IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT–D.008/03

Estrutura de Vínculos da Gravitação via Hamilton-Jacobi: Relatividade Geral e Teleparalelismo

Pedro José Pompéia

Orientador

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar

Abril de 2003

O espaço, como o tempo, não é menos digno de nossa atenção. Se o estudarmos bem, teremos a noção do alto e do baixo; do longe e do perto; do largo e do estreito; do que permanece e do que não cessa de fluir.

Sun Tzu, A Arte da Guerra

Agradecimentos

À minha família pelo eterno incentivo e em especial à Carla, pelo seu companheirismo e amor.

Ao Professor Pimentel por sua orientação, paciência, esforço e sinceridade tanto em assuntos acadêmicos, como em assuntos particulares.

A todo o pessoal da FCM, em especial ao Major Gigo, pelo seu incentivo e apoio ao meu aprimoramento profissional.

Ao Randall e ao Chico pela "co-orientação" e colaboração.

Aos amigos Cassius, Léo, Rodrigo e Cayo pela companhia e pelas discussões ao longo de nossas formações.

Ao pessoal do Pang's pelos "consertos" e "desconcertos".

À Professora Márcia Fantini pela sua orientação durante a graduação.

Aos funcionários do IFT pelo apoio prestado.

Aos tantos amigos que não foram citados, mas que de forma alguma foram esquecidos, e que, de modo direto ou indireto, contribuíram para a realização deste trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos a estrutura de vínculos da Relatividade Geral (RG) e do Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral (ETRG), utilizando o formalismo de Hamilton-Jacobi para sistemas singulares. Fazemos uma revisão destas duas teorias de gravitação e de suas formulações ADM, tendo em mente que ambas são construídas sobre variedades que são casos particulares da variedade de Riemann-Cartan. Revemos também o formalismo de Hamilton-Jacobi para o tratamento de sistemas singulares, fazendo em seguida a sua aplicação para as duas teorias supracitadas. Nesta análise constatamos que a invariância do ETRG por transformações de Lorentz no espaço tangente das tetradas faz com que a álgebra do vínculos seja diferente daquela obtida para a RG.

Palavras Chaves: Relatividade Geral, Teleparalelismo, Sistemas Singulares, Formalismo de Hamilton-Jacobi.

Áreas do conhecimento: Teoria de Campos e Gravitação.

Abstract

In this work we study the constraint structure of General Relativity (GR) and Teleparallel Equivalent of General Relativity (TEGR), using the Hamilton-Jacobi formalism for singular systems. We make a review of these two theories of gravitation and their ADM formulation, having in mind that both theories are built over manifolds that are particular cases of the Riemann-Cartan manifold. We also review the Hamilton-Jacobi formalism for singular systems, making its application to the cited theories. In this analysis we testify that the invariance of the TEGR under Lorentz transformations in the tangent space of the tetrads implies in a different constraint algebra than that obtained in GR.

Índice

Capítulo 1

Introdução

Certamente um dos grandes sonhos dos físicos na atualidade é obter uma descrição única para os chamados dois pilares da Física moderna: a Relatividade Geral e a Teoria Quântica. Pode-se dizer que todo conhecimento humano acerca das interações fundamentais da natureza, dos fenômenos no domínio subnuclear aos fenômenos no domínio cosmológico, se enquadra em um destes dois cenários. A Relatividade Geral descreve bem os fenômenos dominados pela interação gravitacional, os quais podem ser observados desde escalas milimétricas até escalas cosmológicas, enquanto a Teoria Quântica dá conta dos fenômenos que acontecem em escalas microscópicas da ordem de fração de milímetros até décimo de milésimo de fermi, e que são governados pelas interações eletromagnética, fraca e forte [1].

O fato destas três últimas possuírem uma formulação quântica, e ainda terem um cenário em que elas podem ser unificadas, abriu precedentes para questionar se o mesmo não poderia ser feito com a gravitação, de forma que as quatro interações pudessem ser descritas de maneira única. Esta unificação, que só poderia ser feita com uma Teoria Quântica da Gravitação, certamente daria uma unidade à Física e fecharia um ciclo iniciado por Maxwell com a unificação da eletricidade e magnetismo. No entanto, pode ser que a Física não possua esta unidade, e por esta razão uma teoria quântica da gravitação poderia não ser necessária. E de fato, uma quantização da Relatividade Geral (RG) significaria quantizar o espaço-tempo em si, e compreender o que isto significa não parece ser uma tarefa simples.

Por outro lado, a não quantização da gravitação poderia levar a uma violação do princípio de incerteza, o que certamente causaria um incômodo muito grande. Devemos levar em conta também o fato de que, num cenário cosmológico, a ausência de uma gravitação quântica poderia levar a inconsistências na descrição dos fenômenos pré-nucleossíntese. Em favor de uma tal teoria, ainda existe a crença de que ela poderia vir a solucionar alguns problemas tanto da RG, como da Teoria Quântica de Campos.

Por estas e por outras razões, a busca por uma descrição quântica da gravitação é um dos problemas que vem ocupando os físicos por mais de 70 anos [2]. Grandes nomes como Dirac, Schwinger, Feynman, entre tantos outros ilustres, se incluem na lista dos que se empenharam nesta tarefa e, apesar disso, ainda hoje não temos uma solução completa e consistente para esta questão. O que se sabe hoje é que, apesar de serem complementares, estes dois pilares são incompatíveis.

No entanto, todo este esforço não foi em vão, pois muitos resultados importantes foram obtidos, e hoje se tem uma compreensão mais profunda das razões pela qual esta incompatibilidade ocorre. Uma das razões pela qual se acredita que a interação gravitacional não admite uma versão quântica reside no fato de que a RG não é uma teoria de gauge, como são as teorias eletromagnética, fraca e forte. É no mínimo curioso o fato de que, apesar de ter sido fundamental para o desenvolvimento da teoria de gauge, a gravitação, como usualmente é apresentada, não seja uma teoria deste tipo [3].

Nesta linha de estudos, algumas tentativas para elaborar a gravitação como uma teoria de gauge foram propostas ao longo dos 60 e 70 [4; 5], e uma que obteve destaque foi o Teleparalelismo, também conhecido como Teleparalelo Equivalente da Relatividade Geral (ETRG) [4; 5; 6; 7; 8]. O nome não é gratuito, pois esta teoria se caracteriza por ser equivalente à RG. Mas sem entrar no mérito se o Teleparalelismo é realmente ou não uma teoria de gauge, o fato é que esta teoria, por ser descrita em termos de tetradas, possui seis graus de liberdade a mais do que a RG, e para ser equivalente a esta última, pode-se impor condições sobre os campos de maneira no mínimo análoga ao que se faz em teoria de gauge. Esta é uma teoria ainda em estudo [8; 9; 10] e tem despontado como um dos possíveis candidatos a tentar resolver os problemas de quantização do campo gravitacional.

Apesar da citada equivalência entre as duas teorias, algumas diferenças não podem deixar de ser mencionadas, sendo uma das mais marcantes o fato de que, enquanto na Relatividade Geral a gravitação se manifesta apenas na forma de curvatura do espaço-tempo, no ETRG esta interação se pronuncia unicamente na forma de torção. Embora os efeitos de curvatura e torção sejam bem distintos, estas duas características do espaço-tempo são ambas propriedades da conexão que o equipa.

O Teleparalelismo, assim como a RG, é uma teoria cujas equações de campo são invariantes em forma por transformações gerais de coordenadas (TGC) no espaço-tempo, e isso o classifica como um sistema singular[1]. Mas, além da covariância por TGC, o ETRG apresenta invariância por transformações de Lorentz das tetradas

[1] A RG, por ser uma teoria cujas equações de campo são invariantes em forma por transformações gerais de coordenadas, apresenta pelo menos quatro vínculos devido às quatro possíveis mudanças de coordenadas no espaço-tempo. O mesmo é válido para o ETRG.

no espaço tangente, o que acentua o seu caráter singular. Esta é uma caraceristica importantíssima destas duas teorias, pois todo sistema singular é necessariamente um sistema que possui vínculos, e estes possuem um papel fundamental no processo de quantização de qualquer campo.

Em paralelo a este desenvolvimento na gravitação, o estudo de sistemas singulares, muito estimulado pelos trabalhos de Dirac [11; 12; 13],os quais são embasados nos métodos hamiltonianos, mostrou que o conhecimento dos vínculos de uma teoria é essencial quando pretende-se utilizar o Princípio de Correspondência para quantizar um campo clássico. De fato, quando um sistema possui vínculos de segunda classe, na classificação de Dirac, o Princípio de Correspondência deve ser aplicado aos Parêntesis de Dirac, e não mais aos Parêntesis de Poisson, como normalmente é feito [14]. Assim, como parte do programa de quantização, é necessário que se conheça a estrutura de vínculos da teoria em estudo, para que o processo de quantização possa ser consistente. Por conta do enorme potencial mostrado, o formalismo de Dirac para o tratamento de sistemas singulares ganhou notoriedade, o que pode ser constatado pela enorme quantidade de casos a que ele foi aplicado com sucesso.

Apesar do enorme difusão do método de Dirac, isso não impediu que outras abordagens para o estudo de sistemas singulares fossem propostos [14], o que é sempre bom, pois diferentes formalismos permitem que diferentes características sejam destacadas. Uma outra forma de abordar o problema de sistemas singulares foi desenvolvida recentemente por Güler [15; 16], e se baseia nos métodos de Hamilton-Jacobi, sendo por esta razão conhecida como formalismo de Hamilton-Jacobi. A existência de um tal método de análise de vínculos é particularmente interessante, pois, como é sabido da literatura, é no formalismo de Hamilton-Jacobi que a Mecânica Quântica se reduz à Mecânica Clássica [17; 18]. Assim, a aplicação destes métodos para o estudo do campo gravitacional pode trazer algum novo esclarecimento no processo de quantização.

O objetivo deste trabalho é estudar a estrutura de vínculos da Relatividade Geral e do Teleparalelismo, utilizando o formalismo de Hamilton-Jacobi (HJ). Para tanto estudaremos no capítulo 1 a geometria da variedade de Riemann-Cartan (U4), de onde podemos obter as variedades de Riemann e de Weitzenböck, sobre as quais são construídas a RG e o ETRG, respectivamente. No capítulo 2 estudaremos como é possível, a partir de U4, obter a variedade riemanniana e sobre ela construir a RG. No mesmo capítulo ainda mostraremos como a formulação ADM [19] da RG, muito conveniente para se estudar os vínculos desta teoria, pode ser construída. No capítulo 3 faremos o mesmo para o Teleparalelismo, ou seja, veremos como é possível obter a variedade de Weitzenböck a partir de U4, e sobre ela construiremos o ETRG e sua versão ADM. No capítulo 4 falaremos sobre o formalismo de Hamilton-Jacobi, o qual será deduzido pelo método de Lagrangianas equivalentes de Carathéodory [20], bem como a sua aplicação a sistemas singulares. No capítulo 5 estudaremos os vínculos das duas teorias supra citadas sob a luz deste formalismo. Por fim, no capítulo 6, apresentaremos as considerações finais. Dois apêndices se seguirão após as considerações, sendo que o primeiro abordará o problema de Cauchy para a RG e ETRG, pois esta análise ajuda a criar uma intuição sobré a estrutura dos vínculos das teorias em estudo; enquanto que no apêndice 2 mostraremos como é possível obter a decomposição ADM das Lagrangianas das duas teorias.

Notações e Convenções

Neste trabalho utilizamos a seguinte convenção para os índices:

- índices gregos minúsculos, μ, ν, ..., assumirão os valores $0, 1, 2, 3$, e serão relacionados ao espaço-tempo;

- índices latinos minúsculos do meio do alfabeto, $i, j, k, ...$, terão valores $1, 2, 3$ e indexarão as componentes espaciais de objetos do espaço-tempo;

- índices latinos minúsculos do início do alfabeto, $a, b, c, ...$, assumirão valores $0, 1, 2, 3$, e serão relacionados ao espaço-tempo tangente.

- índices latinos minúsculos do meio do alfabeto entre parêntesis, $(i)\,, (j)\,, (k)\,, ...$, terão valores $1, 2, 3$ e indexarão as componentes espaciais de objetos do espaço-tempo tangente;

- índices latinos minúsculos do meio do alfabeto entre colchetes, $[i]\,, [j]\,, [k]\,, ...$, terão valores $1, 2, 3$ e identificarão as componentes de objetos de hípersuperfícies do tipo espaço quando tratarmos da folheação do espaço-tempo;

- índices latinos maiúsculos I, J assumirão valores inteiros de 0 a N e indexarão as N variáveis do espaço de configurações, ou as N coordenadas e os N momentos do espaço de fase;

- índices gregos maiúsculos, $\Theta, \Xi, \Phi, ...$, terão valores inteiros entre 0 e R e identificarão variáveis do espaço de fase relacionadas aos vínculos;

- índices latinos minúsculos em negrito, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, ...$, assumirão valores de 0 a $2N$ e identificarão as variáveis do espaço de fase numa notação simplética.

As métricas do espaço-tempo e do espaço tangente terão assinatura $(-, +, +, +)$; e quando estivermos fazendo folheação do espaço-tempo, identificaremos os objetos da híper-superfície que possuem seu correspondente no espaço tempo com um símbolo (3) acima da letra que o identifica (por exemplo, o escalar de curvatura na híper-superfície será identificado como $\overset{(3)}{R}$, enquanto que este mesmo objeto no espaço-tempo será mencionado simplesmente por R).

Bibliografia

[1] S. Carlip - Rept. Prog. Phys. 64 885 (2001).

[2] C. Rovelli - preprint gr-qc/0006061 (2000).

[3] L. O'Rayfeartaigh - The Dawning of Gauge Theory, Ptinceton University Press (1997).

[4] K. Hayashi, T. Shirafuji - Phys. Rev. D 19, 3524 (1979).

[5] C. Pelegrini, J. Plebanski - K. Dan. vidensk. Selsk. Mat. Fys. Skr. 2, N 2 (1962).

[6] V.-C. de Andrade, L. C. T. Guillen, J. G. Pereira - Contribution to the IX Marcel Grossmann Meeting, Rome, Italy (2000).

[7] R. Aldrovandi, J.G. Pereira - An Introduction to Gravitation Theory, (notas de aula da disciplina "Teoria da Gravitação: Campos e Tetradas") (2001).

[8] T. Vargas - Equivalente Teleparalelo de Algumas Soluções da Relatividade Geral - tese de doutoramento - IFT-T.007/02 (2002).

[9] J. W. Maluf, J. F. da Rocha-Neto, T. M. L. Toribio, K. H. Castello-Branco - Phys.Rev. D65 124001 (2002)

[10] B. M. Pimentel, P. J. Pompéia, J. F. da Rocha-Neto, R. G. Teixeira - preprint IFT-P.079/2002 - a ser publicado pela GRG volume 35 (Maio 2003).

[11] P. A. M. Dirac - Canadian Journal of Mathematics 2, 129 (1950).

[12] P. A. M. Dirac - Canadian Journal of Mathematics 3, 129 (1951).

[13] P. A. M. Dirac - Lectures on Quantum Mechanics - Belfer Graduate School of Science - Yeshiva University (1964).

[14] R. G. Teixeira - Quantização de Sistemas Singulares via formalismo de Hamilton-Jacobi.- tese de doutoramento, IFT-T.006/00 (2000).

[15] Y. Güler - Il Nuovo Cimento B107, 1398 (1992).

[16] Y. Güler - Il Nuovo Cimento B107, 1143 (1992).

[17] H. Goldstein - Classical Mechanics - Addison-Wesley Plubishing Company Inc (1964).

[18] C. Lanczos - The Variational Principles of Mechanics - University of Toronto Press (1952).

[19] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner - The Dynamics of General Relativity, em: Gravitation: an Introduction to Current Research, (editado por L. Witten) - John Wiley & Sons (1962).

[20] C.Carathéodory - Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order-Part II - Holden Day, Inc (1967).

Capítulo 2

A Variedade de Riemann-Cartan

As razões pelas quais a teoria da Relatividade Geral (RG) pode ser considerada um dos pilares da Física Moderna talvez residam nas suas diversas contribuições à Física. Como exemplos podemos citar que a partir dela foi possível construir um modelo cosmológico para nosso Universo consistente com diversos dados experimentais [1; 2], bem como foi possível explicar os problemas como a precessão do periélio de Mercúrio, além de permitir as constatações da deflexão de raios de luz por campos gravitacionais e do red-shift gravitacional [1; 2; 3]. Do ponto de vista puramente teórico, devemos mencionar ainda que esta teoria abriu caminho para o desenvolvimento da teoria de gauge [4]. Diretamente relacionado a esse último está um dos fatos mais importantes que caracterizam a Relatividade Geral, que é a geometrização da interação gravitacional. Com esta teoria, "a geometria foi promovida de palco no qual o drama da Física ocorria para ser o ator principal do drama" [4, pag.3].

A noção de geometria vigente na época de Einstein era aquela construída por Riemann a partir de 1854 [5, pag.280; 6, pag.33], onde a variedade diferenciável era caracterizada pela curvatura e completamente determinada pelo conhecimento do tensor métrico. Foi neste cenário que o primeiro construiu sua teoria de gravitação, que muito contribuiu para o desenvolvimento da própria geometria riemanniana. Mas a sua contribuição foi além, pois a Relatividade Geral também abriu caminho para o surgimento da geometria não riemanniana[1] [4, pag.38].

Quem deu um passo muito importante para o surgimento da geometria não riemanniana foi o matemático Levi-Civita em 1917. Em trabalho publicado naquele

[1]Com o surgimento de uma nova geometria, foi aberto caminho para o surgimento de várias outras teorias de gravitação. As teorias não-Einsteinianas da gravitação seguem o mesmo caminho proposto por Einstein na sua formulação da teoria da Relatividade Geral (RG). A idéia, a grosso modo, destas teorias consiste em "geometrizar" outros campos, da mesma forma que a RG geometriza a interação gravitacional. Neste contexto surgiram diversas teorias, como a teoria de Weyl e a teoria de *Einstein-Cartan*.

ano, e inspirado pelos trabalhos de Einstein, Levi-Civita percebeu que a covariância da derivada riemanniana e do tensor de Riemann eram devidas unicamente à lei de transformação da conexão de Christoffel sob transformações gerais de coordenadas, e não devida ao fato dela ser derivada a partir do tensor métrico. Este resultado foi o primeiro passo para tratar a métrica e a conexão como objetos independentes, o que permitiu o surgimento de um conceito mais geral de geometria diferencial do que aquele construído por Riemann.

O primeiro a introduzir uma conexão não riemanniana na Física foi Weyl em um trabalho de 1918 [4]. Neste trabalho Weyl propôs uma conexão ainda simétrica que diferia dos símbolos de Christoffel pela soma de termos que envolviam um campo vetorial. Com esta conexão Weyl pretendia unificar gravitação e eletromagnetismo associando aquele campo vetorial ao quadri-potencial $A_\mu(x)$. Apesar de não ter obtido sucesso nesta unificação o trabalho de Weyl teve um papel fundamental no desenvolvimento da teoria de gauge [4].

O primeiro a sugerir uma conexão não simétrica foi Cartan em 1922. Com sua conexão assimétrica Cartan introduziu o conceito de torção, que é a parte antissimétrica da conexão. A aplicação deste conceito à Física é o que dá origem à teoria de Einstein-Cartan[2] [3; 7]. Se do ponto de vista da Física, a torção encontra sua aplicação, do ponto de vista da Geometria, a introdução da torção generaliza o conceito de variedade considerado por Riemann. A nova variedade é agora chamada de variedade de Riemann-Cartan - U_4- que é uma variedade que se caracteriza pela presença de curvatura e torção. A geometria desta variedade é o que pretendemos

[2]As motivações que dão suporte à teoria de Einstein-Cartan são de caráter puramente teórico. Sabemos que em nível microscópico a matéria é composta por partículas elementares, que são caracterizadas não apenas por possuírem massa, mas também por possuírem spin e em alguns casos carga elétrica. Mas de maneira geral, quando fazemos uso da RG consideramos escalas de distâncias macroscópicas, nas quais os efeitos de qualquer interação que não seja a gravitacional possa ser desprezada. Para esclarecer um pouco mais, quando consideramos corpos materiais em escalas macroscópicas as cargas elétricas das partículas que os compõem geralmente acabam por se compensar de forma que o campo elétrico resultante seja nulo. O mesmo acontece com os spins destas partículas, que em geral são orientados aleatoriamente de maneira que a soma destes vá a zero. Por conta disso em tais escalas precisamos considerar apenas a contribuição da massa, ou, já no contexto da RG, do *tensor energia-momento*.

Porém, se por alguma razão existe uma orientação preferencial dos spins, então deve-se tomar cuidado. No nível microscópico certamente o spin não pode ser ignorado e são nestes casos que devemos incorporá-lo à dinâmica do sistema. Uma forma de se fazer isto é seguir o mesmo caminho proposto pela RG. Se massa está relacionada à curvatura, o spin poderia estar relacionado àlguma outra propriedade geométrica do espaço-tempo.

Na teoria de Einstein-Cartan o objeto geométrico relacionado ao spin é a torção, que nada mais é do que a parte antissimétrica da conexão afim.

descrever a seguir.

2.1 A Geometria da Variedade de Riemann-Cartan

A variedade de Riemann-Cartan é um caso particular de um tipo mais geral de variedade chamada *variedade afim*. No desenvolvimento feito a seguir começaremos descrevendo esta última e no momento oportuno veremos como a primeira é obtida a partir da última.

Consideremos uma *variedade diferenciável* espaço-temporal. Nesta variedade podemos definir *objetos geométricos* [8, pag.14], dentre os quais destacaremos os tensores e densidades tensoriais, que são objetos que possuem lei de transformação homogênea e linear. Os *tensores* são objetos geométricos que possuem índices e podem ser classificados quanto à sua ordem e ao seu tipo. A ordem se refere ao número de índices que o tensor possui. Um tensor que possui n índices é dito um tensor de ordem n, sendo que ele pode ser contravariante, covariante e misto. Consideremos, a título de ilustração, um tensor de ordem 3. Dizemos que este tensor é contravariante se sob uma transformação geral de coordenadas ($x'^{\mu} \rightarrow x^{\mu}$), ele se transforma como:

$$T^{\mu\nu\rho}(x) = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\gamma}} T'^{\alpha\beta\gamma}(x') \quad ;$$

diremos que é covariante se sob a transformação geral de coordenadas se transformar como:

$$T_{\mu\nu\rho}(x) = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\rho}} T'_{\alpha\beta\gamma}(x') \quad ;$$

e diremos que é misto se algumas de seus índices comportarem-se como índices covariantes, e outros como contravariantes:

$$T_{\mu}{}^{\nu\rho}(x) = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\gamma}} T'_{\alpha}{}^{\beta\gamma}(x') \quad .$$

Um tensor de ordem zero é nomeado de escalar e um tensor de ordem um é chamado de vetor.

Uma *densidade tensorial* é um objeto que também possui índices, e se transforma quase como um tensor. O que o diferencia de um tensor é que sua lei de transformação é multiplicada por alguma potência do *Jacobiano* da transformação de coordenadas:

$$T_{\mu}{}^{\nu\rho}(x) = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{W} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\gamma}} T'_{\alpha}{}^{\beta\gamma}(x') \quad ,$$

onde $\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|$ é o Jacobiano da transformação e W é uma constante, chamada de *peso* (da densidade). Vemos, portanto, que tensores nada mais são que densidades de peso zero.

Agora, podemos equipar a variedade com um *tensor métrico*, $g_{\mu\nu}$[3], que nos fornece a distância infinitesimal ds entre dois pontos próximos de coordenadas x^μ e $x^\mu + dx^\mu$:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad .$$

Além de permitir a definição de distância na variedade, o tensor métrico relaciona as componentes covariantes e contravariantes dos tensores, $T_\mu{}^{\nu\rho} = g_{\mu\beta} T^{\beta\nu\rho}$, $T^{\beta\nu\rho} = g^{\mu\beta} T_\mu{}^{\nu\rho}$[4].

Também podemos equipar a variedade com uma *conexão afim*, $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$, que nos permite definir a variação infinitesimal δA^μ de um vetor A^μ sob a operação de *transporte paralelo* (do ponto x^μ a $x^\mu + dx^\mu$). A operação de transporte paralelo é introduzida quando vemos que o diferencial de um vetor contravariante A^μ, dA^μ, não é, de modo geral, um vetor,

$$dA^\mu(x) = A^\mu(x + dx) - A^\mu(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dA'^\nu(x') + A'^\nu(x') \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\nu} dx'^\alpha \quad ,$$

devido à presença do segundo termo no segundo membro da expressão acima[5]. Como consequência, a derivada parcial deste vetor, $\partial_\mu A^\nu$, também não será um tensor[6].

Estes resultados ocorrem essencialmente pelo fato de que dA^μ é obtido ao tomarmos a diferença entre dois vetores calculados em dois pontos diferentes do espaço-tempo, onde as leis de transformação dependem da posição.

Com o intuito de se definir uma generalização do operador diferencial num espaço curvilíneo, a diferença entre os dois vetores deve ser tomada num mesmo ponto do espaço-tempo. Para isso devemos transportar paralelamente um dos vetores de sua posição para a posição do outro. Mas num sistema de coordenadas curvilíneo, o transporte paralelo de um vetor em geral modifica suas componentes. A variação nas componentes, chamada aqui de δA^μ, também não será um vetor por ser a diferença

---

[3]Este é um tensor simétrico pela permutação de seus índices.

[4]$g^{\mu\beta}$ é a inversa de $g_{\mu\beta}$.

[5]Vemos que dA^μ é um vetor somente no caso em que $\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\nu} = 0$, ou seja, quando $x^\mu = f(x')$ for uma função linear.

[6]

$$\partial_\mu A^\nu(x) = \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial A'^\alpha(x')}{\partial x'^\beta} + A'^\alpha(x') \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial x'^\beta \partial x'^\alpha} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu} \quad ,$$

entre dois vetores em pontos diferentes. Assumindo que δA^μ depende do deslocamento infinitesimal dx^μ e também linearmente[7] das componentes de A^μ podemos escrever δA^μ como sendo uma combinação linear das componentes destes dois vetores:

$$\delta A^\mu(x) = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\beta(x+dx)dx^\alpha \ .$$

As funções $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ são os coeficientes da chamada conexão afim, que em geral são não simétricas em seus índices inferiores.

A diferença DA^μ entre os dois vetores após o transporte paralelo é dada por:

$$DA^\mu(x) = dA^\mu(x) - \delta A^\mu(x) \qquad ,$$

e para que o diferencial DA^μ seja um vetor verdadeiro devemos impor que os coeficientes da conexão afim se transformem da seguinte forma sob uma mudança de coordenadas:

$$\Gamma'^\mu_{\alpha\beta}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\alpha}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\beta}\Gamma^\rho_{\lambda\sigma}(x) + \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} \ . \tag{2.1}$$

O segundo termo do segundo membro desta equação compensa o termo não homogêneo do diferencial dA^μ de tal forma que DA^μ acaba sendo um verdadeiro vetor[8].

Agora que temos um bom diferencial DA^μ podemos definir uma *derivada covariante*:

$$\nabla_\alpha A^\mu(x) \equiv \partial_\alpha A^\mu(x) + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\beta(x) \ . \tag{2.2}$$

Esta derivada é chamada covariante porque o novo objeto $\nabla_\alpha A^\mu(x)$ agora se transforma como um tensor[9], e seu índice inferior possui caráter covariante. Para um vetor covariante temos[10]

$$\nabla_\alpha A_\mu(x) = \partial_\alpha A_\mu(x) - \Gamma^\beta_{\alpha\mu} A_\beta(x) \ .$$

[7] A linearidade é requisitada para que a soma de dois vetores se transforme como um vetor.

[8]
$$DA^\mu(x) = dA^\mu(x) + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} A^\beta(x) dx^\alpha = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} DA'^\nu(x') \ .$$

[9] $\nabla_\alpha A^\mu(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha}\nabla'_\alpha A'^\mu(x')$.

[10] Para um vetor covariante, o procedimento é análogo. É imediato que $DA_\mu(x) = dA_\mu(x) - \delta A_\mu(x)$. Para encontrarmos δA_μ basta lembrar que um escalar deve ser invariante por um deslocamento. Se considerarmos o escalar $A^2 = A^\mu A_\mu$, e supormos que o operador δ obedece à regra de Leibniz para produto de tensores (o que é bastante razoável, pois esperamos que a derivada

Para um tensor de ordem 2[11], veremos que

$$\nabla_\alpha A^{\mu\nu}(x) = \partial_\alpha A^{\mu\nu}(x) + \Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}A^{\mu\beta}(x) + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}A^{\beta\nu}(x) \quad ;$$

$$\nabla_\alpha A^{\mu}{}_{\nu}(x) = \partial_\alpha A^{\mu}{}_{\nu}(x) - \Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}A^{\mu}{}_{\beta}(x) + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}A^{\beta}{}_{\nu}(x) \quad ;$$

$$\nabla_\alpha A_{\mu\nu}(x) = \partial_\alpha A_{\mu\nu}(x) - \Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}A_{\mu\beta}(x) - \Gamma^{\beta}_{\alpha\mu}A_{\beta\nu}(x) \quad . \tag{2.3}$$

De maneira geral, para tensores de qualquer ordem devemos introduzir para cada índice um termo contendo a conexão atuando neste índice; o sinal da conexão deve ser negativo para índices covariantes e positivo para contravariantes. A derivada covariante de uma densidade tensorial também pode ser definida, e obtemos [9, pag107]

$$\nabla_\alpha \mathcal{T}^{\mu}_{\nu}(x) = \partial_\alpha \mathcal{T}^{\mu}{}_{\nu}(x) - \Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}\mathcal{T}^{\mu}{}_{\beta}(x) + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\mathcal{T}^{\beta}{}_{\nu}(x) - W\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}\mathcal{T}^{\mu}_{\nu}(x) \quad .$$

Para obter uma expressão para os coeficientes da conexão afim usaremos o fato de que esses podem ser expressos em termos de outros objetos geométricos.

A expressão (2.3) é válida para qualquer tensor de segunda ordem, e em particular para o tensor métrico, $g_{\mu\nu}$:

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}g_{\mu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} \; ; \tag{2.4}$$

$$\nabla_\mu g_{\nu\alpha} = \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}g_{\beta\alpha} \; ; \tag{2.5}$$

$$\nabla_\nu g_{\alpha\mu} = \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \Gamma^{\beta}_{\nu\mu}g_{\alpha\beta} - \Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}g_{\beta\mu} \; . \tag{2.6}$$

Multiplicando (2.4) por 1/2 e as equações (2.5) e (2.6) por −1/2; realizando uma soma destas três novas equações e invocando ainda a condição de simetria da métrica temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\nabla_\alpha g_{\mu\nu} - \nabla_\mu g_{\nu\alpha} - \nabla_\nu g_{\alpha\mu}\right) &= \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\mu}\right) + \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + \\ &\quad + \Gamma^{\beta}_{[\mu\alpha]}g_{\beta\nu} - \Gamma^{\beta}_{[\alpha\nu]}g_{\mu\beta} - \Gamma^{\beta}_{[\mu\nu]}g_{\alpha\beta} \quad ,\end{aligned} \tag{2.7}$$

covariante tenha as mesmas propriedades da derivada ordinária) temos:

$$\begin{aligned}\delta\left(A^2(x)\right) &= \delta\left(A^{\mu}(x)A_{\mu}(x)\right) = A^{\mu}\delta A_{\mu} + A_{\mu}\delta A^{\mu} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow A^{\mu}(x)\delta A_{\mu}(x) = -A_{\mu}(x)\delta A^{\mu}(x) = A^{\beta}A_{\mu}\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}dx^{\alpha} = A^{\mu}A_{\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\mu}dx^{\alpha} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \delta A_{\mu}(x) = \Gamma^{\beta}_{\alpha\mu}A_{\beta}(x)dx^{\alpha} \; .\end{aligned}$$

Assim o diferencial DA_μ é:

$$DA_{\mu}(x) = dA_{\mu}(x) - \Gamma^{\beta}_{\alpha\mu}A_{\beta}(x)dx^{\alpha} \; .$$

[11] Para definir o transporte paralelo de tensores de ordem maior do que um usamos o fato de que δ obedece à regra de Leibniz e usamos as propriedades de contração dos tensores.

onde $\Gamma^{\beta}_{[\mu\nu]} \equiv \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} - \Gamma^{\beta}_{\nu\mu}\right)$ é a parte antissimétrica da conexão[12].

É importante neste ponto definir novos objetos geométricos. Sejam

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} \equiv N_{\mu\nu\alpha} \tag{2.8}$$

o *tensor de não metricidade*, e

$$\Gamma^{\alpha}_{[\mu\nu]} \equiv Q_{\mu\nu}{}^{\alpha} \tag{2.9}$$

o *tensor de torção*[13]. Geometricamente, a presença de torção faz com que um vetor, ao ser transportado paralelamente sobre um contorno fechado no espaço-tempo, descreva um contorno não fechado no espaço-tempo tangente ao espaço-tempo [7, pag.9].

Podemos definir ainda um outro objeto chamado de *símbolos de Christoffel*

$$\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} \equiv \frac{1}{2} g^{\rho\alpha}\left(\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}\right) \quad , \tag{2.10}$$

que, diferentemente da torção e do tensor de não metricidade, não possui um caráter tensorial.

Com estas novas definições, obtemos a partir contração de (2.7) com $g^{\rho\alpha}$:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(N_{\mu\nu}{}^{\rho} - N_{\nu}{}^{\rho}{}_{\mu} - N^{\rho}{}_{\mu\nu}\right) + \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} + \left(Q^{\rho}{}_{\nu\mu} + Q_{\mu\nu}{}^{\rho} - Q_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu}\right) \quad .$$

Definindo ainda o *tensor de contorção*[14], $K_{\mu\nu}{}^{\rho}$,

$$K_{\mu\nu}{}^{\rho} \equiv Q_{\mu}{}^{\rho}{}_{\nu} - Q^{\rho}{}_{\nu\mu} - Q_{\mu\nu}{}^{\rho} \quad , \tag{2.11}$$

e o tensor $V_{\mu\nu}{}^{\rho}$ tal que

$$V_{\mu\nu}{}^{\rho} \equiv \frac{1}{2}\left(N_{\mu\nu}{}^{\rho} - N_{\nu}{}^{\rho}{}_{\mu} - N^{\rho}{}_{\mu\nu}\right) \ , \tag{2.12}$$

chegamos a

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} - K_{\mu\nu}{}^{\rho} + V_{\mu\nu}{}^{\rho} \ . \tag{2.13}$$

A grosso modo temos até agora uma variedade espaço-temporal equipada com um tensor métrico e uma conexão afim, que nos permitiu definir um transporte

[12] De modo geral definimos a parte antissimétrica de qualquer objeto $A_{\mu\nu}$ como sendo $A_{[\mu\nu]} \equiv \frac{1}{2}\left(A_{\mu\nu} - A_{\nu\mu}\right)$, e sua parte simétrica como $A_{(\mu\nu)} \equiv \frac{1}{2}\left(A_{\mu\nu} + A_{\nu\mu}\right)$, de forma que $A_{\mu\nu} = A_{(\mu\nu)} + A_{[\mu\nu]}$.

[13] A verificação de que $\Gamma^{\alpha}_{[\mu\nu]}$ é realmente um tensor é imediata, bastando para isto empregar a lei de transformação da conexão afim e a definição de $\Gamma^{\alpha}_{[\mu\nu]}$.

[14] O tensor de contorsão apresenta a propriedade de antissimetria pela troca dos dois últimos índices, $K_{\mu\nu\rho} = -K_{\mu\rho\nu}$.

paralelo, com a qual construímos uma derivada covariante. Podemos agora estabelecer algumas propriedades desta derivada. Já sabemos que, por construção, ela é covariante por transformações gerais de coordenadas e que, assim como a derivada ordinária, obedece à regra de Leibniz. É de nosso conhecimento também que a derivação ordinária sucessiva independe da ordem em que se executa a derivação; de uma forma mais explícita:

$$[\partial_\beta, \partial_\alpha] A^\mu = 0 \quad ,$$

onde $[a, b]$ é o comutador entre os operadores a e b. Podemos ver qual é o análogo desta propriedade para a derivada covariante. É possível mostrar que

$$[\nabla_\beta, \nabla_\alpha] A^\mu = \left(\partial_\beta \Gamma^\mu_{\alpha\rho} - \partial_\alpha \Gamma^\mu_{\beta\rho} + \Gamma^\mu_{\beta\theta}\Gamma^\theta_{\alpha\rho} - \Gamma^\mu_{\alpha\theta}\Gamma^\theta_{\beta\rho}\right) A^\rho + 2Q_{\alpha\beta}{}^\theta \nabla_\theta A^\mu \quad .$$

Vemos que, em primeiro lugar, a derivada covariante não comuta. Em segundo, é possível constatar que a quantidade em parêntesis nesta expressão é um tensor, e portanto deve ter algum sentido geométrico. De fato este tensor está relacionado à rotação de um vetor transportado paralelamente ao longo de uma curva fechada [7, pag.9]. A este tensor é dado o nome de *tensor de curvatura*, ou *tensor de Riemann*:

$$R_{\alpha\nu\mu}{}^\rho = \partial_\alpha \Gamma^\rho_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\alpha\mu} + \Gamma^\beta_{\nu\mu}\Gamma^\rho_{\alpha\beta} - \Gamma^\beta_{\alpha\mu}\Gamma^\rho_{\nu\beta} \quad . \tag{2.14}$$

Observe que este tensor é definido apenas em função da conexão, de forma que a curvatura é uma propriedade da conexão, e não da métrica. Como este tensor possui quatro índices podemos construir ainda outros tensores a partir de contrações com a métrica. A contração do primeiro com o quarto índice nos permite definir o *tensor de Ricci*:

$$R_{\nu\mu} \equiv R_{\alpha\nu\mu}{}^\alpha = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\alpha\mu} + \Gamma^\beta_{\nu\mu}\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} - \Gamma^\beta_{\alpha\mu}\Gamma^\alpha_{\nu\beta} \quad . \tag{2.15}$$

Já a contração dos índices deste último nos fornece um escalar chamado de *escalar de curvatura*:

$$R \equiv g^{\nu\mu} R_{\nu\mu} = R_\nu^\nu \quad . \tag{2.16}$$

Com o escalar de curvatura e o tensor de Ricci podemos definir o *tensor de Einstein*

$$G_{\nu\mu} \equiv R_{\nu\mu} - \frac{1}{2} g_{\nu\mu} R \quad , \tag{2.17}$$

que possui papel muito importante no estudo de gravitação.

O desenvolvimento feito acima é válido para as chamadas variedades afins, A_4. A variedade de Riemann-Cartan, U_4, é um caso particular de A_4, onde postulamos a condição de metricidade:

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0 \quad . \tag{2.18}$$

Neste caso a conexão passa a ser expressa por:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \left\{ {}^{\rho}_{\mu\nu} \right\} - K_{\mu\nu}{}^{\rho} \quad , \tag{2.19}$$

e dizemos que ela é compatível com a métrica, ou "métrica-compatível".

O tensor de curvatura para esta variedade é definido como antes,

$$R_{\alpha\nu\mu}{}^{\rho} \equiv \partial_\alpha \Gamma^{\rho}_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\alpha\mu} + \Gamma^{\beta}_{\nu\mu}\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\mu}\Gamma^{\rho}_{\nu\beta} \quad ,$$

e nesta variedade ele satisfaz algumas propriedades importantes, quais sejam:

$$R_{(\alpha\nu)\mu\rho} = R_{\alpha\nu(\mu\rho)} = 0 \quad ;$$

$$R_{[\alpha\nu\mu]}{}^{\rho} = 2\nabla_{[\alpha} Q_{\nu\mu]}{}^{\rho} - 4Q_{[\alpha\nu}{}^{\lambda} Q_{\mu]\lambda}{}^{\rho} \quad ;$$

$$\nabla_{[\lambda} R_{\alpha\nu]\mu}{}^{\rho} = 2Q_{[\lambda\alpha}{}^{\beta} R_{\nu]\beta\mu}{}^{\rho} \quad .$$

O tensor de Einstein, e o tensor de Ricci se caracterizam por não apresentarem simetria em seus índices. É possível verificar que

$$R_{[\nu\mu]} = G_{[\nu\mu]} = \nabla_\beta S_{\nu\mu}{}^{\beta} + 2Q_\beta S_{\nu\mu}{}^{\beta} \quad ,$$

onde

$$S_{\nu\mu}{}^{\alpha} \equiv Q_{\nu\mu}{}^{\alpha} + \delta^{\alpha}_{\nu} Q_\mu - \delta^{\alpha}_{\mu} Q_\nu = -S_{\mu\nu}{}^{\alpha} \quad ,$$

sendo

$$Q_\mu \equiv Q_{\mu\alpha}{}^{\alpha} \quad .$$

Também constatamos que o tensor de Einstein satisfaz

$$\nabla_\alpha G_\mu{}^{\alpha} = -2Q_\alpha G_\mu{}^{\alpha} - 2Q_{\alpha\mu}{}^{\beta} G_\beta{}^{\alpha} + S_{\alpha\rho}{}^{\beta} R_{\mu\beta}{}^{\alpha\rho} \quad .$$

Todas estas definições e resultados caracterizam a variedade de Riemann-Cartan, que é uma variedade que possui curvatura e torção, ambas propriedades da conexão, não nulas. Neste trabalho estamos interessados no fato de que podemos, a partir da variedade de Riemann-Cartan, construir dois cenários igualmente apropriados para a construição de uma teoria de gravitação. O primeiro é aquele onde a torção é tomada como sendo identicamente nula, onde a variedade de Riemann-Cartan torna-se uma variedade riemanniana[15]. A teoria de gravitação construída sobre este

[15] Para ser mais rigoroso, a variedade obtida neste caso é pseudo-riemanniana, uma vez que a assinatura da métrica do espaço-tempo é diferente daquela estudada na geometria riemanniana usual. No entanto, faremos uma abuso de linguagem, e chamaremos esta variedade apenas de variedade riemanniana.

cenário é conhecida como Relatividade Geral. O segundo caso que estudaremos aqui é aquele em que a curvatura é considerada nula, onde obtemos uma variedade de Weitzenböck, sobre a qual é construída outra teoria, conhecida como Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral, ou simplesmente, Teleparalelismo.

Bibliografia

[1] S. Weinberg - Gravitation and Cosmology, John Wiley & Sons (1972).

[2] J. V. Narlikar - Introduction to Cosmology, Cambridge University Press (1993).

[3] V. de Sabbata e M. Gasperini - Introduction to Gravitation, World Scientific Publishing (1985).

[4] L. O'Raifeartaigh - The Dawning of Gauge Theory, Princeton University Press (1997).

[5] B. Riemann - Sur Le Hypothèses qui Servent de Fondement a la Géométrie, em Ouvres Mathématiques, Éditions Jacques Gabay (1990).

[6] M. P. do Carmo - Geometria Riemanniana - IMPA (1979).

[7] V. de Sabbata e C. Sivaram - Spin and Torsion in Gravitation, World Scientific Publishing (1994).

[8] J. L. Anderson - Principles of Relativity Physics, Academic Press (1967).

[9] D. Lovelock e H. Rund - Tensors, Differential Forms, and Variational Principles, John Wiley & Sons (1975).

Capítulo 3

A Variedade de Riemann e a Relatividade Geral

A variedade de Riemann é um caso particular de uma variedade de Riemann-Cartan, porém, historicamente, o surgimento desta última é posterior ao da primeira. Os primeiros esforços que culminaram no surgimento da geometria riemanniana datam de 1854 [1, pag.280] com o empenho de Riemann para compreender algumas idéias implícitas nos trabalhos de Gauss no estudo de geometria diferencial de superfícies no $\mathbb{R}^3$. Desde 1827, Gauss já concebia a idéia abstrata de superfície sem a necessidade de um espaço ambiente [2], porém ele não dispunha dos instrumentos matemáticos necessários para o desenvolvimento de suas idéias - essencialmente o que faltava era a noção de variedade diferenciável [3 - pag.33]. Em 1854, Riemann retoma as idéias de Gauss e introduz a noção do que hoje chamamos de variedade diferenciável[1], generalizando o conceito de curvatura criado por Gauss, e criando as raízes da geometria riemanniana.

