

APLICAÇÕES DO FLUXO DE RICCI À TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL: ESTUDO DOS BURACOS NEGROS

FRANCHI, Claudia Maria Gregorini Gonçalves
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas de São José do Rio Preto
claudiafranchi@oi.com.br

BORGES, Manoel Ferreira Neto
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas de São José do Rio Preto
borges@iblice.unesp.br

RESUMO: O fluxo de Ricci é uma ferramenta analítica e, um análogo da equação do calor para a geometria, um processo difusivo que atua sobre as métricas de uma variedade Riemanniana e assim, pode ser utilizado na matemática para entender a topologia de variedades e também no estudo das teorias geométricas. Sendo assim, a curvatura de Ricci desempenha um papel importante na Teoria da Relatividade Geral, uma teoria geométrica, em que é o termo dominante nas equações de campo de Einstein. O presente trabalho tem como principais objetivos desenvolver e aplicar técnicas de fluxo de Ricci à Relatividade Geral, no caso, uma métrica Riemanniana tridimensional assintoticamente plana como um conjunto de dados iniciais para equações de Einstein e estabelecer relações e comparações entre os mesmos.

PALAVRAS-CHAVE: matemática computacional, computação científica, relatividade, entropia.

ABSTRACT: *The flow of Ricci is an analytical tool, and a similar equation for heat geometry, a diffusive process which acts on a variety of metrics Riemannian and thus can be used in mathematics to understand the topology of varieties and also in the study geometric theories. Thus, the Ricci curvature plays an important role in the General Theory of Relativity, characterized as a geometric theory, which is the dominant term in the Einstein field equations. The present work has as main objectives to develop and apply Ricci flow techniques to general relativity, in this case, a three-dimensional asymptotically flat Riemannian metric as a set of initial data for Einstein equations and establish relations and comparisons between them.*

KEYWORDS: *computational mathematics, scientific computing, relativity, entropy.*

1. INTRODUÇÃO

Historicamente foi no ramo da física que o fluxo de Ricci fez sua primeira aparição, em um grupo de renormalização para modelos bidimensionais sigma. Posteriormente, foi introduzido na matemática por Hamilton (HAMILTON, 1982) como uma ferramenta para o estudo da topologia das variedades. Hamilton (op. cit.), entre outros trabalhos, desenvolveu um programa, recentemente apresentado por Perelman, para provar a conjectura da geometrização de Thurston sobre a classificação de 3-va-

riedades (PERELMAN, 2002, PERELMAN, 2003, PERELMAN, 2003).

O fluxo de Ricci fora em princípio utilizado pelos matemáticos para entender a topologia de variedades em dimensão três (MORGAN; TIAN, 2006, HAMILTON, 1982). Pode-se observar a possibilidade destes desenvolvimentos matemáticos para a física, no estudo das teorias geométricas, como a Teoria da Relatividade Geral.

O trabalho inicial fora desenvolvido por Richard Hamilton (op. cit.), sob a égide dos trabalhos de Eells e Sampson (EELLS; SAMPSON, 1964), ao qual Hamilton (op.

cit.) faz referências em artigos de 1975 a 1982, em que, introduzem o mapa harmônico do fluxo de calor, fazendo uso do mesmo para provar a existência de mapas harmônicos e objetivando que as curvaturas seccionais não são positivas. Hamilton edifica seu estudo sobre problemas pertinentes ao estudo das Conjecturas de Poincaré e Smith (GIFFEN, 1966, ROLFSEN, 1976), culminando posteriormente na completa elaboração do programa de Geometrização de Thurston (THURSTON, 1982).

Em 1974, Firey (FIREY, 1974) propôs que o fluxo de curvatura de Gauss modelaria as formas de pedras gastas e considerando o caso em que a superfície é invariante e, no caso, menor que a identidade. Gauss escreveu um trabalho sobre um problema físico, a situação das pedras nas praias, cujas ondas batem e promovem desgaste de maneira suave, de formas irregulares, às vezes aparentemente elipsoidais e até mesmo esféricas. Firey (op.cit.), iniciou o trabalho com uma idealização do processo de desgaste para materiais isotrópicos, em seguida, desenvolveu uma equação que rege-o e passou a evidenciar que uma pedra que é inicialmente convexa e com simetria central tendia a assumir uma forma esférica como consequência da equação que a rege.

