

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

JUAN CARLOS MARTINS

Problema relativístico restrito de três corpos para objetos compactos : Métrica
Majumdar-Papapetrou e aproximação Pós-Newtoniana

Guaratinguetá

2022

Juan Carlos Martins

**Problema relativístico restrito de três corpos para objetos compactos : Métrica
Majumdar-Papapetrou e aproximação Pós-Newtoniana**

Dissertação de Mestrado apresentado ao Conselho de Curso de Pós-Graduação em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Mestre em Física .

Orientador: Profº Dr. Márcio Eduardo da Silva
Alves

Coorientador: Profº Dr. Rogério Teixeira Cavalcanti

Guaratinguetá

2022

M386p	Martins, Juan Carlos Problema relativístico restrito de três corpos para objetos compactos: métrica Majumdar-Papapetrou e aproximação Pós-Newtoniana / Juan Carlos Martins – Guaratinguetá, 2022. 62 f : il. Bibliografia: f. 61-62 Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2022. Orientador: Prof. Dr. Márcio Eduardo da Silva Alves Coorientador: Prof. Dr. Rogério Teixeira Cavalcanti 1. Buracos negros (Astronomia). 2. Sistema binário (Matemática). 3. Relatividade geral (Física). I. Título. CDU 530.12(043)
-------	--

Luciana Máximo
Bibliotecária CRB-8/3595

JUAN CARLOS MARTINS

**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“MESTRADO EM FÍSICA”**

**PROGRAMA: FÍSICA
CURSO: MESTRADO**

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto

C oordenador

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. MÁRCIO EDUARDO DA SILVA ALVES

Orientador - UNESP

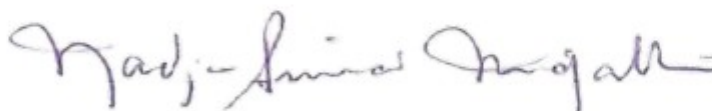
participou por videoconferência



Prof. Dr. SAULO HENRIQUE PEREIRA

UNESP

participou por videoconferência



Prof. Dr. NADJA SIMÃO MAGALHÃES

UNIFESP

participou por videoconferência

Agosto de 2022

DADOS CURRICULARES

JUAN CARLOS MARTINS

NASCIMENTO	25/09/1993 - Guaratinguetá / SP
FILIAÇÃO	João Carlos Martins Rosângela Maria dos Santos Martins
ANO INICIAL / ANO FINAL	Física (Física, Bacharel em Física) FEG-UNESP

Eu dedico esse trabalho a minha família em especial meus pais, João e Rosângela. Dedico também a minha companheira Alana que esteve sempre do meu lado nesta jornada e aos meus amigos que nunca deixaram de me incentivar.

AGRADECIMENTOS

Agradeço o apoio dos meus familiares, em especial minha mãe e meu pai, Rosângela e João, que mesmo não entendendo por completude os caminhos acadêmicos nunca exitaram em deixar-me só durante esta jornada. Sempre estiverem prontos para ouvir e aconselhar, entregando seu amor e carinho como pilares para o meu sucesso.

Agradeço minha companheira Alana que esteve do meu lado em todos os momentos deste trabalho, me guiou diante decisões complexas e me sustentou em momentos difíceis. Sem você essa jornada talvez não tivesse existido.

Agradeço aos meus orientadores Márcio e Rogério, pelos conselhos, orientações, disposição, ensinamentos e primeiramente pela paciência que tiveram comigo durante todo esse processo.

Agradeço a UNIVESP pelo apoio financeiro através de uma bolsa de mestrado e aos meus amigos que sempre me incentivaram a alcançar meus objetivos.

Muitíssimo obrigado a todos.

Este trabalho contou com o apoio da(s) seguinte(s) entidade(s):

UNESP

UNIVESP

“The world forgetting, by the world forgot. Eternal sunshine of the spotless mind;”
(Alexander Pope)

RESUMO

Esta dissertação visa explorar o problema restrito de três corpos para objetos compactos em duas abordagens diferentes, por uma aproximação pós-newtoniana da relatividade geral e do estudo do espaço-tempo de Majumdar-Papapetrou. Começaremos deduzindo o problema de forma clássica e o estenderemos para um caso onde possamos trabalhar com uma aproximação relativística. Analisaremos o problema através da métrica de MP (Majumdar-Papapetrou), para isto devemos simplificar nosso problema considerando-o estático. Ambas as abordagens serão analisadas em duas etapas, a análise algébrica a partir das equações das geodésicas e a análise computacional partindo das mesmas equações para a definição das órbitas de maneira numérica. Tendo em vista o caso MP poderemos definir órbitas estáveis e/ou instáveis possíveis para o sistema estático, as quais em alguns casos somente podem ser obtidas a partir de um procedimento numérico conforme observado na literatura. O que nos gera três possibilidades de órbitas estáveis em $\phi = 0$ e duas possibilidades de órbitas circulares em $z = 0$. A segunda abordagem se dará através da primeira expansão pós-newtoniano da relatividade geral (1 PN) e neste caso temos como objetivo explicitar as diferenças entre uma análise considerando dois regimes (newtoniano e pós-newtoniano). A partir das equações de Einstein da relatividade geral obteremos uma Lagrangiana que descreve o sistema em um referencial não inercial. Advinda da Lagrangiana obteremos a energia e consequentemente o potencial efetivo associado ao sistema. Neste momento obtivemos a variação do potencial efetivo para os regimes newtoniano e pós-newtoniano para um conjunto de exemplos de sistemas binários. Após explorarmos o problema obtivemos a mudança de posição dos pontos de Lagrange, conforme a variação dos potenciais efetivos (newtoniano e pós-newtoniano) por fim poderemos observar as regiões onde é possível a existência de órbitas, através da análise das curvas de velocidade zero que são provenientes do estudo da constante de Jacobi.

PALAVRAS-CHAVE: Buracos-Negros. Sistema Binário. Métrica Majumdar-Papapetrou. MP. Aproximação Pós-Newtoniana. 1-PN. Problema de 3 corpos.

ABSTRACT

This master thesis aims to explore the restricted three-body problem for compact objects in two different approaches, by a post-Newtonian approach to the general relativity and the Majumdar-Papapetrou's spacetime. We will start by deducing the problem in a classical way and we will extend it to a case where we can work with a relativistic approximation. We will analyze the problem through the MP metric (Majumdar-Papapetrou), for this we must simplify our problem by considering it static. Both approaches will be analyzed in two stages, the algebraic analysis based on the geodesic equations and the computational analysis based on the same equations to define the orbits numerically. Bearing in mind the MP case, we will be able to define possible stable and/or unstable orbits for the static system, which in some cases can only be obtained from a numerical procedure, as observed in the literature. Which gives us three possibilities of orbits in $\phi = 0$ and two possibilities of circular orbits in $z = 0$. The second approach will be through the post-Newtonian limit of general relativity (1 PN), in this case we will consider finding the possibility of orbits around the compact objects. From the Einstein equations of general relativity we will obtain a Lagrangian that describes the system in a non-inertial frame of reference. From the Lagrangian it is possible to obtain the energy and consequently the effective potential associated to the system. At this moment we obtained the difference of the effective potential between the Newtonian and Post-Newtonian regimes for several examples of binary systems. After exploring the problem, we obtained the changing position of the Lagrangian points, according to the difference of the effective potentials (Newtonian and Post-Newtonian), finally we will be able to note the regions where the existence of orbits are possible, through the analysis of zero velocity curves provide by the Jacobi's constant.

KEYWORDS: Black Holes. Binary System. Majumdar-Papapetrou Metric. MP. Post-Newtonian Approximation. 1-PN. Three Body Problem.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Disposição do problema restrito de três corpos, m_1 e m_2 corpos massivos, X' e Y' referencial inercial	23
Figura 2	Pontos lagrangianos em torno de dois corpos massivos. Os dois discos cinzas são dois corpos massivos. L_1 , L_2 e L_3 (discos azuis) correspondem à solução colinear de Euler e L_4 e L_5 (discos vermelhos) são a solução triangular equilátero de Lagrange.	25
Figura 3	Potencial efetivo correspondente a equação 3.0.14 com $\mu_1 = 0,2$, $\mu_2 = 0,8$ e $a = 1$	27
Figura 4	Recorte em $y = 0$ da Figura 3	28
Figura 5	Curvas de velocidade zero proveniente da equação 3.0.17 utilizando U proveniente da equação 3.0.14	28
Figura 6	Geodésicas do tipo-tempo para o potencial efetivo da equação (4.1.1) em $\phi = 0$	31
Figura 7	Órbitas do tipo-luz contidas no plano $\phi = 0$	32
Figura 8	Órbitas do tipo-tempo contidas no plano $\phi = 0$	32
Figura 9	Reprodução da órbita tipo-luz proveniente da Figura 7 (azul)	34
Figura 10	Reprodução da órbita tipo-luz proveniente da Figura 7 (azul)	34
Figura 11	Reprodução da órbita tipo-luz proveniente da Figura 7 (preta)	35
Figura 12	Geodésicas do tipo-luz para massas iguais a 1.837	36
Figura 13	Geodésicas do tipo-luz para massas iguais a 1	36
Figura 14	Geodésicas do tipo-luz para massas iguais a 3	37
Figura 15	Geodésicas do tipo-luz para massas iguais a 5	37
Figura 16	Geodésicas do tipo-tempo para massas iguais a 1.837	38
Figura 17	Geodésicas do tipo-tempo para massas iguais a 1	39
Figura 18	Geodésicas do tipo-tempo para massas iguais a 3	39
Figura 19	Geodésicas do tipo-tempo para massas iguais a 5	40
Figura 20	Órbita estável em $z = 0$, $M = 3$ e $L = 16$, (a) $\rho = 1.1$ (b) $\rho = 1.329$ (c) $\rho = 1.4$	40
Figura 21	Variação de ε^2 com relação a massa total do sistema e da distância entre os objetos massivos	49
Figura 22	Potenciais Efetivos (newtoniano e pós-newtoniano sobrepostos), Sistema Binário de Anãs Brancas $M=1.2M_\odot$, $\mu_1 = 0.6$, $\mu_2 = 0.6$, $a = 14 \times 10^6\text{m}$	51
Figura 23	Recorte em $y = 0$ do Potenciais Efetivos (newtoniano em verde e pós-newtoniano em vermelho, sobrepostos), Sistema Binário de Anãs Brancas $M=1.2M_\odot$, $\mu_1 = 0.6$, $\mu_2 = 0.6$, $a = 14 \times 10^6\text{m}$	51
Figura 24	Potenciais Efetivos (newtoniano e pós-newtoniano sobrepostos), Sistema Binário de Estrelas de Nêutrons $M=2.8M_\odot$, $\mu_1 = 1.4$, $\mu_2 = 1.4$, $a = 1.9501 \times 10^7\text{m}$	53
Figura 25	Potenciais Efetivos (newtoniano e pós-newtoniano sobrepostos), Sistema Binário de Estrelas de Nêutrons $M=2.8M_\odot$, $\mu_1 = 1.4$, $\mu_2 = 1.4$, $a = 1.9501 \times 10^7\text{m}$	53

Figura 26	Potenciais Efetivos (newtoniano e pós-newtoniano), Sistema Binário de Estrelas de Nêutrons $M=2.8M_{\odot}$, $\mu_1 = 1.4$, $\mu_2 = 1.4$, $a = 1.9501 \times 10^6\text{m}$	54
Figura 27	Potenciais Efetivos (newtoniano e pós-newtoniano), Sistema Binário de Estrelas de Nêutrons $M=2.8M_{\odot}$, $\mu_1 = 1.4$, $\mu_2 = 1.4$, $a = 0.39002 \times 10^5\text{m}$	54
Figura 28	Potenciais Efetivos (newtoniano e pós-newtoniano sobrepostos), Sistema Binário de Buracos Negros $M=13M_{\odot}$, $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 10$, $a = 1.9501 \times 10^9\text{m}$	55
Figura 29	Potenciais Efetivos (newtoniano e pós-newtoniano), Sistema Binário de Buracos Negros $M=13M_{\odot}$, $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 10$, $a = 1.9501 \times 10^5\text{m}$	56
Figura 30	Potenciais Efetivos (newtoniano e pós-newtoniano), Sistema Binário de Buracos Negros $M=40M_{\odot}$, $\mu_1 = 20$, $\mu_2 = 20$, $a = 0.59052 \times 10^6\text{m} \sim 10 r_s$	57
Figura 31	Curvas de velocidade zero. Sistema Binário de Anãs Brancas $M=1,2M_{\odot}$, $\mu_1 = 0.6$, $\mu_2 = 0.6$, $a = 14 \times 10^6\text{m}$. (a) $C_j = 20 \times 10^{-4}$, (b) $C_j = 25 \times 10^{-4}$ e (c) $C_j = 30 \times 10^{-4}$	58
Figura 32	Curvas de velocidade zero. Sistema Binário de Buracos Negros $M=40M_{\odot}$, $\mu_1 = 20$, $\mu_2 = 20$, $a = 0.59052 \times 10^6\text{m} \sim 10 r_s$. (a) $C_j = 0.20$, (b) $C_j = 0.22$ e (c) $C_j = 0.30$	58
Figura 33	Curvas de velocidade zero. Sistema Binário de Buracos Negros $M=40M_{\odot}$, $\mu_1 = 20$, $\mu_2 = 20$, $a = 0.59052 \times 10^6\text{m} \sim 10 r_s$ e $C_j = 0.22$. (a) Limite newtoniano, (b) Aproximação pós-newtoniana	59

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Sistemas binários de Anãs Brancas	50
Tabela 2 – Sistemas binários de Estrelas de Nêutrons	52
Tabela 3 – Sistemas binários de Buracos Negros	55
Tabela 4 – Sistemas binários de Buracos Negros	56

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MP	Majumdar-Papapetrou
RN	Reissner-Nordstrom
BH(s)	Black Hole(s) - Buraco(s) Negro(s)
1PN	Aproximação pós-newtoniana
r_s	Raio de Schwarzschild
UNESP	Universidade Estadual Paulista

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	FUNDAMENTAÇÕES DA RELATIVIDADE GERAL	17
2.1	Equações de Campo de Einstein	17
2.2	Geodésicas	19
2.3	Espaço-Tempo de Schwarzschild	19
2.4	Outras Métricas	20
2.4.1	Limite Newtoniano	20
2.4.2	Reissner-Nordström (1916-1921)	21
3	PROBLEMA RESTRITO DE 3 CORPOS NEWTONIANO	22
4	SOLUÇÃO DE MAJUMDAR-PAPAPETROU (1967)	29
4.1	Análise dos casos para planos fixos em $\phi = 0$ e $z = 0$	30
4.1.1	Plano $\phi = 0$	30
4.1.2	Plano $z = 0$	31
4.2	Resultados	33
4.2.1	Plano $\phi = 0$	33
4.2.2	Plano $z = 0$	35
4.2.2.1	Geodésicas do tipo-luz	35
4.2.2.2	Geodésicas do tipo-tempo	38
5	LIMITE NEWTONIANO E APROXIMAÇÃO PÓS-NEWTONIANA	41
5.1	Problema restrito de três corpos descrito pela métrica newtoniana	41
5.2	Aproximação Pós-Newtoniana	42
6	ANÁLISE E RESULTADOS	49
6.1	Anãs Brancas	50
6.2	Estrelas de Nêutrons	52
6.3	Buracos Negros	55
6.4	Curvas de velocidade zero	57
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS	60
	REFERÊNCIAS	61

1 INTRODUÇÃO

Desde que foram observadas as ondas gravitacionais e a primeira fotografia de um buraco negro (BH) foi divulgada, o interesse em estudar objetos massivos tais como buracos negros (BHs), estrelas de nêutrons, etc, tem crescido muito no meio científico. As possibilidades e expectativas que temos no futuro da área de astrofísica vem aumentando cada vez mais com a concretização de resultados empíricos, diminuindo a distância entre o teórico e o prático. Tais eventos, que permearam nos últimos anos o meio científico, contribuíram para motivar o desenvolvimento deste trabalho.

A observação do céu é uma admiração intrínseca do ser humano, que por anos nos ajudou de forma prática nas decisões do nosso cotidiano. Durante as eras nossos olhos conseguiram alcançar mais do que nossa ideia podia conceber, e desenvolvemos toda uma ciência para explicar aquilo que era observado (PAPASPIROU; MOUSSAS, 2013) a teoria evoluiu mais rápida do que os métodos empíricos e muitas das teorias criadas anos atrás foram corroboradas somente nos dias de hoje com modernos experimentos, tal qual a detecção de ondas gravitacionais (ABBOTT et al., 2017). A possibilidade de fazer parte deste meio e contribuir com um tijolo de conhecimento na construção dessa ciência já é uma motivação imensa para a realização deste trabalho como um todo.

A abordagem deste trabalho foca no estudo de um sistema binário de objetos compactos, tendo como objetivo o estudo do problema restrito de três corpos em duas abordagens, uma através do espaço-tempo de MP e outra através da aproximação 1PN. Tal problema tem intrigado matemáticos e físicos há décadas, ele se trata de uma simplificação do problema de três corpos (Formulado por Euler em 1772) no qual admitimos três objetos no espaço que interagem gravitacionalmente. Ao restringirmos o problema consideramos agora duas massas grandes que orbitam seu centro de massa em um movimento circular e uma partícula, que não afeta gravitacionalmente as duas primeiras massas, mas sofre a influência gravitacional delas. Para o caso newtoniano do problema muitos estudos foram realizados, em particular vale citar aqueles que tratam da estabilidade dos pontos de Lagrange (CELLETTI; GIORGILLI, 1990), pois nos trazem resultados de aplicação imediata em sistemas como: sol-Terra-lua, Terra-lua-objetos espaciais, sol-Júpiter-asteroides, etc (MUSIELAK; QUARLES, 2014).

O trabalho inicia com uma breve recapitulação de conceitos gerais de relatividade geral no capítulo 2, onde veremos a construção das equações de campo de Einstein, a construção das equações da geodésica e algumas métricas resultantes, tal qual o espaço-tempo de Schwarzschild (CARLIP, 2019).

Como dito, a base do problema restrito de três corpos newtoniano é bem conhecida atualmente (FRNKA, 2010). Partiremos de concepções criadas por Newton e evoluiremos nosso entendimento até chegar as teorias de Einstein. No capítulo 3 iremos desenvolver o problema restrito de três corpos newtoniano tendo como objetivo observar o comportamento de um potencial efetivo ligado ao terceiro corpo (MURRAY, 1999) (SYMON, 1996).

Começaremos nossa abordagem relativística por analisar o sistema binário de BHs por meio da métrica de Majumdar-Papapetrou (MP), capítulo 4. O espaço-tempo de MP (Majumdar-Papapetrou), descreve n BHs em equilíbrio estático, levando em conta que os mesmos estão maximalmente carregados (MAJUMDAR, 1947), (HARTLE; HAWKING, 1972) e (PAPAPETROU, 1947). Essa métrica

simplifica a abordagem de um sistema binário de BHs, pois o considera estático no espaço. Utilizando as condições impostas pelo espaço-tempo de MP, dois casos de geodésicas do tipo-luz e do tipo-tempo serão estudados, as órbitas contidas no plano $\phi = 0$ e $z = 0$. Fazendo o uso de métodos numéricos verificaremos a existência de órbitas contidas em $\phi = 0$, as quais se resumem em três tipos: órbitas que englobam ambos os horizontes de eventos, órbitas que englobam apenas um horizonte de evento e órbitas em formato de oito englobando ambos os horizontes de eventos (ASSUMPÇÃO et al., 2018).

Já para o caso de órbitas contidas em $z = 0$ existem mais possibilidades de análise, vide (ASSUMPÇÃO et al., 2018) e (TAKEDA, 2020). Partiremos de uma análise da Lagrangiana do sistema, tomaremos duas quantidades conservadas do sistema para observar o potencial efetivo. Dessa forma poderemos entender a estabilidade das órbitas (TAKEDA, 2020). As estabilidades das órbitas serão observadas posteriormente por métodos numéricos, utilizando um software de computação matemática, Sage-Math¹ (The Sage Developers, 2022).

Após definirmos como as geodésicas se comportam no espaço-tempo de MP poderemos prosseguir com a extensão do nosso estudo para uma aproximação pós-newtoniana (1PN). Como parte do nosso objetivo a descrição de um sistema binário se dará pela obtenção da Lagrangiana do problema restrito de três corpos, considerando aproximações pós-newtonianas da relatividade geral (1PN) (HUANG; MEI; HUANG, 2018).

O problema relativístico restrito de três corpos já vem sendo estudado e traz uma descrição mais acurada do nosso sistema solar (MAINDL; DVORAK, 1994), as análises relativísticas do problema obedecem às mesmas relações de simetria que as equações clássicas. Nossa primeira abordagem no capítulo 5 será a construção do problema restrito de três corpos tendo em vista a aproximação newtoniana e a obtenção de resultados. Partiremos das equações de campo de Einstein e obteremos uma Lagrangiana que representa nosso sistema (LANDAU, 2000) e (HUANG; MEI; HUANG, 2018).

Para essa abordagem utilizaremos o método analítico, que será corroborado por uma análise computacional. A análise analítica nos dará o alicerce para entendermos a órbita do terceiro corpo, quantificando sua energia e o potencial efetivo, e a análise computacional corrobora esse entendimento possibilitando observar órbitas que envolvem os corpos, além de estender a nossa visão das geodésicas de forma mais prática e pragmática. Ainda no capítulo 5, iremos desenvolver a métrica pós-newtoniana que será utilizada no futuro para análises similares feitas no caso MP.

A partir do potencial efetivo do sistema pretendemos comparar os efeitos gravitacionais que estão presentes em uma abordagem relativística, em contrapartida com uma abordagem newtoniana de sistemas físicos. No capítulo 6 com base nas dimensões das grandezas envolvidas estipularemos um alcance de validade para o estudo de sistemas físicos a partir de uma abordagem que vise a aproximação pós-newtoniana (1PN).

Com esse estudo visamos criar uma fundamentação teórica que possa nos fornecer uma base para futuras observações de sistemas binários compactos e também para a exploração dos mesmos no futuro. A partir da análise de casos extremos podemos avançar nosso conhecimento a cerca do universo que habitamos.

