IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO IFT–T.010/09

Compactificação alternativa de dimensões extras em gravitação de Brans-Dicke

Julio Marny Hoff da Silva

Orientadora

Maria Cristina Batoni Abdalla

Co-orientadora

Maria Emília Xavier Guimarães

Agosto de 2009

Em memória de meu avô Marny Hoff.

É preferível a angústia entre a vitória e a derrota ao marasmo da alienação.

Milton Santos

Ella estaba en el horizonte. Me acerco dos pasos, ella se aleja dos pasos.

Camino dos pasos y el horizonte se corre diez pasos más alla

Por mucho que yo camine, nunca la alcanzare. ¿Para que sirve la utopía? Para eso sirve: para caminar.

Eduardo Galeano.

Será possível conhecer todo o universo? Meu Deus, achar o caminho no bairro já é difícil.

Wood Allen

Agradecimentos

A dificuldade em agradecer reside no risco do esquecimento. Muitas pessoas foram importantes, direta e indiretamente, ao longo da realização desse trabalho e portanto é possível, sempre, que haja nomes injustiçados residindo em algum lugar que não nas linhas abaixo. É-me entretanto necessário expressar minha gratidão:

À minha mãe, por todo o incentivo e abnegado apoio. Explicitando que o trabalho duro é muito mais do que falta de opção. Como já dito: "O homem é e não pode não ser."

Ao meu pai, por mostrar-me que alegria não tem muito a ver com bonança. Embora eu ainda ache que a diferença continua sendo assunto para especialistas. Como ele.

Aos meus segundos pais: madrinha Méia e padrinho Nelson.

Aos meus terceiros pais: dona Dora e seu Clóvis.

Aos professores de IFT. Em particular ao professor Aldrovandi, por suas aulas repletas de física, curiosidade, história, e mais física.

À professora Maria Cristina, por esses seis anos de convivência e ensinamentos, confiança e incentivo. É ainda meu projeto ter, como ela, esse elã pela física. À professora Maria Emília, pela co-orientação ao longo desses seis anos também, ensinando e incentivando. Sou-lhes grato como não se pode expressar, por me acolherem ainda no mestrado e desde cedo me colocarem de frente à pesquisa científica.

Ao professor José Abdalla Helayël-Neto pela paciência e incentivo.

À Ane (Picolinha) por todo o amor, carinho, apoio e ajuda. E por ser tão especial a ponto de me fazer entender espontaneamente que tudo à que essa tese diz respeito, não passa daquilo que realmente é: um trabalho.

Aos familiares, em especial aos primos e primas por todo apoio e momentos alegres.

Aos camaradas de sempre: Fábio, Kiko, Guilherme, Ulisses, Camila, Dri e Christi (nunca aprendi a escrever esse nome). E aos estentores da terrinha: Luciano e Massudão. Como sempre, meus sinceros agradecimentos.

Aos camaradas de labuta do IFT! Em particular ao Marião, pela grande amizade e camaradagem. Marião, a despeito do que eu escrevi antes, provavelmente a banda não existirá. Mas certamente continuaremos, como você disse, a discutir sobre a física que nós não sabemos. Ao Hiroshi, pela amizade e pela paciência nas discussões sobre branas.

Ao Marcelão, pela amizade e exemplo! Valeu camarada.

Ao Roldão, pela camaradagem, parceria, e discussões. Em suma, por ser o mentor intelectual desses últimos anos. Além é claro de todo o fornecimento do material do Dream Theater, e especialmente do Portnoy.

Aos funcionários do IFT, em particular à Jô pelo bate-papo de todos os dias.

À CAPES pelo financiamento.

Mem(brana): Camada fina de tecido que recobre uma superfície, divide um espaço ou une estruturas adjacentes. Película.

(Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa).

Resumo

Após uma breve introdução acerca de alguns aspectos gravitacionais do modelo de Randall-Sundrum bem como da gravitação de Brans-Dicke (BD), propomos dois modelos de branas utilizando cordas cósmicas, local e global, em teoria de BD para a geração de toda a estrutura bulk/brana. O cenário final é composto, em ambos os casos, de uma 4-brana *warped* com topologia $\mathbb{R}^4 \times S^1$ e uma dimensão extra tranversa à brana. Após isso, analisamos os modelos encontrados no contexto do formalismo de Gauss-Codazzi, com e sem a imposição de simetria $\mathbb{Z}_2$ sobre a brana.

palavras chave: branas, formalismo de Gauss-Codazzi, teoria escalar tensorial da gravitação, cordas cósmicas.

Abstract

After a brief introduction of some gravitational aspects of the Randall-Sundrum braneworld model as well as of the Brans-Dicke (BD) gravity, we propose two braneworld models using the, local and global, cosmic strings in the BD framework in order to generate all the bulk/brane structure. The final scenario is composed, in both cases, of a warped 4-brane with topology $\mathbb{R}^4 \times S^1$ and one extra dimension transverse to the brane. After that, we analyze the founded models in the scope of the Gauss-Codazzi formalism, with and without the imposition of $\mathbb{Z}_2$ symmetry on the brane.

key words: branes, Gauss-Codazzi formalism, scalar-tensorial theory of gravitation, cosmic strings.

Prêmbulo, ou Errata

Entrou em vigor no início deste ano nova formulação no que tange à acentuação e escrita da Língua Portuguesa. Esta tese porém, encontra-se nos moldes antigos (talvez antigos demais). Eis os motivos: primeiramente, a tese começou a ser escrita antes do anúncio da reforma, e uma total reformulação pareceu assaz dispendiosa. Segundo, o autor traz ainda algumas dúvidas quanto à correta aplicação das novas normas, bem como da verdadeira utilidade das mesmas. Assim sendo na apreciação dessa tese, ou pelo menos de sua estrutura léxica, o autor (como se fosse preciso) pede ao leitor um tom de rigor entre severo e complacente. E (como se tivesse direito) de preferência tendendo a este último.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

De modo direto, esse trabalho versa sobre modelos de branas em gravitação de Brans-Dicke. Além dessas, outras sutilezas ficam ao encargo de trabalharmos em seis dimensões e, em nossas tentativas de proposições de modelos, de utilizarmos cordas cósmicas como defeitos topológicos responsáveis por gerar toda a estrutura do espaço-tempo. Mas é esse um capítulo introdutório e não deve ser crivado pela estreiteza do laconismo. Vamos, portanto, ao contexto.

A idéia de que nosso universo pode ser visto como uma brana, isto é, uma hipersuperfície mergulhada em um espaço-tempo de dimensão maior tem sua origem em derivações das compactificações *à la* Kaluza-Klein [1]. Após um grande período de recesso em dimensões extras, basicamente devido a problemas teóricos com dimensões estáticas, a idéia de que nosso universo possa ser visualizado como uma brana voltou à baila em 1982 com o intrincado trabalho de K. Akama [2]. Logo após esse trabalho, Rubakov, Shaposnikov e Visser propuseram idéias bastante semelhantes [3]. Começou a haver então um crescente interesse nesses modelos alternativos à compactificação de Kaluza-Klein, que culminou com os trabalhos voltados à solução do problema da hierarquia via introdução de dimensões extras [4, 5]. Um grande número de trabalhos surgiu desde então, nas mais variadas formas. Iremos, ao longo da tese, referenciarmo-nos a boa parte desses trabalhos e gostaríamos aqui de manter nossa atenção às razões que nos levaram a trilhar um, ou mais um, caminho particular nessa área de pesquisa.

Como dito, como primeira variação da corrente majoritária de pesquisa, trabalhamos em gravitação de Brans-Dicke [6]. É sabido que essa teoria gravitacional, pelo menos no que tange a experimentos realizados no sistema solar, pouco, se algo, desvia-se da gravitação Einsteniana [7]. Entretanto, em dois trabalhos seminais [8, 9] foi demostrado que a Relatividade Geral é, em realidade, um atrator das teorias Escalares-Tensoriais da gravitação num cenário que contempla a evolução cosmológica do universo. Em outras palavras, a Relatividade Geral é o limite a baixas energias das teorias Escalares-Tensoriais. Nesse sentido, os experimentos afirmando uma coincidência entre Relatividade Geral e teorias Escalares-Tensoriais corroboram os trabalhos realizados em [8, 9]. Ademais, como ficará claro no Capítulo 4, o principal efeito das dimensões extras nas equações de campo gravitacional na brana é o aparecimento de termos de "fontes" adicionais. Com a gravitação de Brans-Dicke existe ainda mais um efeito: uma vez que, em geral, consideraremos o campo escalar como dependendo apenas da dimensão extra transversa à brana, as equações projetadas na brana terão os termos de "fonte" advindos da dimensão extra, mas também termos proporcionais ao campo escalar, bem como as suas derivadas, que proporcionam sutis, porém importantes, mudanças nas equações finais. Tais efeitos podem ser aplicados ao estudo de sistemas cosmológicos gerando, desse modo, observáveis.

Mas há ainda outro motivo que nos levou ao trabalho com gravitação de Brans-Dicke. Avanços na estrutura formal de teoria de supercordas apontam para o surgimento, e necessidade, de uma teoria escalar-tensorial da gravidade. Há indícios de que, pelo menos a energias suficientemente altas, a Relatividade Geral não é suficiente para explicar o fenômeno gravitacional [10]. Em outras palavras, a existência de um campo escalar gravitacional atuando como um mediador dessa interação juntamente com o campo tensorial usual de rank-2 é, de fato, uma previsão natural de modelos de unificação como supergravidade, supercordas e teoria-M [11]. Eis então, talvez, um motivo mais contundente. Utilizando a gravitação de Brans-Dicke como mais simples teoria escalar-tensorial da gravitação, esperamos estar trabalhando em um bom laboratório uma vez que as teorias Escalares-Tensoriais (tais como a de Brans-Dicke) são teorias efetivas a baixas energias das teorias de cordas. De fato, existe uma forte correlação entre soluções em Brans-Dicke e gravitação advinda de teoria de cordas. Tal correlação é mediada por uma simples reparametrização do parâmetro de Brans-Dicke[1].

A tese, em si, visa estudar e formalizar matematicamente modelos de branas em gravitação de Brans-Dicke. Esse viés de estudo encontra amplo respaldo no Capítulo 4. Antes, porém, de entrarmos em mais detalhes do que lá foi feito devemos nos endereçar ao Capítulo 3, onde nos propusemos modelos de branas em gravitação de Brans-Dicke. Inicialmente foi de nossa opinião que a proposição de modelos, com todos os problemas e encargos que tal vertente de pesquisa oferece, proporcionaria uma maior familiaridade com o assunto estudado, clarificando e fort-

[1]Tal reparametrização, entretanto, depende do modelo. Contudo o ponto importante é que as soluções de uma teoria podem ter implicações na outra. Assim, o trabalho em gravitação de Brans-Dicke pode ser usado para se extrair informação sobre alguns sistemas em teorias de cordas.

alecendo conceitos. E assim de fato o é. Tentamos ao máximo partir do menor número de hipóteses pré-assumidas (já no contexto brevemente discutido nos parágrafos anteriores) tentando assim dar um caráter de inevitabilidade aos modelos. Utilizamos para gerar a estrutura bulk-brana a corda cósmica, seguindo uma proposta já estudada em Relatividade Geral [12, 13]. Os motivos que nos levaram à utilização de tal defeito topológico para a geração da estrutura do espaço-tempo, bem como suas consequências, serão melhor explicitados no Cápitulo 3, de modo que deixamos aqui apenas espaço para uma característica fundamental de nossos modelos: um espaço-tempo de seis dimensões.

Essa última característica nos leva a um novo ponto: Tendo o espaço-tempo seis dimensões, devemos olhar para a estrutura topológica dos modelos dos quais pretendemos extrair informação. Se a brana modela nosso universo, é necessário que ela tenha pelo menos quatro dimensões não compactas. Se a brana tiver quatro dimensões, no contexto de um bulk em seis dimensões, dizemos que o modelo em questão possui codimensão (isto é, o número de dimensões extras fora da brana) dois. Tais modelos são realmente difíceis de serem tratados. Aparentemente, a adição de um termo de Gauss-Bonnet à lagrangeana pode lançar alguma luz na aparente esterilidade desses modelos [14]. Para modelos com codimensão maior do que dois a situação é ainda mais dramática, sendo um problema completamente aberto. Entretanto, nossos modelos apontaram para uma outra ramificação de compactificações alternativas - a compactificação híbrida [15]. Por compactificação híbrida entendemos modelos com pelo menos uma dimensão extra transversa à brana *e* pelo menos uma dimensão extra compacta a mais na brana. Assim, em nosso caso 6-D, a brana possui as quatro dimensões usuais não-compactas, mais uma compactificada e existe ainda outra dimensão transversa à brana. Esse tipo de cenário mostra ser mais tratável, visto ter apenas codimensão um. A razão para essa maior tratabilidade é a possibilidade de aplicação do formalismo de Gauss-Codazzi [16] ao espaço-tempo em questão. Além de amplamente bem estabelecido, tal formalismo é ideal para a aplicação em cenários de codimensão um, visto que se vale dos mesmos preceitos de folheação ADM [17] e, para tanto, precisa de uma e só uma dimensão transversa. Esses conceitos ficarão mais claros no Capítulo 4.

Façamos então uma breve relação do que (e onde) se encontra nessa tese: no Capítulo 2 fazemos uma introdução conceitual (o capítulo leva esse nome) onde apresentamos e exploramos, ao que nos convém, o modelo de Randall-Sundrum. Depois, em Seção posterior, estabelecemos os pilares da gravitação de Brans-Dicke. Tal capítulo é portanto uma introdução um pouco mais técnica do que veremos na tese e de parte do que foi aqui exposto nos parágrafos precedentes. No Capítulo

3 estudamos dois modelos por nós propostos, utilizando a corda cósmica local, na primeira Seção, e global, na segunda, para gerarmos toda a estrutura bulk/brana. Esse Capítulo fornece um norte, uma direção de trabalho para extração de informação gravitacional desses sistemas que culmina na aplicação do formalismo de Gauss-Codazzi no Capítulo 4. Neste último, a primeira Seção destina-se a aplicação de tal formalismo juntamente com a implementação da simetria $\mathbb{Z}_2$ na direção transversa à brana. Na segunda Seção, desenvolvemos análise similar mas desta vez sem tal simetria. Longe de ser apenas um detalhe conceitual, chegamos a importantes diferenças entre essas duas situações. Vale lembrar que antes de aplicarmos o formalismo de Gauss-Codazzi, realizamos uma revisão geométrica conceitual que tem como propósito, dentre outros, chamar a atenção para o embasamento matemático com o qual quisemos permear nosso trabalho. Por fim, como último Capítulo, apresentamos nossas conclusões sobre todo o trabalho e apontamos novas direções para essa área de pesquisa, além de ressaltar os problemas (ainda) deixados em aberto.

Ao final da tese dispomos de dois Apêndices deixados como tais para que haja uma garantia de leitura sequencial do trabalho. O primeiro é uma introdução a alguns elementos de Sistemas Dinâmicos utilizados na primeira Seção do Capítulo 3. O segundo, versa sobre condições de consistência para modelos de branas em gravitação de Brans-Dicke.

Nossa maior preocupação ao longo desse trabalho foi a de atribuir, sempre que possível, um caráter idiossincrático ao nosso estudo. Isso reflete-se nessa tese. Desse modo, os assuntos de revisão abordados (no Capítulo 2 e Apêndice **A**) são feitos de modo intimista. Enquanto que, como não poderia deixar de ser, nossas contribuições originais ao tema (Capítulos 3, 4 e Apêndice **B**) são versadas em tom que expressa nossa própria visão acerca do exposto.

De um modo geral, a tese como aqui escrita se embui do propósito de ser uma apresentação do nosso trabalho da maneira mais didática e abarcante o possível, muito embora uma exposição amplamente desejável pareça ser impossível, visto a quantidade e multiplicidade de trabalhos na área.

Capítulo 2

Introdução conceitual

Neste capítulo introduzimos muitos dos conceitos que serão explorados e desenvolvidos nesse trabalho. Trataremos primeiramente do famoso modelo de Randall-Sundrum [5], por se tratar de um verdadeiro marco na proposição de modelos em cosmologia de branas. Após esse importante passo, introduzimos os principais elementos da gravitação de Brans-Dicke [6] que perfaz em si a mais simples teoria escalar-tensorial da gravitação sendo, portanto, um excelente pano de fundo para o desenvolvimento de nossa proposta de trabalho.

2.1 Introdução às branas

Talvez seja lícito dizer que embora haja uma série de trabalhos precursores em branas como espaço-tempo [3, 4], o modelo de Randall-Sundrum (RS) serve como um "divisor de águas" em teorias que modelam nosso universo como uma brana mergulhada num espaço-tempo de dimensão maior. Isso se deve a vários fatores, dentre os quais destacaremos três: primeiramente, tal modelo esbanja a mais bela característica dessa vertente de pesquisa em física – a simplicidade. Do ponto de vista gravitacional, que é em primeira análise o objeto de trabalho dessa tese, o modelo de RS resume-se, a grosso modo, à solução das equações de Einstein em cinco dimensões com fontes bem definidas, as branas, em uma geometria não fatorável. Em segundo lugar, advém dessa simplicidade não somente um modelo prático e testável como também uma possível solução do problema da hierarquia[1]. Em terceiro lugar, tal modelo pode ser entendido como uma solução efetiva para o modelo de Horava-

[1]Basicamente, o problema da hierarquia diz respeito ao *gap* de energia existente entre as intensidades relativas das interações fundamentais.

Witten [18] e, assim, possui um vínculo interessante com a teoria de supercordas[2]. Voltaremos a esses três pontos de modo mais explícito no que se segue. Antes, porém, vamos apresentar o modelo.

A maneira mais direta para a introdução do modelo de RS é via a exposição de seu *setup* inicial consistindo de 5-dimensões, com duas 3-branas (branas em 4-dimensões, onde uma brana é espelho da outra) nos extremos de um *orbifold* $\mathbf{S}^1/\mathbb{Z}_2$. Tal *orbifold*[3] consiste na dimensão extra transversa às branas. Uma dessas branas, que será identificada em breve, modela nosso universo.

A simetria da dimensão extra tem um papel central em toda a física de branas. Sua importância bem como suas consequências serão extensivamente estudadas no Capítulo 4, principalmente no que tange ao escopo gravitacional. Por hora, vamos nos familiarizar um pouco mais com seu significado. A simetria $\mathbb{Z}_2$ na direção extra, digamos φ, indica periodicidade em φ de modo a identificarmos (x^μ, φ) com $(x^\mu, -\varphi)$. As 3-branas, com dimensões intrínsecas não-compactas x^μ $(\mu = 0, ..., 3)$ são tais que suportam os campos do modelo padrão e se localizam nos pontos extremos da dimensão extra angular $\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$. Desse modo, se G_{MN} $(M = 0, ..., 4 = \mu, \varphi)$ for a métrica para todo o espaço-tempo (brana mais dimensão extra), que doravante chamaremos de *bulk*, podemos escrever

$$\begin{aligned} g^{vis}_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu}(x^\mu, \varphi = \pi), \\ g^{com}_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu}(x^\mu, \varphi = 0), \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde o sobre-escrito *vis* indica *visível*, brana visível portanto, e *com* rotula a brana *companheira*. Como é esperado, nesse modelo nosso universo é descrito na (ou pela) brana *visível*.

Uma vez que a proposição de modelos de branas lida com escalas muito maiores do que as estabelecidas pela gravitação quântica, o estudo de tais modelos é assunto eminentemente semi-clássico. Assim sendo, estabeleçamos as equações de Einstein para o sistema em questão. Ei-las:

$$\begin{aligned} \sqrt{-G}(R_{MN} - \frac{1}{2}G_{MN}R) &= -\frac{1}{4M^3}[\Lambda\sqrt{-G}G_{MN} + V_{vis}\sqrt{-g_{vis}}\; g^{vis}_{\mu\nu}\delta^\mu_M\delta^\nu_N\delta(\varphi - \pi) \\ &+ V_{com}\sqrt{-g_{com}}\; g^{com}_{\mu\nu}\delta^\mu_M\delta^\nu_N\delta(\varphi)]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Seguimos aqui a notação usual da Relatividade Geral, isto é,

$$R_{MN} = \partial_A\Gamma^A_{MN} - \partial_N\Gamma^A_{AM} + \Gamma^A_{MN}\Gamma^C_{AC} - \Gamma^C_{MA}\Gamma^A_{NC}, \tag{2.3}$$

[2]Mais especificamente, com uma compactificação em 11-dimensões, $\mathbb{R}^{10} \times \mathbf{S}^1/\mathbb{Z}_2$, da corda heterótica $E_8 \times E_8$.

[3]Por definição, um *orbifold* é uma variedade quociente e orientada por um grupo discreto. No caso em questão temos uma variedade compacta, o que obviamente é bastante atrativo do ponto de vista físico.

$$\Gamma^C_{MN} = \frac{1}{2}G^{CA}(\partial_N G_{MA} + \partial_M G_{AN} - \partial_A G_{MN}). \tag{2.4}$$

Isto posto, vamos interpretar os termos de fonte de (2.2). O primeiro termo do lado direito diz respeito à constante cosmológica do bulk. Tal termo irá desenpenhar papel importante na determinação do tipo de espaço-tempo deste modelo. Além dele, temos mais dois termos advindos das próprias branas, com uma energia de vácuo constante que atua como fonte gravitacional mesmo na ausência de excitações de partículas. Notemos a presença das funções delta de Dirac, ferramentas importantes para a localização das branas.

Assumindo a existência de uma solução invariante por ação do grupo de Poincaré em 4-dimensões[4] (nas direções x^μ) trabalharemos com o seguinte *ansatz*

$$ds^2 = e^{-2\sigma(\varphi)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\varphi^2. \tag{2.5}$$

O elemento de linha acima possui vários pontos dignos de nota. Primeiramente notemos que o fator exponencial à frente da métrica de Minkowski (de agora em diante chamado de *warp factor* de acordo com o jargão corrente) só depende da dimensão extra. Assim, uma vez fixada a posição da brana, sua métrica é conforme ao espaço de Minkowski. Isso traz, de início, dois pontos positivos: faz com que a brana seja perfeitamente apta a suportar todos os campos do modelo padrão e modela um universo plano a grandes escalas. Atentemos também para o fato de que o raio de compactificação r_c, a distância entre as branas, é constante. De fato, em um cenário completo tal fator deve ser obtido como valor esperado de vácuo de um campo módulo. Esse foi um problema deixado em aberto quando da proposição do modelo em 1999. Ainda nesse ano, tal problema foi parcialmente solucionado em [20] via a inclusão de um campo escalar no bulk. O valor esperado de vácuo de tal campo estabiliza o tamanho da dimensão extra. Entretanto, tal solução não é completa uma vez que não leva em conta a retroação da própria brana atuando como fonte [21]. Como último ponto, chamamos a atenção para o fato de a métrica proposta em (2.5) perfazer um exemplo de geometria não-fatorável. Em outras palavras, devido ao fato do warp factor depender da dimensão extra e só dela, **não** é possível escrever a geometria desse espaço-tempo como $M^4 \otimes \mathbf{S}^1/\mathbb{Z}_2$, sendo M^4 o espaço de Minkowski. Essa última característica está no centro da viabilidade fenomenológica do modelo, bem como de seu sucesso na solução do problema da hierarquia.

Vamos agora resolver as equações de Einstein para o sistema em questão. As

[4] De fato, a energia de vácuo referida no parágrafo anterior só pode ser entendida como tal em uma brana invariante pelo grupo de Poincaré [19]. Agradeço ao professor Ion Vancea por me elucidar esse, e muitos outros, pontos sobre branas.

únicas componentes da conexão diferentes de zero, de acordo com (2.4), são

$$\begin{aligned} \Gamma^4_{00} &= -\frac{\sigma'}{r_c^2}\, e^{-2\sigma}, \\ \Gamma^4_{11} = \Gamma^4_{22} = \Gamma^4_{33} &= \frac{\sigma'}{r_c^2}\, e^{-2\sigma}, \\ \Gamma^0_{04} = \Gamma^1_{14} = \Gamma^2_{24} = \Gamma^3_{34} &= -\sigma', \end{aligned} \tag{2.6}$$

onde $\sigma' \equiv \partial\sigma/\partial\varphi$. Desse modo, as equações de Einstein (2.2) fornecem

$$6(\sigma')^2 = \frac{-\Lambda r_c^2}{4M^3}, \tag{2.7}$$

$$\frac{3\sigma''}{r_c^2} = \frac{V_{com}}{4M^3 r_c}\,\delta(\varphi) + \frac{V_{vis}}{4M^3 r_c}\,\delta(\varphi - \pi). \tag{2.8}$$

A equação (2.6) possui como solução condizente com a simetria $\mathbb{Z}_2$ a seguinte expressão (lembremo-nos que as derivadas de σ devem respeitar a periodicidade em φ)

$$\sigma = r_c|\varphi|\sqrt{-\Lambda/24M^3}. \tag{2.9}$$

Eis a primeira importante consequência do cenário proposto: para que o modelo seja auto-consistente, a constante cosmológica do bulk deve satisfazer $\Lambda < 0$, ou seja, estamos lidando com um espaço-tempo anti-de Sitter em cinco dimensões[5] (AdS_5).

Da segunda derivada de (2.9), temos

$$\sigma'' = 2r_c\sqrt{-\Lambda/24M^3}[\delta(\varphi) - \delta(\varphi - \pi)], \tag{2.10}$$

que, quando comparada a (2.8) implica

$$\begin{aligned} V_{com} = -V_{vis} &= 24M^3k, \\ \Lambda &= -24M^3k^2, \end{aligned} \tag{2.11}$$

onde k é alguma escala utilizada para transformar a proporcionalidade em igualdade. Sua introdução aqui **não** significa a colocação de mais um parâmetro no modelo, uma vez que, como veremos, a nova hierarquia será tomada em termos do produto kr_c. Faz-se necessário enfatizar que o modelo em questão é mais rígido do que possa parecer. De fato, pode-se mostrar que o fato das branas terem energias de vácuo iguais em módulo e com sinais opostos são condições necessárias para que o modelo seja consistente (ver referência [21] e também Apêndice **B**). Em certo sentido, o modelo passa por um crivo além do estabelecido pelas equações de Einstein somente.

[5] O que, dentre outras coisas, é bastante interessante do ponto de vista da grande gama de aplicabilidade da dualidade AdS/CFT.

Com o resultado obtido em (2.9) e (2.11) ficamos com o seguinte elemento de linha

$$ds^2 = e^{-2kr_c|\varphi|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\varphi^2. \tag{2.12}$$

Antes de estudarmos como tal métrica nos auxilia na solução do problema da hierarquia, vamos brevemente comentar a ausência de flutuações não diagonais da métrica. Como sabido, tais flutuações (vetoriais no presente caso) são esperadas do mesmo modo que em teorias de Kaluza-Klein. Entretanto, os elementos fora da diagonal são suprimidos do cenário em questão pela simetria $\mathbb{Z}_2$ [22], visto haver uma quebra na isometria da dimensão extra.

Voltemos agora nossa atenção ao problema da hierarquia. Em linhas bastantes gerais, a ação para um campo de Higgs fundamental na brana visível é dada por

$$S_{vis} \supset \int \sqrt{-g^{vis}}\,[g^{\mu\nu}_{vis} D_\mu\phi^\dagger D_\nu\phi - \lambda(|\phi|^2 - v^2)^2], \tag{2.13}$$

onde λ é o parâmetro de auto-acoplamento do campo de Higgs e v o parâmetro de quebra espontânea de simetria (parâmetro de massa). Em vista da equação (2.1) temos (lembremos que $det(aM_{n\times n}) = a^n det(M_{n\times n})$ para $a \in \mathbb{R}$)

$$S_{vis} \supset \int e^{-4kr_c\pi}[\eta^{\mu\nu}e^{2kr_c\pi} D_\mu\phi^\dagger D_\nu\phi - \lambda(|\phi|^2 - v^2)^2], \tag{2.14}$$

que, após uma renormalização da função de onda ($\phi \to e^{kr_c\pi}\phi$), leva finalmente a

$$S_{vis} \supset \int [\eta^{\mu\nu} D_\mu\phi^\dagger D_\nu\phi - \lambda(|\phi|^2 - e^{-2kr_c\pi}v^2)^2]. \tag{2.15}$$

Desse modo as escalas de massas físicas são agora dadas por $v \mapsto e^{-kr_c\pi}v$. Em outras palavras, qualquer parâmetro de massa medido na 3-brana visível corresponde a uma massa dada por $m = e^{-kr_c\pi}m_0$. Logo, devido ao fator geométrico exponencial não é necessário nenhuma hierarquia entre as constantes fundamentais do modelo, bastando com efeito $kr_c \approx 10$.

Essa breve introdução ao modelo de RS, ainda que bastante incompleta, é suficiente para nossos propósitos nesse trabalho. Assim sendo, encerramos essa seção apenas enfatizando que o modelo aqui exposto diz respeito ao que correntemente na literatura se chama Randall-Sundrum I, RSI. O outro cenário, RSII, é obtido via aplicação do limite $r_c \to \infty$ resultando em apenas uma 3-brana com uma dimensão extra não compacta. Novamente, damo-nos por satisfeitos com nossa prévia análise uma vez que ela nos fornece uma primeira incursão às dimensões extras, além de servir de base para o restante do trabalho. No Capítulo 3 voltaremos a falar sobre o modelo de RS mas já em outro tom, atentando para algumas deficiências e propondo possíveis caminhos alternativos.

