



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Câmpus de São José do Rio Preto

Ana Rita Domingues

## **O pensamento diferencial-com-GeoGebra de estudantes do Ensino Médio**

São José do Rio Preto  
2021

Ana Rita Domingues

## **O pensamento diferencial-com-GeoGebra de estudantes do Ensino Médio**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino e Processos Formativos, junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva

São José do Rio Preto  
2021

D671p Domingues, Ana Rita  
O pensamento diferencial-com-GeoGebra de estudantes do Ensino  
Médio / Ana Rita Domingues. -- São José do Rio Preto, 2021  
178 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),  
Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio  
Preto

Orientador: Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva

1. Educação Matemática. 2. Pensamento Diferencial. 3.  
Pensar-com-GeoGebra. 4. Ensino Médio. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de  
Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Ana Rita Domingues

## **O pensamento diferencial-com-GeoGebra de estudantes do Ensino Médio**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino e Processos Formativos, junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

### **Comissão Examinadora**

Prof. Dr. Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva  
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto  
Orientador

Prof. Dr. Inocêncio Fernandes Balieiro Filho  
UNESP – Câmpus Ilha Solteira

Prof. Dr. Lucas Carato Mazzi  
UNESP – Câmpus de Rio Claro / IGCE

São José do Rio Preto  
06 de agosto de 2021

Dedico esta dissertação à minha mãe Marlise  
Neide Negro. Mulher batalhadora. Meu  
maior e melhor exemplo.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à minha mãe Marlise por sempre me incentivar e motivar a ser uma pessoa melhor.

Agradeço à minha irmã Cíntia pelo cuidado e preocupação em todos os momentos da minha vida.

Ao Lucas, parceiro que sempre me apoiou, ajudou, incentivou e cuidou. Obrigada pela constante paciência, mesmo nos momentos mais estressantes.

Agradeço ao professor Inocêncio Balieiro por me acolher e auxiliar durante todo o processo seletivo do programa.

Agradeço ao professor Ricardo Scucuglia pelo acolhimento, orientações e ensinamentos. Obrigada pela empatia diante das minhas dificuldades pessoais e profissionais.

Agradeço à professora Ana Paula Barros pela participação na banca de qualificação. Ao professor Inocêncio Balieiro pela participação na banca de qualificação e defesa. Ao professor Lucas Mazzi pela participação na banca de defesa. Obrigada pelas contribuições e por aceitarem integrar este trabalho.

Agradeço à Livia Colli, Bianca, Jorge, Welington, Raquel, Livia, Matheus Postigo, Janaina, Matheus, Guilherme e Gabriel por participarem da produção de dados desta pesquisa.

Ao meu amigo Wilians e sua família por todo o suporte e acolhimento na cidade de Ilha Solteira.

À Mirian e Maura por não medir esforços em me apoiar e ajudar diante das necessidades de ausência na escola.

Agradeço à Sandra, Juliana, Claudemir e Anésio pelas caronas e conversas.

À psicóloga Nathália Hara por ajudar no momento mais frágil que cheguei. Obrigada pelas conversas e conselhos.

## RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo investigar aspectos do Pensamento Diferencial (PD) emergentes em um grupo de estudantes do Ensino Médio ao pensar-com-GeoGebra atividades que envolvem a investigação da área de regiões limitadas por eixos e curvas e o cálculo do volume de regiões limitadas por superfícies planas e curvas. Este trabalho está apoiado na noção de investigação matemática e no construto teórico seres-humanos-com-mídias. A pesquisa é de cunho qualitativo e visa observar e compreender a manifestação de quatro aspectos do PD. São eles: *Noção de limite e continuidade*, *Noção de infinitésimo*, *Conceito de integral definida* e *Concepção visual-geométrica*. Foram realizadas duas sessões de experimentos de ensino com duas duplas de estudantes do Ensino Médio de uma escola pública estadual do interior de São Paulo. Foram elaboradas cinco atividades nesta pesquisa, sendo as duas primeiras exploradas por estudantes do primeiro ano e as três últimas por estudantes do terceiro ano. Os procedimentos metodológicos de registro das sessões foram: filmagens do ambiente, captação de tela do computador e de *webcam* e os arquivos gerados pelos estudantes no GeoGebra. Os resultados da pesquisa indicam que o processo de pensar-com-GeoGebra oferece meios para o desenvolvimento de elementos investigativos, nos quais os estudantes elaboraram conjecturas, testando-as e (re)pensaram as estratégias de soluções utilizadas de maneira dinâmica. Quanto à emersão dos aspectos do PD, em particular, identificou-se indícios de que eles se complementam e manifestam-se em conjunto, atribuindo complexidade aos processos de pensamentos dos estudantes-com-tecnologias. Esta pesquisa contribui à Educação Matemática no que se refere a produção de conhecimentos acerca do uso de tecnologias digitais voltado ao ensino de Cálculo no Ensino Médio.

**Palavras-chave:** Pensamento Diferencial. Pensar-com-GeoGebra. Ensino Médio. Educação Matemática.

## ABSTRACT

This research aims to investigate the aspects of Differential Thinking (DT) emerging in a group of high school students when they think-with-GeoGebra on activities that involve an investigation of the area of regions limited by axes and curves and the calculation of the volume of regions bounded by flat and curved surfaces. This work is supported by the notion of mathematical investigation and by the theoretical construct human-beings-with-media. The research is qualitative and aims to observe and understand the manifestation of four aspects of DT. They are: *Notion of limit and continuity*, *Notion of infinitesimal*, *Concept of definite integral* and *Visual-geometric conception*. Two teaching experiments were carried out with two pairs of high school students from a state public school in the interior of São Paulo. Five activities were developed in this research; the first two were explored by first-year students and the last three by third-year students. Methodological procedures for recording the sessions were: filming of the environment, capture of computer and webcam screens and files generated by students in GeoGebra. The results indicate that thinking-with-GeoGebra offers means for the development of investigative elements, in which the students elaborated conjectures, testing them and (re)thinking the solutions used in a dynamic way. As for the emergence of aspects of the DT, in particular, it was found that they complement each other and manifest themselves together, attributing complexity to the thinking processes of students-with-technologies. This research contributes to Mathematics Education regarding the production of knowledge about the use of digital technologies in the context of teaching Calculus in High School.

**Keywords:** Differential Thinking. Think-with-GeoGebra. High school. Mathematics Education.



## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                                                         |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Figura 1:</b> Teia entre alguns dos pensamentos presentes na Matemática (ênfatisando o PD).....                                                      | 32  |
| <b>Figura 2:</b> Primeira aproximação para o cálculo da área de um círculo .....                                                                        | 34  |
| <b>Figura 3:</b> Uma outra aproximação para o cálculo da área do círculo e uma forma de abordar o valor aproximado de $\pi$ .....                       | 35  |
| <b>Figura 4:</b> Identificando a relação $(79/98) \cdot r$ considerada para a medida da aresta do cubo .....                                            | 36  |
| <b>Figura 5:</b> Segmento parabólico AB e triângulo inscrito APB.....                                                                                   | 37  |
| <b>Figura 6:</b> A quadratura da parábola, segundo Fermat.....                                                                                          | 38  |
| <b>Figura 7:</b> Proposição 19,20, Sobre conoides e esferoides (Arquimedes).....                                                                        | 39  |
| <b>Figura 8:</b> O método, Proposição 4, de Arquimedes.....                                                                                             | 39  |
| <b>Figura 9:</b> Relação entre as fases de uma atividade de investigação matemática e algumas competências gerais da BNCC.....                          | 53  |
| <b>Figura 10:</b> Pensar-com-tecnologias .....                                                                                                          | 55  |
| <b>Figura 11:</b> Dias de realização das sessões de ensino .....                                                                                        | 62  |
| <b>Figura 12:</b> Quadrante circular e quadrado para comparação de área .....                                                                           | 73  |
| <b>Figura 13:</b> Octante da esfera e cubo para comparação de área.....                                                                                 | 77  |
| <b>Figura 14:</b> Construção da região S .....                                                                                                          | 81  |
| <b>Figura 15:</b> Aproximação da área desejada por áreas de retângulos com $n = 5$ .....                                                                | 85  |
| <b>Figura 16:</b> Aproximação da área desejada usando a animação do “Controle deslizante” .....                                                         | 85  |
| <b>Figura 17:</b> Aproximação do volume desejado usando cilindros inscritos ao parabolóide e com o eixo de rotação dividido em 5 partes iguais.....     | 92  |
| <b>Figura 18:</b> Aproximação do volume desejado usando cilindros circunscritos ao parabolóide e com o eixo de rotação dividido em 5 partes iguais..... | 92  |
| <b>Figura 19:</b> Construção de um cilindro, um parabolóide e um cone de mesma base e altura .....                                                      | 95  |
| <b>Figura 20:</b> Exemplo para realização da leitura dos diagramas presentes no Capítulo 5                                                              | 99  |
| <b>Figura 21:</b> Primeiros momentos de investigação da atividade Quadratura do círculo – Bianca e Lívia.....                                           | 101 |
| <b>Figura 22:</b> Construção concluída - Aproximação área do círculo - Bianca e Lívia (2ª tentativa) .....                                              | 103 |
| <b>Figura 23:</b> Construção concluída - Aproximação área do círculo - Bianca e Lívia (3ª tentativa) .....                                              | 104 |
| <b>Figura 24:</b> Construção concluída - Aproximação área do círculo - Bianca e Lívia (4ª tentativa) .....                                              | 106 |
| <b>Figura 25:</b> Aspectos do PD que emergiram na exploração da Quadratura do círculo - Bianca e Lívia (ciclo completo da investigação).....            | 107 |
| <b>Figura 26:</b> Socialização com o GeoGebra - Compreensão das informações apresentadas na janela de álgebra .....                                     | 108 |
| <b>Figura 27:</b> Primeiros momentos de investigação da atividade Cubatura da esfera – Bianca e Lívia (1ª tentativa – Parte I).....                     | 111 |
| <b>Figura 28:</b> Primeiros momentos de investigação da atividade Cubatura da esfera – Bianca e Lívia (1ª tentativa – Parte II) .....                   | 111 |
| <b>Figura 29:</b> Construção concluída - Aproximação volume da esfera - Bianca e Lívia (1ª tentativa) .....                                             | 112 |
| <b>Figura 30:</b> Explorando o volume do cubo em busca de uma aproximação ao volume da                                                                  |     |

|                                                                                                                                                       |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| esfera – Bianca e Livia (2ª tentativa – Parte I) .....                                                                                                | 114 |
| <b>Figura 31:</b> Explorando o volume do cubo em busca de uma aproximação ao volume da esfera – Bianca e Livia (2ª tentativa – Parte II) .....        | 114 |
| <b>Figura 32:</b> Construção concluída - Aproximação volume da esfera - Bianca e Livia (2ª tentativa) .....                                           | 116 |
| <b>Figura 33:</b> Aspectos do PD que emergiram na exploração da Cubatura da esfera - Bianca e Livia (ciclo completo de investigação) .....            | 117 |
| <b>Figura 34:</b> Construção do ambiente de investigação – Janaina e Matheus .....                                                                    | 118 |
| <b>Figura 35:</b> Construção concluída - Aproximação área sob a curva da parábola – Janaina e Matheus (1ª tentativa) .....                            | 121 |
| <b>Figura 36:</b> Construção concluída - Aproximação área sob a curva da parábola – Janaina e Matheus (2ª tentativa) .....                            | 122 |
| <b>Figura 37:</b> Construção concluída - Aproximação área sob a curva da parábola – Janaina e Matheus (3ª tentativa) .....                            | 124 |
| <b>Figura 38:</b> Construção concluída - Aproximação área sob a curva da parábola – Janaina e Matheus (4ª tentativa – Parte I) .....                  | 126 |
| <b>Figura 39:</b> Construção concluída - Aproximação área sob a curva da parábola – Janaina e Matheus (4ª tentativa – Parte II) .....                 | 126 |
| <b>Figura 40:</b> Construção concluída - Aproximação área sob a curva da parábola – Janaina e Matheus (5ª tentativa) .....                            | 127 |
| <b>Figura 41:</b> Construção concluída - Aproximação área sob a curva da parábola – Janaina e Matheus (6ª tentativa) .....                            | 128 |
| <b>Figura 42:</b> Construção concluída - Aproximação área sob a curva da parábola – Janaina e Matheus (7ª tentativa) .....                            | 128 |
| <b>Figura 43:</b> Aspectos do PD que emergiram na exploração de O problema da área – Janaina e Matheus (1ª a 4ª tentativa de investigação) .....      | 130 |
| <b>Figura 44:</b> Construção do ambiente de investigação – Janaina e Matheus .....                                                                    | 132 |
| <b>Figura 45:</b> Construção concluída - Aproximação volume do parabolóide – Janaina e Matheus (1ª tentativa) .....                                   | 134 |
| <b>Figura 46:</b> Construção concluída - Aproximação volume do parabolóide – Janaina e Matheus (2ª tentativa) .....                                   | 135 |
| <b>Figura 47:</b> Construção concluída - Aproximação volume do parabolóide – Janaina e Matheus (3ª tentativa) .....                                   | 136 |
| <b>Figura 48:</b> Construção concluída - Aproximação volume do parabolóide – Janaina e Matheus (4ª tentativa) .....                                   | 138 |
| <b>Figura 49:</b> Construção concluída - Aproximação volume do parabolóide – Janaina e Matheus (5ª tentativa – Parte I) .....                         | 139 |
| <b>Figura 50:</b> Construção concluída - Aproximação volume do parabolóide – Janaina e Matheus (5ª tentativa – Parte II) .....                        | 139 |
| <b>Figura 51:</b> Construção concluída - Aproximação volume do parabolóide – Janaina e Matheus (6ª tentativa – Parte I) .....                         | 140 |
| <b>Figura 52:</b> Construção concluída - Aproximação volume do parabolóide – Janaina e Matheus (6ª tentativa – Parte II) .....                        | 140 |
| <b>Figura 53:</b> Aspectos do PD que emergiram na exploração de O problema do volume – Janaina e Matheus (1ª a 4ª tentativa de investigação) .....    | 142 |
| <b>Figura 54:</b> Construção do ambiente de investigação – Janaina e Matheus .....                                                                    | 143 |
| <b>Figura 55:</b> Aspectos do PD que emergiram na exploração de A relação entre os volumes – Janaina e Matheus (ciclo completo de investigação) ..... | 147 |

## LISTA DE QUADROS

|                                                                                                                             |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Quadro 1:</b> Diferentes maneiras de uso para o GeoGebra .....                                                           | 19  |
| <b>Quadro 2:</b> Núcleos associados ao Cálculo (SAD, 2000).....                                                             | 30  |
| <b>Quadro 3:</b> Aspectos do PD .....                                                                                       | 31  |
| <b>Quadro 4:</b> Caracterização das tecnologias, tecnologias da inteligência e tecnologias digitais .....                   | 48  |
| <b>Quadro 5:</b> Aspectos e elementos que caracterizam as fases do desenvolvimento tecnológico em Educação Matemática ..... | 50  |
| <b>Quadro 6:</b> Momentos na realização de uma investigação .....                                                           | 61  |
| <b>Quadro 7:</b> Instrumentos de produção de dados .....                                                                    | 63  |
| <b>Quadro 8:</b> Participantes da produção de dados da pesquisa .....                                                       | 68  |
| <b>Quadro 9:</b> Apresentação da atividade 1 .....                                                                          | 72  |
| <b>Quadro 10:</b> Etapa 1 – Instrução para início da atividade 1 e estruturação de uma possível abordagem .....             | 72  |
| <b>Quadro 11:</b> Questionamento da primeira etapa da atividade 1 .....                                                     | 74  |
| <b>Quadro 12:</b> Etapa 2 – Instrução para início da segunda investigação da atividade 1....                                | 74  |
| <b>Quadro 13:</b> Questionamentos da segunda etapa da atividade 1 .....                                                     | 75  |
| <b>Quadro 14:</b> Apresentação da atividade 2 .....                                                                         | 76  |
| <b>Quadro 15:</b> Etapa 1 – Instrução para início da atividade 2 e estruturação de uma possível abordagem .....             | 76  |
| <b>Quadro 16:</b> Questionamento da primeira etapa da atividade 2 .....                                                     | 78  |
| <b>Quadro 17:</b> Etapa 2 – Instrução para início da segunda investigação da atividade 2....                                | 78  |
| <b>Quadro 18:</b> Questionamentos da segunda etapa da atividade 2 .....                                                     | 79  |
| <b>Quadro 19:</b> Apresentação da atividade 3 .....                                                                         | 80  |
| <b>Quadro 20:</b> Etapa 1 – Instrução para início da atividade 3 .....                                                      | 80  |
| <b>Quadro 21:</b> Questionamento da primeira etapa da atividade 3 .....                                                     | 81  |
| <b>Quadro 22:</b> Possíveis aproximações à região S.....                                                                    | 82  |
| <b>Quadro 23:</b> Questionamentos da segunda etapa da atividade 3 .....                                                     | 82  |
| <b>Quadro 24:</b> Etapa 3 – Possível abordagem usando a comparação um para vários .....                                     | 83  |
| <b>Quadro 25:</b> Apresentação da atividade 4.....                                                                          | 86  |
| <b>Quadro 26:</b> Etapa 1 – Instrução para início da atividade 4 .....                                                      | 87  |
| <b>Quadro 27:</b> Questionamento da primeira etapa da atividade 4 .....                                                     | 88  |
| <b>Quadro 28:</b> Possíveis aproximações para o volume do parabolóide .....                                                 | 88  |
| <b>Quadro 29:</b> Questionamentos da segunda etapa da atividade 3 .....                                                     | 89  |
| <b>Quadro 30:</b> Etapa 3 – Possível abordagem para a atividade 4 usando a comparação um para vários.....                   | 90  |
| <b>Quadro 31:</b> Apresentação da atividade 5 .....                                                                         | 93  |
| <b>Quadro 32:</b> Instrução para início da atividade 5.....                                                                 | 94  |
| <b>Quadro 33:</b> Questionamentos da atividade 5.....                                                                       | 95  |
| <b>Quadro 34:</b> Modelo de análise de vídeo .....                                                                          | 96  |
| <b>Quadro 35:</b> Aspectos do PD .....                                                                                      | 100 |
| <b>Quadro 36:</b> Etapa 1 – Instrução para início da atividade O problema da área.....                                      | 118 |
| <b>Quadro 37:</b> Etapa 3 da atividade O problema da área – Dividindo a região em faixas .....                              | 123 |
| <b>Quadro 38:</b> Etapa 1 – Instrução para início da atividade O problema do volume .....                                   | 131 |

## **LISTA DE SIGLAS**

BDTD – Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

CA – Computação Algébrica

CDI – Cálculo Diferencial e Integral

CEP – Comitê de Ética em Pesquisa

CS – Campo Semântico

EUA – Estados Unidos

GD – Geometria Dinâmica

GPIMEM – Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática

ICEM – Iniciação Científica no Ensino Médio

MA – Matemática Avançada

PAI – Pensamento Algébrico

PAn – Pensamento Analítico

PC – Pensamento Computacional

PD – Pensamento Diferencial

PG – Pensamento Geométrico

Pibid – Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência

PM – Pensamento Matemático

PMA – Pensamento Matemático Avançado

PME – Pensamento Matemático Elementar

TALE – Termo de Assentimento Livre e Esclarecido

TCLE – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

UNESP – Universidade Estadual Paulista

URSS – União Soviética

## SUMÁRIO

|                                                                                                     |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>1. INTRODUÇÃO .....</b>                                                                          | <b>13</b>  |
| <b>1.1 Trajetória da pesquisadora .....</b>                                                         | <b>13</b>  |
| <b>1.2 Apresentação da pesquisa .....</b>                                                           | <b>15</b>  |
| 1.2.1 O <i>software</i> GeoGebra.....                                                               | 18         |
| <b>1.3 Estrutura da dissertação .....</b>                                                           | <b>22</b>  |
| <b>2. O PENSAMENTO DIFERENCIAL.....</b>                                                             | <b>24</b>  |
| <b>2.1 Compreensão do PD .....</b>                                                                  | <b>24</b>  |
| 2.1.1 Aspectos do PD .....                                                                          | 30         |
| <b>2.2 A História da Matemática e o PD .....</b>                                                    | <b>33</b>  |
| <b>2.3 A BNCC do Ensino Médio e o PD.....</b>                                                       | <b>40</b>  |
| <b>3. ABORDAGENS TECNOLÓGICAS .....</b>                                                             | <b>45</b>  |
| <b>3.1 Desenvolvimento das tecnologias.....</b>                                                     | <b>45</b>  |
| <b>3.2 Atividades investigativas-com-tecnologias digitais e as competências gerais da BNCC.....</b> | <b>49</b>  |
| <b>3.3 Pensando-com-GeoGebra.....</b>                                                               | <b>54</b>  |
| <b>4. METODOLOGIA DA PESQUISA .....</b>                                                             | <b>58</b>  |
| <b>4.1 Abordagem metodológica.....</b>                                                              | <b>58</b>  |
| 4.1.1 Experimento de ensino como metodologia de pesquisa.....                                       | 60         |
| 4.1.2 Investigação matemática como metodologia de ensino .....                                      | 60         |
| <b>4.2 Produção de dados .....</b>                                                                  | <b>61</b>  |
| 4.2.1 Instrumentos de produção de dados .....                                                       | 62         |
| 4.2.2 Cenário .....                                                                                 | 63         |
| 4.2.3 Sessões de ensino .....                                                                       | 65         |
| 4.2.3.1 Participantes.....                                                                          | 66         |
| 4.2.4 As atividades .....                                                                           | 70         |
| 4.2.4.1 Quadratura do círculo .....                                                                 | 71         |
| 4.2.4.2 Cubatura da esfera .....                                                                    | 75         |
| 4.2.4.3 O problema da área.....                                                                     | 79         |
| 4.2.4.4 O problema do volume .....                                                                  | 85         |
| 4.2.4.5 A relação entre os volumes.....                                                             | 92         |
| 4.2.5 Método de análise de vídeos e descrição dos dados.....                                        | 95         |
| <b>5. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS .....</b>                                                       | <b>98</b>  |
| <b>5.1 Proposta de análise e discussão dos dados .....</b>                                          | <b>98</b>  |
| <b>5.2 Pensamento diferencial-com-GeoGebra envolvendo a <i>Quadratura do círculo</i>.....</b>       | <b>100</b> |
| <b>5.3 Pensamento diferencial-com-GeoGebra envolvendo a <i>Cubatura da esfera</i></b>               |            |

|            |                                                                                         |     |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>5.4</b> | <b>Pensamento diferencial-com-GeoGebra envolvendo <i>O problema da área</i></b>         |     |
|            |                                                                                         | 117 |
| <b>5.5</b> | <b>Pensamento diferencial-com-GeoGebra envolvendo <i>O problema do volume</i></b>       |     |
|            |                                                                                         | 130 |
| <b>5.6</b> | <b>Pensamento diferencial-com-GeoGebra envolvendo <i>A relação entre os volumes</i></b> |     |
|            |                                                                                         | 142 |
| <b>5.7</b> | <b>Considerações gerais sobre as explorações das atividades</b>                         | 148 |
| <b>6.</b>  | <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>                                                             | 150 |
|            | <b>REFERÊNCIAS</b>                                                                      | 156 |
|            | <b>APÊNDICES</b>                                                                        | 161 |
|            | <b>APÊNDICE A - Atividades</b>                                                          | 161 |
|            | <b>Atividade 1: Quadratura do círculo</b>                                               | 161 |
|            | <b>Atividade 2: Cubatura da esfera</b>                                                  | 162 |
|            | <b>Atividade 3: O problema da área</b>                                                  | 163 |
|            | <b>Atividade 4: O problema do volume</b>                                                | 166 |
|            | <b>Atividade 5: A relação entre os volumes</b>                                          | 169 |
|            | <b>APÊNDICE B – Termos de Consentimento e de Assentimento Livre e Esclarecido</b>       | 171 |
|            | <b>Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) – responsáveis</b>                 | 171 |
|            | <b>Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) – participantes com 18 anos</b>    | 173 |
|            | <b>Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) – estudantes</b>                    | 175 |

## 1. INTRODUÇÃO

Por considerar importante o esclarecimento das razões e dos interesses que me levaram a esta pesquisa, apresento neste capítulo uma breve explanação dos aspectos relevantes do meu percurso acadêmico e profissional. Em seguida, apresento uma discussão e a consolidação da relevância e do objetivo da pesquisa, bem como o *software* empregado nesse estudo. Finalizo com uma breve apresentação dos capítulos que compõem esta dissertação.

### 1.1 Trajetória da pesquisadora

Ingressei no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Câmpus de Ilha Solteira, no ano de 2009. No primeiro semestre de graduação participei voluntariamente das aulas do projeto *Atividades Computacionais usando o software Mathematica*. Nos encontros eram ministrados tópicos de Cálculo de uma e várias variáveis, tendo o *Mathematica* como ambiente de construção. Essas aulas despertaram em mim o encanto com a harmonia e estética da Matemática, além de ter vivido a minha primeira experiência em aprender com auxílio de um *software*.

No ano seguinte tive a oportunidade de entrar como bolsista no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (Pibid), no qual pude experimentar ativamente situações de ensino em uma escola Municipal de Ensino Fundamental I, especialmente por meio de jogos. Desse modo, por meio do Pibid tive o meu primeiro contato com o *software Scratch*, elaborando e propondo atividades pedagógicas. Durante a minha permanência no programa, que se estendeu até março de 2012, desenvolvi projetos envolvendo jogos nos mais variados formatos e com enfoque na unidade temática Números.

Em abril de 2012, passei a fazer parte do projeto de Iniciação Científica no Ensino Médio (ICEM), no qual pude levar o meu contato e experiência com a educação a uma escola Técnica de Ensino Médio, orientando e auxiliando uma aluna do 2º ano. O trabalho que desenvolvi enquanto bolsista propunha o estudo da Trigonometria com o auxílio do *software Winplot*, GeoGebra e *Mathematica*. Revivendo as produções e memórias para escrever esse momento da minha trajetória, percebo que provavelmente esse tenha sido um dos primeiros momentos atuante com GeoGebra que tive, visto que a intenção de uso do *software Winplot* era a construção de gráficos, mas isso poderia ter sido contemplado

com o *software* anteriormente citado. O caminho ficou um pouco mais longo, mas essa experiência com o Ensino Médio, assim como os Estágios Supervisionados I e II (itens anuais e obrigatórios na formação), que desenvolvi também nessa etapa da Educação Básica, inconscientemente acabaram influenciando na escolha que fiz ao assumir o cargo que ocupo como professora na rede estadual do Estado de São Paulo desde 2017.

No ano de 2013 voltei a ser bolsista no Pibid, vivenciando experiências educacionais em uma escola Estadual de Ensino Fundamental II. Acompanhando uma turma de 7º ano, tive a oportunidade de desenvolver um trabalho envolvendo jogos e voltado à identificação e recuperação de conteúdos em fragilidade, dentre eles, a operação de potência e suas propriedades, e as operações com números racionais representados por frações. Me graduei no segundo semestre deste ano.

No final de dezembro de 2014 fui contratada por uma empresa de Tecnologia, na cidade de Araçatuba (SP), para desempenhar o cargo de assistente educacional em seu setor Educacional, onde permaneci até o começo de dezembro de 2016. A ocupação profissional que desempenhei foi a elaboração de aulas interativas ofertadas em plataforma digital.

No ano de 2013, participei do Concurso Público para Professor de Educação Básica II e, em dezembro de 2016, fui convocada para a sessão de escolha de vaga. Diante de todas as vivências que tive até aquele momento, optei por atuar no Ensino Médio. Consegui alocação para a escola E.E. Padre Cesare Toppino, localizada na cidade de Lavínia (SP), onde estou até o momento e os estudantes que participaram desta pesquisa estudavam.

Durante as aulas e a cada turma que trabalhava, sempre me perguntei como poderia melhorar, como poderia participar ativamente da aprendizagem dos estudantes. Por vezes, trabalhei experimentos educacionais sugeridos por pessoas inseridas no meio acadêmico, trouxe o *software* GeoGebra com a intenção de criar um cenário mais dinâmico e independente aos estudantes, mas ainda estava me perguntando com relação a melhoria. Foi quando percebi que estava no momento de aprofundar os meus estudos e ideias e vivenciar uma nova experiência.

Em 2018 comecei a pensar em um Projeto de Mestrado que estivesse ligado com a minha atual vivência. Inicialmente pensei em *relacionar o passado com o futuro*, trabalhando o conteúdo de Geometria Espacial por meio da História da Matemática e do *software* GeoGebra. Porém, após ingressar no programa de Mestrado Ensino e Processos Formativos, o professor Ricardo sugeriu que investigássemos aspectos do Pensamento



Diferencial (PD) emergentes em estudantes do Ensino Médio, a partir do estudo de alguns problemas geométricos históricos sobre área e volume. Fiquei muito feliz com essa sugestão porque, desse modo, conseguiria desenvolver algo que estava em mente, mas trazendo elementos e olhares que até então não imaginava investigar.

Neste estudo tive a oportunidade de rever e melhorar muitos aspectos da minha profissão de professora, de estudar diferentes metodologias de ensino, de ampliar o meu contato acadêmico e de me ressignificar pessoalmente.

## **1.2 Apresentação da pesquisa**

Pensar na Matemática enquanto componente curricular da Educação Básica traz consigo o pensar nas dificuldades que a maioria dos estudantes tem durante os processos de ensino e aprendizagem. Perguntas como: Por que os estudantes apresentam tanta dificuldade na aprendizagem de Matemática? São feitas diariamente aos professores que atuam diretamente nessa etapa da Educação e por pesquisadores que se propõem a estudar esse tema.

Recorrendo-se ao dicionário, é possível constatar que dificuldade é ligada a situação crítica (FERREIRA, 2010). Quando direcionamos isso a aprendizagem de Matemática, essa situação crítica pode ser associada ao desenvolvimento dos conteúdos e das habilidades do componente curricular, das atividades propostas e/ou aos processos avaliativos que os estudantes são submetidos, os quais geralmente evidenciam apenas os extremos: acertos e erros. Diante disso, de modo geral, os estudantes são levados a pensar que o erro é algo que deve ser evitado por gerar uma consequência negativa, uma punição e um desgaste emocional. Trabalhos como Ozores (2016), Pontes (2019) e Sperafigo (2013) já se propuseram a pesquisar e discutir o erro no processo de ensino e aprendizagem de Matemática de estudantes da Educação Básica. Entretanto, trabalhos dessa natureza acabam evidenciando o fim do trajeto percorrido pelo estudante e usam-no como ponto de partida para suas discussões. Esse é o caminho que mais tem sido difundido nas escolas, destacando-se a ação de devolutiva entre estudante e professor para apresentar e conversar sobre os erros e acertos (pauta recorrente em momentos de formação dos docentes e/ou reuniões pedagógicas).

Outro modo de buscar compreensão à aprendizagem de Matemática e observar as situações críticas presentes no processo de ensino e aprendizagem, é considerar o percurso trilhado pelo estudante, focando não mais nos extremos desse trajeto, mas direcionando

a atenção ao pensamento manifestado pelo estudante diante de situações e cenários propostos pelo professor. Trabalhar com atividades investigativas pode favorecer o desdobramento dessa proposta, uma vez que atividades dessa natureza possuem um ponto de partida bem definido, mas o ponto de chegada é moldado de acordo com o caminho construído e trilhado pelas pessoas e recursos envolvidos.

Fazendo uma busca em alguns acervos digitais de teses e dissertações, como a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e o Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, e usando os descritores *pensamento*, *matemática*, *atividade investigativa* e *ensino médio*, é possível encontrar algumas pesquisas que se propuseram a estudar essa parte central do processo de ensino e aprendizagem, como Lima (2015) e Nascimento (2017) que investigaram o pensamento geométrico em estudantes do Ensino Médio e Corradi (2013), que investigou o pensamento reflexivo. Direcionando um pouco mais a busca ao interesse desta dissertação, e usando os descritores *pensamento diferencial*, *matemática* e *ensino médio*, o número de produções é reduzido, especialmente na BDTD, onde dos 03 (três) trabalhos apresentados como resultado da busca, apenas 01 (um), Rodrigues (2019), é voltado ao Ensino Médio e, ainda assim, não almeja investigar diretamente a emersão do PD. Agora, por que o interesse no PD?

Além de evidenciar a dinamicidade que incorpora o Cálculo Diferencial e Integral e apresentar aos estudantes do Ensino Médio novos caminhos que podem ser trilhados durante a aprendizagem de Matemática, trazer para essa etapa da Educação Básica elementos presentes no Ensino Superior potencializa o desenvolvimento de algumas disciplinas da graduação e promove uma aproximação entre duas etapas acadêmicas que se complementam, mas apresentam-se distantes uma da outra.

Segundo Pagani e Allevato (2014),

O ensino e a aprendizagem de conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral, há alguns anos, têm sido objeto de estudo e debate. As dificuldades observadas nos cursos iniciais de Cálculo Diferencial e Integral se traduzem nos altos índices de reprovação dessas disciplinas. (PAGANI; ALLEVATO, 2014, p.62).

Diante disso, apesar de o CDI ser ministrado em cursos de Graduação, ensinar seus conceitos, ideias e elementos também no Ensino Médio tem sido considerado pertinente (PAGANI; ALLEVATO, 2014). Estudar o CDI é fundamentalmente diferente da Matemática que costuma ser apresentada na Educação Básica. Ele é dinâmico, aborda variação e movimento, assim como quantidades que tendem a outras quantidades (STEWART, 2011). Por essa razão considero que apresentá-lo aos estudantes do Ensino Médio é criar um cenário que possibilita a investigação de alguns de seus conceitos e

elementos. Observar e estudar a manifestação das ideias e pensamentos dos estudantes é convergir com a proposta de voltar o olhar ao trajeto percorrido por eles durante o desenvolvimento de atividades investigativas e valorizar as diferentes maneiras de expressar o conhecimento sobre a Matemática.

Quando se é requerido o uso de tecnologias digitais no desenvolvimento de uma pesquisa ou mesmo em sala de aula, um dos principais pontos a ser pensado é qual delas permite uma conversação dialógica entre ela, o estudante e o professor/pesquisador, a fim de contribuir com o processo de ensino e aprendizagem. Diante desse momento de escolha, esse estudo optou em incorporar o *software* GeoGebra por ser de fácil linguagem e uso, além de oferecer todos os recursos necessários para o desenvolvimento das atividades investigativas idealizadas, possibilitando especialmente a movimentação dos objetos criados em seu ambiente de trabalho. O processo de **pensar-com-GeoGebra**<sup>1</sup> estabelece uma aproximação entre investigação matemática e experimentação com tecnologias. Essa proposta permite um tipo diferente de investigação e a emergência de instâncias heurísticas a partir da exploração e visualização (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018).

Pensando na conversação dialógica, a combinação CDI e tecnologias digitais, nesse caso o GeoGebra, é significativamente relevante pois ambos se baseiam na visualização, abordam variação e movimento e possibilitam o desenvolvimento de explorações e investigações.

Desse modo, esta dissertação tem como objetivo investigar aspectos do PD emergentes em um grupo de estudantes do Ensino Médio ao pensar-com-GeoGebra atividades que envolvem a investigação da área de regiões limitadas por eixos e curvas e o cálculo de volume de regiões limitadas por superfícies planas e curvas. Em se tratando da pergunta norteadora, essa pesquisa busca responder o seguinte questionamento:

*Quais aspectos do PD e do pensar-com-GeoGebra emergem quando estudantes do Ensino Médio investigam atividades sobre cálculo de áreas e volumes?*

A seguir, apresento o GeoGebra e algumas considerações e exemplos quanto as diferentes maneiras de uso.

---

<sup>1</sup> Os autores esclarecem que “o uso de hifens na expressão, que conecta os atores humanos e não-humanos, busca enfatizar que tecnologias não são neutras ao pensamento, que a produção de conhecimento matemático é condicionada pela mídia utilizada” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018, p.44).

### 1.2.1 O *software* GeoGebra

O surgimento e utilização de *software* de Geometria Dinâmica (GD), de representações múltiplas (funções) e sistemas de Computação Algébrica (CA) é marcado pelo caráter inovador do *software* GeoGebra, pioneiro em relação a integração GD-CA-funções. Pensando nisso, é compreensível o interesse por parte de professores e pesquisadores com relação ao uso do GeoGebra de modo didático-pedagógico e acadêmico no ensino e aprendizagem de Matemática. Esse *software* surge na terceira fase das tecnologias digitais em Educação Matemática e, por ser multiplataforma, promove uma reorganização na segunda fase, que, de modo geral, é constituída de tecnologias que não integravam simultaneamente as plataformas de GD, CA e funções (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018). Até hoje, o GeoGebra é um dos maiores sucessos tecnológicos da Educação Matemática.

Este *software* de matemática dinâmica, criado por Markus Hohenwarter em sua tese de Doutorado (2001) pela Universidade de Salzburg, localizada na Áustria, além de ser multiplataforma e apresentar uma interface simples e prática (baseada no mouse), é gratuito; ocupa pouca memória quando instalado; oferece versão *online* (o que elimina procedimentos de instalação ou atualização); está disponível em vários idiomas; trabalha dinamicamente Geometria, Álgebra, tabelas, gráficos, Estatística e Cálculo numa única aplicação, indo ao encontro com novas estratégias de ensino e aprendizagem que destacam a importância do estudante vivenciar situações em que possa conjecturar, investigar e verificar suas ideias e conhecimentos matemáticos. Além de todos os recursos citados, o *software* GeoGebra continua recebendo inovações e adaptações que se ajustam a era digital. Um exemplo é o recurso de realidade aumentada já disponível para algumas configurações de aparelhos celulares. Nas palavras de Hohenwarter e Fuchs (2004, p. 129, tradução nossa), “O programa incentiva os estudantes a abordar a Matemática de forma experimental”<sup>2</sup>.

O GeoGebra é um *software* muito versátil para a Educação Matemática e pode ser usado de diferentes maneiras. Hohenwarter e Fuchs (2004) apresentaram na *Conference on Computer Algebra and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Education*, algumas sugestões sobre a aplicação do GeoGebra nas escolas e justificativas de uso para o *software*, que estão estruturadas no **Quadro 1**, a seguir.

---

<sup>2</sup> The program encourages students to approach mathematics in an experimental way.

**Quadro 1:** Diferentes maneiras de uso para o GeoGebra

| Maneiras                                        | Justificativa                                                                                                                                           |
|-------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| GeoGebra para demonstração e visualização       | Oferece diferentes representações para um mesmo objeto – <i>software</i> com ampla cobertura.                                                           |
| GeoGebra como uma ferramenta de construção      | Possui todas as habilidades exigidas para um <i>software</i> de desenho/projeto.                                                                        |
| GeoGebra e a descoberta da Matemática           | Ajuda a incorporar a forma experimental nas aulas e gera novas questões em relação ao ensino da Matemática, criando outra atmosfera para o aprendizado. |
| GeoGebra para preparação de materiais didáticos | Incentiva os professores a prepararem materiais para o processo de ensino, usando-o como uma ferramenta de cooperação, comunicação e apresentação.      |

Fonte: Hohenwarter e Fuchs (2004, p. 130, tradução nossa).

Almejando identificar nas produções acadêmicas as diferentes maneiras de uso do GeoGebra adotadas pelos pesquisadores e acreditando que, em um mesmo trabalho pode-se apresentar mais de uma maneira, trago a pesquisa de mestrado de Honorato (2018) como exemplo do uso do *software como uma ferramenta de construção* e para a *preparação de materiais didáticos*. Este estudo teve como objetivo “investigar como ocorre o processo de elaboração de atividades matemáticas com a utilização do *software* GeoGebra por parte de um grupo de pesquisadores em Educação Matemática” (HONORATO, 2018, p.6). As pessoas participantes do estudo e o autor, que também se coloca como pessoa participante, utilizaram as perspectivas teóricas experimentação-com-tecnologias, investigação matemática e visualização na elaboração e análise das atividades desenvolvidas. As atividades criadas apresentaram várias versões durante o processo de elaboração, justificado pelo processo de aprimoramento do caráter investigativo e experimental de cada uma, emergente do diálogo entre participantes, pesquisador/participante e membros do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM). O autor apontou que

[...] considero que as atividades que desenvolvemos são de natureza semiaberta, ou seja, a exploração e investigação são mantidas, mediante questionamentos e propostas de raciocínio e reflexão. Porém, ainda assim, alguns passos de construção e/ou indicação de exploração se fazem presentes e significativos nos enunciados (HONORATO, 2018, p.75).

Após a incorporação das atividades em um curso de extensão universitária e o *feedback* recebido, o autor conclui que nem todas as atividades criadas se enquadraram perfeitamente nos quadros teóricos propostos para a pesquisa, em virtude de fatores como circunstâncias que os participantes estavam inseridos, concepções dos integrantes e

condições para obtenção de dados, demonstrando o quão complexo é elaborar atividades matemáticas com tecnologias digitais, mas que, sem desvalorizar a Geometria construída à mão, a Geometria feita em *software* de GD oferece aspectos inovadores caracterizados principalmente pela simulação de movimentos.

Como exemplo para o uso do GeoGebra como ambiente que proporciona a *demonstração e visualização* e a *descoberta da matemática*, trago a pesquisa de Idem (2017) que, ao objetivar a identificação e análise de conhecimentos emergentes durante um curso de extensão universitária aplicado a professores e futuros professores de Matemática, deparou-se com dois momentos distintos:

Em um momento houve grande manifestação, principalmente, de Conhecimentos de Conteúdo, Tecnológicos e Tecnológicos de Conteúdo. Esse momento foi caracterizado pela exploração das atividades utilizando o GeoGebra, no qual, o Ciclo de Ações estava muito presente devido a interação dos participantes com o computador.

Num segundo momento houve a emergência, principalmente, de Conhecimentos Pedagógicos, Tecnológicos Pedagógicos, Tecnológicos Pedagógicos de Conteúdo e conhecimentos relacionados ao contexto educacional (IDEM, 2017, p.85).

A pesquisadora propôs o desenvolvimento de algumas atividades de Geometria de caráter investigativo, que estimulavam a exploração e a construção de conceitos e relações matemáticas utilizando o *software* GeoGebra. Essas atividades, que eram de natureza semiaberta, traziam em alguns momentos questionamentos que levavam o participante, mediante a experimentação com o *software*, a trabalhar de maneira indireta alguns conceitos de demonstração. A autora conclui que, com essas atividades, os participantes puderam vivenciar “situações de aprendizagens construcionistas, por meio da realização do Ciclo de Ações e da Espiral de Aprendizagem” (IDEM, 2017, p.123), além de experimentarem ideias matemáticas com o auxílio do *software* escolhido. Durante entrevistas com os participantes e discussões de textos que também fizeram parte da proposta desse trabalho, Idem (2017) destaca como assunto principal a integração das tecnologias digitais no ensino e pontua a emersão dos temas: Papel do Professor; Estrutura das Escolas; Visualização; Construção do Conhecimento; e Dinamicidade.

No estudo de Barbosa (2019) é possível constatar o uso do GeoGebra como *uma ferramenta de construção* e um ambiente que proporciona a *descoberta da Matemática*. Nesse trabalho foram investigados os “aspectos do Pensamento Computacional (PC) emergentes em um grupo de estudantes de graduação em Matemática ao explorarem a Geometria Fractal com o *software* GeoGebra” (BARBOSA, 2019, p.7). A produção dos dados foi realizada mediante o desenvolvimento de algumas sessões de experimento de

ensino com algumas duplas de estudantes de um curso de Graduação em Matemática. A autora apresenta, na análise dos dados, as habilidades: Pensamento Algoritmo; Decomposição e Generalização; Padrões e Abstração; Representação e Automação; e Avaliação, como emergentes diante da realização das atividades pelas pessoas participantes. Com relação ao uso do *software* escolhido e a influência nas habilidades manifestadas, a autora traz nas considerações finais alguns comentários dos quais destaco:

[...] o GeoGebra favoreceu a representação e automação, uma vez que o software permitiu a automatização dos processos de criação durante as atividades e ainda a aplicação efetiva de meios computacionais na representação de conhecimento da Geometria Fractal [...] (BARBOSA, 2019, p.148).

Essa fala de Barbosa (2019) vem ao encontro com a proposta de usar o GeoGebra como *uma ferramenta de construção*, mas o estudo não fica restrito a isso, ele também proporciona aos participantes a vivência de uma experimentação com um *software* que permite o estudo da Matemática de forma dinâmica e ágil, potencializando a capacidade de perceber e executar alterações nos objetos representados. A pesquisadora conclui que o GeoGebra favoreceu o desenvolvimento cognitivo dos participantes, além de incentivar a formulação de conjecturas e favorecer a investigação, concordando com vários outros pesquisadores que apoiam a inclusão de recursos tecnológicos no processo de ensino e de aprendizagem.

Entretanto, mesmo diante de todas as potencialidades oferecidas, o GeoGebra, assim como qualquer outra tecnologia digital, precisa ser compreendido e incorporado pedagogicamente nas aulas. Aspectos fundamentais como o papel do professor, o *design* ou natureza da atividade proposta devem ser levados em consideração (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018). Assim, para que o professor trabalhe o processo de ensino e aprendizagem com tecnologia digital, apenas o fornecimento desses elementos é insuficiente para a integração bem-sucedida. Solicitar que alguém desenvolva algo que não tem domínio ou, pelo menos, o mínimo de conhecimento sobre o tema, pode causar um desconforto com possibilidade de manifestação negativa, provocando uma aversão ao novo (nesse caso, tecnologias digitais).

Segundo Hohenwarter e Fuchs (2004), ao levar o GeoGebra para a sala de aula, não importa se os estudantes vão explorar a Matemática sozinhos ou em grupos, mas é importante que o professor tente atuar como orientador, apenas oferecendo suporte quando necessário. Os autores também comentam que os resultados dos estudantes em seus experimentos com GeoGebra devem fomentar as discussões iniciais das aulas. Essa

manifestação dos autores com relação ao uso do GeoGebra em sala de aula é interessante porque evidencia o *software* não apenas como uma ferramenta de conferência de resultados, mas como um ambiente no qual os pensamentos e ideias frente a Matemática podem se concretizar e ser explorados e reformulados quantas vezes forem necessárias, usando as mais variadas construções dinâmicas para tal investigação. Assim, chegamos a um ponto que Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018) denominaram como pensar-com-GeoGebra. Nesse processo, a tecnologia digital escolhida e empregada tem um propósito além do uso comum como ferramenta, mas é inserida como base da investigação e manifestação, exposição, aprofundamento e (re)estruturação dos pensamentos de quem explora a atividade.

Neste trabalho, o estudo e cálculo de áreas e volumes perpassa por elementos do CDI mediante a investigação e exploração de problemas históricos usando o *software* GeoGebra e está centrado na emersão de aspectos do PD nos estudantes ao realizarem algumas atividades semiabertas, ou seja, atividades que apresentam aspectos tutoriais de construção em determinados momentos. Além disso, a pesquisa apresenta como desafio a exploração de elementos do CDI no Ensino Médio.

### 1.3 Estrutura da dissertação

Início esse texto com uma apresentação do meu percurso, da gênese da pesquisa e da construção da pergunta e dos objetivos desse estudo.

No **Capítulo 2**, *O Pensamento Diferencial*, trago uma revisão bibliográfica para clarificar a compreensão sobre o PD. Teço um caminho entre alguns dos pensamentos presentes na Matemática (Pensamento Matemático; Pensamento Matemático Elementar; Pensamento Matemático Avançando; Pensamento Geométrico; Pensamento Algébrico; PD; e Pensamento Analítico) e apresento os aspectos do PD que fundamentaram a análise desta pesquisa. Reflexões sobre a presença do PD em alguns problemas históricos que abordam o cálculo de área e volume, e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio são explicitadas em algumas seções do capítulo.

No **Capítulo 3**, *Abordagens tecnológicas*, apresento um breve histórico sobre o desenvolvimento das tecnologias, tecnologias da inteligência e tecnologias digitais. Trago algumas reflexões sobre a triangulação: atividades de investigação matemática, tecnologias digitais e competências gerais da BNCC, e sua contribuição ao processo de ensino e aprendizagem. Além disso, apresento argumentos sobre a importância do pensar-



com-GeoGebra durante a visualização e o desenvolvimento de atividades investigativas.

No **Capítulo 4**, *Metodologia da pesquisa*, apresento a base metodológica deste estudo. Discorro sobre experimento de ensino e investigação matemática (que nesta pesquisa assume tanto um papel de metodologia de ensino como de instrumento de produção de dados). Descrevo os instrumentos empregados na produção e análise dos dados. Também é apresentado o cenário da pesquisa, as pessoas participantes, o desenvolvimento das sessões de ensino e dos registros, bem como as atividades realizadas e uma possível abordagem para cada.

No **Capítulo 5**, *Análise e discussão dos dados*, apresento os dados produzidos por duas duplas de estudantes do Ensino Médio, trago alguns comentários e apontamentos, teço uma relação entre o percurso trilhado pelos estudantes e os aspectos do PD emergentes. Por fim, faço uma discussão geral dos resultados, fundamentada na pergunta norteadora da pesquisa.

No **Capítulo 6**, *Considerações finais*, apresento uma síntese deste estudo. Faço algumas reflexões quanto ao seu desenvolvimento e resultados, além de pontuar algumas possíveis investigações futuras.

## 2. O PENSAMENTO DIFERENCIAL

Neste capítulo, faço uma revisão bibliográfica para explicar a compreensão sobre o Pensamento Diferencial (PD), tecendo um caminho entre alguns dos pensamentos presentes na Matemática: Pensamento Matemático (PM); Pensamento Matemático Elementar (PME); Pensamento Matemático Avançado (PMA); Pensamento Geométrico (PG); Pensamento Algébrico (PAI); PD; Pensamento Analítico (PAn). Apresento os aspectos do PD que fundamentam a análise dos dados desta pesquisa. Trago algumas abordagens históricas para o problema da área e do volume que inspiraram a elaboração e construção das atividades propostas, articulando com conceitos do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) e aspectos do PD. Em seguida, apresento uma breve discussão sobre a presença do PD no documento da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio.

### 2.1 Compreensão do PD

O CDI está presente na grade de disciplinas de vários cursos de graduação, mas não há entre os pesquisadores da área uma definição explícita e consensual para o PD. Visitando os livros *Um curso de cálculo: volume 1* (GUIDORIZZI, 2007) e *Cálculo: volume 1* (STEWART, 2011) observa-se que os assuntos abordados, de modo geral, são: números reais, funções, limite e continuidade, derivadas, integrais e equações diferenciais ordinárias. Assim, neste capítulo, o PD é associado a ideia de pensar-cálculo e está conceituado em duas vertentes: 1. É um tipo de pensamento que está relacionado a diversos pensamentos; 2. É um tipo de PM estruturado pelos aspectos de *Noção de limite e continuidade*, *Noção de infinitésimo*, *Conceito de integral definida* e *Concepção visual-geométrica*. Caracterizar um tipo de pensamento segundo seus aspectos, elementos, habilidades e/ou características é recorrente na literatura, por exemplo nas abordagens e discussões sobre o Pensamento Computacional (PC) (ISTE/CSTA, 2011; BARR; STEPHENSON, 2011; BRENNAN; RESNICK, 2012; GADANIDIS, 2017; BARBOSA, 2019).