¹ <https://www.sagemath.org/>

2 FUNDAMENTAÇÕES DA RELATIVIDADE GERAL

O desenvolvimento da física moderna se deu pela concepção de duas teorias fundamentais, a teoria quântica e a teoria da relatividade geral. Neste trabalho precisaremos de uma fundamentação teórica para o estudo relativístico do nosso sistema. Começaremos com uma visão geral das equações de campo de Einstein e conseqüentemente uma correlação com a equação da geodésica. E por fim uma exposição de métricas diversas que nos ajudarão a exemplificar o contexto em que trabalharemos.

2.1 EQUAÇÕES DE CAMPO DE EINSTEIN

Esse trabalho se baseia na estruturação da teoria da relatividade geral. Albert Einstein em 1915 publicou seu trabalho que trazia uma nova concepção de gravidade. A gravidade antes vista como uma força, concebida por Newton, passava agora a ser uma causa natural da deformação do espaço-tempo, e este por sua vez se deformava pela presença do conteúdo material. As famosas equações de campo de Einstein são mostrada a seguir:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.1.1)$$

Em que $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein que descreve toda curvatura do espaço-tempo, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, R é o escalar de curvatura, G é a constante gravitacional de Newton e c é a velocidade da luz.

Tal equação estabelece a dinâmica da teoria. Em suma, o espaço-tempo é considerado uma variedade (D'INVERNO, 1992), dotada de uma métrica $g_{\mu\nu}$, que se deforma na presença do conteúdo material descrita pelo tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$. Tal deformação é descrita pelo tensor de Einstein ($G_{\mu\nu}$). As equações de campo de Einstein nos dão um conjunto de dez equações diferenciais parciais não lineares e não independentes.

A equação de Einstein é obtidas a partir da ação de Einstein-Hilbert. O princípio da mínima ação é surpreendente, pois a partir dele podemos deduzir vários conceitos da física, entre eles as equações de campo de Einstein. O que precisamos pensar é em uma ação que contemple a geometria do espaço-tempo. A ação é uma integral de uma função que possua variáveis dinâmicas e de suas derivadas, chamado de funcional, sobre todo um espaço-tempo. Neste caso, nossas variáveis serão a métrica $g_{\mu\nu}$ e conseqüentemente a conexão. A ação é um funcional, e é definida a partir do princípio de Hamilton (LEMO, 2007). Vários campos da física podem ser expressos partindo de uma ação conveniente. O conceito de ação está ligado diretamente ao conceito da Função de Lagrange. A ação é definida como sendo a integral da Lagrangiana em relação ao tempo. Precisaremos considerar algumas condições para a definição da ação (CARLIP, 2019).

- 1- A parte gravitacional da ação deve depender unicamente da geometria. Não devendo existir uma coordenada privilegiada.
- 2- A geometria deve ser da forma Pseudo-Riemanniana

- 3- Para assegurar que as equações de movimento possuam segundas derivadas a ação deve ser linear em segunda ordem.

Desta forma é definida nossa ação:

$$S = \int \sqrt{-g} d^4x \left(\frac{c^4}{16\pi G} R + \mathcal{L}_{\mathcal{M}} \right). \quad (2.1.2)$$

Note que a raiz quadrada do determinante da métrica aqui é parte do elemento de volume. Esse é o requisito para trabalharmos com um espaço-tempo curvo e $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ é lagrangiana associada ao conteúdo material, tomaremos a variação da ação com respeito ao tensor $g_{\mu\nu}$.

Nosso próximo passo é o de extremizar a equação (2.1.2), resultando em:

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{c^4}{16\pi G} \frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathcal{M}})}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.1.3)$$

Colocando a raiz quadrada da métrica em evidência e usando a regra do produto no termo com o escalar de Ricci (R) obtemos:

$$\delta S = \int \sqrt{-g} d^4x \left(\frac{c^4}{16\pi G} \left(\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{R}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \sqrt{-g}}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathcal{M}})}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.1.4)$$

Concentrando-se no primeiro termo, usando a definição de um escalar de Ricci como uma contração do tensor de Ricci, utilizaremos o teorema de Stokes para concluir que a derivada total sobre o tensor de Ricci não contribui para a variação do funcional. Desta forma

Definimos o tensor energia-momento como:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_{\mathcal{M}})}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} T_{\mu\nu}. \quad (2.1.5)$$

A variação da ação de Hilbert estará em um extremo quando o integrando for igual a zero. Desta forma temos:

$$\frac{c^4}{16\pi G} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) - \frac{1}{2} T_{\mu\nu} = 0, \quad (2.1.6)$$

que se reduz as equações de campo de Einstein (2.1.1).

De acordo com Einstein, uma partícula não está sob a ação da força da gravidade e sim está em queda livre seguindo a deformação do espaço-tempo ocasionada pelo conteúdo material que a ocupa. Com isso a nossa partícula segue um movimento através de uma geodésica. Geodésicas são curvas extremizadas, que possuem o menor comprimento, entre dois pontos. Uma geodésica em um espaço-tempo plano corresponde a um segmento de reta. A depender do formato dos nossos espaços-tempos teremos geodésicas diferentes, são elas que nos darão as equações de movimento, principal componente a ser estudado.

2.2 GEODÉSICAS

Partículas se movendo em queda livre irão descrever suas trajetórias baseadas nas geodésicas definidas no espaço-tempo. Tais equações têm uma importância especial em relatividade geral. Iremos a partir do princípio da mínima ação, visto anteriormente para a dedução das equações de campo de Einstein, derivar as equações da geodésica.

Definimos primeiramente nossa ação:

$$S = \int d\lambda \mathcal{L}. \quad (2.2.1)$$

Dada a Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \quad (2.2.2)$$

Onde $\dot{x}^\mu$ é a derivada das nossas coordenadas, espaciais e temporal, com respeito ao parâmetro afim λ . Extremizaremos nossa ação fazendo com que sua variação seja zero,

$$\delta S = 0. \quad (2.2.3)$$

Isto implica na equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha}. \quad (2.2.4)$$

Após algumas manipulações matemáticas da equação (2.2.4) a equação da geodésica se reduz a:

$$\ddot{x}^\gamma + \Gamma_{\mu\nu}^\gamma \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \quad (2.2.5)$$

Com a definição do símbolo de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\gamma$ sendo:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\beta} (\partial_\nu g_{\mu\beta} + \partial_\mu g_{\nu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}). \quad (2.2.6)$$

2.3 ESPAÇO-TEMPO DE SCHWARZSCHILD

A solução de Schwarzschild foi a primeira solução exata para as equações de campo de Einstein (2.1.1), foi encontrada pelo físico Karl Schwarzschild o qual nomeia esta solução. Ela descreve o campo gravitacional externo a um corpo esférico estático, ou seja, sem rotação de massa. Essa solução toma a solução trivial para o espaço-tempo plano como ponto de partida. Trata-se de uma boa aproximação para campos gravitacionais de corpos de lenta rotação como a Terra ou Sol. O conceito de buraco negro (BH) surge desta solução. O BH de Schwarzschild não possui carga nem mesmo momento angular, a única diferença entre os BHs são suas massas. O BH de Schwarzschild possui o que chamamos de horizonte de eventos, na verdade, o BH se caracteriza por esta região, localizada sobre o raio de Schwarzschild, definido por (2.3.2), o horizonte de eventos é fronteira na qual a gravidade é tão intensa que nem mesmo a luz pode escapar de sua influência. Um objeto que tenha sua dimensão menor que o seu raio de Schwarzschild é necessariamente um BH, de maneira

que toda a massa se concentre em um ponto singular. Alguns testes da relatividade geral usaram a métrica de Schwarzschild, tais como, o deslocamento de linhas espectrais pela presença do campo gravitacional, o desvio dos feixes de luz que passam próximo a estrelas e a precessão do periélio de Mercúrio.

Por fim apresentamos a métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 + r^2 \sin^2 \phi d\theta, \quad (2.3.1)$$

onde M é a massa do objeto estudado e r é a distância radial do mesmo, o raio de Schwarzschild r_s é definido como:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (2.3.2)$$

A métrica de Schwarzschild é uma métrica esfericamente simétrica, devido às condições impostas em sua dedução. Estacionária e estática, devido ao teorema de Birkoff. Ela é assintoticamente plana, ou seja, tende à métrica de Minkowski para grandes distâncias. Existe a presença de uma singularidade em $r = 0$ e uma singularidade aparente em $r = r_s$, que pode ser eliminada por uma transformação de coordenadas, sendo definida como o horizonte de evento.

Uma partícula em órbita sob a métrica de Schwarzschild pode ter uma órbita circular estável caso $r > 3r_s$, órbitas circulares instáveis caso $3/2r_s > r > 3r_s$ e não apresentar órbitas circulares estáveis caso $r < 3/2r_s$ (NOZARI; AKHSHABI; SADEGHNEZHAD, 2008).

No decorrer do amadurecimento da relatividade geral, foi se encontrando várias outras métricas, cada uma focada em uma característica do problema. Citaremos algumas delas para efeito de exemplificação.

2.4 OUTRAS MÉTRICAS

O estudo das equações de campo de Einstein (2.1.1) nos guiou a várias soluções, cada uma delas se concentra em um caso específico e todas elas desempenham um papel fundamental para o desenvolvimento teórico. A métrica newtoniana proveniente de uma aproximação da relatividade para as concepções de Newton terá papel importante em nosso estudo, visto que sua segunda aproximação será contemplada neste trabalho, tal qual a métrica de Reissner-Nordström que nos introduz a ideias utilizadas durante o estudo da métrica Majumdar-Papapetrou. Como vimos anteriormente, a métrica de Schwarzschild foi a primeira solução outras soluções advieram com o tempo estudá-las nos ajuda a remontar o percurso teórico feito pelos cientistas que as nomeiam.

2.4.1 Limite Newtoniano

A métrica newtoniana é uma métrica que nos dá os resultados para uma aproximação newtoniana dos corpos estudados, ou seja, ela cria o limite entre a física relativística e a física clássica de Newton. Sabemos que a relatividade geral pode, para casos mais simples, reproduzir as análises newtonianas. Para encontrarmos a métrica newtoniana utiliza-se o fato de que a mesma depende do potencial gravitacional de Newton e considerar que ela apenas reproduz soluções para objetos com velocidade

muito baixas, comparadas com a velocidade da luz. O elemento de linha resultante dessas aproximações é:

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.4.1)$$

Esse resultado pode ser considerado o “teste zero” para relatividade geral. Pois, para prevermos correções para a gravidade newtoniana precisamos antes conseguir reproduzir as previsões criadas pela teoria da gravitação newtoniana. Outros testes validaram a relatividade geral, tais como: a precessão de Mercúrio, deflexão da luz, atraso temporal e o *redshift* devido à gravitação.

2.4.2 Reissner-Nordström (1916-1921)

Outra das tantas soluções para as equações de campo de Einstein é a de Reissner-Nordstrom (RN), descoberta por volta dos anos 1920 por Hans Reissner, Hermann Weyl, Gunnar Nordstrom e Georg aker Jeffery. Esta solução nos dá um campo gravitacional gerado por um BH carregado, esfericamente simétrico e estático. Desta vez pelo fato do BH estar carregado novos fenômenos irão aparecer, por exemplo, o horizonte de Cauchy, sendo um dos horizontes de evento do BH de Reissner-Nordstrom (NORDSTRÖM, 1918) e (REISSNER, 1916). A métrica de RN é dada por:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.4.2)$$

Propriedades da Solução de Reissner-Nordstrom:

- Simétrica no eixo axial;
- Estacionária e estática;
- Assintoticamente Plana;
- Reduz a Schwarzschild com $Q = 0$;

Para esta solução das equações de campo de Einstein temos 3 casos possíveis de estudo, quando a massa dos BHs é igual a carga $M = |Q|$, quando a massa é menor que a carga $M < |Q|$, quando a massa é maior que a carga $M > |Q|$. Por possuir simetria esférica é conveniente tomarmos uso deste sistema de coordenadas.

3 PROBLEMA RESTRITO DE 3 CORPOS NEWTONIANO

Observando nosso sistema Solar verá a existência de vários objetos, sejam eles grandes como o Sol e Júpiter ou pequenos tais quais asteroides. Descrever de um ponto de vista dinâmico um sistema tão numeroso de objetos pode ser uma difícil tarefa. Os astrofísicos se referem a esses sistemas gravitacionais como o problema dos n-corpos os quais são desafiadoramente importante serem estudados. O problema de n-corpos consiste em estabelecer o movimento futuro de todos os n-corpos do sistema, sendo influenciados pelas gravidades uns dos outros. Embora tenhamos equações que podem prever completamente os movimentos de duas massas gravitacionais, nossas ferramentas analíticas ficam aquém quando confrontadas com sistemas mais populosos. Na verdade, é impossível escrever todos os termos de uma fórmula geral que possa descrever exatamente o movimento (posição e velocidade) de três ou mais objetos gravitacionais atraídos mutualmente (FRNKA, 2010). Tal fato se dá pela quantidade de variáveis desconhecidas que há no sistema de n-corpos. Graças a Isaac Newton, podemos escrever um conjunto de equações para descrever a força gravitacional que atua entre os corpos. No entanto, ao tentar encontrar uma solução geral para as variáveis desconhecidas nessas equações, nos deparamos com uma restrição matemática: para cada incógnita, deve haver pelo menos uma equação que a descreva independentemente .

Inicialmente, um sistema de dois corpos parece ter mais variáveis desconhecidas para posição e velocidade do que equações de movimento. No entanto, há um recurso em que consideramos a posição relativa e a velocidade dos dois corpos em relação ao centro de gravidade do sistema. Isso reduz o número de incógnitas e nos deixa com um sistema solucionável.

Com três ou mais objetos em órbita, tudo fica mais confuso. Mesmo com o mesmo recurso matemático de considerar movimentos relativos, ficamos com mais incógnitas do que equações que os descrevem. Existem simplesmente muitas variáveis para que este sistema de equações seja desembaraçado em uma solução geral.

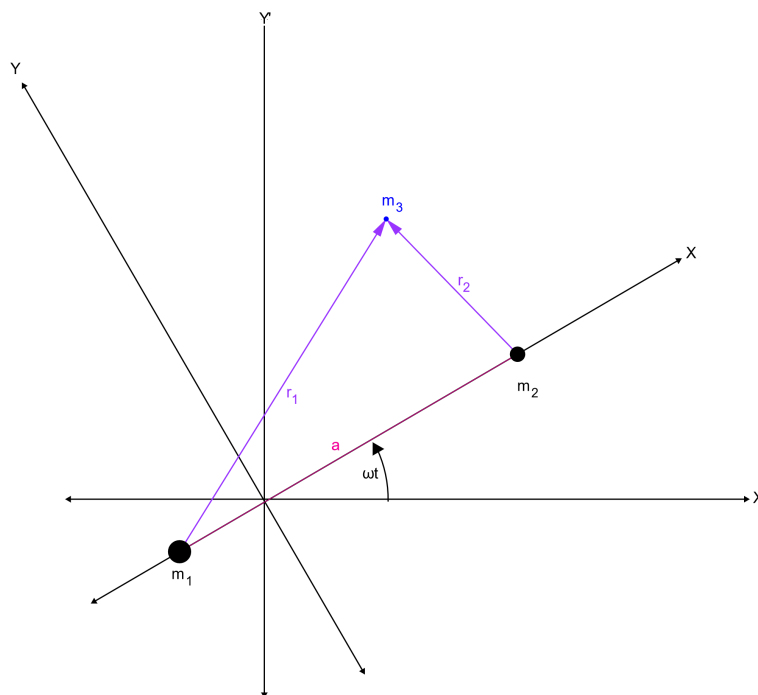
Isso significa que a estabilidade de um sistema de três corpos é improvável para casos onde as escalas de tempo são consideradas grandes (Milhões/Bilhões de anos) (YAMADA, 2014). A aparente estabilidade de um sistema triplo, como Alpha Centauri, pode ser substituída por um caso onde os objetos se colidam ou são ejetados do sistema. Mas exceto por alguns casos improváveis de estabilidade todos os casos possíveis são imprevisíveis em longas escalas de tempo. Cada um tem uma gama astronômica de resultados potenciais, dependentes da menor das diferenças de posição e velocidade. Esse comportamento é conhecido como caótico pelos físicos e é uma característica importante dos sistemas de n-corpos. Tal sistema ainda é determinista, o que significa que não há aleatoriedade nele. Se vários sistemas começarem exatamente nas mesmas condições, eles sempre alcançarão o mesmo resultado. Mas dê uma pequena variação nas condições iniciais e todas as previsões serão canceladas. Isso é claramente relevante para missões espaciais humanas, quando órbitas complicadas precisam ser calculadas com grande precisão.

Felizmente, os avanços contínuos nas simulações de computador oferecem várias maneiras de evitar catástrofes. Ao aproximar as soluções com processadores cada vez mais poderosos, podemos

prever com mais confiança o movimento de sistemas de n-corpos em longas escalas de tempo. E se um corpo em um grupo de três é tão leve que não exerce nenhuma força significativa sobre os outros dois, o sistema se comporta, com muito boa aproximação, como um sistema de dois corpos. Essa abordagem é conhecida como o “problema restrito de três corpos”. Ele se mostra extremamente útil para descrever, por exemplo, um asteroide no campo gravitacional Terra-Sol, ou um pequeno planeta no campo de um BH e uma estrela ou mesmo um corpo em um sistema binário de BHs.

Vamos agora estabelecer o problema restrito de três corpos. Partiremos das energias associadas ao terceiro corpo. Para iniciarmos devemos considerar três corpos, e um deles terá massa negligenciável em comparação com os outros. É estabelecido que o movimento obedecido pelos corpos massivos é de segue uma órbita circular em torno do seu centro de massa, isto simplificará nosso problema. Consideraremos ainda que todo o movimento se restringe ao plano X-Y e o centro de massa dos dois objetos massivos está na origem do nosso sistema de coordenadas. Desta forma, dadas as condições iniciais devemos ter a possibilidade de prever o movimento do terceiro corpo, que será influenciado pelos outros dois gravitacionalmente.

Figura 1 – Disposição do problema restrito de três corpos, m_1 e m_2 corpos massivos, X' e Y' referencial inercial



fonte: Autoria própria

Na Figura 1 podemos observar um esquema do problema restrito de três corpos onde m_1 e m_2 são os corpos massivos, X' e Y' é o referencial inercial, X e Y referencial não inercial ou referencial girante. Desta forma podemos escrever a energia cinética e potencial como segue:

$$T = \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2), \quad (3.0.1)$$

$$V = -\frac{Gm_3m_1}{r_1} - \frac{Gm_3m_2}{r_2}, \quad (3.0.2)$$

$$r_1' = \sqrt{(x' - x_1')^2 + (y' - y_1')^2} \quad e \quad r_2' = \sqrt{(x' - x_2')^2 + (y' - y_2')^2}, \quad (3.0.3)$$

onde r_1' e r_2' são as distâncias entre a massa m_3 e os corpos massivos e $\dot{x}'$ e $\dot{y}'$ são as velocidades correspondentes as nossas coordenadas atuais (referencial inercial), e as derivadas são dadas com relação ao tempo t .

Definimos a partir das energias apresentadas (3.0.1 e 3.0.2), nossa Lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}m_3(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2) - \frac{Gm_3m_1}{r_1} - \frac{Gm_3m_2}{r_2}. \quad (3.0.4)$$

É importante lembrar que no caso acima os corpos massivos estão em uma órbita circular em torno do seu centro de massa, ou seja, devemos considerar esta movimentação, na descrição do movimento de m_3 . Tal fato nos intui a mudar para um sistema de coordenadas girante, que acompanhe o movimento dos objetos massivos, eixos X e Y na Figura 1. Para essa transformação tomaremos novas coordenadas x e y de tal forma que podemos expressá-las da seguinte forma:

$$x(t) = x' \cos wt - y' \sin wt, \quad (3.0.5)$$

$$y(t) = y' \cos wt + x' \sin wt, \quad (3.0.6)$$

onde w é a velocidade angular dos corpos massivos.

Após algumas manipulações matemáticas chegamos a uma nova Lagrangiana.

$$L = \frac{1}{2}m_3 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2xw\dot{y} - 2yw\dot{x} + w^2 (x^2 + y^2)) - \frac{Gm_3m_1}{r_1} - \frac{Gm_3m_2}{r_2}. \quad (3.0.7)$$

Esta é a Lagrangiana que descreve o problema restrito de três corpos em um referencial girante (r_1 e r_2 são as distâncias nas coordenadas x e y), na sua forma clássica. A parte referente a energia cinética possui termos provenientes das forças inerciais, $2xw\dot{y}$ e $2yw\dot{x}$ força de Coriolis e $w^2 (x^2 + y^2)$ força centrífuga. A partir desta Lagrangiana podemos obter, pela equação de Euler-Lagrange as equações de movimento de m_3 .