2.2 Introdução à gravitação de Brans-Dicke

Dada a discussão realizada na Introdução, vamos nessa seção introduzir os conceitos básicos da gravitação de Brans-Dicke. Como dito, todo o resto do trabalho se desenvolverá nesse contexto e por conseguinte, tal seção é imprescindível, ainda que possa ser suprimida pelo leitor já familiarizado à tal variação da Relatividade Geral.

A introdução feita aqui será aos moldes da encontrada em [23], visto ser esta deveras completa e intuitiva ao mesmo tempo. Reforçamos que o estudo de gravitação de Brans-Dicke pode ser complementado em [6, 24, 25].

Originalmente, a gravitação de Brans-Dicke pode ser entendida como uma extensão da Relatividade Geral de modo a incorporar o princípio de Mach, que estabelece que a inércia de um corpo surge das acelerações com respeito à distribuição geral de massas do universo em contato causal com o corpo. Assim sendo, a massa inercial de um corpo não é constante mas representa a interação de tal corpo com algum campo cósmico[6]. Mas a escala absoluta de massa das partículas elementares pode ser medida somente através de suas acelerações gravitacionais, logo podemos implementar a variação inercial das partículas elementares pela suposição de que a constante gravitacional não é mais uma constante mas está relacionada com a média de um campo[7]. É sabido que interações de longo alcance na natureza são transmitidas por campos de spin, ou antes, helicidade 2 (o gráviton – $g_{\mu\nu}$) e de spin 1 (o fóton – A_μ). Seria portanto de se suspeitar que alguma outra força de longo alcance seja produzida por campos escalares.

Façamos então a seguinte identificação

$$\langle\phi\rangle \to \frac{1}{G}, \tag{2.16}$$

isto é, entendamos o inverso da constante gravitacional como a média de um campo escalar[8]. A equação covariante mais simples para o campo escalar é

$$\Box^2\phi = 4\pi\lambda T, \tag{2.17}$$

[6]Assim que a teoria começou a se tornar popular, os membros do grupo de estudos de gravitação de Kip Thorne no CALTECH brincavam dizendo acreditar na relatividade geral às segundas, quartas e sextas e na teoria de Brans e Dicke às terças, quintas e sábados. Aos domingos diziam-se agnósticos.

[7]Muito antes de C. H. Brans e R. H. Dicke proporem sua teoria, Nordstrom desenvolveu a idéia de partículas com massa inercial variável; entretanto um termo sobressalente na equação da geodésica, que não encontra respaldo experimental, descartou tal hipótese.

[8]O leitor interessado pode encontrar uma justificativa heurística para a relação (2.16), baseada numa estimativa da média do campo escalar, no capítulo 14 da referência [23].

onde λ é a constante de acoplamento, $\Box^2\phi \equiv \phi_{,\mu\,;}{}^{\mu}$ e T é o traço do tensor energia-momento de matéria. Nessa notação, vírgula (,) denota derivada usual enquanto ponto e vírgula (;) derivada covariante. O tensor energia-momento, cujo traço aparece em (2.17), abarca toda fonte de matéria possível, exceto a própria gravitação e o campo ϕ. Desse modo, podemos escrever as equações de Einstein, em um primeiro passo na direção da extensão desejada, como

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g^{\mu\nu} R = -\frac{8\pi}{\phi}(T^{\mu\nu} + T_{\phi}^{\mu\nu}). \tag{2.18}$$

Não é desejável, em qualquer extensão da relatividade geral que mereça a alcunha de viável, que haja alguma contradição com o Princípio da Equivalência. Pelo menos, assim o é a baixas energias. Daí segue a exigência de que ϕ não entre nas equações de movimento de partículas, sejam elas massivas ou não, pois a matéria deve se acoplar única e universalmente ao tensor métrico. Logo, o tensor energia-momento ($T^{\mu\nu}$ por si só) é covariantemente conservado, isto é

$$T^{\mu}_{\ \nu\,;\,\mu} = \partial_\mu T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\rho} T^\rho_{\ \nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} T^\mu_{\ \rho} = 0. \tag{2.19}$$

Multiplicando a equação (2.18) por ϕ e tomando a derivada covariante ficamos com

$$\Big(R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R\Big)\phi_{;\,\mu} = -8\pi T^{\mu}_{\phi\ \nu\,;\,\mu}, \tag{2.20}$$

uma vez que o tensor de Einstein é covariantemente conservado (identidade de Bianchi contraída). Vamos agora expressar o tensor $T^{\mu}_{\phi\ \nu}$ em termos do campo ϕ e suas derivadas a fim de determinar completamente a equação (2.18). Para tanto, escrevamos $T^{\mu}_{\phi\ \nu}$ de uma forma genérica e então determinemos seus coeficitentes. A maneira mais geral de construir esse tensor simétrico é expressando-o através de uma combinação linear de todas as possíveis combinações de derivadas de ϕ, além de um termo proporcional a $\Box^2\phi$:

$$T^{\mu}_{\phi\ \nu} = A(\phi)\phi_{,}{}^{\mu}\phi_{,\nu} + B(\phi)\delta^\mu_\nu \phi_{,}{}^{\alpha}\phi_{,\alpha} + C(\phi)\phi_{,}{}^{\mu}{}_{;\nu} + D(\phi)\delta^\mu_\nu \Box^2\phi. \tag{2.21}$$

Tomando a derivada covariante ficamos com, depois de usada a regra da cadeia e agrupados os termos semelhantes,

$$\begin{aligned} T^{\mu}_{\phi\ \nu\,;\,\mu} &= [A'(\phi) + B'(\phi)]\phi_{,}^{\mu}\phi_{,\nu}\phi_{,\mu} + [A(\phi) + D'(\phi)]\phi_{,\nu}\Box^2\phi + D(\phi)(\Box^2\phi)_{,\nu} \\ &+ [A(\phi) + 2B(\phi) + C'(\phi)]\phi_{,}{}^{\mu}{}_{;\nu} + C(\phi)\Box^2(\phi_{,\nu}), \end{aligned} \tag{2.22}$$

onde $X' \equiv \partial X/\partial\phi$. Da definição de curvatura temos

$$V^\sigma R^\lambda_{\sigma\nu\kappa} = V^\lambda{}_{;\,\nu\,;\,\kappa} - V^\lambda{}_{;\,\kappa\,;\,\nu}\ , \tag{2.23}$$

logo, podemos escrever o primeiro termo de (2.20) como

$$\phi_{,\sigma}R^{\sigma}_{\nu} = \phi_{,}^{\mu}{}_{;\mu;\nu} - \phi_{,\nu;}{}^{\mu}{}_{;\mu} = (\Box^2\phi)_{,\nu} - \Box^2(\phi_{,\nu}). \tag{2.24}$$

O traço da equação (2.18), com o auxílio das equações (2.17) e (2.21), pode ser escrito como

$$R = \frac{8\pi}{\phi}\left[\frac{1}{4\pi\lambda}\Box^2\phi + [A(\phi)+4B(\phi)]\phi_{,}^{\mu}\phi_{,\mu} + [C(\phi)+4D(\phi)]\Box^2\phi\right], \tag{2.25}$$

e assim, a equação (2.20) fica na forma

$$\begin{aligned}(2.20) \quad &= \quad (\Box^2\phi)_{,\nu} - \Box^2(\phi_{,\nu}) - \frac{4\pi}{\phi}\phi_{,\nu}\Bigg[\Bigg(\frac{1}{4\pi\lambda} \\ &+ \quad C(\phi)+4D(\phi)\Bigg)\Box^2\phi + [A(\phi)+4B(\phi)]\phi_{,}^{\mu}\phi_{,\mu}\Bigg].\end{aligned} \tag{2.26}$$

Comparando essa equação e a obtida em (2.22) temos, igualando os termos de mesmo caráter tensorial,

$$D(\phi) = -C(\phi) = -\frac{1}{8\pi}, \tag{2.27}$$

$$\frac{1}{\phi}\left(\frac{1}{4\pi\lambda} + C(\phi) + 4D(\phi)\right) = 2[A(\phi) + D'(\phi)], \tag{2.28}$$

$$\frac{1}{\phi}[A(\phi)+4B(\phi)] = 2[A'(\phi)+B'(\phi)], \tag{2.29}$$

$$A(\phi) + 2B(\phi) + C'(\phi) = 0. \tag{2.30}$$

É fácil verificar que tal sistema de equações possui solução dada por

$$A(\phi) = \frac{w}{8\pi\phi}, \tag{2.31}$$

$$B(\phi) = -\frac{w}{16\pi\phi}, \tag{2.32}$$

com $C(\phi)$ e $D(\phi)$ dados em (2.27) e w um parâmetro adimensional conveniente, dado por $w = 1/\lambda - 3/2$, ou $\lambda = 2/(3+2w)$. Desse modo determinamos completamente as equações que governam a gravitação de Brans-Dicke. De (2.17) temos simplesmente

$$\Box^2\phi = \frac{8\pi}{3+2w}T, \tag{2.33}$$

enquanto a equação (2.18) resulta em

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi}{\phi}T_{\mu\nu} - \frac{w}{\phi^2}(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi_{,}^{\alpha}) - \frac{1}{\phi}(\phi_{,\mu;\nu} - g_{\mu\nu}\Box^2\phi). \tag{2.34}$$

Antes de encerrarmos esta seção e esse capítulo, é interessante chamarmos a atenção para alguns pontos importantes. O primeiro deles é que todo o papel do campo ϕ nessa generalização da Relatividade Geral fica restrito às equações de campo (2.33) e (2.34). Uma vez encontrada a métrica, todo o resto se passa como na teoria Einsteniana. Ressaltamos também que podemos reobter as equações da Relatividade de Einstein pelo limite $w \to \infty$. Veja que em tal limite, a equação (2.33) fornece

$$\Box^2 \phi = 0\left(\frac{1}{w}\right), \tag{2.35}$$

logo, o campo escalar fica

$$\phi = \langle \phi \rangle + 0\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{G} + 0\left(\frac{1}{w}\right), \tag{2.36}$$

e de (2.34) as equações de Einstein são prontamente recuperadas. Eis então o porquê de se esperar $w \sim 1$ para que haja desvios significativos entre a Relatividade Geral e a teoria de Brans-Dicke.

Como última nota dessa introdução, observamos que os fatores numéricos da equação (2.33) mudam conforme trabalhamos com outras dimensões; fato esse que pode ser visto através da equação (2.25). Por exemplo, em [26], a equação para o campo escalar é dada por

$$\Box^2 \phi = \frac{T}{3w + 4}, \tag{2.37}$$

onde, de fato, o fator $1/3w + 4$ é o correto para cinco dimensões. Entretanto ao longo de todo o trabalho vamos utilizar a equação (2.33), uma vez que uma simples redefinição do parâmetro engloba tal peculiaridade. Por exemplo, a cinco dimensões podemos alegar utilizarmos w' tal que

$$w' = \frac{3w + 1}{2}. \tag{2.38}$$

Capítulo 3

Modelos alternativos de compactificação: uma nova proposta

Muito embora o modelo de Randall-Sundrum forneça um excelente cenário de compactificação alternativa, a ponto de ser considerado um paradigma, ele não pode ser interpretado como a última palavra em branas. Não pode ser, do ponto de vista de modelos de compactificação em supercordas, pois simplesmente não se remete às seis outras dimensões restantes. Mas a mais baixas energias também existem alguns pontos intrincados com relação ao modelo. Uma questão bastante sutil com relação ao modelo de Randall-Sundrum pode ser colocada nos seguintes termos: a adição de uma densidade de vácuo a uma das branas, ver por exemplo equação (2.2), gera um campo gravitacional que atua em todas as cinco dimensões. Mais especificamente, o Princípio da Equivalência estabelece que o campo gravitacional gerado pela energia do vácuo em uma brana atue na matéria/energia da outra brana, de modo atrativo ou repulsivo. Desse modo, quando projetada em uma ação efetiva em 4-D, a interação gravitacional entre as branas se torna um interação dependente do campo módulo (cujo valor esperado determina a distância entre as branas em cinco dimensões). Logo, o fato de a teoria 4-D estar mergulhada em uma teoria de cinco dimensões significa que não há como adicionar livremente uma constante cosmológica arbitrária na teoria 4-D projetada[1] [27].

Para uma teoria ordinária em quatro dimensões não há nenhuma simetria na Lagrangeana que proíba a adição de uma constante arbitrária, e tal constante irá

[1]Obviamente esse argumento também se aplica caso a energia de vácuo resida na outra brana ou mesmo no bulk.

apenas adicionar uma constante à equação de Friedmann. No cenário de branas, entretanto, a adição de tal termo (uma constante cosmológica verdadeira) não é consistente visto que a energia de vácuo induz efeitos nas dimensões extras que se traduzem em interações adicionais na Lagrangeana efetiva a 4-D. Esse é um problema profundo, que deve ser levado em conta em um cenário de branas que vise modelar completamente nosso cenário cosmológico.

Outra possível objeção ao modelo de Randall-Sundrum fica a encargo do defeito topológico utilizado para modelar a brana. Nosso espaço-tempo emerge como uma parede de domínio numa extremidade do universo. Paredes de domínio, entretanto, são objetos bastante familiares em cosmologia. Elas, dentre outros defeitos topológicos, são soluções que podem surgir no universo primordial através de uma quebra espontânea de simetria global durante alguma transição de fase específica [28]. Geralmente, do ponto vista cosmológico, defeitos topológicos globais trazem consigo uma propriedade bastante característica: são problemáticos! E a parede de domínio não consiste em uma exceção. Foi compreendido rapidamente que, se por um lado são objetos com várias propriedades interessantes e passíveis de tratamento analítico, por outro não podem existir quando advindos de uma escala de quebra espontânea de simetria maior do que 1 MeV [29]. Basicamente, um conjunto de defeitos dessa natureza dominaria a energia do universo em alguma era de evolução cosmológica e, assim, ocorreria uma catástrofe cosmológica (Big Crunch). A razão disso é que não há nenhum mecanismo de decaimento de energia para um conjunto de paredes de domínio.

As razões expressas acima nos levaram à consideração do que poderia ser utilizado para a construção, ou tentativa de construção, de modelos alternativos ao cenário de Randall-Sundrum. Assim, para tentarmos contornar o primeiro problema, trabalhamos em gravitação de Brans-Dicke pois, além dos motivos expostos na introdução, também abarcam modelos com constante cosmológica variável. Para nos esquivarmos do segundo problema, utilizamos como defeito topológico a corda cósmica para gerar toda a estrutura bulk/brana. Convém ressaltar entretanto que aparte tais motivos técnicos, a tentativa de proposição de modelos em gravitação de Brans-Dicke nos permitiu uma melhor compreensão, por exemplo, do papel do campo escalar atuando em problemas específicos, como o problema da hierarquia, além de nos servir de "bússula", guiando, por assim dizer, nosso estudo quando da análise das equações efetivas projetadas na brana (Capítulo 4).

3.1 Modelo com a corda local em gravitação de Brans-Dicke

Talvez o efeito mais notável relacionado às propriedades gravitacionais da parede de domínio seja o fato de que elas compactificam o espaço-tempo ao seu redor devido a sua própria auto-gravidade [30]. Essa propriedade não é exclusiva a paredes de domínio. Em geral, defeitos globais apresentam tal característica. O programa de compactificações alternativas com defeitos topológicos outros que não a parede de domínio, seguiu adiante. Em particular, a corda cósmica global em Relatividade Geral foi analisada em [12, 13].

Por outro lado, soluções do tipo cordas cósmicas foram também bastante investigadas em teorias escalares-tensoriais da gravitação [31]. Em particular, a solução para a corda cósmica *local* em gravitação de Brans-Dicke obtida em [32], revela uma interessante semelhança entre o elemento de linha da corda cósmica global em Relatividade Geral e a corda cósmica local em Brans-Dicke. Essa semelhança, dentro do contexto exposto nos parágrafos precedentes, levou-nos à elaboração de uma tentativa de modelo de compactificação alternativa utilizando a corda cósmica local em Brans-Dicke [33].

Partimos da equação de Brans-Dicke em $(p+3)$-dimensões no referencial de Einstein

$$R^{\mu}_{\nu} = 2\partial^{\mu}\sigma\partial_{\nu}\sigma + \varepsilon\left(T^{\mu}_{\nu} - \frac{\delta^{\mu}_{\nu}}{p+1}T\right) - \frac{2\delta^{\mu}_{\nu}\Lambda}{p+1}, \tag{3.1}$$

onde Λ é a constante cosmológica do bulk, σ o campo escalar, T^{μ}_{ν} o tensor energia-momento (com traço dado por T) e $\varepsilon = -\frac{1}{M^{p+1}_{p+3}}$, sendo M^{p+1}_{p+3} o análogo da massa de Planck em $(p+3)$-dimensões. Estamos então, trabalhando em um espaço-tempo de $(p+3)$-dimensões, sendo p deixado em aberto por enquanto. Escrevemos a equação de Brans-Dicke no referencial de Einstein simplesmente pelo fato de que aqui há uma maior familiaridade, (traduzida em semelhança) com a Relatividade Geral. As equações que relacionam os dois referenciais (o físico e o de Einstein) são $w = \frac{1}{4\beta^2} - \frac{3}{2}$, o parâmetro de Brans-Dicke, e as equações para as quantidades físicas (rotuladas pelo acento til):

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{\varepsilon}e^{-2\beta\sigma}, \tag{3.2}$$

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{2\beta\sigma}g_{\mu\nu}. \tag{3.3}$$

Notemos que no referencial de Einstein o tensor de energia-momento não é conservado.

A fim de calcular a forma do elemento de linha para nosso espaço-tempo, vamos dar um *ansatz* para a métrica que respeite a simetria a ser implementada pela fonte. Uma vez que usaremos a corda cósmica (reta e paralela[2] ao eixo z) para gerar nossa estrutura, nada mais natural do que um elemento de linha que respeite a simetria cilíndrica

$$ds^2 = e^{A(r)}(-dt^2 + dz_i^2) + dr^2 + e^{C(r)}d\theta^2, \tag{3.4}$$

onde $i = 1, ..., p$. Desse modo, todo o bulk possui de fato simetria cilíndrica e o "*split*" na direção z perfaz as dimensões intrínsecas da brana. Desde então torna-se claro que a estrutura buscada (a de uma brana nesse espaço-tempo) é obtida para $p = 3$.

A Lagrangeana usual para uma corda cósmica de gauge é dada por [34]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu\Phi)(D^\mu\Phi)^* + \lambda(\Phi^*\Phi - \eta^2)^2, \tag{3.5}$$

onde $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, $F_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}A_{\nu]}$ e Φ é o campo de Higgs responsável pela geração da corda[3]. O *ansatz* para os campos A_μ e Φ responsável pela geração de uma solução do tipo corda é [34]

$$A_\mu = \frac{1}{e}(P - 1)\partial_\mu\theta, \tag{3.6}$$

$$\Phi = \eta X e^{i\theta}, \tag{3.7}$$

onde P e X são funções apenas de r.

Lembremos agora duas importantes características a respeito das cordas cósmicas em Relatividade Geral. A primeira é que, quando as massas dos campos escalar e de gauge são iguais, os campos possuem comportamento assintótico dado por [35]

$$\begin{aligned} e^C &\to r^2(1 - 4G\eta^2)^2, \\ P &\to 2\sqrt{2}(1 - 4G\eta 2)\gamma r^{1/2}e^{-2\sqrt{2}r}, \\ X &\to \gamma r^{-1/2}e^{-2\sqrt{2}r}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde γ é uma constante a ser determinada por alguma condição de contorno. Note que o primeiro termo e^C de (3.8) leva, como não poderia deixar de ser, ao conhecido deficit angular característico do espaço-tempo ao redor da corda. A segunda característica é que o tensor energia-momento associado à Lagrangeana (3.5) em gravitação de Brans-Dicke e no referencial de Einstein é dado por [31, 32]

$$T_t^t = T_z^z = -\frac{\eta^2}{2}\Big(X'^2e^{2\beta\sigma} + e^{-C}X^2P^2e^{2\beta\sigma} + 2(X^2 - 1)^2e^{4\beta\sigma} + \frac{1}{8}e^{-C}P'^2\Big),$$

[2]De modo rigoroso, a frase "paralela ao eixo z" constitui um abuso de linguagem, uma vez que o eixo z dará lugar às dimensões intrínsecas da brana no contexto aqui abordado.

[3]Não deve ser confundido com o campo escalar de Brans-Dicke.

$$T_r^r = \frac{\eta^2}{2}\Big(X'^2 e^{2\beta\sigma} - e^{-C}X^2P^2e^{2\beta\sigma} - 2(X^2-1)^2e^{4\beta\sigma} + \frac{1}{8}e^{-C}P'^2\Big), \tag{3.9}$$
$$T_\theta^\theta = \frac{\eta^2}{2}\Big(-X'^2 e^{2\beta\sigma} + e^{-C}X^2P^2e^{2\beta\sigma} - 2(X^2-1)^2e^{4\beta\sigma} + \frac{1}{8}e^{-C}P'^2\Big),$$

onde uma quantidade Q' denota $Q' \equiv \partial Q/\partial r$.

A solução para a corda cósmica local obtida na referência [32] possui uma propriedade digna de nota que será importante para o prosseguimento desta Seção. Uma vez localizada a fonte, temos que, numa região perto da mesma a solução tende à solução padrão para cordas locais. Porém, na medida em que vamos nos afastando, o campo de Brans-Dicke começa a ter um papel relevante. Em se continuando o afastamento, a solução tende ao vácuo em Brans-Dicke. Diz-se então haver uma espécie de raio crítico, digamos r_c, acima do que a solução é dada pelo vácuo em Brans-Dicke e abaixo do qual temos uma solução do tipo corda. Entretanto, como demonstrado em [32], tal raio é situado em uma região longe o suficiente para que possamos utilizar a forma assintótica dos campos como dada em (3.8), mas de tal maneira que $e^{\beta\sigma} \sim 1$ continua sendo uma boa aproximação. Essa é a característica chave que vamos utilizar aqui. Desse modo, vamos procurar uma solução numa região $r \gg$, de modo que valham duas importantes aproximações: as formas assintóticas (3.8) e $e^{\beta\sigma} \sim 1$. Levando isso em conta, uma simples manipulação algébrica das equações (3.9) nos fornece

$$T_t^t - \frac{T}{p+1} \simeq 16\Big(\frac{1-p}{1+p}\Big)\eta^2\gamma^2\frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r}, \tag{3.10}$$

e

$$T_r^r - \frac{T}{p+1} = T_\theta^\theta - \frac{T}{p+1} \simeq \frac{32\eta^2\gamma^2}{p+1}\frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r}, \tag{3.11}$$

onde truncamos o resultado em termos de ordem $1/r$, visto serem estes os de maior magnitude na região em questão. De posse dessas equações, podemos agora calcular as equações de Einstein-Brans-Dicke advindas de (3.1). Antes disso, atentemos para outro ponto. Uma vez trabalhando com simetria cilíndrica para o bulk, concentrar-nos-emos no caso em que o campo escalar só depende de r. Como indicado previamente essa é uma dimensão extra transversa à brana. Até esse ponto de desenvolvimento, isso é apenas mais uma característica do modelo, mas no Capítulo seguinte isso será determinante na projeção das equações na brana: recuperaremos as equações de Einstein (e não Einstein-Brans-Dicke) na brana com modificações advindas das dimensões extras e de gravitação de Brans-Dicke no bulk.

Voltando às equações de campo, inserindo (3.10) e (3.11) em (3.1) obtemos

$$(p+1)\Big(A'' + \frac{A'^2}{2}\Big) + C'' + \frac{C'^2}{2} \simeq -4\sigma'^2 - 2f(r) + \frac{4\Lambda}{p+1}, \tag{3.12}$$

$$C'' + \frac{C'^2}{2} + \frac{(p+1)}{2}A'C' \simeq -2f(r) + \frac{4\Lambda}{p+1}, \tag{3.13}$$

$$A'' + \frac{(p+1)}{2}A'^2 + \frac{A'C'}{2} \simeq (p-1)f(r) + \frac{4\Lambda}{p+1}, \tag{3.14}$$

onde a função $f(r)$ é dada por

$$f(r) \equiv \frac{32\varepsilon\eta^2\gamma^2}{p+1}\frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r}. \tag{3.15}$$

Repare que mesmo com todas as aproximações feitas, as equações do campo gravitacional são praticamente intratáveis. A fim de extrairmos, portanto, alguma informação a respeito do sistema em questão, vamos lançar mão de algumas ferramentas de Sistemas Dinâmicos[4]. Desse modo, não resolveremos esse sistema de equações mas poderemos ter um bom panorama a respeito de suas soluções. De fato, encontraremos uma configuração dos campos que perfaz um atrator no plano de fase.

Comecemos por definir duas novas variáveis x e y, por[5]

$$x = pA' + C', \tag{3.16}$$

e

$$y = C'. \tag{3.17}$$

Das equações (3.12) e (3.13) temos

$$-4\sigma'^2 = (p+1)\Big(A'' + \frac{A'^2}{2} - \frac{A'C'}{2}\Big). \tag{3.18}$$

Note que σ é também uma variável do sistema. Logo, a princípio, não parece ser possível estudar as equações (3.12)-(3.14) num *plano* de fase. Entretanto, substituindo A'' de (3.14) em (3.18) temos

$$-4\sigma'^2 = (p+1)\Big((p-1)f + \frac{4\Lambda}{p+1} - \frac{pA'^2}{2} - A'C'\Big). \tag{3.19}$$

Agora, levando em conta a identidade (que pode ser verificada por substituição direta)

$$\frac{x^2 - y^2}{2p} = \frac{pA'^2}{2} + A'C', \tag{3.20}$$

e comparando-a com o lado direito da equação (3.19) chegamos a

$$4\sigma'^2 = -(p^2-1)f - 4\Lambda + \frac{(p+1)}{2p}(x^2 - y^2). \tag{3.21}$$

[4]Remetemos o leitor interessado em relembrar alguns aspectos de Sistemas Dinâmicos ao Apêndice **A**.

[5]Esse *ansatz* para as variáveis a serem estudadas no sistema dinâmico foi primeiramente dado em [13].

Logo, conseguimos expressar σ somente em termos das já previamente definidas variáveis x e y. Podemos assim, estudar o sistema no plano$-(x, y)$ deixando a expressão (3.21) como uma equação de consistência que, em breve, será importante.

Partindo da equação (3.12), uma manipulação algébrica usual leva a

$$y' = -2f + \frac{4\Lambda}{p+1} - \frac{1}{2p}[xy(p+1) - y^2], \tag{3.22}$$

enquanto que de (3.12), (3.14) e levando em conta (3.21), ficamos com

$$x' = (p+1)(p-2)f + 4\Lambda - \frac{1}{2p}[(p+1)x^2 - xy]. \tag{3.23}$$

As equações (3.22) e (3.23) formam um sistema dinâmico não autônomo (note que há dependência explícita do parâmetro interno r). De acordo com o ferramental usual de sistemas dinâmicos (ver Apêndice **A**), pode-se notar que o sistema em questão é caracterizado por dois pontos críticos dados por

$$(\bar{x}, \bar{y})_{\pm} = \pm\Delta\Big(4\Lambda + f(p+1)(p-2), \frac{4\Lambda}{p+1} - 2f\Big), \tag{3.24}$$

onde $\Delta \equiv \left(\frac{2(p+1)}{4\Lambda(p+2)+f(p^2-3)(p+1)}\right)^{1/2}$. Novamente seguindo a teoria padrão de sistemas dinâmicos, nota-se que o ponto $(\bar{x}, \bar{y})_+$ é um atrator no espaço de fase, enquanto que $(\bar{x}, \bar{y})_-$ é um repulsor. Se assim o é, temos então uma configuração das equações de campo, codificadas no (e traduzidas pelo) sistema dinâmico definido acima, que tendem para o ponto atrator dado por $(\bar{x}, \bar{y})_+$. Esse é um resultado importante e deve ser enfatizado: os dois pontos críticos traduzem duas configurações especiais do sistema, duas branas. Entretanto as equações de campo tendem a apenas uma delas. Isso é bastante correlato ao que acontece no modelo de Randall-Sundrum, isto é, duas branas, mas apenas uma visível.

Como dito anteriormente por inspeção da equação (3.4), fixando $p = 3$ temos um cenário de branas com espaço transverso (r, θ). Logo, tomando tal valor para p e olhando para as equações (3.16) e (3.17) no atrator $(\bar{x}, \bar{y})_+$, temos

$$A' = \Big(\frac{2}{5\Lambda + 6f}\Big)^{1/2}(\Lambda + 2f), \tag{3.25}$$

$$C' = \Big(\frac{2}{5\Lambda + 6f}\Big)^{1/2}(\Lambda - 2f). \tag{3.26}$$

Essas equações integrais fornecem a forma funcional dos campos no atrator e na região $r \gg$. De mesmo modo, a equação (3.21) nos leva a um importante vínculo dado por

$$\sigma'^2 = \frac{-4f(\Lambda + 2f)}{5\Lambda + 6f}. \tag{3.27}$$

Notemos da equação acima que, para que tenhamos um campo escalar real, é necessário que a constante cosmológica obedeça a seguinte inequação

$$\Lambda > 2f(r), \tag{3.28}$$

que nos leva imediatamente a

$$\Lambda > 16|\varepsilon|\eta^2\gamma^2\frac{e^{-4\sqrt{2}r}}{r}. \tag{3.29}$$

Essa equação é também bastante importante. Primeiramente ela nos diz que, diferente do que foi encontrado em [13], estamos, de fato, trabalhando com um espaço de de Sitter, o que é uma característica nova nesse tipo de modelo. Depois ela nos fornece, uma vez trabalhando na região $r \gg$, um limite inferior para a constante cosmológica (bastante diminuta) que, de fato, pode não ser constante.