Para discorrer sobre o PD, considero importante a apresentação de alguns aspectos do PM. Entendo que o PD é um tipo de PM e que, mesmo com algumas particularidades, esses e outros pensamentos se complementam. Essa compreensão do PD, bem como as ideias deste capítulo têm como embasamento algumas produções acadêmicas e

bibliográficas que se propuseram a discutir e estudar elementos acerca do PM e/ou do PD. A escolha desses textos deu-se a partir da proximidade com a intencionalidade dessa seção, que busca a compreensão de alguns dos vários pensamentos presentes na Matemática e o entendimento sobre onde o PD se encaixa e qual é a sua compreensão. Não tenho a intenção de cobrir todas as reflexões e fatos apresentados nestes trabalhos, mas pontuar os que considero fundamentais para um panorama do PM e a fundamentação e compreensão do PD.

O PM envolve processos de representação de conceitos e de propriedades (representar visualmente, representar a mudança de representações e representar a tradução da formulação de um problema para outra formulação), processos de abstração (generalização e síntese), processos que estabelecem relações entre o representar e o abstrair, e processos que podem incluir a descoberta, a intuição, a verificação, a prova e a definição (COSTA, 2002). Quando pensamos no desenvolvimento da disciplina de CDI, esses processos também estão presentes. Assim, o PD é um tipo de PM.

No trabalho de doutorado de Wielewski (2005), o PM é considerado sob dimensões teóricas (fatores que influenciam o PM expostos por diferentes estudiosos) e experimentais (análises referentes ao PM emergente em pesquisas qualitativas com estudantes). A autora apresenta como primeiro foco de análise teórica a obra de Krutetskii (1968), traduzida do russo para o inglês em 1976, com o título *The Psychology of mathematical Abilities in Schoolchildren*. Nessa obra, Krutetskii (1976) afirma que:

[...] o talento matemático é caracterizado por pensamento generalizado, limitado e flexível no reino das relações matemáticas e símbolos de números e letras, e por um molde matemático da mente. Esta peculiaridade do pensamento matemático resulta em um aumento da velocidade de processamento da informação matemática (que está relacionada com a substituição de um grande Volume de informação em pequeno volume, devido à generalização e redução), e, conseqüentemente, uma economia dos poderes nervosos e mentais (KRUTETSKII, 1976, p.352, tradução nossa)<sup>3</sup>.

Krutetskii (1976) define a constituição matemática da mente como uma síntese do talento matemático e que envolve aspectos cognitivo, emocional e da vontade. Assim, considera que o PM e os processos de resolução de problemas são influenciados e associados somente às características psicológicas individuais.

Para fomentar a discussão, Wielewski (2005) apresenta outros parâmetros que

---

<sup>3</sup> [...] mathematical giftedness is characterized by generalized, curtailed, and flexible thinking in the realm of mathematical relationships and number and letter symbols, and by a mathematical cast of mind. This peculiarity of mathematical thinking results in an increased speed in processing mathematical information (which is related to a replacement of a large Volume of information by a small volume, owing to generalization and curtailment), and consequently an economy of the nervous and mental powers.

também influenciam o PM e foram expostos por Poincaré (1905), Boutroux (1920), Otte (1986), Kurz (1997) e Gowers (2000).

Poincaré (1905), ao discutir diferentes pensamentos matemáticos, não fez uma afirmação categórica. Ele oscilou entre considerar o pensamento matemático ora vinculado às pessoas (natureza), ora às épocas que desencadearam mudanças no desenvolvimento da Matemática (WIELEWSKI, 2005, p.362).

Boutroux (1920), baseando-se em uma análise da História da Matemática, apresentou a transformação de um pensamento sintético para um pensamento analítico, ocorrida no século XIX. Ele explicitou a mudança de pensamento matemático atrelada às épocas históricas, ou seja, ao desenvolvimento da Matemática (WIELEWSKI, 2005, p.363).

[...] Otte (1986) acentuou a influência que os livros didáticos de Matemática exercem no desenvolvimento do pensamento, sobretudo, no que se refere à representação utilizada na Matemática. Ele apontou a necessidade de se complementar os livros didáticos com atividades matemáticas para que ocorra uma experiência mais significativa para os estudantes (WIELEWSKI, 2005, p.364).

Kurz (1997) também apresentou distintos pensamentos matemáticos na resolução de um problema de Cálculo e revelou que o entendimento do problema, a representação do mesmo e os meios de resolvê-lo foram diferentes e associados às áreas do conhecimento, à formação acadêmica e às experiências das pessoas, pois participaram da pesquisa professores de Matemática, de Física e de Química (WIELEWSKI, 2005, p.364).

Gowers (2000), quando apresentou o contraste entre duas culturas na Matemática, considerou o pensamento matemático motivado pelas áreas do conhecimento. Para exemplificar, ele mencionou que a área de Combinatórios se distingue da Matemática Pura, por nem sempre ser possível construir teorias gerais. Na maioria das vezes, se têm métodos para resolver problemas particulares e nem por isso eles deixam de ser importantes para o desenvolvimento da Matemática (WIELEWSKI, 2005, p.362).

Esses parâmetros (dimensões teóricas), vinculados com a parte exploratória (dimensões experimentais) da pesquisa de Wielewski (2005), permitiu a autora constatar que “o pensamento é influenciado pela atividade, pelo próprio problema matemático e pela existência, seja ela em relação ao conhecimento matemático ou à resolução de problemas” (WIELEWSKI, 2005, p.365). Nessa reflexão, Wielewski (2005) argumenta sobre o PM e a resolução de problemas, mas compreendo que ela seja ampla e possa ser associada aos demais pensamentos que emergem da Matemática e as mais variadas atividades, aplicando-se também ao PD e as atividades de investigação.

A autora conclui que para construir uma ideia sobre o que é PM, é preciso considerar o pensamento a partir de vários pontos de vista e em diferentes cenários. O PM é influenciado por todos os parâmetros pontuados individualmente ou em grupos pelos pensadores citados anteriormente, e isso ocorre de modo natural e simultâneo. Desse modo, o PM tem influência das características pessoais, da história social e cultural,

do desenvolvimento da Matemática, dos livros didáticos, das representações semióticas, dos conteúdos ou áreas envolvidas, da formação acadêmica, das experiências com a atividade matemática e dos próprios problemas matemáticos (WIELEWSKI, 2005).

Várias pesquisas em Educação, dentro e fora do Brasil, têm-se debruçado sobre o desenvolvimento do PM dos estudantes desde a Educação Básica até o Ensino Superior. Assim, outros termos e *ramificações do PM* surgem como forma de contribuir com a compreensão e aprofundar determinados aspectos sobre algo que é extremamente amplo e complexo. Henriques (2010) afirma que:

A natureza do pensamento matemático está necessariamente interligada aos processos cognitivos que dão origem ao conhecimento matemático. A compreensão, tal como acontece, é um processo ocorrendo na mente do indivíduo. Pode ser rápida, um *click* na mente, mas é, frequentemente, baseada numa longa sequência de actividades de aprendizagem durante as quais uma grande variedade de processos mentais ocorrem e interagem. Os investigadores em educação matemática têm, por isso, tomado consciência da importância dos processos mentais e as suas interacções na compreensão da Matemática avançada (HENRIQUES, 2010, p.19).

Em sua tese de doutorado, Henriques (2010) traz o Pensamento Matemático Avançado (PMA) com o intuito de compreender a Matemática denominada como avançada e faz essa apresentação de modo a complementar o PM.

Termos como PMA e Pensamento Matemático Elementar (PME), começam a surgir e serem discutidos nos meios acadêmicos. Proposto por um grupo de trabalho do *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, desde o início, o termo PMA foi compreendido como sendo todo o PM desde os últimos anos do Ensino Médio até a Matemática axiomática formal (HAREL; SELDEN; SELDEN, 2006).

De acordo com Henriques (2010), autores como Dreyfus (1991), Tall (1991) e Gray et al. (1999) esboçam a visão de que a Matemática vista por estudantes em idades mais jovens apresenta uma continuidade na Matemática Avançada (MA), e esse fato é evidenciado por muitas características presentes na MA. Os autores justificam esse pensamento por meio da *complexidade* dos processos usados no PM e as *mudanças cognitivas* que são possíveis de verificar no indivíduo, além de argumentarem que são esses os elementos que determinam o tipo de pensamento envolvido na aprendizagem de um dado conceito matemático e que caracterizam a transição do PME para o PMA. Ou seja, para esses autores, não há uma divisão profunda entre muitos dos processos que são usados no PME e no PMA.

Sad (2000) menciona que, para Tall (1991)

[...] muitos dos processos (transição e reconstrução mental, generalização e abstração, intuição, rigor, análise e síntese) do pensar matemático avançado

podem ser encontrados em um nível mais elementar, e o que faz a passagem do pensar matemático elementar para o avançado é a transição do descrever para definir e de convencer para provar, de um modo lógico baseado nas definições tomadas (SAD, 2000, p.3).

Segundo Reis (2001), de modo implícito (ou não), o PMA traz a discussão sobre a intuição e o rigor. Essa discussão, de natureza epistemológica, aborda dois elementos essenciais na construção do conhecimento matemático como um todo e que envolve as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) e de Análise Matemática. Isso porque no Cálculo a abordagem dos temas é baseada em uma perspectiva aplicada, com a interpretação intuitiva dos conceitos. Já em Análise, os temas geralmente são abordados segundo uma perspectiva lógico-formal, com a definição rigorosa dos conceitos.

Na tentativa de compreender essa discussão entre rigor e intuição, Reis (2001) realizou, em sua tese de doutorado, a análise de alguns manuais didáticos e entrevistas semiestruturadas com quatro professores-pesquisadores que são autores de estudos e de livros didáticos, são eles: Roberto Ribeiro Baldino e Geraldo Ávila (entrevistados em 1998); Djairo Guedes de Figueiredo e Elon Lages Lima (entrevistados em 1999). No que se refere a parte das entrevistas, quando questionados sobre a percepção e o enfrentamento diante dessa relação entre rigor e intuição no ensino da Matemática, os depoentes apresentam uma visão que considera questões cognitivas, morais e culturais e rompem concepções de rigidez diante dessa relação, destacando a existência de diferentes níveis de rigor que necessitam ser mediados pelos docentes.

Depois de mais alguns questionamentos relacionados a essa dicotomia entre Cálculo (PD) e Análise (PAn), Reis (2001) questiona “a possibilidade de existência de um ponto de equilíbrio entre o Pensamento Diferencial intuitivamente construído e o Pensamento Analítico rigorosamente construído” (REIS, 2001, p.157), assume que:

[...] por uma pré-concepção equivocada de nossa parte, tentávamos, de qualquer modo, associar a intuição ao pensamento diferencial e o rigor ao pensamento analítico. Como todos os depoentes demonstraram, essa associação não pode ser feita de forma dicotômica ou reducionista (REIS, 2001, p.157).

Assim, é possível constatar que a intuição e o rigor, ao mesmo tempo em que podem ser consideradas como opostas, são ideias e abordagens que se complementam.

Outro elemento que destaco das entrevistas e do texto de Reis (2001) é o desdobramento apresentado pelos depoentes com relação ao PD. O professor Roberto Ribeiro Baldino, admitiu que ainda não possuía uma caracterização completa do PD, mas, apesar disso, assumiu que considera o PD como algo que, por introduzir a decomposição das grandezas, vai além do Pensamento Algébrico (PAI). Baldino também comentou na

entrevista que a gênese do PD é mais difícil de ser acompanhada a partir do século XIX. Já os professores Djairo Guedes de Figueiredo e Elon Lages Lima não se pronunciaram quanto a uma caracterização, até mesmo histórica, do PD e do PAn. Eles ficaram limitados a identificar, partindo do ponto de vista didático-pedagógico, diversos elementos de comparação entre Cálculo e Análise. Desse modo, Reis (2001) afirma que:

Como podemos verificar, pela própria dificuldade de discutir e caracterizar os pensamentos diferencial e analítico demonstrada por nossos depoentes, a tentativa de análise e a dificuldade de realizá-la, por nossa parte, mostram que o domínio conceitual destas duas formas de pensamento é ainda pouco conhecido / explorado na produção da Educação Matemática. (REIS, 2001, p.159).

Desse modo, em busca de explicar a ideia do que é associado ao PD, trago algumas reflexões, apontamentos e posicionamentos de Sad (2000). A autora, que apresentou em sua tese de doutorado, defendida em 1998, uma abordagem epistemológica de alguns aspectos do CDI, discorre no artigo *Uma abordagem Epistemológica do Cálculo* (2000) sobre a produção de significados e conhecimentos a partir do Cálculo.

Assim, reforçando o apontamento feito por Wielewski (2005), de que o pensamento é influenciado por vários elementos (internos e externos) e que se manifesta de várias formas, Sad (2000) chama a atenção para o fato de que a “*diversificação* nos modos de produção de significado é feita em relação aparente a um ‘mesmo’ objeto produzido [...] e simbolicamente representado [...], mas que, contudo, pode reproduzir diferentes significados” (SAD, 2000, p.1). Nessa reflexão, Sad (2000) destaca a representação em uma proposição linguística, e isso desperta a minha curiosidade de modo amplo, levando-me a pensar no que está por trás daquilo que nos foi apresentado, qual a razão daquela escolha e no que outra escolha teria impactado. Claro que esses pensamentos são amplos, mas para esta pesquisa, eles giram em torno da Matemática, da sala de aula, dos enunciados, da resolução de atividades, dos professores e estudantes do Ensino Médio. Nesse contexto, é válida a compreensão de que duas pessoas podem, em uma mesma atividade, ler o enunciado e propor/apresentar alguma resolução e, a partir disso, produzir ou não diferentes significados. Ou seja, trata-se do pensamento e como esse se manifesta.

Durante o desenvolvimento da pesquisa, Sad (2000), em meio às atividades relativas ao Cálculo, comenta que observou alguns elementos e, dado a sua *frequência* e *importância* na produção de significados, conhecimentos e objetos, definiu denominações especiais como *Estipulações locais em núcleos de Campo Semântico* (CS) (SAD, 2000). Essa categorização proposta por Sad (2000) é apresentada no **Quadro 2**, a seguir.

**Quadro 2:** Núcleos associados ao Cálculo (SAD, 2000)

| Núcleo de um CS                                 | Caracterização                                                                                                                                     |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Estipulações locais a respeito de limite        | Quando se tem no núcleo a definição Weierstrassiana <sup>4</sup> de limite de uma função de uma variável real.                                     |
| Estipulações locais a respeito de infinitésimos | Quando se tem no núcleo elementos fundamentados na noção de infinitésimo <sup>5</sup> .                                                            |
| Estipulações locais visuais-geométricas         | Quando se tem no núcleo princípios ou resultados geométricos, gráficos e desenhos de figuras planas ou espaciais.                                  |
| Estipulações locais do tipo algoritmos          | Quando se tem no núcleo algoritmos (regras, fórmulas, sequências memorizadas “de cor”), sem relacionar ao entendimento e justificativa matemática. |

Fonte: Adaptado de Sad (2000).

Mesmo apresentando uma proximidade com o objetivo desta pesquisa, os elementos estruturados por Sad (2000) não convergem com os dados produzidos neste estudo. Desse modo, na seção a seguir é apresentada a estruturação de quatro aspectos do PD emergentes na produção de dados desta dissertação.

### 2.1.1 Aspectos do PD

Com base no estudo de Sad (2000) e considerando a natureza dos dados desta pesquisa, que envolve estudantes do Ensino Médio e uma abordagem intuitiva (sem definição formal ou qualquer tipo de estruturação específica) para algumas atividades apresentadas, proponho uma nova categorização a alguns aspectos que considero relevantes e emergentes do PD. Essa proposta é exposta no **Quadro 3** e foi aplicada na análise e discussão dos dados desse trabalho (**Capítulo 5**).

<sup>4</sup>  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$  se  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que se  $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

<sup>5</sup> Sad (2000) explica a noção de infinitésimo como a concebida desde Newton (de mônadas infinitesimais, de incrementos infinitamente pequenos), ou como para Leibniz (uma classe de números menores do que qualquer outro designado, às vezes também expresso como diferenciais ou como distâncias infinitamente pequenas).



**Quadro 3:** Aspectos do PD

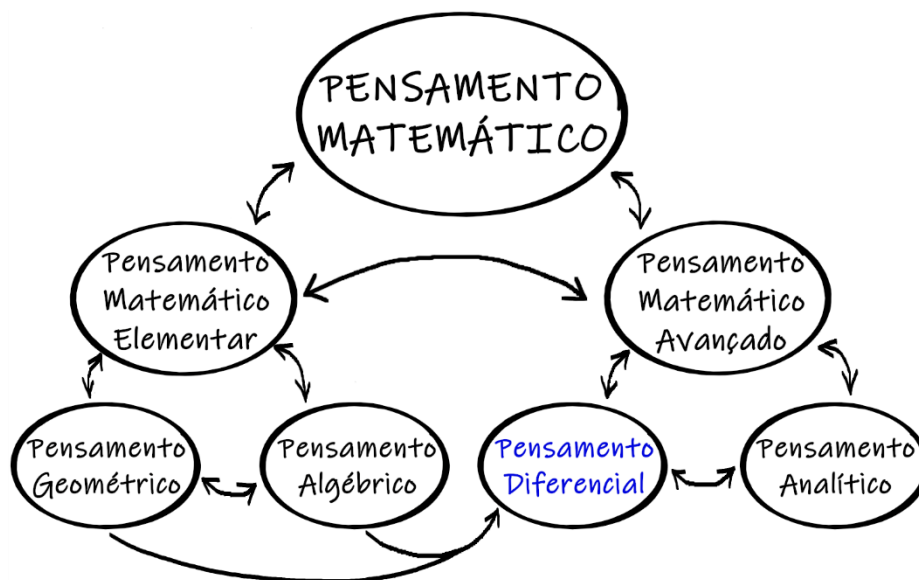
| Aspecto                        | Caracterização                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Noção de limite e continuidade | Quando há manifestação de raciocínios e conclusões envolvendo um processo de aproximação a um valor máximo ou mínimo, apresentando uniformidade nos elementos de investigação construídos.                                                                                                      |
| Noção de infinitésimo          | Quando há a manifestação de ideias relacionadas à redução no tamanho de uma medida até que ela fique o mais pequena possível, mas sem se anular. Essa redução implica no aumento de repartições de um intervalo ou no número de lados de um polígono (inscrito e/ou circunscrito), por exemplo. |
| Conceito de integral definida  | Quando há a manifestação de propostas envolvendo o cálculo de área e/ou volume por meio de intervalos bem definidos.                                                                                                                                                                            |
| Concepção visual-geométrica    | Quando há a manifestação de construção de figuras planas e/ou espaciais, bem como a análise de figuras para a manifestação de raciocínios e conclusões.                                                                                                                                         |

Fonte: Elaboração própria.

Este estudo entende *aspectos do PD* como a manifestação de conceitos do CDI emergentes de maneira formal e/ou intuitiva em estudantes do Ensino Médio ao investigarem atividades envolvendo o cálculo de área e volume mediante o *software* GeoGebra. Esse processo vai de encontro com a base teórica pensar-com-GeoGebra proposta por Borba, Scucuglia e Gadaniadis (2018), que enfatiza a influência que a mídia (no caso, o GeoGebra), incorporada no processo de ensino e aprendizagem, tem no pensamento dos seres humanos ao desenvolver atividades matemáticas.

Corroboro a ideia de que não existe um modo verdadeiro e absoluto ao pensar sobre Matemática e construir seus elementos e significados (SAD, 2000). Mesmo quando tentamos *classificar* o pensamento e apresentar algumas definições sobre essa categorização, é muito importante lembrar que estamos falando do cognitivo e da influência do meio, refletindo a ideia de algo que tem variações. Assim, apresento na **Figura 1** uma *teia* entre alguns dos pensamentos presentes na Matemática, evidenciando o caminho que leva ao PD. Para elaboração dessa teia, parto do princípio de que todos os pensamentos presentes são tipos de PM e se diferem diante do momento, da ênfase que está sendo dada em uma determinada atividade e da própria psique.

**Figura 1:** Teia entre alguns dos pensamentos presentes na Matemática (enfatizando o PD)



Fonte: Elaboração própria.

A teia acima ilustra uma relação entre os pensamentos: PM; PME; PMA; PG; PAI; PD; PAN. Alguns deles foram apresentados e discutidos, de algum modo, nas produções acadêmicas e bibliográficas que são apresentadas na seção 2.1 deste capítulo. Cada autor não necessariamente abordou todos esses pensamentos em um mesmo trabalho, mas o conjunto das leituras que fiz motivou a construção dessa esquematização. Na imagem, o PM aparece em tamanho maior justamente porque, como mencionado anteriormente, parto do princípio de que todos os pensamentos têm a mesma definição, que é a do PM. Em seguida, a estrutura se abre ao PME e PMA, com a intenção de ilustrar a **primeira camada** de pensamentos que incorporam o PM. Nesse momento já se faz presente a compreensão de que os pensamentos apresentados se diferem diante da ênfase que está sendo dada a uma determinada atividade. A **segunda camada** de pensamentos que incorporam o PM, traz o PG, PAI, PD e PAN e evidencia a compreensão de que eles se diferem diante do momento, da ênfase que está sendo dada e da própria psique. As ligações entre um pensamento e outro, que são apresentadas na imagem, reforçam o compartilhamento da definição e evidenciam que todos se relacionam e possuem ao menos um traço que se assemelha e que se complementa. A cor azul foi usada para destacar o pensamento que essa dissertação se propõe a investigar, no caso o PD.

Todos esses pensamentos estão fortemente relacionados com o uso de representações matemáticas. Desse modo, quando as representações matemáticas são reveladas pelos estudantes, a sua análise permite uma melhor compreensão sobre os

modos como pensam, os processos que usam e a evolução de seus raciocínios (HENRIQUES, 2010). Então, quando essa reflexão é levada ao PD, enfatiza a essência desta dissertação, que consiste em observar e investigar o trajeto que o estudante constrói e percorre ao pensar-com-GeoGebra na resolução de atividades matemáticas, e converge com o embasamento da pergunta norteadora desse estudo, que é: *Quais aspectos do PD e do pensar-com-GeoGebra emergem quando estudantes do Ensino Médio investigam atividades sobre cálculo de áreas e volumes?*

Como o objetivo deste estudo está relacionado ao PD, nas seções seguintes apresento uma investigação da sua presença em alguns problemas matemáticos históricos, bem como na BNCC do Ensino Médio. O intuito dessa reflexão é evidenciar a presença e a emergência do PD em alguns problemas de área e volume explorados na produção de dados deste trabalho e que estão presentes na História da Matemática, além de pontuar alguns momentos da BNCC que são convergentes ao PD, validando a relevância e importância desse estudo.

## 2.2 A História da Matemática e o PD

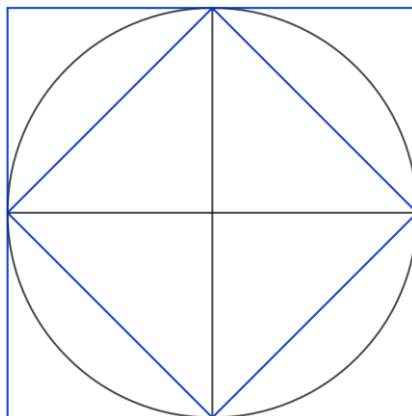
Tomando como ponto de partida o problema da área, desde o início da história, o círculo exerceu um papel muito importante e que excede a ideia de algo simplesmente decorativo, “ele emergiu como uma roda, usado no transporte, agricultura e cerâmica” (BARON, 1985, p.11). Hoje está claro como calcular a área de um círculo porque conhecemos o valor aproximado de  $\pi$ . Mas e antes da sua determinação, como faziam esse cálculo? Será que existe(m) outra(s) estratégia(s) desenvolvida(s) pelas civilizações antigas que não envolve o  $\pi$ ? É possível responder ao primeiro questionamento partindo de uma abordagem intuitiva? Quais conceitos do Cálculo estão envolvidos nesse processo? Quais aspectos do PD podem emergir diante de uma abordagem investigativa para esse problema?

Em busca de responder esses e outros questionamentos que emergiram ao pensar esta pesquisa, trago nesta seção algumas abordagens para esse problema de área e outros que inspiraram a elaboração e construção das atividades propostas, articulando com conceitos do CDI e aspectos do PD.

Há evidências de que a maioria das civilizações antigas utilizava uma estratégia de aproximação que consistia em inscrever e circunscrever o círculo com quadrados (**Figura 2**) e, então, tomava-se a média das áreas ao final. Essa forma de abordagem

ofereceu a primeira aproximação para o cálculo de área do círculo, dada por  $3r^2$  (onde  $r$  é o raio do círculo) (BARON, 1985, p.12-3).

**Figura 2:** Primeira aproximação para o cálculo da área de um círculo



Fonte: Adaptado de Baron (1985, p.12).

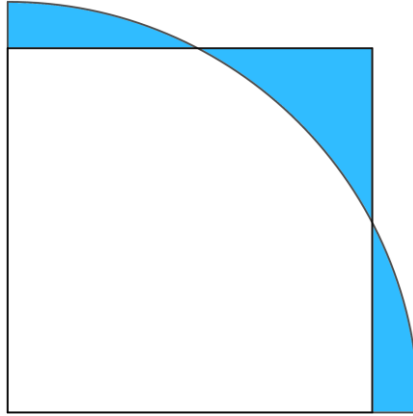
No Egito antigo, para calcular a área em questão, “foi usado um valor *equivalente*<sup>6</sup> à fórmula: área =  $4\left(\frac{8}{9}r\right)^2$ ” (BARON, 1985, p.13). Essa fórmula é interessante por fornecer mais do que o valor aproximado da área do círculo. Se compararmos ela com a fórmula que usamos hoje  $A = \pi r^2$ , é possível observar o valor de  $\pi$  implícito<sup>7</sup> no cálculo dos antigos egípcios. Esse apontamento só foi possível de ser feito depois de um longo período, pois, nesse momento da história que pontuo, ainda não se tinha formalizado o  $\pi$  ou o seu conceito, mas eram apenas intuições. Baron (1985) apresenta em seu livro, Unidade 1, um problema que sugere a investigação desses elementos, que é enunciado da maneira que segue e ilustrado pela **Figura 3**.

Desenhe um quadrante circular (estimado de olho) e construa um quadrado com área igual à do quadrante que desenhou. Finalmente, *medindo* o lado do quadrado e exprimindo-o em termos do raio do círculo, você será capaz de ver como os seus resultados comparam-se com as aproximações egípcias, isto é, lado do quadrado =  $\frac{8}{9}$  raio (BARON, 1985, p.13).

<sup>6</sup> Baron (1985) destaca em seu livro a palavra equivalente e comenta, em uma determinada parte do texto, que “vale a pena adquirirmos o hábito de formular um problema em termos históricos; para todas essas civilizações antigas as soluções eram sempre obtidas em termos de *regras de cálculo*” (p.13).

<sup>7</sup> “O símbolo  $\pi$  não foi usado neste contexto até 1706” (BARON, 1985, p.14).

**Figura 3:** Uma outra aproximação para o cálculo da área do círculo e uma forma de abordar o valor aproximado de  $\pi$



Fonte: Adaptado de Baron (1985, p.13).

Discorrendo um pouco sobre esse problema e buscando simplificá-lo ao considerar o raio  $r$  do círculo igual a 1, é possível constatar que sua ideia fundamental refere ao fato de que  $\left(\frac{8}{9}\right)^2 \cong \frac{\pi}{4}$  e, conseqüentemente,  $4\left(\frac{8}{9}\right)^2 \cong \pi$ . De fato, da igualdade:

$$4\left(\frac{8}{9}r\right)^2 = \pi r^2, \text{ vem:}$$

$$\pi = \frac{4\left(\frac{8}{9}r\right)^2}{r^2} = 4\left(\frac{\left(\frac{8}{9}r\right)}{r}\right)^2 = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 \cong 3,1605$$

Esse valor de  $\pi$  é considerado uma boa aproximação para a época, já que o objetivo não era defini-lo. É interessante pensar essa abordagem para o cálculo da área e o questionamento “Qual terá sido a fonte de inspiração para determinar a área do círculo deste modo?” (ESTRADA et al., 2000, p.50) se faz presente a todo momento.

Quando pensamos na abordagem elaborada pelos egípcios antigos para o cálculo da área do círculo, embora Baron (1985) não apresente desdobramentos acerca desse problema na História da Matemática, a ideia de ampliá-lo ao cálculo do volume de uma esfera é tentadora. Então, partindo dessa premissa, é possível assumir que o volume do cubo com medida da aresta  $\frac{79}{98}r$  é aproximadamente o volume de um octante da esfera, ou seja,  $\left(\frac{79}{98}r\right)^3 \cong \frac{\pi}{6}r^3$ . Assim como no problema da área, essa abordagem oferece uma aproximação para o valor de  $\pi$ , como é possível constatar:

$$8\left(\frac{79}{98}r\right)^3 = \frac{4}{3}\pi r^3, \text{ então}$$

$$\pi = \frac{8\left(\frac{79}{98}r\right)^3}{\frac{4}{3}r^3} = \frac{8}{\frac{4}{3}}\left(\frac{\left(\frac{79}{98}r\right)}{r}\right)^3 = 6\left(\frac{79}{98}\right)^3 \cong 3,1431$$

Novamente estamos falando de uma boa aproximação para o  $\pi$ . Mas, assim como

a resolução apresentada pelos egípcios antigos, essa também é passível a aprimoramentos. Reconhecer isso é abrir um leque de possibilidades de investigação e exploração que podem ser desenvolvidas das mais variadas formas e em diferentes ambientes e contextos.

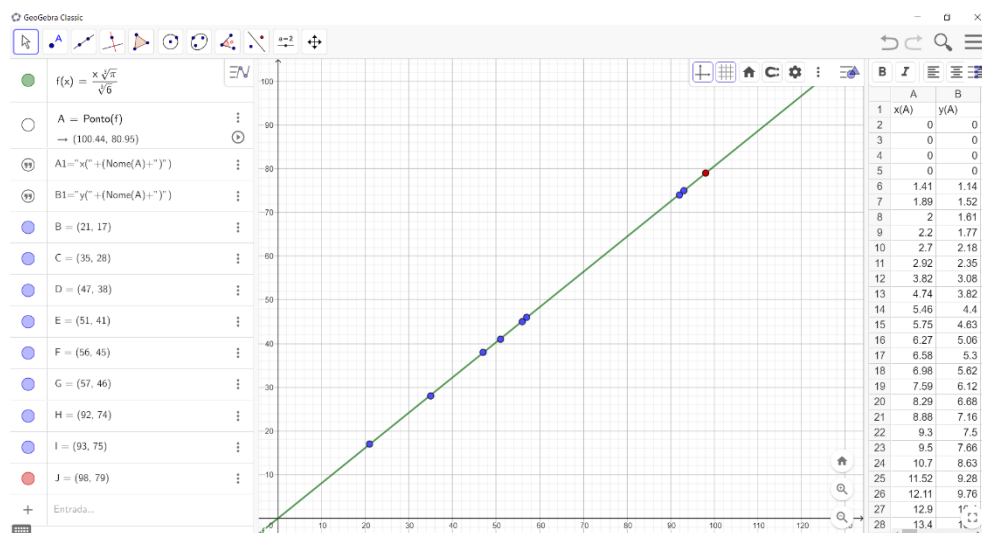
Para um melhor esclarecimento da elaboração da relação  $\frac{79}{98}r$  considerada para a medida da aresta do cubo (**Figura 4**), apresento aqui o caminho trilhado, mas acreditando que ele não é o único existente:

*Buscamos encontrar um par de pontos  $p$  e  $q$  tal que  $\left(\frac{p}{q}r\right)^3 \cong \frac{\pi}{6}r^3$  (adaptação da ideia de relação apresentada pelos egípcios antigos para o cálculo da área). Desenvolvendo esta relação é possível encontrar a equação de uma reta, como descrito a seguir:*

$$\frac{p^3}{q^3}r^3 \cong \frac{\pi}{6}r^3 \rightarrow p^3 \cong \frac{\pi q^3 r^3}{r^3} \rightarrow p \cong \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}q^3} \rightarrow p \cong \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}q \rightarrow p \cong \left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{1}{3}}q$$

*Essa reta não vai gerar algum par ordenado inteiro que satisfaz a equação, mas é possível encontrar valores próximos. O par (98,79), por exemplo, é um deles e foi o que incorporamos ao desdobramento de volume apresentado.*

**Figura 4:** Identificando a relação  $(79/98) \cdot r$  considerada para a medida da aresta do cubo



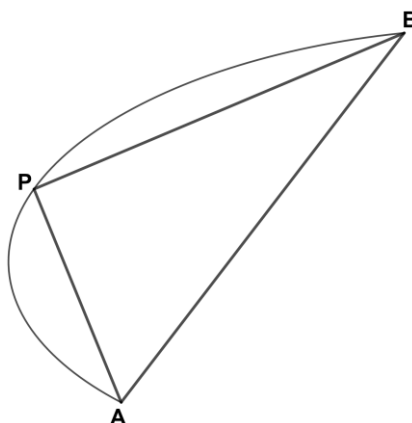
Fonte: Dados da pesquisa.

Dando continuidade à nossa viagem histórica e aos desdobramentos do cálculo emergentes em determinados períodos, é possível encontrar trabalhos como o de Arquimedes, Wallis, Fermat, Newton e Leibniz para a quadratura da parábola (EDWARDS, 1979; BARON, 1985; ESTRADA et al., 2000; BOYER, 2010). Todos tiveram contribuições significativas e marcantes na História da Matemática e inspiraram a elaboração de uma atividade proposta neste trabalho, mas, para essa seção, pontuarei

apenas duas ideias. Começo por Arquimedes de Siracusa (287–212 a.E.C.) que, ao observar que aparentemente os primeiros matemáticos não haviam tentado quadrar um segmento de parábola (EDWARDS, 1979), mostrou que:

Dado um segmento parabólico com base AB, o ponto P do segmento que está mais distante da base é denominado vértice do segmento, e a distância (perpendicular) de P a AB é sua altura. Arquimedes mostrou que a área do segmento é quatro terços da área do triângulo APB inscrito [Figura 5]. Ou seja, a área de um segmento de uma parábola é  $\frac{4}{3}$  vezes a área de um triângulo com a mesma base e altura (EDWARDS, 1979, p.36-7, tradução nossa)<sup>8</sup>.

**Figura 5:** Segmento parabólico AB e triângulo inscrito APB



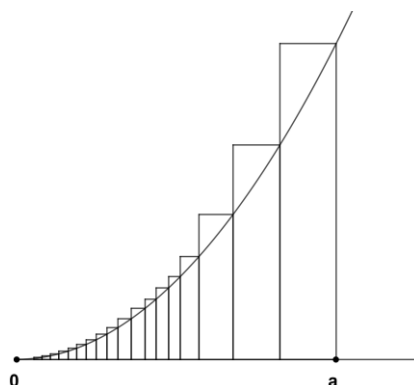
Fonte: Adaptado de Edwards (1979, p.36).

Arquimedes estabelece duas demonstrações dessa proposição. Na primeira demonstração, ele utiliza procedimentos mecânicos, ou seja, argumenta que o peso do segmento parabólico irá equilibrar com o peso do triângulo quando colocado em uma alavanca apropriada (ver EDWARDS, 1979). Na segunda, ele utiliza geometria pura, demonstrando essa proposição pelo método da exaustão (denominado por Grégoire de Saint-Vincent). Ambas são complexas e inspiradoras.

O outro olhar que trago para esse problema é o de Pierre de Fermat (1601–1665), que desenvolveu um método que, ao considerar a curva  $y = x^n$  e supondo que se procura a área sob essa curva desde  $x = 0$  até  $x = a$ , ele

[...] subdividia o intervalo desde  $x = 0$  até  $x = a$  em uma infinidade de subintervalos tomando os pontos com abscissa  $a$ ,  $aE$ ,  $aE^2$ ,  $aE^3$ , ... onde  $E$  é uma quantidade menor que um. Nesses pontos ele levantava ordenadas da curva e depois aproximava a área sob a curva por meio de retângulos [Figura 6]. [...] Quando  $E$  tende a um – isto é, os retângulos se tornam cada vez mais estreitos – a soma das áreas do retângulo se aproxima da área sob a curva (BOYER, 2010, p.241).

<sup>8</sup> Given a parabolic segment with *base* AB, the point P of the segment that is farthest from the base is called the *vertex* of the segment, and the (perpendicular) distance from P to AB is its *height*. Archimedes showed that the area of the segment is four-thirds that of the inscribed triangle APB. That is, the area of a segment of a parabola is  $\frac{4}{3}$  times the area of a triangle with the same base and height.

**Figura 6:** A quadratura da parábola, segundo Fermat

Fonte: Adaptado de Boyer (2010, p.240).

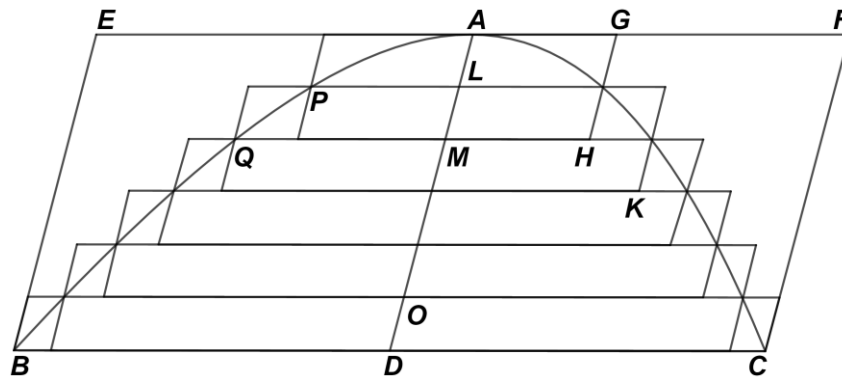
Considero essa abordagem proposta por Fermat interessante por já esboçar indícios da soma de Riemann, que usualmente aplicamos em um problema de cálculo de área sob uma curva, ou seja, estamos falando da integral definida.

Novamente, para mim, a ideia de encontrar o valor de uma determinada área implica na curiosidade de investigar o volume de algum sólido. Assim, recorrendo a História da Matemática mais uma vez, é possível encontrar construções muito interessantes e que tem contribuições ao desenvolvimento do Cálculo. Em Baron (1985) estão presentes comentários e algumas demonstrações acerca dos métodos que Arquimedes usava para determinar área de regiões limitadas por curvas, volumes de regiões limitadas por superfícies e áreas de superfícies. Para o cálculo do volume de um sólido obtido por rotação de uma parábola em torno de algum eixo, por exemplo, Arquimedes primeiro procedeu mediante a prova de um resultado bem geral, como segue nas *Proposições 19, 20, Sobre conoides e esferoides*.

Dada uma seção obtida de um parabolóide ou hiperbolóide de revolução pela interseção de um plano, ou uma seção de um esferoide, menor do que a metade do esferoide, também obtida por interseção de um plano, é possível inscrever na seção uma figura sólida e circunscrever em torno dela outra figura sólida, cada uma delas construída de cilindros ou tronco de cilindros com alturas iguais de tal maneira que o volume da figura circunscrita exceda o volume da figura inscrita por um volume menor do que o volume de qualquer sólido dado [Figura 7] (BARON, 1985, p.42).



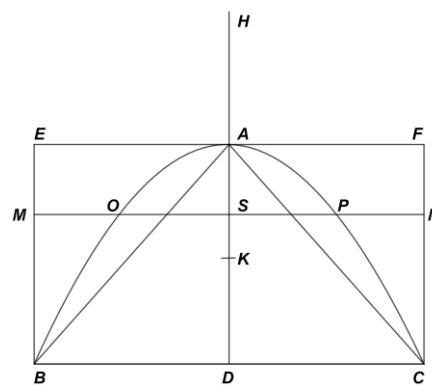
**Figura 7:** Proposição 19,20, Sobre conoides e esferoides (Arquimedes)



Fonte: Adaptado de Baron (1985, p.42).

Dando sequência as ideias de Arquimedes, ele foi capaz de estabelecer relações entre o volume do cone, do parabolóide de revolução e do cilindro, como é possível constatar em *O Método, Proposição 4* “Qualquer segmento de um conoide reto (isto é, um parabolóide de revolução) seccionado por um plano perpendicular ao eixo é igual a  $1\frac{1}{2}$  vezes o cone que tem a mesma base e o mesmo eixo do segmento” (BARON, 1985, p.50), e observar na **Figura 8**. Durante sua prova, Arquimedes recorre a *Euclides, XII, 10*<sup>9</sup>, que aborda a relação entre o volume do cilindro e do cone, e então conclui a relação de volume do parabolóide.

**Figura 8:** O método, Proposição 4, de Arquimedes



Fonte: Adaptado de Baron (1985, p.50).

O interessante desses problemas apresentados é que, de um modo geral, é possível constatar os quatro aspectos do PD que destaco neste trabalho: noção de limite e continuidade; noção de infinitésimo; conceito de integral definida; concepção visual-geométrica. Esses aspectos, que estão associados ao PD, como é possível constatar na História da Matemática, se manifestam na maioria dos casos sem pretensão e de modo intuitivo, ou seja, fundamentam o desenvolvimento das ideias matemáticas. Observar esse

<sup>9</sup> Todo cone é uma terça parte do cilindro que tem a mesma base que ele e altura igual (EUCLIDES, 2009, p.543-6).

tipo de manifestação em estudantes do Ensino Médio faz parte do foco dessa pesquisa. Para isso, considero válido apresentar algumas reflexões sobre a BNCC do Ensino Médio com o olhar voltado ao PD, além de uma breve discussão sobre o desenvolvimento, no Ensino Médio, de conteúdos abordados no Ensino Superior. Essas reflexões e discussão estão apresentadas nas próximas seções deste capítulo.

### **2.3 A BNCC do Ensino Médio e o PD**

É instigante pensar que, mesmo sendo estruturante para os cursos de graduação na área de Ciências Exatas, elementos do CDI e o PD não sejam explorados na etapa do Ensino Médio da Educação Básica. E mesmo que sejam explorados, essa ação acaba, na maioria das vezes, não sendo recorrente e/ou não evidencia a variação e movimento que incorpora o CDI. Isso gera alguns questionamentos como: Existe alguma convergência entre o CDI e o(s) conteúdo(s) previsto(s) para ser(em) desenvolvido(s) no Ensino Médio? O CDI e o PD se fazem presentes nos documentos norteadores e/ou normativos do Ensino Médio? Caso o CDI e o PD estejam presentes, como eles estão inseridos e são apresentados?

Buscando responder a esses questionamentos de modo amplo, o documento normativo usado como base para a análise que será apresentada nesta seção foi a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio. A BNCC<sup>10</sup> é um documento que define o conjunto de aprendizagens essenciais que todos os estudantes precisam desenvolver ao longo do seu percurso na Educação Básica. Esse documento deve nortear os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas, bem como as propostas pedagógicas de todas as escolas públicas e privadas de todas as etapas da Educação Básica, em todo o Brasil.

A parte da área de Matemática e suas tecnologias inicia enfatizando que a BNCC do Ensino Médio propõe a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas até o 9º ano do Ensino Fundamental. Reforça que na etapa anterior da Educação Básica as habilidades estão organizadas segundo as unidades de conhecimento: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; Probabilidade e Estatística, e segue evidenciando os pensamentos emergentes nessas unidades de conhecimento. Nos trechos

---

<sup>10</sup> Existe uma ampla discussão e estudo em torno da BNCC. Reis (2021), por exemplo, constatou em sua dissertação de Mestrado que tais mudanças educacionais estão assentadas nos organismos internacionais e são requeridas com base nos interesses neoliberais que visam a manutenção da sociedade capitalista.

a seguir, é possível observar um esboço da teia entre alguns dos pensamentos presentes na Matemática (**Figura 1**), que foi apresentada na subseção **2.1.1** deste capítulo.

Os estudantes têm também a oportunidade de desenvolver o pensamento algébrico, tendo em vista as demandas para identificar a relação de dependência entre duas grandezas em contextos significativos e comunicá-la utilizando diferentes escritas algébricas, além de resolver situações-problema por meio de equações e inequações.

Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança.

No que se refere a Grandezas e Medidas, os estudantes constroem e ampliam a noção de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, e obtêm expressões para o cálculo da medida da área de superfícies planas e da medida do volume de alguns sólidos geométricos (BRASIL, 2017, p.517).

Ao mencionar, no último parágrafo citado, que os *estudantes obtêm expressões para o cálculo da medida da área de superfícies planas e da medida do volume de alguns sólidos geométricos*, é possível constatar a influência do PAI e do PG, que incorporam o PME. Ambos se relacionam e possuem ao menos um traço semelhante e complementar ao PD. Embora esses trechos não apresentem o CDI explicitamente, é possível observar a influência que um tem sobre o outro e associar ao último o aspecto ***Conceito de integral definida***, uma vez que o cálculo de área e volume mencionado pode ser desenvolvido por meio de intervalos bem definidos.

A representação é extremamente importante no CDI, já que ela facilita a visualização dos elementos envolvidos no estudo e ajuda a estruturar o raciocínio. De modo amplo, a BNCC traz a representação como forma de compreensão de fatos, de ideias e de conceitos, evidenciando o uso de registros de representação para a compreensão, desenvolvimento e comunicação dos resultados de uma atividade. Aqui é possível associar as construções visuais como modo de representação. Buscando proximidade com o CDI e o PD, relaciono essa consideração geral com o aspecto ***Concepção visual-geométrica***, uma vez que a manifestação de construção de figuras planas e/ou espaciais é uma forma de representação.

Ainda na introdução da área de Matemática e suas tecnologias, a BNCC comenta que

Variação e constância envolve observar, imaginar, abstrair, discernir e reconhecer características comuns e diferentes ou o que mudou e o que permaneceu invariante, expressar e representar (ou descrever) padrões, generalizando-os. Reitera-se que, como essas ideias não são exclusivas da

Matemática, podem gerar integração entre as áreas (BRASIL, 2017, p.520).

Aqui é possível relacionar a *variação* com o aspecto do PD *Noção de infinitésimo*, buscando associação com a manifestação de ideias relacionadas a redução no tamanho de uma medida até que ela fique o mais pequena possível, mas sem se anular. Outra associação que pode ser feita a esse trecho da BNCC, especificamente a ideia de *mudar ou de permanecer invariante*, é com relação a *continuidade* presente no CDI, que evidencia e valoriza a uniformidade nos elementos de investigação construídos. Nessa linha de raciocínio, o fato de *identificar padrões e generalizá-los* aproxima-se do conceito de *limite*, ainda que de modo superficial e na tentativa de identificar vestígios do CDI na BNCC do Ensino Médio.

Como fechamento da apresentação da área de Matemática e suas tecnologias, a BNCC traz um quadro com as competências específicas da área a serem desenvolvidas no Ensino Médio. Nesse quadro, estão presentes cinco competências, das quais apenas duas serão destacadas nessa seção. A razão pela qual ambas mostraram proximidade ao CDI é a presença de algumas habilidades que podem ser analisadas e associadas a algum aspecto do PD. É importante ressaltar que a competência por si só é muito abrangente, por isso a discussão segue direcionada às habilidades.

A primeira competência específica a ser pontuada é a 3:

3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (BRASIL, 2017, p.523).

Essa competência articula com dezesseis habilidades, dentre as quais destaco quatro:

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais.

(EM13MAT307) Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais, como o remanejamento e a distribuição de plantações, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos (cilindro e cone) em situações reais, como o cálculo do gasto de material para forrações ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados.

(EM13MAT313) Resolver e elaborar problemas que envolvem medições em que se discuta o emprego de algarismos significativos e algarismos duvidosos, utilizando, quando necessário, a notação científica (BRASIL, 2017, p.528-9).

A primeira habilidade (EM13MAT301), por reforçar a importância da representação por meio de *técnicas algébricas e gráficas*, pode ser relacionada ao aspecto do PD ***Concepção visual-geométrica***.

Já a segunda habilidade (EM13MAT307), por se tratar do cálculo da área de superfícies, apresenta vestígios dos quatro aspectos do PD estruturados nessa dissertação: ***Noção de limite e continuidade; Noção de infinitésimo; Conceito de integral definida; Concepção visual-geométrica***. A ***Noção de limite e continuidade*** e a ***Noção de infinitésimo*** pode ser associada a ideia de *dedução de expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais*, prevalecendo a ideia de que essa dedução não foi direcionada a alguma abordagem específica. E o ***Conceito de integral definida*** converge com a proposta de *obtenção da medida da área de uma superfície*.

A terceira habilidade (EM13MAT309), pensada como um todo, também converge aos quatro aspectos do PD: ***Noção de limite e continuidade; Noção de infinitésimo; Conceito de integral definida; Concepção visual-geométrica***.

A última habilidade da competência específica 3 que converge com o CDI e o PD é a (EM13MAT313). Nela é possível pontuar a possibilidade de trabalhar com valores numéricos pequenos, permitindo a associação ao aspecto ***Noção de infinitésimo***.

Finalizando a análise da BNCC do Ensino Médio em busca de vestígios do CDI e do PD, a competência específica 5 apresenta outras habilidades que podem, de algum modo, ser associadas a aspectos do PD.

5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e proporcionalidades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2017, p.523).

Das doze habilidades presentes nessa competência, as três seguintes se destacam dentro da proposta deste estudo:

(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

(EM13MAT512) Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação,

como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos (BRASIL, 2017, p.533).

A habilidade (EM13MAT504), por propor o *cálculo do volume de alguns sólidos geométricos* e por incluir o *Princípio de Cavalieri* como um dos processos a serem explorados, pode ser relacionada aos aspectos do PD *Conceito de integral definida e Concepção visual-geométrica*.

Já a habilidade (EM13MAT506), pensada como um todo, converge aos aspectos do PD *Noção de limite e continuidade; Noção de infinitésimo e Concepção visual-geométrica*.

A última habilidade (EM13MAT512) converge com a ideia de desenvolvimento do CDI. Desse modo, essa habilidade pode ser associada ao PD de modo geral, abordando os aspectos destacados nessa dissertação, bem como outros que podem ser definidos diante de diferentes momentos e interesses.

Desse modo, é possível constatar nessa análise uma relação entre o CDI, o PD e a BNCC. Na maioria das vezes, essa relação acaba ocorrendo a partir do olhar de interesse de quem está diante do documento, visto que o texto é colocado de modo amplo, gerando possibilidades de interpretação. Pensando nisso, é compreensível o fato de que elementos do CDI pouco são explorados no Ensino Médio. Como forma de aprofundamento, nesse ponto caberia uma análise dos currículos das Unidades Federativas que os possuem, gerando uma outra possibilidade de pesquisa acadêmica. Para esta dissertação, esse aprofundamento não será desenvolvido, apenas sugerido.

Uma proposta de abordagem e desenvolvimento de elementos do CDI no Ensino Médio é através do desenvolvimento de atividades investigativas e do uso de tecnologias digitais. No **Capítulo 3**, a seguir, apresento alguns encaminhamentos para essa sugestão.

### 3. ABORDAGENS TECNOLÓGICAS

Neste capítulo, apresento uma revisão bibliográfica que visa destacar alguns elementos relevantes ao objetivo dessa pesquisa, que procura investigar aspectos do Pensamento Diferencial (PD) emergentes em um grupo de estudantes do Ensino Médio ao pensar-com-GeoGebra atividades que envolvem a investigação da área de regiões limitadas por eixos e curvas e o cálculo do volume de regiões limitadas por superfícies planas e curvas. Para tanto, teço um breve histórico sobre o desenvolvimento das tecnologias, tecnologias da inteligência e tecnologias digitais. Em seguida, discuto a relação entre atividades de investigação matemática com tecnologias digitais e as competências gerais da Base Nacional Comum Curricular (BNCC); e argumento sobre o processo de pensar-com-GeoGebra.

#### 3.1 Desenvolvimento das tecnologias

Você já parou para pensar um pouco em quantos processos e produtos são usados naturalmente em seu dia a dia? Nos esforços (ou não) que fez para aprender a utilizá-los? Quantas e quais são as tecnologias envolvidas? De que maneira e como elas mudam a sua forma de pensar, sentir e agir? Você consegue viver sem essas inovações?