O conceito de curvatura introduzido por Riemann difere ainda da definição utilizada hoje em dia. De fato, a formulação atual é o resultado de um desenvolvimento feito ao longo de bastante tempo, e possui a vantagem de ser muito prática para demonstração de teoremas, mas apresenta a desvantagem de estar muito afastada do conceito intuitivo inicial. No entanto, a curvatura na concepção de Riemann já se caracterizava por ser expressa em termos do tensor métrico[2]. Como veremos a seguir esta é uma característica que ainda se preserva mesmo na definição atual de curvatura. Na verdade, todas as grandezas de interesse, em particular a conexão, são expressas em termos da métrica nas variedades riemannianas. Esta foi uma das razões pela qual durante muito tempo se acreditou ser o tensor métrico o objeto fundamental no estudo da geometria.

[1] O conceito explícito de variedade diferenciável só foi formalizado em 1913 em trabalho de Weyl [3, pag.33].

[2] A curvatura de Gauss já possuía esta característica, que foi preservada pela generalização de Riemann.

3.1 A Geometria da Variedade de Riemann

No desenvolvimento feito a seguir mostraremos como a geometria da variedade de Riemann, V_4, é determinada a partir da variedade de Riemann-Cartan. Como dissemos anteriormente, esta última é uma generalização da primeira com a introdução da torção à variedade. Assim, V_4 pode ser obtida quando a torção é tomada como sendo identicamente nula em U_4.

Desta forma, na variedade de Riemann as definições feitas anteriormente continuam válidas. Em particular a construção da derivada covariante é feita da mesma forma, sendo a conexão agora expressa apenas em termos dos símbolos de Christoffel,

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \left\{{}^{\rho}_{\mu\nu}\right\} \equiv \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} \left(\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}\right) = \left\{{}^{\rho}_{\nu\mu}\right\} \quad ,$$

que apresenta a propriedade de simetria pela troca dos índices inferiores. É interessante notar que na variedade Riemann-Cartan introduzimos a conexão de maneira completamente independente da métrica[3], e portanto não havia, à priori, razão para existir uma relação entre as duas. No entanto vemos que o anulamento da torção estabelece a dependência da primeira com a segunda. Desta forma, todas as quantidades definidas a partir da conexão passam a ser determinadas unicamente em termos de $g_{\mu\nu}$; é o caso da curvatura, que agora é o único objeto a caracterizar a não comutação da derivada covariante,

$$[\nabla_\beta, \nabla_\alpha] A^\mu = \left(\partial_\beta \left\{{}^{\mu}_{\alpha\rho}\right\} - \partial_\alpha \left\{{}^{\mu}_{\beta\rho}\right\} + \left\{{}^{\mu}_{\beta\theta}\right\}\left\{{}^{\theta}_{\alpha\rho}\right\} - \left\{{}^{\mu}_{\alpha\theta}\right\}\left\{{}^{\theta}_{\beta\rho}\right\}\right) A^\rho = R_{\beta\alpha\rho}{}^{\mu} A^\rho \quad .$$

Este tensor passa a apresentar as seguintes propriedades:

$$R_{\mu\nu(\alpha\beta)} = R_{(\mu\nu)\alpha\beta} = 0 \quad ;$$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu} \quad ;$$

$$R_{[\alpha\nu\mu]}{}^{\rho} = 0 \quad ;$$

$$\nabla_{[\lambda} R_{\alpha\nu]\mu}{}^{\rho} = 0 \quad .$$

O tensor de Ricci, o escalar de curvatura e o tensor de Einstein são definidos da mesma forma a partir do tensor de Riemann,

$$R_{\nu\mu} \equiv R_{\alpha\nu\mu}{}^{\alpha} = \partial_\alpha \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu} + \Gamma^{\beta}_{\nu\mu}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\mu}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} \quad ,$$

[3]Enquanto esta última foi introduzida para determinar distâncias na variedade, a primeira foi inserida para definir transporte paralelo.

$$R \equiv g^{\nu\mu} R_{\nu\mu} = R_\nu{}^\nu \quad ,$$

$$G_{\nu\mu} \equiv R_{\nu\mu} - \frac{1}{2} g_{\nu\mu} R \quad ,$$

sendo que agora eles satisfazem as propriedades:

$$R_{[\nu\mu]} = G_{[\nu\mu]} = 0 \quad ;$$

$$\nabla_\alpha G_\rho{}^\alpha = 0 \quad .$$

3.2 A Relatividade Geral

Devido à falta de instrumental adequado, o desenvolvimento da geometria riemanniana ocorreu de maneira muito lenta. Porém, um estímulo externo importante nesta construção foi a aplicação de seus métodos à Física. É curioso notar que Riemann, em seu trabalho de 1854 [1; 3, pag.33], já expressava sua preocupação em estabelecer relações entre Física e Geometria, porém foi Einstein que em 1916 as estipulou definitivamente, com a teoria da Relatividade Geral.

Motivado pelo Princípio de Mach [4, pag. 776][4], a idéia inicial de Einstein era procurar uma teoria que generalizasse a Relatividade Restrita de forma a estender a sua validade a sistemas de referências quaisquer. A maneira encontrada por Einstein foi desenvolver uma teoria cujas leis físicas tivessem validade em qualquer sistema de coordenadas, isto é, uma teoria em que as equações fossem covariantes por transformações gerais de coordenadas. Esta exigência de Einstein é também conhecida como Princípio de Covariância Geral. Com este princípio e o Princípio de Equivalência [4; 5; 6; 7; 8], que a partir da equivalência entre massa inercial e massa gravitacional estabelece a equivalência local entre um campo de gravitação e um referencial acelerado, Einstein estabeleceu as bases de uma nova teoria de gravitação, que ficou conhecida como Relatividade Geral[5].

Nesta teoria, desenvolvida de um modo puramente dedutivo [8][6],a interação gravitacional não é mais descrita em termos de força; a presença de matéria agora se manifesta na forma de curvatura do espaço-tempo. Desta forma, podemos considerar o espaço-tempo como uma variedade riemanniana[7]. Assim, podemos dizer que

[4]De acordo com esta referência, o Princípio de Mach estabelece que todos os efeitos inerciais seriam devido à interação mútua da matéria do Universo.

[5]O nome vem da idéia original de generalizar a Relatividade Restrita.

[6]Esta teoria é considerada pelos autores como "a mais bela das teorias físicas existentes".

[7]Alguns autores mais rigorosos [7, pag. 47] dizem que o espaço-tempo é uma variedade pseudo-riemanniana devido à assinatura do tensor métrico.

conhecer o campo gravitacional é conhecer as dez componentes do tensor métrico do espaço-tempo[8].

Como a métrica agora possui um caráter dinâmico, devemos nos preocupar em encontrar as equações que descrevem a dinâmica deste tensor, ou seja, devemos encontrar as equações de campo da teoria. Faremos isto da maneira usual, que consiste em empregar um princípio variacional. Para tanto devemos considerar uma integral de ação que seja globalmente covariante, ou seja, um escalar sob as transformações geral de coordenadas:

$$S = \int L d^4x \quad .$$

Na ausência de matéria consideraremos a Lagrangiana na forma conhecida por Lagrangiana de Einstein-Hilbert,

$$L = -\frac{1}{2\chi}\sqrt{-g}R \quad ,$$

onde R é o escalar de curvatura, e χ é uma constante obtida no limite de campo fraco. É interessante notar que esta Lagrangiana possui termos envolvendo derivadas segundas do tensor métrico[9]. Porém, estes podem ser agrupados na forma de um termo de superfície, que ao ser desprezado, nos permite reescrever a Lagrangiana de Einstein-Hilbert como

$$L = -\frac{1}{2\chi}\sqrt{-g}g^{\nu\mu}\left(\left\{{\alpha \atop \rho\mu}\right\}\left\{{\rho \atop \alpha\nu}\right\} - \left\{{\rho \atop \nu\mu}\right\}\left\{{\alpha \atop \alpha\rho}\right\}\right) \quad .$$

Esta forma de expressar L é conhecida na literatura como forma "gama-gama" [8; 9], e possui a importante propriedade de ser de primeira ordem no tensor métrico, e por ser uma forma quadrática na conexão.

A busca por um extremo da integral de ação, $\delta S = 0$, nos conduz às equações de Einstein,

$$G_{\nu\mu} \equiv R_{\nu\mu} - \frac{1}{2}g_{\nu\mu}R = 0 \quad ,$$

que são dez equações não lineares para o tensor métrico, e se caracterizam por possuírem dependência linear nas derivadas de segunda ordem de $g_{\nu\mu}$[10].

Na presença de fontes podemos considerar a nova Lagrangiana como sendo a soma da Lagrangiana de Einstein-Hilbert com uma Lagrangiana para os campos de

[8] Apenas para reforçar, uma variedade riemanniana é completamente caracterizada pelo conhecimento do tensor métrico.

[9] Isto ocorre porque o escalar de curvatura possui derivadas primeiras dos símbolos de Christoffel, que por sua vez possui derivadas da métrica.

[10] É importante observar que estas equações não possuem derivadas de ordem superior à segunda.

matéria, L_m. A interação entre estes últimos e a gravitação é obtida pela prescrição do acoplamento minimal, que nos diz que se conhecemos a Lagrangiana de um campo ψ, $L_m = L_m(\psi, \partial\psi, \eta)$, no espaço de Minkowski , então, na presença de curvatura, devemos substituir $\eta_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu}$[11], e a derivada ordinária pela derivada covariante. Neste caso, após o emprego do princípio variacional, as equações de Einstein se reescrevem como

$$G_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu} \qquad ,$$

onde $T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathfrak{M}})}{\delta g^{\mu\nu}}$ é o tensor energia-momento. Das propriedades do tensor de Einstein segue que o tensor energia-momento é "conservado covariantemente", $\nabla_\alpha T_\rho{}^\alpha = 0$.

3.3 A Formulação ADM da Relatividade Geral

A formulação ADM da Relatividade Geral [10] surge como uma forma bastante simples de se propor uma formulação hamiltoniana para a teoria gravitacional de Einstein. No entanto, foi Dirac [11; 12] quem primeiro propôs tal formulação alguns anos antes, introduzindo o conceito de folheação para a RG. A proposta de ADM segue os mesmos passos da formulação de Dirac, com a vantagem de ser mais simples, e obter resultados equivalentes[12]. É em função da sua simplicidade que a versão ADM da RG ganhou popularidade.

Quando tentamos passar da formulação lagrangiana da Relatividade Geral (RG) para uma formulação hamiltoniana[13] esbarramos em alguns problemas. Quando olhamos para as equações de campo (no vácuo) na abordagem de Lagrange,

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad ,$$

constatamos que em princípio há dezesseis equações diferenciais não lineares para o tensor métrico a serem resolvidas. Porém, da propriedade de simetria da métrica, vemos que este número se reduz a apenas dez. Mas sabemos mais, pois, da "conservação covariante" do tensor de Einstein,

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \quad ,$$

[11] Devemos atentar para o fato de que $L_m = \sqrt{-\eta}L_m$, onde η é o determinante da métrica de Minkowski.

[12] A formulação de ADM pode ser até considerada como um caso particular da formulação de Dirac.

[13] Nosso intuito aqui não é estudar a formulação hamiltoniana da RG, mas apenas apresentar o contexto em que a formulação ADM se desenvolveu.

fica claro que, além das equações de campo, as componentes da métrica devem satisfazer as quatro condições acima. Há, portanto, apenas seis componentes independentes do tensor métrico. Uma análise de dados de Cauchy [13] nos mostram que apenas as quantidades g_{ij} são quantidades dinâmicas, enquanto as componentes g_{00} e g_{0i} são variáveis cinemáticas[14] [14, pag. 9; 6, pag. 55] (ver apêndice 1).

O problema da teoria é justamente o fato das equações de campo serem não lineares (o que decorre do fato da Lagrangiana ser tomada como sendo o escalar de curvatura). Esta característica das equações de Einstein faz com que as variáveis dinâmicas se acoplem às componentes cinemáticas e suas derivadas, e vice-versa, de tal forma que é praticamente impossível a separação destas duas classes de variáveis nestas equações [9]. Consequentemente, a passagem para o formalismo hamiltoniano, onde as derivadas (temporais) dos campos devem ser escritas como funções dos campos e dos momentos, fica extremamente complicada.

Para se contornar este problema, é comum o uso de alguns artifícios, como a fixação de um sistema de coordenadas. Por exemplo, há quem tente fixar o sistema de coordenadas impondo a condição conhecida por "gauge harmônico", $\partial_\nu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right) = 0$ [6, pag. 56]. No que segue, estaremos interessados em estudar uma classe particular de sistemas de coordenadas, que nos permita descrever o espaço-tempo como um conjunto de "folhas" de híper-superfícies do tipo espaço. Esta forma de descrever o espaço-tempo é conhecida na literatura como *folheação* do espaço-tempo.

Para compreender como surge a idéia da folheação do espaço-tempo começaremos com uma idéia bem simples à qual podemos atribuir, de alguma forma, um sentido físico. Quando descrevemos a trajetória de um ponto material sabemos que o deslocamento deste objeto nos determina uma curva. Desta forma, podemos pensar uma curva como sendo o conjunto de pontos obtidos pela translação de um único ponto. Nesta mesma linha de raciocínio, o deslocamento de uma corda nos determina uma superfície e assim podemos imaginar uma superfície bidimensional como sendo o conjunto de pontos obtido pela translação de uma curva. O mesmo se aplica para um volume, que pode ser obtido pela translação de uma superfície. Extendendo este conceito para o espaço-tempo, podemos conceber este último como o conjunto de pontos obtidos pela translação de uma híper-superfície do tipo espaço.

Por trás desta idéia está o conceito de folheação [15], que podemos definir de uma maneira não muito rigorosa, como sendo uma decomposição de uma variedade diferenciável $\mathcal{M}$ de dimensão n em subvariedades conexas de dimensão m ($m < n$),

[14] Esta análise nos mostra ainda que apenas as equações $G_{ij} = 0$ são dinâmicas, enquanto as equações $G_{0\mu} = 0$ representam apenas condições nos dados iniciais.

as quais se acumulam localmente como os subconjuntos de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ com segunda coordenada constante. Chamamos estas subvariedades de *folhas* e dizemos que esta é uma folheação de dimensão m da variedade. No caso do espaço-tempo, escolheremos uma folheação de dimensão *três* e chamaremos a "segunda coordenada constante" de *tempo*, t. As folhas serão, então, tri-superfícies Σ_t, as quais exigiremos que sejam ordenadas de forma que o preenchimento do espaço-tempo seja feito de maneira contínua. Procedendo desta forma, a folheação do espaço-tempo dependerá univocamente da híper-superfície inicial.

É importante perceber que cada folha é também uma variedade diferenciável e pode ser equipada com uma métrica e uma conexão. Portanto, faz sentido definir uma derivada covariante (por transformações gerais de coordenadas na superfície), tensor de curvatura, etc. O que deve-se notar, é que existe uma ligação entre estes objetos nesta híper-superfície e os do espaço-tempo. Por outro lado, existem novos objetos que não são definidos na descrição usual do espaço-tempo, mas que surgem de forma natural quando se faz a folheação. Como exemplos podemos citar a curvatura extrínseca e o vetor de propagação Abordaremos melhor estes pontos ao tratarmos da geometria da folheação do espaço-tempo.

3.3.1 A geometria da folheação do espaço-tempo

Perceba que fazer folheação do espaço-tempo é, na verdade, escolher uma forma específica de descrever o espaço-tempo, ou seja, selecionar um sistema de coordenadas, ou uma classe destes. No caso, os sistemas de coordenadas permitidos são aqueles que deixam as superfícies Σ_t inalteradas.

A notação que usaremos será a seguinte: as coordenadas de um ponto com relação a um referencial sobre a superfície Σ_t serão denotadas por $\xi^{[i]}$ (os índices entre colchetes serão utilizados para indexar objetos relacionados à híper-superfície); com relação ao espaço-tempo estes mesmos pontos terão coordenadas x^α. Portanto, $x^\alpha = x^\alpha(t, \xi)$.

Escolheremos para a folheação híper-superfícies do tipo-espaço, ou seja, híper-superfícies cujos vetores normais sejam tipo tempo. Chamaremos de $\mathbf{n}$ o campo de vetores ortogonais a Σ_t (usamos a palavra campo, pois a direção do vetor pode variar a cada ponto da híper-superfície), e por n_α e n^α as suas componentes covariantes e contravariantes, respectivamente. Exigiremos ainda que $\mathbf{n}$ seja unitário tipo tempo: $n_\alpha n^\alpha = -1$.

Sobre a híper-superfície podemos selecionar três vetores unitários, $\mathbf{b}^{[k]}$, tangentes às linhas de coordenadas:

$$\mathbf{b}^{[k]} = b^{[k]}_{[i]} d\xi^{[i]} \quad ;$$
$$b^{[k]}_{[i]} = \delta^{[k]}_{[i]} \quad .$$

Com relação ao espaço-tempo estes vetores podem ser escritos como

$$\mathbf{b}^{[k]} = b^{[k]}_{\alpha} dx^{\alpha} = b^{[k]}_{\alpha} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{[i]}} d\xi^{[i]} \quad ,$$

$$b^{[k]}_{\alpha} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{[i]}} = b^{[k]}_{[i]} = \delta^{[k]}_{[i]} \quad .$$

Tendo em vista que os vetores são unitários, então é imediato que

$$b^{[k]}_{\alpha} b^{[i]\alpha} = \delta^{[k][i]} \quad ;$$

ou, numa notação mais conveniente,

$$b^{[k]}_{\alpha} b^{\alpha}_{[i]} = \delta^{[k]}_{[i]} \quad .$$

Comparando as duas expressões, vemos que podemos identificar

$$b^{\alpha}_{[i]} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{[i]}} \quad . \tag{3.1}$$

Note que estas quantidades se comportam como vetores contravariantes por transformações gerais de coordenadas do espaço-tempo, e como vetores covariantes por transformações de coordenadas sobre a híper-superfície (o que justifica a notação acima).[15]

Temos, então, a cada ponto do espaço-tempo, um conjunto de vetores que compõem uma base na híper-superfície, e um vetor ortogonal a esta base. Este novo

[15] A verificação é feita a seguir. Suponhamos a transformação

$$x^{\alpha} \longrightarrow \bar{x}^{\alpha} = \bar{x}^{\alpha}\left(x^{\alpha}\left(t, \xi\right)\right) \quad ,$$
$$\xi^{[i]} \longrightarrow \bar{\xi}^{[i]} = \bar{\xi}^{[i]}\left(\xi\right) \quad .$$

Sabemos que esta transformação admite uma inversa

$$\xi^{[i]} = \xi^{[i]}\left(\bar{\xi}\right) \quad .$$

Pela regra da cadeia, vemos que

$$\bar{b}^{\alpha}_{[i]} = \frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial \bar{\xi}^{[i]}} = \frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{[j]}} \frac{\partial \xi^{[j]}}{\partial \bar{\xi}^{[i]}} + \frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \bar{\xi}^{[i]}} = \frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial \xi^{[j]}}{\partial \bar{\xi}^{[i]}} b^{\beta}_{[j]} \quad ,$$

onde usamos o fato de que t independe das coordenadas da superfície $(\partial t / \partial \bar{\xi}^{[i]} = 0)$.

conjunto de quatro vetores constitui nada menos do que uma base no espaço-tempo, $\{\mathbf{n}, \mathbf{b}_{[i]}\}$, que será usada para decompor os vetores e tensores de nosso interesse.

A decomposição de um vetor qualquer, A^α, nesta base é feita da seguinte forma:

$$A^\alpha = -\left(A^\beta n_\beta\right) n^\alpha + \left(A^\beta b^{[i]}_\beta\right) b^\alpha_{[i]} \quad ,$$

onde o sinal negativo se deve ao fato do vetor normal ter norma negativa. A decomposição de um tensor de segunda ordem, $T_{\alpha\beta}$, nesta base é dada por:

$$T_{\alpha\beta} = T_{\perp\perp} n_\alpha n_\beta + T_{[i]\perp} b^{[i]}_\alpha n_\beta + T_{\perp[i]} b^{[i]}_\beta n_\alpha + T_{[i][j]} b^{[i]}_\alpha b^{[j]}_\beta \quad ,$$

onde

$$\begin{aligned} T_{\perp\perp} &\equiv T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \quad , \\ T_{[i]\perp} &\equiv -T_{\mu\nu} b^\mu_{[i]} n^\nu \quad , \\ T_{\perp[i]} &\equiv -T_{\mu\nu} n^\mu b^\nu_{[i]} \quad , \\ T_{[i][j]} &\equiv T_{\mu\nu} b^\mu_{[i]} b^\nu_{[j]} \quad . \end{aligned}$$

A generalização para tensores de ordem superior a dois é imediata:

$$T_{\alpha\beta\ldots\omega} = T_{\perp\perp\ldots\perp} n_\alpha n_\beta \ldots n_\omega + T_{\perp\perp\ldots[i]} n_\alpha n_\beta \ldots b^{[i]}_\omega + \ldots + T_{[i][j]\ldots(q)} b^{[i]}_\alpha b^{[j]}_\beta \ldots b^{(q)}_\omega \quad .$$

Em particular, a decomposição do tensor métrico leva a alguns resultados interessantes, pois a contração dos vetores da base com a métrica é o produto escalar entre estes:

$$\begin{aligned} g_{\perp\perp} &\equiv g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = n_\nu n^\nu = -1 \quad , \\ g_{[i]\perp} &\equiv -g_{\mu\nu} b^\mu_{[i]} n^\nu = -b_{\nu[i]} n^\nu = 0 \quad , \\ g_{\perp[i]} &\equiv -g_{\mu\nu} n^\mu b^\nu_{[i]} = 0 \quad , \\ g_{[i][j]} &\equiv g_{\mu\nu} b^\mu_{[i]} b^\nu_{[j]} = b_{\nu[i]} b^\nu_{[j]} \quad . \end{aligned}$$

Como dissemos anteriormente, a hipersuperfície é uma variedade diferenciável. Se chamarmos de $\gamma_{[i][j]}$ a métrica desta variedade[16], então podemos notar, a partir deste último resultado e da ortogonalidade dos vetores $b^\nu_{[j]}$, que:

$$\begin{aligned} b^{\nu[k]} &= b^\nu_{[j]} \gamma^{[i][k]} \quad , \\ b_{\nu[i]} b^{\nu[k]} &= \delta^{[k]}_{[j]} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b_{\nu[i]} b^\nu_{[j]} \gamma^{[i][k]} = g_{[i][j]} \gamma^{[i][k]} = \delta^{[k]}_{[j]} \quad .$$

[16]Chamaremos de $\gamma^{[i][k]}$ as componentes contravariantes desta métrica.

Recordando que $\gamma_{[i][j]}$ é a inversa de $\gamma^{[i][k]}$, inferimos que

$$g_{[i][j]} = \gamma_{[i][j]} \quad . \tag{3.2}$$

Esta expressão nos mostra que a projeção do tensor métrico na híper-superfície é igual à métrica desta variedade. Por conta disso, chamamos esta última de *métrica induzida*[17].

Podemos, com estes resultados, escrever $g_{\alpha\beta}$ na seguinte forma:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= g_{\perp\perp} n_\alpha n_\beta + g_{[i]\perp} b_\alpha^{[i]} n_\beta + g_{\perp [i]} b_\beta^{[i]} n_\alpha + g_{[i][j]} b_\alpha^{[i]} b_\beta^{[j]} = \\ &= -n_\alpha n_\beta + \gamma_{[i][j]} b_\alpha^{[i]} b_\beta^{[j]} \quad . \end{aligned}$$

Veja que a contração do tensor métrico com um tensor qualquer, por exemplo $T^{\alpha\gamma}$, nos fornece:

$$g_{\alpha\beta} T^{\alpha\gamma} = \left(-n_\alpha n_\beta + \gamma_{[i][j]} b_\alpha^{[i]} b_\beta^{[j]}\right) T^{\alpha\gamma} = -n_\beta T_\perp{}^\gamma + b_\beta^{[j]} T_{[j]}{}^\gamma \quad ,$$

nos mostrando que o tensor

$$h_{\alpha\beta} \equiv \gamma_{[i][j]} b_\alpha^{[i]} b_\beta^{[j]} = g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta \tag{3.3}$$

[17] De posse de uma métrica induzida podemos construir os símbolos de Christoffel na híper-superfície:

$$\overset{(3)}{\Gamma}{}^{[k]}_{[i][j]} \equiv \frac{1}{2}\gamma^{[k][m]} \left(\partial_{[i]}\gamma_{[j][m]} + \partial_{[j]}\gamma_{[i][m]} - \partial_{[m]}\gamma_{[i][j]}\right) \quad .$$

Devido ao fato desta superfície estar imersa numa variedade riemanniana, podemos esperar que Σ_t também seja uma variedade deste tipo, e que $\overset{(3)}{\Gamma}{}^{[k]}_{[i][j]}$ desempenhe plenamente o papel de conexão nesta variedade. É possível mostrar ainda que $\overset{(3)}{\Gamma}{}^{[k]}_{[i][j]} = b_\beta^{[k]} b_{[j]}^\alpha \nabla_\alpha b_{[i]}^\beta$, se levarmos em conta o fato de que a métrica induzida é a projeção da métrica do espaço-tempo em Σ_t.

Com uma conexão, podemos definir uma derivada covariante sobre a superfície,

$$\overset{(3)}{\nabla}_{[i]} T^{[k]}{}_{[m]} \equiv \partial_{[i]} T^{[k]}{}_{[m]} + \overset{(3)}{\Gamma}{}^{[k]}_{[i][j]} T^{[j]}{}_{[m]} - \overset{(3)}{\Gamma}{}^{[j]}_{[i][m]} T^{[k]}{}_{[j]} \quad ,$$

sendo natural também a definição de um tensor de curvatura, tensor de Ricci e escalar de curvatura:

$$\left[\overset{(3)}{\nabla}_{[i]}, \overset{(3)}{\nabla}_{[j]}\right] A^{[k]} = \overset{(3)}{R}_{[i][j][m]}{}^{[k]} A^{[m]} \quad ,$$

$$\overset{(3)}{R}_{[i][j]} \equiv \overset{(3)}{R}_{[k][i][j]}{}^{[k]} = \left(\partial_{[k]} \overset{(3)}{\Gamma}{}^{[k]}_{[i][j]} - \partial_{[i]} \overset{(3)}{\Gamma}{}^{[k]}_{[k][j]} + \overset{(3)}{\Gamma}{}^{[m]}_{[i][j]} \overset{(3)}{\Gamma}{}^{[k]}_{[k][m]} - \overset{(3)}{\Gamma}{}^{[m]}_{[k][j]} \overset{(3)}{\Gamma}{}^{[k]}_{[i][m]}\right) \quad ,$$

$$\overset{(3)}{R} \equiv \gamma^{[i][j]} \overset{(3)}{R}_{[k][i][j]}{}^{[k]} \quad .$$

é o tensor responsável pela projeção do tensor na híper-superfície, e, por conta disso, recebe o nome de *projetor*.

Vemos que este tensor surge naturalmente no processo de folheação. Contudo, há outros objetos que podem ser definidos também de maneira natural e que possuem função importante na decomposição do espaço-tempo. Começaremos pelo *vetor de propagação*, ζ^α. Este é o vetor tangente às curvas de congruência e nos informa como as coordenadas são propagadas de uma superfície para outra:

$$\zeta^\alpha \equiv \frac{\partial x^\alpha (t,\xi)}{\partial t} \quad . \tag{3.4}$$

Se considerarmos duas superfícies vizinhas, Σ_t e Σ_{t+dt}, o vetor de propagação é aquele que liga os pontos $P(\xi)$ em Σ_t a $P'(\xi)$ em Σ_{t+dt} (como mostrado na Figura (3.1)), ou seja, pontos com mesma coordenadas internas. A decomposição deste vetor na base $\{\mathbf{n}, \mathbf{b}_{[i]}\}$ nos leva a definir duas funções de papel fundamental na folheação:

$$\zeta^\alpha = -\left(\zeta^\beta n_\beta\right) n^\alpha + \left(\zeta^\beta b^{[i]}_\beta\right) b^\alpha_{[i]} = N n^\alpha + N^{[i]} b^\alpha_{[i]} \quad ,$$

onde

$$\begin{aligned} N &\equiv -\zeta^\beta n_\beta \quad , && (3.5)\\ N^{[i]} &\equiv \zeta^\beta b^{[i]}_\beta \quad . && (3.6)\end{aligned}$$

N é conhecida como *função de lapso*, enquanto $N^{[i]}$ é chamado de *vetor de defasagem*, ou *vetor de shift*.

Observe que

$$\begin{aligned} \zeta^\alpha dt &= x^\alpha (t+dt,\xi) - x^\alpha (t,\xi) = n^\alpha (Ndt) + b^\alpha_{[i]} \left(N^{[i]}dt\right) \quad ,\\ x^\alpha (t+dt,\xi) &= x^\alpha (t,\xi) + n^\alpha (Ndt) + b^\alpha_{[i]} \left(N^{[i]}dt\right) \quad . \end{aligned}$$

Assim, vemos na primeira linha que Ndt nos dá a distância entre as duas superfícies ao longo do vetor normal, enquanto que $N^{[i]}dt$ nos dá a defasagem do ponto $P'(\xi)$ com relação a $P(\xi)$. Na segunda linha, fica claro que o conhecimento de Ndt e $N^{[i]}dt$ nos permite construir completamente a superfície Σ_{t+dt} a partir deΣ_t. Isto mostra de maneira mais evidente a dependência da folheação com a híper-superfície inicial. Da expressão acima, ainda podemos ver que se duas curvas de congruência se cruzarem em algum ponto do espaço-tempo, então teremos dois vetores de propagação neste mesmo ponto, o que *nos impossibilita determinar univocamente a superfície no instante infinitesimalmente posterior*, e, portanto, estes casos devem ser descartados.

Um outro objeto geométrico que merece destaque é a *curvatura extrínseca*, que é o objeto responsável pela variação das componentes do vetor normal ao longo do

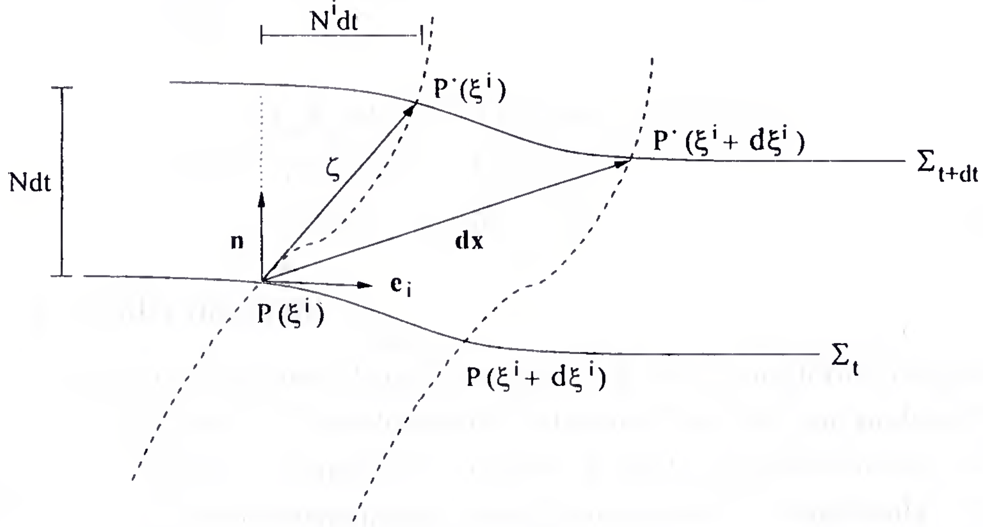

Figura 3.1: *Folheação do espaço-tempo.*

transporte paralelo deste sobre a híper-superfície[18]:

$$Dn^{\alpha} = -\left(K_{[i][j]}b^{[j]\alpha}\right)d\xi^{[i]} \quad . \tag{3.7}$$

Trata-se de uma propriedade extrínseca da híper-superfície pelo fato de que o vetor normal , apesar de ser definido sobre ela, não pertence à superfície propriamente dita. Trata-se de curvatura, pois as componentes do vetor se modificam ao longo do transporte, ou seja, as normais se curvam com relação ao espaço externo[19]. Este é um tensor simétrico, e podemos ver isso sem muitos cálculos. Da definição da curvatura extrínseca temos:

$$K_{[i][j]} \equiv -b^{\alpha}_{[j]}b^{\beta}_{[i]}\nabla_{\beta}n_{\alpha} = n_{\alpha}b^{\beta}_{[i]}\nabla_{\beta}b^{\alpha}_{[j]} = n_{\alpha}b^{\beta}_{[j]}\nabla_{\beta}b^{\alpha}_{[i]} = K_{[j][i]} \quad .$$

[18]Quando tomamos o vetor normal à híper-superfície num ponto $\xi^{[i]}$ e o transportamos paralelamente até o ponto $\xi^{[i]} + d\xi^{[i]}$, ainda sobre a superfície, sabemos que a variação total deste vetor é dada por $Dn^{\alpha} = (\nabla_{\beta}n^{\alpha})\,dx^{\beta}$. Como estamos variando apenas os pontos sobre a superfície, ou seja, $dt = 0$, então a expressão acima se reduz a

$$\begin{aligned} Dn^{\alpha} &= (\nabla_{\beta}n^{\alpha})\left(\frac{\partial x^{\beta}}{\partial t}dt + \frac{\partial x^{\beta}}{\partial \xi^{[i]}}d\xi^{[i]}\right) = \\ &= \left(b^{\beta}_{[i]}\nabla_{\beta}n^{\alpha}\right)d\xi^{[i]} \quad . \end{aligned}$$

Definimos a *curvatura extrínseca* como sendo o objeto responsável pela variação das componentes do vetor normal ao longo do transporte conforme a expressão (3.7).

[19]O sinal utilizado na definição é convencional, e dizemos que a curvatura é positiva se "as "pontas" das normais em $\xi^{[i]}$ e $\xi^{[i]} + d\xi^{[i]}$ convergem, e negativa em caso contrário" [9].

Algumas relações envolvendo a curvatura extrínseca e o campo de vetores normais são mostradas a seguir:

$$b^{\beta}_{[i]}\nabla_{\beta}b^{\alpha}_{[j]} = -K_{[i][j]}n^{\alpha} + \overset{(3)}{\Gamma}{}^{[k]}_{[i][j]}b^{\alpha}_{[k]} \quad , \tag{3.8}$$

$$\left(\nabla_{\beta}n^{\alpha}\right)\left(\nabla_{\alpha}n^{\beta}\right) = K^{ij}K_{ij} \quad , \tag{3.9}$$

$$-\nabla_{\beta}n^{\beta} = K_i{}^{i} \equiv K \quad . \tag{3.10}$$

3.3.2 A escolha de ADM

Como dissemos anteriormente, fazer folheação é escolher uma forma específica de descrever o espaço-tempo. Mas dentro de todas as folheações que podemos fazer, escolheremos um conjunto ainda mais restrito. É particularmente interessante escolher un sistema de coordenadas do espaço-tempo onde a coordenada x^0 seja o próprio parâmetro t, $x^0 = t$, e que suas linhas de coordenadas espaciais coincidam com as linhas coordenadas na superfície: $x^i = \xi^i$. Neste sistema de coordenadas teremos

$$b^{\alpha}_{[i]} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^i} = \delta^{\alpha}_i \quad . \tag{3.11}$$

Esta foi a escolha de Arnowit, Deser, Misner (ADM) [10] para descrever o espaço-tempo e estudar a Relatividade Geral. Com esta base, podemos dispensar o uso de colchetes em nossa notação, pois os índices espaciais do espaço-tempo agora coincidem com os índices da híper-superfície. Esta escolha de ADM nos simplifica os cálculos e levam a resultados bastante interessantes. O primeiro deles surge quando procuramos descrever o intervalo ds^2 nesta folheação. Para isso devemos decompor dx^{α} na base $\{\mathbf{n}, \mathbf{b_i}\}$:

$$\begin{aligned} dx^{\alpha} &= x^{\alpha}(t+dt, \xi + d\xi) - x^{\alpha}(t,\xi) = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial t}dt + \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^i}d\xi^i = \\ &= n^{\alpha}(Ndt) + b^{\alpha}_i\left(N^i dt\right) + b^{\alpha}_i d\xi^i = \\ &= n^{\alpha}(Ndt) + b^{\alpha}_i\left(N^i dt + d\xi^i\right) \quad . \end{aligned}$$

A norma deste vetor, que nada mais é do que o intervalo, pode ser calculada usando o fato de que $\mathbf{n}$ é ortogonal aos vetores $\mathbf{b_k}$ na híper-superfície. Desta forma, temos:

$$\begin{aligned} dx^{\alpha}dx_{\alpha} &= ds^2 = -(Ndt)^2 + \gamma_{ij}\left(N^i dt + d\xi^i\right)\left(N^j dt + d\xi^j\right) = \\ &= \left(-N^2 + \gamma_{ij}N^iN^j\right)dtdt + 2\gamma_{ij}N^i dt d\xi^j + \gamma_{ij}d\xi^i d\xi^j \quad . \end{aligned} \tag{3.12}$$

Por outro lado, sabemos que

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta} \quad .$$

No sistema de coordenadas escolhido ($x^0 = t$, $x^i = \xi^i$) é imediato que

$$ds^2 = g_{00} dt dt + 2 g_{0i} dt d\xi^i + g_{ij} d\xi^i d\xi^j \quad , \tag{3.13}$$

e a comparação direta entre (3.12) e (3.13) nos mostra que

$$g_{00} = -N^2 + \gamma_{ij} N^i N^j \quad , \tag{3.14}$$

$$g_{0i} = \gamma_{ij} N^j \quad , \tag{3.15}$$

$$g_{ij} = \gamma_{ij} \quad . \tag{3.16}$$

Estas três equações são importantes, pois nos mostram como as componentes covariantes do tensor métrico do espaço-tempo se expressam em termos do vetor de defasagem, da função lapso e da métrica induzida. As componentes contravariantes também podem ser obtidas em função destas mesmas quantidades, bastando, para isso, lembrarmos que

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} g^{\beta 0} &= \delta^0_\alpha \quad , \\ \gamma_{ij} \gamma^{ik} &= \delta^k_j \quad . \end{aligned}$$

O cálculo nos mostra que

$$\begin{aligned} g^{00} &= -\frac{1}{N^2} \quad , \\ g^{0j} &= \frac{N^j}{N^2} \quad , \\ g^{ik} &= \gamma^{ik} - \frac{N^i N^k}{N^2} \quad . \end{aligned}$$

Podemos mostrar ainda que

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-\det(g_{\alpha\beta})} = N\sqrt{\gamma} \quad ,$$

onde $\gamma = \det(\gamma_{ij})$.

A curvatura extrínseca também pode ser obtida em termos do vetor de defasagem, da função de lapso e da métrica induzida:

$$K_{ij} = -N\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2N}\left(-\dot{\gamma}_{ij} + \overset{(3)}{\nabla}_i N_j + \overset{(3)}{\nabla}_j N_i\right) \quad .$$

Com a geometria da folheação do espaço-tempo bem estabelecida, estamos prontos para estudar a Relatividade Geral. Esta forma de se estudar gravitação ficou conhecida como Formulação ADM da Relatividade Geral, e é sobre esta que falaremos a seguir.

3.3.3 A Decomposição da Lagrangiana de Einstein-Hilbert na Formulação ADM

Vimos anteriormente que o estudo da Relatividade Geral passa pelo conhecimento das equações que descrevem a dinâmica do tensor métrico do espaço-tempo. Constatamos também que a obtenção destas equações tinham como ponto de partida o uso de um princípio variacional e o conhecimento de uma função Lagrangiana, que nem sempre é única[20]. Apenas para relembrar, no caso da Relatividade Geral, a densidade Lagrangiana mais empregada neste tipo de dedução é a Lagrangiana de Einstein-Hilbert, com sua forma dada por

$$L = -\frac{1}{2\chi}\sqrt{-g}R \quad , \tag{3.17}$$

onde R é o escalar de curvatura.

Na formulação ADM da RG é necessário que esta Lagrangiana seja dada em termos de N, N^i, e γ_{ij}, que fazem o papel dos campos fundamentais. Para isto, devemos recordar alguns pontos. Primeiro, devemos lembrar que o escalar de curvatura é obtido a partir da saturação dos índices do tensor de Riemann, $R = R^{\alpha\mu}{}_{\mu\alpha}$. O tensor de Riemann pode ser decomposto na base $\{\mathbf{b_k}, \mathbf{n}\}$:

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\mu\nu\rho} &= \left(R_{\beta\mu\nu\rho}n^{\beta}\right)n_{\alpha} + \left(R_{\beta\mu\nu\rho}b_i^{\beta}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j} = \\
&= \left(R_{\beta\theta\nu\rho}n^{\beta}n^{\theta}\right)n_{\alpha}n_{\mu} + \left(R_{\beta\theta\nu\rho}n^{\beta}b_i^{\theta}\right)\gamma^{ij}b_{\mu j}n_{\alpha} + \\
&\quad + \left(R_{\beta\theta\nu\rho}b_i^{\beta}n^{\theta}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j}n_{\mu} + \left(R_{\beta\theta\nu\rho}b_i^{\beta}b_m^{\theta}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j}\gamma^{mn}b_{\mu n} = \\
&= \ldots \quad ,
\end{aligned}$$

e sua contração consecutiva com a métrica é capaz de nos fornecer o escalar de curvatura, que, em virtude da ortonormalidade dos vetores da base, pode ser expresso como

$$R = R_{\perp\perp\perp\perp} - R_{\perp ij\perp}\gamma^{ij} - R_{i\perp\perp j}\gamma^{ij} + R_{ilkj}\gamma^{ij}\gamma^{kl} \quad .$$

Usando as propriedades de antissimetria do tensor de curvatura[21], $R_{\mu\nu(\alpha\beta)} = R_{(\mu\nu)\alpha\beta} = 0$, conjuntamente com o fato de que

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\perp\perp}{}^{\alpha} &= g^{\alpha\beta}R_{\alpha\perp\perp\beta} = \gamma^{ij}b_i^{\alpha}b_j^{\beta}R_{\alpha\perp\perp\beta} - n^{\alpha}n^{\beta}R_{\alpha\perp\perp\beta} = \\
&= \gamma^{ij}R_{i\perp\perp j} - R_{\perp\perp\perp\perp} = \gamma^{ij}R_{i\perp\perp j} \quad ,
\end{aligned}$$

[20]Basta lembrar que a Lagrangiana de Einstein-Hilbert e a forma "gama-gama" [8; 9; 14] nos conduzem às mesmas equações de campo.

[21]Desta propriedade de antissimetria segue que $R_{\perp\perp\perp\perp} = 0$, $R_{\perp ij\perp} = -R_{i\perp j\perp} = R_{i\perp\perp j}$.

obtemos

$$R = -2R_{\alpha\perp\perp}{}^{\alpha} + R_{ilkj}\gamma^{ij}\gamma^{kl} \quad . \tag{3.18}$$

O primeiro termo do segundo membro da equação acima pode ser reescrito numa forma mais apropriada. Para isso devemos lembrar que o tensor de curvatura, numa variedade com torção nula, pode ser obtido a partir da não comutação da derivada covariante:

$$[\nabla_\beta, \nabla_\alpha] A^\mu = R_{\beta\alpha\rho}{}^{\mu} A^\rho \quad .$$

Se tomarmos o vetor A^μ como sendo o vetor normal à híper-superfície, então

$$\begin{aligned} R_{\alpha\perp\perp}{}^{\alpha} &= n^\beta \left([\nabla_\alpha, \nabla_\beta] n^\alpha\right) = n^\beta \nabla_\alpha \left(\nabla_\beta n^\alpha\right) - n^\beta \nabla_\beta \left(\nabla_\alpha n^\alpha\right) = \\ &= \nabla_\alpha \left(n^\beta \nabla_\beta n^\alpha\right) - \left(\nabla_\alpha n^\beta\right)\left(\nabla_\beta n^\alpha\right) - \nabla_\beta \left(n^\beta \nabla_\alpha n^\alpha\right) + \left(\nabla_\beta n^\beta\right)\left(\nabla_\alpha n^\alpha\right) = \\ &= -\gamma^{mn}\gamma^{ij} K_{ni} K_{jm} + K^2 + \nabla_\alpha \left(n^\beta \nabla_\beta n^\alpha\right) - \nabla_\beta \left(n^\beta \nabla_\alpha n^\alpha\right) \quad , \end{aligned}$$

onde fizemos uso de (3.9) e (3.10).