Podemos também inferir, ainda que de modo indireto, a maneira pela qual tal modelo pode contribuir para a solução do problema da hierarquia. Com tal intuito, após voltarmos para o referêncial físico temos um elemento de linha dado por

$$ds^2 = W(r)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + e^{2\beta\sigma}dr^2 + H(r)d\theta^2, \tag{3.30}$$

onde $W(r) \equiv e^{2\beta\sigma+A}$ e $H(r) \equiv e^{2\beta\sigma+C}$ e A, C e σ são os campos cuja forma assintótica[6] é dada pelas equações (3.25), (3.26) e (3.27). A função $W(r)$, como parte do warp factor, claramente intervém no mecanismo de Higgs. Muito embora a maneira explícita de como isso ocorre não possa ser evidenciada aqui, uma vez que só temos as expressões integrais longe da brana, fica claro que o campo escalar providencia novas possibilidades de ajuste quando do processo de distribuição de massas. No modelo analisado na próxima Seção veremos, em outros exemplos, de que modo o campo de Brans-Dicke pode, ou não, auxiliar na resolução do problema da hierarquia.

Encerramos essa Seção chamando a atenção, de passagem, de que no limite $f(r) \to 0$ o campo de Brans-Dicke torna-se constante e $A = C + cte$. De tal maneira que o elemento de linha pode ser escrito como

$$ds^2 = e^{\Lambda^{1/2}r}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + d\theta^2) + dr^2, \tag{3.31}$$

onde as constantes foram absorvidas em novas variáveis (x^μ, θ, r).

Na próxima Seção vamos nos deparar com um modelo um pouco mais tratável analiticamente que nos fornecerá mais intuição a respeito do assunto.

[6] De fato, estou em débito com o amigo Leonardo de Assis que gentilmente me enviou uma solução de tais equações nesse regime assintótico. Como nossa discussão aqui fica restrita a aspectos gerais do modelo, não vou entrar em detalhes a respeito da forma explícita dos campos.

3.2 Modelo com a corda global em gravitação de Brans-Dicke

Este novo modelo nos leva um passo além na compreensão do campo escalar em modelos de brana estudados em gravitação de Brans-Dicke. Se anteriormente conseguimos expressar nossa solução apenas na forma integral e numa região longe da brana, aqui conseguiremos uma solução analítica, obtida sem aproximações, porém da "superfície" brana em diante. Como mais uma diferença expressa, se antes tinhamos a certeza de que o campo escalar ao entrar no warp factor modificaria a análise do problema da hierarquia, aqui temos uma melhor indicação de como ele faz isso.

Debalde, entretanto, foram nossas tentativas para a realização de um modelo completo. O que fazemos aqui é um passo importante, necessário e bem estabelecido, porém não enverga a alcunha de um modelo acabado. No que se segue, apresentaremos nossos resultados em ressonância ao exposto na referência [36].

O programa de compactificações alternativas seguiu um frente com trabalhos interessantes em Relatividade Geral [37, 38]. Faremos menção a tais trabalhos, e a outros, ao longo da exposição do nosso modelo, sempre que houver algum *link* interessante. Nossa proposta básica tem como ponto de partida a extensão da solução encontrada em [39] para $(p+3)$-dimensões. Como antes, obteremos a solução primeiramente no referencial de Einstein onde há um desacoplamento entre $g_{\mu\nu}$ e o campo escalar ϕ. Vamos fixar a notação relembrando brevemente as equações que conectam os dois referenciais. As quantidades rotuladas com o acento til são as físicas[7]: o campo escalar físico é relacionado ao campo no referencial não físico por $\tilde{\phi} = \frac{1}{\mathcal{G}}e^{-2\alpha\phi}$, sendo $\alpha^2 = \frac{1}{2w+3}$ (onde w é o parâmetro de Brans-Dicke e $\mathcal{G}$ está ligado à massa de Planck em $(p+3)$-dimensões), enquanto que a métrica física está ligada à métrica no referencial de Einstein por $\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{2\alpha\phi}g_{\mu\nu}$.

Seguindo nosso padrão, daremos à métrica um *ansatz* que reflita a simetria produzida pela corda cósmica (novamente reta e paralela ao eixo z) global $U(1)$, ou seja, uma simetria cilíndrica

$$ds^2 = -g(r)dt^2 + dr^2 + g_1(r)d\theta^2 + g(r)dz_i^2, \tag{3.32}$$

onde novamente $i = 1, ..., p$. O tensor energia-momento para um corda global fora da corda é (fora do núcleo da corda, ou fora do que entenderemos pela superfície da brana)

$$T_r^r = T_z^z = T_t^t = -T_\theta^\theta = -\sigma(r), \tag{3.33}$$

[7]Comparando com a Seção anterior temos $\beta \to \alpha$, $\sigma \to \phi$ e $\varepsilon \to \mathcal{G}$ (ver equações (3.2) e (3.3)).

onde $\sigma(r)$ é uma função positiva a ser determinada[8]. Enfatizamos que, quando estabelecido o cenário bulk-brana, a brana estará na origem enquanto a solução será válida para $r > r_b$, sendo r_b a largura da brana.

Em termos da métrica $g_{\mu\nu}$ a equação de Brans-Dicke pode ser escrita na forma

$$R^{\mu}_{\nu} = 2\partial^{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi + 8\pi\mathcal{G}\Big(T^{\mu}_{\nu} - \frac{\delta^{\mu}_{\nu}T}{p+1}\Big), \tag{3.34}$$

enquanto o campo escalar obedece

$$\Box^2\phi = -4\pi\mathcal{G}\alpha T. \tag{3.35}$$

Sabemos que nesse referencial o tensor energia-momento não é conservado, de fato $\nabla_{\mu}T^{\mu}_{\nu} = \alpha T\partial_{\nu}\phi$ onde ∇_{μ} é a derivada covariante em $(p+3)$-dimensões. Essa última equação fornece explicitamente

$$\frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{g_1'}{g_1} + \frac{(p-1)}{2}\frac{g'}{g} = 2\alpha\phi', \tag{3.36}$$

cuja solução é dada por

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{8\pi\mathcal{G}}\frac{e^{2\alpha\phi}}{g_1 g^{(p-1)/2}}, \tag{3.37}$$

onde $\sigma_0 > 0$ é uma constante arbitrária. Da equação (3.35) com o auxílio de (3.37) temos

$$\phi'' + \frac{1}{2}\left[\frac{g'(p+1)}{g} + \frac{g_1'}{g_1}\right]\phi' = \frac{\alpha\sigma_0 e^{2\alpha\phi}}{g_1 g^{(p-1)/2}}. \tag{3.38}$$

Vamos agora voltar nossa atenção para as equações de Brans-Dicke advindas de (3.34). Com a métrica (3.32) elas são dadas por

$$\frac{-g''}{2g} + \frac{(1-p)g'^2}{4g^2} - \frac{g'g_1'}{4gg_1} = 8\pi\mathcal{G}\sigma\Big(\frac{1-p}{1+p}\Big), \tag{3.39}$$

$$\frac{-g_1''}{2g_1} + \frac{g_1'^2}{4g_1} - \frac{(p+1)g_1'g'}{4g_1 g} = 8\pi\mathcal{G}\sigma\Big(\frac{3+p}{1+p}\Big), \tag{3.40}$$

$$-\frac{(p+1)}{2}\frac{g''}{g} + \frac{(p+1)}{4}\frac{g'^2}{g^2} - \frac{g_1''}{2g_1} + \frac{g_1'^2}{4g_1^2} = 8\pi\mathcal{G}\sigma\Big(\frac{1-p}{1+p}\Big) + 2\phi'^2. \tag{3.41}$$

Definamos agora, com o intuito de facilitar nossa análise, uma nova função $\bar{u}$ por

$$\bar{u}^2 = g_1 g^{p+1}. \tag{3.42}$$

[8]Novamente alertamos o leitor para que não haja confusão entre a função aqui chamada de σ e o campo escalar no referencial de Einstein da Seção anterior.

Com tal função, podemos escrever as equações (3.38), (3.39) e (3.40), respectivamente, como

$$\frac{d}{dr}\Big(\overline{u}\frac{d\phi}{dr}\Big) = \alpha\sigma_0\overline{u}\frac{e^{2\alpha\phi}}{g_1 g^{\frac{(p-1)}{2}}}, \tag{3.43}$$

$$\frac{d}{dr}\Big(\frac{\overline{u}}{g}\frac{dg}{dr}\Big) = -16\pi\overline{u}\sigma\Big(\frac{1-p}{1+p}\Big), \tag{3.44}$$

$$\frac{d}{dr}\Big(\frac{\overline{u}}{g_1}\frac{dg_1}{dr}\Big) = -16\pi\overline{u}\sigma\Big(\frac{3+p}{1+p}\Big). \tag{3.45}$$

Por fim, substituindo (3.39) e (3.40) em (3.41) ficamos com

$$\frac{p(p+1)}{4}\frac{g'^2}{g^2} + \frac{(p+1)}{2}\frac{g_1'g'}{g_1 g} = 8\pi\mathcal{G}\sigma(p-3) + 2\phi'^2. \tag{3.46}$$

Como último ingrediente para a obtenção da solução, vamos escrever as agora elegantes equações acima em termos de uma nova coordenada radial, $\bar{r}$, definida por $\bar{u}\frac{d\bar{r}}{dr} = 1$. Em termos dessa nova coordenada a métrica fica, *suprimindo a barra na coordenada radial*,

$$ds^2 = -g(r)dt^2 + g^{(p+1)}g_1 dr^2 + g_1(r)d\theta^2 + g(r)dz_i^2. \tag{3.47}$$

É mister enfatizar que agora a coordenada radial é definida no domínio $-\infty < r < +\infty$, enquanto a brana está localizada em $r \to -\infty$ e a solução a ser obtida é válida na região $r > -r_b$. Feitas essas ressalvas podemos reescrever as equações (3.43), (3.44) e (3.45), respectivamente, na forma

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = \alpha\sigma_0 g^{\frac{(p+3)}{2}}e^{2\alpha\phi}, \tag{3.48}$$

$$\frac{d}{dr}\Big(\frac{1}{g}\frac{dg}{dr}\Big) = \frac{-2(1-p)\sigma_0 g^{\frac{(p+3)}{2}}e^{2\alpha\phi}}{(1+p)}, \tag{3.49}$$

$$\frac{d}{dr}\Big(\frac{1}{g_1}\frac{dg_1}{dr}\Big) = \frac{-2(p+3)\sigma_0 g^{\frac{(p+3)}{2}}e^{2\alpha\phi}}{(1+p)}, \tag{3.50}$$

enquanto a equação (3.46) permanece a mesma, apenas com um fator $\bar{u}^2$ multiplicando a primeira parte do lado direito. Podemos agora encontrar as soluções para g e g_1, estabelecendo, assim, a métrica.

Das equações (3.48) e (3.50) temos

$$g_1 = g_1^0 e^{\kappa_1 r}e^{\frac{-2}{\alpha}\left(\frac{3+p}{1+p}\right)\phi}, \tag{3.51}$$

enquanto que, as equações (3.48) e (3.49) juntas fornecem

$$g = g^0 e^{\kappa r}e^{\frac{-2}{\alpha}\left(\frac{1-p}{1+p}\right)\phi}, \tag{3.52}$$

onde κ_1, κ, $g_1^0(>0)$ e $g^0(>0)$ são constantes arbitrárias. Sempre tentando obter respaldo da literatura pré-existente, enfatizamos que se $p = 1$ obtemos o mesmo resultado encontrado em [39].

Notemos também que se $p = 3$ no elemento de linha original, temos um cenário de brana em seis dimensões. Doravante nessa Seção, vamos nos ater a esse caso. Substituindo as soluções obtidas para g e g_1 em (3.46) temos

$$\left(2+\frac{3}{\alpha^2}\right)\phi'^2 - \frac{2\kappa_1}{\alpha}\phi' - \kappa\left(3\kappa + 2\kappa_1\right) = 0, \tag{3.53}$$

cuja solução é sabidamente bastante simples. Temos então o campo escalar dado por $\phi = \phi_0 r + \phi_1$, onde ϕ_1 é uma constante arbitrária (que tomaremos como zero, por simplicidade) e ϕ_0 é dada por

$$\phi_0 = \frac{\kappa_1}{\alpha(2+\frac{3}{\alpha^2})} \pm \frac{1}{2(2+\frac{3}{\alpha^2})}\left[\frac{4\kappa_1^2}{\alpha^2} + 4\kappa(3\kappa+2\kappa_1)(2+\frac{3}{\alpha^2})\right]^{1/2}. \tag{3.54}$$

Isso posto, podemos determinar completamente a forma da métrica. Notemos de antemão que esta, e portanto as propriedades do espaço-tempo, depende fortemente da relação entre as constantes de integração do modelo. Antes, porém, de entrarmos em tais detalhamentos vamos escrever o elemento de linha no referencial *físico*:

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 &= g^0 e^{\left[\kappa+\left(\frac{1+2\alpha^2}{\alpha}\right)\phi_0\right]r}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + g_1^0 e^{\left[\kappa_1+\left(\frac{-3+2\alpha^2}{\alpha}\right)\phi_0\right]r}d\theta^2 \\ &+ (g^0)^4 g_1^0 e^{\left[4\kappa+\kappa_1+\left(\frac{1+2\alpha^2}{\alpha}\right)\phi_0\right]r}dr^2 \, . \end{aligned} \tag{3.55}$$

Além disso, o campo de Brans-Dicke físico é dado por

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{\mathcal{G}}e^{-2\alpha\phi_0 r}. \tag{3.56}$$

Façamos algumas ponderações a respeito da métrica (3.55). Primeiramente convém ressaltar que a estrutura bulk/brana foi gerada, por assim dizer, por uma corda global que atribui uma simetria cilíndrica ao espaço-tempo e perfaz as dimensões intrínsecas da brana. Entretanto é sabido que cordas cósmicas globais levam a singularidades no espaço-tempo, tanto em Relatividade Geral [40] como em gravitação de Brans-Dicke [39]. Esse efeito se deve, em parte, à dimensão do espaço-tempo. É fácil ver que se $p \neq 3$, a equação (3.46) leva a uma equação diferencial outra que não (3.53). Por exemplo, na referência [39], onde $p = 1$, existem singularidades para distâncias finitas da coordenada radial que advém do primeiro termo do lado direito de (3.46). Felizmente, no caso em questão, tal termo é suprimido. É intrigante o fato de que, caso não estivessemos trabalhando em seis dimensões o espaço-tempo seria completamente outro, quiçá até mesmo sem uma solução analítica fora da brana.

Nosso elemento de linha, entretanto, não é completamente livre de singularidades. Por exemplo, o escalar de curvatura é dado por

$$R = \frac{\left[5\phi_0^2(4\alpha^2 - 1) - \alpha^2\kappa(3\kappa + 2\kappa_1) - 2\alpha\kappa_1\phi_0 + 8\phi_0^2\right]}{(g^0)^4 g_1^0 \alpha} e^{-\tilde{\sigma} r}, \tag{3.57}$$

onde $\tilde{\sigma} \equiv 4\kappa + \kappa_1 + \left(\frac{1+2\alpha^2}{\alpha}\right)\phi_0$. Desse modo, se $\tilde{\sigma}$ for positivo o espaço-tempo possui uma singularidade no regime $r \to -\infty$. Do contrário, teremos uma singularidade em $r \to +\infty$. Esse problema pode ser transposto pela adição de novas branas atuando como *cut-offs* na direção radial extra [15]. Tal procedimento não é completamente rigoroso, pois novas branas certamente mudam a lagrangeana inicial e portanto deveríamos resolver novamente as equações de Einstein-Brans-Dicke com uma fonte que expresse o caráter de múltiplas branas do modelo. É fato que a adição de tais branas *ad hoc* pode ser acompanhada do requerimento de que as branas adicionadas estejam muito distantes e que, portanto, não interferem drasticamente na estrutura do espaço-tempo umas das outras. Embora tudo isso possa ser feito, tal procedimento soa artificial.

Tomaremos assim, outro rumo para nossas análises. Sendo o modelo fortemente dependente das constantes de integração, vamos assumir alguns casos especiais para estudo. Se por um lado, isso tolhe todo um aspecto geral das conclusões a serem obtidas, por outro nos fornece um terreno seguro, ainda que assaz específico, onde podemos adquirir uma maior familiariedade com o próprio modelo, além de possibilitar uma importante correlação com dados experimentais do parâmetro de Brans-Dicke. Eis o porquê de termos optado por esse último viés.

É nítido que o elemento de linha disposto em (3.55) é uma solução bastante geral. Dentro da proposta contida no parágrafo anterior, vamos agora proceder de modo a restringir ou antes vincular algumas constantes de integração de modo a tentar extrair mais informação física a respeito do modelo. Uma primeira tentativa interessante é a de tornar o espaço maximalmente simétrico, isto é, impor $\tilde{\sigma} = 0$ em (3.57). Essa tentativa se mostra bastante promissora, uma vez que torna o coeficiente da direção radial em (3.55) igual a um, e portanto obtemos "naturalmente" um warp factor exponencial. No entanto, tal vínculo ($\tilde{\sigma} = 0$) não pode ser implementado. De fato, com auxílio da equação (3.54) podemos relacionar κ e κ_1 por

$$(20\alpha^2 + 45 - 12\alpha^4)\kappa^2 + (24\alpha^2 + 30 - 8\alpha^4)\kappa_1\kappa + (6\alpha^2 + 5)\kappa_1^2 = 0. \tag{3.58}$$

Agora, visando um modelo viável do ponto de vista fenomenológico, utilizando o fato de que o parâmetro de Brans-Dicke é da ordem de $w \sim 10^4$ [7] temos que os termos mais importantes são proporcionais a α^2. Desse modo não existe solução para κ,κ_1 no conjunto real, o que é bastante despropositado. De passagem, ressaltamos que esse mesmo problema ocorre se tentamos restringir nossas constantes de modo a zerar o segundo termo da equação (3.54).

É importante aqui fazermos uma pausa para analisar algo que assumimos implicitamente no argumento acima. Os testes que fornecem um limite inferior para o parâmetro de Brans-Dicke foram obtidos através de experimentos realizados no Sistema Solar. Entretanto nossa solução não vale em tal região. Estamos portanto assumindo que tal valor também se aplique na escala em questão (no mínimo, na escala do raio de Hubble). Em outras palavras, estamos assumindo que o *status* da teoria de Brans-Dicke seja o mesmo no bulk. Obviamente, um cenário completo deve contemplar a solução dentro da brana, onde tal argumento é corroborado experimentalmente, e então ser conectado com a solução (3.55) via alguma condição de junção engenhosa. No que se segue, continuaremos assumindo que possamos considerar $w \sim 10^4$ na superfície da brana[9] e no bulk.

Vamos então analisar algum vínculo mais direto entre κ e κ_1 que nos evite os problemas anteriores. Um exemplo interessante é dado pela restrição

$$3\kappa + 2\kappa_1 = 0. \tag{3.59}$$

Enfatizamos, dentro do grau de arbitrariedade que nos é possível, que tal escolha fora feita, a princípio, simplesmente por zerar o último termo da equação (3.54); ou seja, por simplicidade. No entanto, como veremos ela nos leva a importantes resultados. Da própria equação (3.54) temos duas soluções possíveis para ϕ_0:

$$\phi_0^{\pm} = \frac{-3\kappa(1 \pm 1)}{2\alpha(2 + 3/\alpha^2)}. \tag{3.60}$$

Chamando os coeficientes exponenciais de (3.55) de

$$A \equiv \kappa + \Big(\frac{1 + 2\alpha^2}{\alpha}\Big)\phi_0, \tag{3.61}$$

$$B \equiv \kappa_1 + \Big(\frac{-3 + 2\alpha^2}{\alpha}\Big)\phi_0, \tag{3.62}$$

e

$$C \equiv 4\kappa + \kappa_1 + \Big(\frac{1 + 2\alpha^2}{\alpha}\Big)\phi_0, \tag{3.63}$$

[9] Como jargão corrente, entendemos o ponto $(x^\mu, \theta, r = -r_b)$ como pertencente à "superfície" da brana.

temos, com o auxílio de (3.59) e (3.60), os seguintes casos possíveis

$$A^{\pm} = \kappa\left[1 - \frac{3(1\pm 1)}{2}\left(\frac{1+2\alpha^2}{3+2\alpha^2}\right)\right], \tag{3.64}$$

$$B^{\pm} = \frac{-3\kappa}{2}\left[1 + (1\pm 1)\left(\frac{-3+2\alpha^2}{3+2\alpha^2}\right)\right], \tag{3.65}$$

e

$$C^{\pm} = \frac{\kappa}{2}\left[5 - 3(1\pm 1)\left(\frac{1+2\alpha^2}{3+2\alpha^2}\right)\right], \tag{3.66}$$

enquanto o escalar de curvatura também apresenta, por seu turno, duas soluções

$$R = \frac{9\kappa^2(1\pm 1)e^{-Cr}}{2(g^0)^4(g_1^0)(2\alpha^2+3)}\left[\frac{(1\pm 1)}{2}[8+5(4\alpha^2-1)] - 1\right]. \tag{3.67}$$

De agora até o fim desse Capítulo faremos um estudo sistemático dos dois possíveis casos ($\pm$), dada a restrição (3.59). Começaremos pelo mais simples, ϕ_0^-. Nesse caso, das equações (3.60),(3.64)—(3.67), é fácil ver que:

$$\begin{aligned} A &= \kappa, \\ B &= \frac{-3\kappa}{2}, \\ C &= \frac{5\kappa}{2}, \\ R &= 0, \\ \phi_0 &= 0. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Note que nesse caso, temos um "desligamento" do campo de Brans-Dicke, uma vez que $\phi_0 = 0$. Além disso, a métrica é simplesmente dada por

$$\tilde{ds}^2 = e^{\kappa r} g^0 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + g_1^0 e^{\frac{-3\kappa r}{2}} d\theta^2 + (g^0)^4 g_1^0 e^{\frac{5\kappa}{2}} dr^2. \tag{3.69}$$

Para que estudemos de modo preciso o papel do warp factor, façamos uma nova mudança de coordenadas. Através da equação

$$d\rho^2 = \bar{C}_1 e^{Cr} dr^2, \tag{3.70}$$

onde $\bar{C}_1 = (g^0)^4(g_1^0)$, temos

$$e^{\xi r} = \left(\frac{C\rho}{2\bar{C}_1^{\,1/2}}\right)^{2\xi/C}, \tag{3.71}$$

sendo ξ alguma constante. A nova coordenada radial é definida no domínio $\rho_b < \rho < +\infty$, onde ρ_b rotula a superfície da brana. Em termos de tal coordenada, e em vista da equação (3.71), o elemento de linha (3.69) torna-se (absorvendo termos g^0 e g_1^0)

$$\tilde{ds}^2 = \left(\frac{5\kappa\rho}{4}\right)^{4/5}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \left(\frac{5\kappa\rho}{4}\right)^{-6/5}d\theta^2 + d\rho^2. \tag{3.72}$$

Analisemos a métrica obtida. Primeiramente notemos que tal elemento de linha é mal definido no limite $\rho_b \to 0$. Isso pode sugerir que, de fato, tal modelo aponte para uma brana com espessura diferente de zero. Entretanto, preferimos ser mais conservadores e não especular em tal sentido, uma vez que nossa solução não pode ser aplicada à estrutura interna da brana. O warp factor também se mostra problemático para $\rho \to +\infty$. Enfatizamos que a despeito de $R = 0$ e $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 0$ $(\mu, \nu = 0, ..., 5)$, espera-se (caso a solução não mude drasticamente no interior da brana) uma singularidade nua no limite $\rho \to 0$, uma vez que $R_{\mu\nu\gamma\delta}R^{\mu\nu\gamma\delta} \propto 1/\rho^4$ e $C_{\mu\nu\gamma\delta}C^{\mu\nu\gamma\delta} \propto 1/\rho^4$ (sendo $C_{\mu\nu\gamma\delta}$ o tensor de Weyl).

Na superfície da brana, $\rho = \rho_b$, temos características interessantes. Primeiramente, note que o coeficiente de $d\theta^2$ não é zero quando ρ é fixado na superfície. Desse modo, mantendo em mente a modelagem de branas, somos levados a concluir que o sistema consiste em uma dimensão extra transversa e uma 4-brana com uma dimensão extra compacta presente na brana [15]. Isso significa termos uma compactificação híbrida. Por outro lado, se o coeficiente de $d\theta^2$ apresentasse um número infinito de zeros, seria possível se interpretar tal fato como um número infinito de branas, cada uma em cada um desses pontos. No nosso caso, o fato do coeficiente de $d\theta^2$ estar apto a ter qualquer valor ao longo de ρ é importante somente para se fixar o tamanho da dimensão compacta na brana. Desse modo, o espaço-tempo descrito pela métrica (3.72) contém uma 4-brana com topologia $\mathbb{R}^{(1,3)} \times S^1$ mergulhada num bulk de codimensão um. Mais um ponto se mostra importante. Note que os termos exponenciais em (3.72) apresentam um comportamento oposto: enquanto um aumenta com a dimensão extra transversa ρ o outro diminui e vice-versa. Essa característica é presente em outros modelos construídos no escopo de gravitação de Brans-Dicke [15].

A fim de garantirmos a viabilidade do modelo, devemos exigir que a dimensão extra compactificada na brana não exceda o tamanho já escrutinado por meios experimentais [41], digamos M. Da métrica (3.72) isso é implementado via[10]

$$\left(\frac{5\kappa\rho_b}{4}\right)^{-3/5} < \frac{M}{2\pi}, \tag{3.73}$$

[10]Somos forçados a advertir o leitor sobre a pequena, porém existente, diferença entre os expoentes das equações (3.73) e (3.74) e os das equações (42) e (43) da referência [36]. Entretanto as mesmas conclusões se aplicam, sendo o erro em [36] apenas um *misprint*.

o que significa

$$\rho_b > \frac{4}{3\kappa}\Big(\frac{2\pi}{M}\Big)^{5/3}. \tag{3.74}$$

Essa restrição é bastante severa no que tange à aplicação do warp factor na análise do problema da hierarquia, uma vez que um warp factor dessa magnitude agrava o problema. De fato, a escala de interação gravitacional na brana, digamos M_6, é dada por

$$M_6^4 = \frac{M_{Pl}^2}{2\pi}\Big(\frac{4}{3\kappa}\Big)^{6/5}\rho_b^{6/5}, \tag{3.75}$$

onde M_{Pl} é a massa de Planck em quatro dimensões. Dessa maneira, levando-se em conta a equação (3.74) temos que inevitavelmente $M_6 \gg M_{weak}$ e o problema da hierarquia persiste. Essa situação pode ser suavizada pela escala do parâmetro κ, até agora deixada em aberto. Vamos porém nos ater à discussão prévia, uma vez que não há, em princípio, nenhuma razão física para se ajustar tal parâmetro para a resolução do problema da hierarquia: seria resolver esse problema introduzindo outro (a nova hierarquia em κ).

É óbvio que um warp factor de grande magnitude, e portanto a não resolução do problema da hierarquia, não é uma característica desejada de modelos de branas (embora seja presente em outros modelos em seis dimensões [42, 43]). Gostaríamos de ressaltar entretanto que essa não é a palavra final no modelo em questão por dois motivos já declarados: depende explicitamente do vínculo particular entre κ e κ_1, e a solução obtida não fornece nenhuma informação sobre a forma do warp factor na região $\rho < \rho_b$.

Voltemo-nos agora para a outra possibilidade, ϕ_0^+. Como veremos, há certa superposição de resultados e muito do que obtivemos no caso anterior acontece também aqui. No entanto, há neste caso um warp factor mais interessante. Com ϕ_0^+ temos, no antigo sistema de coordenadas

$$\begin{aligned}
A &= \kappa\Big[1 - 3\Big(\frac{1+2\alpha^2}{3+2\alpha^2}\Big)\Big],\\
B &= \frac{-3\kappa}{2}\Big[1 + 2\Big(\frac{-3+2\alpha^2}{3+2\alpha^2}\Big)\Big],\\
C &= \frac{\kappa}{2}\Big[5 - 6\Big(\frac{1+2\alpha^2}{3+2\alpha^2}\Big)\Big],\\
R &= \frac{9\kappa^2(20\alpha^2+2)}{(g^0)^4(g_1^0)(2\alpha^2+3)}e^{\frac{-\kappa(9-2\alpha^2)r}{2(3+2\alpha^2)}},\\
\phi_0 &= \frac{-3\kappa\alpha}{3+2\alpha^2}.
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Agora, com o auxílio das equações (3.70) e (3.71) temos o seguinte elemento de linha (absorvendo os termos κ, g^0, g_1^0 e o parâmetro de Brans-Dicke)

$$\tilde{ds}^2 = \rho^{\left(\frac{-16\alpha^2}{9-2\alpha^2}\right)}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \rho^{\left(\frac{18(1-2\alpha^2)}{9-2\alpha^2}\right)}d\theta^2 + d\rho^2. \tag{3.77}$$

Notemos primeiramente que a maneira como o coeficiente de $d\theta^2$ e o warp factor variam com ρ é um pouco diferente do caso anterior. Eles continuam tendo comportamentos opostos mas agora o expoente do warp factor é negativo. O escalar de curvatura está relacionado a ρ por $R \propto 1/\rho^2$, logo também esperamos, nesse caso, uma singularidade nua com $\rho_b \to 0$. Pelas mesmas razões previamente explicitadas, o cenário aqui é composto por uma 4-brana com topologia $\mathbb{R}^{(1,3)} \times S^1$ e uma dimensão extra transversa à brana.

