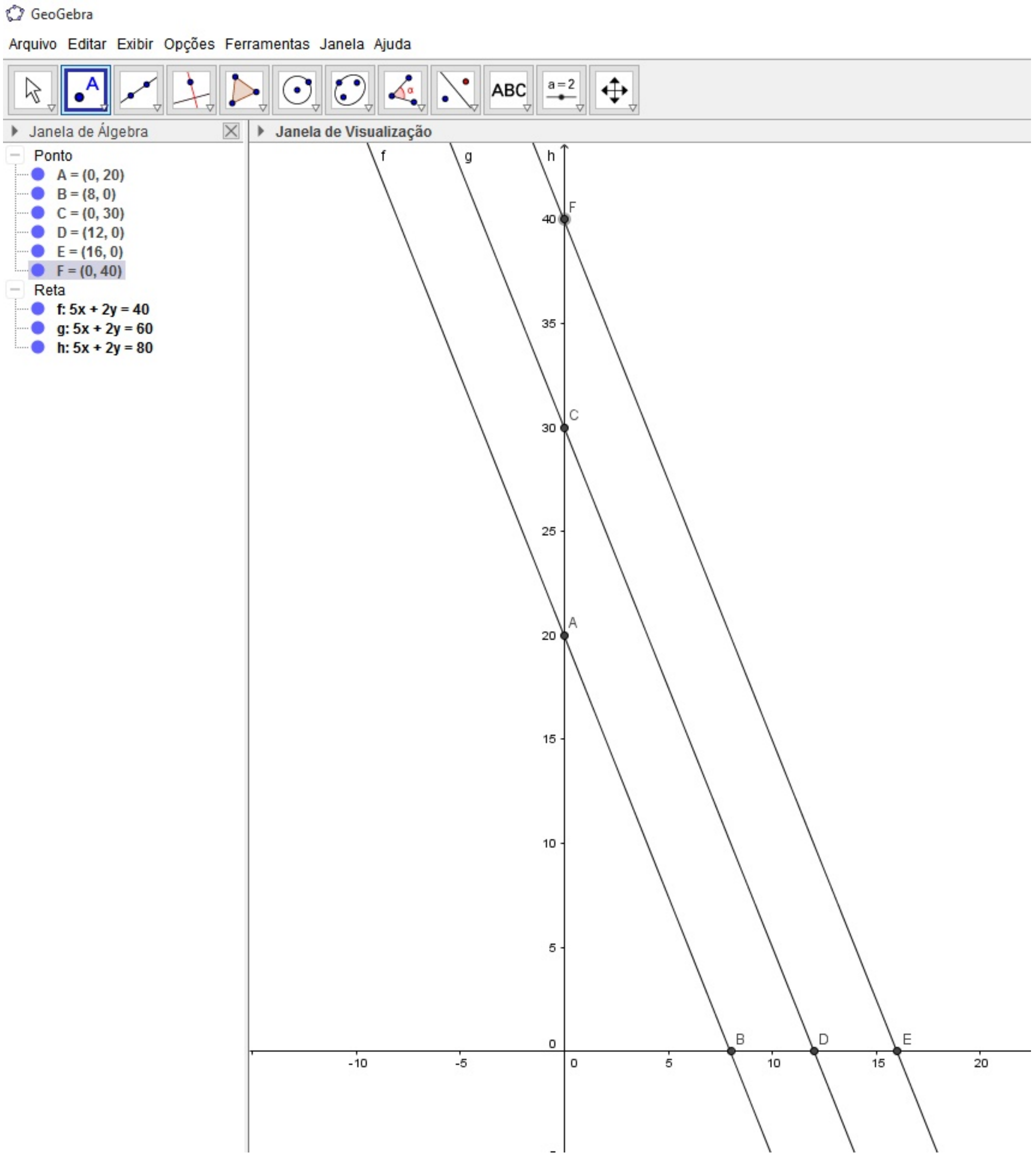


Figura 6.17: Gráfico das equações $5x + 2y = 40$, $5x + 2y = 60$ e $5x + 2y = 80$.

Para o item 4e, acrescentar as inequações(restrições) trabalhadas no exercício 3, inclusive as de não negatividade, fazendo as devidas interpretações dos pontos de intersecção e introduzir o conceito de região viável. Fazer a conclusão do exercício.

Atividade 6: Fazer os *exercício 5* (Lição de Casa) da situação de aprendizagem 3, página 31.

No item 5a, auxiliar o aluno na interpretação e elaboração da função.

Em 5b, auxiliar a interpretação do enunciado e definição da inequação e, em seguida, representar no GeoGebra a função $x + y \leq 8$. Ver o resultado na Figura 6.19.

Para 5c, seguir os mesmos passos de 5b, e representar a inequaçõ $2x + y \leq 12$. Ver resultado na Figura 6.20.

No item 5d, representar todas restrições no GeoGebra, inclusive as de não negatividade. Explorar esses conceitos com os alunos e, passando o mouse sobre a figura, verificar qual a intersecção das regiões. Ver resultado na Figura 6.21.

Para 5e, utilizar o gráfico feito em 5d e representar a equação $2000x + 15000y = 75.000$. Mostrar que a mesma pode ser simplificada, podendo ser escrita por $4x + 3y = 15$. Fazer o mesmo para $2000x + 15000y = 75.000$, reescrita como $4x + 3y = 24$. Ver resultado na Figura 6.22.

Em 5f, utilizar o gráfico de 5e e explorar o solicitado no exercício.

Em 5g, utilizar o GeoGebra para marcar os pontos extremos da região viável encontrada em 5e, em seguida montar uma tabela com todos os pontos extremos da região viável, fazer os cálculos aplicando-os na função objetivo e debater com os alunos qual a melhor solução. O resultado pode ser visto na Figura 6.23 e na Tabela 6.5.

5. Um pequeno fazendeiro dispõe de 8 alqueires para plantar milho e cana. Ele deve decidir quanto plantar de milho e quanto de cana, em alqueires, de modo que seu rendimento total seja o maior possível. Cada alqueire de milho plantado deve resultar em um rendimento líquido de R$ 20 mil e cada alqueire de cana deverá render R$ 15 mil. No entanto, cada alqueire de milho requer 20 000 L de água para irrigação e cada alqueire de cana requer somente 10 000 L de água, sendo que, no período correspondente, a quantidade de água disponível para tal fim é 120 000 L.

Considere **x** e **y** as quantidades de alqueires plantados de milho e cana, respectivamente.

a) Como se pode representar, em termos de **x** e **y**, o rendimento total **R** a ser recebido pelo fazendeiro, supondo que venda a totalidade de sua produção?

b) Qual é a relação entre **x** e **y** que traduz a exigência de que o total de alqueires plantados não pode ser maior do que 8? Represente no plano cartesiano os pontos (x; y) que satisfazem essa relação.

c) Qual é a relação entre **x** e **y** que traduz a exigência de que o total de água a ser utilizado não pode superar os 120 000 L? Represente no plano cartesiano os pontos (x; y) que satisfazem essa relação.

d) Represente no plano cartesiano o conjunto dos pontos que satisfazem simultaneamente as duas exigências expressas nos itens b e c (lembrando que devemos ter $x \geq 0$, $y \geq 0$).

e) Determine o conjunto dos pontos (x; y) do plano que correspondem ao rendimento R_1 = 75 mil e os que correspondem ao rendimento R_2 = 120 mil.

f) Mostre que, quanto maior o rendimento **R**, maior a ordenada do ponto em que a reta que o representa intercepta o eixo OY.

g) Determine o ponto da região do item **d** que corresponde ao rendimento total máximo.

Figura 6.18: Atividade 5 da situação de aprendizagem 3 do caderno do aluno.

Ponto extremo	Valor da função objetivo
(4 , 4)	R=20.000 . 4 + 15.000 . 4 = 140.000
(6 , 0)	R=20.000 . 6 + 15.000 . 0 = 120.000
(0 , 8)	R=20.000 . 0 + 15.000 . 8 = 120.000
(0 , 0)	R=20.000 . 0 + 15.000 . 0 = 0

Tabela 6.5: Tabela dos pontos extremos e valores da função objetivo.

Com esses passos, chegará ao resultado do problema.

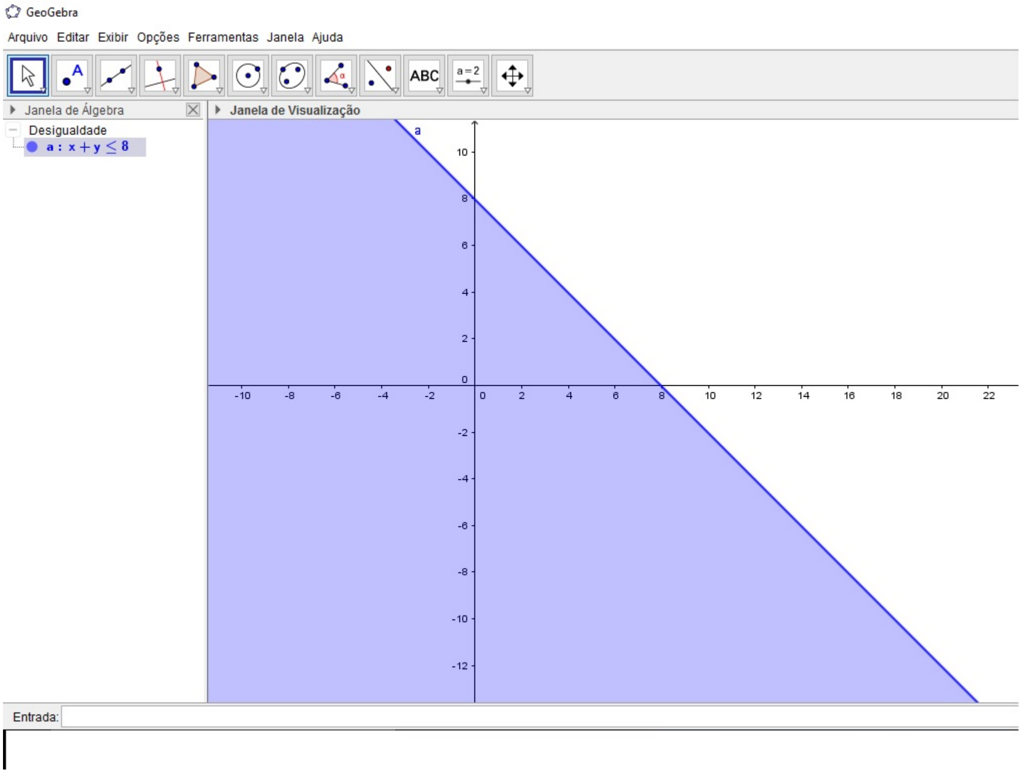


Figura 6.19: Gráfico da inequação $x + y \leq 8$.