Com a intenção de discorrer um pouco sobre os questionamentos levantados e de apresentar um breve histórico sobre o desenvolvimento das tecnologias, permito-me fazer alguns recortes em sua linha histórica de criação e desenvolvimento e relatar determinados momentos e fatos, não necessariamente seguindo a ordem cronológica.

Quando escutamos sobre ou falamos de tecnologia, é um tanto quanto normal fazermos associação a máquinas e equipamentos digitais. Entretanto, o conceito de **tecnologia** abrange todas as coisas que o ser humano criou em todas as épocas, suas formas de uso e suas aplicações (KENSKI, 2012). Recorrendo ao dicionário, é possível constatar que tecnologia é “um conjunto de conhecimentos, especialmente princípios científicos, que se aplicam a um determinado ramo de atividade” (FERREIRA, 2010, p.730). Ou seja, é a reunião de técnicas, habilidades, métodos e processos usados na produção de bens ou serviços, ou na realização de algo. Segundo Kenski (2012),

As tecnologias são tão antigas quanto a espécie humana. Na verdade, foi a engenhosidade humana, em todos os tempos, que deu origem às mais diferenciadas tecnologias. O uso do raciocínio tem garantido ao homem um processo crescente de inovações. Os conhecimentos daí derivados, quando colocados em prática, dão origem a diferentes equipamentos, instrumentos, recursos, produtos, processos, ferramentas, enfim, a tecnologias (KENSKI,

2012, p.15).

Assim, as tecnologias surgem, na maioria das vezes, diante da necessidade humana. Se pararmos para pensar, a comunicação também incorpora essa necessidade, não é? Um ponto importante é que existem tecnologias que são muito utilizadas desde o início da civilização, mas que não tem ligação direta a algo material. Um exemplo desse tipo de tecnologia é a linguagem. Kenski (2012) comenta que a linguagem foi criada pela inteligência humana a fim de promover a comunicação entre membros de determinado grupo social. Assim, as tecnologias também servem para manifestação das ideias, sentimentos e opiniões, e para a transmissão e tratamento de mensagens.

Lévy (2016) usa a noção de **tecnologias da inteligência** para caracterizar a oralidade, a escrita e a informática, isso porque são técnicas que se associam à memória (e sua extensão) e ao conhecimento. O autor reforça a ideia de que a história da humanidade e a história das tecnologias sempre estiveram minuciosamente ligadas. Essa ligação/relação evidencia que “os seres humanos são construídos por técnicas [...] e, ao mesmo tempo, esses mesmos seres humanos estão constantemente transformando essas técnicas” (BORBA; PENTEADO, 2019, p.48).

A maioria das tecnologias que nos rodeiam hoje em dia estão tão próximas e presentes que quase não percebemos que não são coisas naturais. Trago como exemplo o domínio do fogo, a domesticação de animais, a plantação e irrigação de sementes, a tecelagem, a escrita, o lápis, o papel, os óculos e os medicamentos. Em outros casos, só identificamos a presença das tecnologias quando ficamos impossibilitados de usá-las, como quando ocorre a falta de energia nas residências ou do abastecimento de água.

A evolução social da humanidade se divide em diferentes etapas que resultaram de muitas variáveis independentes, mas, na maioria das vezes, decorrem de descobertas e aplicações de novos conhecimentos e técnicas de trabalho e produção (KENSKI, 2012). Essa evolução é indissociável do desenvolvimento, evolução e emprego das tecnologias em diferentes épocas. Assim,

As idades da pedra, do ferro e do ouro, por exemplo, correspondem ao momento histórico-social em que foram criadas “novas tecnologias” para o aproveitamento desses recursos da natureza, de forma a garantir melhor qualidade de vida. O avanço científico da humanidade amplia o conhecimento sobre esses recursos e cria permanentemente “novas tecnologias”, cada vez mais sofisticadas. (KENSKI, 2012, p.21).

A autora comenta que *novas tecnologias* são assim consideradas em relação às tecnologias anteriormente existentes. Entretanto, com o acelerado desenvolvimento tecnológico, o processo em estabelecer um limite de tempo considerável para designar



como *novos* os conhecimentos, instrumentos e procedimentos que vão aparecendo é difícil. Assim, também podemos falar em *tecnologias rejuvenescidas*, uma vez que não são tão novas assim, apenas passaram por um processo de adaptação e aprimoramento de uso (KENSKI, 2012). Um exemplo de tecnologia rejuvenescida seria a televisão, pois esta pode ser assistida no celular ou computador, não sendo mais restrita apenas a um aparelho televisor. Além do mais, temos a passagem da transmissão de sinal de analógico para o digital.

Avançando um pouco na história das tecnologias, vamos para o século XX, tempo em que é mais perceptível o acúmulo de conhecimentos e a aceleração no processo de surgimento, transformação e uso das tecnologias.

Durante a Segunda Guerra Mundial (1939–1945), a Alemanha tornou-se uma grande potência e a preocupação em ampliar seus poderes políticos e econômicos, provocou avanços científicos como a pesquisa de construção de foguetes (enquanto armamento) e mísseis. Mas o maior impulso que a ciência e a tecnologia tiveram foi durante a Guerra Fria (1947–1991) – conflito político e ideológico entre os Estados Unidos (EUA) e a União Soviética (URSS) –, com a descoberta de muitos equipamentos, serviços e processos. A corrida espacial, resultante do avanço científico proporcionado pela tensão entre EUA e URSS, trouxe inúmeras inovações, como os tênis de corrida, o forno de micro-ondas, o relógio digital, o computador e a internet. Aqui, as tecnologias digitais já eram emergentes, mas não estavam inseridas em todos os setores ou ao alcance de todos.

Após uma sucessão de fatos marcantes que foram modificando a sociedade e as tecnologias ao longo dos anos, nos deparamos com a era digital, que é caracterizada pela ampliação da capacidade de armazenamento e memorização de informações e dados. Estamos falando da integração mundial (de modo físico, social ou informacional) por meio da expansão da informática e da internet.

Essa expansão e desenvolvimento é possível em virtude das **tecnologias digitais**, que se caracterizam como a reunião de várias tecnologias que permite, especialmente, a transformação de qualquer linguagem ou dado (um texto, uma imagem, um som, ou a união de todos) em uma sequência de números, composta por zeros e uns. Essas sequências são lidas por dispositivos variados (computadores, *tablets* e celulares) e apresentados em suas telas na linguagem que conhecemos (imagem fixa ou em movimento, som, texto verbal). A estrutura que oferece suporte a essa linguagem encontra-se no interior dos dispositivos e é resultado de programações não visíveis

(RIBEIRO, s.d).

A seguir, apresento um quadro que traz resumidamente aspectos e elementos que caracterizam cada uma das tecnologias mencionadas nessa seção.

**Quadro 4:** Caracterização das tecnologias, tecnologias da inteligência e tecnologias digitais

|                             | <b>Caracterização</b>                                                                                                                                                |
|-----------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Tecnologias                 | Todas as coisas que o ser humano criou em todas as épocas, suas formas de uso e suas aplicações. Consistem na reunião de técnicas, habilidades, métodos e processos. |
| Tecnologias da inteligência | Envolvem técnicas associadas à memória (e sua extensão) e ao conhecimento como, por exemplo, a oralidade, a escrita e a informática (LÉVY, 2016).                    |
| Tecnologias digitais        | Conjunto de tecnologias que permite, principalmente, a transformação de qualquer linguagem ou dado em uma sequência de números, composta por zeros e uns.            |

Fonte: Elaboração própria.

Kenski (2012) comenta que

Na atualidade, o surgimento de um novo tipo de sociedade tecnológica é determinado principalmente pelos avanços das tecnologias digitais de comunicação e informação e pela microeletrônica. Essas novas tecnologias [...], quando disseminadas socialmente, alteram as qualificações profissionais e a maneira como as pessoas vivem cotidianamente, trabalham, informam-se e se comunicam com outras pessoas e com todo o mundo (KENSKI, 2012, p.22).

Atualmente, as novas tecnologias são mais voltadas aos processos e produtos relacionados aos conhecimentos derivados da eletrônica, da microeletrônica e das telecomunicações. Essas tecnologias caracterizam-se por estar em constante transformação, terem uma base imaterial e a informação como matéria-prima, além de ter o virtual como principal espaço de atuação (KENSKI, 2012).

Segundo Lévy (2017), a virtualização reinventa uma cultura e faz surgir um meio de interação social em que as relações se reconfiguram com um mínimo de resistência à aceleração emergente. Vivemos em uma cibercultura ligada de forma direta e indireta ao virtual (LÉVY, 2018), desse modo, refletindo sobre a relação entre educação e cultura digital, é de extrema importância que as tecnologias digitais estejam mais presentes durante a elaboração e desenvolvimento das aulas, uma vez que possibilitam a criação de cenários investigativos, exploratórios e colaborativos.

Diante de todo esse percurso e visita a alguns momentos e fatos sobre o surgimento e o desenvolvimento das tecnologias e alguns apontamentos filosóficos, este capítulo segue com algumas reflexões sobre a triangulação: atividades de investigação matemática, tecnologias digitais e competências gerais da BNCC.

### 3.2 Atividades investigativas-com-tecnologias digitais e as competências gerais da BNCC

Inovações tecnológicas surgem a todo momento e, de maneira acelerada, vão deixando a sua marca em nossa sociedade. Essas inovações se refletem nas relações e na forma de pensar e agir do ser humano. Esse progresso parte da necessidade e instiga o desejo que a humanidade tem em solucionar problemas relacionados às mais variadas situações. Pensando em Educação Matemática, as tecnologias digitais oferecem um cenário alternativo para a educação. Por isso, parte das pesquisas desenvolvidas nas últimas décadas no Brasil, apresentam, em diferentes contextos, reflexões quanto ao seu uso didático e pedagógico em investigações matemáticas (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018).

Os autores supracitados afirmam que o uso de tecnologias no ensino e na aprendizagem de Matemática no Brasil pode ser compreendido em quatro fases ou momentos marcantes. Para os pesquisadores, cada uma dessas fases surge quando as inovações tecnológicas possibilitam a construção de novos cenários, qualitativamente diferenciados, de investigação matemática e o seu uso pedagógico traz originalmente o pensar-com-tecnologias. Mesmo diante dessas inovações e modificações, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018) ressaltam que o surgimento de cada fase não exclui ou substitui a anterior, mas que, na verdade, essas fases estão interligadas. Para resumir a discussão sobre essas fases, os autores apresentaram aspectos e elementos que caracterizam cada uma delas em um quadro (**Quadro 5**), a seguir.

**Quadro 5:** Aspectos e elementos que caracterizam as fases do desenvolvimento tecnológico em Educação Matemática

|                                            | <b>Tecnologias</b>                                                    | <b>Natureza ou base tecnológicas das atividades</b>                                                                                    | <b>Perspectivas ou noções teóricas</b>                                                                                                                 | <b>Terminologia</b>                                         |
|--------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| <b>Primeira fase (1985)</b>                | Computadores; calculadoras simples e científicas.                     | LOGO<br>Programação.                                                                                                                   | Construcionismo; micromundo.                                                                                                                           | Tecnologias informáticas (TI).                              |
| <b>Segunda fase (início dos anos 1990)</b> | Computadores (popularização); calculadoras gráficas.                  | Geometria dinâmica (Cabri Géomètre; Geometricks); múltiplas representações de funções (Winplot, Fun, Mathematica); CAS (Maple); jogos. | Experimentação, visualização e demonstração; zona de risco; conectividade; ciclo de aprendizagem construcionista; seres-humanos-com-mídias.            | TI; software educacional; tecnologia educativa.             |
| <b>Terceira fase (1999)</b>                | Computadores, laptops e internet.                                     | Teleduc; e-mail; chat; fórum; google.                                                                                                  | Educação a distância online; interação e colaboração online; comunidades de aprendizagem.                                                              | Tecnologias da informação e comunicação (TIC).              |
| <b>Quarta fase (2004)</b>                  | Computadores; laptops; tablets; telefones celulares; internet rápida. | GeoGebra; objetos virtuais de aprendizagem; Applets; vídeos; YouTube; WolframAlpha; Wikipédia; Facebook; ICZ; Second Life; Moodle.     | Multimodalidade; telepresença; interatividade; internet em sala de aula; produção e compartilhamento online de vídeos; performance matemática digital. | Tecnologias digitais (TD); tecnologias móveis ou portáteis. |

Fonte: Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018, p. 43).

É importante destacar que os autores, ao elaborarem o quadro, pontuaram que “[...] toda a tabela ao resumir também pode descaracterizar. Assim, dependendo do autor algum termo pode estar em diferentes elementos dessa matriz” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018, p.42).

Nos últimos 35 anos, como apresentado no quadro acima, diferentes tecnologias perpassaram e ainda perpassam a sala de aula. Podemos dizer que a Educação e a

tecnologia são indissociáveis (KENSKI, 2012). Assim, a tecnologia pode ser vista como uma marca no tempo, que constrói e é construída pelo ser humano (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018).

É engraçado pensar que, quando assimilamos a informação sobre a inovação, nem a consideramos mais como tecnologia (KENSKI, 2012). Trago como justificativa para essa fala um exemplo exposto por Borba, Scucuglia e Gadaniadis (2018), em que mencionam a discussão de que a lousa tradicional não é natural à sala de aula. Os autores relembram que ela também foi uma tecnologia inserida no cotidiano escolar e atuou como copartícipe do processo educacional e da produção de conhecimento por coletivos de seres-humanos-com-mídias. A noção de seres-humanos-com-mídias, para os autores, é vista “como uma forma de enfatizar que as possibilidades do conhecimento, feito socialmente por coletivos, se alteram com diferentes humanos e diferentes tecnologias” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018, p.137). Essas diferentes tecnologias têm, ao longo da história, auxiliado na produção de diferentes tipos de conhecimentos.

Os seres humanos, ao interagirem com as mídias, (re)organizam o pensamento segundo as várias possibilidades e restrições que elas oferecem. Desse modo, há uma troca mútua entre os atores humanos e não humanos, onde as mídias permeiam o humano da mesma forma que as tecnologias são compreendidas como sendo impregnadas por humanidade. A presença ou ausência dessas mídias influencia o tipo de conhecimento produzido, e o surgimento ou uso de uma mídia não invalida a outra (SOUTO; BORBA, 2016).

Souto e Borba (2016), ao discorrem sobre o construto seres-humanos-com-mídias, esclarecem que

Essas ideias são baseadas nos estudos de Tikhomirov (1981) e de Lévy (1993). Em particular, Tikhomirov toma da teoria da atividade a ideia de mediação, que está implícita no conceito de reorganização, presente nos processos de interação do ser humano com o ambiente, e propõe a constituição de um sistema formado por ser-humano-computador. Lévy por sua vez, ao contemplar as dimensões técnicas e coletivas da cognição, conceitua a expressão ecologia cognitiva, e vivenciando as novas possibilidades da informática, sugere um sistema para além da proposta de Tikhomirov, que componha um coletivo pensante de homem-coisas. O trânsito desses conceitos para o âmbito da Educação Matemática, aliado a ideias originais, é feito por Borba (1999) com a proposta do construto seres-humanos-com-mídias (SOUTO; BORBA, 2016, p.222).

A noção de moldagem recíproca proposta por Borba (1999) é um conceito central nesse construto. Nela, os *feedbacks* dados pela mídia influenciam no raciocínio de quem interage com ela. Desse modo, a mídia molda o ser humano e o ser humano molda a mídia

conforme a utiliza (SOUTO; BORBA, 2016).

Mesmo diante de toda desigualdade social e econômica do Brasil, quando conseguimos desenvolver o processo de ensino e aprendizagem apoiado em tecnologias digitais, um leque de possibilidades de investigação, exploração e conjecturas se abre. Essa forma de desenvolver a Educação Matemática permite aos estudantes o desenvolvimento e aplicação da Matemática de forma imediata e dinâmica. Entretanto, esse cenário só é possível quando bem construído e pensado pelo professor. Isso porque é preciso compreender e respeitar as especificidades da tecnologia digital que será incorporada, bem como as do próprio ensino (KENSKI, 2012).

A BNCC da Educação Básica do Brasil apresenta dez competências gerais, das quais destaco três para este momento:

2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2017, p.9).

Essas competências tratam do pensamento científico, crítico e criativo; da comunicação; e da tecnologia, respectivamente.

Uma das possibilidades de trabalhar as competências gerais citadas acima é por meio do desenvolvimento de atividades investigativas em que as tecnologias digitais podem se fazer presente. Nesse processo, elas emergem naturalmente.

Concordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) quando afirmam que todos os estudantes devem experimentar atividades do tipo investigação matemática. A investigação matemática trabalha com questões desafiadoras e que, no começo, se apresentam de modo confuso (uma vez que os estudantes estão acostumados a terem enunciados e respostas mais imediatas), não necessariamente sendo de nível difícil, mas em que as pessoas envolvidas procuram compreendê-las e estudá-las mediante de conjecturas, testes e demonstrações (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2016). Ponte, Brocardo e Oliveira (2016) sugerem que uma atividade de investigação aconteça em três

fases:

[...] (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2016, p.25).

Os autores ainda comentam que:

Pode sempre programar-se o modo de começar uma investigação, mas nunca se sabe como ela irá acabar. A variedade de percursos que os alunos seguem, os seus avanços e recuos, as divergências que surgem entre eles, o modo como a turma reage às intervenções do professor são elementos largamente imprevisíveis numa aula de investigação (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2016, p.25).

É possível elaborar uma relação entre atividade de investigação matemática, tecnologias digitais e algumas competências gerais da BNCC. A cada etapa da investigação, que podem mesclar entre si (introdução da tarefa; realização da investigação; e discussão dos resultados), o estudante está imerso em um ambiente propício à manifestação do pensamento científico, crítico e criativo (2) e da comunicação (4), podendo ser envolto pelo uso da tecnologia (5) durante todo o processo. A seguir, apresento um diagrama que ajuda a representar esse pensamento e como concebo o entrelaçamento citado (**Figura 9**).

**Figura 9:** Relação entre as fases de uma atividade de investigação matemática e algumas competências gerais da BNCC



Fonte: Elaboração própria.

Essa convergência apresentada pela BNCC entre educação e tecnologia digital é algo que já vem sendo proposto há algum tempo às escolas e, quando possível, trabalhado das mais diversificadas formas pelos professores e estudantes.

Pensando nas potencialidades que as tecnologias digitais trazem para a Educação, especialmente para o desenvolvimento de atividades investigativas, na seção **3.3** discorro sobre o processo de pensar-com-GeoGebra emergente no estudo e desenvolvimento de atividades investigativas com o GeoGebra.

### **3.3 Pensando-com-GeoGebra**

Nesta seção argumento sobre a importância da investigação matemática aliada a tecnologias digitais nas aulas, mais especificamente o *software* GeoGebra. Isso porque, ao realizarmos uma investigação temos como foco a busca pelo que até então é desconhecido e, para trilhar esse percurso, é necessário passar por algumas etapas como, o reconhecimento da situação, a formulação de conjecturas, a exploração dos pensamentos e ideias como teste das conjecturas levantadas e a discussão sobre o proposto e o desenvolvido (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2016). Nesse percurso descrito, o auxílio visual é um excelente facilitador em todas as etapas. Desse modo, o GeoGebra permite que a atividade de caráter investigativo seja abordada de forma experimental e visual, abrindo espaço para a sua exploração algébrica e gráfica.

Atividades pensadas e elaboradas seguindo essa proposta, que integra aprendizagem matemática, investigação matemática, e experimentação com tecnologias, contemplam o processo denominado por Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018) como pensar-com-tecnologias, que pode ser adaptado para pensar-com-GeoGebra, segundo os autores. Nesse processo, a tecnologia digital escolhida e empregada tem um propósito além do uso comum como ferramenta, mas é inserida como base da investigação e manifestação, exposição, aprofundamento e (re)estruturação dos pensamentos de quem explora a atividade. Os autores destacam alguns elementos principais para esse processo, que são apresentados na **Figura 10**, a seguir.



Figura 10: Pensar-com-tecnologias

| <b>Aprendizagem matemática</b>                                                                                 | <b>Investigação matemática</b>                                                                                                                                                              | <b>Experimentação com tecnologias</b>                                                                                                                                                         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Produção de conhecimentos matemáticos<br><br>Pensamento matemático<br><br>Produção de significados matemáticos | Exploração matemática<br><br>Elaboração de conjecturas<br><br>Testes e refinamentos de conjecturas<br><br>Demonstração e Avaliação<br><br>Caráter investigativo<br><br>Design investigativo | Uso investigativo de tecnologias<br><br>Complexidade do pensamento matemático<br><br>Conexões entre representações<br><br>Visualização<br><br>Caráter experimental<br><br>Design experimental |

Fonte: Adaptado de Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018, p. 60).

Quando propomos a elaboração de uma atividade voltada para a aprendizagem, não só matemática, um leque de tipos de *design* se abre. Essas opções, ligadas ao que é denominado tendências em Educação Matemática, podem ser trabalhadas de maneira exclusiva ou a partir de relações de aproximação entre duas ou mais. Os processos de aprendizagem não são limitados a categorias estáticas, mas devem permitir que a aprendizagem se desenvolva, de preferência, de modo natural, permitindo que as pessoas envolvidas possam expressar os conhecimentos que já têm. O processo de pensar-com-GeoGebra estabelece uma aproximação entre investigação matemática e experimentação com tecnologias. Ele é interessante por permitir um tipo diferente de investigação e a emergência de instâncias heurísticas a partir da exploração e visualização.

Para exemplificar essa relação entre pensamento matemático e uso de tecnologia, bem como a aproximação entre experimentação com tecnologias e investigação matemática, trago o *estudo da noção de derivada*, proposto por Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018). No primeiro capítulo do livro, os autores apresentam a primeira versão da atividade fundamentada no uso de calculadoras gráficas ou *software*, desenvolvida em turmas de graduação de Biologia, que consiste em traçar a parábola  $y = x^2$  a partir de retas. Nessa versão, “a busca por otimizar uma possível solução a esse problema está relacionada ao ‘movimento’ de uma reta secante à parábola – em  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$ , por exemplo – tender a tornar-se tangente no ponto  $(x_0, y_0)$ ” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, p.31-2). Após a exploração e socialização das soluções dos estudantes, os

autores questionavam se seria possível determinar uma solução mais próxima ao que estava proposto na atividade, de modo que evitasse e/ou reduzisse as grandes discrepâncias entre as retas e as parábolas. A resposta dos estudantes sempre era positiva e quase sempre a proposta de diminuir o intervalo era emergente. Assim, os autores seguiam a condução da atividade introduzindo notações e enfatizando a importância de os estudantes apresentarem familiaridade a elas em suas escritas e falas. Diante do exposto e de maneira coletiva, os estudantes geravam soluções fazendo uso de calculadoras gráficas, e essas respostas eram anotadas na lousa. Assim, os autores concluem que tinham, em uma mesma aula, a integração entre seres humanos, calculadora, caneta, lousa, um *software* etc., e pontuam que depois de percorrer o caminho acima descrito, em que o uso da lousa tornou-se mais frequente, caminhos para uma formalização eram tomados (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018).

O estudo da noção de derivada é revisitado no Capítulo 2 do livro de Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018), mas os autores apresentam uma adaptação voltada a evidenciar as potencialidades do *software* GeoGebra, trabalhando a atividade de forma ainda mais dinâmica, visual e experimental (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018). A atividade, em seu primeiro momento, apresenta uma sequência de passos que orientam a construção do objeto de investigação usando o *software* mencionado, bem como a de um controle deslizante, agregando dinamismo à experimentação e estabelecendo uma relação de dependência entre os elementos presentes no cenário de investigação. No segundo momento, algumas perguntas sobre o objeto e o cenário construído são lançadas. Essas perguntas fomentam o pensar-com-GeoGebra de modo que as pessoas envolvidas reconhecem similaridades, ou padrões, e produzem sentidos sobre relações que envolvem *elementos de diferentes representações de um mesmo componente; elementos em um mesmo tipo de representação de componentes diferentes; e elementos de diferentes tipos de representações de componentes diferentes* (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018). Com essas perguntas, os autores tiveram a intenção de compreender o máximo possível do que estava acontecendo no processo de ensino e aprendizagem dos estudantes envolvidos e de fazer que os estudantes também compreendessem o seu processo de aprendizagem. Essa percepção com relação ao uso de perguntas durante o desenvolvimento de atividades investigativas foi incorporada na proposta de elaboração e desenvolvimento dessa pesquisa.

Essa adaptação do estudo da noção de derivada, com base no uso do GeoGebra, apresenta uma complexidade construtiva mais intensa; possibilita, durante o processo de

experimentação, a alteração, variação, manipulação e movimentação dos objetos construídos; permite a criação e manipulação do controle deslizante, trazendo uma intensidade dinâmica à construção e ao *design*; além de permitir a construção de vários tipos de representações de objetos que possibilitam a visualização do movimento de inclinação da reta (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018).

O trio dinamização, visualização e experimentação, apresentado na adaptação do *estudo da noção de derivada* por Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018), contribui com o desenvolvimento de atividades matemáticas, bem como no potencial do *software* GeoGebra. Desse modo, essa pesquisa apresenta cinco atividades investigativas com o GeoGebra elaboradas e pensadas para serem desenvolvidas em uma adaptação às sessões de ensino propostas por Steffe e Thompson (2000), e com seis duplas de estudantes do Ensino Médio. A intenção desse trabalho é investigar aspectos do PD emergentes em estudantes do Ensino Médio ao pensar-com-GeoGebra atividades que envolvem a investigação da área de regiões limitadas por eixos e curvas e o cálculo do volume de regiões limitadas por superfícies planas e curvas.

O coletivo envolvendo atores humanos e não-humanos na produção de conhecimentos (matemáticos) é o construto teórico seres-humanos-com-mídias (BORBA, 1999; BORBA; VILLARREAL, 2005). Ou seja, o conhecimento é construído por seres humanos e por mídia, e essa dissertação busca evidenciar isso nos **Capítulos 4 e 5**, a seguir.

## 4. METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste capítulo, inicialmente, apresento a justificativa pela escolha da abordagem metodológica da pesquisa qualitativa. Em seguida, faço uma explanação sobre experimento de ensino e investigação matemática (que nesta pesquisa assume tanto um papel de metodologia de ensino como de instrumento de produção de dados).

O cenário em que a pesquisa ocorreu e os procedimentos de produção de dados também são descritos. Nesse cenário trata-se da escola, dos instrumentos usados para produção de dados, dos participantes, do desenvolvimento das sessões de ensino e dos registros.

Também apresento neste capítulo as atividades propostas e desenvolvidas pelos participantes, bem como o método aplicado para análise e descrição dos dados.

### 4.1 Abordagem metodológica

Com o objetivo de investigar aspectos do Pensamento Diferencial (PD) emergentes em um grupo de estudantes do Ensino Médio ao pensar-com-GeoGebra atividades que envolvem a investigação de área de regiões limitadas por eixos e curvas e o cálculo do volume de regiões limitadas por superfícies planas e curvas, em busca de respostas para a pergunta norteadora dessa pesquisa: *Quais aspectos do PD e do pensar-com-GeoGebra emergem quando estudantes do Ensino Médio investigam atividades sobre o cálculo de áreas e volumes?* Para isso, recorri a bibliografia para ter uma melhor compreensão sobre o que é pesquisar e também identificar qual abordagem metodológica de pesquisa seria mais adequada ao problema proposto.

Para Bicudo (2005), pesquisar significa:

[...] ter uma interrogação e andar em torno dela, em todos os sentidos, sempre buscando suas múltiplas dimensões e andar outra vez e outra ainda, buscando mais sentido, mais dimensões, e outra vez mais ... A interrogação mantém-se viva, pois a compreensão do que se interroga nunca se esgota (BICUDO, 2005, p.8).

Para D'Ambrósio (2019), há duas justificativas para se fazer pesquisa: a primeira é a satisfação da curiosidade do pesquisador; a segunda é ter um guia para as próximas ações (auxiliado pela primeira). Assim, desenvolver uma pesquisa pode ser entendido como a identificação de fenômenos, sua observação, análise, interpretação e (re)formulação das interrogações.

Existem várias metodologias de pesquisa. Dentre elas, ao pensar no qualitativo e

nos mais variados sentidos atribuídos a essa modalidade de pesquisa, destaco o apresentado por Bicudo (2019):

O qualitativo engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências [...] (BICUDO, 2019, p.111).

Assim, pesquisar de modo qualitativo é evidenciar o significado em relação às ações. Esse exercício de produção de dados é argumentado por Bogdan e Biklen (1994) como uma forma crítica de desenvolvimento e, conforme o entendimento dos autores, é nesse ponto que se diferencia a pesquisa qualitativa da pesquisa quantitativa, pois “[...] o investigador qualitativo tende a virar o processo de compilação na sua cabeça perguntando-se o que os números dizem acerca das suposições das pessoas que os usam e os copilam” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.195 apud BORBA, 2004, p.2). Em outras palavras, a pesquisa segundo uma abordagem qualitativa tem como foco o indivíduo e o seu modo de pensar e agir; fornece informações mais descritivas, cuja análise dos dados possibilita a instigação e a emergência de outros caminhos, questionamentos e ações a trilhar; e os resultados não devem ser associados a uma verdade rígida e definitiva, pois o “considerado ‘verdadeiro’[...] é sempre dinâmico e passível a ser mudado” (BORBA, 2004, p.2).

Bicudo (1993) afirma que pesquisar em Educação Matemática não é pesquisar em Matemática, nem em Educação. Mesmo que aborde algo pertinente a ambas, é expressar a preocupação “com o compreender a Matemática, com o fazer Matemática, com as interpretações elaboradas sobre os significados sociais, culturais e históricos da Matemática” (BICUDO, 1993, p.19-20).

Assim, entendo que desenvolver a pesquisa qualitativa em Educação Matemática é trabalhar a interatividade entre teoria e prática, de modo a valorizar e incentivar que os participantes exponham suas opiniões, tendo como foco o percurso percorrido, não apenas o final. É a procura por algo que ainda não se tem compreensão e/ou conhecimento e, a todo momento, você fica se perguntando sobre esse desconhecido. A curiosidade é tamanha que acaba despertando e colaborando para a criação de um cenário de investigação no qual o pesquisador pode ter envolvimento e que, quando associado à prática, pode ser satisfatório ou gerador de novos questionamentos.

Voltando a atenção ao objetivo e pergunta norteadora deste trabalho, é possível perceber que, de fato, toda a pesquisa está relacionada ao estudo epistemológico de um fenômeno, não a quantidade de vezes que ele se apresenta. Desse modo, a metodologia

de pesquisa que corresponde à proposta apresentada é a de pesquisa qualitativa.

#### 4.1.1 Experimento de ensino como metodologia de pesquisa

Como mencionado anteriormente, esta pesquisa tem interesse em investigar aspectos do PD emergentes em estudantes do Ensino Médio ao pensar-com-GeoGebra atividades que envolvem a investigação da área de regiões limitadas por eixos e curvas e o cálculo do volume de regiões limitadas por superfícies planas e curvas.

Para alcançar tal objetivo, foi percorrido um caminho que explora as atividades propostas para além de uma resolução, mas sim com foco em proporcionar momentos de descobertas e revelações previstas ou não, e que valorizam a compreensão que os participantes têm sobre a Matemática. Esse percurso apresenta indícios da metodologia de pesquisa proposta por Steffe e Thompson (2000) e que é denominada como experimento de ensino. Essa metodologia é direcionada à exploração e explicação da atividade segundo a matemática dos estudantes que, estando imersos em um cenário colaborativo, têm a liberdade de compartilhar e explorar conjecturas, e negociar metas e objetivos comuns.

#### 4.1.2 Investigação matemática como metodologia de ensino

Investigar consiste na busca por conhecer o que não se sabe, utilizando uma ou mais estratégias de abordagem. A investigação matemática procura identificar objetos matemáticos segundo suas propriedades e possíveis relações. Geralmente, o seu desenvolvimento acontece em torno de uma ou mais atividades e, para Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), a identificação clara da atividade a resolver é o primeiro grande passo de qualquer investigação.

Ao ser trabalhada uma atividade, naturalmente o objetivo que se tem em mente é a busca por sua resolução. Entretanto, para além de resolver a atividade proposta,

[...] podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original. Outras vezes, não se conseguindo resolver o problema, o trabalho não deixa de valer a pena pelas descobertas imprevistas que proporciona (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p.17).

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2016), realizar uma investigação matemática envolve quatro momentos principais. Esses momentos, muitas vezes, podem acontecer de modo simultâneo e incluir diversas atividades como se indica no **Quadro 6**, a seguir.

**Quadro 6:** Momentos na realização de uma investigação

| <b>Momentos</b>                     | <b>Exemplos de atividades</b>                                                                                                                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Exploração e formulação de questões | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconhecer uma situação problemática</li> <li>• Explorar a situação problemática</li> <li>• Formular questões</li> </ul> |
| Conjecturas                         | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Organizar dados</li> <li>• Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)</li> </ul>                     |
| Testes e reformulação               | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Realizar testes</li> <li>• Refinar uma conjectura</li> </ul>                                                             |
| Justificação e avaliação            | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Justificar uma conjectura</li> <li>• Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio</li> </ul>                        |

Fonte: Ponte, Brocardo e Oliveira (2016).

A proposta de investigação matemática apresentada nas atividades desta pesquisa partem de um mesmo ponto de partida, pois os enunciados indicam claramente o que é dado e o que é pedido, mas o caminho a ser seguido permite variações uma vez que, mesmo estando de posse da atividade impressa onde encontra-se o enunciado e uma sugestão de abordagem, os participantes são convidados a explorá-la sem a consulta integral do material, levando-os a mobilizar os seus recursos cognitivos e afetivos e a manifestar a criatividade inconsciente ao trilhar os próprios caminhos.

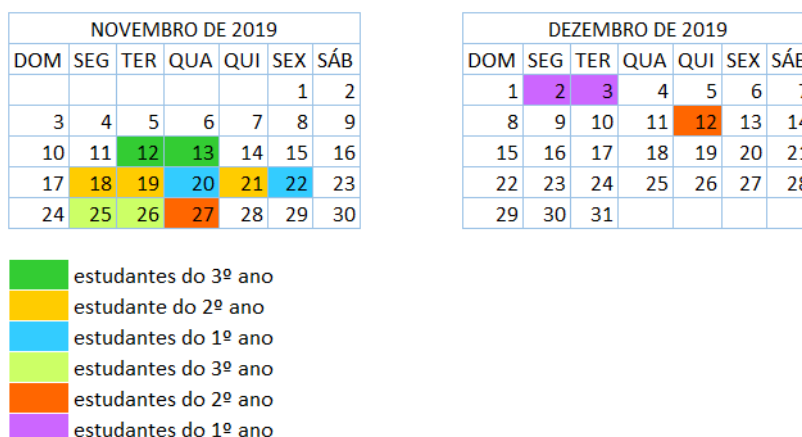
Poincaré (1996), ao questionar-se sobre a criatividade inconsciente dos matemáticos, conclui que tem de ser um sentimento de apreciação estética da beleza das relações matemáticas. A visualização no estudo da Matemática traz consigo o sentimento de beleza, harmonia e elegância. Os elementos matemáticos, quando dispostos harmoniosamente, tornam-se, simultaneamente, uma satisfação para as necessidades estéticas do ser humano e um auxílio para a mente que a sustenta e guia, levando o indivíduo à formulação de conjecturas e a sua verificação (POINCARÉ, 1996).

## 4.2 Produção de dados

A produção de dados foi dividida em duas sessões de ensino com cada uma das seis duplas participantes. Cada sessão de ensino contemplou uma dupla por vez e aconteceu em diferentes dias da semana, segundo disponibilidade dos estudantes, da pesquisadora e de agendamentos prévios. É possível observar na **Figura 11** a contagem de 13 dias de sessão de ensino, conflitando com as informações anteriores. A justificativa para o fenômeno é que um dos estudantes de uma dupla teve um imprevisto no dia da primeira sessão que participaria e sua dupla se dispôs a seguir sozinho. Assim, nesse caso

específico, as atividades que estavam programadas para serem realizadas em dupla e com duração de duas sessões de ensino, foram desenvolvidas individualmente e com duração de três sessões de ensino.

**Figura 11:** Dias de realização das sessões de ensino



Fonte: Dados da Pesquisa.

As observações de todas as sessões de ensino foram registradas por meio de filmagens do ambiente e do *software* OBS Studio<sup>11</sup>. Além disso, todas as construções feitas no *software* GeoGebra pelos estudantes foram salvas separadamente, as quais serviram como registro da produção de dados.

#### 4.2.1 Instrumentos de produção de dados

Corroborando a ideia de que “somente na prática são notados e colocados em evidência certos pressupostos que não podem ser identificados apenas teoricamente” (D’AMBRÓSIO, 2012, p.73), torna-se pertinente o registro dos dados da pesquisa por meio de gravações audiovisuais, visto que esse tipo de arquivo de dados permite um resgate momento a momento de todos os acontecimentos (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004). Desse modo, algumas manifestações verbais e não verbais expressas pelos participantes e talvez não percebida durante a realização da investigação pelo pesquisador, mesmo que esse tenha se proposto a ficar o mais atento possível a todos os acontecimentos, são passíveis a resgate e identificação.

Seguindo esse pensamento, esta pesquisa apresenta o registro dos procedimentos metodológicos, questionamentos, diálogos e engajamento dos estudantes em filmagens

<sup>11</sup> *Software* gratuito que fornece captura de fonte e dispositivo em tempo real, composição de cena, codificação, gravação e transmissão ao vivo. Disponível em: <<https://obsproject.com/pt-br/download>>. Último acesso em: 28 abr. 2021.



de todas as sessões de ensino, captação da tela do computador e *webcam* e criação de arquivos individuais de cada exploração e investigação feita pelos estudantes no GeoGebra. A ideia de gerar todos esses registros segue Goldenberg (2004) que propõe, para abranger a máxima amplitude na descrição, explicação e compreensão do objeto de estudo, o desenvolvimento da *Triangulação* de métodos de produção de dados, em que, além das observações, podemos fazer uso, por exemplo, da gravação de tela e de entrevistas.

O **Quadro 7** a seguir apresenta os instrumentos usados para a produção de dados desta pesquisa, seguidos da justificativa.

**Quadro 7:** Instrumentos de produção de dados

| <b>Instrumentos</b>        | <b>Justificativa</b>                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|----------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Filmagem                   | A escolha de registrar os dados através da filmagem, ciente de que esse instrumento não é imune a problemas, compactua com a ideia de que o vídeo pode capturar comportamentos valiosos dos participantes, manifestos verbais e não verbais e permite a revisitação contínua do pesquisador. |
| Arquivo gerado no GeoGebra | Apresenta toda a construção, organização e avanço de pensamento dos estudantes. Pode ser revisitado de modo cruzado com os arquivos audiovisuais e/ou anotações em papel.                                                                                                                    |
| Anotação em papel          | Mesmo não sendo recorrente em todas as sessões de ensino e/ou duplas, esse instrumento complementa o processo de revisitação e esclarecimento de possíveis pensamentos e estratégias abordadas pelos participantes.                                                                          |
| Investigação Matemática    | O raciocínio dos estudantes é desenvolvido de modo mais amplo, buscando por descobertas e não uma solução. Esse caminho possibilita a manifestação verbal e não verbal de vários aspectos do pensamento dos participantes, em particular, aspectos do PD.                                    |

Fonte: Elaboração própria.

As gravações do ambiente e da tela do computador produziram para esta pesquisa mais de 62 horas de dados salvos em arquivos audiovisuais.

#### 4.2.2 Cenário

As sessões de ensino foram realizadas nos meses de novembro e dezembro de 2019, na Escola Estadual Padre Cesare Toppino, na cidade de Lavínia-SP, onde atuo como professora. No respectivo ano, ministrava aulas de Matemática para as três turmas de 3º ano que havia na escola e uma turma de 2º ano. O contato que tinha com os estudantes das demais turmas (outra de 2º e duas de 1º ano) era por meio de uma conversa ou outra

em momentos e dias esporádicos. Mesmo diante do mencionado, o convite para participar da produção de dados desta pesquisa foi estendido a todos os estudantes da escola. Dentre os que manifestaram interesse no prazo estipulado, 12 foram selecionados por meio de um sorteio, sendo 4 de cada ano/série. Durante o desenvolvimento e fechamento deste estudo, participaram da produção de dados efetivamente 11 estudantes, que se dividiram em 5 duplas e 1 individual (justificativa apresentada anteriormente nesta seção), segundo o agrupamento: 2 duplas com estudantes de 1º ano; 1 dupla e 1 individual com estudantes do 2º ano; duas duplas com estudantes do 3º ano. Optei por esse tipo de agrupamento e em desenvolver duas sessões de ensino com cada dupla no período da tarde, em dias diferentes e isoladamente, para que os dados produzidos pudessem ser os mais detalhados possíveis, visto que existia uma quantidade limitada de equipamentos eletrônicos e as aulas na escola só aconteciam no período matutino. Além do que, por colocar os participantes em um cenário ao qual não estavam habituados, imaginei que esse modelo traria um maior conforto e diálogo entre os envolvidos.

A *sessão 1* de cada dupla tinha como objetivo investigar aproximações para o cálculo da área de regiões, conforme a elaboração: região limitada pela circunferência  $x^2 + y^2 = 1$  (participantes do 1º ano do Ensino Médio); e região sob a parábola  $y = x^2$ , com  $0 \leq x \leq 1$  (participantes do 2º e 3º ano do Ensino Médio); observando o engajamento dos estudantes na investigação matemática e usando o *software* GeoGebra como ambiente de construção, dinamização, visualização, discussão e exploração.

Já a *sessão 2* cada dupla dava sequência na investigação anterior, mas fazendo uso do ambiente 3D, e objetivava investigar aproximações para o cálculo do volume de sólidos de revolução, seguindo a proposta: determinação do volume da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  (participantes do 1º ano do Ensino Médio); e do parabolóide obtido pela revolução em torno do eixo  $y$  da curva  $y = x^2$ , com  $-1 \leq x \leq 1$ , além da investigação das relações entre os volumes de um cilindro, um parabolóide e um cone de mesma base e altura (participantes do 2º e 3º ano do Ensino Médio); também trazendo o GeoGebra como ambiente de investigação e experimentação.

Em cada uma dessas sessões os estudantes eram desafiados a pensar-com-GeoGebra (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018), ou seja, eram desafiados a usar o GeoGebra para produzir conhecimentos e significados matemáticos por meio da exploração e investigação matemática, e elaboração e testes de conjecturas, alcançando ou não uma generalização de relação entre os elementos construídos ao longo da investigação. Outra estratégia adotada nesta pesquisa é a dos questionamentos, uma vez

que durante o desenvolvimento da investigação, quando são lançadas perguntas que podem ter sido pensadas previamente ou não, mas que estejam relacionadas ao raciocínio externado oralmente ou visualmente pelos estudantes, contribui para elevar as explorações em andamento e promove nos participantes o sentimento de que ainda existem caminhos a serem pensados e testados, fomentando o engajamento deles. Destaco aqui alguns dos questionamentos que foram usados ao longo de cada sessão: Por que vocês fizeram isso? Será que existe uma melhor aproximação? É possível fazer essa nova abordagem de construção/exploração?

Ao final de cada sessão, fiz algumas perguntas mais amplas e gerais aos estudantes. O meu objetivo com questionamentos do tipo: O que vocês acharam da proposta da atividade? Visando um melhor entendimento da atividade, vocês têm alguma sugestão de mudança/melhoria? Vocês acham que é possível levar essa atividade para a sala de aula? Feitos de maneira não regular com as duplas, era de, partindo da visão de quem é protagonista no desenvolvimento da investigação proposta, ter uma opinião sobre a possível e futura expansão da teoria e prática das atividades apresentadas neste trabalho.

#### 4.2.3 Sessões de ensino

Sessões de ensino é a denominação atribuída por Steffe e Thompson (2000) a uma sequência de encontros que seguem alguns critérios específicos: em cada encontro, além da presença do agente de ensino (pesquisador) e de um ou mais estudantes, inclui uma testemunha, um método de gravação do ambiente e das atividades desenvolvidas, além de ser sugerida pelos autores a duração de um semestre ou ano. Essas sessões de ensino compõem a metodologia de pesquisa denominada Experimento de Ensino (STEFFE; THOMPSON, 2000). Essa metodologia é direcionada à exploração e explicação da atividade segundo a Matemática dos estudantes que, imersos em um cenário colaborativo, têm a liberdade para compartilhar e explorar conjecturas, e negociar metas e objetivos comuns.

Para esta pesquisa, foi adotado o termo *sessões de ensino* por tratar-se de uma adaptação da proposta de Steffe e Thompson (2000) quanto a forma de realização dos encontros. Neste estudo, foi mantido o critério de contar com a presença do agente de ensino (pesquisador) e de um ou mais estudantes, além de contemplar o critério de gravação do ambiente e das atividades desenvolvidas. Entretanto, foram realizadas apenas duas sessões de ensino com duração média de 2 horas e meia para cada dupla participante

da produção de dados, bem como não contou com a presença de uma testemunha durante o desenvolvimento das atividades com os estudantes.

#### 4.2.3.1 Participantes

A proposta para a prática desta pesquisa sempre esteve centrada na produção de dados alicerçada no desenvolvimento de uma investigação com seis duplas e visando envolver estudantes de todos os anos do Ensino Médio (1º, 2º e 3º), ou seja, duas duplas para cada ano. Para tanto, com a autorização da direção e de alguns professores da Escola Estadual Padre Cesare Toppino, Lavínia (SP), no horário de aula das turmas, entrei nas salas para fazer um convite aberto aos estudantes. Como sou professora dessa unidade escolar, considereei que se direcionasse o convite a um grupo específico interferiria nos dados da pesquisa.

Na época do convite eu não lecionava para todas as turmas, então comecei a minha fala com uma apresentação pessoal, seguida de uma acadêmica; apresentei o objetivo da pesquisa; comuniquei que não havia pré-requisito para participarem da produção de dados da pesquisa e que estava conversando com todos os estudantes da escola, mas que se tivesse mais candidatos do que vagas, buscaria uma forma, sem influência pessoal, para selecionar os participantes; mencionei que seriam formadas duas duplas para cada ano/série e que cada uma deveria participar de duas sessões de ensino, que seriam realizadas no período da tarde na própria escola.

Durante essa apresentação, alguns estudantes mencionaram que nunca tinham visto e/ou usado o GeoGebra, então esclareci que isso não interferiria na participação deles na produção de dados da pesquisa porque já tinha programado-me para, no começo de cada sessão, apresentar o *software* e possibilitar que os estudantes fizessem algumas experimentações antes de iniciar as atividades. Outros fizeram questionamentos com relação ao conteúdo das atividades, então pontuei que a proposta era desenvolver todas de maneira intuitiva, conforme as ideias fossem surgindo pelas duplas, e que o critério de certo e errado não se configurava nessas atividades. Algumas outras dúvidas também surgiram e eu segui esclarecendo. Ao final desse diálogo e antes mesmo de eu sair das salas, alguns estudantes já foram manifestando o interesse em participar. Para finalizar o convite, combinei com as turmas que se mais alguém tivesse interesse, poderia conversar comigo até a penúltima aula do dia.

Desde o convite até a finalização do prazo acordado com os estudantes, o número

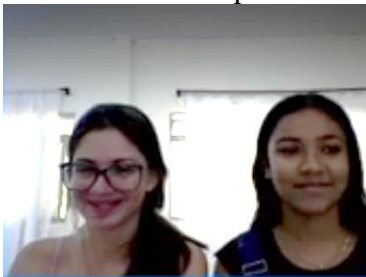
de interessados (20 estudantes) excedeu o de vagas (4 por ano/série). Para uma seleção sem influência da pesquisadora, um sorteio foi realizado a fim de definir aleatoriamente os estudantes que protagonizariam a produção de dados deste estudo. Para o sorteio, que aconteceu no horário da última aula do dia em questão, o nome de todos os interessados foi anotado em pedaços de papel, que foram dobrados e agrupados levando em consideração a condição: 1º, 2º e 3º ano. Chamei alguns estudantes da escola que estavam no pátio como testemunhas. Uma das professoras coordenadoras foi convidada a fazer a retirada dos nomes. Após o resultado, os estudantes que manifestaram interesse foram comunicados sobre (tanto quem foi sorteado, como quem não foi).

Iniciei uma nova conversa com os estudantes, agora direcionada aos 12 (doze) sorteados. Evidenciei a importância que eles tinham na produção de dados da pesquisa; esclareci que como o estudo envolvia seres humanos, seria necessário que eles e seus responsáveis assinassem um termo de consentimento; mencionei que toda a programação do estudo estava ligada a participação deles e que se, em algum momento, não quisessem mais fazer parte ou se tivessem alguma situação que impedisse a sua participação, avisassem o mais breve possível, pois estava seguindo o calendário escolar elaborado para o ano de 2019 e o prazo que tinha para a produção de dados não era muito flexível, uma vez que o segundo semestre já estava em andamento; reforcei que a desistência era um direito deles e que isso não causaria qualquer tipo de advertência, punição ou afetaria a nossa relação de aluno-professor.

É importante lembrar que durante o cumprimento do cronograma, um dos participantes de uma das duplas do 2º ano teve um imprevisto no dia da primeira sessão de ensino, mas o outro integrante se propôs a desenvolver as atividades individualmente. Com isso, o que estava previsto para ser abordado em duas sessões de ensino foi estendido para três.

O **Quadro 8** apresenta as duplas envolvidas na produção de dados da pesquisa, o ano/série correspondente, bem como as sessões de ensino que cada uma participou. Esse agrupamento foi estabelecido pelos próprios estudantes. Em média, cada uma das sessões de ensino teve duração de 2 horas e meia.

**Quadro 8:** Participantes da produção de dados da pesquisa

| Ano/Série | Participantes                                                                                          | Sessões de ensino e Atividades |                                                     |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------------------------|
| 1º        | Jorge e Welington<br> | 1                              | Quadratura do círculo                               |
|           |                                                                                                        | 2                              | Cubatura da esfera                                  |
| 1º        | Bianca e Lívia<br>    | 1                              | Quadratura do círculo                               |
|           |                                                                                                        | 2                              | Cubatura da esfera                                  |
| 2º        | Lívia e Raquel<br>  | 1                              | O problema da área                                  |
|           |                                                                                                        | 2                              | O problema do volume;<br>A relação entre os volumes |
| 2º        | Matheus<br>         | 1                              | O problema da área                                  |
|           |                                                                                                        | 2                              | O problema do volume                                |
|           |                                                                                                        | 3                              | A relação entre os volumes                          |

|    |                                                                                                          |   |                                                     |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|-----------------------------------------------------|
| 3º | Matheus e Janaina<br>   | 1 | O problema da área                                  |
|    |                                                                                                          | 2 | O problema do volume;<br>A relação entre os volumes |
| 3º | Guilherme e Gabriel<br> | 1 | O problema da área                                  |
|    |                                                                                                          | 2 | O problema do volume;<br>A relação entre os volumes |

Fonte: Dados da Pesquisa.

Por tratar-se de estudantes do Ensino Médio, o uso de imagens neste trabalho, bem como de nomes e transcrições de fala foi devidamente autorizado pelos responsáveis e estudantes, tendo o registro em Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) (ver modelo dos termos no **APÊNDICE B**). Como o estudo envolve seres humanos, em sua maioria menores de idade, tive o cuidado em submeter e respeitar a condição de espera pela aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa (CEP)<sup>12</sup> para fazer qualquer tipo de prática com os participantes.