No que concerne ao problema da hierarquia, o presente caso apresenta-se um pouco mais favorável. Restringindo o tamanho da dimensão extra compacta na brana, temos

$$\rho_b < \left(\frac{M}{2\pi}\right)^{(9-2\alpha^2)/9(1-2\alpha^2)}, \tag{3.78}$$

que, apesar de fornecer um valor muito pequeno para ρ_b sugere que este problema seja atenuado, pelo menos em parte, pela presença do parâmetro α levando assim a um warp factor não muito grande. Para finalizar esta análise, enfatizamos que o campo de Brans-Dicke físico é dado por $\tilde{\phi} \sim \rho^{24\alpha^2/(9-2\alpha^2)}$, o que, tendo em vista a equação (3.78) indica um campo bastante fraco na brana. Esse é um ponto bastante interessante que nos leva à seguinte pergunta: sendo o campo de Brans-Dicke bastante fraco na brana, qual a sua influência gravitacional na brana? Ou ainda, uma vez que nesses modelos o campo escalar só depende da dimensão extra transversa à brana, qual é o seu real papel nesses modelos? No contexto cosmológico usual, essa questão já foi respondida (ver referências [8, 9]). Entretando em cenários de branas, acreditamos ser interessante abordar esse problema.

Primeiramente, como vimos, o campo escalar pode influenciar na resolução do problema da hierarquia. Ainda que nos casos analisados sua influência seja deveras sutil. Do ponto de vista gravitacional, as questões levantadas anteriormente são da mais extrema relevância uma vez que, do ponto de vista experimental, realizamos medidas na brana e somente nela. O próximo Capítulo é destinado unicamente a apontar uma direção para a resposta dessas questões, bem como de algumas sutilezas a elas relacionadas.

Antes porém de nos debruçarmos sobre esses pontos, vamos fazer mais alguns comentários complementares a respeito dos modelos vistos nesse Capítulo que devem ser levados em conta. Em geral, o estudo de modelos de branas é complementado pela análise de flutuações tensoriais linearizadas com o intuito de localizar a gravidade nos modelos. Isso, juntamente com o estudo da propagação de escalares na métrica obtida [38, 42]. Isso não é feito aqui uma vez que não dispomos de um modelo completo. No caso descrito na primeira Seção temos o comportamento do espaço-tempo longe da brana, enquanto que o modelo analisado na segunda, embora seja respaldado por uma solução analítica, não fornece informação sobre a estrutura do interior da brana.

Existem, em geral, alguns procedimentos padronizados para se extender soluções da superfície da brana para seu interior. Por exemplo, isso pode ser implementado pela própria análise do propagador de escalares no limite $\rho_b \to 0$ [38], ou ainda por algum truque engenhoso como a imposição de simetria $\mathbb{Z}_2$ na superfície da brana [42]. Infelizmente, nada disso é aplicável aqui, e por um simples motivo: para gerar toda a estrutura bulk/brana utilizamos um defeito topológico real com estrutura física interna. Desse modo, qualquer subterfúgio artificial parece não encontrar respaldo em nenhuma consideração físicamente aceitável. Talvez uma maneira mais interessante de se lidar com esse problema seja encontrar soluções para as duas regiões do espaço-tempo (dentro e fora da brana, com suas respectivas fontes) e, através de condições de contorno apropriadas, encontrar-se uma maneira de compatibilizar tais soluções. Algo portanto similar ao que foi feito em [32] para a corda local em gravitação de Brans-Dicke.

Além disso há um problema bastante grave aqui não abordado, a saber, a estabilização do tamanho da dimensão extra na brana e, quando for o caso, da distância entre as branas. Ainda outro ponto: no modelo com apenas uma brana, o que estabelece sua posição no bulk? Qualquer continuação séria dessa vertente de pesquisa precisa levar em conta esses importantes problemas. É possível que, e aqui estamos no terreno da especulação, na supracitada divisão das soluções em duas regiões a estabilização da dimensão extra compactada na brana emerja com alguma condição de junção. Mesmo assim, as outras questões permanecem. E com tais observações encerramos esse Capítulo. No próximo vamos, como dito, estudar outro importante ponto: como, do ponto de vista gravitacional, extrair informação física a respeito de tais modelos?

Capítulo 4

Equações de campo efetivas na brana

Este Capítulo possui um enfoque mais formal. Há de assim ser. Se nos Capítulos anteriortes pudemos nos valer de um molde expositório mais aprazível, posto que estávamos desbravando novos modelos, doravante devemos nos ater a um embasamento mais rigoroso. Desse modo, e esse é o nosso elã, pretendemos solidificar nosso trabalho atribuindo-lhe consistência tal que nos permita sólida aplicação futura.

Mas não é só a aplicação futura o que nos compele a tal desdobramento de nossa pesquisa. O embasamento teórico, por si só, é motivo de extenso estudo. Desejamos aqui, a grosso modo, nos endereçar à simples questão, que de fato pode ser feita a título de motivação: como as equações de campo gravitacional se traduzem na brana? Ou ainda, sendo a brana uma subvariedade mergulhada[1] numa variedade de dimensão maior, como podemos tratá-la gravitacionalmente? E por fim, qual o papel da simetria $\mathbb{Z}_2$ nos modelos de branas?

A fim de dirimir essas questões vamos primeiramente rever o formalismo de Gauss-Codazzi[2]. Feito tal passo, passamos à aplicação do formalismo aos modelos de branas em Brans-Dicke, primeiro num espaço-tempo dotado de simetria $\mathbb{Z}_2$ (Seção 4.1), e depois sem tal simetria (Seção 4.2). Como veremos, as chamadas *condições de junção*, ferramentas necessárias para a obtenção das equações de campo na brana, possuem um papel central em nosso desenvolvimento e portanto na formulação das

[1]Sempre tratamos a brana como *mergulhada* numa variedade de dimensão maior. Esse termo nos garante correspondência um-a-um entre pontos da brana e pontos do bulk e, portanto, oferece-nos um mapeamento unívoco entre as duas variedades.

[2]Há uma ligeira contenda acadêmica a respeito da correta grafia do nome de um dos autores de tal formalismo: Codazzi ou Codacci? A regra é simples: usa-se Codacci sempre que se queira toda sorte de reclamações via emeio. Do contrário, Codazzi sempre se aplica.

respostas às perguntas feitas no segundo parágrafo. De fato, não nos refreamos em dizer que, se do ponto de vista gravitacional o formalismo de Gauss-Codazzi é o estentor da física de modelos de branas com codimensão um, as condições de junção são o coração do formalismo no que concerne à sua utilidade para a extração de informação sobre a física do sistema.

Comecemos, pois, nossa revisão sobre o formalismo de Gauss-Codazzi primeiramente em quatro dimensões. Como será visto, a extensão para dimensões maiores é imediata. Faremos nossa revisão aos moldes da referência [44]. De agora até o fim dessa Seção introdutória vamos proceder de modo a expressar quantidades geométricas de uma subvariedade mergulhada no espaço-tempo em termos de quantidades desse espaço-tempo.

Seja M uma variedade topológica com métrica g_{ab}, de tal modo que o par (M, g_{ab}) constitua um espaço-tempo. Para cada evento p pertencente a M, o espaço tangente, digamos V_p, é isomorfo ao espaço-tempo de Minkowski. Vamos, de modo usual, nos referir ao cone de luz passando pela origem de V_p como o cone de luz de p. Assim, enfatizamos que o cone de luz de p é um subconjunto de V_p, não de M. Como em Relatividade Restrita, em cada ponto $p \in M$ podemos designar metade do cone de luz como "futuro" e metade como "passado"[3]. Se uma tal escolha pode ser feita de modo contínuo, (M, g_{ab}) é dito ser orientável temporalmente.

Seja então, (M, g_{ab}) um espaço-tempo orientável temporalmente. Uma curva diferenciável $\lambda(t)$ é dita ser uma curva tipo-tempo direcionada para o futuro se em cada $p \in \lambda$ a tangente t^a é um vetor direcionado para o futuro. O futuro cronológico de $p \in M$, denotado por $I^+(p)$, é definido como o conjunto de eventos que podem ser alcançados por uma curva tipo-tempo direcionada para o futuro partindo de p:

$$I^+(p) = \{q \in M / \; \exists \; \lambda(t) \; com \; \lambda(0) = p \; e \; \lambda(1) = q\}. \tag{4.1}$$

Para todo subconjunto $S \subset M$ definimos $I^+(S)$ como

$$I^+(S) = \bigcup_{p \in S} I^+(p). \tag{4.2}$$

Continuemos com mais definições importantes. Um subconjunto $S \subset M$ é dito ser acronal se não existe $p, q \in S$ tais que $q \in I^+(p)$, isto é $I^+(p) \bigcap S = \emptyset$. Agora, seja S um conjunto fechado e acronal. Definimos o domínio de dependência futuro[4] de S $(D^+(S))$ por

$$D^+(S) = \{p \in M / \; toda \; curva \; causal \; que \; passa \; por \; p \; e \; intercepta \; S\}. \tag{4.3}$$

[3]Remarcamos que em uma variedade não simplesmente conexa pode não ser possível fazer uma designação contínua de "futuro" e/ou "passado" conforme p varia sobre M.

[4]Obviamente podemos definir de modo análogo o domínio de dependência passado $D^-(S)$.

O substrato dessas definições talvez possa ser melhor clarificado através da seguinte observação: a coleção de eventos $I^+(S)$ se refere a eventos que possam ser influenciados por S. Por outro lado, $D^+(S)$ se refere a eventos inteiramente influenciados por S, pois para D^+, S é acronal.

O domínio de dependência de S é dado por: $D(S) = D^+(S) \bigcup D^-(S)$ e representa o conjunto completo de eventos para os quais todo o estado físico pode ser determinado pelo conhecimento das condições de S. Estabeleçamos mais duas importantes definições. Primeiramente, um conjunto acronal fechado, Σ, para o qual $D(\Sigma) = M$ é chamado superfície de Cauchy. E por fim, um espaço-tempo (M, g_{ab}) que possui uma superfície de Cauchy Σ é dito ser globalmente hiperbólico. Note que tais espaços, de acordo com as definições vistas, são ideais para se tratar problemas de valor inicial. Vejamos agora um teorema, aqui assumido sem prova, que serve de base para o formalismo de Gauss-Codazzi.

Teorema: Seja (M, g_{ab}) um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Uma função global do tempo, f, pode ser escolhida tal que cada superfície de f constante seja uma superfície de Cauchy. Então o espaço-tempo pode ser folheado por superfícies de Cauchy e sua topologia é $\mathbb{R} \times \Sigma$, onde Σ representa qualquer superfície de Cauchy.

Seja, então, um espaço-tempo globalmente hiperbólico (M, g_{ab}). Como estabelecido no teorema anterior podemos folhear (M, g_{ab}) por superfícies de Cauchy, Σ_t, parametrizadas por uma função tempo global, t. Seja também n^a o campo vetorial unitário normal às hipersuperfícies Σ_t. A métrica do espaço-tempo (nosso já conhecido bulk), g_{ab}, induz uma métrica Riemanniana $3-D$, h_{ab}, em cada Σ_t por[5]

$$h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b. \tag{4.4}$$

Considere agora t^a um campo vetorial em M satisfazendo $t^a \nabla_a t = 1$, onde ∇_a é a derivada covariante. Vamos decompor t^a em suas partes normal e tangencial a Σ_t definindo a função *lapso* N e o vetor *shift*, N^a, com respeito a t^a por

$$N = -t^a n_a \tag{4.5}$$

e

$$N_a = h_{ab} t^b. \tag{4.6}$$

Sendo N^a tangente à hipersuperfície, podemos avaliar as transformações em Σ_t através da métrica abstrata h_{ab} (vide equação (4.6)). Isso nos sugere encarar h_{ab} como uma variável dinâmica em Relatividade Geral. Nossa intenção em realizar a

[5]Note que a métrica induzida aqui é $3-D$ simplesmente pelo fato de que estamos, como dito, trabalhando no escopo usual de Relatividade Geral.

decomposição expressa nas equações (4.5) e (4.6) é simplesmente chamar a atenção para o fato de podermos tratar h_{ab} como uma variável dinâmica. De fato, poderíamos enveredar por uma ampla análise via funções lapso e shift seguindo a linha de decomposição ADM [17], entretanto preferimos seguir a linha expressa em [44]. Vamos estudar um pouco mais essa estrutura de folheação a fim de ganharmos mais intuição a respeito do assunto. Para tanto, começaremos o parágrafo seguinte definindo uma importante quantidade geométrica: a curvatura extrínseca.

Como estamos no contexto quadri-dimensional, vamos tratar as hipersuperfícies Σ como puramente espaciais. Novamente reforçamos que isso não é necessário, sendo aqui apenas utilizado para familiarizar o leitor com as técnicas do formalismo de Gauss-Codazzi no terreno já conhecido da Relatividade Geral usual. Lembrando que n^a é o campo tangente unitário da congruência de geodésicas tipo-tempo ortogonais a Σ, a curvatura extrínseca é definida por

$$K_{ab} = \nabla_a n_b, \tag{4.7}$$

onde o cálculo em Σ é subtendido (note que[6] $K_{ab} \in \Sigma$, isto é, $K_{ab}n^b = 0$). Observe que da maneira como está definida, a curvatura extrínseca "mede", por assim dizer, a maneira pela qual a hipersuperfície está mergulhada no espaço-tempo de dimensão maior. Esse conceito será bastante útil na interpretação da equação projetada na brana.

Podemos relacionar a curvatura extrínseca com a derivada de Lie. Para tanto definamos ϕ_t como um grupo de difeomorfismos a um parâmetro, atuando na variedade M. Digamos que tal grupo é gerado por um campo vetorial v^a. Para um campo tensorial arbitrário $T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l}$, pode-se mostrar que a derivada de Lie, $\mathcal{L}_v$, atua da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_l} &= v^c \nabla_c T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 \ldots b_k} - \sum_{i=1}^{k} T^{a_1 .. c .. a_k}{}_{b_1 \ldots b_k} \nabla_c v^{a_i} \\ &+ \sum_{j=1}^{l} T^{a_1 \ldots a_k}{}_{b_1 .. c .. b_k} \nabla_{b_i} v^c. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Em particular, quando atuando na métrica temos

$$\mathcal{L}_v g_{ab} = v^c \nabla_c g_{ab} + g_{cb} \nabla_a v^c + g_{ac} \nabla_b v^c = \nabla_a v_b + \nabla_b v_a. \tag{4.9}$$

Note que, na ausência de uma hipersuperfície mergulhada na variedade, não há quebra de difeomorfismo e a derivada de Lie da métrica é zero, via equação de

[6]Outra propriedade útil é a simetria da curvatura extrínseca, $K_{ab} = K_{ba}$.

Killing. Entretanto a presença da hipersuperfície (brana) quebra o difeomorfismo total do espaço-tempo. Desse modo, tendo em vista as equações (4.4), (4.7) e (4.9) temos que

$$K_{ab} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_n g_{ab} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_n (h_{ab} - n_a n_b) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_n h_{ab}, \tag{4.10}$$

visto que, da equação (4.8), $\mathcal{L}_n(n_a n_b) = 0$.

Vamos agora dar mais um importante passo para estabelecer as relações entre métrica do espaço-tempo, derivada covariante, curvatura e as quantidades correspondentes induzidas em uma hipersuperfície (tipo-espaço, por enquanto) mergulhada em M. Façamos uso de um útil teorema cuja prova é auto-evidente, a partir da determinação dos símbolos de Christoffel:

Teorema: Se g_{ab} é uma métrica, então existe um operador de derivada único, ∇_a, satisfazendo $\nabla_a g_{bc} = 0$.

Desse teorema depreendemos o seguinte corolário: uma vez que g_{ab} induz h_{ab} (ver equação (4.4)), existe um operador de derivada, D_a, único em Σ tal que $D_a h_{bc} = 0$. Repare que todas as quantidades definidas e analisadas aqui estão nos conduzindo ao nosso propósito de encontrar quantidades geométricas em Σ dadas em termos de quantidades de M. Para esse fim, vamos nos familiarizar um pouco mais com o significado geométrico de h_a^b.

Seja v^a um vetor do espaço-tempo em um ponto $p \in \Sigma$. Como visto, podemos decompô-lo unicamente em componentes tangenciais e perpendiculares a Σ via $v^a = v_\perp n^a + v_\parallel^a$, onde $v_\parallel^a n_a = 0$. Se $v_\perp = 0$, $v^a = v_\parallel^a$ e podemos entender v^a como um vetor no espaço tangente a Σ em p. A condição $v_\perp = 0$ é equivalente a $v^a = h_b^a v^b$ com $h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$ e com índice levantado por g^{ab}. De modo geral, podemos encarar um tensor do espaço-tempo $T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}$ em $p \in \Sigma$ como um tensor sobre o espaço tangente a Σ em p se

$$T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l} = h^{a_1}{}_{c_1} \dots h^{a_k}{}_{c_k} h_{b_1}{}^{d_1} \dots h_{b_l}{}^{d_l} T^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l}. \tag{4.11}$$

Inversamente, todo tensor definido em $p \in \Sigma$ dá origem a um único tensor no espaço-tempo em p (isto é, um tensor sobre o espaço tangente a M em p). Desse modo, é lícito afirmar que h_b^a faz o papel de um operador de projeção do espaço tangente a M em p ao espaço tangente a Σ em p. Note que se $T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}$ é um tensor de Σ não podemos definir $\nabla_c T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}$, uma vez que para calcularmos essa quantidade precisamos saber como $T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}$ varia fora de Σ. Entretanto a quantidade $h_d^c \nabla_c T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}$ é bem definida. De fato, essa última quantidade nos permite escrever o seguinte lema

Lema: Seja (M, g_{ab}) um espaço-tempo e Σ uma hipersuperfície suave tipo-espaço em M. Então a derivada covariante associada à métrica induzida em Σ, D_a, é dada por

$$D_c T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l} = h^{a_1}{}_{d_1} \dots h_{b_l}{}^{e_l} h_c{}^f \nabla_f T^{d_1 \dots d_k}{}_{e_1 \dots e_l}, \tag{4.12}$$

onde ∇_a é a derivada covariante associada a g_{ab}. De posse dessas quantidades, podemos enfim encontrar uma relação entre a curvatura ${}^{(3)}R_{abc}{}^d$ de Σ e a do espaço-tempo $R_{abc}{}^d$. Sabemos que se v_c é um vetor dual em Σ, então o tensor de Riemann é dado por

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d v_d = D_a D_b v_c - D_b D_a v_c. \tag{4.13}$$

Entretanto, pela aplicação direta da equação (4.12), temos que

$$D_a D_b v_c = D_a (h_b{}^d h_c{}^e \nabla_d v_e) = h_a{}^f h_b{}^g h_c{}^k \nabla_f (h_g{}^d h_k{}^e \nabla_d v_e). \tag{4.14}$$

Essa última relação dá origem a três termos quando da aplicação da derivada no termo entre parênteses. Note que dois deles são da forma $h_a{}^f h_b{}^g h_c{}^e \nabla_f h_g{}^d$ que, com o auxílio de (4.4), fornecem $h_a{}^f h_b{}^g h_c{}^e \nabla_f h_g{}^d = h_c{}^e K_{ab} n^d$. Logo, levando em conta todos os termos, a equação (4.14) fica

$$D_a D_b v_c = h_a{}^f h_b{}^d h_c{}^e \nabla_f \nabla_d v_e + h_c{}^e K_{ab} n^d \nabla_d v_e + h_b{}^d K_{ac} n^e \nabla_d v_e. \tag{4.15}$$

Repetindo o procedimento similarmente para $D_b D_a v_c$ podemos escrever ${}^{(3)}R_{abc}{}^d$. Assim, com o auxílio da equação (4.13) e após algumas manipulações chegamos a chamada equação de Gauss

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d = h_a{}^f h_b{}^g h_c{}^k h_j{}^d R_{fgk}{}^j - K_{ac} K_b{}^d + K_{bc} K_a{}^d. \tag{4.16}$$

De modo completamente análogo, podemos derivar a equação de Codazzi

$$D_a K^a{}_b - D_b K^a{}_a = R_{cd} n^d h^c{}_b. \tag{4.17}$$

Essas duas equações serão nosso ponto de partida para as análises das próximas Seções desse Capítulo. A fim de darmos um tom de desfecho à presente Seção, gostaríamos de ressaltar a importância e, porque não, a beleza da abordagem geométrica no que se refere à interpretação do resultado obtido. Observemos, da equação (4.16), que a curvatura na hipersuperfície é dada pela *projeção* da curvatura do espaço-tempo, com correções de curvatura extrínseca necessárias para que levemos em conta a maneira pela qual a hipersuperfície foi mergulhada no próprio espaço-tempo. Eis o formalismo de Gauss-Codazzi.

Vale ressaltar que, uma vez que o tensor de curvatura é univocamente definido em coordenadas locais, a projeção do tensor métrico sobre a hipersuperfície também está univocamente definida.

4.1 Branas com simetria $\mathbb{Z}_2$

Nessa Seção aplicaremos o desenvolvimento anterior do formalismo de Gauss-Codazzi para branas mergulhadas num espaço-tempo sujeito a gravitação de Brans-Dicke. Como resultado, obteremos a equação de campo gravitacional na brana. Esse é o nosso maior propósito, e será o fim último de todo nosso esforço tanto nessa Seção quanto no resto do Capítulo.

A aplicação do formalismo de Gauss-Codazzi em modelos de branas em Relatividade Geral foi primeiramente levada a termo em [45] e mostrou-se tão frutífera que em pouco tempo seus resultados foram ampliados e vastamente aplicados em problemas cosmológicos [46]. A descrição de nossa aplicação em modelos em Brans-Dicke será aqui feita aos moldes do que foi apresentado em [47]. Antes porém, duas palavras sobre como a equação (4.16) se traduz em termos de brana e bulk. Tratamos a brana como uma subvariedade mergulhada numa variedade de dimensão superior. Desse modo, a primeira diferença com relação à Seção anterior é que entendemos a folheação como sendo ao longo de uma coordenada espacial (a dimensão extra transversa) e a subvariedade (a brana) é uma hipersuperfície tipo-tempo mergulhada no espaço-tempo (o bulk). Aliás, nada mais natural do que tal consideração: se a brana modela (ou pretende modelar) nosso universo, obviamente a coordenada temporal deve nela residir, logo a hipersuperfície é tipo-tempo. Outra diferença fica por conta de tratarmos a brana como objeto dotado de realidade física, ao contrário da folheação da Seção anterior, onde a subvariedade pode ser entendida como um estratagema matemático. Mais à frente, chegaremos até mesmo a atribuir uma tensão à brana.

Guardadas essas ressalvas, a última observação fica por conta das dimensões do bulk e da brana. De acordo com os modelos que analisamos no Capítulo 3, vamos tratar o nosso já familiar caso de um bulk em seis dimensões e uma brana híbrida de cinco dimensões. Resumindo, nossa 4-brana tem topologia $\mathbb{R}^4 \times S^1$ e está mergulhada em um bulk $6D$ onde, no presente caso, a dimensão extra transversa possui simetria $\mathbb{Z}_2$. Manteremos aqui a notação anterior na qual ∇_μ denota a derivada covariante com relação ao bulk enquanto D_μ rotula tal operador na brana. Notemos que, devido ao fato de a brana ser uma hipersuperfície do tipo-tempo, a métrica induzida (agora denotada por $q_{\mu\nu}$) é relacionada com a métrica do bulk, $g_{\mu\nu}$, por[7]

$$q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu, \tag{4.18}$$

onde n_μ é o vetor unitário normal à brana, como antes. O análogo da equação (4.16)

[7]Note a diferença de sinal com relação à equação (4.4).

é então dado por

$$ {}^{(5)}R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = {}^{(6)}R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} q_{\mu}^{\ \alpha} q_{\beta}^{\ \nu} q_{\gamma}^{\ \rho} q_{\delta}^{\ \sigma} + K^{\alpha}_{\ \gamma} K_{\beta\delta} - K^{\alpha}_{\ \delta} K_{\beta\gamma}, \tag{4.19} $$

enquanto a equação de Codazzi fica simplesmente

$$ D_{\nu} K_{\mu}^{\ \nu} - D_{\mu} K = {}^{(6)}R_{\rho\sigma} n^{\sigma} q_{\mu}^{\ \rho}, \tag{4.20} $$

sendo $K_{\mu\nu} = q^{\alpha}_{\mu} q^{\beta}_{\nu} \nabla_{\alpha} n_{\beta}$. De posse da equação de Gauss podemos encontrar o tensor de Einstein na brana em termos de quantidades do bulk. Contraindo os índices α e γ em (4.19) temos o tensor de Ricci

$$ {}^{(5)}R_{\beta\delta} = {}^{(6)}R_{\nu\sigma} q_{\beta}^{\ \nu} q_{\delta}^{\ \sigma} - {}^{(6)}R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} n_{\mu} n^{\rho} q_{\beta}^{\ \nu} q_{\delta}^{\ \sigma} + K K_{\beta\delta} - K^{\gamma}_{\ \delta} K_{\beta\gamma}, \tag{4.21} $$

e o escalar de curvatura $q^{\mu\nu}\,{}^{(5)}R_{\mu\nu}$ é dado por

$$ {}^{(5)}R = {}^{(6)}R_{\nu\sigma} q^{\nu\sigma} - {}^{(6)}R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} n_{\mu} n^{\rho} q^{\nu\sigma} + K^2 - K^{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}. \tag{4.22} $$

Com tais ingredientes podemos escrever o tensor de Einstein na brana como

$$ \begin{aligned} {}^{(5)}G_{\beta\delta} &= {}^{(6)}G_{\nu\sigma} q_{\beta}^{\ \sigma} q_{\delta}^{\ \sigma} + {}^{(6)}R_{\nu\sigma} n^{\nu} n^{\sigma} q_{\beta\delta} + K K_{\beta\delta} - K_{\delta}^{\ \gamma} K_{\beta\gamma} \\ &- \frac{1}{2} q_{\beta\delta} (K^2 - K^{\alpha\gamma} K_{\alpha\gamma}) - \tilde{E}_{\beta\delta}, \end{aligned} \tag{4.23} $$

onde definimos $\tilde{E}_{\beta\delta} = {}^{(6)}R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} n_{\mu} n^{\rho} q_{\beta}^{\ \nu} q_{\delta}^{\ \sigma}$.