Em física, a Teoria da Relatividade Geral é a generalização da Teoria da gravitação de Newton e foi publicada em 1915 por Albert Einstein. Um dos elementos mais importantes da Teoria da Relatividade Geral é a interpretação geométrica da gravidade: a densidade da matéria numa certa região e, portanto a intensidade do campo gravitacional é proporcional à curvatura do espaço-tempo na métrica pseudo-Riemanniana.

Com a estrutura das variedades diferenciáveis é possível definir alguns objetos geométricos importantes para a obtenção e análise das soluções advindas da Teoria da Relatividade Geral de Einstein e assim fazer correlações com o fluxo de Ricci. Pode este objeto conseguir medir normas de vetores (ou co-vetores) do espaço tangente (ou co-tangente) à variedade. E ainda, pode ser o objeto responsável pela relação entre as componentes dos elemen-

tos dos espaços tangente e co-tangente.

De acordo com a Teoria da Relatividade Geral, um buraco negro é uma região do espaço da qual nada pode escapar. Este é o resultado da deformação do espaço-tempo causada por uma matéria maciça e altamente compacta. Um buraco negro é limitado pela superfície denominada horizonte de eventos, que marca a região a partir da qual não se pode mais voltar.

Partindo-se do princípio que os buracos negros são estruturas descritas no arcabouço matemático da Teoria da Relatividade Geral, pode-se descrevê-los por intermédio da geometria da Teoria da Relatividade Geral. Assim, o fluxo de Ricci, utilizado sobretudo para estudar o comportamento de variedades pode ser útil para o estudo da evolução dos buracos negros, uma vez que faz uso do mesmo ferramental matemático da Teoria da Relatividade Geral.

Assim, nos próximos tópicos, far-se-á uma breve exposição da Teoria da Relatividade Geral, evolução do estudo dos buracos negros e da ferramenta fluxo de Ricci e ao final, serão apresentadas relações entre a Teoria da Relatividade Geral e o fluxo de Ricci e também as considerações finais e conclusões do presente trabalho.

2. Teoria da relatividade geral

A Teoria da Relatividade Geral (TRG) foi publicada em 1915 por Albert Einstein e, é a generalização da Teoria da Relatividade Especial (TRE). Um dos fundamentos da TRG é o Princípio de Equivalência, que estabelece que um referencial inercial não acelerado na presença de um campo gravitacional e um referencial acelerado, mas agora sem um campo gravitacional são fisicamente equivalentes. Essencialmente, a TRG é uma teoria clássica de campos a qual descreve os efeitos gravitacionais produzidos pela geometria do espaço-tempo, e é modelada por uma variedade pseudo-Riemanniana livre de torção. Se a variedade em questão possui uma conexão com uma parte antissimétrica, a variedade é dita ser do tipo Riemann-Cartan e a teoria a qual correspondentemente descreve o campo gravitacional é chamada teoria de

Einstein-Cartan (FRIEDRICH, 1976).

Dentre as consequências mais importantes da TRG, pode-se citar a de deflexão da luz em um campo gravitacional, o redshift gravitacional, a precessão do periélio de Mercúrio e a previsão de ondas gravitacionais. O redshift gravitacional faz com que o comprimento de onda dos fótons diminua nas proximidades de um campo gravitacional suficientemente forte. O fenômeno da precessão do periélio de Mercúrio, já era estudado pela mecânica clássica, a qual computava um valor discrepante ao observado (HAWKING; ELLIS, 1976). As elipses que designam o movimento dos corpos celestes não são fechadas em virtude das perturbações de outros planetas, as quais alteram o ponto do periélio (ponto mais próximo do sol), fazendo assim o periélio precessionar. Mas a questão é que ainda restavam 43" por século nas previsões da Mecânica Clássica, o que foi interpretado por Einstein como modificações do espaço-tempo para tal situação. De acordo com as palavras de Einstein em seu trabalho de 1915:

Nós iremos, portanto assumir a completa equivalência física entre um campo gravitacional e a correspondente aceleração de um sistema de referência. Esta hipótese estende o princípio da relatividade especial para sistemas de referência uniformemente acelerados.