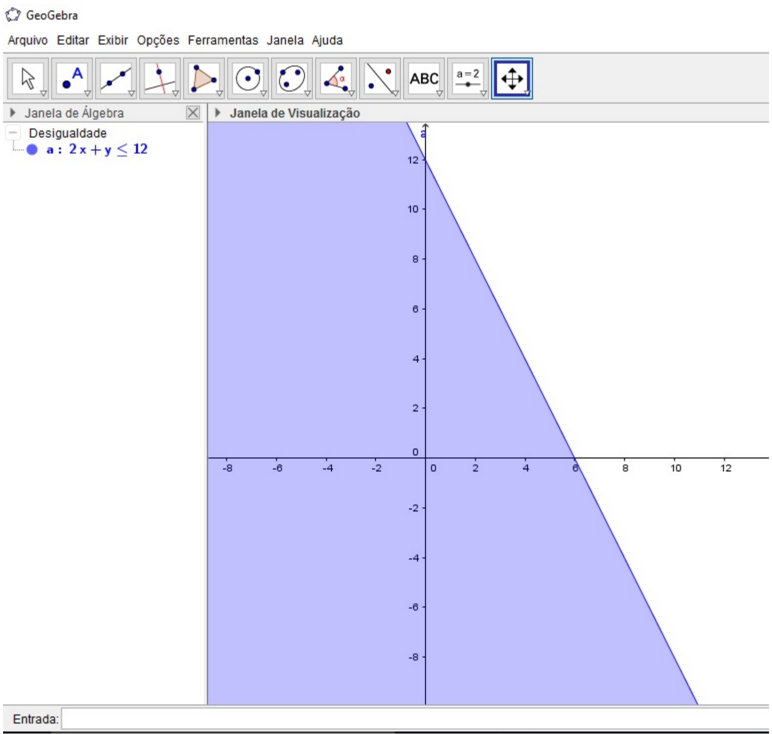


Figura 6.20: Gráfico da inequação $2x + y \leq 12$.

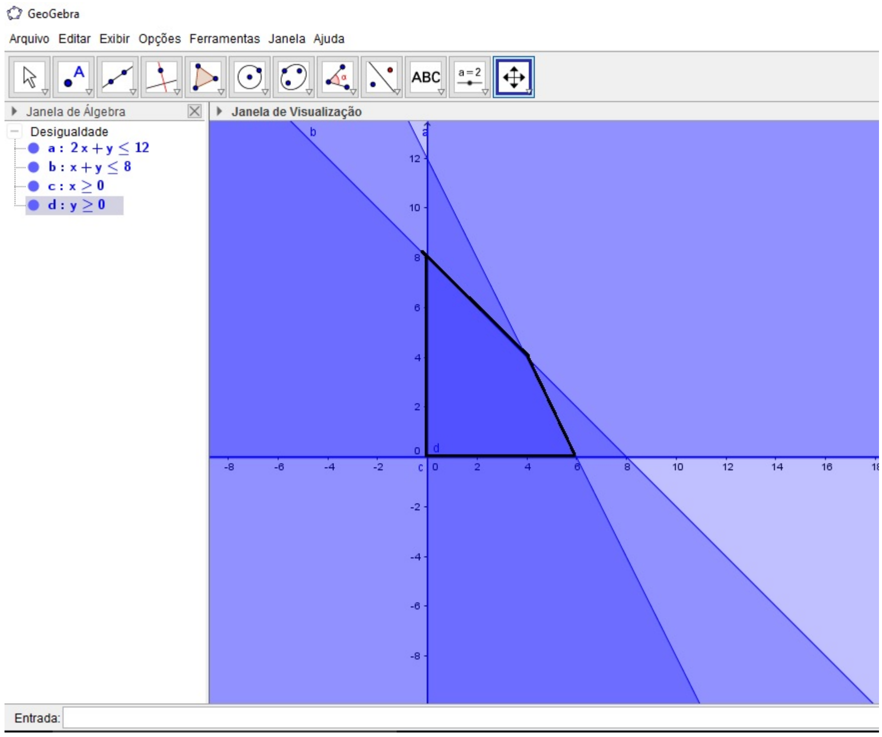


Figura 6.21: Gráfico da intersecção das inequações $2x + y \leq 12$, $2x + y \leq 12$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

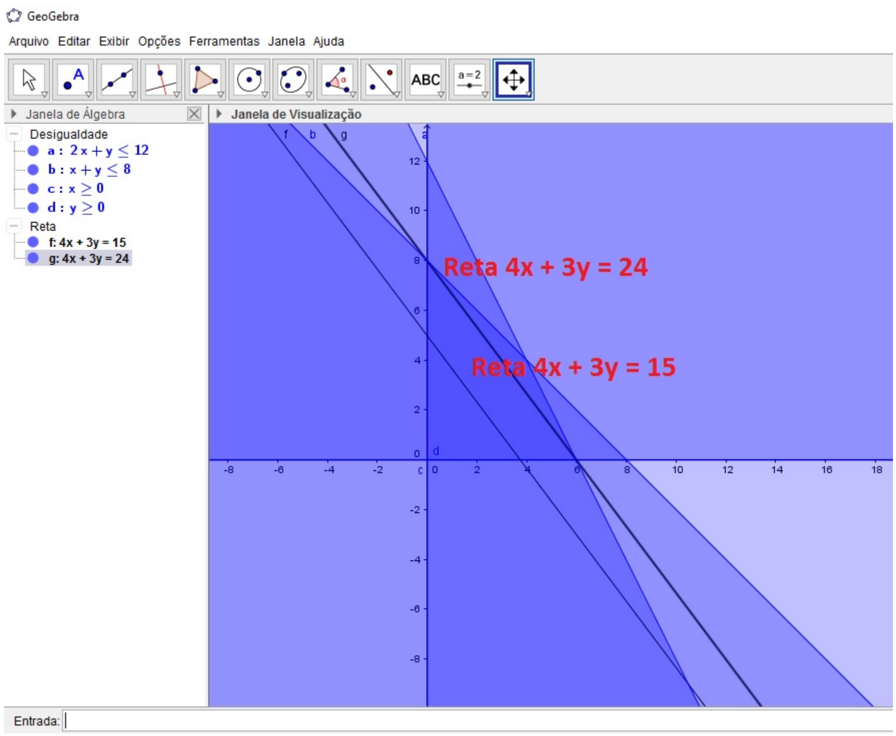


Figura 6.22: Retas $4x + 3y = 15$ e $4x + 3y = 24$ inseridas no gráfico do item 5d.

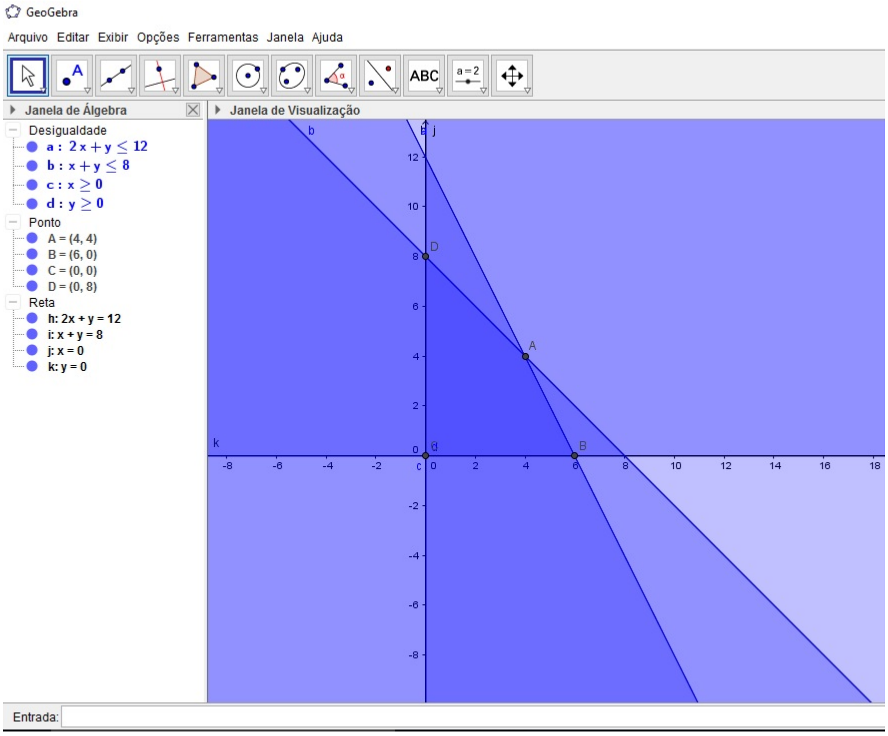


Figura 6.23: Pontos extremos da região viável.

Atividade 7: Fazer o **Desafio** da página 33, descrito na Figura6.24, como forma de avaliação de aprendizado.

Desafio!

Uma fábrica utiliza dois tipos de máquinas, M_1 e M_2, para produzir dois tipos de produtos, P_1 e P_2. Cada unidade de P_1 exige 2 horas de trabalho de M_1 e 2 horas de M_2; cada unidade de P_2 exige 1 hora de M_1 e 4 horas de M_2. Sabe-se que as máquinas M_1 e M_2 podem trabalhar, no máximo, 10 horas por dia e 16 horas por dia, respectivamente, e que o lucro unitário, na venda de P_1, é igual a 40 reais, enquanto na venda de P_2, o lucro unitário é de 60 reais. Representando por **x** a quantidade diária a ser produzida de P_1 e **y** a quantidade a ser produzida de P_2, responda às questões seguintes.

a) Qual é a relação entre **x** e **y** de modo que o tempo de utilização da máquina M_1 não ultrapasse as horas diárias permitidas? Represente os pontos correspondentes no plano cartesiano.

b) Qual é a relação entre **x** e **y** de modo que o tempo de utilização da máquina M_2 não ultrapasse as horas diárias permitidas? Represente os pontos correspondentes no plano cartesiano.

c) Represente a região do plano cartesiano que corresponde aos pontos (x; y) que satisfazem simultaneamente às duas restrições dos itens **a** e **b**.

d) Qual é a expressão do lucro total **L** que resulta da venda de todas as unidades produzidas de P_1 e P_2?

e) Represente os pontos do plano que correspondem a um lucro total igual a 120 reais.

f) Qual é o ponto da região do item **c** que corresponde ao lucro total máximo?

Figura 6.24: Desafio da situação de aprendizagem 3 do caderno do aluno.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Acreditamos que este trabalho possa contribuir para uma abordagem diferenciada no ensino de sistemas lineares, equações e inequações, pois os mesmos são trabalhados sempre de forma mecânica, sem atrativos e sempre desvinculado de aplicações reais.

Em nossa proposta foi possível explorar as definições e conceitos da Programação Linear de forma natural, sem se prender a conceitos teóricos e massantes. O uso do software GeoGebra como apoio ilustra de maneira paupável o problema, pois o aluno pode manipular os gráficos, e entender o que realmente acontece na construção gráfica, e não somente ficar na mecanização dos cálculos.

O desenvolvimento de atividades como esta, pode levar o aluno a se interessar por uma área de conhecimento até então desconhecida, mas de grande aplicabilidade no cotidiano de muitas empresas.

Com o uso do GeoGebra, acreditamos que esta proposta possa contribuir para o trabalho dos docentes que utilizam o material idealizado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, servindo como ferramenta para respostas a alguns questionamentos dos discentes.

Referências

[1] ANTON, Howard; RORRES, Chris. Álgebra linear com aplicações. Bookman, 2001.

[2] BASSANEZI, Rodney Carlos. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. Editora Contexto, 2002.

[3] BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. Brasília: MEC/SEF, 2001.

[4] BOLDRINI, José Luiz et al. Álgebra linear. Harper & Row, 1980.