Embora os dados dessa pesquisa tenham sido produzidos por 11 estudantes, estando 10 deles agrupados em duplas, seguindo a ideia de *amostragem para pesquisa qualitativa* proposta por Marshall (1996), atendendo aos critérios de abordagem ampla: amostra de conveniência, amostra de julgamento, e amostra teórica, falar de duas duplas nessa pesquisa é conveniente, representativo e teórico.

Segundo Marshall (1996), a *amostra de conveniência* envolve a seleção de assuntos mais acessíveis, o que a torna menos rigorosa; a *amostra de julgamento* (também conhecida como amostra proposital) é a mais comum entre as técnicas de amostragem para pesquisas qualitativas e permite que o pesquisador selecione ativamente a amostra mais produtiva para responder à pergunta de pesquisa; já a *amostra teórica* geralmente é conduzida pela teoria para uma maior ou menor extensão e requer a construção de teorias

<sup>12</sup> CAAE: 20196619.8.0000.5466

interpretativas dos dados emergentes.

Os dados produzidos pelas duplas e selecionados para compor o Capítulo 5 deste estudo justificam-se pela observação de eventos críticos durante a própria realização das sessões de ensino. Esses eventos críticos são muito importantes para o pensar-com-GeoGebra e apresentaram fortes indícios de emersão de aspectos do PD, sendo o suficiente para conversar com o objetivo desta dissertação e argumentar com a pergunta norteadora.

#### 4.2.4 As atividades

O planejamento e a criação das atividades a serem investigadas nas sessões de ensino ocorreram no primeiro semestre de 2019 e início do segundo. As atividades elaboradas adotam um caráter de exploração, investigação e experimentação com tecnologia (BORBA; VILLARREAL, 2005), além de seguirem a proposta semiaberta. Desse modo, oferecem meios para o surgimento de conjecturas matemáticas, exploração de várias formas de resoluções, exploração de caráter visual, dinâmico e manipulativo de objetos matemáticos, entre outros aspectos (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018). Todas as atividades foram idealizadas e exploradas com o *software* GeoGebra. A escolha de ter esse *software* como ambiente investigativo foi orientada pela intencionalidade de abordar as suas potencialidades seguindo uma perspectiva educacional, acreditando que o **pensar-com-GeoGebra** (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018) abriria espaço para a emersão de aspectos do PD.

Em cada sessão de ensino os participantes receberam as atividades impressas com a finalidade de uso pontual, dando luz à discussão e ilustrando o objeto de investigação e sua construção.

No total foram elaboradas cinco atividades: duas explorando regiões limitadas e três explorando sólidos de revolução. Todas as atividades foram pensadas para que os estudantes se voltassem ao diálogo, manipulação e investigação dos pensamentos emergentes, visando uma aproximação e generalização para os problemas apresentados. A cada cenário criado e explorado pelos participantes os questionamentos *ser uma boa aproximação* e *como melhorar* eram colocados para reflexão, gerando uma nova investigação.

As atividades foram aplicadas na sequência:

*1º ano do Ensino Médio*



- Atividade 1: Quadratura do círculo (investigação da área do círculo);
- Atividade 2: Cubatura da esfera (investigação do volume da esfera).

*2º e 3º ano do Ensino Médio*

- Atividade 3: O problema da área (investigação da área sob a curva da parábola);
- Atividade 4: O problema do volume (investigação do volume do parabolóide);
- Atividade 5: A relação entre os volumes (investigação da relação entre o volume do cilindro, cone e parabolóide, todos de mesma base e altura).

A escolha das regiões e dos sólidos apresentados nesse trabalho se deu por incorporarem problemas geométricos apresentados ao longo do desenvolvimento do Cálculo Diferencial e que instigaram o estudo e investigação de grandes matemáticos como: Arquimedes de Siracusa, Zu Chongzhi, Thabit ibn Qurra, Fermat, Cavalieri, Torricelli, Newton, Leibnitz e outros. Além do mais, as atividades do 2º e 3º ano apresentam o desafio de ter como objetos de investigação problemas que excedem os conteúdos proposto para o Ensino Médio.

A seguir, apresento a descrição das atividades realizadas nesse trabalho. Os roteiros completos podem ser vistos no **APÊNDICE A**.

#### 4.2.4.1 Quadratura do círculo

Essa atividade tem como objetivo determinar a área de um círculo aplicando a estratégia de cálculo por aproximação, que consiste em explorar e comparar a área de regiões conhecidas com a desejada. Esta pesquisa entende área como sendo a região limitada por segmentos de retas, eixos e/ou curvas, cujo valor numérico associado pode ser determinado por meio de diferentes estratégias de cálculo. Entretanto, essa definição de área foi explorada de modo implícito com os estudantes ao longo do desenvolvimento de todas as atividades propostas por esta pesquisa e que envolvem esse conceito.

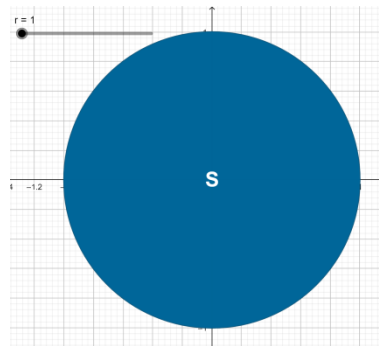
Inicialmente a atividade foi pensada e elaborada partindo da estratégia de cálculo desenvolvida no Egito antigo (BARON, 1985), que consiste em achar a área de um quadrado que seja equivalente à área do círculo e, a partir disso, também explorar aproximações para  $\pi$ . Entretanto, vale ressaltar que, durante o desenvolvimento prático da atividade com os participantes da produção de dados desta pesquisa, a estrutura inicialmente elaborada foi usada como orientação e tutoria em momentos específicos e direcionados, e o desenvolvimento central da investigação foi motivado pelas ideias, diálogos, criações e explorações feitas pelas duplas. Os quadros abaixo apresentam uma

possível abordagem para essa atividade usando o *software* GeoGebra, bem como alguns questionamentos propostos durante o seu desenvolvimento prático.

**Quadro 9:** Apresentação da atividade 1

*Determine a área de uma região S limitada pela circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ .*

Figura 1: Região circular S



Fonte: Dados da Pesquisa.

**Quadro 10:** Etapa 1 – Instrução para início da atividade 1 e estruturação de uma possível abordagem

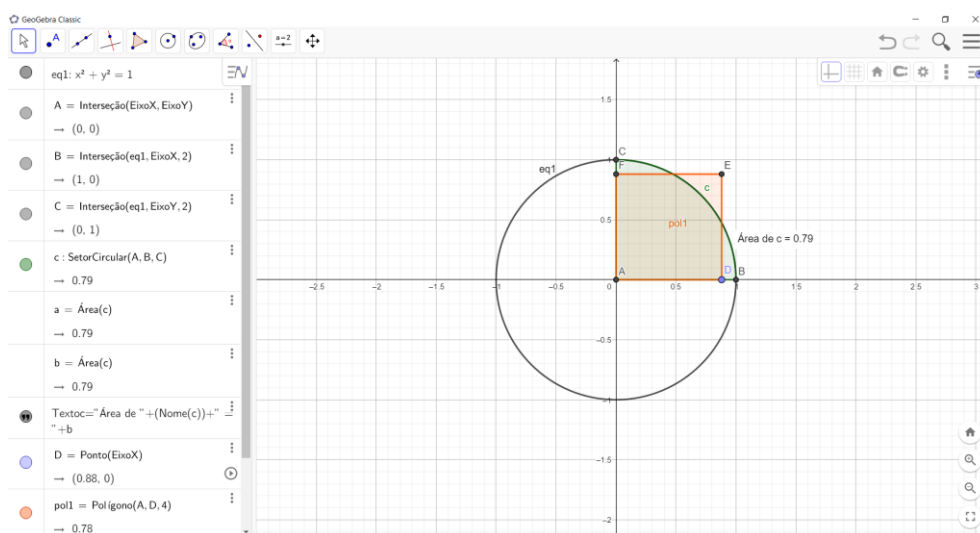
1. Construção do cenário de investigação no GeoGebra (reduzido a um quadrante).
  - a) Clique no campo “Entrada”  Entrada..., digite a equação  $x^2 + y^2 = 1$  e pressione a tecla “Enter”  no teclado ou no GeoGebra.
  - b) Construa um quadrante circular. Para isso clique na aba “Círculo”  e selecione a ferramenta “Setor Circular”  Setor Circular, em seguida clique com o mouse nas posições (0,0) e (1,0) na “Janela de visualização 2” e leve o ícone do mouse até a posição (0,1), clicando sobre ela.
  - c) Calcule a área do quadrante circular construído, selecionando a ferramenta “Ângulo” , seguido de “Área”  Área e clicando sobre o objeto construído anteriormente. Esta ação será realizada sempre que for necessário calcular a área de uma figura construída com ferramentas definidas do GeoGebra.
  - d) Oculte o setor circular construído no item anterior clicando sobre o ícone , presente na “Janela de Álgebra” do lado esquerdo da tela. Ao fazer isso, o ícone ficará branco . Esta ação sempre será realizada quando

for necessário ocultar ou expor um objeto construído.

- e) Construa um quadrado. Para isso clique na aba “Polígono”  e selecione a ferramenta “Polígono Regular” , posicionando dois vértices, o primeiro em (0,0) e o outro em qualquer ponto da abscissa, tal que  $0 < x < 1$ , e definindo 4 como o total de vértices.
- f) Calcule a área do quadrado.
- g) Exponha a construção do quadrante circular.

Fonte: Dados da Pesquisa.

**Figura 12:** Quadrante circular e quadrado para comparação de área



Fonte: Dados da Pesquisa.

Na prática, essa primeira etapa da atividade foi usada com o intuito de auxiliar os estudantes na construção de uma região limitada por uma circunferência no *software* GeoGebra. Desse modo, apenas o item a) (**Quadro 10**) foi desenvolvido conforme o arquivo impresso entregue às duplas (**APÊNDICE A**). Os demais itens foram explorados como forma de fomentar e/ou complementar a investigação, dependendo do progresso da dupla.

O **Quadro 11** apresenta um questionamento que pode ser explorado segundo a construção completa sugerida no **Quadro 10**. Outros questionamentos podem ser feitos independente da exploração trilhada pelos estudantes, como por exemplo: Comparando a área da nova região com a área da região limitada pela circunferência, ela é uma boa aproximação ao que desejamos? É possível melhorar essa aproximação? O que devemos fazer para obter essa melhor aproximação?

**Quadro 11:** Questionamento da primeira etapa da atividade 1

- a) Qual o valor da medida do lado do quadrado para que sua área seja uma boa aproximação à área do quadrante circular?

Fonte: Dados da Pesquisa.

Esses questionamentos foram sempre colocados quando os estudantes esboçavam indícios de finalização dessa etapa da investigação, convidando-os a refletir sobre o caminho escolhido, o percurso desenvolvido e o valor encontrado. Desse modo, a atividade segue o caráter investigativo e exploratório, possibilitando aos participantes a construção de novos cenários, o aprimoramento das ideias já em execução e/ou a iniciação de uma nova sequência de ideias. A dinâmica de refazer os questionamentos se manteve até os estudantes manifestarem o interesse em assumir algum valor como desfecho da etapa 1 dessa atividade, mas tendo a consciência do caminho a ser trilhado, caso fosse necessário seguir com a investigação.

Na segunda etapa da atividade, os estudantes foram convidados a explorar uma aproximação para  $\pi$ , por meio da relação entre o lado do quadrado construído em um quadrante e o raio da circunferência que limita a região estudada na etapa 1 dessa atividade. É importante ressaltar que, para esse momento, a proposta de investigação apresentada no **Quadro 10** precisa ser explorada com os participantes, **ainda que** seja como forma de fomentar e/ou complementar as discussões e observações. Reforço que o **Quadro 12** e **Quadro 13**, a seguir, assim como os anteriores, apresentam uma sugestão de abordagem para a atividade e que, na prática, seus elementos foram introduzidos a partir de diálogos e construções orientadas, não sendo necessário a dependência do roteiro.

**Quadro 12:** Etapa 2 – Instrução para início da segunda investigação da atividade 1

2. Explorando aproximações para  $\pi$ .
- a) Aumente o arredondamento dos valores exibidos na janela do GeoGebra para 10 casas decimais clicando no ícone , seguido da opção “Configurações”  Configurações .

Fonte: Dados da Pesquisa.

A intenção em aumentar o número de casas decimais dos valores obtidos anteriormente está em observar e validar a possibilidade de seguir com a investigação e a busca por melhores aproximações para o valor de  $\pi$  na atividade. Essa observação pode

ser acompanhada de questionamentos como os apresentados no **Quadro 13**, a seguir.

**Quadro 13:** Questionamentos da segunda etapa da atividade 1

- b)** Os valores encontrados anteriormente para as áreas continuam sendo uma boa aproximação? Se for, é possível achar uma melhor?
- c)** Existe alguma outra estratégia para encontrar a melhor aproximação desejada? Como podemos explorá-la?

Fonte: Dados da Pesquisa.

Essa segunda etapa da atividade pode ser conduzida explorando diretamente o problema apresentado por Baron (1985), em busca de um outro par de pontos  $p$  e  $q$  tal que  $\left(\frac{p}{q}\right)^2 \cong \frac{\pi}{4}r^2$ .

Desenhe um quadrante circular (estimado de olho) e construa um quadrado com área igual à do quadrante que desenhou. Finalmente, *medindo* o lado do quadrado e exprimindo-o em termos do raio do círculo, você será capaz de ver como os seus resultados comparam-se com as aproximações egípcias, isto é, lado do quadrado = 8/9 raio (BARON, 1985, p.13).

Além disso, também pode envolver a aproximação entre as áreas do círculo e do quadrado,  $\pi r^2 \cong l^2$ , observando e explorando os valores associados as construções feitas no *software* GeoGebra.

#### 4.2.4.2 Cubatura da esfera

Esta atividade tem como objetivo levar a proposta de investigação apresentada na atividade anterior para o ambiente 3D, buscando determinar o volume de uma esfera aplicando a estratégia de cálculo por aproximação. Esta pesquisa entende volume como sendo a região limitada por eixos e superfícies planas e/ou curvas, cujo valor numérico associado pode ser determinado mediante diferentes estratégias de cálculo. Esse entendimento de volume foi explorado de modo implícito com os estudantes ao longo do desenvolvimento de todas as atividades propostas por esta pesquisa e que envolvem esse conceito.

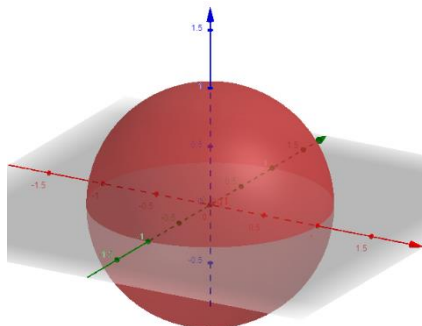
Inicialmente, a atividade foi pensada e elaborada partindo da estratégia de cálculo que busca determinar o volume de um cubo que seja equivalente ao volume da esfera e, a partir disso, também explorar aproximações para  $\pi$ . Vale ressaltar que, como os estudantes já tinham explorado a atividade anterior (*Quadratura do círculo*) usando a ideia de aproximar a área desejada a de um quadrado, essa nova atividade foi investigada

pelas duplas seguindo diretamente essa forma de abordagem, porém adaptada ao ambiente 3D. Os quadros abaixo apresentam um possível roteiro de desenvolvimento para essa atividade no GeoGebra, bem como alguns questionamentos que contribuem com o cenário investigativo e exploratório proposto.

#### Quadro 14: Apresentação da atividade 2

Determine o volume da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

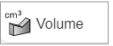
Figura 1: Esfera



Fonte: Dados da Pesquisa.

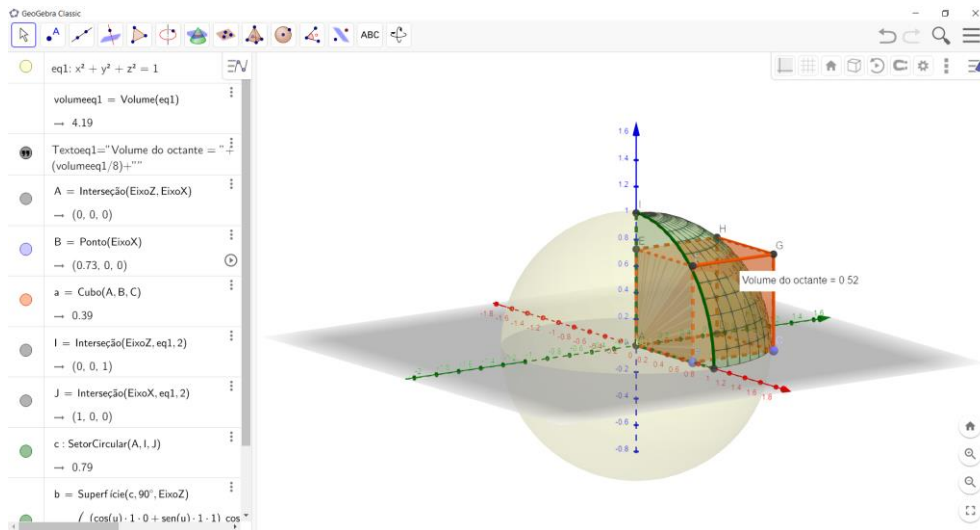
#### Quadro 15: Etapa 1 – Instrução para início da atividade 2 e estruturação de uma possível abordagem

1. Construção do cenário de investigação no GeoGebra (reduzido a um octante).

- a) Abra a “Janela de Visualização 3D” clicando em .
- b) Clique no campo “Entrada” , digite a equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e pressione a tecla “Enter”  no teclado ou no GeoGebra.
- c) Calcule o volume do octante da esfera, selecionando a ferramenta “Ângulo” , seguido de “Volume”  e clique sobre o objeto construído anteriormente. Em seguida, dê um duplo clique sobre a caixa de texto aberta na janela de visualização e clique dentro do ícone que aparece do lado direito da equação, acrescentando a divisão por 8. Altere o outro lado da equação para “Volume do octante”.
- d) Construa um cubo. Para isso clique na aba “Pirâmide”  e selecione a ferramenta “Cubo” , posicionando dois vértices, o primeiro em (0,0) e o outro em qualquer ponto do eixo x, tal que  $0 < x < 1$ .
- e) Calcule o volume do cubo.

Fonte: Dados da Pesquisa.

**Figura 13:** Octante da esfera e cubo para comparação de área



Fonte: Dados da Pesquisa.

Mesmo que essas instruções não tenham sido usadas de forma direta e não tiveram impacto no desenvolvimento da atividade por parte dos estudantes, vale ressaltar que há um erro de digitação no item d (**Quadro 15**). Ele orienta a construção de um cubo posicionando dois vértices, sendo um deles em (0, 0), quando o correto seria (0, 0, 0) por se tratar de um ambiente com três dimensões.

Na prática, essa primeira etapa da atividade foi usada com o intuito de auxiliar os estudantes na construção de uma esfera no *software* GeoGebra. Desse modo, apenas os itens a e b (**Quadro 15**) foram desenvolvidos conforme o arquivo impresso entregue às duplas (**APÊNDICE A**). Os demais itens foram desenvolvidos e explorados de modo intuitivo pelos estudantes e, em alguns momentos, orientados oralmente pela pesquisadora.

O **Quadro 16** apresenta um questionamento que pode ser explorado após a construção do cenário descrito no **Quadro 15**. Outros questionamentos que emergem durante essa investigação são: Comparando o volume do novo sólido construído com o volume da esfera, ele é uma boa aproximação ao que desejamos? É possível melhorar essa aproximação? O que devemos fazer para obter essa melhor aproximação?

**Quadro 16**<sup>13</sup>: Questionamento da primeira etapa da atividade 2

- a) Qual o valor da medida da aresta do cubo para que se volume seja uma boa aproximação ao volume do octante da esfera?

Fonte: Dados da Pesquisa.

Esses questionamentos foram colocados sempre que os estudantes esboçavam indícios de finalização dessa etapa da investigação, convidando-os a refletir sobre o caminho escolhido, o percurso desenvolvido e o valor encontrado. Desse modo, a atividade segue o caráter investigativo e exploratório, possibilitando aos participantes a construção de novos cenários, o aprimoramento das ideias já em execução e/ou a iniciação de uma nova sequência de ideias. A dinâmica de refazer os questionamentos se manteve até os estudantes manifestarem o interesse em assumir algum valor como desfecho final da etapa 1 dessa atividade, mas tendo a consciência do caminho a ser trilhado caso fosse necessário seguir com a investigação.

Na segunda etapa da atividade, os estudantes foram convidados a explorar uma aproximação para  $\pi$ , por meio da relação entre a aresta do cubo construído em um octante e o raio da esfera. Reforço que o **Quadro 17** e o **Quadro 18**, a seguir, assim como os anteriores, apresentam uma sugestão de abordagem para a atividade, e que na prática seus elementos foram introduzidos a partir de diálogos e construções orientadas, não sendo necessário a dependência do roteiro.

**Quadro 17**: Etapa 2 – Instrução para início da segunda investigação da atividade 2

2. Explorando aproximações para  $\pi$ .
- a) Aumente o arredondamento dos valores exibidos na janela do GeoGebra para 10 casas decimais clicando no ícone , seguido da opção “Configurações”  Configurações .

Fonte: Dados da Pesquisa.

Assim como na atividade anterior (*Quadratura do círculo*), a intenção em aumentar o número de casas decimais dos valores obtidos anteriormente está em observar e validar a possibilidade de seguir com a investigação e a busca por melhores aproximações para a atividade, possibilitando explorar a relação entre a aresta do cubo e valores aproximados de  $\pi$ . Esse momento da investigação deve ser acompanhado de

<sup>13</sup> Correção: onde está escrito ...para que se volume..., deve ser lido ...para que seu volume... O texto escrito no **Quadro 16** segue a versão original entregue de forma impressa aos estudantes.



questionamentos, como, por exemplo, os apresentados no **Quadro 18**.

**Quadro 18:** Questionamentos da segunda etapa da atividade 2

- b)** Os valores encontrados anteriormente para os volumes continuam sendo uma boa aproximação? Se for, é possível achar uma melhor?
- c)** Existe alguma outra estratégia para encontrar a melhor aproximação desejada? Como podemos explorá-la?

Fonte: Dados da Pesquisa.

Essa segunda etapa da atividade pode ser conduzida partindo de um desdobramento não apresentado por Baron (1985) em um problema presente em seu livro, Unidade 1, em que os egípcios antigos expõem uma possível relação entre o lado de um quadrado e o raio de um círculo, abrindo espaço para explorar esse problema por meio da relação de áreas e identificar aproximações para o valor de  $\pi$ . Esse desdobramento consiste em ampliar o problema ao cálculo do volume de uma esfera, explorando no *software* GeoGebra relações entre ele e o volume de um cubo, como, por exemplo,  $\frac{4}{3}\pi r^3 \cong a^3$ , e identificando aproximações ao valor de  $\pi$ .

#### 4.2.4.3 O problema da área

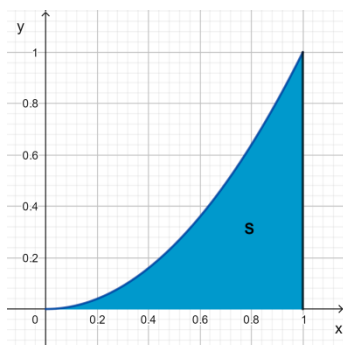
Esta atividade tem como objetivo determinar a área compreendida sob a curva da parábola  $y = x^2$  e o eixo  $x$  no intervalo de 0 até 1, aplicando a estratégia de cálculo por aproximação, que consiste em explorar e comparar a área desejada com a de outras regiões conhecidas.

A atividade foi pensada e elaborada segundo a quadratura da parábola proposta por Fermat (BOYER, 2010), que consiste em subdividir o intervalo desde  $x = 0$  até  $x = a$  em uma infinidade de subintervalos, aproximando a área sob a curva por meio de retângulos construídos a partir desses subintervalos. Durante o desenvolvimento prático da atividade com os estudantes, essa forma de abordagem foi proposta com o intuito de fomentar e/ou complementar a investigação em desenvolvimento. A estrutura elaborada em forma de roteiro (**APÊNDICE A**) foi usada como orientação e tutoria em momentos específicos e direcionados, e o desenvolvimento central da investigação foi motivado pelas ideias, diálogos, criações e explorações feitas pelas duplas. Os quadros abaixo apresentam uma possível abordagem para essa atividade, bem como alguns questionamentos propostos durante o seu desenvolvimento prático.

### Quadro 19: Apresentação da atividade 3

*Atividade: Determine a área de uma região S (Figura 1) que está sob a parábola  $y = x^2$ , com  $0 \leq x \leq 1$ .*

Figura 1: Região parabólica S



Fonte: Dados da Pesquisa.

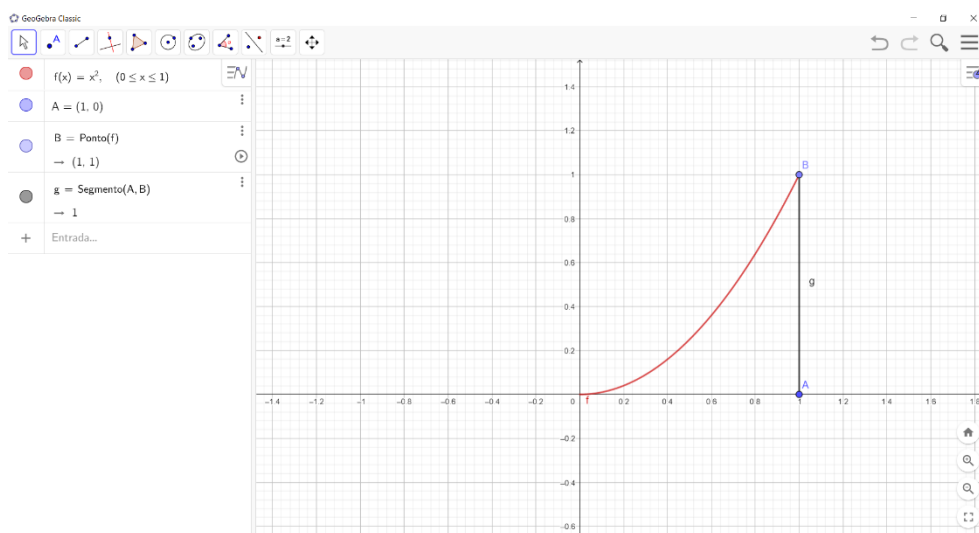
### Quadro 20: Etapa 1 – Instrução para início da atividade 3

1. Construção da parábola no intervalo  $0 \leq x \leq 1$  e da região S.

a) Clique no campo “Entrada”  , digite “Função”, escolha a opção  clicando sobre ela e, em seguida, digite dentro dos parênteses “ $x^2, 0, 1$ ”. Pressione a tecla “Enter” .

b) Construa um segmento de reta vertical delimitando a região S. Para isso clique na aba “Reta”  e selecione a ferramenta “Segmento” , em seguida clique com o mouse nas posições (1,0) e (1,1) na “Janela de visualização 2”.

Fonte: Dados da Pesquisa.

**Figura 14:** Construção da região S

Fonte: Dados da Pesquisa.

Para a construção do cenário de investigação que o enunciado apresenta, foi solicitado que as duplas consultassem o material impresso entregue (**APÊNDICE A**) e desenvolvessem as primeiras orientações (**Quadro 20**). Após a construção e ainda nessa etapa da atividade, os participantes na produção de dados desta pesquisa foram desafiados por meio de um questionamento (**Quadro 21**) a apresentar, de modo oral, ideias e/ou comentários iniciais com relação à área da região construída e instigados a pensar em uma possível comparação com a de outras regiões já conhecidas.

**Quadro 21**<sup>14</sup>: Questionamento da primeira etapa da atividade 3

- c) O que podemos observar e discutir inicialmente com relação à área da região S? É possível compará-la com de outras regiões?

Fonte: Dados da Pesquisa.

Na segunda etapa da atividade, as duplas foram convidadas a construir com o GeoGebra suas ideias iniciais de aproximação. A exploração ocorreu com o uso de regiões que excediam a inicial e a comparação usada foi de *um para um*, ou seja, a região em investigação era comparada com apenas uma outra região por vez, em sua totalidade (exemplo: comparar a área da região S com a área de um quadrado). O **Quadro 22** apresenta um possível desdobramento para essa etapa da investigação, elaborado previamente pela pesquisadora e usado de modo indireto com os estudantes.

<sup>14</sup> Correção: onde está escrito ... *compará-la com de...*, deve ser lido ... *compará-la com a de...* O texto escrito no **Quadro 21** segue a versão original entregue de forma impressa aos estudantes.

### Quadro 22: Possíveis aproximações à região S

#### 2. Construção das primeiras aproximações à região S.

- a) Clique na aba “Polígono”  e construa na “Janela de visualização 2” um quadrado com vértices em  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$  e  $(0,1)$ .
- b) Construa um triângulo com vértices em  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  e  $(1,1)$ . Para isso, use novamente a aba “Polígono” .

Fonte: Dados da Pesquisa.

O **Quadro 23** apresenta alguns questionamentos que contribuem com o desenvolvimento da investigação e exploração por parte das duplas, bem como aguçam os estudantes a aprimorar a ideia inicial ou mesmo buscar outras estratégias de desenvolvimento para a atividade.

### Quadro 23: Questionamentos da segunda etapa da atividade 3

- c) Podemos considerar a área desse triângulo como uma “boa aproximação” para área da Região S? Se for uma boa aproximação, é possível encontrar uma melhor?

Fonte: Dados da Pesquisa.

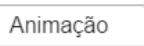
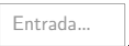
O primeiro questionamento traz especificamente a comparação com a área do triângulo, mas a sugestão é de que ele seja adaptado a qualquer figura que os estudantes estejam explorando. O questionamento: O que devemos fazer para obter essa melhor aproximação? também foi incorporado no desenvolvimento dessa e de outras etapas da atividade, com o propósito de que os participantes externem seus pensamentos por meio de um diálogo e/ou construção no GeoGebra.

Esses questionamentos foram sempre colocados quando os estudantes esboçavam indícios de finalização de alguma etapa da investigação, convidando-os a refletir sobre o caminho escolhido, o percurso desenvolvido e o valor encontrado. Desse modo, a atividade segue o caráter investigativo e exploratório, possibilitando aos participantes a construção de novos cenários, o aprimoramento das ideias já em execução e/ou a iniciação de uma nova sequência de ideias.

Na terceira etapa da atividade, as duplas seguiram explorando suas ideias, mas agora dividindo a região inicial em outras regiões menores e usando a comparação *um para vários*, isto é, a região inicial foi dividida em outras regiões menores, sem sobreposição, e a comparação sugere que a soma da área dessas várias regiões menores

aproxima-se da área sob a curva da parábola proposta. O **Quadro 24** apresenta um possível desdobramento elaborado pela pesquisadora para essa etapa da investigação. Assim, sua exploração e desenvolvimento com os estudantes deu-se ao término da manifestação, investigação e exploração das ideias emergentes das duplas, com o intuito de ilustrar outro caminho que poderia ser trilhado nessa etapa da atividade.

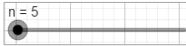
**Quadro 24:** Etapa 3 – Possível abordagem usando a comparação *um para vários*

3. Divisão da região S em faixas.
  - a) Oculte o quadrado e o triângulo construído na **Parte 2**.
  - b) Dividir a região S em cinco faixas de mesma largura. Para isso, construa 4 segmentos de retas verticais, igualmente espaçados em x, clicando na aba “Reta”  e selecionando a ferramenta “Segmento”  .
  - c) É possível aproximar cada faixa a uma região com lados retos? Qual medida devemos considerar para a sua base e altura?
4. Construção de retângulos usando as extremidades direitas e esquerdas das faixas.
  - a) Selecione a ferramenta “Controle Deslizante”  e clique em algum lugar na “Janela de visualização 2” distante das construções realizadas até a **Parte 3**. Na janela “Controle Deslizante”, digite  $n$  em “Nome”; selecione a opção “Inteiro”; em “Intervalo”, digite 0 (zero) em “min” e, em “max”, digite 1 000 (um mil); em “Incremento” deixe o valor 5(cinco); na aba “Animação”  , em “Repetir”, selecione a opção “Crescente (Uma Vez)”  . Para finalizar, clique no botão “OK”  .
  - b) Clique no campo “Entrada”   , digite “SomaDe”, escolha a opção  clicando sobre ela e, em seguida, digite dentro dos parênteses “ $x^2, 0, 1, n$ ”. Pressione a tecla “Enter”  .
  - c) Clique no campo “Entrada”   , digite “SomaDe”, escolha a opção

`SomaDeRiemannInferior( <Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos> )`

clicando sobre ela e, em seguida, digite dentro dos parênteses “ $x^2$ , 0,1,  $n$ ”.

Pressione a tecla “Enter” .

d) Mova o “Controle Deslizante” até  $n = 5$  .

e) Oculte uma construção por vez para melhor observação.

f) Quais estimativas são possíveis fazer para a área de S?

g) É possível repetir esse procedimento com um número maior de faixas? O que é esperado que aconteça?

5. Cálculo da área da região S aumentando o número de faixas.

a) Deixe visível na “Janela de visualização 2” apenas os objetos construídos nas **Partes 1 e 4**.

b) Clique no “Menu Exibir”  e selecione a opção  Planilha.

c) Na “Janela de Álgebra” clique com o botão direito do mouse sobre o objeto “Controle Deslizante” e selecione “Gravar para a Planilha de Cálculos” . Repita essa ação para os objetos “SomaDeRiemannSuperior” e “SomaDeRiemannInferior”.

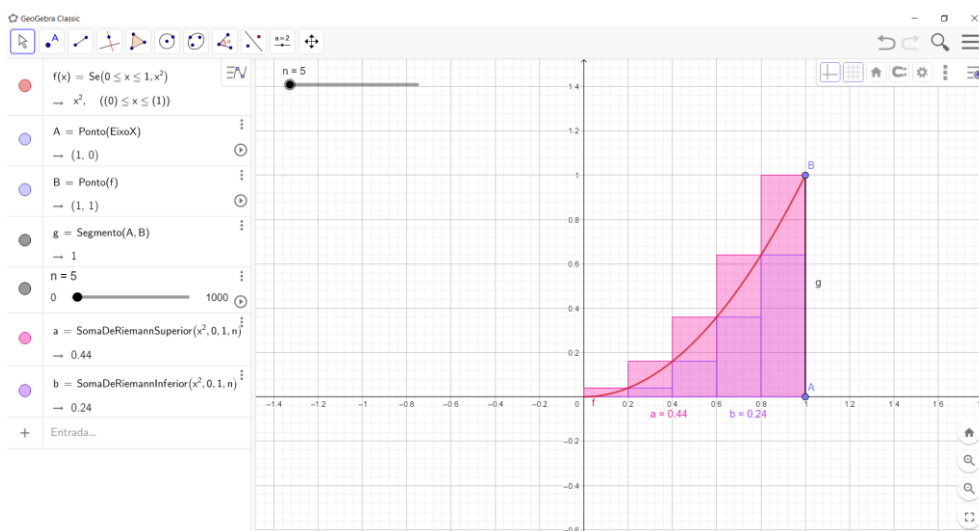
d) Anime o “Controle Deslizante” clicando no botão “Play”  presente no lado direito do objeto na “Janela de Álgebra”.

e) Qual é o valor da área da Região S? O que acontece se aumentarmos a quantidade de casas decimais?

Fonte: Dados da Pesquisa.

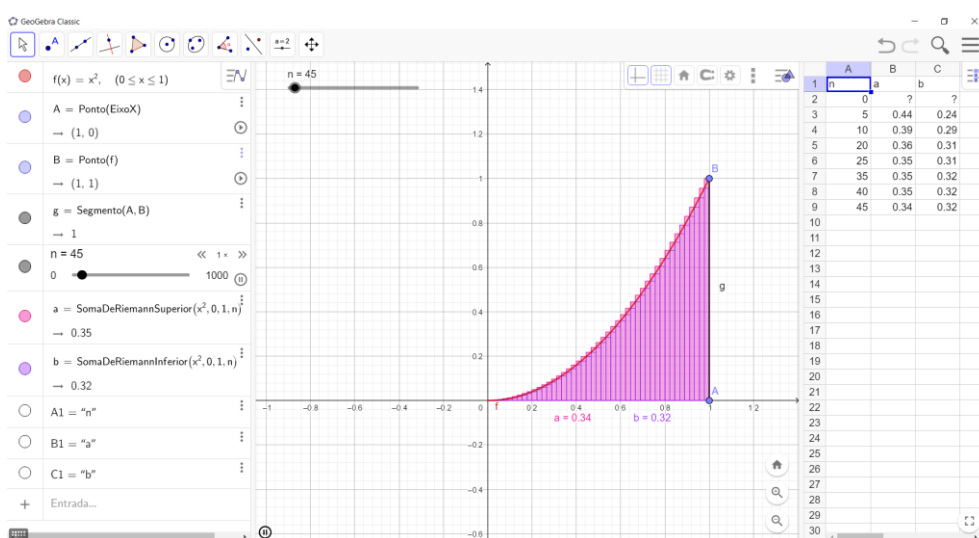
A **Figura 15** e a **Figura 16**, a seguir, foram elaboradas pela pesquisadora com o intuito de ilustrar as etapas 4 e 5, respectivamente, presentes no **Quadro 24**.

**Figura 15:** Aproximação da área desejada por áreas de retângulos com  $n = 5$



Fonte: Dados da Pesquisa.

**Figura 16:** Aproximação da área desejada usando a animação do “Controle deslizante”



Fonte: Dados da Pesquisa.

#### 4.2.4.4 O problema do volume

Esta atividade leva a proposta de investigação apresentada na atividade anterior para o ambiente 3D e tem como objetivo determinar o volume compreendido entre a superfície do parabolóide de revolução  $y = x^2$  e o plano  $y = 1$ , aplicando a estratégia de cálculo por aproximação, que consiste em explorar e comparar o volume desejado com o de outros sólidos.

A atividade foi pensada e elaborada segundo as *Proposições 19, 20, Sobre conoides e esferoides* de Arquimedes (BARON, 1985), que consiste em obter seções por

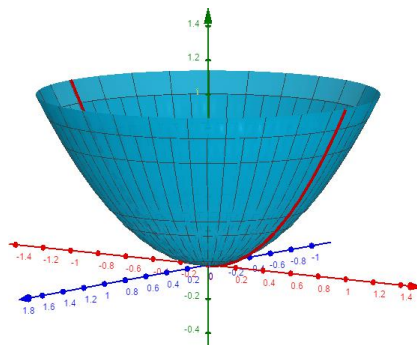
meio da interseção de um parabolóide de revolução com planos, inscrevendo e circunscrevendo, em cada uma dessas seções, uma outra figura sólida (cilindros ou tronco de cilindros com alturas iguais), identificando assim duas aproximações para o volume desejado, uma por falta (soma dos volumes dos cilindros inscritos) e outra por excesso (soma dos volumes dos cilindros circunscritos).

Durante o desenvolvimento prático da atividade com os estudantes, essa forma de abordagem foi proposta com a finalidade de fomentar e/ou complementar a investigação em desenvolvimento. A estrutura elaborada em forma de roteiro (**APÊNDICE A**) foi usada como orientação e tutoria em momentos específicos e direcionados, e o desenvolvimento central da investigação foi motivado pelas ideias, diálogos, criações e explorações feitas pelas duplas. Os quadros abaixo apresentam uma possível abordagem para essa atividade usando o GeoGebra, bem como alguns questionamentos propostos durante o seu desenvolvimento prático.

#### Quadro 25: Apresentação da atividade 4

*Atividade: Determine o volume do parabolóide (Figura 1) obtido pela revolução em torno do eixo  $y$  da curva  $y = x^2$ , com  $-1 \leq x \leq 1$ .*

Figura 1: Superfície de revolução

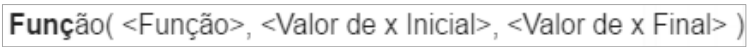


Fonte: Dados da Pesquisa.



**Quadro 26:** Etapa 1 – Instrução para início da atividade 4

1. Construção da superfície de revolução no intervalo  $-1 \leq x \leq 1$  utilizando o GeoGebra.

a) Clique no campo “Entrada” , digite “Função”, escolha a opção  clicando sobre ela e, em seguida, digite dentro dos parênteses “ $x^2, -1, 1$ ”. Pressione a tecla “Enter” .

b) Abra a janela de visualização 3D clicando em , presente no canto superior direito, seguido de  e escolha a opção “Janela de Visualização 3D” .

c) Oculte a “Janela de Visualização” clicando em , seguido de “Fechar” .

d) Posicione o Eixo Y como vertical. Para isso clique em , seguido de  e selecione a opção . Acesse também o ícone , escolhendo a opção .

e) Clique no campo “Entrada” , digite “Superfície”, escolha a opção  clicando sobre ela e, em seguida, digite dentro dos parênteses “*nome da função do item 1 gerado pelo GeoGebra,  $2\pi$ , EixoY*”. Pressione a tecla “Enter” .

Fonte: Dados da Pesquisa.

Para a construção do cenário de investigação que o enunciado apresenta, foi solicitado que as duplas consultassem o material impresso entregue (**APÊNDICE A**) e desenvolvessem as primeiras orientações (**Quadro 26**). Após a construção e ainda nessa etapa da atividade, os participantes da produção de dados desta pesquisa foram desafiados por meio de um questionamento (**Quadro 27**) a explorar as ferramentas do *software* GeoGebra e a apresentar ideias e/ou comentários iniciais com relação ao cálculo do volume desejado.

**Quadro 27:** Questionamento da primeira etapa da atividade 4

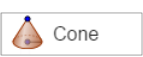
- f) É possível usar a ferramenta “Volume” apresentada pelo GeoGebra para calcular o volume desejado nesta atividade? Qual(is) estratégia(s) podemos utilizar para resolver o que está sendo proposto?

Fonte: Dados da Pesquisa.

É válido o esclarecimento de que o *software* GeoGebra não apresenta uma ferramenta capaz de calcular o volume do parabolóide que está em investigação, uma vez que o objeto construído segundo as orientações do **Quadro 26** é uma superfície de revolução, não um sólido. Por isso é sugerido que os estudantes busquem outras estratégias para desenvolver a atividade.

A segunda etapa da atividade foi pensada segundo a ideia de investigar o volume do parabolóide buscando aproximações com o volume de outros sólidos, mas usando a comparação de *um para um*, ou seja, o volume em investigação era comparado com apenas um outro por vez, em sua totalidade (exemplo: comparar o volume do parabolóide com o de um cone). O **Quadro 28** apresenta um possível desdobramento para essa etapa da atividade, que segue a comparação de *um para um*. É importante ressaltar que no desenvolvimento prático da atividade, nem sempre as duplas iniciaram por esse caminho, alguns estudantes já buscavam a comparação do volume do parabolóide com mais de um sólido por vez, realizando assim a comparação de *um para vários*, o que acredito ter sido influenciada pela atividade anteriormente realizada (*O problema da área*).

**Quadro 28:** Possíveis aproximações para o volume do parabolóide

2. Construção das primeiras aproximações ao volume do parabolóide.
- a) Clique na aba “Pirâmide” , selecione a ferramenta ‘Cilindro’  e construa na “Janela de visualização 3D” um cilindro com centro da base em (0,0,0), raio e altura igual a 1.
- b) Construa um cone com vértice em (0,0, 0), raio e altura igual a 1. Para isso, use novamente a aba “Pirâmide”  e selecione a opção “Cone” .

Fonte: Dados da Pesquisa.

O **Quadro 29** apresenta alguns questionamentos que contribuem com o desenvolvimento da investigação e exploração por parte das duplas, bem como aguçam os estudantes a aprimorar a ideia inicial ou mesmo buscar outras estratégias de

desenvolvimento para a atividade.

**Quadro 29:** Questionamentos da segunda etapa da atividade 3

- c) Podemos considerar o volume desse cone como uma “boa aproximação” para o volume do parabolóide? Se for uma boa aproximação, é possível encontrar uma melhor?

Fonte: Dados da Pesquisa.

O primeiro questionamento traz especificamente a comparação com o volume do cone, mas a sugestão é de que ele seja adaptado a qualquer figura que os estudantes estejam explorando. O questionamento: O que devemos fazer para obter essa melhor aproximação? também foi incorporado no desenvolvimento dessa e de outras etapas da atividade, a fim de que os participantes externem seus pensamentos por meio de um diálogo e/ou construção no *software* GeoGebra.

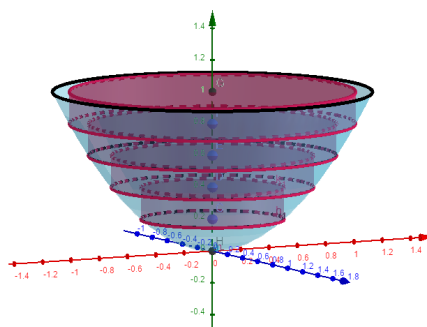
Em todas as etapas das atividades pensadas e elaboradas para essa pesquisa, esses e outros questionamentos foram pensados e colocados quando os estudantes esboçavam indícios de finalização de alguma etapa da investigação, convidando-os a refletir sobre o caminho escolhido, o percurso desenvolvido e o valor encontrado. Desse modo, as atividades seguem o caráter investigativo e exploratório, possibilitando aos participantes a construção de novos cenários, o aprimoramento das ideias já em execução e/ou a iniciação de uma nova sequência de ideias.

A terceira etapa da atividade traz um ambiente para a investigação do volume do parabolóide que envolve a construção de mais de um sólido por vez, fazendo uso da comparação *um para vários*, isto é, o sólido inicial é dividido em outros sólidos menores, sem sobreposição, e a comparação sugere que a soma do volume desses vários sólidos menores se aproximaria do volume do parabolóide proposto. O **Quadro 30** apresenta um possível desdobramento para essa forma de abordagem. A exploração e o desenvolvimento com os estudantes dos passos sugeridos a seguir se deu ao término da manifestação, investigação e exploração das ideias emergentes das duplas, com o intuito de fomentar as discussões e/ou ilustrar outro caminho que poderia ser trilhado nessa etapa da atividade.

**Quadro 30:** Etapa 3 – Possível abordagem para a atividade 4 usando a comparação *um para vários*

3. Divisão do eixo do paraboloide em partes iguais.
  - a) Oculte o cilindro e o cone construído na **Parte 2**, clicando sobre o ícone  de cada objeto, presente na “Janela de Álgebra” do lado esquerdo da tela. Ao fazer isso, o ícone ficará branco . Essa ação sempre será realizada quando for necessário ocultar ou expor um objeto construído.
  - b) Dividir o eixo do paraboloide em cinco partes iguais de comprimento 0,2. Para isso, construa 5 pontos sobre o eixo y, igualmente espaçados e compreendidos entre 0 e 1, selecionando a ferramenta “Ponto” .
  - c) Aproveite a divisão para construir os planos  $y = \frac{1}{5}$ ,  $y = \frac{2}{5}$ ,  $y = \frac{3}{5}$ ,  $y = \frac{4}{5}$  e  $y = 1$ . Para isso, Clique no campo “Entrada”   e digite cada uma das equações fornecidas, pressionando a tecla “Enter”  entre uma e outra.
  - d) Considerando as interseções do paraboloide com os planos (seções transversais), é possível construir um sólido usando-as como base? Qual sólido permitirá uma melhor aproximação ao cálculo do volume do paraboloide? Qual medida devemos considerar para a sua altura e raio?
4. Construção de cilindros inscritos e circunscritos.
  - a) Oculte os planos construídos na **Parte 3**.
  - b) Clique na aba “Pirâmide” , selecione a ferramenta ‘Cilindro’  e construa na “Janela de visualização 3D” inicialmente os cilindros inscritos ao paraboloide. Chegando à ilustração da Figura 2.

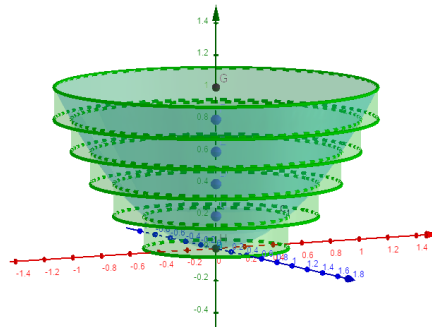
Figura 2: Cilindros inscritos ao paraboloide



Fonte: Elaboração própria com o GeoGebra

- c) Oculte os cilindros construídos no item anterior.
- d) Construa na “Janela de visualização 3D” os cilindros circunscritos ao parabolóide. Chegando à ilustração da Figura 3.

Figura 3: Cilindros circunscritos ao parabolóide



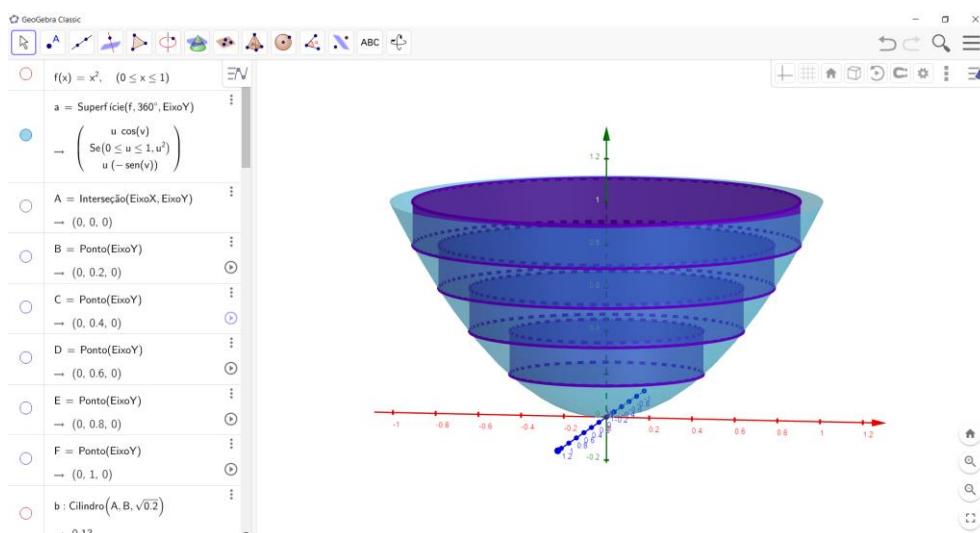
Fonte: Elaboração própria com o GeoGebra

- e) Quais estimativas são possíveis fazer para o volume do parabolóide?
  - f) O que acontece se repetirmos esse procedimento aumentando o número de divisões do eixo do parabolóide?
5. Cálculo do volume do parabolóide aumentando o número de divisões do eixo do parabolóide.
- a) Explore o aumento sugerido considerando os cilindros inscritos e circunscritos.
  - b) Qual é o valor do volume do parabolóide? O que acontece se aumentarmos a quantidade de casas decimais?

Fonte: Dados da Pesquisa.