Conceitos como singularidades e estrutura causal (HAWKING; ELLIS, 1976), também ocorrem como previsões da Teoria da Relatividade Geral e serão abordados nos próximos tópicos.

2.1 Tensor de Curvatura

O tensor de curvatura, também chamado tensor de Riemann-Christoffel é de grande importância na Teoria da Relatividade Geral. Quando vetores são transportados paralelamente num circuito fechado em uma variedade, eles geralmente sofrem transformações, estas sendo relacionadas com a curvatura da variedade em questão. O mapeamento local da curvatura é realizado pelo tensor de Riemann. A derivada covariante de um vetor contravariante tem a seguinte forma

$$\nabla_{\nu} V^{\rho} = \partial_{\nu} V^{\rho} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} V_{\square}^{\lambda}, \quad (1)$$

onde,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\mu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) \quad (2)$$

são os símbolos de Christoffel.

Aplicando-se novamente a derivada covariante na equação (2), obtém-se,

$$\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} V^{\rho} = \partial_{\mu} (\partial_{\nu} V^{\rho} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} V_{\square}^{\lambda}) + \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} (\partial_{\nu} V^{\sigma} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} V_{\square}^{\lambda}) - \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma} (\partial_{\sigma} V^{\rho} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} V_{\square}^{\lambda}), \quad (3)$$

tal que, efetuando-se uma permutação inicial $\mu \leftrightarrow \nu$ na equação (3), resulta,

$$\nabla_{\nu} \nabla_{\mu} V^{\rho} = \partial_{\nu} (\partial_{\mu} V^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} V_{\square}^{\lambda}) + \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} (\partial_{\mu} V^{\sigma} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma} V_{\square}^{\lambda}) - \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} (\partial_{\sigma} V^{\rho} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\rho} V_{\square}^{\lambda}). \quad (4)$$

Subtraindo-se a equação (4) da equação (3), bem como se efetuando as substituições iniciais necessárias e levando-se em consideração a comutatividade das derivadas parciais bem como a simetria dos índices inferiores do símbolos de Christoffel, isto é, $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$, a expressão rearranjada para o comutador torna-se

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] V^{\rho} = (\partial_{\mu} \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}) V_{\square}^{\lambda}. \quad (5)$$

onde, o termo entre parênteses é identificado como tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu\lambda}^{\rho} = \partial_{\mu} \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho} \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}. \quad (6)$$

pode-se notar que o tensor de Riemann aparece como um tensor de quarta ordem e, portanto, de 256 componentes. Mas, devido às propriedades de simetria e antissimetria, suas componentes se reduzem a 20 (SILVA, 2012),

$$R_{\mu\nu\lambda\sigma} = R_{\mu\nu\lambda}^{\rho} g_{\rho\sigma}. \quad (7)$$

2.2 Tensor de Ricci e escalar de curvatura

Pode-se agora, por uma contração do tensor de Riemann, obter um tensor de segunda ordem que porta um número de 10 componentes independentes no caso mais geral, chamado tensor de Ricci,

$$R_{\mu\lambda} = R_{\mu\rho\lambda}^{\rho}. \quad (8)$$

pela propriedade de simetria, pode-se dizer que o tensor de Ricci é simétrico, isto é,

$$R_{\mu\lambda} = R_{\lambda\mu}, \quad (9)$$

tal que, em termos das componentes de conexão, tem-se

$$R_{\mu\lambda} = R_{\mu\rho\lambda}{}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\rho\lambda}{}^{\rho} - \partial_{\rho}\Gamma_{\mu\lambda}{}^{\rho} + \Gamma_{\sigma\mu}{}^{\rho}\Gamma_{\rho\lambda}{}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\rho}{}^{\rho}\Gamma_{\mu\lambda}{}^{\sigma}. \quad (10)$$