[5] CARVALHO, João MS. Programação Linear: Algoritmos simplex primal, dual, transporte e afetação. Vida Economica Editorial, 2014.

[6] DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações: Ensino Médio São Paulo: Ática, 2005. Volume único.

[7] EISELT, Horst A.; SANDBLOM, C.-L. Linear programming and its applications. Springer Science & Business Media, 2007.

[8] FÁVERO, PATRICIA. Pesquisa operacional para cursos de Administração, Contabilidade e Economia. Elsevier Brasil, 2012.

[9] MACULAN FILHO, Nelson; PEREIRA, Mario Veiga Ferraz. Programação linear. Atlas, 1980.

[10] MARTINS, Tiago Vencato. Programação linear na escola básica. 2013.

[11] MELO, Jorge Nazareno Batista. Uma proposta de ensino e aprendizagem de programação linear no Ensino Médio. 2012.

[12] RIBAS, Cibele Cristina Gomes Barboza. Programação linear: abordagem para ensino médio. 2014.

[13] RIGHETTO, Luzia Francisca Pedrazzi. Uma proposta de sequência didática para o ensino de Programação Linear no Ensino Médio. 2015.

[14] SÃO PAULO(Estado). Secretaria da Educação. Caderno do Aluno: 3ª série do Ensino Médio, São Paulo: SE, 2014.

[15] SÃO PAULO(Estado). Secretaria da Educação. Caderno do Professor: 3ª série do Ensino Médio, São Paulo: SE, 2014.

[16] TAHA, Hamdy A.; MARQUES, Arlete Simille; SCARPEL, Rodrigo Arnaldo. Pesquisa operacional. Pearson Education do Brasil, 2008.

[17] Instituto Geogebra no Rio de janeiro (Disponível em: www.geogebra.imuff.mat.br/. Acesso em 05/05/2016).

[18] Site: www.geogebra.org. Acesso em 05/05/2016.

A TUTORIAL GEOGEBRA PARA UTILIZAÇÃO NA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A escolha do GeoGebra se deu por ser um software gratuito, podendo ser utlizado em computadores de mesa, tablet e smartfone, se tornando acessível a todos os alunos.

A seguir, uma descrição mais detalhada retirada dos sites do GeoGebra e do Instituto GeoGebra do Rio de Janeiro.

> Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra é um software gratuito de matemática dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino (do básico ao universitário). O GeoGebra reúne recursos de Geometria, Álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si. Além dos aspectos didáticos, o GeoGebra é uma excelente ferramenta para se criar ilustrações profissionais para serem usadas no Microsoft Word, no Open Office ou no LaTeX. Escrito em JAVA e disponível em português, o GeoGebra é multiplataforma e, portanto, ele pode ser instalado em computadores com Windows, Linux ou Mac OS.
>
> GeoGebra é também uma comunidade na expansão rápida de milhões de usuários localizados em quase todos os países. Tornou-se líder no fornecimento de software de matemática dinâmica, apoio à educação e inovações da ciência, tecnologia, engenharia e matemática (STEM) no ensino e aprendizagem em todo o mundo.

Para utilizar o GeoGebra na sequência didáticapítulo proposta no capítulo 6, foi elaborado um tutorial, cujos passos estão descritos abaixo:

1. Entre no site www.geogebra.org e em seguida clique em "Downloads", como na Figura A.1.

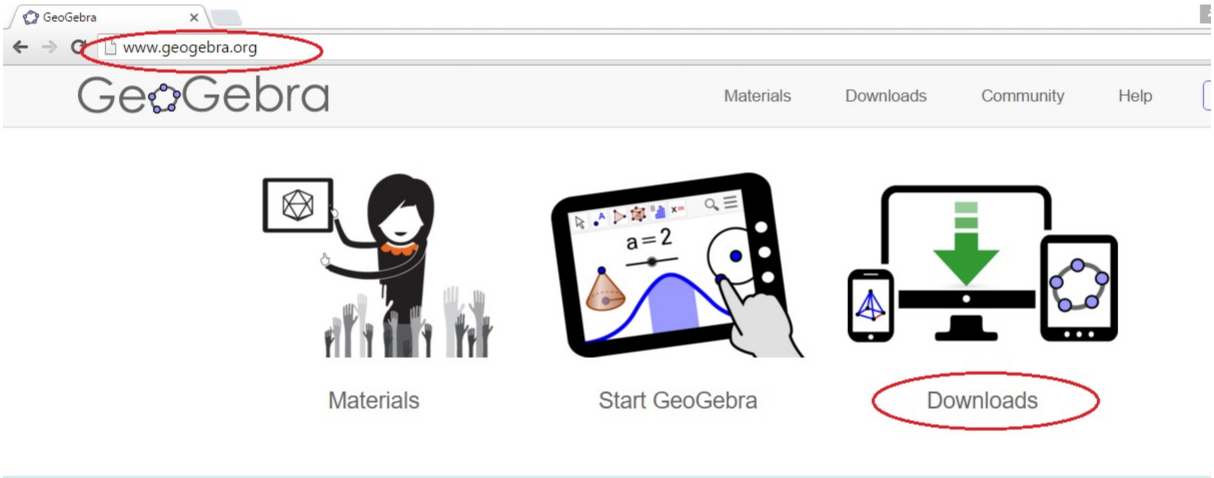


Figura A.1: Página inicial do site GeoGebra com indicação de onde realizar o download do software.

2. Conforme Figura A.2, selecione qual tipo de aparelho está usando, tablet, desktop ou celular, e faça o download. Neste tutorial, será utilizado desktop com sistema operacional windows.

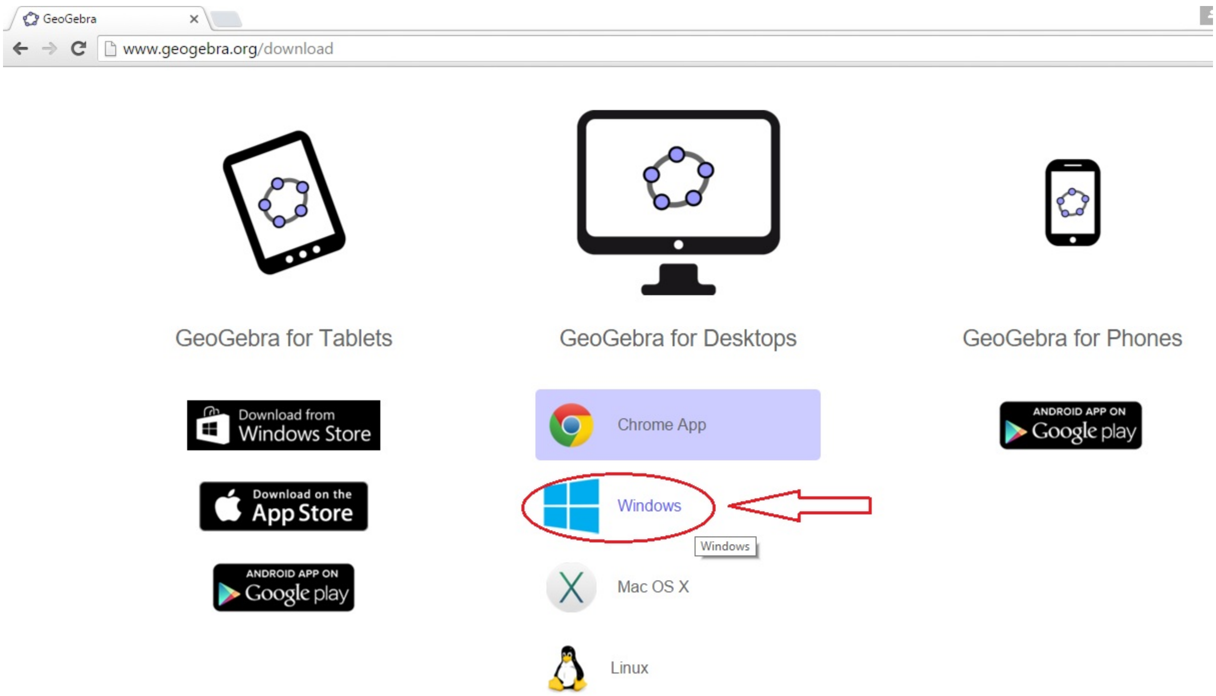


Figura A.2: Página do GeoGebra indicando como escolher o sistema operacional e o tipo do aparelho a ser utilizado.

3. Instale, escolhendo a lingua "Português Brasileiro", concorde com o "Acordo de licença", escolha a versão "standard" e clique em "instalar". Aguarde até que todo o processo seja concluído. Clique em terminar. O GeoGebra está pronto para ser usado, e será exibido na área de trabalho o ícone representado pela Figura A.3.

Figura A.3: Ícone a ser exibido pelo GeoGebra após sua instalação.

4. Ao clicar no ícone representado na Figura A.3, será exibida a janela que pode ser vista na Figura A.4:

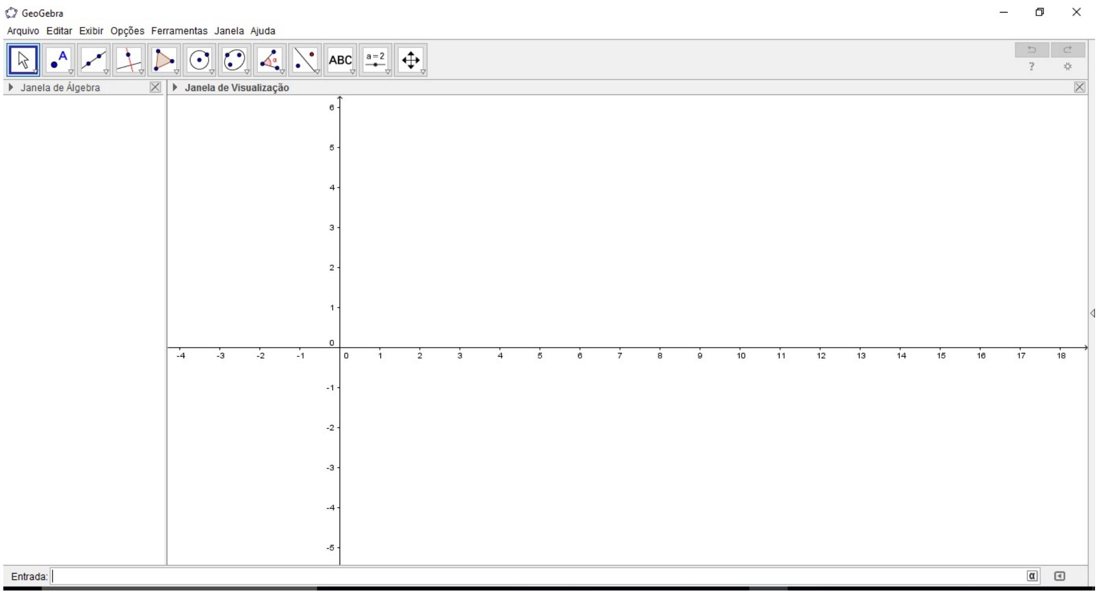


Figura A.4: Janela principal do GeoGebra e ambiente de trabalho.