Alguns passos intermediários na derivação das equações de movimento são necessários conforme descrito em (FRNKA, 2010). Por fim teremos que as equações do movimento podem ser escritas como (FRNKA, 2010):

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + x - \frac{(1 - \mu)(x + \mu)}{r_1^3} - \frac{\mu(x - 1 + x)}{r_2^3}, \quad (3.0.8)$$

$$\ddot{y} = -2\dot{x} + y - \frac{(1 - \mu)y}{r_1^3} - \frac{(\mu y)}{r_2^3}. \quad (3.0.9)$$

Onde neste caso r_1 e r_2 serão reescritos abaixo como:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}, \\ r_2 &= \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2}, \end{aligned} \quad (3.0.10)$$

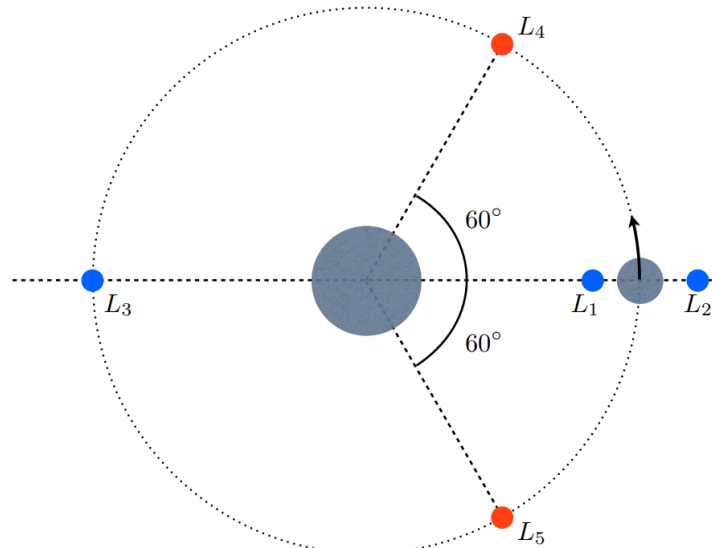
e

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.0.11)$$

Observamos que as equações de movimento não são intuitivas e a partir de simulações observamos uma caoticidade no comportamento das equações (FRNKA, 2010). Percebemos também que a aceleração do corpo depende de três termos, dois deles referentes as forças inerciais, a força de Coriolis e a força centrípeta, e por fim a força gravitacional. A força de Coriolis atua em uma direção perpendicular ao eixo de rotação e à velocidade do corpo no referencial girante e é proporcional a velocidade do objeto no referencial giratório. A força centrífuga atua para fora na direção radial. Os dois primeiros termos das acelerações (3.0.8 e 3.0.9) são referentes as forças de Coriolis e centrífuga respectivamente.

Um estudo subsequente que pode ser feito é a análise dos pontos de Lagrange. Os pontos de Lagrange são cinco pontos, caracterizados pela existência de um equilíbrio entre as forças, de tal forma a manter um corpo estável neste ponto em relação ao referencial girante (WIDNALL; DEYST; GREITZER, 2008). Um esquema desses pontos pode ser observado na Figura 2.

Figura 2 – Pontos lagrangianos em torno de dois corpos massivos. Os dois discos cinzas são dois corpos massivos. L_1 , L_2 e L_3 (discos azuis) correspondem à solução colinear de Euler e L_4 e L_5 (discos vermelhos) são a solução triangular equilátero de Lagrange.



fonte: YAMADA (2014)

Estar nos pontos de Lagrange significa dizer que o objeto está em repouso em relação ao referencial girante, o que implica em tomarmos as velocidades e aceleração para zero nas equações (3.0.8 e 3.0.9), dessa forma:

$$\begin{aligned} x &= \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{r_1^3} + \frac{\mu(x-1+\mu)}{r_2^3}, \\ y &= \frac{(1-\mu)y}{r_1^3} + \frac{\mu y}{r_2^3}. \end{aligned} \quad (3.0.12)$$

Utilizando as considerações de Euler na descoberta de tais pontos podemos definir suas localizações. Três desses pontos são colineares com o eixo $y = 0$ e os outros dois pontos formam triângulos equiláteros com os dois grandes corpos (WIDNALL; DEYST; GREITZER, 2008).

Para analisar a estabilidade próxima aos pontos de Lagrange tomaremos o potencial U definido como segue:

$$U = \frac{1}{2} (2xw\dot{y} - 2yw\dot{x} + w^2(x^2 + y^2)) - \frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2}. \quad (3.0.13)$$

Que pode ser reduzida da seguinte forma:

$$U = (x^2 + y^2) - 2 \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right). \quad (3.0.14)$$

Este potencial efetivo tem origem do estudo da equação (3.0.7). Simplificamos nosso potencial, escolhendo condições iniciais favoráveis, de tal forma que a equação (3.0.13) se reduza a (3.0.14), em que $\mu_1 = m_1/M$, $\mu_2 = m_2/M$, $m_1 + m_2 = M$, $x_1 = -a\mu_2$ e $x_2 = a\mu_1$. Onde a é a distância entre as massas μ_1 e μ_2 , x_1 e x_2 são as posições das massas. Escolhemos $\mu_1 = 0.2$, $\mu_2 = 0.8$, $a = 1$ e obteremos a (Figura 3).

Podemos desta forma visualizar os pontos lagrangianos a partir deste U (potencial efetivo 3.0.14) (SYMOM, 1996).

A Figura 3 demonstra a variação do potencial no plano X e Y , podemos então recorta-la com um plano em $y = 0$ para obter a Figura 4. Podemos observar na Figura 4 a existência de três pontos de equilíbrio (os picos das formas), tais pontos são referenciados como sendo os pontos de Lagrange L_1 , L_2 e L_3 , (FRNKA, 2010). A Figura 4 é um recorte da Figura 3 no plano $y = 0$. Análises aprofundadas são necessárias para o estudo da estabilidade de tais pontos.

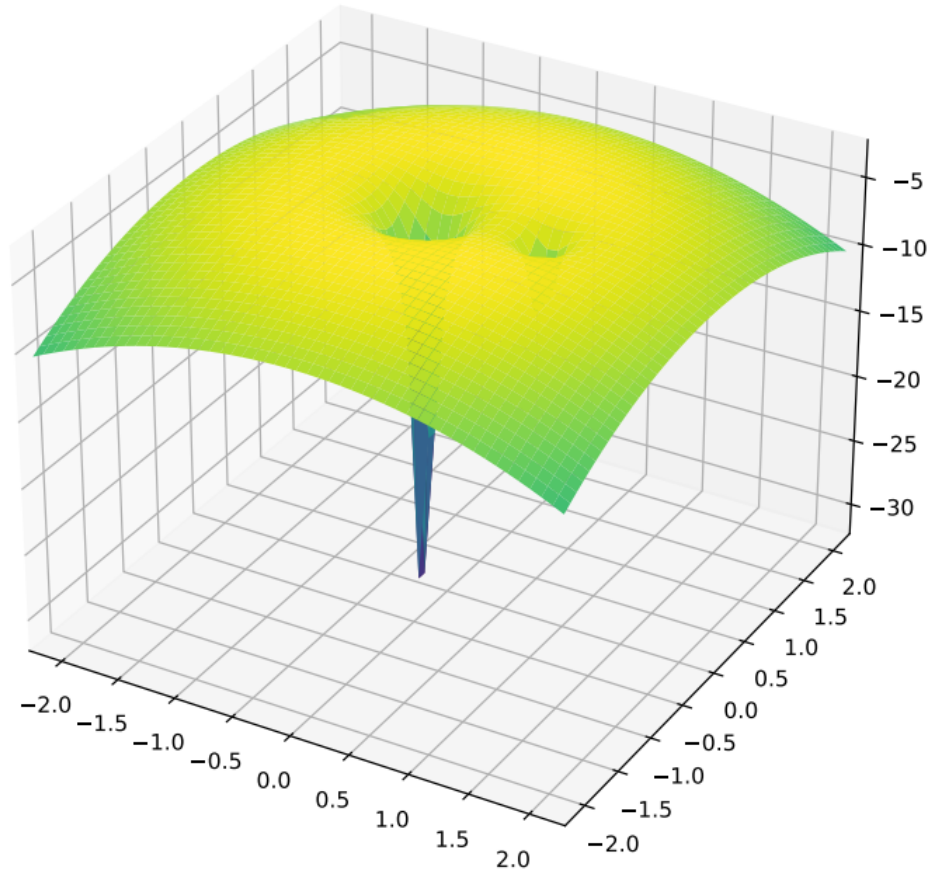
Ainda proveniente da a equação (3.0.7) podemos obter uma relação interessante expressa a seguir (MURRAY, 1999), em que C_J é uma constante do movimento conhecida como constante de Jacobi. Ao estudarmos o problema de três corpos em um referencial girante introduzimos algumas forças inerciais o que nos resulta na não conservação de energia e momento, desta forma a constante de Jacobi (também conhecida como integral de Jacobi) é a única quantidade conservada neste sistema. Definimos C_J como:

$$C_J = \omega^2 (x^2 + y^2) + 2 \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (3.0.15)$$

Podemos rearranjar a equação (3.0.15) afim de escrevê-la da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 &= 2U - C_J, \\ v^2 &= 2U - C_J. \end{aligned} \quad (3.0.16)$$

Figura 3 – Potencial efetivo correspondente a equação 3.0.14 com $\mu_1 = 0,2$, $\mu_2 = 0,8$ e $a = 1$



fonte: Autoria própria

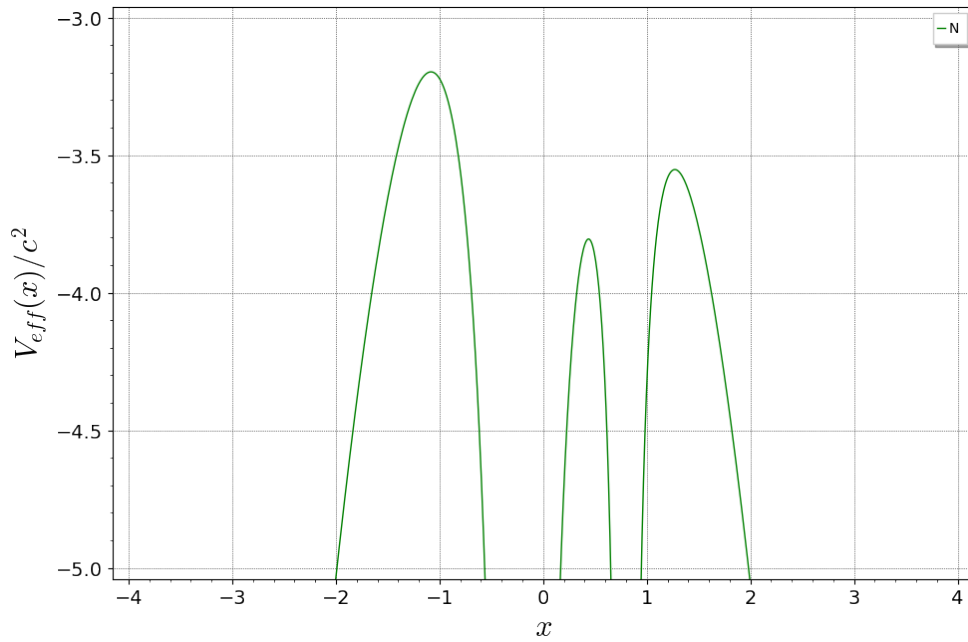
Quando considerarmos a velocidade do terceiro corpo como zero, poderemos visualizar os limites onde a velocidade deveria ser complexa criando assim duas regiões, uma na qual a partícula pode se mover e outra na qual seu movimento não é permitido. Com essa consideração podemos obter a seguinte expressão:

$$2U = C_J. \quad (3.0.17)$$

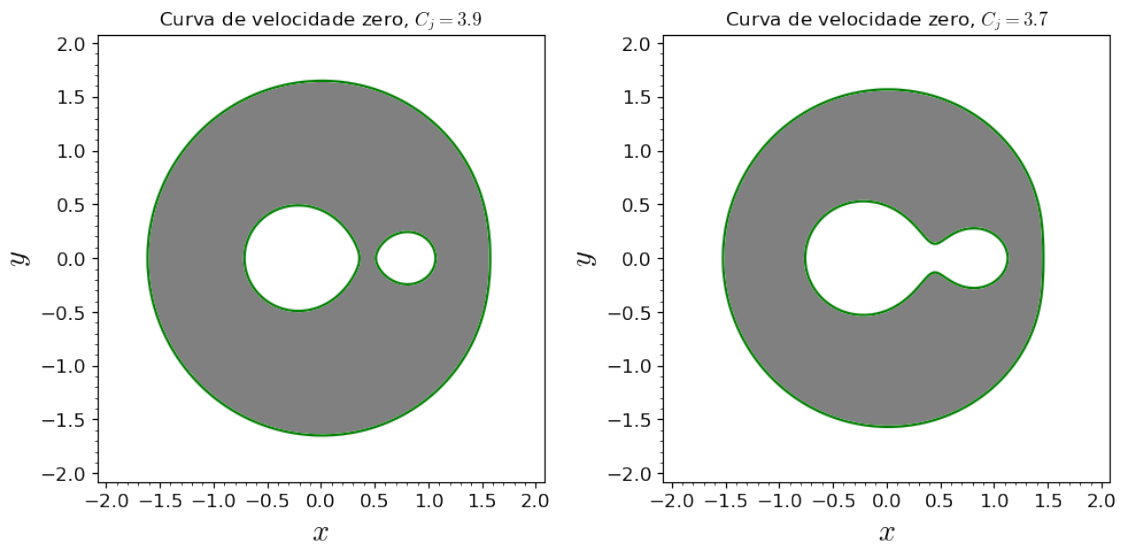
A equação (3.0.17) define um conjunto de superfícies, dados valores particulares da constante de Jacobi. Essas superfícies são conhecidas como 'curvas de velocidade zero'. Nos restringindo ao plano x-y teremos a delimitação das regiões onde o movimento da partícula não é permitido. A região de impedimento da partícula existe pelo fato de que nesta região a velocidade da mesma deveria ser complexa. A curva de velocidade zero denota uma região permitida e impedida para a partícula, no referencial girante, ela nada diz sobre a forma da trajetória do objeto. Podemos então demarcar tais regiões utilizando a equação (3.0.17), onde o nosso potencial efetivo U é descrito pela equação (3.0.14).

Como exemplo, tomaremos as condições da Figura 4 e obteremos as seguintes curvas:

Na Figura 5 as regiões sombreadas são aquelas onde não é permitido que a partícula se encontre. A linha em verde demarca o limite onde a magnitude da velocidade passaria de zero para um valor negativo, ou seja a linha em verde demarca onde a partícula possuiria velocidade zero considerando

Figura 4 – Recorte em $y = 0$ da Figura 3

fonte: Autoria própria

Figura 5 – Curvas de velocidade zero proveniente da equação 3.0.17 utilizando U proveniente da equação 3.0.14

fonte: Autoria própria

uma constante de Jacobi. Observamos então, na Figura 5 ($C_J = 3.9$ figura à esquerda) que se a partícula orbita μ_1 ela jamais poderá orbitar μ_2 ou mesmo se perder para fora do sistema. No entanto, na segunda imagem existe a possibilidade da partícula orbitar μ_1 e μ_2 , porém jamais sairá do sistema. Em ambas figuras há a possibilidade do objeto orbitar o sistema dos dois corpos, pela região externa a região sombreada.

Nosso próximo passo é pensar neste problema do ponto de vista de relativístico. Ou seja, considerar uma Lagrangiana do problema restrito de três corpos para a métrica newtoniana. O que será discutido posteriormente.

4 SOLUÇÃO DE MAJUMDAR-PAPAPETROU (1967)

A solução de MP tem um lugar especial em nossas análises, pois a partir dela definiremos as possíveis órbitas nas vizinhanças de um sistema binário de BHs. Essa solução foi descoberta em 1947 independentemente por Majumdar, um físico indiano e Papapetrou um físico grego (MAJUMDAR, 1947). A solução MP é uma das soluções exatas para a equação de Einstein-Maxwell, ela descreve n BHs em equilíbrio, com massas M_k e com carga de mesmo sinal. Por causa da relação carga-massa de cada BH, sua atração gravitacional é exatamente compensada por sua repulsão eletrostática. O espaço-tempo de MP é estática e possui simetria axial, por isso é conveniente tomarmos o uso de coordenadas cilíndricas, diferentemente do que observamos para o caso do espaço-tempo RN. A métrica MP, na verdade é um caso especial das condições de máxima eletrização de um BH ($M = |Q|$) de RN.

Apesar da nossa métrica descrever n BHs, estaremos nesse trabalho reduzindo nosso problema a dois corpos, um sistema binário de BHs. Também conhecido como "*Extreme Reissner-Nordström dihole*" esse é um caso especial da métrica MP (CHANDRASEKHAR, 1988). Para este capítulo a assinatura da métrica utilizada será $(-, +, +, +)$.

O elemento de linha na geometria MP é dado como segue:

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{U^2} + U^2 (d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2). \quad (4.0.1)$$

A métrica MP, para nossas análises, possui duas massas dispostas no eixo z . Inicialmente elas não necessariamente precisam ser iguais. Localizamos um BH em $z = a$ e outro em $z = -a$ dessa forma podemos escrever $U(\rho, z)$ da forma como se segue:

$$U(\rho, z) = 1 + \frac{m_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - a)^2}} + \frac{m_2}{\sqrt{\rho^2 + (z + a)^2}}. \quad (4.0.2)$$

Os horizontes de eventos neste caso são considerados como pontuais (HARTLE; HAWKING, 1972). Por simplificação consideramos $G = 1$ e $c = 1$ o que nos resulta em M com unidade de distância a qual se reflete na carga do BH. A Lagrangiana no espaço-tempo MP é dada por:

$$2L = -\frac{\dot{t}^2}{U^2} + U^2 (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) = -\delta, \quad (4.0.3)$$

onde a notação $\dot{t}$, $\dot{\rho}$, $\dot{\phi}$ e $\dot{z}$ representa as derivadas com respeito ao parâmetro afim e δ é uma constante, sendo $\delta = 0$ para geodésicas do tipo tempo e $\delta = 1$ para geodésicas do tipo luz.

Duas quantidades conservadas aparecem nesta Lagrangiana, obtidas a partir das equações de Euler-Lagrange as quantidades conservadas serão os momentos canônicos associados à condição de que a Lagrangiana não depende da coordenada generalizada em questão.

Equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = 0. \quad (4.0.4)$$

As quantidades conservadas são a Energia

$$E = \dot{t}/U^2, \quad (4.0.5)$$

e o momento angular

$$L_z = \dot{\phi}U^2\rho^2. \quad (4.0.6)$$

Desta forma podemos reescrever a equação da Lagrangiana (4.0.3) substituindo as equações (4.0.5 e 4.0.6). O que nos resulta na equação posterior:

$$E^2 - \dot{\rho}^2 - \dot{z}^2 - \frac{L_z^2}{U^4\rho^2} = \frac{\delta}{U^2}. \quad (4.0.7)$$

Consideramos que a equação 4.0.7 pode ser separada em uma energia cinética e energia potencial. Podemos definir nosso potencial efetivo da forma:

$$V_{eff}(\rho) = \frac{L_z^2}{U^4\rho^2} + \frac{\delta}{U^2}. \quad (4.0.8)$$

4.1 ANÁLISE DOS CASOS PARA PLANOS FIXOS EM $\phi = 0$ E $z = 0$

Para o espaço-tempo de MP existem dois casos onde as análises são mais comumente feitas, para geodésicas contidas no plano $\phi = 0$ e $z = 0$ (ASSUMPÇÃO et al., 2018). Utilizando as equações acima iremos agora ter uma visão geral das soluções para o caso MP levando em conta a fixação dos planos.

4.1.1 Plano $\phi = 0$

Quando escolhemos manter a órbita confinada a $\phi = 0$ é de forma arbitrária, pois qualquer escolha de ângulos teriam o mesmo resultado. Desta forma estudaremos o movimento das geodésicas confinadas ao plano meridiano.

Para uma separação arbitrária dos BHs as equações das geodésicas não são separáveis (CUNHA; HERDEIRO; RODRIGUEZ, 2018). Considerando massas iguais e utilizando métodos numéricos podemos observar três tipos de órbitas do tipo-luz e do tipo-tempo, confinadas a esse plano, estas órbitas são instáveis e se perdem para fora ou dentro do sistema em poucos ciclos.

- (i) Uma órbita que envolve ambos os horizontes, mostrada em azul em ambas as Figura 7 e Figura 8. Para pequenas separações, ou seja, $a \ll M$, o raio de tal órbita é $2M$, como esperado da análise do caso $a = 0$.
- (ii) Órbitas que envolvem apenas um horizonte, mostradas em vermelho em ambas as figuras. Em grandes separações, tais geodésicas apenas “veem” o campo gravitacional de um dos BHs. De fato, descobrimos que a órbita é quase circular com raio M .

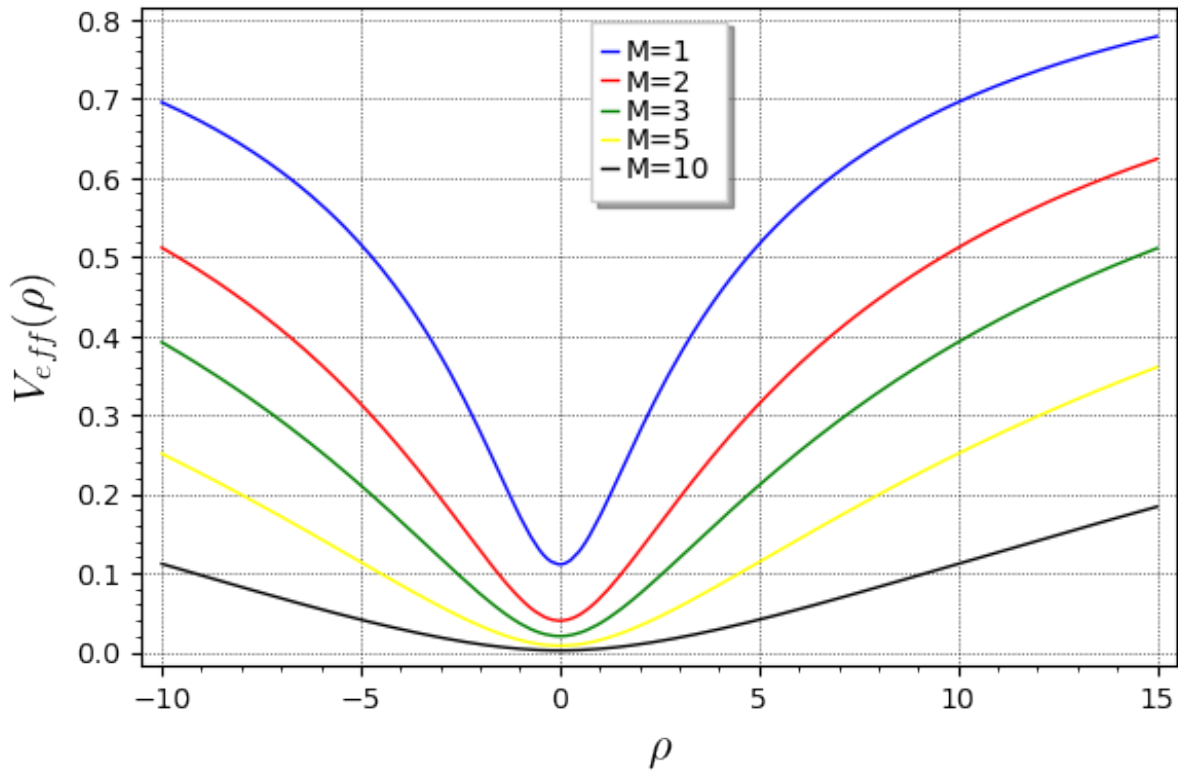
- (iii) Uma órbita “em forma de 8” que envolve cada um dos horizontes uma vez, mostrada em preto em ambas as figuras.