Pela propriedade de antissimetria pode-se assegurar que $R_{\mu\lambda}$ é o único tensor de segunda ordem que pode ser formado a partir do tensor de Riemann a menos de um sinal arbitrário. Também, pode-se contrair o tensor de Ricci $R_{\mu\lambda}$ e construir o escalar de Ricci, denominado escalar de curvatura e dado por, $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\lambda}$. (11)

O escalar de Ricci especifica um número real em cada ponto da variedade em consideração, determinando a curvatura intrínseca da variedade nesse ponto (SILVA, 2012).

3. Buracos Negros

A expressão *buraco negro* foi adotada em 1969, pelo cientista americano John Wheeler (WHEELER, 1969), como descrição gráfica de uma ideia que, retrocedendo pelo menos 200 anos, chega a um tempo em que John Michell (MICHELL, 1784) postulou que “*uma estrela com massa suficientemente compacta poderia ter um campo gravitacional tão forte que a luz não poderia escapar. Qualquer luz emitida pela superfície da estrela seria puxada de volta por uma atração gravitacional antes que conseguisse se afastar*”. Esses objetos são os chamados atualmente de buracos negros, pois são vácuos escuros no espaço.

No entanto, uma teoria adequada que justifique como a gravidade atua sobre a luz só foi sugerida por Einstein (EINSTEIN, 1905, EINSTEIN, 1905, EINSTEIN, 1915), em 25 de novembro de 1915, em um seminário onde, comunicou as equações finais da Teoria da Relatividade Geral para a Academia de Berlim. Mesmo assim, decorreu um longo período antes que as implicações da teoria para estrelas compactas fossem compreendidas.

Em 1915, Karl Schwarzschild (SCHWARZSCHILD, 1916) encontrou entre 08 de novembro e o fim do ano, um mês após a publicação da Teoria da Relatividade Geral de Einstein, a Solução de Schwarzs-

child. Foi a primeira solução exata para as equações de campo de Einstein executando-se a solução trivial para o espaço plano.

Nas coordenadas de Schwarzschild (op. cit.), a métrica poderia ser expressa como,

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (12)$$

em que, G corresponde a constante de gravitação universal, M é entendida como a massa do objeto e, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta^2 d\phi$, corresponde a um elemento de ângulo sólido. A constante $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ é entendida como raio de Schwarzschild e desempenha uma função importante na solução de Schwarzschild. A métrica de Schwarzschild é a solução para as equações de campo gravitacional no vácuo, válida apenas externamente ao corpo em questão. Portanto, em um corpo esférico de raio R , a solução é válida para $r > R$. Se R for menor que o raio de Schwarzschild r_s , então a solução descreve o que seria um buraco negro. Para determinar o campo gravitacional dentro ou fora do corpo em questão, deve-se descobrir a solução de Schwarzschild para $r = R$. Adotando-se $M \rightarrow 0$ ou $r \rightarrow \infty$, obtém-se a métrica de Minkowski, (MINKOWSKI, 1907/1915),

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (13)$$

Em 1972, Jacob Bekenstein (BEKENSTEIN, 1973) propôs a ideia de que o horizonte de eventos seria uma medida da entropia de um buraco negro, verificou-se então que se o horizonte de eventos de um buraco negro fosse realmente uma medida de sua entropia, ele deveria emitir radiação, algo impossível para um buraco negro, já que por sua própria definição, nada pode sair de seu interior.

A entropia é uma medida do número de estados internos que um buraco negro poderia ter sem parecer diferente para um observador externo, que pode apenas observar sua massa, rotação e carga e é dada pela seguinte equação:

$$S = \frac{Akc^3}{4\hbar G} \quad (14)$$

em que, A = área do buraco negro, \hbar = constante de Planck, k = constante de Boltzmann, G = força gravitacional, e c = velocidade da luz.