O segundo termo do segundo membro de (3.18) é conhecido das equações de Gauss-Codazzi [9; 16],

$$\gamma^{ij}\gamma^{kl} R_{ilkj} = \overset{(3)}{R} + K^2 - K^{ki} K_{ik} \quad .$$

Estes dois últimos resultados nos conduzem a

$$R = \overset{(3)}{R} + K^{ki} K_{ik} - K^2 - 2\nabla_\alpha \left(n^\beta \nabla_\beta n^\alpha\right) + 2\nabla_\beta \left(n^\beta \nabla_\alpha n^\alpha\right) \quad .$$

Como consequência, a densidade Lagrangiana passa a ser expressa por

$$L = -\frac{1}{2\chi}\sqrt{-g}R = -\frac{1}{2\chi}\sqrt{-g}\left(\overset{(3)}{R} + K^{ki} K_{ik} - K^2 - 2\nabla_\alpha \left(n^\beta \nabla_\beta n^\alpha\right) + 2\nabla_\beta \left(n^\beta \nabla_\alpha n^\alpha\right)\right) \quad .$$

Note, porém que os dois últimos termos do segundo membro nada mais são do que termos de superfície:

$$\sqrt{-g}\left[-2\nabla_\alpha \left(n^\beta \nabla_\beta n^\alpha\right) + 2\nabla_\beta \left(n^\beta \nabla_\alpha n^\alpha\right)\right] = \partial_\alpha \left(\sqrt{-g}\left[-2\left(n^\beta \nabla_\beta n^\alpha\right) + 2\left(n^\alpha \nabla_\beta n^\beta\right)\right]\right) \quad .$$

Desprezando estes termos de superfície, a densidade Lagrangiana assume uma forma bem simples:

$$L = -\frac{1}{2\chi} N\sqrt{\gamma}\left(\overset{(3)}{R} + K^{ki} K_{ik} - K^2\right) \quad . \tag{3.19}$$

Como dissemos este é o ponto de partida para o conhecimento das equações de movimento. De posse da Lagrangiana, o procedimento para obter as equações de campo é padrão; efetua-se a variação da integral de ação, e a procura por um extremo nos conduz às equações de campo. A partir delas, o conhecimento das variáveis dinâmicas e cinemáticas da teoria pode ser feito através de uma análise de dados de Cauchy. Entretanto, é importante observar que o papel da Lagrangiana vai muito além do que apenas fornecer equações de campo a partir de um princípio variacional, e ainda que a abordagem de Cauchy não é o único modo de se determinar o caráter dinâmico das variáveis. Na verdade, como mostraremos mais à frente, esta característica dos campos está intimamente relacionada a propriedades da função Lagrangiana, e a presença de variáveis cinemáticas está ligada à existência de vínculos na teoria[22]. Os vínculos da formulação ADM da RG é um dos nossos interesses neste trabalho, e é sobre eles que trataremos após descrevermos o Teleparalelo Equivalente da Relatividade Geral.

Bibliografia

[1] B. Riemann - Sur Le Hypothèses qui Servent de Fondement a la Géométrie, em Ouvres Mathématiques, Éditions Jacques Gabay (1990).

[2] K. F. Gauss - General Investigations of Curved Spaces, Raven Press (1965) (Conforme [3]).

[3] M. P. do Carmo - Geometria Riemanniana - IMPA (1979).

[4] C. G. Oliveira - II Escola de Gravitação e Cosmologia do CBPF, vol.2 - J. Sasson & Cia. Ltda (1980).

[5] A. Einstein - Ann. d. Phys. 49 (1916).

[6] V. de Sabbata e M. Gasperini - Introduction to Gravitation, World Scientific Publishing, (1985).

[7] R. Aldrovandi e J.G. Pereira - An Introduction to Gravitation Theory, (notas de aula da disciplina "Teoria da Gravitação: Campos e Tetradas") (2001).

[8] L. Landau e E. Lifchitz - Teoria do Campo, Hemus Liv. Ed. Ltda. (sem data).

[9] C. A. P. Galvão - Introdução à Quantização de Teorias de Gauge, a ser publicado.

[10] R. Arnowitt, S. Deser e C. W. Misner - The Dynamics of General Relativity, em: Gravitation: an Introduction to Current Research, (editado por L. Witten) - John Wiley & Sons (1962).

[22] Como dissemos anteriormente em outra nota, nosso interesse não é estudar a formulação hamiltoniana da RG, mas é importante ressaltar para o interessado que a elaboração de tal formulação passa pelo conhecimento dos vínculos da teoria.

[11] P. A. M. Dirac - Proc. Roy. Soc. A246, 333 (1958).

[12] P. A. M. Dirac - Phys, Rev. 114, 924 (1959).

[13] B. Felsager - Geometry, Particles and Fields, Springer-Verlag (1998).

[14] I. D. Soares - Métodos Hamiltonianos para o Campo Gravitacional Fraco - tese de mestrado 02/72 - CBPF (1972).

[15] C. Camacho e A. Lins Neto - Teoria Geométrica das Folheações, IMPA (1979).

[16] K. Sundermeyer - Constrained Dynamics, Springer-Verlag (1982).

Capítulo 4

A Variedade de Weitzenböck e o Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral

Vimos anteriormente que a variedade de Riemann-Cartan é uma variedade diferenciável equipada com uma métrica e uma conexão que apresenta curvatura e torção não nulas. Estudamos também o caso particular da variedade de Riemann, que é aquele em que apenas a torção é considerada nula. Porém, como já constatamos anteriormente, tanto a torção como a curvatura são ambas propriedades da conexão. Desta forma, se podemos tomar a primeira como sendo nula[1], não há razão a princípio para não se considerar o caso contrário, onde a curvatura poderia ser anulada ao invés da torção. Este caso particular da variedade de Riemann-Cartan é conhecido na literatura como variedade de Weitzenböck.

É curioso notar que o desenvolvimento de tal variedade foi feito por Weitzenböck[2] em 1923 [1; 2, pag.1] de maneira independente ao trabalho de Cartan. Nesta variedade é comum se estudar a geometria não a partir da métrica e da conexão, mas sim estudá-la em termos de tetradas. Para isso faremos a seguir uma síntese de alguns resultados importantes envolvendo o estudo de tetradas

4.1 O Formalismo de Tetradas

As tetradas foram introduzidas pela primeira vez por Albert Einstein [3; 4] em 1928, na tentativa de unificar o eletromagnetismo e a gravitação. Com este trabalho Einstein também introduziu o conceito de paralelismo absoluto. Em 1929, Wigner [4; 5] mostraria que o formalismo de tetradas poderia ser empregado com um objetivo diferente daquele proposto por Einstein, qual seja a incorporação de spinores à teoria gravitacional. No mesmo ano, Weyl [4; 6] reintroduziria, de uma maneira

[1]Como vimos esta escolha nos fornece uma boa variedade para construirmos uma teoria de gravitação.

[2]Esta é a razão pela qual esta variedade recebe seu nome.

sistemática, o conceito de tetradas na tentativa de incorporar sua teoria de spinores de duas componentes à teoria gravitacional. O formalismo de tetradas mostrou-se útil não somente para descrever spinores em espaços curvos, mas também como uma forma de derivar leis de conservação.

Consideremos em cada ponto do espaço-tempo, um conjunto de quatro vetores ortonormais, $e_{a\mu}(x)$, onde $a = 0, 1, 2, 3$ (de maneira geral, usaremos índices latinos para nos referirmos ao "rótulo" do vetor), que geram o espaço tangente em cada ponto do espaço-tempo. Temos da condição de ortonormalidade imposta acima, que a relação

$$g_{\mu\nu}(x)\, e^{\mu}_{a}(x)\, e^{\nu}_{b}(x) = \eta_{ab} \tag{4.1}$$

é satisfeita. Como estes vetores geram o espaço tangente, $e_{a\mu}(x)$ também será um vetor neste espaço. Desta maneira, quando fixamos o índice grego, μ, $e^{\mu}_{a}(x)$ representará um vetor sob transformações de Lorentz no espaço tangente. Assim, podemos abaixar e levantar os índices latinos usando a métrica de Minkowski. Por outro lado, ao fixarmos o índice latino, a, $e^{\mu}_{a}(x)$ será um vetor sob transformações gerais de coordenadas no espaço-tempo. Mas há mais, pois um conjunto de quatro vetores ortogonais num ponto do espaço-tempo é também uma base desta variedade, e pode ser usada para decompor vetores e tensores. Para um tensor de ordem m,

$$T_{\alpha\beta\ldots\rho}(x) = \left[T_{\mu\nu\ldots\sigma}(x)\, e^{\mu}_{a}(x)\, e^{\nu}_{b}(x) \ldots e^{\sigma}_{m}(x)\right] e^{a}_{\alpha}(x)\, e^{b}_{\beta}(x) \ldots e^{m}_{\rho}(x) \quad , \tag{4.2}$$

No caso particular do tensor métrico, temos

$$g_{\alpha\beta}(x) = \left[g_{\mu\nu}(x)\, e^{\mu}_{a}(x)\, e^{\nu}_{b}(x)\right] e^{a}_{\alpha}(x)\, e^{b}_{\beta}(x) \quad ,$$

mas recordando que a relação (4.1) é satisfeita, então

$$g_{\alpha\beta}(x) = \eta_{ab} e^{a}_{\alpha}(x)\, e^{b}_{\beta}(x) \quad . \tag{4.3}$$

Um conjunto de quatro vetores ortogonais, que a cada ponto do espaço-tempo, geram o espaço tangente neste ponto, e que satisfazem as condições (4.1) e (4.3), é o que chamamos de *tetradas*[3] [7; 8; 9; 10; 11].

Da expressão (4.3) fica claro que a escolha de um conjunto de tetradas determina univocamente uma métrica. A recíproca, no entanto, não é verdadeira. Como se

[3]É preciso tomar alguns cuidados neste tipo de construção, pois a existência de tetradas nem sempre é garantida. De fato, uma análise mais rigorosa deve levar em conta a topologia global da variedade, que deve obedecer a algumas condições bem específicas [8]. Para o que foi feito acima e para o que segue, consideraremos que nossa variedade obedece a estes requisitos topológicos, e seguiremos em frente sem nos preocuparmos demasiadamente com o rigor matemático.

pode constatar as tetradas são determinadas pela métrica, exceto por transformações de Lorentz (locais) no tangente [4; 8; 11].

Retomando a expressão (4.2), é interessante notar que ao contrairmos um tensor do espaço-tempo com tetradas,o objeto

$$T_{ab...m}(x) \equiv [T_{\mu\nu...\sigma}(x)\, e^{\mu}_{a}(x)\, e^{\nu}_{b}(x) \ldots e^{\sigma}_{m}(x)]$$

é um escalar sob transformações gerais de coordenadas no espaço-tempo, mas passa a ser um tensor sob transformações de Lorentz no espaço tangente. Por outro lado, da ortogonalidade das tetradas segue que

$$T_{\alpha\beta...\rho}(x) = e^{a}_{\alpha}(x)\, e^{b}_{\beta}(x) \ldots e^{m}_{\rho}(x)\, T_{ab...m}(x) \quad .$$

Destas duas expressões fica claro que podemos usar as tetradas para converter objetos do espaço-tempo para o espaço tangente, e vice-versa. Em particular, um escalar sob transformações gerais de coordenadas também será um escalar sob transformações de Lorentz:

$$A_{\mu}B^{\mu} = e^{a}_{\mu}(x)\, e^{\mu b}(x)\, A_a B_b = A_a B^a \quad .$$

Um caso interessante ocorre quando consideramos a derivada espaço-temporal de um vetor de Lorentz no tangente, $\partial_\nu A^a(x)$. Fazendo uma transformação de Lorentz sobre esta derivada, $(\partial_\nu A^a(x))'$, deveríamos esperar que este objeto fosse um vetor sobre transformações de Lorentz, uma vez que o índice grego faz referência apenas à variedade espaço-temporal. Porém, isto não ocorre, devido ao fato da transformação de Lorentz depender do ponto do espaço-tempo:[4]. Para definir uma derivada no espaço-tempo que seja covariante por transformações de Lorentz no espaço tangente, devemos seguir o mesmo caminho tomado na definição de derivada covariante no espaço-tempo, qual seja, adicionar um termo envolvendo uma conexão:

$$\mathcal{D}_\nu A^a(x) \equiv \partial_\nu A^a(x) + \varpi_\nu{}^a{}_b(x)\, A^b(x) \quad . \tag{4.4}$$

Esta conexão é conhecida como *conexão de spin*, e sua lei de transformação deve ser

$$\varpi_\nu{}^{a'}{}_{b'} = \Lambda^{a'}{}_a(x)\Lambda^c{}_{b'}(x)\,\varpi_\nu{}^a{}_c(x) - \Lambda^c{}_{b'}(x)\left(\partial_\nu \Lambda^{a'}{}_c(x)\right) \quad ,$$

4

$$\begin{aligned}
(\partial_\nu A^a(x))' &= \left[\lim_{\Delta x^\nu \to 0} \frac{A^a(x^\nu + \Delta x^\nu) - A^a(x^\nu)}{\Delta x^\nu}\right]' = \lim_{\Delta x^\nu \to 0} \frac{A^{a'}(x^\nu + \Delta x^\nu) - A^{a'}(x^\nu)}{\Delta x^\nu} = \\
&= \lim_{\Delta x^\nu \to 0} \frac{\Lambda^{a'}{}_b(x^\nu + \Delta x^\nu)\, A^b(x^\nu + \Delta x^\nu) - \Lambda^{a'}{}_b(x^\nu)\, A^b(x^\nu)}{\Delta x^\nu} = \\
&= \Lambda^{a'}{}_b(x)\,\partial_\nu A^b(x) + A^b(x^\nu)\,\partial_\nu \Lambda^{a'}{}_b(x) \quad .
\end{aligned}$$

para garantir a covariância desta derivada[5].

Se considerarmos agora um objeto contendo índices gregos e latinos, veremos que este pode ter variações em suas componentes devido a transporte paralelo no espaço-tempo e transformações de Lorentz no espaço tangente. Assim, uma *derivada covariante total* deve incorporar as duas possibilidades, e podemos defini-la da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \nabla'_\nu A^a_\mu(x) &\equiv \partial_\nu A^a_\mu(x) + \varpi_\nu{}^a{}_b(x)\, A^b_\mu(x) - \Gamma^\beta_{\nu\mu}(x)\, A^a_\beta(x) = \\ &= \mathcal{D}_\nu A^a_\mu(x) - \Gamma^\beta_{\nu\mu}(x) A^a_\beta(x) = \\ &= \nabla_\nu A^a_\mu(x) + \varpi_\nu{}^a{}_b(x)\, A^b_\mu(x) \quad . \end{aligned} \tag{4.5}$$

Esta derivada total é agora covariante por ambas as transformações, as gerais de coordenadas e as de Lorentz (para isto devemos supor que sob transformações gerais de coordenadas, a conexão de spin se transforme como um vetor). Fica claro, ainda, que se este objeto não possuir índices gregos, a derivada covariante total se reduz à derivada covariante sob transformações de Lorentz, conforme (4.4). Já se $A^a_\mu(x)$ não tiver índices latinos, a derivada covariante total se reduz à derivada covariante sob transformações gerais de coordenadas

Na variedade de Riemann-Cartan é imposta a condição sobre o campo de tetradas,

$$\nabla'_\rho e^a_\nu(x) = 0 \quad , \tag{4.6}$$

ou seja, a derivada total da tetrada se anula. Esta escolha, juntamente com a condição de metricidade, $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$, acaba fazendo com que a conexão de spin seja antissimétrica, $\varpi_{\rho(ba)}(x) = 0$ [12].

A escolha (4.6) ainda estabelece uma relação entre a conexão de spin, a conexão do espaço-tempo, tetradas e suas derivadas:

$$\partial_\nu e^a_\mu(x) + \varpi_\nu{}^a{}_b(x)\, e^b_\mu(x) - \Gamma^\beta_{\nu\mu}(x)\, e^a_\beta(x) = 0 \quad ,$$

$$\Gamma^\beta_{\nu\mu}(x) = e^\beta_a(x)\, \partial_\nu e^a_\mu(x) + e^\beta_a(x)\, \varpi_\nu{}^a{}_b(x)\, e^b_\mu(x) \quad . \tag{4.7}$$

5

$$[\mathcal{D}_\nu A^a(x)]' = \Lambda^{a'}_b(x)\, [\mathcal{D}_\nu A^b(x)] \quad .$$

Usando a condição de que esta derivada para um escalar deva coincidir com a derivada ordinária, $\mathcal{D}_\nu(B_a A^a) = \partial_\nu(B_a A^a)$, segue que para um vetor de Lorentz covariante:

$$\mathcal{D}_\nu A_a(x) = \partial_\nu A_a(x) - \varpi_\nu{}^b{}_a(x)\, A_b(x) \quad .$$

Estes resultados são válidos para a variedade de Einstein-Cartan, e podem ser devidamente particularizados para as variedades de Riemann[6], ou de Weitzenböck.

4.2 A Geometria da Variedade de Weitzenböck

Veremos a seguir como a variedade de Weitzenböck, W_4, é obtida a partir da variedade U_4, quando nesta consideramos a curvatura nula. Uma forma equivalente de se garantir a anulação da curvatura [14, pag.3524] é admitir a condição de paralelismo absoluto, que estabelece que as tetradas $e^a_\mu(x)$ devem ser transportadas paralelamente ao longo da variedade espaço-temporal. Isto posto, temos imediatamente satisfeita a condição

$$\nabla_\rho e^a_\nu(x) = \partial_\nu e^a_\mu(x) - \Gamma^\beta_{\nu\mu}(x)\, e^a_\beta(x) = 0 \quad .$$

Desta expressão seguem dois resultados importantes. O primeiro deles decorre da ortogonalidade das tetradas,

$$\Gamma^\alpha_{\nu\mu}(x) = e^\alpha_a(x)\, \partial_\nu e^a_\mu(x) \quad , \tag{4.8}$$

que nos fornece imediatamente uma expressão para a conexão em termos das tetradas. Esta conexão é chamada de conexão de Weitzenböck [15; 2], ou conexão de Cartan [13], e se caracteriza por apresentar torção diferente de zero,

$$Q_{\nu\mu}{}^\alpha = \frac{1}{2} e^\alpha_a \left[\partial_\nu e^a_\mu - \partial_\mu e^a_\nu\right] \quad , \tag{4.9}$$

e curvatura nula[7]:

$$R_{\alpha\nu\mu}{}^\rho(\Gamma) = \partial_\alpha \Gamma^\rho_{\nu\mu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\alpha\mu} + \Gamma^\beta_{\nu\mu}\Gamma^\rho_{\alpha\beta} - \Gamma^\beta_{\alpha\mu}\Gamma^\rho_{\nu\beta} = 0 \quad . \tag{4.10}$$

O segundo resultado importante reside no fato da derivada total da tetrada em W_4 ser nula[8], $\nabla'_\nu e^a_\mu(x) = \nabla_\rho e^a_\nu(x) + \varpi_\nu{}^a{}_b(x)\, e^b_\mu(x) = 0$, de onde vemos que a conexão de spin deve se anular, $\varpi_{\nu ab}(x) = 0$. Neste caso, a derivada total de qualquer objeto agora coincide com a derivada covariante do espaço-tempo.

O comutador entre as componentes da derivada covariante agora se escreve como

$$[\nabla_\beta, \nabla_\alpha]\, A^\mu = 2 Q_{\alpha\beta}{}^\theta \nabla_\theta A^\mu \quad ,$$

[6] No caso de V_4, sob a qual é construída a Relatividade Geral (RG), o uso de tetradas faz-se necessário somente no caso de se querer incorporar spin a esta teoria.

[7] Daí o fato de podermos estabelecer a equivalência entre a imposição de curvatura nula e paralelismo absoluto.

[8] Cabe lembrar que esta variedade é um caso particular da variedade de Riemann-Cartan, na qual esta condição é satisfeita.

ficando claro que é a torção quem caracteriza o caráter não comutativo da derivada covariante.

A conexão ainda pode ser expressa em termos dos símbolos de Christoffel e da contorção, de forma que

$$\left\{ {\rho \atop \mu\nu} \right\} = \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + K_{\mu\nu}{}^{\rho} \quad .$$

Desta expressão e de (4.10) podemos ver que[9]

$$R_{\alpha\nu\mu}{}^{\rho}\left(\{\}\right) = \nabla_\alpha K_{\nu\mu}{}^{\rho} - \nabla_\nu K_{\alpha\mu}{}^{\rho} - 2Q_{\nu\alpha}{}^{\beta} K_{\beta\mu}{}^{\rho} + K_{\nu\mu}{}^{\beta} K_{\alpha\beta}{}^{\rho} - K_{\alpha\mu}{}^{\beta} K_{\nu\beta}{}^{\rho} \quad . \tag{4.11}$$

4.3 O Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral

Se do ponto de vista geométrico a anulação da torção fornece uma variedade tão boa quanto àquela obtida pela nulificação da curvatura, podemos nos perguntar se, do ponto de vista físico[10], esta equivalência também se estabelece. Na Relatividade Geral o espaço-tempo é tratado como uma variedade riemanniana, na qual a gravitação se manifesta na forma de curvatura. Desta forma, podemos pensar numa teoria de gravitação na qual o espaço-tempo poderia ser considerado uma variedade de Weitzenböck, em que a interação gravitacional se expressasse na forma de torção. Porém, se pensarmos que uma teoria física deve ser condizente com resultados experimentais, uma teoria baseada na presença de torção deve no mínimo reproduzir os resultados verificados com sucesso pela RG. Em outras palavras, uma tal teoria deve no mínimo ser equivalente à Relatividade Geral. A teoria construída neste cenário foi desenvolvida ao longo dos anos 60 e 70 do último século [14; 2, pag.2; 16] e é conhecida atualmente como Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral (ETRG), ou simplesmente Teleparalelismo.

No Teleparalelismo a variedade é descrita em termos de tetradas, e portanto, dizer que conhecemos completamente o espaço-tempo é dizer que as conhecemos em cada ponto deste. Ou seja, as tetradas agora fazem o papel de campos fundamentais da teoria, e passam, portanto, a apresentar um caráter dinâmico.

Assim como na RG, com a escolha de uma variedade, no caso W_4, usaremos um princípio variacional para obter as equações de campo e a prescrição do acoplamento minimal para a interação ente os campos de matéria e a gravitação. Para tanto devemos escolher uma densidade Lagrangiana para o campo gravitacional, e isto pode ser feito de diferentes maneiras. Quando olhamos para a RG, vemos que na

[9] Na expressão (4.11) $R_{\alpha\nu\mu}{}^{\rho}\left(\{\}\right) \equiv \partial_\alpha \left\{ {\rho \atop \nu\mu} \right\} - \partial_\nu \left\{ {\rho \atop \alpha\mu} \right\} + \left\{ {\beta \atop \nu\mu} \right\} \left\{ {\rho \atop \alpha\beta} \right\} - \left\{ {\beta \atop \alpha\mu} \right\} \left\{ {\rho \atop \nu\beta} \right\}$.

[10] Mais especificamente, do ponto de vista gravitacional.

variedade de Riemann a não comutação da derivada covariante nos define o tensor de curvatura, o qual, saturado em seus índices, nos define o escalar de curvatura, que é tomado como sendo a Lagrangiana do campo gravitacional[11]. Em W_4, a torção é o objeto relacionado à não comutação da derivada covariante, porém, diferentemente da curvatura, não é possível construir um escalar saturando os índices da torção. No entanto, quando olhamos para a forma "gama-gama" da Lagrangiana da RG, vemos que ela é uma forma quadrática na conexão, e portanto quadrática na derivada da métrica. Isto nos motiva a procurar uma forma quadrática na torção, que seria quadrática na conexão e na derivada da tetrada. Uma das formas de se construir a Lagrangiana Teleparalela é considerar todas as combinações quadráticas possíveis do tensor de torção [14; 2][12] com parâmetros arbitrários, que a posteriori são escolhidos de forma que a densidade Lagrangiana seja equivalente à da RG. Esta equivalência pode ser observada a partir da equação (4.11):

$$\sqrt{-g}R\left(\{\}\right) = \partial_\rho \left(eK^{\mu}{}_{\mu}{}^{\rho}\right) + e\left(-Q^{\rho\mu\beta}Q_{\rho\mu\beta} - 2Q^{\rho\mu\beta}Q_{\beta\mu\rho} + 4Q^{\beta\mu}{}_{\mu}Q_{\beta}{}^{\rho}{}_{\rho}\right) \qquad ,$$

onde $e = \det\left(e^a_\mu\right)$.

A densidade Lagrangiana Teleparalela pode ser tomada a partir da expressão acima, desprezando-se o termo de superfície. Para uma comparação direta com as definições utilizadas na literatura, redefinimos a torção[13] como sendo

$$T^{\alpha}{}_{\nu\mu} \equiv e^{\alpha}_{a}\left[\partial_\nu e^a_\mu - \partial_\mu e^a_\nu\right] = 2Q_{\nu\mu}{}^{\alpha} \qquad , \tag{4.12}$$

de forma que a Lagrangiana Teleparalela na ausência de campos de matéria agora se expressa como:

$$L = -\frac{1}{2\chi}e\left(-\frac{1}{4}T^{\beta\rho\mu}T_{\beta\rho\mu} - \frac{1}{2}T^{\beta\rho\mu}T_{\rho\beta\mu} + T_{\mu}{}^{\beta\mu}T_{\rho\beta}{}^{\rho}\right) \qquad . \tag{4.13}$$

A busca por um extremo da integral de ação nos conduz às equações de campo,

$$\partial_\mu\left[4e\Sigma_g{}^{\mu\alpha}\right] + 4e\Sigma_a{}^{\alpha\mu}T^{a}{}_{g\mu} - ee^{\alpha}_{g}\Sigma_{abc}T^{abc} = 0 \qquad , \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} \Sigma^{abc} &\equiv \frac{1}{4}\left(T^{abc} + T^{bac} - T^{cab}\right) + \frac{1}{2}\left(\eta^{ac}T^{b} - \eta^{ab}T^{c}\right) \qquad , \\ T^{c} &\equiv T^{a}{}_{a}{}^{c} \qquad , \end{aligned}$$

[11] $[\nabla_\beta, \nabla_\alpha]A^\mu = R_{\beta\alpha\rho}{}^{\mu}A^\rho$, $R \equiv R_\alpha{}^{\mu}{}_{\mu}{}^{\alpha}$, $L = -\frac{1}{2\chi}\sqrt{-g}R$.

[12] Na referência [14], esta combinação é feita a partir de combinações quadráticas das três partes irredutíveis nas quais a torção pode ser decomposta.

[13] A partir deste momento a torção será citada como sendo a quantidade redefinida pela expressão (4.12).

que agora são dezesseis equações não lineares para as tetradas, com dependência linear nas segundas derivadas de e^α_g.

Na presença de campos de matéria faz-se necessária a implementação do acoplamento minimal, que é feita da mesma maneira que na RG, de forma que a expressão acima se reescreve como

$$\partial_\mu \left[4e\Sigma_g{}^{\mu\alpha}\right] + 4e\Sigma_a{}^{\alpha\mu}T^a{}_{g\mu} - ee^\alpha_g\Sigma_{abc}T^{abc} = \chi e T^\alpha_g \quad ,$$

onde $T^\alpha_g \equiv \frac{2}{c}\frac{\delta(e\mathcal{L}_\mathfrak{M})}{\delta e^g_\alpha}$ é o equivalente teleparalelo do tensor energia-momento.

4.4 Formulação ADM do Teleparalelismo

A formulação ADM do Teleparalelismo surge no mesmo contexto que na RG, qual seja a busca para uma formulação hamiltoniana da teoria.

Se na Relatividade Geral a passagem de uma descrição lagrangiana para uma hamiltoniana[14] apresenta problemas, devemos esperar que o mesmo ocorra no Teleparalelismo. Quando consideramos as equações de campo no vácuo,

$$eE_g{}^\alpha \equiv \partial_\mu \left[4e\Sigma_g{}^{\mu\alpha}\right] + 4e\Sigma_a{}^{\alpha\mu}T^a{}_{g\mu} - ee^\alpha_g\Sigma_{abc}T^{abc} = 0 \quad ,$$

vemos que há dezesseis equações não lineares para as dezesseis componentes das tetradas. Porém, uma análise de dados de Cauchy nos mostra que apenas as quantidades e^a_j são variáveis dinâmicas, enquanto as componentes e^a_0 são quantidades cinemáticas[15] (ver apêndice 1). Isto nos reduz o número de equações dinâmicas de dezesseis para apenas doze. Mas há mais, pois sabemos ainda que seis dos graus de liberdade das tetradas estão relacionadas a transformações de Lorentz no espaço tangente, o que nos reduz o número de variáveis independentes de doze para seis, que é o mesmo número de variáveis independentes da RG.

Novamente a busca por uma formulação hamiltoniana esbarra na não linearidade das equações de campo, onde a separação das variáveis dinâmicas e cinemáticas é muito complicada. Assim como na RG, a primeira tentativa para se contornar este problema reside em fazer folheação do espaço-tempo.

4.4.1 A geometria da folheação do espaço-tempo

Seguindo a mesma linha de raciocínio desenvolvida na formulação ADM da RG, primeiramente falaremos sobre a folheação da variedade de Weitzenböck, e depois

[14] Nosso intuito aqui não é estudar a formulação hamiltoniana do Teleparalelismo, mas apenas apresentar o contexto em que sua formulação ADM pode ser enquadrada.

[15] A mesma análise mostra que apenas as equações $eE_g{}^i = 0$ são equações dinâmicas, enquanto $eE_g{}^0 = 0$ representam apenas condições nos dados iniciais.

falaremos sobre a escolha de ADM.

O processo de folheação desta variedade é muito semelhante àquele feito no espaço-tempo riemanniano. Novamente assumimos que nossa variedade admite uma folheação de dimensão *três*, com híper-superfícies Σ_t do tipo espaço[16], cujo campo de vetores ortogonais , $\mathbf{n}$, será unitário tipo tempo. Sobre a superfície selecionaremos três vetores unitários, $\mathbf{b}_{[i]}$, tangentes às linhas de coordenadas,

$$b^{\alpha}_{[i]} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^{[i]}} \quad , \tag{4.15}$$

que constituem uma base em Σ_t.

O conjunto de quatro vetores, $\{\mathbf{n}, \mathbf{b}_{[i]}\}$, constitui uma base no espaço-tempo, que será usada para decompor os vetores e tensores de nosso interesse. A decomposição de tensores nesta base é feita de maneira idêntica ao caso da variedade riemanniana, e, como antes, a decomposição do tensor métrico nos define a métrica induzida, $\gamma_{[i][j]}$.

Mas no espaço de Weitzenböck sabemos que a métrica do espaço-tempo também pode ser expressa em termos de tetradas[17],

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{ab} e^{a}_{\alpha} e^{b}_{\beta} \quad , \tag{4.16}$$

Apenas para relembrar, quando fixamos o índice de espaço-tempo, as tetradas são quadrivetores de Lorentz, e quando fixamos o índice de Lorentz, estas são vetores por transformações gerais de coordenadas. Desta forma, ao fixarmos o índice do espaço tangente, podemos fazer a decomposição das tetradas nesta base $\{\mathbf{n}, \mathbf{b}_{[i]}\}$,

$$e^{a}_{\mu} = -\left(e^{a}_{\beta} n^{\beta}\right) n_{\mu} + \left(e^{a}_{\beta} b^{\beta}_{[i]}\right) b^{[i]}_{\mu} = e^{a}_{\perp} n_{\mu} + e^{a}_{[i]} b^{[i]}_{\mu} \quad .$$

Mas as tetradas também formam uma base do espaço-tempo, de forma que os vetores da base da folheação podem ser expressos na base de tetradas:

$$\begin{aligned} n^{\mu}(x) &= \left[n^{\beta} e^{a}_{\beta}\right] e^{\mu}_{a} = n^{a} e^{\mu}_{a} \quad , \\ b^{\mu}_{[i]} &= \left[b^{\beta}_{[i]} e^{a}_{\beta}\right] e^{\mu}_{a} = b^{a}_{[i]} e^{\mu}_{a} \quad , \end{aligned}$$

Comparando as últimas expressões segue

$$n^{a} = -e^{a}_{\perp} \quad , \tag{4.17}$$

$$b^{a}_{[i]} = e^{a}_{[i]} \quad . \tag{4.18}$$

[16] Como antes, a "segunda coordenada constante" de *tempo*, t; as coordenadas de um ponto com relação a um referencial sobre a superfície Σ_t serão denotadas por $\xi^{[i]}$ (os índices entre colchetes serão utilizados para indexar objetos relacionados à híper-superfície).

[17] O processo de folheação descrito acima independe do fato da variedade estar ou não "equipada" com tetradas.

Quando comparamos a decomposição da métrica na base de tetradas com a sua decomposição na base da folheação vemos que

$$\begin{aligned} g_{\perp\perp} &= \eta_{ab} n^a n^b = \eta_{ab}\left(-e^a_\perp\right)\left(-e^b_\perp\right) = -1 \quad , \\ g_{[i]\perp} &= \eta_{ab} b^a_{[i]}\left(-n^b\right) = \eta_{ab} e^a_{[i]} e^b_\perp = 0 \quad , \\ g_{\perp[i]} &= \eta_{ab}\left(-n^a\right) b^b_{[i]} = \eta_{ab} e^a_\perp e^b_{[i]} = 0 \quad , \\ g_{[i][j]} &= \eta_{ab} b^a_{[i]} b^b_{[j]} = \eta_{ab} e^a_{[i]} e^b_{[j]} = \gamma_{[i][j]} \quad . \end{aligned}$$

Destas expressões vemos que os vetores de Lorentz $e^a_{[i]}$ (ou $b^a_{[i]}$) são ortogonais ao vetor $e^a_\perp$ (ou n^a), e que este último é um vetor normalizado tipo tempo. A independência linear dos três vetores $b^a_{[i]}$ deve ser preservada, de forma que $b^a_{[i]}$ e n^a formam uma base do espaço tangente, que também pode ser usada para decompor as tetradas quando fixamos o índice de espaço tempo:

$$e^\mu_b = -\left(e^\mu_a n^a\right) n_b + \left(e^\mu_a b^a_{[j]}\right) b^{[j]}_b \quad .$$

Da mesma forma que na RG, o vetor de propagação é o vetor tangente às curvas de congruência e nos informa como as coordenadas são propagadas de uma superfície para outra:

$$\zeta^\alpha \equiv \frac{\partial x^\alpha\left(t,\xi\right)}{\partial t} \quad , \tag{4.19}$$

e sua decomposição na base da folheação nos define a função lapso e o vetor de shift (ou defasagem):

$$N \equiv -\zeta^\beta n_\beta \quad , \tag{4.20}$$

$$N^{[i]} \equiv \zeta^\beta b^{[i]}_\beta \quad , \tag{4.21}$$

que desempenham o mesmo papel que na RG.

4.4.2 A escolha de ADM

Como na RG, a escolha de Arnowit, Deser, Misner (ADM) consiste em escolher um sistema de coordenadas do espaço-tempo, onde a coordenada x^0 seja o próprio parâmetro t, $x^0 = t$, e que suas linhas de coordenadas espaciais coincidam com as linhas coordenadas na superfície: $x^i = \xi^i$. Neste sistema de coordenadas teremos

$$b^\alpha_{[i]} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i} = \delta^\alpha_i \quad .$$

Com esta base, podemos dispensar o uso de colchetes em nossa notação, pois os índices espaciais do espaço-tempo agora coincidem com os índices da híper-superfície.

Esta escolha de ADM nos simplifica os cálculos e levam a resultados bastante interessantes. O primeiro deles surge quando procuramos descrever o intervalo ds^2 nesta folheação. Para isso devemos decompor dx^α na base $\{\mathbf{n}, \mathbf{b_i}\}$:

$$\begin{aligned} dx^\alpha &= x^\alpha (t+dt, \xi + d\xi) - x^\alpha (t,\xi) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial t} dt + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i} d\xi^i = \\ &= n^\alpha (N dt) + b_i^\alpha \left(N^i dt\right) + b_i^\alpha d\xi^i = \\ &= \left(n^\alpha N + b_i^\alpha N^i\right) dt + b_i^\alpha d\xi^i \quad . \end{aligned}$$

A norma deste vetor, que nada mais é do que o intervalo, pode ser calculada usando o fato de que $\mathbf{n}$ é ortogonal aos vetores $\mathbf{b_k}$ na híper-superfície. Desta forma, temos:

$$\begin{aligned} dx^\alpha dx_\alpha &= ds^2 = \left[\left(n^\alpha N + b_i^\alpha N^i\right) dt + b_i^\alpha d\xi^i\right] \left[\left(n_\alpha N + b_{\alpha j} N^j\right) dt + b_{\alpha j} d\xi^j\right] = \\ &= \eta_{ab} \left(n^a N + b_j^a N^j\right) \left(n^b N + b_i^b N^i\right) dt dt + 2\eta_{ab} \left(n^a N + b_j^a N^j\right) b_i^b dt d\xi^i + \\ &\quad + \eta_{ab} b_i^a b_j^b d\xi^i d\xi^j \quad . \end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \eta_{ab} e_\alpha^a e_\beta^b dx^\alpha dx^\beta \quad .$$

No sistema de coordenadas escolhido ($x^0 = t$, $x^i = \xi^i$) é imediato que

$$ds^2 = \eta_{ab} e_0^a e_0^b dt dt + 2\eta_{ab} e_0^a e_i^b dt d\xi^i + \eta_{ab} e_i^a e_j^b d\xi^i d\xi^j \quad ,$$

Assim, podemos identificar

$$e_0^a = n^a N + b_j^a N^j \quad , \tag{4.22}$$

$$e_i^a = b_i^a \quad , \tag{4.23}$$

sendo que este último apenas reitera o que já havia sido expresso em (4.18).

Devemos ainda nos preocupar em expressar as inversas destas tetradas. Para isto, basta lembrarnos que

$$\begin{aligned} e_a^\mu e_\nu^a &= \delta_\nu^\mu \quad , \\ \gamma_{ij} \gamma^{ik} &= \delta_j^k \quad . \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} e_a^0 e_0^a &= 1 \Longrightarrow e_a^0 \left(n^a N + b_j^a N^j\right) = 1 \Longrightarrow e_a^0 n^a N + e_a^0 b_j^a N^j = 1 \quad , \\ e_a^i e_0^a &= 0 \Longrightarrow e_a^i \left(n^a N + b_j^a N^j\right) = 0 \Longrightarrow e_a^i n^a N + e_a^i b_j^a N^j = 0 \quad , \\ e_a^0 e_i^a &= 0 \Longrightarrow e_a^0 b_i^a = 0 \quad , \\ e_a^i e_j^a &= \delta_j^i \Longrightarrow e_a^i b_j^a = \delta_j^i \quad . \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} e^0_a n^a N + e^0_a e^a_i N^j &= 1 \Longrightarrow e^0_a n^a N = 1 \quad , \\ e^i_a n^a N + \delta^i_j N^j &= 0 \Longrightarrow e^i_a n^a = -\frac{N^i}{N} \quad , \end{aligned}$$

Recordemos que as tetradas podem ser decompostas na base da folheação,

$$\begin{aligned} e^0_b &= -\left(e^0_a n^a\right) n_b + \left(e^0_a b^a_j\right) b^j_b \quad , \\ e^i_b &= -\left(e^i_a n^a\right) n_b + \left(e^i_a b^a_j\right) b^j_b \quad . \end{aligned}$$

Logo

$$e^0_b = -\frac{1}{N} n_b \quad , \tag{4.24}$$

$$e^i_b = -\left(-\frac{N^i}{N}\right) n_b + \delta^i_j b^j_b \Longrightarrow e^i_b = b^i_b + \frac{N^i}{N} n_b \quad . \tag{4.25}$$

No desenvolvimento de ADM para a RG, mostramos

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-\det(g_{\alpha\beta})} = N\sqrt{\gamma} \quad ,$$

onde $\gamma = \det\left(\gamma_{ij}\right)$. Em termos de tetradas, é imediato que esta expressão se reescreve como

$$e = Nb \quad ,$$

onde $b = \sqrt{\det\left(b^a_i b_{aj}\right)}$.

4.4.3 A Decomposição da Lagrangiana Teleparalela na Formulação ADM

Na formulação ADM do Teleparalelismo é necessário que a Lagrangiana seja dada em termos de N, N^i, b^i_b e n_b, que fazem o papel dos campos fundamentais[18]. Sabemos que a Lagrangiana Teleparalela é dada por uma combinação quadrática do tensor de torção,

$$L = \frac{1}{2\chi} e \left[\frac{1}{4} T^{abc} T_{abc} + \frac{1}{2} T^{abc} T_{bac} - T^c T_c\right] = \frac{1}{2\chi} e \Sigma^{abc} T_{abc} \quad ,$$

onde

$$\begin{aligned} \Sigma^{abc} &= \frac{1}{4}\left(T^{abc} + T^{bac} - T^{cab}\right) + \frac{1}{2}\left(\eta^{ac} T^b - \eta^{ab} T^c\right) = -\Sigma^{acb} \quad , \\ T^c &= T^a{}_{ac} \quad , \\ T^{abc} &= e^{b\mu} e^{c\nu} T^a{}_{\mu\nu} = e^{b\mu} e^{c\nu}\left(\partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu\right) = -T^{acb} \quad . \end{aligned}$$

[18] Na verdade a escolha de b^i_b determina n_b de maneira única, a menos de um sinal, de forma que os campos fundamentais são de fato apenas as quantidades N, N^i, b^i_b.