O potencial efetivo obtido a partir da equação (4.0.8), para uma partícula contida neste plano pode ser escrito como:

$$V_{eff}(\rho) = \frac{\delta}{U^2}. \quad (4.1.1)$$

Na Figura 6 vemos as curvas potenciais para uma disposição igual de massas. O potencial não leva em consideração o momento angular da partícula em z e somente descreve as geodésicas do tipo-tempo, visto que quando δ for igual a zero o potencial efetivo será zero.

Figura 6 – Geodésicas do tipo-tempo para o potencial efetivo da equação (4.1.1) em $\phi = 0$



fonte: Autoria Própria

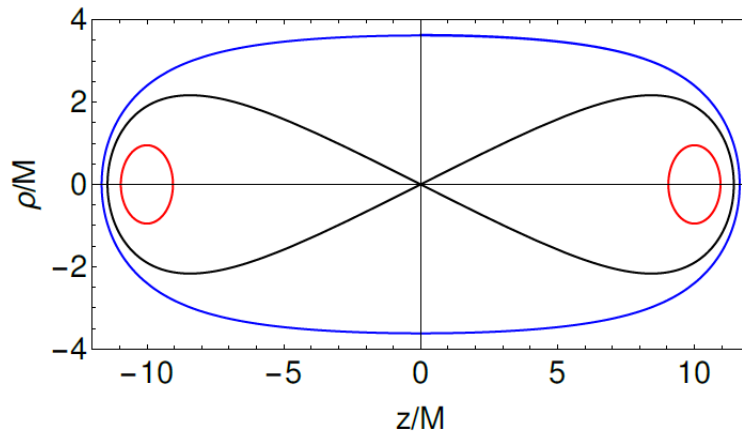
Na Figura 7 e Figura 8, observamos essas três órbitas.

4.1.2 Plano $z = 0$

Para o plano $z = 0$ fixaremos a distância dos BHs como $a = 1$. Isto reduz nossas equações (4.0.2 e 4.0.7) da seguinte forma:

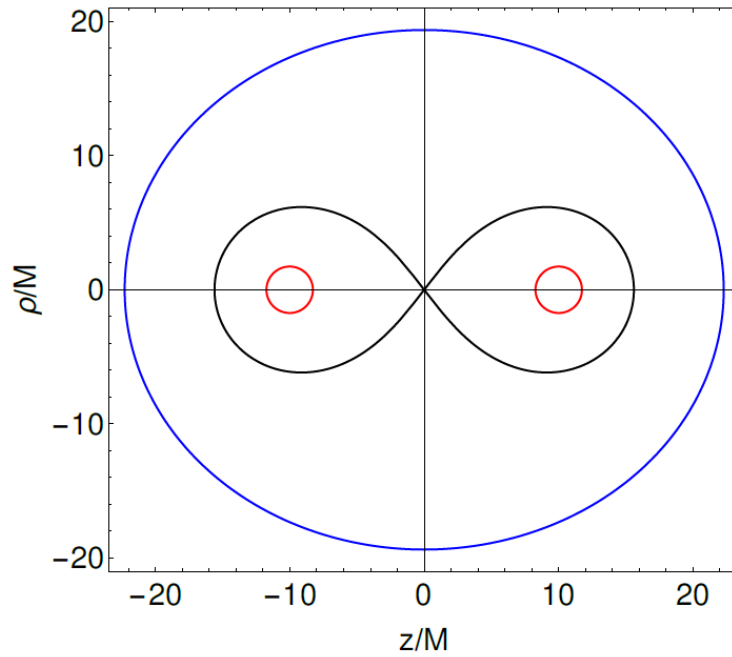
$$U(\rho, z) = 1 + \frac{2M}{\sqrt{\rho^2 + 1}}, \quad e \quad E^2 - \dot{\rho}^2 - \frac{L_z^2}{U^4 \rho^2} = \frac{\delta}{U^2}. \quad (4.1.2)$$

Figura 7 – Órbitas do tipo-luz contidas no plano $\phi = 0$



fonte: ASSUMPÇÃO (2018)

Figura 8 – Órbitas do tipo-tempo contidas no plano $\phi = 0$



fonte: ASSUMPÇÃO (2018)

Consideramos que a segunda equação (4.1.2) pode ser separada em uma energia cinética e energia potencial, de forma similar ao que foi introduzido em (4.0.8). Podemos definir nosso potencial efetivo da forma:

$$V_{eff}(\rho) = \frac{L_z^2}{U^4 \rho^2} + \frac{\delta}{U^2}. \quad (4.1.3)$$

A partir da análise do potencial efetivo podemos determinar as condições de estabilidade das órbitas de acordo com (NAKASHI; IGATA, 2019). Teremos então as seguintes condições:

$$\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial \rho^2} > 0 \rightarrow \text{Órbita estável}, \quad \frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial \rho^2} < 0 \rightarrow \text{Órbita Instável}. \quad (4.1.4)$$

A análise envolvendo as derivadas segundas do potencial efetivo serão realizadas em outro momento. Por agora iremos observar o caso de órbitas circulares em $z = 0$

Órbitas fechadas e circulares possuem as seguintes condições $\dot{\rho} = 0$, $\dot{z} = 0$ e $\ddot{\rho} = 0$ (TAKEDA, 2020). Aplicamos estas informações na equação da Lagrangiana obtida anteriormente (4.0.7) iremos obter as seguintes condições:

$$\frac{\partial V_{eff}}{\partial \rho} = 0 \quad e \quad \frac{\partial V_{eff}}{\partial z} = 0. \quad (4.1.5)$$

A segunda condição em (4.1.5) implica que:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (4.1.6)$$

Proveniente das condições anteriores e utilizando (4.1.6) nós obtemos a seguinte expressão para as massas dos nossos objetos:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{1+z}{1-z} \left[\frac{\rho^2 + (1-z)^2}{\rho^2 + (1+z)^2} \right]^{\frac{3}{2}}. \quad (4.1.7)$$

Aplicando a condição imposta anteriormente de $z = 0$ implica que as massas em (4.1.7) são iguais. Desta forma utilizamos a primeira condição de (4.1.5) com o plano fixado em $z = 0$, o que nos conduz à:

$$(\rho^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = 2M (\rho^2 - 1). \quad (4.1.8)$$

Para $\rho \geq 1$ podemos resolver esta equação por substituição (WUNSCH et al., 2013). Logo:

$$\beta = \rho^2 + 1, \quad (4.1.9)$$

$$\beta^3 - 4M^2\beta^2 + 16M^2\beta - 16M^2 = 0, \quad (4.1.10)$$

$$\tilde{M} = \sqrt{\frac{27}{8}} \approx 1,837. \quad (4.1.11)$$

Para valores de $M < \tilde{M} = 1,837$, não existem órbitas do tipo-luz, para $M = \tilde{M}$ existe apenas uma e para $M > \tilde{M}$ existem duas órbitas. As órbitas estão localizadas nos pontos críticos $\partial V_{eff}/\partial \rho = 0$.

4.2 RESULTADOS

4.2.1 Plano $\phi = 0$

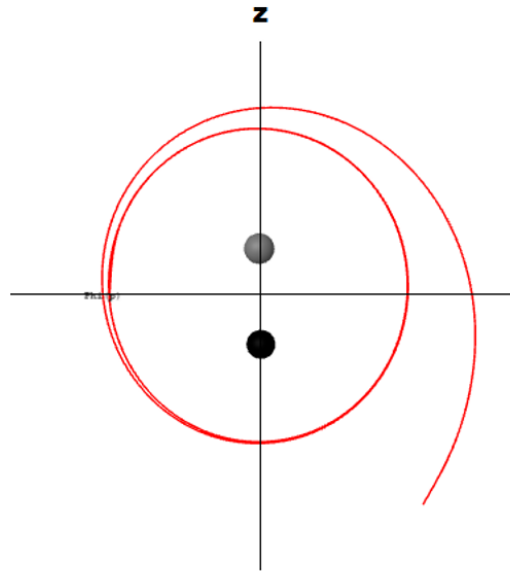
Testamos as órbitas mencionadas anteriormente por uma simulação numérica através do Sage Math¹ (The Sage Developers, 2022), que é uma ferramenta computacional que permite analisar sistemas algébricos e geométricos. Com essa ferramenta pudemos simular as geodésicas obtidas através da

¹ <https://www.sagemath.org/>

nossa métrica. Dados os parâmetros iniciais de posição e velocidade podemos obter um gráfico da evolução da geodésica em relação ao tempo como mostra Figura 9, Figura 10 e Figura 11. As órbitas simuladas aqui estão restritas no plano $\phi = 0$.

Conseguimos verificar a estabilidade das órbitas descritas por (ASSUMPÇÃO et al., 2018). Nesse primeiro caso tentamos reproduzir as órbitas em azul, mostrado na Figura 7.

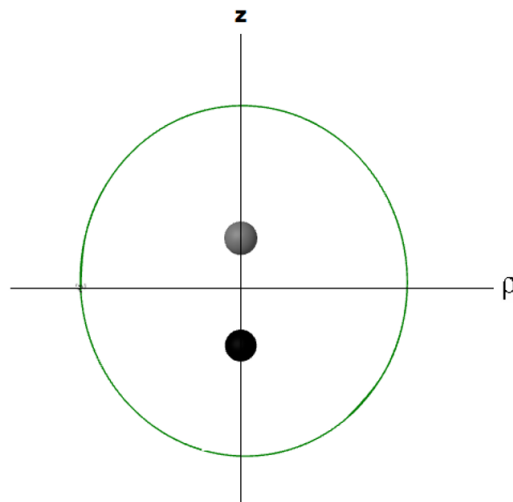
Figura 9 – Reprodução da órbita tipo-luz proveniente da Figura 7 (azul)



fonte: Autoria própria

A Figura 9 mostra uma sutil mudança nas condições iniciais da órbita em questão, neste ponto qualquer variação mínima mostra uma instabilidade na órbita. A estabilidade só é observada quando partimos das condições iniciais especificadas em (ASSUMPÇÃO et al., 2018), a qual é mostrado na Figura 10.

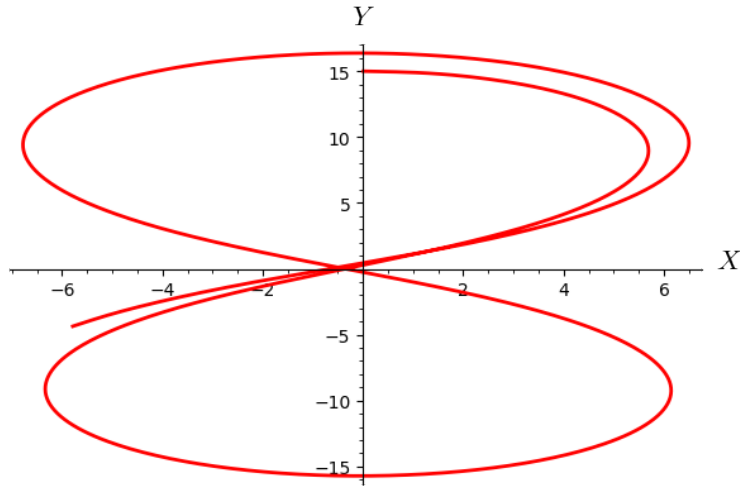
Figura 10 – Reprodução da órbita tipo-luz proveniente da Figura 7 (azul)



fonte: Autoria própria

Por fim verificamos a estabilidade das órbitas "com forma de 8" mostradas na Figura 7.

Figura 11 – Reprodução da órbita tipo-luz proveniente da Figura 7 (preta)



fonte: Autoria própria

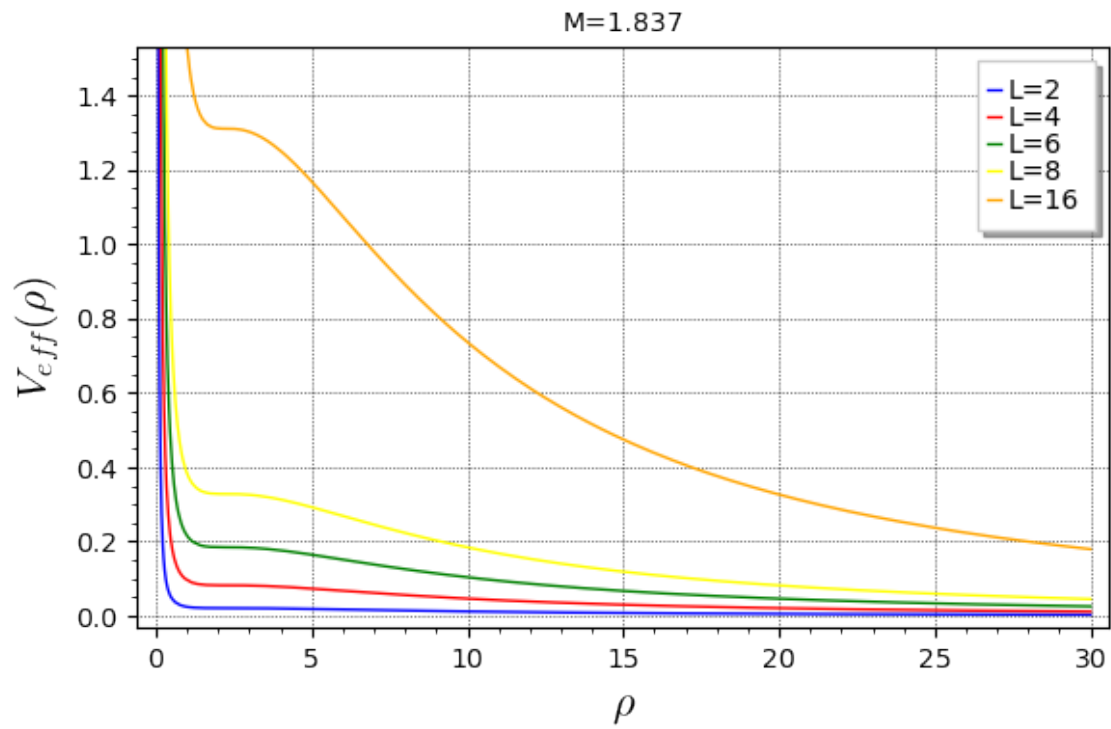
Observamos que elas são pouco estáveis se mantendo em sua forma por no máximo de duas voltas em torno do sistema, de acordo com as simulações. Após isso elas ou colapsam com os BHs, ou são ejetadas do sistema.

4.2.2 Plano $z = 0$

Partindo do potencial efetivo descrito anteriormente (4.1.3) podemos plotar diferentes curvas potenciais que variam de acordo com as massa dos BHs e com o momento angular L . Neste caso de análise estaremos restringindo as nossas órbitas ao plano $z = 0$. Dessa forma obtemos as próximas figuras.