As equações que governam todas estas interações eram longas e complexas, mas em uma das maiores percepções da física moderna, Stephen Hawking (HAWKING, 1975) conseguiu unir todas essas equações em uma única expressão.

Nessa elegante equação (14) estão todos os ramos da física que podem afetar um buraco negro, desde o \hbar do confuso mundo quântico ao S da termodinâmica. A lógica que deriva dessa expressão é realmente muito elaborada, porém é uma fórmula simples.

O horizonte de eventos, limite da região do espaço-tempo do qual não é possível escapar, age quase como uma membrana de direção única em volta do buraco negro, em que objetos podem cair dentro dele, mas nada, jamais, poderá sair de lá pelo mesmo caminho. O horizonte de eventos é a trajetória, através do espaço-tempo, percorrida pela luz que está tentando escapar do buraco negro, e nada pode se deslocar mais rapidamente do que a luz.

4. O Fluxo de Ricci

Historicamente foi no ramo da física que o fluxo de Ricci fez sua primeira aparição, em um grupo de renormalização para modelos bidimensionais sigma. Posteriormente, foi introduzido na matemática por Hamilton (op. cit.) como uma ferramenta para o estudo da topologia das variedades. Entre outras coisas, desenvolveu um programa, recentemente apresentado por Perelman, para provar a conjectura da geometrização de Thurston sobre a classificação de 3-variedades (PERELMAN, 2002, PERELMAN, 2003, PERELMAN, 2003).

O fluxo de Ricci é utilizado pelos matemáticos para entender a topologia de variedades em dimensão três, sendo estes desenvolvimentos matemáticos aplicados no estudo de teorias geométricas, como a Teoria da Relatividade Geral.

Considerando-se o tensor métrico e o tensor de Ricci associados, funções da variável tempo, o fluxo de Ricci pode ser

definido pela equação de evolução geométrica,

$$\partial_t g_{ij} = -2R_{ij}. \quad (19)$$

O fluxo de Ricci é um análogo da equação do calor para a geometria, que diz que o calor flui das regiões de maior temperatura para as regiões de menor temperatura, para se entender o comportamento da métrica sob a ação do fluxo de Ricci, substitui-se a palavra temperatura pela palavra curvatura, assim ocorre um processo difusivo que atua sobre a métrica de uma variedade Riemanniana onde, à medida que o tempo evolui, a métrica se altera de acordo com a equação do fluxo, como pode ser observado na figura 1, onde parte-se de uma variedade irregular (parte superior da figura) e então, o haltere irregularmente curvo relaxa em uma superfície curvada de modo uniforme, numa versão 2-dimensional do fluxo de Ricci (parte inferior da figura).

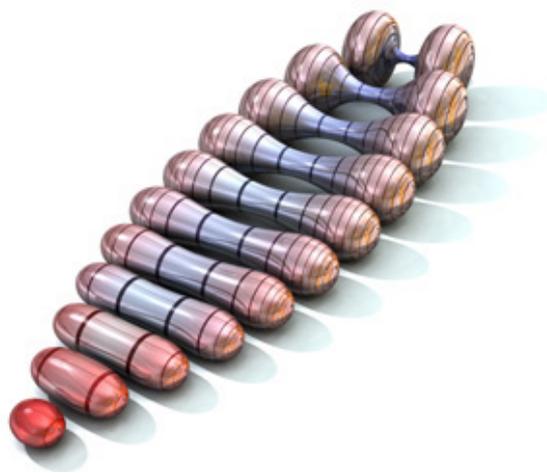


Figura 1: Comportamento da variedade sob a ação do fluxo de Ricci (disponível na Revista Science 22 Dezembro 2006 vol. 314, 5807, páginas 1825-1972).