5. Para este tutorial, serão utilizadas as restrições do "Exemplo 3: Problema de dieta" descritas no capítulo 7.

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$3x + y \geq 12$

$3x + 4y \geq 30$

$2x + 7y \geq 28$

Em "Entrada:" iniciaremos digitando as equações correspondentes às inequações e em seguida apertar "Enter". (Ver Figura A.5).

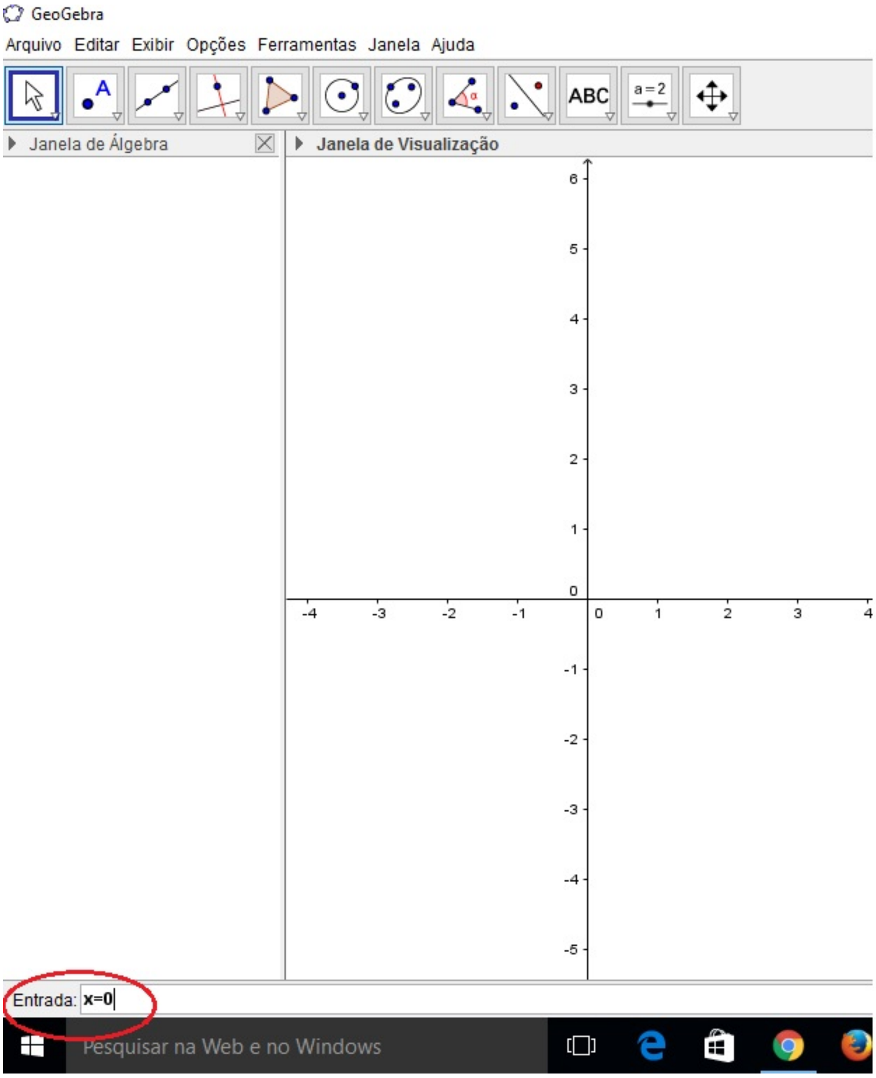


Figura A.5: Janela principal do GeoGeobra indicando o local para a digitação das equações, inequações, pontos, entre outros.

Faremos isto com todas as equações, obtendo o seguinte resultado(Ver Figura A.6):

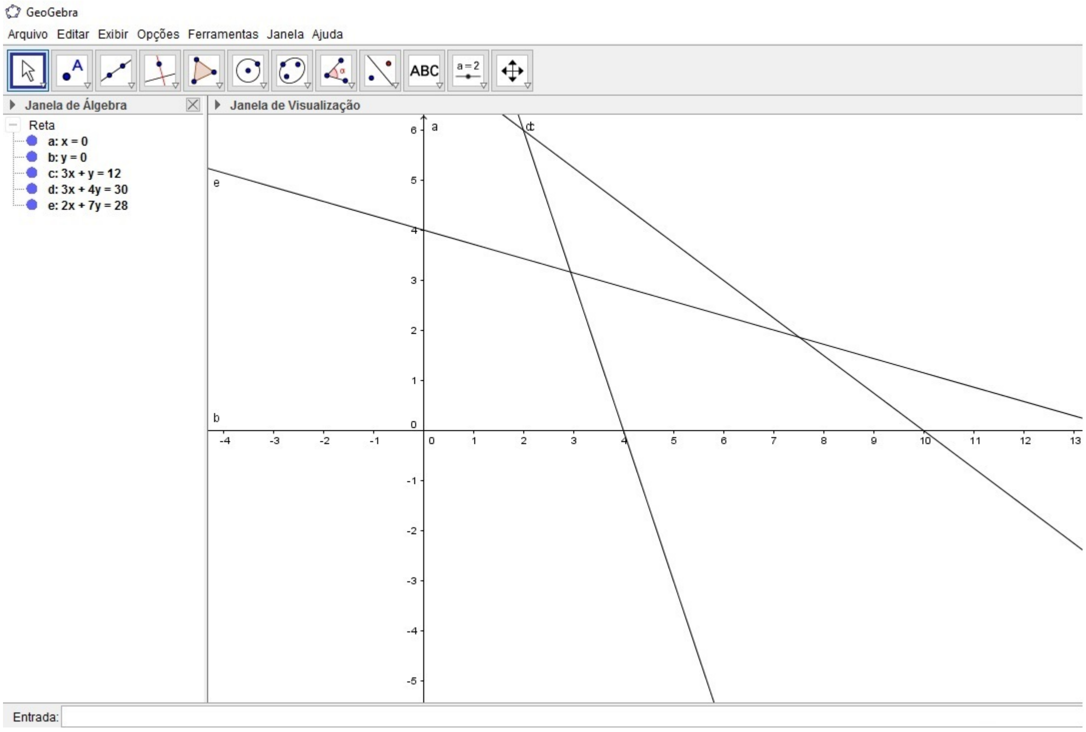


Figura A.6: Janela principal do GeoGebra após a digitação de todas as equações.

Em seguida faremos o mesmo procedimento digitando as inequações, obtendo o seguinte resultado(Ver Figura A.7).

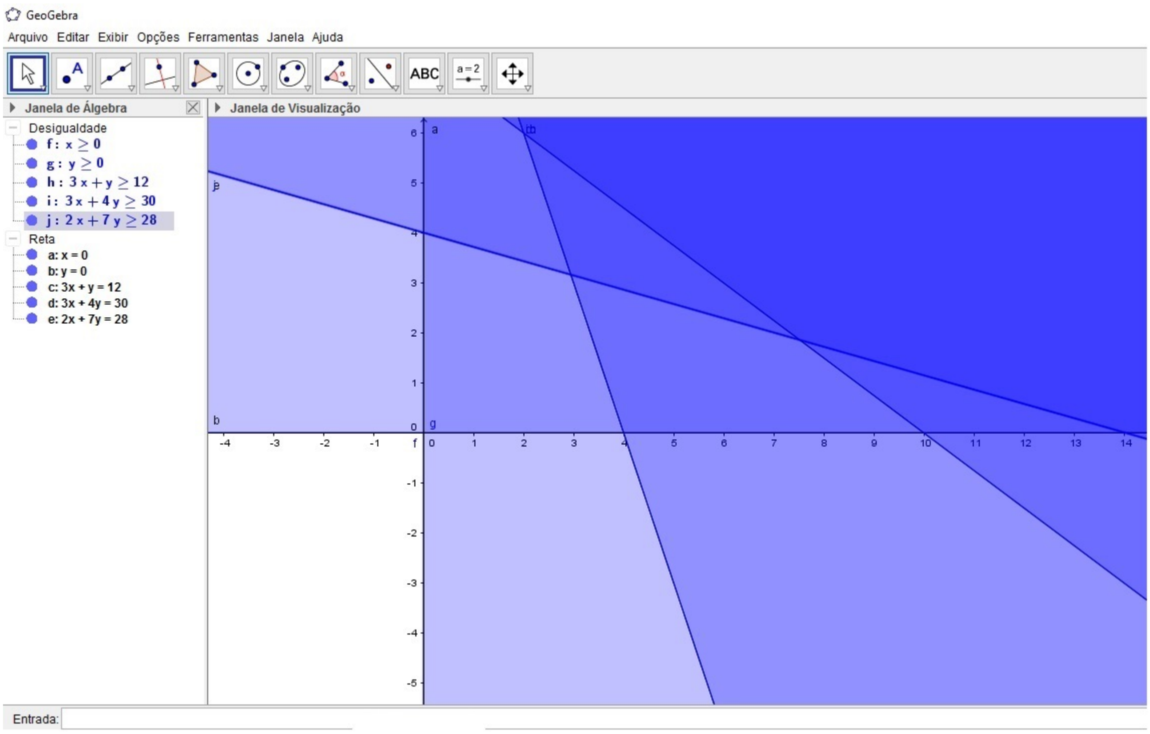


Figura A.7: Janela principal do GeoGebra após a digitação de todas as inequações.

Ao passar o mouse pela Figura, abre uma janela mostrando quais regiões fazem parte da intersecção. Ver Figura A.8.

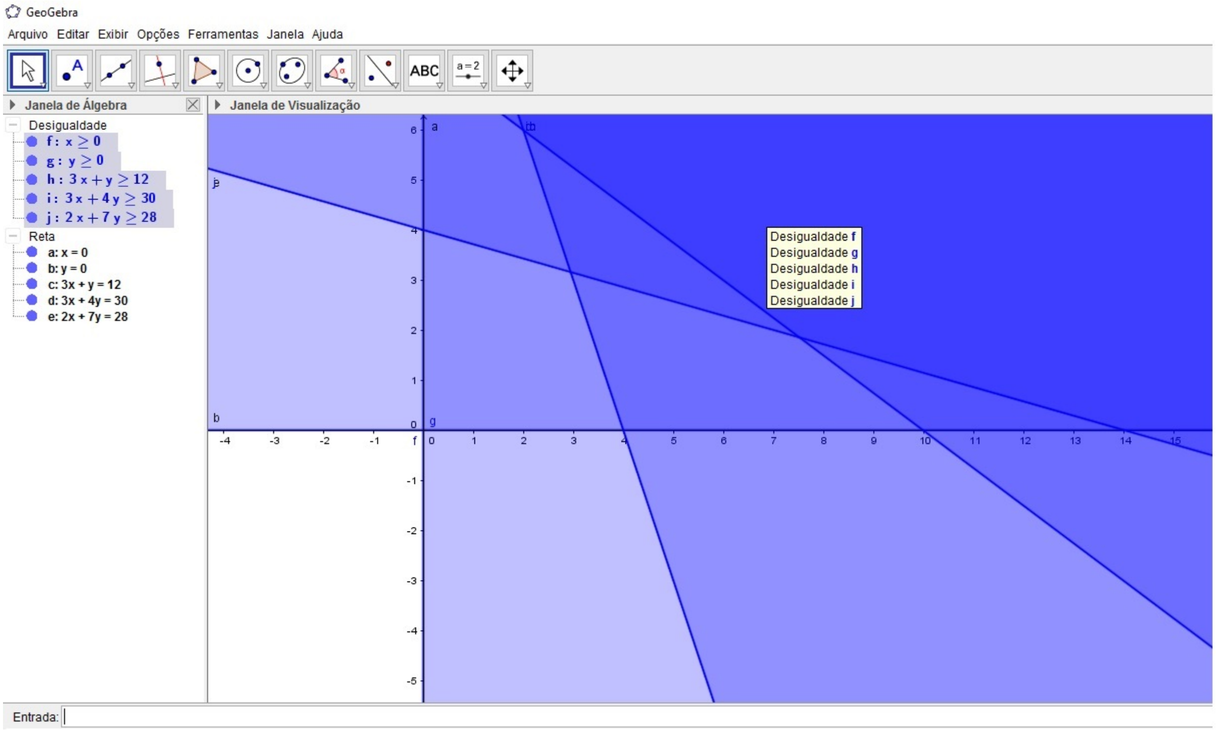


Figura A.8: Janela principal do GeoGebra mostrando a intersecção das regiões.