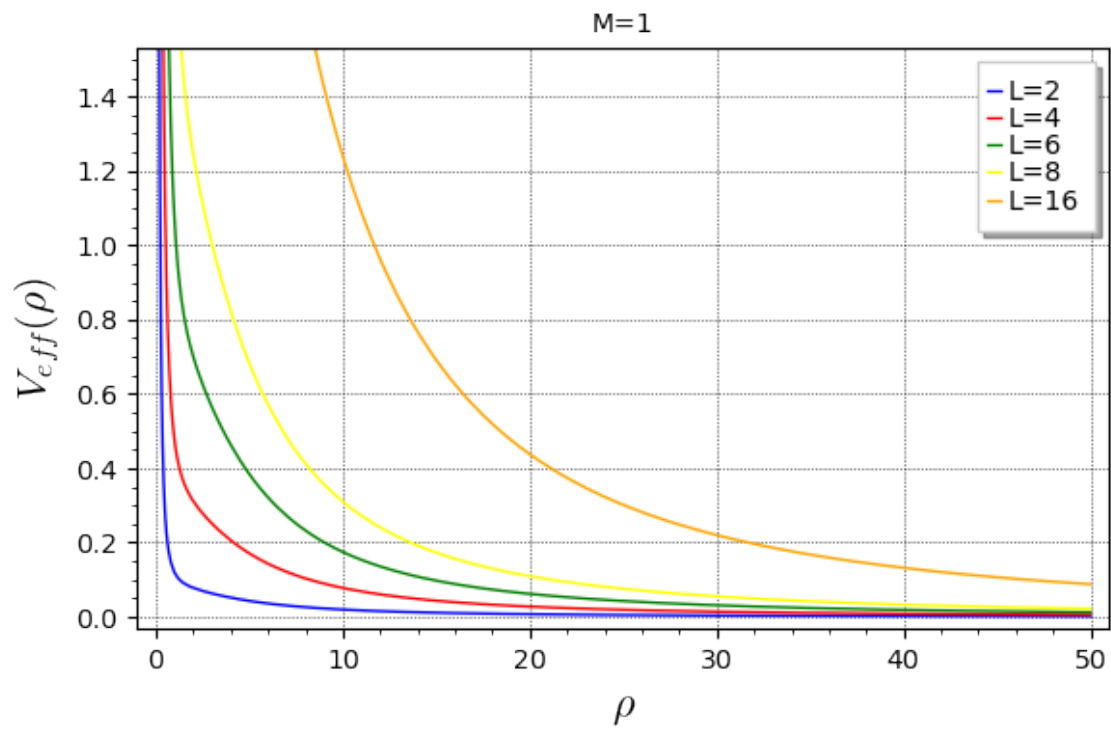
4.2.2.1 Geodésicas do tipo-luz

Figura 12 – Geodésicas do tipo-luz para massas iguais a 1.837



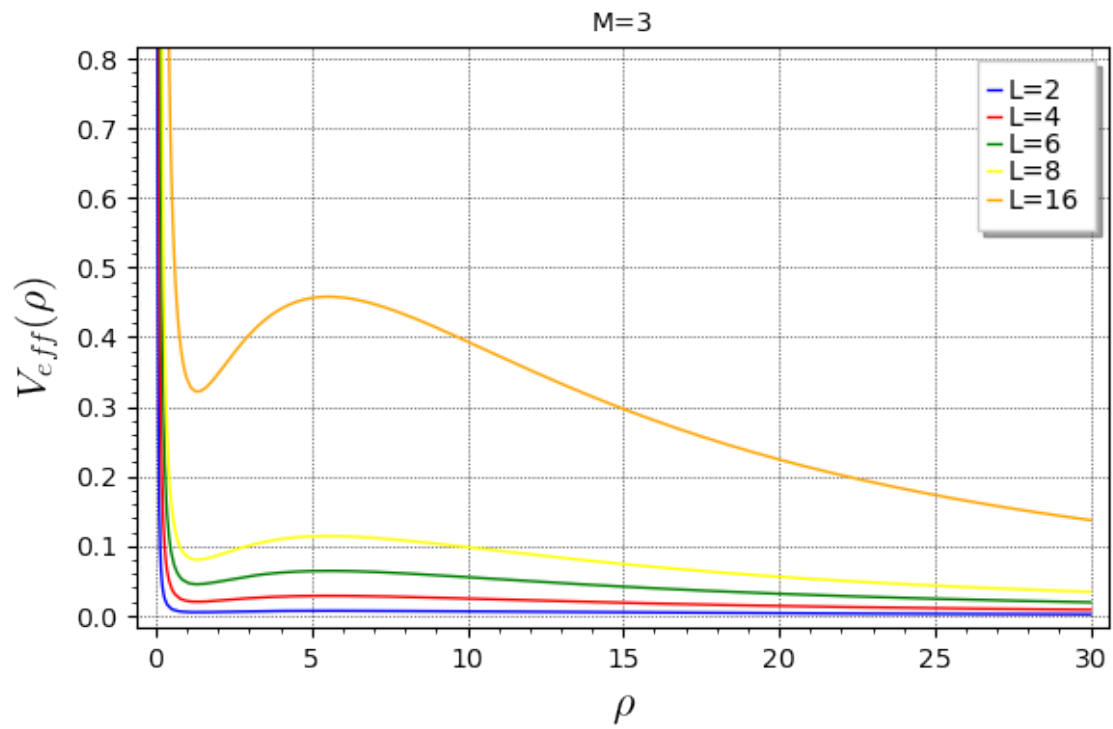
fonte: Autoria Própria

Figura 13 – Geodésicas do tipo-luz para massas iguais a 1



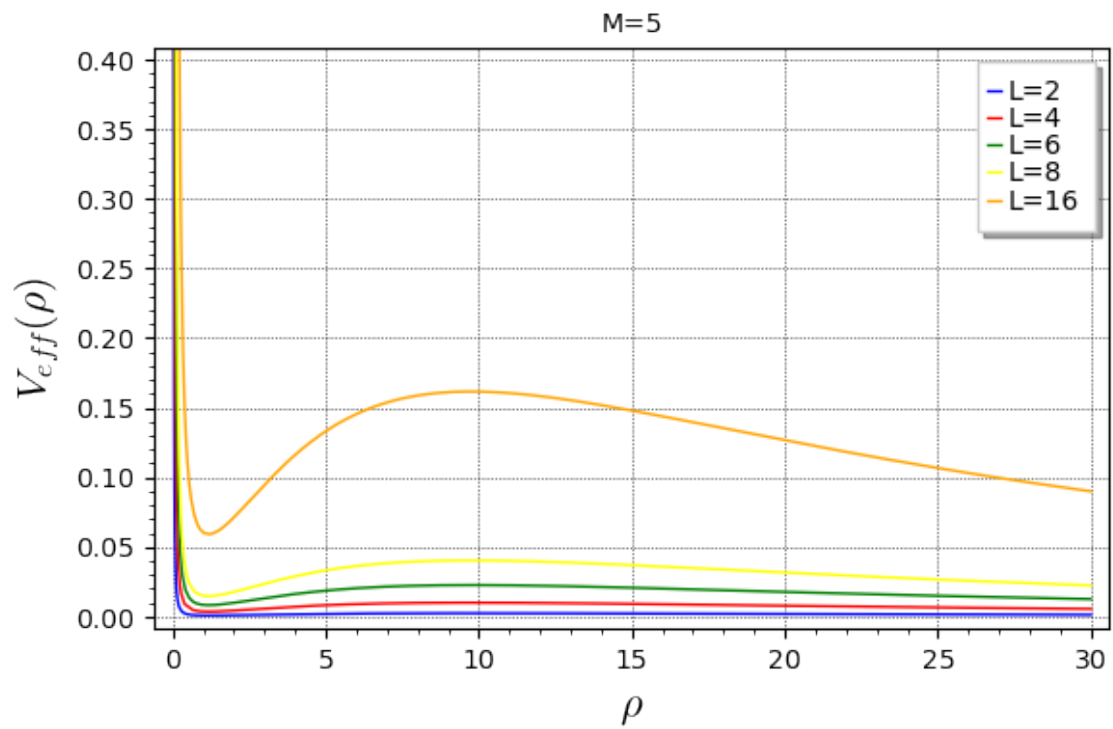
fonte: Autoria Própria

Figura 14 – Geodésicas do tipo-luz para massas iguais a 3



fonte: Autoria Própria

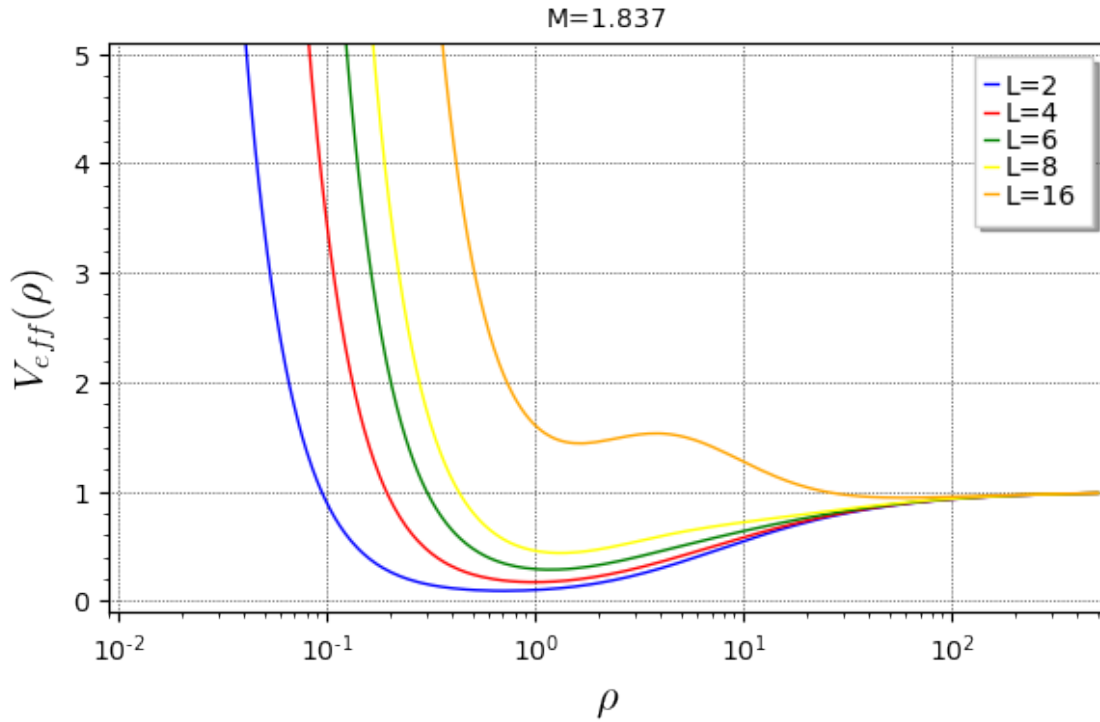
Figura 15 – Geodésicas do tipo-luz para massas iguais a 5



fonte: Autoria Própria

4.2.2.2 Geodésicas do tipo-tempo

Figura 16 – Geodésicas do tipo-tempo para massas iguais a 1.837

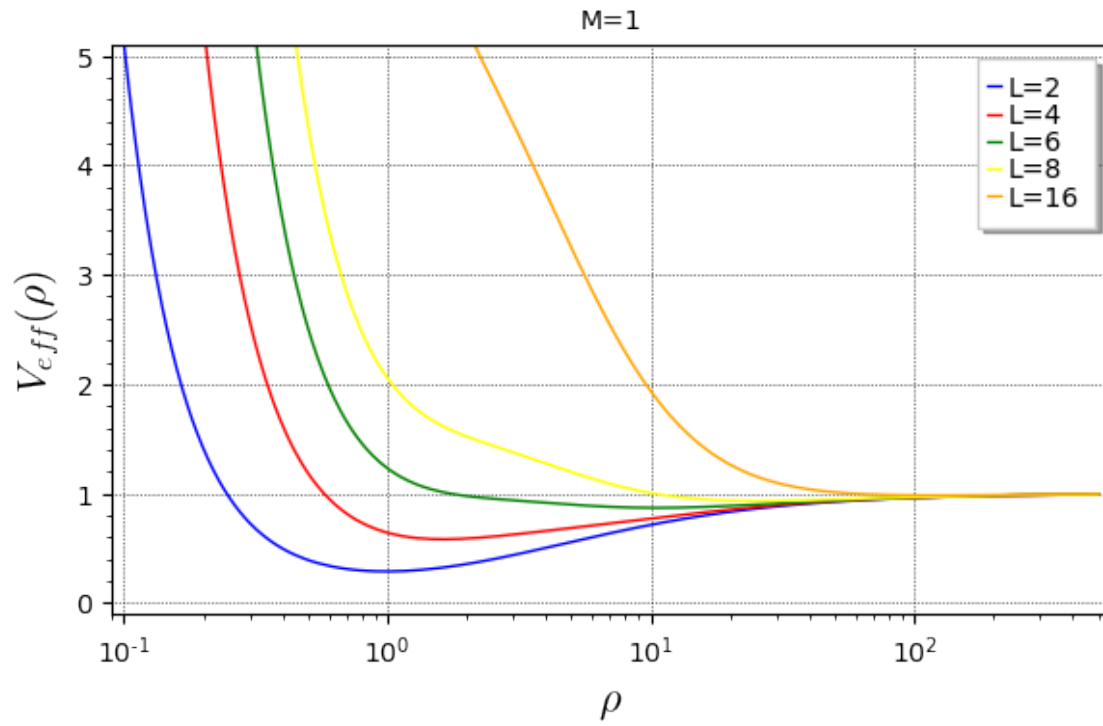


fonte: Autoria Própria

Para as figuras que mostram o potencial efetivo para geodésicas do tipo-luz (Figura 12, Figura 13, Figura 14 e Figura 15) podemos observar o que já foi descrito anteriormente. Para massas menores que $\tilde{M}$ não temos órbitas, já para massas iguais a $\tilde{M}$ teremos uma órbita e para massas maiores que $\tilde{M}$ possuiremos duas órbitas, observados nas figuras da seção 4.2.2.1. Para o caso do potencial efetivo para geodésicas do tipo-tempo (Figura 16, Figura 17, Figura 18 e Figura 19) vemos que existem duas órbitas a depender do momento angular escolhido, uma delas é estável, localizada no mínimo local e outra é instável localizada no máximo local (WUNSCH et al., 2013), observadas nas figuras da seção 4.2.2.2.

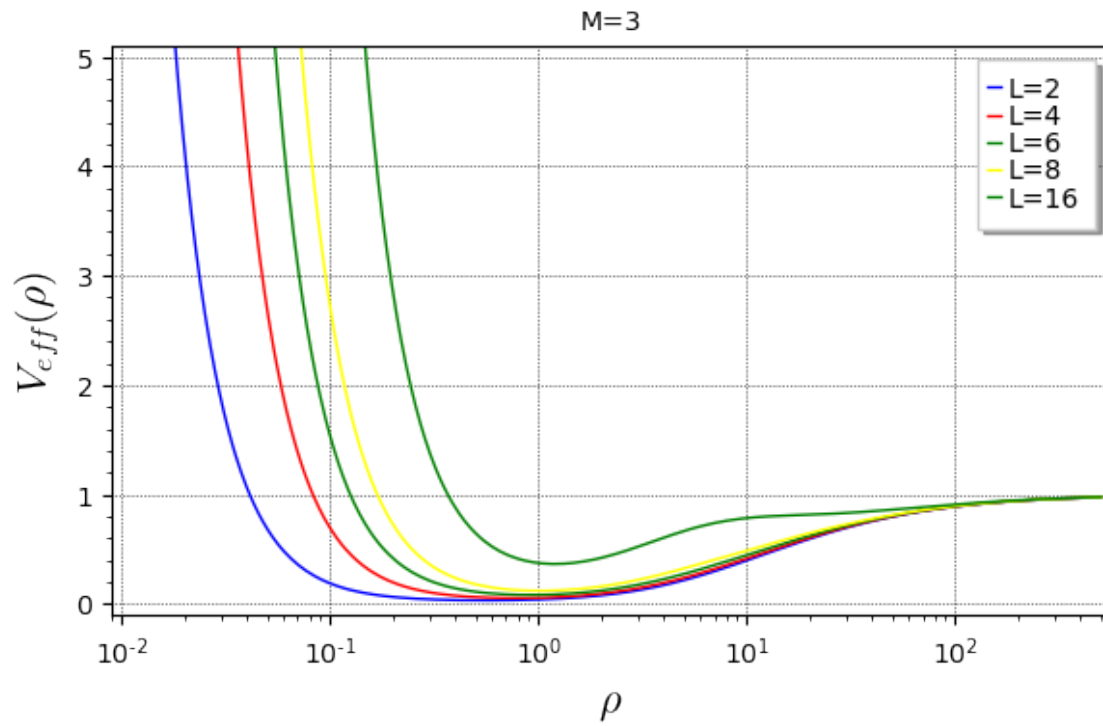
Para testarmos a estabilidade da órbita em $z = 0$ a mesma foi simulada com pequenas variações em suas condições iniciais. A Figura 20 a seguir mostra essa simulação de uma órbita circular com ligeiras mudanças de posição inicial, utilizamos $M = 3$ e $L = 16$ (Figura 18) posição inicial $\rho = 1.329$ com pequenas variações.

Figura 17 – Geodésicas do tipo-tempo para massas iguais a 1



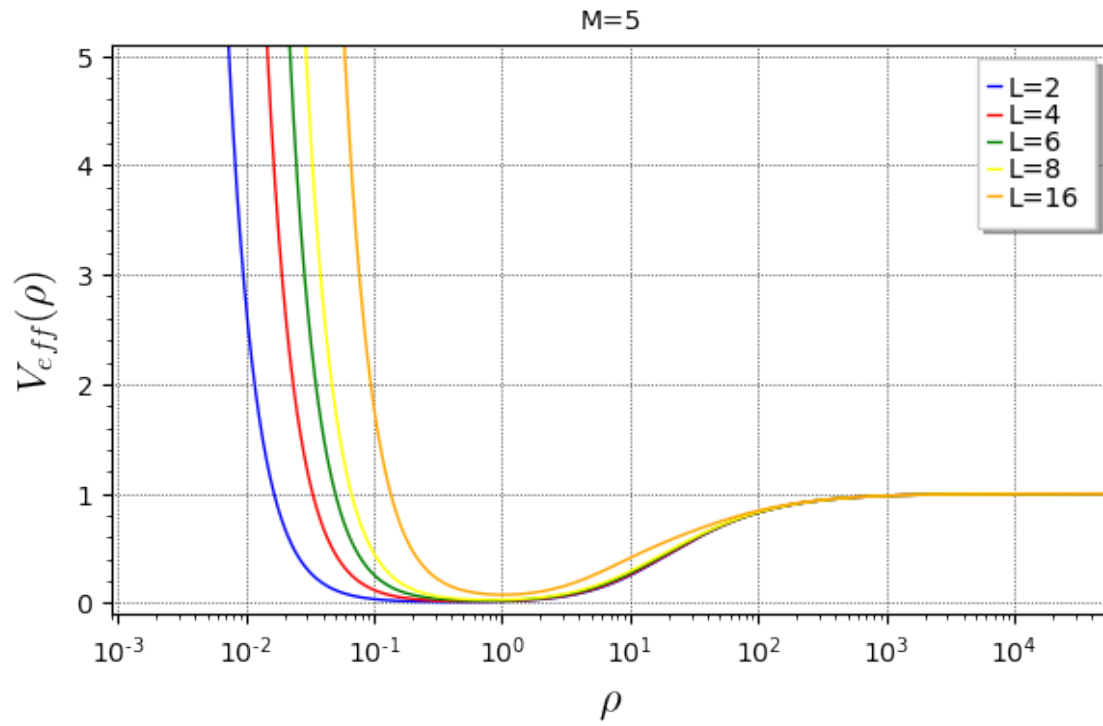
fonte: Autoria Própria

Figura 18 – Geodésicas do tipo-tempo para massas iguais a 3



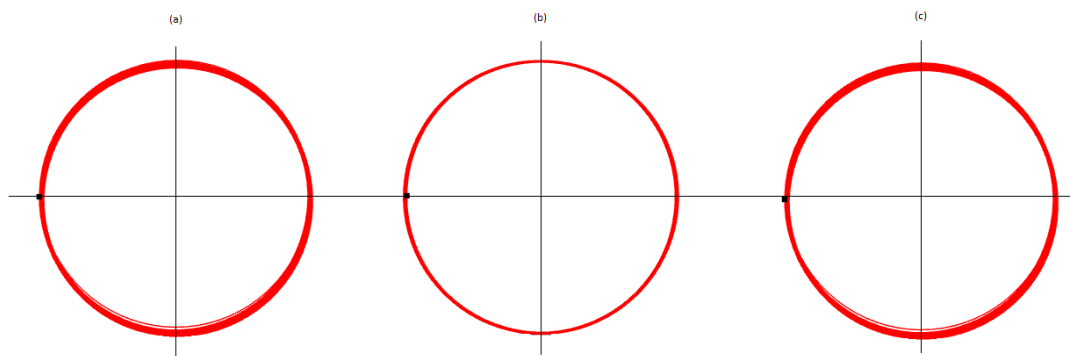
fonte: Autoria Própria

Figura 19 – Geodésicas do tipo-tempo para massas iguais a 5



fonte: Autoria Própria

Figura 20 – Órbita estável em $z = 0$, $M = 3$ e $L = 16$, (a) $\rho = 1.1$ (b) $\rho = 1.329$ (c) $\rho = 1.4$



fonte: Autoria própria

5 LIMITE NEWTONIANO E APROXIMAÇÃO PÓS-NEWTONIANA

5.1 PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS DESCRITO PELA MÉTRICA NEWTONIANA

Neste capítulo iremos deduzir o problema de três corpos partindo de uma aproximação newtoniana do caso relativístico, para isso iremos precisar da definição de uma métrica newtoniana descrita na primeira parte deste trabalho. Para esta seção a assinatura da métrica utilizada será $(+,-,-,-)$. Todos os cálculos aqui apresentações seguirão a referência de (LANDAU, 2000).

Partimos da métrica definida na seção de fundamentos teóricos, capítulo 2,

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (5.1.1)$$

E utilizaremos a Lagrangiana escrita em sua forma relativística:

$$-2L = g^{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}. \quad (5.1.2)$$

Consideraremos velocidades baixas, o que significa negligenciar os termos

$$\frac{2\phi}{c^2} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}. \quad (5.1.3)$$

Nossa Lagrangiana se reduz a:

$$L_0 = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 \dot{t}^2 + \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2). \quad (5.1.4)$$

Tendo em mente o problema restrito de três corpos newtoniano, é muito mais eficiente se trabalharmos em coordenadas fixas nas massas, ou seja, em um referencial girante. Além disto mantemos nossa consideração que o movimento de todos os objetos estão restritos ao plano onde $y = 0$, como foi demonstrado na seção sobre o problema de três corpos, capítulo 5. Após alguns cálculos podemos escrever a Lagrangiana como segue:

$$L = -\frac{1}{2} \left[1 + \frac{2\phi}{c^2} - \frac{\omega^2 (x^2 + z^2)}{c^2}\right] c^2 \dot{t}^2 + \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \frac{\omega(x\dot{z} - z\dot{x})\dot{t}c}{c}. \quad (5.1.5)$$

Temos:

$$-2L = g^{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \delta \begin{cases} = 0 & (\text{nulo}) \\ = 1 & (\text{tipo-tempo}) \\ = -1 & (\text{tipo-espaço}) \end{cases}. \quad (5.1.6)$$

A Lagrangiana não depende explicitamente do tempo, de tal forma que:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \right) = 0, \quad (5.1.7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = E = \text{const.} , \quad (5.1.8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = - \left[1 + \frac{2\phi}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2} (x^2 + z^2) \right] c^2 \dot{t} + \omega(xz - z\dot{x}) = E. \quad (5.1.9)$$

A partir da equação acima conseguimos reescrever a Energia como segue:

$$\frac{E}{c^2} = \sqrt{1 + \underbrace{\frac{2\phi}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2} (x^2 + z^2) + \frac{1}{c^2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\omega^2}{c^4} (x\dot{x} + z\dot{z})^2}_{\epsilon \ll 1}}. \quad (5.1.10)$$

Expandindo a raiz quadrada ($\sqrt{1 + \epsilon}$) em série de Taylor em torno do ponto $\epsilon = 0$, teremos:

$$\frac{E}{c^2} = 1 + \frac{1}{2c^2} (\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + \frac{\phi}{c^2} - \frac{\omega^2 (x^2 + z^2)}{2c^2} - \frac{\omega^2 (x\dot{x} + z\dot{z})^2}{2c^4}. \quad (5.1.11)$$

Esta então é a energia do problema de três corpos restrito na métrica newtoniana considerando baixas velocidades e velocidade de rotação baixa.

A partir da equação (5.1.11) podemos obter o potencial efetivo, devemos considerar apenas os termos que não dependem da velocidade, também devemos desconsiderar os termos provenientes da correção relativística. Aplicado estas condições podemos reescrever o potencial efetivo como:

$$U = \phi - \omega^2 (x^2 + z^2). \quad (5.1.12)$$

Este potencial é o mesmo que foi apresentado no capítulo 3, e será analisado de forma similar no futuro. Caso expressarmos ϕ nas coordenadas apresentadas no capítulo 3 obteríamos a equação 3.0.14.

5.2 APROXIMAÇÃO PÓS-NEWTONIANA

Nesta seção iremos obter a 1PN, e com ela construir a Lagrangiana referente ao problema restrito de três corpos.

A forma de se encontrar a métrica pós-newtoniana é similar ao método que se utiliza para encontrar a métrica newtoniana explicada anteriormente, pois os dois métodos se baseiam na suposição de uma perturbação na métrica plana. A diferença entre a aproximação newtoniana e pós-newtoniana está na ordem dos termos que utilizamos.

Primeiramente precisamos definir uma métrica dita “quase plana”, para isso definiremos uma métrica que é a soma da métrica de Minkowski com uma perturbação

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (5.2.1)$$

Subimos os índices da equação anterior e isso nos resulta em:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2). \quad (5.2.2)$$

A partir das equações (5.2.1 e 5.2.2) podemos reescrever a conexão, inicialmente dada pela equação (2.2.6). Desta forma:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}((\partial_{\mu}h_{\nu}^{\rho} + \partial_{\nu}h_{\mu}^{\rho} - \partial^{\rho}h_{\mu\nu}) - h^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}h_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}h_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}h_{\mu\nu})). \quad (5.2.3)$$

Utilizando a conexão descrita em (5.2.3) podemos reescrever o tensor de Ricci (FORD; PARKER, 1977) como:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} = & {}^{(0)}R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(h_{;\mu\nu} - h_{\mu}^{\alpha}{}_{;\nu\alpha} - h_{\nu}^{\alpha}{}_{;\mu\alpha} + h_{\mu\nu;\alpha}^{\alpha}) - \frac{1}{4}(h^{\alpha\rho}{}_{;\nu}h_{\alpha\rho;\mu} - 2h^{\alpha\rho}{}_{;\alpha}h_{\mu\rho;\nu} - 2h^{\alpha\rho}{}_{;\alpha}h_{\nu\rho;\mu} + \\ & + 2h^{\alpha\rho}{}_{;\alpha}h_{\mu\nu;\rho} + h_{;\rho}h_{\mu}^{\rho}{}_{;\nu} + h_{;\rho}h_{\nu}^{\rho}{}_{;\mu} - h_{;\rho}h_{\mu\nu}{}^{;\rho} - 2h_{\nu}^{\alpha}{}_{;\rho}h_{\mu}^{\rho}{}_{;\alpha} + 2h_{\nu}^{\alpha}{}_{;\rho}h_{\alpha\mu}{}^{;\rho}) \\ & + \frac{1}{2}h^{\alpha\rho}(h_{\mu\rho;\nu\alpha} + h_{\nu\rho;\mu\alpha} - h_{\mu\nu;\rho\alpha} - h_{\alpha\rho;\mu\nu}). \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Sabemos que a métrica newtoniana é dessa forma (5.1.1), assim podemos definir as perturbações iniciais (de ordem de velocidade iguais a $(1/c^2)$) como sendo:

$$h_{00} = \frac{2}{c^2}\phi, \quad h_{0i} = 0, \quad h_{ij} = -\frac{2}{c^2}\phi\delta_{ij}. \quad (5.2.5)$$

A Lagrangiana de uma partícula única num campo gravitacional produzido por outras partículas pode ser dada como (LANDAU, 2000):

$$L_a = -m_a c \frac{ds}{dt} = -m_a c^2 \left(1 + h_{00} + 2h_{0i} \frac{v_a^i}{c} - \frac{v_a^2}{c^2} + h_{ij} \frac{v_a^i v_a^j}{c^2} \right)^{1/2}. \quad (5.2.6)$$

Podemos expandir a equação acima, descartando $-m_a c^2$ obtemos:

$$L_a = \frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{m_a v_a^4}{8c^2} - m_a c^2 \left(\frac{h_{00}}{2} + h_{0i} \frac{v_a^i}{c} + \frac{1}{2c^2} h_{ij} v_a^i v_a^j - \frac{h_{00}^2}{8} + \frac{h_{00}}{4c^2} v_a^2 \right). \quad (5.2.7)$$

Observando a equação acima, temos que para obter a Lagrangiana requerida (ordem $(1/c^2)$) é suficiente conhecer as componentes espaciais h_{ij} com a precisão $(1/c^2)$ como a que é dada em (5.2.5); os componentes mistos (que estão ausentes na aproximação newtoniana $(1/c^2)$) são necessários para termos de ordem $(1/c^3)$, e a componente de tempo h_{00} para termos em $(1/c^4)$. Para recalculá-los, voltamos mais uma vez às equações gerais da gravitação e consideramos os termos de ordem correspondente nessas equações.