É interessante, na manipulação das quantidades do bulk para obtenção da equação de campo na brana, procurarmos sempre expressar as quantidades da brana em termos de fontes no bulk. Toda a manipulação algébrica realizada aqui converge para tal propósito. Entretanto pelo fato de estarmos trabalhando com as equações projetadas do bulk para a brana, surge um elemento a mais que traz informação genuína do bulk. Desejamos expressar essa informação em termos do tensor de Weyl. Dois motivos pragmáticos nos levam a tal: primeiramente, a introdução do tensor de Weyl é vastamente utilizada na literatura corrente [44, 45, 46] e, como não poderia deixar de ser, o respaldo da literatura é largamente desejável. Segundo, tal tensor possui a propriedade de ser conformalmente invariante, o que facilita os cálculos enormemente. É sabido que os tensores de Weyl, Riemann a Ricci são relacionados, em uma dimensão n arbitrária, por [23]

$$ \begin{aligned} {}^{(n)}R_{\alpha\beta\mu\nu} &= {}^{(n)}C_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{2}{n-2}\Big({}^{(n)}R_{\alpha[\mu} g_{\nu]\beta} - {}^{(n)}R_{\beta[\mu} g_{\nu]\alpha} \Big) \\ &- \frac{2}{(n-1)(n-2)}\, {}^{(n)}R g_{\alpha[\mu} g_{\nu]\beta}. \end{aligned} \tag{4.24} $$

Com o auxílio de tal equação, para $n = 6$, podemos escrever o termo $\tilde{E}_{\mu\nu}$ como

$$\tilde{E}_{\beta\delta} = E_{\beta\delta} + \frac{1}{2}\Big({}^{(6)}R^{\mu}_{\ \rho} n_{\mu} n^{\rho} q_{\beta\delta} + {}^{(6)}R_{\nu\sigma} q_{\beta}^{\ \nu} q_{\delta}^{\ \sigma} \Big) - \frac{1}{10}\ {}^{(6)}R q_{\beta\delta}, \tag{4.25}$$

onde o tensor de Weyl está codificado em $E_{\beta\delta} = {}^{(6)}C^{\mu}_{\ \nu\rho\sigma} n_{\mu} n^{\rho} q_{\beta}^{\ \nu} q_{\rho}^{\ \sigma}$. Por fim, inserindo a equação (4.25) em (4.23) obtemos

$$\begin{aligned} {}^{(5)}G_{\beta\delta} &= \frac{1}{2}\ {}^{(6)}G_{\nu\sigma} q_{\beta}^{\ \nu} q_{\delta}^{\ \sigma} - \frac{1}{10}\ {}^{(6)}R q_{\beta\delta} - \frac{1}{2}\ {}^{(6)}R_{\nu\sigma} q^{\nu\sigma} q_{\beta\delta} + K K_{\beta\delta} - K^{\gamma}_{\ \delta} K_{\beta\gamma} \\ &- \frac{1}{2} q_{\beta\delta}(K^2 - K^{\alpha\gamma} K_{\alpha\gamma}) - E_{\beta\delta}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Até então na presente Seção temos lidado apenas com quantidades geométricas, sem sequer especificarmos de modo explícito a teoria gravitacional em questão. A generalização para gravitação de Brans-Dicke começa agora, com a equação de campo gravitacional do bulk. Da equação (2.34) temos

$$\begin{aligned} {}^{(6)}G_{\mu\nu} &= \frac{8\pi}{\phi} T_{M\mu\nu} + \frac{w}{\phi^2}\Big(\nabla_{\mu}\phi \nabla_{\nu}\phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_{\alpha}\phi \nabla^{\alpha}\phi \Big) \\ &+ \frac{1}{\phi}\Big(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi - g_{\mu\nu}\Box^2\phi \Big), \end{aligned} \tag{4.27}$$

enquanto a equação escalar de teoria é

$$\Box^2\phi = \frac{8\pi}{3+2w} T_M, \tag{4.28}$$

onde $T_{M\mu\nu}$ é o tensor energia-momento de acordo com o definido no Capítulo 2. Dessas duas últimas equações podemos facilmente encontrar o escalar de curvatura e o tensor de Ricci. O escalar de curvatura do bulk é simplesmente dado por

$${}^{(6)}R = -\frac{8\pi}{\phi}\left(\frac{w-1}{3+2w}\right) T_M + \frac{w}{\phi^2} \nabla_{\alpha}\phi \nabla^{\alpha}\phi \tag{4.29}$$

e o tensor de Ricci toma a forma

$${}^{(6)}R_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi}\left[T_{M\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\left(\frac{1+w}{3+2w}\right) T_M \right] + \frac{1}{\phi}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi + \frac{w}{\phi^2}\nabla_{\mu}\phi\nabla_{\nu}\phi. \tag{4.30}$$

De posse dessas quantidades geométricas do bulk, podemos expressar a equação (4.26) como

$$\begin{aligned} {}^{(5)}G_{\beta\delta} &= \frac{1}{2}\left[\frac{8\pi}{\phi} T_{M\nu\sigma} + \frac{1}{\phi}\nabla_{\nu}\nabla_{\sigma}\phi + \frac{w}{\phi^2}\nabla_{\nu}\phi\nabla_{\sigma}\phi \right](q_{\beta}^{\ \nu} q_{\delta}^{\ \sigma} - q^{\nu\sigma} q_{\beta\delta}) \\ &+ \frac{2\pi}{5\phi} q_{\beta\delta} T_M \left(\frac{13+27w}{3+2w}\right) - \frac{7w}{20\phi^2} q_{\beta\delta} \nabla_{\alpha}\phi\nabla^{\alpha}\phi + K K_{\beta\delta} - K^{\gamma}_{\ \delta} K_{\beta\gamma} \\ &- \frac{1}{2} q_{\beta\delta}(K^2 - K^{\alpha\gamma} K_{\alpha\gamma}) - E_{\beta\delta}, \end{aligned} \tag{4.31}$$

enquanto a equação de Codazzi fica

$$D_\nu K_\mu^{\ \nu} - D_\mu K = \left[\frac{8\pi}{\phi}T_{M\rho\sigma} + \frac{1}{\phi}\nabla_\rho\nabla_\sigma\phi + \frac{w}{\phi^2}\nabla_\rho\phi\nabla_\sigma\phi\right]n^\sigma q_\mu^{\ \rho}. \tag{4.32}$$

As duas últimas equações sumarizam a etapa inicial de aplicação do formalismo de Gauss-Codazzi em gravitação de Brans-Dicke. Entretanto, por inspeção da equação (4.31) nota-se que para que completemos nossa análise é necessário explicitar a forma do tensor energia-momento do bulk, bem como expressar a curvatura extrínseca em termos desse tensor. É defronte a esse último problema que se nos apresenta a primeira consequência da simetria $\mathbb{Z}_2$. Mas dela nos ocuparemos no devido momento e deixemos o ensejo criado pela equação (4.31) para que façamos um apelo físico ao porvir.

A equação (4.31), do modo como se encontra, é desprovida de significado físico. A fim de extrairmos informação a respeito desse sistema, temos forçosamente que projetar as quantidades do bulk na brana. Note que não poderia ser diferente, vivemos na brana! E é nela que devemos realizar medidas. Na nossa aproximação a brana é um objeto que não tem espessura. É uma hipersuperfície infinitamente fina ortogonalmente crivada por geodésicas do tipo-espaço. Procederemos então de modo a generalizar as condições de junção de Israel-Darmois [48] para a gravitação de Brans-Dicke. Nossa construção será fortemente baseada na utilização de elementos do Cálculo Distribucional [49].

Denotemos a coordenada dimensional extra por y. É sempre possível escolher uma parametrização onde a brana esteja localizada em $y = 0$, de tal maneira que $y > 0$ represente um lado da brana e $y < 0$ o outro lado. Denotemos também uma quantidade tensorial qualquer χ entre colchetes por

$$[\chi] = \chi^+ - \chi^-, \tag{4.33}$$

onde $\chi^\pm$ representa o limite da quantidade χ tendendo à brana quando $y \to 0^\pm$. Essa operação definida pelos colchetes nos permite avaliar o comportamento da quantidade χ quando esta atravessa a hipersuperfície. Para decompormos quantidades em ambos os lados da brana vamos utilizar a distribuição Θ de Heaviside. Assim, a métrica do bulk pode ser escrita como

$$g_{\mu\nu} = \Theta(y)g^+_{\mu\nu} + \Theta(-y)g^-_{\mu\nu}, \tag{4.34}$$

onde, de acordo com nossas convenções, $g^+_{\mu\nu}$ $(g^-_{\mu\nu})$ é a métrica do lado direito (esquerdo). Note que em codimensão maior de que um tal procedimento seria despropositado e inócuo.

Recordemo-nos de algumas propriedades da distribuição de Heaviside. Primeiramente, $\Theta(y) = +1$ se $y > 0$, indeterminada se $y = 0$ e zero para $y < 0$. Além disso, ela obedece a seguinte álgebra:

$$\Theta^2(y) = \Theta(y), \tag{4.35}$$

$$\Theta(y)\Theta(-y) = 0, \tag{4.36}$$

$$\frac{d\Theta(y)}{dy} = \delta(y), \tag{4.37}$$

onde $\delta(y)$ é a distribuição ("função") delta de Dirac. Em vista da equação (4.34) e da álgebra obedecida por Θ, é fácil ver que

$$g_{\mu\nu,\,\alpha} = \Theta(y)g^{+}_{\mu\nu,\,\alpha} + \Theta(-y)g^{-}_{\mu\nu,\,\alpha} + \delta(y)[g_{\mu\nu}]n_{\alpha}. \tag{4.38}$$

Entretanto, uma vez que os símbolos de Christoffel são construídos com (4.38), teremos produtos do tipo $\Theta(y)\delta(y)$ que não são bem definidos no cálculo distribucional. Portanto, somos forçados a impor $[g_{\mu\nu}] = 0$, ou seja, a métrica é contínua através da brana. Essa é a chamada condição de Darmois. Uma vez que isso ocorre, suporemos que se existe alguma descontinuidade na derivada da métrica, ela se encontra direcionada ao longo da dimensão extra, isto é

$$[g_{\mu\nu,\,\alpha}] = k_{\mu\nu}n_{\alpha}, \tag{4.39}$$

onde $k_{\mu\nu}$ é algum tensor que estabelece a proporcionalidade da descontinuidade (e que obviamente não deve fazer parte do resultado final).

A fim de conseguirmos a condição de junção de Israel, devemos olhar para o tensor de Einstein, e posteriormente para a equação de Einstein-Brans-Dicke, na brana. Para tanto, trabalhemos primeiramente com a parte geométrica separando também a conexão em duas partes

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \Theta(y)\Gamma^{+\alpha}_{\mu\nu} + \Theta(-y)\Gamma^{-\alpha}_{\mu\nu}, \tag{4.40}$$

onde $\Gamma^{\pm\alpha}_{\mu\nu}$ é a conexão construída com $g^{\pm}_{\mu\nu}$. Com isso, obtemos novamente

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\beta} = \Theta(y)\Gamma^{+\alpha}_{\mu\nu,\beta} + \Theta(-y)\Gamma^{-\alpha}_{\mu\nu,\beta} + \delta(y)[\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}]n_{\beta}. \tag{4.41}$$

Agora, é fácil ver que o tensor de Riemann fica

$$R^{\alpha}_{\mu\nu\beta} = \Theta(y)R^{+\alpha}_{\mu\nu\beta} + \Theta(-y)R^{-\alpha}_{\mu\nu\beta} + \delta(y)\Big([\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}]n_{\nu} - [\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}]n_{\beta}\Big). \tag{4.42}$$

Note que o último termo da equação acima é de nosso interesse, uma vez que é ele que diz respeito à brana. Devemos portanto encontrar a "parte delta" das equações de Einstein na brana. Da equação (4.39) temos

$$[\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}] = \frac{1}{2}(k^{\alpha}_{\beta}n_{\gamma} + k^{\alpha}_{\gamma}n_{\beta} - k_{\beta\gamma}n^{\alpha}), \tag{4.43}$$

e portanto o último termo de (4.42) é dado por

$$\left([\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}]n_{\nu} - [\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}]n_{\beta}\right) = \frac{1}{2}(k^{\alpha}_{\beta}n_{\mu}n_{\nu} - k^{\alpha}_{\nu}n_{\mu}n_{\beta} - k_{\mu\beta}n^{\alpha}n_{\nu} + k_{\mu\nu}n^{\alpha}n_{\beta}). \tag{4.44}$$

Por fim, podemos encontrar o tensor de Einstein na brana (a parte cujo coeficiente é dado pela distribuição δ de Dirac) em termos de $k_{\mu\nu}$. Denotando $S_{\mu\nu}$ por esse tensor, temos

$$S_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}[k_{\gamma\mu}n^{\gamma}n_{\nu} + k_{\gamma\nu}n^{\gamma}n_{\mu} - kn_{\mu}n_{\nu} - k_{\mu\nu} - (k_{\gamma\sigma}n^{\gamma}n^{\sigma} - k)g_{\mu\nu}]. \tag{4.45}$$

Até agora, nossos desenvolvimentos se deram aos moldes do que foi feito na referência [49]. Para que generalizemos a condição de junção de Israel, devemos dar um passo a mais e trabalhar com o lado direito da equação de Brans-Dicke. Para tanto, escrevamos o campo escalar na forma

$$\phi = \Theta(y)\phi^{+} + \Theta(-y)\phi^{-}, \tag{4.46}$$

de modo que

$$\phi_{,\,\mu} = \Theta(y)\phi^{+}_{,\,\mu} + \Theta(-y)\phi^{-}_{,\,\mu} + \delta(y)[\phi]n_{\mu}. \tag{4.47}$$

Analogamente ao que fizemos anteriormente, devemos ter $[\phi] = 0$ de modo a evitarmos termos do tipo $\Theta(y)\delta(y)$. Essa condição é a análoga da condição de Darmois para o campo escalar. Da equação (4.47) temos

$$\phi_{,\,\mu;\nu} = \Theta(y)\phi^{+}_{,\,\mu;\nu} + \Theta(-y)\phi^{-}_{,\,\mu;\nu} + \delta(y)[\phi_{,\,\mu}]n_{\nu}, \tag{4.48}$$

enquanto o tensor energia-momento total é dado por

$$T^{total}_{\mu\nu} = \Theta(y)T^{+}_{\mu\nu} + \Theta(-y)T^{-}_{\mu\nu} + \delta(y)T_{\mu\nu}, \tag{4.49}$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento da brana. Por fim, como última peça para a decomposição distribucional da equação de Brans-Dicke, temos

$$\frac{1}{\phi} = \frac{\Theta(y)}{\phi^{+}} + \frac{\Theta(-y)}{\phi^{-}}, \tag{4.50}$$

enquanto o termo $1/\phi^2$ obedece uma decomposição similar[8]. Agora, com tais equações podemos determinar a parte-δ do lado direito da equação de campo de Brans-Dicke, denotada de $(BD)_{\mu\nu}$. Após um pouco de manipulação algébrica chegamos a

$$\frac{8\pi}{\phi}\left(T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{3+2w}T\right) + \frac{1}{\phi}[\phi_{,\,\mu}]n_{\nu} \equiv (BD)_{\mu\nu}. \tag{4.51}$$

[8]Observe que a unidade distribucional pode ser expressa na forma $\Theta(y) + \Theta(-y) = 1$.

Obviamente, $S_{\mu\nu} = (BD)_{\mu\nu}$ e uma vez que $S_{\mu\nu}n^{\nu} = 0$ (ver equação (4.45)) chegamos a

$$[\phi,_{\mu}] = \frac{8\pi}{3+2w}Tn_{\mu}, \tag{4.52}$$

pois $T_{\mu\nu}n^{\nu} = 0$, visto que $T_{\mu\nu}$ pertence à hipersuperfície. Essa última equação faz as vezes de $[g_{\mu\nu,\alpha}] = k_{\mu\nu}n_{\alpha}$. Substituindo a equação (4.52) em (4.51) chegamos a

$$(BD)_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi}\left(T_{\mu\nu} - q_{\mu\nu}\frac{T}{3+2w}\right). \tag{4.53}$$

Para continuarmos lidando com a parte geométrica do problema, isto é a equação (4.45), é conveniente que introduzamos um sistema de coordenadas v^a que cubra toda a hipersuperfície. A brana pode então ser parametrizada por $x^{\mu} = x^{\mu}(v^a)$ e os vetores

$$e^{\mu}_{a} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial v^a} \tag{4.54}$$

estão todos contidos no espaço tangente às curvas contidas na brana. Desse modo, percebemos que

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} \\ &= g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial v^a}dv^a\right)\left(\frac{\partial x^{\nu}}{\partial v^b}dv^b\right) \\ &= q_{ab}dv^a dv^b, \end{aligned} \tag{4.55}$$

onde a métrica induzida é então dada por $q_{ab} = g_{\mu\nu}e^{\mu}_{a}e^{\nu}_{b}$. Da equação (4.45) vemos que

$$\begin{aligned} (BD)_{ab} = (BD)_{\alpha\beta}e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b} &= -k_{\alpha\beta}e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b} + (k - k_{\mu\nu}n^{\mu}n^{\nu})q_{ab} \\ &= -k_{\alpha\beta}e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b} + q^{mn}k_{\mu\nu}e^{\mu}_{m}e^{\nu}_{n}q_{ab}. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Por fim, podemos relacionar o tensor $k_{\mu\nu}$ com a curvatura extrínseca da brana por

$$[\nabla_{\alpha}n_{\beta}] = -[\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}]n_{\gamma} = \frac{1}{2}(k_{\alpha\beta} - k_{\gamma\alpha}n_{\beta}n^{\gamma} - k_{\gamma\beta}n_{\alpha}n^{\gamma}). \tag{4.57}$$

O vetor n^{γ} pode ser retirado dos parênteses pois a continuidade do sistema de coordenadas x^{μ} e y através da brana garantem $[n^{\gamma}] = 0$ (ainda não impusemos a simetria $\mathbb{Z}_2$!). Da equação (4.57) vemos que

$$[K_{ab}] = [\nabla_{\alpha}n_{\beta}]e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b} = \frac{1}{2}k_{\alpha\beta}e^{\alpha}_{a}e^{\beta}_{b}, \tag{4.58}$$

e desse modo podemos escrever a equação (4.56) como

$$\frac{8\pi}{\phi}\left(T_{ab} - q_{ab}\frac{T}{3+2w}\right) = -([K_{ab}] - [K]q_{ab}). \tag{4.59}$$

Essa última equação é a generalização da condição de junção de Israel para a gravitação de Brans-Dicke. Enfatizamos que tal expressão foi obtida no contexto de dimensões extras, porém ela continua válida para quatro dimensões usuais. Como esperado, se tomarmos o limite $w \to \infty$ ($\phi \to 1/G$) a expressão para a condição de junção de Israel em Relatividade Geral é recuperada.

Notemos que a equação (4.59), por si só, não determina a curvatura extrínseca, uma vez que fornece apenas tal quantidade em colchetes. Eis agora o primeiro benefício adquirido com a imposição da simetria $\mathbb{Z}_2$: ela determina univocamente a curvatura extrínseca. A simetria $\mathbb{Z}_2$ faz com que o vetor unitário ortogonal à brana, n_μ, mude de sinal conforme atravessa a brana, isto é, leva $n_\mu^+ \to -n_\mu^-$. Por sua vez, sendo $K_{\mu\nu} = \nabla_\mu n_\nu$, a curvatura extrínseca de um lado da brana é oposta à curvatura extrínseca do outro lado, $K_{\mu\nu}^+ \to -K_{\mu\nu}^-$. Logo, da equação (4.59), temos

$$K_{\mu\nu}^+ = -K_{\mu\nu}^- = \frac{4\pi}{\phi}\left(- T_{\mu\nu} + \frac{q_{\mu\nu}(1+w)T}{2(3+2w)}\right), \tag{4.60}$$

além de[9]

$$K^+ = -K^- = \frac{2\pi}{\phi}\left(\frac{w-1}{3+2w}\right)T. \tag{4.61}$$

Agora devemos substituir a expressão da curvatura extrínseca, bem como de seu traço, na equação (4.31). Visto ser a curvatura extrínseca de um lado da brana oposta à do outro lado, pela ação da simetria $\mathbb{Z}_2$, uma questão naturalmente surge: de qual lado devemos considerar a projeção? A resposta vem dos termos de curvatura extrínseca da própria equação (4.31). Uma vez que tais termos são sempre quadráticos não importa de que lado façamos o limite da projeção[10], de sorte que suprimiremos os rótulos $+$ e $-$ dos termos em questão. Assim, substituindo (4.60) e (4.61) em (4.31) temos, após alguma álgebra,

$$\begin{aligned} {}^{(5)}G_{\beta\delta} &= \frac{1}{2}\left[\frac{8\pi}{\phi}T_{M\nu\sigma} + \frac{1}{\phi}\nabla_\nu\nabla_\sigma\phi + \frac{w}{\phi^2}\nabla_\nu\phi\nabla_\sigma\phi\right](q_\beta^{\ \nu} q_\delta^{\ \sigma} - q^{\nu\sigma}q_{\beta\delta}) \\ &+ \frac{2\pi}{5\phi}q_{\beta\delta}T_M\left(\frac{13+27w}{3+2w}\right) - \frac{7w}{20\phi^2}q_{\beta\delta}\nabla_\alpha\phi\nabla^\alpha\phi + 8\left(\frac{\pi}{\phi}\right)^2\left[TT_{\beta\delta}\left(\frac{w+3}{3+2w}\right)\right. \\ &- \left. T^2 q_{\beta\delta}\frac{(w^2+3w+3)}{(3+2w)^2} - 2T_\delta^{\gamma}T_{\beta\gamma} + q_{\beta\delta}T^{\alpha\gamma}T_{\alpha\gamma}\right] - E_{\beta\delta}\,. \end{aligned} \tag{4.62}$$

Note que os valores de $E_{\mu\nu}$, do campo escalar e de suas derivadas não são calculados exatamente sobre a brana, mas no limite $y \to \pm$.

[9]Há um sinal errado na equação (16) da referência [47]: lá temos $K^+ = K^-$, enquanto o correto é $K^+ = -K^-$, como na equação (4.61).

[10]O que elimina todo possível problema que o erro relatado na nota de rodapé anterior pudesse causar, para alívio e sanidade cardíaca do autor.

Como último passo para a obtenção das equações projetadas, vamos colocar o tensor energia-momento de matéria *do bulk* na forma

$$T_{M\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} + \delta(y) T_{\mu\nu}, \tag{4.63}$$

e

$$T_{\mu\nu} = -\lambda q_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}, \tag{4.64}$$

onde Λ é a constante cosmológica do bulk e λ a tensão da brana. Primeiramente ressaltamos que tal decomposição, amplamente utilizada na literatura padrão, não contempla nenhuma outra fonte de matéria no bulk que não a constante cosmológica e a própria brana. É fato que mais um termo poderia ser adicionado a (4.63) de modo a abarcar tal possibilidade, mas suporemos que não haja outro tipo de matéria por simplicidade. Outra característica que gostaríamos de ressaltar é o aparecimento da $\delta(y)$ na decomposição para a localização da brana. Obviamente, dentro de um cenário cosmológico completo tal termo pode levar a inconsistências. Porém, para nossos propósitos não há problema. Enfim, substituindo as equações (4.63) e (4.64) em (4.62) chegamos a

$$\begin{aligned} {}^{(5)}G_{\beta\delta} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\phi}\nabla_\nu\nabla_\sigma\phi + \frac{w}{\phi^2}\nabla_\nu\phi\nabla_\sigma\phi\right](q_\beta^{\ \nu} q_\delta^{\ \sigma} - q^{\nu\sigma}q_{\beta\delta}) + 8\pi\Omega\tau_{\beta\delta} - \Lambda_5 q_{\beta\delta} \\ &+ 8\left(\frac{\pi}{\phi}\right)^2 \Sigma_{\beta\delta} - E_{\beta\delta}\ , \end{aligned} \tag{4.65}$$

onde

$$\Omega = \frac{3\pi(w-1)\lambda}{\phi^2(3+2w)}, \tag{4.66}$$

$$\Lambda_5 = \frac{-4\pi\Lambda(21-41w)}{5\phi(3+2w)} + \left(\frac{\pi}{\phi}\right)^2\left[\frac{7w}{20\pi^2}\nabla_\alpha\phi\nabla^\alpha\phi + \frac{24(w-1)\lambda}{(3+2w)^2}[(w-1)\lambda+\tau]\right] \tag{4.67}$$

e

$$\Sigma_{\beta\delta} = q_{\beta\delta}\tau^{\alpha\gamma}\tau_{\alpha\gamma} - 2\tau^{\gamma}_{\delta}\tau_{\gamma\beta} + \left(\frac{3+w}{3+2w}\right)\tau\tau_{\beta\delta} - \frac{(w^2+3w+3)}{(3+2w)^2}q_{\beta\delta}\tau^2. \tag{4.68}$$

O conjunto de equações (4.65)-(4.68) perfaz nosso principal resultado nessa Seção e, assim sendo, faz-se necessária uma análise completa dessas equações, termo a termo[11]. Primeiramente, não escrevemos a equação projetada na brana na forma da equação de Brans-Dicke. Uma vez que nos casos estudados no Capítulo anterior o campo escalar só depende da dimensão extra transversa à brana, parece ser mais natural se escrever as equações projetadas na forma das equações de Einstein. Algo como equações de Einstein efetivas na brana, que podem vir a trazer modificações

[11]Para o leitor interessado em uma análise similar, porém para um espaço-tempo de Riemann-Cartan, indicamos a referência [51].

sutis, porém importantes, na análise de alguns sistemas cosmológicos. Note que esse resultado é potencialmente interessante, pois podemos contornar o problema experimental relacionado à teoria de Brans-Dicke e, ao mesmo tempo, encontrar uma Relatividade Geral modificada que, quiçá, possa lançar luz a alguns problemas da gravitação usual[12]. Esperamos que as sutis modificações trazidas pela equação efetiva (4.65) sejam sentidas já a baixas energias, porém é necessária uma análise mais completa de algum sistema cosmológico para corroborarmos tal expectativa. O primeiro termo surge unicamente do fato de estarmos lidando com uma teoria escalar-tensorial da gravitação e carrega, juntamente com o tensor $E_{\mu\nu}$, informação sobre a estrutura do bulk. Note entretanto que do ponto de vista de um observador na brana o campo escalar não possui dinâmica, uma vez que a brana está localizada em um ponto fixo de y. No segundo termo, há uma espécie de constante gravitacional Newtoniana efetiva que depende do campo escalar, bem como da tensão da brana. Uma vez que $\Omega = \Omega(\phi(y))$, o campo escalar precisa ser estabilizado de modo a garantir a recuperação da gravitação usual na brana. Isso pode ser feito artificialmente, ajustando-se a posição da brana ao longo da dimensão extra, induzindo o valor correto ao campo escalar. De modo mais rigoroso, isso pode ser feito pela introdução de um potencial adequado na ação de Brans-Dicke, ver por exemplo a referência [50].

Conforme acontece no caso em Relatividade Geral [45], aqui notamos também não ser possível definir uma constante gravitacional em uma era de evolução cosmológica onde não havia distinção entre energia de vácuo e energia de matéria ususal. Ademais, o sinal de Ω depende fortemente do (é determinado pelo) sinal da tensão da brana. A equação (4.67) estabelece a constante cosmológica efetiva na brana. Ela depende tanto da constante cosmológica do bulk quanto do campo escalar, podendo ser assim variável para um observador no bulk. Além disso, é fácil ver que existe uma configuração do campo escalar que torna a constante cosmológica efetiva nula. De fato, se Λ e τ forem constantes e

$$\phi(y) = \frac{4BC + \Lambda^2 A^2 (y - D)^2}{4AB\Lambda}, \tag{4.69}$$

onde D é uma constante de integração e $A = \frac{4\pi(21-41w)}{5(3+2w)}$, $B = \frac{7w}{20}$ e $C = \frac{24\pi^2(w-1)\lambda[(w-1)\lambda+\tau]}{(3+2w)^2}$, temos $\Lambda_5 = 0$. Tal formato polinomial do campo escalar pode servir como guia para futuras investigações no campo de proposição de modelos, visto ser uma constante cosmológica efetiva nula, ou muito pequena, amplamente desejável num modelo realista. O penúltimo fator da equação (4.65) é quadrático no tensor energia-momento

[12]Em certo sentido, tal panorama é o oposto ao estudado em [52], onde fontes isoladas numa brana Randall-Sundrum geram gravitação de Brans-Dicke (na aproximação linear).

na brana e pode, assim, ter sido importante no universo primordial (ver referência [53] para a análise de um caso em cinco dimensões).

Devemos mencionar que a equação (4.65) não pode ser resolvida somente com dados da brana. A presença do tensor de Weyl projetado, bem como dos termos contendo o campo escalar faz com que devamos olhar também para a geometria do bulk [54]. Deve-se portanto encontrar a geometria do bulk para que se possa resolver completamente o problema. Entretanto, podemos entender a equação (4.65) como uma equação de valor inicial, e assim, uma vez encontrados os termos do bulk, pode-se resolver as equações ao longo da direção transversa à brana para a obtenção da geometria do bulk. Nesse caso, geralmente são encontradas muitas soluções possíveis e se faz necessária a imposição de algumas condições que reflitam propriedades do espaço-tempo para que se encontre uma solução fisicamente relevante.

Por fim, gostaríamos de ressaltar que o primeiro termo da equação (4.65) pode ser relacionado com derivadas do tensor energia-momento na brana. Com efeito, inserindo as equações (4.60) e (4.61) em (4.32) e levando em conta a decomposição feita em (4.63) e em (4.64) temos

$$\frac{4\pi}{\phi}\Big[-D_\nu\tau_\mu^{\ \nu}+\frac{1}{3+2w}D_\mu\tau\Big]=\Big[\frac{1}{\phi}\nabla_\rho\nabla_\sigma\phi+\frac{w}{\phi^2}\nabla_\rho\phi\nabla_\sigma\phi\Big]n^\sigma q_\mu^{\ \rho}, \tag{4.70}$$

enquanto que a identidade de Bianchi contraída $D^{\beta\,(5)}G_{\beta\delta}=0$ leva a um vínculo relacionando o tensor $E_{\mu\nu}$ e derivadas de $\tau_{\mu\nu}$ dado por

$$D^\beta E_{\beta\delta}=\frac{8\pi}{\phi}D^\beta\tau_{\beta\delta}-\frac{24\pi(w-1)\lambda}{(3+2w)^2}D_\delta\tau+8\Big(\frac{\pi}{\phi}\Big)^2D^\beta\Sigma_{\beta\delta}. \tag{4.71}$$

Logo, para branas isotrópicas ($D^\mu\Sigma_{\mu\nu}=0$) nas quais não haja possibilidade de troca de energia entre o bulk e a brana ($D^\mu\tau_{\mu\nu}=0$, isto é, há conservação de $\tau_{\mu\nu}$ na brana) temos $D^\beta E_{\beta\delta}=0$.