5. Teoria da Relatividade versus Fluxo de Ricci

Sabendo-se que na Teoria da Relatividade Geral, a área de horizontes aparente é relacionada à entropia do buraco negro e a massa de Hawking uma 2-esfera assintótica é a energia ADM, pode-se desenvolver relações entre o fluxo de Ricci à teoria da Relatividade Geral, particularmente ao estudo dos buracos negros e sua evolução.

Definida uma variedade Riemanniana com tensor métrico g_{ij} , (M, g_{ij}) pode-se calcular o tensor de Ricci R_{ij} , que contém informações sobre as médias das curvaturas seccionais em uma espécie de “traço” do tensor de curvatura de Riemann.

Considerando-se o tensor métrico e o tensor de Ricci associados funções da variável tempo, o fluxo de Ricci pode ser definido pela equação de evolução geométrica. Seja M uma variedade fechada, define-se um fluxo de Ricci em M como sendo um parâmetro da família $g_{ij}(t)$ de métricas Riemannianas sobre M e que satisfaçam a equação,

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij}(T) \quad (15)$$

em que, g_{ij} é tensor da métrica e $R_{ij}(T)$ é o tensor da curvatura de Ricci e t é o parâmetro “tempo” de deformação.

O fluxo de Ricci tende a não preservar o volume da variedade, por isso, introduz-se a constante cosmológica, passando a ser denominado então, fluxo de Ricci normalizado, que faz sentido para variedades compactas e é dado pela equação:

$$\partial_t g_{ij} = -2R_{ij} + \frac{2}{n} R_{avg} g_{ij} \quad (16)$$

Sendo R_{avg} , a média da curvatura escalar e n a dimensão da variedade M . Esta equação normalizada preserva o volume da métrica, sendo que o sinal negativo do fluxo de Ricci é definido para tempos positivos suficientemente pequenos. Se o sinal for alterado, o fluxo de Ricci normalmente será definido para os pequenos momentos negativos, o que evidencia a analogia entre a equação do calor que se apresenta positiva quando considerada a favor do tempo.

Visando evidenciar a aplicabilidade ao estudo dos buracos negros, considera-se a variedade Riemanniana sendo assintoticamente plana e tridimensional. Definem-se os buracos negros como as regiões do espaço-tempo a partir da qual escapar para o infinito é impossível e, portanto, referem-se a uma estrutura assintótica. Exige-se que a métrica tenda a uma métrica plana fixa δ_{ij} no infinito:

$$g_{ij} \rightarrow \delta_{ij} + O(1/r). \quad (17)$$

Dada a métrica inicial g_{ij} , o fluxo de Ricci evolui a métrica consoante ao seu ten-

sor de Ricci. A evolução do parâmetro t e da família de métricas em $(M, g_{ij}(t))$ satisfaz a equação de fluxo de Ricci, Equação (16).

A equação de campo de Einstein é a lógica que encerra todas as suas conclusões sobre o espaço e o tempo

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = -k T_{ij}, \quad (18)$$

em que, R_{ij} , representa a distorção do espaço-tempo produzida pelo tensor de Ricci, g_{ij} , expressa o potencial da gravidade (métrica), R , representa a distorção escalar, k é uma constante, T_{ij} representa o vetor energia impulso.

Pode-se observar que a Teoria da Relatividade Geral e o fluxo de Ricci estão diretamente relacionados, pois ambas são teorias geométricas e ambas utilizam o tensor métrico. Como o fluxo de Ricci evolui com o tempo, pode-se utiliza-lo para entender alguns fenômenos da Relatividade Geral, como por exemplo, a formação de buracos negros.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

Da analogia fluxo de Ricci versus equação do calor, convém observar outra, envolvendo ideias oriundas do orbe da termodinâmica, em 1972, Bekenstein (BEKENSTEIN, 1973), como descrito anteriormente, foi o primeiro a sugerir que os buracos negros devem ter uma entropia bem definida. Então, formula a Segunda Lei Generalizada da Termodinâmica, para sistemas incluindo os buracos negros. Stephen Hawking (HAWKING, 1975) propôs a existência da Radiação de Hawking e em princípio opôs-se a ideia de Bekenstein (op. cit.), quando da sua exposição primordial, não obstante, reveriu os fatos indo além da premissa original.