Ao posicionar o cursor na intersecção de duas retas, abre-se uma janela mostrando quais as retas fazem parte desta intersecção. Ver Figura A.9.

Para ver qual o ponto de intersecção, basta inserir na guia "Entrada", o comando interseção[d, e], um ponto será exibido no gráfico, e na "janela de álgebra", será exibido um ponto com o valor numérico correspondente. Ver Figura A.10.

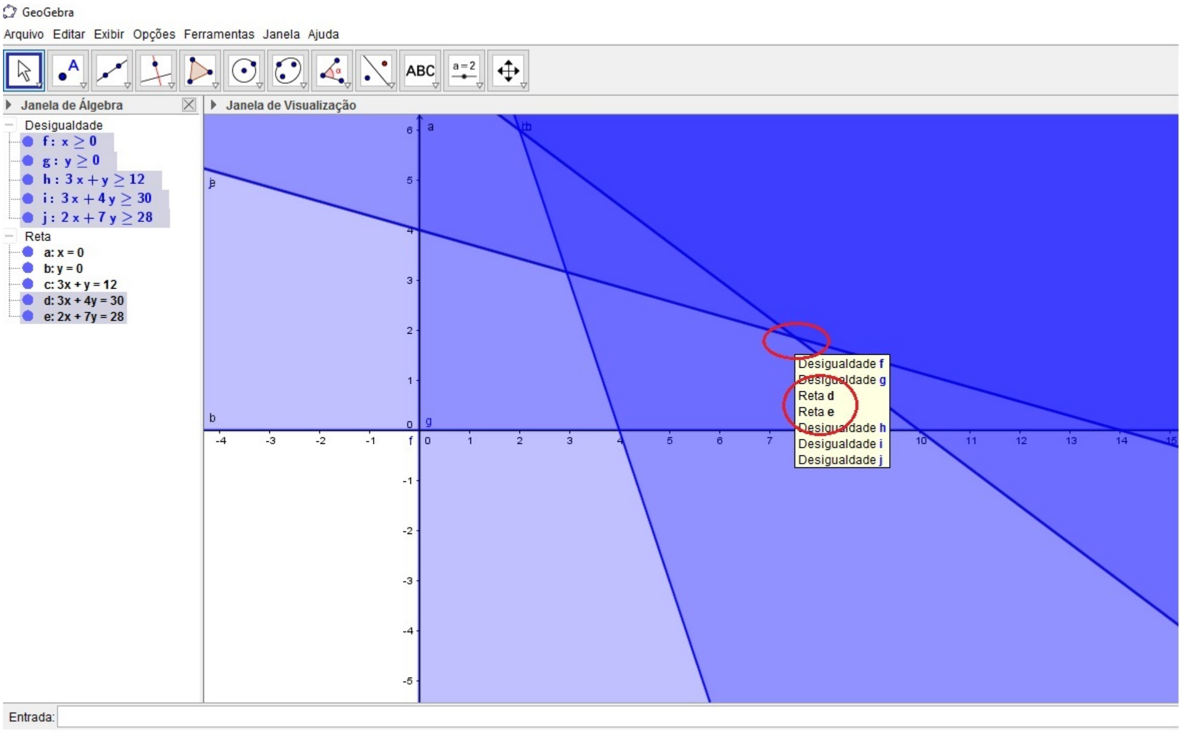


Figura A.9: Janela principal do GeoGebra mostrando a visualização da intersecção de duas retas.

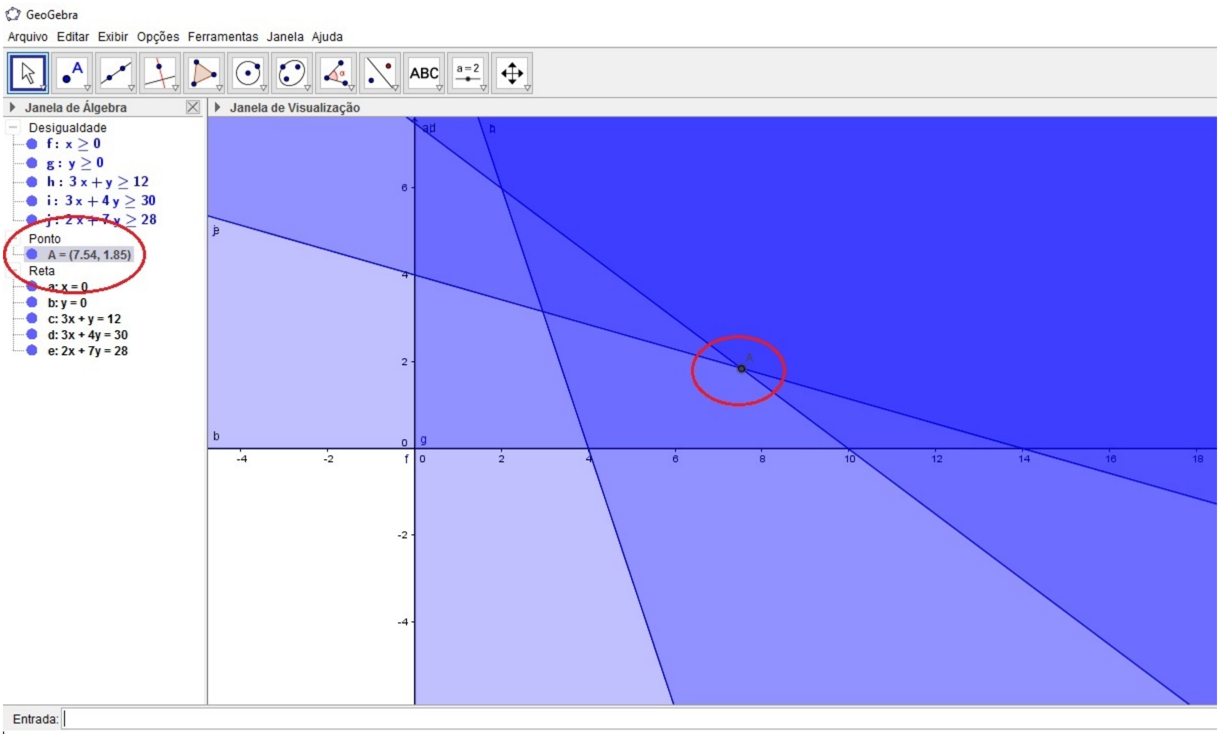


Figura A.10: Janela principal do GeoGebra indicando o ponto de intersecção de duas retas.

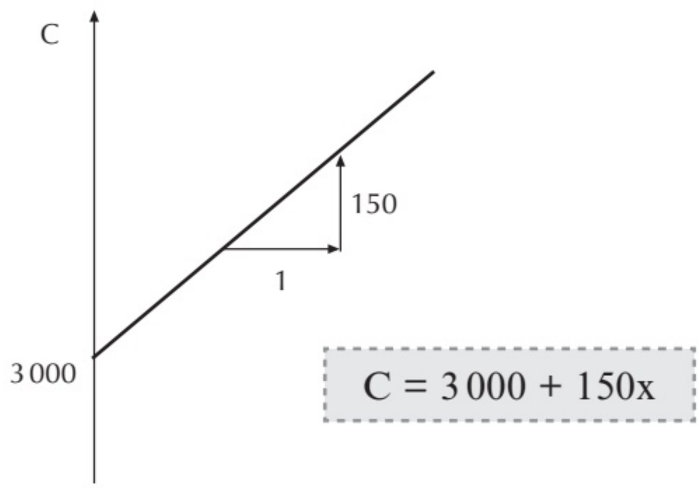
B ROTEIRO PARA APLICAÇÃO DA SITUAÇÃO DE APRENDIZAGEM 3 DESCRITA NO CADERNO DO PROFESSOR

O material de apoio ao currículo do Estado de São Paulo - Caderno do Professor trás o seguinte roteiro para aplicação da Situação de Aprendizagem 3, utilizada na sequência didática:

1. Em uma fábrica que produz um só tipo de produto, o custo C da produção de **x** unidades é a soma de um custo fixo C_0 com um custo variável C_1, que é proporcional a **x**. Se o processo de produção for tal que cada unidade produzida a mais tenha sempre o mesmo custo, independentemente do valor de **x**, então $C_1 = kx$, onde **k** representa o custo de cada unidade do produto. Em uma fábrica como a descrita acima, tem-se: **C = 3 000 + 150x** (**x** é o número de artigos; C é o custo da produção em reais).

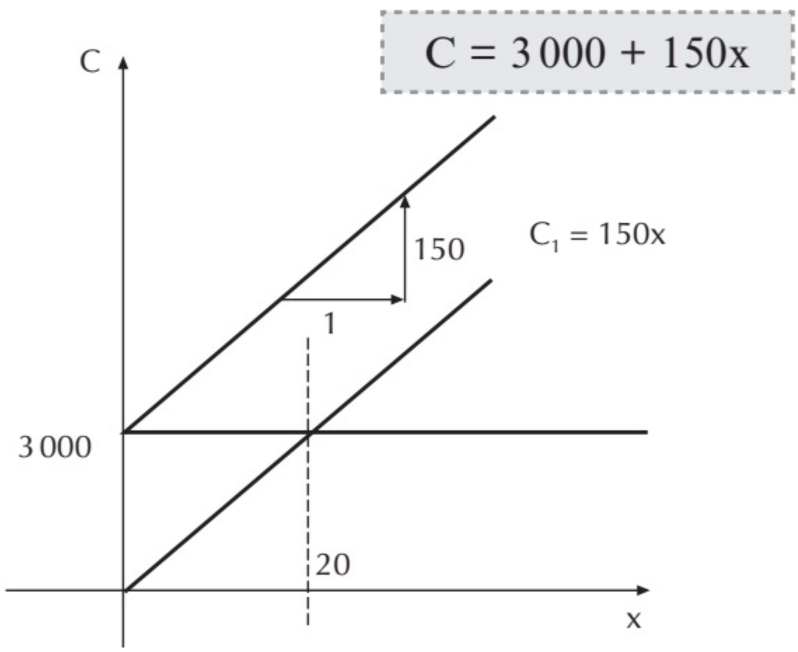
a) Esboce o gráfico de C em função de **x**.