É necessário conhecermos como estas quantidades são expressas em função das variáveis citadas, às quais chamaremos por variáveis ADM. Usando a antissimetria da torção podemos ver que

$$T^{abc} = \rho^{abc} + \bar{T}^{abc} \quad ,$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{T}^{abc} &\equiv b^{bi}b^{cj}T^{a}{}_{ij} = -\bar{T}^{acb} \quad , \\ \rho^{abc} &\equiv \frac{1}{N}\left[-n^{b}b^{ci} + n^{c}b^{bi}\right] l^{a}{}_{i} = -\rho^{acb} \, , \\ l^{a}{}_{i} &\equiv \left(T^{a}{}_{0i} + N^{j}T^{a}{}_{ij}\right) \quad . \end{aligned}$$

Daí segue que

$$\Sigma^{abc} = S^{abc} + \bar{\Sigma}^{abc} \, ,$$

$$\begin{aligned} S^{abc} &\equiv \frac{1}{4}\left(\rho^{abc} + \rho^{bac} - \rho^{cab}\right) + \frac{1}{2}\left(\eta^{ac}\rho^{b} - \eta^{ab}\rho^{c}\right) \quad , \\ \bar{\Sigma}^{abc} &\equiv \frac{1}{4}\left(\bar{T}^{abc} + \bar{T}^{bac} - \bar{T}^{cab}\right) + \frac{1}{2}\left(\eta^{ac}\bar{T}^{b} - \eta^{ab}\bar{T}^{c}\right) \quad , \\ \bar{T}^{b} &\equiv \bar{T}^{a}{}_{a}{}^{b} \quad , \\ \rho^{b} &\equiv \rho^{a}{}_{a}{}^{b} \quad . \end{aligned}$$

A partir das definições acima podemos constatar que

$$\Sigma^{abc}T_{abc} = S^{abc}\rho_{abc} + 2\bar{\Sigma}^{abc}\rho_{abc} + \bar{\Sigma}^{abc}\bar{T}_{abc} \quad ,$$

onde verifica-se que

$$\begin{aligned} S^{abc}\rho_{abc} = &-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N}\right)^{2}\left[\gamma^{ik} + \left(b^{ci}n_{c}\right)\left(b^{k}_{b}n^{b}\right)\right] l^{a}{}_{i}l_{ak} + \\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N}\right)^{2}\left[n^{a}n_{b}\gamma^{ik} - b^{ai}b^{k}_{b} - 2n^{a}b^{k}_{b}\left(b^{ci}n_{c}\right)\right] l^{b}{}_{i}l_{ak} + \\ &-\left(\frac{1}{N}\right)^{2}\left[n^{a}n_{b}\gamma^{ik} - 2n^{a}b^{i}_{b}\left(b^{ck}n_{c}\right) - b^{ak}b^{i}_{b}\right] l^{b}{}_{i}l_{ak} \quad , \end{aligned}$$

$$\bar{\Sigma}^{abc}\rho_{abc} = -2\frac{1}{N}\left(\bar{\Sigma}^{abc}n_{b}b^{k}_{c}\right) l_{ak} \quad .$$

Destes dois resultados segue que

$$\begin{aligned} \Sigma^{abc}T_{abc} = &-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N}\right)^{2}\left(\gamma^{ik}l^{a}{}_{i}l_{ak} + n^{a}n_{b}\gamma^{ik}l^{b}{}_{i}l_{ak} + b^{ai}b^{k}_{b}l^{b}{}_{i}l_{ak} - 2b^{ak}b^{i}_{b}l^{b}{}_{i}l_{ak}\right) + \\ &-4\frac{1}{N}\left(\bar{\Sigma}^{abc}n_{b}b^{k}_{c}\right) l_{ak} + \bar{\Sigma}^{abc}\bar{T}_{abc} \quad , \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $b^{ci}n_c = 0$, ou seja, de que b^{ci} e n_c são ortogonais. Desta forma, a Lagrangiana Teleparalela na formulação ADM pode ser expressa como

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\chi}\right)\frac{b}{N}\left[(\eta_{ab}+n_a n_b)\gamma^{ik}l^a{}_i l^b{}_k + b^i_a b^k_b l^b{}_i l^a{}_k - 2b^k_a b^i_b l^b{}_i l^a{}_k\right] + \\ & -4\left(\frac{1}{2\chi}\right) b\left(\bar{\Sigma}_a{}^{bc} n_b b^k_c\right) l^a{}_k + \left(\frac{1}{2\chi}\right) N b \bar{\Sigma}^{abc}\bar{T}_{abc} \quad . \end{aligned}$$

Novamente neste ponto poderíamos empregar o princípio variacional, obter equações de movimento, e analisar o caráter dinâmico e cinemático das variáveis com a análise de Cauchy. No entanto, a apresentação destes resultados aqui não se faz necessária, pois no que segue estamos interessados em estudar os vínculos da teoria Teleparalela e da Relatividade Geral e, como mostraremos, a análise destes não passa necessariamente pelo conhecimento das equações de campo. Para determinar a estrutura de vínculos das formulações ADM destas teorias veremos que é necessário apenas o conhecimento de suas funções Lagrangianas, e portanto neste ponto é fundamental apresentarmos o formalismo envolvendo o estudo de sistemas vinculados. É sobre ele que trataremos a seguir.

Bibliografia

[1] R. Weitzenböck - Invariantentheorie, Noordhoff, Gronningen (1923).

[2] T. Vargas - Equivalente Teleparalelo de Algumas Soluções da Relatividade Geral - tese de doutoramento - IFT-T.007/02 (2002).

[3] A. Einstein - Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss, 217.(1928) (conforme [4]).

[4] L. O´Rayfeartaigh - The Dawning of Gauge Theory, Princeton University Press (1997).

[5] E. Wigner - Zeit. f. Physik 592 53 (1929).

[6] H. Weyl - Zeit. f. Physik 330 56 (1929).

[7] S. Deser e C. J. Isham - Phys. Rev. D 14, 2505 (1976).

[8] C. J. Isham - Proc. R. Soc. Lond. A.364, 591-599 (1978).

[9] I. D. Soares - "O Cálculo de Formas Diferenciais e a Equação de Dirac em Espaços Curvos", publicado em II Escola de Cosmologia e Gravitação do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, editado por M. Novello, CBPF (1980).

[10] V. de Sabbata e M. Gasperini - Introduction to Gravitation, World Scientific Publishing, (1985).

[11] R. Aldrovandi e J.G. Pereira - An Introduction to Gravitation Theory, (notas de aula da disciplina "Teoria da Gravitação: Campos e Tetradas") (2001).

[12] E. Schrödinger - Space-Time Structure, Cambridge (1950).

[13] J. T. T. Lunardi - O Campo Escalar no Formalismo de Duffin-Kemmer-Petiau - tese de doutoramento - IFT-T.007/2001 (2001).

[14] K. Hayashi, T. Shirafuji - Phys. Rev. D 19, 3524 (1979).

[15] V. C. de Andrade, L. C. T. Guillen e J. G. Pereira - Contribution to the IX Marcel Grossmann Meeting, Rome, Italy (2000).

[16] C. Pelegrini e J. Plebanski - K. Dan. vidensk. Selsk. Mat. Fys. Skr. 2, N 2 (1962).

Capítulo 5

Formalismo de Hamilton-Jacobi

A análise dos vínculos de uma teoria passa pela classificação do sistema físico quanto à sua singularidade. Como veremos adiante, um sistema que apresenta vínculos é necessariamente singular. O estudo de sistemas singulares ganhou notoriedade com os trabalhos de Dirac [2, pag. 1; 22; 23; 24], que apresentou seu formalismo hamiltoniano para o estudo de tais sistemas. O sucesso desta abordagem pode ser constatado pelo enorme número de casos a que foi aplicada, dentre os quais podemos citar a Relatividade Geral [9; 13; 14; 25; 26], Teleparalelismo [12], Eletrodinâmica Generalizada de Podolsky [11; 27], entre tantos outros. Apesar do grande êxito e da imensa aceitação da abordagem de Dirac, isto não impediu que outras formulações alternativas para o estudo de sistemas singulares fossem propostos. De fato, se olharmos ao longo da história da Física, o surgimento de diferentes descrições de um mesmo tema é um processo natural e muito importante, pois nos permite observar diferentes características e pontos de vista de um mesmo assunto. É o que acontece por exemplo na Mecânica Clássica, onde diferentes formalismos permitem obter novas informações e até mesmo novas concepções.

Quando estudamos um sistema físico em Mecânica Clássica podemos analisá-lo por pelo menos quatro abordagens diferentes, quais sejam a de Newton, a de Lagrange, a de Hamilton e a de Hamilton-Jacobi[1]. A escolha pelo formalismo newtoniano certamente é adequada em problemas de estática, onde as leis de Newton podem ser uma ferramenta poderosa para identificação de forças que atuam no sistema, ou ainda em problemas que envolvam forças de atrito proporcionais às velocidades. Nesta abordagem é necessário que se tenha conhecimento de todas as forças que atuam no sistema, e em algumas situações a identificação destas pode se tornar um trabalho árduo, principalmente quando não se conhece a natureza das forças envolvidas. Este em geral é o caso quando consideramos sistemas que apresentam vínculos sobre os movimentos das partículas, onde as coordenadas deixam

[1]Esta três últimas abordagem são estudadas no que chamamos de Mecânica Analítica.

de ser todas independentes[2].

Para estes casos o formalismo lagrangiano já se mostra muito mais conveniente, pois a incorporação dos vínculos pode ser facilmente feita, por exemplo, com o uso de multiplicadores de Lagrange [1, pag. 141; 16, pag.41]. Uma outra vantagem da abordagem de Lagrange reside no fato das equações de movimento serem covariantes pela escolha de coordenadas generalizadas[3] [1, pag115]. Esta covariância é uma ferramenta poderosa, pois, para se tentar integrar as equações de movimento, sempre podemos escolher coordenadas onde as equações acabem por tomar uma forma simples.

A covariância por transformações de coordenadas generalizadas é perdida quando da passagem para o formalismo hamiltoniano. No entanto, nesta abordagem as equações de movimento[4] passam a ser covariantes por um grupo mais amplo, qual seja o grupo de transformações canônicas[5] [1, pag.193; 16, pag. 237]. Com estas transformações sempre podemos tentar simplificar as equações, em particular, na busca por coordenadas cíclicas, as quais nos reduzem o número de equações a serem resolvidas[6]. Ainda há mais, pois as quantidades invariantes por transformações canônicas serão quantidades conservadas no tempo[7]. Uma outra estrutura poderosa no formalismo hamiltoniano é a estrutura de Parêntesis de Poisson[8], que, por satisfazer a identidade de Jacobi[9], pode ser considerada uma importante ferramenta para encontrar novas constantes de movimento[10] [16, pag.258].

---

[2]Para estes tipos de problema, em geral as forças envolvidas para manter os vínculos não são conhecidas, mas no entanto, relações do tipo $f_i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N, t) = 0$ podem ser bem estabelecidas

[3]O conceito de coordenadas generalizadas surge quando substituímos as 3 coordenadas do espaço ordinário das N partículas constituintes do sistema por $3N$ coordenadas de um espaço mais abstrato (espaço de configurações). Esta escolha nos permite tratar o sistema como um todo, e não mais como um conjunto de N partículas.

[4]As equações de movimento agora são $2n$ equações de primeira ordem para as n coordenadas e para seus independentes n momentos canonicamente conjugados. O espaço formado com as coordenadas e momentos é chamado de espaço de fase [1, pag. 172; 16, pag. 247], que é o cenário onde o formalismo hamiltoniano é construído.

[5]O domínio das transformações canônicas é, num certo sentido, mais amplo do que o das transformações de coordenadas generalizadas, pois a independência entre as coordenadas e os momentos permite uma maior liberdade na escolha do que é coordenada e do que é momento.

[6]Isto ocorre, pois o momento canonicamente conjugado a uma coordenada cíclica é uma constante do movimento.

[7]Isto acontece, porque o movimento do fluido de fase pode ser concebido como sendo uma seqüência contínua de transformações canônicas infinitesimais [1, pag.219; 16, pag. 258-259].

[8]O Parêntesis de Poisson entre duas funções f e g é definido como $[f,g] \equiv \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}$.

[9]A identidade de Jacobi nos diz que $[f,[g,h]] + [h,[f,g]] + [g,[h,f]] = 0$.

[10]Lembremos que a derivada temporal de qualquer função das coordenadas, dos momentos e do tempo de um sistema físico podee ser escrita como $\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}$. Se não houver dependência

Esta mesma estrutura também está presente na abordagem de Hamilton-Jacobi[11], onde também fazemos uso do cenário do espaço de fase, e por isso uma série de propriedades válidas para o caso hamiltoniano também são válidas neste contexto[12]. No entanto, neste formalismo temos um nova ferramenta poderosa à nossa disposição, que são as variáveis de ângulo e ação [16, pag. 288; 1, pag. 243; 17, pag. 157], que nos permitem encontrar a freqüência de oscilação de movimentos periódicos, sem que se obtenha uma solução completa do problema. Mas talvez uma das maiores virtudes do formalismo de Hamilton-Jacobi resida nas analogias que podemos fazer entre a Mecânica Clássica e outras áreas de estudo da Física. Podemos citar primeiramente a analogia entre Mecânica Clássica e Ótica Geométrica[13] [18, pag. 172; 1, pag.264; 16, pag. 307], onde fica claro que a primeira corresponde ao limite da ótica geométrica da propagação de uma onda, o que nos explica porque a teoria ondulatória (de Huygens) e a corpuscular (de Newton) da luz descrevem tão bem a reflexão e a refração [3, pag. 312]. Podemos ainda mencionar que este mesmo tipo de analogia nos mostra que é no formalismo de Hamilton-Jacobi que a Mecânica Quântica se reduz à Mecânica Clássica[14][19, pag. 307], nos elucidando que a concepção clássica do movimento de um ponto material é apenas uma aproximação para um pacote de ondas, da mesma forma como o raio de luz na ótica [20, pag.119].

Como podemos ver, cada um destes formalismos ressalta diferentes aspectos da Mecânica, e a escolha por uma outra abordagem depende das caracterísitcas que se pretende estudar. Além disso, é importante observar que apesar de diferentes, estes formalismos são de certa forma equivalentes, pois sempre podemos passar de uma abordagem para outra por meio de uma transformação. Por exemplo, do formalismo lagrangiano podemos ir ao hamiltoniano por uma transformação de Legendre, e vice-versa [1, pag.161; 16, pag.215]. Deste último podemos ir ao de Hamilton-Jacobi através de uma transformação canônica [1, pag.193; 16, pag.237].

Não é apenas na Mecânica Clássica que encontramos diferentes formulações para

explícita com o tempo, $\frac{df}{dt} = [f, H]$. Para estes casos o Parêntesis de Poisson de duas constantes de movimento também será uma constante.

[11] Neste formalismo devemos nos preocupar com a resolução de apenas uma equação diferencial parcial de primeira ordem conhecida como equação de Hamilton-Jacobi [1, pag. 229; 16, pag. 274; 17, pag.147]

[12] É interessante notar que a teoria de equações diferenciais parciais nos diz que a uma equação diferencial parcial está associado um conjunto de equações diferenciais totais. No caso da equação de Hamilton-Jacobi este conjunto possui $2n$ equações, $dq^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}dt$, $dp_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}dt$, que nada mais são do que as equações de Hamilton escritas como diferenciais totais.

[13] Nesta analogia identificamos o vetor de onda com o momento, a equação da eikonal com a equação de Hamilton-Jacobi, e o Princípio de Mínima Ação com o Princípio de Fermat.

[14] Isto ocorre no limite $\hbar \to 0$, que por isso é chamado de limite semiclássico da Mecânica Quântica [19, pag.307].

um mesmo tema. Isto também se verifica na Mecânica Quântica, onde, por exemplo o estudo da dinâmica quântica pode ser feito nos cenários de Schrödinger, Heisenberg, e o de Dirac (interação) [15, pag. 319], onde podemos passar de um para outro por meio de uma transformação unitária. O mesmo ocorre no próprio estudo de sistemas singulares, que podem ser examinados pelo formalismo lagrangiano [9, pag. 38; 32 pag. 80], o hamiltoniano de Dirac [22; 23; 24; 9, pag. 45; 32, pag.91], o de Faddeev-Jackiw [28; 29], o formalismo simplético [30; 31], o de Hamilton-Jacobi, que é o de nosso interesse neste trabalho, entre outros.

O formalismo de Hamilton-Jacobi foi recentemente desenvolvido por Güler para tratar sistemas singulares de primeira ordem [3; 4], e sua extensão para Lagrangianas de ordem superior e para variáveis da álgebra de Berezin podem ser encontradas nas referências [2; 5; 6; 7]. Nestes trabalhos a equação de Hamilton-Jacobi é derivada a partir do formalismo Lagrangiano, usando-se o método de *Lagrangianas Equivalentes* de Carathéodory [8, pag. 205]. É este mesmo tipo de dedução que pretendemos apresentar a seguir. Por simplicidade, nos desenvolvimentos feitos a seguir consideraremos sistemas com finitos graus de liberdade, pois todos os resultados obtidos podem ser naturalmente extensíveis para infinitos graus de liberdade.

5.1 Sistemas singulares

Antes de falarmos do método de Lagrangianas equivalentes, recordaremos alguns pontos do formalismo lagrangiano que serão importantes no desenvolvimento posterior.

No formalismo lagrangiano a procura por um mínimo da integral de ação, com as técnicas do cálculo variacional, nos conduz às equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^I} = 0 \qquad , I = 1, .., N,$$

que *em princípio* são N equações diferenciais de segunda ordem para as coordenadas generalizadas. Isto fica claro quando expressamos de maneira explícita a derivada temporal total:

$$\ddot{q}^J \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^J \partial \dot{q}^I} + \dot{q}^J \frac{\partial^2 L}{\partial q^J \partial \dot{q}^I} - \frac{\partial L}{\partial q^I} = 0 \qquad .$$

Podemos reescrever esta equação numa forma mais apropriada,

$$H_{IJ}\ddot{q}^J = \frac{\partial L}{\partial q^I} - \dot{q}^J \frac{\partial^2 L}{\partial q^J \partial \dot{q}^I} \qquad ,$$

onde $H_{IJ} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^J \partial \dot{q}^I}$ é a *matriz Hessiana*.

Dissemos acima que *em princípio* são N equações de segunda ordem, porque isto só ocorre quando o determinante da matriz Hessiana é não nulo, $\det H_{IJ} \neq 0$. Neste caso H_{IJ} é inversível e teremos

$$\ddot{q}^J = H_{IJ}^{-1}\left(\frac{\partial L}{\partial q^I} - \dot{q}^M \frac{\partial^2 L}{\partial q^M \partial \dot{q}^I}\right) \quad .$$

Sistemas que satisfazem esta condição são chamados de *sistemas regulares* [9, pag. 1].

Quando $\det H_{IJ} = 0$ não é possível fazer a inversão da matriz Hessiana, e como conseqüência, algumas das equações de Euler-Lagrange não serão de segunda ordem para algumas coordenadas generalizadas. Estas equações, portanto, não serão dinâmicas para tais coordenadas, e, na abordagem do problema de Cauchy [10], representarão apenas condições impostas sobre os dados iniciais. O número de equações que não serão de segunda ordem, R, está intimamente relacionado ao posto P da matriz Hessiana, $R = N - P$. Os sistemas em que $\det H_{IJ} = 0$ são chamados de *sistemas singulares* [9, pag. 1].

5.2 Lagrangianas Equivalentes e o Formalismo de Hamilton-Jacobi

O método de Lagrangianas equivalentes é uma forma de se obter a equação de Hamilton-Jacobi a partir de um princípio variacional. Começamos supondo que nosso sistema pode ser bem caracterizado por uma função Lagrangiana $L\left(q^I, \dot{q}^I\right)$, e que devemos procurar um extremo da integral de ação, como visto acima. Note que, dada $L\left(q^I, \dot{q}^I\right)$, podemos encontrar uma outra Lagrangiana $L'\left(q^I, \dot{q}^I\right)$,

$$L'\left(q^I, \dot{q}^I\right) = L\left(q^I, \dot{q}^I\right) - \frac{d}{dt} S\left(q^I, t\right) \quad ,$$

de forma que as integrais de ação $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}' = \int_{t_1}^{t_2} dt L'\left(q, \dot{q}\right)$ tenham extremos simultâneos:

$$\mathbb{S}' = \int_{\substack{t_1 \\ \gamma}}^{t_2} dt \left(L\left(q^I, \dot{q}^I\right) - \frac{d}{dt} S\left(q^I, t\right)\right) = \mathbb{S} - S\left(q^I\left(t_2\right), t_2\right) + S\left(q^I\left(t_1\right), t_1\right) \quad ,$$

$$\bar{\mathbb{S}}' = \int_{\substack{t_1 \\ \bar{\gamma}}}^{t_2} dt \left(L\left(q^I, \dot{q}^I\right) - \frac{d}{dt} S\left(q^I, t\right)\right) = \bar{\mathbb{S}} - S\left(q^I\left(t_2\right), t_2\right) + S\left(q^I\left(t_1\right), t_1\right) \quad ,$$

$$\mathbb{S}' - \bar{\mathbb{S}}' = \mathbb{S} - \bar{\mathbb{S}} \quad .$$

Desta forma, o problema da procura por um extremo da integral de ação $\mathbb{S}$ pode ser substituído pelo problema da procura de um extremo da ação $\mathbb{S}'$, e vice-versa. Por conta disso, dizemos que as Lagrangianas $L\left(q^I, \dot{q}^I\right)$ e $L'\left(q^I, \dot{q}^I\right)$ são *equivalentes*.

É interessante notar ainda que a escolha por uma Lagrangiana equivalente não altera a singularidade da matriz Hessiana[15], pois

$$\frac{\partial^2 L'}{\partial \dot{q}^J \partial \dot{q}^I} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^J \partial \dot{q}^I}.$$

Isto significa que um sistema será singular, ou regular, tanto se for descrito por uma Lagrangiana L, quanto se for caracterizado por uma Lagrangiana equivalente L', o que enfatiza esta equivalência das duas funções.

Para procurarmos um extremo de $\mathbb{S}'$ é suficiente procurarmos um conjunto de funções $\beta^I\left(q^J, t\right)$ e $S\left(q^I, t\right)$ de tal forma que, quando $\dot{q}^I = \beta^I\left(q^J, t\right)$ tenhamos

$$L'\left(q^I, \dot{q}^I = \beta^I\left(q^J, t\right)\right) = 0 \quad , \tag{5.1}$$

e que em uma vizinhança de $\dot{q}^I = \beta^I\left(q^J, t\right)$ tenhamos

$$L'\left(q^I, \dot{q}^I\right) > 0 \quad . \tag{5.2}$$

Estas duas escolhas garantem um mínimo da integral de ação[16,17] [8, pag. 206]. Reescrevendo a equação (5.1) de forma a explicitar a derivada total, temos

$$\left[L\left(q^I, \dot{q}^I\right) - \frac{\partial}{\partial t} S\left(q^I, t\right) - \frac{\partial}{\partial q^J} S\left(q^I, t\right) \dot{q}^J\right]_{\dot{q}^I = \beta^I\left(q^J, t\right)} = 0 \quad . \tag{5.3}$$

Repare que a condição (5.2) implica em

$$\left.\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^I}\right|_{\dot{q}^I = \beta^I\left(q^J, t\right)} = 0 \Rightarrow \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}^I}\left(\frac{\partial}{\partial t} S + \dot{q}^J \frac{\partial S}{\partial q^J}\right)\right]_{\dot{q}^I = \beta^I\left(q^J, t\right)} = 0$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}^I}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial \dot{q}^J}{\partial \dot{q}^I}\right) \frac{\partial S}{\partial q^J} - \dot{q}^J \frac{\partial}{\partial \dot{q}^I}\left(\frac{\partial S}{\partial q^J}\right)\right]_{\dot{q}^I = \beta^I\left(q^J, t\right)} = 0$$

$$\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}^I}\right) - \delta_I^J \frac{\partial S}{\partial q^J} - \dot{q}^J \frac{\partial}{\partial q^J}\left(\frac{\partial S}{\partial \dot{q}^I}\right)\right]_{\dot{q}^I = \beta^I\left(q^J, t\right)} = 0 \quad .$$

[15] Isto ocorre porque $S = S\left(q^I, t\right)$, ou seja, S é função apenas das coordenadas e do tempo.

[16] Além de garantir um mínimo, estas duas condições garantem que a integral de ação sobre a curva que mantém $\dot{q}^I = \beta^I\left(q^J, t\right)$ é nula, e que qualquer outra curva na vizinhança fornece uma integral de ação positiva.

[17] Na procura por um extremo, poderíamos exigir que, na vizinhança de $\dot{q}^I = \beta^I\left(q^J, t\right)$, fosse satisfeita a condição $L'\left(q^I, \dot{q}^I\right) < 0$. Teríamos, neste caso, um máximo da integral de ação e todos os resultados seguintes seriam igualmente obtidos.

Como $S = S(q,t)$, então $\frac{\partial S}{\partial \dot{q}^I} = 0$, e assim

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I} - \frac{\partial S}{\partial q^I}\right]_{\dot{q}^I=\beta^I(q^J,t)} &= 0 \\ \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I}\right|_{\dot{q}^I=\beta^I(q^J,t)} &= \left.\frac{\partial S}{\partial q^I}\right|_{\dot{q}^I=\beta^I(q^J,t)} \quad .\end{aligned}$$

É interessante neste ponto fazermos uma digressão ao formalismo Hamiltoniano. Recordemos que na passagem do formalismo lagrangiano para o hamiltoniano definimos o momento p_I, canonicamente conjugado a q^I, como sendo

$$p_I \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^I}\left(q^J, \dot{q}^J\right) \quad .$$

Neste formalismo definimos a função Hamiltoniana,

$$H \equiv p_J \dot{q}^J - L \quad ,$$

onde $\dot{q}^J$ deve em princípio ser expresso em termos de p_I e q^I, que passam a ser tratadas como variáveis independentes.

Por analogia ao formalismo hamiltoniano chamaremos p_I de momento, sendo agora dado por

$$\left.\frac{\partial S}{\partial q^I}\right|_{\dot{q}^I=\beta^I(q^J,t)} \equiv p_I \quad .$$

Desta forma, a equação (5.3) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\left[L\left(q^I,\dot{q}^I\right) - \frac{\partial}{\partial t}S\left(q^I,t\right) - p_J\dot{q}^J\right]_{\dot{q}^I=\beta^I(q^J,t)} &= 0 \\ -\left[\frac{\partial}{\partial t}S\left(q^I,t\right) + \left(p_J\dot{q}^J - L\left(q^I,\dot{q}^I\right)\right)\right]_{\dot{q}^I=\beta^I(q^J,t)} &= 0 \quad .\end{aligned} \tag{5.4}$$

Para sistemas regulares poderíamos, como no formalismo hamiltoniano, expressar todas as derivadas (ou simplesmente velocidades) em função de momentos e coordenadas, e a partir daí fazer uso das estruturas que caracterizam o espaço de fase. No entanto, para sistemas singulares, onde o determinante da matriz Hessiana se anula, $\det \frac{\partial p_I}{\partial \dot{q}^J} = 0$, não é mais possível escrever todas as velocidades $\dot{q}^J$ como funções de q e p, mas apenas algumas delas. A quantidade de derivadas que podemos escrever em função das coordenadas e dos momentos está diretamente relacionado ao posto da matriz Hessiana. Se H_{IJ} possui posto $P = N - R$, podemos ordenar as coordenadas de forma que a sub-matriz $P \times P$ no canto inferior direito da matriz Hessiana seja regular,

$$\det H_{AB} = \det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^B \partial \dot{q}^A} = \det \frac{\partial p_A}{\partial \dot{q}^B} \neq 0 \quad , \quad A, B = R+1, ..., N \quad .$$

Isto garante que a relação entre os momentos p_A e as velocidades $\dot{q}^B$ é inversível, e que, portanto, podemos expressar $N - R$ velocidades $\dot{q}^B$ como funções de q e p_A, $\dot{q}^B = f^B\left(q^I, p_A\right)$. Os outros R momentos p_Θ ($\Theta = 1, ..., R$) não possuem dependência nas velocidades, de forma que podem depender apenas do tempo, das coordenadas e das outras variáveis de momento[18]:

$$p_\Theta = -H_\Theta\left(t, q^I, p_A\right) \quad , \quad \Theta = 1, ..., R \quad . \tag{5.5}$$

Por conta disso, teremos R derivadas $\dot{q}^\Theta$ que não podem ser escrita em termos de momentos e coordenadas.

Assim, a expressão (5.4) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} S\left(q^I, t\right) + H\left(t, q^I, p_A = \frac{\partial S}{\partial q^A}\left(q^I, t\right), \dot{q}^\Theta\right) = 0 \tag{5.6}$$

No entanto, é interessante notar que a Hamiltoniana

$$H \equiv p_J \dot{q}^J - L = p_A f^A + p_\Xi \dot{q}^\Xi - L\left(q^I, \dot{q}^B = f^B, \dot{q}^\Theta\right) \quad ,$$

com $\Xi, \Theta = 1, ..., R$; $A, B = R+1, ..., N$, não possui dependência nas velocidades $\dot{q}^\Theta$, pois:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial \dot{q}^\Theta} &= p_A \frac{\partial f^A}{\partial \dot{q}^\Theta} + p_\Xi \frac{\partial \dot{q}^\Xi}{\partial \dot{q}^\Theta} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\Theta} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A}\frac{\partial f^A}{\partial \dot{q}^\Theta} = \\
&= \frac{\partial f^A}{\partial \dot{q}^\Theta}\left(p_A - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A}\right) + \left(p_\Theta - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\Theta}\right) = 0 \quad .
\end{aligned}$$

Assim, a equação (5.6) se reescreve como :

$$\frac{\partial}{\partial t} S\left(q^I, t\right) + H\left(t, q^I, p_A = \frac{\partial S}{\partial q^A}\right) = 0 \quad .$$

Esta última é conhecida como a *equação de Hamilton-Jacobi.*

Porém, devemos notar que, na procura por um extremo da integral de ação, devemos ter satisfeita não apenas a equação acima, mas também as equações (5.5), que também são equações diferenciais parciais de primeira ordem para a função S ([19]. Se fizermos uma mudança de notação, definindo

$$\begin{aligned}
t^\Theta &\equiv q^\Theta \quad , \\
t^0 &\equiv q^0 \equiv t \quad , \\
p_0 &\equiv \frac{\partial S}{\partial t} \quad , \\
H_0 &\equiv H \quad ,
\end{aligned}$$

[18]Estas variáveis de momento não são mais independentes, ou, em outras palavras, elas são vinculadas às outras variáveis do problema. Por conta disso podemos dizer que a expressão (5.5), reescrita como $\Phi_\Theta = p_\Theta + H_\Theta = 0$, constitui um vínculo. No formalismo de Dirac, esta relação é chamada de vínculo primário.

[19]Basta lembrar que $p_I = \frac{\partial S}{\partial q^I}$.

teremos

$$\Phi_0 \equiv p_0 + H_0\left(t, t^\Theta, q^A, p_A\right) = 0 \quad , \tag{5.7}$$
$$\Phi_\Theta \equiv p_\Theta + H_\Theta\left(t, t^\Theta, q^A, p_A\right) = 0 \quad , \tag{5.8}$$

ou simplesmente

$$\Phi_\Theta \equiv p_\Theta + H_\Theta\left(t, t^\Theta, q^A, p_A\right) = 0 \quad , \tag{5.9}$$

onde $\Theta = 0, ..., R$. Esta expressão nos mostra que as equações (5.5) possuem a mesma estrutura que a equação de Hamilton-Jacobi[20], e portanto chamaremos este conjunto de equações de *equações diferenciais parciais de Hamilton-Jacobi*. Assim, um extremo da integral de ação para sistemas singulares só ocorre quando encontramos uma função $S\left(t, t^\Theta, q^A\right)$ que seja solução deste sistema de equações diferenciais.

Mas dissemos acima que para encontrar um extremo de $\mathbb{S}'$ era suficiente procurarmos um conjunto de funções $S\left(q^I, t\right)$ e $\dot{q}^I = \beta^I\left(q^J, t\right)$ que satisfizessem as condições (5.1) e (5.2). Como vimos, a primeira deve satisfazer o sistema de equações de Hamilton-Jacobi, mas ainda nada dissemos sobre as últimas. É sobre elas que falaremos a seguir.

5.2.1 Equações de movimento

Quando consideramos o conjunto de equações diferenciais parciais de Hamilton-Jacobi (5.7) e (5.8), a derivada da primeira expressão em relação a p_B, $B = R+1, ..., N$, nos leva a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_0}{\partial p_B} &\equiv \frac{\partial}{\partial p_B} p_0 + \frac{\partial}{\partial p_B} H_0\left(t, t^\Theta, q^A, p_A\right) = \\
&= \frac{\partial}{\partial p_B}\left(p_A \dot{q}^A + p_\Xi \dot{q}^\Xi - L\left(q^I, \dot{q}^B = f^B, \dot{q}^\Theta\right)\right) = \\
&= \delta_A^B \dot{q}^A + p_A \frac{\partial \dot{q}^A}{\partial p_B} + \frac{\partial p_\Xi}{\partial p_B}\dot{q}^\Xi + p_\Xi \frac{\partial \dot{q}^\Xi}{\partial p_B} - \frac{\partial \dot{q}^A}{\partial p_B}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^A} L\left(q^I, \dot{q}^B = f^B, \dot{q}^\Theta\right) \quad .
\end{aligned}$$

Lembre que $\dot{q}^\Xi$ não depende dos momentos, ou seja, $\frac{\partial \dot{q}^\Xi}{\partial p_B} = 0$; e que $p_\Theta = -H_\Theta\left(t, t^\Theta, q^A, p_A\right)$, p_A $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_0}{\partial p_B} &= \dot{q}^B - \frac{\partial H_\Xi}{\partial p_B}\dot{q}^\Xi \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \dot{q}^B = \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_B} + \frac{\partial H_\Xi}{\partial p_B}\dot{q}^\Xi \quad .
\end{aligned}$$

[20]É interessante notar que se fizéssemos uma análise no formalismo lagrangiano para sistemas singulares, veríamos que as coordenadas q^Θ não seriam variáveis dinâmicas, e exerceriam na teoria o mesmo papel de parâmetro que o tempo t. Isso não só justifica a notação empregada, como ainda enfatiza a semelhança estrutural das equações.

Para o que segue é interessante reescrevermos a expressão acima na forma de um diferencial total. Multiplicando esta equação por dt, usando a definição $q^{\Xi} = t^{\Xi}$ (de onde vemos que $\dot{q}^{\Xi}dt = dt^{\Xi}$) , e usando o fato de que formalmente os momentos são independentes entre si[21] chegamos a

$$dq^B = \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_B}dt + \frac{\partial \Phi_\Xi}{\partial p_B}dt^{\Xi} \quad ,$$

ou simplesmente

$$dq^B = \frac{\partial \Phi_\Xi}{\partial p_B}dt^{\Xi} \qquad , \ \Xi = 0, 1, ..., R.$$

É esta mesma propriedade dos momentos que nos permite escrever

$$dq^{\Theta} = \delta^{\Theta}_{\Xi}dt^{\Xi} = \frac{\partial p_\Xi}{\partial p_\Theta}dt^{\Xi} = \frac{\partial \Phi_\Xi}{\partial p_\Theta}dt^{\Xi} \quad .$$

Desta forma, podemos escrever numa notação única,

$$dq^I = \frac{\partial \Phi_\Xi}{\partial p_I}dt^{\Xi} \qquad , I = 0, 1, ..., N; \ \Xi = 0, 1, ..., R.$$

As equações diferenciais totais para os momentos também podem ser obtidas a partir do sistema de eqauções de Hamilton-Jacobi. Da definição de momento[22] segue que

$$dp_I = \frac{\partial}{\partial q^J}\frac{\partial S}{\partial q^I}dq^J \qquad , I, J = 0, ..., N,$$

Se observarmos que a derivada do sistema de equações diferenciais de Hamilton-Jacobi com relação às coordenadas e que sua consecutiva contração com dt^{Θ} [21, pag.61] nos dá

$$\frac{\partial \Phi_\Theta}{\partial q^I}dt^{\Theta} + \frac{\partial \Phi_\Theta}{\partial p_J}\frac{\partial p_J}{\partial q^I}dt^{\Theta} = \frac{\partial \Phi_\Theta}{\partial q^I}dt^{\Theta} + \frac{\partial \Phi_\Theta}{\partial p_J}\frac{\partial^2 S}{\partial q^I \partial q^J}dt^{\Theta} = 0 \qquad ,$$

$\Theta = 0, ..., R$; $I = 0, ..., N$, então, somando as duas expressões acima temos

$$\begin{aligned} dp_I + \frac{\partial \Phi_\Theta}{\partial q^J}dt^{\Theta} + \frac{\partial \Phi_\Theta}{\partial p_J}\frac{\partial^2 S}{\partial q^I \partial q^J}dt^{\Theta} &= \frac{\partial}{\partial q^J}\frac{\partial S}{\partial q^I}dq^J \\ dp_I + \frac{\partial \Phi_\Theta}{\partial q^J}dt^{\Theta} &= \frac{\partial}{\partial q^J}\frac{\partial S}{\partial q^I}\left(dq^J - \frac{\partial \Phi_\Theta}{\partial p_J}dt^{\Theta}\right) \qquad , \end{aligned}$$

Portanto, recuperando as diferenciais totais das coordenadas,

$$dq^I = \frac{\partial \Phi_\Xi}{\partial p_I}dt^{\Xi} \qquad , I = 0, 1, ..., N; \ \Xi = 0, 1, ..., R, \tag{5.10}$$

[21] Isso nos permite escrever $\frac{\partial H_\Xi}{\partial p_B} = \frac{\partial H_\Xi}{\partial p_B} + \frac{\partial p_\Xi}{\partial p_B} = \frac{\partial \Phi_\Xi}{\partial p_B}$.

[22] $p_I = \frac{\partial S}{\partial q^I}$.

temos

$$dp_I = -\frac{\partial \Phi_\Theta}{\partial q^J} dt^\Theta \qquad , \Theta = 0, ..., R; \; I = 0, ..., N. \tag{5.11}$$

Estas duas últimas expressões são o que chamamos de equações de movimento. Se considerarmos que a função S também pode ser diferenciada, temos

$$dS = \frac{\partial S}{\partial q^J} dq^J = p_J \frac{\partial \Phi_\Theta}{\partial p_J} dt^\Theta \qquad , J = 0, ..., N. \tag{5.12}$$

As expressões (5.10), (5.11) e (5.12) formam um sistema de equações diferenciais totais denominadas de equações características [21, pag.62] do sistema de equações diferenciais de Hamilton-Jacobi. A integrabilidade das diferenciais totais nos garante que é possível encontrar uma função $S\left(q^J\right)$ de maneira única, dadas as condições iniciais. No entanto, devemos de fato nos preocupar apenas com o sistema formado pelas expressões (5.10) e (5.11), pois, caso este sistema seja integrável, uma solução para (5.12) pode ser encontrada por meio de uma quadratura [21, pag.66]. Por isso adotaremos uma notação simplética, que nos permite tratar os diferenciais totais dos momentos e das coordenadas numa forma compacta.

Sejam $\xi^{\mathrm{i}} = \left(q^I, p_J\right)$, $I, J = 0, ..., N$; $\mathrm{i}= 0, ..., 2N+1$, de tal forma que $\xi^{\mathrm{i}} = q^{\mathrm{i}}$, $\mathrm{i}= 0, ..., N$; $\xi^{\mathrm{i}} = p_{\mathrm{i-N-1}}$, $\mathrm{i} = N+1, ..., 2N+1$ [19, pag.215; 32, pag. 37]. Com esta notação as equações de movimento podem ser escritas como:

$$d\xi^{\mathrm{i}} = \varpi^{\mathrm{ij}} \frac{\partial \Phi_\Theta}{\partial \xi^{\mathrm{j}}} dt^\Theta \qquad , \tag{5.13}$$

onde

$$\left(\varpi^{\mathrm{ij}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} .$$

A mesma expressão pode ser reescrita em termos de Parêntesis de Poisson,

$$d\xi^{\mathrm{i}} = \left\{\xi^{\mathrm{i}}, \Phi_\Theta\right\} dt^\Theta \qquad ,$$

onde

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial \xi^{\mathrm{i}}} \varpi^{\mathrm{ij}} \frac{\partial G}{\partial \xi^{\mathrm{j}}} \qquad .$$

Para verificarmos se o conjunto de equações (5.13) é integrável, devemos verficar se estas equações satisfazem certas condições, chamadas de condições de integrabilidade.

5.2.2 Condições de Integrabilidade

A teoria das equações diferenciais nos diz que a todo conjunto de equações diferenciais totais,

$$d\bar{x}^I = b^I_\Theta \left(t^\Xi, \bar{x}^J\right) dt^\Theta \quad ,$$

está associado um conjunto de equações diferenciais parcias [21, pag.24-31] da forma

$$\frac{\partial F}{\partial t^\Theta} + b^I_\Theta \left(t^\Xi, \bar{x}^J\right) \frac{\partial F}{\partial \bar{x}^I} = 0 \quad .$$

Nestas expressões t^Ξ são parâmetros e $\bar{x}^I$ as variáveis independentes ($\Xi = 0, 1, ..., m$; $I = 1, ..., n$). Podemos usar uma notação mais compacta, se usarmos um índice i correndo de 0 a $m + n + 1$, de forma que

$$\begin{aligned} x^{\mathrm{i}} &= t^{\mathrm{i}} \quad , \mathrm{i} = 0,...,m \quad ; \\ x^{\mathrm{i}} &= \bar{x}^{\mathrm{i}-m-1} \quad , \mathrm{i} = m+1,...,m+1+n \quad . \end{aligned}$$

Podemos então reescrever o conjunto de diferenciais totais acima na seguinte forma

$$dx^{\mathrm{i}} = b^{\mathrm{i}}_\Theta \left(x^{\mathrm{j}}\right) dt^\Theta \quad , \tag{5.14}$$

onde temos uma identidade para $\mathrm{i} = 0, ..., m$ ($b^{\mathrm{i}}_\Theta = \delta^{\mathrm{i}}_\Theta$). O conjunto de equações parciais associados também pode ser reescrito como

$$X_\Theta F = b^{\mathrm{i}}_\Theta \left(x^{\mathrm{j}}\right) \frac{\partial F}{\partial x^{\mathrm{i}}} = 0 \quad .$$

Não é difícil constatar que os operadores $X_\Theta \equiv b^{\mathrm{i}}_\Theta \left(x^{\mathrm{j}}\right) \frac{\partial}{\partial x^{\mathrm{i}}}$ são operadores lineares.

Como conseqüência da equação acima, para qualquer função F duas vezes diferenciável, temos satisfeitas as condições

$$\begin{aligned} X_\Xi X_\Theta F &= 0 \quad , \\ X_\Theta X_\Xi F &= 0 \quad , \end{aligned}$$

e portanto,

$$\left(X_\Xi X_\Theta - X_\Theta X_\Xi\right) F = \left[X_\Xi, X_\Theta\right] F = 0 \quad .$$

A partir desta situação dois casos são possíveis. O primeiro é aquele em que cada comutador é uma combinação linear das equações diferenciais parciais,

$$\left[X_\Xi, X_\Theta\right] F = C_{\Theta\Xi}{}^{\Sigma} X_\Sigma F \quad ,$$

e neste caso o sistema de equações $X_\Theta F = 0$ é dito *completo* [21, pag.33]. No segundo caso, uma nova equação independente das equações originais é obtida. Nesta situação podemos igualar esta equação a zero, definir um novo operador X (de modo que $XF = 0$) e adicioná-lo ao conjunto de operadores inicial. Podemos então calcular novamente os comutadores dos operadores do novo conjunto e repetir o processo acima até obtermos um conjunto de equações diferenciais completo.

A condição para que o sistema de equações diferenciais totais (5.14) seja integrável é que o conjunto de equações diferenciais parciais associado seja um conjunto completo[23].

O conjunto de equações (5.13) é um conjunto de equações diferenciais totais[24]. Desta forma podemos procurar qual é o conjunto de equações diferenciais parciais associado com estas diferenciais totais. Usando o procedimento acima exposto, vemos que para as equações de movimento, as equações parciais são

$$X_\Theta F = \varpi^{\mathrm{ij}} \frac{\partial \Phi_\Theta}{\partial \xi^{\mathrm{j}}} \frac{\partial F}{\partial \xi^{\mathrm{i}}} = \frac{\partial F}{\partial \xi^{\mathrm{i}}} \varpi^{\mathrm{ij}} \frac{\partial \Phi_\Theta}{\partial \xi^{\mathrm{j}}} = \{F, \Phi_\Theta\} \qquad .$$

As condições de integrabilidade exigem que tenhamos satisfeita a condição

$$[X_\Theta, X_\Xi]\, F = 0 \qquad .$$

[23] Se o conjunto de equações parciais for completo, então

$$\begin{aligned}
[X_\Xi, X_\Theta]F &= b^{\mathrm{j}}_\Xi \frac{\partial}{\partial x^{\mathrm{j}}}\left(b^{\mathrm{i}}_\Theta \frac{\partial F}{\partial x^{\mathrm{i}}}\right) - b^{\mathrm{j}}_\Theta \frac{\partial}{\partial x^{\mathrm{j}}}\left(b^{\mathrm{i}}_\Xi \frac{\partial F}{\partial x^{\mathrm{i}}}\right) = \\
&= b^{\mathrm{j}}_\Xi \frac{\partial b^{\mathrm{i}}_\Theta}{\partial x^{\mathrm{j}}} \frac{\partial F}{\partial x^{\mathrm{i}}} + b^{\mathrm{j}}_\Xi b^{\mathrm{i}}_\Theta \frac{\partial}{\partial x^{\mathrm{j}}} \frac{\partial F}{\partial x^{\mathrm{i}}} - b^{\mathrm{j}}_\Theta \frac{\partial b^{\mathrm{i}}_\Xi}{\partial x^{\mathrm{j}}} \frac{\partial F}{\partial x^{\mathrm{i}}} - b^{\mathrm{j}}_\Theta b^{\mathrm{i}}_\Xi \frac{\partial}{\partial x^{\mathrm{j}}} \frac{\partial F}{\partial x^{\mathrm{i}}} = \\
&= \left(b^{\mathrm{j}}_\Xi \frac{\partial b^{\mathrm{i}}_\Theta}{\partial x^{\mathrm{j}}} - b^{\mathrm{j}}_\Theta \frac{\partial b^{\mathrm{i}}_\Xi}{\partial x^{\mathrm{j}}}\right) \frac{\partial F}{\partial x^{\mathrm{i}}} = \\
&= \left(\frac{\partial b^{\mathrm{i}}_\Theta}{\partial t^\Xi} + b^J_\Xi \frac{\partial b^{\mathrm{i}}_\Theta}{\partial \bar{x}^J} - \frac{\partial b^{\mathrm{i}}_\Xi}{\partial t^\Theta} - b^J_\Theta \frac{\partial b^{\mathrm{i}}_\Xi}{\partial \bar{x}^J}\right) \frac{\partial F}{\partial x^{\mathrm{i}}} = \\
&= \left(\frac{\partial b^I_\Theta}{\partial t^\Xi} + b^J_\Xi \frac{\partial b^I_\Theta}{\partial \bar{x}^J} - \frac{\partial b^I_\Xi}{\partial t^\Theta} - b^J_\Theta \frac{\partial b^I_\Xi}{\partial \bar{x}^J}\right) \frac{\partial F}{\partial \bar{x}^I} = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{\partial b^I_\Theta}{\partial t^\Xi} + b^J_\Xi \frac{\partial b^I_\Theta}{\partial \bar{x}^J} - \frac{\partial b^I_\Xi}{\partial t^\Theta} - b^J_\Theta \frac{\partial b^I_\Xi}{\partial \bar{x}^J}\right) = 0
\end{aligned}$$

Esta última é a condição de integrabilidade do sistema (5.14) segundo [21, pag.30].