No escopo da termodinâmica, energia e entropia figuram como quantidades de interesse físico, em Relatividade Geral, assumem um significado puramente geométrico-diferencial: a entropia relaciona-se intrinsecamente com a área do horizonte do buraco negro e a energia para a massa ADM no infinito.

Conjectura-se ser possível a partir do estudo das propriedades do fluxo de Ricci verificar as propriedades supra descritas

relativas à entropia intrínseca dos buracos negros como as propriedades das variedades relativas ao fluxo de Ricci.

Observando-se os trabalhos de Vulcanov e Rubinstein (VULCANOV, 2008, RUBINSTEIN, 2005), pode-se encontrar alternativas viáveis tanto do ponto de vista geométrico, em que pode-se utilizar as superfícies mergulhadas, como uma resolução do problema por métodos numéricos que tornam esse estudo e o desenvolvimento dos resultados possíveis.

De acordo com o que foi demonstrado neste trabalho, a Teoria da Relatividade Geral é uma teoria eminentemente geométrica e isso valida o desenvolvimento de tal trabalho. Pode-se ainda, verificar que existem vários trabalhos em relatividade numérica na literatura, o que justifica o uso de métodos numéricos.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEKENSTEIN, J. D.; Black Holes and Entropy, Physical, New York, US: **American Physical Society Review**, V. D7, p. 2333-2346, 1973.

CAO, H. D., XI, P.; Z; A Complete Proof of the Poincaré and Geometrization Conjectures - application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow, **Asian Journal of Mathematics**, 10, 2006.

CARROL, S. M.; **An Introduction to General Relativity** - Space-time and Geometry, Pearson Education, San Francisco, USA, 2004.

EELLS, J. and SAMPSON, J. H.; Harmonic mappings of Riemannian manifolds, American journal of mathematics, Baltimore, Md., US: **American Mathematical Society**, V. 86, n. 1, p. 109-160, 1964.

EINSTEIN, A.; On the Electrodynamics of Moving Bodies, Annalen der Physik, Leipzig, Alemanha, DE: **Johann Ambrosius Barth Verlag**, V. 17, p. 891-921, 1905, doi: 10.1002.

EINSTEIN A.; Does the Inertia of a Body Depend Upon Its Energy Content, Annalen der Physik, Leipzig, Alemanha, DE: **Johann Ambrosius Barth Verlag**, V. 18, p. 639-641, 1905.

EINSTEIN, A.; Die Feldgleichungen der Gravitation (The Field Equations of Gravitation), **Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften**, Berlin, p. 844-847, 1915.

FIREY, W. J.; Shapes of worn stones, **Mathematica: Journal of pure and applied mathematics**, London, GB: University College, Department of Mathematics, V. 21, p. 1-11, 1974.

FRIEDRICH W., HEHL, et. al., **Rev. Mod. Phys.**, Vol. 48, 1976.

GIFFEN, C. H.; "The Generalized Smith Conjecture." **American Journal Mathematics**, n.88, p. 187-198, 1966.

HAMILTON, R.; Three-Manifolds with positive Ricci Curvature, **Journal of Differential Geometry**, Bethlehem, Pa., US: American Mathematical Society, V. 17, n.2, p. 255- 306, 1982.

HAWKING, S. W. and ELLIS, G. F. R.; **The Large Scale Structure of Space-Time**, Cambridge University Press, 1973.

HAWKING, S. W.; Particle Creation by Black Holes, **Communications in Mathematical Physics**, New York, US: Springer Verlag, V. 43, p. 199-220, 1975.

MICHELL, J.; On the means of discovering the distance, magnitude etc. of the fixed stars, **Philosophical Transactions of the Royal Society**, p. 35-57, & Tab III, 1784.