Para encontrarmos as perturbações nas ordens indicadas precisamos começar pela definição do tensor energia-momento:

$$T^{\mu\nu} = \sum_a \frac{m_a c}{\sqrt{-g}} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (5.2.8)$$

Nosso primeiro passo é encontrar as perturbações h_{00} e h_{0i} , visto que a perturbação h_{ij} já esta dada na ordem requerida em (5.2.5). Para isso devemos escrever o Tensor Energia-Momento T_{00} , T_{0i} e T_{ij} .

Substituindo as métricas de g_{00} , g_{0i} e g_{ij} na equação (5.2.8) teremos:

$$T_{00} = \sum_a m_a c^2 \left(1 + \frac{5\phi_a}{c^2} + \frac{v_a^2}{2c^2} \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad (5.2.9)$$

$$T_{ij} = \sum_a m_a v_{ai} v_{aj} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad (5.2.10)$$

$$T_{0i} = - \sum_a m_a c v_{ai} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a). \quad (5.2.11)$$

Precisamos agora escrever nossos tensores de Ricci (R_{00} e R_{0i}). A partir da equação (5.2.4) podemos obtê-los da seguinte forma (LANDAU, 2000):

$$R_{00} = \frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} + \frac{2}{c^4} \phi \nabla^2 \phi - \frac{2}{c^4} (\nabla \phi)^2. \quad (5.2.12)$$

Onde, ϕ é o potencial newtoniano para uma partícula pontual

$$\phi = -G \sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}. \quad (5.2.13)$$

Da mesma forma obtemos R_{0i} :

$$R_{0i} = \frac{1}{2} \nabla^2 h_{0i} + \frac{1}{2c^3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x^i}. \quad (5.2.14)$$

Escrevemos agora as equações de campo de Einstein, da forma que se segue:

$$R_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right). \quad (5.2.15)$$

Para o caso o de h_{00} , a componente temporal, temos:

$$R_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{00} - \frac{1}{2} g_{00} T \right) \quad (5.2.16)$$

Para o lado direito reescrevemos da seguinte maneira, o lado esquerdo se mantém:

$$= G \left(T_{00} - \frac{1}{2} T_{00} - \frac{1}{2} \eta^{ij} T_{ij} \right), \quad (5.2.17)$$

$$= \frac{1}{2} G (2T_{00} - T_{00} - \eta^{ij} T_{ij}) = \frac{1}{2} G (T_{00} - \eta^{ij} T_{ij}), \quad (5.2.18)$$

$$= \frac{1}{2} G \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \sum_a m_a c^2 \left[1 + \frac{5\phi_a}{c^2} + \frac{v_a^2}{2c^2} - \frac{v_a^2}{c^2} \right]. \quad (5.2.19)$$

Por fim teremos:

$$\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} + \frac{2}{c^4} \phi \nabla^2 \phi - \frac{2}{c^4} (\nabla \phi)^2 = \frac{8\pi G}{c^4} \sum_a m_a c^2 \left(1 + \frac{5\phi_a}{c^2} + \frac{3v_a^2}{2c^2} \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a). \quad (5.2.20)$$

Usando a identidade descrita abaixo e a Equação de Newton:

$$4(\nabla\phi)^2 = 2\nabla^2(\phi^2) - 4\phi\nabla^2\phi \quad e \quad \nabla^2\phi = 4\pi G \sum_a m_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a). \quad (5.2.21)$$

Reescrevemos a equação (5.2.20):

$$\nabla^2 \left(h_{00} - \frac{2}{c^4} \phi^2 \right) = \frac{8\pi G}{c^2} \sum_a m_a \left(1 + \frac{\phi'_a}{c^2} + \frac{3v_a^2}{2c^2} \right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a). \quad (5.2.22)$$

Substituímos ϕ_a por:

$$\phi'_a = -G \sum_b' \frac{m_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|}. \quad (5.2.23)$$

Utilizamos a relação matemática abaixo, para resolver o lado esquerdo da equação (5.2.22):

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}). \quad (5.2.24)$$

Por fim obtemos a componente temporal da perturbação da métrica, de forma geral, como sendo:

$$h_{00} = \frac{2\phi}{c^2} + \frac{2\phi^2}{c^4} - \frac{2G}{c^4} \sum_a \frac{m_a \phi'_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} - \frac{3G}{c^4} \sum_a \frac{m_a v_a^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}. \quad (5.2.25)$$

O desenvolvimento para encontrarmos as componentes mistas da perturbação seguem similar aos passos anteriores. Substituímos agora as componentes mistas do tensor energia-momento (5.2.11) na equação (5.2.15).

Obteremos:

$$R_{0j} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{0j} - \frac{1}{2} g_{0j} T \right), \quad (5.2.26)$$

$$R_{0j} = \frac{8\pi G}{c^4} (T_{0j}), \quad (5.2.27)$$

$$\frac{1}{2} \nabla^2 h_{0\alpha} + \frac{1}{2c^3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x^\alpha} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(- \sum_a m_a c v_{a\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \right), \quad (5.2.28)$$

$$\nabla^2 h_{0i} = -\frac{16\pi G}{c^3} \sum_a m_a v_{ai} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x^i}. \quad (5.2.29)$$

A solução para esta equação linear é:

$$h_{0i} = \frac{4G}{c^3} \sum_a \frac{m_a v_{a\alpha}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} - \frac{1}{c^3} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x^\alpha}. \quad (5.2.30)$$

Em que f é uma solução para a seguinte equação auxiliar:

$$\nabla^2 f = \phi = - \sum_a \frac{G m_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}. \quad (5.2.31)$$

Computando f podemos por fim escrever h_{0i} como:

$$h_{0i} = \frac{G}{2c^3} \sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} [7v_{ai} + (\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{n}_a) n_{ai}]. \quad (5.2.32)$$

Por fim, podemos montar a nossa Lagrangiana referente ao problema restrito de três corpos utilizando a métrica com suas perturbações h_{00} , h_{0i} e h_{ij} proveniente respectivamente das equações (5.2.25, 5.2.32 e 5.2.5). Substituiremos as perturbações na equação (5.2.7) obteremos:

$$\begin{aligned} L = & -mc^2 + \frac{1}{2}m\mathbf{u}^2 + \frac{m\mathbf{u}^4}{8c^2} + Gm \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} - \frac{G^2m}{2c^2} \left(\sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \right)^2 \\ & - \frac{Gm}{2c^2} \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \left[7(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_i) + (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{u})(\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{v}_i) - 3(\mathbf{u}^2 + \mathbf{v}_i^2) \right. \\ & \left. + 2G \sum_{j \neq i}^2 \frac{m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right] + O(c^{-4}). \end{aligned} \quad (5.2.33)$$

Onde $\mathbf{n}_i = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$ é o vetor unitário. Esta Lagrangiana descreve um corpo com posição $\mathbf{r}$, velocidade $\mathbf{u}$ e massa m submetida aos campos gravitacionais de dois outros corpos m_i , $i = 1, 2$, cujas posições e velocidades são respectivamente $\mathbf{r}_i$ e $\mathbf{v}_i$ ($i = 1, 2$) (HUANG; MEI; HUANG, 2018).

A partir da equação (5.2.33) podemos recuperar as observações feitas na equação (5.1.11). Para isto precisamos considerar baixas velocidades $u \ll c$. Assim podemos reescreve-la como:

$$L = -mc^2 + \frac{1}{2}m\mathbf{u}^2 + Gm \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} - \frac{3G^2m}{2c^2} \left(\sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \right)^2. \quad (5.2.34)$$

Analisando nosso problema, sistemas binários com órbitas circulares, nos é intuitivo tratar o problema partindo de um referencial não inercial, um referencial girante que acompanha os corpos massivos, tal qual foi estudado na capítulo 3. A partir da equação (5.2.34), escrita em coordenadas inerciais podemos fazer a troca de referenciais considerando a transformação expressas abaixo, em que X e Y e suas respectivas derivadas no tempo são as coordenadas no referencial inercial.

$$\begin{aligned} X &= x \cos \omega t - y \sin \omega t, \\ Y &= x \sin \omega t + y \cos \omega t, \\ \dot{X} &= (\dot{x} - \omega y) \cos \omega t - (\dot{y} + \omega x) \sin \omega t, \\ \dot{Y} &= (\dot{x} - \omega y) \sin \omega t + (\dot{y} + \omega x) \cos \omega t. \end{aligned} \quad (5.2.35)$$

Consideramos as seguintes quantidades: $d_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2}$, $d_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2}$, as distâncias entre a partícula teste e os objetos massivos; $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, $U^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$, $A = \dot{y}x - \dot{x}y$. As velocidades angulares serão expressas como:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}, \quad \omega_1 = \frac{GM((\mu_1\mu_2) - 3)}{(2 * a)}, \quad e \quad \omega = \omega_0 (1 + \omega_1/c^2). \quad (5.2.36)$$

O calculo aproximado de ω^2 para a 1PN pode ser encontrado em (CONTOPOULOS, 1976) como:

$$\omega^2 = \omega_0^2 (1 + 2\omega_1/c^2). \quad (5.2.37)$$

Para mais conveniência separaremos a lagrangiana em três termos, o primeiro representa a aproximação newtoniana e os demais termos se referem a 1PN. Assim definimos:

$$L = L_0 + c^{-2}L_1 + c^{-2}L_2. \quad (5.2.38)$$

Fazendo uso da equação (5.2.35) reescrevemos a Lagrangiana (5.2.34) como segue:

$$\begin{aligned} L_0 &= G \left(\frac{m_1}{d_1} + \frac{m_2}{d_2} \right) + \frac{1}{2} (U^2 + 2A\omega_0 + R^2\omega_0^2), \\ L_1 &= \omega_0\omega_1 (A + R^2\omega_0), \\ L_2 &= \frac{1}{8} (U^2 + 2A\omega + R^2\omega^2)^2 - G^2 \left[\frac{m_1m_2}{a} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{m_1}{d_1} + \frac{m_2}{d_2} \right)^2 \right] \\ &\quad + G \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{m_1}{d_1} + \frac{m_2}{d_2} \right) (U^2 + 2A\omega + R^2\omega^2) + \frac{3}{2}\omega^2 \left(\frac{m_1x_1^2}{d_1} + \frac{m_2x_2^2}{d_2} \right) \right. \\ &\quad - \frac{7}{2}\omega(\dot{y} + \omega x) \left(\frac{m_1x_1}{d_1} + \frac{m_2x_2}{d_2} \right) - \frac{1}{2}\omega y^2(\dot{y} + \omega x) \left(\frac{m_1x_1}{d_1^3} + \frac{m_2x_2}{d_2^3} \right) \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}\omega y(\dot{x} - \omega y) \left[\frac{m_1x_1(x - x_1)}{d_1^3} + \frac{m_2x_2(x - x_2)}{d_2^3} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.39)$$

Definimos aqui as transformações de Legendre:

$$E = \sum_{i=1}^2 \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L(q_i, \dot{q}_i). \quad (5.2.40)$$

Utilizando as transformações de Legendre (5.2.40) para a Lagrangiana (5.2.39) podemos obter a energia total do sistema, expressa como:

$$\begin{aligned} E &= G \left(\frac{m_1}{d_1} + \frac{m_2}{d_2} \right) - \frac{1}{2}R^2\omega_0 + \frac{1}{2}U^2 + \frac{1}{c^2} \left\{ \omega_0\omega_1R^2 + \frac{3}{8}U^4 + \frac{1}{2}A^2\omega^2 + U^2A\omega \right. \\ &\quad + \frac{1}{4}U^2R^2\omega^2 - \frac{1}{8}R^4\omega^4 - G^2 \left[\frac{m_1m_2}{a} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{m_1}{d_1} + \frac{m_2}{d_2} \right)^2 \right] \\ &\quad + G \left[\frac{3}{2} \left(\frac{m_1}{d_1} + \frac{m_2}{d_2} \right) (U^2 - R^2\omega^2) - \frac{3}{2}\omega^2 \left(\frac{m_1x_1^2}{d_1} + \frac{m_2x_2^2}{d_2} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}\omega^2 y^2 \left(\frac{m_1x_1^2}{d_1^2} + \frac{m_2x_2^2}{d_2^2} \right) + \frac{7}{2}\omega x \left(\frac{m_1x_1}{d_1} + \frac{m_2x_2}{d_2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.41)$$

Excluindo os termos provenientes de contribuições da energia cinética da expressão (5.2.41) podemos obter o potencial efetivo para nosso sistema, consideraremos ainda que $m_1 + m_2 = M$, $\mu_1 = m_1/M$, $\mu_2 = m_2/M$ e $x_1 = -a\mu_2$, $x_2 = a\mu_1$. Assim:

$$\begin{aligned}
V_{eff} = & GM \left(\frac{\mu_1}{d_1} + \frac{\mu_2}{d_2} \right) - \frac{1}{2} R^2 \omega_0 + \frac{1}{c^2} \left[\omega_0 \omega_1 R^2 - \frac{1}{8} R^4 \omega^4 - \frac{G^2 M^2 \mu_1 \mu_2}{a} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) \right. \\
& - \frac{G^2 M^2}{2} \left(\frac{\mu_1}{d_1} + \frac{\mu_2}{d_2} \right)^2 + \frac{3GM R^2 \omega^2}{2} \left(\frac{\mu_1}{d_1} + \frac{\mu_2}{d_2} \right) - \frac{3GM \omega^2}{2} \left(\frac{\mu_1 x_1^2}{d_1} + \frac{\mu_2 x_2^2}{d_2} \right) \\
& \left. + \frac{GM \omega^2 y^2}{2} \left(\frac{\mu_1 x_1^2}{d_1^2} + \frac{\mu_2 x_2^2}{d_2^2} \right) + \frac{7GM \omega x}{2} \left(\frac{\mu_1 x_1}{d_1} + \frac{\mu_2 x_2}{d_2} \right) \right]. \quad (5.2.42)
\end{aligned}$$

Conforme estudado em seções anteriores utilizaremos o potencial efetivo para a construção de gráficos localizando os pontos de Lagrange. Vale ressaltar que este potencial é a junção do potencial newtoniano mais a correção relativística, onde na equação (5.2.42) o termo que multiplica c^{-2} é a nossa correção relativística.

6 ANÁLISE E RESULTADOS

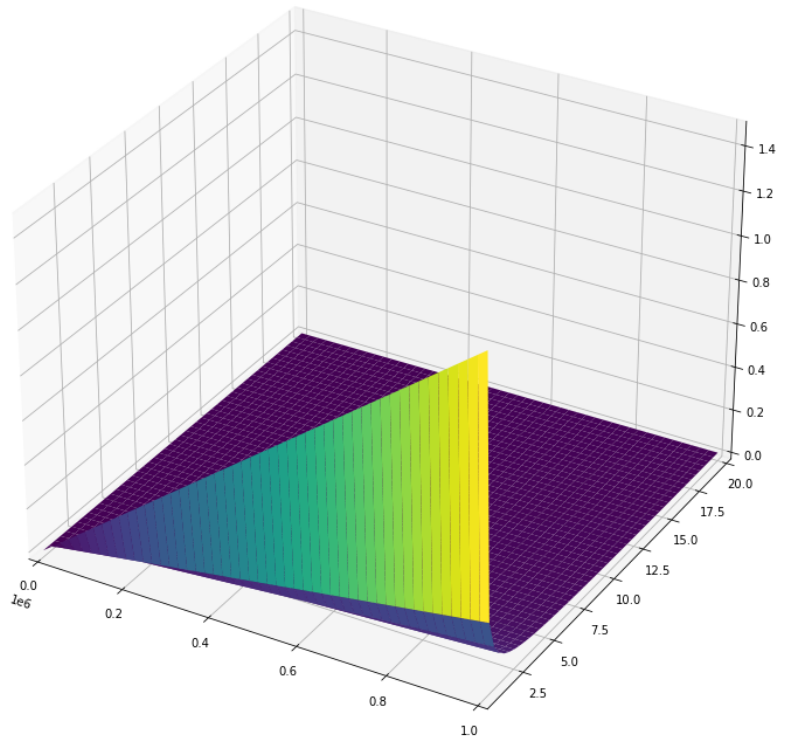
Neste capítulo utilizaremos o potencial efetivo para verificar os pontos de Lagrange de sistemas previamente definidos. Nosso estudo parte da análise de um sistema de objetos compactos, porém a métrica MP admite apenas sistemas que possuam BHs maximalmente carregados. Já as equações obtidas no capítulo anterior (5.2.39, 5.2.41 e 5.2.42) em nada discriminam o tipo de objeto a ser estudado. Neste caso é válida a verificação dos nossos resultados para objetos compactos, tais quais anãs brancas, estrelas de nêutrons e BHs.

Utilizamos o seguinte parâmetro :

$$\varepsilon^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \propto \left(\frac{GM}{c^2 a}\right), \quad (6.0.1)$$

poderemos nos nortear sobre até qual dimensões pensar a 1PN como válida (DUBEIBE; LORA-CLAVIJO; GONZÁLEZ, 2017). Utilizaremos o parâmetro ε^2 (6.0.1) como sendo válido até 10%, ou seja, a correção não pode ser superior a 10% da diferença entre os potenciais, newtoniano e pós-newtoniano. Como veremos nas próximas seções ε^2 vai depender da combinação entre a distância dos objetos massivos e da massa de tais objetos. Como podemos ver na Figura 21 ε^2 se torna maior que zero para um limite de massas-distâncias o que será apresentado em sequência.

Figura 21 – Variação de ε^2 com relação a massa total do sistema e da distância entre os objetos massivos



fonte: Autoria própria

6.1 ANÃS BRANCAS

Quando consideramos anãs brancas precisamos levar em conta suas características, como o raio médio e a massa média na qual esses objetos se apresentam no universo. Suas massas variam entre $0.3M_{\odot}$ e $1.4M_{\odot}$ sendo mais comumente encontradas com $0.6M_{\odot}$, seus raios são da ordem de 7×10^6 metros, ou seja, 1% do raio do Sol (ROMERO et al., 2019). Levando essas características, nenhuma disposição desses objetos faz com que a análise dos mesmos seja conveniente serem tratados por um formalismo pós-newtoniano, pois não observamos uma diferença expressiva entre os potenciais newtoniano e pós-newtoniano do sistema binário.

As massas para a Tabela ?? são iguais, ou seja, $M = 0.6M_{\odot}$ é a massas total do sistema e equivale a $m_1 = 0.3M_{\odot}$ e $m_2 = 0.3M_{\odot}$.

Tabela 1 – Sistemas binários de Anãs Brancas

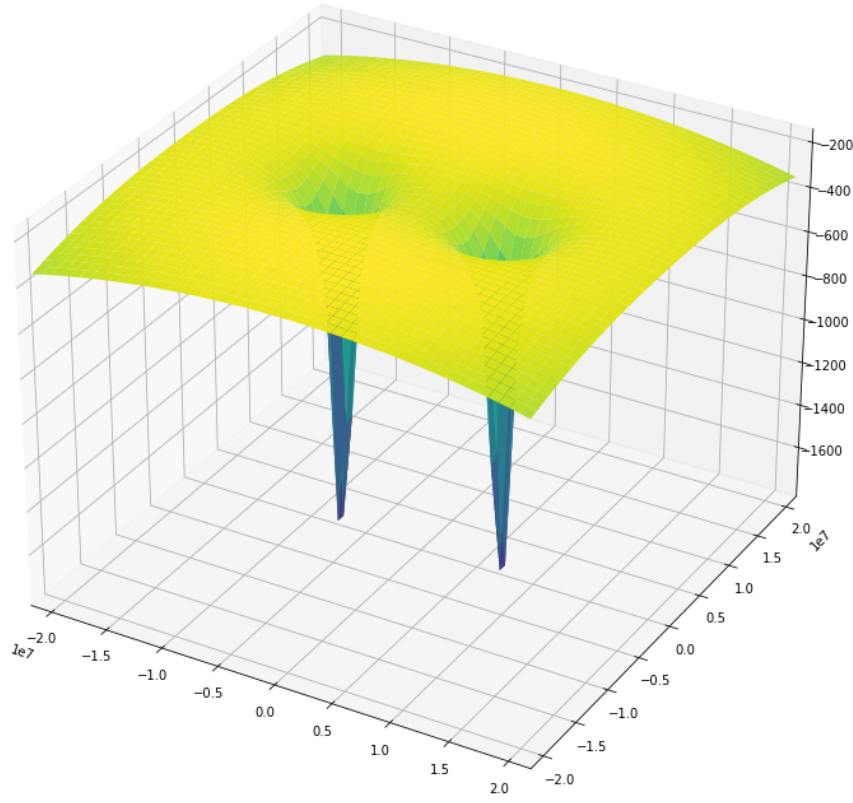
Massa Total [$M_{\odot}$]	Raio da Órbita [m]	ε^2
0.6	14×10^6	6.326×10^{-5}
1.4	18×10^6	11.481×10^{-5}
2.66	20×10^6	19.633×10^{-5}
2.66	14×10^6	28.047×10^{-5}

fonte: Autoria própria

A Figura 22 é um gráfico que nos mostra a variação dos potenciais (newtoniano e pós-newtoniano) através do plano XY , a Figura 23 é um recorte da figura anterior pelo plano $y = 0$. Para a Figura 23 estamos considerando duas anãs brancas com massas de $0.6M_{\odot}$, o que reflete as anãs brancas mais observadas no universo. Observamos que não há diferenças entre analisarmos esse objeto de um ponto de vista newtoniano e de 1PN, lembrando que a distância de $14 \times 10^6 m$ é praticamente a eminência de colisão entre elas, visto que estamos considerando Anãs Brancas com raios aproximadamente 1% do raio do Sol.