[24] O conjunto de equações (5.13) também pode ser dado pelo Parêntesis de Poisson, $d\xi^i = \{\xi^i, \Phi_\Theta\}\, dt^\Theta$. Na verdade, o diferencial total de qualquer função $f(t^\Xi, q^A, p_A)$ pode ser expresso em termos de Parêntesis de Poisson, $df = \{f, \Phi_\Theta\}\, dt^\Theta$.

Daí segue que

$$\begin{aligned}
[X_\Theta, X_\Xi] F &= (X_\Theta X_\Xi - X_\Xi X_\Theta) F = X_\Theta (X_\Xi F) - X_\Xi (X_\Theta F) = \\
&= X_\Theta (\{F, \Phi_\Xi\}) - X_\Xi (\{F, \Phi_\Theta\}) = \\
&= \{\{F, \Phi_\Xi\}, \Phi_\Theta\} - \{\{F, \Phi_\Theta\}, \Phi_\Xi\} = \\
&= \{\Phi_\Theta, \{\Phi_\Xi, F\}\} + \{\Phi_\Xi, \{F, \Phi_\Theta\}\} = \\
&= -\{F, \{\Phi_\Theta, \Phi_\Xi\}\} \quad .
\end{aligned}$$

Nesta última passagem fizemos uso da identidade de Jacobi[25]. Como as condições de integrabilidade devem ser satisfeitas independente da escolha da função F, então para satisfazermos tais condições devemos ter

$$\{\Phi_\Theta, \Phi_\Xi\} = 0 \quad ,$$

ou, dada a independência de t^Ξ,

$$d\Phi_\Theta = \{\Phi_\Theta, \Phi_\Xi\} \, dt^\Xi = 0 \quad .$$

Numa aplicação concreta o cálculo dos diferenciais acima, ou dos Parêntesis de Poisson podem ser não nulos. Neste caso uma nova relação do tipo $\Phi = 0$ pode ser estabelecida[26]. Esta expressão deve ser adicionada ao conjunto inicial Φ_Θ e as condições de integrabilidade novamente testadas. Este procedimento deve ser repetido até que um conjunto completo de equações diferenciais parciais seja obtido, o que nos garante a integrabilidade do sistema.

Neste ponto estamos prontos para estudar os vínculos das formulações ADM da Relatividade Geral e do Teleparalelismo.

Bibliografia

[1] C. Lanczos - The Variational Principles of Mechanics, University of Toronto Press (1952).

[2] R. G. Teixeira - Quantização de Sistemas Singulares via formalismo de Hamilton-Jacobi.- tese de doutoramento - IFT- T.006/00 (2000).

[3] Y. Güler - Il Nuovo Cimento B107, 1398 (1992).

[4] Y. Güler - Il Nuovo Cimento B107, 1143 (1992).

[5] B. M. Pimentel e R. G. Teixeira - Il Nuovo Cimento B111, 841 (1996).

[6] B. M. Pimentel e R. G. Teixeira - Il Nuovo Cimento B113, 805 (1998).

[7] B. M. Pimentel e R. G. Teixeira e J. L. Tomazelli - Ann. Phys. 267, 75 (1998).

[25] A identidade de Jacobi nos diz que $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$.

[26] Esta relação corresponde aos vínculos secundários na abordagem hamiltoniana de Dirac.

[8] C.Carathéodory - Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order-Part II, Holden Day, Inc (1967).

[9] K. Sundermeyer - Constrained Dynamics, Springer-Verlag (1982).

[10] B. Felsager - Geometry, Particles and Fields, Springer-Verlag (1998).

[11] R. G. Teixeira - Formalismo de Hamilton-Jacobi para Sistemas Singulares - dissertação de mestrado - IFT- (1996).

[12] J. W. Maluf - J. Math. Phys. 35, 335 (1994).

[13] C. A. P. Galvão - Introdução à Quantização de Teorias de Gauge, a ser publicado.

[14] I. D. Soares - Métodos Hamiltonianos para o Campo Gravitacional Fraco - tese de mestrado 02/72 - CBPF (1972).

[15] E. Merzbacher - Quantum Mechanics - 3^a ed., John Wiley & Sons, Inc.(1998).

[16] H. Goldstein - Classical Mechanics, Addison-Wesley Plubishing Company Inc (1964).

[17] L. D. Landau e E. M. Lifshitz - Mechanics, Pergamon Press (1960).

[18] L. D. Landau e E. M. Lifshitz - Teoria do Campo , Hemus Liv. Ed. Ltda. (sem data).

[19] J. V. José e E. J. Saletan - Classical Dynamics, Cambridge University Press (2000).

[20] W. Yourgrau e S. Mandelstam - Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory, Dover Publications, (1979).

[21] C.Carathéodory - Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order - Part I, Holden Day, Inc (1967).

[22] P. A. M. Dirac - Canadian Journal of Mathematics 2, 129 (1950).

[23] P. A. M. Dirac - Canadian Journal of Mathematics 3, 129 (1951).

[24] P. A. M. Dirac - Lectures on Quantum Mechanics - Belfer Graduate School of Science , Yeshiva University (1964).

[25] P. A. M. Dirac - Proc. Roy. Soc. A246, 333 (1958).

[26] P. A. M. Dirac - Phys, Rev. 114, 924 (1959).

[27] C. A. P. Galvão e B. M. Pimentel - Can. J. Phys., 66, 460 (1988).

[28] L. Faddeev e R. Jackiw - Phys. Rev. Lett. 60, 1692 (1988).

[29] R. Jackiw - e-print hep-th/9306075.

[30] J. Barcelos-Neto e C. Wotsaek - Mod. Phys. Lett. A7, 1737 (1992).

[31] J. Barcelos-Neto e C. Wotsaek - Int. J. Mod. Phys. A7, 4981 (1992).

[32] E. C. G. Sudarshan e N. Mukunda - Classical Dynamics: A Modern Perspective, John Wiley & Sons (1974).

Capítulo 6

Os Vínculos da Formulação ADM da Relatividade Geral

O estudo dos vínculos para o caso do campo gravitacional seguirá o procedimento descrito no capítulo anterior, que a grosso modo consiste em partir da função densidade Lagrangiana, determinar os momentos canonicamente conjugados às variáveis de campo, e a partir deles encontrar a função densidade Hamiltoniana e o correspondente sistema de equações diferenciais parciais de Hamilton-Jacobi. Uma vez estabelecido este conjunto de equações, pode-se obter as equações de movimento e testar as condições de integrabilidade. Devemos atentar para o fato de que agora tratamos com um sistema com infinitos graus de liberdade (campos), o que requer alguns cuidados. Como nosso ponto de partida é uma *densidade* Lagrangiana, obteremos uma densidade de momento, $\mathfrak{p}_\mathfrak{J}$,que agora é definida como a derivada funcional de L com relação à derivada temporal da variável de campo, $\dot{q}^I$,

$$\mathfrak{p}_\mathfrak{J} \equiv \frac{\delta \mathfrak{L}}{\delta \dot{\mathfrak{q}}^\mathfrak{J}} = \mathrm{o} \qquad .$$

Os Parêntesis de Poisson também são redefinidos,

$$\{F, G\} = \int d^3x \left[\frac{\delta F}{\delta q^I(x)} \frac{\delta G}{\delta \mathfrak{p}_\mathfrak{J}(\mathfrak{x})} - \frac{\delta G}{\delta q^I(x)} \frac{F}{\delta \mathfrak{p}_\mathfrak{J}(\mathfrak{x})}\right] = \int d^3x \frac{\partial F}{\partial \xi^\mathrm{i}(x)} \varpi^{\mathrm{ij}} \frac{\partial G}{\partial \xi^\mathrm{j}(x)} \qquad .$$

A análise dos vínculos da formulação ADM da Relatividade Geral tem como ponto de partida a densidade Lagrangiana deduzida anteriormente, e que reescrevemos abaixo:

$$L = -\frac{1}{2\chi} N \sqrt{\gamma} \left(\overset{(3)}{R} + K^{ki} K_{ik} - K^2\right) \qquad .$$

A partir desta Lagrangiana[1] podemos encontrar os momentos canonicamente

[1] Na expressão para a Lagrangiana,

$$\overset{(3)}{R} = \gamma^{ij} \overset{(3)}{R}_{ij} = \gamma^{ij} \left(\partial_m \overset{(3)}{\Gamma}{}^m_{ij} - \partial_i \overset{(3)}{\Gamma}{}^m_{mj} + \overset{(3)}{\Gamma}{}^k_{ij} \overset{(3)}{\Gamma}{}^m_{mk} - \overset{(3)}{\Gamma}{}^k_{mj} \overset{(3)}{\Gamma}{}^m_{ik}\right) \qquad ,$$

conjugados aos campos γ_{ij}, N, N^i. Para isto devemos notar que $\overset{(3)}{R}$ não possui derivadas temporais de nenhum objeto, e que a curvatura extrínseca só possui derivadas temporais da métrica induzida. Como conseqüência os momentos canonicamente conjugados a N e N^i serão nulos,

$$\begin{aligned}\pi_i &\equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{N}^i} = 0 \quad , \\ \pi_4 &\equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{N}} = 0 \quad ,\end{aligned}$$

o que implica na existência de quatro vínculos,

$$\begin{aligned}\Phi_i &= \int d^3x \pi_i (x) = 0 \quad , \\ \Phi_4 &= \int d^3x \pi_4 (x) = 0 \quad ,\end{aligned}$$

ou, de uma forma mais compacta,

$$\Phi_{\bar{\mu}} = \int d^3x \pi_{\bar{\mu}} = 0 \quad , \tag{6.1}$$

com $\bar{\mu} = 1, 2, 3, 4$.

O momento conjugado à métrica induzida, π^{ij}, não é nulo, e, como veremos, nos permite expressar $\dot{\gamma}_{ij}$ em função dos momentos e dos campos fundamentais:

$$\begin{aligned}\pi^{ij} &\equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\gamma}_{ij}} = \frac{-1}{2\chi} N\sqrt{\gamma} \left(\frac{\delta K^{mn}}{\delta \dot{\gamma}_{ij}} K_{mn} + K^{mn} \frac{\delta K_{mn}}{\delta \dot{\gamma}_{ij}} - 2\frac{\delta K}{\delta \dot{\gamma}_{ij}} K \right) = \\ &= \frac{-1}{2\chi} \sqrt{\gamma} \left(-K^{ij} + \gamma^{ij} K \right) \quad .\end{aligned}$$

Observe que, com relação à variedade Σ_t, π^{ij} é uma densidade tensorial de peso $W = -1$, simétrica pela permutação de índices[2]. Definindo

$$\pi \equiv \gamma_{ij} \pi^{ij} = \frac{-1}{2\chi} \sqrt{\gamma} 2K \quad ,$$

$$\overset{(3)}{\Gamma}{}^m_{ij} = \left\{ {m \atop ij} \right\} = \frac{1}{2} \gamma^{mk} \left(\partial_i \gamma_{jk} + \partial_j \gamma_{ki} - \partial_k \gamma_{ij} \right) \quad ,$$

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left(-\dot{\gamma}_{ij} + \overset{(3)}{\nabla}_i N_j + \overset{(3)}{\nabla}_j N_i \right) \quad ,$$

$$K = \gamma^{ij} K_{ij} \quad .$$

[2]Este resultado segue da definição de π^{ij}.

temos

$$K^{ij} = \frac{1}{\left(\frac{-1}{2\chi}\right)\sqrt{\gamma}}\left(-\pi^{ij} + \frac{1}{2}\pi\gamma^{ij}\right) \quad ,$$

de onde segue que

$$\dot{\gamma}_{ij} = \frac{2N}{\left(\frac{-1}{2\chi}\right)\sqrt{\gamma}}\left(\pi_{ij} - \frac{1}{2}\pi\gamma_{ij}\right) + \overset{(3)}{\nabla}_i N_j + \overset{(3)}{\nabla}_j N_i \quad .$$

Neste ponto estamos prontos para calcular a densidade Hamiltoniana, que pode ser obtida pela prescrição "$H = p_i\dot{q}^i - L$":

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_c &= \dot{N}\pi_4 + \dot{N}^i\pi_i + \dot{\gamma}_{ij}\pi^{ij} - L = \\
&= \dot{\gamma}_{ij}\pi^{ij} - \left(\frac{-1}{2\chi}\right) N\sqrt{\gamma}\left(\overset{(3)}{R} + K^{ij}K_{ij} - K^2\right) = \\
&= N\left[\frac{1}{\left(\frac{-1}{2\chi}\right)\sqrt{\gamma}}\left(\pi_{ij}\pi^{ij} - \frac{\pi^2}{2}\right) - \left(\frac{-1}{2\chi}\right)\sqrt{\gamma}\overset{(3)}{R}\right] + \\
&\quad + N^j\left(-2\overset{(3)}{\nabla}_i \pi^i{}_j\right) + \partial_i\left(2\pi^{ij}N_j\right) \quad .
\end{aligned}$$

Se definirmos

$$\mathcal{H}_\perp \equiv \frac{1}{\left(\frac{-1}{2\chi}\right)\sqrt{\gamma}}\left(\pi_{ij}\pi^{ij} - \frac{\pi^2}{2}\right) - \left(\frac{-1}{2\chi}\right)\sqrt{\gamma}\overset{(3)}{R} \quad ,$$

$$\mathcal{H}_j \equiv -2\overset{(3)}{\nabla}_i \pi^i{}_j \quad ,$$

temos

$$\mathcal{H}_c = N\mathcal{H}_\perp + N^j\mathcal{H}_j + \partial_i\left(2\pi^{ij}N_j\right) \quad .$$

A Hamiltoniana canônica, H_0, nada mais é do que a integral volumétrica da densidade Hamiltoniana:

$$\begin{aligned}
H_0 &= \int d^3x\mathcal{H}_c = \int d^3x\left[N\mathcal{H}_\perp + N^j\mathcal{H}_j + \partial_i\left(2\pi^{ij}N_j\right)\right] = \\
&= \int d^3x N^{\bar{\mu}}\mathcal{H}_{\bar{\mu}} \quad ,
\end{aligned}$$

onde desprezamos a contribuição de superfície e definimos $N^4 \equiv N$ e $\mathcal{H}_4 \equiv \mathcal{H}_\perp$. A desconsideração deste termo de superfície faz com que a análise se restrinja a espaços fechados.

Sabemos que esta Hamiltoniana compõe a equação de Hamilton-Jacobi,

$$p_0 + H_0 = 0 \quad ,$$

que pode ser reescrita se definirmos uma densidade de momento associado a t, $\mathcal{P}_0$[3],

$$\Phi_0 = \int d^3x \, (\mathcal{P}_0 + \mathcal{H}_c) = 0 \quad .$$

Esta expressão junto com (7.1),

$$\Phi_\Theta = \int d^3x \pi_\Theta = 0 \qquad , \Theta = 0, ..., 4,$$

formam o conjunto de equações diferenciais parciais de Hamilton-Jacobi da formulação ADM da Relatividade Geral.

As equações de movimento serão

$$d\xi^i = \left\{\xi^i, \Phi_0\right\} dt + \left\{\xi^i, \Phi_{\bar{\mu}}\right\} dN^{\bar{\mu}} \quad ,$$

e devemos então nos preocupar com a integrabilidade deste sistema de equações diferenciais totais[4].

Neste problema as condições de integrabilidade são dadas por

$$d\Phi_\Theta = \{\Phi_\Theta, \Phi_\Xi\} \, dt^\Xi = 0 \quad , \tag{6.2}$$

[3] Esta densidade de momento é tal que $p_0 = \int d^3x \mathcal{P}_0$.

[4] Explicitamente para cada uma das variáveis canônicas temos, num primeiro momento,

$$\begin{aligned}
d\gamma_{ij} &= \frac{\delta\Phi_0}{\delta\pi^{ij}}dt + \frac{\delta\Phi_k}{\delta\pi^{ij}}dN^k + \frac{\delta\Phi_4}{\delta\pi^{ij}}dN \quad , \\
d\pi^{ij} &= -\frac{\delta\Phi_0}{\delta\gamma_{ij}}dt - \frac{\delta\Phi_k}{\delta\gamma_{ij}}dN^k - \frac{\delta\Phi_4}{\delta\gamma_{ij}}dN \quad , \\
dN^i &= \frac{\delta\Phi_0}{\delta\pi_i}dt + \frac{\delta\Phi_k}{\delta\pi_i}dN^k + \frac{\delta\Phi_4}{\delta\pi_i}dN \quad , \\
d\pi_i &= -\frac{\delta\Phi_0}{\delta N^i}dt - \frac{\delta\Phi_k}{\delta N^i}dN^k - \frac{\delta\Phi_4}{\delta N^i}dN \quad , \\
dN &= \frac{\delta\Phi_0}{\delta\pi_4}dt + \frac{\delta\Phi_k}{\delta\pi_4}dN^k + \frac{\delta\Phi_4}{\delta\pi_4}dN \quad , \\
d\pi_4 &= -\frac{\delta\Phi_0}{\delta N}dt - \frac{\delta\Phi_k}{\delta N}dN^k - \frac{\delta\Phi_4}{\delta N}dN \quad , \\
dt &= \frac{\delta\Phi_0}{\delta\mathcal{P}_t}dt + \frac{\delta\Phi_k}{\delta\mathcal{P}_t}dN^k + \frac{\delta\Phi_4}{\delta\mathcal{P}_t}dN \quad , \\
d\mathcal{P}_0 &= -\frac{\delta\Phi_0}{\delta t}dt - \frac{\delta\Phi_k}{\delta t}dN^k - \frac{\delta\Phi_4}{\delta t}dN \quad .
\end{aligned}$$

onde $\Theta, \Xi = 0, 1, ..., 4$; $dt^0 = dt$, $dt^i \equiv dN^i$, $dt^4 = dN^4 \equiv dN$. Consideremos inicialmente o caso $\Theta = \bar{\mu}$,

$$d\Phi_{\bar{\mu}} = \{\Phi_{\bar{\mu}}, \Phi_0\}\, dt + \{\Phi_{\bar{\mu}}, \Phi_{\bar{\nu}}\}\, dN^{\bar{\nu}} = 0 \qquad ,$$

e calculemos os Parêntesis de Poisson[5] isoladamente. Para tanto, observemos que, para qualquer função F, é válido o resultado abaixo:

$$\begin{aligned} \{F, \Phi_{\bar{\nu}}\} &= \left\{F, \int d^3y \pi_{\bar{\nu}}(y)\right\} = \int\int d^3y d^3x \frac{\partial F}{\partial \xi^{\mathrm{i}}(x)} \varpi^{\mathrm{ij}} \frac{\partial \pi_{\bar{\nu}}(y)}{\partial \xi^{\mathrm{j}}(x)} = \\ &= \int\int d^3x d^3y \frac{\delta F}{\delta \xi^{\mathrm{i}}(x)} \varpi^{\mathrm{ij}} \delta_{\mathrm{j}\bar{\nu}} \delta(y - x) = \\ &= \int d^3x \frac{\delta F}{\delta N^{\bar{\nu}}(x)} \qquad . \end{aligned}$$

Desta forma é imediato que

$$\{\Phi_{\bar{\mu}}, \Phi_{\bar{\nu}}\} = \int\int d^3z d^3x \frac{\delta \pi_{\bar{\mu}}(z)}{\delta N^{\bar{\nu}}(x)} = 0 \qquad . \tag{6.3}$$

Por fim devemos calcular $\{\Phi_{\bar{\mu}}, \Phi_0\}$:

$$\{\Phi_{\bar{\mu}}, \Phi_0\} = -\int\int d^3z d^3x \frac{\delta(\mathcal{P}_0(z) + \mathcal{H}_c(z))}{\delta N^{\bar{\mu}}(x)} \qquad .$$

Recordando que $\mathcal{P}_{\prime}$ é a densidade de momento associada a t[6], e que $\mathcal{H}_c = N\mathcal{H}_\perp + N^j\mathcal{H}_j = N^{\bar{\mu}}\mathcal{H}_{\bar{\mu}}$, onde $\mathcal{H}_\perp$ e $\mathcal{H}_j$ não dependem de N, temos

$$\begin{aligned} \{\Phi_{\bar{\mu}}, \Phi_0\} &= -\int\int d^3z d^3x \frac{\delta\left[N^{\bar{\mu}}(z)\mathcal{H}_{\bar{\mu}}(z)\right]}{\delta N^{\bar{\mu}}(x)} = \\ &= -\int\int d^3z d^3x \mathcal{H}_{\bar{\mu}}(z)\, \delta(z - x) \end{aligned}$$

$$\{\Phi_{\bar{\mu}}, \Phi_0\} = -\int d^3y \mathcal{H}_{\bar{\mu}}(y) \qquad . \tag{6.4}$$

O segundo membro desta expressão não é uma combinação dos vínculos, e portanto, se desejamos que o sistema de diferenciais totais seja integrável, então devemos considerar quatro novos vínculos[7],

$$\Phi_{4+\bar{\mu}} \equiv \int d^3y \mathcal{H}_{\bar{\mu}}(y) = 0 \qquad ,$$

[5]Neste caso teremos q^I como variáveis de campo, $q^I = \{t,\ N^i,\ N,\ \gamma_{ij}\}$ e $\mathfrak{p}_J$ como as densidades de momento conjugadas, $\mathfrak{p}_J = \{\mathcal{P}_0,\ \pi_i,\ \pi_4,\ \pi^{ij}\}$. Na notação simplética $\xi^{\mathrm{i}} = \{t,\ N^i,\ N,\ \gamma_{ij}; \mathcal{P}_0,\ \pi_i,\ \pi_4,\ \pi^{ij}\}$.

[6]Portanto, $\mathcal{P}_0$ independe de $N^{\bar{\nu}}$.

[7]Devemos, na verdade, considerar $\mathcal{H}_{\bar{\mu}}(y) = 0$. Este resultado implica que a Hamiltoniana canônica seja nula, o que é condizente com o fato de que toda teoria invariante por reparametrização possui Hamiltoniana nula [5, pag. 21].

e adicioná-los ao conjunto anterior. Assim, as condições de integrabilidade passam a ser

$$d\Phi_{\Theta}=\{\Phi_{\Theta},\Phi_{\Xi}\}\,dt^{\Xi}=0 \quad , \tag{6.5}$$

onde $\Theta,\Xi=0,1,...,8$; $dt^{0}=dt$, $dt^{\bar{\mu}}=dN^{\bar{\mu}}$, $dt^{4+\bar{\mu}}=d\varpi^{\bar{\mu}}$, onde não é possível associar coordenadas específicas aos parâmetros $\varpi^{\bar{\mu}}$, uma vez que os vínculos $\Phi_{4+\bar{\mu}}$ não são da forma "$\Phi_{\Theta}=p_{\Theta}-H_{\Theta}=0$" [8].

Deste modo, se reconsiderarmos $\Theta=\bar{\mu}$, teremos

$$d\Phi_{\bar{\mu}}=\{\Phi_{\bar{\mu}},\Phi_{0}\}\,dt+\{\Phi_{\bar{\mu}},\Phi_{\bar{\nu}}\}\,dN^{\bar{\nu}}+\{\Phi_{\bar{\mu}},\Phi_{4+\bar{\nu}}\}\,d\varpi^{\bar{\nu}}=0 \quad ,$$

onde

$$\begin{aligned}\{\Phi_{\bar{\mu}},\Phi_{\bar{\nu}}\} &= \{\Phi_{4},\Phi_{i}\}=0 \quad ,\\ \{\Phi_{\bar{\mu}},\Phi_{0}\} &= -\Phi_{4+\bar{\mu}}=0 \quad .\end{aligned}$$

Devemos, portanto, calcular $\{\Phi_{\bar{\mu}},\Phi_{4+\bar{\nu}}\}$. Podemos constatar que este Parêntesis se anula,

$$\{\Phi_{\bar{\mu}},\Phi_{4+\bar{\nu}}\}=-\int\int d^{3}zd^{3}x\frac{\delta\mathcal{H}_{\bar{\nu}}(z)}{\delta N^{\bar{\mu}}(x)}=0 \quad , \tag{6.6}$$

uma vez que $\mathcal{H}_{\bar{\nu}}$ só depende de γ_{ij} e π^{ij}.

Analisemos o caso em que $\Theta=0$ na expressão (7.9):

$$d\Phi_{0}=\{\Phi_{0},\Phi_{0}\}\,dt+\{\Phi_{0},\Phi_{\bar{\nu}}\}\,dN^{\bar{\nu}}+\{\Phi_{0},\Phi_{4+\bar{\nu}}\}\,d\varpi^{\bar{\nu}}=0 \quad .$$

Já sabemos que

$$\{\Phi_{0},\Phi_{\bar{\nu}}\}=\Phi_{4+\bar{\nu}}=0 \quad ,$$

e podemos assim passar ao cálculo de $\{\Phi_{0},\Phi_{4+\bar{\nu}}\}$:

$$\begin{aligned}\{\Phi_{0},\Phi_{4+\bar{\nu}}\} &= \int\int\int d^{3}xd^{3}yd^{3}z\frac{\delta\left(\mathcal{P}_{0}(z)+\mathcal{H}_{c}(z)\right)}{\delta\xi^{\mathrm{i}}(x)}\varpi^{\mathrm{ij}}\frac{\delta\mathcal{H}_{\bar{\nu}}(y)}{\delta\xi^{\mathrm{j}}(x)}=\\ &= \int\int\int d^{3}xd^{3}yd^{3}z\left[-\delta(z-x)\frac{\delta\mathcal{H}_{\bar{\nu}}(y)}{\delta t(x)}+\frac{\delta\mathcal{H}_{c}(z)}{\delta\xi^{\mathrm{i}}(x)}\varpi^{\mathrm{ij}}\frac{\delta\mathcal{H}_{\bar{\nu}}(y)}{\delta\xi^{\mathrm{j}}(x)}\right] \quad .\end{aligned}$$

Recordando que $\mathcal{H}_{\perp}$ possui dependência apenas em γ_{ij} e π^{ij}, segue

$$\{\Phi_{0},\Phi_{4+\bar{\nu}}\}=\int\int\int d^{3}xd^{3}yd^{3}z\left[\frac{\delta\left(N^{\bar{\mu}}(z)\mathcal{H}_{\bar{\mu}}(z)\right)}{\delta\gamma_{ij}(x)}\frac{\delta\mathcal{H}_{\bar{\nu}}(y)}{\delta\pi^{ij}(x)}-\frac{\delta\mathcal{H}_{\bar{\nu}}(y)}{\delta\gamma_{ij}(x)}\frac{\delta\left(N^{\bar{\mu}}(z)\mathcal{H}_{\bar{\mu}}(z)\right)}{\delta\pi^{ij}(x)}\right]$$

[8] Devemos atentar que $\varpi^{\bar{\mu}}=\varpi^{\bar{\mu}}\left(\gamma_{ij},N,N^{i}\right)$

$$\{\Phi_0, \Phi_{4+\bar{\nu}}\} = \int\int d^3y d^3z N^{\bar{\mu}}(z) \{\mathcal{H}_{\bar{\mu}}(z), \mathcal{H}_{\bar{\nu}}(y)\}_{\gamma,\pi} \quad , \tag{6.7}$$

onde

$$\{F(z), G(y)\}_{\gamma,\pi} \equiv \int d^3x \left[\frac{\delta F(z)}{\delta\gamma_{ij}(x)}\frac{\delta G(y)}{\delta\pi^{ij}(x)} - \frac{\delta G(y)}{\delta\gamma_{ij}(x)}\frac{\delta F(z)}{\delta\pi^{ij}(x)}\right] .$$

Chamaremos a expressão $\{F(z), G(y)\}_{\gamma,\pi}$ de Parêntesis de Poisson em γ_{ij} e π^{ij}, ou simplesmente $PP_{\gamma,\pi}$, de F e G. Antes de apresentarmos o resultado de $\{\Phi_0, \Phi_{4+\bar{\nu}}\}$ prosseguiremos com os cálculos dos outros Parêntesis de Poisson restantes.

Consideremos agora $\{\Phi_0, \Phi_0\}$:

$$\{\Phi_0, \Phi_0\} = \int\int\int d^3x d^3y d^3z \frac{\delta(\mathcal{P}_0(z) + \mathcal{H}_c(z))}{\delta\partial\xi^{\mathrm{i}}(x)} \varpi^{\mathrm{ij}} \frac{\delta(\mathcal{P}_0(y) + \mathcal{H}_c(y))}{\delta\xi^{\mathrm{j}}(x)} \quad ,$$

$$\{\Phi_0, \Phi_0\} = \int\int\int d^3x d^3y d^3z \frac{\delta\mathcal{H}_c(z)}{\delta\xi^{\mathrm{i}}(x)} \varpi^{\mathrm{ij}} \frac{\delta\mathcal{H}_c(y)}{\delta\xi^{\mathrm{j}}(x)} \quad .$$

Observe que a dependência de $\mathcal{H}_c$ nos momentos é restrita a π^{ij}. Desta forma,

$$\{\Phi_0, \Phi_0\} = \int\int\int d^3x d^3y d^3z N^{\bar{\mu}}(z) N^{\bar{\nu}}(y) \{\mathcal{H}_{\bar{\mu}}(z), \mathcal{H}_{\bar{\nu}}(y)\}_{\gamma,\pi} \tag{6.8}$$

Para $\Theta = 4 + \bar{\mu}$ na expressão (7.9) teremos

$$d\Phi_{4+\bar{\mu}} = \{\Phi_{4+\bar{\mu}}, \Phi_0\} dt + \{\Phi_{4+\bar{\mu}}, \Phi_{\bar{\nu}}\} dN^{\bar{\nu}} + \{\Phi_{4+\bar{\mu}}, \Phi_{4+\bar{\nu}}\} d\varpi^{\bar{\nu}} = 0 \quad .$$

Em cálculos anteriores vimos que

$$\{\Phi_{4+\bar{\mu}}, \Phi_{\bar{\nu}}\} = -\{\Phi_{\bar{\nu}}, \Phi_{4+\bar{\mu}}\} = 0 \quad ,$$

$$\{\Phi_{4+\bar{\mu}}, \Phi_0\} = \int\int d^3y d^3z N^{\bar{\nu}}(y) \{\mathcal{H}_{\bar{\mu}}(z), \mathcal{H}_{\bar{\nu}}(y)\}_{\gamma,\pi} \quad .$$

Devemos calcular ainda $\{\Phi_{4+\bar{\mu}}, \Phi_{4+\bar{\nu}}\}$:

$$\begin{aligned}\{\Phi_{4+\bar{\mu}}, \Phi_{4+\bar{\nu}}\} &= \int\int\int d^3x d^3y d^3z \frac{\delta\mathcal{H}_{\bar{\mu}}(z)}{\delta\xi^{\mathrm{i}}(x)} \varpi^{\mathrm{ij}} \frac{\delta\mathcal{H}_{\bar{\nu}}(y)}{\delta\xi^{\mathrm{j}}(x)} = \\ &= \int\int d^3y d^3z \{\mathcal{H}_{\bar{\mu}}(z), \mathcal{H}_{\bar{\nu}}(y)\}_{\gamma,\pi} \quad .\end{aligned} \tag{6.9}$$

Dos resultados obtidos em (6.7), (6.8) e (6.9) resta claro que a álgebra dos vínculos está intimamente relacionada ao cálculo de $\{\mathcal{H}_{\bar{\mu}}(z), \mathcal{H}_{\bar{\nu}}(y)\}_{\gamma,\pi}$, ou explicitamente, de $\{\mathcal{H}_\perp(z), \mathcal{H}_\perp(y)\}_{\gamma,\pi}$, $\{\mathcal{H}_\perp(z), \mathcal{H}_k(y)\}_{\gamma,\pi}$ e $\{\mathcal{H}_m(z), \mathcal{H}_k(y)\}_{\gamma,\pi}$. É conhecido da literatura [1; 2; 3; 4; 5] que o cálculo desses $PP_{\gamma,\pi}$ fecham uma álgebra[9],

$$\begin{aligned}\{\mathcal{H}_\perp(z), \mathcal{H}_\perp(y)\}_{\gamma,\pi} &= \left[\gamma^{ij}(z)\mathcal{H}_j(z) + \gamma^{il}(y)\mathcal{H}_j(y)\right]\partial_i^{(y)}\delta(z-y) \quad , \\ \{\mathcal{H}_\perp(z), \mathcal{H}_k(y)\}_{\gamma,\pi} &= \mathcal{H}_\perp(y)\partial_k^{(y)}\delta(z-y) \quad , \\ \{\mathcal{H}_m(z), \mathcal{H}_k(y)\}_{\gamma,\pi} &= \mathcal{H}_m(y)\partial_k^{(y)}\delta(z-y) + \mathcal{H}_k(z)\partial_m^{(y)}\delta(z-y) \quad ,\end{aligned}$$

[9]Considere a seguir $\partial_i^{(y)} \equiv \frac{\partial}{\partial y^i}$.

e, como conseqüência deste resultado, temos

$$\{\Phi_0, \Phi_{4+\bar{\nu}}\} = \{\Phi_0, \Phi_0\} = \{\Phi_{4+\bar{\mu}}, \Phi_{4+\bar{\nu}}\} = 0 \quad .$$

Portanto, nenhum novo vínculo surge e o sistema de equações diferenciais totais (equações de movimento), que se reescrevem como

$$d\xi^i = \{\xi^i, \Phi_0\}\, dt + \{\xi^i, \Phi_{\bar{\mu}}\}\, dN^{\bar{\mu}} + \{\xi^i, \Phi_{4+\bar{\mu}}\}\, d\varpi^{\bar{\mu}} \quad ,$$

ou explicitamente

$$\begin{aligned} d\gamma_{ij} &= \frac{\delta\Phi_0}{\delta\pi^{ij}}dt + \frac{\delta\Phi_k}{\delta\pi^{ij}}dN^k + \frac{\delta\Phi_4}{\delta\pi^{ij}}dN + \frac{\delta\Phi_{4+\bar{\mu}}}{\delta\pi^{ij}}d\varpi^{\bar{\mu}} \quad , \\ d\pi^{ij} &= -\frac{\delta\Phi_0}{\delta\gamma_{ij}}dt - \frac{\delta\Phi_k}{\delta\gamma_{ij}}dN^k - \frac{\delta\Phi_4}{\delta\gamma_{ij}}dN - \frac{\delta\Phi_{4+\bar{\mu}}}{\delta\gamma_{ij}}d\varpi^{\bar{\mu}} \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dN^i &= \delta^i_k dN^k = dN^i \quad , \\ d\pi_i &= -\mathcal{H}_i dt = 0 \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dN &= dN \quad , \\ d\pi_4 &= -\mathcal{H}_\perp dt = 0 \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dt &= dt \quad , \\ d\mathcal{P}_0 &= 0 \quad , \end{aligned}$$

é integrável.

É interessante observar nas equações acima que os diferenciais totais das funções lapso e shift e de seus momentos conjugados são idênticas em forma às equações para o tempo e seu momento conjugado. Desta forma somos levados a concluir que N e N^i possuem o mesmo status que o tempo, ou seja, elas atuam como parâmetros na teoria. Este é um resultado bastante natural, uma vez que essas funções dependem da escolha da folheação do espaço-tempo, que é uma escolha arbitrária. Como conseqüência, o espaço de fase pode ser reduzido pela omissão destas variáveis [1, pag.240].

Apenas por completeza, no formalismo hamiltoniano de Dirac os mesmos vínculos são encontrados, e a mesma álgebra é satisfeita para a formulação ADM da Relatividade Geral [1; 3; 5].

Bibliografia

[1] K. Sundermeyer - Constrained Dynamics, Springer-Verlag (1982).

[2] I. D. Soares - Métodos Hamiltonianos para o Campo Gravitacional Fraco - tese de mestrado 02/72 - CBPF (1972).

[3] C. A. P. Galvão - Introdução à Quantização de Teorias de Gauge (a ser publicado).

[4] B. S. DeWitt - Phys. Rev. 160, 1113 (1967)

[5] A. Hanson, T. Regge, C. Teitelboim - Constrained Hamiltonian Systems, Accademia Nazionale dei Lincei (1976).

Capítulo 7

Os Vínculos da Formulação ADM do Teleparalelismo

Procuraremos conduzir a análise dos vínculos da formulação ADM do Teleparalelismo da mesma forma como fizemos para a Relatividade Geral. Para tanto, desde o início devemos lembrar que, por ser construída em termos de tetradas, o Teleparalelismo possui dezesseis quantidades como campos fundamentais, seis a mais do que na RG. Como sabemos, estes seis graus de liberdade estão relacionados a transformações de Lorentz no espaço tangente. Para estabelecer uma equivalência total com a RG, em algum momento devemos impor algumas condições sobre os campos, para "eliminar" estes graus de liberdade excedentes. Esta imposição é conhecida como fixação de "gauge" (gauge fixing).

A fixação de gauge no estudo de vínculos (via formalismo de Dirac) do Teleparalelismo já foi estudada na literatura por Maluf [1], cujo trabalho foi duramente criticado por Blagojević [2], que considerou a proposta "desencaminhadora".

Com o risco de perder informações sobre a estrutura de vínculos teleparalela [2], mas com a vantagem de simplificar os cálculos [1; 3], faremos a fixação de gauge no nível da Lagrangiana. A escolha feita a seguir é conhecida na literatura com o nome de time gauge de Schwinger [4], e se baseia no fato de que

$$e^{0}_{(k)} = 0 \Rightarrow n^{(k)} = 0 \quad .$$

Esta imposição faz com que as componentes no espaço tangente do vetor normal à híper-superfície sejam dadas por

$$n^{a} = \delta^{a}_{(0)} \quad ,$$

de onde vemos que a coordenada tipo tempo do espaço tangente é proporcional à coordenada tipo tempo em cada ponto do espaço-tempo[1]. Como conseqüência desta

[1]

$$dx^{a} = e^{a}_{\mu}dx^{\mu} = \left(\delta^{a}_{(0)}N + b^{a}_{j}N^{j}\right)dx^{0} + b^{a}_{i}dx^{i},$$

escolha temos ainda $b^k_{(0)} = 0$, que segue da ortogonalidade de n^a e b^k_a.

Com esta escolha a densidade Lagrangiana passa a ser expressa por

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{2}\frac{\kappa b}{N}\left(\gamma^{ik} l^{(m)}{}_i l_{(m)k} + b^{(m)i} b^k_{(n)} l^{(n)}{}_i l_{(m)k} - 2 b^{(m)k} b^i_{(n)} l^{(n)}{}_i l_{(m)k}\right) + \\ &\quad + 4\kappa b \bar{\Sigma}^{a(0)k} l_{ak} + \kappa N b \bar{\Sigma}^{abc} \bar{T}_{abc} \quad , \end{aligned}$$

onde $\kappa \equiv \left(\frac{1}{2\chi}\right)$[2,3].

A partir desta expressão podemos obter os momentos canonicamente conjugados aos campos $b_{(i)j}$, N, N^i. Para compactar a notação definiremos, como no caso da Relatividade Geral, $N^4 \equiv N$ e usaremos um índice grego barrado para indicar os índices variando de 1 a 4 ($\bar{\mu} = 1, 2, 3, 4$). Para efetuar o cálculo dos momentos podemos observar que $\bar{T}^{abc}$, assim como $\bar{\Sigma}^{abc}$, o qual é definido a partir do primeiro, não possui derivadas temporais de nenhum objeto, enquanto que $l^a{}_i$ possui derivadas temporais apenas de $b_{(i)j}$. Desta forma, os momentos canonicamente conjugados às funções lapso e shift serão nulos:

$$\pi_{\bar{\mu}} \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{N}^{\bar{\mu}}} = 0 \quad ,$$

o que implica na existência de quatro vínculos,

$$\Phi_{\bar{\mu}} \equiv \int d^3x \pi_{\bar{\mu}} = 0 \quad . \tag{7.1}$$

Os momentos conjugados a $b_{(i)j}$ não serão nulos, e ,analogamente à RG, se caracterizarão por serem densidades de peso $W = -1$:

$$\Pi^{(r)s} \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{b}_{(r)s}} = -\frac{\kappa b}{N}\left[l^{(r)s} + b^{(r)i} b^s_{(n)} l^{(n)}_i - 2 l b^{(r)s}\right] \quad , \tag{7.2}$$

onde $l \equiv b^i_{(n)} l^{(n)}_i$. Um resultado importante para a análise dos vínculos segue da contração de $\Pi^{(r)s}$com $b^k_{(r)}$:

$$\Pi^{ks} \equiv b^k_a \Pi^{as} = b^k_{(r)} \Pi^{(r)s} = -\frac{\kappa b}{N}\left(l^{ks} + l^{sk} - 2 l \gamma^{ks}\right) \quad ,$$

$$dx^{(0)} = \left(\delta^{(0)}_{(0)} N + b^{(0)}_j N^j\right) dx^0 + b^{(0)}_i dx^i = N dx^0 \, .$$

[2]Nesta expressão para L temos

$$\begin{aligned} l^a{}_i &= \partial_0 b^a_i - \partial_i (n^a N) - b^a_j \partial_i N^j - N^j \partial_j b^a_i \quad , \\ \bar{T}^{abc} &= b^{bi} b^{cj} \left(\partial_i b^a_j - \partial_j b^a_i\right) \quad , \\ \bar{\Sigma}^{abc} &\equiv \frac{1}{4}\left(\bar{T}^{abc} + \bar{T}^{bac} - \bar{T}^{cab}\right) + \frac{1}{2}\left(\eta^{ac} \bar{T}^b - \eta^{ab} \bar{T}^c\right) \quad . \end{aligned}$$

[3]Para uma comparação direta com os resultados da referência [3] considere $b^k_{(n)} \equiv e^k_{(n)}$, $b \equiv e$, $\kappa \equiv -k$, $\gamma^{ik} \equiv \bar{g}^{ik}$, e tome $e^{(0)k} = 0$ (conseqüência da fixação de gauge) na expressão (3) de [3].

onde usamos $l^{ks} = b^k_{(r)} l^{(r)s}$. Desta expressão podemos constatar que

$$\Pi^{ks} = \Pi^{sk} \quad ,$$

de onde é imediato que

$$\Pi^{[ks]} = 0 \quad ,$$

o que estabelece mais três novos vínculos[4]:

$$\Phi_{[ks]} \equiv \int d^3x \Pi^{[ks]} = 0 \quad . \tag{7.3}$$

Definindo

$$\Pi \equiv \gamma_{sk} \Pi^{ks} = 4 \frac{\kappa b}{N} l \quad ,$$

onde $l \equiv b_{s(m)} l^{(m)s} = \gamma_{sk} l^{ks}$, obtemos

$$l^{(ks)} = \frac{1}{2}\left(l^{ks} + l^{sk}\right) = -\frac{1}{2}\frac{N}{\kappa b}\left(\Pi^{ks} - \frac{1}{2}\Pi\gamma^{ks}\right) \quad .$$

Com estes resultados estamos prontos para calcular a densidade Hamiltoniana com o uso da prescrição "$H = p_I \dot{q}^I - L$", e após uma extensa álgebra podemos constatar que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_c &= N\left[-\frac{1}{4}\frac{1}{\kappa b}\left(\Pi^{ik}\Pi_{ik} - \frac{1}{2}\Pi^2\right) - \kappa b \Sigma^{(i)(j)(k)} T_{(i)(j)(k)} + 2\kappa \partial_k \left(b T^k\right)\right] + \\
&\quad + N^j \left[-b_{(l)j}\partial_k \Pi^{(l)k} - \Pi^{(l)k} T_{(l)kj}\right] + \\
&\quad + \partial_k \left(\Pi^{(l)k} b_{(l)j} N^j - \kappa b 2 T^k N\right) \quad .
\end{aligned}$$

Definindo

$$\begin{aligned}
C &\equiv -\frac{1}{4}\frac{1}{\kappa b}\left(\Pi^{ik}\Pi_{ik} - \frac{1}{2}\Pi^2\right) - \kappa b \Sigma^{(i)(j)(k)} T_{(i)(j)(k)} + 2\kappa \partial_k \left(b T^k\right) \quad , \\
C_j &\equiv -b_{(l)j}\partial_k \Pi^{(l)k} - \Pi^{(l)k} T_{(l)kj} \quad ;
\end{aligned}$$

temos

$$\mathcal{H}_c = N C + N^j C_j + \partial_k \left(\Pi^{(l)k} b_{(l)j} N^j - \kappa b 2 T^k N\right) \quad . \tag{7.4}$$

A Hamiltoniana canônica, H_0, nada mais é do que a integral volumétrica da densidade Hamiltoniana:

$$\begin{aligned}
H_0 &\doteq \int d^3x \mathcal{H}_c = \int d^3x \left[N C + N^j C_j + \partial_k \left(\Pi^{(l)k} b_{(l)j} N^j - \kappa b 2 T^k N\right)\right] = \\
&= \int d^3x N^{\bar{\mu}} C_{\bar{\mu}} \quad ,
\end{aligned}$$

[4] Na expressão (7.3) os índices de $\Phi_{[ks]}$ não possuem conotação covariante; são apenas para rotular o vínculo.

onde desprezamos a contribuição de superfície e definimos $C_4 \equiv C$. Como no caso da Relatividade Geral, a desconsideração do termo de superfície restringe a análise a espaços fechados.