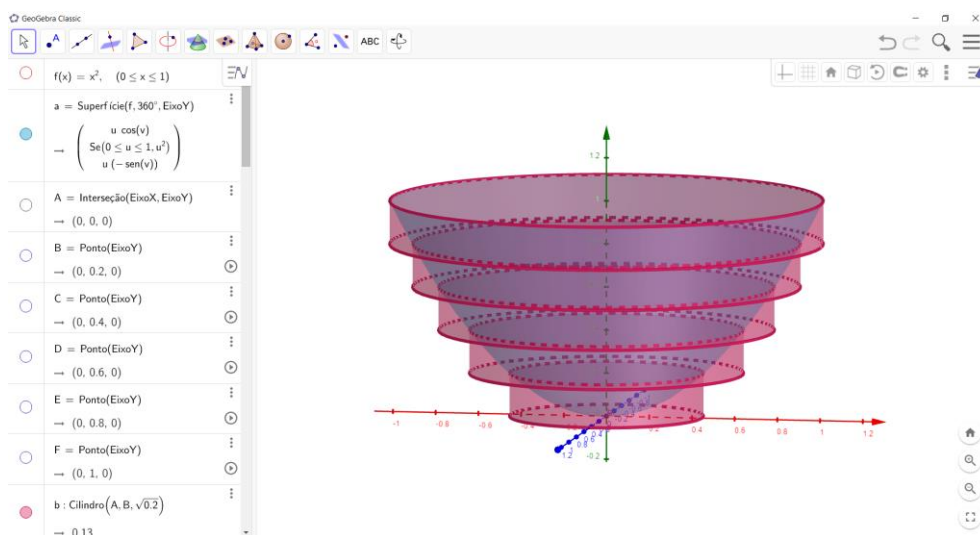
O desdobramento apresentado no **Quadro 30** é composto por cilindros inscritos (**Figura 17**) e circunscritos (**Figura 18**) ao parabolóide, cujo cálculo aproximado do volume desejado parte da comparação com a média aritmética entre a soma dos volumes dos cilindros inscritos e dos cilindros circunscritos. Isso porque ao calcular a soma dos volumes dos cilindros inscritos ( $V_i$ ) e a soma dos volumes dos cilindros circunscritos ( $V_c$ ), é possível obter estimativas inferior e superior para o volume do parabolóide ( $V$ ). Assim, uma resposta possível para a questão é dizer que o verdadeiro volume desejado está em algum lugar entre  $V_i$  e  $V_c$ , e uma boa estimativa é obtida fazendo-se a média aritmética desses números:  $V \cong \frac{V_i + V_c}{2}$ .

**Figura 17:** Aproximação do volume desejado usando cilindros inscritos ao parabolóide e com o eixo de rotação dividido em 5 partes iguais



Fonte: Dados da Pesquisa.

**Figura 18:** Aproximação do volume desejado usando cilindros circunscritos ao parabolóide e com o eixo de rotação dividido em 5 partes iguais



Fonte: Dados da Pesquisa.

#### 4.2.4.5 A relação entre os volumes

Esta atividade tem como objetivo convidar os estudantes a investigar as seguintes relações entre o volume de um cilindro, um parabolóide e um cone de mesma base e altura:  $\text{parabolóide} = \frac{3}{2} \text{cone}$ ;  $\text{cone} = \frac{1}{3} \text{cilindro}$ ;  $\text{parabolóide} = \frac{1}{2} \text{cilindro}$ ; e que são emergentes em *O Método*, *Proposição 4* de Arquimedes “Qualquer segmento de um conoide reto (isto é, um parabolóide de revolução) seccionado por um plano perpendicular

ao eixo é igual a  $1\frac{1}{2}$  vezes o cone que tem a mesma base e o mesmo eixo do segmento” (BARON, 1985, p.50).

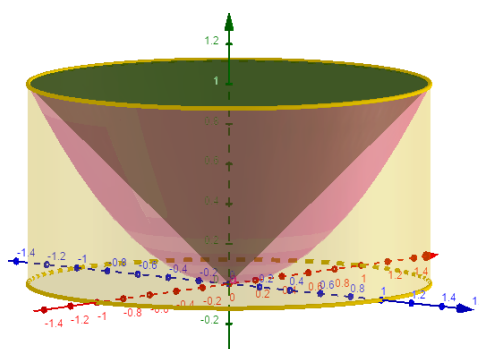
Sua aplicação é sugerida após a investigação do volume do parabolóide, assim os estudantes podem resgatar a discussão anterior e o valor aproximado assumido como o desfecho, para ter um ponto de partida na nova investigação.

Durante o desenvolvimento prático da atividade, os estudantes foram orientados a desenvolver os passos do roteiro impresso que foi entregue. Esse documento apresentava instruções para a construção do cenário de investigação no *software* GeoGebra que envolve a construção de três sólidos em um mesmo ambiente (**Figura 19**), bem como alguns questionamentos que foram discutidos e fomentaram as explorações e ideias dos participantes. Todos esses elementos podem ser vistos no **Quadro 31**, **Quadro 32** e **Quadro 33** a seguir.

#### Quadro 31: Apresentação da atividade 5

*Atividade: Determine, se existir, as relações entre os volumes de um cilindro, um parabolóide e um cone de mesma base e altura.*

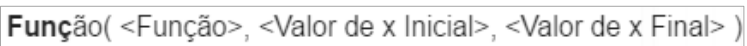
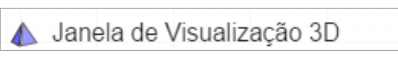
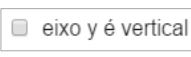
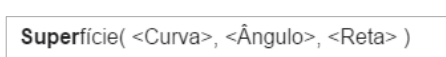
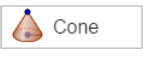
Figura 1: Sólidos



Fonte: Dados da Pesquisa.

### Quadro 32: Instrução para início da atividade 5

#### 1. Construção dos sólidos utilizando o GeoGebra.

- a) Clique no campo “Entrada” , digite “Função”, escolha a opção  clicando sobre ela e, em seguida, digite dentro dos parênteses “ $x^2, -1, 1$ ”. Pressione a tecla “Enter” .
- b) Abra a janela de visualização 3D clicando em , presente no canto superior direito, seguido de  e escolha a opção “Janela de Visualização 3D” .
- c) Oculte a “Janela de Visualização” clicando em , seguido de “Fechar” .
- d) Posicione o Eixo Y como vertical. Para isso clique em , seguido de  e selecione a opção . Acesse também o ícone , escolhendo a opção .
- e) Clique no campo “Entrada” , digite “Superfície”, escolha a opção  clicando sobre ela e, em seguida, digite dentro dos parênteses “*nome da função do item 1 gerado pelo GeoGebra*,  $2\pi$ , EixoY”. Pressione a tecla “Enter” .
- f) Clique na aba “Pirâmide” , selecione a ferramenta ‘Cilindro’  e construa na “Janela de visualização 3D” um cilindro com centro da base em (0,0,0), raio e altura igual a 1.
- g) Construa um cone com vértice em (0,0, 0), raio e altura igual a 1. Para isso, use novamente a aba “Pirâmide”  e selecione a opção “Cone” .

Fonte: Dados da Pesquisa.

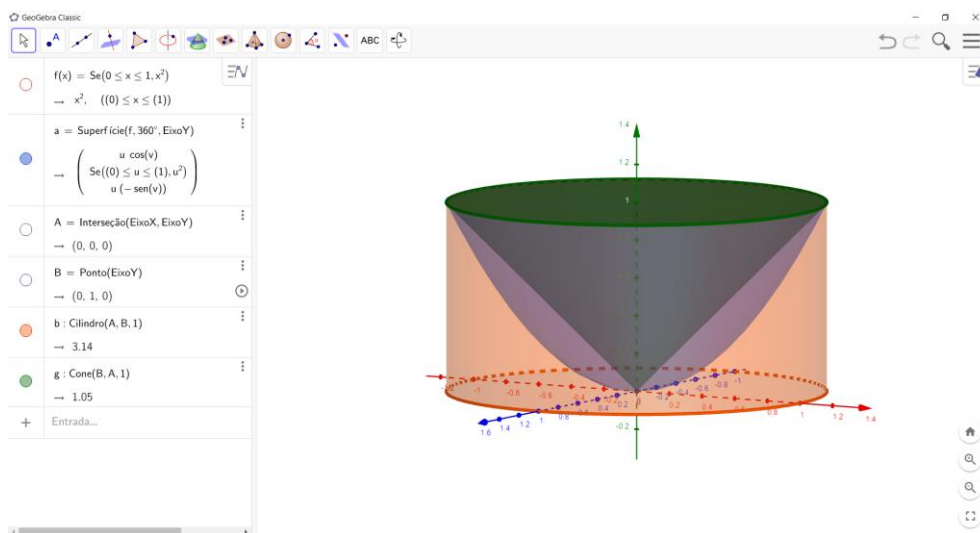


### Quadro 33: Questionamentos da atividade 5

- h) Como podemos calcular o volume desses sólidos usando o GeoGebra? É possível relacionar esses valores?
- i) Como podemos generalizar essa relação?

Fonte: Dados da Pesquisa.

**Figura 19:** Construção de um cilindro, um parabolóide e um cone de mesma base e altura



Fonte: Dados da Pesquisa.

Durante a exploração e desenvolvimento das ideias, os estudantes puderam fazer uso do próprio GeoGebra para consultar e/ou calcular algum valor, por meio da calculadora do computador e utilizando folhas de papel para desenvolver algum cálculo ou fazer anotação. A estratégia mais recorrente entre as duplas foi o comparativo de *um para um* e a validação das suposições utilizando a calculadora.

#### 4.2.5 Método de análise de vídeos e descrição dos dados

Na busca pela compreensão de como os estudantes pensam e raciocinam sobre um conjunto de ideias matemáticas, a análise dos dados desta pesquisa teve início durante o desenvolvimento das sessões de experimento de ensino, uma vez que já era possível observar e constatar a manifestação de alguns aspectos do PD (*Noção de limite e continuidade; Noção de infinitésimo; Conceito de integral definida; e/ou Concepção visual-geométrica*) por parte dos participantes da produção de dados desta pesquisa em alguns momentos da investigação como, por exemplo, na estratégia de buscar o valor de uma área desconhecida por comparação com áreas de figuras já conhecidas por eles.

A fim de validar as primeiras percepções da pesquisadora frente aos aspectos do PD emergentes na pesquisa e estudar detalhadamente todos os discursos e construções dos estudantes em cada uma das atividades propostas, os registros audiovisuais foram revistos com a frequência e os métodos adequados para concluir a transcrição dos diálogos e de alguns gestos realizados pelos participantes. Essas informações foram trabalhadas e codificadas em um quadro segundo o modelo analítico para estudar o desenvolvimento do pensamento matemático proposto por Powell, Francisco e Maher (2004). Esse modelo se apoia em um estudo transversal e longitudinal sobre o desenvolvimento de ideias de um grupo focal de estudantes e foi desenvolvido com a intensão de pôr em movimento as hipóteses sobre fases apropriadas de análise (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004). Os autores empregam uma sequência de sete fases interativas e não lineares, que são descritas no **Quadro 34**, a seguir.

**Quadro 34:** Modelo de análise de vídeo

| <b>Fase</b>                             | <b>Descrição</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-----------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Observar atentamente aos dados do vídeo | O pesquisador busca uma familiarização com o conteúdo dos arquivos audiovisuais em sua totalidade, assistindo e ouvindo várias vezes, sem impor intencionalmente uma lente analítica específica sobre o que observou.                                                                                  |
| Descrever os dados do vídeo             | O pesquisador escreve breves descrições codificadas no tempo de um conteúdo do vídeo. A duração dos intervalos de tempo é escolha do próprio pesquisador, bem como o critério estabelecido. É importante que nessa fase as descrições sejam de fato descritivas e não interpretativas ou inferenciais. |
| Identificar eventos críticos            | O pesquisador revê cuidadosamente os arquivos audiovisuais e identifica eventos críticos. Um evento é considerado crítico quando demonstra uma significativa ou constante mudança em relação a uma compreensão prévia, um salto conceitual em relação a uma concepção anterior.                        |
| Transcrever                             | O pesquisador transcreve eventos críticos para analisar com atenção elementos como linguagem e fluxo de ideias. As transcrições também ocorrem quando porções dos dados de vídeo fornecem evidência para assuntos analíticos ou teóricos relativos à pergunta norteadora da pesquisa.                  |
| Codificar                               | O pesquisador foca sua atenção no conteúdo dos eventos críticos e os códigos são definidos em relação à pergunta norteadora da pesquisa ou aos temas emergentes.                                                                                                                                       |
| Construir o enredo                      | O pesquisador examina com atenção e intensivamente códigos identificados e seus respectivos eventos críticos, e tenta discernir uma narrativa emergente e envolvente sobre os dados.                                                                                                                   |
| Compor a narrativa                      | O pesquisador explora uma interpretação particular do todo usando os dados como evidência, produzindo, dessa forma, uma narrativa escrita.                                                                                                                                                             |

Fonte: Powell, Francisco e Maher (2004).

Durante a breve revisão da literatura sobre metodologia de vídeo, chamada assim pelos autores, Powell, Francisco e Maher (2004) comentam que:

Em tempos atuais, a capacidade de gravar em vídeo e desvelar momento-a-momento de sons e imagens de um fenômeno tem se transformado numa ampla e poderosa ferramenta da comunidade de pesquisa em Educação Matemática. Utilizando os registros de vídeo como dados, pesquisadores têm produzido descrições fascinantes de professores e estudantes em cenários clínicos e de sala de aula envolvidos numa matriz de tarefas matemáticas (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004, p.4).

A maior dificuldade para a transcrição dos registros audiovisuais é que existem dados de mais para serem analisados, o que leva o pesquisador a ter que decidir quais aspectos de um determinado fluxo contínuo de diálogo e comportamentos são mais relevantes para o contexto e a pergunta norteadora da pesquisa que está sendo proposta.

Para essa pesquisa, os eventos críticos foram relacionados aos momentos nos quais os estudantes realizaram a construção (visual ou não) de alguma aproximação para a área ou para o volume do objeto investigado. Os códigos definidos estão relacionados a pergunta norteadora e os aspectos do PD emergentes durante o desenvolvimento das atividades, e são: *Noção de limite e continuidade*; *Noção de infinitésimo*; *Conceito de integral definida*; e/ou *Concepção visual-geométrica*. A narrativa é composta por um quadro representando os momentos de manifestação de algum aspecto do PD por parte dos estudantes.

Desse modo, no **Capítulo 5** a seguir, apresento transcrições de momentos considerados por mim como sendo críticos, analisados momento a momento, que ocorreram nas sessões de ensino realizadas com os participantes da produção de dados dessa pesquisa. Também trago ilustrações das construções feitas pelos estudantes com o GeoGebra.

## 5. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Neste capítulo, apresento os dados produzidos por duas duplas de estudantes que participaram desse estudo, trago alguns comentários e apontamentos, teço uma relação entre o percurso trilhado pelos estudantes e os aspectos do PD emergentes, e apresento alguns diagramas para ajudar na compreensão dos dados e na discussão final (**Capítulo 6**) desta pesquisa.

### 5.1 Proposta de análise e discussão dos dados

Almejando responder à pergunta de pesquisa desta dissertação: *Quais aspectos do PD e do pensar-com-GeoGebra emergem quando estudantes do Ensino Médio investigam atividades sobre o cálculo de áreas e volumes?* nesta seção, apresento a proposta que foi incorporada no desenvolvimento da análise dos dados dessa pesquisa.

Os dados apresentados foram produzidos a partir da realização de duas *sessões de ensino* (STEFFE; THOMPSON, 2000) com duas duplas de estudantes do Ensino Médio. Seguindo a ideia de *amostragem para pesquisa qualitativa* proposta por Marshall (1996), o critério de seleção empregado para a escolha dessas duplas, dentre as seis que participaram da produção de dados, foi: ***amostra de conveniência***, devido à qualidade do áudio quando comparado com as demais gravações; ***amostra de julgamento***, diante das observações feitas durante a realização das sessões de ensino; e ***amostra teórica***, pelo embasamento e estruturação de aspectos do PD feita por esta pesquisa no **Capítulo 2**.

A primeira dupla, composta por Bianca e Lívia, produziu os dados diante das atividades *Quadratura do círculo* e *Cubatura da esfera*. Cada atividade foi pensada-com-GeoGebra e explorada em uma sessão de ensino. As estudantes estavam matriculadas no 1º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Padre Cesare Toppino, na cidade de Lavínia-SP.

A segunda dupla era composta por Janaina e Matheus. Ambos os estudantes estavam matriculados na mesma escola que a dupla anterior, mas pertenciam ao 3º ano do Ensino Médio. As atividades pensadas-com-GeoGebra e exploradas por essa dupla foram: *O problema da área*, *O problema do volume* e *A relação entre os volumes*. Nesse caso, a primeira atividade foi trabalhada em uma sessão de ensino e as demais em outra.

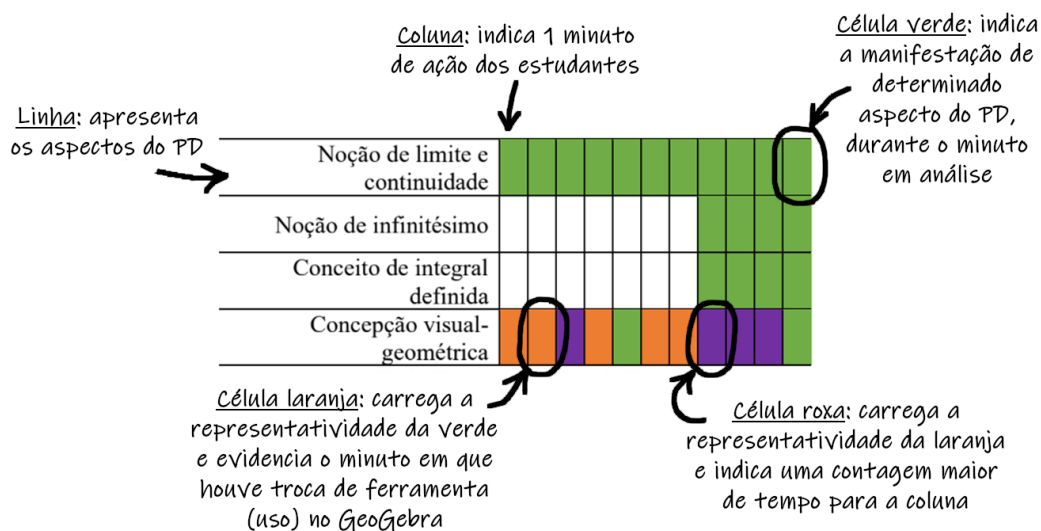
Esta pesquisa apresenta o registro dos procedimentos e raciocínios empregados pelos estudantes em filmagens de todas as sessões de ensino, captação da tela do

computador e *webcam*, criação de arquivos individuais de cada exploração e investigação feita pelos estudantes no GeoGebra, e anotações em folha de papel.

Para analisar os vídeos, seguiu o modelo proposto por Powell, Francisco e Maher (2004) (ver **Quadro 34**, subseção 4.2.5, **Capítulo 4**, dessa dissertação), que apresenta uma sequência de sete fases interativas e não lineares. Uma dessas fases consiste na identificação de eventos críticos. Nesta pesquisa está sendo considerado como evento crítico os momentos nos quais os estudantes realizaram a construção (visual ou não) de alguma aproximação para a área ou o volume do objeto investigado. Esses momentos são apresentados e codificados nas próximas seções desse capítulo.

A codificação empregada neste trabalho segue a proposta apresentada por Barbosa (2019), que consiste na construção de diagramas moldados por linhas horizontais e colunas. Em cada linha é evidenciado um aspecto do pensamento que está sendo observado, as colunas são construídas de acordo com o tempo de duração do evento crítico e as células são coloridas de acordo com o momento em que houve a emergência de determinado aspecto do pensamento. Adequando a proposta aos dados desta pesquisa (**Figura 20**), as linhas horizontais apresentam os aspectos do PD considerados neste estudo; as colunas são construídas de acordo com o tempo de duração do evento crítico, contado em minuto; as células recebem a cor verde para indicar o aspecto do PD identificado, a cor laranja para indicar a troca de ferramenta (uso) no GeoGebra e a cor roxa para evidenciar uma contagem maior de tempo na coluna. Para essa codificação, foram considerados apenas os momentos nos quais a dupla iniciou uma construção (visual ou não) e finalizou de modo a validar alguma aproximação ao valor desejado.

**Figura 20:** Exemplo para realização da leitura dos diagramas presentes no Capítulo 5



Fonte: Dados da Pesquisa.

Os aspectos do PD que são discutidos e evidenciados pelos dados desta pesquisa foram estruturados em um quadro e apresentados no **Capítulo 2**. Entretanto, considero importante o resgate de tais elementos para melhor compreensão do atual capítulo. O **Quadro 35** a seguir ilustra essa retomada.

**Quadro 35:** Aspectos do PD

| Aspecto                        | Caracterização                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Noção de limite e continuidade | Quando há manifestação de raciocínios e conclusões envolvendo um processo de aproximação a um valor máximo ou mínimo, apresentando uniformidade nos elementos de investigação construídos.                                                                                                      |
| Noção de infinitésimo          | Quando há a manifestação de ideias relacionadas a redução no tamanho de uma medida até que ela fique o mais pequena possível, mas sem se anular. Essa redução implica no aumento de repartições de um intervalo ou no número de lados de um polígono (inscrito e/ou circunscrito), por exemplo. |
| Conceito de integral definida  | Quando há a manifestação de propostas envolvendo o cálculo de área e/ou volume por meio de intervalos bem definidos.                                                                                                                                                                            |
| Concepção visual-geométrica    | Quando há a manifestação de construção de figuras planas e/ou espaciais, bem como a análise de figuras para a manifestação de raciocínios e conclusões.                                                                                                                                         |

Fonte: Elaboração própria.

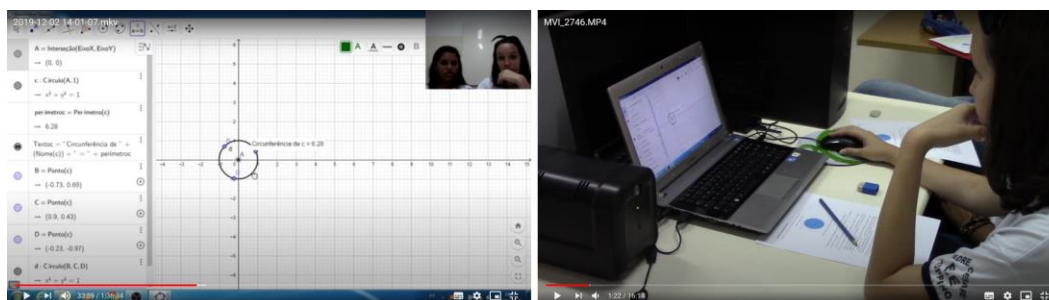
## 5.2 Pensamento diferencial-com-GeoGebra envolvendo a *Quadratura do círculo*

A primeira sessão de ensino de Bianca e Livia (estudantes do 1º ano do Ensino Médio) foi realizada em 02 de dezembro de 2019 e teve início com um momento de *socialização com o GeoGebra* (duração de 18 minutos e 40 segundos). Nessa socialização, seguindo as minhas orientações, a dupla observou o *layout* do *software*; explorou o campo de Entrada ( + | Entrada... ) e as ferramentas Ponto ( , Mover ( , Polígono ( , Polígono Regular ( , Área ( , Círculo (  Círculo: Centro & Raio ); e aplicou o *zoom* por meio dos ícones presentes no canto inferior direito da tela (  e  ) e com o botão de rolagem do *mouse*. Ao final desse momento, orientei que Bianca e Livia descartassem as construções feitas e iniciassem um novo arquivo no GeoGebra.

A sessão de ensino seguiu com um rápido diálogo introdutório, em que propus que a dupla construísse no GeoGebra um círculo de raio 1 e, observando o objeto, tentasse

lembrar como era calculado a área da região limitada pela curva construída. Após um tempo de conversa entre as estudantes e eu, Livia lembrou algo que viu no 9º ano do Ensino Fundamental e disse: “*A gente tinha que usar... Eu não lembro muito como é que é... Tinha o pi, aí tinha o raio...*”, e depois completou: “*Eu lembro que era raio ao quadrado...*”. Ao manifesto dessa memória, propus que a dupla fizesse uso dessa fórmula e calculasse a área que estávamos buscando. Depois de concluírem que era  $\pi$ , as convidei a buscar esse mesmo resultado usando o *software* GeoGebra. Como as estudantes ainda estavam imersas na socialização do *software* realizada no início da sessão de ensino, apresentaram dificuldade em articular seus pensamentos com a proposta da atividade. Depois de realizarem algumas tentativas vinculadas às ferramentas Área (  Área ); Distância, Comprimento ou Perímetro (  Distância, Comprimento ou Perímetro ); e Círculo definido por Três Pontos (  Círculo definido por Três Pontos ), Livia perguntou: “*Como que calcula a área?*”, e a busca por essa resposta, mediante o uso do *software*, continuou. Toda essa primeira abordagem realizada pelas estudantes teve o tempo de duração de 16 minutos e 53 segundos, e é ilustrada pela **Figura 21**, a seguir.

**Figura 21:** Primeiros momentos de investigação da atividade *Quadratura do círculo* – Bianca e Livia



Fonte: Dados da Pesquisa.

A fim de ilustrar alguns direcionamentos que a dupla pudesse seguir durante a investigação, sugeri que as estudantes tentassem imaginar como esse problema era investigado pelas antigas civilizações babilônicas, egípcias, hindus e chinesas, antes mesmo de terem o conhecimento sobre o  $\pi$ . Disse que um caminho usado era a aproximação e que para aplicar essa ideia na figura desejada, essas civilizações usavam como base a estratégia de explorar algo que já era conhecido.

A transcrição abaixo apresenta registros dos momentos iniciais da segunda tentativa de investigação da atividade feita por Bianca e Livia, em que, a partir das manipulações no *software* GeoGebra seguintes, foi possível identificar a emersão de três aspectos do PD: *Noção de limite e continuidade*, *Noção de infinitésimo* e *Concepção*

*visual-geométrica*. O diálogo seguiu da seguinte forma:

Ana Rita: *O que vocês acham que eles já conheciam?*

[estudantes pensativas]

Ana Rita: *Pensando nesse contexto de área, tá? De cálculo de área. O queque vocês acham que eles já conheciam para calcular a área?*

[Lívia cochicha algo, mas não foi possível transcrever por problemas de áudio]

Bianca: *A questão do lado vezes lado...*

Ana Rita: *Lado vezes lado, a gente está falando da área de que figura?*

Bianca: *Aí seria a do quadrado, né?*

Ana Rita: *A do quadrado! O quadrado eles já conheciam porque não envolvia esse pi. Pi é estranho para a gente.*

[Bianca comenta algo sobre o círculo, mas não foi possível transcrever por problemas de áudio]

Ana Rita: *Então, assim, a gente conhece a área do quadrado, não tem o pi para calcular... Qual outra área que a gente conhece e que não tem o pi para calcular?*

Bianca: *Retângulo.*

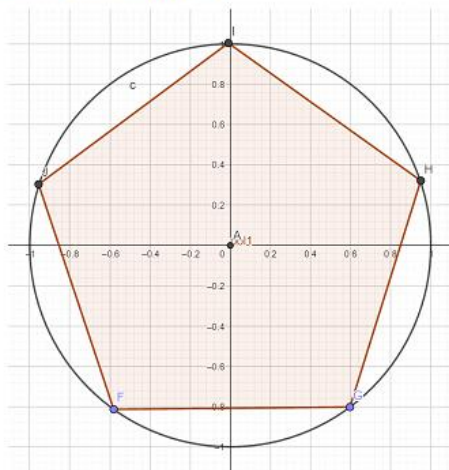
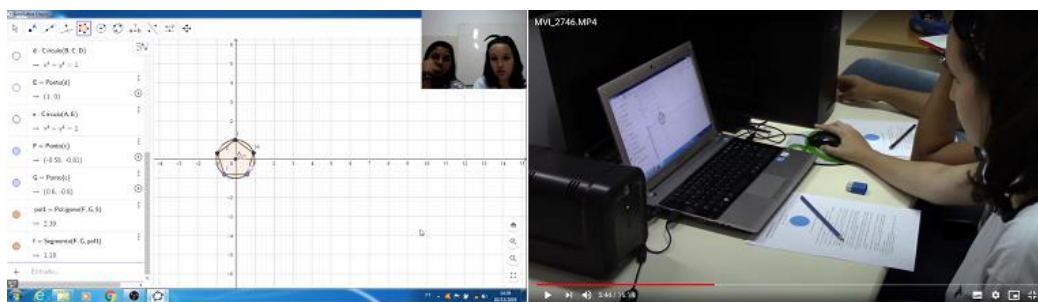
Lívia: *Triângulo.*

Ana Rita: *Retângulo, triângulo... Então eles faziam isso. Todas essas outras áreas dessas figuras que tinham só lados retos, eles já sabiam trabalhar. Então para calcular a área de uma região desconhecida para eles, eles tentavam a aproximação usando algo conhecido.*

Diante dessa conversa, Lívia, que estava com a mão sobre o mouse, voltou a sua atenção para as ferramentas de polígonos que o GeoGebra apresentava. Ela selecionou a opção Polígono Regular ( Polígono Regular) e, em seguida, explicitou a sua ideia para a Bianca, que comentou algo e, então, Lívia iniciou a construção no GeoGebra. Infelizmente, em virtude da qualidade do áudio nos arquivos de vídeo que foram gravados, não foi possível transcrever esse diálogo entre Bianca e Lívia. A construção feita pela dupla é apresentada na **Figura 22**, a seguir.



**Figura 22:** Construção concluída - Aproximação área do círculo - Bianca e Livia (2ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa.

Nessa segunda tentativa feita pelas estudantes, é possível constatar a emergência do aspecto do PD de **Concepção visual-geométrica**, quando a dupla recorre a construção do polígono. Pelo fato de o objeto ter sido construído de modo inscrito no círculo, também é possível constatar a emergência do aspecto do PD de **Noção de limite e continuidade**. O tempo entre a manifestação da ideia, a socialização e adequação, e o início e a finalização da construção do objeto, é de menos de um minuto.

A transcrição abaixo apresenta o diálogo que seguiu a construção ilustrada na **Figura 22**:

Ana Rita: *Qual que deu a área dessa região aí?*

Livia e Bianca: [olhando a janela de álgebra do GeoGebra] *Dois ponto trinta e nove.*

Ana Rita: *Dois ponto trinta e nove, para esse pentágono aí que foi criado, né? Agora, vamos observar essa figura com a que nós queremos procurar a área. Está uma boa aproximação? Vocês acham, visualmente, assim: está bacana, está uma boa aproximação?*

Bianca: *Hum, acho que sim. Está pegando a maior parte daqui.*

Ana Rita: *Sim, está uma boa aproximação. Agora a pergunta é: dá para melhorar?*

Livia e Bianca: *Dá!!!*

Ana Rita: *Dá? Então vamos fazer isso.*

Bianca: *E se fizesse outro polígono pegando essas partes aqui que você não usou... Depois pegava as duas... Para fazer, tipo, sei lá...*

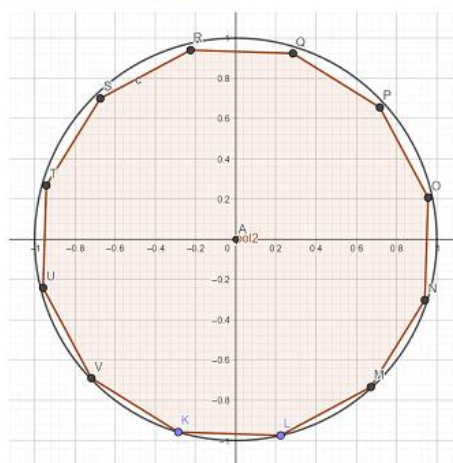
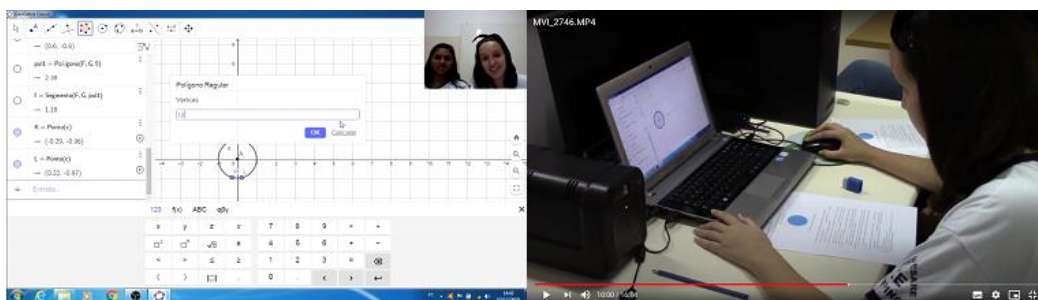
Lívia: *Se a gente colocar mais lados?*

Bianca: *Ele vai ficar mais simplificado. Dá certo!*

Lívia: *Então vai!*

A decisão de continuar a exploração usando o polígono regular, novamente enfatiza a emergência do aspecto do PD de **Concepção visual-geométrica**. Considero válido pontuar que, diante do cenário de investigação proposto (uso do *software* GeoGebra), esse aspecto emergiu em todas as tentativas exploradas pela dupla. Nesse momento da investigação, também é possível constatar a emergência do aspecto do PD de **Noção de limite e continuidade**, uma vez que na transcrição acima estão presentes momentos envolvendo a comparação entre as áreas (obtida e desejada) e a ideia de que existe um valor máximo para a área investigada, sendo essa ação referenciada pela estudante Bianca como “*mais simplificado*”. O aspecto do PD de **Noção de infinitésimo** emerge diante da ideia exposta por Lívia envolvendo o aumento no número de lados do polígono regular, que acaba implicando na redução do tamanho da medida de seus lados, como é possível ver na terceira construção, apresentada na **Figura 23**, a seguir.

**Figura 23:** Construção concluída - Aproximação área do círculo - Bianca e Lívia (3ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa.

Assim, a atividade segue com mais um momento de diálogo e de construção.

Bianca: *Hum... Está bem mais simplificado!*

Ana Rita: *Quanto que deu a área agora nessa?*

Lívia: *É... [olhando a janela de álgebra do GeoGebra] Dois ponto nove.*

Ana Rita: *Tá... A primeira tinha dado dois vírgula trinta e nove [Bianca respondendo junto], essa já aumentou, dois ponto nove... O que que vocês podem falar dessa área com relação a que a gente está procurando? Melhorou? Não melhorou? [Bianca e Lívia respondendo que melhorou] Chegou exato? Não chegou exato?*

Lívia: *Exato não.*

Bianca: *Ainda falta um pouquinho ali [aponta o lápis em direção da tela do notebook], mas está mais perto.*

Ana Rita: *Está mais perto! Pensando nesse pouquinho que falta, pensando nesse “mais perto” que vocês estão falando... Um chute, se fosse pra chutar assim, quanto que vocês acham que vai ser a área então dessa figura?*

Bianca: *A gente está em dois ponto nove... Acho que é coisa de milímetros... [fazendo um gesto com a mão em que os dedos polegar e indicador ficam bem próximos]*

Lívia: *Três ponto um.*

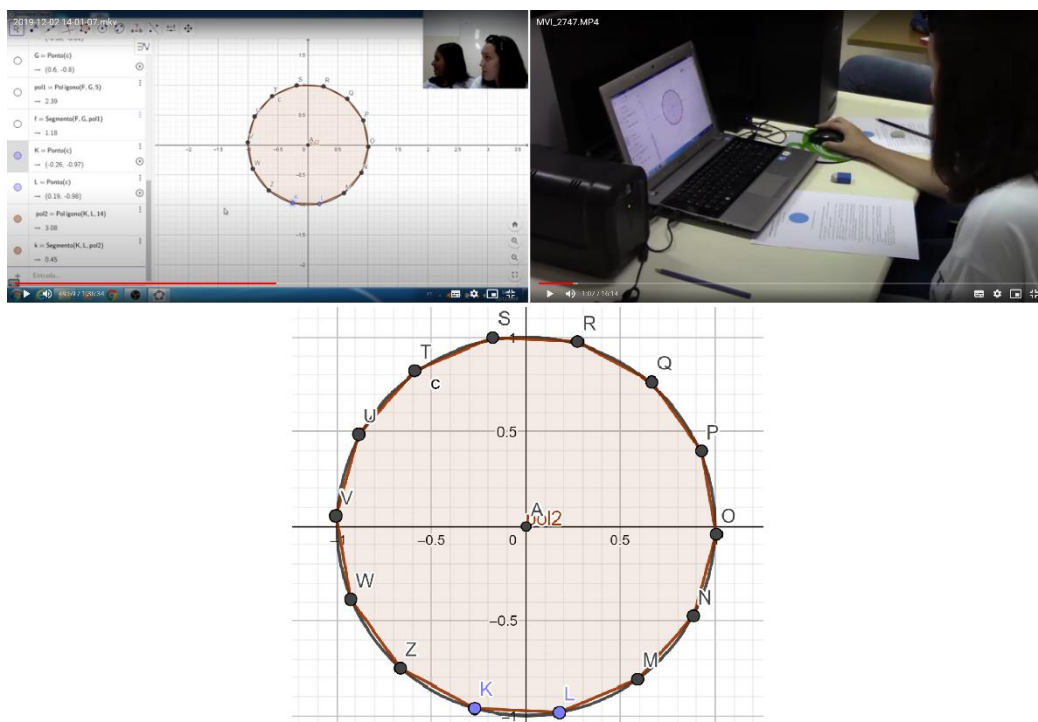
Ana Rita: *Hum, quanto?*

Bianca: *Três ponto cinco... Se não é três ponto um é três ponto cinco.*

Nessa transcrição é possível notar novamente a emersão do aspecto do DP de ***Noção de limite e continuidade*** quando a dupla faz a estimativa de um intervalo de aproximação para a área desejada.

Essa estipulação implicou na construção de mais uma tentativa de aproximação do valor da área desejada. Essa tentativa contou com a construção de quatro polígonos regulares até que as estudantes pudessem chegar visualmente no que estavam idealizando (**Figura 24**).

**Figura 24:** Construção concluída - Aproximação área do círculo - Bianca e Livia (4ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa.

E seguiu com o diálogo:

Bianca: *Três ponto oito!*

Livia: *Faltou bemmm pouquinho* [apontando com o dedo para a tela do notebook]

Bianca: *Ele tá mais simplificado ainda.*

Ana Rita: *Aham! E que que vocês podem falar desse três ponto oito? Já tá certinho, bonitinho, ou tá faltando coisa ou tá sobrando coisa?*

Livia: *Tá faltando bem pouquinho.*

Ana Rita: *Tá faltando bem pouquinho...*

Bianca: *Aqui em cima* [apontando para a tela do notebook e fazendo movimento circular com a mão] *a linha tá bem certinha... Só aqui embaixo que passa um pouquinho.*

Ana Rita: *Aham...*

[Livia então assume o controle do mouse e começa a movimentar o vértice L do polígono regular, na tentativa de, aumentando a medida dos lados da figura, se aproximar ainda mais da área desejada. Em seguida, aponta para o valor da área do polígono que estava visível na janela de álgebra do GeoGebra]

Bianca: *Três ponto quatorze!* [Bianca e Livia riem]

Ana Rita: *Aí o que passou lá em cima, que que tá acontecendo?*

Bianca e Livia: *É o que falta aqui embaixo!* [Bianca apontando o lápis para a tela do notebook]

Nessa última tentativa proposta pela dupla, são emergentes os aspectos do PD de *Noção de limite e continuidade*, quando insistem em construir o polígono regular inscrito

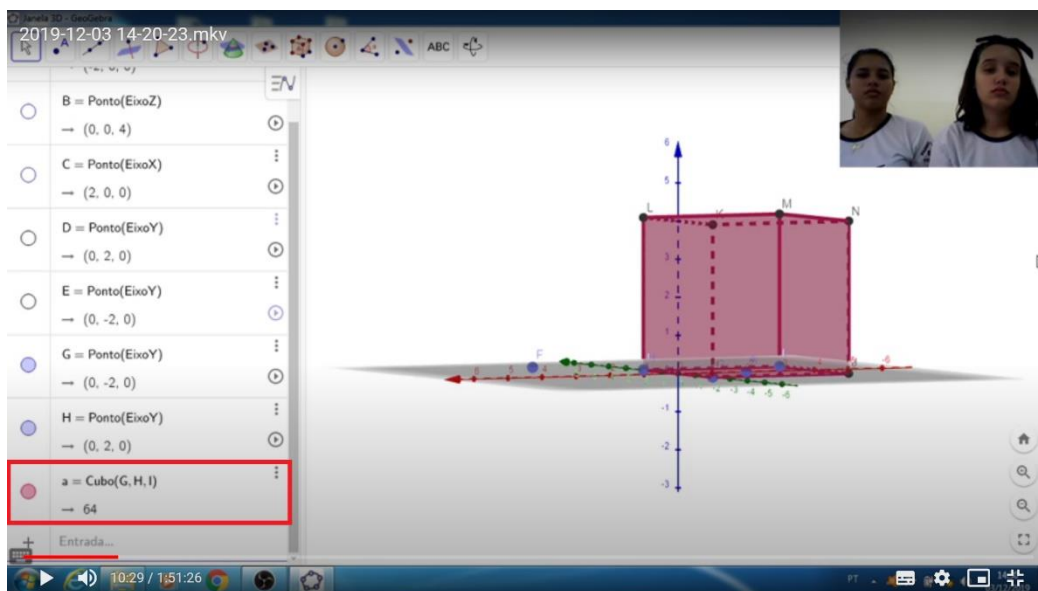


o ambiente tridimensional (3D) a investigação que ocorreu anteriormente na *Quadratura do círculo*. Esta pesquisa trabalhou as atividades elaboradas de modo sequencial, mas essa ideia não é fixa e permite adaptações por parte de quem pretende desenvolvê-la.

Pensando de modo sequencial, os dados apresentados e discutidos nesta seção também foram produzidos pela dupla Bianca e Livia.

Na segunda sessão de ensino, realizada em 03 de dezembro de 2019, houve um momento de *socialização com o GeoGebra* (duração de 14 minutos e 41 segundos), focado no ambiente 3D. A troca de ambientes (Janela 2D para Janela 3D) e as ferramentas Mover (🖱️), Ponto (📍), Pirâmide (🏔️), Cubo (📦), Esfera (🌐) foram alguns dos elementos explorados nessa socialização. Durante a experiência com o Cubo, as estudantes foram questionadas sobre um valor que apareceu na janela de álgebra do GeoGebra (**Figura 26**). Esse momento é apresentado na transcrição a seguir, por ilustrar a concepção de volume por parte das estudantes.

**Figura 26:** Socialização com o GeoGebra - Compreensão das informações apresentadas na janela de álgebra



Fonte: Dados da Pesquisa.

Ana Rita: *Agora, olhando pro objeto cubo que a gente tem na janela de álgebra, o que vocês acham que é esse valor de sessenta e quatro que ele trouxe?* [Bianca e Livia se olham]

Bianca: *Não é perímetro e área?*

Livia: *Não sei...*

Bianca: [responde à Livia em um tom de voz mais afirmativo] *Perímetro e área.*

[Livia concorda com Bianca e responde à pergunta feita por Ana Rita, afirmando ser a área do cubo. Por problemas de áudio, essa parte do diálogo não pôde ser transcrito]

Ana Rita: *Área de todas as faces?*

Lívia: *Isso.*

Ana Rita: *Queque você acha, Bianca?*

Bianca: *Primeiro eu pensei que era perímetro* [Bianca comenta mais alguma coisa, mas por problemas de áudio não foi possível transcrever]

Ana Rita: *Perímetro?*

Bianca: *Deve ser a área.*

Ana Rita: *E se eu disser que não é nem um e nem outro* [Bianca e Lívia esboçam uma feição de surpresa].

Lívia: *Queque é?*

Ana Rita: *Ó, vamos pensar por exemplo num copo...* [Ana Rita aponta para o copo que estava na sala. Lívia acena a cabeça concordando] *Dai é figura 3D. Geralmente quando a gente vai fazer referência a esse objeto, a gente não fala sobre a área que nós temos, a gente costuma falar sobre o quê?* [Lívia e Bianca ficam pensativas]

Ana Rita: *Um copo, uma garrafa... A gente fala o que?*

[Lívia parece lembrar de algo, mas não consegue relacionar imediatamente ao termo. Então, estala os dedos na tentativa de recordar o que quer falar e recorre à Bianca através de um questionamento. As duas iniciam um diálogo baseado nesse termo que as duas não lembravam. Infelizmente, por problemas de áudio, não foi possível transcrever esse diálogo entre as estudantes]

Ana Rita: *Uma tupperware... Qualquer objeto...*

Lívia: *A gente fala em capacidade de armazenamento?*

Ana Rita: *Em capacidade de armazenamento! Então a gente tá falando do volume* [Lívia acena um sim com a cabeça. As estudantes esboçam uma feição de felicidade].

A transcrição acima reforça a importância de fazer perguntas aos estudantes durante o desenvolvimento de qualquer atividade. Esse processo permite que o professor tenha uma melhor percepção da compreensão que os estudantes têm diante de uma determinada situação, permite que os estudantes reflitam sobre as suas interpretações e (re)organizem seus pensamentos, e contribui para a emergência de um cenário colaborativo e dialógico entre as pessoas envolvidas.

Esse teria sido um bom momento para aprofundar a compreensão de volume que esta pesquisa apresenta, mas na ocasião não o fiz por considerar que o exposto pelas estudantes era o suficiente para o desenvolvimento da atividade. Revendo a gravação desse momento, identifico esse ponto como oportunidade de melhoria e deixo como sugestão para quem tiver interesse em desenvolver a atividade da *Cubatura da esfera* ou qualquer outra envolvendo o cálculo de volume. É interessante discutir o entendimento de volume como sendo a região limitada por eixos e superfícies planas e/ou curvas, cujo valor numérico associado pode ser determinado por intermédio de diferentes estratégias



de cálculo.

Após mais alguns minutos de testes com as ferramentas do GeoGebra e a Janela 3D, solicitei que as estudantes abrissem um novo arquivo no *software* para iniciar a investigação da atividade do dia, que consistia em calcular o volume da esfera, sem usar a ferramenta Volume ( Volume) do GeoGebra e sem usar o valor de  $\pi$ . Então, orientei que a dupla construísse uma esfera com centro na origem (0, 0, 0) e raio igual a 1. Lívia, que estava manuseando o GeoGebra desde o início da sessão de ensino, fez a construção. Após essa etapa, houve um momento de exploração do *zoom* no GeoGebra, iniciando com os ícones presentes no canto inferior direito da tela ( e ) e depois explorando o botão de rolagem do *mouse*.

Com a esfera ampliada, iniciou-se a investigação de seu volume. As estudantes sugeriram trabalhar segundo o raciocínio aplicado na atividade trabalhada no dia anterior (*Quadratura do círculo*), ou seja, explorando o método de exaustão a partir de figuras inscritas, como é possível observar na transcrição:

Ana Rita: *E a pergunta é a mesma: como que vocês acham que nós podemos calcular o volume dessa esfera? Sem usar o pi...*

[Lívia e Bianca esboçam a feição de pensativas]

Lívia: *Do mesmo jeito que a gente fez ontem, colocando outros... Como é que chama?* [perguntando para a Bianca]

Bianca: *Esqueci o nome... Aqueles pontinhos...*

Lívia: *Os outros* [selecionando a ferramenta Pirâmide  no GeoGebra e olhando as opções que apareceram] ... *Pirâmide* , *Prisma*  ... [apontando com o dedo para as opções na tela do *notebook*]

Bianca: *Não, a gente usou esse aqui, não é, ontem?* [apontando com o lápis para a ferramenta Polígono 

[Lívia seguiu a indicação de Bianca com o mouse, posicionando-o sobre a ferramenta mencionada pela colega]

Bianca: *Aqui ó...*

Lívia: *É... Mas agora como é 3D, a gente tem que usar o 3D também.*

Bianca: [Com feição pensativa] *Mas qual?*

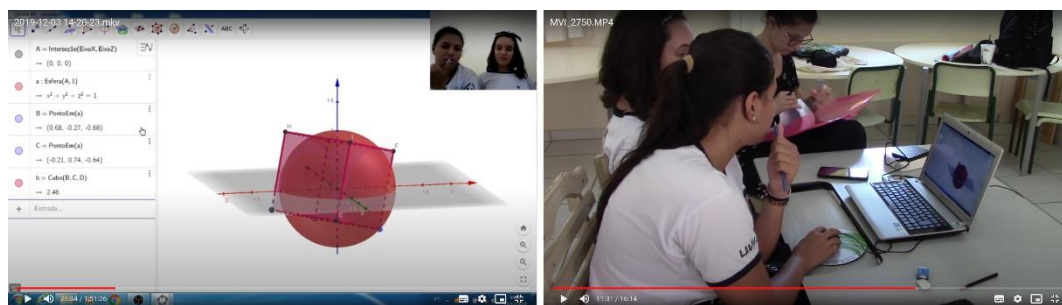
Lívia: [Voltando o mouse para a ferramenta Pirâmide e indicando as opções com o mouse] *Cubo*  ... *Prisma*  ...

Bianca: *Usa cubo.*

Desse modo, Lívia selecionou a ferramenta Cubo  no GeoGebra e a primeira tentativa de aproximação para o volume da esfera iniciou. O objeto foi construído, mas as estudantes não ficaram satisfeitas com o resultado, pois o cubo apresentou uma certa inclinação e não ficou inscrito na esfera (**Figura 27**), mesmo após Lívia e Bianca terem realizado algumas movimentações nos seus vértices.



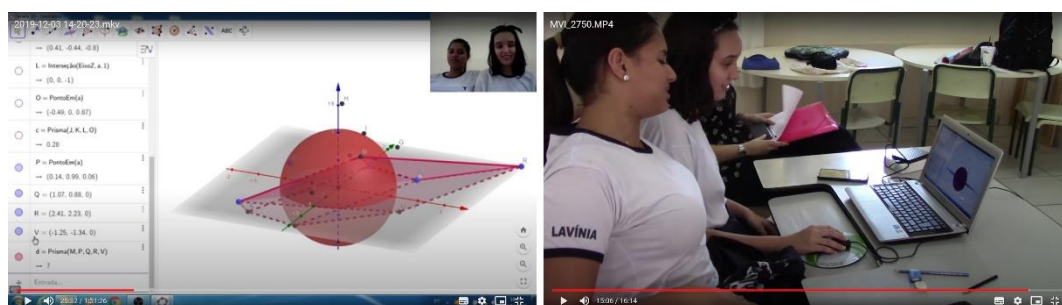
**Figura 27:** Primeiros momentos de investigação da atividade *Cubatura da esfera* – Bianca e Livia (1ª tentativa – Parte I)



Fonte: Dados da Pesquisa.

As estudantes optaram por mudar para a ferramenta Prisma  e seguiram com a exploração. Foram construídos dois prismas, um por vez, na tentativa de aproximar mais a construção visual às ideias da dupla. Nesse processo, Livia comenta “*Nossa, esse aqui é muito mais complicado*”. Então, elas vão tentando ajustar a disposição dos vértices do objeto construído com a expectativa de concretizar o que tinham em mente. Após várias modificações de posição, chegaram à construção apresentada na **Figura 28**.