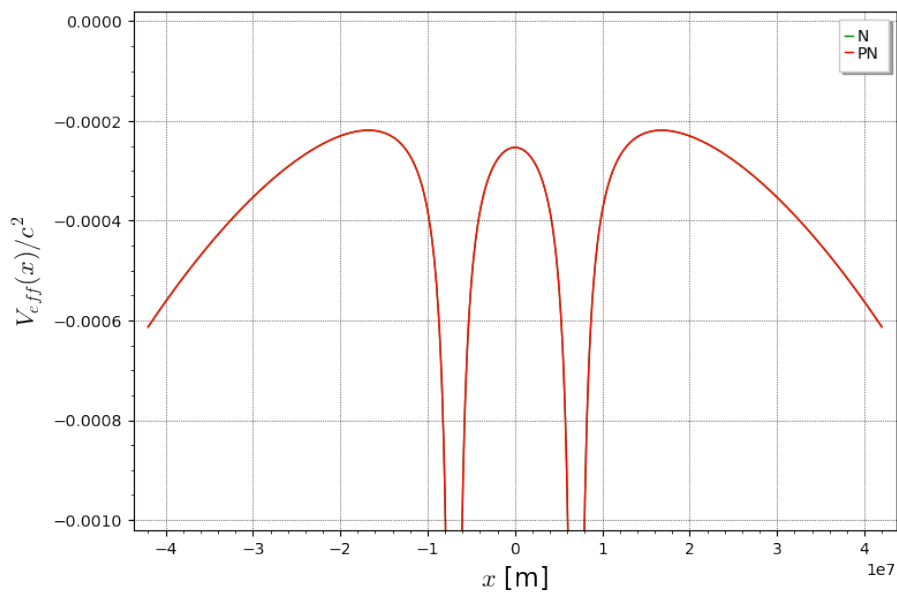
Para os casos de sistemas de anãs brancas a disposição da massa e da distância não admite que haja um $\varepsilon^2 \geq 0.1$, o qual é a limite escolhido aqui neste trabalho.

Figura 22 – Potenciais Efetivos (newtoniano e pós-newtoniano sobrepostos), Sistema Binário de Anãs Brancas $M=1.2M_{\odot}$, $\mu_1 = 0.6$, $\mu_2 = 0.6$, $a = 14 \times 10^6 \text{m}$



fonte: Autoria própria

Figura 23 – Recorte em $y = 0$ do Potenciais Efetivos (newtoniano em verde e pós-newtoniano em vermelho, sobrepostos), Sistema Binário de Anãs Brancas $M=1.2M_{\odot}$, $\mu_1 = 0.6$, $\mu_2 = 0.6$, $a = 14 \times 10^6 \text{m}$



fonte: Autoria própria

6.2 ESTRELAS DE NÊUTRONS

As estrelas de nêutrons possuem uma massa que podem variar de $1.4M_{\odot}$ a $2M_{\odot}$, sendo encontradas mais comumente no universo com $1.4M_{\odot}$ (MILLER et al., 2019). Com raios de aproximadamente $1 \times 10^4 m$ ($10km$), o que possibilita órbitas próximas para os objetos massivos no sistema binário. A método de estudo iremos admitir um sistema inspirado no sistema real conhecido como binária de Hulse-Taylor. Este sistema binário é composto por uma estrela de nêutrons e um pulsar que orbitam em torno de seu centro de massa. Possui massa total igual a $2.828M_{\odot}$ e semieixo maior igual a $1950100km$ (1.95^9m). Sendo um dos primeiros sistemas binário de pulsares descoberto (HULSE; TAYLOR, 1975).

No nosso caso iremos considerar as mesmas massas e o semieixo-maior dos objetos se tornará o raio da nossa órbita circular. A partir disto podemos construir a seguinte tabela:

Tabela 2 – Sistemas binários de Estrelas de Nêutrons

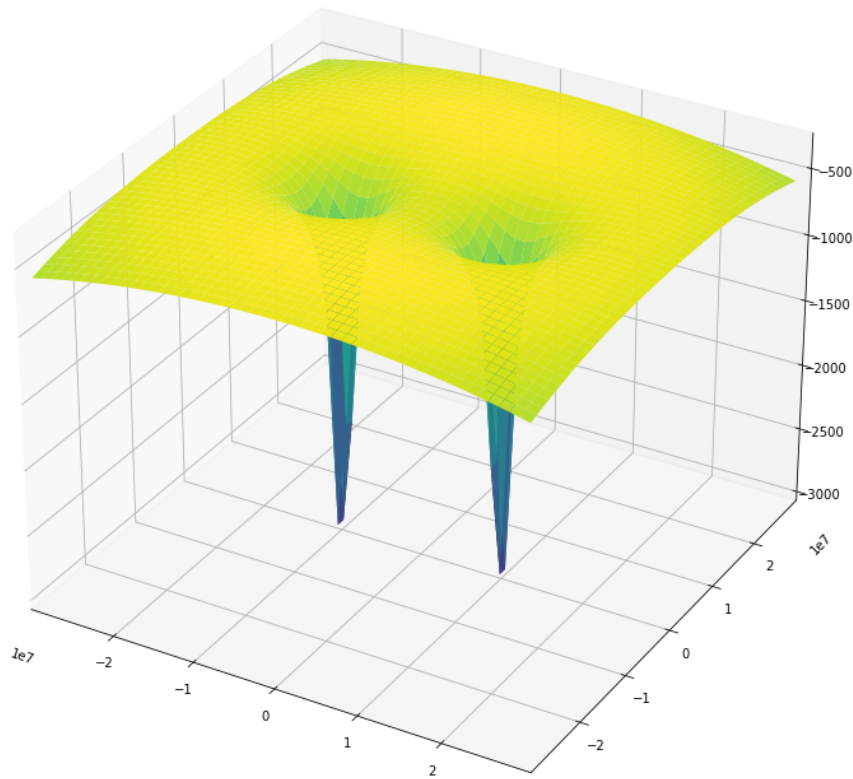
Massa Total [$M_{\odot}$]	Raio da Órbita [m]	ε^2
2.8	1.9501×10^9	2.1195×10^{-6}
2.8	1.9501×10^6	2.1195×10^{-3}
2.8	1.9501×10^5	2.1195×10^{-2}
2.8	0.3900×10^5	0.1059

fonte: Autoria própria

Observamos que se considerarmos as distâncias reais da binária de Hulse-Taylor não veremos uma diferença na consideração do problema visando uma abordagem newtoniana e uma abordagem pós-newtoniana que afete os pontos de Lagrange, o que pode ser verificado na Figura 24 e Figura 25, a diferença entre os regimes é imperceptível. A medida que aproximamos nossas estrelas de nêutrons podemos observar a necessidade de tratá-los a partir da 1PN, como é visto na Figura 26, pois há uma diferença de energia para qual os pontos de Lagrange são encontrados. Já na Figura 27 entramos no limite de validade do regime pós-newtoniano, considerado neste trabalho, onde ε^2 é por volta de 10%.

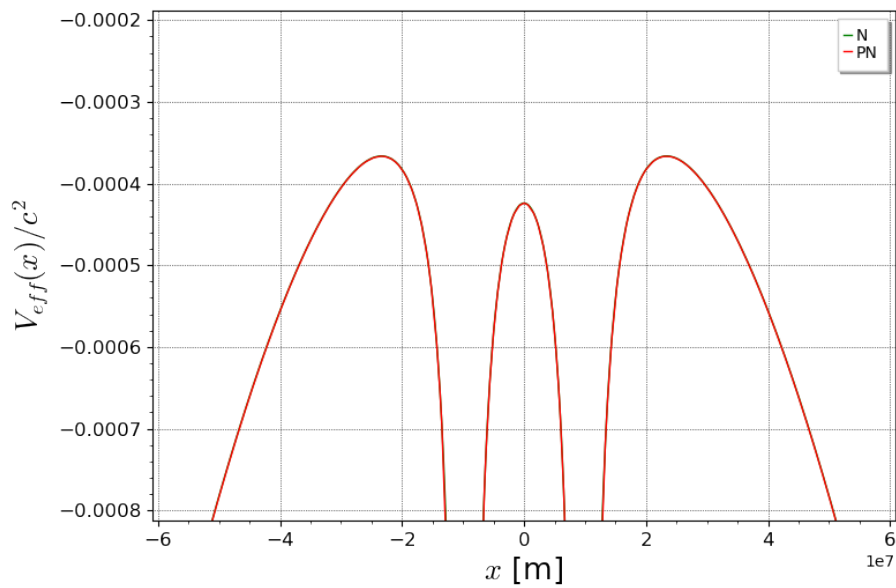
Observamos que deslocar os objetos para mais próximos afeta os pontos de Lagrange fazendo com que os mesmos se desloquem para potenciais maiores em relação ao tratamento pós-newtoniano.

Figura 24 – Potenciais Efetivos (newtoniano e pós-newtoniano sobrepostos), Sistema Binário de Estrelas de Nêutrons $M=2.8M_{\odot}$, $\mu_1 = 1.4$, $\mu_2 = 1.4$, $a = 1.9501 \times 10^7\text{m}$



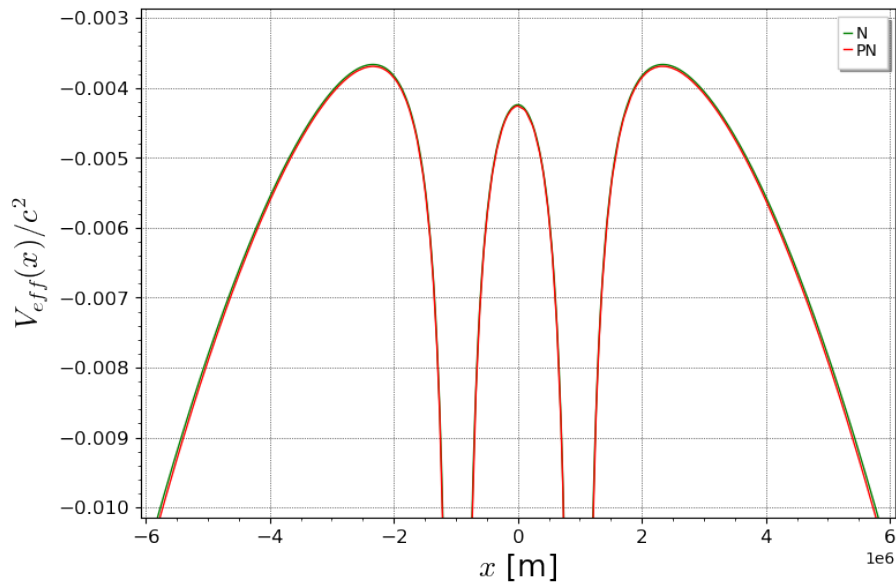
fonte: Autoria própria

Figura 25 – Potenciais Efetivos (newtoniano e pós-newtoniano sobrepostos), Sistema Binário de Estrelas de Nêutrons $M=2.8M_{\odot}$, $\mu_1 = 1.4$, $\mu_2 = 1.4$, $a = 1.9501 \times 10^7\text{m}$



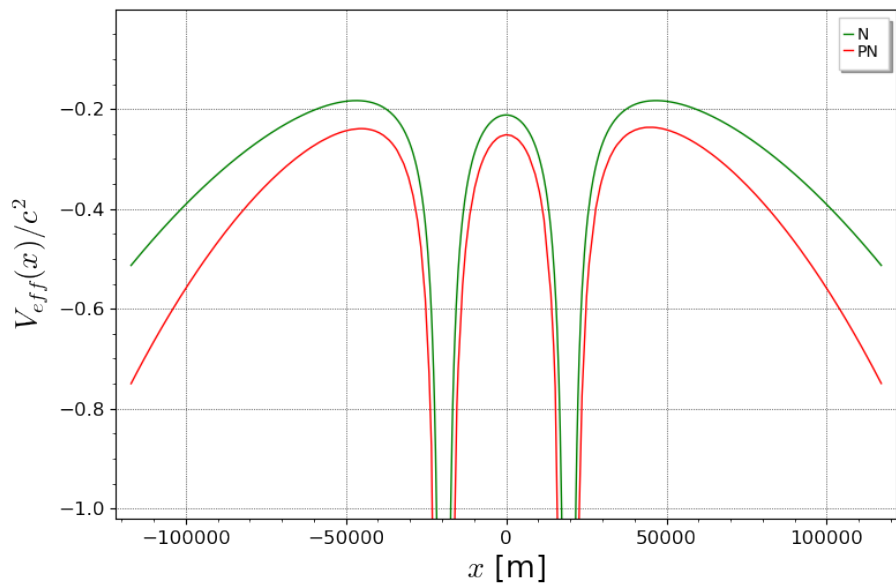
fonte: Autoria própria

Figura 26 – Potenciais Efetivos (newtoniano e pós-newtoniano), Sistema Binário de Estrelas de Nêutrons $M=2.8M_{\odot}$, $\mu_1 = 1.4$, $\mu_2 = 1.4$, $a = 1.9501 \times 10^6 \text{m}$



fonte: Autoria própria

Figura 27 – Potenciais Efetivos (newtoniano e pós-newtoniano), Sistema Binário de Estrelas de Nêutrons $M=2.8M_{\odot}$, $\mu_1 = 1.4$, $\mu_2 = 1.4$, $a = 0.39002 \times 10^5 \text{m}$



fonte: Autoria própria

6.3 BURACOS NEGROS

Nosso último caso de interesse neste capítulo é tratar os vários sistemas envolvendo BHs. Aqui consideraremos várias massas e distâncias. Como padrão tomaremos a distância considerada nas análises das estrelas de nêutrons, que por sua vez é uma equivalente ao semieixo-maior da binária de Hulse-Taylor (HULSE; TAYLOR, 1975). De forma análoga aos casos analisados anteriormente, verificaremos quando é pertinente tratar o sistema através do regime pós-newtoniano.

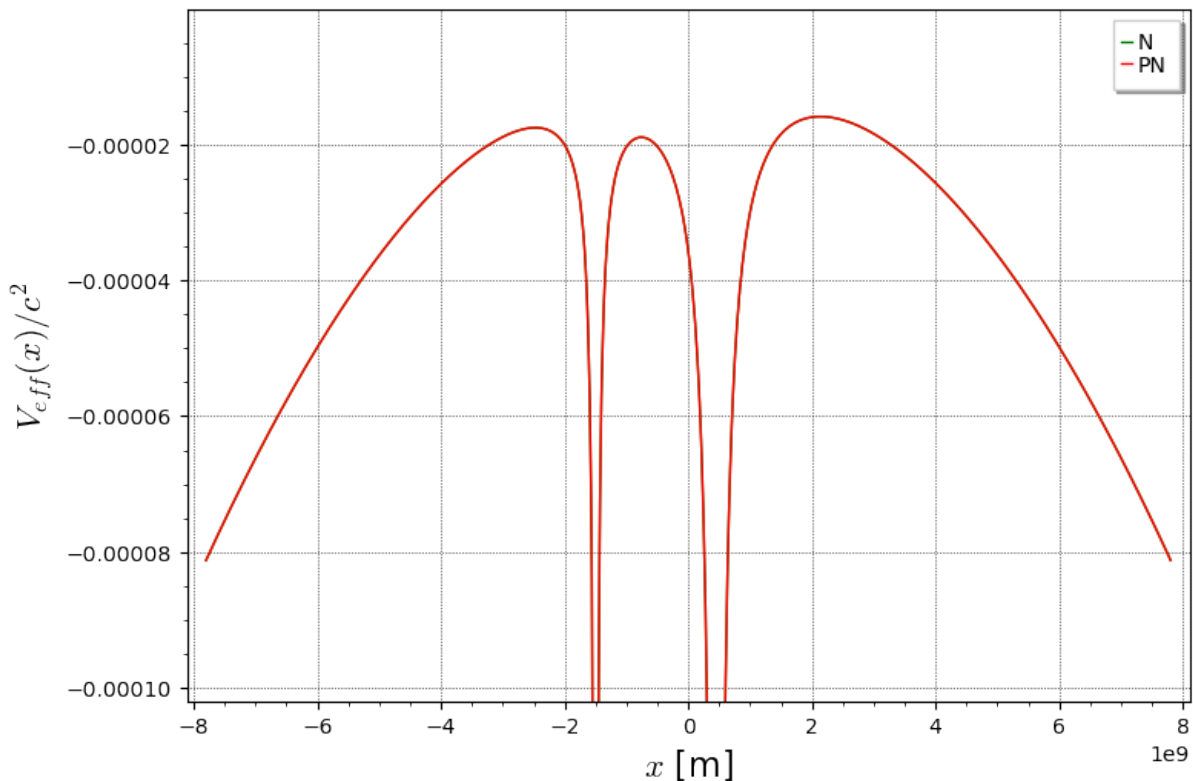
Tabela 3 – Sistemas binários de Buracos Negros

Massa Total [$M_{\odot}$]	Raio da Órbita [m]	ε^2
13 (3+10)	1.9501×10^9	9.84073×10^{-6}
13 (3+10)	1.9501×10^8	9.84073×10^{-5}
13 (3+10)	1.9501×10^6	$9,84073 \times 10^{-3}$
13 (3+10)	1.9501×10^5	$9,84073 \times 10^{-2}$

fonte: Autoria própria

As figuras abaixo nos mostrarão as diferenças entre os potenciais newtonianos e pós-newtonianos para dois dos sistemas tabelados.

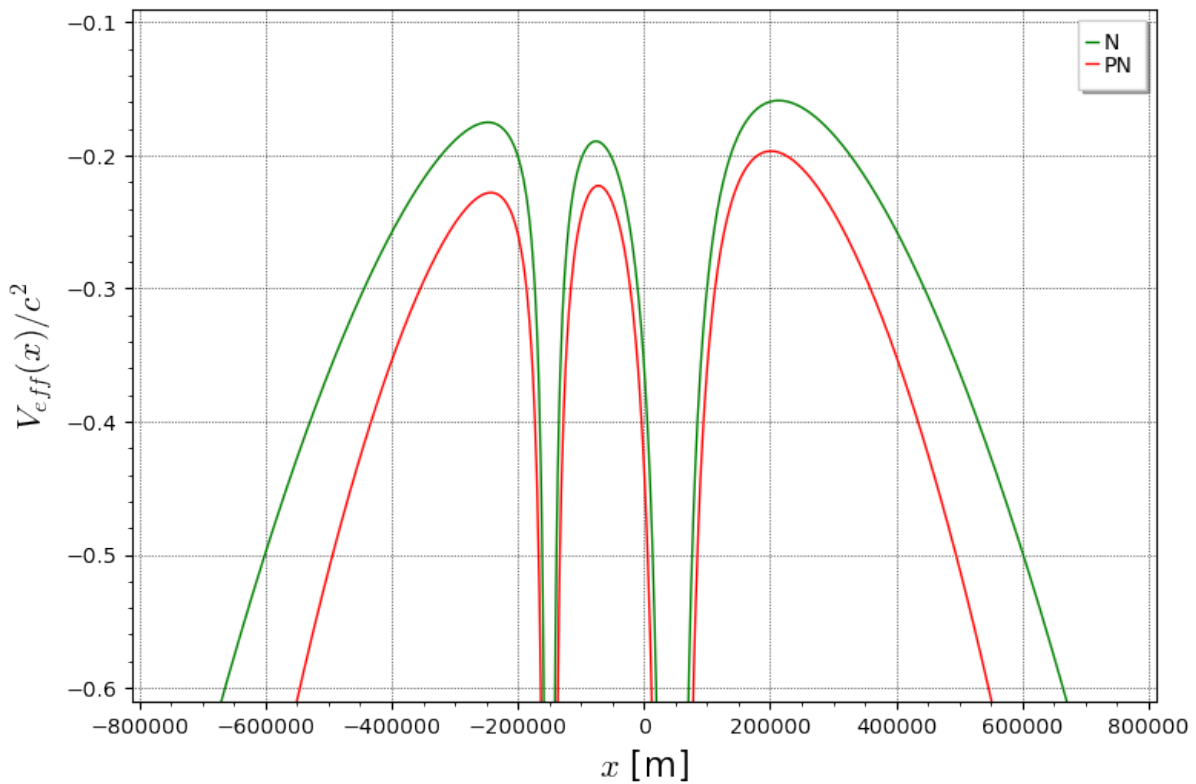
Figura 28 – Potenciais Efetivos (newtoniano e pós-newtoniano sobrepostos), Sistema Binário de Buracos Negros $M=13M_{\odot}$, $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 10$, $a = 1.9501 \times 10^9$ m



fonte: Autoria própria

Vemos nas Figura 28 e Figura 29 a mudança do ponto de Lagrange no eixo x em relação ao valor do potencial efetivo.