O gráfico de C = 3000 + 150x é uma reta de inclinação m = 150, cortando o eixo OY, em que está representado o custo C, no ponto (0; 3 000):



b) Para qual valor de x o custo fixo se iguala ao custo variável?

O custo fixo é 3 000 e o custo variável é 150x; eles são iguais quando x = 20.



c) A partir de qual valor de x o custo fixo passa a representar menos de 10% do custo total da produção?

O custo fixo passará a corresponder a 10% do custo total na seguinte situação:

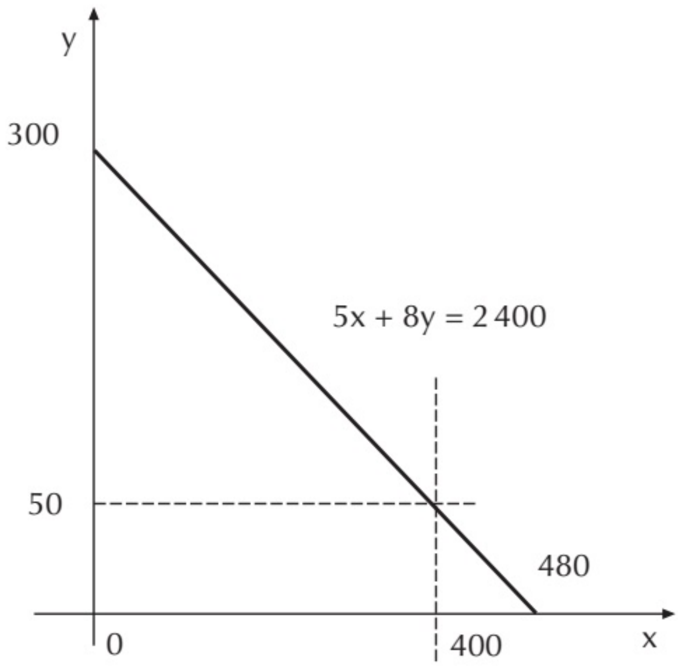
3000 = 10% de (3000 + 150x), ou seja, na seguinte situação

3000 = 0,1(3000 + 150x), e então x = 180.

2. Uma fábrica produz dois tipos de produtos: A e B. A quantidade produzida diariamente de A é igual a **x**, e a quantidade diária de B é igual a **y**. O processo de produção é tal que cada unidade produzida de A custa sempre 5 reais e cada unidade de B custa 8 reais, sendo, portanto, o custo da produção conjunta de A e B igual a **C = 5x + 8y** (C em reais).

a) Sendo o valor de C, em determinado dia, igual a R$ 2400,00, determine dois pares de valores possíveis para **x** e **y.**

Para 2400 = 5x + 8y, podemos ter x = 0 e y = 300, ou então, y = 0 e x = 480, ou ainda, x = 400 e y = 50. Existem infinitos pares de valores de x e de y que satisfazem a relação dada: são os correspondentes aos pontos da reta cuja equação 5x + 8y = 2400 é representada a seguir:



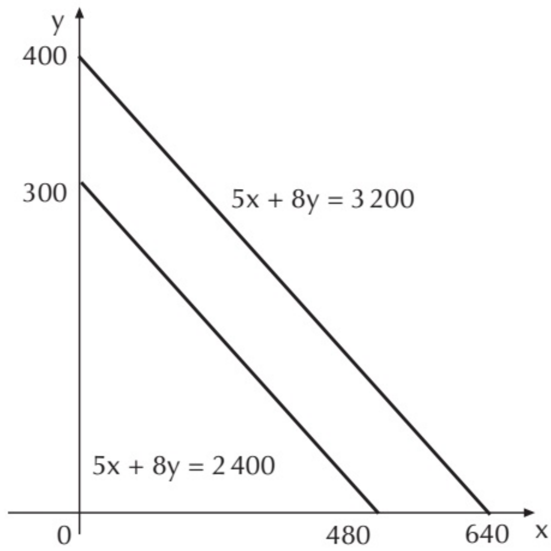
b) Sendo o máximo valor admissível para C igual a R\$ 3 200,00, qual o valor máximo possível para x? E qual é o valor máximo possível para y? (Observação: $x \geq 0$, $y \geq 0$).

Sendo C = 3 200, então temos:

5x + 8y = 3 200. Os pares (x; y) correspondentes situam-se sobre a reta 5x + 8y = 3 200 (que é paralela à reta 5x + 8y = 2 400).

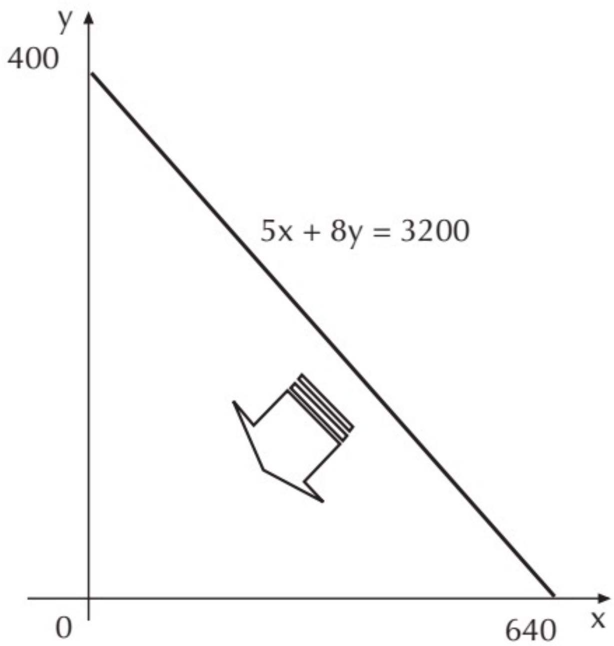
Quando y = 0, x assume o valor máximo possível: x = 640.

Quando x = 0, y assume o valor máximo possível: y = 400.



c) Represente em um sistema de coordenadas no plano os pares (x; y) para os quais se tem $C \leq 3\,200$.

Teremos o custo C menor ou igual a 3 200 na região do primeiro quadrante situada na reta 5x + 8y = 3 200 ou abaixo dela:

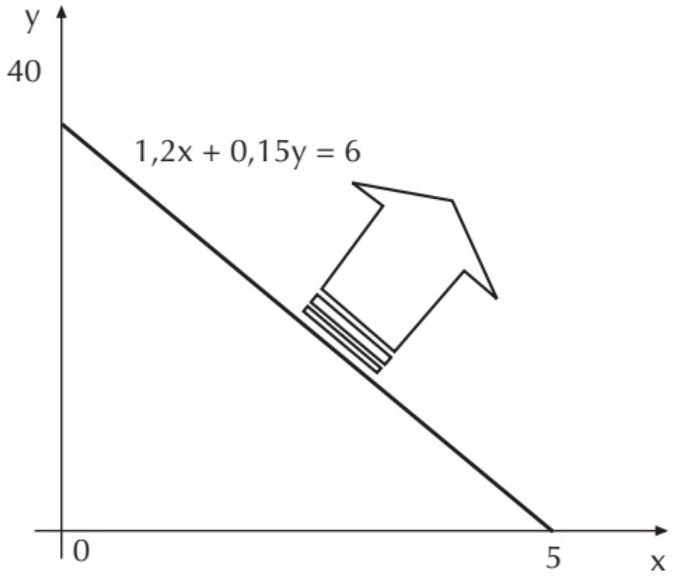


3. Uma pessoa deve fazer uma dieta que forneça pelo menos 6 mg de vitamina $B_{2,}$ alimentando-se exclusivamente dos alimentos I e II, oferecidos em pacotes de 100 g. Cada pacote do alimento I fornece 1,2 mg de B_2, e cada pacote do alimento II fornece 0,15 mg de B_2. Sendo **x** o número de pacotes do alimento I a serem ingeridos, e **y** o número de pacotes do alimento II:

a) Escreva a relação que deve existir entre **x** e **y** para que a dieta seja satisfeita.

Como cada pacote do alimento I fornece 1,2 mg de vitamina B_2, x pacotes de I fornecerão $x \cdot 1{,}2$ mg de vitamina B_2; se cada pacote de II fornece 0,15 mg de B_2, então y pacotes de II fornecerão $0{,}15 \cdot y$ mg de B_2. Logo, ingerindo x pacotes de I e y pacotes de II, a quantidade ingerida de B_2 será igual a $1{,}2x + 0{,}15y$. Para a dieta ser satisfeita, devemos ter $1{,}2x + 0{,}15y \geq 6$.

b) Representе graficamente os pares (x; y) que satisfazem essa relação. (Lembre-se de que devemos ter, naturalmente, $x \geq 0$, $y \geq 0$.)



Os pontos (x; y) que satisfazem a relação $1{,}2x + 0{,}15y \geq 6$ são os pontos do primeiro quadrante que se situam acima da ou na reta $1{,}2x + 0{,}15y = 6$. Essa reta intercepta o eixo OX no ponto (5; 0) e o eixo OY no ponto (0; 40).

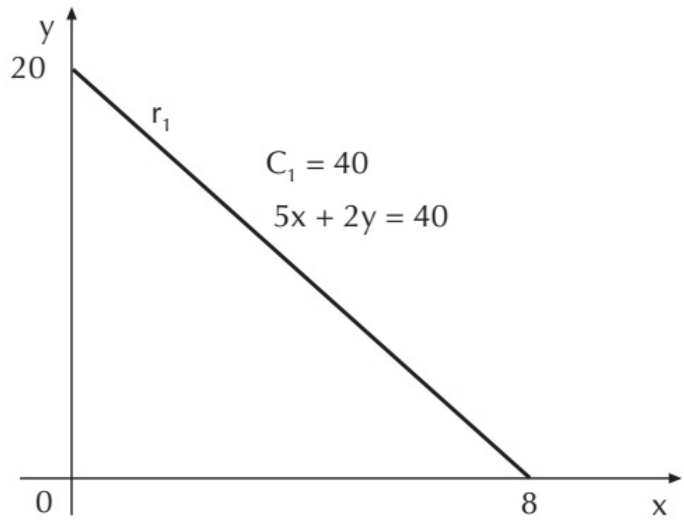
4. Retome o enunciado da atividade anterior. Considere que cada pacote de 100 g do alimento I custa 5 reais, e que cada pacote do alimento II custa 2 reais.

a) Expresse o custo C da alimentação, se forem utilizados **x** pacotes de I e **y** pacotes de II.

Como cada pacote de I custa 5 reais e cada pacote de II custa 2 reais, o custo C será igual a $5x + 2y$, ou seja, $C = 5x + 2y$ (C em reais).

b) Represente graficamente no plano cartesiano os pares (x; y) que correspondem ao custo $C_1 = 40$ reais, notando que eles correspondem a uma reta r_1.

Sendo o custo $C_1 = 40$, os pares (x; y) que satisfazem a relação $40 = 5x + 2y$ são os pontos da reta r_1, representada a seguir. Para representar tal reta, basta notar que quando $x = 0$, $y = 20$, e que quando $y = 0$, $x = 8$, ou seja, os pontos (0; 20) e (8; 0) pertencem a r_1.



c) **Represente os pontos que correspondem ao custo de $C_2 = 60$ reais e $C_3 = 80$ reais, notando que eles correspondem às retas r_2 e r_3, paralelas à reta r_1 do item anterior.**

Os pontos que correspondem ao custo $C_2 = 60$ e $C_3 = 80$ são pontos, respectivamente, das retas $r_2 : 5x + 2y = 60$ e $r_3 : 5x + 2y = 80$, representadas a seguir.