**Figura 28:** Primeiros momentos de investigação da atividade *Cubatura da esfera* – Bianca e Livia (1ª tentativa – Parte II)

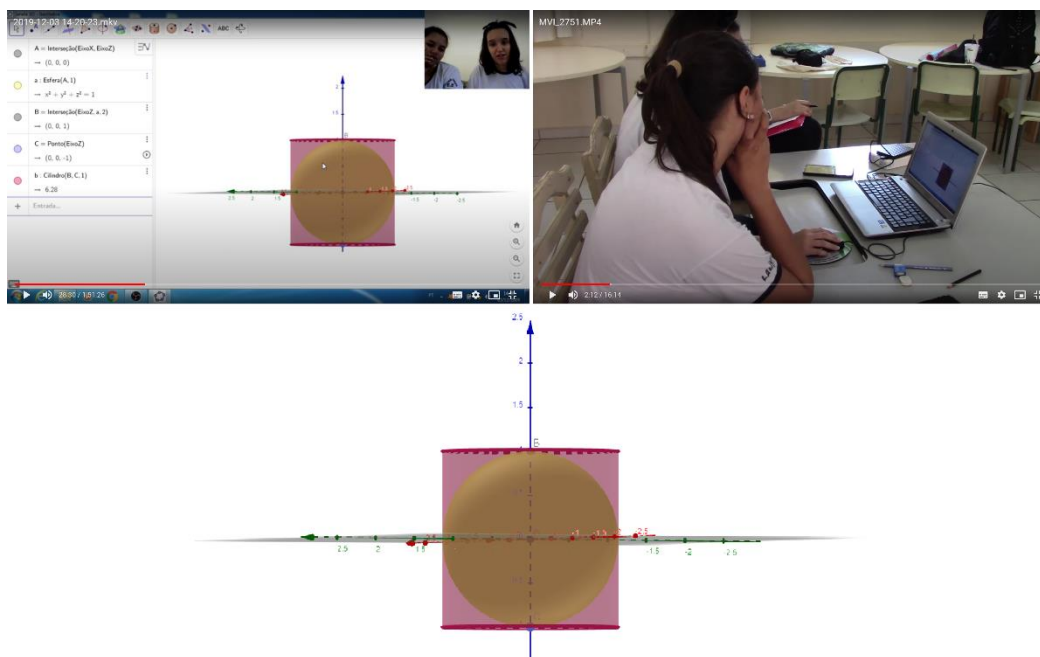


Fonte: Dados da Pesquisa.

Diante do resultado visual, as estudantes optaram por reiniciar a exploração, inclusive escolheram abrir um novo arquivo no GeoGebra e construir novamente a esfera com centro na origem  $(0, 0, 0)$  e raio igual a 1.

Bianca e Livia conversaram sobre o que poderia ser feito. Decidiram trocar a cor da circunferência de vermelho para amarelo e partiram para mais uma tentativa, agora trabalhando com a ferramenta Cilindro , mencionada por Bianca enquanto ela passava o *mouse* pelas opções de sólidos presentes no GeoGebra. Finalmente, todo o ciclo percorrido na primeira tentativa foi finalizado e as estudantes conseguiram enxergar uma aproximação ao valor do volume da esfera (**Figura 29**).

**Figura 29:** Construção concluída - Aproximação volume da esfera - Bianca e Livia (1ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa.

Todas as construções feitas até aqui pela dupla evidenciam a emersão do aspecto do PD de *Concepção visual-geométrica* e de *Noção de limite e continuidade*, considerando que as estudantes estavam em busca de construir um objeto que ficasse visualmente o mais próximo possível do tamanho da esfera e, consequentemente, de seu volume.

As transcrições abaixo apresentam o diálogo que seguiu a construção apresentada na **Figura 29**:

Bianca: *Pelo menos a gente sabe que é menos de seis ponto vinte e oito!* [olhando para o volume do cilindro construído e apresentado na janela de álgebra do GeoGebra]

Ana Rita: *Mas movimenta ele, vamos ver o tanto que passou lá embaixo.*

[Ao movimentar o plano, os objetos começam a rotacionar devido a um recurso do GeoGebra. Bianca e Livia comentam algo, mas não foi possível transcrever por problemas de áudio]

Bianca: *Ó, em cima ele ficou certo! Embaixo...*

Livia: *Também!*

Bianca: *Também! Só sobrou esses ladinhos dele!*

Ana Rita: *Uhum... E então, se for pra chutar, assim, mais ou menos, que que vocês acham que vai ser o volume da nossa esfera?*

Bianca: *Eu daria quatro, quase pra cinco...*

Ana Rita: *Oi?* [buscando confirmação da resposta de Bianca]

Bianca: *Eu daria um quatro, quase pra cinco...* [Livia acena concordando com a cabeça]

Ana Rita: *Tá, beleza! E, vamos tentar fazer uma outra abordagem, que chega mais próximo do volume da nossa esfera?*  
[Bianca e Livia acenam que sim com a cabeça]

Nessa primeira tentativa concluída pelas estudantes, é possível constatar a emergência do aspecto do PD de *Noção de limite e continuidade*, por apresentar a manifestação de raciocínios e conclusões envolvendo um processo de aproximação a um determinado valor máximo; e do aspecto do PD de *Concepção visual-geométrica*, tendo em vista que a base dessa investigação, realizada com auxílio do *software* GeoGebra, envolveu a construção de figuras espaciais. O tempo entre a construção da esfera, a observação das opções de sólidos apresentadas pelo GeoGebra, as tentativas de construção do cubo e do prisma, a escolha de seguir a investigação com o cilindro, o início e a finalização da construção do objeto, e a análise e discussão das informações visuais, durou 10 minutos e 31 segundos, já descontando os momentos de pausa para salvamento de arquivos ou alguma orientação sobre a manipulação do *software*.

Para seguir com a investigação, sugeri que as estudantes tentassem desenvolver uma nova aproximação. Na sequência, a dupla salvou a primeira tentativa finalizada na área de trabalho, voltou para a janela do GeoGebra, apagou o cilindro, selecionou a ferramenta Tetraedro  Tetraedro, por ficar curiosa quanto a sua forma, e iniciou essa construção. Ao perceber que não era bem o que esperava, a dupla apagou a construção e partiu novamente para a ferramenta Cubo  Cubo.

Livia: *E se a gente colocar o cubo aqui e aqui* [clitando com o *mouse* na Janela 3D do GeoGebra e criando dois pontos, ambos de interseção entre o eixo Z e a esfera. Em seguida, Livia cria o cubo]

Bianca: *Passou muito. Mexe a...*

Livia: *Não, ele tá na metade...*

Bianca: *Mexe a...* [Bianca continua a falar, mas não foi possível transcrever por problemas de áudio]

[Livia altera o ângulo de visão dos objetos, movimentando o plano]

Livia: *A gente consegue mexer por aqui...* [levando o *mouse* até o campo Entrada + Entrada...]

Bianca: *Ah, e se a gente fizesse por partes dele...*

[Uma olha para a outra, ambas esboçam a feição de pensativa]

Bianca: *Por quê?*

Livia: *Pra ele ficar certinho assim... Porque a gente colocando os pontos não vai conseguir colocar certinho, ele sempre vai ficar de um lado e de outro... Porque a gente não consegue clicar aqui, assim...* [movimentando o *mouse* para indicar o outro lado de visão da esfera]

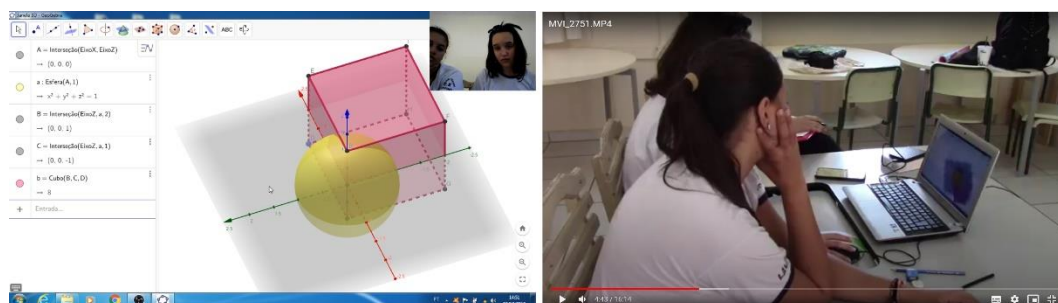
Bianca: *Sabe o que eu tava pensando... Porque esse cubo ele saiu*

*na metade de duas partes, entendeu?* [apontando para a tela com o dedo] *E se a gente fizesse igual ontem e pegar parte por parte?* [Lívia inclina a cabeça para o lado direito e esboça uma feição de concordância]

Lívia: *É, tudo bem!*

Nesse trecho transcrito, que faz parte da segunda tentativa da dupla e que ainda estava sendo alinhada, é possível identificar a emergência de três aspectos do PD: **Noção de limite e continuidade**, por ainda envolver o processo de aproximação ao volume da esfera por meio da construção de outros sólidos; **Noção de infinitésimo**, quando a Bianca se lembrou do que foi desenvolvido na sessão de ensino realizada no dia anterior e sugeriu reduzir o tamanho do cubo, aumentando assim a quantidade que seria utilizada na investigação do volume da esfera; e **Concepção visual-geométrica**, por ter sido necessária a construção do cubo com o GeoGebra (Figura 30).

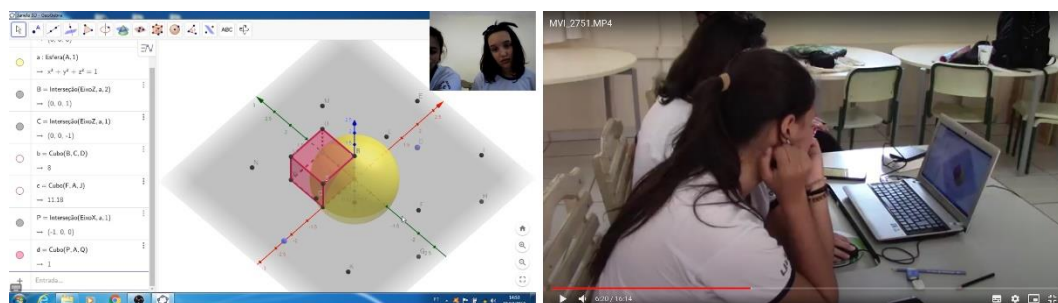
**Figura 30:** Explorando o volume do cubo em busca de uma aproximação ao volume da esfera – Bianca e Lívia (2ª tentativa – Parte I)



Fonte: Dados da Pesquisa.

A dupla seguiu com a ideia de construir um cubo menor e, depois de alguns momentos inesperados com as tentativas de construção no GeoGebra, chegou no desejado (Figura 31).

**Figura 31:** Explorando o volume do cubo em busca de uma aproximação ao volume da esfera – Bianca e Lívia (2ª tentativa – Parte II)



Fonte: Dados da Pesquisa.

Ana Rita: *Quantos cubinhos desse jeito a gente conseguiria colocar nessa nossa esfera?*

Lívia e Bianca: *Oito!*

Ana Rita: *Oito! Então significa que a gente tá trabalhando um pedacinho de oito, então um oitavo, né?* [Bianca acena que sim com a cabeça]

Bianca: *Um oitavo!*

Ana Rita: *Um oitavo! Então a gente não pode esquecer que a gente tem que fazer a multiplicação por oito.*

Lívia: *Aí aqui deu um...* [levando o mouse sobre o volume do cubo apresentado pelo GeoGebra na janela de álgebra]

Bianca: *Deu um! Sobrou uma partinha...* [apontando para a imagem na tela do notebook]

Lívia: *É...*

Bianca: *Então não é totalmente um!*

Lívia: *Quanto será que ficaria a partinha?*

Bianca: *Zero vírgula...* [Bianca finaliza sua fala, mas não foi possível transcrever por problemas de áudio]

Lívia: *Tudo isso?* [Bianca acena que sim com a cabeça]

Esse trecho reforça a emersão dos aspectos do PD de *Noção de limite e continuidade*, de *Noção de infinitésimo* e de *Concepção visual-geométrica* durante o processo de investigação escolhido pelas estudantes.

O diálogo segue com a intenção de identificar o volume de um oitavo da esfera. Ao entregar a atividade impressa à dupla, propus que as estudantes fizessem uma pausa no uso do GeoGebra e desenvolvessem o cálculo no papel, usando a fórmula  $V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ . Seis minutos e 42 segundos depois, a dupla identificou que  $V_{\frac{1}{8}esfera} \cong 0,52$ . Revendo esse momento da sessão de ensino, reconheço que fui precipitada. Poderia ter conduzido mais a exploração e investigação com o uso do *software* GeoGebra, antes de propor o desenvolvimento do cálculo que foi realizado, chegando ao valor esperado. Sugiro que esse ponto seja revisto para futuras aplicações dessa atividade.

Retornando a segunda tentativa da dupla, sugeri que as estudantes voltassem ao GeoGebra e, sabendo que o volume de um oitavo da esfera era aproximadamente 0,52, trabalhassem no cubo já construído de modo a representar a aproximação desejada. As estudantes, buscando relação com a atividade desenvolvida no dia anterior (*Quadratura do círculo*), e lembrando do roteiro que foi explorado no encerramento da sessão, seguiram na tentativa de reduzir a medida da aresta do cubo. Não conseguindo explorar a ideia de modo a obter um resultado visual que se aproximasse ao esperado, Lívia mudou de estratégia e adotou o caminho de tentar construir um cubo circunscrito à esfera e, depois, reduzir a medida de suas arestas, impactando em um menor volume. Diante de uma nova tentativa que não representava o que tinham em mente, Lívia e Bianca seguiram movimentando os vértices do cubo, não se atentando tanto ao visual dos objetos, mas

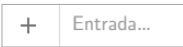






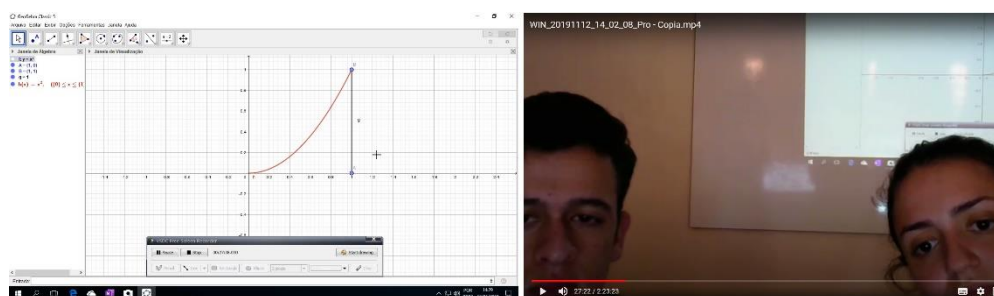
receberam, abrissem uma nova janela do GeoGebra e, seguindo a Etapa 1 do roteiro (Quadro 36), construísem o ambiente de investigação (Figura 34).

**Quadro 36:** Etapa 1 – Instrução para início da atividade *O problema da área*

6. Construção da parábola no intervalo  $0 \leq x \leq 1$  e da região S.
- c) Clique no campo “Entrada” , digite “Função”, escolha a opção , clicando sobre ela e, em seguida, digite dentro dos parênteses “ $x^2, 0, 1$ ”. Pressione a tecla “Enter” .
- d) Construa um segmento de reta vertical delimitando a região S. Para isso clique na aba “Reta”  e selecione a ferramenta “Segmento” , em seguida clique com o mouse nas posições (1,0) e (1,1) na “Janela de visualização 2”.

Fonte: Dados da Pesquisa.

**Figura 34:** Construção do ambiente de investigação – Janaina e Matheus



Fonte: Dados da Pesquisa.

Após a construção feita pela dupla, a nossa conversa seguiu. Esse momento é representado pela transcrição a seguir.

Ana Rita: *O nosso objetivo vai ser esse: calcular a área daquele espaço que nós temos... daquela região que nós temos compreendida entre essa curva que vocês acabaram de construir, o segmento que vocês já construíram e o eixo x. Então a gente tem uma figura aí, e um lado dela é uma curva!*

[Janaina e Matheus, atentos a fala de Ana Rita, acenam positivamente com a cabeça, demonstrando compreensão ao que foi dito até o momento]

Ana Rita: *E agora gente? Como que a gente pode calcular a área desse espaço aí?*

[Janaina e Matheus voltam o olhar para a tela do computador, onde a região estava representada. Além disso, Janaina olha para a atividade impressa]



Janaina: *Hum...*

Ana Rita: *Como que a gente pode calcular a área?* [Janaina e Matheus se olham] *Será que tem alguma figura que vocês já sabem calcular a área* [Janaina acena que sim com a cabeça] *e que dá pra gente ir pensando assim... ou não?*

Janaina: *Bom...*

Matheus: [Olhando para a tela do computador] *Tem alguns quadrados...*

Janaina: *Dá até pra começar...*

Matheus: *Alguns triângulos também, sei lá...*

Janaina: *Um triângulo...*

Matheus: *Ou não?*

Janaina: *É! Aqui nós temos um...* [Movimentando o mouse pela região construída] *Não... É... Quadrados, nós temos quadrados. O que mais?*

Matheus: *É, eu vejo alguns triângulos, igual eu falei para você. Não aqui... Mas ele não está cortando* [Janaina, oralmente, concorda com o fato de não está cortando] *então...*

[Janaina segue mexendo o mouse e faz o movimento de construção do possível triângulo]

Janaina: *Hum... bom...*

Ana Rita: *Fica à vontade! Se vocês já quiserem ir experimentando alguma ferramenta* [Janaina: *É...*] *e tentando fazer alguma construção... No final nós temos que chegar na área* [Matheus: *Desse...*] *dentro desse espaço, mas se vocês já quiserem ir fazendo alguma construção, por conta de vocês mesmo... Não se prenda também ao papel que eu dei não* [Janaina: *Tá...*], *vai explorando vocês.*

Aqui é possível notar as primeiras ideias de aproximação que a dupla esboçou.

Nesse momento, os estudantes ainda estavam um tanto quando apreensivos e a todo o momento tentavam olhar a atividade impressa em busca de respostas e de validação das ideias que estavam comunicando. Esse comportamento pode ser associado ao fato de eles ainda não terem tido a oportunidade de explorar abertamente uma atividade matemática.

O diálogo entre os estudantes seguiu:

Matheus: *E aí, o que você quer tentar?*

Janaina: *Não sei...*

Matheus: [Olhando para a região construída no GeoGebra] *Quer calcular, sei lá, a área desses...*

Janaina: [Completando a fala de Matheus] *Quadrados que a gente tem?*

Matheus: *É...*

Janaina: *Por exemplo...*

Matheus: *Seria zero vírgula dois?*

Janaina: *Temos três...*

Matheus: *Três...*

Janaina: *Aqui quadrados exatos... um, dois, três, quatro... exatos* [contando os quadrados que apareciam na malha quadriculada do

GeoGebra e estavam compreendidos inteiramente dentro da região a ser investigada].

Matheus: *E é zero vírgula dois cada um, tá vendo?* [se referindo a medida do lado de cada um dos quadrados]

Janaina: *Então tá...*

Matheus: *É zero vírgula dois vezes zero vírgula dois...*

Janaina: *Uhum... Então, zero vírgula dois vezes zero vírgula dois, dá...* [Janaina olha para o Matheus e sorri]

Matheus: *Zero vírgula quatro...*

Janaina: [acena com a cabeça concordando com o resultado] *Zero vírgula quatro... Então, a gente vai ter aqui...*

Matheus: *Aqui ó...* [apontando para a tela do computador] *Zero vírgula quatro... Não! É zero vírgula zero zero quatro.... Zero quatro!*

Janaina: *Hum...*

Matheus: *Porque é... Quanto que dá?*

Janaina: *Não sei...*

[Ambos fazem a conta na folha de papel entregue com a atividade impressa]

Matheus: *Zero ao quadrado, duas vírgulas, vai ser...*

Janaina e Matheus: *Zero vírgula zero quatro!*

Janaina: *Vezes quatro... Vai dar...*

Matheus: *Zero vírgula dezesseis...*

Janaina: [concordando com a cabeça] *Zero vírgula dezesseis!*

Janaina: *Agora a gente tem o resto* [apontando para a região construída no GeoGebra e rindo] *... Só tem o resto...*

Matheus: *Esses daqui nós fez a conta, né?* [movimentando o mouse sobre os quadrados presentes na malha quadriculada do GeoGebra]

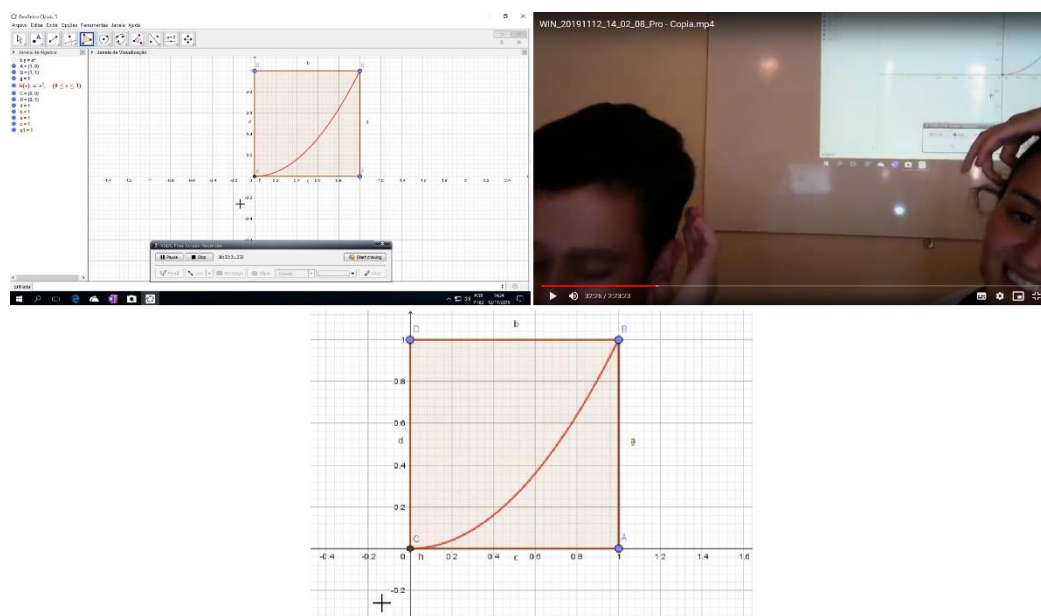
Janaina: *Foi!*

Matheus: *Ai meu Deus!* [Janaina ri]

Janaina: *O desespero bate... Tá, pera aí, vamos ver...* [voltando a ler a atividade impressa]

A partir desse momento, e após os estudantes realizarem a leitura da Etapa 2 presente na versão impressa da atividade, a dupla iniciou as construções no GeoGebra em busca do valor da área compreendida sob a curva da parábola  $y = x^2$  e o eixo  $x$  no intervalo de 0 até 1. As construções que resultaram em alguma aproximação para a área desejada foram usadas para construção do diagrama (**Figura 43**) que é apresentado mais à frente.

**Figura 35:** Construção concluída - Aproximação área sob a curva da parábola – Janaina e Matheus (1ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa.

Ao recorrer a construção do polígono, é possível constatar a manifestação do aspecto do PD de **Concepção visual-geométrica**. As transcrições abaixo apresentam o diálogo que seguiu a construção acima.

Ana Rita: *E agora, qual será que é a área desse quadrado?*

Janaina: *Então, nós temos que é um, um... Um por um é um!*

[Matheus concorda com a Janaina, acenando com a cabeça]

Ana Rita: *Isso... A área desse quadrado é um, porque a gente tá trabalhando num intervalo menor, né? O lado do quadrado é um... Enfim... Aí, olha pra região que nós queremos procurar o valor da área dela... Inicialmente, o que que vocês podem falar sobre essa área que nós queremos, comparado com a área desse quadrado, que é um?*

Janaina: *Ela é bem menor, né?*

Matheus: *É, ela não é nem metade, porque se fosse metade era pra tá aqui* [passando o dedo sobre a tela e indicando a diagonal do quadrado] *... Então...*

Janaina: *Sim, sim... Seria uma reta entre B...*

Matheus: *Quarenta por cento, né?...*

[Janaina e Matheus seguem concordando um com o outro acenando com a cabeça e falando várias vezes *É, é...*]

Ana Rita: *Não precisa... Não tô pedindo valor exato agora, tá gente?! [Janaina e Matheus dão rizada] É só que vocês estão tudo acanhado, não precisa ficar acanhado... Então vocês observaram que a área vai ter que ser o quê, comparado com a área do quadrado?*

Janaina: *Um pouco menos da metade* [Matheus acena com a cabeça, concordando com Janaina]

Ana Rita: *Um pouco menos do que a metade! Então, ok!*

*Pensando então nessa figura quadrado, ela acabou sendo uma boa aproximação pra trabalhar a área da região que a gente busca?*

Janaina: *Ahm... Mais ou menos...*

Matheus: *Sim, porque agora a gente tem uma noção, né?*

Janaina: *É que se a gente dividir no meio, vira um triângulo, né?*

Ana Rita: *Aham...*

Janaina: *Talvez fica mais... Mais...*

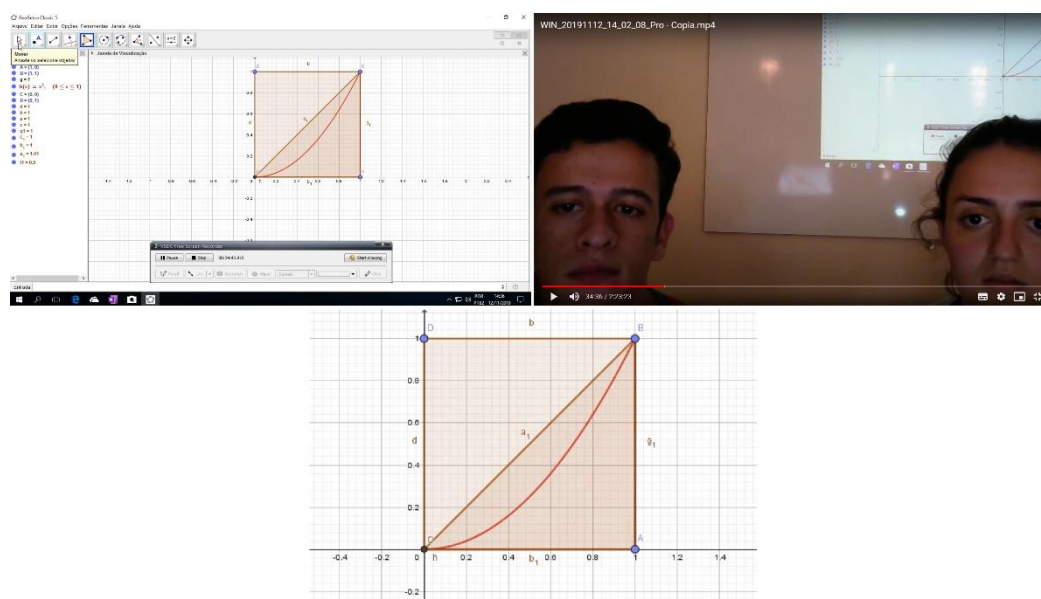
Matheus: *Quer tentar? Tenta...*

Janaina: *Dá pra tentar...*

Mesmo tendo iniciado com o desenvolvimento dos passos descritos na Etapa 2 da atividade impressa, nesse diálogo, que conclui a primeira construção visual feita pela dupla no GeoGebra e que possibilitou estimar o valor da área desejada, é possível perceber a emersão do aspecto do PD de *Noção de Limite e continuidade* onde, por aproximação, os estudantes tentaram estimar um valor máximo que pudesse ser associado a área da região em investigação. Todos os processos desenvolvidos nessa primeira tentativa de elaborar uma resposta para a pergunta: *Qual o valor da área compreendida sob a curva da parábola  $y = x^2$  e o eixo  $x$  no intervalo de 0 até 1?* tiveram duração de 03 minutos e 13 segundos.

A **Figura 36** a seguir, ilustra a segunda tentativa feita pela dupla e que seguiu a proposta de trabalhar com o triângulo, feita por Janaina.

**Figura 36:** Construção concluída - Aproximação área sob a curva da parábola – Janaina e Matheus (2ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa.

Ana Rita: *Quanto que deu a área dessa figura agora?*

Janaina: *A área agora vai ser... Base vezes altura dividido por dois... Vai dar meio... Meio!*

Ana Rita: *Vai dar metade* [Janaina e Matheus riem ao perceber que não era necessário o cálculo feito por Janaina] ... *Meio! Então, ó, o que vocês falaram no início é válido! Vocês já tinham apontado que a área que a gente tava buscando tem que ser um pouco menos do que a metade, né?* [Janaina acena a cabeça concordando com a fala de Ana Rita] *Que que vocês podem falar olhando as duas áreas agora, a que nós estamos buscando e a do triângulo?*

Matheus: *Se a do triângulo é meio...*

Janaina: *Então é menor do que meio...*

Essa segunda tentativa serviu para reforçar o que a dupla já tinha concluído diante da aproximação usando a área do quadrado. Aqui, novamente é perceptível a emersão dos aspectos do PD de *Noção de limite e continuidade* e de *Concepção visual-geométrica*, uma vez que os estudantes continuavam na busca por um valor que pudessem aproximar cada vez mais e usavam os objetos construídos no GeoGebra para tal estipulação. Essa segunda tentativa teve duração de 01 minuto e 16 segundos.

O diálogo seguiu com Janaina e Matheus buscando meios para calcular o valor exato da área desejada. Ao perceber a preocupação que Janaina tinha diante dessa situação, reforcei que o caminho que estávamos percorrendo na atividade não exigia um valor exato, sendo então diferente das atividades que já havíamos realizado em sala de aula. Matheus argumentou que a proposta consistia em desenvolver uma lógica para calcular a área desejada e eu, aproveitando esse apontamento do estudante, completei dizendo que o caminho que estávamos percorrendo consistia em fazer comparações entre áreas de modo a se aproximar cada vez mais da que queríamos.

Os estudantes então voltaram a ler a atividade impressa e, chegando na Etapa 3 (**Quadro 37**), optaram por tentar reproduzir o que estava descrito.

**Quadro 37:** Etapa 3 da atividade *O problema da área* – Dividindo a região em faixas

3. Divisão da região S em faixas.

- a) Oculte o quadrado e o triângulo construído na **Parte 2**.
- b) Dividir a região S em cinco faixas de mesma largura. Para isso, construa 4 segmentos de retas verticais, igualmente espaçados em x, clicando na aba “Reta”  e selecionando a ferramenta “Segmento”  Segmento.
- c) É possível aproximar cada faixa a uma região com lados retos? Qual medida devemos considerar para a sua base e altura?

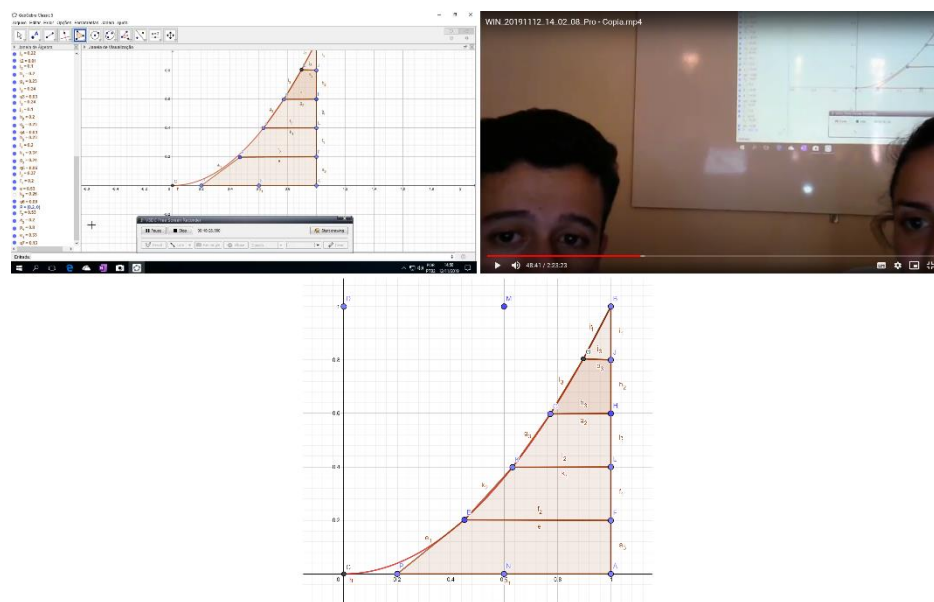
Fonte: Dados da Pesquisa.

Matheus leu em voz alta os itens e Janaina foi construindo os objetos no

GeoGebra. Após dividirem a região em 5 faixas, os estudantes começaram a discutir quais figuras poderiam explorar em cada faixa. Cogitaram a possibilidade de combinar a área de retângulos e triângulos em cada uma das cinco partes que formavam a região maior. A dupla estava visualizando as figuras na mente e discutindo o cálculo da área de cada uma apenas oralmente, o que era possível, mas tornava a investigação mais demorada. Foi quando mencionei que o GeoGebra fazia o cálculo da área de figuras construídas por meio da ferramenta Polígono (  Polígono ) ou outras com a mesma proposta, e que esse valor era apresentado na janela de álgebra. Completei sugerindo que os estudantes fizessem uso dessa estratégia e que explorassem os recursos do GeoGebra durante a investigação.

Assim, fazendo uso do recurso mencionado, a dupla chegou na construção apresentada na **Figura 37** a seguir.

**Figura 37:** Construção concluída - Aproximação área sob a curva da parábola – Janaina e Matheus (3ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa.

Janaina: *Então... Pera aí, pera aí... Cadê?* [movendo a barra de rolagem da janela de álgebra do GeoGebra] ... *A gente vai somar tudo... Cadê? ... Zero vírgula treze... Calma...*

Matheus: *Zero vírgula treze... Zero vírgula...*

Janaina: *Nossa, tem muita coisa... Calma aí...*

Matheus: *É... Nós devíamos ter apagado já, né? Umas coisinhas...*

Janaina: *É, a gente mexeu bastante! Pera aí, vamos de novo... A nossa primeira descoberta foi zero vírgula...*

Matheus: *Zero um...*

Janaina: *Zero um... Que foi esse triângulo aqui* [apontando para o topo da imagem]

Matheus: *É, o primeiro.*

[Janaina comenta algo, mas não foi possível transcrever por problemas de áudio]

Matheus: *Aí, zero um...*

Janaina: *Zero um... Vai... Mais...*

Matheus: *Zero três...*

Janaina: *Zero quatro... Até agora...*

Matheus: *Zero zero quatro...*

Janaina: *Agora deu zero vírgula um... Zero vírgula um mais...*

*Zero vírgula dezenove... Zero vírgula dezenove mais treze...*

Matheus: *Trinta e dois.*

Janaina: *Trinta e dois... Tá, trinta e dois! Então a gente... Se a gente somar mais esse pedacinho que falta aí...*

Matheus: *Calma! Se no triângulo era cinquenta, e esse negócio aqui que a gente fez é trinta e dois, está entre esses dois... Entendeu?*

Janaina: *Hum...* [Janaina e Matheus riem]

Janaina: *Bom, é menor que cinquenta, mas é...*

Matheus: *E maior que trinta e dois!*

Janaina: *É... Maior que trinta e dois...*

Nessa terceira tentativa feita pelos estudantes, é perceptível o esforço em buscar um valor cada vez mais próximo ao esperado, agora dividindo a região em cinco figuras de mesma altura. A estratégia usada pela dupla destaca os quatro aspectos do PD: **Noção de limite e continuidade; Noção de infinitésimo; Conceito de integral definida; e Concepção visual-geométrica.**

Os estudantes seguiram com mais uma tentativa de aproximação, agora buscando trabalhar com um número maior de figuras inscritas na região e, consequentemente com menores áreas (**Figura 38**). Essa abordagem levou 16 minutos e 32 segundos para ser estruturada visualmente no GeoGebra e, na maior parte desse tempo, a dupla estava apenas trabalhando na divisão da região em menores partes. Quando estavam discutindo a área de um pequeno triângulo construído na parte inferior da região (**Figura 39**), trabalhando o eixo  $x$  no intervalo de 0,045 até 0,1 e o eixo  $y$  no intervalo de 0 até 0,01, se espantaram com o baixo valor e, então, Janaina lembrando da aproximação feita na tentativa anterior iniciou o seguinte diálogo:

Janaina: [usando a calculadora do notebook] *Zero virgula zero seis vezes zero vírgula zero um... Deu zero vírgula zero zero zero seis... Então isso aqui vai ficar, tipo assim, zero vírgula trinta e dois... Zero seis... É tão minúsculo essa área... É que na verdade eu acho que o trinta e dois, será que vai fazer diferença depois?*

Ana Rita: *Oi?* [buscando validar alguns pontos que não tinha escutado com clareza]

Janaina: *Será que vai ficar zero vírgula trinta e três, o máximo?*

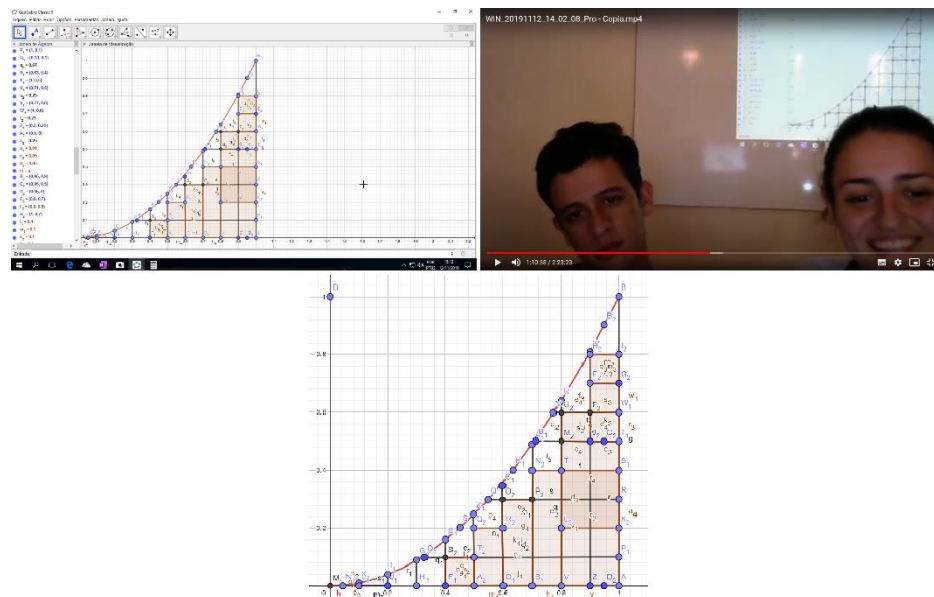
Ana Rita: *Zero vírgula trinta e três, o máximo? Por quê?*

Janaina: *É... Porque eu acho que não vai ser mais, porque depois*



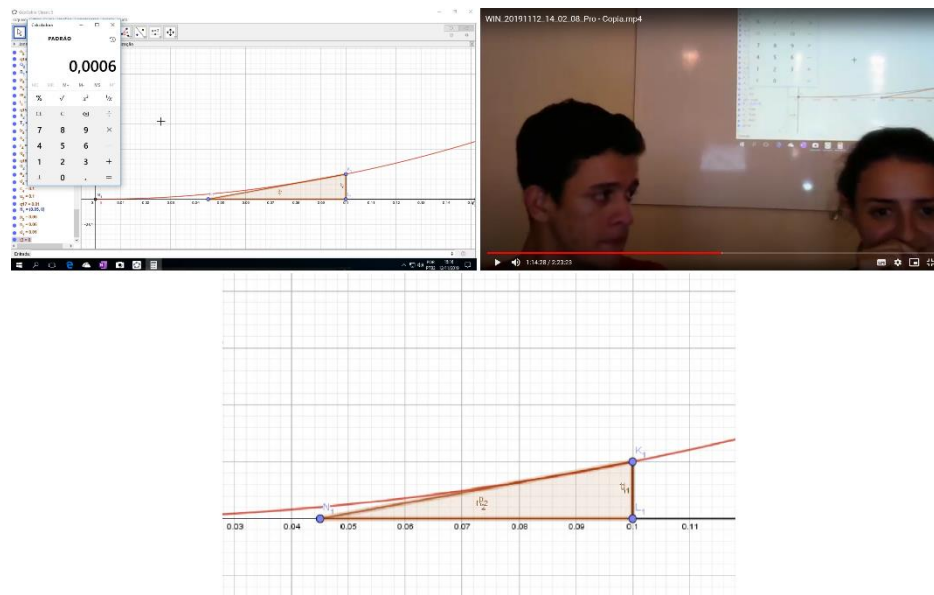
vão ser números muito pequenos, vai passar do milésimo... O outro eu não sei o nome... Eu tô achando que de trinta e quatro não passa.

**Figura 38:** Construção concluída - Aproximação área sob a curva da parábola – Janaina e Matheus (4ª tentativa – Parte I)



Fonte: Dados da Pesquisa.

**Figura 39:** Construção concluída - Aproximação área sob a curva da parábola – Janaina e Matheus (4ª tentativa – Parte II)



Fonte: Dados da Pesquisa.

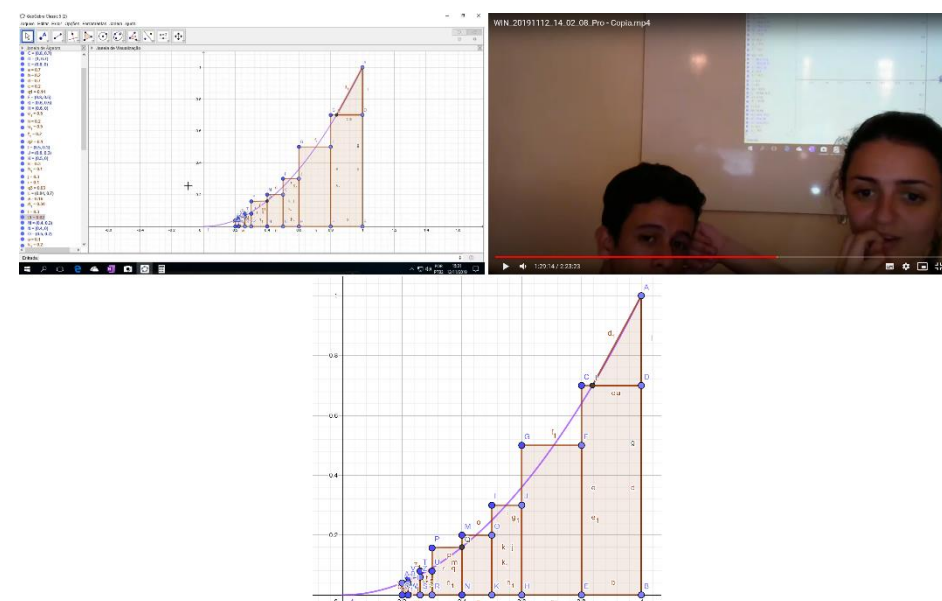
Esse momento da investigação é muito interessante por evidenciar novamente a emersão dos quatro aspectos do PD estruturados nessa pesquisa: *Noção de limite e continuidade*; *Noção de infinitésimo*; *Conceito de integral definida*; e *Concepção visual-geométrica*. Aqui, a dupla já tinha conseguido se aproximar o máximo possível do



valor da área que estava sendo investigada.

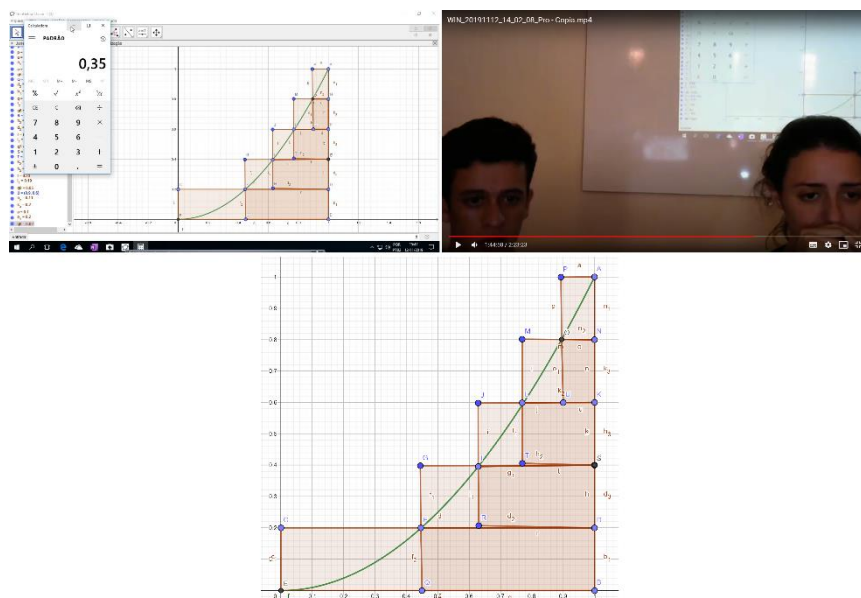
Com a intenção de apresentar mais um modo de aproximação para a área desejada, sugeri que a dupla tentasse usar apenas uma figura geométrica no desenvolvimento da atividade, não sendo limitada a quantidade dessa figura, que seria construída por tentativa. Inicialmente, Janaina e Matheus estavam focados em desenvolver a tentativa apenas com triângulos, então, em um momento de conversa que tivemos, a dupla concluiu que trabalhar com quadrado ou retângulo seria ainda mais fácil. Como já haviam explorado quadrados na tentativa anterior, optaram por construir retângulos. Essa ideia foi sendo aprimorada nas tentativas seguintes. Cada figura a seguir ilustra as próximas tentativas e os aprimoramentos que foram sendo desenvolvidos. Os valores aproximados para a área investigada foram 0,39; 0,35; 0,335, respectivamente.

**Figura 40:** Construção concluída - Aproximação área sob a curva da parábola – Janaina e Matheus (5ª tentativa)



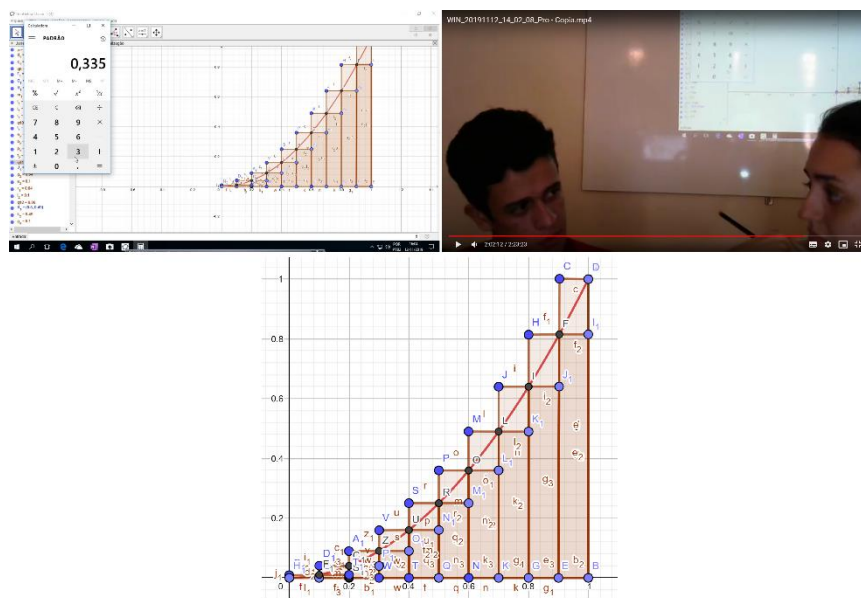
Fonte: Dados da Pesquisa.

**Figura 41:** Construção concluída - Aproximação área sob a curva da parábola – Janaina e Matheus (6ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa.

**Figura 42:** Construção concluída - Aproximação área sob a curva da parábola – Janaina e Matheus (7ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa.

Nesse momento da investigação, questionei os estudantes quanto às conclusões que poderiam ter ao comparar o cenário construído na sexta tentativa e seu resultado, com o cenário da sétima tentativa e seu resultado. As respostas obtidas seguem transcritas a seguir.

Matheus: *Quanto mais retângulo, mais exato?* [Janaina acena que sim com a cabeça]

Janaina: *É... Quanto menor o... Ou quanto....*

Matheus: *Quanto mais separação, sei lá, do desenho, da forma aí, mais exato a gente fica.*

É interessante observar que os estudantes, nesse ponto da investigação, já não demonstravam mais insegurança ao explorar as ideias no GeoGebra e nem ao responder os questionamentos que recebiam. No processo iniciado na quinta tentativa e finalizado na sétima, é perceptível novamente a manifestação dos quatro aspectos do PD: **Noção de limite e continuidade; Noção de infinitésimo; Conceito de integral definida; Concepção visual-geométrica.**

O fechamento da aproximação seguiu com o seguinte diálogo:

Ana Rita: *E aí, vocês acham que essa nossa área vai ser um número assim ó, por exemplo, só com três casas depois da vírgula?* [Matheus rapidamente acena que não com a cabeça]

Janaina: *Eu acho que vão ter mais...*

Matheus: *Cinco, seis...*

Janaina: *Porque a gente achou aquele que tinha o seis bem lá...*

Matheus: *Era a quarta casa...*

Janaina: *Passou da vírgula... Milésimo... Então eu acho que vai passar um pouquinho.*

Ana Rita: *Será que tem alguma fração que representa isso? Que fração será que dá o resultado aproximado de zero vírgula três três cinco?*

Janaina: *Trezentos e trinta e cinco sobre mil? Não, como assim?*

[Ana Rita comenta algo que não foi possível transcrever por problemas de áudio]

Janaina: *De outro jeito?*

Ana Rita: *Vamos pensar que no início a gente tinha dito que essa área que nós estamos procurando, ela é menor do que o meio. Então o meio, zero vírgula cinco, a gente tem a fração... o quê, representando o meio?* [Matheus volta a mexer com o mouse e vai direto na calculadora]

Janaina: *É...*

Matheus: *Quer ver... Um dividido por três...*

[Ao aparecer o resultado na calculadora, Janaina e Matheus se olham, comemoram o resultado obtido na calculadora e riem muito]

Matheus: *Um terço!*

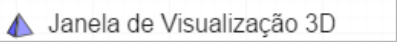
Ao todo, foram aproximadamente 50 minutos entre o início da primeira tentativa e o desfecho da sétima tentativa. Como é uma contagem de tempo muito alta, e as tentativas 5, 6 e 7 seguem exatamente a mesma proposta da tentativa 4, o tempo decorrente da tentativa 1 a 4 foi transformado no diagrama apresentado na **Figura 43**, o qual traz uma coluna para cada minuto de investigação dentre as tentativas selecionadas e evidencia, com a cor verde, os aspectos do PD que emergiram dentro de cada um desses minutos. A cor laranja, além de evidenciar a emergência do aspecto do PD, indica a troca de



focado no ambiente 3D. A troca de ambientes (Janela 2D para Janela 3D), o campo Entrada ( + | Entrada... ) e as ferramentas Mover ( , Ponto ( , Cilindro (  Cilindro ), Esfera ( , Cone (  Cone ), Volume (  Volume ) foram alguns dos elementos explorados na socialização.

Ao iniciar a atividade da sessão de ensino, questionei os estudantes quanto à curva da parábola trabalhada no dia anterior, então, retornando à Janela 2D do GeoGebra, a dupla construiu novamente a curva  $y = x^2$ , com  $-1 \leq x \leq 1$ . Com a construção visual finalizada, propus aos estudantes que imaginassem a curva rotacionando em torno do eixo  $y$  e perguntei qual seria o resultado visual dessa ação. Matheus associou a uma panela, Janaina a uma antena. Como os objetos que foram mencionados eram 3D, conduzi esse momento solicitando que a dupla, ainda nesse mesmo arquivo do GeoGebra e sem alterar o elemento presente na Janela 2D, abrisse a Janela 3D. Em seguida, solicitei que os estudantes olhassem a Etapa 1 (**Quadro 38**) da atividade impressa que receberam um pouco antes da *socialização com o GeoGebra* e desenvolvessem os itens dessa etapa. Na segunda tentativa, os estudantes conseguiram concluir a plotagem do parabolóide no GeoGebra (**Figura 44**).