Como visto, o fato de podermos escrever a curvatura extrínseca tal como em (4.60) foi imprescindível para a obtenção da equação efetiva na brana. Vale lembrar também que a equação (4.60) somente pode ser levada em conta devido ao fato de impormos simetria $\mathbb{Z}_2$. Desse modo, enquanto o formalismo de Gauss-Codazzi aplicado a branas nos fornece resposta às perguntas feitas no início desse Capítulo, sua implementação nos leva a mais questões tais como: o que acontece se trabalharmos em um cenário desprovido de tal simetria? Haverá alguma mudança no formato das equações efetivas na brana? Se sim, qual a implicação física dessas diferenças? Felizmente, devido ao mérito do próprio formalismo, essas questões são deveras interessantes e nos levam a um melhor panorama do nosso objeto de estudo. É com o intuito de responder a essas questões que delineamos a próxima Seção.

4.2 Branas sem simetria $\mathbb{Z}_2$

Como visto na Seção anterior, a simetria $\mathbb{Z}_2$ tem papel central na aplicação do formalismo de Gauss-Codazzi. É mister então analisarmos uma situação, em princípio, semelhante porém sem tal simetria. Em uma primeira inspeção a ausência da simetria $\mathbb{Z}_2$ não nos habilita a levar em conta a equação (4.61). Isso nos leva imediatamente a uma nova estratégia para efetuarmos a projeção das equações de campo na brana. Com o intuito de criarmos um amálgama entre esta Seção e a anterior, tendo como pano de fundo o papel da simetria $\mathbb{Z}_2$, façamos uma breve exposição, em forma de adendo, dos múltiplos aspectos relacionados a essa simetria no contexto de branas e dimensões extras.

4.2.1 O papel da simetria $\mathbb{Z}_2$

A presença da simetria $\mathbb{Z}_2$ previne a existência de elementos fora da diagonal na métrica do espaço-tempo. Lembramo-nos de que, na idéia original de Kaluza-Klein tais flutuações são necessárias para a incorporação de campos vetoriais na teoria gravitacional. Entretanto, a presença da simetria em questão elimina essa possibilidade, facilitanto o tratamento das equações e justificando alguns *ansatze* meramente diagonais para a métrica que descreve a geometria do espaço-tempo. Além disso, essa mesma simetria tem um importante efeito na teoria quântica efetiva na brana, uma vez que com ela obtemos a quiralidade correta dos férmions do Modelo Padrão [22]. Do ponto de vista gravitacional, como já vimos, a simetria $\mathbb{Z}_2$ fornece uma aprazível solução para a curvatura extrínseca avaliada em lados opostos da brana.

Tais efeitos são amplamente desejáveis no estudo de branas, uma vez que facilitam a manipulação algébrica das equações e fornecem resultados necessários para a consistência da hipótese de branas. Entretanto, a simetria $\mathbb{Z}_2$ não é imprescindível. De fato, o arcabouço matemático contemplado nos "teoremas de índice" parece fornecer uma solução para o problema da quiralidade dos férmions do Modelo Padrão [55], enquanto no que concerne à curvatura extrínseca, uma solução no contexto de Relatividade Geral foi apresentada em [56]. Uma ferramenta chave do trabalho de aplicação do formalismo de Gauss-Codazzi realizado em [56] é a média da curvatura extrínseca. Por definição, a média de uma quantidade tensorial qualquer, digamos χ é

$$\langle\chi\rangle = \frac{1}{2}(\chi^+ + \chi^-), \tag{4.72}$$

onde $\chi^\pm$ é dado como na Seção anterior. Como veremos, é possível decompor $K_{\mu\nu}$ em duas partes, uma com traço nulo e outra com traço não-nulo. A parte com traço nulo, ou antes, sua média traz informação a respeito do *shear* do vetor ortogonal à brana n_α. É sabido que a média da curvatura extrínseca é nula quando da implementação da simetria $\mathbb{Z}_2$. Logo, percebemos uma característica cabal de modelos de branas com tal simetria: eles descrevem branas isotrópicas. Assim, sem a simetria $\mathbb{Z}_2$, podemos apreciar um modelo anisotrópico, onde o *shear* é levado em conta. Notemos então que a não implementação de $\mathbb{Z}_2$ no formalismo de projeção das equações de campo na brana parece ser ideal para o tratamento de modelos de compactificação híbrida (como os do Capítulo anterior), onde o *shear* tende a ser mais pronunciado devido à topologia da brana. Em outras palavras, sendo o espaço-tempo da brana, por exemplo, dado por $\mathbb{R}^4 \times S^1$, a presença de uma dimensão extra compactificada na brana deve fazer-se sentir na curvatura extrínseca e portanto devemos analisar esse sistema com um ferramental que leve em conta tal efeito.

4.2.2 Equações efetivas na ausência da simetria $\mathbb{Z}_2$

Tratemos então, como já de hábito, a brana como uma subvariedade de cinco dimensões mergulhada em uma variedade 6-dimensional, o bulk. O que faremos doravante será generalizar o trabalho realizado em [56] e nossa apresentação seguirá a linha descrita em [57]. Manteremos a notação da Seção anterior, isto é, a métrica induzida na brana é dada por $q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu$. Notemos também a importante álgebra respeitada pelas operações definidas em (4.33) e em (4.72):

$$[AB] = \langle A\rangle[B] + [A]\langle B\rangle, \tag{4.73}$$

$$\langle AB\rangle = \langle A\rangle\langle B\rangle + \frac{1}{4}[A][B]. \tag{4.74}$$

Através da equação de Gauss (4.19) podemos reescrever o tensor de Riemann na brana como

$$^{(5)}R_{\mu\nu} = Y_{\mu\nu} + KK_{\mu\nu} - K^\lambda_\mu K_{\lambda\nu}, \tag{4.75}$$

onde o tensor $Y_{\mu\nu}$ é dado por

$$Y_{\mu\nu} = \frac{3}{2}\,{}^{(6)}R_{\alpha\beta}q^\alpha_\mu q^\beta_\nu + \frac{1}{4}\,{}^{(6)}R_{\alpha\beta}q^{\alpha\beta}q_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\,{}^{(6)}Rq_{\mu\nu} + E_{\mu\nu}, \tag{4.76}$$

enquanto $E_{\mu\nu}$ é o mesmo da Seção anterior. De fato, tratando as equações dessa maneira não estamos fazendo nada além de reescrevê-las para conveniência futura. Note que o tensor $Y_{\mu\nu}$ pertence à brana ($Y_{\mu\nu}n^\nu = 0$) e seu traço é relacionado com o tensor de Einstein no bulk $Y = -2\,{}^{(6)}G_{\mu\nu}n^\mu n^\nu$. Certamente, portanto, contribuições do campo de Brans-Dicke serão codificadas em $Y_{\mu\nu}$.

A fim de projetarmos as equações na brana, procediremos de modo a aplicar as operações definidas em (4.33) e (4.72) na equação (4.75), levando em conta a álgebra estabelecida em (4.73) e (4.74). Desse modo, primeiramente temos[13]

$$[\,^{(5)}R_{\mu\nu}] = 0 = [Y_{\mu\nu}] + \langle K\rangle[K_{\mu\nu}] + [K]\langle K_{\mu\nu}\rangle - \langle K_{[\mu}{}^{\alpha}\rangle[K_{\nu]\alpha}]. \tag{4.77}$$

As quantidades $[K]$ e $[K_{\mu\nu}]$ já foram derivadas na Seção anterior (ver equação (4.58)). Assim sendo, para uma decomposição do tensor energia-momento na forma[14]

$$T_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} + \delta S_{\mu\nu}, \tag{4.78}$$

$$S_{\mu\nu} = -\lambda q_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}, \tag{4.79}$$

temos que

$$[K_{\mu\nu}] = -\frac{8\pi}{\phi}\left(\tau_{\mu\nu} + \frac{q_{\mu\nu}}{2(3+2w)}((w-1)\lambda - (w+1)\tau)\right), \tag{4.80}$$

enquanto o traço é dado por

$$[K] = \frac{8\pi(w-1)}{2\phi(3+2w)}(\tau - 5\lambda). \tag{4.81}$$

Substituindo as equações (4.80) e (4.81) em (4.77) ficamos com

$$\begin{aligned} -\left(\frac{8\pi}{\phi}\right)^{-1}[Y_{\mu\nu}] &= \langle K_{\alpha[\mu}\rangle\tau^{\alpha}_{\nu]} - \left(\tau_{\mu\nu} + \frac{q_{\mu\nu}}{2(3+2w)}[(w-1)\lambda - (w+1)\tau]\right)\langle K\rangle \\ &+ \frac{[3(1-w)\lambda - (w+3)\tau]}{2(3+2w)}\langle K_{\mu\nu}\rangle\ . \end{aligned} \tag{4.82}$$

Deixemos por um breve momento essa equação de lado, ela nos será de grande valia para a determinação do valor médio da curvatura extrínseca. Por agora, vamos aplicar a operação (4.72) em (4.75) a fim de derivarmos a forma da equação de Einstein-Brans-Dicke efetiva. Esse procedimento leva a

$$\begin{aligned} \langle\,^{(5)}R_{\mu\nu}\rangle &= \,^{(5)}R_{\mu\nu} = \langle Y_{\mu\nu}\rangle + \frac{1}{4}\Big([K][K_{\mu\nu}] - [K_{\mu}{}^{\alpha}][K_{\nu\alpha}]\Big) \\ &+ \langle K\rangle\langle K_{\mu\nu}\rangle - \langle K_{\mu}{}^{\alpha}\rangle\langle K_{\nu\alpha}\rangle. \end{aligned} \tag{4.83}$$

A contração da equação acima com a métrica da brana $q^{\mu\nu}$ fornece o escalar de curvatura:

$$^{(5)}R = \langle Y\rangle + \frac{1}{4}\Big([K]^2 - [K^{\mu\nu}][K_{\mu\nu}]\Big) + \langle K\rangle^2 - \langle K^{\mu\nu}\rangle\langle K_{\mu\nu}\rangle. \tag{4.84}$$

[13]Não devemos confundir a operação definida pelos parênteses em (4.33) com a notação utilizada para indicar a comutação dos índices.

[14]Estamos usando aqui a mesma decomposição realizada na Seção anterior. Note porém a mudança na notação.

Com tais ferramentas podemos escrever o tensor de Einstein na brana. Antes porém, para que possamos melhor apreciar o efeito do *shear* da curvatura extrínseca, bem como as contribuições advindas dos termos de Brans-Dicke, vamos decompor $Y_{\mu\nu}$ e $K_{\mu\nu}$ como

$$Y_{\mu\nu} = \frac{Y}{5} q_{\mu\nu} + \varpi_{\mu\nu}, \tag{4.85}$$

e

$$K_{\mu\nu} = \frac{K}{5} q_{\mu\nu} + \zeta_{\mu\nu}, \tag{4.86}$$

onde $\varpi_{\mu\nu} = \frac{3}{4}\Big(R_{\alpha\beta} q^{\alpha}_{\mu} q^{\beta}_{\nu} - \frac{1}{5} R_{\alpha\beta} q^{\alpha\beta} q_{\mu\nu}\Big) + E_{\mu\nu}$. Como dito no começo dessa Seção, o termo $\zeta_{\mu\nu}$ é o responsável pelo *shear* do vetor n_α. Com tais decomposições o tensor de Einstein na brana fica

$$\begin{aligned} {}^{(5)}G_{\mu\nu} = {}^{(5)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} q_{\mu\nu}\, {}^{(5)}R \;&=\; -\Lambda_5 q_{\mu\nu} + G_{N5} \tau_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu} + \langle \varpi_{\mu\nu} \rangle \\ &+\; \frac{3}{5} \langle K \rangle \langle \zeta_{\mu\nu} \rangle - \langle {\zeta_{\mu}}^{\alpha} \rangle \langle \zeta_{\nu\alpha} \rangle \;, \end{aligned} \tag{4.87}$$

onde Λ_5 é a constante cosmológica efetiva na 4-brana dada por

$$\Lambda_5 = \frac{3}{10} \langle Y \rangle + \frac{6}{25} \langle K \rangle^2 - \frac{1}{2} \langle \zeta^{\alpha\beta} \rangle \langle \zeta_{\alpha\beta} \rangle + \frac{3}{8} \Big(\frac{8\pi}{\phi}\Big)^2 \frac{\lambda(w-1)}{(3+2w)^2} (\tau + \lambda(w-1)), \tag{4.88}$$

enquanto G_{N5} faz o papel da constante gravitacional Newtoniana

$$G_{N5} = \frac{3}{8} \Big(\frac{8\pi}{\phi}\Big)^2 \frac{\lambda(w-1)}{(3+2w)}. \tag{4.89}$$

O termo $\pi_{\mu\nu}$ é quadrático no tensor energia-momento da brana, dado explicitamente por

$$\begin{aligned} \pi_{\mu\nu} \;&=\; \Big(\frac{8\pi}{\phi}\Big)^2 \frac{\tau \tau_{\mu\nu} (w+3)}{8(3+2w)} - \frac{1}{4} \Big(\frac{8\pi}{\phi}\Big)^2 {\tau_{\mu}}^{\alpha} \tau_{\nu\alpha} + \frac{1}{8} \Big(\frac{8\pi}{\phi}\Big)^2 \tau^{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta} q_{\mu\nu} \\ &-\; \Big(\frac{8\pi}{\phi}\Big)^2 \frac{\tau^2 q_{\mu\nu}}{8(3+2w)^2} (w^2 + 3w + 3)\;. \end{aligned} \tag{4.90}$$

Façamos uma breve pausa para analisarmos as equações obtidas acima. A constante cosmológica efetiva, Λ_5 (4.88), novamente reflete o fato de que esta pode não ser constante nesse tipo de modelo, dependendo explicitamente do campo escalar que, por sua vez, possui dinâmica no bulk. O termo $\langle Y \rangle$ carrega informação sobre o campo de Brans-Dicke, sendo portanto mais um termo a trazer contribuição do bulk na geometria da brana. De fato, tal termo é escrito como

$$\begin{aligned} \langle Y \rangle \;&=\; -2\Bigg(\Big\langle \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \Big\rangle + \Big\langle \frac{w}{\phi^2} \Big(\phi_{,\mu}\, \phi_{,\nu}\, n^\mu n^\nu - \frac{1}{2} \phi_{,\alpha}\, \phi_{,}{}^{\alpha}\Big) \Big\rangle \\ &+\; \Big\langle \frac{1}{\phi} \Big(\phi_{,\mu;\nu}\, n^\mu n^\nu - \frac{8\pi}{3+2w} T\Big) \Big\rangle \Bigg). \end{aligned} \tag{4.91}$$

É importante chamarmos atenção para o fato de que, excetuando-se o caso do termo $\langle Y\rangle$ e de $\langle\varpi\rangle$, todos as outros valores médios desaparecem pela imposição de $\mathbb{Z}_2$, de modo a recuperarmos os resultados estudados na Seção anterior. A equação (4.89) mostra uma constante gravitacional efetiva (que também pode não ser constante ao longo da dimensão extra) que novamente depende fortemente da tensão da brana. Enfatizamos nossa cautela em afirmar uma real variação de Λ_5 e G_{N5} no bulk, uma vez que somente um modelo completo pode explicitar a dinâmica do campo escalar. Entretanto a possibilidade existe, como se vê por uma simples inspeção das equações (4.88) e (4.89). O fator $\langle\varpi\rangle$ é a generalização do tensor de Weyl para o caso em questão, enquanto os termos $\langle\zeta_{\mu\nu}\rangle$ surgem apenas devido ao fato de estarmos no caso não simétrico. Como dito, estes últimos são de importância sumária para modelos de compactificação híbrida, haja vista que uma dimensão extra compactificada na brana torna o *shear* do vetor n_μ mais apreciável.

Enfatizamos novamente, correndo o risco da repetitividade em prol da clareza, que os termos $\langle\zeta_{\mu\nu}\rangle$ são nulos sob o jugo da simetria $\mathbb{Z}_2$, e assim perdemos informação sobre o *shear* quantificado em uma parcela da curvatura extrínseca. Nos é portanto forçoso afirmar que a análise de modelos de branas com compactificação híbrida via formalismo de Gauss-Codazzi e com simetria $\mathbb{Z}_2$, enquanto não incorreta, certamente é incompleta.

A fim de completarmos a análise, devemos agora expressar $\langle K_{\mu\nu}\rangle$ em termos de quantidades úteis. Note que, analogamente à Seção anterior, novamente nos encontramos às voltas com a curvatura extrínseca. Repare, da equação (4.82), que não é fácil isolar $\langle K_{\mu\nu}\rangle$. Para realizarmos esse trabalho, valer-nos-emos de um subterfúgio utilizado em [56] que vamos generalizar para nosso caso. Começamos por definir um novo tensor energia-momento na brana:

$$\hat{\tau}_{\mu\nu} \equiv \tau_{\mu\nu} + (A\lambda + B\tau)q_{\mu\nu}, \tag{4.92}$$

onde A e B são constantes a serem determinadas. Assim, após expressarmos $[K_{\mu\nu}]$ e seu traço em termos de $\hat{\tau}_{\mu\nu}$, determinamos as constantes exigindo que a equação (4.77) (ou equivalentemente a equação (4.82)) forneça (para $w \neq 1$)

$$0 = [Y_{\mu\nu}] + \langle K\rangle[K_{\mu\nu}] + \frac{8\pi}{\phi}\langle K_{[\mu}{}^{\alpha}\rangle\hat{\tau}_{\nu]\alpha}. \tag{4.93}$$

Vemos então que[15] $A = \frac{3(1-w)}{4(3+2w)}$ e $B = -\frac{(w+3)}{4(3+2w)}$. Com as constantes estabelecidas é

[15]No caso n-dimensional em Relatividade Geral analisado em [56] as constantes são dadas por $A = -\frac{(n-3)}{2(n-2)}$ and $B = -\frac{1}{2(n-2)}$. Note que tomando o limite $w \to \infty$ no nosso caso, caimos nesse resultado (para $n = 6$), como esperado. Advertimos por fim o leitor para a nota de rodapé da referência [57]. A constante B naquele caso tem um sinal trocado.

fácil ver que

$$\hat{\tau}_{\mu\nu} = \tau_{\mu\nu} + \frac{(3(1-w)\lambda - (w+3)\tau)}{4(3+2w)} q_{\mu\nu} \tag{4.94}$$

e assim

$$[K_{\mu\nu}] = -\frac{8\pi}{\phi}\Big(\hat{\tau}_{\mu\nu} - \frac{\hat{\tau}}{3} q_{\mu\nu}\Big), \tag{4.95}$$

enquanto o traço fica

$$[K] = \frac{8\pi}{\phi}\frac{2\hat{\tau}}{3}. \tag{4.96}$$

Entenderemos agora $\hat{\tau}_{\mu\nu}$ como uma matriz simétrica 5×5 cujo determinante é diferente de zero, isto é $det(\hat{\tau}_{\mu\nu}) \neq 0$. Desse modo, por definição, $(\hat{\tau}^{-1})^{\mu\sigma}\hat{\tau}_{\mu\nu} = \delta^{\sigma}_{\nu}$. Então, inserindo (4.95) em (4.93) e multiplicando o resultado por $(\hat{\tau}^{-1})^{\mu\nu}$ obtemos

$$\frac{8\pi}{\phi}\langle K\rangle = \frac{3(\hat{\tau}^{-1})^{\mu\nu}[Y_{\mu\nu}]}{9 - (\hat{\tau}^{-1})^{\mu}_{\mu}\hat{\tau}^{\nu}_{\nu}}. \tag{4.97}$$

Para garantir um valor finito para a média do traço da curvatura extrínseca devemos impor $9 \neq (\hat{\tau}^{-1})^{\mu}_{\mu}\hat{\tau}^{\nu}_{\nu}$. Em geral, para uma dimensão qualquer essa condição é dada por $(n-3)^2 \neq (\hat{\tau}^{-1})^{\mu}_{\mu}\hat{\tau}^{\nu}_{\nu}$, isto é, uma contração específica do tensor de matéria depende da dimensão da variedade em questão. Isso pode ocorrer, por exemplo, com defeitos topológicos e termo de Chern-Simons (este último, para dimensões ímpares). Entretanto, até o presente momento não há um procedimento que contorne esse problema. Logo, apenas assumiremos $9 \neq (\hat{\tau}^{-1})^{\mu}_{\mu}\hat{\tau}^{\nu}_{\nu}$ para dar continuidade ao complemento da análise. Substituindo a equação (4.97) na equação (4.93) ficamos com

$$-\frac{8\pi}{\phi}\langle K_{[\mu}{}^{\alpha}\rangle\hat{\tau}_{\nu]\alpha} = [Y_{\mu\nu}] + \frac{3(\hat{\tau}^{-1})^{\alpha\beta}[Y_{\alpha\beta}]}{9 - (\hat{\tau}^{-1})^{\sigma}_{\sigma}\hat{\tau}^{\gamma}_{\gamma}}\Big(-\hat{\tau}_{\mu\nu} + \frac{\hat{\tau}}{3}q_{\mu\nu}\Big), \tag{4.98}$$

ou, de modo mais compacto,

$$\frac{8\pi}{\phi}\langle K_{[\mu}{}^{\alpha}\rangle\hat{\tau}_{\nu]\alpha} \equiv -[\hat{Y}_{\mu\nu}], \tag{4.99}$$

onde obviamente

$$[\hat{Y}_{\mu\nu}] = [Y_{\mu\nu}] + \frac{3(\hat{\tau}^{-1})^{\alpha\beta}[Y_{\alpha\beta}]}{9 - (\hat{\tau}^{-1})^{\sigma}_{\sigma}\hat{\tau}^{\gamma}_{\gamma}}\Big(-\hat{\tau}_{\mu\nu} + \frac{\hat{\tau}}{3}q_{\mu\nu}\Big). \tag{4.100}$$

Para isolar completamente os termos $\langle K_{\mu\nu}\rangle$ completando a resolução da equação acima e terminando, então, a projeção das equações vamos utilizar uma decomposição da métrica da brana em *vielbein*. Trabalhemos deste modo com uma base completa de vetores ortonormais, $h^{(i)}_{\mu}$ $(i = 0, 1, ..., 4)$, construídos pela contração de um conjunto de matrizes ortogonais que representam uma transformação de Lorentz local e deixam $\hat{\tau}$ (e consequentemente τ) diagonal. As condições de ortonormalidade são dadas por

$$
\begin{aligned}
h^{\mu}{}_{(i)}h_{\mu(j)} &= \eta_{(i)(j)}, \\
\sum_{i,j=0}^{4}\eta_{(i)(j)}h_{\mu}{}^{(i)}h_{\nu}{}^{(j)} = \sum_{j=0}^{4}h_{\mu}{}^{(j)}h_{\nu(j)} &= q_{\mu\nu},
\end{aligned}
\tag{4.101}
$$

onde $\eta_{(i)(j)}$ é a métrica de Minkowski e **não** estamos assumindo a convenção de soma de Einstein com relação aos índices tangentes (i). Estamos então instalando em cada ponto da subvariedade um referencial com uma base ortonormal que relaciona a métrica da brana com a métrica de Minkowski em cinco dimensões. Nesse frame, temos invariância de Lorentz e o tensor diagonal $\hat{\tau}$ escrito como

$$
\hat{\tau}_{\mu\nu} = \sum_{i}\hat{\tau}_{(i)}h_{\mu}{}^{(i)}h_{\nu(i)}, \tag{4.102}
$$

é especificado pelos coeficientes $\hat{\tau}_{(i)}$. Substituindo a equação (4.102) em (4.99) e contraindo o resultado com $h^{\mu}{}_{(i)}h^{\nu}{}_{(j)}$ chegamos, após alguma álgebra, à expressão

$$
\frac{8\pi}{\phi}\langle K_{\mu\nu}\rangle = -\sum_{i,j}\frac{h_{\mu}{}^{(i)}h_{\nu}{}^{(j)}}{\hat{\tau}_{(i)}+\hat{\tau}_{(j)}}[\hat{Y}_{(i)(j)}], \tag{4.103}
$$

onde definimos $[\hat{Y}_{(i)(j)}] \equiv h^{\mu}{}_{(i)}h^{\nu}{}_{(j)}[\hat{Y}_{\mu\nu}]$. A equação (4.103) é a principal benesse da decomposição utilizada, e bem pode ser considerada como uma justificativa para tal, pois com (4.103) podemos escrever a média da curvatura extrínseca isoladamente, como desejado. Notemos que o termo diagonal de (4.103) é

$$
\sum_{i=j}\frac{h_{\mu}{}^{(i)}h_{\nu}{}^{(j)}}{\hat{\tau}_{(i)}+\hat{\tau}_{(j)}}[\hat{Y}_{(i)(j)}] = \frac{1}{2}(\hat{\tau}^{-1})_{\mu}{}^{\alpha}[\hat{Y}_{\alpha\nu}]; \tag{4.104}
$$

e assim, podemos finalmente escrever a condição de junção para a média da curvatura extrínseca:

$$
\begin{aligned}
\frac{8\pi}{\phi}\langle K_{\mu\nu}\rangle &= -\frac{1}{2}(\hat{\tau}^{-1})_{\mu}{}^{\alpha}[Y_{\alpha\nu}] + \frac{3(\hat{\tau}^{-1})^{\beta\gamma}[Y_{\beta\gamma}]}{2(9-(\hat{\tau}^{-1})^{\sigma}_{\sigma}\hat{\tau}^{\rho}_{\rho})}\left(q_{\mu\nu} - \frac{\hat{\tau}^{\rho}_{\rho}(\hat{\tau}^{-1})_{\mu\nu}}{3}\right) \\
&- \sum_{i\neq j}\frac{h_{\mu}{}^{(i)}h_{\nu}{}^{(j)}}{\hat{\tau}_{(i)}+\hat{\tau}_{(j)}}[\varpi_{(i)(j)}],
\end{aligned}
\tag{4.105}
$$

onde, seguindo a notação padrão, $[\varpi_{(i)(j)}] \equiv h^{\mu}{}_{(i)}h^{\nu}{}_{(j)}[\varpi_{\mu\nu}]$. Caso desejado, da equação (4.105) podemos encontrar a expressão para $\langle K\rangle$, enquanto a forma de $\langle\zeta_{\mu\nu}\rangle$ advém da decomposição feita em (4.86).

Por fim, terminamos por escrever explicitamente as equações de Einstein-Brans-Dicke projetadas na brana num espaço-tempo sem simetria $\mathbb{Z}_2$. Da equação (4.87), no referencial ortonormal, temos que os termos diagonais são dados por

$$
{}^{(5)}G_{(i)(i)} = -\Lambda_5 + G_{N5}\tau_{(i)} + \pi_{(i)} + \langle\varpi_{(i)(i)}\rangle + \frac{3}{5}\langle K\rangle\langle\zeta_{(i)(i)}\rangle + \sum_{k}\langle\zeta_{(i)}{}^{(k)}\rangle\langle\zeta_{(i)(k)}\rangle, \tag{4.106}
$$

onde $\pi_{(i)} = \frac{1}{4}\left(\frac{8\pi}{\phi}\right)^2\left(\frac{(w+3)}{2(3+2w)}\tau\tau_{(i)} - \tau^2_{(i)} + \frac{1}{2}\left(\sum_j \tau^2_{(j)}\right) - \frac{(w^2+3w+3)}{2(3+2w)^2}\tau^2\right)$. Além disso, temos também contribuição de termos fora da diagonal do tensor de Einstein

$$^{(5)}G_{(i)(j)} = \langle\varpi_{(i)(j)}\rangle + \frac{3}{5}\langle K\rangle\langle\zeta_{(i)(j)}\rangle + \sum_k \langle\zeta_{(i)}^{\ (k)}\rangle\langle\zeta_{(j)(k)}\rangle. \tag{4.107}$$

Notemos que os novos termos fora da diagonal surgem unicamente pelo fato de estarmos sem a simetria $\mathbb{Z}_2$. Esse efeito, por assim dizer, é uma assinatura característica de branas anisotrópicas. Lembremo-nos que no caso com simetria $\mathbb{Z}_2$, tanto os termos fora da diagonal da métrica do espaço-tempo quanto do tensor de Einstein, são suprimidos. Isso nos remete a uma breve discussão acerca dos modelos estudados no Capítulo anterior. Lá, partíamos de um ansatz diagonal e obtínhamos uma estrutura bulk/brana caracterizada pela presença de compactificação híbrida, isto é, uma dimensão extra transversa e outra compactificada (em uma topologia S^1) na brana. Como vimos no presente Capítulo, a projeção das equações de campo gravitacional na brana mostra-se mais eficaz para modelos de compactificação híbrida (no sentido de preservação de informação) quando abdicamos da simetria $\mathbb{Z}_2$, uma vez que, naturalmente, é nesse último contexto que esperamos tratar uma brana anisotrópica. Assim, espera-se também que as branas estudadas nessa última Seção devam ter elementos fora da diagonal na própria métrica do espaço-tempo também. Isso, de fato, parece bastante razoável. Não devemos contudo nos apressar em dizer que a análise realizada no Capítulo anterior está errada, visto não contemplar elementos fora da diagonal. Com efeito, podemos ter (via compactificação híbrida) uma métrica anisotrópica de um ansatz diagonal e, mais além, nosso ansatz é clássico. Não excluindo portanto flutuações quânticas fora da diagonal na métrica do espaço-tempo determinada pela brana.