Para representar r_2, basta notar que:

se $x = 0$, então $y = 30$;

se $y = 0$, então $x = 12$.

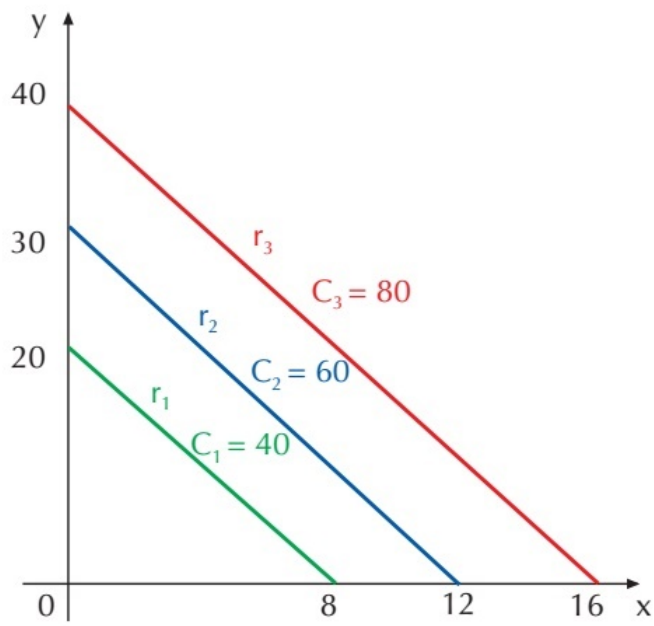
Para representar r_3, analogamente, temos:

$x = 0$, $y = 40$; $y = 0$, $x = 16$.

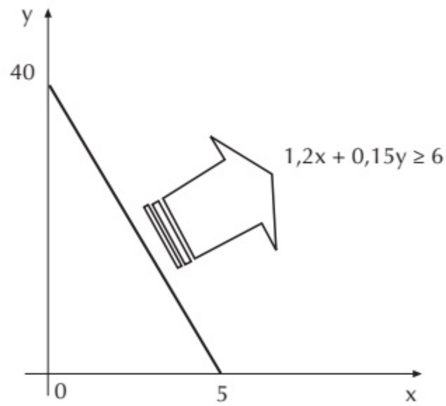
(As retas r_2 e r_3 são paralelas, pois têm a mesma inclinação m, determinada pelos coeficientes 5 e 2: $m = -\frac{5}{2}$.)

d) Mostre que quanto menor o custo, menor a ordenada do ponto em que a reta que o representa intercepta o eixo **y**.

Para cada valor fixado de C, a reta C = 5x + 2y intercepta o eixo OY no ponto $\left(0; \frac{C}{2}\right)$; assim, quanto menor o custo, menor o valor de $\frac{C}{2}$. Podemos observar esse fato nos exemplos dos itens anteriores, para C igual a 40, 60 e 80.



e) Para qual dos pares (x; y) tem-se a dieta satisfeita e o custo da alimentação o menor possível?



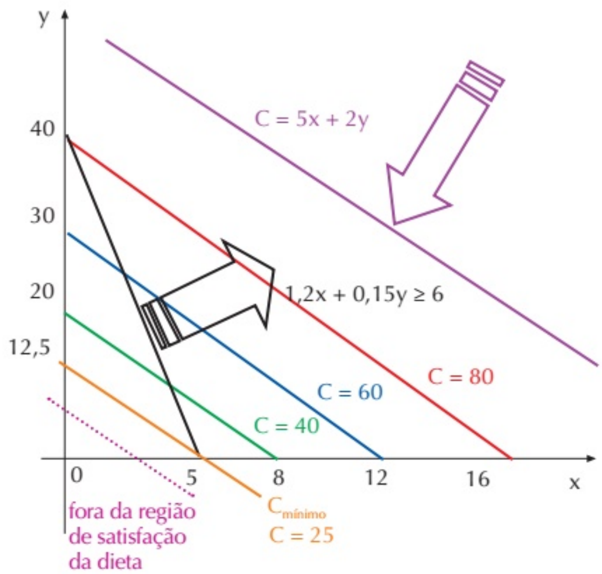
Recordemos, da atividade 3, que para a dieta ser satisfeita, os pares (x; y) devem pertencer à região do primeiro quadrante situada na reta $1{,}2x + 0{,}15y = 6$, ou acima dela. Estamos, agora, procurando o par (x; y) que corresponde ao custo mínimo entre os pontos da região em que $1{,}2x + 0{,}15y \geq 6$.

Vamos observar como as retas que traduzem os custos da alimentação, representadas anteriormente, situam-se na região que satisfazem a dieta.

Notamos que:

- para os diversos valores do custo, as retas representativas são paralelas $\left(\text{inclinação igual a } -\dfrac{5}{2}\right)$;
- quanto mais baixa for a reta que representa o custo, menor é esse custo – seu valor determina o ponto em que a reta corta o eixo y, que é $\left(0; \dfrac{C}{2}\right)$;
- o ponto mais baixo a que se pode chegar sem sair da região que satisfaz a dieta (acima ou na reta $1{,}2x + 0{,}15y = 6$), é o ponto (5; 0);
- nesse ponto, o custo será $C = 5 \cdot 5 + 2 \cdot 0 = 25$, que é o custo mínimo.

Todos esses fatos estão reunidos na figura a seguir:



Portanto, o custo mínimo, nas condições do enunciado, ocorre com 5 pacotes do alimento I e nenhum pacote do alimento II; tal custo corresponde a 25 reais.

5. Um pequeno fazendeiro dispõe de 8 alqueires para plantar milho e cana. Ele deve decidir quanto plantar de milho e quanto de cana, em alqueires, de modo que seu rendimento total seja o maior possível. Cada alqueire de milho plantado deve resultar em um rendimento líquido de R$ 20 mil, e cada alqueire de cana deverá render R$ 15 mil. No entanto, cada alqueire de milho requer 20 000L de água para irrigação e cada alqueire de cana requer somente 10 000L de água, sendo que, no período correspondente, a quantidade de água disponível para tal fim é 120 000L.

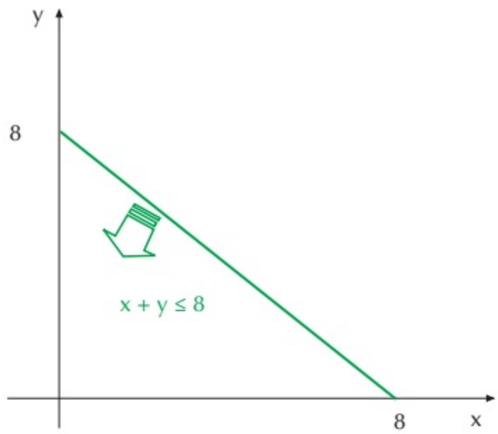
Considere **x** e **y** as quantidades de alqueires plantados de milho e cana, respectivamente.

a) Como se pode representar, em termos de **x** e **y**, o rendimento total **R** a ser recebido pelo fazendeiro, supondo que venda a totalidade de sua produção?

Cada alqueire de milho renderá 20 000; logo, se plantar x alqueires, o rendimento será 20 000x. Cada alqueire de cana renderá 15 000; logo, se plantar y alqueires de cana, o rendimento será 15 000y. O rendimento total será R = 20 000x + 15 000y.

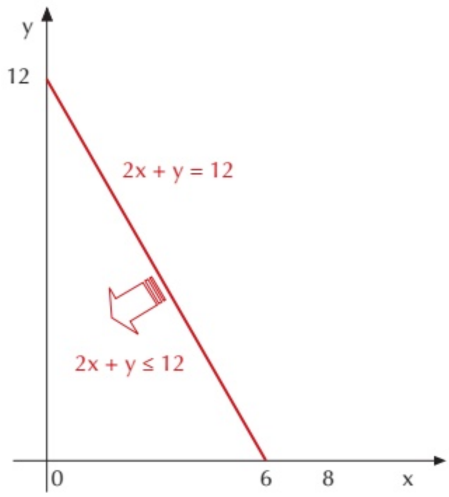
b) Qual a relação entre **x** e **y** que traduz a exigência de que o total de alqueires plantados não pode ser maior do que 8? Represente no plano cartesiano os pontos (x; y) que satisfazem essa relação.

Sendo x a quantidade de alqueires a ser plantados de milho e y a quantidade de alqueires plantados de cana, a soma $x + y$ não pode ultrapassar os 8 alqueires disponíveis, ou seja: $x + y \leq 8$.



c) Qual é a relação entre **x** e **y** que traduz a exigência de que o total de água a ser utilizado não pode superar os 120 000L? Represente no plano cartesiano os pontos (x; y) que satisfazem essa relação.

Como cada alqueire de milho requer 20 000L de água, x alqueires requererão 20 000x L; da mesma forma, y alqueires de cana utilizarão 10 000y L de água. Assim, o total de litros de água utilizados será 20 000x + 10 000y, e não poderá ultrapassar o limite de 120 000, ou seja: $20\,000x + 10\,000y \leq 120\,000$. Isso corresponde aos pontos situados abaixo da reta ou na reta $20\,000x + 10\,000y = 120\,000$. Veja a representação:

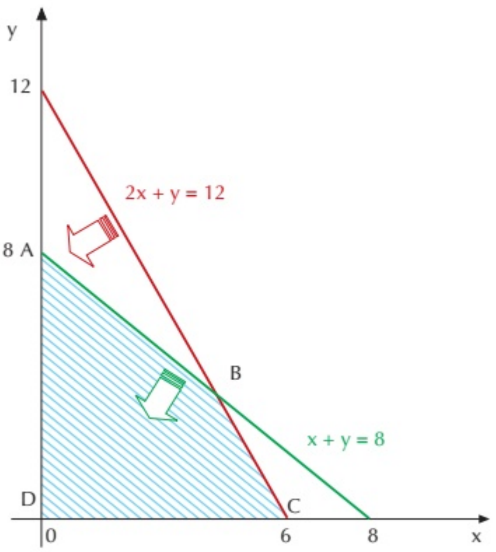


Para representar a reta, podemos simplificar os coeficientes, obtendo $2x + y = 12$.

- para $x = 0$, temos $y = 12$;
- para $y = 0$, temos $x = 6$.

d) Represente no plano cartesiano o conjunto dos pontos que satisfazem simultaneamente as duas exigências expressas nos itens **b** e **c** (lembrando que devemos ter $x \geq 0$, $y \geq 0$).