Esta Hamiltoniana calculada acima constitui a equação de Hamilton-Jacobi, que pode ser reescrita em termos de uma densidade de momento associado a t, $\mathcal{P}_0$ [5],

$$\Phi_0 = \int d^3x \, (\mathcal{P}_0 + \mathcal{H}_c) = 0 \quad .$$

Esta expressão junto com (7.1), e (7.3),

$$\Phi_\Theta = \int d^3x \pi_\Theta = 0 \qquad , \Theta = 0, ..., 7,$$

formam o conjunto de equações diferenciais parciais de Hamilton-Jacobi da formulação ADM do Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral, onde Φ_5, Φ_6 e Φ_7 são $\Phi_{[12]}$, $\Phi_{[13]}$ e $\Phi_{[23]}$, respectivamente.

As equações de movimento serão

$$d\xi^i = \left\{\xi^i, \Phi_0\right\} dt + \left\{\xi^i, \Phi_{\bar{\mu}}\right\} dN^{\bar{\mu}} + \left\{\xi^i, \Phi_{[ks]}\right\} d\varpi^{[ks]} \qquad ,$$

e devemos então nos preocupar com a integrabilidade deste sistema de equações diferenciais totais. Lembramos que não é possível associar uma cooordenada específica aos parâmetros $\varpi^{[ks]}$, uma vez que estes vínculos não são da forma "$\Phi_\Theta = p_\Theta - H_\Theta = 0$".

As condições de integrabilidade são dadas pela expressão

$$d\Phi_\Theta = \left\{\Phi_\Theta, \Phi_\Xi\right\} dt^\Xi = 0 \qquad , \qquad (7.5)$$

onde $\Theta, \Xi = 0, 1, ..., 7$; $dt^0 = dt$, $dt^{\bar{\mu}} \equiv dN^{\bar{\mu}}$, $dt^5 \equiv d\varpi^{[12]}$, $dt^6 \equiv d\varpi^{[13]}$, $dt^7 \equiv d\varpi^{[23]}$. Para o caso $\Theta = \bar{\mu}$, temos

$$d\Phi_{\bar{\mu}} = \left\{\Phi_{\bar{\mu}}, \Phi_0\right\} dt + \left\{\Phi_{\bar{\mu}}, \Phi_{\bar{\nu}}\right\} dN^{\bar{\nu}} + \left\{\Phi_{\bar{\mu}}, \Phi_{[ks]}\right\} d\varpi^{[ks]} = 0 \qquad ,$$

onde devemos calcular os Parêntesis de Poisson[6] isoladamente, dada a independência das variáveis. Como no caso da RG, para qualquer função F, é válido o resultado abaixo:

$$\left\{F, \Phi_{\bar{\nu}}\right\} = \int d^3x \frac{\delta F}{\delta N^{\bar{\nu}}(x)} \qquad .$$

[5]Esta densidade de momento é tal que $p_0 = \int d^3x \mathcal{P}_0$.

[6]Neste caso teremos $q^I = \left\{t, \; N^{\bar{\mu}}, \; b_{(i)j}\right\}$ e $p_J = \left\{\mathcal{P}_0, \; \pi_{\bar{\mu}}, \; \Pi^{(i)j}\right\}$. Na notação simplética $\xi^i = \left\{t, N^{\bar{\mu}} \, , \; b_{(i)j}; \mathcal{P}_0, \; \pi_{\bar{\mu}}, \; \Pi^{(i)j}\right\}$.

Como conseqüência podemos constatar que

$$\{\Phi_{\bar{\mu}}, \Phi_{\bar{\nu}}\} = \int \int d^3z d^3x \frac{\delta \pi_{\bar{\mu}}(z)}{\delta N^{\bar{\nu}}(x)} = 0 \quad , \tag{7.6}$$

$$\left\{\Phi_{\bar{\mu}}, \Phi_{[ks]}\right\} = -\int \int d^3z d^3x \frac{\delta \Pi_{[ks]}(z)}{\delta N^{\bar{\mu}}(x)} = 0 \tag{7.7}$$

Por outro lado, o Parêntesis de Poisson $\{\Phi_{\bar{\mu}}, \Phi_0\}$ é não nulo e implicará na existência de quatro novos vínculos. Recordando que $\mathcal{H}_c = \mathcal{N}^{\bar{\mu}} \mathcal{C}_{\bar{\mu}}$, onde $C_{\bar{\mu}}$, assim como $\mathcal{P}_0$, não dependem de $N^{\bar{\mu}}$, temos

$$\begin{aligned}
\{\Phi_{\bar{\mu}}, \Phi_0\} &= -\int \int d^3z d^3x \frac{\delta\left(\mathcal{P}_0(z) + \mathcal{H}_c(z)\right)}{\delta N^{\bar{\mu}}(x)} \\
&= -\int \int d^3z d^3x \frac{\delta\left[N^{\bar{\mu}}(z) C_{\bar{\mu}}(z)\right]}{\delta N^{\bar{\mu}}(x)} = \\
&= -\int \int d^3z d^3x C_{\bar{\mu}}(z) \delta(z-x)
\end{aligned}$$

$$\{\Phi_{\bar{\mu}}, \Phi_0\} = -\int d^3z C_{\bar{\mu}}(z) \quad . \tag{7.8}$$

Para garantir a integrabilidade do sistema devemos considerar quatro novos vínculos,

$$\Phi_{7+\bar{\mu}} \equiv \int d^3y C_{\bar{\mu}}(y) = 0 \quad ,$$

os quais devem ser adicionados ao conjunto anterior, para que as novas condições de integrabilidade,

$$d\Phi_\Theta = \{\Phi_\Theta, \Phi_\Xi\} dt^\Xi = 0 \quad , \tag{7.9}$$

onde $\Theta, \Xi = 0, 1, ..., 11$; $dt^0 = dt$, $dt^{\bar{\mu}} = dN^{\bar{\mu}}$, $dt^5 \equiv d\varpi^{[12]}$, $dt^6 \equiv d\varpi^{[13]}$, $dt^7 \equiv d\varpi^{[23]}$, $dt^{7+\bar{\mu}} = d\varpi^{7+\bar{\mu}}$, possam ser testadas[7].

Reconsiderando $\Theta = \bar{\mu}$, teremos

$$d\Phi_{\bar{\mu}} = \{\Phi_{\bar{\mu}}, \Phi_0\} dt + \{\Phi_{\bar{\mu}}, \Phi_{\bar{\nu}}\} dN^{\bar{\nu}} + \left\{\Phi_{\bar{\mu}}, \Phi_{[ks]}\right\} d\varpi^{[ks]} + \{\Phi_{\bar{\mu}}, \Phi_{7+\bar{\nu}}\} d\varpi^{7+\bar{\nu}} = 0 \quad ,$$

onde

$$\begin{aligned}
\{\Phi_{\bar{\mu}}, \Phi_{\bar{\nu}}\} &= 0 \quad , \\
\left\{\Phi_{\bar{\mu}}, \Phi_{[ks]}\right\} &= 0 \quad , \\
\{\Phi_{\bar{\mu}}, \Phi_0\} &= -\Phi_{7+\bar{\mu}} = 0 \quad .
\end{aligned}$$

[7]Novamente temos parâmetros $d\varpi^{7+\bar{\mu}}$ que não podem ser associados a coordenadas específicas.

O cálculo de $\{\Phi_{\bar{\mu}}, \Phi_{7+\bar{\nu}}\}$nos mostra que

$$\{\Phi_{\bar{\mu}}, \Phi_{7+\bar{\nu}}\} = -\int\int d^3z d^3x \frac{\delta C_{\bar{\nu}}(z)}{\delta N^{\bar{\mu}}(x)} = 0 \quad , \tag{7.10}$$

uma vez que $C_{\bar{\nu}}$ só depende de $b_{(i)j}$ e $\Pi^{(i)j}$.

Neste momento podemos considerar o caso $\Theta = 0$ na expressão (7.9):

$$d\Phi_0 = \{\Phi_0, \Phi_0\}\, dt + \{\Phi_0, \Phi_{\bar{\nu}}\}\, dN^{\bar{\nu}} + \left\{\Phi_0, \Phi_{[ks]}\right\} d\varpi^{[ks]} + \{\Phi_0, \Phi_{7+\bar{\nu}}\}\, d\varpi^{7+\bar{\nu}} = 0 \quad .$$

O resultado de $\{\Phi_0, \Phi_{\bar{\nu}}\}$ já nos é conhecido da definição de $\Phi_{7+\bar{\nu}}$:

$$\{\Phi_0, \Phi_{\bar{\nu}}\} = \Phi_{7+\bar{\nu}} = 0 \quad .$$

Podemos então calcular $\{\Phi_0, \Phi_{7+\bar{\nu}}\}$:

$$\begin{aligned} \{\Phi_0, \Phi_{7+\bar{\nu}}\} &= \int\int\int d^3x d^3y d^3z \frac{\delta\left(\mathcal{P}_0(z) + \mathcal{H}_c(z)\right)}{\delta\xi^{\mathrm{i}}(x)} \varpi^{\mathrm{ij}} \frac{\delta C_{\bar{\nu}}(y)}{\delta\xi^{\mathrm{j}}(x)} = \\ &= \int\int\int d^3x d^3y d^3z \left[-\delta(z-x) \frac{\delta C_{\bar{\nu}}(y)}{\delta t(x)} + \frac{\delta\mathcal{H}_c(z)}{\delta\xi^{\mathrm{i}}(x)} \varpi^{\mathrm{ij}} \frac{\delta C_{\bar{\nu}}(y)}{\delta\xi^{\mathrm{j}}(x)}\right] \quad . \end{aligned}$$

Como $C_{\bar{\nu}}$ possui dependência apenas em $b_{(i)j}$ e $\Pi^{(i)j}$, segue

$$\{\Phi_0, \Phi_{7+\bar{\nu}}\} = \int\int\int d^3x d^3y d^3z \left[\frac{\delta\left(N^{\bar{\mu}}(z)\, C_{\bar{\mu}}(z)\right)}{\delta b_{(i)j}(x)} \frac{\delta C_{\bar{\nu}}(y)}{\delta\Pi^{(i)j}(x)} - \frac{\delta C_{\bar{\nu}}(y)}{\delta b_{(i)j}(x)} \frac{\delta\left(N^{\bar{\mu}}(z)\, C_{\bar{\mu}}(z)\right)}{\delta\Pi^{(i)j}(x)}\right]$$

$$\{\Phi_0, \Phi_{7+\bar{\nu}}\} = \int\int d^3y d^3z N^{\bar{\mu}}(z) \left\{C_{\bar{\mu}}(z), C_{\bar{\nu}}(y)\right\}_{b,\Pi} \quad , \tag{7.11}$$

onde

$$\{F(z), G(y)\}_{b,\Pi} \equiv \int d^3x \left[\frac{\delta F(z)}{\delta b_{(i)j}(x)} \frac{\delta G(y)}{\delta\Pi^{(i)j}(x)} - \frac{\delta G(y)}{\delta b_{(i)j}(x)} \frac{\delta F(z)}{\delta\Pi^{(i)j}(x)}\right] \quad .$$

Em analogia ao caso da RG chamaremos a expressão $\{F(z), G(y)\}_{b,\Pi}$ de Parêntesis de Poisson em $b_{(i)j}$ e $\Pi^{(i)j}$, ou simplesmente $PP_{b,\Pi}$, de $F(z)$ e $G(y)$. Para $\Theta = 0$ ainda devemos encontrar os valores de $\left\{\Phi_0, \Phi_{[ks]}\right\}$ e $\{\Phi_0, \Phi_0\}$. O cálculo do primeiro nos leva a

$$\begin{aligned} \left\{\Phi_0, \Phi_{[ks]}\right\} &= \int\int\int d^3x d^3y d^3z \frac{\delta\left(\mathcal{P}_0(z) + \mathcal{H}_c(z)\right)}{\delta\xi^{\mathrm{i}}(x)} \varpi^{\mathrm{ij}} \frac{\delta\Pi^{[ks]}(y)}{\delta\xi^{\mathrm{j}}(x)} = \\ &= \int\int d^3y d^3z N^{\bar{\mu}}(z) \left\{C_{\bar{\mu}}(z), \Pi^{[ks]}(y)\right\}_{b,\Pi} \quad , \end{aligned} \tag{7.12}$$

enquanto que para o segundo obtemos:

$$\begin{aligned}
\{\Phi_0, \Phi_0\} &= \int\int\int d^3x d^3y d^3z \frac{\delta\left(\mathcal{P}_0(z) + \mathcal{H}_c(z)\right)}{\delta\partial\xi^{\mathrm{i}}(x)} \varpi^{\mathrm{ij}} \frac{\delta\left(\mathcal{P}_0(y) + \mathcal{H}_c(y)\right)}{\delta\xi^{\mathrm{j}}(x)} = \\
&= \int\int\int d^3x d^3y d^3z \frac{\delta\mathcal{H}_c(z)}{\delta\xi^{\mathrm{i}}(x)} \varpi^{\mathrm{ij}} \frac{\delta\mathcal{H}_c(y)}{\delta\xi^{\mathrm{j}}(x)} = \\
&= \int\int\int d^3x d^3y d^3z N^{\bar{\mu}}(z) N^{\bar{\nu}}(y) \left\{C_{\bar{\mu}}(z), C_{\bar{\nu}}(y)\right\}_{b,\Pi} \quad . \qquad (7.13)
\end{aligned}$$

Para $\Theta = 7 + \bar{\mu}$ na expressão (7.9) teremos

$$\begin{aligned}
d\Phi_{7+\bar{\mu}} &= \left\{\Phi_{7+\bar{\mu}}, \Phi_0\right\} dt + \left\{\Phi_{7+\bar{\mu}}, \Phi_{\bar{\nu}}\right\} dN^{\bar{\nu}} + \left\{\Phi_{7+\bar{\mu}}, \Phi_{[ks]}\right\} d\varpi^{[ks]} + \\
&\quad + \left\{\Phi_{7+\bar{\mu}}, \Phi_{7+\bar{\nu}}\right\} d\varpi^{7+\bar{\nu}} \\
&= 0 \quad ,
\end{aligned}$$

onde

$$\left\{\Phi_{7+\bar{\mu}}, \Phi_{\bar{\nu}}\right\} = -\left\{\Phi_{\bar{\nu}}, \Phi_{7+\bar{\mu}}\right\} = 0 \quad ,$$

$$\left\{\Phi_{7+\bar{\mu}}, \Phi_0\right\} = \int\int d^3y d^3z N^{\bar{\nu}}(y) \left\{C_{\bar{\mu}}(z), C_{\bar{\nu}}(y)\right\}_{b,\Pi} \quad .$$

$$\begin{aligned}
\left\{\Phi_{7+\bar{\mu}}, \Phi_{[ks]}\right\} &= \int\int\int d^3x d^3y d^3z \frac{\delta C_{\bar{\mu}}(z)}{\delta\xi^{\mathrm{i}}(x)} \varpi^{\mathrm{ij}} \frac{\delta\Pi^{[ks]}(y)}{\delta\xi^{\mathrm{j}}(x)} = \\
&= \int\int d^3y d^3z \left\{C_{\bar{\mu}}(z), \Pi^{[ks]}(y)\right\}_{b,\Pi} \quad , \qquad (7.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\{\Phi_{7+\bar{\mu}}, \Phi_{7+\bar{\nu}}\right\} &= \int\int\int d^3x d^3y d^3z \frac{\delta C_{\bar{\mu}}(z)}{\delta\xi^{\mathrm{i}}(x)} \varpi^{\mathrm{ij}} \frac{\delta C_{\bar{\nu}}(y)}{\delta\xi^{\mathrm{j}}(x)} = \\
&= \int\int d^3y d^3z \left\{C_{\bar{\mu}}(z), C_{\bar{\nu}}(y)\right\}_{b,\Pi} \quad . \qquad (7.15)
\end{aligned}$$

Finalmente, para $\Theta = 5, 6, 7$ vemos que

$$\begin{aligned}
d\Phi_{[mr]} &= \left\{\Phi_{[mr]}, \Phi_0\right\} dt + \left\{\Phi_{[mr]}, \Phi_{\bar{\nu}}\right\} dN^{\bar{\nu}} + \left\{\Phi_{[mr]}, \Phi_{[ks]}\right\} d\varpi^{[ks]} + \\
&\quad + \left\{\Phi_{[mr]}, \Phi_{7+\bar{\nu}}\right\} d\varpi^{7+\bar{\nu}} \\
&= 0 \quad ,
\end{aligned}$$

sendo

$$\left\{\Phi_{[mr]}, \Phi_{\bar{\nu}}\right\} = 0 \quad ,$$

$$\left\{\Phi_{[mr]}, \Phi_0\right\} = \int\int d^3y d^3z N^{\bar{\mu}}(z)\left\{\Pi^{[mr]}(y), C_{\bar{\mu}}(z)\right\}_{b,\Pi} \quad .$$

$$\left\{\Phi_{[mr]}, \Phi_{[ks]}\right\} = \int\int d^3y d^3z \left\{\Pi^{[mr]}(y), \Pi^{[ks]}(z)\right\}_{b,\Pi} \quad , \tag{7.16}$$

$$\left\{\Phi_{[mr]}, \Phi_{7+\bar{\nu}}\right\} = \int\int d^3y d^3z \left\{\Pi^{[ks]}(z), C_{\bar{\mu}}(y)\right\}_{b,\Pi} \quad .$$

Podemos ver, a partir das equações (7.11), (7.12), (7.13), (7.14), (7.15) e (7.16), que a álgebra dos vínculos está determinada pelos seguintes $PP_{b,\Pi}$: $\{C(z), C(y)\}_{b,\Pi}$, $\{C(z), C_i(y)\}_{b,\Pi}$, $\{C_i(z), C_j(y)\}_{b,\Pi}$, $\left\{C(z), \Pi^{[ks]}(y)\right\}_{b,\Pi}$, $\left\{C_i(z), \Pi^{[ks]}(y)\right\}_{b,\Pi}$, $\left\{\Pi^{[mr]}(y), \Pi^{[ks]}(z)\right\}_{b,\Pi}$. Os resultados dos cálculos destes $PP_{b,\Pi}$ podem ser encontrados na referência [1], onde é possível constatar que eles fecham uma álgebra[8]:

$$\begin{aligned}\{C(z), C(y)\}_{b,\Pi} &= \Big[-\gamma^{ik}(z)\, C_i(z) - \partial_i^{(z)} 2\Pi^{[ik]}(z) + \\ &\quad +2\Pi_{[ij]}\left(-\frac{1}{2}T^{kij} + T^{ijk}\right)\Big]\, \partial_k^{(z)}\delta(z-y) - (z \leftrightarrow y) \quad ,\end{aligned}$$

$$\{C(z), C_i(y)\}_{b,\Pi} = C(y)\,\partial_i^{(y)}\delta(z-y) \quad ,$$

$$\{C_i(z), C_j(y)\}_{b,\Pi} = -C_j(z)\,\partial_i^{(z)}\delta(z-y) + C_i(y)\,\partial_j^{(y)}\delta(z-y) \quad ,$$

$$\left\{C(z), \Pi^{[ks]}(y)\right\}_{b,\Pi} = \left\{C_i(z), \Pi^{[ks]}(y)\right\}_{b,\Pi} = 0 \quad ,$$

$$\left\{\Pi^{[mr]}(y), \Pi^{[ks]}(z)\right\}_{b,\Pi} = \frac{1}{2}\left[\Pi^{[rs]}\gamma^{mk} + \Pi^{[sm]}\gamma^{rk} + \Pi^{[kr]}\gamma^{ms} + \Pi^{[mk]}\gamma^{rs}\right]\delta(z-y) \quad .$$

---

[8] Para uma comparação direta com a referência [1], observe que

$$\begin{aligned}\left\{C_{\bar{\nu}}(z), \Pi^{[ks]}(y)\right\}_{b,\Pi} &= \left\{C_{\bar{\nu}}(z), b^k_{(m)}(y)\, b^s_{(n)}(y)\, \Pi^{[(m)(n)]}(y)\right\}_{b,\Pi} = \\ &= \Pi^{[(m)(n)]}(y)\left\{C_{\bar{\nu}}(z), b^k_{(m)}(y)\, b^s_{(n)}(y)\right\}_{b,\Pi} + \\ &\quad + b^k_{(m)}(y)\, b^s_{(n)}(y)\left\{C_{\bar{\nu}}(z), \Pi^{[(m)(n)]}(y)\right\}_{b,\Pi} \\ &= b^k_{(m)}(y)\, b^s_{(n)}(y)\left\{C_{\bar{\nu}}(z), \Pi^{[(m)(n)]}(y)\right\}_{b,\Pi} \quad .\end{aligned}$$

Um procedimento parecido pode ser usado para mostrar que o cálculo de $\left\{\Pi^{[mr]}(y), \Pi^{[ks]}(z)\right\}_{b,\Pi}$ é equivalente ao cálculo de $\left\{\Pi^{[(m)(r)]}(y), \Pi^{[(k)(s)]}(z)\right\}_{b,\Pi}$, com a diferença de que aqui definimos $\Pi^{[mr]} \equiv \frac{1}{2}(\Pi^{mr} - \Pi^{rm})$ enquanto na referência [1] é utilizada a seguinte definição: $\Pi^{[mr]} \equiv (\Pi^{mr} - \Pi^{rm})$.

Como conseqüência destes resultados, temos

$$\begin{aligned}\left\{\Phi_{[mr]},\Phi_{[ks]}\right\} &= \left\{\Phi_{7+\bar{\mu}},\Phi_{[ks]}\right\} = \left\{\Phi_{7+\bar{\mu}},\Phi_{7+\bar{\nu}}\right\} = \\ &= \left\{\Phi_0,\Phi_{7+\bar{\nu}}\right\} = \left\{\Phi_0,\Phi_{[ks]}\right\} = \\ &= \left\{\Phi_0,\Phi_0\right\} = 0 \qquad ,\end{aligned}$$

e portanto nenhum novo vínculo surge e o sistema de equações diferenciais totais,

$$d\xi^i = \left\{\xi^i,\Phi_0\right\}dt + \left\{\xi^i,\Phi_{\bar{\nu}}\right\}dN^{\bar{\nu}} + \left\{\xi^i,\Phi_{[ks]}\right\}d\varpi^{[ks]} + \left\{\xi^i,\Phi_{7+\bar{\nu}}\right\}d\varpi^{7+\bar{\nu}} = 0 \qquad ,$$

é integrável. Abrindo mão da notação simplética vemos que as equações de movimento são

$$\begin{aligned}db_{(i)j} &= \frac{\delta\Phi_0}{\delta\Pi^{(i)j}}dt + \frac{\delta\Phi_4}{\delta\Pi^{(i)j}}dN + \frac{\delta\Phi_k}{\delta\Pi^{(i)j}}dN^k + \frac{\delta\Phi_{[ks]}}{\delta\Pi^{(i)j}}d\varpi^{[ks]} + \frac{\delta\Phi_{7+\bar{\nu}}}{\delta\Pi^{(i)j}}d\varpi^{7+\bar{\nu}} \qquad , \\ d\Pi^{(i)j} &= -\frac{\delta\Phi_0}{\delta b_{(i)j}}dt - \frac{\delta\Phi_4}{\delta b_{(i)j}}dN^4 - \frac{\delta\Phi_k}{\delta b_{(i)j}}dN^k - \frac{\delta\Phi_{[ks]}}{\delta b_{(i)j}}d\varpi^{[ks]} - \frac{\delta\Phi_{7+\bar{\nu}}}{\delta b_{(i)j}}d\varpi^{7+\bar{\nu}} \qquad ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dN &= dN \qquad , \\ d\pi_4 &= -Cdt = 0 \qquad ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dN^i &= dN^i \qquad , \\ d\pi_i &= -C_i dt = 0 \qquad ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dt &= dt \qquad , \\ d\mathcal{P}_0 &= 0 \qquad .\end{aligned}$$

Assim como ocorre na RG, as funções lapso e shift atuam como parâmetros da teoria, sendo isso uma conseqüência da arbitrariedade da escolha da folheação. É curioso notar que a equivalência entre a formulação ADM da RG e do Teleparalelismo só ocorre se não tomarmos $\Pi^{[rs]}$ como um vínculo, mas sim como uma condição forte como a escolha de um gauge. Se isso fosse feito de início, teríamos imposto, junto com a fixação de gauge, seis condições sobre as variáveis de campo, de forma que, como na RG, apenas dez quantidades seriam independentes. Neste caso a álgebra dos vínculos seria idêntica a de ADM da Relatividade Geral.

Comparando a análise via formalismo de Hamilton-Jacobi com aquela construída com abordagem hamiltoniana de Dirac [1], constatamos que os mesmos vínculos são encontrados, e a mesma álgebra é satisfeita para a formulação ADM da Teleparalelismo.

Bibliografia

[1] J. W. Maluf - J. Math. Phys. 35, 335 (1994).

[2] M. Blagojević, I. A. Nikolić - Phys. Rev. D62 024021 (2000).

[3] B. M. Pimentel, P. J. Pompéia, J. F. da Rocha-Neto, R. G. Teixeira - preprint IFT-P.079/2002 - a ser publicado pela GRG volume 35 (Maio 2003).

[4] J. Schwinger - Phys. Rev. 130, 1253 (1963).

Capítulo 8

Considerações Finais

A análise dos vínculos via Hamilton-Jacobi mostra que as equações de campo da formulação ADM da Relatividade Geral constituem um sistema de equações integráveis. Do ponto de vista desta abordagem, isso significa que o sistema de equações diferenciais parciais de Hamilton-Jacobi possuem solução, pois as equações de campo nada mais são do que as equações caraterísiticas desse sistema de equações parciais. Porém, se tivermos em mente o formalismo de Dirac, a integrabilidade do sistema nos mostra que não existem, segundo a classificação de Dirac, vínculos de segunda classe. Este é um resultado importante para uma eventual quantização da RG via Princípio de Correspondência, pois dele fica claro que devemos usar a álgebra estabelecida pelos Parêntesis de Poisson, não sendo necessária a introdução de Parêntesis de Dirac [1].

Ainda com relação à abordagem de Dirac podemos ver que a equivalência entre a estrutura de vínculos obtidas por este formalismo e aquela obtida neste trabalho ratifica a equivalência estabelecida entre as condições de integrabilidade de Hamilton-Jacobi e as condições de consistência de Dirac [1].

A validade desta análise, porém, é restrita a espaços fechados.

Os mesmos comentários são válidos para a formulação ADM do Teleparalelismo se fizermos a escolha do time gauge de Schwinger no nível da função Lagrangiana. Porém, devemos salientar que a fixação de gauge, como estabelecida neste trabalho, não é uma exigência do formalismo de Hamilton-Jacobi, o qual sempre nos permite trabalhar com um conjunto incompleto de vínculos da teoria em estudo.

A fixação de gauge na formulação ADM teleparalela pode ser vantajosa do ponto de vista da simplificação dos cálculos, mas, como já foi apontado por Blagojević [2], esta escolha pode esconder algumas informações. De fato, uma rápida análise sem a fixação de gauge nos mostra que os momentos canonicamente conjugados a $b_{(0)i}$ são não nulos [3] e ainda estabelecem três vínculos, pois estes momentos são da forma "$p_i = H_i(q)$". Com a escolha do "time gauge" de Schwinger, estes momentos nem sequer são considerados na análise, e, como conseqüência, todas as informações relativas aos correspondentes vínculos são perdidas. A análise dos vínculos nesta formulação ADM teleparalela sem a fixação de gauge é um dos temas que se apresentam como perspectivas para trabalhos futuros. Outras possibilidades de estudo que ainda se apresentam são o estudo via Hamilton-Jacobi dos vínculos da Relatividade Geral construída em termos de tetradas [4], e a análise dos vínculos para teorias de gravitação com Lagrangianas de ordem superior [5].

Bibliografia

[1] R. G. Teixeira - Quantização de Sistemas Singulares via formalismo de Hamilton-Jacobi.- tese de doutoramento, IFT-T.006/00 (2000).

[2] M. Blagojević e I. A. Nikolić - Phys. Rev. D62 024021 (2000).

[3] B. M. Pimentel, P. J. Pompéia, J. F. da Rocha-Neto e R. G. Teixeira - preprint IFT-P.079/2002 - a ser publicado pela GRG volume 35 (Maio 2003).

[4] S. Deser, C. J. Isham - Phys. Rev. D 14 2505 (1976).

[5] I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov e I. L. Shapiro, Effective Action in Quantum Gravity, IOP Pub. Ltd. (1992).

Apêndice A

O Problema de Cauchy

Consideremos uma equação diferencial de segunda ordem da forma:

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t) \quad .$$

onde F é uma função das quantidades dentro do parênteses. Por $\dot{x}$ entenda-se primeira derivada de x com relação à variável t (que no contexto será chamada de tempo), e por $\ddot{x}$ entenda-se a segunda derivada temporal. Se conhecidos os valores de x e $\dot{x}$ num instante fixo t_0, ou seja, de posse das informações:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \quad , \\ \dot{x}(t_0) &= v_0 \quad , \end{aligned}$$

o que pode ser dito sobre a evolução temporal de x? Este é conhecido como o *Problema de Cauchy* [1].

De posse de tais informações podemos saber os valores das funções x e $\dot{x}$ num instante infinitesimalmente posterior, $t_0 + \delta t$, usando expansão de Taylor e tomando termos de primeira ordem:

$$x(t_0 + \delta t) = x(t_0) + \dot{x}(t_0)\,\delta t + O\left(\delta t^2\right) \quad ;$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t_0 + \delta t) &= \dot{x}(t_0) + \ddot{x}(t_0)\,\delta t + O\left(\delta t^2\right) = \\ &= \dot{x}(t_0) + F\left(x(t_0), \dot{x}(t_0), t_0\right)\delta t + O\left(\delta t^2\right) \quad . \end{aligned}$$

O mesmo procedimento pode ser usado para deteminar os valores de x e $\dot{x}$ no instante $t_0 + 2\delta t$, e novamente para o instante $t_0 + 3\delta t$, e assim sucessivamente, de forma a se construir a evolução temporal de x para qualquer instante t. Não é difícil mostrar que após n iterações temos:

$$\begin{aligned} x(t_0 + n\delta t) &= x(t_0) + \dot{x}(t_0)(n\delta t) + \\ &+ (\delta t)^2 \sum_{k=0}^{n-1} F\left(x(t_0 + k\delta t), \dot{x}(t_0 + k\delta t), t_0 + k\delta t\right) + O\left(\delta t^3\right) \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t_0 + n\delta t) &= x(t_0) + (\delta t)\sum_{k=0}^{n-1} F\left(x(t_0 + k\delta t), \dot{x}(t_0 + k\delta t), t_0 + k\delta t\right) + \\ &+O\left(\delta t^2\right) \quad , \end{aligned}$$

o que nos mostra que o conhecimento de $x(t_0)$ e $\dot{x}(t_0)$ nos determina univocamente a evolução temporal de x. Em casos como estes classificaremos a função, no caso x, como sendo uma *quantidade dinâmica*, caso contrário diremos que se trata de uma *quantidade cinemática*.

A.1 O Problema de Cauchy na Relatividade Geral

Consideremos as equações de Einstein para o campo gravitacional:

$$G_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu} \quad .$$

As propriedades de simetria dos tensores envolvidos nesta expressão nos reduzem as dezesseis equações acima a dez equações diferenciais parciais de segunda ordem para as dez componentes independentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. De acordo com o *problema de Cauchy*, deveríamos esperar que, uma vez determinados os valores de $g_{\mu\nu}$ e $\partial_0 g_{\mu\nu}$ na hipersuperfície inicial do espaço-tempo $t = t_0$, a evolução temporal de $g_{\mu\nu}$ fosse fixada, e assim a métrica poderia ser calculada para cada ponto do espaço-tempo.

No entanto, estas dez equações estão ligadas por quatro condições:

$$\nabla_\mu G_\nu{}^\mu = 0 \quad , \tag{A.1}$$

provenientes das identidades de Bianchi contraídas. Vemos, então, que há de fato apenas seis equações independentes para determinar as dez componentes do tensor métrico.

Mas consideremos o problema de Cauchy. Suponhamos que pudéssemos deduzir a partir das equações de Einstein os valores $\partial_0^2 g_{\mu\nu}$. Se isto ocorresse, então, se conhecidos os valores de $g_{\mu\nu}$ e $\partial_0 g_{\mu\nu}$ no instante $t = t_0$, o tensor métrico estaria determinado em todo lugar. Porém, se olharmos para as equações de campo veremos que elas contém derivadas temporais de segunda ordem apenas das componentes g_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$. Verifiquemos. Tomemos o tensor de Riemann:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu\beta\alpha} &= -\frac{1}{2}\left(\partial_\nu\partial_\beta g_{\alpha\mu} - \partial_\nu\partial_\alpha g_{\mu\beta} - \partial_\mu\partial_\beta g_{\alpha\nu} + \partial_\mu\partial_\alpha g_{\nu\beta}\right) + \\ &+ g_{0\rho}\left\{{\rho \atop \mu\beta}\right\}\left\{{0 \atop \nu\alpha}\right\} - g_{0\rho}\left\{{\rho \atop \nu\beta}\right\}\left\{{0 \atop \mu\alpha}\right\} \quad . \end{aligned}$$

Consideremos um sistema de coordenadas onde o símbolo de Christoffel se anule. Se considerarmos ainda as propriedades satisfeitas pelo tensor de Riemann, é imediato que podemos considerar apenas dois índices como sendo referentes à coordenada temporal sem que tomemos componentes nulas do referido tensor. Logo:

$$R_{i0j0} = -\frac{1}{2}\left(\partial_0\partial_j g_{0i} - \partial_0\partial_0 g_{ij} - \partial_i\partial_j g_{00} + \partial_i\partial_0 g_{0j}\right) \quad .$$

Portanto, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura, que são contrações de $R_{\mu\nu\beta\alpha}$ e que compõem o tensor de Eintein, possuem termos que envolvem derivadas temporais de segunda ordem apenas das componentes g_{ij} do tensor métrico. Portanto já não é possível a partir das equações de campo obter $\partial_0^2 g_{\mu\nu}$.

Mais ainda, a equação (A.1), que pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu G^{\mu\nu} + \left\{{}^{\nu}_{\mu\alpha}\right\} G^{\mu\alpha} + \left\{{}^{\mu}_{\mu\alpha}\right\} G^{\alpha\nu} \Longrightarrow \\ &\Longrightarrow \partial_0 G^{0\nu} = -\partial_i G^{i\nu} - \left\{{}^{\nu}_{\mu\alpha}\right\} G^{\mu\alpha} - \left\{{}^{\mu}_{\mu\alpha}\right\} G^{\alpha\nu} \end{aligned}$$

mostra que o lado direito (na segunda linha) possue termos que envolvem no máximo derivadas temporais de segunda ordem de $g_{\mu\nu}$. Deste fato podemos inferir que $G^{0\nu}$ deve conter derivadas de primeira ordem na coordenada temporal. Desta forma, as quatro equações:

$$G^{\mu 0} = \chi T^{\mu 0}$$

não determinam a evolução temporal de $g_{\mu\nu}$, mas apenas representam condições nos dados iniciais [2; 3]. As equações dinâmicas para o campo gravitacional são, de fato, as seis equações:

$$G^{ij} = \chi T^{ij}$$

das quais podemos obter $\partial_0^2 g_{ij}$, enquanto $\partial_0^2 g_{\mu 0}$ continua indeterminado [2; 3]. Portanto, apenas as componentes g_{ij} são variáveis dinâmicas, enquanto $g_{\mu 0}$ são variáveis cinemáticas.