Figura 29 – Potenciais Efetivos (newtoniano e pós-newtoniano), Sistema Binário de Buracos Negros $M=13M_{\odot}$, $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 10$, $a = 1.9501 \times 10^5 \text{m}$



fonte: Autoria própria

Outra forma de atingirmos o limite imposto nesse trabalho, para o tratamento do sistema com uma 1PN, é mudarmos as massas dos objetos. Considerando massas iguais e uma distância fixas obteremos a seguinte tabela:

Tabela 4 – Sistemas binários de Buracos Negros

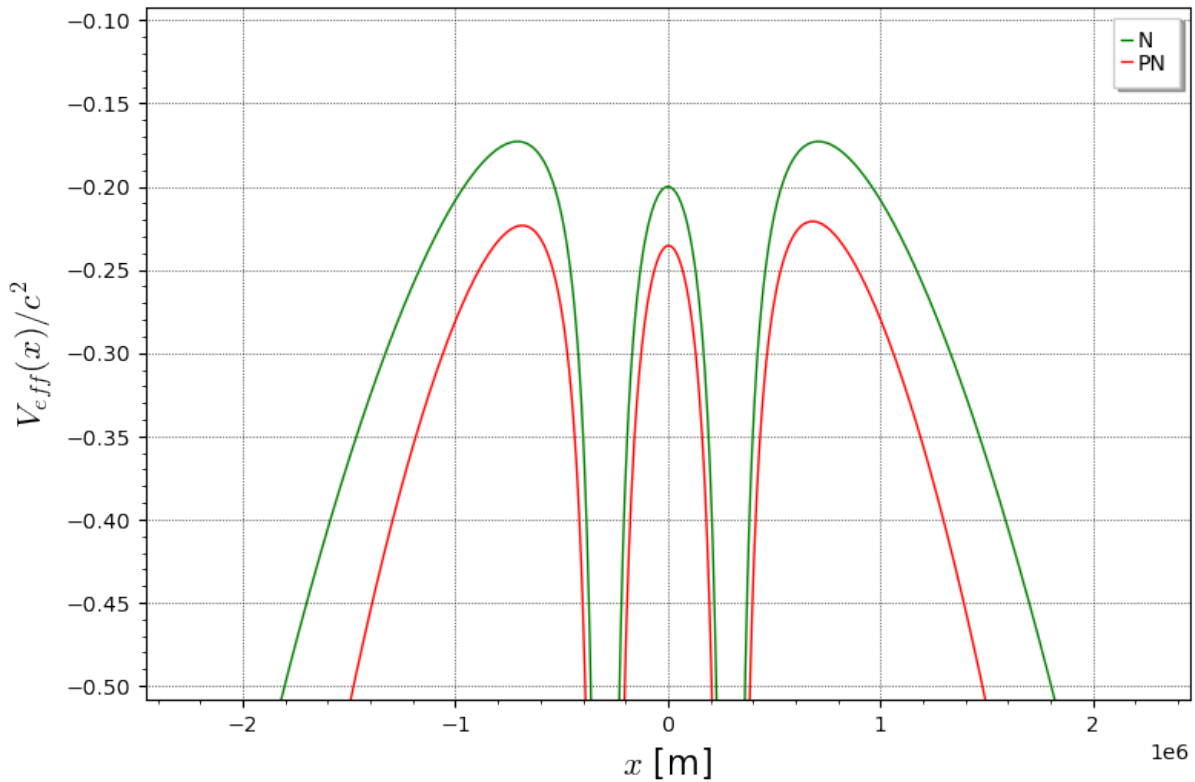
Massa Total [$M_{\odot}$]	Raio da Órbita [m]	ε^2
1×10^4	1.9501×10^9	0.00756
5×10^4	1.9501×10^9	0.03784
1×10^5	1.9501×10^9	0.07569
1.3×10^5	1.9501×10^9	0.09840
40(20 + 20)	$1.8454 \times 10^6 \sim 31r_s$	0.03199
40(20 + 20)	$0.9227 \times 10^6 \sim 15r_s$	0.06399
40(20 + 20)	$0.59052 \times 10^6 \sim 10r_s$	0.09999

fonte: Autoria própria

Para uma distância fixa (1.9501×10^9) qualquer combinação de massa supere $1.3 \times 10^5 M_{\odot}$ está fora do nosso regime. Buracos negros com tais massas são considerados supermassivos.

Por fim, a Figura 30 nos mostra a disposição dos pontos de Lagrange com BHs separados por uma distância da ordem de $10R_S$ raios de Schwarzschild. Verificamos então a possibilidade de análise de uma grande variedade de casos a partir da primeira aproximação newtoniana (1PN). Tal aproximação se mostra válida para casos onde a distância entre nossos objetos não seja menor que $10R_S$, e nossa massa total não seja superior a $1.3 \times 10^5 M_{\odot}$.

Figura 30 – Potenciais Efetivos (newtoniano e pós-newtoniano), Sistema Binário de Buracos Negros $M=40M_{\odot}$, $\mu_1 = 20$, $\mu_2 = 20$, $a = 0.59052 \times 10^6 \text{m} \sim 10 r_s$



fonte: Autoria própria

6.4 CURVAS DE VELOCIDADE ZERO

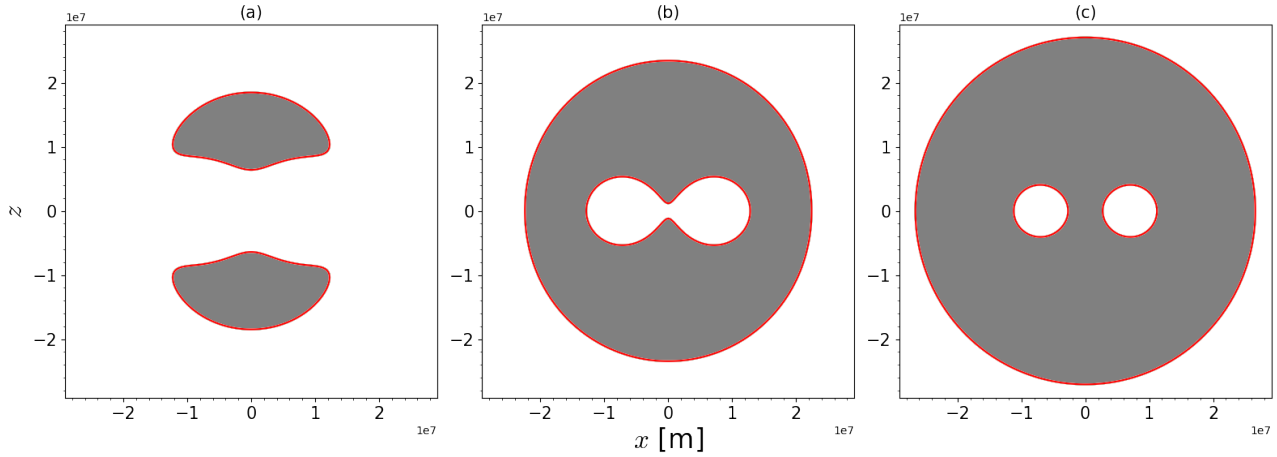
A partir dos potenciais efetivos podemos construir as curvas de velocidade zero. No problema restrito de três corpos os momentos e energias não são conservados, mas possuímos uma quantidade que é a constante de Jacobi, como descrito no capítulo 4. Nós não podemos ter uma solução exata para o movimento orbital, porém podemos obter regiões no espaço onde a partícula não pode estar. Na Figura 31 as regiões sombreadas são aquelas onde as partículas podem estar localizadas, ou seja, é permitido sua localização e as regiões claras são as excluídas. Dessa forma podemos comparar a diferença das regiões a partir das diferentes abordagens, newtoniana ou pós-newtoniana, isso se deve inteiramente a diferença no potencial efetivo, como visto anteriormente.

Como o potencial efetivo newtoniano e pós-newtoniano se sobrepõe, não há diferenças entre as regiões permitidas dentro desse sistema. Na Figura 31 podemos observar as curvas de velocidade zero para três constantes de Jacobi, são elas respectivamente da esquerda para a direita 20×10^{-4} , 25×10^{-4} e 30×10^{-4} .

Tomando o sistema binário de BHs, descritos pela Figura 30 podemos observar uma diferença entre as curvas de velocidade zero entre suas diferentes abordagens. Na Figura 32 podemos observar a limitação da área permitida pela abordagem newtoniana em verde, e a pós-newtoniana em vermelho. As constantes de Jacobi na Figura 32 possuem valores, respectivamente da direita para a esquerda, 0.20, 0.22 e 0.30.

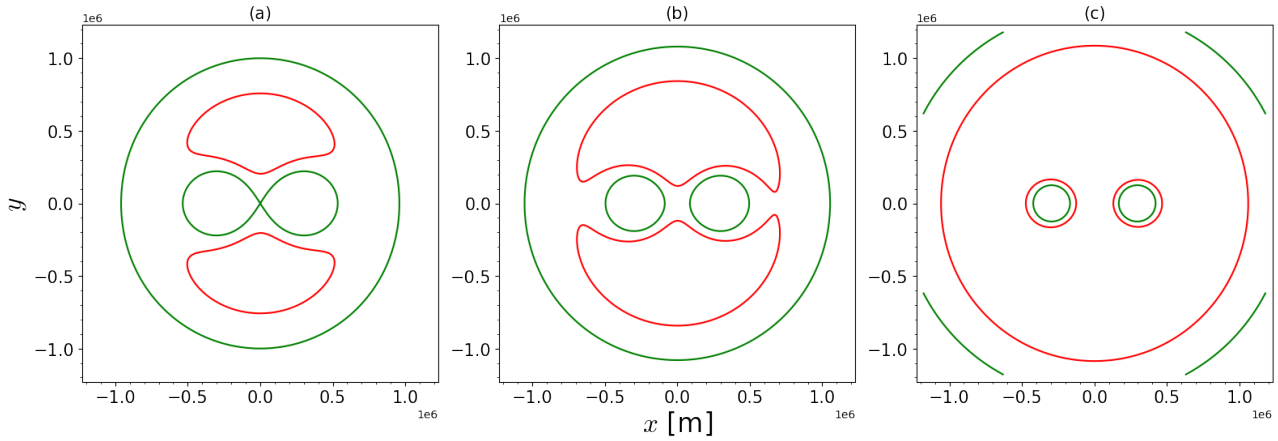
Separando as curvas na primeira imagem na Figura 32 obtemos a Figura 33, nesta fica evidente

Figura 31 – Curvas de velocidade zero. Sistema Binário de Anãs Brancas $M=1,2M_{\odot}$, $\mu_1 = 0.6$, $\mu_2 = 0.6$, $a = 14 \times 10^6 \text{m}$. (a) $C_j = 20 \times 10^{-4}$, (b) $C_j = 25 \times 10^{-4}$ e (c) $C_j = 30 \times 10^{-4}$



fonte: Autoria própria

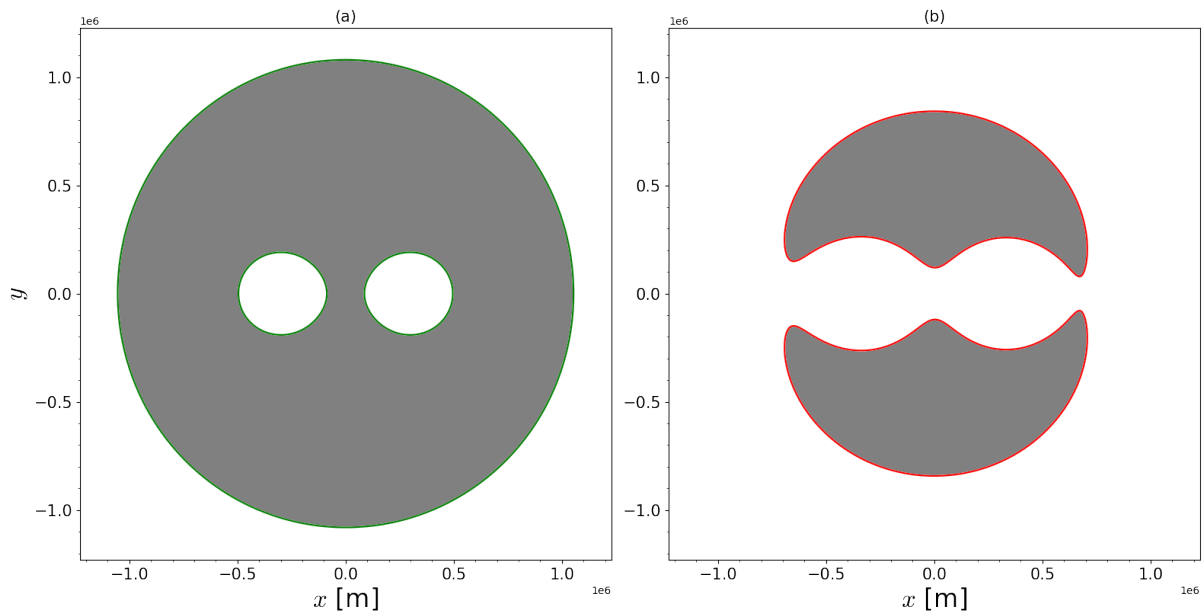
Figura 32 – Curvas de velocidade zero. Sistema Binário de Buracos Negros $M=40M_{\odot}$, $\mu_1 = 20$, $\mu_2 = 20$, $a = 0.59052 \times 10^6 \text{m} \sim 10 r_s$. (a) $C_j = 0.20$, (b) $C_j = 0.22$ e (c) $C_j = 0.30$



fonte: Autoria própria

a diferença entre as possíveis regiões permitidas para a partícula. No primeiro caso a partícula pode somente orbitar um dos BHs ou orbitar o sistema binário como um todo. Já no segundo caso é permitido que haja a passagem de uma órbita de um dos BHs para o outro, ou mesmo a dispersão da partícula para fora do sistema, considerando uma mesma constante de Jacobi para o sistema.

Figura 33 – Curvas de velocidade zero. Sistema Binário de Buracos Negros $M=40M_{\odot}$, $\mu_1 = 20$, $\mu_2 = 20$, $a = 0.59052 \times 10^6 \text{m} \sim 10 r_s$ e $C_j = 0.22$. (a) Limite newtoniano, (b) Aproximação pós-newtoniana



fonte: Autoria própria

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS

Nosso objetivo principal com este trabalho foram dois, conseguir descrever o problema restrito de três corpos para o espaço-tempo MP e para uma 1PN. por meio de simulações numéricas utilizando o Sage Math verificar alguns dos resultados obtidos.

Como primeiro passo tínhamos o intuito de reproduzir os resultados de (ASSUMPÇÃO et al., 2018), conseguindo descrever o problema em questão através do espaço-tempo MP, para podermos criar um plano de ação através da análise algébrica e numérica do problema. Dessa forma conseguimos construir uma base tanto teórica quanto prática que nos auxiliaria para podermos fazer uma comparação entre os resultados encontrados para a o espaço-tempo de MP e para a 1PN posteriormente.

Considerando o estudo do espaço-tempo de MP conseguimos obter os resultados apresentados no capítulo 4. As órbitas descritas na literatura foram observadas. Para o caso de análise que fixa o plano $\phi = 0$ as órbitas podem somente ser encontradas através de análises numéricas, e se dispõe em três formatos, órbitas que envolvem apenas um dos BHs, órbitas que envolvem os dois BHs e órbitas com formato de "oito" que envolvem ambos os BHs. Para o caso de análise que fixa o plano $z = 0$ órbitas circulares podem ser encontradas a depender da massa total do nosso sistema binário. Por fim para ainda nesta abordagem observamos a estabilidade das órbitas a partir de simulações numéricas.

Em sequência, era nosso intuito descrever o mesmo problema considerando 1PN da relatividade geral. Desenvolvemos uma base teórica a partir de referências para podermos estender o problema clássico para uma análise relativística.

Considerando o estudo do limite pós-newtoniano de alguns sistemas binários hipotéticos, encontramos um alcance da validade do regime 1PN. Verificamos ainda a influência da gravidade na determinação das regiões onde as órbitas poderiam ser encontradas. Estas regiões são obtidas da análise das curvas de velocidade zero que tem como base os potenciais efetivos dos sistemas binários, encontrados no penúltimo capítulo.

Com essa dissertação conseguimos verificar alguns resultados da literatura e começar uma base para a comparação entre as abordagens. No entanto, elas se distinguem nas considerações do problema. Ao considerarmos o sistema binário estático, perdemos as forças não inerciais que estão presentes no sistema definido pela 1PN. Isto é um empecilho se tentar encontrar uma equivalência entre as abordagens estudadas.

Como perspectivas podemos pensar em estender todas nossas análises para o caso de sistemas triplos, os quais estão tendo mais interesse da comunidade atualmente. Estudar um limite de onde o espaço-tempo de MP recaia na 1PN e verificar por meio de simulações numéricas se é possível definir órbitas nas regiões descritas pelas curvas de velocidade zero.

REFERÊNCIAS

- ABBOTT, B. P. et al. Multi-messenger observations of a binary neutron star merger. **Astrophysical Journal Letters**, v. 848, n. 2, p. 59, 2017.
- ASSUMPÇÃO, T. et al. Black hole binaries: ergoregions, photon surfaces, wave scattering, and quasinormal modes. **Physical Review**, v. 98, n. 6, p. 064036, 2018.
- CARLIP, S. **General Relativity**. Oxford, Oxfordshire - Reino Unido: Oxford University Press, 2019.
- CELLETTI, A.; GIORGILLI, A. On the stability of the lagrangian points in the spatial restricted problem of three bodies. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 50, n. 1, p. 31–58, 1990.
- CHANDRASEKHAR, S. The two-centre problem in general relativity: the scattering of radiation by two extreme reissner-nordstrom black-hole. **The Royal Society**, v. 421, n. 1861, p. 227–258, 1988.
- CONTOPOULOS, G. **In Memoriam D. Eginitis**, ed. by D. Kotsakis. 1976.
- CUNHA, P. V. P.; HERDEIRO, C. A. R.; RODRIGUEZ, M. J. Shadows of exact binary black holes. **Physical Review D**, v. 98, n. 4, p. 044053, 2018.
- D'INVERNO, R. **Einstein's Relativity**. Oxford, Oxfordshire - Reino Unido: Oxford University Press, 1992.
- DUBEIBE, F. L.; LORA-CLAVIJO, F. D.; GONZÁLEZ, G. A. On the conservation of the jacobi integral in the post-newtonian circular restricted three-body problem. **Astrophysics and Space Science**, v. 362, n. 5, p. 12, 2017.
- FORD, L. H.; PARKER, L. Quantized gravitational wave perturbations in robertson-walker universes. **Physical Review D**, v. 16, n. 6, p. 1600–1608, 1977.
- FRNKA, R. **The Circular Restricted three-body problem**. 2010. Disponível em: <https://jan.ucc.nau.edu/~ns46/student/2010/Frnka_2010.pdf>.
- HARTLE, J. B.; HAWKING, S. W. Solutions of the einstein-maxwell equations with many black holes. **Communications in Mathematical Physics**, v. 26, n. 15, p. 87–101, 1972.
- HUANG, L.; MEI, L.; HUANG, S. Non-truncated strategy to exactly integrate the post-newtonian lagrangian circular restricted three-body problem. **The European Physical Journal C**, v. 78, n. 10, p. 17, 2018.
- HULSE, R.; TAYLOR, J. H. Discovery of a pulsar in a binary system. **Astrophysical Journal**, v. 195, p. L51–L53, 1975.
- LANDAU, L. D. **The Classical Theory of Fields**. Oxford, Oxfordshire - Reino Unido: Pergamon Press, 2000.
- LEMOES, N. **Mecânica Analítica**. São Paulo, SP - Brasil: Livraria da física, 2007.
- MAINDL, T. I.; DVORAK, R. On the dynamics of the relativistic restricted three-body problem. **Astronomy and Astrophysics**, v. 290, p. 335–339, 1994.
- MAJUMDAR, S. D. A class of exact solutions of einstein's field equations. **Physical Review Journals Archive**, v. 72, n. 9, p. 390–398, 1947.

- MILLER, M. C. et al. Psr j0030+0451 mass and radius from nicer data and implications for the properties of neutron star matter. **The Astrophysical Journal Letters**, v. 887, n. 1, p. 28, 2019.
- MURRAY, C. D. **Solar System Dynamics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1999.
- MUSIELAK, Z. E.; QUARLES, B. The three-body problem. **Reports on Progress in Physics**, v. 77, n. 6, p. 065901, 2014.
- NAKASHI, K.; IGATA, T. Effect of a second compact object on stable circular orbits. **Phys. Rev. D**, v. 100, n. 10, p. 104006, 2019.
- NORDSTRÖM, G. On the energy of the gravitational field in einstein's theory. **Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen Proceedings**, v. 20, n. 2, p. 1238–1245, 1918.
- NOZARI, K.; AKHSHABI, S.; SADEGHNEZHAD, N. Stability of circular orbits in noncommutative schwarzschild spacetime. **Acta Phys. Polon. B**, v. 39, n. 11, p. 2867–2877, 2008.
- PAPAPETROU, A. A static solution of the equations of the gravitational field for an arbitrary charge-distribution. **Royal Irish Academy**, v. 51, p. 191–204, 1947.
- PAPASPIROU, P.; MOUSSAS, X. A brief tour into the history of gravity: from Emocritus to Einstein. **American Journal of Space Science**, v. 1, n. 1, p. 35–45, 2013.
- REISSNER, H. Über die eigengravitation des elektrischen feldes nach einsteinschen theorie. **Annalen der Physique**, v. 355, n. 9, p. 106–1205, 1916.
- ROMERO, A. D. et al. The white dwarf mass–radius relation and its dependence on the hydrogen envelope. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 484, n. 2, p. 2711–2724, 2019.
- SYMOM, K. R. **Mecânica**. Rio de Janeiro RJ Brasil: Editora Campus, 1996.
- TAKEDA, C. S. **Geodesic motion in the spacetime of two (un)equal mass black holes**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo Instituto de física de São Carlos, São Carlos, SP - Brasil, 2020.
- The Sage Developers. **SageMath, the Sage Mathematics Software System**. [S.l.], 2022. DOI 10.5281/zenodo.6259615. Disponível em: <<https://www.sagemath.org>>.
- WIDNALL, S.; DEYST, J.; GREITZER, E. **Exploring the Neighborhood: the Restricted Three-Body Problem**. 2008. Disponível em: <https://ocw.mit.edu/courses/16-07-dynamics-fall-2009/resources/mit16_07f09_lec18/>.
- WUNSCH, A. et al. Circular orbits in the extreme Reissner-Nordstrøm dihole metric. **Phys. Rev. D**, v. 87, n. 2, p. 024007, 2013.
- YAMADA, K. **Post-Newtonian Equilibrium Solutions to the Three-Body Problem in General Relativity**. Tese (Doutorado) — Hirosaki University, Hirosaki, Aomori, Japan, 2014.