**Quadro 38:** Etapa 1 – Instrução para início da atividade *O problema do volume*

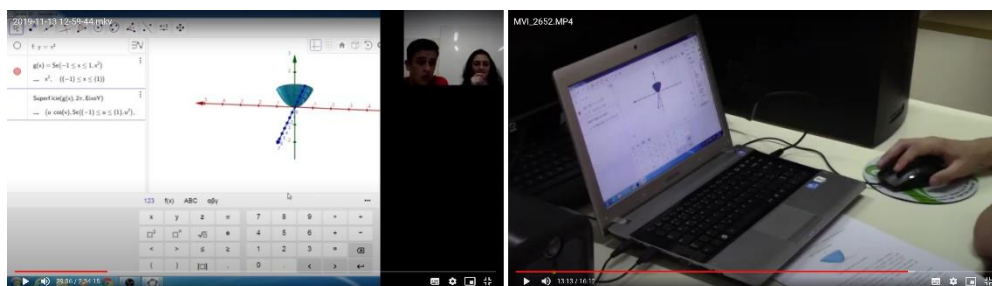
1. Construção da superfície de revolução no intervalo  $-1 \leq x \leq 1$  utilizando o GeoGebra.
  - a) Clique no campo “Entrada” , digite “Função”, escolha a opção  clicando sobre ela e, em seguida, digite dentro dos parênteses “ $x^2, -1, 1$ ”. Pressione a tecla “Enter” .
  - b) Abra a janela de visualização 3D clicando em , presente no canto superior direito, seguido de  e escolha a opção “Janela de Visualização 3D” .
  - c) Oculte a “Janela de Visualização” clicando em , seguido de “Fechar” .
  - d) Posicione o Eixo Y como vertical. Para isso clique em , seguido de .

e selecione a opção ☐ eixo y é vertical . Acesse também o ícone , escolhendo a opção .

e) Clique no campo “Entrada”  +  Entrada... , digite “Superfície”, escolha a opção  Superfície( <Curva>, <Ângulo>, <Reta> ) clicando sobre ela e, em seguida, digite dentro dos parênteses **“nome da função do item 1gerado pelo GeoGebra,  $2\pi$ , EixoY”**. Pressione a tecla “Enter” .

Fonte: Dados da Pesquisa.

**Figura 44:** Construção do ambiente de investigação – Janaina e Matheus



Fonte: Dados da Pesquisa.

Após a construção feita pela dupla, a nossa conversa seguiu. Esse momento é representado pela transcrição a seguir.

Ana Rita: *Então nós vamos calcular o volume dessa figura... Então a atividade, que chama “O problema do volume”, consiste em determinar o volume do parabolóide... Então essa imagem tem esse nome, tá?... Parabolóide... Obtido pela revolução em torno do eixo y, da curva  $y = x^2$ , com  $-1 \leq x \leq 1$ ... Que foi tudo o que a gente já tinha feito de construção, tá bom? E agora, como que vocês acham que a gente vai conseguir calcular o volume pra essa construção?*

Janaina: *Será que tem alguma ferramenta?*

Matheus: *É, tem aquela do volume que a gente usou...*

[Matheus segue selecionando a ferramenta Volume  que foi explorada anteriormente, clica na imagem do parabolóide e a dupla percebe que nada apareceu]

Janaina: *Eu acho que não vai...*

[Matheus repete a ação feita anteriormente, mas nada muda]

Matheus: *Tenta você* [passando o mouse para a Janaina] ... *Tenta a sorte...* [Janaina assume o controle do mouse]

Ana Rita: *O que vocês acham que está acontecendo?*

Janaina: *Não dá dando certo...*

Matheus: *Não tá indo...*

Ana Rita: *Por que que não tá dando certo a ferramenta do cálculo*

*de volume?*

Janaina: *Porque ela é aberta... Talvez...*

Ana Rita: *Hum... Sim... Porque essa imagem que nós construímos... Essa imagem que nós construímos, na verdade, é a casquinha do nosso parabolóide... É a superfície, não é todo o espaço preenchido dentro. Mas, a gente vai usar essa casquinha como base para calcular o volume que estaria dentro dela. Tudo bem? Então, e agora? Se a gente não consegue usar a ferramenta Volume que o GeoGebra traz, qual ou quais estratégias vocês acham que dá pra ser utilizada pra resolver o que está sendo proposto, que é encontrar esse volume?*

Janaina: *Ahm, deixa eu ver...*

Matheus: *A gente pode desenhar outro... O cilindro, alguma coisa... Um quadrado... Mas acho que é melhor você ver...*

[Matheus continua a sua fala, mas não foi possível transcrever por problemas de áudio]

[Janaina e Matheus continuam a dialogar, mas não foi possível transcrever por problemas de áudio]

Matheus: *Se a gente fizer um cilindro aqui, é igual ontem, fazendo por eliminação...*

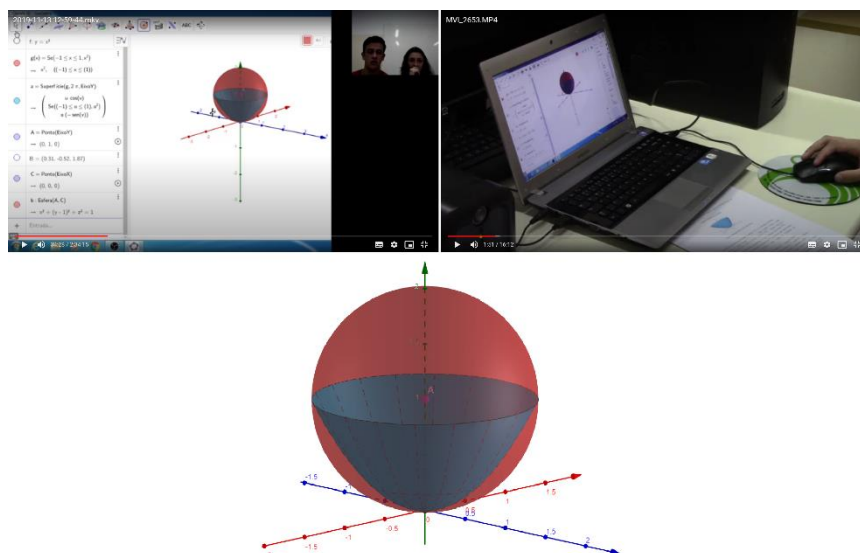
Janaina: *Uhum...*

Matheus: *Por incrível que pareça, é isso!* [Matheus continua a sua fala, mas não foi possível transcrever por problemas de áudio]

Nesse trecho transcrito é possível perceber a agilidade com que os estudantes trouxeram para a atividade a estratégia de usar a aproximação para calcular o volume desejado, assim como foi feito na atividade anterior. Por isso, considero relevante a recomendação de trabalhar as atividades de modo sequencial, pelo menos para estudantes do Ensino Médio, uma vez que elementos do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) são poucos explorados nessa etapa da Educação Básica.

O diálogo entre os estudantes seguiu e as primeiras ideias foram construídas com GeoGebra, como é possível observar na **Figura 45** a seguir.

**Figura 45:** Construção concluída - Aproximação volume do parabolóide – Janaina e Matheus (1ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa.

Após a construção, a dupla trabalhou com o *zoom* do GeoGebra para aproximar os objetos e comparar os volumes. Depois de alguns minutos, iniciou um diálogo entre os presentes.

Ana Rita: *Vocês acham que é quanto, comparado com a esfera?*

Matheus: *Metade...*

Janaina: *É...*

Matheus: *Ou menos da metade?*

Janaina: *Um pouco menos da metade.*

Matheus: *Menos da metade, porque se fosse metade, seria tudo isso... [movimentando o mouse sobre a imagem construída e indicando o que seria uma semiesfera] Então seria em torno de dois... dois e dez...*

[Janaina comenta algo, mas não foi possível transcrever por problemas de áudio. Após Ana Rita solicitar que a estudante falasse um pouco mais alto, o diálogo seguiu]

Janaina: *É... Eu acho que vai ser uns dois e... É, eu dou dois... Eu tiro esses noventa e cinco...*

Matheus: *Eu dou dez... Dois e dez!*

Janaina: *Eu dou dois! Ou menos de dois, não sei...*

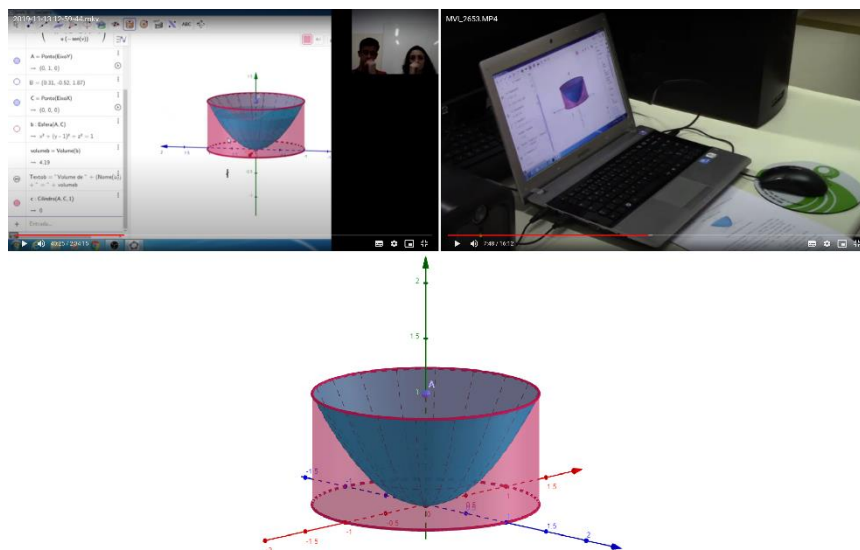
Nessa primeira tentativa de aproximação feita pela dupla, é possível perceber a emergência dos seguintes aspectos do PD: **Noção de limite e continuidade**, por terem construído uma esfera circunscrita ao parabolóide; e **Concepção visual-geométrica**, por terem feito a construção de um objeto para comparação.

Ao questionar os estudantes sobre qual figura eles acreditavam que, ao ser feita a construção, o volume ficaria mais próximo daquele que estavam investigando, Matheus trouxe o cone para discussão, argumentando como ele apareceria visualmente na janela



do GeoGebra, enquanto passava o *mouse* sobre algumas ferramentas do *software*. Uma outra ideia que a dupla tinha comentado anteriormente e que surgiu à tona nesse momento, foi a possibilidade de desenvolver a aproximação por meio do cilindro. Então, na segunda tentativa realizada, Janaina e Matheus optaram por seguir o caminho do cilindro, como é possível observar na **Figura 46**, a seguir.

**Figura 46:** Construção concluída - Aproximação volume do parabolóide – Janaina e Matheus (2ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa.

Ana Rita: *E agora, o que vocês podem falar sobre o volume do parabolóide comparado ao volume do cilindro, então? Quais são as aproximações que vocês vão fazer?*

Janaina: *O duro é que esse aí ficou sobrando muito...*

Matheus: *Muito mais!*

Janaina: *Tá bem maior.*

Matheus: *Aí sobraria muito espaço então...*

Janaina: *Será que se a gente tirar os dois vai fazer alguma diferença?*

Matheus: *O quê? Como você fala?*

Janaina: *Assim, subtrair o valor que a gente achou no cilindro com o cilindro, com esse... Que nem a gente fez na outra... Eu acho que não, né?*

Matheus: *Tem que pensar no seguinte... Calma aí que vou ligar o outro [tirando a opção de omitir que estava aplicada na esfera] ... Qual é a dif... Ó... [movimentando os objetos para mudar o ângulo de visão]*

Janaina: *Hum... É não vai interferir em muita coisa...*

Matheus: *Porque o que mais chega aqui perto é a esfera, né?*

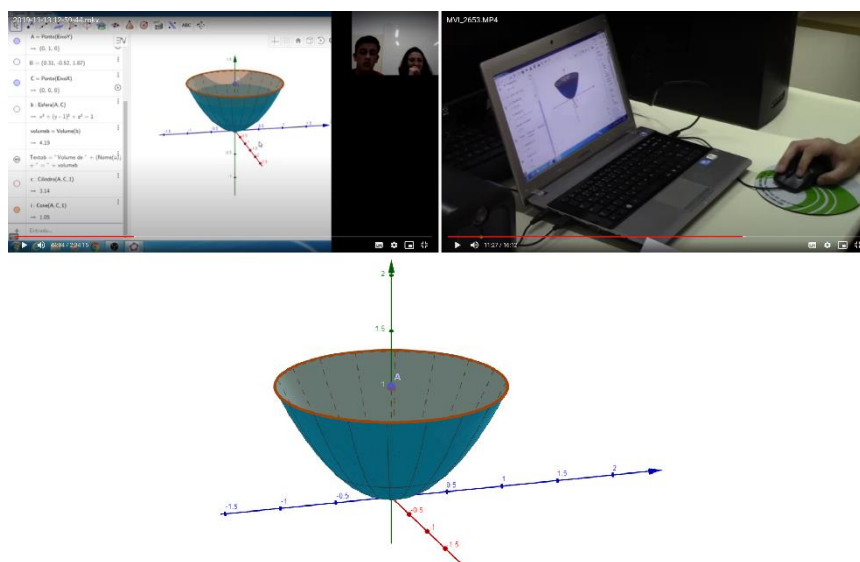
Janaina: *É, é a esfera tá bem melhor.*

Nesse momento, mesmo que os estudantes não apresentaram uma nova aproximação para o volume do parabolóide, é evidente a conclusão de um raciocínio por

aproximação baseado novamente nos aspectos do PD de *Noção de limite e continuidade* e *Concepção visual-geométrica*.

Em busca de novas ideias para explorar com o GeoGebra e durante um momento de conversa entre os estudantes, Janaina recorre a atividade impressa que estava sobre a mesa e, folheando as páginas, identifica a palavra Cone. Nesse momento a dupla lembra que não tinha construído esse cenário e opta por desenvolvê-lo, como é possível observar na **Figura 47**. O diálogo iniciado após a construção é apresentado a seguir.

**Figura 47:** Construção concluída - Aproximação volume do parabolóide – Janaina e Matheus (3ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa.

Matheus: *Meu Deus! Está quase igual!*

Janaina: *É, coube! Nossa... que coisa linda!*

Após orientar os estudantes quando a redução da transparência de objetos construídos no GeoGebra, e a aplicação do exposto no parabolóide, a conversa seguiu.

Janaina: *Olha, é o espaço da circunferência! Não é?*

Matheus: *Oi?*

Janaina: *Esse é o espaço da circunferência que tava faltando, não é? Não? Será?*

Matheus: *Então a gente tem que achar... Calma aí...* [Matheus movimenta a barra de rolagem da janela de álgebra do GeoGebra]

Matheus: *O cone... O cone tem um e cinco!* [fazendo referência ao volume do cone que foi apresentado pelo GeoGebra: 1,05]

Janaina: *Um e cinco...*

Matheus: *Você falou dois...* [fazendo referência ao resultado aproximado por Janaina na primeira tentativa]

Janaina: *Eu falei dois...*

Matheus: *Então...*

Ana Rita: *Quanto será que vocês acham que vai ser o volume do parabolóide?*

Janaina: *Á, eu ainda fico entre o dois mesmo...*

Matheus: *Eu vou ficar...* [olhando para a imagem enquanto pensava] *Um e oitenta!*

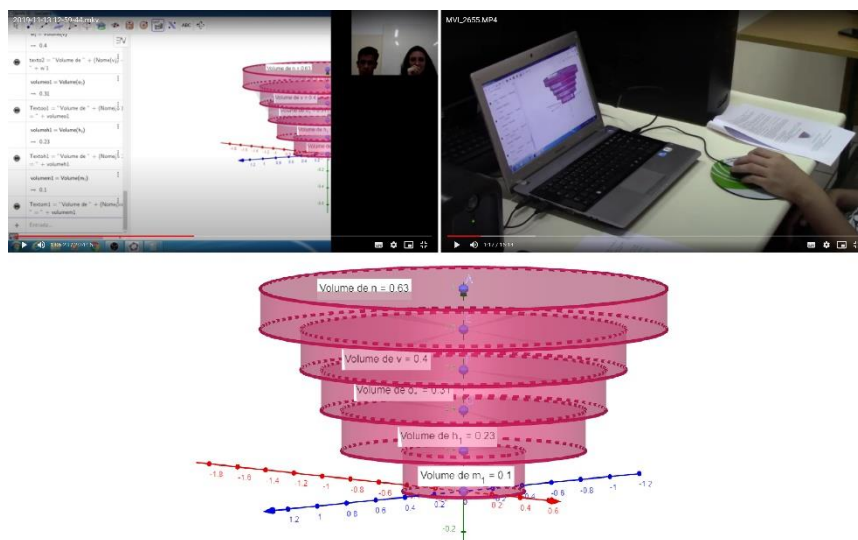
Janaina: *Um e oitenta... Entre um e oitenta e dois. Tá aí!*

Assim como nas tentativas anteriores, essa abordagem explorada pela dupla e toda a proposta de aproximação que foi trilhada até o momento, apresentou indícios da emersão dos aspectos do PD: ***Noção de limite e continuidade*** e ***Concepção visual-geométrica***.

Janaina e Matheus seguiram pensando em como aproximar mais os resultados que estavam obtendo ao valor do volume do parabolóide. Optaram por deixar visível na Janela 3D do GeoGebra o parabolóide, o cone e a esfera (construída na primeira tentativa). A dupla seguiu a estratégia de trabalhar a diferença entre os volumes e realizaram o cálculo:  $Volume_{semiesfera} - Volume_{cone} = 2,095 - 1,05 = 1,045$ . Diante do resultado, a dupla ficou bem pensativa, tentando fazer alguma interpretação do valor encontrado. Voltaram a observar os objetos construídos no GeoGebra, omitiram a esfera, alteraram o ângulo de visão que estavam tendo do parabolóide e do cone, dialogaram e, então, concluíram que o volume desejado seria um valor entre 1,15 (aproximação feita por Matheus) e 1,20 (aproximação feita por Janaina). Mesmo sem fazer novas construções no GeoGebra, os estudantes conseguiram pensar e propor uma nova aproximação para o que estavam investigando, sendo emergente nesse processo o aspecto do PD de ***Noção de limite e continuidade***.

Quando a dupla finalizou o raciocínio anterior, sugeri que iniciassem uma nova estratégia, buscando identificar um valor ainda mais próximo do esperado. Diante da dúvida que pairava sobre os estudantes em como seguir com a investigação, Janaina e Matheus retomaram a leitura da atividade impressa e, diante das figuras que estavam presentes, decidiram seguir a mesma estratégia, que consistia em inscrever e circunscrever cilindros ao parabolóide. A quarta tentativa construída pelos estudantes gerou os objetos apresentados na **Figura 48**.

**Figura 48:** Construção concluída - Aproximação volume do parabolóide – Janaina e Matheus (4ª tentativa)



Fonte: Dados da Pesquisa.

Ao somar o volume dos cilindros que foram construídos, o diálogo segue.

Janaina: *Deu um e sessenta e sete!*

Ana Rita: *Hum... E aí, será que tá bom esse negócio?*

Matheus: *Não...*

Ana Rita: *Mas vocês acham que tá mais próximo?*

Janaina: *Tá! Bem mais próximo...*

Ana Rita: *Vocês estimam que vai ser quanto então? Mais do que esse valor? Menos do que esse?*

Janaina: *Menos...*

Ana Rita: *Quanto que vocês acham que vai ser?*

Janaina e Matheus: *Vai ser menos!*

Janaina: *Então eu acho que vai ser um e...*

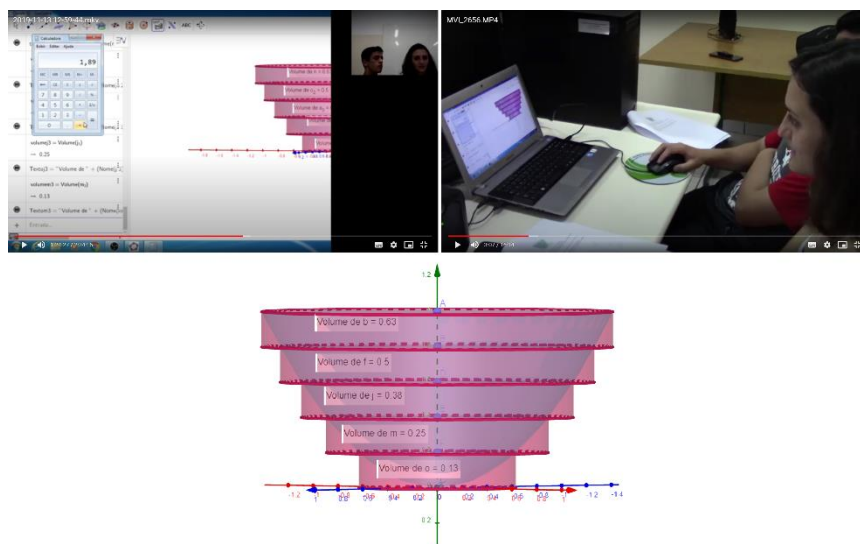
Matheus: *Quarenta... Um e quarenta pra cinquenta...*

Janaina: *É... Entre um e quarenta e um e cinquenta.*

Esse momento da investigação é interessante por evidenciar a emersão dos quatro aspectos do PD estruturados nessa pesquisa: **Noção de limite e continuidade**; **Noção de infinitésimo**; **Conceito de integral definida**; e **Concepção visual-geométrica**.

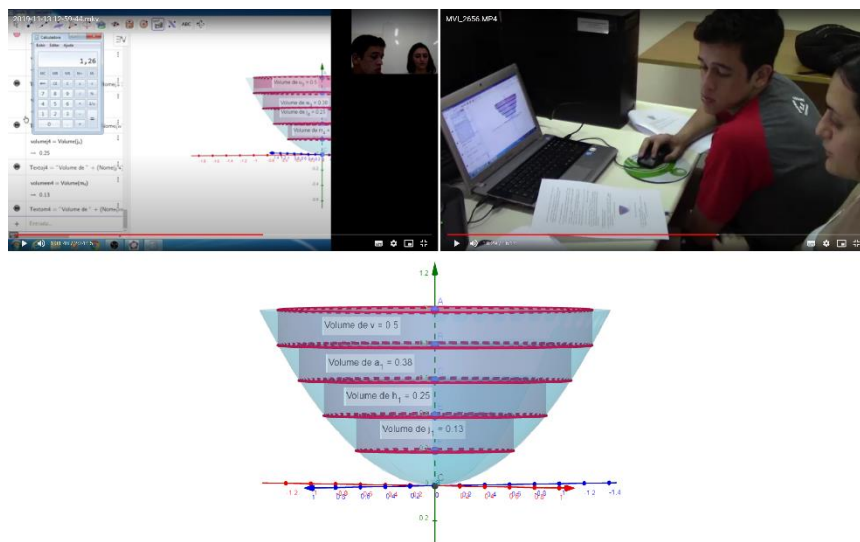
A partir desse ponto, os estudantes seguiram com a ideia de cilindros inscritos e circunscritos ao parabolóide, mas buscando o aprimoramento dos objetos construídos (ajuste de raio a partir da equação da parábola  $y = x^2$ ; quantidade de cilindros; entre outros), bem como o uso simultâneo dos cenários para trabalhar a aproximação a partir da média aritmética entre a soma dos volumes dos cilindros inscritos ( $V_i$ ) e a soma dos volumes dos cilindros circunscritos ( $V_c$ ). As figuras a seguir mostram o desenvolvimento da quinta tentativa feita pela dupla Janaina e Matheus.

**Figura 49:** Construção concluída - Aproximação volume do parabolóide – Janaina e Matheus (5ª tentativa – Parte I)



Fonte: Dados da Pesquisa.

**Figura 50:** Construção concluída - Aproximação volume do parabolóide – Janaina e Matheus (5ª tentativa – Parte II)



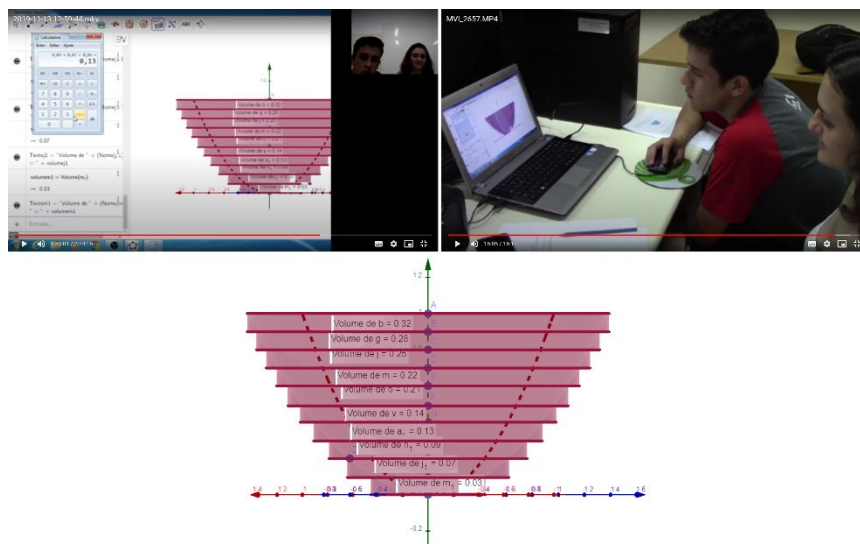
Fonte: Dados da Pesquisa.

Ao calcular a média aritmética mencionada anteriormente, os estudantes chegaram no valor 1,59. Resgatando mentalmente as construções que foram exploradas nessa tentativa, Matheus passou a acreditar que o volume do parabolóide seria de 1,40, e Janaina de 1,45. Novamente, nessa etapa, faz-se presente os aspectos do PD: *Noção de limite e continuidade; Noção de infinitésimo; Conceito de integral definida; e Concepção visual-geométrica.*

Quando questionei se era possível chegar mais próximo do valor desejado, Janaina e Matheus reconheceram que sim. Então fiz uma nova pergunta, agora buscando

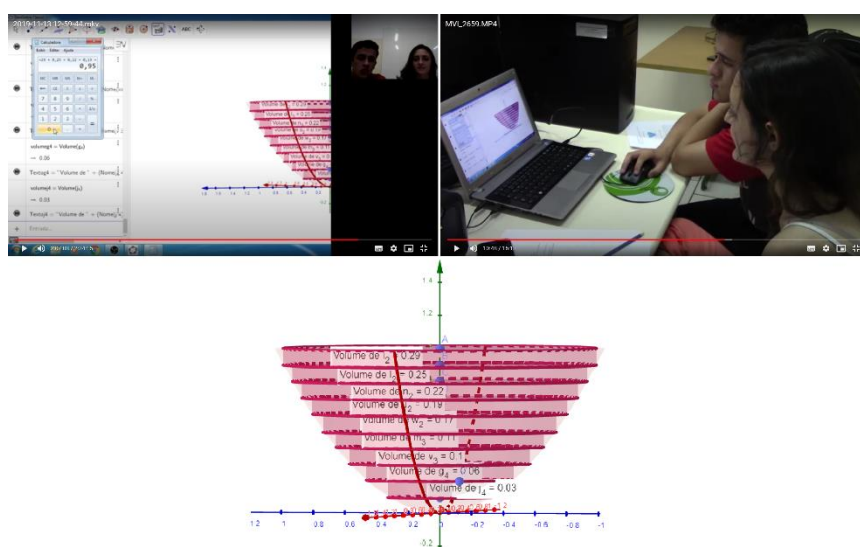
compreender qual estratégia a dupla poderia adotar. Os estudantes imediatamente responderam que seria necessário diminuir os espaços e fazer mais figuras, como no dia anterior. E assim iniciou-se a sexta tentativa de investigação de Janaina e Matheus, agora construindo o dobro de cilindros em cada cenário (inscrito e circunscrito), conforme as figuras a seguir.

**Figura 51:** Construção concluída - Aproximação volume do parabolóide – Janaina e Matheus (6ª tentativa – Parte I)



Fonte: Dados da Pesquisa.

**Figura 52:** Construção concluída - Aproximação volume do parabolóide – Janaina e Matheus (6ª tentativa – Parte II)



Fonte: Dados da Pesquisa.

Após calcular a média aritmética para essa tentativa, iniciou-se o diálogo transcrito a seguir.

Ana Rita: *E agora, vocês acham que está se aproximando de qual*

*valor o volume então?*

Janaina: *Um e cinquenta e cinco...*

Matheus: *Ahm... Vai ser um e cinquenta e oito... cinco mil oitocentos e poucos... Quase chegando no cinquenta e nove.*

Ana Rita: *Ó, nós tínhamos cinco cilindros, deu um e cinquenta e nove a nossa média, né? Depois, dez cilindros, um e cinquenta e oito. Vocês acham que se a gente continuar aumentando o cilindro esse valor vai diminuir muito?*

Matheus: *Não! Eu acho que ele vai manter. No máximo um e cinquenta e seis, assim...*

Janaina: *É...*

Matheus: *Cinquenta e sete, estourando...*

Ana Rita: *Tá bom, beleza! Então ok, é um outro jeito que a gente tem de trabalhar volume por aproximação, igual área, tá? A gente não precisa ter a fórmula para calcular o volume do parabolóide... Se eu sei calcular o volume de uma outra figura, eu posso ir trabalhando ela várias vezes dentro ou fora, e trabalhar a média nesse nosso último caso, né? [Janaina acena que sim com a cabeça]*

Ana Rita: *Ahm... Então vocês vão fechar em quê? Estourando qual valor pro nosso volume?*

Matheus: *Vai arriscar no cinquenta e sete ou cinquenta...? [perguntando para Janaina]*

Janaina: [Janaina comenta algo que não foi possível transcrever por problemas de áudio] *Um e cinquenta e sete mesmo [Matheus acena com a cabeça concordando]. Um e cinquenta e sete! A gente fechou em um e cinquenta e sete!*

Então, diante do resultado que a dupla decidiu assumir como aproximação do volume do parabolóide, a investigação dessa atividade terminou. Nessa sexta e última tentativa feita pelos estudantes, é notório a emersão dos quatro aspectos do PD: ***Noção de limite e continuidade; Noção de infinitésimo; Conceito de integral definida; e Concepção visual-geométrica.***

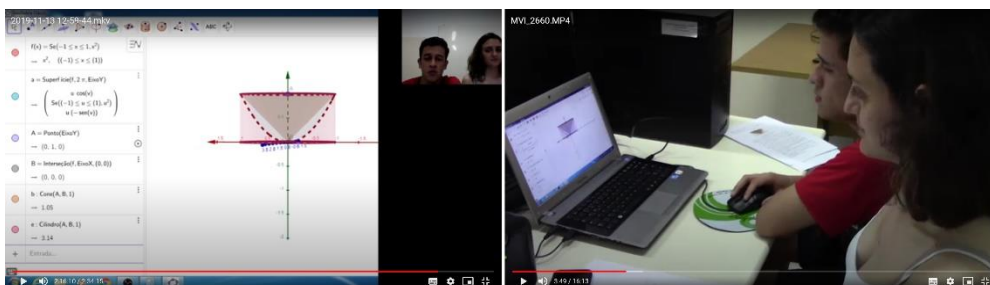
Ao todo, foram aproximadamente 1 hora entre o início da primeira tentativa e o desfecho da sexta tentativa. Como é uma contagem de tempo muito alta, e as tentativas 5 e 6 seguem exatamente a mesma proposta da tentativa 4, o tempo decorrente da tentativa 1 a 4 foi transformado no diagrama apresentado na **Figura 53**, o qual traz uma coluna para cada minuto de investigação dentre as tentativas selecionadas e evidencia, com a cor verde, os aspectos do PD que emergiram dentro de cada um desses minutos. A cor laranja, além de evidenciar a emersão do aspecto do PD, indica a troca de ferramenta (uso) no GeoGebra. Já a cor roxa, além de sinalizar tudo o que as outras cores representam, indica um tempo prolongado de repetição de alguma ação feita pelos estudantes.







**Figura 54:** Construção do ambiente de investigação – Janaina e Matheus



Fonte: Dados da Pesquisa.

A sessão seguiu com o diálogo transcrito a seguir:

Ana Rita: *Então agora a gente tá discutindo aqui se tem alguma relação, se é que existe, né? Se existir, qual é a relação entre o volume dessas três figuras. O volume do cilindro, pra esse nosso caso, o raio é um e a altura é um, então vocês já tinham dito na atividade anterior, né, que nós fizemos hoje, que o volume então ia ser o pi, o três vírgula quatorze que vocês tinham já chamado a atenção. Aí o volume do cone...*

Matheus: [Olhando a folha da Janaina] *É um terço do cilindro... Foi o que a Jana colocou.*

Ana Rita: *Isso! É um terço do cilindro. Mas, se você quer conferir, clica na... omite o cilindro, omite o parabolóide... Deixa só o cone.*

[Matheus, conduzindo o mouse, executa o comando]

Ana Rita: *Isso, agora vai lá em Volume  Volume, e calcula o volume só desse cone.*

[Novamente, Matheus executa o comando]

Matheus: *Três vírgula quatorze!... Não! Volume... Um ponto zero cinco.*

[Janaina anota o valor na folha da atividade]

Ana Rita: *Isso! Então, se dividir o três vírgula quatorze, né, o aproximado do pi, por três... Que é a relação que vocês falaram...*

Matheus: *Um zero cinco.*

Tendo em vista que a relação  $Volume_{cone} = \frac{1}{3}Volume_{cilindro}$  é trabalhada no 2º ano do Ensino Médio e que Janaina e Matheus já haviam passado por esse momento, essa foi a primeira percepção que os estudantes tiveram no desenvolvimento da atividade, e levou 35 segundos para acontecer. O caminho percorrido e transcrito evidenciou a emersão dos aspectos do PD de *Noção de limite e continuidade*, pelos estudantes visualmente identificarem qual seria o maior volume e estimar o outro sabendo que não poderia excedê-lo; e de *Concepção visual-geométrica*, diante da constante busca e consulta da construção dos objetos.

E a investigação das relações seguiu:

Ana Rita: *E agora, como que vai ficar a relação pro volume do parabolóide? Vocês fecharam que vai ser aproximadamente um*

*vírgula cinquenta e sete, né?* [Janaina e Matheus acenam que sim com a cabeça]

Janaina: *Então...*

[Matheus assume novamente o controle do *mouse* e abre a calculadora do *notebook*]

Ana Rita: *Como que a gente pode relacionar esse valor com o volume do cilindro e esse valor com o volume do cone?*

[Janaina volta a atenção para o que o Matheus estava fazendo com a calculadora]

Ana Rita: *Será que vai existir alguma relação?*

Janaina: *É...*

Ana Rita: *Que que você fez aí?* [pergunta para Matheus]

Matheus: *Dividi pi por dois... O valor de pi por dois, que deu um e cinquenta e sete.*

Ana Rita: *Então que que a gente pode falar que tem de relação entre o volume do parabolóide com o volume do cone... Ó, do cilindro, perdão.*

Matheus: *Meio!*

O único contato que os estudantes tiveram com o parabolóide foi na atividade *O problema do volume*, desenvolvida no começo dessa sessão de ensino. Entretanto, em 37 segundos a dupla conseguiu identificar a relação  $Volume_{parabolóide} = \frac{1}{2} Volume_{cilindro}$ . Essa investigação reforça a importância da construção visual ao serem trabalhados elementos do CDI, favorecendo os processos de dedução e estimativa. Desse modo, os aspectos do PD emergentes foram: **Noção de limite e continuidade** e de **Concepção visual-geométrica**, pelas mesmas justificativas descritas na relação anterior.

Ainda estava faltando a relação entre o volume do parabolóide e o volume do cone, então o diálogo seguiu.

Ana Rita: *E agora se a gente quiser a relação do volume do parabolóide com o volume do cone, hein?*

Matheus: *Meus Deus! Se um é um terço e o outro é meio...*

Janaina: *Pera aí, a gente não descobriu que isso aqui era um terço ontem?*

Ana Rita: *Sim...*

Janaina: *Esse quadra... Hum...*

Ana Rita: *Ahm...*

Matheus: *Calma... O que você está fazendo?*

Janaina: *E se a gente fizer um quadrado...* [rabiscando a folha da atividade impressa] *A não, não vai dar certo, esquece.*

Matheus: *Não... se um é um terço e o outro é meio... Meio do meio!*

Janaina: *Meio do meio* [dando risada]

Matheus: *Calma...*

Ana Rita: *Que que seria esse meio do meio que você falou aí?*

[Janaina e Matheus riem]

Matheus: *Ai meu Deus!*

Ana Rita: *Não, fala... Que que você pensou meio do meio? Meio do meio a onde?*

Matheus: *Porque se um é um terço e o outro é meio... Á, eu não entendi também, só falei...* [todos riem]

Ana Rita: *Você não entendeu esse raciocínio seu?*

Matheus: *É, a cabeça pensou sozinha...*

Janaina: *Então esse aqui vai ter cinquenta e dois...* [apontando para a diferença presente entre o cone e o parabolóide na folha da atividade impressa]

Janaina: *A área disso daqui é cinquenta e dois. Pra poder dar um e cinquenta e sete tudo isso daqui* [contornando o parabolóide na folha], *tem que ser cinquenta e dois.*

Matheus: *Á tá, entendi!*

Janaina: *Não tá fazendo um pinga de sentido! Também é um terço, será?*

Matheus: *Cinquenta e dois?*

Janaina: *Não, é que também será que aqui também vai ser um terço?* [contornando novamente o desenho na folha]

Matheus: *Não, calma...* [colocando a mão sobre o mouse]

Janaina: *É porque aí cinquenta e dois... Vamos supor...*

[Matheus abre a calculadora do notebook]

Matheus: *Não...* [digitando na calculadora] *Deu um e cinco, dividido por três, zero vírgula...*

Janaina: *Não... Põe um e cinquenta e sete dividido por três.*

[Matheus executa a ação]

Matheus: *É o que você falou! O que falta aí... é o cinquenta e dois que falta. Entendeu?*

Janaina: *Pra dar um e cinquenta e sete.*

[Houve uma conversa paralela nesse momento, mas não será transcrita por não ser relevante]

Matheus: *Você mandou dividir o quê, um e cinquenta e sete?*

Janaina: *É...*

Matheus: *Que é o valor do...*

Janaina: *Que era o que a gente tinha descoberto antes...*

Matheus: *Do... Disso daqui, né?* [apontando para a imagem do parabolóide na folha da atividade]

Janaina: *Isso... Inteiro!*

Matheus: *Dividir por... Três?*

Janaina: *Três... Que aí seria dois pedaços reservados pro...*

[Nesse momento, Janaina, que estava olhando a imagem na folha da atividade, volta o seu olhar para a tela do notebook, onde era visível a calculadora com o resultado 0,5233333333. Ela fez alguns segundos de pausa, então apontou para a tela e seguiu no diálogo]

Janaina: *Vezes dois!*

[Matheus rapidamente voltou a conduzir o mouse, e realizou o cálculo mencionado por Janaina. Os dois olham para o resultado: 1,0466666667; se olham e, então, Janaina olha para Ana Rita]

Ana Rita: *Uhum! Que que deu aí?*

Janaina: *Um zero quatro, e aqui é um zero cinco* [apontando para

a imagem do cone na folha da atividade]

Ana Rita: *Uhm...*

Matheus: *Dividido por três... Vezes dois...*

Janaina: *Então isso daqui é um terço também! Dá tudo um terço não, né gente?*

Matheus: *Não! Dois quintos!*

Janaina: *Dois quintos?*

Matheus: *Não?* [perguntando para Ana Rita]

Ana Rita: *Não sei... Por que dois quintos?*

Matheus: *Não... Calma! Dois quintos, não... Ixi, agora até eu esqueci...* [buscando lembrar o que foi feito]

Matheus: *Porque eu somei um terço com um meio! Mas tá errado! Calma...*

Após as observações transcritas acima, Janaina e Matheus demonstraram certo grau de confusão no momento de finalizar a investigação da última relação. Então, lembrei aos estudantes que estávamos interessados na relação entre o volume do parabolóide (aproximadamente 1,57) e o volume do cone (aproximadamente 1,05). Repassamos todos os passos que a dupla tinha percorrido até o momento. A dupla seguia tentando retomar a essência dos pensamentos que tiveram. Foi quando o desfecho aconteceu.

Matheus: *Calma... E se eu fizer isso...* [e foi digitando alguns valores na calculadora do notebook enquanto Janaina observava]

Matheus: *Você entendeu o que eu fiz?*

Janaina: *Hum... Você multiplicou...*

Ana Rita: *Faz de novo pra Jana ver que que você fez.*

[Matheus repetindo o processo na calculadora]

Matheus: *Eu peguei o volume do cone e fiz vezes zero vírgula cinco.*

Ana Rita: *Isso... Aí você tem a metade do volume do cone. E agora?*

Matheus: *Aí, tipo, se eu pegar o volume do cone e fazer mais isso, a gente vai chegar no resultado que a gente... Que seria o volume do... Que a gente acha que é o volume do parabolóide.*

Ana Rita: *Isso!*

Matheus: *Entendeu?* [Janaina acena que sim com a cabeça]

Ana Rita: *Então você vai considerar que o volume do parabolóide é o quê?*

Janaina: *Zero vírgula cinquenta e sete...*

Ana Rita: *Não...*

Janaina: *Não?* [Janaina e Matheus riem]

Ana Rita: *Ó, pensa na fala do Matheus. O Matheus... Queque... Fala de novo o que você acabou de falar...*

Janaina: *Áaa...*

Matheus: *Eu dividi o volume do cone por dois...*

Ana Rita: *Isso...*

Matheus: *E esse resultado é... Seria o volume do cone mais esse resultado seria o volume do parabolóide... É isso.*



Além disso, essa atividade contou com um número reduzido de objetos construídos no GeoGebra e um desdobramento maior a partir do uso da calculadora do *notebook* e de anotações em folha de papel.

### 5.7 Considerações gerais sobre as explorações das atividades

De modo geral, as atividades que propunham a investigação do valor de áreas foram desenvolvidas de forma mais fluida pelos estudantes. Um obstáculo no desenvolvimento das atividades envolvendo o cálculo de volumes foi com relação ao uso do *software* GeoGebra, não por sua linguagem, seu *design* ou interface especificamente, mas pelo fato de a Janela 3D exigir uma maior percepção e sensibilidade para a construção dos objetos. Ou seja, o pensar-com-GeoGebra na Janela 3D pode tornar complexo os processos do PD de estudantes do Ensino Médio. De maneira particular, o uso da calculadora foi emergente nos momentos em que o cálculo desenvolvido envolvia uma quantidade muito grande de valores, ou quando os valores eram muito pequenos, ou quando os estudantes tinham como objetivo validar algum cálculo desenvolvido mentalmente ou na folha de papel.

Mesmo tendo trabalhado atividades diferentes, foi possível perceber nos estudantes a constante emersão do aspecto do PD de ***Concepção visual-geométrica***. A manifestação de construção e análise de figuras foi significativa para o estudo do CDI e se tornou recorrente neste estudo a partir do momento em que os estudantes puderam usar o GeoGebra. Esse *software* serviu como base para a construção dos cenários de investigação, os testes de conjecturas e, diante disso, potencializou cenários para a emersão de outros aspectos do PD.

Diante da fala inicial que tive com cada dupla, em todas as sessões de ensino, na qual expus a ideia de desenvolver as investigações segundo a proposta de aproximação, acabei de certo modo influenciando o início das investigações. Entretanto, o modo como os estudantes conduziram a proposta, constantemente focados em construir objetos que quase não excedessem o principal, tentando *manter contato* (proximidade ou encontro entre lados e/ou faces) entre as construções, e atentos ao fato de que não poderiam exceder a um determinado valor desconhecido, justifica a também constante emersão do aspecto do PD de ***Noção de limite e continuidade***.

O aspecto do ***PD de Noção de infinitésimo***, mesmo não sendo constante, emergiu em todas as atividades que trabalhavam diretamente o cálculo de área e volume. Um ponto

comum na abordagem de aproximação empregada pelas duplas para essas atividades foi a redução no tamanho de uma determinada medida, sendo esta relacionada ao lado, volume, altura ou raio de algum objeto.

O aspecto do PD de *Conceito de integral definida* emergiu apenas nas atividades *O problema da área* e *O problema do volume*, ambas exploradas por Janaina e Matheus. Isso porque apenas essa dupla explorou nas investigações a ideia de dividir o objeto principal em outros menores, respeitando um certo padrão nessas construções.

A seguir, no **Capítulo 6**, apresento uma síntese deste estudo, algumas reflexões quanto ao seu desenvolvimento e resultado, bem como alguns apontamentos para realização de estudos futuros.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo se iniciou com o intuito de identificar quais aspectos do Pensamento Diferencial (PD) emergiam em um grupo de estudantes do Ensino Médio durante a investigação de atividades envolvendo o cálculo de áreas e volumes. Para isso, houve o desenvolvimento de sessões de ensino (STEFFE; THOMPSON, 2000) com estudantes do 1º, 2º e 3º ano do Ensino Médio. Durante as sessões de ensino, organizados em duplas, os estudantes exploraram as atividades propostas utilizando o *software* GeoGebra. Nesse contexto, a pergunta que guiou este estudo foi: *Quais aspectos do PD e do pensar-com-GeoGebra emergem quando estudantes do Ensino Médio investigam atividades sobre cálculo de áreas e volumes?* A dissertação se iniciou com uma introdução em que justifico tal estudo, apresento o objetivo da pesquisa e o *software* escolhido para desdobramento das atividades propostas.

O foco desta pesquisa esteve nos aspectos do PD. Sendo assim, para discutir sobre a compreensão do PD, perpasssei por outros pensamentos presentes na Matemática e me fundamentei nas concepções de Wielewski (2005), Henriques (2010), Sad (2000) e Reis (2001), ao afirmar que o PD é um tipo de PM e que, mesmo com algumas particularidades, esses e outros pensamentos se complementam. A compreensão que esse estudo teve quanto aos aspectos do PD, também alicerçada nos autores citados, é de manifestação de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) emergentes de maneira formal e/ou intuitiva, associado a ideia de pensar-cálculo.

Além da compreensão do PD, esta pesquisa buscou nas produções de Baron (1985), Edwards (1979), Estrada et al. (2000) e Boyer (2010) vestígios de aspectos do PD em problemas históricos envolvendo o cálculo de áreas e volumes. Diversos problemas importantes da história do Cálculo influenciaram diretamente o *design* das atividades elaboradas nesta pesquisa. Além disso, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) se fez presente quando busquei entendimento quanto ao escasso trabalho no Ensino Médio explorando os elementos do CDI.

O uso de tecnologias digitais se fez também presente na proposta deste estudo. Diante disso, me fundamentei em Kenski (2012), Lévy (2016), Lévy (2017), Lévy (2018) e Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018) para apresentar e discutir o desenvolvimento das tecnologias, tecnologias da inteligência e tecnologias digitais. Ao falar e pensar em toda essa inovação tecnológica, considero importante o resgate da pergunta lançada por Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018): *Será que essas inovações se tornaram acessíveis e se*



*distribuem pela sociedade no mesmo ritmo?*

Os próprios autores afirmam:

Sabemos [...] que o acesso às tecnologias não é igual para todos, e que mais da metade da população mundial não tem acesso à internet ou não tem noção de que venha a ser um computador. Um relatório da ONU, de 2013, mostra que, embora o número de celulares no mundo praticamente seja equivalente à população mundial, ainda há uma imensa parte da população mundial sem acesso à internet. O Brasil não está bem situado, do ponto de vista mundial, no item de acesso à internet. Por outro lado, a imprensa nacional já noticia que há mais celulares que habitantes no país (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018, p.138).

Uma reportagem<sup>15</sup> publicada no site da Organização das Nações Unidas (ONU), em setembro de 2020, aponta que ainda são pelo menos 3 bilhões de pessoas sem acesso à internet no mundo, ou seja, estamos falando de aproximadamente 38,5% da população mundial<sup>16</sup>. Em tempos de pandemia do novo coronavírus (covid-19)<sup>17</sup>, cujo primeiro caso no Brasil foi registrado em fevereiro de 2020<sup>18</sup>, a desigualdade social e econômica em nosso país, assim como nos demais, foi escancarada. De forma que, em se tratando da Educação mundial, cerca de 826 milhões de estudantes que enfrentam a passagem do ano letivo fora das salas de aula (número que corresponde à metade do total de alunos nessa situação) não têm acesso a um computador em casa, e quase 706 milhões não têm ligação doméstica de internet<sup>19</sup>. No Brasil, são 4,8 milhões de crianças e adolescentes que não têm acesso à internet doméstica<sup>20</sup>. Todos esses estudantes acabam sendo excluídos da maioria das alternativas adotadas pelos governos (em que o uso dessas tecnologias é essencial) como forma de garantir a continuidade do aprendizado.

Nesse momento de pandemia, tem sido um grande desafio seguir com a Educação. Mesmo o Conselho Nacional de Educação (CNE)<sup>21</sup> autorizando a oferta de aulas por meios digitais (videoaulas, plataformas virtuais de ensino e aprendizagem, redes sociais, entre outros) ou não, abrindo espaço para programas de televisão ou rádio; adoção de

<sup>15</sup> < <https://news.un.org/pt/story/2020/09/1726652>>. Acesso em: 22 out. 2020.

<sup>16</sup> Contagem da população mundial. Disponível em: <[https://pt.wikipedia.org/wiki/Popula%C3%A7%C3%A3o\\_mundial](https://pt.wikipedia.org/wiki/Popula%C3%A7%C3%A3o_mundial)>. Acesso em: 10 nov. 2020.

<sup>17</sup> <<https://www.paho.org/pt/covid19>>. Acesso em: 10 out. 2020.

<sup>18</sup> <<https://www.gov.br/saude/pt-br/assuntos/noticias/brasil-confirma-primeiro-caso-de-novo-coronavirus>>. Acesso em: 10 nov. 2020.

<sup>19</sup> Dados divulgados pela ONU em 21 abr. 2020. Disponível em: <<https://news.un.org/pt/story/2020/04/1711192>>. Acesso em: 22 out. 2020.

<sup>20</sup> Dados divulgados pela Agência Brasil – Rio de Janeiro. Disponível em: <<https://www.unicef.org/brazil/comunicados-de-imprensa/unicef-alerta-essencial-garantir-acesso-livre-a-internet-para-familias-e-criancas-vulneraveis>>. Acesso em: 10 nov. 2020.

<sup>21</sup> Parecer CNE/CP Nº 5/2020. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_docman&view=download&alias=145011-pcp005-20&category\\_slug=marco-2020-pdf&Itemid=30192](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=145011-pcp005-20&category_slug=marco-2020-pdf&Itemid=30192)>. Acesso em: 22 out. 2020.

materiais didáticos impressos ou exercícios indicados em materiais didáticos; por exemplo, a comunicação fica fragilizada. Reconheço as potencialidades que os recursos tecnológicos têm frente ao processo de ensino e aprendizagem, mas não posso deixar de expor a desigualdade tecnológica que vivemos.

A investigação matemática (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2016) e o pensar-com-GeoGebra (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2018) foi utilizado neste estudo. Nesse processo de pensar-com-GeoGebra, os autores pontuam que a tecnologia digital escolhida e empregada tem um propósito além do uso comum como ferramenta, mas é inserida como base da investigação. Escolhi trabalhar com o *software* GeoGebra baseada na facilidade de acesso, exploração e visualização. Ainda na produção dos dados, foram utilizadas filmagens das sessões de ensino, gravação da tela do computador e webcam, arquivos gerados no GeoGebra e anotações em folha de papel. O modelo de análise de vídeo proposto por Powell, Francisco e Maher (2004) foi utilizado durante a análise dos dados, a fim de identificar a emergência dos quatro aspectos do PD: *Noção de limite e continuidade; Noção de infinitésimo; Conceito de integral definida; Concepção visual-geométrica*.

Na análise, organizei os dados em relação às atividades exploradas durante as sessões de ensino, seguindo a sequência: *Quadratura do círculo; Cubatura da esfera; O problema da área; O problema do volume; A relação entre os volumes*. A escolha das duplas de estudantes que tiveram os dados produzidos, expostos e discutidos seguiu a ideia de amostragem para pesquisa qualitativa proposta por Marshall (1996). Construí diagramas que mostram evidências em relação à emergência dos aspectos do PD em estudantes do Ensino Médio ao investigarem atividades sobre cálculo de áreas e volumes por meio do *software* GeoGebra. Como conclusão de análise, os diagramas apontam que dois aspectos do PD são constantes nas investigações e os outros dois emergem em momentos mais decisivos.