A.2 O Problema de Cauchy no Teleparalelismo

As equações de campo teleparalelas são

$$\partial_\mu \left[4e\Sigma_g{}^{\mu\alpha}\right] + 4e\Sigma_a{}^{\alpha\mu}T^a{}_{g\mu} - ee^\alpha_g \Sigma_{abc}T^{abc} = \chi e T^\alpha_g \quad , \tag{A.2}$$

onde

$$\Sigma^{abc} = \frac{1}{4}\left(T^{abc} + T^{bac} - T^{cab}\right) + \frac{1}{2}\left(\eta^{ac}T^b - \eta^{ab}T^c\right) \quad , \tag{A.3}$$

$$T^c = T^a{}_a{}^c \quad , \tag{A.4}$$

$$T^{abc} = e^{b\mu}e^{c\nu}T^a{}_{\mu\nu} = e^{b\mu}e^{c\nu}\left(\partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu\right) \quad . \tag{A.5}$$

A primeira expressão pode ser reescrita com a derivada do produto entre colchetes sendo explicitada. Para isto lembremos que

$$\partial_\mu e = e e^\nu_a \partial_\mu e^a_\nu = e\Gamma^\nu_{\mu\nu} \quad ;$$

onde usamos o fato da conexão dee Weitzenböck ser dada por:

$$\Gamma^\alpha_{\nu\mu} = e^\alpha_a \partial_\nu e^a_\mu \quad .$$

Desta forma,

$$\partial_\mu \left[4e\Sigma_g{}^{\mu\alpha}\right] = 4e\partial_\mu \Sigma_g{}^{\mu\alpha} + 4\Sigma_g{}^{\mu\alpha}\partial_\mu e = 4e\partial_\mu \Sigma_g{}^{\mu\alpha} + 4\Sigma_g{}^{\mu\alpha} e\Gamma^\nu_{\mu\nu} \quad ,$$

e portanto, a equação de campo pode ser reescrita como:

$$E_g{}^\alpha \equiv 4\partial_\mu \Sigma_g{}^{\mu\alpha} + 4\Sigma_g{}^{\mu\alpha}\Gamma^\nu_{\mu\nu} + 4\Sigma_a{}^{\alpha\mu}T^a{}_{g\mu} - e^\alpha_g \Sigma_{abc}T^{abc} = \chi T^\alpha_g \quad .$$

Observe que nesta expressão, o único termo que pode envolver uma derivada de segunda ordem é o primeiro termo do primeiro membro. Isto pode ser observado sem grande dificuldade, ao recorrermos às expressões (A.3), (A.5), (B.11). Trabalhemos isoladamente este termo:

$$\begin{aligned} 4\Sigma^{g\mu\alpha} &:= 4\frac{1}{4}\left(T^{g\mu\alpha} + T^{\mu g\alpha} - T^{\alpha g\mu}\right) + 4\frac{1}{2}\left(e^{g\alpha}T^\mu - e^{g\mu}T^\alpha\right) = \\ &= \left(T^{g\mu\alpha} + T^{\mu g\alpha} - T^{\alpha g\mu}\right) + 2\partial_\mu \left(e^{g\alpha}T^\mu - e^{g\mu}T^\alpha\right) \quad . \end{aligned}$$

Veja que

$$\begin{aligned} T^{g\mu\alpha} &= g^{\mu 0}g^{\alpha\beta}\left(\partial_0 e^g_\beta - \partial_\beta e^g_0\right) \quad , \\ T^{\mu g\alpha} &= e^{g0}e^\mu_a g^{\alpha\beta}\left(\partial_0 e^a_\beta - \partial_\beta e^a_0\right) \quad , \\ T^{\alpha g\mu} &\doteq e^{g0}e^\alpha_a g^{\mu\beta}\left(\partial_0 e^a_\beta - \partial_\beta e^a_0\right) \quad , \\ T^\mu &= e_{\alpha g}e^\alpha_a e^{g0}g^{\mu\beta}\left(\partial_0 e^a_\beta - \partial_\beta e^a_0\right) = g^{\mu\beta}e^0_a\left(\partial_0 e^a_\beta - \partial_\beta e^a_0\right) \quad , \\ T^\alpha &= g^{\alpha\beta}e^0_a\left(\partial_0 e^a_\beta - \partial_\beta e^a_0\right) \quad , \end{aligned}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} 4\Sigma^{g\mu\alpha} &\doteq g^{\mu 0}g^{\alpha\beta}\left(\partial_0 e^g_\beta - \partial_\beta e^g_0\right) + e^{g0}e^\mu_a g^{\alpha\beta}\left(\partial_0 e^a_\beta - \partial_\beta e^a_0\right) + \\ &\quad - e^{g0}e^\alpha_a g^{\mu\beta}\left(\partial_0 e^a_\beta - \partial_\beta e^a_0\right) + 2e^{g\alpha}g^{\mu\beta}e^0_a\left(\partial_0 e^a_\beta - \partial_\beta e^a_0\right) + \\ &\quad - 2e^{g\mu}g^{\alpha\beta}e^0_a\left(\partial_0 e^a_\beta - \partial_\beta e^a_0\right) \\ &= g^{\mu 0}g^{\alpha\beta}\delta^g_a\left(\partial_0 e^a_\beta - \partial_\beta e^a_0\right) + \left(e^{g0}e^\mu_a g^{\alpha\beta} - e^{g0}e^\alpha_a g^{\mu\beta}\right)\left(\partial_0 e^a_\beta - \partial_\beta e^a_0\right) + \\ &\quad + 2\left(e^{g\alpha}e^0_a g^{\mu\beta} - e^{g\mu}e^0_a g^{\alpha\beta}\right)\left(\partial_0 e^a_\beta - \partial_\beta e^a_0\right) \\ &= \left[g^{\mu 0}g^{\alpha\beta}\delta^g_a + e^{g0}e^\mu_a g^{\alpha\beta} - e^{g0}e^\alpha_a g^{\mu\beta} + \right. \\ &\quad \left. + 2e^{g\alpha}e^0_a g^{\mu\beta} - 2e^{g\mu}e^0_a g^{\alpha\beta}\right]\left(\partial_0 e^a_\beta - \partial_\beta e^a_0\right) \quad . \end{aligned}$$

Desta forma,

$$
\begin{aligned}
4\partial_\mu \Sigma^{g\mu\alpha} &= \partial_\mu \left\{ \left[g^{\mu 0} g^{\alpha\beta} \delta^g_a + e^{g0} e^\mu_a g^{\alpha\beta} - e^{g0} e^\alpha_a g^{\mu\beta} + \right.\right. \\
&\left.\left. + 2e^{g\alpha} e^0_a g^{\mu\beta} - 2e^{g\mu} e^0_a g^{\alpha\beta} \right] \left(\partial_0 e^a_\beta - \partial_\beta e^a_0 \right) \right\} \quad .
\end{aligned}
$$

Separando as partes temporal e espacial da somatória no índice μ somos levados a

$$
\begin{aligned}
4\partial_\mu \Sigma^{g\mu\alpha} &= \partial_0 \left\{ \left[g^{00} g^{\alpha\beta} \delta^g_a + e^{g0} e^0_a g^{\alpha\beta} - e^{g0} e^\alpha_a g^{0\beta} + \right.\right. \\
&\left.\left. + 2e^{g\alpha} e^0_a g^{0\beta} - 2e^{g0} e^0_a g^{\alpha\beta} \right] \left(\partial_0 e^a_\beta - \partial_\beta e^a_0 \right) \right\} \\
&+ \partial_i \left\{ \left[g^{i0} g^{\alpha\beta} \delta^g_a + e^{g0} e^i_a g^{\alpha\beta} - e^{g0} e^\alpha_a g^{i\beta} + \right.\right. \\
&\left.\left. + 2e^{g\alpha} e^0_a g^{i\beta} - 2e^{gi} e^0_a g^{\alpha\beta} \right] \left(\partial_0 e^a_\beta - \partial_\beta e^a_0 \right) \right\} \\
&= \left[\partial_0 \left(\partial_0 e^a_\beta - \partial_\beta e^a_0 \right) \right] \left[g^{00} g^{\alpha\beta} \delta^g_a + e^{g0} e^0_a g^{\alpha\beta} - e^{g0} e^\alpha_a g^{0\beta} + \right. \\
&\left. + 2e^{g\alpha} e^0_a g^{0\beta} - 2e^{g0} e^0_a g^{\alpha\beta} \right] + \\
&+ \left(\partial_0 e^a_\beta - \partial_\beta e^a_0 \right) \partial_0 \left[g^{00} g^{\alpha\beta} \delta^g_a + e^{g0} e^0_a g^{\alpha\beta} - e^{g0} e^\alpha_a g^{0\beta} + \right. \\
&\left. + 2e^{g\alpha} e^0_a g^{0\beta} - 2e^{g0} e^0_a g^{\alpha\beta} \right] + \\
&+ \partial_i \left\{ \left[g^{i0} g^{\alpha\beta} \delta^g_a + e^{g0} e^i_a g^{\alpha\beta} - e^{g0} e^\alpha_a g^{i\beta} + \right.\right. \\
&\left.\left. + 2e^{g\alpha} e^0_a g^{i\beta} - 2e^{gi} e^0_a g^{\alpha\beta} \right] \left(\partial_0 e^a_\beta - \partial_\beta e^a_0 \right) \right\} \quad .
\end{aligned}
$$

O segundo e terceiro termos do segundo membro (últimas quatro linhas) só podem possuir derivadas "temporais" (ou derivadas com relação ao índice zero) de primeira ordem das tetradas. Desta forma, para procurar as derivadas segundas das tetradas não precisamos nos preocupar com estes dois termos. Assim, definimos a soma destes dois termos como

$$
\begin{aligned}
O^{g\alpha} &\equiv \left(\partial_0 e^a_\beta - \partial_\beta e^a_0 \right) \partial_0 \left[g^{00} g^{\alpha\beta} \delta^g_a + e^{g0} e^0_a g^{\alpha\beta} - e^{g0} e^\alpha_a g^{0\beta} + \right. \\
&\left. + 2e^{g\alpha} e^0_a g^{0\beta} - 2e^{g0} e^0_a g^{\alpha\beta} \right] + \\
&+ \partial_i \left\{ \left[g^{i0} g^{\alpha\beta} \delta^g_a + e^{g0} e^i_a g^{\alpha\beta} - e^{g0} e^\alpha_a g^{i\beta} + \right.\right. \\
&\left.\left. + 2e^{g\alpha} e^0_a g^{i\beta} - 2e^{gi} e^0_a g^{\alpha\beta} \right] \left(\partial_0 e^a_\beta - \partial_\beta e^a_0 \right) \right\} \quad .
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
4\partial_\mu \Sigma^{g\mu\alpha} &= \left[\partial_0 \left(\partial_0 e^a_\beta - \partial_\beta e^a_0 \right) \right] \left[g^{00} g^{\alpha\beta} \delta^g_a + e^{g0} e^0_a g^{\alpha\beta} - e^{g0} e^\alpha_a g^{0\beta} + \right. \\
&\left. + 2e^{g\alpha} e^0_a g^{0\beta} - 2e^{g0} e^0_a g^{\alpha\beta} \right] + O^{g\alpha} \\
&= \left[\partial_0 \left(\partial_0 e^a_\beta - \partial_\beta e^a_0 \right) \right] \left[g^{00} g^{\alpha\beta} \delta^g_a + e^{g0} e^0_a g^{\alpha\beta} - e^{g0} e^\alpha_a g^{0\beta} + \right. \\
&\left. + 2e^{g\alpha} e^0_a g^{0\beta} - 2e^{g0} e^0_a g^{\alpha\beta} \right] + \\
&+ \left[\partial_0 \left(\partial_j e^a_\beta - \partial_\beta e^a_j \right) \right] \left[g^{0j} g^{\alpha\beta} \delta^g_a + e^{gj} e^0_a g^{\alpha\beta} - e^{gj} e^\alpha_a g^{0\beta} + \right. \\
&\left. + 2e^{g\alpha} e^j_a g^{0\beta} - 2e^{g0} e^j_a g^{\alpha\beta} \right] + O^{g\alpha} \quad .
\end{aligned}
$$

onde abrimos a somatória no índice 0 em sua parte temporal e espacial. Procedendo da mesma forma para o índice β chegamos a

$$
\begin{aligned}
4\partial_\mu \Sigma^{g\mu\alpha} = {} & \left[\partial_0\left(\partial_0 e^a_0 - \partial_0 e^a_0\right)\right]\left[g^{00}g^{\alpha 0}\delta^g_a + e^{g0}e^0_a g^{\alpha 0} - e^{g0}e^\alpha_a g^{00} + \right. \\
& \left. +2e^{g\alpha}e^0_a g^{00} - 2e^{g0}e^0_a g^{\alpha 0}\right] + \\
& + \left[\partial_0\left(\partial_0 e^a_k - \partial_k e^a_0\right)\right]\left[g^{00}g^{\alpha k}\delta^g_a + e^{g0}e^0_a g^{\alpha k} - e^{g0}e^\alpha_a g^{0k} + \right. \\
& \left. +2e^{g\alpha}e^0_a g^{0k} - 2e^{g0}e^0_a g^{\alpha k}\right] + \\
& + \left[\partial_0\left(\partial_j e^a_0 - \partial_0 e^a_j\right)\right]\left[g^{0j}g^{\alpha 0}\delta^g_a + e^{gj}e^0_a g^{\alpha 0} - e^{gj}e^\alpha_a g^{00} + \right. \\
& \left. +2e^{g\alpha}e^j_a g^{00} - 2e^{g0}e^j_a g^{\alpha 0}\right] + \\
& + \left[\partial_0\left(\partial_j e^a_k - \partial_k e^a_j\right)\right]\left[g^{0j}g^{\alpha k}\delta^g_a + e^{gj}e^0_a g^{\alpha k} - e^{gj}e^\alpha_a g^{0k} + \right. \\
& \left. +2e^{g\alpha}e^j_a g^{0k} - 2e^{g0}e^j_a g^{\alpha k}\right] + O^{g\alpha} \quad .
\end{aligned}
$$

Observe que o primeiro membro do segundo termo desta expressão se anula, e com ele desaparecem as derivadas de segunda ordem das componentes e^a_0 das tetradas. Podemos reescrever a expressão acima de uma forma mais conveniente,

$$
\begin{aligned}
4\partial_\mu \Sigma^{g\mu\alpha} = {} & \left[\partial_0\partial_0 e^a_k\right]\left[g^{00}g^{\alpha k}\delta^g_a + e^{g0}e^0_a g^{\alpha k} - e^{g0}e^\alpha_a g^{0k} + \right. \\
& \left. +2e^{g\alpha}e^0_a g^{0k} - 2e^{g0}e^0_a g^{\alpha k}\right] + \\
& - \left[\partial_0\partial_0 e^a_j\right]\left[g^{0j}g^{\alpha 0}\delta^g_a + e^{gj}e^0_a g^{\alpha 0} - e^{gj}e^\alpha_a g^{00} + \right. \\
& \left. +2e^{g\alpha}e^j_a g^{00} - 2e^{g0}e^j_a g^{\alpha 0}\right] + U^{g\alpha}
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
U^{g\alpha} \equiv {} & \left[\partial_0\partial_j e^a_0\right]\left[g^{0j}g^{\alpha 0}\delta^g_a + e^{gj}e^0_a g^{\alpha 0} - e^{gj}e^\alpha_a g^{00} + 2e^{g\alpha}e^j_a g^{00} - 2e^{g0}e^j_a g^{\alpha 0}\right] + \\
& - \left[\partial_0\partial_k e^a_0\right]\left[g^{00}g^{\alpha k}\delta^g_a + e^{g0}e^0_a g^{\alpha k} - e^{g0}e^\alpha_a g^{0k} + 2e^{g\alpha}e^0_a g^{0k} - 2e^{g0}e^0_a g^{\alpha k}\right] + \\
& + \left[\partial_0\left(\partial_j e^a_k - \partial_k e^a_j\right)\right]\left[g^{0j}g^{\alpha k}\delta^g_a + e^{gj}e^0_a g^{\alpha k} - e^{gj}e^\alpha_a g^{0k} + \right. \\
& \left. +2e^{g\alpha}e^j_a g^{0k} - 2e^{g0}e^j_a g^{\alpha k}\right] + O^{g\alpha} \quad .
\end{aligned}
$$

Observe que $U^{g\alpha}$ só possui derivadas temporais de primeira ordem nas tetradas. Da penúltima expressão vemos que apenas as componentes e^a_k das tetradas apresentam derivadas temporais de segunda ordem.

Resta claro, na abordagem do problema de Cauchy, que apenas as quantidades e^a_k possuem um papel dinâmico no Teleparalelismo, enquanto e^a_0 desempenha uma função cinemática na teoria.

Mas podemos dizer mais, pois seja

$$
\begin{aligned}
E^{g\alpha} \equiv {} & 4\partial_\mu \Sigma_g{}^{\mu\alpha} + 4\Sigma_g{}^{\mu\alpha}\Gamma^\nu_{\mu\nu} + 4\Sigma_a{}^{\alpha\mu}T^a{}_{g\mu} - e^\alpha_g \Sigma_{abc}T^{abc} = \\
= {} & \left[\partial_0\partial_0 e^a_k\right]\left[g^{00}g^{\alpha k}\delta^g_a + e^{g0}e^0_a g^{\alpha k} - e^{g0}e^\alpha_a g^{0k} + 2e^{g\alpha}e^0_a g^{0k} - 2e^{g0}e^0_a g^{\alpha k}\right] + \\
& - \left[\partial_0\partial_0 e^a_j\right]\left[g^{0j}g^{\alpha 0}\delta^g_a + e^{gj}e^0_a g^{\alpha 0} - e^{gj}e^\alpha_a g^{00} + \right. \\
& \left. +2e^{g\alpha}e^j_a g^{00} - 2e^{g0}e^j_a g^{\alpha 0}\right] + V^{g\alpha} \quad ,
\end{aligned}
$$

onde

$$V^{g\alpha} \equiv U^{g\alpha} + 4\Sigma^{g\mu\alpha}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} + 4\Sigma_a \ {}^{\alpha\mu}T^{ag} \ {}_{\mu} - e^{g\alpha}\Sigma_{abc}T^{abc}$$

só possui derivadas temporais de primeira ordem. Quando tomamos $\alpha = 0$ vemos que as derivadas de segunda ordem de todas as componentes das tetradas se anulam:

$$\begin{aligned} E^{g0} &\equiv 4\partial_\mu\Sigma^{g\mu0} + 4\Sigma^{g\mu0}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} + 4\Sigma_a \ {}^{0\mu}T^{ag} \ {}_{\mu} - e^{g0}\Sigma_{abc}T^{abc} = \\ &= [\partial_0\partial_0 e^a_k]\left[g^{00}g^{0k}\delta^g_a + e^{g0}e^0_a g^{0k} - e^{g0}e^0_a g^{0k} + 2e^{g0}e^0_a g^{0k} - 2e^{g0}e^0_a g^{0k}\right] + \\ &\quad - \left[\partial_0\partial_0 e^a_j\right]\left[g^{0j}g^{00}\delta^g_a + e^{gj}e^0_a g^{00} - e^{gj}e^0_a g^{00} + 2e^{g0}e^j_a g^{00} - 2e^{g0}e^j_a g^{00}\right] + \\ &\quad + V^{g0} \\ &= V^{g0} \quad . \end{aligned}$$

Assim vemos que as equações de campo

$$E^{g0} \equiv 4\partial_\mu\Sigma^{g\mu0} + 4\Sigma^{g\mu0}\Gamma^{\nu}_{\mu\nu} + 4\Sigma_a \ {}^{0\mu}T^{ag} \ {}_{\mu} - e^{g0}\Sigma_{abc}T^{abc} = \chi T^{g0} \quad ,$$

não são de fato equações dinâmicas, mas apenas condições nos dados iniciais. As equações que de fato determinam o caráter dinâmico da teoria são as equações

$$E^{gi} = \chi T^{gi} \quad .$$

Bibliografia

[1] B. Felsager - Geometry, Particles and Fields - Springer Verlag (1998).

[2] V. de Sabbata e M. Gasperini - Introduction to Gravitation, World Scientific Publishing (1985).

[3] I. D. Soares - Métodos Hamiltonianos para o Campo Gravitacional Fraco - tese de mestrado 02/72 - CBPF (1972).

Apêndice B

Decomposição das Lagrangianas da RG e do ETRG nas variáveis ADM

B.1 Relatividade Geral

A densidade Lagrangiana da Relatividade Geral é dada por

$$L = -\frac{1}{2\chi}\sqrt{-g}R \quad .$$

Primeiro, devemos lembrar que o escalar de curvatura é a contração da métrica com o tensor de Ricci, e que este nada mais é do que a contração do tensor de curvatura com o tensor métrico. De uma forma mais explícita:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}R_{\alpha\mu\nu}{}^{\alpha} = R_{\alpha\mu}{}^{\mu\alpha} = R^{\alpha\mu}{}_{\mu\alpha} \quad .$$

Perceba que o tensor de Riemann pode ser decomposto na base $\{\mathbf{b_k}, \mathbf{n}\}$, ou seja:

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\mu\nu\rho} &= \left(R_{\beta\mu\nu\rho}n^{\beta}\right)n_{\alpha} + \left(R_{\beta\mu\nu\rho}b_i^{\beta}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j} = \\
&= \left(R_{\beta\theta\nu\rho}n^{\beta}n^{\theta}\right)n_{\alpha}n_{\mu} + \left(R_{\beta\theta\nu\rho}n^{\beta}b_i^{\theta}\right)\gamma^{ij}b_{\mu j}n_{\alpha} + \\
&\quad + \left(R_{\beta\theta\nu\rho}b_i^{\beta}n^{\theta}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j}n_{\mu} + \left(R_{\beta\theta\nu\rho}b_i^{\beta}b_m^{\theta}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j}\gamma^{mn}b_{\mu n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\mu\nu\rho} &= \left(R_{\beta\theta\lambda\rho}n^{\beta}n^{\theta}n^{\lambda}\right)n_{\alpha}n_{\mu}n_{\nu} + \left(R_{\beta\theta\lambda\rho}n^{\beta}n^{\theta}b_i^{\lambda}\right)n_{\alpha}n_{\mu}\gamma^{ij}b_{\nu j} + \\
&\quad + \left(R_{\beta\theta\lambda\rho}n^{\beta}b_i^{\theta}n^{\lambda}\right)\gamma^{ij}b_{\mu j}n_{\alpha}n_{\nu} + \left(R_{\beta\theta\lambda\rho}n^{\beta}b_i^{\theta}b_m^{\lambda}\right)\gamma^{ij}b_{\mu j}n_{\alpha}\gamma^{mn}b_{\nu n} + \\
&\quad + \left(R_{\beta\theta\lambda\rho}b_i^{\beta}n^{\theta}n^{\lambda}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j}n_{\mu}n_{\nu} + \left(R_{\beta\theta\lambda\rho}b_i^{\beta}n^{\theta}b_m^{\lambda}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j}n_{\mu}\gamma^{mn}b_{\nu n} + \\
&\quad + \left(R_{\beta\theta\lambda\rho}b_i^{\beta}b_m^{\theta}n^{\lambda}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j}\gamma^{mn}b_{\mu n}n_{\nu} + \\
&\quad + \left(R_{\beta\theta\lambda\rho}b_i^{\beta}b_m^{\theta}b_k^{\lambda}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j}\gamma^{mn}b_{\mu n}\gamma^{kl}b_{\nu l}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R_{\alpha\mu\nu\rho} = {} & \left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}n^{\beta}n^{\theta}n^{\lambda}n^{\sigma}\right)n_{\alpha}n_{\mu}n_{\nu}n_{\rho} + \left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}n^{\beta}n^{\theta}n^{\lambda}b_{j}^{\sigma}\right)n_{\alpha}n_{\mu}n_{\nu}\gamma^{ij}b_{\rho i} + \\
& + \left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}n^{\beta}n^{\theta}b_{i}^{\lambda}n^{\sigma}\right)n_{\alpha}n_{\mu}\gamma^{ij}b_{\nu j}n_{\rho} + \\
& + \left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}n^{\beta}n^{\theta}b_{i}^{\lambda}b_{m}^{\sigma}\right)n_{\alpha}n_{\mu}\gamma^{ij}b_{\nu j}\gamma^{mn}b_{\rho n} + \\
& + \left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}n^{\beta}b_{i}^{\theta}n^{\lambda}n^{\sigma}\right)\gamma^{ij}b_{\mu j}n_{\alpha}n_{\nu}n_{\rho} + \\
& + \left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}n^{\beta}b_{i}^{\theta}n^{\lambda}b_{m}^{\sigma}\right)\gamma^{ij}b_{\mu j}n_{\alpha}n_{\nu}\gamma^{mn}b_{\rho n} + \\
& + \left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}n^{\beta}b_{i}^{\theta}b_{m}^{\lambda}n^{\sigma}\right)\gamma^{ij}b_{\mu j}n_{\alpha}\gamma^{mn}b_{\nu n}n_{\rho} + \\
& + \left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}n^{\beta}b_{i}^{\theta}b_{m}^{\lambda}b_{k}^{\sigma}\right)\gamma^{ij}b_{\mu j}n_{\alpha}\gamma^{mn}b_{\nu n}\gamma^{kl}b_{\rho l} + \\
& + \left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}b_{i}^{\beta}n^{\theta}n^{\lambda}n^{\sigma}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j}n_{\mu}n_{\nu}n_{\rho} + \\
& + \left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}b_{i}^{\beta}n^{\theta}n^{\lambda}b_{m}^{\sigma}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j}n_{\mu}n_{\nu}\gamma^{mn}b_{\rho n} + \\
& + \left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}b_{i}^{\beta}n^{\theta}b_{m}^{\lambda}n^{\sigma}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j}n_{\mu}\gamma^{mn}b_{\nu n}n_{\rho} + \\
& + \left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}b_{i}^{\beta}n^{\theta}b_{m}^{\lambda}b_{k}^{\sigma}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j}n_{\mu}\gamma^{mn}b_{\nu n}\gamma^{kl}b_{\rho l} + \\
& + \left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}b_{i}^{\beta}b_{m}^{\theta}n^{\lambda}n^{\sigma}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j}\gamma^{mn}b_{\mu n}n_{\nu}n_{\rho} + \\
& + \left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}b_{i}^{\beta}b_{m}^{\theta}n^{\lambda}b_{k}^{\sigma}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j}\gamma^{mn}b_{\mu n}n_{\nu}\gamma^{kl}b_{\rho l} + \\
& + \left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}b_{i}^{\beta}b_{m}^{\theta}b_{k}^{\lambda}n^{\sigma}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j}\gamma^{mn}b_{\mu n}\gamma^{kl}b_{\nu l}n_{\rho} + \\
& + \left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}b_{i}^{\beta}b_{m}^{\theta}b_{k}^{\lambda}b_{f}^{\sigma}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j}\gamma^{mn}b_{\mu n}\gamma^{kl}b_{\nu l}\gamma^{fg}b_{\rho g} .
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
R_{\alpha\mu\nu}{}^{\alpha} &= g^{\alpha\rho}R_{\alpha\mu\nu\rho} = g^{\alpha\rho}\left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}n^{\beta}n^{\theta}n^{\lambda}n^{\sigma}\right)n_{\alpha}n_{\mu}n_{\nu}n_{\rho} + \\
&+g^{\alpha\rho}\left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}n^{\beta}n^{\theta}n^{\lambda}b^{\sigma}_{j}\right)n_{\alpha}n_{\mu}n_{\nu}\gamma^{ij}b_{\rho i} + \\
&+g^{\alpha\rho}\left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}n^{\beta}n^{\theta}b^{\lambda}_{i}n^{\sigma}\right)n_{\alpha}n_{\mu}\gamma^{ij}b_{\nu j}n_{\rho} + \\
&+g^{\alpha\rho}\left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}n^{\beta}n^{\theta}b^{\lambda}_{i}b^{\sigma}_{m}\right)n_{\alpha}n_{\mu}\gamma^{ij}b_{\nu j}\gamma^{mn}b_{\rho n} + \\
&+g^{\alpha\rho}\left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}n^{\beta}b^{\theta}_{i}n^{\lambda}n^{\sigma}\right)\gamma^{ij}b_{\mu j}n_{\alpha}n_{\nu}n_{\rho} + \\
&+g^{\alpha\rho}\left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}n^{\beta}b^{\theta}_{i}n^{\lambda}b^{\sigma}_{m}\right)\gamma^{ij}b_{\mu j}n_{\alpha}n_{\nu}\gamma^{mn}b_{\rho n} + \\
&+g^{\alpha\rho}\left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}n^{\beta}b^{\theta}_{i}b^{\lambda}_{m}n^{\sigma}\right)\gamma^{ij}b_{\mu j}n_{\alpha}\gamma^{mn}b_{\nu n}n_{\rho} + \\
&+g^{\alpha\rho}\left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}n^{\beta}b^{\theta}_{i}b^{\lambda}_{m}b^{\sigma}_{k}\right)\gamma^{ij}b_{\mu j}n_{\alpha}\gamma^{mn}b_{\nu n}\gamma^{kl}b_{\rho l} + \\
&+g^{\alpha\rho}\left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}b^{\beta}_{i}n^{\theta}n^{\lambda}n^{\sigma}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j}n_{\mu}n_{\nu}n_{\rho} + \\
&+g^{\alpha\rho}\left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}b^{\beta}_{i}n^{\theta}n^{\lambda}b^{\sigma}_{m}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j}n_{\mu}n_{\nu}\gamma^{mn}b_{\rho n} + \\
&+g^{\alpha\rho}\left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}b^{\beta}_{i}n^{\theta}b^{\lambda}_{m}n^{\sigma}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j}n_{\mu}\gamma^{mn}b_{\nu n}n_{\rho} + \\
&+g^{\alpha\rho}\left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}b^{\beta}_{i}n^{\theta}b^{\lambda}_{m}b^{\sigma}_{k}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j}n_{\mu}\gamma^{mn}b_{\nu n}\gamma^{kl}b_{\rho l} + \\
&+g^{\alpha\rho}\left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}b^{\beta}_{i}b^{\theta}_{m}n^{\lambda}n^{\sigma}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j}\gamma^{mn}b_{\mu n}n_{\nu}n_{\rho} + \\
&+g^{\alpha\rho}\left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}b^{\beta}_{i}b^{\theta}_{m}n^{\lambda}b^{\sigma}_{k}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j}\gamma^{mn}b_{\mu n}n_{\nu}\gamma^{kl}b_{\rho l} + \\
&+g^{\alpha\rho}\left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}b^{\beta}_{i}b^{\theta}_{m}b^{\lambda}_{k}n^{\sigma}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j}\gamma^{mn}b_{\mu n}\gamma^{kl}b_{\nu l}n_{\rho} + \\
&+g^{\alpha\rho}\left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}b^{\beta}_{i}b^{\theta}_{m}b^{\lambda}_{k}b^{\sigma}_{f}\right)\gamma^{ij}b_{\alpha j}\gamma^{mn}b_{\mu n}\gamma^{kl}b_{\nu l}\gamma^{fg}b_{\rho g}\ .
\end{aligned}
$$

Usando a unitariedade dos vetores da base e sua ortogonalidade, encontramos

$$
\begin{aligned}
R_{\alpha\mu\nu}{}^{\alpha} &= -\left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}n^{\beta}n^{\theta}n^{\lambda}n^{\sigma}\right)n_{\mu}n_{\nu} + 0 + \\
&-\left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}n^{\beta}n^{\theta}b^{\lambda}_{i}n^{\sigma}\right)n_{\mu}\gamma^{ij}b_{\nu j} + 0 + \\
&-\left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}n^{\beta}b^{\theta}_{i}n^{\lambda}n^{\sigma}\right)\gamma^{ij}b_{\mu j}n_{\nu} + 0 + \\
&-\left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}n^{\beta}b^{\theta}_{i}b^{\lambda}_{m}n^{\sigma}\right)\gamma^{ij}b_{\mu j}\gamma^{mn}b_{\nu n} + 0 + \\
&+0+\left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}b^{\beta}_{i}n^{\theta}n^{\lambda}b^{\sigma}_{m}\right)\gamma^{ij}\gamma^{mn}\left[g^{\alpha\rho}b_{\rho n}b_{\alpha j}\right]n_{\mu}n_{\nu} + \\
&+0+\left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}b^{\beta}_{i}n^{\theta}b^{\lambda}_{m}b^{\sigma}_{k}\right)\gamma^{ij}\gamma^{kl}\left[g^{\alpha\rho}b_{\rho l}b_{\alpha j}\right]n_{\mu}\gamma^{mn}b_{\nu n} + \\
&+0+\left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}b^{\beta}_{i}b^{\theta}_{m}n^{\lambda}b^{\sigma}_{k}\right)\gamma^{ij}\gamma^{kl}\gamma^{mn}\left[g^{\alpha\rho}b_{\alpha j}b_{\rho l}\right]b_{\mu n}n_{\nu} + \\
&+0+\left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}b^{\beta}_{i}b^{\theta}_{m}b^{\lambda}_{k}b^{\sigma}_{f}\right)\gamma^{ij}\gamma^{fg}\gamma^{mn}\gamma^{kl}\left[g^{\alpha\rho}b_{\rho g}b_{\alpha j}\right]b_{\mu n}b_{\nu l}\ .
\end{aligned}
$$

Contraindo novamente com o tensor métrico, e procedendo como acima, constatamos

$$\begin{aligned}
R &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}R_{\alpha\mu\nu}{}^{\alpha} = \left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}n^{\beta}n^{\theta}n^{\lambda}n^{\sigma}\right) + 0 - 0 + 0 - 0 + 0 + \\
&- \left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}n^{\beta}b_i^{\theta}b_m^{\lambda}n^{\sigma}\right)\gamma^{ij}\gamma^{mn}\left[g^{\mu\nu}b_{\mu j}b_{\nu n}\right] + 0 + 0 + \\
&- \left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}b_i^{\beta}n^{\theta}n^{\lambda}b_m^{\sigma}\right)\gamma^{ij}\gamma^{mn}\left[g^{\alpha\rho}b_{\rho n}b_{\alpha j}\right] + \\
&+ 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \\
&+ \left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}b_i^{\beta}b_m^{\theta}b_k^{\lambda}b_f^{\sigma}\right)\gamma^{ij}\gamma^{fg}\gamma^{mn}\gamma^{kl}\left[g^{\alpha\rho}b_{\rho g}b_{\alpha j}\right]\left[g^{\mu\nu}b_{\mu n}b_{\nu l}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R &= \left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}n^{\beta}n^{\theta}n^{\lambda}n^{\sigma}\right) - \left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}n^{\beta}b_i^{\theta}b_m^{\lambda}n^{\sigma}\right)\gamma^{ij}\gamma^{mn}\left[g^{\mu\nu}b_{\mu j}b_{\nu n}\right] + \\
&- \left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}b_i^{\beta}n^{\theta}n^{\lambda}b_m^{\sigma}\right)\gamma^{ij}\gamma^{mn}\left[g^{\alpha\rho}b_{\rho n}b_{\alpha j}\right] + \\
&+ \left(R_{\beta\theta\lambda\sigma}b_i^{\beta}b_m^{\theta}b_k^{\lambda}b_f^{\sigma}\right)\gamma^{ij}\gamma^{fg}\gamma^{mn}\gamma^{kl}\left[g^{\alpha\rho}b_{\rho g}b_{\alpha j}\right]\left[g^{\mu\nu}b_{\mu n}b_{\nu l}\right] .
\end{aligned}$$

Numa notação mais conveniente e usando o fato de que

$$g^{\mu\nu}b_{\mu j}b_{\nu n} = \gamma_{jn} \quad ,$$

segue

$$\begin{aligned}
R &= R_{\perp\perp\perp\perp} - R_{\perp im\perp}\gamma^{ij}\gamma^{mn}\gamma_{jn} - R_{i\perp\perp m}\gamma^{ij}\gamma^{mn}\gamma_{jn} + \\
&+ R_{imkf}\gamma^{ij}\gamma^{fg}\gamma^{mn}\gamma^{kl}\gamma_{jg}\gamma_{nl} \\
&= R_{\perp\perp\perp\perp} - R_{\perp im\perp}\gamma^{ij}\delta_j^m - R_{i\perp\perp m}\gamma^{ij}\delta_j^m + R_{imkf}\gamma^{ij}\delta_j^f\delta_l^m\gamma^{kl} = \\
&= R_{\perp\perp\perp\perp} - R_{\perp ij\perp}\gamma^{ij} - R_{i\perp\perp j}\gamma^{ij} + R_{ilkj}\gamma^{ij}\gamma^{kl} \quad .
\end{aligned}$$

Usando as propriedades de antissimetria do tensor de curvatura, $R_{\mu\nu(\alpha\beta)} = R_{(\mu\nu)\alpha\beta} = 0$, vemos que

$$\begin{aligned}
R_{\perp\perp\perp\perp} &= 0 \quad , \\
R_{\perp ij\perp} &= -R_{i\perp j\perp} = R_{i\perp\perp j} \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R &= -R_{i\perp\perp j}\gamma^{ij} - R_{i\perp\perp j}\gamma^{ij} + R_{ilkj}\gamma^{ij}\gamma^{kl} = \\
&= -2R_{i\perp\perp j}\gamma^{ij} + R_{ilkj}\gamma^{ij}\gamma^{kl} \quad .
\end{aligned}$$

Porém, note que

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\perp\perp}{}^{\alpha} &= g^{\alpha\beta}R_{\alpha\perp\perp\beta} = \left(\gamma^{ij}b_i^{\alpha}b_j^{\beta} - n^{\alpha}n^{\beta}\right)R_{\alpha\perp\perp\beta} = \\
&= \gamma^{ij}b_i^{\alpha}b_j^{\beta}R_{\alpha\perp\perp\beta} - n^{\alpha}n^{\beta}R_{\alpha\perp\perp\beta} = \\
&= \gamma^{ij}R_{i\perp\perp j} - R_{\perp\perp\perp\perp} = \gamma^{ij}R_{i\perp\perp j} \quad .
\end{aligned}$$

Assim

$$R = -2R_{\alpha\perp\perp}{}^{\alpha} + R_{ilkj}\gamma^{ij}\gamma^{kl} \quad . \tag{B.1}$$

O primeiro termo do segundo membro da equação acima pode ser reescrito numa forma mais apropriada. Para isso devemos lembrar que o tensor de curvatura, numa variedade com torção nula, pode ser obtido a partir da não comutação da derivada covariante:

$$[\nabla_\beta, \nabla_\alpha] A^\mu = R_{\beta\alpha\rho}{}^{\mu} A^\rho \quad .$$

Se tomarmos o vetor A^μ como sendo o vetor normal à híper-superfície, então

$$[\nabla_\beta, \nabla_\alpha] n^\mu = R_{\beta\alpha\rho}{}^{\mu} n^\rho = R_{\beta\alpha\perp}{}^{\mu} \quad ;$$

$$R_{\beta\perp\perp}{}^{\mu} = n^\alpha R_{\beta\alpha\perp}{}^{\mu} = n^\alpha \left([\nabla_\beta, \nabla_\alpha] n^\mu\right) \quad .$$

Logo, vemos que

$$R_{\alpha\perp\perp}{}^{\alpha} = n^\beta \left([\nabla_\alpha, \nabla_\beta] n^\alpha\right) = n^\beta \nabla_\alpha \left(\nabla_\beta n^\alpha\right) - n^\beta \nabla_\beta \left(\nabla_\alpha n^\alpha\right) \quad .$$

Usando a regra de Leibniz para derivada covariante de produto de funções, segue

$$R_{\alpha\perp\perp}{}^{\alpha} = \nabla_\alpha \left(n^\beta \nabla_\beta n^\alpha\right) - \left(\nabla_\alpha n^\beta\right)\left(\nabla_\beta n^\alpha\right) - \nabla_\beta \left(n^\beta \nabla_\alpha n^\alpha\right) + \left(\nabla_\beta n^\beta\right)\left(\nabla_\alpha n^\alpha\right) \quad .$$

Lembrando que a condição de metricidade é válida, temos

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_\alpha n^\beta\right)\left(\nabla_\beta n^\alpha\right) &= g^{\beta\theta}\left(\nabla_\alpha n_\theta\right) g^{\alpha\lambda}\left(\nabla_\beta n_\lambda\right) = \\
&= \left(\gamma^{mn} b^\beta_m b^\theta_n - n^\beta n^\theta\right)\left(\nabla_\alpha n_\theta\right)\left(\gamma^{ij} b^\alpha_i b^\lambda_j - n^\alpha n^\lambda\right)\left(\nabla_\beta n_\lambda\right) = \\
&= \gamma^{mn}\gamma^{ij} b^\alpha_i b^\lambda_j b^\beta_m b^\theta_n \left(\nabla_\alpha n_\theta\right)\left(\nabla_\beta n_\lambda\right) + \\
&\quad -\gamma^{mn} b^\beta_m b^\theta_n n^\alpha n^\lambda \left(\nabla_\alpha n_\theta\right)\left(\nabla_\beta n_\lambda\right) + \\
&\quad -\gamma^{ij} b^\alpha_i b^\lambda_j n^\beta n^\theta \left(\nabla_\alpha n_\theta\right)\left(\nabla_\beta n_\lambda\right) + \\
&\quad +n^\beta n^\theta n^\alpha n^\lambda \left(\nabla_\alpha n_\theta\right)\left(\nabla_\beta n_\lambda\right) \quad .
\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\gamma^{mn}\gamma^{ij} b^\alpha_i b^\lambda_j b^\beta_m b^\theta_n \left(\nabla_\alpha n_\theta\right)\left(\nabla_\beta n_\lambda\right) &= \gamma^{mn}\gamma^{ij} b^\theta_n \left[b^\alpha_i \left(\nabla_\alpha n_\theta\right)\right] b^\lambda_j \left[b^\beta_m \left(\nabla_\beta n_\lambda\right)\right] = \\
&= \gamma^{mn}\gamma^{ij} b^\theta_n \left[\nabla_i n_\theta\right] b^\lambda_j \left[\nabla_m n_\lambda\right] = \\
&= \gamma^{mn}\gamma^{ij} \left[b^\theta_n \left(\nabla_i n_\theta\right)\right]\left[b^\lambda_j \left(\nabla_m n_\lambda\right)\right] = \\
&= \gamma^{mn}\gamma^{ij} \left[-K_{ni}\right]\left[-K_{jm}\right] = \\
&= \gamma^{mn}\gamma^{ij} K_{ni} K_{jm} \quad ,
\end{aligned}$$

onde usamos a definição da curvatura extrínseca,

$$K_{ij} = -b_{\alpha j}\frac{Dn^{\alpha}}{D\xi^{i}} = n_{\alpha}\frac{Db^{\alpha}_{j}}{D\xi^{i}} = n_{\alpha}\frac{Db^{\alpha}_{i}}{D\xi^{j}} = K_{ji} \quad , \tag{B.2}$$

em que

$$\frac{Dn^{\alpha}}{D\xi^{k}} = b^{\beta}_{k}\nabla_{\beta}n^{\alpha} = \nabla_{k}n^{\alpha} \quad .$$

Veja também que, sob a condição de metricidade,

$$\begin{aligned} n^{\lambda}\left(\nabla_{\beta}n_{\lambda}\right) &= \nabla_{\beta}\left(n^{\lambda}n_{\lambda}\right) - n_{\lambda}\left(\nabla_{\beta}n^{\lambda}\right) = \nabla_{\beta}\left(-1\right) - n_{\lambda}\left(\nabla_{\beta}n^{\lambda}\right) = \\ &= -n_{\lambda}\left(\nabla_{\beta}n^{\lambda}\right) = -n_{\lambda}\left[\nabla_{\beta}\left(g^{\lambda\sigma}n_{\sigma}\right)\right] = -g^{\lambda\sigma}n_{\lambda}\left(\nabla_{\beta}n_{\sigma}\right) = \\ &= -n^{\sigma}\left(\nabla_{\beta}n_{\sigma}\right) = -n^{\lambda}\left(\nabla_{\beta}n_{\lambda}\right) = 0 \quad . \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \gamma^{mn}b^{\beta}_{m}b^{\theta}_{n}n^{\alpha}n^{\lambda}\left(\nabla_{\alpha}n_{\theta}\right)\left(\nabla_{\beta}n_{\lambda}\right) &= \gamma^{mn}b^{\beta}_{m}b^{\theta}_{n}n^{\alpha}\left(\nabla_{\alpha}n_{\theta}\right)\left[n^{\lambda}\left(\nabla_{\beta}n_{\lambda}\right)\right] = 0 \quad , \\ \gamma^{ij}b^{\alpha}_{i}b^{\lambda}_{j}n^{\beta}n^{\theta}\left(\nabla_{\alpha}n_{\theta}\right)\left(\nabla_{\beta}n_{\lambda}\right) &= \gamma^{ij}b^{\alpha}_{i}b^{\lambda}_{j}n^{\beta}\left(\nabla_{\beta}n_{\lambda}\right)\left[n^{\theta}\left(\nabla_{\alpha}n_{\theta}\right)\right] = 0 \quad , \\ n^{\beta}n^{\theta}n^{\alpha}n^{\lambda}\left(\nabla_{\alpha}n_{\theta}\right)\left(\nabla_{\beta}n_{\lambda}\right) &= n^{\beta}n^{\alpha}\left[n^{\theta}\left(\nabla_{\alpha}n_{\theta}\right)\right]\left[n^{\lambda}\left(\nabla_{\beta}n_{\lambda}\right)\right] = 0 \quad . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\nabla_{\alpha}n^{\beta}\right)\left(\nabla_{\beta}n^{\alpha}\right) = \gamma^{mn}\gamma^{ij}K_{ni}K_{jm} \quad .$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio, vemos que

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{\beta}n^{\beta}\right)\left(\nabla_{\alpha}n^{\alpha}\right) &= g^{\beta\theta}\left(\nabla_{\beta}n_{\theta}\right)g^{\alpha\lambda}\left(\nabla_{\alpha}n_{\lambda}\right) = \\ &= \left(\gamma^{mn}b^{\beta}_{m}b^{\theta}_{n} - n^{\beta}n^{\theta}\right)\left(\nabla_{\beta}n_{\theta}\right)\left(\gamma^{ij}b^{\alpha}_{i}b^{\lambda}_{j} - n^{\alpha}n^{\lambda}\right)\left(\nabla_{\alpha}n_{\lambda}\right) = \\ &= \gamma^{mn}b^{\beta}_{m}b^{\theta}_{n}\left(\nabla_{\beta}n_{\theta}\right)\gamma^{ij}b^{\alpha}_{i}b^{\lambda}_{j}\left(\nabla_{\alpha}n_{\lambda}\right) \\ &\quad -\gamma^{mn}b^{\beta}_{m}b^{\theta}_{n}\left(\nabla_{\beta}n_{\theta}\right)n^{\alpha}n^{\lambda}\left(\nabla_{\alpha}n_{\lambda}\right) \\ &\quad -n^{\beta}n^{\theta}\left(\nabla_{\beta}n_{\theta}\right)\gamma^{ij}b^{\alpha}_{i}b^{\lambda}_{j}\left(\nabla_{\alpha}n_{\lambda}\right) \\ &\quad +n^{\beta}n^{\theta}\left(\nabla_{\beta}n_{\theta}\right)n^{\alpha}n^{\lambda}\left(\nabla_{\alpha}n_{\lambda}\right) \quad ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{\beta}n^{\beta}\right)\left(\nabla_{\alpha}n^{\alpha}\right) &= \gamma^{mn}b^{\beta}_{m}b^{\theta}_{n}\left(\nabla_{\beta}n_{\theta}\right)\gamma^{ij}b^{\alpha}_{i}b^{\lambda}_{j}\left(\nabla_{\alpha}n_{\lambda}\right) = \\ &= \gamma^{mn}\left[b^{\theta}_{n}\left(b^{\beta}_{m}\nabla_{\beta}n_{\theta}\right)\right]\gamma^{ij}\left[b^{\lambda}_{j}\left(b^{\alpha}_{i}\nabla_{\alpha}n_{\lambda}\right)\right] = \\ &= \gamma^{mn}\left[-K_{nm}\right]\gamma^{ij}\left[-K_{ij}\right] = \\ &= \gamma^{mn}K_{nm}\gamma^{ij}K_{ij} = \\ &= K^{2} \quad . \end{aligned}$$

Finalmente chegamos a

$$R_{\alpha\perp\perp}{}^{\alpha} = -\gamma^{mn}\gamma^{ij}K_{ni}K_{jm} + K^2 + \nabla_\alpha\left(n^\beta\nabla_\beta n^\alpha\right) - \nabla_\beta\left(n^\beta\nabla_\alpha n^\alpha\right) \quad . \qquad \text{(B.3)}$$

Já o segundo membro do segundo termo de (B.1) pode ser escrito de uma forma mais conveniente. Procedendo como anteriormente, ou seja, expressando a curvatura como o comutador de derivadas covariantes, vemos que

$$\begin{aligned}
\gamma^{ij}\gamma^{kl}R_{ilkj} &= \gamma^{ij}\gamma^{kl}b_i^\beta b_l^\theta b_{\sigma j}R_{\beta\theta\lambda}{}^{\sigma}b_k^\lambda = \\
&= \gamma^{kl}b_i^\beta b_l^\theta b_\sigma^i\left(\left[\nabla_\beta,\nabla_\theta\right]b_k^\sigma\right) = \\
&= \gamma^{kl}b_i^\beta b_l^\theta b_\sigma^i\left[\nabla_\beta\left(\nabla_\theta b_k^\sigma\right) - \nabla_\theta\left(\nabla_\beta b_k^\sigma\right)\right] = \\
&= \gamma^{kl}b_\sigma^i b_i^\beta b_l^\theta\nabla_\beta\left(\nabla_\theta b_k^\sigma\right) - \gamma^{kl}b_\sigma^i b_l^\theta b_i^\beta\nabla_\theta\left(\nabla_\beta b_k^\sigma\right) \quad .
\end{aligned}$$

Com a regra de derivada de produto conseguimos reescrever a expressão acima como

$$\begin{aligned}
\gamma^{ij}\gamma^{kl}R_{ilkj} &= \gamma^{kl}b_\sigma^i b_i^\beta\nabla_\beta\left(b_l^\theta\nabla_\theta b_k^\sigma\right) - \gamma^{kl}b_\sigma^i b_i^\beta\left(\nabla_\beta b_l^\theta\right)\left(\nabla_\theta b_k^\sigma\right) + \\
&\quad -\gamma^{kl}b_\sigma^i b_l^\theta\nabla_\theta\left(b_i^\beta\nabla_\beta b_k^\sigma\right) + \gamma^{kl}b_\sigma^i b_l^\theta\left(\nabla_\theta b_i^\beta\right)\left(\nabla_\beta b_k^\sigma\right) \quad .
\end{aligned}$$