As equações (4.106) e (4.107) completam a análise que desejávamos realizar nessa Seção. Juntamente com a equação (4.65) elas perfazem o conjunto de resultados principais desse Capítulo. A elas, bem como a suas implicações, voltaremo-nos no próximo Capítulo, concluindo nosso trabalho e deixamos assim o presente Capítulo como cumpridor do propósito de estabelecer as bases formais para obtenção das equações projetadas na brana[16]. Antes de dele nos despedirmos, porém, vamos nos endereçar a uma questão, de início, curiosa que se relaciona com uma análise profunda sobre a viabilidade de modelos de branas. Das equações (4.66), (4.67), (4.88) e (4.89), notamos que a constante cosmológica efetiva, bem como a constante gravitacional efetiva, com e sem simetria $\mathbb{Z}_2$, apresentam um aspecto curioso em suas dependências com relação à tensão da brana λ: um termo de λ sempre aparece

[16] Um resumo comentado do exposto nesse Capítulo pode ser encontrado em [58].

tendo como coeficiente o fator multiplicativo $(w-1)$. As equações projetadas na brana precisam levar em conta uma contribuição da tensão da brana, uma vez que a decomposição do tensor energia-momento do bulk leva isso em conta explicitamante. Logo, tal termo pode levar a uma incompatibilidade dos modelos de branas em teorias de Brans-Dicke "puras", onde se espera $w \sim 1$. Antes de mais nada, enfatizamos que esse não é um problema pertinente a esse trabalho, onde a utilização de teoria de Brans-Dicke é justificada por motivos outros, isto é, não esperamos $w \sim 1$. Entretanto, parece ser esse um problema interessante no que concerne à compatibilidade de dimensões extras (e branas) em gravitação de Brans-Dicke.

A fim de responder a essa questão, remetemos o leitor ao Apêndice **B**. Lá também se encontra uma análise para uma questão ainda mais importante, a saber: quais condições uma brana deve satisfazer para termos um modelo consistente? Por exemplo, como vimos no Capítulo 2, no modelo de Randall-Sundrum as branas precisam ter tensões iguais em módulo e opostas em sinal. Como derivar essa propriedade de um arcabouço geral? Existe alguma restrição para o parâmetro de Brans-Dicke? Para não penetrarmos demais em assunto que é visto alhures, encerramos esse Capítulo, bem como o trabalho principal dessa tese aqui. Como dito, no Capítulo ulterior apresentamos um desfecho ao trabalho, visando chamar atenção a pontos importantes vistos ao longo da tese, bem como apontar novas possibilidades dado o esboço teórico analisado até aqui.

Capítulo 5

Considerações finais. E outras iniciais

Sendo esse um Capítulo fadado a uma conclusão, um desfecho, nada mais propositado do que o aproveitamento do azo por ele criado para segmentarmos essas finalizações em duas partes: a primeira, relembrando alguns resultados e chamando atenção para pontos importantes. Dessa parte se imbui as considerações finais. A segunda, apontando para direções futuras nessa linha de pesquisa, constitui a última parte desse Capítulo, as considerações inicias. Eis então o porquê do título. Voltemonos pois ao seu conteúdo.

O trabalho desenvolvido nessa tese pode ser, ele mesmo, particionado em dois pilares, por assim dizer. No Capítulo 3 propusemos dois modelos de compactificação alternativa utilizando as cordas cósmicas (local [33] e global [36]) em gravitação de Brans-Dicke para a geração de toda a estrutura do espaço-tempo (bulk/brana). Tais modelos, ainda que não completos, garantiram uma possibilidade segura de desenvolvimento posterior do trabalho. No primeiro modelo de tal Capítulo, com a corda local, um detalhe importante e não discutido merece ser colocado aqui. Da equação que fornece os pontos críticos no plano de fase, (3.24), notamos que tratando a constante cosmológica como parâmetro, chegamos à conclusão de que sua presença é impres-cindível para o cenário final. Levando-a a zero, é possível ver que os dois pontos (atrator e repulsor) do plano de fase coincidem em um único ponto de sela, pouco importante para uma estrutura bulk/brana. Por conseguinte, a constante cosmológica do bulk, ainda que forçosamente pequena (e positiva) precisa ser não nula para que haja duas branas e que uma delas, a referente ao atrator, possa modelar o universo. O segundo modelo, agora com a corda global, pode ser ainda campo para pesquisa visto não apresentar uma solução completa interior à brana. Além disso, outras possibilidades que não a advinda do vínculo (3.59) merecem atenção. Haveria ainda nesse modelo aspectos físicos interessantes não explorados? Queremos crer que sim, embora somente um estudo sistemático de soluções emergentes de diversos vínculos entre as constantes de integração possa dar uma palavra final à questão levantada.

A proposição de modelos, gostaríamos de enfatizar, foi parte importante, senão essencial, do plano de desenvolvimento do trabalho pois, além de nos aproximar dessa faceta exploradora de linha de pesquisa, nos consolidou um próximo passo, redescrito agora de modo direto: temos um elemento de linha em seis dimensões com pelo menos uma brana com topologia $\mathbb{R}^4 \times S^1$, por exemplo, e uma dimensão extra transversa à brana. Como extrair informação gravitacional a respeito do sistema? A resposta, como descrita no Capítulo 4, está no formalismo de Gauss-Codazzi. Tal formalismo responde, ou antes, propicia um arcabouço no qual modelos de codimensão um podem ser largamente estudados do ponto de vista gravitacional. Sua implementação requer certo cuidado matemático, que esperamos ter tomado e explicitado ao longo do Capítulo 4, mas seu resultado é, antes, assaz simples e com características gerais o suficiente para nos permitir uma análise verbal aqui: ele nos leva a uma equação gravitacional efetiva projetada na brana, onde o fato desta estar mergulhada num espaço-tempo de dimensão superior é traduzido em termos de fonte extra. Assim também o é com relação ao campo de Brans-Dicke [47]. Guardemos por um momento esse *output* do formalismo em questão para chamarmos atenção a outro ponto importante, a saber, o papel da simetria $\mathbb{Z}_2$. Como vimos [57], ela se relaciona diretamente à equação projetada na brana. Mais além, sua presença, uma vez eliminados termos fora da diagonal no elemento de linha, descreve branas isotrópicas e a equação gravitacional efetiva se adequa a essa característica. Em contrapartida, sua ausência não previne a inexistência de elementos fora da diagonal, por exemplo via flutuações quânticas na métrica e isso é também traduzido na equação de campo projetada, onde termos de *shear* tornam-se explícitos. Logo, como enfatizamos no Capítulo 4, branas apresentando compactificação híbrida são melhores descritas sem a implemetação do *orbifold* na codimensão.

O ingrediente principal quando do estudo gravitacional das branas via formalismo de Gauss-Codazzi com ou sem simetria $\mathbb{Z}_2$ são as condições de junção[1]. Agora ponderemos: uma vez que a presença (ou ausência) dessa simetria modifica o modo como a brana é mergulhada no bulk, é natural que isso seja refletido na condição de junção que define a curvatura extrínseca! Em verdade, analisando agora a questão (após todo o esforço despendido no Capítulo 4) a afirmação acima se nos apre-

[1]No nosso caso, como dito antes, referimo-nos às de Israel-Darmois, visto estarmos na aproximação de branas infinitamente finas.

senta como indício de consistência do formalismo aplicado a branas. Esperamos ter enfatizado essa característica a ponto de poder merecer ela a alcunha de intuitiva.

Resumidas, e bastante, algumas caracteríscias do nosso trabalho, gostaríamos de reservar este parágrafo para uma crítica ao próprio trabalho, realizando assim uma espécie de transição entre as considerações finais e alguns apontamentos para pesquisa futura. Nossa maior crítica reside no problema da estabilização do raio da dimensão extra compactificada na brana, na estabilização do tamanho da dimensão extra transversa à brana no caso de múltiplas branas, e também na estabilização do campo escalar no bulk. Esse problema, ou antes esses problemas, são profundos[2] e inerentes a todos os estudos de branas do ponto de vista gravitacional. Eis o porquê desse parágrafo assumir um tom de transição: enquanto começamos atentando para problemas descritos na tese, terminamos por especular maneiras de solucioná-los. Assim, acreditamos que a estabilização do campo escalar pode ser obtida via adição de um potencial (bem escolhido) à ação de Brans-Dicke [50]. Já como sugestão para estabilização das dimensões extras, talvez uma análise do efeito Casimir topológico para vários campos possa lançar luz de forma efetiva para o problema. É sabido que a energia devido às flutuações do vácuo são, em geral, diretamente proporcionais ao inverso de alguma potência positiva do raio de compactificação, o que é apreciável para a dimensão extra na brana, mas desprezível para a dimensão extra transversa à brana. Entretanto existem situações nas quais, ainda assim, sua análise ajuda na resolução do problema da estabilização tanto da dimensão compactificada na brana quanto da transversa à mesma [59]. Uma configuração que minimize a energia nas dimensões extras pode ser, portanto, uma solução para os problemas de estabilização.

Cumprido o programa de embasamento matemático dos modelos de branas em gravitação de Brans-Dicke, podemos seguir adiante visando aplicá-los na solução de alguns problemas em voga. Sendo a gravitação terreno onde se desenvolveu nosso trabalho, visto lidarmos com estruturas em larga escala, é bastante natural olharmos agora os aspectos cosmológicos que podem ser estudados com os resultados obtidos. Mais do que uma curiosidade (e essa geralmente nos basta), o estudo de certos sistemas cosmológicos pode servir até mesmo como ferramenta de teste para análise da viabilidade de modelos de branas em teoria de Brans-Dicke. Gostaríamos de encerrar essa tese, por conseguinte, apontando futuras aplicações em cosmologia. Bem entendido, estaremos doravante pisando em terreno de especulações que, ainda que por vezes frustem nossos intentos e expectativas, são úteis como limiar de pesquisa.

[2]Um exemplo bastante ilustrativo da profundidade desses problemas pode ser visto da equação (4.66). Note que a constante gravitacional efetiva depende explicitamente do valor do dilaton na posição da brana.

Comecemos pois a dar, em mote antigo, tratos à bola.

Resgatando, uma vez mais, uma das conclusões do terceiro parágrafo deste Capítulo, tanto o campo dilatônico quanto o cenário de branas se refletem, ou antes, aparecem na equação de Einstein projetada na brana como intrincados termos de fonte. Dado que tais termos aparecem naturalmente da redução dimensional dos termos geométricos do bulk, esperamos que possam ser sentidos em alguns sistemas cosmológicos mesmo a baixas energias. Ressaltamos que, como expresso no Capítulo 4, a equação de Einstein projetada não forma um conjunto completo de equações, haja vista a presença de termos que se devem unicamente ao fato da brana estar mergulhada no bulk. Entretanto, esse primeiro obstáculo pode ser contornado em determinados sistemas. Por exemplo, o estudo de cosmologia de branas admitindo estaticidade das dimensões extras traz características novas e interessantes [60]. Além disso, há uma vasta literatura no que concerne ao tratamento das equações efetivas do ponto de vista cosmológico [46], e isso inclui também cenários sem a simetria $\mathbb{Z}_2$ [61].

Mais concretamente, as benesses dos modelos de branas relacionados à cosmologia podem ser apreciadas quando aplicamos tais modelos ao problema, por exemplo, das curvas de rotação de galáxias espirais[3]. Talvez, em escala galática e/ou intergalática, as referidas curvas sejam uma das melhores evidências dos problemas da mecânica Newtoniana usual e da Relatividade Geral padrão. Em tais galáxias são observadas nuvens de hidrogênio neutro a grandes distâncias do centro (muito além da extensão de matéria luminosa). Uma vez que as nuvens se movem em órbitas circulares com velocidade, digamos $v_{tg}(r)$, as órbitas são mantidas pelo balanço entre a aceleração centrífuga e a força de atração gravitacional da massa total $M(r)$ contida na órbita. Isso faz com que o perfil de massa da órbita obedeça a simples expressão $M(r) = r\frac{v_{tg}^2}{G}$. Assumindo-se um efeito Doppler não-relativístico e emissão de órbitas circulares estáveis em um campo gravitacional Newtoniano, a frequência se desloca da linha de 21 centímetros da emissão do hidrogênio permitindo a medida das velocidades das nuvens [63]. Observações mostram que as velocidades rotacionais aumentam perto do centro da galáxia, mas permanecem, conforme dele nos afastamos, aproximadamente constantes em $v_{tg\infty} \sim 200$ Km/s [64]. Logo, a massa aumenta linearmente com r mesmo em regiões onde muito pouca, se alguma, matéria luminosa é detectada. Usualmente, essa matéria adicional é postulada como matéria escura[4]. Quando tal problema é tratado do ponto de vista de cosmologia de branas,

[3]Outra possível ramificação direta de trabalho, no contexto de branas com tensão variável, pode ser vista em [62].

[4]Alguns exemplos de trabalhos que utilizam cordas cósmicas como fontes de matéria escura nas

entretanto, exatamente pelo fato das equações projetadas apresentarem termos "extras" de fonte, não é necessária a imposição de nenhum tipo exótico de matéria. A solução completa da equação projetada pode ser obtida assumindo que a brana é mapeada conformemente em si mesma [63], ou assumindo-se alguma relação *ad hoc* que vincule termos do tensor de Weyl projetado [66].

Em geral, nesses trabalhos a forma da métrica em todo bulk não é importante, bastando a resolução da equação projetada na brana. Dá-se então um processo de solução inverso assumindo-se que dada uma métrica na brana pode-se, caso necessário, encontrar uma solução para as equações de campo do bulk. De fato, sob certas circuntâncias, isso não só é possível como é também garantido pelo teorema de mergulho de Campbell-Maagard [67].

Esses trabalhos de aplicação dos cenários de branas foram realizados no contexto de Relatividade Geral. Portanto, análises similares em gravitação de Brans-Dicke merecem ser levadas a termo[5]. Uma análise comparativa e sistemática de tais problemas envolvendo branas em teoria de Brans-Dicke podem sugerir novas direções na aplicabilidade de cenários em branas, bem como restringir a dinâmica do campo escalar no bulk. Essa vertente aplicativa de trabalho, valendo-se do que se foi embasado nessa tese, constitui desdobramento importante e complementar do estudo aqui presente. Na outra ponta de ramificação deste trabalho, em direção à abstração, gostaríamos de ressaltar outra possível direção de trabalho, a saber: o estudo e aplicação da Teoria das Folheações [69]. Enquanto podemos afirmar com certeza que a aplicação à cosmologia é amplamente viável, especulando até mesmo o que esperarmos, o estudo da Teoria das Folheações é ramo incerto de avanço nessa área. Entretanto, em analogia ao caminho trilhado pela física matemática anteriormente, e guardadas as devidas proporções, quando da aplicação de diversos teoremas da topologia diferencial à Relatividade Geral, seria interessante um aprofundamento nas técnicas de Folheações para utilização em modelos de branas, tanto na proposição quanto no tratamento.

E é assim, com algumas possiblidades a serem exploradas, que gostaríamos de encerrar esse Capítulo, bem como todo o trabalho desenvolvido nessa tese. É nosso intuito prosseguir com essa linha de pesquisa, e com esse trabalho ajudar em tal desenvolvimento, criando e reforçando, sempre que possível, um amálgama entre a abstração matemática necessária para a formalização e embasamento teórico da idéia física e a aplicação à alguma interface fenomenológica para que testemos e

curvas de rotação de galáxias podem ser encontrados em [65].

[5]Felizmente, há uma generalização do teorema de mergulho de Campbell-Magaard para gravitação de Brans-Dicke [68].

aprimoremos a formulação de tal idéia. Em resumo, encerramos assim, novamente acabando o que não tem fim.

Apêndice A

Elementos de Sistemas Dinâmicos

Esse Apêndice é devotado a uma mínima introdução de alguns elementos de Sistêmas Dinâmicos, necessários para a compreensão da classificação feita na primeira Seção do Capítulo 3. Trata-se de um Apêndice exatamente por estar fora do escopo principal da tese. Não nos preocuparemos aqui com provas e demonstrações, mas sim com a exposição sistemática de alguns conceitos visando a realização de um curto, porém auto-contido, Apêndice. No que se segue, trabalharemos estritamente com a notação e linguagem como utilizadas em [70]. Ademais, recomendamos ao leitor a mesma referência para provas de teoremas, bem como para um aprofundamento nesta vasta área da matemática.

Muito embora nossa aplicação de Sistemas Dinâmicos se dê no plano de fase, começemos por estabelecer a notação em uma dimensão. É desejável assim proceder para que ganhemos, pouco a pouco, intuição a respeito do assunto.

Seja I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e seja

$$\begin{aligned} x : I &\to \mathbb{R}, \\ t &\mapsto x(t) \end{aligned} \tag{A.1}$$

uma função real de $t \in \mathbb{R}$. Consideraremos equações diferenciais do tipo

$$\dot{x} = f(x), \tag{A.2}$$

onde x é uma função desconhecida de t e f de x. A equação (A.2) é chamada escalar autônoma, uma vez que x é real escalar e f não depende da variável independente t. Dizemos que a função x é solução de (A.2) on intervalo I se $\dot{x}(t) = f(x(t))$ para todo $t \in I$.

Como sabido, nossa aplicação encontra-se no domínio de Sistemas Dinâmicos não-autonomos, isto é, quando a equação diferencial depende da variável independente. Existem muitos pontos de coincidência e de discrepância entre essas duas vertentes de equações dinâmicas. Para nossos simples propósitos, o de classificações de pontos críticos, a teoria é a mesma. Podemos então estudar nossos conceitos no âmbito de Sistemas Dinâmicos autônomos.

De acordo com a notação usual, denotaremos o conjunto de todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, o conjunto de todas a funções diferenciáveis com primeiras derivadas contínuas por $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e assim por diante. Para enfatizar um possível problema de valor inicial, usaremos

$$\varphi(t, x_0) = x(t) \tag{A.3}$$

e

$$\varphi(0, x_0) = x_0. \tag{A.4}$$

A função[1] $\varphi(t, x_0)$ é chamada fluxo de $\dot{x} = f(x)$.

Se f é uma função C^1 então, para cada t o fluxo $\varphi(t, x_0)$ dá origem a um mapa de $\mathbb{R}$ em si mesmo (com o domínio possivelmente restrito) dado por $x_0 \mapsto \varphi(t, x_0)$. Tal mapa tem como propriedades:

i) $\varphi(0, x_0) = x_0$, vide equação (A.4);

ii) $\varphi(t + s, x_0) = \varphi(t, \varphi(s, x_0))$;

iii) $\varphi(t, x_0)$ é um mapa C^1 para cada t e possui inversa C^1 dada por $\varphi(-t, x_0)$.

Um mapa de $\mathbb{R}$ em si mesmo satisfazendo as três propriedades supracitadas é chamado um **Sistema Dinâmico** C^1 em $\mathbb{R}$. Chegamos então à conclusão de que o fluxo de uma equação diferencial autônoma e escalar dá origem a um Sistema Dinâmico em $\mathbb{R}$.

Definição: Um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}$ é chamado um ponto crítico (ou de equilíbrio) de $\dot{x} = f(x)$, se $f(\bar{x}) = 0$.

Note que se $f(\bar{x}) = 0$, então $\dot{\bar{x}} = 0$, isto é, $\bar{x}$ é constante em t. Desse modo, $\varphi(t, x_0) = \bar{x}$ e portanto um ponto crítico é um ponto fixo de φ.

Teorema: Suponha que f seja uma função C^1 e $\bar{x}$ um ponto de equilíbrio de $\dot{x} = f(x)$, isto é $f(\bar{x}) = 0$. Suponha também que $f'(\bar{x}) \neq 0$. Então o ponto de equilíbrio $\bar{x}$ é assintoticamente estável se $f'(\bar{x}) < 0$, e instável se $f'(\bar{x}) > 0$.

Trataremos com um pouco mais de cuidado pontos assintoticamente estáveis um duas dimensões. Antes porém, vamos introduzir mais um definição a título de completeza.

[1]Note que $f = \dot{\varphi}$ com condições iniciais.

Definição: Um ponto de equilíbrio $\bar{x}$ de $\dot{x} = f(x)$ é chamado ser um equilíbrio hiperbólico se $f'(\bar{x}) \neq 0$. Se $f'(\bar{x}) = 0$, então $\bar{x}$ é dito ser um ponto de equilíbrio não-hiperbólico ou degenerado.

Podemos partir agora para a análise em duas dimensões. Faremos isso em estreita analogia com o que vimos para o caso unidimensional, primeiro estabelecendo as equações de interesse e depois pavimentando nosso estudo com uma série de definições e teoremas.

Seja I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e sejam

$$\begin{aligned} x_i : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}, \\ t &\mapsto x_i(t), \end{aligned} \tag{A.5}$$

para $i = 1, 2$, duas funções C^1 de uma variável real t. Sejam também

$$\begin{aligned} f_i : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}, \\ (x_1, x_2) &\mapsto f_i(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{A.6}$$

para $i = 1, 2$, duas funções reais a duas variáveis. Estamos então lidando com equações da forma

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{A.7}$$

Passemos para a notação vetorial por conveninência. Definamos $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2)$, $\dot{\overrightarrow{x}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ e $\overrightarrow{f} = (f_1, f_2)$. Dessa forma, as equações (A.7) podem ser escritas simplesmente como $\dot{\overrightarrow{x}} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$, que obviamente em muito se assemelha ao caso visto para uma dimensão. O problema de valor inicial agora é dado por

$$\begin{aligned} \dot{\overrightarrow{x}} &= \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}), \\ \overrightarrow{x}(t_0) &= \overrightarrow{x}_0. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Definição: Um ponto $\bar{\overrightarrow{x}} \in \mathbb{R}^2$ é chamado um ponto de equilíbrio de $\dot{\overrightarrow{x}} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$, se $\overrightarrow{f}(\bar{\overrightarrow{x}}) = 0$.

A fim de estudarmos a establidade assintótica nos sistemas em duas dimensões vamos estabeler mais duas importantes definições.

Definição: Um ponto de equilíbrio $\bar{\overrightarrow{x}}$ de um sistema planar autônomo $\dot{\overrightarrow{x}} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ é dito ser estável se, para algum $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ (dependente somente de ϵ) tal que, para todo $\overrightarrow{x}_0$ para o qual $|\overrightarrow{x}_0 - \bar{\overrightarrow{x}}| \leq \delta$, a solução $\varphi(t, \overrightarrow{x}_0)$ de $\dot{\bar{x}} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ satisfaz a inequação $|\varphi(t, \overrightarrow{x}_0) - \bar{\overrightarrow{x}}| < \epsilon$ para todo $t \geq 0$. O equilíbrio

$\overline{\overrightarrow{x}}$ é dito ser instável se não é estável, isto é, existe um $\eta > 0$ tal que, para algum $\delta > 0$, existe um $\overrightarrow{x}_0$ com $|\overrightarrow{x}_0 - \overline{\overrightarrow{x}}| < \delta$ e $t_{x_0} > 0$ tal que $|\varphi(t_{x_0}, \overrightarrow{x}_0) - \overline{\overrightarrow{x}}| = \eta$.

Definição: Um ponto de equilíbrio $\overline{\overrightarrow{x}}$ é dito ser assintoticamente estável se é estável e, em adição, existe um $r > 0$ tal que $|\varphi(t, \overrightarrow{x}_0) - \overline{\overrightarrow{x}}| \to 0$ com $t \to +\infty$ para todo $\overrightarrow{x}_0$ satisfazendo $|\overrightarrow{x}_0 - \overline{\overrightarrow{x}}| < r$.

Torna-se evidente das definições acima que o tipo de estabilidade de um ponto de equilíbrio é uma propriedade local, como no caso das equações escalares. Consequentemente é razoável se esperar que sob certas condições o tipo de estabilidade de $\overline{\overrightarrow{x}}$ possa ser determinado a partir da aproximação linear do campo vetorial $\overrightarrow{f}$.

Suponhamos então que $\overrightarrow{f} = (f_1, f_2)$ seja um função C^1 e seja a matriz

$$D\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = \left. \begin{matrix} \frac{\partial f_1(\overrightarrow{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\overrightarrow{x})}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\overrightarrow{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\overrightarrow{x})}{\partial x_2} \end{matrix} \right)$$

a matriz jacobiana de $\overrightarrow{f}$ no ponto $\overrightarrow{x}$.

Definição: Se $\overline{\overrightarrow{x}}$ é um ponto de equilíbrio de $\dot{\overrightarrow{x}} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$, então a equação diferencial linear $\dot{\overrightarrow{x}} = [D\overrightarrow{f}(\overline{\overrightarrow{x}})]\overrightarrow{x}$ é chamada de equação variacional linear ou linearização do campo vetorial $\overrightarrow{f}$ no ponto de equilíbrio $\overline{\overrightarrow{x}}$.

Teorema: Seja $\overrightarrow{f}$ uma função C^1. Se todos os autovalores da matriz jacobiana $D\overrightarrow{f}(\overline{\overrightarrow{x}})$ têm partes reais negativas, então o ponto de equilíbrio $\overline{\overrightarrow{x}}$ de equação diferencial $\dot{\overrightarrow{x}} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ é assintoticamente estável.

Teorema: Seja $\overrightarrow{f}$ uma função C^1. Se pelo menos um dos autovalores da matriz jacobiana $D\overrightarrow{f}(\overline{\overrightarrow{x}})$ tem parte real positiva, então o ponto de equilíbrio $\overline{\overrightarrow{x}}$ de equação diferencial $\dot{\overrightarrow{x}} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ é assintoticamente instável.

Esses teoremas possuem um análogo qualitativo bastante útil com sistemas lineares hiperbólicos[2], a saber:

i) um sistema linear perto do equilíbrio cujos autovalores da matriz jacobiana têm partes reais negativas é chamado de poço (ou atrator);

ii) um sistema linear perto do equilíbrio cujos autovalores da matriz jacobiana têm partes reais positivas é chamado de fonte (repulsor);

iii) Se não **i)** e não **ii)** então sistema é dito ser de sela.

Temos assim estabelecido que, em geral, na ausência de autovalores com parte real zero, a linearização captura muitos aspectos das características qualitativas locais. É natural, portanto, indagarmos se a linearização determina completamente a

[2]Isto é, sistemas lineares cujos autovalores da matriz jacobiana têm partes reais não nulas quando calculados no ponto de equilíbrio.

estrutura local do sistema. Veremos aqui, após algumas definições, um famoso teorema que, sob certas condições, responde positivamente nossa questão. Comecemos com uma definição de órbitas, necessária para a definição precisa de equivalência entre campos vetoriais.

Definição: As órbitas $\gamma(\overrightarrow{x}_0)$, bem como as órbitas positivas $\gamma^+(\overrightarrow{x}_0)$ e negativas $\gamma^-(\overrightarrow{x}_0)$ de $\overrightarrow{x}_0$ são definidas, respectivamente como os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ (o plano-(x_1, x_2)):

$$\begin{aligned}
\gamma(\overrightarrow{x}_0) &= \bigcup_{t\in(\alpha,\beta)} \varphi(t, \overrightarrow{x}_0), \\
\gamma^+(\overrightarrow{x}_0) &= \bigcup_{t\in[0,\beta)} \varphi(t, \overrightarrow{x}_0), \\
\gamma^-(\overrightarrow{x}_0) &= \bigcup_{t\in(\alpha,0]} \varphi(t, \overrightarrow{x}_0).
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Note que, como estabelecido, a órbita[3] $\gamma(\overrightarrow{x}_0)$ é a projeção da trajetória do fluxo através de $\overrightarrow{x}_0$ no plano-(x_1, x_2).

Definição: Duas equações diferenciais planares $\dot{\overrightarrow{x}} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ e $\dot{\overrightarrow{x}} = \overrightarrow{g}(\overrightarrow{x})$ definidas em subconjuntos abertos U e V de $\mathbb{R}^2$, respectivamente, são ditas topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo $\overrightarrow{h} : U \to V$ tal que $\overrightarrow{h}$ mapeia órbitas do campo vetorial $\overrightarrow{f}$ em órbitas do campo $\overrightarrow{g}$ e preserva o sentido de direção do parâmetro.

Teorema (Grobman-Hartman): Se $\overline{\overrightarrow{x}}$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico de $\dot{\overrightarrow{x}} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$, então existe uma vizinhança de $\overline{\overrightarrow{x}}$ na qual $\overrightarrow{f}$ é topologicamente equivalente ao campo vetorial linear $\dot{\overrightarrow{x}} = [D\overrightarrow{f}(\overline{\overrightarrow{x}})]\overrightarrow{x}$.

Uma importante implicação, além da desejada possibilidade de análise via matriz jacobiana, é que o tipo de estabilidade de um ponto de equilíbrio hiperbólico é preservado por pequenas perturbações arbitrárias não lineares.

[3]Obviamente podemos ter o análogo das definições de órbitas para o caso unidimensional.

Apêndice B

Condições de Consistência para branas em gravitação de Brans-Dicke

Seguindo a linha do Capítulo 4, esse Apêndice também é apresentado de modo mais formal. Temos o intuito aqui de encontramos condições de consistência para modelos de branas em teoria gravitacional de Brans-Dicke. Mesmo na presença de uma solução analítica para o espaço-tempo, tal análise revela-se interessante; apontando para aspectos que geralmente fogem do escopo principal do estudo. Entretanto, para análises sem uma métrica explícita previamente assumida (como os casos do Capítulo 4) a procura por condições de consistência é imprescindível. Essa linha de pesquisa foi inicialmente desenvolvida em [71] para cinco dimensões em Relatividade Geral, diretamente aplicado para o modelo de Randall-Sundrum (com duas branas) e posteriormente estendido para dimensões arbitrárias, ainda em Relatividade Einsteniana, em [72]. Aqui procediremos de modo a encontrar tais condições de consistência[1] em dimensão arbitrária para o caso de gravitação de Brans-Dicke. Depois particularizaremos para seis dimensões com o intuito de aplicarmos a análise para os casos com os quais tivemos envolvidos nessa tese. Seguiremos a exposição em concordância ao exposto na referência [73].