Os aspectos de *Noção de limite e continuidade* e de *Concepção visual-geométrica* emergiram em todos os momentos de construção de objeto no GeoGebra, bem como nas análises e conclusões. Neste estudo, esses aspectos representaram a manifestação de raciocínios ligados às percepções geométricas básicas já observadas e trabalhadas pelos estudantes ao longo da vida pessoal e/ou escolar.

Os aspectos de *Noção de infinitésimo* e de *Conceito de integral definida* não se manifestaram em ideias iniciais e emergiram de modo mais pontual e específico dentro das investigações. Sempre emergindo diante dos outros dois, esses aspectos

representaram o refinamento das ideias e conjecturas, envolvendo a ação de reduzir algo.

Neste estudo, o GeoGebra foi fundamentalmente importante na representação visual e movimentação dos objetos, uma vez que o *software* possibilitou a rápida execução das propostas de investigação feitas pelos estudantes e auxiliou na descoberta de novas relações e construções. O GeoGebra associado ao processo de ensino e aprendizagem mostrou-se um forte aliado ao desenvolvimento cognitivo de estudantes do Ensino Médio. Ele permitiu a produção de conhecimentos matemáticos relacionados a elementos do CDI, trazendo sutileza a conceitos que são apresentados e estudados no Ensino Superior.

O pensar-com-GeoGebra surgiu ao longo da investigação das atividades. Os estudantes, por não estarem familiarizados com a manipulação do *software*, iniciaram as conjecturas e verificações apenas falando e detalhando as etapas que estavam executando. Essa abordagem também possibilitou a emergência de aspectos do PD, mas com um maior intervalo de tempo e a descontinuidade dos aspectos de *Noção de limite e continuidade* e *Concepção visual-geométrica*. Diante disso, é possível concluir que o pensar-com-GeoGebra potencializou a emergência dos aspectos do PD.

Retomando as perguntas mais amplas e gerais feitas aos estudantes no final da sessão de ensino envolvendo a atividade *O problema da área*, Janaina e Matheus disseram que gostaram da atividade e acharam a proposta interessante. Janaina complementou que o GeoGebra foi importante porque não conseguiria fazer a mão as abordagens que explorou. Quanto a proposta de mudança/melhoria da atividade, os estudantes comentaram que no começo da exploração “quebraram” bastante a cabeça porque esse tipo de abordagem exploratória e investigativa era algo que não estavam acostumados a trabalhar, e pontuaram que a atividade não era difícil. A dupla não apresentou sugestões de melhoria ou mudança.

Bianca e Lívia, ao final da sessão de ensino em que exploraram a atividade *Cubatura da Esfera*, disseram que a atividade foi bem mais difícil que a anterior (*Quadratura do círculo*) e exigiu mais atenção por envolver a Janela 3D do GeoGebra, mas foi muito mais interessante de trabalhar e gostaram da proposta. As estudantes disseram que é possível levar a atividade para a sala de aula e não sugeriram qualquer mudança ou melhoria.

É importante comentar que a dinâmica de um experimento de ensino é diferente da dinâmica de uma sala de aula. O trabalho com um grupo reduzido de estudantes, desfrutando de um tempo maior para desenvolver determinada atividade e contando com

a gravação do ambiente para futura revisitação e análise é algo que o dia a dia da sala de aula não contempla. Desse modo, sugiro aos docentes que, ao levar as atividades aqui propostas para suas escolas, trabalhem separadamente o momento de socialização com o GeoGebra da atividade a ser explorada. Esse momento introdutório do GeoGebra pode acontecer quando o professor achar mais pertinente, até mesmo durante alguma outra atividade que venha a ser abordada com o *software*. No momento de investigação da atividade, é conveniente trabalhar durante aula dupla, assim os estudantes terão tempo para (re)pensar suas ideias e explorações, e finalizar a atividade. O movimento feito nesta pesquisa de, após os estudantes finalizarem a exploração deles, propor o desenvolvimento do roteiro semiaberto (**APÊNDICE A**) para observar outra abordagem, é dispensável diante do tempo que o professor reservar para desenvolvimento de qualquer uma das atividades que esta pesquisa propôs.

O objetivo deste estudo não foi a prática docente, mas é pertinente pontuar que durante a realização das sessões de ensino, alguns dos momentos em que ocorreu a emergência de algum aspecto do PD foi perceptível. Desse modo, avaliar os estudantes diante do percurso trilhado ao desenvolver atividades matemáticas é possível, mas exige que o docente esteja atento a todas as formas de expressão que o estudante possa usar.

Ponderando sobre estudos futuros, reflito sobre as atividades trabalhadas de modo sequencial neste estudo e indago: *Os aspectos emergentes nas atividades envolvendo o cálculo de volume se manifestariam do mesmo modo se as atividades envolvendo o cálculo de área não tivessem sido trabalhadas?*

Nesta pesquisa escolhi trabalhar com a área e volume de figuras curvas, mas se fosse outra seleção de objetos: *Como tais aspectos do PD se evidenciariam se fossem escolhidas outras figuras planas e espaciais para construção? Seria necessária a estruturação de outros aspectos do PD para contemplar tal proposta?*

Um estudo articulando o PD e o Pensamento Geométrico (PG) seria outra possibilidade de pesquisa.

Por fim, acredito que este estudo contribuiu com discussões sobre as tecnologias, a articulação entre o CDI e documentos orientadores e normativos do Ensino Médio, o CDI, o PM, o Pensamento Matemático Elementar (PME), o Pensamento Matemático Avançado (PMA), o PG, o Pensamento Algébrico (PAI), o Pensamento Analítico (PAn), o PD, os aspectos do PD emergentes em sessões de ensino durante a investigação do cálculo de áreas e volumes no *software* GeoGebra. Assim, espero que as reflexões aqui apresentadas contribuam à Educação Matemática, sejam usadas em pesquisas futuras e

levadas para o âmbito da sala de aula por docentes que, assim como eu, buscam o aprimoramento pessoal, profissional e a produção de novos conhecimentos à nossa área.

## REFERÊNCIAS

- BARBOSA, L. M. **Aspectos do Pensamento Computacional na Construção de Fractais com o software GeoGebra**. 2019. 168f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2019.
- BARON, M. E. **Curso de História da Matemática: Origens e Desenvolvimento do Cálculo**. Unidade 1 – A Matemática Grega. Tradução de José R. B. Coelho. Brasília: Editora UnB, 1985.
- BARR, V.; STEPHENSON, C. Bringing computational thinking to K-12: What is involved and what is the role of the computer science education community? **ACM Inroads**, v.2, n.1, p.48-54, 2011.
- BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa: significados e a razão que a sustenta. **SE&PQ**, v.1, n.1, p.7-26, 2005.
- BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. p. 107-119.
- BICUDO, M. A. V. Pesquisa em Educação Matemática. **Revista Pro-Posições**, Campinas, v.4, n.1, p.18-23, mar. 1993.
- BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação Matemática: uma introdução à teoria e aos métodos**. Lisboa: Porto Editora, 1994 ou 1989.
- BORBA, M. C. A pesquisa qualitativa em educação matemática. **Anais da 27ª reunião anual da Anped**, p.1-18, 2004.
- BORBA, M. C. Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento. In: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e educação matemática**. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.
- BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento**. 2. ed.; 1. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.
- BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication Technologies, modeling, experimentation and visualization**. New York: Springer, 2005. v. 39.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Educação é a Base**. Brasília: Ministério da Educação, Governo Federal, 2017. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc-etapa-ensino-medio>>. Acesso em: 10 out.2020.

BRASIL. **Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações**. Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia. Disponível em: [bdtd.ibict.br](http://bdtd.ibict.br). Acesso em: 2020.

BRASIL. **Catálogo de Teses e Dissertações**. Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior. Disponível em: [catalogodeteses.capes.gov.br](http://catalogodeteses.capes.gov.br). Acesso em: 2021.

BRENNAN, K.; RESNICK, M. New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking. **AERA 2012**, Vancouver, Canada, 2012. Disponível em: <[http://web.media.mit.edu/~kbrennan/files/Brennan\\_Resnick\\_AERA2012\\_CT.pdf](http://web.media.mit.edu/~kbrennan/files/Brennan_Resnick_AERA2012_CT.pdf)>. Acesso em: 15 ago. 2021.

CORRADI, D. K. S. **Investigações matemáticas mediadas pelo pensamento reflexivo no ensino e aprendizagem das funções seno e cosseno: uma experiência com alunos do 2º ano do ensino médio**. 2013. 208f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2013.

COSTA, C. Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização. In: PONTE, J. P.; COSTA, C.; ROSENDO, A. I.; MAIA, E.; FIGUEIREDO, N.; DIONÍSIO, A. F. (Org.) **Atividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores**. Coimbra: SPCE, 2002, p.257-273).

D'AMBRÓSIO, U. **Educação matemática: Da teoria à prática**. 23. Ed. Campinas: Papirus, 2012.

D'AMBRÓSIO, U. Prefácio. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019, p.11-22.

EUCLIDES. **Os elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EDWARDS, C. H. **The Historical Development of the Calculus**. New York: Springer-Verlag, 1979.

ESTRADA, M. F.; DE SÁ, C. C.; QUEIRÓ, J. F.; SILVA, M. C.; COSTA, M. J. **História da Matemática**. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

FERREIRA, A. B. H. **Mini Aurélio: o dicionário da língua portuguesa**. Coordenação de Marina Baird Ferreira. 8. ed. rev. atual. Curitiba: Positivo, 2010.

GADANIDIS, G. Five Affordances of Computational Thinking to Support Elementary Mathematics Education. **Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching**, v.36 n.2 p.143-151, 2017.

GOLDENBERG, M. **A arte de Pesquisar: Como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

HAREL, G.; SELDEN, A.; SELDEN, J. Advanced mathematical thinking: some PME perspectives. In: GUTIÉRREZ, A.; BOERO, P.; (Eds.). **Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future**. SensePublishers, 2006.

HENRIQUES, A. C. C. B. **O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de atividades de investigação**. 2010. 462f. Tese (Doutorado em Educação) – Instituto de Educação Universidade de Lisboa, Lisboa, 2010.

HOHENWARTER, M.; FUCHS, K. J. Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. In: **Conference on Computer Algebra Systems and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Teaching** (Sarvari, Cs. Hrsg.), 2004, Hungary. Anais... Hungary: Pecs, 2004. p.128-133.

HONORATO, V. S. **Elaborando atividades matemáticas com o software GeoGebra**. 2018. 157f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2018.

IDEM, R. C. **Construcionismo, Conhecimentos Docentes e GeoGebra: uma experiência envolvendo licenciandos em Matemática e professores**. 2017. 163f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2017.

ISTE/CSTA. **Computational Thinking Teacher Resource**. 2ed., 2011. Disponível em: <[http://csta.acm.org/Curriculum/sub/CurrFiles/472.11CTTeacherResources\\_2ed-SP-vF.pdf](http://csta.acm.org/Curriculum/sub/CurrFiles/472.11CTTeacherResources_2ed-SP-vF.pdf)>. Acesso em: 15 ago. 2021.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias: O novo ritmo da informação**. 8. ed. Campinas: Papirus, 2012.

KRUTETSKII, V. A. **The psychology of mathematical abilities in schoolchildren**. Translated from the Russian by Joan Teller. United States of America, 1976.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática**. Tradução de Carlos Irineu da Costa. 2. ed.; 2. reimp. São Paulo: Editora 34, 2016.

LÉVY, P. **Cibercultura**. Tradução de Carlos Irineu da Costa. 3. ed.; 3. reimp. São Paulo: Editora 34, 2018.

LÉVY, P. **O que é o virtual?**. Tradução de Paulo Neves. 2. ed.; 2. reimp. São Paulo: Editora 34, 2017.



- LIMA, M. L. S. **Sobre pensamento geométrico, provas e demonstrações matemáticas de alunos do 2º ano do ensino médio nos ambientes lápis e papel e GeoGebra**. 2015. 194f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015.
- MARSHALL, M. N. Sampling for qualitative research. **Family Practice**, v.13, ed.6, p.522-526, dez 1996.
- NASCIMENTO, A. A. **Análise dos tipos de provas matemáticas e pensamento geométrico de alunos do 1º ano do ensino médio**. 2017. 166f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2017.
- OZORES, A. L. F. **Entendendo alguns erros do Ensino Fundamental II que os alunos mantêm ao final do Ensino Médio**. 2016. 206f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.
- PAGANI, E. M. L.; ALLEVATO, N. S. G. Ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral: um mapeamento de algumas teses e dissertações produzidas no Brasil. **VIDYA**, v.34, n.2, p.61-74, 2014.
- POINCARÉ, H. A invenção matemática. In: ABRANTES, P.; LEAL, L. C.; PONTE, J. P. (Eds.), **Investigar para aprender matemática**. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1996, p.7-14.
- PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 3. ed. rev. ampl.; 2. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.
- PONTES, J. C. **Identificação e caracterização do perfil de erros e dificuldades de aprendizagem nas questões de estatística e probabilidade das provas de matemática do ENEM nos anos de 2013 a 2016 dos aprovados na primeira chamada do SISU para ingressar na UFRN**. 2019. 199f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Terra Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019.
- POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Uma abordagem à Análise de Dados de Vídeo para investigar o desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos de estudantes. **Bolema**, v.17, n.21, p.81-140, 2004.
- REIS, F. S. **A tensão entre rigor e intuição no Ensino de cálculo e análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos**. 2001. 302f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.
- REIS, R. C. A. **BNCC, ensino da matemática e conhecimento oficial: as experiências na centralização dos currículos**. 2021. 159f. Dissertação (Mestrado em Ensino e Processos Formativos) – Faculdade de Engenharia Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Ilha Solteira, 2021.

RIBEIRO, A. E. Tecnologia digital. **Glossário Ceale**. Disponível em: <  
<http://www.ceale.fae.ufmg.br/app/webroot/glossarioceale/verbetes/tecnologia-digital>>.  
 Acesso em: 18 out. 2020.

RODRIGUES, S. S. **Problemas de maximização de área e volume aplicado ao Ensino Médio**. 2019. 68f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2019.

SAD, L. A. **Uma abordagem epistemológica do cálculo**. CD – 23ª ANPEd, 2000.

SOUTO, D. L. P.; BORBA, M. C. Seres humanos-com-internet ou internet-com-seres humanos: uma troca de papéis? **Relime**, v.19, n.2, p.217-242, 2016.

SPERAFICO, Y. L. S. **Competências cognitivas e metacognitivas na resolução de problemas e na compreensão do erro: um estudo envolvendo equações algébricas do 1º grau com alunos do 8º ano**. 2013. 153f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

STEFFE, L.; THOMPSON, P. W. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. **Research design in mathematics and science education**. Hillsdale, NJ, 2000.

STEWART, J. **Cálculo, volume I**. Tradução técnica Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

WIELEWSKI, G. D. **Aspectos do pensamento matemático na resolução de problemas: uma apresentação contextualizada da obra de Krutetskii**. 2005. 407f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.

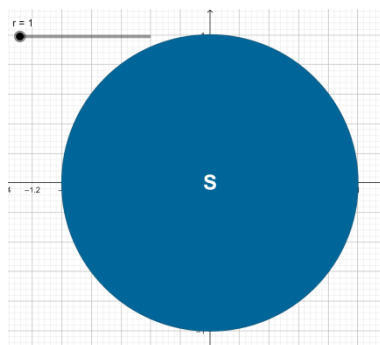
## APÊNDICES

### APÊNDICE A - Atividades

#### Atividade 1: Quadratura do círculo

Determine a área de uma região  $S$  limitada pela circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ .

Figura 1: Região circular  $S$



Fonte: Elaboração própria com o GeoGebra

1. Construção do cenário de investigação no GeoGebra (reduzido a um quadrante).

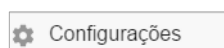
- a) Clique no campo “Entrada”  Entrada..., digite a equação  $x^2 + y^2 = 1$  e pressione a tecla “Enter”  no teclado ou no GeoGebra.
- b) Construa um quadrante circular. Para isso clique na aba “Círculo”  e selecione a ferramenta “Setor Circular”  Setor Circular, em seguida clique com o mouse nas posições (0,0) e (1,0) na “Janela de visualização 2” e leve o ícone do mouse até a posição (0,1), clicando sobre ela.
- c) Calcule a área do quadrante circular construído, selecionando a ferramenta “Ângulo” , seguido de “Área”  Área e clicando sobre o objeto construído anteriormente. Esta ação será realizada sempre que for necessário calcular a área de uma figura construída com ferramentas definidas do GeoGebra.
- d) Oculte o setor circular construído no item anterior clicando sobre o ícone , presente na “Janela de Álgebra” do lado esquerdo da tela. Ao fazer isso, o ícone ficará branco . Esta ação sempre será realizada quando for necessário ocultar ou expor um objeto construído.
- e) Construa um quadrado. Para isso clique na aba “Polígono”  e selecione a ferramenta “Polígono Regular”  Polígono Regular, posicionando dois vértices, o

primeiro em (0,0) e o outro em qualquer ponto da abscissa, tal que  $0 < x < 1$ , e definindo 4 como o total de vértices.

- f) Calcule a área do quadrado.
- g) Exponha a construção do quadrante circular.
- h) Qual o valor da medida do lado do quadrado para que sua área seja uma boa aproximação à área do quadrante circular?

## 2. Explorando aproximações para $\pi$ .

- a) Aumente o arredondamento dos valores exibidos na janela do GeoGebra para 10 casas decimais clicando no ícone , seguido da opção “Configurações”

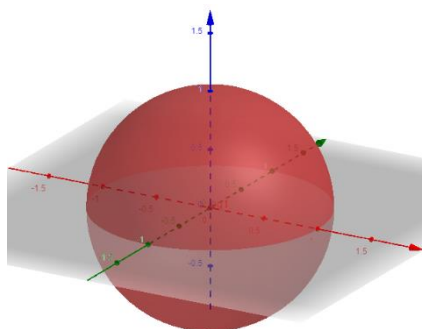


- b) Os valores encontrados anteriormente para as áreas continuam sendo uma boa aproximação? Se for, é possível achar uma melhor?
- c) Existe alguma outra estratégia para encontrar a melhor aproximação desejada? Como podemos explorá-la?

## Atividade 2: Cubatura da esfera

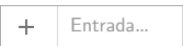
Determine o volume da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Figura 1: Esfera



Fonte: Elaboração própria com o GeoGebra

## 1. Construção do cenário de investigação no GeoGebra (reduzido a um octante).

- a) Abra a “Janela de Visualização 3D” clicando em .
- b) Clique no campo “Entrada” , digite a equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e pressione a tecla “Enter”  no teclado ou no GeoGebra.

- c) Calcule o volume do octante da esfera, selecionando a ferramenta “Ângulo” , seguido de “Volume”  e clique sobre o objeto construído anteriormente. Em seguida, dê um duplo clique sobre a caixa de texto aberta na janela de visualização e clique dentro do ícone que aparece do lado direito da equação, acrescentando a divisão por 8. Altere o outro lado da equação para “Volume do octante”.
- d) Construa um cubo. Para isso clique na aba “Pirâmide”  e selecione a ferramenta “Cubo” , posicionando dois vértices, o primeiro em (0,0) e o outro em qualquer ponto do eixo x, tal que  $0 < x < 1$ .
- e) Calcule o volume do cubo.
- f) Qual o valor da medida da aresta do cubo para que se volume seja uma boa aproximação ao volume do octante da esfera?

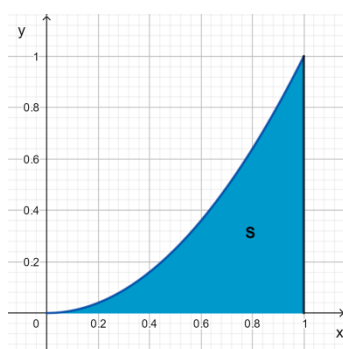
## 2. Explorando aproximações para $\pi$ .

- a) Aumente o arredondamento dos valores exibidos na janela do GeoGebra para 10 casas decimais clicando no ícone , seguido da opção “Configurações”  Configurações .
- b) Os valores encontrados anteriormente para os volumes continuam sendo uma boa aproximação? Se for, é possível achar uma melhor?
- c) Existe alguma outra estratégia para encontrar a melhor aproximação desejada? Como podemos explorá-la?

### Atividade 3: O problema da área

*Atividade: Determine a área de uma região  $S$  (Figura 1) que está sob a parábola  $y = x^2$ , com  $0 \leq x \leq 1$ .*

Figura 1: Região parabólica S



Fonte: Elaboração própria com o GeoGebra

1. Construção da parábola no intervalo  $0 \leq x \leq 1$  e da região S.

- a) Clique no campo “Entrada”  Entrada..., digite “Função”, escolha a opção  clicando sobre ela e, em seguida, digite dentro dos parênteses “ $x^2, 0, 1$ ”. Pressione a tecla “Enter” .

- b) Construa um segmento de reta vertical delimitando a região S. Para isso clique na aba “Reta”  e selecione a ferramenta “Segmento”  Segmento, em seguida clique com o mouse nas posições (1,0) e (1,1) na “Janela de visualização 2”.

- c) O que podemos observar e discutir inicialmente com relação à área da região S? É possível compará-la com de outras regiões?

2. Construção das primeiras aproximações à região S.

- a) Clique na aba “Polígono”  e construa na “Janela de visualização 2” um quadrado com vértices em (0,0), (1,0), (1,1) e (0,1).
- b) Construa um triângulo com vértices em (0,0), (1,0) e (1,1). Para isso, use novamente a aba “Polígono” .
- c) Podemos considerar a área desse triângulo como uma “boa aproximação” para área da Região S? Se for uma boa aproximação, é possível encontrar uma melhor?

3. Divisão da região S em faixas.

- a) Oculte o quadrado e o triângulo construído na **Parte 2**.

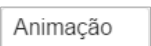
- b) Dividir a região S em cinco faixas de mesma largura. Para isso, construa 4 segmentos de retas verticais, igualmente espaçados em x, clicando na aba “Reta”

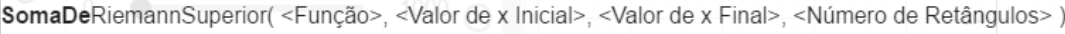


e selecionando a ferramenta “Segmento” .

- c) É possível aproximar cada faixa a uma região com lados retos? Qual medida devemos considerar para a sua base e altura?

4. Construção de retângulos usando as extremidades direitas e esquerdas das faixas.

- a) Selecione a ferramenta “Controle Deslizante”  e clique em algum lugar na “Janela de visualização 2” distante das construções realizadas até a **Parte 3**. Na janela “Controle Deslizante”, digite  $n$  em “Nome”; selecione a opção “Inteiro”; em “Intervalo”, digite 0 (zero) em “min” e, em “max”, digite 1 000 (um mil); em “Incremento” deixe o valor 5(cinco); na aba “Animação” , em “Repetir”, selecione a opção “Crescente (Uma Vez)” . Para finalizar, clique no botão “OK” .

- b) Clique no campo “Entrada” , digite “SomaDe”, escolha a opção  clicando sobre ela e, em seguida, digite dentro dos parênteses “ $x^2, 0, 1, n$ ”. Pressione a tecla “Enter” .

- c) Clique no campo “Entrada” , digite “SomaDe”, escolha a opção  clicando sobre ela e, em seguida, digite dentro dos parênteses “ $x^2, 0, 1, n$ ”. Pressione a tecla “Enter” .

- d) Mova o “Controle Deslizante” até  $n = 5$  .

- e) Oculte uma construção por vez para melhor observação.

- f) Quais estimativas são possíveis fazer para a área de S?

- g) É possível repetir esse procedimento com um número maior de faixas? O que é esperado que aconteça?

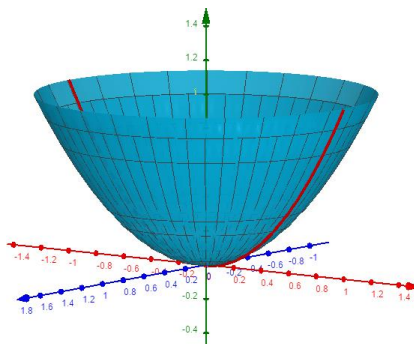
5. Cálculo da área da região S aumentando o número de faixas.

- a) Deixe visível na “Janela de visualização 2” apenas os objetos construídos nas **Partes 1 e 4**.
- b) Clique no “Menu Exibir”  e selecione a opção  Planilha.
- c) Na “Janela de Álgebra” clique com o botão direito do mouse sobre o objeto “Controle Deslizante” e selecione “Gravar para a Planilha de Cálculos” . Repita essa ação para os objetos “SomaDeRiemannSuperior” e “SomaDeRiemannInferior”.
- d) Anime o “Controle Deslizante” clicando no botão “Play”  presente no lado direito do objeto na “Janela de Álgebra”.
- e) Qual é o valor da área da Região S? O que acontece se aumentarmos a quantidade de casas decimais?

#### Atividade 4: O problema do volume

*Atividade: Determine o volume do paraboloide (Figura 1) obtido pela revolução em torno do eixo y da curva  $y = x^2$ , com  $-1 \leq x \leq 1$ .*

Figura 1: Superfície de revolução



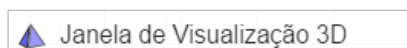
Fonte: Elaboração própria com o GeoGebra

1. Construção da superfície de revolução no intervalo  $-1 \leq x \leq 1$  utilizando o GeoGebra.

- a) Clique no campo “Entrada”  Entrada..., digite “Função”, escolha a opção  **Função**( <Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final> ) clicando sobre ela e, em seguida, digite dentro dos parênteses “ $x^2, -1, 1$ ”. Pressione a tecla “Enter” .

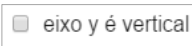


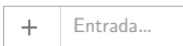
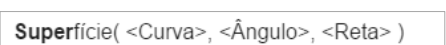
- b) Abra a janela de visualização 3D clicando em , presente no canto superior direito, seguido de  e escolha a opção “Janela de Visualização 3D”



- c) Oculte a “Janela de Visualização” clicando em , seguido de “Fechar”



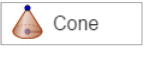
- d) Posicione o Eixo Y como vertical. Para isso clique em , seguido de  e selecione a opção . Acesse também o ícone , escolhendo a opção .

- e) Clique no campo “Entrada” , digite “Superfície”, escolha a opção  clicando sobre ela e, em seguida, digite dentro dos parênteses **“nome da função do item 1 gerado pelo GeoGebra,  $2\pi$ , EixoY”**.

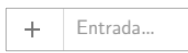
Pressione a tecla “Enter” .

- f) É possível usar a ferramenta “Volume” apresentada pelo GeoGebra para calcular o volume desejado nesta atividade? Qual(is) estratégia(s) podemos utilizar para resolver o que está sendo proposto?

## 2. Construção das primeiras aproximações ao volume do parabolóide.

- a) Clique na aba “Pirâmide” , selecione a ferramenta ‘Cilindro’  e construa na “Janela de visualização 3D” um cilindro com centro da base em (0,0,0), raio e altura igual a 1.
- b) Construa um cone com vértice em (0,0, 0), raio e altura igual a 1. Para isso, use novamente a aba “Pirâmide”  e selecione a opção “Cone” .
- c) Podemos considerar o volume desse cone como uma “boa aproximação” para o volume do parabolóide? Se for uma boa aproximação, é possível encontrar uma melhor?

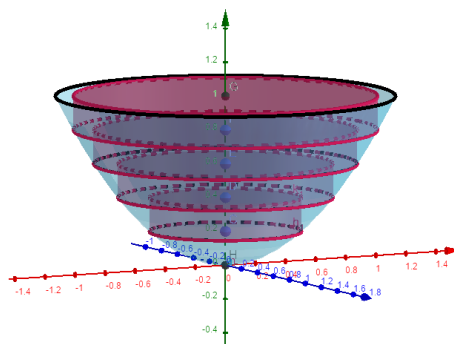
## 3. Divisão do eixo do parabolóide em partes iguais.

- e) Oculte o cilindro e o cone construído na **Parte 2**, clicando sobre o ícone  de cada objeto, presente na “Janela de Álgebra” do lado esquerdo da tela. Ao fazer isso, o ícone ficará branco . Essa ação sempre será realizada quando for necessário ocultar ou expor um objeto construído.
- f) Dividir o eixo do parabolóide em cinco partes iguais de comprimento 0,2. Para isso, construa 5 pontos sobre o eixo y, igualmente espaçados e compreendidos entre 0 e 1, selecionando a ferramenta “Ponto” .
- g) Aproveite a divisão para construir os planos  $y = \frac{1}{5}$ ,  $y = \frac{2}{5}$ ,  $y = \frac{3}{5}$ ,  $y = \frac{4}{5}$  e  $y = 1$ . Para isso, Clique no campo “Entrada”  e digite cada uma das equações fornecidas, pressionando a tecla “Enter”  entre uma e outra.
- h) Considerando as interseções do parabolóide com os planos (seções transversais), é possível construir um sólido usando-as como base? Qual sólido permitirá uma melhor aproximação ao cálculo do volume do parabolóide? Qual medida devemos considerar para a sua altura e raio?

#### 4. Construção de cilindros inscritos e circunscritos.

- g) Oculte os planos construídos na **Parte 3**.
- h) Clique na aba “Pirâmide” , selecione a ferramenta ‘Cilindro’  e construa na “Janela de visualização 3D” inicialmente os cilindros inscritos ao parabolóide. Chegando à ilustração da Figura 2.

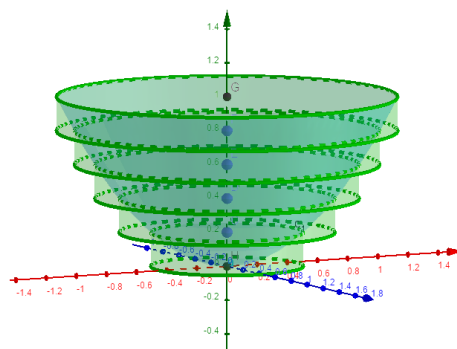
Figura 2: Cilindros inscritos ao parabolóide



Fonte: Elaboração própria com o GeoGebra

- i) Oculte os cilindros construídos no item anterior.
- j) Construa na “Janela de visualização 3D” os cilindros circunscritos ao parabolóide. Chegando à ilustração da Figura 3.

Figura 3: Cilindros circunscritos ao parabolóide



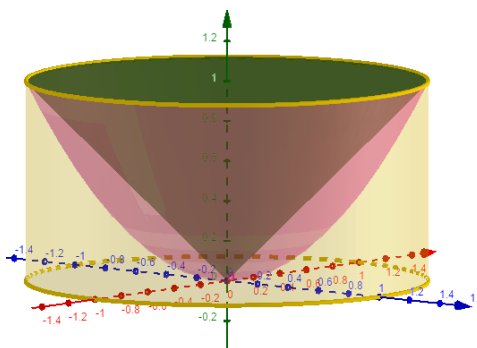
Fonte: Elaboração própria com o GeoGebra

- k) Quais estimativas são possíveis fazer para o volume do parabolóide?
  - l) O que acontece se repetirmos esse procedimento aumentando o número de divisões do eixo do parabolóide?
5. Cálculo do volume do parabolóide aumentando o número de divisões do eixo do parabolóide.
- c) Explore o aumento sugerido considerando os cilindros inscritos e circunscritos.
  - d) Qual é o valor do volume do parabolóide? O que acontece se aumentarmos a quantidade de casas decimais?

### Atividade 5: A relação entre os volumes

*Atividade: Determine, se existir, as relações entre os volumes de um cilindro, um parabolóide e um cone de mesma base e altura.*

Figura 1: Sólidos



Fonte: Elaboração própria com o GeoGebra

### 2. Construção dos sólidos utilizando o GeoGebra.

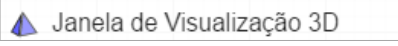
- h) Clique no campo “Entrada”  , digite “Função”, escolha a opção

**Função( <Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final> )**

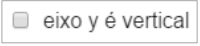
clicando sobre ela e,

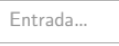
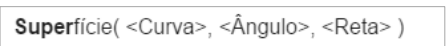
em seguida, digite dentro dos parênteses “ $x^2, -1, 1$ ”. Pressione a tecla “Enter”



- i) Abra a janela de visualização 3D clicando em , presente no canto superior direito, seguido de  e escolha a opção “Janela de Visualização 3D”
- .

- j) Oculte a “Janela de Visualização” clicando em , seguido de “Fechar”
- .

- k) Posicione o Eixo Y como vertical. Para isso clique em , seguido de  e selecione a opção . Acesse também o ícone , escolhendo a opção .

- l) Clique no campo “Entrada”  , digite “Superfície”, escolha a opção  clicando sobre ela e, em seguida, digite dentro dos parênteses  $(0, 0, 0, 1, 1)$  e pressione a tecla “Enter”
- “nome da função do item 1 gerado pelo GeoGebra,  $2\pi$ , EixoY”.***

Pressione a tecla “Enter”

- m) Clique na aba “Pirâmide” , selecione a ferramenta ‘Cilindro’  e construa na “Janela de visualização 3D” um cilindro com centro da base em  $(0, 0, 0)$ , raio e altura igual a 1.
- n) Construa um cone com vértice em  $(0, 0, 0)$ , raio e altura igual a 1. Para isso, use novamente a aba “Pirâmide”  e selecione a opção “Cone” .
- o) Como podemos calcular o volume desses sólidos usando o GeoGebra? É possível relacionar esses valores?
- p) Como podemos generalizar essa relação?

**APÊNDICE B – Termos de Consentimento e de Assentimento Livre e Esclarecido**  
**Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) – responsáveis**



**Programa de Pós-Graduação em  
Ensino e Processos Formativos**

Ilha Solteira/Jaboticabal/São José do Rio Preto

**TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - TCLE**

O/a seu filho/filha está sendo convidado(a) a participar, como voluntário(a), da pesquisa intitulada **“O uso da História da Matemática e do GeoGebra na investigação do pensamento diferencial de alunos do ensino médio”**. Meu nome é Ana Rita Domingues e tenho como orientador o Prof. Dr. Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva, somos os pesquisadores responsáveis, e minha área de atuação é Educação Matemática. Após receber os esclarecimentos e as informações a seguir, se você aceitar a participação do seu filho/filha no estudo assine ao final deste documento, que está impresso em duas vias, sendo que uma delas é sua e a outra pertence aos pesquisadores responsáveis. Esclarecemos que em caso de recusa na participação você ou o/a seu filho/a não serão penalizados de forma alguma. Mas se aceitar a participação dele/a, as dúvidas sobre a pesquisa poderão ser esclarecidas pelos pesquisadores responsáveis, via e-mail [ana.rita.domingues2@gmail.com](mailto:ana.rita.domingues2@gmail.com) e [ricardo.scucuglia@unesp.br](mailto:ricardo.scucuglia@unesp.br), ou telefone (18) 98124-8270 e (17) 3221-2751.

**1. Informações Importantes sobre a Pesquisa:**

- 1.1 A pesquisa intitulada “O uso da História da Matemática e do GeoGebra na investigação do pensamento diferencial de alunos do ensino médio” propõe o desenvolvimento de atividades envolvendo áreas e volumes usando elementos da história do cálculo e o *software* GeoGebra, em um cenário investigativo, possibilitando o surgimento de desdobramentos propostos pelos alunos e tem como objetivo principal responder a pergunta norteadora: *Qual a natureza do pensamento diferencial de alunos do ensino médio ao explorarem atividades envolvendo o cálculo de área e volume com o GeoGebra?*;
- 1.2 Essa pesquisa será desenvolvida durante alguns encontros a serem realizados na escola em que o seu filho(a) estuda e agendados para o período da tarde em dias letivos, não comprometendo as aulas regulares. Os encontros serão documentados via audiovisual para análise posterior, por isso se você concordar com a participação do seu filho(a), ele(a) será observado e filmado. Também serão realizadas entrevistas com os participantes. Esses registros e os produtos educacionais criados por eles poderão ser utilizados em outros estudos como: artigos, teses, capítulo de livros, livros, etc. os quais poderão ser publicados na Internet e/ou de forma impressa e estarão sob domínio público;
- 1.3 Esta pesquisa oferece possíveis desconfortos e riscos de constrangimento do participante caso não consiga finalizar alguma tarefa e/ou pelo fato de ser filmado. A participação neste estudo é voluntária. Este termo de consentimento livre e esclarecido tem como objetivo fundamental a ciência e autorização da participação do seu filho(a), do uso de sua imagem e das produções que poderão ser desenvolvidas. A participação do seu filho(a) na pesquisa estará contribuindo com o avanço da Educação Matemática no ensino médio;

- 1.4 As informações registradas serão utilizadas para fins de pesquisa em Educação Matemática. Transcrições de falas, falas em áudio, construções de objetos computacionais, produtos educacionais, imagens e registros de ações do(a) participante serão utilizados/revelados em relatórios de pesquisa, artigos, livros e, principalmente, na publicação de dissertações e teses;
- 1.5 É garantida a liberdade do/a participante se recusar a participar ou retirar o seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa, sem qualquer penalidade ou represálias;
- 1.6 É garantida a liberdade do/a participante se recusar a responder questões que lhe causem constrangimento em entrevistas e questionários;
- 1.7 É direito do(a) participante, por lei, pleitear indenização (reparação a danos imediatos ou futuros) decorrentes da participação na pesquisa.

---

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - Câmpus de São José do Rio Preto –  
 Cristóvão Colombo, 2265, 15054000, São José do Rio Preto - São Paulo  
<http://www.ibilce.unesp.br/#!/posgraduacao> CNPJ: 48.031.918/0011-04.



**Programa de Pós-Graduação em  
Ensino e Processos Formativos**

**Ilha Solteira/Jaboticabal/São José do Rio Preto**

## 2. Consentimento da Participação na Pesquisa:

Eu, \_\_\_\_\_, inscrito(a) sob o RG/ CPF \_\_\_\_\_, abaixo assinado, concordo que o meu filho(a) participe do estudo intitulado “O uso da História da Matemática e do GeoGebra na investigação do pensamento diferencial de alunos do ensino médio”. Informo ter mais de 18 anos de idade e destaco que minha autorização à participação nesta pesquisa é de caráter voluntário. Fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) pelos pesquisadores responsáveis Ana Rita Domingues e Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva sobre a pesquisa, os procedimentos e métodos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes da participação do meu filho(a) no estudo. Foi-me garantido que posso retirar meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade. Declaro, portanto, que concordo com a participação do meu filho(a) no projeto de pesquisa acima descrito.

\_\_\_\_\_, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_

Uso de imagem (rubricar dentro do parêntese):

( ) Permito a divulgação da imagem do meu filho(a) nos resultados publicados da pesquisa;

( ) Não permito a publicação da imagem do meu filho(a) nos resultados publicados da pesquisa.

Confidencialidade (rubricar dentro do parêntese):

( ) Permito que o nome do meu filho(a) seja mantido no trabalho;

( ) Não permito que o nome do meu filho(a) seja mantido no trabalho.

Sugiro que o nome seja alterado

para: \_\_\_\_\_.

Armazenamento em banco de dados (rubricar dentro do parêntese):

(        ) Permito que os registros dos encontros sejam armazenados para investigações futuras;

(        ) Não permito que os registros dos encontros sejam armazenados para investigações futuras.

---

Nome e Assinatura do(a) responsável pelo participante

---

Ana Rita Domingues – pesquisadora responsável

---

Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva – pesquisador responsável

---

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - Câmpus de São José do Rio Preto –  
Cristóvão Colombo, 2265, 15054000, São José do Rio Preto - São Paulo  
<http://www.ibilce.unesp.br/#/posgraduacao>CNPJ: 48.031.918/0011-04.

### Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) – participantes com 18 anos



**Programa de Pós-Graduação em  
Ensino e Processos Formativos**  
Ilha Solteira/Jaboticabal/São José do Rio Preto

## TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TCLE

Você está sendo convidado(a) a participar, como voluntário(a), da pesquisa intitulada **“O uso da História da Matemática e do GeoGebra na investigação do pensamento diferencial de alunos do ensino médio”**. Meu nome é Ana Rita Domingues e tenho como orientador o Prof. Dr. Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva, somos os pesquisadores responsáveis, e minha área de atuação é Educação Matemática. Após receber os esclarecimentos e as informações a seguir, se você aceitar fazer parte do estudo, assine ao final deste documento, que está impresso em duas vias, sendo que uma delas é sua e a outra pertence aos pesquisadores responsáveis. Esclarecemos que em caso de recusa na participação você não será penalizado(a) de forma alguma. Mas se aceitar participar, as dúvidas sobre a pesquisa poderão ser esclarecidas pelos pesquisadores responsáveis, via e-mail [ana.rita.domingues2@gmail.com](mailto:ana.rita.domingues2@gmail.com) e [ricardo.scucuglia@unesp.br](mailto:ricardo.scucuglia@unesp.br), ou telefone (18) 98124-8270 e (17) 3221-2751.

### 1. Informações Importantes sobre a Pesquisa:

- 1.1 A pesquisa intitulada “O uso da História da Matemática e do GeoGebra na investigação do pensamento diferencial de alunos do ensino médio” propõe o desenvolvimento de atividades envolvendo áreas e volumes usando elementos da história do cálculo e o *software* GeoGebra, em um cenário investigativo, possibilitando o surgimento de desdobramentos propostos pelos alunos e tem como objetivo principal responder a pergunta norteadora: *Qual a natureza do pensamento diferencial de alunos do ensino médio ao explorarem atividades envolvendo o cálculo de área e volume com o GeoGebra?*;
- 1.2 Essa pesquisa será desenvolvida durante alguns encontros a serem realizados na escola em que você estuda e agendados para o período da tarde em dias letivos, não comprometendo as aulas regulares. Os encontros serão documentados via audiovisual para análise posterior, por isso se você concordar em participar desse estudo, você será observado e filmado. Também serão realizadas entrevistas com os participantes. Esses registros e os produtos educacionais criados poderão ser utilizados em outros estudos como: artigos, teses, capítulo de livros, livros, etc. os quais poderão ser publicados na Internet e/ou de forma impressa e estarão sob domínio público;
- 1.3 Esta pesquisa oferece possíveis desconfortos e riscos de constrangimento do participante caso não consiga finalizar alguma tarefa e/ou pelo fato de ser filmado. A participação neste estudo é voluntária. Este termo de consentimento livre e esclarecido tem como objetivo fundamental a sua ciência e autorização quanto à participação, o uso de sua imagem e das produções que poderão ser desenvolvidas. A sua participação na pesquisa estará contribuindo com o avanço da Educação Matemática no ensino médio;
- 1.4 As informações registradas serão utilizadas para fins de pesquisa em Educação Matemática. Transcrições de falas, falas em áudio, construções de objetos computacionais, produtos educacionais, imagens e registros de ações do(a) participante serão utilizados/revelados em relatórios de pesquisa, artigos, livros e, principalmente, na publicação de dissertações e teses;
- 1.5 É garantida a liberdade do/a participante se recusar a participar ou retirar o seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa, sem qualquer penalidade ou represálias;
- 1.6 É garantida a liberdade do/a participante se recusar a responder questões que lhe causem constrangimento em entrevistas e questionários;
- 1.7 É direito do(a) participante, por lei, pleitear indenização (reparação a danos imediatos ou futuros) decorrentes da participação na pesquisa.

---

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - Câmpus de São José do Rio Preto –  
 Cristóvão Colombo, 2265, 15054000, São José do Rio Preto - São Paulo  
<http://www.ibilce.unesp.br/#!/posgraduacaoCNPJ>: 48.031.918/0011-04.



**Programa de Pós-Graduação em  
 Ensino e Processos Formativos**  
 Ilha Solteira/Jaboticabal/São José do Rio Preto

## 2. Consentimento da Participação na Pesquisa:

Eu, \_\_\_\_\_, inscrito(a)  
 sob o RG/ CPF \_\_\_\_\_, abaixo assinado, concordo em  
 participar do estudo intitulado “O uso da História da Matemática e do GeoGebra  
 na investigação do pensamento diferencial de alunos do ensino médio”. Destaco  
 que minha participação nesta pesquisa é de caráter voluntário. Fui devidamente  
 informado(a) e esclarecido(a) pelos pesquisadores responsáveis Ana Rita



Domingues e Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva sobre a pesquisa, os procedimentos e métodos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes de minha participação no estudo. Foi-me garantido que posso retirar meu assentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade. Declaro, portanto, que concordo com a minha participação no projeto de pesquisa acima descrito.

\_\_\_\_\_, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_

Uso de imagem (rubricar dentro do parêntese):

( ☐ ) Permito a divulgação da minha imagem nos resultados publicados da pesquisa;

( ☐ ) Não permito a publicação da minha imagem nos resultados publicados da pesquisa.

Confidencialidade (rubricar dentro do parêntese):

( ☐ ) Permito que o meu nome seja mantido no trabalho;

( ☐ ) Não permito que o meu nome seja mantido no trabalho. Sugiro que o nome seja alterado

para:\_\_\_\_\_.

Armazenamento em banco de dados (rubricar dentro do parêntese):

( ☐ ) Permito que os registros dos encontros sejam armazenados para investigações futuras;

( ☐ ) Não permito que os registros dos encontros sejam armazenados para investigações futuras.

---

Nome e Assinatura do(a) participante

---

Ana Rita Domingues – pesquisadora responsável

---

Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva – pesquisador responsável

---

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - Câmpus de São José do Rio Preto –  
Cristóvão Colombo, 2265, 15054000, São José do Rio Preto - São Paulo  
<http://www.ibilce.unesp.br/#!/posgraduacao> CNPJ: 48.031.918/0011-04.

**Termo de Assentimento Livre e Esclarecido (TALE) – estudantes**



Programa de Pós-Graduação em  
Ensino e Processos Formativos  
Ilha Solteira/Jaboticabal/São José do Rio Preto

## TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TALE

Você está sendo convidado(a) a participar, como voluntário(a), da pesquisa intitulada **“O uso da História da Matemática e do GeoGebra na investigação do pensamento diferencial de alunos do ensino médio”**. Meu nome é Ana Rita Domingues e tenho como orientador o Prof. Dr. Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva, somos os pesquisadores responsáveis, e minha área de atuação é Educação Matemática. Após receber os esclarecimentos e as informações a seguir, se você aceitar fazer parte do estudo, assine ao final deste documento, que está impresso em duas vias, sendo que uma delas é sua e a outra pertence aos pesquisadores responsáveis. Esclarecemos que em caso de recusa na participação você não será penalizado(a) de forma alguma. Mas se aceitar participar, as dúvidas sobre a pesquisa poderão ser esclarecidas pelos pesquisadores responsáveis, via e-mail [ana.rita.domingues2@gmail.com](mailto:ana.rita.domingues2@gmail.com) e [ricardo.scucuglia@unesp.br](mailto:ricardo.scucuglia@unesp.br), ou telefone (18) 98124-8270 e (17) 3221-2751.

### 1. Informações Importantes sobre a Pesquisa:

- 1.1 A pesquisa intitulada “O uso da História da Matemática e do GeoGebra na investigação do pensamento diferencial de alunos do ensino médio” propõe o desenvolvimento de atividades envolvendo áreas e volumes usando elementos da história do cálculo e o *software* GeoGebra, em um cenário investigativo, possibilitando o surgimento de desdobramentos propostos pelos alunos e tem como objetivo principal responder a pergunta norteadora: *Qual a natureza do pensamento diferencial de alunos do ensino médio ao explorarem atividades envolvendo o cálculo de área e volume com o GeoGebra?*;
- 1.2 Essa pesquisa será desenvolvida durante alguns encontros a serem realizados na escola em que você estuda e agendados para o período da tarde em dias letivos, não comprometendo as aulas regulares. Os encontros serão documentados via audiovisual para análise posterior, por isso se você concordar em participar desse estudo, você será observado e filmado. Também serão realizadas entrevistas com os participantes. Esses registros e os produtos educacionais criados poderão ser utilizados em outros estudos como: artigos, teses, capítulo de livros, livros, etc. os quais poderão ser publicados na Internet e/ou de forma impressa e estarão sob domínio público;
- 1.3 Esta pesquisa oferece possíveis desconfortos e riscos de constrangimento do participante caso não consiga finalizar alguma tarefa e/ou pelo fato de ser filmado. A participação neste estudo é voluntária. Este termo de assentimento livre e esclarecido tem como objetivo fundamental a sua ciência e autorização quanto à participação, o uso de sua imagem e das produções que poderão ser desenvolvidas. A sua participação na pesquisa estará contribuindo com o avanço da Educação Matemática no ensino médio;
- 1.4 As informações registradas serão utilizadas para fins de pesquisa em Educação Matemática. Transcrições de falas, falas em áudio, construções de objetos computacionais, produtos educacionais, imagens e registros de ações do(a) participante serão utilizados/revelados em relatórios de pesquisa, artigos, livros e, principalmente, na publicação de dissertações e teses;

- 1.5 É garantida a liberdade do/a participante se recusar a participar ou retirar o seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa, sem qualquer penalidade ou represálias;
- 1.6 É garantida a liberdade do/a participante se recusar a responder questões que lhe causem constrangimento em entrevistas e questionários;
- 1.7 É direito do(a) participante, por lei, pleitear indenização (reparação a danos imediatos ou futuros) decorrentes da participação na pesquisa.

---

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - Câmpus de São José do Rio Preto –  
 Cristóvão Colombo, 2265, 15054000, São José do Rio Preto - São Paulo  
<http://www.ibilce.unesp.br/#!/posgraduacao> CNPJ: 48.031.918/0011-04.



**Programa de Pós-Graduação em  
Ensino e Processos Formativos**

Ilha Solteira/Jaboticabal/São José do Rio Preto

## 2. Assentimento da Participação na Pesquisa:

Eu, \_\_\_\_\_, inscrito(a) sob o RG/ CPF \_\_\_\_\_, abaixo assinado, concordo em participar do estudo intitulado “O uso da História da Matemática e do GeoGebra na investigação do pensamento diferencial de alunos do ensino médio”. Destaco que minha participação nesta pesquisa é de caráter voluntário. Fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) pelos pesquisadores responsáveis Ana Rita Domingues e Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva sobre a pesquisa, os procedimentos e métodos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes de minha participação no estudo. Foi-me garantido que posso retirar meu assentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade. Declaro, portanto, que concordo com a minha participação no projeto de pesquisa acima descrito.

\_\_\_\_\_, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_

Uso de imagem (rubricar dentro do parêntese):

( ☐ ) Permito a divulgação da minha imagem nos resultados publicados da pesquisa;

( ☐ ) Não permito a publicação da minha imagem nos resultados publicados da pesquisa.

Confidencialidade (rubricar dentro do parêntese):

( ☐ ) Permito que o meu nome seja mantido no trabalho;

( ☐ ) Não permito que o meu nome seja mantido no trabalho. Sugiro que o nome seja alterado

para: \_\_\_\_\_.

Armazenamento em banco de dados (rubricar dentro do parêntese):

( ☐ ) Permito que os registros dos encontros sejam armazenados para investigações futuras;

( ☐ ) Não permito que os registros dos encontros sejam armazenados para investigações futuras.

---

Nome e Assinatura do(a) participante

---

Ana Rita Domingues – pesquisadora responsável

---

Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva – pesquisador responsável

---

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - Câmpus de São José do Rio Preto –  
Cristóvão Colombo, 2265, 15054000, São José do Rio Preto - São Paulo  
<http://www.ibilce.unesp.br/#!/posgraduacao> CNPJ: 48.031.918/0011-04.