De modo análogo temos

$$\begin{aligned}
\gamma^{ij}\gamma^{kl}R_{ilkj} &= \gamma^{kl}b_i^\beta\nabla_\beta\left(b_\sigma^i b_l^\theta\nabla_\theta b_k^\sigma\right) - \gamma^{kl}b_i^\beta\left(\nabla_\beta b_\sigma^i\right)\left(b_l^\theta\nabla_\theta b_k^\sigma\right) + \\
&\quad -\gamma^{kl}b_\sigma^i b_i^\beta\left(\nabla_\beta b_l^\theta\right)\left(\nabla_\theta b_k^\sigma\right) + \\
&\quad -\gamma^{kl}b_l^\theta\nabla_\theta\left(b_\sigma^i b_i^\beta\nabla_\beta b_k^\sigma\right) + \gamma^{kl}b_l^\theta\left(\nabla_\theta b_\sigma^i\right)\left(b_i^\beta\nabla_\beta b_k^\sigma\right) + \\
&\quad +\gamma^{kl}b_\sigma^i b_l^\theta\left(\nabla_\theta b_i^\beta\right)\left(\nabla_\beta b_k^\sigma\right) \quad .
\end{aligned}$$

Note que $b_\sigma^i b_l^\theta\nabla_\theta b_k^\sigma$ é um escalar com relação aos índices do espaço-tempo. Assim

$$\begin{aligned}
\nabla_\beta\left(b_\sigma^i b_l^\theta\nabla_\theta b_k^\sigma\right) &= \partial_\beta\left(b_\sigma^i b_l^\theta\nabla_\theta b_k^\sigma\right) \quad , \\
\nabla_\theta\left(b_\sigma^i b_i^\beta\nabla_\beta b_k^\sigma\right) &= \partial_\theta\left(b_\sigma^i b_i^\beta\nabla_\beta b_k^\sigma\right) \quad .
\end{aligned}$$

Mais ainda, repare que

$$\overset{(3)}{\Gamma}{}^{i}_{jk} = b_\alpha^i b_k^\beta\nabla_\beta b_j^\alpha = b_\alpha^i\nabla_k b_j^\alpha \quad . \qquad \text{(B.4)}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\gamma^{ij}\gamma^{kl}R_{ilkj} &= \gamma^{kl}b_i^\beta\partial_\beta\left(\overset{(3)}{\Gamma}{}^{i}_{lk}\right) - \gamma^{kl}b_l^\theta\partial_\theta\left(\overset{(3)}{\Gamma}{}^{i}_{ik}\right) + \\
&\quad -\gamma^{kl}\left(b_i^\beta\nabla_\beta b_\sigma^i\right)\left(b_l^\theta\nabla_\theta b_k^\sigma\right) - \gamma^{kl}b_\sigma^i\left(b_i^\beta\nabla_\beta b_l^\theta\right)\left(\nabla_\theta b_k^\sigma\right) + \\
&\quad +\gamma^{kl}\left(b_l^\theta\nabla_\theta b_\sigma^i\right)\left(b_i^\beta\nabla_\beta b_k^\sigma\right) + \gamma^{kl}b_\sigma^i\left(b_l^\theta\nabla_\theta b_i^\beta\right)\left(\nabla_\beta b_k^\sigma\right) \quad .
\end{aligned}$$

Usando o fato de que

$$b_l^\theta \nabla_\theta b_k^\sigma = \nabla_l b_k^\sigma = -K_{lk} n^\sigma + \overset{(3)}{\Gamma}{}^m_{lk} b_m^\sigma \qquad ; \tag{B.5}$$

de onde é obvio que

$$\begin{aligned}
b_i^\beta \nabla_\beta b_l^\theta &= -K_{il} n^\theta + \overset{(3)}{\Gamma}{}^m_{il} b_m^\theta \qquad ; \\
b_i^\beta \nabla_\beta b_k^\sigma &= -K_{ik} n^\sigma + \overset{(3)}{\Gamma}{}^m_{ik} b_m^\sigma \qquad , \\
b_l^\theta \nabla_\theta b_i^\beta &= -K_{li} n^\beta + \overset{(3)}{\Gamma}{}^m_{li} b_m^\beta \qquad ,
\end{aligned}$$

chegamos a

$$\begin{aligned}
\gamma^{ij}\gamma^{kl} R_{ilkj} &= \gamma^{kl} b_i^\beta \partial_\beta \left(\overset{(3)}{\Gamma}{}^i_{lk}\right) - \gamma^{kl} b_l^\theta \partial_\theta \left(\overset{(3)}{\Gamma}{}^i_{ik}\right) + \\
&\quad -\gamma^{kl}\left(b_i^\beta \nabla_\beta b_\sigma^i\right)\left(-K_{lk} n^\sigma + \overset{(3)}{\Gamma}{}^m_{lk} b_m^\sigma\right) + \\
&\quad -\gamma^{kl} b_\sigma^i \left(-K_{il} n^\theta + \overset{(3)}{\Gamma}{}^m_{il} b_m^\theta\right)\left(\nabla_\theta b_k^\sigma\right) + \\
&\quad +\gamma^{kl}\left(b_l^\theta \nabla_\theta b_\sigma^i\right)\left(-K_{ik} n^\sigma + \overset{(3)}{\Gamma}{}^m_{ik} b_m^\sigma\right) + \\
&\quad +\gamma^{kl} b_\sigma^i \left(-K_{li} n^\beta + \overset{(3)}{\Gamma}{}^m_{li} b_m^\beta\right)\left(\nabla_\beta b_k^\sigma\right) \qquad .
\end{aligned}$$

Rearranjando os termos,

$$\begin{aligned}
\gamma^{ij}\gamma^{kl} R_{ilkj} &= \gamma^{kl} b_i^\beta \partial_\beta \left(\overset{(3)}{\Gamma}{}^i_{lk}\right) - \gamma^{kl} b_l^\theta \partial_\theta \left(\overset{(3)}{\Gamma}{}^i_{ik}\right) + \\
&\quad +\gamma^{kl}\left(b_i^\beta \nabla_\beta b_\sigma^i\right) K_{lk} n^\sigma - \gamma^{kl}\left(b_i^\beta \nabla_\beta b_\sigma^i\right) \overset{(3)}{\Gamma}{}^m_{lk} b_m^\sigma + \\
&\quad +\gamma^{kl} b_\sigma^i K_{il} n^\theta - \gamma^{kl} b_\sigma^i \overset{(3)}{\Gamma}{}^m_{il} b_m^\theta \left(\nabla_\theta b_k^\sigma\right) + \\
&\quad -\gamma^{kl}\left(b_l^\theta \nabla_\theta b_\sigma^i\right) K_{ik} n^\sigma + \gamma^{kl}\left(b_l^\theta \nabla_\theta b_\sigma^i\right) \overset{(3)}{\Gamma}{}^m_{ik} b_m^\sigma + \\
&\quad -\gamma^{kl} b_\sigma^i K_{li} n^\beta + \gamma^{kl} b_\sigma^i \overset{(3)}{\Gamma}{}^m_{li} b_m^\beta \left(\nabla_\beta b_k^\sigma\right) \qquad .
\end{aligned}$$

Renomeando índices mudos,

$$\begin{aligned}
\gamma^{ij}\gamma^{kl}R_{ilkj} &= \gamma^{kl}b_i^{\beta}\partial_{\beta}\left(\overset{(3)}{\Gamma}{}^{i}_{lk}\right) - \gamma^{kl}b_l^{0}\partial_{0}\left(\overset{(3)}{\Gamma}{}^{i}_{ik}\right) + \\
&+\gamma^{kl}\left(b_i^{\beta}\nabla_{\beta}b_{\sigma}^{i}\right)K_{lk}n^{\sigma} - \gamma^{kl}\left(b_i^{\beta}\nabla_{\beta}b_{\sigma}^{i}\right)\overset{(3)}{\Gamma}{}^{m}_{lk}b_m^{\sigma} + \\
&+\gamma^{kl}b_{\sigma}^{i}\left(\nabla_0 b_k^{\sigma}\right)K_{il}n^{0} - \gamma^{kl}b_{\sigma}^{i}\left(\nabla_0 b_k^{\sigma}\right)\overset{(3)}{\Gamma}{}^{m}_{il}b_m^{0} + \\
&-\gamma^{kl}\left(b_l^{0}\nabla_0 b_{\sigma}^{i}\right)K_{ik}n^{\sigma} + \gamma^{kl}\left(b_l^{0}\nabla_0 b_{\sigma}^{i}\right)\overset{(3)}{\Gamma}{}^{m}_{ik}b_m^{\sigma} + \\
&-\gamma^{kl}b_{\sigma}^{i}\left(\nabla_0 b_k^{\sigma}\right)K_{li}n^{0} + \gamma^{kl}b_{\sigma}^{i}\left(\nabla_0 b_k^{\sigma}\right)\overset{(3)}{\Gamma}{}^{m}_{li}b_m^{0} \quad .
\end{aligned}$$

Usando a propriedade de simetria da curvatura extrínseca e da conexão $\overset{(3)}{\Gamma}{}^{m}_{il}$ vemos que alguns termos se cancelam:

$$\begin{aligned}
\gamma^{ij}\gamma^{kl}R_{ilkj} &= \gamma^{kl}b_i^{\beta}\partial_{\beta}\left(\overset{(3)}{\Gamma}{}^{i}_{lk}\right) - \gamma^{kl}b_l^{0}\partial_{0}\left(\overset{(3)}{\Gamma}{}^{i}_{ik}\right) + \\
&+\gamma^{kl}\left(b_i^{\beta}\nabla_{\beta}b_{\sigma}^{i}\right)K_{lk}n^{\sigma} - \gamma^{kl}\left(b_i^{\beta}\nabla_{\beta}b_{\sigma}^{i}\right)\overset{(3)}{\Gamma}{}^{m}_{lk}b_m^{\sigma} + \\
&-\gamma^{kl}\left(b_l^{0}\nabla_0 b_{\sigma}^{i}\right)K_{ik}n^{\sigma} + \gamma^{kl}\left(b_l^{0}\nabla_0 b_{\sigma}^{i}\right)\overset{(3)}{\Gamma}{}^{m}_{ik}b_m^{\sigma}
\end{aligned}$$

Trabalhando individualmente os termos, vemos que

$$\begin{aligned}
\gamma^{kl}\left(b_i^{\beta}\nabla_{\beta}b_{\sigma}^{i}\right)\overset{(3)}{\Gamma}{}^{m}_{lk}b_m^{\sigma} &= \gamma^{kl}b_i^{\beta}\nabla_{\beta}\left(b_{\sigma}^{i}b_m^{\sigma}\right)\overset{(3)}{\Gamma}{}^{m}_{lk} - \gamma^{kl}\left(b_i^{\beta}b_{\sigma}^{i}\nabla_{\beta}b_m^{\sigma}\right)\overset{(3)}{\Gamma}{}^{m}_{lk} = \\
&= \gamma^{kl}b_i^{\beta}\nabla_{\beta}\left(\delta_m^{i}\right)\overset{(3)}{\Gamma}{}^{m}_{lk} - \gamma^{kl}\overset{(3)}{\Gamma}{}^{i}_{im}\overset{(3)}{\Gamma}{}^{m}_{lk} = \\
&= -\gamma^{kl}\overset{(3)}{\Gamma}{}^{i}_{im}\overset{(3)}{\Gamma}{}^{m}_{lk} \quad ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^{kl}\left(b_l^{0}\nabla_0 b_{\sigma}^{i}\right)\overset{(3)}{\Gamma}{}^{m}_{ik}b_m^{\sigma} &= \gamma^{kl}b_l^{0}\nabla_0\left(b_{\sigma}^{i}b_m^{\sigma}\right)\overset{(3)}{\Gamma}{}^{m}_{ik} - \gamma^{kl}\left(b_{\sigma}^{i}b_l^{0}\nabla_0 b_m^{\sigma}\right)\overset{(3)}{\Gamma}{}^{m}_{ik} = \\
&= -\gamma^{kl}\overset{(3)}{\Gamma}{}^{i}_{lm}\overset{(3)}{\Gamma}{}^{m}_{ik} \quad ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^{kl}\left(b_i^{\beta}\nabla_{\beta}b_{\sigma}^{i}\right)K_{lk}n^{\sigma} &= \gamma^{kl}b_i^{\beta}\nabla_{\beta}\left(b_{\sigma}^{i}n^{\sigma}\right)K_{lk} - \gamma^{kl}b_i^{\beta}b_{\sigma}^{i}\left(\nabla_{\beta}n^{\sigma}\right)K_{lk} = \\
&= -b_{\sigma}^{i}b_i^{\beta}\left(\nabla_{\beta}n^{\sigma}\right)K = K^2 \quad ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^{kl}\left(b_l^{0}\nabla_0 b_{\sigma}^{i}\right)K_{ik}n^{\sigma} &= \gamma^{kl}b_l^{0}\nabla_0\left(b_{\sigma}^{i}n^{\sigma}\right)K_{ik} - \gamma^{kl}\left(b_l^{0}b_{\sigma}^{i}\nabla_0 n^{\sigma}\right)K_{ik} = \\
&= -\gamma^{kl}\left(b_l^{0}b_{\sigma}^{i}\nabla_0 n^{\sigma}\right)K_{ik} = -\gamma^{kl}\left(-K_l{}^{i}\right)K_{ik} = \\
&= K^{ki}K_{ik} \quad .
\end{aligned}$$

Nestas passagens usamos a regra de Leibniz e as expressões (B.4) e (B.2). Note ainda que

$$b_i^\beta \partial_\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^i}\frac{\partial}{\partial x^\beta} = \frac{\partial}{\partial \xi^i} = \partial_i \quad .$$

Assim

$$\begin{aligned}
\gamma^{ij}\gamma^{kl}R_{ilkj} &= \gamma^{kl}\partial_i\left(\overset{(3)}{\Gamma}{}^i_{lk}\right) - \gamma^{kl}\partial_l\left(\overset{(3)}{\Gamma}{}^i_{ik}\right) + \\
&\quad + K^2 + \gamma^{kl}\overset{(3)}{\Gamma}{}^i_{im}\overset{(3)}{\Gamma}{}^m_{lk} + \\
&\quad - K^{ki}K_{ik} - \gamma^{kl}\overset{(3)}{\Gamma}{}^i_{lm}\overset{(3)}{\Gamma}{}^m_{ik} \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^{ij}\gamma^{kl}R_{ilkj} &= \gamma^{kl}\left(\partial_i\overset{(3)}{\Gamma}{}^i_{lk} - \partial_l\overset{(3)}{\Gamma}{}^i_{ik} + \overset{(3)}{\Gamma}{}^i_{im}\overset{(3)}{\Gamma}{}^m_{lk} - \overset{(3)}{\Gamma}{}^i_{lm}\overset{(3)}{\Gamma}{}^m_{ik}\right) + \\
&\quad - K^{ki}K_{ik} + K^2 \quad ,
\end{aligned}$$

$$\gamma^{ij}\gamma^{kl}R_{ilkj} = \overset{(3)}{R} + K^2 - K^{ki}K_{ik} \quad . \tag{B.6}$$

Substituindo (B.3) e (B.6) em (B.1) chegamos a

$$\begin{aligned}
R &= -2\left(-K^{ki}K_{ik} + K^2 + \nabla_\alpha\left(n^\beta\nabla_\beta n^\alpha\right) - \nabla_\beta\left(n^\beta\nabla_\alpha n^\alpha\right)\right) + \\
&\quad + \overset{(3)}{R} + K^2 - K^{ki}K_{ik} \\
&= 2K^{ki}K_{ik} - 2K^2 - 2\nabla_\alpha\left(n^\beta\nabla_\beta n^\alpha\right) + 2\nabla_\beta\left(n^\beta\nabla_\alpha n^\alpha\right) + \\
&\quad + \overset{(3)}{R} + K^2 - K^{ki}K_{ik} \\
&= \overset{(3)}{R} + K^{ki}K_{ik} - K^2 - 2\nabla_\alpha\left(n^\beta\nabla_\beta n^\alpha\right) + 2\nabla_\beta\left(n^\beta\nabla_\alpha n^\alpha\right) \quad .
\end{aligned}$$

Finalmente, vemos que a densidade Lagrangiana é expressa por

$$\begin{aligned}
L &= -\frac{1}{2\chi}\sqrt{-g}R = \\
&= \frac{1}{2\chi}\sqrt{-g}\left(\overset{(3)}{R} + K^{ki}K_{ik} - K^2 - 2\nabla_\alpha\left(n^\beta\nabla_\beta n^\alpha\right) + 2\nabla_\beta\left(n^\beta\nabla_\alpha n^\alpha\right)\right)
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Note, porém que os dois últimos termos do segundo membro nada mais são do que termos de superfície. Para tanto, seja

$$A \equiv \sqrt{-g}\left[-2\nabla_\alpha\left(n^\beta\nabla_\beta n^\alpha\right) + 2\nabla_\beta\left(n^\beta\nabla_\alpha n^\alpha\right)\right] \quad .$$

Renomeando índices mudos, temos

$$
\begin{aligned}
A &= \sqrt{-g}\left[-2\nabla_\alpha\left(n^\beta\nabla_\beta n^\alpha\right)+2\nabla_\alpha\left(n^\alpha\nabla_\beta n^\beta\right)\right]= \\
&= \sqrt{-g}\nabla_\alpha\left[-2\left(n^\beta\nabla_\beta n^\alpha\right)+2\left(n^\alpha\nabla_\beta n^\beta\right)\right]= \\
&= \sqrt{-g}\partial_\alpha\left[-2\left(n^\beta\nabla_\beta n^\alpha\right)+2\left(n^\alpha\nabla_\beta n^\beta\right)\right]+ \\
&\quad +\sqrt{-g}\Gamma^\alpha_{\alpha\theta}\left[-2\left(n^\beta\nabla_\beta n^\theta\right)+2\left(n^\theta\nabla_\beta n^\beta\right)\right] \quad .
\end{aligned}
$$

Usando a regra de Leibniz e o fato de que

$$
\nabla_\alpha\sqrt{-g}=\partial_\alpha\sqrt{-g}-\sqrt{-g}\Gamma^\theta_{\alpha\theta} \quad ,
$$

então

$$
\begin{aligned}
A &= \partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\left[-2\left(n^\beta\nabla_\beta n^\alpha\right)+2\left(n^\alpha\nabla_\beta n^\beta\right)\right]\right)+ \\
&\quad -\left(\partial_\alpha\sqrt{-g}\right)\left[-2\left(n^\beta\nabla_\beta n^\alpha\right)+2\left(n^\alpha\nabla_\beta n^\beta\right)\right]+ \\
&\quad +\sqrt{-g}\Gamma^\alpha_{\alpha\theta}\left[-2\left(n^\beta\nabla_\beta n^\theta\right)+2\left(n^\theta\nabla_\beta n^\beta\right)\right] \quad .
\end{aligned}
$$

Novamente, renomeando índices mudos, obtemos

$$
\begin{aligned}
A &= \partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\left[-2\left(n^\beta\nabla_\beta n^\alpha\right)+2\left(n^\alpha\nabla_\beta n^\beta\right)\right]\right)+ \\
&\quad -\left(\partial_\theta\sqrt{-g}\right)\left[-2\left(n^\beta\nabla_\beta n^\theta\right)+2\left(n^\theta\nabla_\beta n^\beta\right)\right]+ \\
&\quad +\sqrt{-g}\Gamma^\alpha_{\alpha\theta}\left[-2\left(n^\beta\nabla_\beta n^\theta\right)+2\left(n^\theta\nabla_\beta n^\beta\right)\right] \quad .
\end{aligned}
$$

Lembremos que

$$
\partial_\theta\left(\sqrt{-g}\right)=\sqrt{-g}\Gamma^\alpha_{\theta\alpha} \quad .
$$

Assim:

$$
\begin{aligned}
A &= \partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\left[-2\left(n^\beta\nabla_\beta n^\alpha\right)+2\left(n^\alpha\nabla_\beta n^\beta\right)\right]\right)+ \\
&\quad -\sqrt{-g}\Gamma^\alpha_{\theta\alpha}\left[-2\left(n^\beta\nabla_\beta n^\theta\right)+2\left(n^\theta\nabla_\beta n^\beta\right)\right]+ \\
&\quad +\sqrt{-g}\Gamma^\alpha_{\alpha\theta}\left[-2\left(n^\beta\nabla_\beta n^\theta\right)+2\left(n^\theta\nabla_\beta n^\beta\right)\right] \quad .
\end{aligned}
$$

Empregando a simetria da conexão pela troca dos índices inferiores, temos

$$
A=\partial_\alpha\left(\sqrt{-g}\left[-2\left(n^\beta\nabla_\beta n^\alpha\right)+2\left(n^\alpha\nabla_\beta n^\beta\right)\right]\right) \quad ,
$$

o que nos mostra que A é de fato um termo de superfície.

Desprezando os termos de superfície da Lagrangiana, vemos que a expressão (B.7) se apresenta numa forma bem simples:

$$
L=\frac{1}{2\chi}\sqrt{-g}\left(\overset{(3)}{R}+K^{ki}K_{ik}-K^2\right) \quad . \tag{B.8}
$$

B.2 Teleparalelismo

A Lagrangiana Teleparalela é dada por

$$L = \kappa e\left[\frac{1}{4}T^{abc}T_{abc} + \frac{1}{2}T^{abc}T_{bac} - T^{c}T_{c}\right] \quad .$$

Podemos reescrevê-la da seguinte forma,

$$L = \kappa e \Sigma^{abc}T_{abc} \quad , \tag{B.9}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Sigma^{abc} &= \frac{1}{4}\left(T^{abc} + T^{bac} - T^{cab}\right) + \frac{1}{2}\left(\eta^{ac}T^{b} - \eta^{ab}T^{c}\right) \quad , && \text{(B.10)}\\
T^{c} &= T^{a}{}_{ac} \quad , && \text{(B.11)}\\
T^{abc} &= e^{b\mu}e^{c\nu}T^{a}{}_{\mu\nu} = e^{b\mu}e^{c\nu}\left(\partial_{\mu}e^{a}_{\nu} - \partial_{\nu}e^{a}_{\mu}\right) \quad . && \text{(B.12)}
\end{aligned}$$

Desta última expressão segue que

$$\begin{aligned}
T^{abc} &= e^{b\mu}e^{c\nu}T^{a}{}_{\mu\nu} = e^{b0}e^{c\nu}T^{a}{}_{0\nu} + e^{bi}e^{c\nu}T^{a}{}_{i\nu} =\\
&= e^{b0}e^{c0}T^{a}{}_{00} + e^{b0}e^{ci}T^{a}{}_{0i} + e^{bi}e^{c0}T^{a}{}_{i0} + e^{bi}e^{cj}T^{a}{}_{ij} =\\
&= \left(e^{b0}e^{ci} - e^{bi}e^{c0}\right)T^{a}{}_{0i} + e^{bi}e^{cj}T^{a}{}_{ij} \quad . \qquad \text{(B.13)}
\end{aligned}$$

Note que o termo $T^{a}{}_{00}$ é nulo devido à antissimetria da torção, e que $T^{a}{}_{i0} = -T^{a}{}_{0i}$, e repare que $\Sigma^{abc} = -\Sigma^{acb}$.

Comecemos recordando que as tetradas em termos das variáveis ADM são dadas por:

$$\begin{aligned}
e^{a}_{0} &= n^{a}N + b^{a}_{j}N^{j} \quad , && \text{(B.14)}\\
e^{a}_{i} &= b^{a}_{i} \quad . && \text{(B.15)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{0}_{b} &= -\frac{1}{N}n_{b} \quad , && \text{(B.16)}\\
e^{i}_{b} &= b^{i}_{b} + \frac{N^{i}}{N}n_{b} \quad . && \text{(B.17)}
\end{aligned}$$

Substituindo estas expressões em (B.13):

$$\begin{aligned}
T^{abc} &= \left[\left(-\frac{1}{N}n^{b}\right)\left(b^{ci} + \frac{N^{i}}{N}n^{c}\right) - \left(b^{bi} + \frac{N^{i}}{N}n^{b}\right)\left(-\frac{1}{N}n^{c}\right)\right]T^{a}{}_{0i} +\\
&\quad + \left(b^{bi} + \frac{N^{i}}{N}n^{b}\right)\left(b^{cj} + \frac{N^{j}}{N}n^{c}\right)T^{a}{}_{ij}\\
&= \left[-\frac{1}{N}n^{b}b^{ci} - \frac{1}{N}n^{b}\frac{N^{i}}{N}n^{c} + \frac{1}{N}n^{c}b^{bi} + \frac{1}{N}n^{c}\frac{N^{i}}{N}n^{b}\right]T^{a}{}_{0i} +\\
&\quad + \left(b^{bi}b^{cj} + \frac{N^{i}}{N}n^{b}b^{cj} + b^{bi}\frac{N^{j}}{N}n^{c} + \frac{N^{i}}{N}\frac{N^{j}}{N}n^{b}n^{c}\right)T^{a}{}_{ij} \quad .
\end{aligned}$$

Novamente, usando a antissimetria da torção, podemos desprezar o termo $\frac{N^i}{N}\frac{N^j}{N}n^b n^c$, que é simétrico pela troca de i e j. Ainda podemos trocar os mesmos índices em $\frac{N^i}{N}n^b b^{cj}$, se também efetuarmos a mudança do sinal deste. Logo,

$$
\begin{aligned}
T^{abc} &= \frac{1}{N}\left[-n^b b^{ci} + n^c b^{bi}\right] T^a{}_{0i} + \\
&+ b^{bi} b^{cj} T^a{}_{ij} + \left(-\frac{N^j}{N} n^b b^{ci} + \frac{N^j}{N} n^c b^{bi}\right) T^a{}_{ij} \quad .
\end{aligned}
$$

A expressão acima pode ser reescrita como

$$
T^{abc} = \frac{1}{N}\left[-n^b b^{ci} + n^c b^{bi}\right]\left(T^a{}_{0i} + N^j T^a{}_{ij}\right) + b^{bi} b^{cj} T^a{}_{ij} \quad .
$$

Sejam

$$
\rho^{abc} \equiv \frac{1}{N}\left[-n^b b^{ci} + n^c b^{bi}\right] l^a{}_i \quad , \tag{B.18}
$$

$$
l^a{}_i \equiv \left(T^a{}_{0i} + N^j T^a{}_{ij}\right) \quad , \tag{B.19}
$$

$$
\bar{T}^{abc} \equiv b^{bi} b^{cj} T^a{}_{ij} \quad , \tag{B.20}
$$

sendo que ρ^{abc} e $\bar{T}^{abc}$ satisfazem a condição de antissimetria

$$
\begin{aligned}
\rho^{abc} &= -\rho^{acb} \quad , \\
\bar{T}^{abc} &= -\bar{T}^{acb} \quad .
\end{aligned}
$$

Então

$$
T^{abc} = \rho^{abc} + \bar{T}^{abc} \quad .
$$

Desta forma temos

$$
\begin{aligned}
\Sigma^{abc} &= \frac{1}{4}\left(\bar{T}^{abc} + \rho^{abc} + \bar{T}^{bac} + \rho^{bac} - \bar{T}^{cab} - \rho^{cab}\right) + \\
&+ \frac{1}{2}\left(\eta^{ac}\bar{T}^b + \eta^{ac}\rho^b - \eta^{ab}\bar{T}^c - \eta^{ab}\rho^c\right) \quad ,
\end{aligned}
$$

onde, naturalmente

$$
\begin{aligned}
\bar{T}^b &= \bar{T}^a{}_a{}^b \quad , \\
\rho^b &= \rho^a{}_a{}^b \quad .
\end{aligned}
$$

Definindo

$$
S^{abc} \equiv \frac{1}{4}\left(\rho^{abc} + \rho^{bac} - \rho^{cab}\right) + \frac{1}{2}\left(\eta^{ac}\rho^b - \eta^{ab}\rho^c\right) \quad , \tag{B.21}
$$

$$
\bar{\Sigma}^{abc} \equiv \frac{1}{4}\left(\bar{T}^{abc} + \bar{T}^{bac} - \bar{T}^{cab}\right) + \frac{1}{2}\left(\eta^{ac}\bar{T}^b - \eta^{ab}\bar{T}^c\right) \quad , \tag{B.22}
$$

temos

$$\Sigma^{abc} = S^{abc} + \bar{\Sigma}^{abc} \quad ,$$

onde $\bar{\Sigma}^{abc} = -\bar{\Sigma}^{acb}$. Daí segue que

$$\begin{aligned}
\Sigma^{abc}T_{abc} &= \left(S^{abc} + \bar{\Sigma}^{abc}\right)\left(\rho_{abc} + \bar{T}_{abc}\right) = \\
&= \left(S^{abc}\rho_{abc} + S^{abc}\bar{T}_{abc} + \bar{\Sigma}^{abc}\rho_{abc} + \bar{\Sigma}^{abc}\bar{T}_{abc}\right) \quad .
\end{aligned}$$

Veja que

$$\begin{aligned}
S^{abc}\bar{T}_{abc} &= S_{abc}\bar{T}^{abc} = \left[\frac{1}{4}\left(\rho_{abc} + \rho_{bac} - \rho_{cab}\right) + \frac{1}{2}\left(\eta_{ac}\rho_b - \eta_{ab}\rho_c\right)\right]\bar{T}^{abc} = \\
&= \frac{1}{4}\left(\rho_{abc}\bar{T}^{abc} + \rho_{bac}\bar{T}^{abc} - \rho_{cab}\bar{T}^{abc}\right) + \frac{1}{2}\left(\eta_{ac}\rho_b\bar{T}^{abc} - \eta_{ab}\rho_c\bar{T}^{abc}\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(\rho_{abc}\bar{T}^{abc} + \rho_{abc}\bar{T}^{bac} - \rho_{abc}\bar{T}^{cab}\right) + \frac{1}{2}\left(-\eta_{ac}\rho_b\bar{T}^{acb} - \rho_c\bar{T}^{c}\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(\bar{T}^{abc} + \bar{T}^{bac} - \bar{T}^{cab}\right)\rho_{abc} + \frac{1}{2}\left(-\rho_b\bar{T}^{b} - \rho_c\bar{T}^{c}\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(\bar{T}^{abc} + \bar{T}^{bac} - \bar{T}^{cab}\right)\rho_{abc} + \frac{1}{2}\left(-\eta^{ac}\rho_{acb}\bar{T}^{b} - \eta^{ab}\rho_{abc}\bar{T}^{c}\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(\bar{T}^{abc} + \bar{T}^{bac} - \bar{T}^{cab}\right)\rho_{abc} + \frac{1}{2}\left(\eta^{ac}\bar{T}^{b} - \eta^{ab}\bar{T}^{c}\right)\rho_{abc} = \\
&= \bar{\Sigma}^{abc}\rho_{abc} \quad .
\end{aligned}$$

Logo,

$$\Sigma^{abc}T_{abc} = S^{abc}\rho_{abc} + 2\bar{\Sigma}^{abc}\rho_{abc} + \bar{\Sigma}^{abc}\bar{T}_{abc} \quad . \tag{B.23}$$

Calculemos isoladamente cada um destes termos:

$$\begin{aligned}
S^{abc}\rho_{abc} &= \left[\frac{1}{4}\left(\rho^{abc} + \rho^{bac} - \rho^{cab}\right) + \frac{1}{2}\left(\eta^{ac}\rho^{b} - \eta^{ab}\rho^{c}\right)\right]\rho_{abc} = \\
&= \frac{1}{4}\left(\rho^{abc}\rho_{abc} + \rho^{bac}\rho_{abc} - \rho^{cab}\rho_{abc}\right) + \frac{1}{2}\left(\eta^{ac}\rho^{b}\rho_{abc} - \eta^{ab}\rho^{c}\rho_{abc}\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(\rho^{abc}\rho_{abc} + \rho^{bac}\rho_{abc} + \rho^{bac}\rho_{abc}\right) + \frac{1}{2}\left(-\rho_b\rho^{b} - \rho^{c}\rho_c\right) \quad ,
\end{aligned}$$

$$S^{abc}\rho_{abc} = \frac{1}{4}\rho^{abc}\rho_{abc} + \frac{1}{2}\rho^{bac}\rho_{abc} - \rho^{c}\rho_c \quad . \tag{B.24}$$

O primeiro termo desta expressão pode ser dado por:

$$\begin{aligned}
\rho^{abc}\rho_{abc} &= \frac{1}{N}\left[-n^{b}b^{ci} + n^{c}b^{bi}\right]l^{a}{}_{i}\frac{1}{N}\left[-n_b b^{k}_{c} + n_c b^{k}_{b}\right]l_{ak} = \\
&= \left(\frac{1}{N}\right)^2\left[\left(n_b n^{b}\right)\left(b^{ci}b^{k}_{c}\right) - \left(b^{ci}n_c\right)\left(b^{k}_{b}n^{b}\right) + \right. \\
&\quad \left. - \left(n_b b^{bi}\right)\left(b^{k}_{c}n^{c}\right) + \left(n_c n^{c}\right)\left(b^{bi}b^{k}_{b}\right)\right]l^{a}{}_{i}l_{ak} \\
&= \left(\frac{1}{N}\right)^2\left[-2b^{ci}b^{k}_{c} - 2\left(b^{ci}n_c\right)\left(b^{k}_{b}n^{b}\right)\right]l^{a}{}_{i}l_{ak} \quad ,
\end{aligned}$$

$$\rho^{abc}\rho_{abc} = -2\left(\frac{1}{N}\right)^2 \left[\gamma^{ik} + \left(b^{ci}n_c\right)\left(b^k_b n^b\right)\right] l^a{}_i l_{ak} \quad . \tag{B.25}$$

O segundo termo de (B.24) é:

$$\begin{aligned}
\rho^{bac}\rho_{abc} &= \frac{1}{N}\left[-n^a b^{ci} + n^c b^{ai}\right] l^b{}_i \frac{1}{N}\left[-n_b b^k_c + n_c b^k_b\right] l_{ak} = \\
&= \left(\frac{1}{N}\right)^2 \left[\left[n^a n_b \left(b^{ci}b^k_c\right) - n^a b^k_b \left(b^{ci}n_c\right) +\right]\right. \\
&\quad \left. -b^{ai}n_b\left(n^c b^k_c\right) + \left(n_c n^c\right) b^{ai}b^k_b\right] l^b{}_i l_{ak} \\
&= \left(\frac{1}{N}\right)^2 \left[n^a n_b \gamma^{ik} - b^{ai}b^k_b - n^a b^k_b\left(b^{ci}n_c\right) - b^{ai}n_b\left(n^c b^k_c\right)\right] l^b{}_i l_{ak} \quad .
\end{aligned}$$

Perceba que renomeando índices mudos, e subindo e descendo índices de Lorentz contraídos, vemos que

$$b^{ai}n_b\left(n^c b^k_c\right) l^b{}_i l_{ak} = b^{bi}n_a\left(n^c b^k_c\right) l^a{}_i l_{bk} = b^i_b n^a\left(n^c b^k_c\right) l_{ai} l^b{}_k = b^k_b n^a\left(n^c b^i_c\right) l_{ak} l^b{}_i \quad ,$$

de onde temos

$$\rho^{bac}\rho_{abc} = \left(\frac{1}{N}\right)^2 \left[n^a n_b \gamma^{ik} - b^{ai}b^k_b - 2n^a b^k_b\left(b^{ci}n_c\right)\right] l^b{}_i l_{ak} \quad . \tag{B.26}$$

Finalmente, calculando o terceiro termos de (B.24), chegamos a

$$\begin{aligned}
\rho^c\rho_c &= \frac{1}{N}\left[-n^a b^{ck} + n^c b^{ak}\right] l_{ak} \frac{1}{N}\left[-n_b b^i_c + n_c b^i_b\right] l^b{}_i = \\
&= \left(\frac{1}{N}\right)^2 \left[n^a n_b b^{ck}b^i_c - n^a b^i_b\left(b^{ck}n_c\right) - b^{ak}n_b\left(n^c b^i_c\right) + \left(n^c n_c\right) b^{ak}b^i_b\right] l^b{}_i l_{ak} \quad ,
\end{aligned}$$

Repare novamente que renomeando índices mudos, e subindo e descendo índices de Lorentz contraídos,

$$b^{ak}n_b\left(n^c b^i_c\right) l^b{}_i l_{ak} = b^{bk}n_a\left(n^c b^i_c\right) l^a{}_i l_{bk} = b^k_b n^a\left(n^c b^i_c\right) l_{ai} l^b{}_k = b^i_b n^a\left(n^c b^k_c\right) l_{ak} l^b{}_i \quad ,$$

de onde segue

$$\rho^c\rho_c = \left(\frac{1}{N}\right)^2 \left[n^a n_b \gamma^{ik} - 2n^a b^i_b\left(b^{ck}n_c\right) - b^{ak}b^i_b\right] l^b{}_i l_{ak} \quad , \tag{B.27}$$

Substituindo (B.25), (B.26) e (B.27) em (B.23) obtemos

$$\begin{aligned}
S^{abc}\rho_{abc} &= -2\frac{1}{4}\left(\frac{1}{N}\right)^2 \left[\gamma^{ik} + \left(b^{ci}n_c\right)\left(b^k_b n^b\right)\right] l^a{}_i l_{ak} + \\
&\quad +\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N}\right)^2 \left[n^a n_b \gamma^{ik} - b^{ai}b^k_b - 2n^a b^k_b\left(b^{ci}n_c\right)\right] l^b{}_i l_{ak} + \\
&\quad -\left(\frac{1}{N}\right)^2 \left[n^a n_b \gamma^{ik} - 2n^a b^i_b\left(b^{ck}n_c\right) - b^{ak}b^i_b\right] l^b{}_i l_{ak} \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{S}^{abc}\rho_{abc} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N}\right)^2\left[\gamma^{ik}+\left(b^{ci}n_c\right)\left(b_b^k n^b\right)\right]l^a{}_{,i}l_{ak}+ \\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N}\right)^2\left[n^a n_b\gamma^{ik}-b^{ai}b_b^k-2n^a b_b^k\left(b^{ci}n_c\right)\right]l^b{}_{,i}l_{ak}+ \\ &-\left(\frac{1}{N}\right)^2\left[n^a n_b\gamma^{ik}-2n^a b_b^i\left(b^{ck}n_c\right)-b^{ak}b_b^i\right]l^b{}_{,i}l_{ak} \quad . \end{aligned}$$

Multiplicando os dois lados da equação por N^2 e fazendo as distributivas, vemos que

$$\begin{aligned} N^2 S^{abc}\rho_{abc} &= -\frac{1}{2}\gamma^{ik}l^a{}_{,i}l_{ak}-\frac{1}{2}\left(b^{ci}n_c\right)\left(b_b^k n^b\right)l^a{}_{,i}l_{ak}+ \\ &+\frac{1}{2}n^a n_b\gamma^{ik}l^b{}_{,i}l_{ak}-\frac{1}{2}b^{ai}b_b^k l^b{}_{,i}l_{ak}-\frac{1}{2}2n^a b_b^k\left(b^{ci}n_c\right)l^b{}_{,i}l_{ak}+ \\ &-n^a n_b\gamma^{ik}l^b{}_{,i}l_{ak}+2n^a b_b^i\left(b^{ck}n_c\right)l^b{}_{,i}l_{ak}+b^{ak}b_b^i l_i^b l_{ak} \quad . \end{aligned}$$

Agrupando termos comuns,

$$\begin{aligned} N^2 S^{abc}\rho_{abc} &= -\frac{1}{2}\gamma^{ik}l^a{}_{,i}l_{ak}-\frac{1}{2}\left(b^{ci}n_c\right)\left(b_b^k n^b\right)l^a{}_{,i}l_{ak}+ \\ &-\frac{1}{2}n^a n_b\gamma^{ik}l^b{}_{,i}l_{ak}-\frac{1}{2}b^{ai}b_b^k l^b{}_{,i}l_{ak}-n^a b_b^k\left(b^{ci}n_c\right)l^b{}_{,i}l_{ak}+ \\ &+2n^a b_b^i\left(b^{ck}n_c\right)l^b{}_{,i}l_{ak}+b^{ak}b_b^i l_i^b l_{ak} \quad . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N^2 S^{abc}\rho_{abc} &= -\frac{1}{2}\gamma^{ik}l^a{}_{,i}l_{ak}-\frac{1}{2}\left(b^{ci}n_c\right)\left(b_b^k n^b\right)l^a{}_{,i}l_{ak}+ \\ &-\frac{1}{2}\gamma^{ik}\left(n_b l^b{}_{,i}\right)\left(n^a l_{ak}\right)-\frac{1}{2}b^{ai}b_b^k l^b{}_{,i}l_{ak}-\left(b^{ci}n_c\right)b_b^k l^b{}_{,i}\left(n^a l_{ak}\right)+ \\ &+2\left(b^{ck}n_c\right)b_b^i l^b{}_{,i}\left(n^a l_{ak}\right)+b^{ak}b_b^i l_i^b l_{ak} \quad . \end{aligned}$$

O segundo termo de (B.23) é:

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}^{abc}\rho_{abc} &= \bar{\Sigma}^{abc}\frac{1}{N}\left[-n_b b_c^k+n_c b_b^k\right]l_{ak}=\frac{1}{N}\left[-\bar{\Sigma}^{abc}n_b b_c^k+\bar{\Sigma}^{abc}n_c b_b^k\right]l_{ak}= \\ &=\frac{1}{N}\left[-\bar{\Sigma}^{abc}n_b b_c^k-\bar{\Sigma}^{acb}n_c b_b^k\right]l_{ak}=\frac{1}{N}\left[-\bar{\Sigma}^{abc}n_b b_c^k-\bar{\Sigma}^{abc}n_b b_c^k\right]l_{ak}= \\ &=-2\frac{1}{N}\left(\bar{\Sigma}^{abc}n_b b_c^k\right)l_{ak} \quad . \end{aligned}$$

Substituindo estes dois últimos resultados em (B.23), temos

$$\begin{aligned} \Sigma^{abc}T_{abc} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N}\right)^2\left[\gamma^{ik}+\left(b^{ci}n_c\right)\left(b_b^k n^b\right)\right]l^a{}_{,i}l_{ak}+ \\ &+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N}\right)^2\left[n^a n_b\gamma^{ik}-b^{ai}b_b^k-2n^a b_b^k\left(b^{ci}n_c\right)\right]l^b{}_{,i}l_{ak}+ \\ &-\left(\frac{1}{N}\right)^2\cdot\left[n^a n_b\gamma^{ik}-2n^a b_b^i\left(b^{ck}n_c\right)-b^{ak}b_b^i\right]l_i^b l_{ak}+ \\ &-4\frac{1}{N}\left(\bar{\Sigma}^{abc}n_b b_c^k\right)l_{ak}+\bar{\Sigma}^{abc}\bar{T}_{abc} \quad . \end{aligned}$$

Empregando o fato de que $b^{ci}n_c = 0$, ou seja, de que b^{ci} e n_c são ortogonais e rearranjando os termos, podemos constatar que

$$
\begin{aligned}
\Sigma^{abc}T_{abc} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{N}\right)^2 \left(\gamma^{ik}l^a{}_i l_{ak} + n^a n_b \gamma^{ik} l^b{}_i l_{ak} + b^{ai} b^k_b l^b{}_i l_{ak} - 2b^{ak} b^i_b l^b{}_i l_{ak}\right) + \\
&\quad -4\frac{1}{N}\left(\bar{\Sigma}^{abc} n_b b^k_c\right) l_{ak} + \bar{\Sigma}^{abc}\bar{T}_{abc} \qquad .
\end{aligned}
$$

Desta forma, a Lagrangiana Teleparalela na formulação ADM pode ser expressa como

$$
\begin{aligned}
L &= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\chi}\right)\frac{b}{N}\left[\left(\eta_{ab} + n_a n_b\right)\gamma^{ik} l^a{}_i l^b_k + b^i_a b^k_b l^b{}_i l^a_k - 2b^k_a b^i_b l^b{}_i l^a_k\right] + \\
&\quad -4\left(\frac{1}{2\chi}\right) b\left(\bar{\Sigma}_a{}^{bc} n_b b^k_c\right) l^a_k + \left(\frac{1}{2\chi}\right) N b \bar{\Sigma}^{abc}\bar{T}_{abc} \qquad .
\end{aligned}
$$