MINKOWSKI, H.; Das Relativity atsprinzip, Annalen der Physik, Leipzig, Alemanha, DE: **Johann Ambrosius Barth Verlag**, V. 352, n. 15, p. 927-938, 1907/1915, doi: 10.1002.

MISNER, C. W, THORNE, K. S., and WHEELER, J. A.; **Gravitation**, W. H. Freeman and Company, 1973.

MORGAN, J., TIAN G.; Ricci Flow and the Poincaré Conjecture, **American Mathematical Society**, Clay Mathematics Institute, Translations of mathematical monographs / American Mathematical Society, Providence, RI, US, 2006.

MULLINS, W. M.; Two-dimensional motion of idealized grain boundaries, urnal of applied physics, New York, US: **American Institute of Physics**, V. 27, p. 900-904, 1956.

PERELMAN, G.; **The entropy formula for the Ricci and its geometric applications**, arXiv: math/0211159v1, 2002.

PERELMAN G.; **Ricci ow with surgery on three-manifolds**, arXiv: math/0303109 vol.1, 2003.

PERELMAN, G.; **Finite extinction time for the solutions to the Ricci on certain three-manifolds**, arXiv: math/0307245v1, 2003.

ROLFSEN, D. Knots and LINKS, W., DE: **Publish or Perish Press**, pp. 350-351, 1976.

RUBINSTEIN, J. H. and SINCLAIR, R., **Exp.Math.**, 14, nr.3 (2005), math.DG/0506189

SCHWARZSCHILD, K.; Uber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstein'schen Theorie, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. **Physikalisch-mathematische**

klasse, Reimer, Berlin, S., V. 3, p.189-196, 1916.

357-381, 1982.

SILVA, P. M. G. L. T.; **Uma Descrição da Expansão e Aceleração do Universo no Contexto das Teorias F(R)**, Joinville, SC, 2012.

VULCANOV, D. N.; Numerical simulations with Ricci flow on surfaces: A review and some recent results, **Physics AUC**, Vol. 18, p. 120-129, 2008.

THURSTON, W. P.; Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bulletin of the American Mathematical Society, Lancaster, Pa., US: **American Mathematical Society**, V. 6, n. 3, p.

WHEELER, J. A.; Our Universe: the Know and the unknow; The Physics Teacher, College Park, Md., US: **American Association of Physics Teachers**, V. 7, n. 1, p. 24, 1969.

Claudia Maria Gregorini Gonçalves Franchi é graduada em Matemática (Licenciatura) pelo Centro Universitário de São José do Rio Preto - UNIRP. Pós Graduada (Lato Sensu) em Física pela Universidade Federal de Lavras - UFLA. Mestranda em Ciências da Computação pela Universidade Estadual Paulista - UNESP, na área de Matemática Computacional. Atualmente é professora na União das faculdades dos Grandes Lagos - UNILAGO, e no Colégio Futuro. Áreas de atuação: Matemática, Cálculo Diferencial, Cálculo Tensorial, Estatística, Física, Física-Matemática, Computação e Radiologia.

Manoel Ferreira Borges Neto é graduado em Física pela Universidade de Brasília (UnB), Doutorado em Matemática pelo "Kings College - University of London" e Pós-doutorado pelo "Department of Mathematics and Applied Mathematics - University of Cape Town (UCT)". Professor titular da Universidade Estadual Paulista (UNESP). Membro da "International Association of Mathematical Physics (IAMP)". Membro e revisor da "American Mathematical Society (AMS)". Membro da "European Society of Computational Methods in Sciences and Engineering (ESCMSE)". Co-fundador e membro permanente do "World Peace and Diplomacy Forum (WPDF)", Cambridge. Vasta experiência na área de matemática e matemática aplicada atuando principalmente nos temas: i) Geometrias Hipercomplexas; ii) Aspectos geométricos da Física-Matemática, notadamente das Teorias Alternativas da Gravitacão, e suas relações com Variedades Topológicas; iii) Criptografia e Computação Quântica.