Comecemos por definir e fixar a notação a ser usada aqui. Analisaremos um espaço-tempo D-dimensional dotado de geometria não-fatorável, cuja métrica é dada por

$$ds^2 = G_{AB}dX^A dX^B = W^2(r)g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + g_{ab}(r)dr^a dr^b, \tag{B.1}$$

onde $W^2(r)$ designa genericamente o warp factor, que aliás assumiremos ser uma

[1]Também chamadas de Regras de Soma para modelos de branas.

função suave e integrável, X^A denota as coordenadas do espaço-tempo D-dimensional, x^α rotula as $(p+1)$ coordenadas não-compactas do espaço-tempo e r^a se refere às $(D-p-1)$ direções do espaço interno compacto. Como exemplo concreto, se tomarmos $D=5$, $p=3$ e $W(r)=e^{-2k|r|}$ temos o modelo de Randall-Sundrum. Note que esse tipo de métrica garante a possibilidade da existência de q-branas, com $q>p$. Nesse último caso as $(q-p)$ dimensões extras são compactificadas na brana e constituem parte do espaço interno. Essa é a possibilidade a ser explorada em modelos de compactificação híbrida.

O tensor de Ricci do espaço-tempo D-dimensional pode ser relacionado com o tensor de Ricci da brana e do espaço interno por [71]

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{(p+1)W^{p-1}}\nabla^2 W^{p+1}, \tag{B.2}$$

e

$$R_{ab} = \tilde{R}_{ab} - \frac{p+1}{W}\nabla_a\nabla_b W, \tag{B.3}$$

onde $\tilde{R}_{ab}$, ∇_a e ∇^2 são respectivamente o tensor de Ricci, a derivada covariante e o operador Laplaciano construído com a métrica do espaço interno g_{ab}, enquanto $\bar{R}_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci derivado de $g_{\mu\nu}$. Denotemos os três escalares de curvatura por $R = G^{AB}R_{AB}$, $\bar{R} = g^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\nu}$ e $\tilde{R} = g^{ab}\tilde{R}_{ab}$. Desse modo, os traços parciais das equaçõse (B.2) e (B.3) fornecem

$$\frac{1}{p+1}\left(W^{-2}\bar{R} - R^\mu_\mu\right) = pW^{-2}\nabla W\cdot\nabla W + W^{-1}\nabla^2 W \tag{B.4}$$

e

$$\frac{1}{p+1}\left(\tilde{R} - R^a_a\right) = W^{-1}\nabla^2 W, \tag{B.5}$$

onde $R^\mu_\mu \equiv W^{-2}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ e $R^a_a \equiv g^{ab}R_{ab}$. Note que com tal notação temos $R = R^\mu_\mu + R^a_a$.

Estabeleçamos agora uma identidade bastante útil. Se ξ é uma constante arbitrária, é facilmente verificável que

$$\nabla\cdot(W^\xi\nabla W) = W^{\xi+1}(\xi W^{-2}\nabla W\cdot\nabla W + W^{-1}\nabla^2 W). \tag{B.6}$$

Agora, a combinação das equações (B.4), (B.5) e (B.6) fornece

$$\nabla\cdot(W^\xi\nabla W) = \frac{W^{\xi+1}}{p(p+1)}[\xi(W^{-2}\bar{R} - R^\mu_\mu) + (p-\xi)(\tilde{R} - R^a_a)]. \tag{B.7}$$

A equação (B.7) é bastante útil pois relaciona a geometria do sistema com uma derivação total, que deve ser nula numa integração fechada no espaço interno compacto. Dela, após relacionarmos as quantidades geométricas com os respectivos tensores energia-momento, sairão as condições de consistência.

De modo a escrevermos um apêndice auto-contido tanto em conteúdo quanto em notação, lembremos que a equação de campo de Brans-Dicke é dada por

$$\begin{aligned} R_{MN} - \frac{1}{2}G_{MN}R &= \frac{8\pi}{\phi}T_{MN} + \frac{w}{\phi^2}\Big(\nabla_M\phi\nabla_N\phi - \frac{1}{2}\nabla_A\phi\nabla^A\phi G_{MN}\Big) \\ &+ \frac{1}{\phi}\Big(\nabla_M\nabla_N\phi - \frac{8\pi}{3+2w}TG_{MN}\Big). \end{aligned} \tag{B.8}$$

Enfatizamos que a equação do campo escalar já foi levada em conta no último termo de (B.8). Da equação (B.8) podemos ver que

$$R_{MN} = \frac{8\pi}{\phi}\Big(T_{MN} + \frac{2(1+w)T}{(2-D)(3+2w)}G_{MN}\Big) + \frac{w}{\phi^2}\nabla_M\phi\nabla_N\phi + \frac{1}{\phi}\nabla_M\nabla_N\phi. \tag{B.9}$$

Chamando $T^\mu_\mu \equiv W^{-2}g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ ($T = T^\mu_\mu + T^m_m$), podemos expressar R^μ_μ e R^m_m por

$$\begin{aligned} R^\mu_\mu &= \frac{8\pi}{\phi(D-2)(3+2w)}\Big((3D + 2w(D-p-3) - 2(p+1))T^\mu_\mu - 2(1+w)(p+1)T^m_m\Big) \\ &+ \frac{wW^{-2}}{\phi^2}\nabla^\nu\phi\nabla_\nu\phi + \frac{W^{-2}}{\phi}\nabla^\nu\nabla_\nu\phi, \end{aligned} \tag{B.10}$$

e

$$\begin{aligned} R^m_m &= \frac{8\pi}{\phi(D-2)(3+2w)}\Big((D + 2w(p-1) - 2(p-2))T^m_m - 2(1+w)(D-p-1)T^\mu_\mu\Big) \\ &+ \frac{w}{\phi^2}\nabla^m\phi\nabla_m\phi + \frac{1}{\phi}\nabla^m\nabla_m\phi. \end{aligned} \tag{B.11}$$

Substituindo agora as equações (B.10) e (B.11) em (B.7) temos

$$\begin{aligned} \nabla\cdot(W^\xi\nabla W) &= \frac{W^{\xi+1}}{p(p+1)}\Bigg(\xi W^{-2}\bar{R} + (p-\xi)\tilde{R} - \frac{8\pi}{\phi(D-2)(3+2w)} \\ &\times \Bigg(T^\mu_\mu[\xi(5D + 4w(D-p-2) - 2(2p+5)) - 2p(1+w)(D-p-1)] \\ &+ T^m_m[\xi(-4wp - D + 2(1-2p)) + p(D - 2(p-2) + 2w(p-1))]\Bigg) \\ &- \frac{w}{\phi^2}[\xi W^{-2}\nabla^\mu\phi\nabla_\mu\phi + (p-\xi)\nabla^m\phi\nabla_m\phi] - \frac{1}{\phi}[\xi W^{-2}\nabla^\mu\nabla_\mu\phi \\ &+ (p-\xi)\nabla^m\nabla_m\phi]\Bigg). \end{aligned} \tag{B.12}$$

Agora, podemos lançar mão de uma simplificação útil para análise posterior. Nessa tese, trabalhamos sempre com a hipótese do campo dilatônico não depender das coordenadas na brana. Façamos aqui também essa simplificação, de modo que $\nabla_\mu\phi = 0$. Assim, levando em conta que num espaço interno compacto devemos ter

$$\oint \nabla\cdot(W^\xi\nabla W) = 0, \tag{B.13}$$

ficamos, de (B.12), com

$$\oint \frac{W^{\xi+1}}{\phi}\Big(T^\mu_\mu[\xi(5D+4w(D-p-2)-2(2p+5))-2p(1+w)(D-p-1)]$$
$$+\quad T^m_m[\xi(-4wp-D+2(1-2p))+p(D-2(p-2)+2w(p-1))]-\Big(\frac{8\pi}{\phi}\Big)^{-1}(D-2)(3+2w)$$
$$\times\quad [\xi W^{-2}\bar{R}+(p-\xi)\tilde{R}]+\Big(\frac{8\pi}{\phi}\Big)^{-1}(D-2)(3+2w)\Big(\frac{w}{\phi^2}\nabla^m\phi\nabla_m\phi+\frac{1}{\phi}\nabla^m\nabla_m\phi\Big)\Big)=0. \quad \text{(B.14)}$$

Essa última equação fornece uma família a um parâmetro de condições de consistência para modelos de branas em dimensão arbitrária em gravitação de Brans-Dicke. É importante enfatizar que se reintroduzirmos o fator $(3+2w)^{-1}$ (já fatorado na equação (2.14)) e tomarmos $w\to\infty$ ($\phi\to 1/G_N$), pelo limite usual de L'Hôpital, recuperamos o resultado obtido em Relatividade Geral, como esperado.

Embora a equação (B.14) seja consistente, não parece ser muito útil na maneira como se encontra. Devemos, para torná-la mais aplicável, reescrevê-la em termos de em tensor energia-momento geral o suficiente para que nele possamos especificar os casos desejados. Usaremos um ansatz definido em [72] e dado por

$$T_{MN}=-\Lambda G_{MN}-\sum_i T^{(i)}_q P[G_{MN}]^{(i)}_q\Delta^{(D-q-1)}(r-r_i)+\tau_{MN}, \quad \text{(B.15)}$$

onde Λ é a constante cosmológica, $T^{(i)}_q$ a tensão da i-ésima q-brana, $\Delta^{(D-q-1)}(r-r_i)$ é a combinação covariante de funções delta necessárias pra posicionar a brana[2], $P[G_{MN}]^{(i)}_q$ é o *pull-back* da métrica no bulk na q-brana, e qualquer outra contribuição de matéria é contabilizada em τ_{MN}. Da equação (B.15) temos

$$T^\mu_\mu=-(p+1)\Lambda+\tau^\mu_\mu-\sum_i T^{(i)}_q\Delta^{(D-q-1)}(r-r_i)(p+1), \quad \text{(B.16)}$$

e

$$T^m_m=-(D-p-1)\Lambda+\tau^m_m-\sum_i T^{(i)}_q\Delta^{(D-q-1)}(r-r_i)(q-p). \quad \text{(B.17)}$$

Substituindo essas expressões em (B.14) e manipulando algebricamente os termos chegamos à seguinte forma para as equações de consistência

$$\oint \frac{W^{\xi+1}}{\phi}\Big(-\Lambda(c(p+1)+bD)-\sum_i(cp+a+bq)T^{(i)}_q\Delta^{(D-q-1)}(r-r_i)+aT^\mu_\mu+bT^m_m$$
$$-\quad\Big(\frac{8\pi}{\phi}\Big)^{-1}(D-2)(3+2w)[\xi W^{-2}\bar{R}+(p-\xi)\tilde{R}]+\Big(\frac{8\pi}{\phi}\Big)^{-1}(D-2)(3+2w)$$
$$\times\quad\Big(\frac{w}{\phi^2}\nabla^m\phi\nabla_m\phi+\frac{1}{\phi}\nabla^m\nabla_m\phi\Big)\Big)=0, \quad \text{(B.18)}$$

[2]Ver Apêndice da referência [72] para uma discussão sobre a forma de $\Delta^{(D-q-1)}(r-r_i)$.

onde definimos $a \equiv \xi[5D + 4w(D-p-2) - 2(2p+5)] - 2p(1+w)(D-p-1)$, $b \equiv \xi[-4wp - D + 2(1-2p)] + p[D - 2(p-2) + 2w(p-1)]$ e $c \equiv a - b$.

Notemos de passagem que as condições de consistência encontradas são consideravelmente simplificadas se o campo escalar for dado por uma lei de potência bastante peculiar, a saber

$$\phi = [(w+1)(C_1 r + C_2)]^{\frac{1}{w+1}}, \tag{B.19}$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração. Sendo o dilaton dado por (B.18) o último termo do lado direito da equação (B.19) desaparece e, portanto, as condições de consistência assumem uma forma mais simples. Embora essa característica seja interessante (uma configuração do campo escalar cuja "cinética" não interfere nas condições de consistência) trabalharemos sem assumir uma forma explícita para ϕ, de modo a abarcarmos o caso mais geral possível quanto à configuração desse campo.

É sabido que, de modo geral, quanto maior a dimensão envolvida na análise menos conclusivas são as condições de consistência [72]. Dito de outro modo, altas dimensionalidades relaxam o crivo a ser exigido para a viabilidade do modelo. Eis o porquê, então, tal análise se faz mais interessante para modelos tipo Randall-Sundrum, onde pode-se, por exemplo, reproduzir a necessidade de branas com tensões opostas porém de igual valor absoluto [71]. A seis dimensões, muito embora as conclusões não sejam tão incisivas, há também características que se nos apresentam importantes.

Particularizemos portanto nossa análise ao caso de um bulk em seis dimensões $D = 6$, além de $p = 3$ and $q = 4$, para estudarmos explicitamente os casos com os quais tivemos contato ao longo da tese. Com tais particularizações de D, p e q temos $a = 2\xi(15+2w) - 2(17+6w)$, $b = -4\xi(4+3w) + 12(1+w)$ e $c = 2\xi(23+8w) - 2(23+12w)$, de tal modo que a equação (B.18) fornece

$$\begin{aligned} & \oint \frac{W^{\xi+1}}{\phi}\Bigg(-4\Lambda[35\xi - w(\xi+3) - 14] - 2\sum_i [26\xi + w(\xi-9) - 31] T_4^{(i)} \Delta^{(1)}(r - r_i) \\ + \quad & \tau^\mu_\mu[\xi(15+2w) - (17+6w)] + \tau^m_m[-2\xi(4+3w) + 6(1+w)] - 2(3+2w)\left(\frac{8\pi}{\phi}\right)^{-1} \\ \times \quad & [\xi W^{-2}\bar{R} + (3-\xi)\tilde{R}] + 2(3+2w)(3-\xi)\left(\frac{8\pi}{\phi}\right)^{-1}\left(\frac{w}{\phi^2}\nabla^m\phi\nabla_m\phi + \frac{1}{\phi}\nabla^m\nabla_m\phi\right)\Bigg) \\ = \quad & 0. \end{aligned} \tag{B.20}$$

Tornemos a análise mais simples assumindo que não haja contribuição de energia-momento no bulk e desprezando outras contribuições na brana, isto é $\tau^\mu_\mu = 0 = \tau^m_m$. Por simplicidade, tomemos também $\Lambda = 0$. Essa última simplificação é bastante restritiva, é verdade, uma vez que em modelos de branas em Brans-Dicke, tal termo pode vir a ser não constante. Entretanto, uma vez que a obtenção explícita de Λ foge ao escopo (e também interesse) desse Apêndice, vamos prosseguir com a discussão tomando $\Lambda = 0$. Além disso, note que diferentes escolhas de ξ levam a diferentes contribuições e restrições (por ser, como dito, uma família a um parâmetro de condições de consistência). Comecemos então tomando $\xi = -1$, uma vez que tal escolha elimina o warp factor multiplicativo de todo o lado esquerdo de (B.20). Levando tudo isso em conta na equação (B.20), chegamos a

$$\begin{aligned} &\oint \left(\frac{2w}{\phi^2} \nabla^m \phi \nabla_m \phi + \frac{2}{\phi} \nabla^m \nabla_m \phi - 4\tilde{R} + W^{-2} \bar{R} \right) \\ = \quad &\frac{-8\pi(57 + 10w)}{3 + 2w} \sum_i T_4^{(i)} \oint \frac{\Delta^{(1)}(r - r_i)}{\phi}. \end{aligned} \tag{B.21}$$

É importante ressaltarmos o aparecimento do número de Euler[3] $\chi = \frac{1}{4\pi} \oint \tilde{R}$. O espaço interno do modelo pode ser caracterizado por χ e, assim, para cada modelo esse invariante topológico contribui de modo espacífico para as condições de consistência. Para o caso da equação (B.21) temos

$$\begin{aligned} &\oint \left(\frac{w}{\phi^2} \nabla^m \phi \nabla_m \phi + \frac{1}{\phi} \nabla^m \nabla_m \phi + \frac{W^{-2}}{2} \bar{R} \right) = 8\pi\chi \\ - \quad &\frac{4\pi(57 + 10w)}{3 + 2w} \sum_i T_4^{(i)} L_i \phi^{-1}(r_i) \ , \end{aligned} \tag{B.22}$$

onde L_i é a área da circunferência S^1, a dimensão extra compactificada na brana, e $\phi(r_i)$ é o valor do campo dilatônico na i-ésima brana posicionada em r_i. Já estamos em ponto de responder a questão levantada no final do Capítulo 4, sobre alguma possível restrição no valor do parâmetro de Brans-Dicke. Como percebemos da análise feita aqui, não há valor positivo de w que inviabilize um modelo de branas em gravitação de Brans-Dicke.

Outra escolha interessante para o parâmetro livre é $\xi = 3$. Considerando-se todas as simplificações que levaram a (B.22) porém agora com $\xi = 3$ ficamos com

$$\frac{3(3 + 2w)}{8\pi} \oint W^2 \bar{R} = (6w - 47) \sum_i T_4^{(i)} W^4(r_i) \phi^{-1}(r_i) L_i, \tag{B.23}$$

equação na qual não se encontram derivadas do campo escalar, nem contribuição do número de Euler. Note, através da equação (B.23), que para um escalar de curvatura constante e negativo é possível que tenhamos um cenário de múltiplas

[3]Conforme várias vezes corrigido pelo amigo Roldão da Rocha, χ no caso analisado aqui não pode ser chamado número de Euler, por alguma razão matemática que se me escapa, embora seja também um invariante topológico. Manterei aqui essa denominação, entendida então como um abuso de linguagem, apenas para enfatizar a presença de tal invariante.

branas, todas com tensões negativas, o que está em agudo contraste ao modelo de Randall-Sundrum. Por outro lado, para um escalar de curvatura constante e positivo é possível, pelo menos, que tenhamos pelo menos, uma brana com tensão negativa.

A fim de encerrarmos esse Apêndice, chamamos atenção para o fato de que as condições de consistência podem trazer informação sobre a estabilização do módulo do sistema, bem como sobre a estabilização do campo escalar. Isso pode ser obtido, em princípio, por uma análise da magnitude do último termo das equações (B.22) e (B.23), por exemplo. Algo que não entre em contradição com experimentos. Obviamente, isso de modo algum fornece um mecanismo para estabilização, mas pode apontar uma direção concreta de trabalho.

Referências Bibliográficas

[1] T. Kaluza, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1921**, 966 (1921); O. Klein, Z. Phys. **37**, 895 (1926).

[2] K. Akama, *Proceedings of the Symposium on Gauge Theory and Gravitation*, Nara, Japan, Springer-Verlag (1982) [hep-th/0001113].

[3] V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. **B 125**, 136 (1983); V. A. Rubakov and M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. **B 125**, 139 (1983); M. Visser, Phys. Letts. **B 159**, 22 (1985) [hep-th/9910093].

[4] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, Phys. Lett. **B 429**, 263 (1998) [hep-ph/9803315]; I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, Phys. Lett. **B 436**, 257 (1998) [hep-ph/9804398]; N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, Phys. Rev. **D 59**, 086004 (1999) [hep-ph/9807344].

[5] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999) [hep-ph/9905221]; L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999) [hep-th/9906064].

[6] C. Brans and R. H. Dicke, Phys. Rev. **124**, 925 (1961).

[7] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora, Nature **425**, 374 (2003); M. W. Clifford, Living Rev. Relativity **9**, 3 (2006) [gr-qc/0510072].

[8] T. Damour and K. Nordtvedt, Phys. Rev. **D 48**, 3436 (1993).

[9] T. Damour and A. M. Polyakov, Nucl. Phys. **B 423**, 532 (1994) [arXiv:hep-th/9401069].

[10] J. Scherk and J. Schwarz, Nucl. Phys. **B 81**, 118 (1974); C.G. Callan, D. Friedan, E.J. Martinec, and M.J. Perry, Nucl. Phys. **262**, 593 (1985).

[11] M.B. Green, J.H. Schwarz, E. Witten, Superstring Theory, Cambridge University Press, Cambridge (1987).

[12] A. G. Cohen and D. B. Kaplan, Phys. Lett. **B 470**, 52 (1999).

[13] R. Gregory, Phys. Rev. Lett. **84**, 2564 (2000).

[14] P. Bostock, R. Gregory, I. Navarro, and J. Santiago, Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 221601 [arXiv:hep-th/0311074v2].

[15] R. Koley and S. Kar, Class. Quant. Grav. **24**, 79 (2007) [hep-th/0611074].

[16] R. M. Wald, *General Relativity*, Univ. Chicago Press, Chicago (1984).

[17] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, *Gravitation: an introduction to current research*, L. Witten (ed.), Wiley, New York (1962) [gr-qc/0405109].

[18] P. Horava and E. Witten, Nucl. Phys. **B 460**, 506 (1996) [hep-th/9510209].

[19] S. I. Vacaru S. I. Vacaru, Chapter 7 in: *Clifford and Riemann Finsler Structures in Geometric Mechanics and Gravity*, Selected Works by S. Vacaru, P. Stavrinos, E. Gaburov and D. Gonta, Geometry Balkan Press, (2006) [hep-ph/0106268].

[20] W. D. Goldberger and M. B. Wise, Phys. Rev. Lett. **83** 4922 (1999) [hep-ph/9907447].

[21] G. Gibbons, R. Kallosh, and A. Linde, JHEP **0101**, 022 (2001) [hep-th/0011225v2].

[22] R. Sundrum, TASI Lectures (2004), [hep-th/0508134v2].

[23] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley and Sons (1972).

[24] P. G. Bergmann, Int. Jour. Theor. Phys. **1** 25 (1968).

[25] R. H. Dicke, Phys. Rev. **125**, 2163 (1962).

[26] L. E. Mendes and A. Mazumdar, Phys. Lett. **B 501**, 249 (2001).

[27] P. J. Steinhardt, Phys. Lett. **B 462**, 41 (1999) [hep-th/9907080].

[28] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, Cambridge University Press, Cambridge (1994).

[29] Ya. B. Zel'dovich, I. Yu. Kobzarev, and L. N. Okun, Sov. Phys. JETP **40**, 1 (1975).

[30] G. W. Gibbons, Nucl. Phys. **B 394**, 3 (1993); F. Bonjour, C. Charmousis, and R. Gregory, Class. Quant. Grav. **16**, 2427 (1999).

[31] M. E. X. Guimarães, Class. Quant. Grav. **14**, 435 (1997).

[32] C. Gundlach and M. Ortiz, Phys. Rev. **D 42**, 2521 (1990).

[33] M. C. B. Abdalla, M. E. X. Guimarães, and J. M. Hoff da Silva, Phys. Rev. **D 75**, 084028 (2007) [hep-th/0703234].

[34] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1996).

[35] B. Linet, Phys. Lett. **A 124**, 240 (1987).

[36] M. C. B. Abdalla, M. E. X. Guimarães, and J. M. Hoff da Silva, JCAP **09**, 021 (2008) [arXiv:0707.0233v2 [hep-th]].

[37] I. Olasagasti and A. Vilenkin, Phys. Rev. **D 62**, 044014 (2000) [hep-th/0003300]; T. Ghergetta, E. Roessl and M. Shaposhnikov, Phys. Lett. **B 491**, 353 (2000) [hep-th/0006251].

[38] C. Charmousis, R. Emparan, and R. Gregory, JHEP **05**, 026 (2001) [hep-th/0101198].

[39] B. Boisseau and B. Linet, Gen. Rel. Grav. **30**, 963 (1998) [gr-qc/9802007].

[40] R. Gregory, Phys. Lett. **B 215**, 663 (1998).

[41] C. D. Hoyle, U. Schmidt, B. R. Heckel, E. G. Adelberger, J. H. Gundlach, D. J. Kapner, and H. E. Swanson, Phys. Rev. Lett. **86**, 1418 (2001) [hep-ph/0011014].

[42] U. Ellwanger, JCAP **0311**, 013 (2003) [hep-th/0304057].

[43] C. Charmousis and U. Ellwanger, JHEP **0402**, 058 (2004) [hep-th/0402019].

[44] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago (1984).

[45] T. Shiromizu, K. Maeda, and M. Sasaki, Phys. Rev. **D 62**, 043523 (2000) [gr-qc/9910076v3].

[46] R. Maartens, Living Rev. Relativity **7**, 7 (2004) [gr-qc/0312059v2].

[47] M. C. B. Abdalla, M. E. X. Guimarães, and J. M. Hoff da Silva, Eur. Phys. J. **C 55**, 337 (2008) [arXiv:0711.1254 [hep-th]].

[48] W. Israel, Nuovo Cim. **B44S10**, 1 (1966).

[49] P. MacFadden, PhD Thesis (2006) [hep-th/0612008v2].

[50] L. Perivolaropoulos, Phys. Rev. **D 67**, 123516 (2003).

[51] J. M. Hoff da Silva and Roldão da Rocha, Class. Quantum Grav. **26** 055007 (2009) [arXiv:0804.4261v2 [gr-qc]].

[52] J. Garriga and T. Tanaka, Phys. Rev. Lett. **84**, 2778 (2000) [hep-th/9911055v2].

[53] P. Binetruy, C. Deffayet and D. Langlois, Nucl. Phys. **B 565**, 269 (2000) [hep-th/9905012].

[54] S. Kanno, D. Langlois, M. Sasaki, and J. Soda, Prog. Theor. Phys. **118**, 701 (2007) [arXiv:0707.4510v2 [hep-th]].

[55] E. Weinberg, Phys. Rev. **D 24**, 2669 (1981).

[56] D. Yamauchi and M. Sasaki, Prog. Theor. Phys. Suppl. **118**, 245 (2007).

[57] M. C. B. Abdalla, M. E. X. Guimarães, and J. M. Hoff da Silva, Eur. Phys. J. **C 57**, 791 (2008) [arXiv:0804.2834v2 [hep-th]].

[58] M. C. B. Abdalla, M. E. X. Guimarães, and J. M. Hoff da Silva, contribuição escrita para o volume *The Problems of Modern Cosmology*, Tomsk State Pedagogical University (2009), [arXiv:0811.4609v1 [gr-qc]].

[59] Uma lista bastante incompleta de referências inclui: B Greene and J. Levin, JHEP **11**, 096 (2007); R. Obousy and G. Cleaver, [arXiv:0810.1096v2 [hep-th]]; L. Perivolaropoulos, [arXiv:0802.1531v1 [astro-ph]]; R. Hofmann, P. Kanti, and M. Pospelov, Phys. Rev. **D 63**, 124020 (2001); E. Elizalde, S. Nojiri, S. Odintsov, and S. Ogushi, Phys. Rev. **D 67**, 063515 (2003).

[60] S. Kanno, D. Langlois, M. Sasaki, and J. Soda, [arXiv:0707.4510v2 [hep-th]].

[61] N. Chantillon, C. Macesanu, and M. Trodden, [gr-qc/0609093v2].

[62] M. C. B. Abdalla, J. M. Hoff da Silva, and R. da Rocha, prelo da Phys. Rev. **D 80**, 046003 (2009) [arXiv:0907.1321 [hep-th]].

[63] M. K. Mak and T. Harko, [gr-qc/0404104v1].

[64] M. Persic, P. Salucci, and F. Stel, Month. Not. R. Acad. Soc. **281**, 27 (1996); A. Borrielo and P. Salucci, Month. Not. R. Acad. Soc. **323**, 285 (2001).

[65] T. Matos, D. Nunéz, F. Sidartha Guzmán, and E. Ramirez, Gen. Rel. Grav. **34**, 283 (2002); M. Leineker Costa, A. L. Novaes de Oliveira, and M. E. X. Guimarães, Int. J. Mod. Phys. **D 15**, 387 (2006).

[66] F. Rahaman, M. Kalam, A. DeBenedictis, A. A. Usmani, S. Ray, Month. Not. R. Astron. Soc. [arXiv:0802.3453v2 [astro-ph]].

[67] S. S. Seahra and P. Wesson, Class. Quantum Grav. **20**, 1321 (2003); P. Wesson, [gr-qc/0507107v1].

[68] E. Anderson, F. Dahia, J. E. Lidsey, and C. Romero, J. Math. Phys. **44**, 5108 (2003) [gr-qc/0111094v2].

[69] C. Camacho e A. L. Neto, *Introdução à Teoria das Folheações*, IMPA, Rio de Janeiro-RJ, Brasil (1977).

[70] J. Hale and H. Koçak, *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, New York (1991).

[71] G. Gibbons, R. Kallosh and A. Linde, JHEP **0101**, 022 (2001) [hep-th/0011225v2].

[72] F. Leblond, R. C. Myers and D. J. Winters, JHEP **0107**, 031 (2001) [hep-th/0106140].

[73] M. C. B. Abdalla, M. E. X. Guimarães, and J. M. Hoff da Silva, [arXiv:0807.0580v1 [hep-th]].