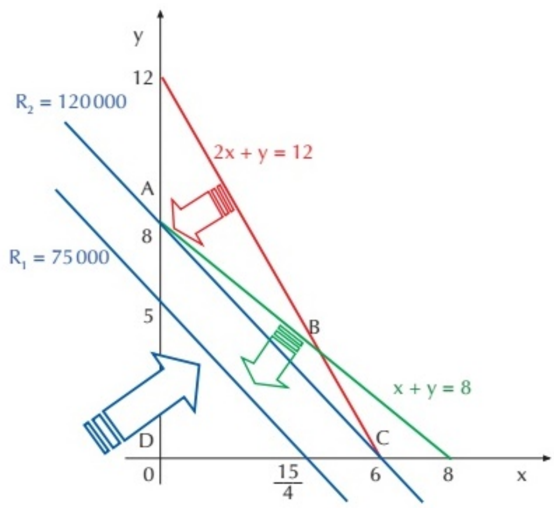
Os pontos do plano que satisfazem simultaneamente as duas restrições são os pontos situados abaixo ou na reta $x + y = 8$, e abaixo ou na reta $2x + y = 12$. Formam o quadrilátero ABCD indicado na representação a seguir.



e) Determine o conjunto dos pontos (x; y) do plano que correspondem ao rendimento $R_1 = 75$ mil e os que correspondem ao rendimento $R_2 = 120$ mil.

Os pontos (x; y) que correspondem ao rendimento $R_1 = 75\ 000$ reais são os pontos da reta r_1 de equação $75\,000 = 20\,000x + 15\,000y$,ou seja, simplificando os coeficientes, $4x + 3y = 15$.

Os pontos que correspondem ao rendimento $R_2 = 120\,000$ são os pontos da reta r_2 de equação $120\,000 = 20\,000x + 15\,000y$, ou seja, simplificando os coeficientes, $24 = 4x + 3y$. As duas retas são paralelas e estão representadas a seguir:



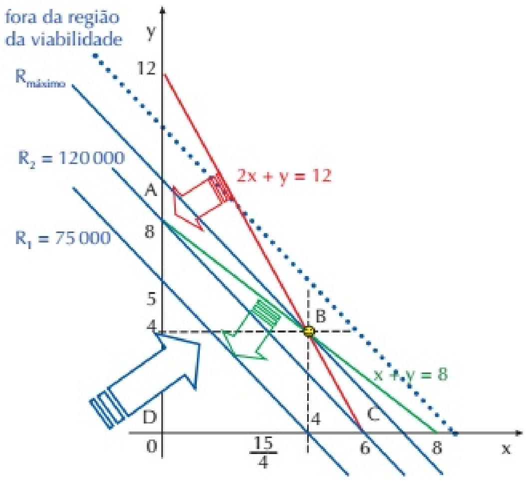
r_1: $4x + 3y = 15$	r_2: $4x + 3y = 24$
$x = 0 \rightarrow y = 5$	$x = 0 \rightarrow y = 8$
$y = 0 \rightarrow x = \dfrac{15}{4}$	$y = 0 \rightarrow x = 6$

f) **Mostre que, quanto maior o rendimento R, maior a ordenada do ponto em que a reta que o representa intercepta o eixo OY.**

Para cada valor fixado do rendimento R, a reta R = 20 000x + + 15 000y corta o eixo OY no ponto em que x = 0, ou seja, em que $y = \dfrac{R}{15\,000}$. Isso significa que quanto maior o rendimento, maior é a ordenada do ponto em que a reta que o representa intercepta o eixo y.

g) **Determine o ponto da região do item d que corresponde ao rendimento total máximo.**

Buscamos agora o ponto da região de viabilidade do problema, ou seja, que foi determinado no item d, no qual o rendimento total R é o maior possível. O maior valor possível para a reta R = 20 000x + 15 000y cortar o eixo y sem sair da região de viabilidade corresponde à reta que passa pelo ponto de interseção das retas x + y = 8 e 2x + y = 12. Calculando tal ponto, obtemos x = 4 e y = 4. No ponto (4; 4), portanto, o valor de R é o maior possível, respeitadas as condições de x + y ≤ 8 e 2x + y ≤ 12. Calculando o valor de R nesse ponto, obtemos: R = 20 000 · 4 + 15 000 · 4, ou seja, R = 140 000 reais. Acompanhe o raciocínio que foi feito na figura abaixo:

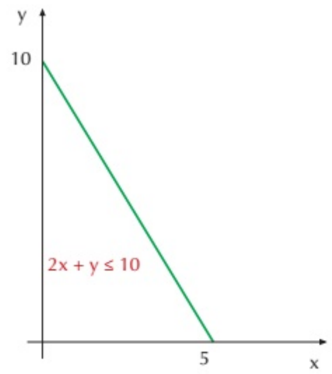


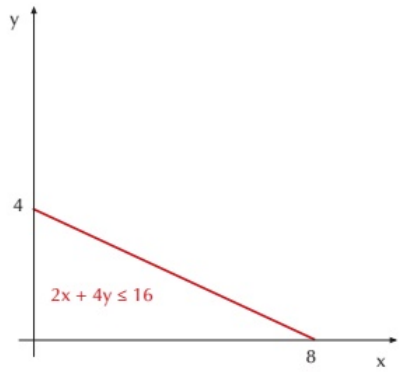
Desafio!

Uma fábrica utiliza dois tipos de máquinas, M_1 e M_2, para produzir dois tipos de produtos, P_1 e P_2. Cada unidade de P_1 exige 2 horas de trabalho de M_1 e 2 horas de M_2; cada unidade de P_2 exige 1 hora de trabalho de M_1 e 4 horas de M_2. Sabe-se que as máquinas M_1 e M_2 podem trabalhar, no máximo, 10 horas por dia e 16 horas por dia, respectivamente, e que o lucro unitário, na venda de P_1, é igual a 40 reais, enquanto na venda de P_2, o lucro unitário é de 60 reais. Representando por **x** a quantidade diária a ser produzida de P_1 e por **y** a quantidade a ser produzida de P_2, responda às questões seguintes:

a) Qual é a relação entre **x** e **y** de modo que o tempo de utilização da máquina M_1 não ultrapasse as horas diárias permitidas? Represente os pontos correspondentes no plano cartesiano.

Cada unidade de P_1 utiliza 2 h de M_1; cada unidade de P_2 utiliza 1 h de M_1; logo, produzindo-se x unidades de P_1 e y unidades de P_2, a máquina M_1 ficará ocupada $x \cdot 2 + y \cdot 1$ horas. Como M_1 poderá trabalhar no máximo 10 h, devemos ter $2x + 1y \leq 10$. Corresponde à região do plano abaixo da ou na reta $2x + y = 10$ (ver a seguir).



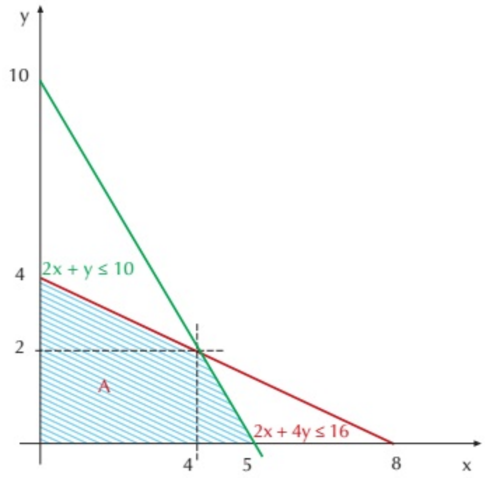


b) Qual é a relação entre **x** e **y** de modo que o tempo de utilização da máquina M_2 não ultrapasse as horas diárias permitidas? Represente os pontos correspondentes no plano cartesiano.

Da mesma maneira, ao item anterior, cada unidade de P_1 utiliza 2 h de M_2, e cada unidade de P_2 utiliza 4 h de M_2. Logo, x unidades de P_1 e y unidades de P_2 utilizarão $2x + 4y$ horas de M_2, e devemos ter $2x + 4y \leq 16$. O gráfico está representado anteriormente.

c) Represente a região do plano cartesiano que corresponde aos pontos (x; y) que satisfazem simultaneamente às duas restrições dos itens **a** e **b**.

Trata-se da região do primeiro quadrante situada abaixo das ou nas retas $2x + y = 10$ e $2x + 4y = 16$; é o quadrilátero A de vértices (0; 0), (5; 0), (0; 4) e (4; 2). Para encontrar o vértice (4; 2), basta achar a interseção das retas $2x + y = 10$ e $2x + 4y = 16$

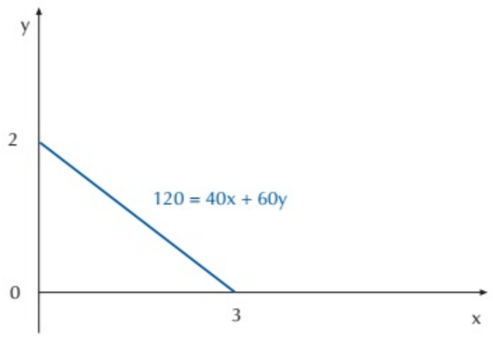


d) Qual é a expressão do lucro total L que resulta da venda de todas as unidades produzidas de P_1 e P_2?

O lucro total L, que resulta da venda de todas as x unidades produzidas de P_1 e y unidades produzidas de P_2, é igual a $40x + 60y$, pois cada unidade de P_1 gera um lucro de 40, e cada unidade de P_2 gera um lucro de 60. Assim, temos $L = 40x + 60y$.

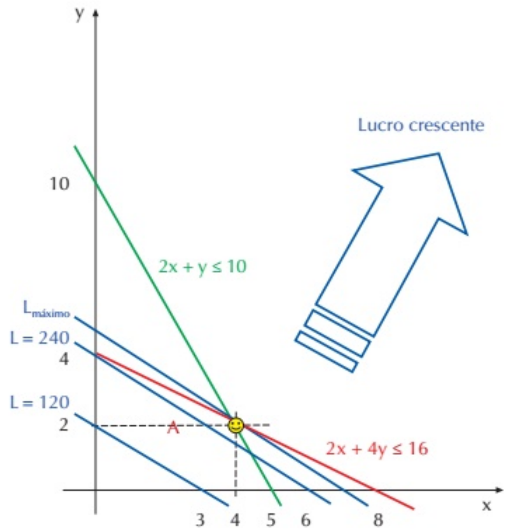
e) Represente os pontos do plano que correspondem a um lucro total igual a 120 reais.

Se o lucro L for igual a 120 reais, temos: $120 = 40x + 60y$. Os pontos que satisfazem a essa relação pertencem a uma reta, representada a seguir:



f) Qual é o ponto da região do item c que corresponde ao lucro total máximo?

Devemos encontrar o ponto da região A, indicada no item c, para o qual o lucro total L seja máximo. A região A é formada pelos pares (x; y), que obedecem às duas restrições inicialmente apresentadas, constituindo, assim, a região de viabilidade para o problema. Para descobrir tal ponto, vamos relacionar o lucro L com a região A.



Para cada valor de L, a expressão L = 40x + 60y representa uma reta; para valores diferentes de L, as retas correspondentes são todas paralelas. Por exemplo, para L = 240, temos 240 = 40x + 60y, que é uma reta que intercepta o eixo x no ponto (6; 0), e o eixo y no ponto (0; 4).

Para encontrar o lucro máximo, basta procurar entre as retas paralelas L = 40x + 60 · y aquela que corta o eixo y o mais alto possível, sem sair da região de viabilidade do problema. Tal reta é a que passa pelo ponto (4; 2); o valor de L correspondente é L = 40 · 4 + 60 · 2 = 280. O lucro total máximo é, portanto, 280 reais.